Aplicações de Métodos Inversos em
Autovalores à Detecção de Danos

Raúl Jiménez Alarcón

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTER O GRAU
DE
DOUTOR EM MATEMÁTICA APLICADA

Área de concentração: Análise Numérica

Orientador: Dr. Nelson Mugayar Kuhl

Co-Orientador: Dr. Luis Carlos de Castro Santos

Durante a realização deste trabalho, o autor recebeu suporte financeiro da CAPES, programa
PEC-PG.

— São Paulo, Junho de 2002 —

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida
e defendida por Raúl Jiménez Alarcón
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, Junho de 2002.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Nelson Mugayar Kuhl (IME-USP)
- Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo (IME-USP)
- Prof. Dr. Saulo Rabello Maciel de Barros (IME-USP)
- Prof. Dr. José M. Balthazar (ICGE-UNESP)
- Prof. Dr. Reyolando M. Brasil (EP-USP)

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus pela companhia nos tempos de solidão.... Ao Prof. Dr. Nelson Mugayar Kuhl pelo apoio e infinita paciência nos anos que estive no Instituto. De igual forma ao Prof. Dr. Luis Carlos de Castro Santos pela confiança e apoio. Agradeço também ao Prof. Dr. Saulo Rabello Maciel de Barros pelos conselhos e força que deu para mim nos momentos difíceis do meu doutoramento e em geral a todos os professores do IME que me formaram.

Ao pessoal da Biblioteca do IME, obrigado pelo serviço e amizade, ao pessoal da sala do café, obrigado pelo carinho e os “chorinhos” que deram para mim. Ao pessoal da CPG, Pinho, ao palmeirense “Feijao” e Francisca pela amizade, apoio e paciência nestes anos no IME. Ao pessoal do bar do Instituto, Sandro e seus Pais pelo carinho e amizade. Ao pessoal da secretaria do MAP, Raquel, Palmira, Rose Mary e Maria Lúcia pela amizade e apoio.

A todos meus amigos colegas do IME, é difícil detalhar a todos, pois na verdade deixo um monte de amigos que estiveram sempre me apoiando, e compartilhando grandes momentos: Alice, Leandro, Sandra, Olga, Rudimar e tantos outros..... Aos colegas da torcida do Tricolor do Morumbi...Claus, Jair, Fávio e outros. A mis amigos de habla hispana, con quienes tuve lazos fuertes de amistad: Claudia, Juan Carlos, Marcel, Viviana, Susana, Carolina, Pato, Jairo, Sandra, Paola, Hernán, José Domingo, Leonardo, Walter Trepode, Nelson Chávez, “el cazador” Gustavo Gorosso, “ el pájaro” Gustavo Guerberooff.... a mis amigos del grupo “Sol en la Nuca” Miguel, Jesús e Washington; a mis amigos peruanos Santos, Walter, Julca, Lobo, Coti e tantos outros..... Não posso deixar de agradecer a meus compatriotas chilenos que tanto me acompanharam : Gonzalo, Juanita, Marco Antonio, Roberto, Verito, Mariano, Filidor, Carlos, Bernardo e Violeta, Luis Cortés, Cristian..... Agradeço também a meu grande amigo Nelson Vidaurre pelo apoio e amizade. E não posso esquecer meu grande amigo Juan Egana e esposa pelo apoio, amizade, compreensão, e força que me deram até o final deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho são estudados métodos inversos em autovalores e sua aplicação à detecção de danos estruturais. O modelo usado é um protótipo de barra homogênea simples com vibração longitudinal. Em um primeiro estudo, o conceito de dano está relacionado com perda de rigidez localizada. Para detetar o dano precisa-se conhecer dois estados da barra, um deles chamado *estado não danificado* e outro que representa a barra depois dela entrar em serviço. Para este último estado, a barra é reconstruída a partir de suas frequências de vibração e um processo de busca multi-dimensional permite detetar diminuição de rigidez. Num segundo estudo, o conceito de dano é definido em termos de área o qual permite além de localizar, quantificar o dano. Um problema inverso de autovalor é resolvido de maneira a reconstruir as áreas da barra a partir de uma frequência e um modo de vibração. A reconstrução é sensível a ruídos nos dados, mas usando informação adicional esta sensibilidade pode ser diminuída. Do ponto de vista prático, o uso de informação adicional pode ser muito restritivo, então uma técnica de filtragem permite detetar os danos a partir de uma frequência e um modo de vibração. Uma outra abordagem do problema inverso de autovalor permite reconstruir a barra em termos das áreas a partir de suas frequências de vibração e das frequências da barra com outras condições de contorno. As estruturas das matrizes envolvidas permite diminuir à metade a quantidade de informação requerida para a reconstrução das áreas da barra, e a partir de uma estratégia de busca multi-dimensional detetar os possíveis danos.

ABSTRACT

In this work inverse eigenvalue methods and their applications to structural damage detection are studied. The model used is a prototype of a simple homogeneous rod with longitudinal vibration. In a first study, the damage definition is related with loss of localized stiffness. In order to detect damage two states of the rod are needed; the first one, called *undamaged state*, and the other one which represents the rod after it is on service. For this last state, the rod is reconstructed from its vibration frequencies and using a multidimensional search process we can detect loss of stiffness. In a second study, the damage is defined in term of areas, which permits to localize and quantify the damage. An inverse eigenvalue problem is solved so that the areas of the rod are reconstructed from one frequency and the corresponding eigenmode. The reconstruction is sensitive to noisy data, but by using additional information, this sensitivity can be decreased. From a practical point of view, using additional information can be restrictive, so a filtering technique is applied to damage detection using one frequency and its eigenmode. Another strategy for the inverse eigenvalue problem allows us to reconstruct the areas of the rod from its natural frequencies and the natural frequencies of the rod with another boundary condition. The matrices involved have a special structure which reduces to the half the information required for reconstructing the areas of the rod, and a multidimensional search strategy is applied to detect damages.

A minha família Rosita, Javier e Matías.....

Sumário

Lista de Símbolos	vi
Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xi
1 Introdução	1
2 Detecção de Dano em Sistemas Massa-Mola	9
2.1 Formulação do Problema DDSMM	9
2.2 Reconstrução de um Sistema Massa-Mola	10
2.3 Análise de Sensibilidade de Sistemas Massa-Mola	15
2.4 Estratégia para a solução do Problema DDSMM	18
2.5 Exemplos de detecção de danos	19
3 Um Modelo de Elementos Finitos para a Barra	25
3.1 Um modelo de Elementos Finitos para a Barra	26
3.2 Exemplos de Reconstrução	29
3.3 O modelo fisicamente realizável	31
3.4 Erros na medição dos dados	31
3.5 Aplicação à detecção de Danos	38
3.6 Uso de Filtro na reconstrução	41
3.6.1 Exemplos do uso de Filtro	44
4 Estratégia Multidimensional para o Modelo de Elementos Finitos	49
4.1 Análise Matricial do Modelo	50
4.2 Reconstrução das Áreas	57

4.3	Análise de Sensibilidade de uma matriz de Jacobi	57
4.4	Análise de Sensibilidade das Áreas	58
4.5	Exatidão das derivadas primeiras	59
4.6	Cálculo das derivadas segundas e Método de Newton	60
4.7	Estratégia de busca multidimensional para às áreas	63
4.8	N-ésima área variável	64
5	Um método de Otimização para a Detecção de Danos	68
5.1	Formulação do problema DDMEF	69
5.2	Resolução do problema DDMEF	70
6	Comparação das Técnicas Desenvolvidas	75
6.1	Nomenclatura para as técnicas desenvolvidas	75
6.2	Detecção de único dano	76
6.3	Detecção de varios danos	86
6.4	Conclusões e Propostas Futuras	89
A	Algoritmo tipo região-confiável para minimização com restrições de canalização	92
	Referências Bibliográficas	95

Lista de Símbolos

- K : matriz Rigidez
- $\tilde{K}$: sub-matriz principal de K .
- K^* : matriz rigidez associada ao sistema danificado
- K^e : matriz rigidez por elemento finito
- k_i : valor da rigidez de uma mola
- k_i^* : valor procurado das constantes de rigidez
- M : matriz massa
- $\tilde{M}$: sub-matriz principal de M .
- M^* : matriz massa associada ao sistema danificado
- M^e : matriz massa por elemento
- m_i : valor da massa
- m_i^* : valor procurado das massas
- m_T : massa total de um sistema vibrante
- L : comprimento de uma barra
- E : módulo de Young
- ρ : densidade de uma barra
- θ : parâmetro de controle
- δ_i : números aleatórios
- $A(x)$: área seccional da barra
- A_i : valor discreto da área
- $\delta_k A_i$: derivada da i -ésima área em relação ao μ_k
- $\delta_l \delta_k A(\mu)$: derivadas segundas das áreas

- h : espaçamento da discretização
- J : matriz de Jacobi
- $\tilde{J}$: sub-matriz principal da matriz J
- $\delta_k J(\mu)$: derivada da matriz J em relação ao μ_k
- $\delta_l \delta_k J(\mu)$: derivada segunda da matriz J
- $\delta_k b_j(\mu)$: derivada da co-diagonal da matriz J em relação ao μ_k
- $\delta_k \delta_l b_j(\mu)$: derivada segunda da co-diagonal da matriz J
- U^e : aproximação por funções lineares para os deslocamentos de uma barra
- u : deslocamento longitudinal de uma barra fixa-livre
- $\tilde{u}$: deslocamento longitudinal de uma barra fixa-fixa
- u^{**} : modo de vibração com ruído
- v : transformação levando o problema generalizado de autovalor para um problema simples de autovalor.
- $\tilde{v}$: transformação levando o problema generalizado do sistema $(\tilde{K}, \tilde{M})$ de autovalor para um problema simples de autovalor.
- λ_i : frequências naturais de uma barra
- λ_i^* : frequências naturais de uma barra danificada
- μ_i : espectro intercalado
- $g_j(\mu)$: função que define a j -ésima área em termos do espectro μ
- $\delta_k g_j(\mu) \equiv \frac{\partial g_j(\mu)}{\partial \mu_k}$: derivada da função $g_j(\mu)$ em relação ao μ_k
- $\frac{\Delta g_j(\mu)}{\Delta \mu_k}$: diferenças centradas para $\delta_k g_j(\mu) \equiv \frac{\partial g_j(\mu)}{\partial \mu_k}$
- $\delta_k A_{ex}$: derivada das áreas calculadas pelo algoritmo 4.3
- $\delta_k A_{df}$: derivada das áreas calculadas pelo esquema de diferenças finitas
- $\| \cdot \|_\infty$: norma infinito de vetores
- $F(\mu)$: função Objetivo
- $\nabla F(\mu)$: vetor gradiente de F
- $\mathcal{H}(F(\mu))$: matriz Hessiana de F
- $\mathbf{bl}$: bloco de áreas formada pelas áreas $A_p, A_{p+1}, A_{p+2}, \dots, A_q$

- R^N : Espaço euclidiano de dimensão N
- Γ : matriz de transformação
- *MEFOT*: Técnica que usa o método de **otimização** baseado na reconstrução de áreas usando a metade do espectro
- *MEFSR*: Técnica que usa uma frequência e um modo de vibração. O modo de vibração é considerado **sem ruído** nas suas componentes
- *MEFCR*: Técnica que usa uma frequência e um modo de vibração. O modo de vibração é considerado **com ruído** nas suas componentes
- *MEFMQ*: Técnica que usa s pares de frequências e modos de vibração contaminados com o método dos **mínimos quadrados**.
- *MEFFL*: Técnica que usa uma frequência e um modo de vibração contaminado e um bloco de áreas conhecidas, usando a técnica do **filtro**.

Lista de Figuras

1.1	<i>Sistema massa-mola fixo-livre.</i>	3
1.2	<i>Sistema massa-mola modificado fixo-fixado.</i>	4
2.1	<i>Gráficos das constantes de rigidez e massas para uma perturbação de 50% e $\theta = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$</i>	21
2.2	<i>Gráficos das constantes de rigidez e massas para uma perturbação de 90% e $\theta = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$</i>	22
2.3	<i>Gráficos das constantes de rigidez e massas para uma perturbação de 90% e $\theta = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$ e $n = 50$</i>	23
3.1	<i>Discretização da barra com espaçamento uniforme</i>	26
3.2	<i>Gráficos da geometria e o erro relativo para $A(x) = 0.3 + \frac{1}{0.2}e^{-\frac{(x-0.5)^2}{(0.25)^2}}$; $A(x) = 4(1-x)^3 + (1-x)^2 + 1 - x + 0.1$ e $A(x) = 1 - x$ respectivamente.</i>	30
3.3	<i>Barra reconstruída para $s = 1, 2, 3, 4, 5$ e 6. Erro de 0.1% na medição nos modos de vibração</i>	42
3.4	<i>Uso de blocos aleatórios para a detecção de dois danos.</i>	45
3.5	<i>Danos fixados para a detecção de dois danos.</i>	46
3.6	<i>Uso de blocos aleatórios para localizar danos de baixa intensidade.</i>	47
3.7	<i>Danos fixados para a detecção de danos de baixa intensidade.</i>	48
4.1	<i>Distribuição dos autovalores quando n é par.</i>	53
4.2	<i>Gráficos dos $q_j = \log(E_{j+1})/\log(E_j)$, onde E_j é o erro absoluto entre a solução exata e aproximada na j-ésima iteração do método de Newton para três valores iniciais diferentes.</i>	63
5.1	<i>Solução do problema DDMEF para um dano de 90% induzido em $x = 8.0$, com $n = 10, 20$ e 50 respectivamente</i>	72
5.2	<i>Solução do problema DDMEF para um dano induzido em $x = 3.0$ de 20% com $n = 10, 20$ e 50 respectivamente</i>	73

5.3	<i>Solução do problema DDFEM para danos induzidos em $x = 2.0, x = 5.0$ e $x = 9.0$ de 20%, 10% e 50% respectivamente</i>	74
6.1	<i>Dano localizado de 90% em $x = 5.0$ usando MEFOT para $n = 10, 20$ e 50.</i>	79
6.2	<i>Dano localizado de 90% em $x = 5.0$ usando MEFSR para $n = 10, 20$ e 50.</i>	80
6.3	<i>Dano localizado de 90% em $x = 5.0$ usando MEFCR para $n = 10, 20$ e 50.</i>	81
6.4	<i>Dano localizado de 90% em $x = 5.0$ usando MEFMQ para $n = 10, 20$ e 50.</i>	82
6.5	<i>Dano localizado de 90% em $x = 5.0$ usando MEFOT, MEFSR e MEFCR para $n = 100$.</i>	83
6.6	<i>Dano de localizado de 90% em $x = 5.0$, usando MEFFL calculando as medias para $n = 100$.</i>	84
6.7	<i>Dano de localizado de 90% em $x = 5.0$, usando MEFFL, fixando as áreas não danificadas para $n = 100$.</i>	84
6.8	<i>Danos localizados de 50%, 10% e 80% em $x = 3.0, x = 5.0$ e $x = 8.0$, respectivamente, usando MEFOT, MEFSR e FEMCR para $n=100$.</i>	87
6.9	<i>Danos localizados de 50%, 10% e 80% em $x = 3.0, x = 5.0$ e $x = 8.0$, respectivamente, usando MEFFL, com cálculo de média para $n = 100$</i>	88
6.10	<i>Danos localizados de 50%, 10% e 80% em $x = 3.0, x = 5.0$ e $x = 8.0$, respectivamente, usando MEFFL, fixando as áreas não danificadas para $n = 100$</i>	88

Lista de Tabelas

3.1	Diferentes testes mostrando a influência dos ruídos nos modos.	32
3.2	Modos de vibração usados para $s=6$	34
3.3	Valores das áreas usando informação adicional (ruído de 0.1%).	35
3.4	Erro relativo entre as áreas conhecidas e as reconstruídas (ruído de 0.1%).	35
3.5	Testes de reconstrução de áreas incluindo ruído de 1.0% nos modos.	36
3.6	Áreas reconstruídas usando informação adicional com $s = 7$ (ruído de 1.0%). . .	37
3.7	Erro relativo entre as áreas conhecidas e as reconstruídas (ruído de 1.0%).	37
3.8	Detecção de um dano usando modos sem ruídos.	38
3.9	Testes mostrando a influencia dos ruídos na detecção de um dano.	39
3.10	Uso de informação adicional para detetar um dano.	39
3.11	Porcentagens de danos induzidos para $n=10$	40
3.12	Uso de informação adicional ($s = 7$) para detetar 4 danos.	40
3.13	Porcentagens de danos induzidos para $n=100$	41
3.14	Comparação entre as porcentagens de danos induzidos e danos detetados ($n = 100$). .	41
3.15	Porcentagens de danos detetados e fixados usando filtro ($n = 100$).	44
3.16	Danos induzidos de baixa intensidade para $n = 100$	46
4.1	Comparação das derivadas exatas e diferenças finitas ($n=10$).	60
4.2	Comparação das derivadas exatas e diferenças finitas ($n=50$).	61
4.3	Valores iniciais para a convergência quadrática do Método de Newton.	63
4.4	Testes numéricos considerando a n -ésima Área fixa.	64
4.5	Testes numéricos considerando a n -ésima Área variável.	67
5.1	Processo de otimização para um dano em $x=8.0$	70
5.2	Processo de otimização para um dano em $x=3.0$	71
5.3	Processo de otimização para danos em $x=8.0, 2.0$ e 9.0	74

6.1	Dados necessários para cada método	76
6.2	Tabela comparativa geral dos métodos desenvolvidos	85
6.3	Tabela comparativa dos tempos de execução (em segundos) dos métodos para um dano	85
6.4	Tabela comparativa dos tempos de execução dos métodos para três danos induzidos	86
6.5	Tabela comparativa das porcentagens de detecção de três danos para os diferentes métodos.	86

Capítulo 1

Introdução

Muitos problemas em engenharia e física podem ser classificados como *problemas diretos* e *problemas inversos*. Os problemas diretos clássicos nessas áreas estão relacionados com a análise e descrição do comportamento de um sistema a partir de propriedades tais como densidade, massa, constantes elásticas, condutividade, presença de dano, resistência etc. Os problemas inversos se relacionam com estimar e determinar tais propriedades a partir do comportamento dinâmico do sistema. Especificamente, os chamados *problemas inversos em vibração* referem-se à reconstrução das propriedades físicas de um sistema vibrante a partir de informações espectrais. Um problema clássico consiste em reconstruir de maneira única um sistema discreto em linha, sem amortecimento, de massas e molas a partir das *frequências naturais de vibração* do sistema, problema que foi estudado primeiramente por Gantmakher e Krein [13]. Ele é formulado como um problema generalizado de autovalor o qual pode ser transformado em um problema simples de autovalor, cuja matriz envolvida é conhecida como matriz de Jacobi. Então o problema inverso para sistemas massa-mola se reduz a um problema inverso para este tipo de matriz, a qual é simétrica, tri-diagonal com co-diagonal não nula. Muitos trabalhos nessa linha podem ser encontrados na literatura, [1], [2], [3], [6], [8], [22], [24], [28], onde são analisados aspectos de solubilidade, existência e unicidade, reconstrução numérica, sensibilidade da reconstrução, entre outros.

De um ponto de vista mais geral, os problemas inversos podem ser divididos em problemas de projeto estrutural, e problemas da matemática aplicada. Na área de projeto estrutural, os dados relativos ao comportamento são incompletos e imprecisos, existindo diferentes sistemas satisfazendo as condições requeridas. O sistema procurado pode ser encontrado por métodos iterativos ou otimização. Por exemplo, Cawley em [35] propõe um método baseado na teoria de perturbação para detetar danos localizados em uma placa, medindo as mudanças de um número pequeno de frequências. Joseph, em [29], apresenta um método iterativo para o projeto de uma estrutura tipo treliça a partir de um certo número de frequências de vibração. A

mesma estrutura foi usada por Dai e Lancaster em [23] para apresentar um método iterativo que resolve um problema generalizado de autovalor usando o método de Newton. A idéia é usar *propriedades* da estrutura como variáveis e reconstruí-la a partir das freqüências. Hassiotis, em [25] e [26], apresenta um método baseado na análise de sensibilidade das freqüências em relação às mudanças nos parâmetros de rigidez para detetar danos estruturais. A relação entre a distribuição de rigidez da estrutura e suas freqüências naturais foram apresentadas como um conjunto de equações a serem resolvidas em termos das mudanças devidas ao dano.

Na área da Matemática Aplicada, supõe-se que os dados são conhecidos exatamente e as questões relacionam-se com existência e unicidade da reconstrução. Nas referências [14],[15],[16],[17],[18],[19],[21],[20], [36],[39] e [38], são estudadas as questões acima para sistemas mecânicos simples.

Modelos de estruturas usadas na área dos problemas inversos são diversos. Por exemplo, Gladwell [17] estuda um modelo de barra com vibração transversal formado por massas conectadas por barras as quais estão unidas entre si por molas de rigidez conhecida. Este modelo pode ser reconstruído a partir de três conjuntos de freqüências naturais, associadas a diferentes condições de contorno. Trabalhos envolvendo outros tipos de estruturas podem ser encontrados em [4], onde o problema de estruturas periódicas carregadas aleatoriamente é estudado.

Um modelo simples, muito estudado na literatura, é uma barra com vibração longitudinal governada pela equação

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial U}{\partial x} \right) = \rho A \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (1.1)$$

onde L é o comprimento da barra, $A(x)$ a área seccional, $E(x)$ o módulo de Young e $\rho(x)$ a densidade. Se w denota uma freqüência de vibração, o problema acima admite soluções $U(x, t) = u(x) \sin(wt)$, onde $u(x)$ satisfaz a equação de autovalores

$$\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) + \lambda \rho A u = 0, \quad 0 < x < L \quad (1.2)$$

com $\lambda = w^2$ e condições de contorno $u(0) = u'(L) = 0$. Uma discretização da equação acima por diferenças finitas é obtida dividindo-se a barra em n partes de comprimento $h = \frac{L}{n}$ e aproximando-se o primeiro termo de 1.2 por

$$\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) \approx \frac{E_{i+1} A_{i+1} (u_{i+1} - u_i) - E_i A_i (u_i - u_{i-1})}{h^2}. \quad (1.3)$$

Obtemos então o sistema discreto de equações

$$-k_i u_{i-1} + (k_i + k_{i+1}) u_i - k_{i+1} u_{i+1} - \lambda m_i u_i = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.4)$$

Os termos k_i e m_i , chamados de rigidez e massa respectivamente, estão definidos pelas relações $k_i = \frac{E_i A_i}{h}$ e $m_i = \rho_i A_i h$. Impondo-se as condições de contorno discretas $u_0 = 0 = u_{n+1} - u_n$

obtemos a equação generalizada de autovalor

$$(K - \lambda_i M)u^{(i)} = 0, \quad (1.5)$$

onde K é uma matriz tri-diagonal simétrica, definida positiva, chamada de matriz rigidez, pois contém a informação dos parâmetros k_i . A matriz M é diagonal, chamada de matriz massa pois contém a informação dos parâmetros m_i . Os valores $u^{(i)}$ contém a informação dos deslocamentos das massas, e λ_i são os autovalores do sistema associados às frequências naturais, devido a sua relação com as frequências de vibração.

A equação 1.5 é equivalente à equação de autovalor para um sistema discreto vibrante em linha formado por n massas m_i conectadas por molas lineares de rigidez k_i , como mostrado na figura 1.1, chamado de sistema massa-mola fixo-livre, e identificado pelo par (K, M) .

Figura 1.1: Sistema massa-mola fixo-livre.

A transformação $v = M^{1/2}u$ leva a equação generalizada de autovalor à equação simples de autovalor

$$(J - \lambda_i I)v^{(i)} = 0, \quad (1.6)$$

onde $J = M^{-1/2}KM^{-1/2}$ pertence a uma classe especial de matrizes chamadas de matrizes de *Jacobi*. Uma matriz de Jacobi é uma matriz tri-diagonal simétrica, positiva definida, com elementos co-diagonais negativos. Estas matrizes têm autovalores positivos distintos e o autovetor correspondente ao i -ésimo autovalor, em ordem ascendente, tem exatamente $i - 1$ troca de sinais entre as suas componentes (ver [18]). O problema inverso de autovalor para matrizes de Jacobi foi tratado por diversos autores na literatura. Por exemplo, em [24] e [28] é estudado o problema de existência e unicidade da reconstrução. Em particular, Hald [24], mostrou que a reconstrução da matriz J pode ser feita de maneira única se os autovalores $(\lambda_i)_1^n$ de J , e os autovalores $(\mu_i)_1^{n-1}$ da sua sub-matriz principal $\bar{J}$ são conhecidos. Estes autovalores satisfazem a importante propriedade de intercalamento

$$\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \dots < \mu_{n-1} < \lambda_n. \quad (1.7)$$

Outros trabalhos têm-se concentrado no desenvolvimento de algoritmos estáveis, os quais estão baseados em métodos que reduzem uma matriz real simétrica à forma tri-diagonal ([8], [3], [31]).

