**Colchete de Poisson Covariante
na Teoria Geométrica dos Campos**

Sandro Vieira Romero

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
MATEMÁTICA APLICADA

Área de Concentração: **Matemática Aplicada**
Orientador: **Prof. Dr. Michael Forger**

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do CNPq e da FAPESP

-São Paulo, junho de 2001-

Colchete de Poisson Covariante na Teoria Geométrica dos Campos

Este exemplar corresponde à redação final da
tese devidamente corrigida e defendida
por Sandro Vieira Romero
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, junho de 2001.

COMISSÃO JULGADORA

- Prof. Dr. Frank Michael Forger (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Paolo Piccione - IME-USP
- Prof. Dr. Elcio Abdalla - IF-USP
- Prof. Dr. Jair Koiller - LNCC
- Prof. Dr. Jorge Zubelli - IMPA

Resumo

O principal resultado deste trabalho é a derivação do colchete de Peierls como colchete de Poisson associado à forma simplética no espaço de fase covariante, introduzida por Crnković, Witten e Zuckerman. A ligação entre estas duas estruturas, presentes na literatura há algum tempo mas estudadas de forma separada, permite o esclarecimento de ambas, contribuindo para o enriquecimento da formulação covariante da teoria geométrica dos campos. Também é mostrado que a forma simplética de Witten pode ser obtida, de um modo bastante simples e direto, a partir da forma de Cartan, estabelecendo uma conexão com o formalismo multi-simplético. Em todas essas abordagens, um papel importante é desempenhado por espaços e fibrados afins, ao contrário dos vetoriais, o que motivou um tratamento mais sistemático do que o normalmente encontrado na literatura. Esta maquinaria algébrica, discutida no primeiro capítulo, é particularmente útil para formular a transformação inversa de Legendre, introduzida no terceiro capítulo, que é essencial para caracterizar a equivalência do formalismo lagrangiano e hamiltoniano no caso não-degenerado mas é desenvolvida de maneira incompleta na literatura.

Abstract

The main result of this thesis is the derivation of the Peierls bracket of covariant field theory as the Poisson bracket associated with the symplectic form on covariant phase space, as introduced by Crnković, Witten and Zuckerman. The link between these two structures, which have been present in the literature for some time but have up to now remained separate, sheds new light on both of them, enriching the covariant formulation of geometric field theory. It is also shown that Witten's symplectic form can be obtained in a very simple and direct manner from the Cartan form, thus establishing a connection with the multisymplectic formalism. In all these approaches, an important role is played by affine spaces and bundles, as opposed to vector spaces and vector bundles, which motivates a more systematic treatment of these concepts than that normally found in the literature. This algebraic machinery, discussed in the first chapter, is particularly useful for formulating the concept of the inverse Legendre transform introduced in the third chapter, which is important to show the equivalence between the lagrangian and hamiltonian formulation in the non-degenerate case but is only incompletely developed in the literature.

*A venerável Atenéia,
por toda ajuda recebida.*

*“Depois do que vi de plantas e peixes em Nápoles
e na Sicília, eu estaria tentado a fazer, se tivesse
dez anos a menos, uma viagem à Índia, não para
descobrir algo novo, mas para contemplar as
coisas descobertas a meu modo.”*

Goethe para Knebel, 18 de Agosto de 1787, Itália.

Agradecimentos

Desejo expressar aos meus pais, Miguel e Rosmeire, minha gratidão pelo constante apoio durante a redação deste trabalho. Seus esforços no sentido de viabilizar minhas escolhas e o auxílio espiritual nos momentos difíceis mostram o quanto recebi, sem nenhum merecimento, desde que nasci.

Também quero agradecer a querida Karin pelo apoio e paciência, principalmente com respeito a incrível bagunça que fiz na sala durante os últimos meses. Ao Kaian prometo dias melhores, com mais brincadeiras, mais passeios e mais atenção.

Dedico ao Prof. Michael Forger um agradecimento especial pelas inúmeras conversas e sugestões responsáveis pelo aprimoramento do meu conhecimento em Física e Matemática.

Por fim, reconheço minha dívida para com meus colegas Fernando e Mário, devido às sugestões durante a redação deste texto.