Gantmakher e Krein [13] usaram as frequências $(\mu_i)_1^{n-1}$ do sistema massa-mola mostrado na figura 1.2 para a reconstrução do sistema da figura 1.1. As vibrações longitudinais do sistema

Figura 1.2: Sistema massa-mola modificado fixo-fixo.

da figura 1.2, chamado de sistema massa-mola fixo-fixo, estão governadas pela equação

$$(\tilde{K} - \mu_i \tilde{M}) \tilde{u}^{(i)} = 0, \quad (1.8)$$

onde as matrizes $\tilde{M}$ e $\tilde{K}$ são as *sub-matrizes principais superiores* que resultam da eliminação das últimas linhas e colunas das matrizes M e K , respectivamente. Analogamente ao caso do par (K, M) , a equação anterior pode ser reduzida à equação de autovalor

$$(\tilde{J} - \mu_i I) \tilde{v}^i = 0. \quad (1.9)$$

A *propriedade de intercalamento* 1.7 é condição necessária e suficiente para a existência de um sistema fisicamente real, onde o conjunto de autovalores $(\mu_i)_1^{n-1}$ é chamado de *espectro intercalado*.

Assim, a reconstrução do sistema pode ser feita da seguinte maneira : primeiro reconstruímos a matriz de Jacobi a partir de $(\lambda_i)_1^n$ e $(\mu_i)_1^{n-1}$ dos sistemas fixo-livre e fixo-fixo respectivamente, e posteriormente, as massas e constantes de rigidez são recuperadas a partir de $J = M^{-1/2} K M^{-1/2}$. Mais detalhes serão mostrados no Capítulo 2.

Uma outra aproximação para a equação 1.2 pode ser obtida discretizando-se a equação por elementos finitos lineares. Neste caso a estrutura da matriz rigidez é mantida mas a matriz massa é tri-diagonal simétrica (ver [44]). O modelo de elementos finitos para a equação 1.2 tem motivado o desenvolvimento de linhas de pesquisa de importância, com aplicações nas áreas de dinâmica estrutural, identificação de parâmetros e desenho de engenharia. Ver por exemplo, [5], [33], [34], [41], [35], [26], [25], [20], [19], [29], [17], [39], [40].

Uma área importante na engenharia de estruturas está relacionada com os problemas de detecção. Nestes problemas o comportamento dinâmico da estrutura é usado para extrair informações sobre a integridade da mesma, baseado no fato que se ela sofre algum tipo de mudança, as frequências naturais são afetadas. Alguns problemas de detecção têm sido estudados em [40], [46], [45], [47], [48], relacionados com bloqueios em canos, objetos em cavidades, diminuição e determinação de áreas em canos. Em particular, problemas de detecção de danos estruturais tem

recebido atenção considerável. Por exemplo, mencionamos os trabalhos [27], [30], [35], [41], [25], [26], [34]. Estes trabalhos são caracterizados pelo uso de técnicas de otimização, nos quais funções objetivo são minimizadas em termos de normas, frequências, resíduos e propriedades estruturais.

O principal objetivo desta tese é a aplicação de ferramentas matemáticas à detecção de danos estruturais. A estrutura modelo usada para testar as técnicas desenvolvidas é o modelo de barra descrito pela equação 1.2, a qual tem sido muito estudada na literatura (ver [20], [39], [15], [38], [30]).

Antes de fazer a descrição das técnicas desenvolvidas, precisamos entender e fixar o conceito de dano estrutural. Em termos gerais, *dano* pode ser definido como mudanças ocorridas num sistema, que afetam o desempenho do mesmo. Na sua análise, precisam-se comparar dois estados diferentes do sistema, o primeiro reservado a representar o estado ideal, chamado de estado *não danificado*. Definimos **dano estrutural** como mudanças nas propriedades materiais e/ou geométricas de um sistema. As áreas mais comprometidas com este problema são engenharias civil, mecânica e aeroespacial, onde os métodos usados para o monitoramento são do tipo visual ou os chamados experimentais localizados, tais como os métodos acústicos, ultra-som, campos magnéticos, radio-gráficos e termais (ver [9]). A precisão dessas técnicas tem evoluído bastante, o que aumenta a confiança nos dados fornecidos.

Em um primeiro estudo feito nesta tese, fixamos a seguinte definição para dano estrutural: uma estrutura está danificada se diminuições na rigidez local do sistema são detetadas. Seja (K, M) um sistema sem dano, que chamamos de ideal, e $(\lambda_i)_1^n$ suas frequências. A reconstrução do sistema anterior depende dos espectros $(\lambda_i)_1^n$ e $(\mu_i)_1^{n-1}$, mas dificuldades são encontradas na medição das frequências $(\mu_i)_1^{n-1}$, especialmente para n grande (ver [39]). Este fato nos leva a uma formulação do problema onde o espectro intercalado $(\mu_i)_1^{n-1}$ é incógnita, não sendo necessário medi-lo ([10]).

Nossa estratégia será considerar o sistema (K, M) como uma função de $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1})$, ou seja, $m_i \equiv m_i(\mu)$ e $k_i \equiv k_i(\mu)$. Para a detecção de danos no sistema, medimos as frequências naturais que devem ser diferentes das frequências naturais do sistema ideal. Este conjunto de frequências será chamado de *espectro da estrutura danificada* e será denotado por $(\lambda_i^*)_1^n$. A partir deste espectro da estrutura danificada, procuramos um novo sistema (K^*, M^*) o qual, de acordo à estratégia anterior, pode ser considerado como uma função do espectro intercalado $\mu^* = (\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_{n-1}^*)$. A procura do novo sistema (K^*, M^*) é feita minimizando uma função objetivo $F(\mu^*)$, definida em termos das massas e molas do sistema ideal e o sistema (K^*, M^*) . O sistema encontrado será o mais próximo ao ideal, tendo como frequências o espectro da estrutura danificada e como espectro intercalado o valor μ^* que minimiza a função objetivo.

Em um segundo estudo, a definição de dano estrutural é modificada, baseada em resultados de diferentes trabalhos encontrados na literatura (ver [46], [45], [47], [48], [27]). Estes trabalhos

consideram parâmetros geométricos para a detecção de danos, o que motiva a reformular o nosso modelo de maneira que a detecção de danos se relaciona com a área de secção transversal.

Consideremos então uma formulação diferente da equação 1.2, incluindo condições físicas especiais. É o caso importante de uma barra homogênea, ou seja, módulo de Young e densidade constantes. Este caso foi estudado por Ram e Elhay em [37] e [38]. Consideremos também que a barra tem comprimento unitário. Assim, a equação 1.2 fica na forma

$$\frac{d}{dx}\left(A\frac{du}{dx}\right) + \sigma Au = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (1.10)$$

onde $\sigma = \frac{\lambda \rho}{E}$.

A vantagem desta equação é que a sua discretização depende somente das áreas. Esse fato é importante já que a detecção de danos usando áreas é atraente do ponto de vista prático. Apesar de se tratar de um caso particular, a barra homogênea é de grande interesse prático, e a simplicidade da sua equação permite-nos estudar o problema de detecção de danos em termos da área da secção transversal.

É importante ressaltar que os danos não são observados geometricamente. Neste trabalho, a função A da equação 1.10 será interpretada como uma **área efetiva** de modo que diminuições localizadas de seu valor em relação à área da secção transversal refletem alterações na estrutura que podem ser caracterizadas como dano.

A discretização da equação 1.10 usando diferenças finitas já foi estudada em [37] e [38]. Nesses trabalhos, se mostra que o problema generalizado de autovalor pode ser reduzido a um problema simples de autovalor onde a matriz envolvida é uma matriz de Jacobi com estrutura especial. Para reconstruir essa matriz é preciso determinar $n - 1$ parâmetros. Se o método de reconstrução de Boley e Golub [2] é usado, precisamos de $2n - 1$ dados os quais correspondem aos espectros $(\lambda_i)_1^n$ e $(\mu_i)_1^{n-1}$. Desta maneira, o problema inverso fica sobre-determinado, gerando dificuldades do ponto de vista da unicidade na reconstrução. Por outro lado, só condições necessárias para este problema foram determinadas (ver [32]).

Porém, se mostra nesta tese que se a discretização da equação 1.10 é feita usando elementos finitos lineares, a matriz de Jacobi envolvida tem uma estrutura especial. Mais ainda, mostramos que esta matriz pode ser reconstruída a partir da metade das frequências e a metade do espectro intercalado. Detecção de danos usando este modelo de elementos finitos também foi estudada nesta tese. A idéia é usar a mesma estratégia desenvolvida para massa-mola, só que agora os valores discretos das áreas são considerados como funções da metade do espectro intercalado μ^* . Uma nova função objetivo que agora depende só das áreas é minimizada usando μ^* como variável. A seguir, descrevemos os conteúdos dos capítulos deste trabalho:

No Capítulo 2, será apresentada a primeira abordagem do problema. A discretização por diferenças finitas da equação 1.5 permite descrever a barra como um sistema em linha formado

por massas conectadas por molas. O critério usado para decidir se a estrutura possui danos é a redução de rigidez nas molas. Para isso, supomos que o comportamento dinâmico da estrutura antes de entrar em serviço é conhecido. Sejam $(\lambda_i)_1^n$ as frequências do sistema (K, M) considerado ideal. Depois da estrutura entrar em serviço, ela é monitorada, obtendo-se as novas frequências $(\lambda_i^*)_1^n$, as quais são chamadas de espectro da estrutura danificada. Esta mudança no comportamento dinâmico do sistema precisa ser analisada por suas propriedades físicas. Fixamos então o espectro da estrutura danificada $(\lambda_i^*)_1^n$ e deixamos a distribuição de massa e rigidez como função do espectro μ intercalado a (λ^*) . Para detetar o dano procuramos o novo sistema (K^*, M^*) minimizando uma função objetivo $F(\mu)$. Esta função objetivo é definida em termos das distribuições de massa e rigidez dos sistemas (K, M) e (K^*, M^*) . A idéia consiste em determinar μ de forma que o novo sistema (K^*, M^*) seja o sistema mais próximo do sistema ideal, usando uma norma conveniente. Esta técnica é baseada na metodologia desenvolvida em ([10]).

Um fato importante na busca do novo sistema (K^*, M^*) é que os parâmetros de massa não devem mudar em relação ao sistema ideal, pois o conceito de dano não considera diminuições nesses parâmetros. Para levar isto em conta, introduzimos um parâmetro na função objetivo de forma a diminuir a contribuição das massas. Os resultados numéricos foram satisfatórios, e sugeriram uma reformulação do problema de detecção de danos em termos das áreas efetivas, onde são excluídos de análise parâmetros que não se relacionam com danos.

No Capítulo 3, uma mudança é aplicada no critério de dano: a estrutura tem dano se as áreas efetivas são reduzidas. A idéia de usar áreas efetivas deve-se ao fato que os danos apresentam-se como mudanças internas as quais não são detetadas por métodos visuais. O modelo descrito depende de uma frequência de vibração e o modo respectivo. Exemplos numéricos são apresentados. Esta reconstrução é sensível a erros nas medições dos modos, especialmente se mais elementos são usados. Porém, esta dificuldade pode ser superada usando informações adicionais, que melhoram consideravelmente a aproximação. Esta última idéia é uma aplicação da resolução de um sistema sobre-determinado de equações lineares usando mínimos quadrados. Uma dificuldade prática desta técnica é a medição dos dados a serem usados, mas usando uma técnica de filtragem da informação podem-se obter resultados aceitáveis para a detecção de danos.

No Capítulo 4, apresentam-se as ferramentas necessárias para um processo de otimização que será descrito no Capítulo 5. Estas ferramentas incluem uma análise diferente do modelo de elementos finitos descrito no Capítulo 3. A formulação por áreas é caracterizada por uma equação generalizada de autovalor cujas matrizes possuem uma estrutura especial. Esta equação generalizada é transformada numa equação simples de autovalor a qual preserva as propriedades do problema geral. Neste caso, a matriz envolvida possui propriedades espectrais interessantes: seus autovalores estão simetricamente distribuídos em relação à origem e a última coluna da matriz de autovetores pode ser calculada a partir da metade das suas componentes. Estas

propriedades podem ser usadas para recuperar as áreas a partir da metade do espectro e a metade do espectro intercalado. Novamente, os valores das áreas são considerados como funções do espectro intercalado μ , ou seja, $A_i \equiv A_i(\mu)$ e uma análise de sensibilidade das áreas em relação a μ é desenvolvida. A exatidão das derivadas primeiras é comprovada comparando-se os valores calculados por diferenças finitas. Para as derivadas segundas, o método de Newton é aplicado para encontrar o mínimo de um funcional, comprovando a convergência quadrática do método.

No Capítulo 5, apresenta-se uma estratégia para a detecção de danos usando áreas. Esta estratégia está baseada no fato que as áreas são funções de μ , permitindo-nos fazer um processo de minimização para a busca de novas áreas A_i^* a partir do espectro da estrutura danificada λ^* . Estas novas áreas contém a informação relativa ao dano procurado. Para a reconstrução das áreas A_i , inicialmente fixamos o valor da n -ésima área A_n , mas testes numéricos mostraram a necessidade de se liberar A_n como uma variável adicional, para ser possível determinar uma direção de descida ao mínimo. A técnica mostra eficiência na detecção de danos.

Finalmente, no Capítulo 6, é feita uma comparação das técnicas desenvolvidas na tese. A comparação leva em conta o tempo de execução dos algoritmos de cada técnica, assim como os dados requeridos para sua execução. Um tipo de teste escolhido para este propósito consistiu de um dano induzido e diferentes refinamentos. Este tipo de teste tem por objetivo diferenciar o comportamento das técnicas quando é feito um refinamento. Outro tipo de teste contempla mais de um dano induzido e um refinamento maior. Conclusões e propostas para futuras pesquisas são incluídas no final do Capítulo 6.

Capítulo 2

Detecção de Dano em Sistemas Massa-Mola

Neste Capítulo, resolvemos o problema de detecção de danos em sistemas massa-mola **DDSMM**. No estudo para a detecção de danos num sistema (K, M) , mostramos como detetar redução na rigidez das molas do sistema. Estratégias similares tem sido aplicadas em trabalhos relativos a detecção de danos estruturais, por exemplo, [26], [25], [35], [41], [33], [34], e [5]. Após a formulação do problema **DDSMM**, descrevemos com mais detalhe a reconstrução do sistema (K, M) , a qual será feita usando o algoritmo de Lanczos a partir das frequências $(\lambda_i)_1^n$ e o espectro intercalado $(\mu_i)_1^{n-1}$. Para a solução do problema **DDSMM**, precisa-se da análise de sensibilidade do sistema (K, M) em relação ao espectro intercalado. As idéias para a solução do problema **DDSMM** foram apresentadas em [30], as quais são baseadas em um método inverso de autovalor desenvolvido em [10]. Para mostrar a efetividade da técnica desenvolvida, exemplos de detecção de danos são mostrados.

2.1 Formulação do Problema DDSMM

Consideremos o sistema (K, M) , com suas frequências $(\lambda_i)_1^n$ na ordem ascendente

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n-1} < \lambda_n. \quad (2.1)$$

Para este sistema, o problema de detecção de danos será chamado de

PROBLEMA DDSMM: *Detecção de Dano em Sistemas Massa-Mola*

Supondo que o monitoramento do sistema indique alterações em seu comportamento dinâmico que se traduz por mudanças no espectro. Estas mudanças no comportamento dinâmico serão indicadas como um novo conjunto de frequências as quais denotamos por $(\lambda_i^*)_1^n$, chamado de

espectro da estrutura danificada. Um estudo das propriedades físicas do sistema é feito para a detecção de possíveis danos. O dano neste sistema é caracterizado pela perda de rigidez das molas. O problema DDSMM consiste em localizar reduções de rigidez em relação ao sistema inicial. Para a sua solução, utilizam-se resultados de álgebra linear numérica relacionados com a reconstrução de uma matriz de Jacobi a partir da informação espectral. Esta reconstrução é a base para recuperar as massas e constantes de rigidez do sistema (K, M) , processo que pode ser feito de maneira única a partir das frequências $(\lambda_i)_1^n$ e $(\mu_i)_1^{n-1}$, e um fator adicional, por exemplo, a massa total do sistema m_T (Gantmakher [13]).

2.2 Reconstrução de um Sistema Massa-Mola

Nesta seção, mostramos como reconstruir os parâmetros de massa e rigidez do sistema (K, M) . A equação que governa as vibrações longitudinais deste sistema é dada pela equação 1.5, onde as matrizes K e M têm a estrutura

$$K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & & \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -k_{n-1} & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ & & & -k_n & k_n \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

e $M = \text{diag}\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ respectivamente. Estas matrizes são definidas positivas uma vez que $m_i > 0$ e $k_i > 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Já que K é tridiagonal simétrica, os autovalores são reais, positivos, e distintos (ver [18]). A equação 1.5 pode ser transformada em uma equação simples de autovalor, fazendo a decomposição de Cholesky da matriz M : definimos a matriz B como

$$B = B^T = \text{diag}\{m_1^{1/2}, m_2^{1/2}, \dots, m_n^{1/2}\}, \quad (2.3)$$

a qual satisfaz $M = BB^T$, e definimos o vetor $v^{(i)}$ como

$$v^{(i)} = B^T u^{(i)}. \quad (2.4)$$

Se a equação 1.5 é multiplicada por B^{-1} , obtemos o problema simples de autovalor

$$(J - \lambda_i I)v^{(i)} = 0, \quad (2.5)$$

onde

$$J = B^{-1}K(B^T)^{-1} \quad (2.6)$$

tem a estrutura

$$J = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ b_1 & a_2 & b_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

A relação 2.6 implica que os elementos diagonais e co-diagonais de J são positivos e estritamente negativos, respectivamente. Por outro lado, os polinômios característicos das submatrizes principais de J são invariantes sob transformações diagonalmente similares DJD , onde $D = \text{diag}\{(-1)^i, i = 1, 2, \dots, n\}$. Isto permite assumir, sem perda de generalidade, que os elementos diagonais e co-diagonais são estritamente positivos. A matriz J , chamada de matriz de **Jacobi**, é tridiagonal simétrica, positiva definida com elementos co-diagonais negativos.

A reconstrução da matriz de Jacobi J a partir da informação espectral, conhecido como **problema inverso de autovalor para matriz de Jacobi**, foi estudado por muitos autores, e diversos trabalhos podem ser encontrados na literatura. Em particular, no trabalho de Golub e Boley [3] e, posteriormente, no trabalho de C. de Boor e Golub [8], foi desenvolvido um algoritmo para reconstrução de J . O método está baseado no algoritmo de Lanczos (ver [31]), que reduz qualquer matriz simétrica à forma tridiagonal.

Seja $V = [v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}]$ a matriz de autovetores de J , onde suas colunas satisfazem a propriedade de ortogonalidade

$$(v^{(i)})^T v^{(j)} = \delta_{ij}. \quad (2.8)$$

Temos que

$$JV = V\Lambda$$

ou

$$QJ = \Lambda Q, \quad (2.9)$$

onde $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, e $Q = [q^{(1)}, q^{(2)}, \dots, q^{(n)}] = V^T$. De 2.8, obtemos as relações de ortogonalidade

$$(q^{(i)})^T q^{(j)} = \delta_{ij}, \quad (2.10)$$

onde $q^{(i)}$ é a i -ésima linha da matriz de autovetores de J .

A matriz Λ e a primeira (ou última) linha de V são as informações necessárias para o seguinte algoritmo:

ALGORITMO 2.1: (algoritmo de Lanczos)(Golub [31])

Dada a matriz diagonal $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ e $q^{(1)}$ (ou $q^{(n)}$) primeira (ou última) linha da matriz de autovetores, este algoritmo constrói uma única matriz de Jacobi J tendo Λ como os seus autovalores e, ao mesmo tempo, os autovetores ortogonais de J :

Definir $b_0 := 1, q^{(0)} := 0$

$$a_1 := (q^{(1)})^T \Lambda q^{(1)}$$

Para $j = 1, \dots, n-1$

$$r^{(j+1)} := (\Lambda - a_j I) q^{(j)} - b_{j-1} q^{(j-1)}$$

$$b_j := \|r^{(j+1)}\|_2$$

$$q^{(j+1)} := \frac{r^{(j+1)}}{b_j}$$

$$a_{j+1} := (q^{(j+1)})^T \Lambda q^{(j+1)}.$$

Quando a última linha da matriz de autovetores é especificada, o algoritmo 2.1 produz a matriz J no sentido oposto, isto é, $a_n, b_{n-1}, a_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_2, a_2, b_1, a_1$. As duas reconstruções têm um custo computacional de $O(n^2)$ operações. Teoricamente, o algoritmo gera vetores q_j ortogonais, mas pode acontecer perda de ortogonalidade devido a erros de arredondamento. Uma versão melhorada que evita este problema, é mostrada abaixo. Nesta versão, cada vetor calculado $q^{(j+1)}$ é reortogonalizado em relação aos vetores já calculados $q^{(j)}$, produzindo vetores ortogonais com precisão de máquina. Temos então

ALGORITMO 2.2: (algoritmo de Lanczos com ortogonalização completa) (Golub e Boley [3])

Definir $b_0 := 1, q^{(0)} := 0$ Determinar $P_0 = I - 2z^{(0)}(z^{(0)})^T / (z^{(0)})^T z^{(0)}$ tal que $P_0 r^{(1)} = e^{(1)}$

$$a_1 := (q^{(1)})^T \Lambda q^{(1)}$$

Para $j = 1, \dots, n-1$

$$r^{(j+1)} := (\Lambda - a_j I) q^{(j)} - b_{j-1} q^{(j-1)}$$

$$w := (P_{j-1} \cdots P_0) r^{(j)}$$

Determinar $P_j = I - 2z^{(j)}(z^{(j)})^T / (z^{(j)})^T z^{(j)}$ tal que

$$P_j w = (w_1, \dots, w_j, b_j, 0, \dots, 0)^T$$

$$q^{(j+1)} := (P_0 \dots P_j) e^{(j+1)}$$

$$a_{j+1} := (q^{(j+1)})^T \Lambda q^{(j+1)}.$$

As matrizes P_j são as *matrizes de Householder* do vetor w . Este processo de ortogonalização completa incrementa o trabalho em $O(n)$ operações. Portanto, o algoritmo 2.2 tem um custo total de $O(n^3)$ operações. Outros trabalhos relacionados com este algoritmo podem ser encontrados em [8], [18], [3], [31].

Entre os dados necessários para a aplicação do algoritmo, estão a primeira ou última linha da matriz de autovetores de J . Golub e Boley [3] mostraram que esta linha pode ser obtida a partir dos autovalores de J e dos autovalores de suas sub-matrizes principais de ordem $n - 1$. Por exemplo, se $(\mu_i)_1^{n-1}$ são os autovalores da sub-matriz principal superior, temos

$$(q_i^{(n)})^2 = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (\mu_j - \lambda_i)}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (\lambda_j - \lambda_i)} \quad (2.11)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$.

A propriedade de intercalamento 2.1 é uma condição necessária e suficiente para a reconstrução de um sistema fisicamente real, onde os autovalores $(\mu_i)_1^{n-1}$ são chamados de espectro intercalado.

A reconstrução do sistema massa mola é feita primeiro reconstruindo-se a matriz de Jacobi J , e posteriormente separando as massas e constantes de rigidez a partir de J mediante o processo detalhado a seguir. Sejam p e e_1 os vetores de n componentes $p = (1, 1, \dots, 1)^T$, e $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$ respectivamente.

A estrutura da matriz K implica em

$$Kp = k_1 e_1. \quad (2.12)$$

Como $J = B^{-1}K(B^T)^{-1}$, temos

$$BJBp = k_1 e_1, \quad (2.13)$$

ou, equivalentemente,

$$J(m_1^{1/2}, m_2^{1/2}, \dots, m_n^{1/2})^T = (k_1 m_1^{-1/2}, 0, \dots, 0)^T. \quad (2.14)$$

Se $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \neq 0$, é solução do sistema

$$Jy = e_1, \quad (2.15)$$

então

$$(m_1^{1/2}, m_2^{1/2}, \dots, m_n^{1/2})^T = k_1 m_1^{-1/2} y, \quad (2.16)$$

onde pode-se mostrar que $y_i > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Temos então,

$$k_1^2 = \frac{m_i m_1}{y_i^2}, i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.17)$$

Logo,

$$\frac{m_1}{m_i} y_i^2 = \frac{m_1}{m_n} y_n^2, i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.18)$$

ou,

$$m_i = m_n \left(\frac{y_i}{y_n} \right)^2, i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.19)$$

Se a massa total, definida por

$$m_T = \sum_{i=1}^n m_i \quad (2.20)$$

for conhecida, então, pela relação 2.20, a última massa do sistema é dada por

$$m_n = \frac{m_T}{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{y_i}{y_n} \right)^2}, \quad (2.21)$$

e portanto, a matriz massa é totalmente determinada. Para determinar a matriz rigidez usamos a relação 2.6, ou seja, $K = (B^T)^{-1} J B^{-1}$.

Resumindo, a reconstrução do sistema pode ser obtida através do seguinte algoritmo:

ALGORITMO 2.3:

Dados os espectros $(\lambda_i)_1^n$ e $(\mu_i)_1^{n-1}$, e a massa total m_T do sistema:

1. Reconstruir a matriz de Jacobi J usando Lanczos a partir de $(\lambda_i)_1^n$ e $(\mu_i)_1^{n-1}$ (algoritmo 2.2)
2. Resolver o sistema linear 2.15, determinar $(y_i)_1^n$.

3. Calcular m_n de 2.21.
4. Usando 2.19, encontrar $(m_i)_1^{n-1}$.
5. Formar $M = \text{diag}\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ e $K = (B^T)^{-1}JB^{-1}$, onde B é dada por 2.3.

2.3 Análise de Sensibilidade de Sistemas Massa-Mola

Apresentamos nesta seção, uma análise de sensibilidade para sistemas massa-mola que será necessária posteriormente para a resolução do problema DDSMM.

Na seção anterior, foi estabelecido que a reconstrução do sistema (M, K) pode ser feita de maneira única a partir de $(\lambda_i)_1^n$, $(\mu_i)_1^{n-1}$ e o fator m_T . A estratégia de solução do problema DDSMM, que será descrita na seção 2.4, considera os parâmetros de massa e rigidez como funções do espectro intercalado $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{n-1})$ e uma busca de um sistema $(M^*(\mu), K^*(\mu))$. Esta busca é feita através da minimização da função objetivo $F(\mu)$ definida por

$$F(\mu) = \sum_{i=1}^n (m_i^*(\mu) - m_i)^2 + \sum_{i=1}^n (k_i^*(\mu) - k_i)^2,$$

sujeita à $\lambda_i^* < \mu_i < \lambda_{i+1}^*$. O espectro $(\lambda_i^*)_1^n$ são as frequências do espectro procurado (M^*, K^*) . A resolução deste problema demanda o cálculo do vetor gradiente e da matriz Hessiana de $F(\mu)$, sendo necessário uma análise de sensibilidade das massas e constantes de rigidez em relação a μ .

Esta análise de sensibilidade é feita usando resultados mostrados em [10], onde foram estudados métodos numéricos para a solução de problemas inversos de autovalor. Entre os resultados obtidos nesse trabalho, encontramos um algoritmo que permite desenvolver a análise de sensibilidade de uma matriz de Jacobi em relação ao espectro intercalado. O algoritmo, chamado de δ -Lanczos, calcula as derivadas $\delta_k J(\mu)$ da matriz de Jacobi $J(\mu)$ em relação a μ_k , $k = 1, \dots, n-1$ e está baseado no algoritmo de Lanczos 2.1. Para evitar a perda de ortogonalidade dos vetores $q^j(\mu)$ e calcular a matriz $\delta_k J(\mu)$ com um custo computacional razoável, $J(\mu)$ é calculada pelo algoritmo 2.2 (Lanczos com ortogonalização completa) e as derivadas são calculadas a partir do algoritmo 2.1. Este algoritmo é chamado de algoritmo δ -Lanczos com ortogonalização completa:

ALGORITMO 2.4: (δ -Lanczos com ortogonalização completa) ([10])

Calcular $q^1(\mu)$, e $a_1(\mu)$, $b_j(\mu)$, $r^{j+1}(\mu)$, $q^{j+1}(\mu)$, $a_{j+1}(\mu)$, $j = 1, 2, \dots, n-1$ usando

o algoritmo de Lanczos 2.2

Para $k = 1, \dots, n-1$

Calcular $\delta_k q^{(1)}(\mu)$

$$\delta_k a_1(\mu) := 2(\delta_k q^{(1)}(\mu))^T \Lambda q^{(1)}(\mu)$$

For $j = 1, \dots, n-1$

$$\delta_k r^{(j+1)}(\mu) := (\Lambda - a_j(\mu)I) \delta_k q^{(j)}(\mu) - \delta_k a_j(\mu) \delta_k q^{(j)}(\mu) - \delta_k b_{j-1}(\mu) q^{(j-1)}(\mu)$$

$$-b_{j-1}(\mu) \delta_k q^{(j-1)}(\mu)$$

$$\delta_k b_j(\mu) := \frac{(r^{(j+1)}(\mu))^T \delta_k r^{(j+1)}(\mu)}{b_j(\mu)}$$

$$\delta_k q^{(j+1)}(\mu) := \frac{b_j(\mu) \delta_k r^{(j+1)}(\mu) - \delta_k b_j(\mu) r^{(j+1)}(\mu)}{(b_j(\mu))^2}$$

$$\delta_k a_{j+1}(\mu) := 2(\delta_k q^{(j+1)}(\mu))^T \Lambda q^{(j+1)}(\mu)$$

Este algoritmo requer $O(2n^3)$ operações.

A análise de sensibilidade das massas e constantes de rigidez pode ser resumida nos seguintes passos:

1. Usar o algoritmo 2.3 para determinar a matriz J , o vetor y , a n -ésima massa m_n , a matriz massa M e a matriz rigidez K .
2. Calcular a matriz $\delta_l J(\mu)$ a qual contem a informação das derivadas da diagonal e co-diagonal de J em relação a μ . Este passo é feito usando o algoritmo 2.4.
3. Resolver o sistema de equações $J(\mu) \delta_l y(\mu) = -\delta_l J(\mu) y(\mu)$, o qual se obtém ao derivar a equação 2.15 em relação a μ .
4. Calcular $\delta_l m_n(\mu)$ a partir da equação 2.21.
5. Calcular as derivadas das massas $\delta_l m_i(\mu)$, para $i = 1, \dots, n$, a partir da fórmula 2.19.
6. Calcular as derivadas das constantes de rigidez $\delta_l k_i(\mu)$, para $i = 1, \dots, n$, a partir da relação $K = (B^T)^{-1} J B^{-1}$.

Em todos os passos anteriores a derivada δ_l é calculada para $l = 1, \dots, n-1$. O custo computacional para obter as derivadas das massas e constantes de rigidez é aproximadamente $O(2n^3 + n^2 + n)$ operações.

Derivadas de segunda ordem também serão necessárias. Estas são calculadas usando uma versão de segunda ordem do método δ -Lanczos, chamado de δ^2 -Lanczos. O algoritmo calcula as

derivadas parciais da matriz $\delta_k J(\mu)$ com relação a cada variável $\mu_l, l = 1, \dots, n-1$. Primeiro, usa-se o algoritmo 2.1 para calcular a matriz J e posteriormente duas vezes o algoritmo 2.3 para $\delta_k J(\mu)$.

ALGORITMO 2.5: (δ^2 -Lanczos com ortogonalização completa) ([10]):

Calcular $q^1(\mu), a_1(\mu), eb_j(\mu), r^{j+1}(\mu), q^{j+1}(\mu), a_{j+1}(\mu), j = 1, 2, \dots, n-1$ usando o algoritmo de Lanczos 2.1

Calcular $\delta_k q^1(\mu), \delta_k a_1(\mu), e\delta_k b_j(\mu), \delta_k r^{j+1}(\mu), \delta_k q^{j+1}(\mu), \delta_k a_{j+1}(\mu), j = 1, 2, \dots, n-1$ usando o algoritmo δ -Lanczos 2.4

Para cada $l = 1, \dots, n-1$

Para cada $k = 1, \dots, n-1$

Calcular $\delta_l \delta_k q^{(1)}(\mu), \delta_l \delta_k a_1(\mu) := 2((\delta_l \delta_k q^{(1)}(\mu))^T \Lambda q^{(1)}(\mu) + \delta_k q^{(1)}(\mu))^T \Lambda \delta_l q^{(1)}(\mu)$

Para cada $j = 1, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} \delta_l \delta_k r^{(j+1)}(\mu) &= (\Lambda - a_j(\mu)I) \delta_l \delta_k q^{(j)}(\mu) - \delta_l a_j(\mu) \delta_k q^{(j)}(\mu) \\ &\quad - \delta_l \delta_k a_j(\mu) q^{(j)}(\mu) - \delta_k a_j(\mu) \delta_l q^{(j)}(\mu) \\ &\quad - \delta_l \delta_k b_{j-1}(\mu) q^{(j-1)}(\mu) - \delta_k b_{j-1}(\mu) \delta_l q^{(j-1)}(\mu) \\ &\quad - \delta_l b_{j-1}(\mu) \delta_k q^{(j-1)}(\mu) - b_{j-1}(\mu) \delta_l \delta_k q^{(j-1)}(\mu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_l \delta_k b_j(\mu) &= \{b_j(\mu)((\delta_l r^{(j+1)}(\mu))^T \delta_k r^{(j+1)}(\mu) \\ &\quad + (r^{(j+1)}(\mu))^T \delta_l \delta_k r^{(j+1)}(\mu)) \\ &\quad - \delta_l b_j(\mu)(r^{(j+1)}(\mu))^T \delta_k r^{(j+1)}(\mu)\} / (b_j(\mu))^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_l \delta_k q^{(j+1)}(\mu) &= \{(b_j(\mu))^2 (\delta_l b_j(\mu) \delta_k r^{(j+1)}(\mu) + b_j(\mu) \delta_l \delta_k r^{(j+1)}(\mu) \\ &\quad - \delta_l \delta_k b_j(\mu) r^{(j+1)}(\mu) - \delta_k b_j(\mu) \delta_l r^{(j+1)}(\mu)) \\ &\quad - 2b_j(\mu) \delta_l b_j(\mu) (b_j(\mu) \delta_k r^{(j+1)}(\mu) \\ &\quad - \delta_k b_j(\mu) r^{(j+1)}(\mu))\} / (b_j(\mu))^4 \end{aligned}$$

$$\delta_l \delta_k a_{j+1}(\mu) = 2((\delta_l \delta_k q^{(j+1)}(\mu))^T \Lambda q^{(j+1)}(\mu)$$

$$+(\delta_k q^{(j+1)}(\mu))^T \Lambda \delta_l q^{(j+1)}(\mu)$$

De maneira análoga às derivadas primeiras das massas e constantes de rigidez, a partir do algoritmo 2.3 podem-se desenvolver fórmulas para as derivadas segundas desses parâmetros em relação a μ (ver [10]).

2.4 Estratégia para a solução do Problema DDSMM

Nesta seção, é mostrada uma estratégia para resolver o problema DDSMM, cuja formulação foi feita na seção 2.1. Para mostrar a estratégia de solução, precisamos fixar o nosso sistema a ser analisado, o qual será submetido ao nosso critério de dano já estabelecido. Consideremos então o sistema (K, M) com constantes de rigidez e massas conhecidas dadas por $(k_i)_1^n$ e $(m_i)_1^n$. Seja $(\lambda_i)_1^n$ o conjunto de frequências do sistema antes dele ser colocado em serviço. Supondo que o monitoramento do sistema indique alterações em seu comportamento dinâmico, as quais se interpretam como mudanças nas frequências naturais, define-se um novo conjunto de frequências que denotamos por $(\lambda_i^*)_1^n$, chamado de espectro da estrutura danificada. Estas mudanças no comportamento dinâmico serão analisadas a partir dos parâmetros de massa e constantes de rigidez. A análise deve levar em conta o fato que quando uma estrutura sofre algum dano, estes são localizados. Ou seja, o dano se caracteriza por reduções específicas de rigidez, deixando as restantes inalteradas. É por isso que a estrutura danificada é semelhante à estrutura ideal, mudando só a rigidez onde o dano acontece. É natural, então procurar o sistema danificado (K^*, M^*) mais próximo ao (K, M) , o qual tenha como espectro o espectro da estrutura danificada.

A busca será feita usando o fato que o sistema (K^*, M^*) pode ser considerado como uma função do espectro intercalado μ , ou seja, $K^* \equiv K^*(\mu)$ e $M^* \equiv M^*(\mu)$.

Consideremos então a seguinte função objetivo:

$$F(\mu) = \theta \sum_{i=1}^n (m_i^*(\mu) - m_i)^2 + (1 - \theta) \sum_{i=1}^n (k_i^*(\mu) - k_i)^2, \quad (2.22)$$

onde $0 < \theta < 1$. O sistema que contém a informação necessária será obtido da solução do seguinte problema de minimização:

$$\text{Minimizar} \quad F(\mu) \quad (2.23)$$

$$\text{sujeito a} \quad \lambda_i^* < \mu_i < \lambda_{i+1}^* \quad (2.24)$$

A inclusão do parâmetro θ justifica-se pelo fato de que o nosso conceito de dano não contempla mudanças nas massas do sistema, e sua função é diminuir as possíveis diferenças nas massas reconstruídas.

Na resolução do problema de minimização 2.23-2.24, será usado um algoritmo desenvolvido em [11], o qual usa técnicas do tipo Lagrangiano aumentado com restrições de canalização. Mais detalhes do método podem ser encontrados no Apêndice A.

Para o uso do método de minimização é preciso calcular o vetor gradiente

$$\nabla F(\mu) = \left(\frac{\partial F(\mu)}{\partial \mu_1}, \frac{\partial F(\mu)}{\partial \mu_2}, \dots, \frac{\partial F(\mu)}{\partial \mu_{n-1}} \right) \quad (2.25)$$

e a matriz Hessiana

$$\mathcal{H}(F(\mu)) = \left[\frac{\partial^2 F(\mu)}{\partial \mu_i \partial \mu_j} \right]_{i,j}. \quad (2.26)$$

Vemos que para o cálculo da derivada primeira e segunda do funcional F , necessita-se das respectivas derivadas do sistema (K^*, M^*) em relação a μ . Estas derivadas são calculadas usando os resultados da seção anterior.

2.5 Exemplos de detecção de danos

Nesta seção final, alguns exemplos de detecção de danos serão mostrados. Em termos reais, as frequências da estrutura danificada deveriam ser fornecidas por técnicas de monitoramento especializadas. Do ponto de vista numérico, isto pode ser simulado da seguinte forma: dado um sistema com distribuição de rigidez e massa $(k_i)_1^n$ e $(m_i)_1^n$ respectivamente, diminuí-se uma rigidez de maneira arbitrária, chamando o novo sistema de *sistema danificado* o qual denotamos por (K^*, M^*) . Usando algoritmos conhecidos para a resolução do problema generalizado de autovalor, calculamos o espectro deste sistema, que será denotado por $(\lambda_i^*)_1^n$ e chamado de espectro da estrutura danificada.

O algoritmo desenvolvido em [11] precisa de um valor inicial para a busca do mínimo. Este valor inicial de μ não é conhecido e, portanto, precisa ser fornecido de alguma forma conveniente. Experiências numéricas indicam que este valor inicial para μ precisa ser gerado de tal forma a encontrar uma direção de descida ao mínimo. Um problema detectado neste processo é que em alguns casos o método só determina mínimos locais da função objetivo. Experimentos numéricos indicam que existem vários pontos de mínimo local em torno de um mínimo global μ^* , e provavelmente os mínimos locais ficam presos num vale da função, não permitindo encontrar uma direção de descida ao mínimo. É por isso que para relaxar o processo de minimização a massa

total m_T foi considerada como uma variável independente. Mais detalhes sobre este relaxamento das restrições podem ser encontradas em [10].

O sistema escolhido para simular detecção de danos é o sistema massa-mola constante formado por massas e molas de rigidez igual a 1.0. Os resultados são mostrados nas Figuras 2.1-2.3.

Na figura 2.1, são apresentados os resultados obtidos para uma diminuição induzida de 50% na rigidez k_4 . Diferentes valores de θ foram testados com $n = 10$.

Na primeira coluna desta figura são mostrados os resultados relacionados com a reconstrução dos parâmetros de rigidez. As constantes de rigidez reconstruídas são comparadas com as constantes de rigidez conhecidas $k_i = 1.0$. Notamos que se o valor de θ é diminuído, a diferença entre as constantes de rigidez conhecidas e as reconstruídas fica mais acentuada na quarta rigidez.

Na segunda coluna da figura 2.1 se mostram as massas conhecidas e as encontradas. A medida que θ diminui as massas encontradas aproximam-se as massas iniciais.

Na figura 2.2, são apresentados os resultados obtidos para uma diminuição de 90% na rigidez k_4 . Os valores de θ e n são os mesmos da figura anterior e as colunas tem a mesma interpretação. Neste caso a perturbação foi aumentada já que na prática os danos podem ser mais agudos.

Finalmente, na figura 2.3, um valor de n maior foi testado, obtendo-se resultados aceitáveis em relação à diminuição de 90% na rigidez k_{20} . O peso do parâmetro θ fica evidente tanto na melhora das aproximações para as constantes de rigidez que não foram perturbadas, como para as massas reconstruídas.

Figura 2.1: Gráficos das constantes de rigidez e massas para uma perturbação de 50% e $\theta = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$

Figura 2.2: Gráficos das constantes de rigidez e massas para uma perturbação de 90% e $\theta = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$

Figura 2.3: Gráficos das constantes de rigidez e massas para uma perturbação de 90% e $\theta = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$ e $n = 50$

Resultados numéricos indicam que uma penalização baixa para as constantes de rigidez deixa estes parâmetros variarem de forma que não é possível localizar de maneira exata o local do dano. De fato os danos apresentam-se de maneira localizada, e portanto, muitos dos parâmetros de rigidez não mudam. Isto motiva a penalização considerada no funcional $F(\mu)$.

Os resultados obtidos mostram que a técnica pode ser usada de maneira eficiente para a detecção de perdas nas constantes de rigidez de um sistema. O fato de usar algoritmos robustos e precisos para calcular o vetor gradiente e a matriz Hessiana, fazem esta técnica atraente do ponto de vista numérico. Porém, o uso do parâmetro θ é inevitável para aumentar o desempenho da técnica. É por isso que uma reformulação da nossa estratégia, considerando uma função objetivo independente das massas, seria mais efetiva. Esta nova estratégia deveria incluir uma reformulação da nossa definição de dano usada até agora, o que será abordado nos capítulos seguintes.

Capítulo 3

Um Modelo de Elementos Finitos para a Barra

No Capítulo anterior foi apresentada uma técnica para a detecção de danos em um sistema massa-mola. A diminuição nas constantes de rigidez das molas foi o critério aplicado para decidir se ele apresenta dano. Na linha dos problemas de detecção, existem trabalhos onde o conceito de dano está ligado a parâmetros geométricos. Por exemplo, Fricke e Wu em [46], Wu em [45], [47] e [48], trabalham com localização de bloqueios em canos e cavidades retangulares. Uma reformulação do nosso modelo de massas e molas em termos de parâmetros geométricos será considerada para fazer nossa técnica mais efetiva, porém restrita a uma classe específica de problemas. As discretizações conhecidas na literatura apresentam uma dependência das massas e molas em termos de áreas, densidade e módulo de Young. Um caso particular, e de grande interesse, é uma barra que possua densidade e módulo de Young constantes. Isto permite deixar a dependência do modelo só nas áreas, conseguindo-se assim a localização do dano e sua quantificação. Na primeira seção deste capítulo, apresentamos um modelo baseado numa discretização usando elementos finitos. A formulação matricial da discretização permite que a reconstrução das áreas seja feita em termos de uma frequência e o modo de vibração respectivo, o que é atraente do ponto de vista prático. A reconstrução é sensível a ruídos incluídos nos modos de vibração. Esta sensibilidade aumenta quando o tamanho da discretização é incrementado, mas o uso de informação adicional nos permite diminuir de maneira eficiente esta sensibilidade. Em particular, uma técnica de filtragem da informação é apresentada permitindo diminuir a quantidade de dados adicionais requeridos para a detecção de danos. Finalmente, apresentamos alguns exemplos de detecção de dano.

3.1 Um modelo de Elementos Finitos para a Barra

Consideremos a equação 1.2, que governa as vibrações longitudinais da barra de comprimento L , densidade e módulo de Young constantes

$$\frac{d}{dx}\left(A\frac{du}{dx}\right) + \psi Au = 0, \quad 0 < x < L, \quad (3.1)$$

onde $\psi = \frac{\sigma\rho}{E}$, e condições de contorno $u(0) = u_0 = 0$ e $u'(L) = Q_0 = 0$. A formulação usando resíduos ponderados é descrita como

$$0 = \int_0^L w \left(\frac{d}{dx}\left(A\frac{du}{dx}\right) + \psi Au \right) dx, \quad (3.2)$$

onde w é a chamada função ponderação.

A formulação fraca da equação 3.1 é dada por

$$0 = \int_0^L \left(A \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} - \psi A w u \right) dx - w(L)Q_0. \quad (3.3)$$

A base do método de elementos finitos é aproximar a equação diferencial 3.1 em cada elemento da discretização mostrada na figura 3.1, a qual foi obtida dividindo a barra em elementos de comprimento h_e com extremos X_A e X_B .

Figura 3.1: Discretização da barra com espaçamento uniforme .

A aproximação polinomial da solução em um elemento é dada em geral pela fórmula

$$U^e = \sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j^e(x),$$

onde u_j^e são os valores da solução nos nós de cada elemento e ψ_j^e são as aproximações em cada elemento. Neste caso serão usadas aproximações por funções lineares. Então, temos para cada elemento

$$U^e = ax + b.$$

As constantes a e b podem ser determinadas de maneira de satisfazer $U^e(X_A) = u_1^e$ e $U^e(X_B) = u_2^e$. Uma vez encontrados os valores de a e b , a aproximação para U^e fica determinada por

$$U^e(x) = \psi_1^e(x)u_1^e + \psi_2^e(x)u_2^e = \sum_{j=1}^2 \psi_j^e(x)u_j^e \quad (3.4)$$

onde as funções $\psi_1^{(e)}$ e $\psi_2^{(e)}$ são definidas por

$$\psi_1^{(e)}(x) = \frac{X_B - x}{X_B - X_A}$$

$$\psi_2^{(e)}(x) = \frac{x - X_A}{X_B - X_A}.$$

Substituindo u na formulação fraca pela aproximação $U^e(x)$ e $\psi_1^{(e)}$ e $\psi_2^{(e)}$ por w , obtemos as fórmulas para as matrizes rigidez e massa respectivamente, para cada elemento:

$$(K)_{i,j}^{(e)} = \int_{X_A}^{X_B} A_e \frac{d\psi_i^{(e)}}{d\psi_j^{(e)}} dx$$

$$(M)_{i,j}^{(e)} = \int_{X_A}^{X_B} A_e \psi_i^{(e)} \psi_j^{(e)} dx,$$

Calculando as integrais, temos para cada elemento as matrizes:

$$K^{(e)} = \frac{A_e}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$M^{(e)} = \frac{A_e h_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

onde h_e e A_e são o comprimento e a área por elemento respectivamente. Para obter as matrizes rigidez e massa globais, fazemos a montagem das matrizes $K^{(e)}$ e $M^{(e)}$, o que nos leva ao problema generalizado de autovalor

$$(K - \lambda M)u = 0 \quad (3.7)$$

28CAPÍTULO 3. UM MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA A BARRA

onde $\lambda = \frac{\psi}{6N^2}$, $h_e = \frac{1}{N}$. As matrizes K e M são dadas por

$$K = \begin{pmatrix} A_1 + A_2 & -A_2 & & & \\ & -A_2 & A_2 + A_3 & -A_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -A_{n-1} & A_{n-1} + A_n & -A_n \\ & & & & -A_n & A_n \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

$$M = \begin{pmatrix} 2A_1 + 2A_2 & A_2 & & & \\ & A_2 & 2A_2 + 2A_3 & A_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & A_{n-1} & 2A_{n-1} + 2A_n & A_n \\ & & & & A_n & 2A_n \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

A estratégia de transformar esta equação generalizada de autovalor em uma equação simples de autovalor será abordada posteriormente. Agora mostramos uma outra estratégia para obter um método de reconstrução dos valores discretos. A idéia é escrever a equação 3.7 de maneira que os modos de vibração $(u_i)_1^n$ sejam os dados e os valores discretos das áreas as incógnitas. Sejam,

$$\vec{R}^T = (A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)$$

$$(a_i)_1^n = u_i - u_{i-1}$$

$$(b_i)_1^n = u_{i-1} + 2u_i$$

$$(c_i)_1^{n-1} = 2u_i + u_{i+1}$$

$$u_0 = 0,$$

e as matrizes

$$H_1 = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & 0 & & \\ 0 & a_2 & -a_3 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & a_{n-1} & -a_n \\ & & & 0 & a_n \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & & \\ 0 & b_2 & c_2 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & 0 & b_n \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Então, a equação 3.7 pode ser escrita como:

$$(H_1 - \lambda H_2)\vec{R} = 0. \quad (3.12)$$

Notamos que as matrizes H_1 e H_2 contém a informação dos modos de vibração, e o vetor $\vec{R}$ os valores discretos das áreas. Da i -ésima linha da equação 3.12 temos

$$a_i A_i - \lambda b_i A_i = a_{i+1} A_{i+1} + \lambda c_i A_{i+1}, \quad (3.13)$$

válida para $i = n - 1, \dots, 1$. Assim, para duas áreas consecutivas,

$$A_i = \left(\frac{a_{i+1} + \lambda c_i}{a_i - \lambda b_i} \right) A_{i+1} \quad i = 1, \dots, n - 1. \quad (3.14)$$

A partir desta última relação é possível construir um algoritmo de reconstrução dos valores $(A_i)_1^n$. Primeiramente, observamos que os valores a_i, b_i e c_i são funções das componentes do vetor u . Se o valor de λ é conhecido, um processo de reconstrução é implementado desde que um fator adicional seja incluído, por exemplo, A_n . Esta reconstrução é baseada no trabalho de Ram e Gladwell [39], os quais trabalham na reconstrução de um sistema massa-mola a partir de uma frequência e dois modos de vibração. Assim, é possível construir os valores discretos das áreas a partir de uma frequência de vibração λ e o respectivo modo u , os quais denotamos pelo par (λ, u) . Os passos para fazer a reconstrução são resumidos no seguinte

ALGORITMO 3.1: (Calculo das áreas a partir de um par (λ, u))

Dados um autovalor λ , o autovetor correspondente $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e a n -ésima área A_n , o seguinte algoritmo reconstrói a distribuição de áreas :

Calcular os coeficientes

$$(a_i)_1^n, (b_i)_1^n \text{ e } (c_i)_1^{n-1}$$

Para $i = n - 1, \dots, 1$,

calcular $(A_i)_1^{n-1}$ a partir de 3.14.