Conteúdo

Introdução	1
1 Álgebra dos Espaços Afins	5
1.1 Espaços Afins	5
1.2 Sistemas de Coordenadas Afins	6
1.3 Aplicações Afins entre Espaços Afins	7
1.4 Matriz de uma Aplicação Afim	9
1.5 Espaço Afim Quociente	10
1.6 Aplicações Afins com Contradomínio Vetorial	11
1.7 Espaço Dual Afim	14
1.8 Grupo Afim	17
1.9 Categoria dos Espaços e Aplicações Afins	19
1.10 Referências	22
2 Estruturas Diferenciáveis Afins	23
2.1 Fibrados Afins	23
2.2 Operações com Fibrados Afins	24
2.3 Jatos e Cojatos	27
2.4 Prolongamento de Morfismos e Campos	30
2.5 Jatos de Segunda Ordem	31
2.6 Conexões Gerais e Principais	32
2.7 Fibrado das Conexões Principais	33

2.8	Fibrado das Conexões Lineares	37
2.9	Referências	38
3	Estruturas Dinâmicas	39
3.1	Lagrangiano e Equações de Euler-Lagrange	39
3.2	Dualidade e Transformação de Legendre	42
3.3	Forma Canônica e Forma de Cartan	43
3.4	Hamiltoniano e Morfismo de Hamilton	45
3.5	Transformação Inversa de Legendre	46
3.6	Referências	47
4	Espaço de Fase Covariante	49
4.1	Espaço das Configurações	49
4.2	Operador de Jacobi	51
4.3	Colchete de Peierls	53
4.4	Forma Simplética	55
4.5	Referências	58
	Bibliografia	59

Introdução

O espaço de fase covariante, ou seja, o espaço das soluções das equações de movimento, constitui um ambiente apropriado para o estudo da física relativística, no sentido de Galilei ou Einstein. Embora o conjunto de idéias associado a este conceito só tenha se difundido nos últimos anos, principalmente após a publicação do artigo de Crnković e Witten [7], sua história é muito mais antiga. De fato, o conjunto das soluções das equações do problema de Kepler foi o primeiro exemplo de variedade simplética investigado. Lagrange, procurando simplificar as equações celestes para calcular as perturbações seculares, introduziu em [28] o colchete entre funções no espaço das soluções que até hoje leva o seu nome. Usando as idéias contidas no trabalho de Lagrange, Poisson introduziu o seu colchete em [38], visando calcular invariantes integrais. Contudo, para efetuar suas importantes contribuições Poisson e Hamilton alteraram o contexto da mecânica de Lagrange, trabalhando no espaço de fase.

No mesmo século, apenas algumas décadas depois, foi introduzida por Jacobi [24] a noção de equação linearizada, outra idéia fundamental para o estudo do espaço de fase covariante. Apesar da ênfase mecânica do texto de Jacobi, os matemáticos posteriores vincularam sua equação somente ao estudo das geodésicas.

Apenas no século seguinte, com os trabalhos de Poincaré e Cartan sobre os invariantes integrais da mecânica, ocorreu uma revalorização do conceito de espaço de fase covariante. Finalmente, com Souriau [40] esta noção foi formalizada de maneira rigorosa e estudada em profundidade, servindo como base para a quantização e o estudo das propriedades globais dos sistemas mecânicos. Para alcançar estes objetivos Souriau definiu o conceito de variedade simplética e mostrou que os espaços de fase covariantes associados a diversos sistemas mecânicos são casos particulares desta noção.

Outra vertente moderna de estudo dos espaços de fase covariantes começou com Peierls [36], com a criação de um colchete covariante, também visando a quantização. Logo em seguida, DeWitt [9] formulou o contexto geral onde o colchete de Peierls pode ser definido, enriquecendo bastante a teoria original. Se a formulação de Souriau retomava os trabalhos de Lagrange sobre as estruturas simpléticas, estudando o espaço das soluções por meio do espaço

de evolução, a noção principal da abordagem de Peierls e DeWitt é a equação linearizada de Jacobi, além das estruturas associadas, como as funções de Green retardada e avançada.

Nos anos seguintes DeWitt estudou uma série de teorias físicas usando o colchete de Peierls. Nos textos [11] e [12] DeWitt relacionou o colchete de Peierls com a integral de Feynman, empregando-o assim como ferramenta auxiliar na quantização. Embora a principal motivação de DeWitt para usar o colchete de Peierls tenha sido a esperança, até hoje não concretizada, de quantizar a gravidade, os resultados e ferramentas obtidos mais do que justificaram seus esforços, sendo amplamente reconhecidos pelos físicos.

No mesmo período em que ocorriam estes progressos foram propostas generalizações do formalismo simplético da mecânica para a teoria dos campos, inspiradas nos trabalhos de Cartan [5], De Donder [8] e Weyl [42]. Abordagens como [13] e [26] estudavam a teoria dos campos através de estruturas de dimensão finita semelhantes às da geometria simplética, porém sem quebrar a covariância das teorias relativísticas. A semelhança entre os objetivos finais logo conduziu a ligações com o formalismo baseado no espaço de fase covariante, como em [25], [21] e [14]. Contudo, somente recentemente o formalismo proposto por Gotay [17] e Marsden [19] se impôs sobre os demais, surgindo a questão da relação geral entre as suas estruturas e as do espaço de fase covariante. De fato, mais ou menos na mesma época, esta noção foi definitivamente incorporada no vocabulário físico através dos trabalhos de Crnković, Witten [7] e Zuckerman [44], definindo uma forma simplética no espaço de fase covariante. Refletindo a repercussão destes artigos, o formalismo funcional covariante foi aplicado a vários problemas físicos em [6], [2], [30], [41] e [43].

Tendo em vista os trabalhos citados relacionando as primeiras versões do formalismo multisimplético com o espaço de fase covariante, deveria ser natural a busca da ligação entre o formalismo covariante de Witten e o formalismo matemático de Gotay e Marsden. Contudo, com surpresa contemplamos a literatura matemática e física evoluindo de forma independente, jamais encontrando a definição da forma simplética de Witten por meio da forma de Cartan. Somente em [33] encontramos algumas fórmulas que apontam nesta direção, porém a equivalência com o formalismo desenvolvido pelos físicos nos últimos anos da década anterior não é discutida. Este ponto, que é apenas uma generalização de [25], [21] e [14], é desenvolvido no último capítulo desta tese. Unificando os resultados de Goldschmidt e Sternberg [16] e Marsden, Patrick e Shkoller [33], também conseguimos derivar o operador de Jacobi a partir do formalismo multisimplético, mostrando a harmonia entre as duas teorias.

A relação entre o colchete de Peierls e o colchete de Poisson do formalismo canônico, baseado na distinção entre coordenada temporal e coordenadas espaciais, foi investigada pelo próprio Peierls [36], provando, no caso de uma teoria com lagrangiano regular, a coincidência das duas estruturas na classe dos funcionais do espaço de fase covariante que só dependem da posição e do momento de cada solução com respeito a uma hipersuperfície contida no espaço-

tempo. Posteriormente, Barnich, Henneaux e Schomblond [3] generalizaram a prova de Peierls para o contexto das teorias de calibre.

Por sua vez, a relação entre o colchete de Peierls e a forma simplética no espaço de fase covariante é desvendada na última seção desta tese, constituindo seu resultado mais importante. Provamos que o colchete de Peierls é o dual funcional da forma simplética de Witten, unificando as duas noções. Como resultado, as identidades estruturais típicas das variedades de Poisson demonstradas, por exemplo, em [10] para o colchete de Peierls são derivadas como corolários. É preciso destacar que o nosso resultado abrange apenas o contexto regular. Contudo, como existe o colchete de Peierls entre funcionais com invariância de calibre, conforme [11] e [12], e a forma pré-simplética origina uma estrutura simplética no espaço das soluções módulo o grupo de calibre, segundo [14] e [34], acreditamos que as duas estruturas também podem ser associadas nestes casos.

Por fim, enfatizamos que o primeiro e o segundo capítulos pretendem preencher uma lacuna na literatura recente sobre o formalismo multisimplético. Como os fibrados de jatos de qualquer ordem são afins, as principais estruturas algébricas do formalismo estão ligadas ao conceito de espaço afin, um fato que só foi considerado a partir de [17]. A noção de dual vetorial, por exemplo, tão importante para a mecânica, é substituída por um conceito semelhante da álgebra afin. Esta situação motivou um estudo sistemático de espaços e aplicações afins, desenvolvido no primeiro capítulo. O segundo emprega esta maquinaria algébrica para construir fibrados vetoriais e afins a partir de fibrados afins dados, de funtores e de subfibrados vetoriais, do mesmo modo como é feito no caso de fibrados vetoriais. Além disso, os fibrados dos jatos de primeira e segunda ordem são construídos através das ferramentas algébricas citadas. O terceiro capítulo, por sua vez, apresenta as principais estruturas do formalismo multisimplético, preparando o terreno para as suas aplicações funcionais no último capítulo. Completando o arcabouço de [4], o parágrafo sobre a transformação inversa de Legendre é a única contribuição original do penúltimo capítulo.