3.2 Exemplos de Reconstrução

A seguir, mostramos alguns exemplos de reconstrução para diferentes distribuições de áreas e tamanhos das discretizações. Uma forma de obter o par $(\lambda, \vec{u})$ numericamente é escolher uma distribuição de áreas conhecida e resolver o problema generalizado de autovalor 3.7. A partir do par, e usando o algoritmo 3.1, calculamos os valores discretos da função $A(x)/L$, com $L=10$,

30CAPÍTULO 3. UM MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA A BARRA

em pontos igualmente espaçados do intervalo $[0, 1]$. Para mostrar a eficiência e precisão da reconstrução, o erro relativo (em escala $\log_{10}$) entre as áreas calculadas pelo algoritmo e as conhecidas é mostrado também na Figura 3.2 para cada caso.

Figura 3.2: Gráficos da geometria e o erro relativo para $A(x) = 0.3 + \frac{1}{0.2}e^{-\frac{(x-0.5)^2}{(0.25)^2}}$; $A(x) = 4(1-x)^3 + (1-x)^2 + 1-x + 0.1$ e $A(x) = 1-x$ respectivamente.

3.3 O modelo fisicamente realizável

Aspectos importantes em *problemas de identificação de parâmetros* são a análise de **existência**, **unicidade** e **sentido físico**. O estudo de condições necessárias e suficientes para a existência e unicidade envolve a análise dos dados para fazer a reconstrução viável e de maneira única. Uma condição de existência imediata para construir a distribuição de áreas $(A_i)_1^{n-1}$ a partir do par $(\lambda, \vec{u})$ é $a_i - \lambda b_i \neq 0$. Condições para a unicidade da reconstrução são estabelecidas a partir do fato que o fator adicional A_n determina a diferença entre as diferentes reconstruções.

O sentido físico dos parâmetros reconstruídos refere-se à positividade dos valores discretos das áreas, o que faz com que a reconstrução seja fisicamente realizável. Pela forma da reconstrução, vemos que se a n -ésima área é positiva, as restantes áreas $(A_i)_1^{n-1}$ serão positivas desde que a relação

$$\left(\frac{a_{i+1} + \lambda c_i}{a_i - \lambda b_i} \right) > 0$$

Problemas de instabilidade numérica apresentam-se quando os termos u_{i-1} e u_{i+1} ficam muito próximos. A diferença destes termos aparece no denominador de 3.14 como o termo a_i , de maneira que pequenas porcentagens de erros em u_{i-1} e u_{i+1} podem produzir uma porcentagem grande de erro em a_i . Porém, este problema pode ser superado usando informação adicional como veremos posteriormente.

3.4 Erros na medição dos dados

Os exemplos apresentados na seção 3.2 mostram que a reconstrução pode ser feita de maneira efetiva a partir do par $(\lambda, \vec{u})$ desde que as condições da seção 3.3 sejam satisfeitas. Nestes exemplos, tem-se obtido o par $(\lambda, \vec{u})$ numericamente e os resultados obtidos para as áreas são excelentes. Cabe então a pergunta: o que aconteceria se o par, ou parte dele, não são fornecidos de maneira exata? O propósito desta seção é justamente responder esta questão. Do ponto de vista prático, para fazer a reconstrução precisa-se medir a frequência natural e o modo de vibração associado, requerimento que pode ser muito exigente. De fato, existem técnicas para medir o par, as quais dependem da precisão dos aparelhos usados. Então, é razoável pensar que o par $(\lambda, \vec{u})$ esteja contaminado com algum tipo de ruído o qual se apresenta como perturbações aleatórias introduzidas no par. Alguns autores observam que as medidas dos modos de vibração são menos precisas (ver [41], [40] e [12]), e que as frequências naturais podem ser medidas com uma porcentagem baixa de erro.

O nosso objetivo agora será analisar o comportamento do método de reconstrução quando algum ruído é incluído nos modos de vibração. Para simular este ruído, introduzimos pequenas perturbações aleatórias nos modos de vibração da ordem de até $t\%$. O valor de t é variável em

	Teste 1		Teste 2		Teste 3	
i	δ_i	A_i^*	δ_i	A_i^*	δ_i	A_i^*
1	9.14464E-04	0.1063268	-9.27001E-04	0.1012863	8.6877E-04	0.1092767
2	2.35097E-04	0.1064713	-8.34856E-04	0.1012676	2.6596E-04	0.10940852
3	6.49007E-04	0.1062612	8.71710E-04	0.1007523	-7.4275E-04	0.1096767
4	7.13234E-04	0.1063298	-2.94257E-04	0.101632525	8.8160E-04	0.1086862
5	9.74221E-04	0.1061996	1.21077E-04	0.10097294	9.7262E-04	0.10926342
6	-4.32465E-04	0.1074511	-9.9862E-04	0.1020312	9.9564E-05	0.1100180
7	7.22063E-04	0.1051117	7.34547E-04	0.0994793	9.9264E-04	0.10834196
8	8.50466E-04	0.1063105	4.33947E-04	0.1018516	-1.5865E-05	0.1109398
9	-8.00006E-04	0.1102774	1.69410E-04	0.1018377	-8.8939E-04	0.1108562
10	-1.79246E-05	0.1000000	3.63024E-04	0.1000000	8.4397E-04	0.1000000

Tabela 3.1: Diferentes testes mostrando a influência dos ruídos nos modos.

geral, devido à não existência de uma medida convencional para a precisão da técnica usada na medição dos modos. Para o modelo em estudo, uma perturbação aleatória de até $\pm 0.1\%$ foi considerada por Gladwell [39] e Ram [36], os quais trabalham com um modelo de barra do tipo fixo-livre como o estudado neste trabalho. Consideremos a barra uniforme $A_i = 0.1$, $i = 1, \dots, n$ e uma discretização do intervalo $[0,1]$ de 10 elementos igualmente espaçados. Os resultados obtidos quando introduzimos perturbações aleatórias nos modos são resumidos na Tabela 3.1.

Nos testes mostrados nesta Tabela, se mostram os números aleatórios δ_i , que equivalem a erros de 0.1% , e as componentes do vetor perturbado $\mathbf{u}^{**}$ que foram determinadas pela fórmula $(u_i^{**}) = u_i(1 + \delta_i)$. Se mostram também os valores A_i^* das novas áreas recuperadas pelo método. Apesar da queda na precisão das áreas reconstruídas, o sentido realizável das áreas não é perdido. Esta perda na precisão dos valores calculados acontece porque pequenos erros nos modos induzem erros nas diferenças $u(i) - u(i - 1)$. O problema é que ocorre cancelamento se $u(i)$ e $u(i - 1)$ estão próximos, o qual acontece quando n é incrementado. Este tipo de diferença aparece na equação 3.15, especificamente nos termos a_i .

Porém, usando informações adicionais, pode-se diminuir esta sensibilidade. A idéia é usar s autovetores contaminados para $s \geq 2$, com os seus respectivos autovalores. Com s pares, é resolvido um sistema de equações no sentido dos mínimos quadrados, obtendo-se uma melhora na precisão das áreas reconstruídas à medida que s é incrementado. Neste caso, se mais de um autovetor contaminado é usado, pode-se escrever a equação 3.14 como uma equação vetorial. Suponhamos que são conhecidos s vetores contaminados $(\mathbf{u}^{(j)})_1^s$, onde

$$\mathbf{u}^{(j)} = (u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, u_3^{(j)}, \dots, u_n^{(j)})^T,$$

e os autovalores associados $(\lambda_j)_1^s$. Para cada modo $u^{(j)}$ podemos construir a seguinte equação :

$$(a_i^{(j)} - \lambda_j b_i^{(j)}) A_i = (a_{i+1}^{(j)} + \lambda_j c_i^{(j)}) A_{i+1} \quad (3.15)$$

que é válida para $j = 1, \dots, s$; $i = n - 1, \dots, 1$. Os termos $a_i^{(j)}, b_i^{(j)}$ e $c_i^{(j)}$ são definidos respectivamente como

$$(a_i^{(j)})_1^n = u_i^{(j)} - u_{i-1}^{(j)},$$

$$(b_i^{(j)})_1^n = u_{i-1}^{(j)} + 2u_i^{(j)},$$

e

$$(c_i^{(j)})_1^{n-1} = 2u_i^{(j)} + u_{i+1}^{(j)},$$

com

$$u_0^{(j)} = 0.$$

Então, podemos agrupar a informação deduzida para cada j na seguinte equação vetorial

$$\begin{bmatrix} a_i^{(1)} - \lambda_1 b_i^{(1)} \\ a_i^{(2)} - \lambda_2 b_i^{(2)} \\ a_i^{(3)} - \lambda_3 b_i^{(3)} \\ \vdots \\ a_i^{(s)} - \lambda_s b_i^{(s)} \end{bmatrix} [A_i] = \begin{bmatrix} a_{i+1}^{(1)} + \lambda_1 c_i^{(1)} \\ a_{i+1}^{(2)} + \lambda_2 c_i^{(2)} \\ a_{i+1}^{(3)} + \lambda_3 c_i^{(3)} \\ \vdots \\ a_{i+1}^{(s)} + \lambda_s c_i^{(s)} \end{bmatrix} [A_{i+1}]. \quad (3.16)$$

Definimos então os vetores;

$$\vec{P}_i = (a_i^{(1)} - \lambda_1 b_i^{(1)}, a_i^{(2)} - \lambda_2 b_i^{(2)}, \dots, a_i^{(s)} - \lambda_s b_i^{(s)})^T$$

$$\vec{Q}_i = (a_{i+1}^{(1)} + \lambda_1 c_i^{(1)}, a_{i+1}^{(2)} + \lambda_2 c_i^{(2)}, \dots, a_{i+1}^{(s)} + \lambda_s c_i^{(s)})^T.$$

Assim , a equação 3.16 fica :

$$\vec{P}_i A_i = \vec{Q}_i A_{i+1} \quad i = n - 1, \dots, 1. \quad (3.17)$$

Se o valor de A_{i+1} é conhecido, a equação 3.17 transforma-se num sistema sobre-determinado de equações para A_i , onde tem-se s equações e uma incógnita. Para a solução deste problema sobre-determinado, usamos as técnicas desenvolvidas para resolver sistemas lineares no sentido dos mínimos quadrados. A idéia é encontrar um valor A_i para o qual a distancia entre $\vec{P}_i A_i$ e $\vec{Q}_i A_{i+1}$ seja mínima o que equivale a minimizar a norma

$$\|r(A_i)\|_2 = \|\vec{P}_i A_i - \vec{Q}_i A_{i+1}\|_2.$$

Uma das técnicas para a resolução de um sistema linear $Ax = b$ onde A é de ordem $m \times n$ ($m > n$), é a procura de uma solução de mínimos quadrados. Dependendo do posto da matriz A

i	$u^{(1)}$	$u^{(2)}$	$u^{(3)}$	$u^{(4)}$	$u^{(5)}$	$u^{(6)}$
1	-0.009503	0.267006	-0.429766	-0.568780	0.672592	-0.727429
2	-0.178778	0.475809	-0.607781	-0.516441	0.210433	0.227589
3	-0.262651	0.058089	-0.429766	0.099866	-0.606754	0.656223
4	-0.340056	0.559347	0.000000	0.607113	-0.400267	-0.432901
5	-0.409088	0.415872	0.429766	0.451386	0.481522	-0.520781
6	-0.468047	0.181743	0.607781	-0.197263	0.550921	0.595838
7	-0.515481	-0.092004	0.429766	-0.630497	-0.309156	0.334362
8	-0.550222	-0.345695	0.000000	-0.375216	-0.647646	-0.700449
9	-0.571415	-0.524030	-0.429766	0.289807	0.106528	-0.115213
10	-0.578538	-0.588132	-0.607781	0.638356	0.680976	0.736496

Tabela 3.2: Modos de vibração usados para $s=6$.

(completo ou deficiente), diversos métodos existem para a resolução do sistema linear referido. Um deles é o chamado método das equações normais o qual resolve o sistema $A^T A x = A^T b$ calculando primeiro a decomposição de Cholesky da matriz $A^T A$, para depois transformar a equação em dois sistemas lineares triangulares.

Uma idéia similar pode ser aplicada para a equação 3.17. Pré-multiplicando essa equação por $\vec{P}_i^T$, temos a seguinte relação entre as áreas consecutivas A_i e A_{i+1} :

$$A_i = \frac{\vec{P}_i^T \vec{Q}_i}{\|\vec{P}_i\|^2} A_{i+1} \quad i = n-1, \dots, 1. \quad (3.18)$$

Antes de usar informação adicional, observamos que a perda de precisão na reconstrução é causada pelo fato que pequenas perturbações nas componentes do vetor u produzem cancelamentos nas diferenças entre componentes consecutivas de u . Porém, se usarmos informação adicional, essas diferenças são dominadas por aquelas onde não acontece cancelamento. Essa é a justificativa que faz a equação 3.18 controlar a sensibilidade da reconstrução a ruídos. Vejamos agora o que acontece quando é usado mais de um autovetor e seus respectivos autovalores.

A Tabela 3.2, mostra os modos de vibração usados antes deles serem contaminados. Na Tabela 3.3 são apresentados os valores aproximados das áreas para diferentes valores de s . Claramente, as aproximações melhoram conforme o valor de s é aumentado, o que confirma o fato que usando informação adicional pode-se diminuir a sensibilidade do algoritmo 3.1.

Na Tabela 3.4 mostra-se os erros relativos entre as áreas conhecidas e as aproximadas usando a norma do máximo. Os resultados para os erros são razoáveis se é levado em conta que a aproximação inicial era prejudicada com o uso de um autovetor contaminado.

i	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$	$s = 4$	$s = 5$	$s = 6$
1	0.102888	0.100457	0.099755	0.099815	0.100167	0.100067
2	0.103162	0.100259	0.099939	0.099846	0.100046	0.100038
3	0.102941	0.100020	0.100046	0.099949	0.100021	0.100021
4	0.102996	0.100285	0.100038	0.099915	0.099835	0.099985
5	0.102356	0.100168	0.099948	0.099831	0.100028	0.099925
6	0.102799	0.100344	0.099877	0.099789	0.100042	0.099895
7	0.103339	0.100146	0.099949	0.099872	0.100081	0.098644
8	0.103748	0.100089	0.100039	0.099958	0.100060	0.099944
9	0.102462	0.100220	0.100064	0.099840	0.100073	0.099990
10	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000

Tabela 3.3: Valores das áreas usando informação adicional (ruído de 0.1%).

s	$\ A_{apr.} - A_{ex.} \ $
1	3.7483046489474D-03
2	4.5741389102497D-04
3	2.4428603331570D-04
4	2.1026835405406D-04
5	1.6732023602000D-03
6	1.3550933314784D-04

Tabela 3.4: Erro relativo entre as áreas conhecidas e as reconstruídas (ruído de 0.1%).

	Teste 1		Teste 2		Teste 3	
i	δ_i	A_i^*	δ_i	A_i^*	δ_i	A_i^*
1	-7.09780E-03	0.1368398	-2.06115E-03	0.0675240	-5.07798E-03	0.0406385
2	7.09023E-03	0.1330378	8.60861E-03	0.0661103	-2.54391E-03	0.0404325
3	-7.45818E-03	0.1412343	9.5930E-03	0.0716312	5.10322E-03	0.0396138
4	8.95069E-03	0.1277391	-6.58352E-03	0.0646586	2.3166E-03	0.0412042
5	-2.02969E-03	0.1439440	1.08431E-03	0.0672607	2.93110E-03	0.0397134
6	-2.20206E-03	0.1356996	1.14442E-03	0.0657321	4.09773E-03	0.0425606
7	-4.01281E-03	0.1379452	3.59592E-03	0.0636618	3.28126E-03	0.0375543
8	-1.66200E-03	0.1309493	8.18633E-03	0.0739292	5.46091E-03	0.0395500
9	-6.84376E-03	0.1528412	5.42625E-03	0.066647241	5.01181E-03	0.0415091
10	-1.53328E-03	0.1000000	-2.94494E-03	0.1000000	-9.55094E-03	0.1000000

Tabela 3.5: Testes de reconstrução de áreas incluindo ruído de 1.0% nos modos.

Vejamos agora o que acontece se o tamanho da perturbação é aumentado. Consideramos erros de até 1.0%, ou seja, se u_i são as componentes exatas do autovetor associado ao autovalor λ , as novas componentes do vetor $\mathbf{u}$ são dadas por $(u_i^{**}) = u_i(1. + \delta_i)$ onde $\delta_i \in [-0.01, 0.01]$. Na Tabela 3.5, são mostrados os resultados para a distribuição $A_i = 0.1$, com $n = 10$.

Diversos testes numéricos foram feitos para analisar esta porcentagem maior de perturbação. Para este caso, erros da ordem de 30% ou mais em relação aos valores conhecidos das áreas foram detetados. Se informações adicionais são usadas junto com a equação 3.18, obtemos os resultados mostrados na Tabela 3.6. Os erros associados são mostrados na Tabela 3.7.

A ferramenta usada para superar o problema da sensibilidade é relativamente simples na sua formulação e razoavelmente barata. Na prática, os modos de vibração estão sempre contaminados com algum nível de ruído. Além disso, a medição dos modos apresenta dificuldades na prática o que pode significar uma limitação do ponto de vista prático para este método.

i	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$	$s = 4$	$s = 5$	$s = 6$	$s = 7$
1	0.129915	0.100085	0.103673	0.097408	0.098803	0.098901	0.098938
2	0.133447	0.101569	0.102658	0.099451	0.098699	0.099559	0.100026
3	0.130586	0.098577	0.099847	0.099201	0.098798	0.099616	0.099858
4	0.131288	0.101207	0.100475	0.098054	0.098713	0.099997	0.100055
5	0.123525	0.093257	0.099896	0.097769	0.098425	0.099854	0.100043
6	0.128765	0.097646	0.100434	0.099406	0.098251	0.099972	0.100268
7	0.135699	0.096249	0.099804	0.100171	0.098422	0.099797	0.099976
8	0.141472	0.097599	0.099824	0.099305	0.098734	0.100083	0.099795
9	0.124114	0.096744	0.101043	0.099356	0.099621	0.100095	0.100217
10	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000

Tabela 3.6: Áreas reconstruídas usando informação adicional com $s = 7$ (ruído de 1.0%).

s	$\ A_{apr.} - A_{ex.} \ $
1	4.1472240315836D-02
2	6.7423549191109D-03
3	3.6737327399406D-03
4	2.5915512259220D-03
5	1.7482894207063D-03
6	1.0981891422831D-03
7	1.0615448767804D-03

Tabela 3.7: Erro relativo entre as áreas conhecidas e as reconstruídas (ruído de 1.0%).

3.5 Aplicação à detecção de Danos

Para aplicar o método descrito nas seções anteriores à detecção de danos em uma estrutura, suporemos que o dano não se encontra no extremo direito da barra. Este fato justifica o uso da n -ésima área como um fator adicional. Consideremos a barra uniforme $A_i = 0.1$ e uma discretização de 10 elementos. Para simular o dano usamos a mesma estratégia aplicada para massa-mola. Como um primeiro teste, induzimos uma diminuição de 80% na área A_5 , e calculamos o par (λ, u) . Na terceira coluna da Tabela 3.8 são mostrados os valores discretos das áreas A_i^* que o algoritmo 3.1 reconstrói, e na última coluna os erros relativos (em escala $\log_{10}$) entre as áreas exatas e as reconstruídas. A diminuição imposta antes de aplicar o algoritmo foi detetada

i	$u(i)$	A_i	$\log_{10}(\text{e.r.})$
1	0.09716730	0.09999999	-10.0344585
2	0.19262091	0.09999999	-10.3473674
3	0.28467738	0.09999999	-10.8956734
4	0.37171314	0.09999999	-10.8764223
5	0.78722484	0.01999999	-0.09856444
6	0.86199686	0.09999999	-10.0775765
7	0.92156631	0.09999999	-10.9371478
8	0.96488260	0.09999999	-10.1231477
9	0.99118176	0.09999999	-10.8397869
10	1.00000000	1.00000000	

Tabela 3.8: Detecção de um dano usando modos sem ruídos.

calculando o par numericamente. Os resultados são excelentes. Mas vejamos o que acontece se um ruído de 0.1% é incluído nos modos de vibração. Os resultados são mostrados na Tabela 3.9.

Apesar da perda na precisão nas áreas que não são diminuídas, existe uma diferença entre a área A_5 e as restantes. As experiências numéricas mostram que o fato de incluir um ruído nos modos, não influi na localização do dano. Tentamos agora melhorar os resultados usando dados adicionais, o que é resumido Tabela 3.10. O uso de informação adicional permite melhorar a aproximação e, de fato, a intensidade do dano é melhor aproximada.

Outro teste feito com o algoritmo 3.1 é analisar se é possível detetar vários danos. Como um exemplo para ilustrar a inclusão de vários danos, consideremos a barra uniforme e as diminuições dadas na Tabela 3.11. Os resultados quando se usam dados adicionais, mostram que as porcentagens de diminuição impostas a priori são detetadas e melhoradas como se mostra na Tabela 3.12. Quando o tamanho da discretização é maior, diferenças consecutivas dos modos

i	Teste 1		Teste 2		Teste 3	
	δ_i	A_i^*	δ_i	A_i^*	δ_i	A_i^*
1	-9.1311E-05	0.089673	-1.75297E-04	0.095831	-8.6553E-04	0.094801
2	9.72531E-04	0.089482	7.984928E-04	0.095645	-2.7624E-04	0.094690
3	-5.7337E-04	0.090003	7.175902E-04	0.095765	-9.3377E-04	0.094937
4	-4.7368E-04	0.089666	1.891382E-04	0.095959	5.06262E-04	0.094239
5	1.90913E-06	0.017923	5.477926E-04	0.019144	-6.5400E-04	0.018981
6	4.77918E-04	0.089207	-6.83413E-04	0.097012	4.62524E-04	0.093737
7	6.00973E-04	0.089554	8.439184E-04	0.093648	2.99874E-04	0.095089
8	1.63558E-04	0.090480	-9.12975E-04	0.099312	-1.6537E-04	0.095722
9	9.56566E-04	0.087458	7.646368E-04	0.090368	7.88364E-04	0.092043
10	-5.7853E-04	0.100000	5.348981E-04	0.100000	2.37226E-04	0.1000000

Tabela 3.9: Testes mostrando a influencia dos ruídos na detecção de um dano.

i	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$	$s = 4$	$s = 5$	$s = 6$	$s = 7$
1	0.104380	0.099070	0.099651	0.100424	0.099842	0.100183	0.099982
2	0.104085	0.099059	0.099776	0.103324	0.099882	0.100187	0.099915
3	0.104700	0.098638	0.099627	0.100214	0.099854	0.100105	0.100007
4	0.103665	0.099453	0.099498	0.100137	0.099800	0.100146	0.099924
5	0.019873	0.019908	0.020891	0.019951	0.019981	0.020025	0.020007
6	0.104373	0.099544	0.099615	0.099825	0.099890	0.099971	0.100048
7	0.104612	0.099538	0.099691	0.099860	0.099907	0.099988	0.100070
8	0.103836	0.099548	0.099717	0.099918	0.099960	0.099970	0.100025
9	0.106048	0.099380	0.099551	0.099965	0.100044	0.099944	0.099984
10	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000

Tabela 3.10: Uso de informação adicional para detetar um dano.