Capítulo 1

Álgebra dos Espaços Afins

1.1 Espaços Afins

Um conjunto não vazio X é denominado um *espaço afim* modelado no espaço vetorial V se for dada uma aplicação

$$+ : X \times V \rightarrow X \quad , \quad (x, v) \mapsto x + v$$

satisfazendo as condições:

- $x + (v + u) = (x + v) + u$, para todo $x \in X$ e quaisquer $v, u \in V$.
- Dados $x, y \in X$, existe um único $v \in V$ tal que $x = y + v$.

Os elementos de X chamam-se *pontos* do espaço afim. O ponto $x + v$ denomina-se *soma* do ponto x com o vetor v . O vetor $v = x - y$ é a *diferença* dos pontos x e y , ou seja, é o único vetor tal que $x = y + (x - y)$. Como, para cada espaço afim, seu *espaço modelo* é único, usaremos $\vec{X}$, ao invés de V , para indicar o espaço modelo de um espaço afim X .

O conceito de espaço afim formaliza a noção intuitiva de espaço plano sem ponto preferido (ao contrário do conceito de espaço vetorial, onde o vetor nulo é um elemento especial). De fato, usando o conceito de espaço euclidiano (espaço afim com produto interno no espaço modelo), é possível construir um modelo da geometria euclidiana dentro da álgebra linear. Outra forma de visualizar a natureza plana e indiferenciada dos espaços afins é a seguinte: Se X é um espaço afim, fixando um ponto $o \in X$ podemos usar a bijeção

$$d_o : X \rightarrow \vec{X} \quad , \quad x \mapsto x - o$$

para puxar a estrutura vetorial de $\vec{X}$ para X . Como a aplicação d_o identifica o ponto o com a origem de $\vec{X}$, variando o ponto o obtemos diferentes estruturas vetoriais em X . Assim, é natural definir a *dimensão* de um espaço afim X como a do seu espaço modelo $\vec{X}$. De modo geral, os espaços afins considerados terão dimensão finita.

A cada subconjunto $Y \subset X$ está associado um *conjunto* $d(Y)$ *de diferenças*, formado pelos vetores $v \in \vec{X}$ tais que existem $y, z \in Y$ satisfazendo a igualdade $y - z = v$. Se $d(Y)$ é um subespaço vetorial de $\vec{X}$ então Y é dito um *subespaço afim* de X .

Para concluir a introdução do conceito de espaço afim só falta citar alguns exemplos:

1. Todo espaço vetorial é espaço afim modelado em si mesmo, sendo a operação de soma de ponto com vetor a própria soma de vetores.
2. Sejam U e V espaços vetoriais e $T : U \rightarrow V$ uma aplicação linear sobrejetora. Então o conjunto

$$J = \{j \in L(V, U) : T \circ j = \text{id}_V\}$$

é um espaço afim modelado sobre $L(V, \ker T)$.

1.2 Sistemas de Coordenadas Afins

O par $(o, (e_i)_{i \in I})$, formado por um ponto $o \in X$ e uma base $(e_i)_{i \in I}$ de $\vec{X}$, é chamado um *sistema de coordenadas afins* de X . O ponto o é dito a *origem* do sistema de coordenadas. Usando a noção de sistema de coordenadas, é fácil ver que qualquer espaço afim X é uma variedade diferenciável. De fato, a composição da aplicação $d_o : X \rightarrow \vec{X}$ com a função

$$p : \vec{X} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad v \mapsto (v^i),$$

onde $v = v^i e_i$, produz uma carta $p \circ d_o : X \xrightarrow{d_o} \vec{X} \xrightarrow{p} \mathbb{R}^n$ que cobre todo X , ou seja, $A = \{(X, p \circ d_o)\}$ é um atlas de X . Assim, as componentes do vetor $x - o$ em relação à base $(e_i)_{i \in I}$ são as coordenadas de x no sistema de coordenadas $(o, (e_i)_{i \in I})$.

Sejam $(o, (e_i)_{i \in I})$ e $(\tilde{o}, (\tilde{e}_i)_{i \in I})$ dois sistemas de coordenadas de X . Dado um ponto x , com coordenadas (x^i) no primeiro sistema e $(\tilde{x}^i)$ no segundo, como $x - o = (x - \tilde{o}) + (\tilde{o} - o)$, é fácil verificar que

$$x^j = a_i^j \tilde{x}^i + a^j,$$

onde (a_i^j) é a matriz de mudança da base $(e_i)_{i \in I}$ para a base $(\tilde{e}_i)_{i \in I}$ e (a^i) são as coordenadas de $\tilde{o}$ em $(o, (e_i)_{i \in I})$. Portanto, o atlas maximal determinado por A contém as cartas

induzidas pelos diversos sistemas de coordenadas de X . Os espaços tangentes associados a essa estrutura diferenciável são equivalentes ao espaço modelo $\vec{X}$. De fato, dado $x \in X$, a aplicação

$$\phi_x : \vec{X} \rightarrow T_x X \quad , \quad v \mapsto \left. \frac{d}{dt}(x + tv) \right|_{t=0}$$

é um isomorfismo canônico. Assim, o fibrado tangente TX é $X \times \vec{X}$.

Como consequência da inclusão dos espaços afins no contexto das variedades diferenciáveis, é possível interpretar a operação de soma de ponto com vetor, característica dos espaços afins, como um caso especial de ação transitiva e sem ponto fixo de um grupo de Lie abeliano sobre uma variedade.

1.3 Aplicações Afins entre Espaços Afins

Sejam X e Y espaços afins. Então, uma aplicação $a : X \rightarrow Y$ é denominada *afim* se existir um ponto $x \in X$ tal que a aplicação $\vec{a}_x : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$, definida pela expressão

$$\vec{a}_x(v) = a(x + v) - a(x) ,$$

seja linear, isto é, $\vec{a}_x \in L(\vec{X}, \vec{Y})$. O conjunto de todas as aplicações afins de X em Y será denotado por $A(X, Y)$.

Proposição 1.1 *Se $a : X \rightarrow Y$ é afim então $\vec{a}_x$ não depende de x , mas somente de a .*

DEMONSTRAÇÃO: Como a é afim, existe $x \in X$ tal que $\vec{a}_x$ é linear. Dados $\tilde{x} \in X$ e $v \in \vec{X}$, temos $\vec{a}_{\tilde{x}}(v) = a(\tilde{x} + v) - a(\tilde{x})$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \vec{a}_{\tilde{x}}(v) &= a(x + (\tilde{x} - x) + v) - a(x + (\tilde{x} - x)) \\ &= a(x) + \vec{a}_x((\tilde{x} - x) + v) - a(x) - \vec{a}_x(\tilde{x} - x) \\ &= \vec{a}_x((\tilde{x} - x) + v) - \vec{a}_x(\tilde{x} - x) . \end{aligned}$$

Usando a linearidade de $\vec{a}_x$ concluímos que $\vec{a}_{\tilde{x}} = \vec{a}_x$. □

Como $\vec{a}_x$ não depende do ponto x , usaremos a notação $\vec{a}$ para denotar a aplicação linear subjacente à aplicação afim a . Assim, existem uma inclusão natural $i : Y \rightarrow A(X, Y)$, determinada pelas aplicações constantes, e uma projeção natural $l : A(X, Y) \rightarrow L(\vec{X}, \vec{Y})$, que associa à cada aplicação afim sua parte linear.

Encarando um espaço afim como uma variedade diferenciável na qual age um grupo de Lie abeliano (seu espaço modelo), as aplicações afins são um caso especial de aplicações equivariantes com respeito a homomorfismos. De fato, a definição de aplicação afim equivale à equivariância de $a : X \rightarrow Y$ com respeito tanto ao homomorfismo $\vec{a} : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$ quanto à ação de cada modelo no seu respectivo espaço afim. Portanto, a noção de aplicação afim se encaixa de forma natural no contexto dos fibrados principais com grupo estrutural abeliano.