40CAPÍTULO 3. UM MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA A BARRA

área	diminuição
2	80%
4	40%
6	90%
8	50%

Tabela 3.11: Porcentagens de danos induzidos para $n=10$.

i	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$	$s = 4$	$s = 5$	$s = 6$	$s = 7$
1	0.098180	0.099298	0.100718	0.099829	0.100194	0.100044	0.099990
2	0.019673	0.019842	0.020163	0.019972	0.020067	0.020008	0.019999
3	0.097566	0.099241	0.100346	0.099987	0.099989	0.100147	0.099997
4	0.059428	0.059842	0.060216	0.059901	0.059933	0.060026	0.059994
5	0.099119	0.099498	0.100305	0.099604	0.099917	0.100265	0.099998
6	0.009944	0.009994	0.010011	0.009995	0.010018	0.009991	0.009998
7	0.099916	0.099957	0.100229	0.100092	0.100091	0.099972	0.099981
8	0.049956	0.050169	0.050057	0.050029	0.050014	0.049991	0.049994
9	0.099058	0.010026	0.100189	0.100037	0.100018	0.099993	0.099996
10	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000

Tabela 3.12: Uso de informação adicional ($s = 7$) para detetar 4 danos.

ficam cada vez menores, ocorrendo cancelamentos que podem levar a uma reconstrução errada. Conseqüentemente, uma discretização mais fina demandará uma maior quantidade de dados adicionais se uma boa aproximação é desejada. Para testar o algoritmo para n maior, consideremos $n = 100$, e os danos especificados na Tabela 3.13.

área	diminuição
20	20%
40	90%
50	50%
60	30%
80	5%

Tabela 3.13: Porcentagens de danos induzidos para $n=100$.

área	dano induzido	dano detetado
20	20%	19%
40	90%	90%
50	50%	50%
60	30%	30%
80	5%	4,9%

Tabela 3.14: Comparação entre as porcentagens de danos induzidos e danos detetados ($n = 100$).

Mostramos na Figura 3.3 os gráficos para a barra reconstruídas para $s = 1, 2, 3, 4, 5$ e 6 . Vemos que as localizações dos danos podem ser melhoradas se informação adicional é usada. Se usarmos $s = 1$ as aproximações obtidas não entregam uma boa localização dos danos induzidos. Um outro problema é a intensidade dos danos induzidos; se observa que para detetar danos de baixa porcentagem de intensidade é preciso aumentar a quantidade de dados adicionais, pois as oscilações produzidas pela reconstrução não permitem localiza-los. Na tabela 3.14, se mostram os danos induzidos e a porcentagem de dano detetado com $s = 6$.

3.6 Uso de Filtro na reconstrução

Os resultados mostrados na seção anterior mostram que com o uso de informação adicional, pode-se melhorar a detecção dos danos. Os resultados são aceitáveis, e confirmam que o fato de usar informação adicional melhora consideravelmente a reconstrução da distribuição das áreas e, portanto, é possível detetar a localização do dano. Uma restrição prática imediata é o alto custo que implica medir os s pares (λ, u) . Uma forma de evitar fazer estas medições, é aproveitar a informação gerada a partir de $s=1$, ou seja usar um par (λ, u) o qual na prática é o caso ideal. Experiências numéricas mostram que a inclusão de erros nos modos de vibração afetam as

42CAPÍTULO 3. UM MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA A BARRA

Figura 3.3: Barra reconstruída para $s = 1, 2, 3, 4, 5$ e 6 . Erro de 0.1% na medição nos modos de vibração

aproximações das áreas a serem reconstruídas especialmente quando o tamanho da discretização é aumentado. Porém, estes erros nos modos não afetam sensivelmente a localização do dano como pode-se ver por exemplo na Tabela 3.9 da seção anterior. Este fato motiva a fazer algum tipo de *filtragem* dos dados gerados procurando melhorar as aproximações.

Uma idéia diferente a ser considerada na reconstrução é usar, ao invés da última área conhecida, varias áreas escolhidas convenientemente. Na prática, o que será usado é um bloco de áreas conhecidas consecutivas, que denotamos por bl , o qual colocamos em diferentes locais da barra. Com cada posição do bloco de áreas conhecidas é possível fazer a reconstrução das áreas restantes da barra, o qual permite obter diferentes aproximações para a área num local específico.

Do ponto de vista da detecção de danos, pode-se pensar que isto dificulta a localização, pois se um bloco de áreas conhecidas é fixado num local da barra que contém um possível dano, ele não poderá ser localizado. Para superar este problema, calculamos a média das aproximações obtidas a partir das diferentes posições dos blocos, obtendo-se assim para cada área uma média a qual nos permite localizar os possíveis danos. Este processo corresponde a uma *filtragem* das áreas recuperadas e tem por objetivo melhorar as aproximações das áreas restantes e diminuir as oscilações produzidas pela inclusão de ruídos nos modos.

Do ponto de vista numérico, o processo é uma aplicação do *algoritmo 3.1* substituindo a n -ésima área por um bloco de áreas conhecidas. Consideremos uma discretização das áreas de uma barra arbitrária com tamanho de discretização n e suponhamos conhecido o bloco de áreas bl formado pelas áreas $A_p, A_{p+1}, A_{p+2}, \dots, A_q$, onde p, q são inteiros positivos satisfazendo $1 \leq p \leq q \leq n$. A reconstrução das áreas restantes é feita da seguinte forma: para reconstruir as áreas $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{p-1}$ usamos A_p como área conhecida e o processo de reconstrução é feito de maneira semelhante ao *algoritmo 3.1*. Para a reconstrução das áreas $A_{q+1}, A_{q+2}, A_{q+3}, \dots, A_n$ usamos uma versão modificada desse algoritmo, onde a área A_q é usada como área conhecida e o processo de reconstrução é no sentido oposto ao *algoritmo 3.1*.

área	dano induzido	dano detetado	dano fixado
15	40%	30%	39,68%
65	70%	54%	68,88%

Tabela 3.15: Porcentagens de danos detetados e fixados usando filtro ($n = 100$).

3.6.1 Exemplos do uso de Filtro

Para mostrar o uso do filtro, consideramos uma barra uniforme onde $A_i = 0.1$. Introduzimos um erro de 0.1% nos modos de vibração e uma discretização de tamanho $n = 100$. Os danos e sua intensidade são mostrados na tabela 3.15. Pode-se ver que a intensidade dos danos detetados apresentam diferenças em quantidade. Esta diferença é produzida pelo fato de posicionar os blocos sobre os possíveis danos e, portanto, afetando o cálculo da média das áreas. Já que os possíveis danos foram localizados usando a técnica dos blocos, podem-se fixar as áreas que não ficam sobre locais danificados da barra. Isto permite fazer uma nova reconstrução a qual entrega informação mais precisa da intensidade do dano. Os danos obtidos com esta última reconstrução serão chamados de *danos fixados*. Na última coluna da tabela 3.15 se mostram os danos fixados obtidos e pode-se ver que a intensidade dos danos é mais próxima à do dano induzido.

As diferentes posições dos blocos assim como a média das áreas obtidas são mostradas na figura 3.4. Na figura 3.5 se mostra o resultado obtido para danos fixados.

Um aspecto importante no uso de filtro é a escolha do tamanho do bloco a ser usado. Testes numéricos com diferentes tamanhos de blocos foram feitos levando em conta que o tamanho do bloco depende do tamanho da discretização a ser considerada. Se n é o tamanho da discretização para um determinado problema de detecção de danos, adotamos 20% de n como tamanho de bloco. Na prática é natural que blocos menores sejam usados, mas as experiências numéricas indicam que se o tamanho do bloco é diminuído, a precisão na reconstrução das áreas da barra é perdida. Isto dificulta a localização do dano e precisa de um esforço maior para o processo de filtragem.

Outro aspecto importante no problema de detecção de danos é determinar a capacidade da técnica para localizar diferentes intensidades de danos. Devido às oscilações produzidas pela inclusão de ruído nos modos de vibração, pode acontecer que danos de baixa intensidade não sejam localizados. Consideremos a barra uniforme de áreas $A_i = 0.1$ e os danos induzidos mostrados na tabela 3.16. Posições aleatórias de blocos foram usadas para gerar os gráficos das reconstruções mostradas na figura 3.6. Pode-se ver que os danos para as áreas A_{15} e A_{70} não podem ser localizados devido as oscilações produzidas pela inclusão de erros nos modos de vibração. Se a técnica do filtro é aplicada, temos a reconstrução mostrada na Figura 3.8a. A

Figura 3.4: *Uso de blocos aleatórios para a detecção de dois danos.*

Figura 3.5: Danos fixados para a detecção de dois danos.

área	dano induzido
10	5%
43	10%
70	3%

Tabela 3.16: Danos induzidos de baixa intensidade para $n = 100$.

media calculada só consegue localizar a diminuição na área A_{43} com 8% de intensidade. Se supusermos que o único dano ocorre nessa área, podemos fixar as restantes áreas para melhorar a aproximação da intensidade do dano. A barra reconstruída após fixar essas áreas é mostrada na figura Figura 3.8b. Outros testes numéricos foram feitos incluindo danos de baixa intensidade mas a presença das oscilações continua dificultando a localização dos danos. Danos de intensidade maior ao 10% não apresentam problemas de localização assim como a quantidade de danos induzidos.

Este método para a reconstrução dos valores discretos das áreas resulta atraente do ponto de vista matemático. Apesar da sensibilidade a erros nas medidas dos modos de vibração, pode-se usar uma técnica computacional simples para aproveitar a informação obtida a partir de uma frequência e um modo de vibração.

Do ponto de vista prático, inovações e melhoras das técnicas usadas para a medição das frequências e modos de vibração aparecem constantemente na área de análise modal. Isso ajuda na aplicação desta técnica, pois a presença de ruído nas medições fazem com que a informação adicional tenha de ser fornecida para melhorar a aproximação.

O algoritmo para a reconstrução das áreas da barra usando uma frequência e um modo de vibração baseia-se na estratégia que deixa as componentes do autovetor u nas matrizes H_1 e

Figura 3.6: *Uso de blocos aleatórios para localizar danos de baixa intensidade.*

Figura 3.7: Danos fixados para a detecção de danos de baixa intensidade.

H_2 , e os valores discretos das áreas como incógnitas nas equações 3.7 e 3.12. Esta estratégia é diferente do ponto de vista da análise matricial à estratégia usada para massa-mola, na forma com que a equação generalizada de autovalor é tratada.

A técnica de detecção de danos sem informação adicional é muito eficiente mas instável numericamente. A técnica que usa informação adicional é fácil de ser implementada, mas o valor de s não é conhecido a priori. O seguinte passo será transformar a equação generalizada 3.7 em uma equação simples de autovalor o que nos levará a uma formulação diferente onde novas técnicas serão desenvolvidas. Deixamos essa análise para o capítulo seguinte.

Capítulo 4

Estratégia Multidimensional para o Modelo de Elementos Finitos

Este capítulo tem por objetivo apresentar uma estratégia que será usada para a detecção de danos estruturais. A estratégia está baseada no fato de que os valores discretos das áreas de uma barra podem ser consideradas como funções do espectro intercalado μ .

Na primeira seção deste capítulo, apresentamos um método de reconstrução para as áreas $(A_i)_1^n$ de uma barra, diferente do método desenvolvido no Capítulo 3. Esta nova reconstrução depende das frequências de vibração da barra com condições de contorno do tipo fixo-livre e fixo-fixado $(\lambda_i)_1^n$ e $(\mu_i)_1^{n-1}$ respectivamente. A reconstrução é feita transformando primeiro a equação generalizada 3.7 em uma equação simples de autovalor $(J - \lambda I)v = 0$. A matriz J possui uma estrutura especial e seus autovalores satisfazem propriedades de simetria que serão úteis na formulação dos algoritmos. De fato, prova-se que as áreas podem ser reconstruídas de maneira única a partir da metade dos espectros mencionados, mais um fator adicional escolhido tal como a n -ésima área A_n . A mesma idéia usada no Capítulo 2 será aplicada à matriz J , considerada como uma função do espectro intercalado μ , ou seja, $J \equiv J(\mu)$.

A estratégia para a detecção de danos em sistemas massa-mola pode ser aplicada ao nosso modelo de barra por áreas. Para detetar diminuições nas áreas efetivas da barra, temos que levar em conta que as áreas A_i do projeto original de uma barra podem ser consideradas como funções do espectro intercalado μ , ou seja, $A_i \equiv A_i(\mu)$. A informação das diminuições das áreas efetivas estará contida nas novas áreas A_i^* as quais são obtidas a partir da minimização da função objetivo

$$F(\mu) = \sum_{i=1}^n (A_i^*(\mu) - A_i)^2,$$

sujeita às restrições $\lambda_i^* < \mu < \lambda_{i+1}^*$ onde o espectro λ_i^* , chamado de espectro da estrutura

danificada, corresponde às frequências da barra procurada de áreas A_i^* .

Para a resolução deste problema de minimização, precisamos determinar o vetor gradiente e a matriz Hessiana de $F(\mu)$. Já que a reconstrução das áreas depende da reconstrução da matriz $J(\mu)$, apresentamos na seção 4.3 uma análise de sensibilidade de $J(\mu)$. Posteriormente, na seção 4.4, a respectiva análise de sensibilidade das áreas em relação a μ é apresentada.

Nas seções 4.5 e 4.6, são testadas a precisão das derivadas primeiras e segundas das áreas em relação ao μ . As derivadas primeiras calculadas são comparadas com as obtidas por uma aproximação por diferenças finitas de primeira ordem. A precisão das derivadas segundas é testada usando o método de Newton para achar um mínimo de uma função.

Finalmente, na seção 4.7, descrevemos em detalhe a estratégia a ser usada no capítulo seguinte.

4.1 Análise Matricial do Modelo

Nesta seção mostramos como o problema de autovalor generalizado associado à discretização por elementos finitos pode ser transformado em um problema simples de autovalor. Neste último problema, a matriz envolvida possui uma estrutura muito especial que faz com que seus autovalores tenham propriedades interessantes de simetria.

Lembramos a equação generalizada de autovalor para a discretização por elementos finitos lineares

$$(K - \sigma M)u = 0, \quad (4.1)$$

onde

$$K = \begin{pmatrix} A_1 + A_2 & -A_2 & & & \\ -A_2 & A_2 + A_3 & -A_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -A_{n-1} & A_{n-1} + A_n & -A_n \\ & & & -A_n & A_n \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

$$M = \begin{pmatrix} 2A_1 + 2A_2 & A_2 & & & \\ A_2 & 2A_2 + 2A_3 & A_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & A_{n-1} & 2A_{n-1} + 2A_n & A_n \\ & & & A_n & 2A_n \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Sejam as matrizes D e B definidas como

$$D = \text{diag}\{A_1 + A_2, A_2 + A_3, \dots, A_{n-1} + A_n, A_n\}, \quad (4.4)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & A_2 & & & \\ A_2 & 0 & A_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & A_{n-1} & 0 & A_n \\ & & & A_n & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Então a equação 4.1 pode ser escrita como

$$(D - B)u = \sigma(2D + B)u, \quad (4.6)$$

da qual pode-se concluir

$$Bu = \frac{1 - 2\sigma}{1 + \sigma} Du. \quad (4.7)$$

Se

$$\alpha = \frac{1 - 2\sigma}{1 + \sigma}, \quad (4.8)$$

podemos escrever

$$Bu = \alpha Du. \quad (4.9)$$

Se consideramos a matriz de transformação $\Gamma = \text{diag}\{1, -1, 1, -1, \dots\}$, obtemos as seguintes relações, devidas às estruturas de B e D:

$$\Gamma B \Gamma = -B; \quad \Gamma D \Gamma = D$$

Como $\Gamma^2 = I$, usando estas relações na equação 4.9, obtemos :

$$B \Gamma u = -\alpha D \Gamma u \quad (4.10)$$

Portanto, se α é um autovalor da equação 4.9, então $-\alpha$ também é um autovalor da mesma equação. De forma mais precisa, se denotarmos os autovalores de 4.9 por α_k e os respectivos autovetores por u^k , temos :

$$\alpha_{(n-k+1)} = -\alpha_{(k)} \quad (4.11)$$

$$u_i^{(n-k+1)} = (-1)^{(i-1)} u_i^{(k)} \quad (4.12)$$

Definindo a matriz diagonal G como

$$G = \text{diag}\{(A_1 + A_2)^{1/2}, (A_2 + A_3)^{1/2}, \dots, (A_{n-1} + A_n)^{1/2}, (A_n)^{1/2}\} \quad (4.13)$$

satisfazendo $D = GG^T$, e a transformação $v^{(k)} = G^T u^{(k)}$, podemos reduzir 4.9 a uma equação simples de autovalor

$$(J - \alpha I)v^{(k)} = 0. \quad (4.14)$$

A matriz J tem a estrutura

$$J = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & & & \\ b_1 & 0 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-2} & 0 & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

onde os b_i se relacionam com as áreas pelas fórmulas

$$b_i = \frac{A_{i+1}}{\sqrt{(A_i + A_{i+1})(A_{i+1} + A_{i+2})}} > 0 \quad i = 1, \dots, n-2 \quad (4.16)$$

$$b_{n-1} = \sqrt{\frac{A_n}{A_{n-1} + A_n}} > 0. \quad (4.17)$$

$$(4.18)$$

Se $\bar{J}$ denota a sub-matriz principal de J obtida ao eliminar a última linha e coluna de J , ela tem a estrutura

$$\bar{J} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & & & \\ b_1 & 0 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-3} & 0 & b_{n-2} \\ & & & b_{n-2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

e portanto, a mesma de J . Então, os autovalores $\{\mu_i\}_1^{n-1}$ de $\bar{J}$ satisfazem a propriedade

$$\mu_{(k)} = -\mu_{(n-k)} \quad (4.20)$$

válida para $k = 1, \dots, n-1$. Esquematicamente, a distribuição dos espectros para n par, pode ser representada pela figura 4.1.

Se n é ímpar, usamos o fato que a matriz J tem traço nulo, para concluir que zero é autovalor de J e os restantes autovalores satisfazem a relação

$$\alpha_{(k)} = -\alpha_{(n-k+1)} \quad (4.21)$$

válida para $k = 1, \dots, ((n+1)/2) - 1$. Para os autovalores da matriz $\bar{J}$ temos a relação

$$\mu_{(k)} = -\mu_{(n-k+1)} \quad (4.22)$$

Figura 4.1: Distribuição dos autovalores quando n é par.

válido para $k = 1, \dots, ((n+1)/2) - 1$.

Logo, para determinar os $n-1$ parâmetros $\{b_i\}_1^{n-1}$ da matriz J usando o algoritmo de Lanczos, precisamos dos autovalores $(\lambda_i)_1^{n/2}$ de J e os autovalores $\{\mu_i\}_1^{(n/2)-1}$.

Uma outra relação envolvendo os autovalores de J e $\bar{J}$ que pode ser aproveitada é a seguinte:

$$(q_k^{(n)})^2 = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (\mu_j - \lambda_k)}{\prod_{j=1, j \neq k}^n (\lambda_j - \lambda_k)} = \frac{\prod_{j=1}^{(n/2)-1} (\mu_j - \lambda_k)(-\lambda_k) \prod_{j=(n/2)+1}^{n-1} (\mu_j - \lambda_k)}{\prod_{j=1, j \neq k}^{n/2} (\lambda_j - \lambda_k) \prod_{j=(n/2)+1}^n (\lambda_j - \lambda_k)} = \quad (4.23)$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{(n/2)-1} (\mu_j - \lambda_k)(-\lambda_k) \prod_{j=(n/2)+1}^{n-1} (-\mu_{n-j+1} + \lambda_{-k})}{\prod_{j=1, j \neq k}^{n/2} (\lambda_j - \lambda_k) - \prod_{j=(n/2)+1, j \neq k}^n (-\lambda_{n-j+1} - \lambda_k)} = \quad (4.24)$$

$$\frac{\prod_{j=(n/2)+1}^{n-1} (-\mu_{n-j+1} + \lambda_{n-k+1})(-\lambda_{n-k+1}) \prod_{j=1}^{n/2} (-\mu_j + \lambda_{n-k+1})}{\prod_{j=1, j \neq k}^{n/2} (\lambda_j + \lambda_{n-k+1}) \prod_{j=(n/2)+1}^n (-\lambda_{n-j+1} + \lambda_{n-k+1})} = \quad (4.25)$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{(n/2)-1} (\mu_j - \lambda_{n-k+1})(-\lambda_{n-k+1}) \prod_{j=(n/2)+1}^{n-1} (\mu_j - \lambda_k)}{\prod_{j=1, j \neq n-k+1}^{n/2} (\lambda_j + \lambda_{n-k+1}) \prod_{j=(n/2)+1, j \neq n-k+1}^n (\lambda_j - \lambda_{n-k+1})} = \quad (4.26)$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{n-1} (\mu_j - \lambda_{n-k+1})}{\prod_{j=1, j \neq n-k+1}^n (\lambda_j - \lambda_{n-k+1})} = (q_{n-k+1}^{(n)})^2 \quad (4.27)$$

que é válido para $k = 1, \dots, n/2$. Esta propriedade permite calcular as componentes do vetor $q^{(n)}$ a partir das suas primeiras $n/2$ componentes. Estas propriedades associadas à matriz J podem ser resumidas no seguinte teorema :

Teorema 4.1

Dados os autovalores distintos $\lambda_k, k = 1, \dots, n$ satisfazendo $\lambda_k = -\lambda_{n-k+1}$, e a última linha $q_{(k)}$ da matriz de autovetores satisfazendo $q_{n-k+1} = (-1)^{(k-1)} q_{(k)}$, então o algoritmo de Lanczos reconstrói uma única matriz de Jacobi

$$J = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & & & \\ b_1 & 0 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-2} & 0 & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

com $b_i > 0$, para cada $i = 1, \dots, n-1$, tendo λ_k como espectro e q_k como a última linha da matriz de autovetores.

Demonstração:

Sem perda de generalidade suporemos que a matriz J tem a estrutura

$$J = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ b_1 & a_2 & b_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

A demonstração consiste em provar que o algoritmo de Lanczos reconstrói uma única matriz com a estrutura 4.28, a qual tem elementos diagonais a_i nulos.

Seja $V = [v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}]$ a matriz de autovetores de J , onde suas colunas satisfazem a propriedade de ortogonalidade

$$(v^{(i)})^T v^{(j)} = \delta_{ij}. \quad (4.29)$$

Seja $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. A matriz V satisfaz

$$JV = V\Lambda$$

ou

$$QJ = \Lambda Q, \quad (4.30)$$

onde $Q = [q^{(1)}, q^{(2)}, \dots, q^{(n)}] = V^T$. Da última linha de 4.30, temos:

$$q^{(n-1)}b_{n-1} + q^{(n)}a_n = \lambda_n q^{(n)}$$

da qual multiplicando por $(q^{(n)})^T$, obtem-se

$$a_n = (q^{(n)})^T \lambda q^{(n)}.$$

Das propriedades

$$\lambda_k = -\lambda_{n-k+1}$$

$$q_{n-k+1} = (-1)^{(k-1)} q_{(k)}$$

pode-se provar que $a_n = 0$. Continuando com as restantes linhas de baixo para acima temos para $j = n-1, \dots, 1$

$$r^{(j+1)} = (\Lambda)q^{(j)} - b_{j-1}q^{(j-1)}$$

$$b_j = \|r^{(j+1)}\|_2$$

$$q^{(j+1)} = \frac{r^{(j+1)}}{b_j}$$

$$a_j = 0.$$

Estas fórmulas são as que definem o algoritmo de Lanczos, o qual constrói uma única matriz J com a estrutura 4.28 e com zeros na diagonal. ■

Um fato interessante neste teorema é que as componentes q_k podem ser calculadas a partir do espectro μ da sub-matriz principal superior $\bar{J}$ de J . Como $\mu_{(k)} = -\mu_{(n-k)}$, $k = 1, \dots, n-1$, o processo envolve metade dos autovalores de J e metade do espectro de $\bar{J}$. Os espectros requeridos para reconstruir a matriz J para os casos par e ímpar são:

Se n é par precisamos de:

os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\frac{n}{2}}$ da matriz J

os autovalores $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{\frac{n}{2}-1}$, da matriz $\bar{J}$.

Se n ímpar precisamos de

os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\frac{n-1}{2}}$ da matriz J

os autovalores $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{\frac{n-1}{2}}$ da matriz $\bar{J}$.

Vemos que, para ambos casos, a matriz J pode ser reconstruída a partir de $n - 1$ dados. Por outro lado, devem ser determinadas as $n - 1$ incógnitas $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$. Esta coincidência entre o número de dados e incógnitas é uma propriedade conveniente desta reconstrução, pois a existência e unicidade são aspectos importantes na reconstrução de matrizes a partir da informação espectral.

Se um esquema de diferenças finitas é usado para discretizar a equação 1.2, o problema inverso de autovalor para este modelo se reduz a um problema simples de autovalor onde a matriz envolvida possui uma estrutura especial. A reconstrução desta matriz a partir da informação espectral, carece de condições necessárias e suficientes que garantem existência e unicidade. Em [32], só condições necessárias são dadas para a reconstrução dessa matriz. O autor indica que estabelecer condições suficientes não é um problema fácil de resolver, sendo ainda objeto de estudo.

ALGORITMO 4.1: (algoritmo de Lanczos reduzido)

Dados os conjuntos $(\lambda_i)_1^{n/2}$ e $(\mu_i)_1^{(n/2)-1}$ este algoritmo produz a matriz J com a estrutura 4.20 e, ao mesmo tempo, constrói os autovetores ortogonais de J :

Definir $b_n := 1, q^{(n+1)} := 0$

Para $k = 1, n/2$ determinar

$$(q_k^{(n)})^2 = (q_{n-k+1}^{(n)})^2$$

Para $j = n - 1, \dots, 1$

$$r^{(j+1)} := \Lambda q^{(j+2)} - b_{j+1} q^{(j+1)}$$

$$b_j := \|r^{(j+1)}\|_2$$

$$q^{(j)} := \frac{r^{(j+1)}}{b_j}$$

Esta versão do algoritmo de Lanczos têm a vantagem de aproveitar a simetria que existe na distribuição dos autovalores. Uma versão com reortogonalização pode ser implementada evitando assim a perda de ortogonalidade entre os vetores q^j .

4.2 Reconstrução das Áreas

Nesta seção são apresentadas as fórmulas para recuperar as áreas a partir da matriz J . A matriz J fica completamente determinada se os coeficientes $(b_i)_1^{n-1}$ são conhecidos. As fórmulas que relacionam as áreas a serem reconstruídas e os coeficientes da matriz J são mostradas a seguir.

$$b_i = \frac{-A_i}{\sqrt{(A_{i-1} + A_i)(A_i + A_{i+1})}} \quad i = 1, \dots, n-2 \quad (4.31)$$

$$b_{n-1} = -\sqrt{\frac{A_n}{A_{n-1} + A_n}} \quad (4.32)$$

$$(4.33)$$

Estas fórmulas precisam do fator adicional A_n para reconstruir todas as áreas da barra, o qual do ponto de vista prático não é difícil de determinar. Então, se a n -ésima área é conhecida, a partir da segunda fórmula de acima, o valor de A_{n-1} pode ser obtido por:

$$A_{n-1} = \frac{A_n(1 - b_{n-1}^2)}{b_{n-1}}. \quad (4.34)$$

A partir desses valores é possível determinar de maneira reversa os valores restantes:

$$A_i = \frac{A_{i+1}^2}{b_i^2(A_{i+1} + A_{i+2})} - A_{i+1} \quad i = n-2, \dots, 1 \quad (4.35)$$

O processo para determinar as áreas é descrito da seguinte forma: dados os espectros $(\lambda_i)_1^{n/2}$ e $(\mu_i)_1^{(n/2)-1}$, determinamos a matriz J usando o algoritmo 4.1. Posteriormente, usando o fator A_n e as fórmulas 4.34-4.35 podemos completar a reconstrução de todas as áreas restantes.

4.3 Análise de Sensibilidade de uma matriz de Jacobi

A análise de sensibilidade da matriz J em relação ao espectro intercalado $(\mu_i)_1^{(n/2)-1}$ pode ser feita a partir do algoritmo de Lanczos 4.1 descrito na seção 4.2. A idéia é calcular a matriz $\delta_k J(\mu)$, a qual contém na co-diagonal as derivadas $\delta_k b_i(\mu)$ para cada $\mu_k, k = 1, \dots, (n/2) - 1, i = 1, \dots, n-1$. Para calcular essa matriz fazemos uso da relação $(q_k^{(n)})^2 = (q_{n-k+1}^{(n)})^2$, obtendo a seguinte fórmula para a derivada do vetor $q^{(n)}$ em relação a μ_k :

$$\frac{\partial q_{n-k+1}^{(n)}}{\partial \mu_k} = \frac{q_k^{(n)}}{q_{n-k+1}^{(n)}} \frac{\partial q_k^{(n)}}{\partial \mu_k} \quad (4.36)$$

válida para $k = 1, \dots, (n/2)$. É claro, que as derivadas da diagonal da matriz J são nulas e também que as derivadas da diagonal em relação a μ_k são nulas. Então, o algoritmo para calcular as derivadas da matriz de Jacobi é dado por:

ALGORITMO 4.2: Dados os conjuntos $(\lambda_i)_1^{n/2}$ e $(\mu_i)_1^{(n/2)-1}$, este algoritmo produz a matriz $\delta_k J$, para $k = 1, \dots, n/2$

Calcular $q^{(n)}(\mu)$, $b_j(\mu)$, $r^{j+1}(\mu)$, $q^{j+1}(\mu)$, $j = 1, 2, \dots, n-1$ usando o algoritmo de Lanczos 4.1

Para $k = 1, \dots, (n/2) - 1$

Calcular $\delta_k q^{(n)}(\mu)$

Para $j = 1, \dots, n-1$

$$\delta_k r^{(j+1)}(\mu) := \Lambda \delta_k q^{(j)}(\mu) - \delta_k b_{j-1}(\mu) q^{(j-1)}(\mu)$$

$$- b_{j-1}(\mu) \delta_k q^{(j-1)}(\mu)$$

$$\delta_k b_j(\mu) := \frac{(r^{(j+1)}(\mu))^T \delta_k r^{(j+1)}(\mu)}{b_j(\mu)}$$

$$\delta_k q^{(j+1)}(\mu) := \frac{b_j(\mu) \delta_k r^{(j+1)}(\mu) - \delta_k b_j(\mu) r^{(j+1)}(\mu)}{(b_j(\mu))^2}$$

O algoritmo 4.2 leva em conta a reortogonalização no algoritmo 4.1 e tem um custo computacional aproximado de $O(n^3)$. Da mesma forma, pode-se calcular a matriz $\delta_l \delta_k J(\mu)$ contendo as derivadas segundas $\delta_l \delta_k J(\mu)$, levando em conta a seguinte relação:

$$\frac{\partial^2 q_{n-k+1}^{(n)}}{\partial \mu_l \partial \mu_k} = \frac{\frac{\partial q_k^{(n)}}{\partial \mu_l} q_{n-k+1}^{(n)} + q_k^{(n)} \frac{\partial q_{n-k+1}^{(n)}}{\partial \mu_l}}{(q_{n-k+1}^{(n)})^2} \frac{\partial q_k^{(n)}}{\partial \mu_j} + \frac{q_k^{(n)}}{q_{n-k+1}^{(n)}} \frac{\partial^2 q_k^{(n)}}{\partial \mu_l \partial \mu_k} \quad (4.37)$$

Esta última fórmula nos mostra que para calcular as derivadas segundas do vetor $q^{(n)}$, precisam-se somente das suas primeiras $\frac{n}{2}$ componentes. As componentes restantes podem ser calculadas usando a fórmula 4.37. O algoritmo 4.2 pode ser adaptado convenientemente para obter a matriz $\delta_l \delta_k J(\mu)$, com um custo computacional de aproximadamente $O(2n^3)$ operações.

4.4 Análise de Sensibilidade das Áreas

Nesta seção estudamos a análise de Sensibilidade das Áreas em relação ao espectro intercalado μ_k , a partir da análise de sensibilidade da matriz J apresentada na seção anterior. Denotemos por $\delta_k b_j(\mu)$ e $\delta_k \delta_l b_j(\mu)$ as derivadas primeiras e segundas respectivamente da co-diagonal da matriz J , válida para $j = 1, \dots, n-1$. Primeiramente, determinamos a derivada de A_{n-1} a

partir da fórmula 4.35:

$$\delta_j A_{n-1} = \frac{(\delta_j A_n(1 - b_{n-1}^2) - 2A_n b_{n-1} \delta_j b_{n-1}) b_{n-1}^2 - 2A_n b_{n-1}(1 - b_n^2) \delta_j b_{n-1}}{b_{n-1}^4} \quad (4.38)$$

De maneira similar, podemos calcular $\delta_j A_i$ para $i = n - 2, \dots, 1$.

$$\delta_j A_i = \frac{2A_{i+1} \delta_j A_{i+1}}{b_i^2} - \frac{A_{i+1}^2 (2b_i \delta_j b_i (A_{i+1} + A_{i+2}) + b_i^2 (\delta_j A_{i+1} + \delta_j A_{i+2}))}{(b_i^2 (A_{i+1} + A_{i+2}))^2} - \delta_j A_{i+1}. \quad (4.39)$$

Temos então as fórmulas explícitas para calcular as derivadas das áreas em relação ao espectro μ_k . Resumimos os resultados anteriores no seguinte algoritmo:

ALGORITMO 4.3: Dados os conjuntos $(\lambda_i)_1^{n/2}$ e $(\mu_i)_1^{(n/2)-1}$. Dado o valor da n -ésima área A_n , este algoritmo calcula as derivadas $\delta_j A_i$.

Para $i = 1, \dots, n - 1$, calcular b_i usando o algoritmo de Lanczos 4.1.

Para $i = 1, \dots, n - 1$, calcular $\delta_j b_i$, $j = 1, \dots, (n/2) - 1$ usando

o algoritmo 4.2

Para $i = 1, \dots, n - 1$ calcular as áreas A_i usando as fórmulas 4.34 e 4.35

Para $j = 1, \dots, (n/2) - 1$

Considere $\delta_j A_n = 0$

$$\text{Calcular } \delta_j A_{n-1} = \frac{(\delta_j A_n(1 - b_{n-1}^2) - 2A_n b_{n-1} \delta_j b_{n-1}) b_{n-1}^2 - 2A_n b_{n-1}(1 - b_n^2) \delta_j b_{n-1}}{b_{n-1}^4}$$

Para $i = n - 2, \dots, 1$

Calcular

$$\delta_j A_i = \frac{2A_{i+1} \delta_j A_{i+1}}{b_i^2} - \frac{A_{i+1}^2 (2b_i \delta_j b_i (A_{i+1} + A_{i+2}) + b_i^2 (\delta_j A_{i+1} + \delta_j A_{i+2}))}{(b_i^2 (A_{i+1} + A_{i+2}))^2} - \delta_j A_{i+1}$$

as derivadas das áreas $\delta_j A_i$ para $j = (n/2) + 1, n - 1$ são calculadas pelas fórmulas $\delta_j A_i = -\delta_j A_i$.

4.5 Exatidão das derivadas primeiras

Nesta seção comparam-se as derivadas calculadas pelo algoritmo 4.3 com um esquema de diferenças finitas centra-das, de segunda ordem para aproximar $\delta_k A(\mu)$. Se cada $A_j(\mu)$ é denotada

por uma função $g_j(\mu)$ das variáveis μ_k , a aproximação por diferenças centra-das $\frac{\Delta g_j(\mu)}{\Delta \mu_k}$ para a sensibilidade $\delta_k g_j(\mu) \equiv \frac{\partial g_j(\mu)}{\partial \mu_k}$ é dada por

$$\delta_k g_j(\mu) \simeq \frac{g_j(\mu_1, \dots, \mu_k + \Delta \mu_k, \dots, \mu_{n-1}) - g_j(\mu_1, \dots, \mu_k - \Delta \mu_k, \dots, \mu_{n-1})}{2\Delta \mu_k}. \quad (4.40)$$

O problema no cálculo de derivadas aproximadas por diferenças finitas é a escolha adequada do tamanho de $\Delta \mu_k$. Se $\Delta \mu_k$ não for suficientemente pequeno, as aproximações são ruins. Se for muito pequeno ocorre cancelamento e novamente as aproximações não são boas. A vantagem do nosso algoritmo é que calculamos derivadas com precisão de máquina. A inclusão desta aproximação se justifica para comparar as derivadas exatas das áreas. Consideremos então a distribuição de áreas constantes $A_i = 0.1$. Para a comparação entre os métodos é definido o seguinte erro:

$$\delta_k E_A = \frac{\|\delta_k A_{ex} - \delta_k A_{df}\|_{\infty}}{\|\delta_k A_{ex}\|_{\infty}}$$

onde $\delta_k A_{ex}$ é a derivada da área em relação à μ_k calculada pelo algoritmo 4.3 e $\delta_k A_{df}$ a derivada área em relação à μ_k calculada pelo esquema de diferenças centra-das. Na tabela 4.1 mostram-se os erros entre as derivadas calculadas por diferenças finitas e as derivadas calculadas pelo algoritmo 4.3, em relação à μ_3 , com $n = 10$. Já na tabela 4.2, mostram-se os erros para a derivada em relação à μ_{20} para $n = 50$.

$\Delta \mu_3$	$\delta_3 E_A$
1.0e-03	8.9753860672200D-05
1.0e-04	8.9945573038402D-07
1.0e-05	8.7121545728364D-09
1.0e-06	1.9956498276799D-09
1.0e-07	8.7278932936542D-08
1.0e-08	3.5415456785285D-07
1.0e-09	3.5887659994800D-06
1.0e-10	8.5941502225338D-05

Tabela 4.1: Comparação das derivadas exatas e diferenças finitas (n=10).

4.6 Cálculo das derivadas segundas e Método de Newton

Nesta seção, calculamos as derivadas segundas das áreas e sua exatidão é testada aplicando o método de Newton para achar o mínimo de uma função. Na procura do mínimo, o método de

$\Delta\mu_{20}$	$\delta_{20}E_A$
1.0e-03	8.2097007313363D-04
1.0e-04	1.5104806094095D-05
1.0e-05	1.3637952282502D-06
1.0e-06	3.3128990563742D-07
1.0e-07	1.4409668717807D-06
1.0e-08	1.8484521081044D-05
1.0e-09	1.8826030665801D-04
1.0e-10	1.6248870373901D-03

Tabela 4.2: Comparação das derivadas exatas e diferenças finitas (n=50).

Newton converge quadraticamente, o que válida as derivadas segundas das áreas calculadas pelo algoritmo apresentado.

Denotamos por $\delta_k \delta_j A(\mu)$ as derivadas mistas $\frac{\partial A(\mu)}{\partial \mu_k \partial \mu_j}$. Os elementos da matriz $\delta_k \delta_j A(\mu)$ serão denotados por $\frac{\partial A_l(\mu)}{\partial \mu_k \partial \mu_j}$, para $l = 1, \dots, n$. É claro que a derivada mista $\delta_k \delta_j A_n = 0$, e a derivada mista de A_{n-1} pode ser obtida diferenciando a 4.39. Sejam S_1 e S_2 definidos pelas fórmulas :

$$\begin{aligned} S_1 &= (\delta_j A_n (1 - b_{n-1}^2) - 2A_n b_{n-1} \delta_j b_{n-1}) b_{n-1}^2 \\ S_2 &= -2A_n b_{n-1} (1 - b_n^2) \delta_j b_{n-1} \end{aligned}$$

Então

$$\delta_j A_{n-1} = \frac{S_1 + S_2}{b_{n-1}^4}, \quad (4.41)$$

e as derivadas mistas da área A_{n-1} ficam determinadas pela expressão

$$\delta_k \delta_j A_{n-1} = \frac{(\delta_k S_1 + \delta_k S_2) b_{n-1}^4 - (S_1 + S_2) 4b_{n-1}^3 \delta_k b_{n-1}}{b_{n-1}^8} \quad (4.42)$$

válida para $k, j = 1, n-1$. De maneira semelhante definimos a partir de 4.39 as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} S_3 &= 2A_{i+1} \delta_j A_{i+1} b_i^2 (A_{i+1} + A_{i+2}) \\ S_4 &= 2b_i \delta_j b_i (A_{i+1} + A_{i+2}) \\ S_5 &= b_i^2 (\delta_j A_{i+1} + \delta_j A_{i+2}) \\ S_6 &= (b_i^2 (A_{i+1} + A_{i+2}))^2. \end{aligned}$$

Então, as derivadas segundas ficam determinadas pela fórmula:

$$\delta_k \delta_j A_i = \frac{(\delta_k S_3 - 2A_{i+1} \delta_k A_{i+1} (S_4 + S_5) - A_{i+1}^2 (\delta_k S_4 + \delta_k S_6)) S_4}{S_6^2} - \frac{(S_3 - A_{i+1}^2 (S_4 + S_5)) \delta_k S_6}{S_6^2} - \delta_k \delta_j A_{i+1}$$

válida para $k, j = 1, n-1$ e $i = n-2, \dots, 1$. O mecanismo que permite calcular as derivadas segundas das áreas é resumido no seguinte algoritmo:

ALGORITMO 4.4:

Usando o algoritmo 4.2, calcular para $j = 1, \dots, n-1$ as derivadas $\delta_j b_i, i = 1, \dots, n-1$

Usando o algoritmo 4.3, calcular para $j = 1, \dots, (n/2)$ as derivadas $\delta_j A_i$.

Calcular para $k = 1, \dots, n-1$ as derivadas

$$\delta_k \delta_j A_{n-1}$$

Calcular, para $i = n-2, \dots, 1$

$$\delta_k \delta_j A_i.$$

A exatidão destas derivadas é testada usando o método de Newton para determinar um mínimo da função

$$F(\mu) = \sum_{i=1}^n (A_i(\mu) - A_i^*)^2. \quad (4.43)$$

sujeito a $\lambda_i^* < \mu_i < \lambda_{i+1}^*, i = 1, \dots, (n/2) - 1$, onde $(\lambda_i^*)_1^n$ são os autovalores da barra com áreas A_i^* . O mínimo da função é o espectro intercalado μ^* associado a A^* . Quando o método de Newton é aplicado para achar o mínimo a convergência deve ser quadrática. O método de Newton foi testado para uma distribuição de áreas constante $A_i = 0.1$ e $n = 4$. Na Tabela 4.3 se mostram os autovalores

Na Figura 4.2 se mostram os gráficos dos q_j os quais são definidos como

$$q_j = \frac{\log(E_{j+1})}{\log(E_j)},$$

onde os E_j correspondem ao erro absoluto entre a solução exata e a aproximada produzida na j -ésima iteração. Os três gráficos correspondem aos diferentes valores iniciais da Tabela 4.3. Vemos que os q_j são próximos de 2.0.

Figura 4.2: Gráficos dos $q_j = \log(E_{j+1})/\log(E_j)$, onde E_j é o erro absoluto entre a solução exata e aproximada na j -ésima iteração do método de Newton para três valores iniciais diferentes.

i	λ_i^*	μ_i^{exato}	a_i^*	1° μ_i^{vi}	2° μ_i^{vi}	3° μ_i^{vi}
1	0.38268	0.707061	0.100000	0.68944	0.71922	0.69855
2	0.92387		0.100000			
3			0.100000			
4			0.100000			

Tabela 4.3: Valores iniciais para a convergência quadrática do Método de Newton.

4.7 Estratégia de busca multidimensional para às áreas

Descrevemos a seguir uma estratégia de busca multi-dimensional para a distribuição de áreas de uma barra, a qual será usada no capítulo seguinte para a detecção de danos.

Consideremos uma barra com distribuição de áreas $(\bar{A}_i)_1^n$ e frequências de vibração $(\bar{\lambda}_i)_1^{n/2}$. No resto do Capítulo o valor de n será considerado par. Queremos achar um mínimo da função

$$F(\mu) = \sum_{i=1}^n (A_i(\mu) - \bar{A}_i)^2. \quad (4.44)$$

onde $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{(n/2)-1})$ está sujeito à restrição de canalização $\bar{\lambda}_i < \mu_i < \bar{\lambda}_{i+1}$.

Na reconstrução das áreas, foi considerado como fator adicional a n -ésima área A_n . Resolve-se o problema de achar um mínimo da função $F(\mu)$ usando o algoritmo desenvolvido em [11] com a restrição de canalização de acima. As derivadas das áreas para o cálculo do vetor gradiente e a matriz Hessiana de $F(\mu)$ são calculadas usando o algoritmo 4.3.

Para a aplicação do algoritmo desenvolvido em [11], precisamos de um valor inicial para a variável μ . Se μ^* é a solução obtida pelo algoritmo, então o resultado ótimo é que a função objetivo e o vetor gradiente sejam zero em μ^* , ou seja, $F(\mu^*) = \|\nabla F(\mu^*)\| = 0$. O valor inicial para μ , que será denotado por μ_i^{in} , deve satisfazer $\bar{\lambda}_i \leq \mu_i^{in} \leq \bar{\lambda}_{i+1}$. Experiências numéricas mostram que este valor inicial para o espectro intercalado precisa ser gerado de tal forma a manter um mínimo de afastamento dos $\bar{\lambda}_i$. Sejam os números $(r_i)_1^{(n/2)}$, com $0 < r_i < 1$, gerados aleatoriamente a partir de um número inteiro negativo(semente). Se cada elemento μ_i^{in} fica a uma distância ϵ_l do correspondente λ_l , então, para garantir que a propriedade de intercalamento dos autovalores seja satisfeita os μ_i^{in} são definidos como (ver [10]):

$$\mu_l^{vi} = r_l(\bar{\lambda}_{l+1} - \bar{\lambda}_l - 2\epsilon_l) + \bar{\lambda}_l + \epsilon_l, l = 1, 2, \dots, n/2, \quad (4.45)$$

onde $\epsilon_l = \frac{\bar{\lambda}_{l+1} - \bar{\lambda}_l}{d}$, com $d > 2.0$.

Teste	1	2	3	4	5
$F(\mu^*)$	12.222010	51.318070	7.097236	3.897089	0.146805
$\ \nabla F(\mu^*)\ $	11.788054	21.291236	0.531433	8.893992e-02	1.986510e-03
Nº Iterações	25	18	34	45	51
Teste	6	7	8	9	10
$F(\mu^*)$	12.819809	7.34524e-14	125.2563	5.452223e-16	54.900255
$\ \nabla F(\mu^*)\ $	2.30937e-4	3.451266e-15	2.234234	8.543345e-14	0.333068
Nº Iterações	48	80	36	90	57

Tabela 4.4: Testes numéricos considerando a n-ésima Área fixa.

Na tabela 4.4 se mostram os resultados obtidos para uma barra de área uniforme $\bar{A}_i = 0.1$, onde a busca multi-dimensional é desenvolvida minimizando o funcional definido em 4.44 e o valor inicial para o espectro intercalado foi gerado pela fórmula 4.45. Os resultados apresentados na tabela 4.4 mostram que nem sempre consegue-se convergência ao mínimo.

4.8 N-ésima área variável

Experimentos numéricos mostram que o processo de busca do mínimo pode ficar preso em um vale da função o que impede encontrar uma direção de descida ao mínimo. Uma estratégia para superar esta dificuldade é relaxar o processo de minimização, considerando a n-ésima área A_n como uma variável independente. Do ponto de vista prático, esta liberação da n-ésima área não

afeta na detecção de danos, pois em nossos testes os danos não serão considerados no extremo final da barra.