Para exemplificar, vamos examinar um tipo de aplicação afim importante para a geometria euclidiana. Fixado um espaço afim X e um vetor $v \in \vec{X}$, é fácil verificar que

$$t_v : X \rightarrow X, \quad x \mapsto x + v$$

é uma aplicação afim, cuja aplicação linear subjacente é a função identidade de $\vec{X}$; esta aplicação é chamada de *translação* pelo vetor v . Em particular, a translação pelo vetor nulo, ou seja, a identidade de X , é afim.

Apesar da parte linear não fixar a aplicação afim, várias das suas propriedades dependem apenas de sua parte linear. De fato:

Proposição 1.2 *Uma aplicação afim $a : X \rightarrow Y$ será injetora, sobrejetora ou bijetora se, e somente se, $\vec{a}$ for, respectivamente, injetora, sobrejetora ou bijetora.*

DEMONSTRAÇÃO: Vamos provar que se a for injetora, então $\vec{a}$ também será. Os outros casos são análogos. Dados $v, \tilde{v} \in \vec{X}$ tais que $\vec{a}(v) = \vec{a}(\tilde{v})$, segue que

$$a(x + v) = a(x) + \vec{a}(v) = a(x) + \vec{a}(\tilde{v}) = a(x + \tilde{v});$$

portanto $x + v = x + \tilde{v}$, ou seja, $v = \tilde{v}$. □

Proposição 1.3 *Sejam $a : X \rightarrow Y$ e $b : Y \rightarrow Z$ aplicações afins. A composta $b \circ a$ é uma aplicação afim com parte linear $\vec{b} \circ \vec{a}$.*

DEMONSTRAÇÃO: Basta verificar que $\overrightarrow{b \circ a} = \vec{b} \circ \vec{a}$. A linearidade da última aplicação prova a proposição. □

Proposição 1.4 *Se $a : X \rightarrow Y$ é uma aplicação afim bijetora, então a^{-1} também é afim, com parte linear $(\vec{a})^{-1}$.*

DEMONSTRAÇÃO: Fixando $y \in Y$, podemos definir a aplicação $b : Y \rightarrow X$, tal que

$$b(y + u) = a^{-1}(y) + (\vec{a})^{-1}(u),$$

onde $u \in \vec{Y}$. Mas então,

$$(a \circ b)(y + u) = a(a^{-1}(y) + (\vec{a})^{-1}(u)) = (a \circ a^{-1})(y) + (\vec{a} \circ (\vec{a})^{-1})(u) = y + u.$$

De modo semelhante, para $x = a^{-1}(y)$ e $v \in \vec{X}$ vale que $(b \circ a)(x + v) = x + v$; portanto $b = a^{-1}$. Logo, a^{-1} é afim com parte linear $(\vec{a})^{-1}$. $\square$

Denotaremos o conjunto das aplicações afins bijetoras de X em X por $\text{GA}(X)$. Pelas proposições provadas, sabemos que, se $t, \tilde{t} \in \text{GA}(X)$ então $t \circ \tilde{t} \in \text{GA}(X)$ e $t^{-1} \in \text{GA}(X)$. Como a identidade de X pertence a $\text{GA}(X)$, então $\text{GA}(X)$ é um grupo em relação à operação de composição de aplicações. O grupo $\text{GA}(X)$ denomina-se *grupo afim* de X e seus elementos são chamados *automorfismos afins* de X . Como a aplicação linear subjacente a cada automorfismo afim é um automorfismo linear, então a cada subgrupo de $\text{GA}(X)$ está associado, de forma natural, um subgrupo de $\text{GL}(\vec{X})$.

1.4 Matriz de uma Aplicação Afim

Adaptando sistemas de coordenadas $(o_X, (e_i)_{i \in I})$ em X e $(o_Y, (f_j)_{j \in J})$ em Y , vamos analisar o efeito de uma aplicação afim $a : X \rightarrow Y$ nas coordenadas determinadas pelos sistemas em questão: Sejam (x^i) , (y^j) e (a^j) as coordenadas dos pontos x , $a(x)$ e $a(o_X)$, respectivamente. Então, a relação $a(x) = a(o_X) + \vec{a}(x - o_X)$ implica que

$$y^j = a_i^j x^i + a^j,$$

onde (a_i^j) é a matriz da aplicação $\vec{a}$ em relação às bases $(e_i)_{i \in I}$ e $(f_j)_{j \in J}$. Logo,