Se a n -ésima área é considerada uma variável independente, então o problema 4.44 fica na forma:

$$\text{Minimizar} \quad F(\mu) \quad (4.46)$$

$$\text{sujeito a :} \quad \lambda_l^* < \mu_l < \lambda_{l+1}^*, l = 1, 2, \dots, n/2 \quad (4.47)$$

$$p < A_n < q, p, q \geq 0 \quad (4.48)$$

onde a função objetivo é a mesma do 4.45, com $\mu \in \mathfrak{R}^{(n/2)+1} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n/2}, A_n)$. Fazendo $\mu_{(n/2)+1} = A_n$, o vetor gradiente será da forma

$$\nabla F(\mu) = \left(\frac{\partial F(\mu)}{\partial \mu_1}, \frac{\partial F(\mu)}{\partial \mu_2}, \dots, \frac{\partial F(\mu)}{\partial \mu_{n/2}}, \frac{\partial F(\mu)}{\partial \mu_{(n/2)+1}} \right),$$

onde

$$\frac{\partial F(\mu)}{\partial \mu_j} = 2 \left(\sum_{l=1}^n (A_l(\mu) - A_l^*) \frac{\partial A_l(\mu)}{\partial \mu_j} \right), \quad (4.49)$$

com $j = 1, 2, \dots, (n/2) + 1$. A matriz Hessiana $\mathcal{H}(F(\mu)) = \left[\frac{\partial^2 F(\mu)}{\partial \mu_i \partial \mu_j} \right]_{i,j}$ tem $n \times n$ elementos

$$\frac{\partial^2 F(\mu)}{\partial \mu_i \partial \mu_j} = 2 \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial A_l(\mu)}{\partial \mu_i} \cdot \frac{\partial A_l(\mu)}{\partial \mu_j} + (A_l(\mu) - A_l^*) \frac{\partial^2 A_l(\mu)}{\partial \mu_i \partial \mu_j} \right). \quad (4.50)$$

para $i, j = 1, 2, \dots, n$. Por tanto, para obter $\nabla F(\mu)$ e $\mathcal{H}(F(\mu))$ falta calcular explicitamente as derivadas de primeira ordem $\delta_n A_l(\mu) \equiv \frac{\partial A_l(\mu)}{\partial \mu_n}$, e da segunda ordem $\delta_i \delta_n A_l(\mu) \equiv \frac{\partial^2 A_l(\mu)}{\partial \mu_i \partial \mu_n} = \frac{\partial^2 A_l(\mu)}{\partial \mu_n \partial \mu_i}$, $i = 1, \dots, n$.

Sabemos que

$$\delta_n A_n = 1.0$$

$$\delta_n A_i = \frac{2A_{i+1}\delta_n A_{i+1}}{(A_{i+1} + A_{i+2})} - \frac{A_{i+1}^2 b_i^2 (\delta_n A_{i+1} + \delta_n A_{i+2})}{(b_i^2 (A_{i+1} + A_{i+2}))^2} - \delta_j A_{i+1}$$

Para o cálculo das derivadas mistas $\delta_j \delta A_n(A_i)$, sejam

$$\begin{aligned} S_1 &= 2A_{i+1} \delta_n A_{i+1} b_l^2 (A_{i+1} + A_{i+2}) \\ S_2 &= A_{i+1}^2 b_l^2 (\delta_j A_{i+1} + \delta_j A_{i+2}) \\ S_3 &= (b_l^2 (A_{i+1} + A_{i+2}))^2 \end{aligned}$$

e então a derivada mista $\delta_j \delta A_n(A_i)$ fica determinada pela fórmula

$$\delta_n \delta A_{n-1} = 0 \quad (4.51)$$

$$\delta_j \delta A_i = \frac{(\delta_j S_1 - \delta_j S_2) S_3 - (S_1 - S_2) \delta_k S_3}{S_3^2} - \delta_j \delta A_{i+1} \quad (4.52)$$

$$(4.53)$$

válidas para $j = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, n-2$. Uma vez calculadas as derivadas de primeira e segunda ordem, em relação à n -ésima área, os algoritmos são adequados para o cálculo do vetor gradiente e a matriz Hessiana. Já que uma variável a mais foi introduzida, a solução inicial é gerada da seguinte forma :

$$\begin{aligned} \mu_l^{in} &= r_l(\lambda_{l+1}^* - \lambda_l^* - 2\varepsilon_l) + \lambda_l^* + \varepsilon_l, l = 1, \dots, (n/2) - 1, \\ &\text{e} \\ \mu_{n/2}^{in} &= r_{n/2}(q - p - 2\varepsilon_{n/2}) + \lambda_{n/2}^* + \varepsilon_{n/2}, \end{aligned} \quad (4.54)$$

onde $\varepsilon_l = \frac{\lambda_{l+1}^* - \lambda_l^*}{d_1}$, e $\varepsilon_{n/2} = \frac{q - p}{d_2}$ com $d_1, d_2 > 2.0$. Esta forma de gerar as componentes da aproximação inicial justifica-se para garantir que ela esteja suficientemente livre para assim começar a busca do mínimo. Na tabela abaixo mostramos os resultados obtidos para a busca multi-dimensional, se as áreas conhecidas correspondem a uma barra uniforme de áreas $A_i = 0.1$. Os valores de p e q foram considerados 0 e 1 respectivamente.

Observamos que em todos os casos o ponto μ^* foi atingido. Isto vem a confirmar a estratégia multi-dimensional para a busca das áreas é eficiente. Um fato que deve ser destacado é que não precisa-se conhecer o espectro intercalado exato para começar a busca das áreas da nova barra.

<i>Teste</i>	1	2	3	4	5
$F(\mu^*)$	1.453872e-13	2.446567e-14	6.453664e-14	9.343887e-15	3.432341e-15
$\ \nabla F(\mu^*)\ $	4.567865e-16	5.565675e-17	2.123434e-15	2.344532e-16	2.232444e-15
<i>Nº Iterações</i>	45	48	44	52	56
<i>Teste</i>	6	7	8	9	10
$F(\mu^*)$	4.213445e-15	1.348765e-15	5.783573e-14	3.304874e-15	5.876346e-16
$\ \nabla F(\mu^*)\ $	1.398764e-16	2.282363e-15	3.487867e-16	4.882134e-15	5.422034e-16
<i>Nº Iterações</i>	50	51	49	67	58

Tabela 4.5: Testes numéricos considerando a n-ésima Área variável.

Capítulo 5

Um método de Otimização para a Detecção de Danos

O propósito deste capítulo é mostrar a aplicação da estratégia descrita no capítulo anterior à detecção de danos numa barra, a qual é modelada usando uma aproximação por elementos finitos para sua vibração longitudinal.

Os danos serão considerados como reduções nas áreas efetivas, o que permite, além de detectá-los, quantificar a extensão dessas diminuições.

A técnica basicamente consiste em comparar dois estados da estrutura. Um desses estados, chamado de estado ideal, supõe-se conhecido em termos de suas áreas $(A_i)_1^n$ e suas frequências de vibração $(\lambda_i)_1^{n/2}$. O outro estado descreve o comportamento da estrutura após sua entrada em serviço. As frequências associadas a esse estado serão denotadas por $(\lambda_i^*)_1^{n/2}$. Se o novo espectro muda em relação ao original, ele será chamado de espectro da estrutura danificada.

A mudança no comportamento dinâmico da estrutura pode ser analisada em termos de seus parâmetros físicos. No caso da barra homogênea, onde a densidade e o módulo de Young são constantes, a análise se restringe à detecção de mudança nas áreas da secção transversal.

Para a análise destas mudanças procura-se a barra com áreas $(A_i^*)_1^n$ e frequências $(\lambda_i^*)_1^{n/2}$, de tal forma que a diferença entre as áreas $(A_i^*)_1^n$ e as do sistema ideal $(A_i)_1^n$ seja mínima. Desta forma pode-se comparar as áreas da barra em dois estados diferentes o qual permite localizar os possíveis danos.

No capítulo 4 foi mostrado que as áreas de uma barra podem ser consideradas como funções do espectro intercalado $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{(n/2)})$, o que permite fazer a busca do novo sistema usando μ como variável. Matematicamente, este processo pode ser descrito como a resolução de um problema de minimização com restrições de canalização.

Exemplos de detecção de danos usando esta técnica de otimização serão apresentados.

Iniciamos o capítulo apresentando o problema de detecção de danos.

5.1 Formulação do problema DDMEF

Seja $(A_i)_1^n$ a distribuição discreta das áreas de uma barra com frequências de vibração $(\lambda_i)_1^{n/2}$.

O problema de detecção de danos será chamado de

PROBLEMA DDMEF: *Detecção de danos usando elementos finitos*

Sejam $(\lambda_i^*)_1^{n/2}$ as frequências obtidas fazendo um monitoramento da estrutura depois dela entrar em serviço. Se essas novas frequências são diferentes das iniciais, a estrutura sofreu alguma mudança em seus parâmetros físicos.

O modelo usado considera como parâmetros físicos variáveis as áreas da barra, já que o módulo de Young e a densidade foram considerados constantes. Então as mudanças da estrutura serão analisadas em termos das áreas, procurando novas áreas $(A_i^*)_1^n$, de tal forma que as diferenças com as áreas iniciais seja mínima. Isto se justifica pelo fato que os danos se apresentam de maneira localizada, ou seja, só algumas áreas são modificadas, ficando as restantes inalteráveis.

O problema DDMEF consiste em localizar e quantificar mudanças de áreas em relação à distribuição inicial, e será resolvido usando a estratégia descrita no Capítulo 4. Esta técnica é formulada matematicamente como o seguinte problema de minimização:

$$\text{Minimizar} \quad F(\mu) \quad (5.1)$$

$$\text{sujeito a :} \quad \lambda_i^* < \mu_i < \lambda_{i+1}^* \quad (5.2)$$

$$p < A_n^* < q, q > p > 0 \quad (5.3)$$

para $i = 1, \dots, (n/2) - 1$, onde $(A_i^*)_1^n$ tem espectro $(\lambda_i^*)_1^{n/2}$. A função objetivo $F(\mu)$ é definida por

$$F(\mu) = \sum_{i=1}^n (A_i^*(\mu) - A_i)^2. \quad (5.4)$$

Para a solução deste problema de minimização usaremos o algoritmo desenvolvido em [11], que usa técnicas do tipo Lagrangiano aumentado com restrições de canalização. Esse algoritmo precisa do cálculo do vetor gradiente e a matriz Hessiana da função 5.4. O vetor gradiente

$$\nabla F(\mu) = \left(\frac{\partial F(\mu)}{\partial \mu_1}, \frac{\partial F(\mu)}{\partial \mu_2}, \dots, \frac{\partial F(\mu)}{\partial \mu_{(n/2)-1}} \right), \quad (5.5)$$

é calculado por

$$\frac{\partial F(\mu)}{\partial \mu_j} = 2 \left(\sum_{l=1}^n (A_l^*(\mu) - A_l) \frac{\partial A_l^*(\mu)}{\partial \mu_j} \right), \quad (5.6)$$

com $j = 1, 2, \dots, (n/2)$. A matriz Hessiana de ordem $((n/2))$ é denotada por

$$\mathcal{H}(F(\mu)) = \left[\frac{\partial^2 F(\mu)}{\partial \mu_i \partial \mu_j} \right]_{i,j}, \quad (5.7)$$

para $i, j = 1, 2, \dots, (n/2)$, cujos elementos são

$$\frac{\partial^2 F(\mu)}{\partial \mu_i \partial \mu_j} = 2 \left[\sum_{l=1}^n \frac{\partial A_l^*(\mu)}{\partial \mu_i} \cdot \frac{\partial A_l^*(\mu)}{\partial \mu_j} + (A_l^*(\mu) - A_l) \frac{\partial^2 A_l^*(\mu)}{\partial \mu_i \partial \mu_j} \right]. \quad (5.8)$$

O vetor gradiente e a matriz Hessiana definidos acima serão calculados usando a análise de sensibilidade desenvolvida no capítulo 4.

5.2 Resolução do problema DDMEF

Nesta seção, mostramos a resolução do problema DDMEF através de exemplos de detecção de danos.

Consideremos a barra ideal, com áreas $(A_i) = 1.0$ de comprimento $L = 10$. Introduzimos um dano artificial de 90%, em $x = 8.0$. Em termos das áreas, se usarmos uma discretização de tamanho $n = 10$, equivale a diminuir a área A_8 nessa porcentagem. Se o tamanho da discretização é aumentado, este dano afeta às áreas A_{16} e A_{40} para $n = 20, 50$ respectivamente. Os resultados do processo de minimização são resumidos na tabela 5.1.

<i>Teste</i>	1	2	3
n	10	20	50
Área diminuída	A_8	A_{16}	A_{40}
% diminuição	90.0	90.0	90.0
% detetado	90.0	90.0	89.88
$F(\mu)$	0.0081	0.0081	0.00807
$\ \nabla F(\mu)\ $	5.35e-6	5.11e-06	5.47e-06
N° Iterações	45	67	92

Tabela 5.1: Processo de otimização para um dano em $x=8.0$

<i>Teste</i>	1	2	3
n	10	20	50
<i>Área diminuída</i>	A_3	A_6	A_{15}
% diminuição	20.0	20.0	20.0
% detetado	20.0	19.98	19.88
$F(\mu)$	0.0004	0.000398	0.000395
$\ \nabla F(\mu)\ $	8.12e-7	3.47e-08	4.48e-07
N° Iterações	47	65	93

Tabela 5.2: Processo de otimização para um dano em $x=3.0$

Os gráficos da Figura 5.1 mostram os resultados obtidos usando a resolução do problema DDMEF. Na primeira coluna desta figura se mostram as áreas da barra sem dano e as encontradas pelo método. Para os três valores de n usados, consegue-se detetar a diminuição das respectivas áreas.

Na segunda coluna da Figura 5.1, se mostram os erros relativos em escala $\log_{10}$, entre as áreas conhecidas e as encontradas. Claramente, os erros são maiores nos locais onde a diminuição foi localizada o que confirma a efetividade da estratégia para a detecção de danos.

Se o dano é induzido em outro local, os resultados são similares. A primeira coluna da Figura 5.2 mostra os gráficos das áreas sem dano e as áreas reconstruídas. A porcentagem de diminuição é 20%, mudando só a localização do dano à posição $x = 3.0$. As áreas afetadas foram A_3, A_6 e A_{15} para os tamanhos de discretização $n = 10, 20, 50$ respectivamente. Da mesma forma, na segunda coluna da Figura 5.2, mostram-se os erros relativos em escala $\log_{10}$, entre as áreas conhecidas e as reconstruídas. Os detalhes do processo de otimização são resumidos na Tabela 5.2.

Os resultados mostrados nas figuras anteriores confirmam a efetividade da estratégia para resolver o problema DDMEF.

Novos testes foram feitos incluindo mais de um dano. O primeiro gráfico da Figura 5.3, mostra o resultado obtido quando são induzidos três danos simultaneamente nos locais $x = 2.0, x = 5.0$ e $x = 9.0$. As diminuições para os danos foram 20%, 10% e 50% respectivamente. No segundo gráfico da Figura 5.3, se mostra o erro relativo para esse caso. A Tabela 5.3 mostra os detalhes para este teste

Figura 5.1: Solução do problema DDMEF para um dano de 90% induzido em $x = 8.0$, com $n = 10, 20$ e 50 respectivamente

Os resultados obtidos permitem detetar diminuições das áreas que foram perturbadas inicialmente. Esta técnica se mostra mais atraente pela quantidade de informação requerida: só a metade das frequências são necessárias. Outro fato interessante desta técnica é que o espectro intercalado assim como os modos de vibração não precisam ser medidos. Do ponto de

vista prático, isto é uma vantagem pois resultados experimentais mostram que as frequências de vibração podem ser medidas com maior precisão que os modos de vibração.

Figura 5.2: Solução do problema DDMEF para um dano induzido em $x = 3.0$ de 20% com $n = 10, 20$ e 50 respectivamente

n	50		
Áreas diminuídas	A_{10}	A_{25}	A_{45}
% diminuição	20.0	10.0	50.0
% detetado	20.0	9.96	49.98
$F(\mu)$	0.029984		
$\ \nabla F(\mu)\ $	6.26e-6		
N° Iterações	90		

Tabela 5.3: Processo de otimização para danos em $x=8.0, 2.0$ e 9.0

Figura 5.3: Solução do problema DDFEM para danos induzidos em $x = 2.0, x = 5.0$ e $x = 9.0$ de 20%, 10% e 50% respectivamente

Capítulo 6

Comparação das Técnicas Desenvolvidas

Neste Capítulo, fazemos uma comparação das diferentes técnicas desenvolvidas para a detecção de danos de uma barra usando o critério de diminuição de áreas. Para fazer esta comparação, analisamos os resultados obtidos pelos diferentes algoritmos para três tipos diferentes de testes. Se comparamos os tempos de execução de cada um dos algoritmos como também o tipo de dados que requerem cada um deles.

O primeiro teste considera um dano localizado no meio da barra. Para este caso são analisadas discretizações de diferentes tamanhos.

O segundo teste consiste em comparar as diferentes técnicas quando são induzidos três danos simultaneamente numa mesma barra.

No final deste Capítulo, apresentam-se as conclusões finais deste trabalho assim como propostas futuras e sua continuidade.

6.1 Nomenclatura para as técnicas desenvolvidas

Para fazer a comparação das técnicas usamos a seguinte nomenclatura:

MEFOT: Técnica que usa o método de **otimização** baseado na reconstrução de áreas usando a metade do espectro.

MEFSR: Técnica que usa uma frequência e um modo de vibração. O modo de vibração é considerado **sem ruído** nas suas componentes.

MEFCR: Técnica que usa uma frequência e um modo de vibração. O modo de vibração é considerado **com ruído** nas suas componentes.

Método	Dados necessários
MEFOT	$(\lambda_i^*)_1^{n/2}$
MEFSR	$(\lambda, \mathbf{u})$
MEFCR	$(\lambda, \mathbf{u}^*)$
MEFMQ	$(\lambda^{(s)}, \mathbf{u}^{(s)})$
MEFFL	$(\lambda, \mathbf{u}^*), (A_i)_p^q$

Tabela 6.1: Dados necessários para cada método

MEFMQ: Técnica que usa s pares de frequências e modos de vibração com o método dos mínimos quadrados.

MEFFL: Técnica que usa uma frequência e um modo de vibração contaminados e um bloco de áreas conhecidas, usando a técnica do filtro.

Em geral, a quantidade de informação necessária para o desenvolvimento dos métodos acima indicados é resumida na Tabela 6.1.

Precisamos indicar também a porcentagem de erro que será incluída nos modos de vibração para os métodos **MEFCR**, **MEFMQ** e **MEFFL**. Usando como referência os trabalhos de Gladwell [39] e Ram [36], considera-se um erro de 0.1% nas componentes do vetor $\mathbf{u}$.

6.2 Detecção de único dano

Consideremos a barra uniforme de áreas iguais a 1.0 e comprimento $L = 10$. O dano considerado equivale a uma diminuição de 90% na metade da barra, ou seja, em $x = 5.0$. Foram consideradas discretizações de tamanho $n = 10, 20$ e 50 , as quais produzem diminuições nas áreas A_5 , A_{10} e A_{25} respectivamente. Nas Figuras 6.1 até 6.4, são mostrados os resultados obtidos pelos métodos **MEFOT**, **MEFSR**, **MEFCR** e **MEFMQ**. Nas primeiras colunas destas Figuras, são mostradas a barra e as áreas efetivas reconstruídas por cada um dos métodos para os diferentes tamanhos das discretizações $n = 10, 20$ e 50 respectivamente. Na segunda coluna das Figuras são mostrados os erros relativos em escala $\log_{10}$, entre as áreas conhecidas e as áreas reconstruídas para cada caso.

Na Figura 6.1 são mostrados os resultados obtidos pelo **MEFOT**. Observa-se que a detecção do dano é efetiva. Isto pode-se concluir tanto da primeira como a segunda coluna, onde os erros apresentam um valor máximo naqueles locais onde a diminuição da área foi induzida. Vemos que o aumento do tamanho da discretização não afeta a localização do dano.

Na Figura 6.2 são mostrados os resultados obtidos pelo método **MEFSR**. O fato dos dados

não estarem contamina-dos faz com que esta reconstrução seja mais atraente do ponto de vista matemático e das aplicações. A obtenção de uma frequência de vibração e seu respectivo modo depende de técnicas conhecidas para medir esta informação. Do ponto de vista numérico a reconstrução a partir do par (λ, u) é excelente. Os erros mostrados na Figura 6.2 confirmam a efetividade do algoritmo.

Na Figura 6.3, os resultados obtidos usando **MEFCR** são mostrados. Os resultados não são bons comparados aos obtidos pelos dois métodos anteriores. O aumento do tamanho na discretização piora a aproximação. As aproximações incluem erros de 0.1% introduzidos aleatória-mente nos modos de vibração. Já para $n = 20$ as aproximações para as áreas mostram algum tipo de imprecisão. Para $n = 50$ as aproximações são totalmente imprecisas, e a partir dos erros não é possível concluir a localização do dano.

Finalmente, na Figura 6.4, temos os resultados obtidos usando **MEFMQ**. O valor de s usado para obter estes resultados é $s = 2$. Ou seja, para cada discretização $n = 10, 20$ e 50 , usamos os pares $(\lambda_1, u^{(1)})$ e $(\lambda_2, u^{(2)})$ com uma perturbação aleatória de 0.1% em cada uma das componentes dos vetores $(u^{(i)})_{1,2}$. Os erros mostram que um valor máximo é atingido nos locais onde as diminuições foram induzidas.

Se consideramos $n = 100$, sem mudar a localização do dano, os resultados são mostrados na Figura 6.5. Vemos que os métodos **MEFOT** e **MEFSR** entregam a informação precisa para determinar a localização do dano. Os últimos dois gráficos desta Figura mostram os resultados obtidos com **MEFCR**, e eles são totalmente afetados pelo tamanho da discretização.

Para uma discretização de tamanho n , o método **MEFOT** precisa da metade das frequências de vibração. Se os modos de vibração não estão contamina-dos, o método **MEFSR** precisa uma frequência de vibração e seu respectivo modo. Se usamos o método **MEFCR**, a mesma quantidade de informação é requerida. Se usamos o método **MEFMQ**, e queremos uma efetividade alta, precisamos de varias frequências e modos associados. Isto, na prática pode ser uma desvantagem na hora de medir os pares $(\lambda^{(s)}, u^{(s)})$, devido à dificuldade prática de serem medidas. Porém, se usamos a técnica de filtragem descrita no Capítulo 3, pode-se evitar fazer estas medições e usar a informação obtida para $s = 1$ para detetar o dano. Na Figura 6.6 se apresenta o resultado usando o método **MEFFL**. Para este teste, vemos que em **MEFOT** e **MEFSR** os resultados são aceitáveis. Para **MEFCR** temos uma queda na efetividade da detecção devido a inclusão de erros aleatórios nos modos de vibração. Finalmente, para o método **MEFMQ**, esta efetividade dependerá do tamanho da discretização, embora usemos filtro na informação.

A influência da discretização na detecção de danos pode ser analisada desde dois pontos de vista: localizar e quantificar o dano. Do ponto de vista da localização do dano, vemos que todos os métodos, exceto **MEFCR**, entregam uma boa informação para as diferentes discretizações. Se queremos quantificar o dano detetado, os resultados são aceitáveis para **MEFOT** e **MEFSR**,

pois eles não dependem do tamanho da discretizações consideradas. O método **MEFCR** depende fortemente do tamanho da discretização, e o método **MEFMQ** precisa do aumento do tamanho de s para obter resultados razoáveis. Vemos que os métodos **MEFOT** e **MEFSR** entregam a informação precisa para determinar a localização do dano. Os últimos dois gráficos desta Figura mostram os resultados obtidos com **MEFCR**, e eles são totalmente afetados pelo tamanho da discretização.

Se o método **MEFFL** é usado calculando as medias obtemos os resultados da Figura 6.6. Primeiro gráfico desta figura mostra as áreas da barra reconstruídas. O segundo gráfico desta figura mostra o erro relativo da reconstrução. Na Figura 6.7 se mostra o resultado obtido quando as áreas não danificadas são fixadas. Neste caso o dano localizado na Figura 6.6 atinge uma intensidade de 87% e na Figura 6.7 a intensidade do dano é de 88.5% o qual é mais próximo do dano arbitrário de 90%.

Figura 6.1: *Dano localizado de 90% em $x = 5.0$ usando MEFOT para $n = 10, 20$ e 50 .*

Figura 6.2: Dano localizado de 90% em $x = 5.0$ usando MEFSR para $n = 10, 20$ e 50 .

Figura 6.3: Dano localizado de 90% em $x = 5.0$ usando MEFCE para $n = 10, 20$ e 50 .

Figura 6.4: Dano localizado de 90% em $x = 5.0$ usando MEFMQ para $n = 10, 20$ e 50 .

Figura 6.5: *Dano localizado de 90% em $x = 5.0$ usando MEFOT, MEFSR e MEFCR para $n = 100$.*

Figura 6.6: Dano de localizado de 90% em $x = 5.0$, usando MEFFL calculando as medias para $n = 100$.

Figura 6.7: Dano de localizado de 90% em $x = 5.0$, usando MEFFL, fixando as áreas não danificadas para $n = 100$.

Método	Dados necessários	Efetividade da detecção	Influência da discretização
MEFOT	$(\lambda_i^*)_1^{n/2}$	99%	NÃO
MEFSR	$(\lambda, \mathbf{u})$	100%	NÃO
MEFCR	$(\lambda, \mathbf{u}^*)$	90%	SIM
MEFMQ	$(\lambda^{(s)}, \mathbf{u}^{(s)})$	99%	SIM
MEFFL	$(\lambda, \mathbf{u}^*), (A_i)_p^q$	99%	SIM

Tabela 6.2: Tabela comparativa geral dos métodos desenvolvidos

Método	N=10	N=20	N=50	N=100
MEFOT	1.597748s.	17.456658s.	81.126238s.	179.445689s.
MEFSR	1.147406E-05s.	2.745134E-05s.	6.066544E-05s.	1.134769E-04s.
MEFCR	1.234237E-05s.	2.466483E-05s.	8.187047E-05s.	1.319807E-04s.
MEFMQ	1.521498E-04s.	4.178235E-04s.	8.198672E-04s.	1.307396E-03s.
MEFFL	1.172356E-05s.	2.234554E-05s.	5.241632E-05s.	1.234132E-04s.

Tabela 6.3: Tabela comparativa dos tempos de execução (em segundos) dos métodos para um dano

A Tabela 6.2 resume a quantidade do dano induzido que foi realmente detectado em termos percentuais, a qual chamamos de *efetividade da reconstrução*. Um outro fato a ser levado em conta é a *influência da discretização* usada por cada método, o qual indica se o tamanho da discretização usado influi na detecção do(s) dano(s).

Outra comparação pode ser feita levando em conta o tempo de execução dos programas que usa cada método. As experiências numéricas mostradas neste trabalho foram feitas em um computador com 256MB de RAM, processador Pentium IV de 1.5GMHz e 40GB. Os programas computacionais foram desenvolvidos com o FORTRAN 90 do Visual Fortran. Para obter o tempo de execução, diversas medições foram feitas para cada teste e o valor das medias dos tempos obtidos foi considerado como tempo final de execução. Os tempos estão medidos em segundos.

Na Tabela 6.3, se mostra um resumo dos tempos medidos para os testes que incluem um dano e discretizações de tamanho $N = 10, 20, 50$ e 100 . Nessa Tabela observa-se que o método MEFOT é mais demorado se a discretização é aumentada. Os outros métodos mantêm um tempo razoável mente baixo na execução dos testes.

6.3 Detecção de varios danos

Pode acontecer na prática que a estrutura possua mais de um dano. Comparamos os resultados obtidos pelos métodos quando três danos são induzidos. Escolhermos as posições $x = 3.0, x = 5.0$ e $x = 7.0$ para uma discretização de $n = 100$ pontos numa barra de áreas $A_i = 0.1$. Induzimos as diminuições de 50%, 10% e 80% respectivamente nesses locais. Temos então essas porcentagens de diminuições nas áreas A_{30}, A_{50} e A_{70} respectivamente. Na Figura 6.8 se mostram os resultados obtidos ao aplicar os métodos MEFOT, MEFSR e MEFCR. Claramente, os dois primeiros métodos entregam informação excelente em relação aos danos encontrados. O resultado obtido pelo método MEFCR, confirma que a inclusão de ruídos nos modos de vibração influi na detecção de danos. Os resultados obtidos pelo método MEFFL com cálculo de medias e o respectivo erro relativo são mostrados na Figura 6.9. Fixando as áreas que não foram danificadas obtemos a reconstrução da barra mostrada na Figura 6.10. Na Tabela 6.4 se mostram os tempos de execução usados pelos diferentes algoritmos quando três danos são induzidos e na Tabela 6.5 as intensidades detetadas pelos métodos para os diferentes danos induzidos.

Método	Tempo de execução
MEFOT	177.32s.
MEFSR	1.22316E-04s.
MEFCR	1.47484E-04s.
MEFMQ	2.13779E-03s.
MEFFL	1.343579E-04s.

Tabela 6.4: Tabela comparativa dos tempos de execução dos métodos para três danos induzidos

Método	dano de 50%	dano de 10%	dano de 80%
MEFOT	49.0%	9.0%	79.0%
MEFSR	50.0%	10.0%	80.0%
MEFCR	41.0%	8.8%	71.0%
MEFFL(media)	42.0%	9.1%	73.0%
MEFFL(áreas fixas)	47.0%	9.7%	78.4%

Tabela 6.5: Tabela comparativa das porcentagens de detecção de três danos para os diferentes métodos.

Figura 6.8: Danos localizados de 50%, 10% e 80% em $x = 3.0$, $x = 5.0$ e $x = 8.0$, respectivamente, usando MEFOT, MEFSR e FEMCR para $n=100$.

Figura 6.9: Danos localizados de 50%, 10% e 80% em $x = 3.0, x = 5.0$ e $x = 8.0$, respectivamente, usando MEFFL, com cálculo de média para $n = 100$

Figura 6.10: Danos localizados de 50%, 10% e 80% em $x = 3.0, x = 5.0$ e $x = 8.0$, respectivamente, usando MEFFL, fixando as áreas não danificadas para $n = 100$

6.4 Conclusões e Propostas Futuras

Neste trabalho desenvolveram-se técnicas inversas de autovalor para resolver o problema de detecção de danos em uma barra. Este problema é de crescente interesse na área de mecânica estrutural. No desenvolvimento das técnicas foram levados em conta aspectos teóricos e práticos; do ponto de vista teórico, as técnicas foram baseadas em discretizações das equações que governam as vibrações axiais de um modelo simples de barra. Estas discretizações levam a problemas de autovalor onde as matrizes envolvidas possuem estruturas especiais as quais tem sido exploradas e aproveitadas para o desenvolvimento das técnicas antes mencionadas.

Um modelo discreto da barra vibrante consiste em um sistema massa-mola, onde os danos foram caracterizados como reduções localizadas nas constantes de rigidez das molas. Um problema que se apresenta nos sistemas massa-mola é que a reconstrução das massas e constantes de rigidez estão fortemente vinculadas entre si. Este fato influi no processo de reconstrução do sistema com dano pois as diminuições nas constantes de rigidez afetam diretamente as massas recuperadas. Uma estrutura com dano não apresenta perda de massa, o que significa que as massas do sistema com dano são as mesmas do sistema sem dano. A estratégia para superar esta dificuldade é incluir um parâmetro de controle θ que diminui a dependência entre massas e constantes de rigidez, permitindo assim detetar o dano sem alterar os valores das massas do sistema. As experiências numéricas mostraram que a diminuição do parâmetro θ permite reconstruir a barra com dano, mantendo as massas iniciais. Um problema que aparece no uso do parâmetro θ é a busca de seu valor ótimo para o uso da técnica.

Um estudo feito a partir dos trabalhos encontrados na área de detecção de danos nos levou a fazer uma reformulação da nossa técnica. Conseguiu-se assim abandonar a estratégia do uso de θ , explorando outras discretizações onde a barra é identificada com um modelo discreto para suas áreas. A técnica inversa de autovalor consiste agora em reconstruir as áreas da barra a partir de seu comportamento dinâmico. O conceito de dano foi redefinido como diminuições na área efetiva da barra, permitindo assim, além de localizar diminuições de áreas, quantificá-lo.

Para a formulação do problema em termos de áreas, consideramos a barra homogênea, que é de grande interesse prático. Condições necessárias e suficientes para a reconstrução de modelos discretos baseados em esquemas de diferenças finitas são ainda objeto de estudo. Optamos por uma discretização por elementos finitos lineares, a qual nos permitiu desenvolver duas técnicas para a reconstrução dos parâmetros de área. Na primeira, a reconstrução depende de uma frequência de vibração e seu respectivo modo. Na segunda, os danos são detetados a partir da metade das frequências de vibração, devido à estrutura especial das matrizes envolvidas. Esta estrutura especial também nos permitiu obter uma condição necessária e suficiente para a reconstrução de áreas.

A reconstrução a partir de uma frequência e seu respectivo modo resulta interessante do ponto

de vista prático. Este método apresenta problemas de sensibilidade quando ruídos aleatórios são incluídos nos modos. Esta sensibilidade pode ser diminuída usando informação adicional. No início, a quantidade de informação adicional mostrou ser eficiente para a detecção de danos. Do ponto de vista prático deixa de ser interessante devido às dificuldades para a obtenção dessa informação. Porém, uma saída interessante para essa dificuldade é filtrar a informação obtida a partir das primeiras medições; a técnica dos blocos possui a vantagem da simplicidade na sua implementação e o cálculo da média das diferentes reconstruções permite localizar danos maiores de 10%. Para melhorar as aproximações das intensidades dos danos localizados, usamos as áreas não danificadas como informação adicional. Esta técnica mostrou ser eficiente no cálculo das intensidades dos danos e os testes numéricos confirmam sua aplicação.

No caso da reconstrução a partir da metade das frequências de vibração, ela se apresenta mais robusta e podem-se aplicar técnicas de otimização para a detecção de danos. Uma estratégia de busca multidimensional foi apresentada, onde as áreas da barra com dano são consideradas funções das frequências de uma barra do tipo fixo-fixo, frequências estas que formam o espectro intercalado. Esta busca multidimensional foi apresentada como um problema de otimização o qual foi abordado usando o algoritmo desenvolvido em [11]. Este algoritmo precisa de uma aproximação inicial para o espectro intercalado, o qual é gerado convenientemente para garantir convergência. Experiências numéricas sugerem que uma estratégia para a relaxar o processo de otimização é considerar a n -ésima área como uma variável independente, o qual foi feito obtendo-se bons resultados. Esta técnica tem a vantagem de não se precisar conhecer a priori os modos de vibração e o espectro intercalado.

Ambas reconstruções foram aplicadas com sucesso ao problema de detecção de danos. Um aspecto importante que foi levado em conta é o sentido prático do problema. Por isso tentamos minimizar o trabalho prático diminuindo ao máximo a informação necessária para cada um dos métodos.

Esperamos poder estender estas técnicas para aplicá-las a outros problemas de estruturas mecânicas.

Como propostas futuras podem-se mencionar:

1. a extensão das técnicas desenvolvidas a outros modelos de barras as quais envolvam matrizes com propriedades estruturais semelhantes as estudadas neste trabalho;
2. redefinir o nosso conceito de dano de maneira que as técnicas possam ser aplicadas a barras não-homogêneas;
3. aplicar as técnicas desenvolvidas a um problema de laboratório, onde as frequências e/ou modos de vibração sejam fornecidas pelas técnicas especializadas em monitoramento estrutural;

4. estudar a aplicação das técnicas desenvolvidas neste trabalho a estruturas com amortecimento;
5. aplicar, com as devidas adaptações, a técnicas desenvolvidas ao problema de detecção de danos em estruturas tipo treliça;
6. estudar o comportamento dinâmico de barras não uniformes e sua relação com problemas de ressonância estrutural.

Apêndice A

Algoritmo tipo região-confiável para minimização com restrições de canalização

Considere o problema

$$\text{Minimizar} \quad F(x) \tag{A.1}$$

$$\text{sujeito a:} \quad l \leq x \leq u, \tag{A.2}$$

onde $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em um conjunto factível. A.R. Conn, N.I.M. Gould, e Ph.L. Toint [7] mostraram que praticamente todos os problemas de programação não-linear de grande escala pode ser resolvido eficientemente usando técnicas de Lagrangiano aumentado, sempre que seja usado um bom método para resolver A.2.

O algoritmo desenvolvido em [11], chamado de LARC, é um algoritmo do tipo *região-confiável* para resolver A.2. Em cada iteração do algoritmo, considera-se o problema de minimizar uma função *quadrática* (não necessariamente convexa) em uma caixa que consiste da interseção da caixa original $l < x < u$ com a região confiável.

Usualmente em métodos modernos do tipo região-confiável, não é necessário resolver exatamente o subproblema para obter convergência global do algoritmo principal (Ver [7], [43], [42]). Em vez, uma condição suave que relaciona o valor objetivo da quadrática à solução de um problema auxiliar muito simples é suficiente para provar que todo ponto de acumulação é estacionário.

O gradiente de F será denotado por $G(x)$. O símbolo $\| \cdot \|$ denota a norma-2 de vetores

e matrizes, e $\|\cdot\|_{\sharp}$ denotará uma norma arbitrária em $\mathbb{R}^n$ e a correspondente norma matricial subordinada. Sejam α , Δ_{min} , e θ tal que $\alpha \in (0, 1)$, $\Delta_{min} > 0$, e $\theta \in (0, 1]$. No começo o algoritmo LARC tem um ponto factível x_0 , uma matriz simétrica B_0 de $n \times n$ (a aproximação da Hessiana), uma matriz não singular D_0 (matriz escala) de $n \times n$, e um raio $\Delta^0 \geq \Delta_{min}$. O papel das matrizes escalas é permitir a possibilidade do ajuste das variáveis que diferem muito em magnitude. Dado um x_k factível, B_k simétrica, D_k não singular, e $\Delta^k \geq \Delta_{min}$, os passos para obter x_{k+1} e Δ_k são dados pelo seguinte

ALGORITMO LARC:

Passo 1 (Definir o raio inicial da região-confiável e calcular uma estimativa superior of $\lambda_n(B_k)$). Definir

$$\Delta \leftarrow \Delta^k.$$

Calcular $M_k > 0$ tal que $\lambda_n(B_k) \leq M_k$, onde $\lambda_1(B_k) < \lambda_2(B_k) < \dots < \lambda_n(B_k)$ são os autovalores de B_k .

Passo 2 (Resolver o subproblema “fácil”). Calcular a solução global $z_k^Q(\Delta)$ de

$$\text{Minimizar} \quad Q_k(z) \equiv \frac{1}{2} M_k \|z\|^2 + G_k^T z, \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a :} \quad & l \leq x_k + z \leq u, \\ & \|D_k z\|_{\sharp} \leq \Delta, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

onde $G_k = G(x_k)$. Se $Q_k(z_k^Q(\Delta)) = 0$, parar.

Passo 3 (Calcular o passo provável). Calcular $\bar{z}_k(\Delta)$ tal que

$$\begin{aligned} \psi(\bar{z}_k(\Delta)) &\leq \theta Q_k(z_k^Q(\Delta)), \\ l &\leq x_k + \bar{z}_k(\Delta) \leq u, \\ \|D_k \bar{z}_k(\Delta)\|_{\sharp} &\leq \Delta, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

onde $\psi(z) = \frac{1}{2} z^T B_k z + G_k^T z$ para todo $z \in \mathbb{R}^n$. Observar que $z_k(\Delta)$ satisfazendo A.3, A.4 existe, já que $z_k^Q(\Delta)$ é uma escolha admissível.

Passo 4 (Teste de parada). Se

$$F(x_k + \bar{z}_k(\Delta)) \leq F(x_k) + \alpha \psi_k(\bar{z}_k(\Delta)), \quad (\text{A.6})$$

então definir $z_k = \bar{z}_k(\Delta)$, $x_{k+1} = x_k + z_k$, $\Delta_k = \Delta$ e parar. Senão, substituir Δ por Δ_{novo} , onde

$$\Delta_{novo} \in [\sigma_1 \| D_k \bar{z}_k(\Delta) \|_{\sharp}, \sigma_2 \Delta], \quad (\text{A.7})$$

onde σ_1, σ_2 são tais que $0 < \sigma_1 \leq \sigma_2 < 1$, e ir ao Passo 2.

Lema A. 1 : *O algoritmo LARC para no passo 2 ($Q_k(z_k^Q(\Delta)) = 0$) se e somente se x_k é um ponto Kuhn-Tucker (estacionário) do problema A.1, A.2.*

Teorema A. 1 *O algoritmo LARC é bem definido. Isto é, se o processo não para no Passo 2 (com $Q_k(z_k^Q(\Delta)) = 0$), então x_{k+1} podem calcular-se repetindo os Passos 2-4 em um número finito de vezes.*

Observação: Normalmente sugere-se que a norma infinito $\| \cdot \|_{\infty}$ seja a escolha mais natural para $\| \cdot \|_{\sharp}$.

No seguinte teorema prova-se a convergência global do algoritmo LARC, onde introduze-se a notação $\lim_{k \in K}$ para denotar o limite quando $k \rightarrow \infty$ para k pertencente a um conjunto infinito de índices K subconjunto dos números naturais.

Teorema A. 2 *Supor que $\{x_k\}$ é uma sequência gerada pelo algoritmo LARC, K_1 é um conjunto infinito de índices tal que $\lim_{k \in K_1} x_k = x_*$, e M_k , $\| D_k \|_{\sharp}$, $\| D_k^{-1} \|_{\sharp}$, e $|\lambda_1(B_k)|$ são limitados por $k \in K_1$. Então x_* é um ponto estacionário (Kuhn-Tucker) de A.1, A.2.*

Referências Bibliográficas

- [1] F.W. Biegler-Köning, Construction of band matrices from spectral data, *Lin. Alg. Appl.* **40** (1981), 79–84.
- [2] D. Boley e G.H. Golub, A survey of matrix inverse eigenvalue problem, *Inverse Problems* **3** (1987), 595–622.
- [3] D.L. Boley e G.H. Golub, Inverse eigenvalue problems for band matrices, *Lectures Notes on Mathematics, Numerical Analysis (Berlin: Springer)* (1977), 23–31.
- [4] Brasil R.M.L.R.F. Mazilli C., Influence of loading on mode localization in periodic structures, *Applied Mechanics Reviews* **48** (1991), no. 11, s132–s137.
- [5] Lai W.Y. Chiang D.Y., Structural damage detection using the simulated evolution method, *AIAA* **37** (1998), no. 10, 1331–1333.
- [6] M.T. Chu, Inverse eigenvalue problems, *SIAM Rev.* **40** (1998), no. 1, 1–39.
- [7] A.R. Conn, N.I.M. Gould e Ph.L. Toint, Global convergence of a class of trust-region algorithms for optimization with simple bounds, *SIAM Journal on Numerical Analysis* **25** (1988), 433–460.
- [8] C. de Boor e G.H. Golub, The numerically stable reconstruction of a jacobi matrix from spectral data, *Lin. Alg. Appl.* **21** (1978), 245–260.
- [9] J.E. Doherty, *Nondestructive evaluation*, Society for Experimental Mechanics, 1987.
- [10] J.C. Egaña, *Um método numérico para a resolução de problemas inversos de autovalor em sistemas dinâmicos discretos*, Ph.D. thesis, IME-USP, Universidade de São Paulo, 1999.
- [11] A. Friedlander, J.M. Martínez e S.A. Santos, A new trust region algorithm for bound constrained minimization, *Appl. Math. Optim* **30** (1994), 235–266.
- [12] Hearn G. e Testa R., Modal analysis for damage detection in structures, *Journal of Structural Engineering* **117** (1991), no. 10, 3042–3063.

-
- [13] F.P. Gantmakher e M.G. Krein, Oscillation matrices and kernels and small vibrations of mechanical systems, *State Publishing House for Technical-Theoretical Literature, Moscow-Leningrad, USSR (Translation: US Atomic Energy Commission, Washington DC, 1961)* (1950).
- [14] G.M. Gladwell, Inverse problems in vibrations, *Appl. Mech. Rev.* **39** (1986), no. 7, 1013–1018.
- [15] ———, Inverse problems in vibrations-2, *Appl. Mech. Rev.* **49** (1996), no. 10, 25–34.
- [16] G.M. Gladwell e B.R. Zhu, Inverse problems for multidimensional vibrating systems, *Proc. R. Soc. Lond A* **439** (1992), 511–530.
- [17] G.M.L. Gladwell, The inverse problem for the beam, *Proc. Roy. Soc. Ser. A* **393** (1984), 277–295.
- [18] ———, *Inverse problems in vibration*, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1986.
- [19] G.M.L. Gladwell, N.B. Willms, B. He e D. Wang, How can we recognize an acceptable mode shape for a vibrating beam?, *Q. J. Mech. Appl. Math.* **42** (1989), 303–316.
- [20] Gladwell G.M.L., Inverse vibration problems for finite-element models, *Inverse Problems* **13** (1997), 311–322.
- [21] ———, Inverse finite element vibration problems, *Preprint* (1999), 1–18.
- [22] W.B. Gragg e J.H. Welsch, The numerically stable reconstruction of jacobi matrices from spectral data, *Numer. Math.* **44** (1984), 317–335.
- [23] Dai H. e Lancaster P., Newton's method for a generalized inverse eigenvalue problem, *Numerical Linear Algebra with Applications* **4** (1997), no. 1, 1–21.
- [24] O. Hald, Inverse eigenvalue problems for jacobi matrices, *Lin. Alg. Appl.* **14** (1976), 63–85.
- [25] S. Hassiotis, Identification of damage using natural frequencies and markov parameters, *Computers and Structures* **74** (2000), 365–373.
- [26] Jeong GG Hassiotis S, Identification of stiffness reductions using natural frequency measurements, *Journal of Engineering Mechanics* **121** (1995), 1106–1113.
- [27] G. Hearn e R.B. Testa, Modal analysis for damage detection in structures, *J. Struct. Eng.* **117** (1991), 3042–3063.
- [28] H. Hochstadt, On some inverse problems in matrix theory, *Arch. Math.* **18** (1967), 201–207.

- [29] K.T. Joseph, Inverse eigenvalue problem in structural design, *AIAA Ed. Ser.* **30** (1992), 2890–2896.
- [30] Jimenez R.D. Kuhl N.M. e De Castro S. L.C., On detection of structural failure using an inverse technique on vibration, *Proceedings of The Third International Conference on Non-linear Dynamics, Chaos, Control and Their Applications in Engineering Sciences, ICONNE 2000, Campos de Jordão, Brazil, editado por M.Balthazar e L.Barbanti* **5** (2000), 11–22.
- [31] C. Lanczos, An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators, *J res NBS Section B* **45** (1950), 225–232.
- [32] Lu L.Z. e W.W. Sun, On necessary conditions for reconstruction of a specially structured jacobi matrix from eigenvalues, *Inverse Problems* **15** (1999), 977–987.
- [33] Jones I. Messina A. e Williams E., Damage detection and localisation using natural frequency changes, *Proceedings of Conference on Identification in Engineering Systems, Swansea, U.K.* (1996), 67–76.
- [34] Williams E.J. Messina A. e Contursi T., Structural damage detection by a sensitivity and statistical-based method, *Journal of Sound and Vibration* **216** (1998), no. 5, 791–808.
- [35] Cawley P. Adams R., The location of defects in structures from measurements of natural frequencies, *Journal of Strain Analysis* **14** (1979), 49–57.
- [36] Y.M. Ram e S. Elhay, The construction of band symmetric models for vibratory systems from modal analysis data, *J. of Sound and Vibration* **181** (1995), no. 4, 583–591.
- [37] ———, Dualities in vibrating rods and beams: Continuous and discrete models, *J. Sound Vibration* **184** (1995), 759–766.
- [38] ———, Constructing the shape of a rod from eigenvalues, *Commun. Numer. Methods Engng* **14** (1998), 597–608.
- [39] Y.M. Ram e G.M.L. Gladwell, Constructing a finite element model of a vibratory rod from eigendata, *J. Sound Vibration* **169** (1994), 229–237.
- [40] M.H.H. Shen e J.E. Taylor, Identification problem for vibrating cracked beams, *J. Sound Vib.* **150** (1991), 457–484.
- [41] Law S.S. Shi Z.Y. e Zhang L.M., Structural damage localization from modal strain energy change, *Journal of Sound and Vibration* **218** (1998), no. 5, 825–844.
- [42] J. Stoer e R. Bulirsh, *Introduction to numerical analysis*, second ed., Springer Verlag, 1980.

- [43] G.N. Vanderplaats, *Numerical optimization techniques for engineering design with applications*, McGraw-Hill, Inc., 1984.
- [44] Jr. W. Weaver e P.R. Johnston, *Finite elements for structural analysis.*, Englewood Cliffs, N J: Prentice Hall, 1984.
- [45] Q. Wu, *Determination of the size of an object and its location in cavity by eigenfrequency shifts*, Ph.D. thesis, Univ of Sydney, 1990.
- [46] Q. Wu e F. Fricke, Estimation of blockage dimensions in a using measured eigenfrequency shifts, *J. Sound Vib.* 113 (1989), 289–301.
- [47] ———, Determination of blockage locations and cross-sectional area in a duct by eigenfrequency shifts, *J. Acoust Soc. Am.* 87 (1990), 67–75.
- [48] ———, Determination of the size of an object and its location in a rectangular cavity by eigenfrequency shifts, *J. Sound Vib.* 144 (1991), 131–147.