$$\begin{pmatrix} y^j \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i^j & a^j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, a matriz acima determina o comportamento de a nas coordenadas consideradas. Vamos agora calcular a composição de aplicações afins em coordenadas. Assim, seja $b : Y \rightarrow Z$ outra aplicação afim. Nos sistemas $(o_Y, (f_j)_{j \in J})$ e $(o_Z, (h_k)_{k \in K})$, vale que

$$z^k = b_j^k y^j + b^k,$$

onde (b^k) são as coordenadas de $b(o_Y)$ e (b_j^k) é a matriz da aplicação $\vec{b}$ em relação às bases $(f_j)_{j \in J}$ e $(h_k)_{k \in K}$.

Segue-se que $b \circ a : X \rightarrow Z$ é afim e

$$z^k = b_j^k a_i^j x^i + b_j^k a^j + b^k.$$

Assim, a matriz de $b \circ a$ é formada pela composta das matrizes das aplicações a e b .

Agora, é fácil verificar que a matriz da inversa de uma transformação afim bijetora é simplesmente a inversa da matriz que a representa.

1.5 Espaço Afim Quociente

Seja W um subespaço vetorial do modelo $\vec{X}$ do espaço afim X . Dois pontos $x, \tilde{x} \in X$ são chamados de *equivalentes módulo W* se $x - \tilde{x} \in W$. Como esta relação é reflexiva, simétrica e transitiva X fica dividido num conjunto X/W de classes disjuntas. Neste contexto, é natural considerar as propriedades da aplicação sobrejetora

$$\rho : X \rightarrow X/W, \quad x \mapsto [x]$$

que associa cada ponto x a classe de equivalência $[x]$ que o contém.

Proposição 1.5 *Existe apenas uma estrutura afim em X/W tal que ρ é uma aplicação afim.*

DEMONSTRAÇÃO: Primeiro vamos tomar X/W com uma estrutura afim que torna ρ afim. Logo, sua parte linear

$$\vec{\rho} : \vec{X} \rightarrow \overrightarrow{X/W}, \quad v \mapsto \rho(x + v) - \rho(x)$$

é sobrejetora, independente de $x \in X$ e tal que $\ker \vec{\rho} = W$. Lembrando que há um isomorfismo natural $\vec{X} / \ker \vec{\rho} \cong \text{im } \vec{\rho}$ que transforma $\vec{\rho}$ na aplicação que leva cada elemento de $\vec{X}$ na sua classe em $\vec{X}/W$, é possível identificar $\overrightarrow{X/W}$ com $\vec{X}/W$ e $\vec{\rho}$ com a projeção que leva $\vec{X}$ no quociente por W . Agora é fácil ver que a igualdade

$$[x + v] = \rho(x + v) = \rho(x) + \vec{\rho}(v) = [x] + [v]$$

determina totalmente a operação $+: X/W \times \vec{X}/W \rightarrow X/W$. Por fim, se $[x] = [\tilde{x}]$ e $[v] = [\tilde{v}]$ então $[x + v] = [\tilde{x} + \tilde{v}]$, já que

$$(x + v) - (\tilde{x} + \tilde{v}) = (x - \tilde{x}) + (v - \tilde{v}),$$

garantindo a consistência da estrutura afim de X/W . □

Cada sistemas de coordenadas $(o, (e_i)_{i \in I})$ em X tal que $(e_j)_{j \in J}$ é uma base de W determina um sistema de coordenadas $([o], ([e_k])_{k \in K})$ em X/W , com $K = I \setminus J$. Nestes sistemas ρ é apenas a projeção nas coordenadas da família K .

Proposição 1.6 *Se $a : X \rightarrow Y$ é uma aplicação afim e $\vec{a}|_W : W \rightarrow V$ é a restrição da sua parte linear aos subespaços $W \subset \vec{X}$ e $V \subset \vec{Y}$ então existe uma única aplicação afim $[a] : X/W \rightarrow Y/V$ tal que $[a] \circ \rho_X = \rho_Y \circ a$.*

DEMONSTRAÇÃO: Basta definir $[a]([x]) = [a(x)]$ para todo $x \in X$. Para mostrar que a fórmula é consistente é preciso tomar $x, \tilde{x} \in X$ tais que $[x] = [\tilde{x}]$ e notar que

$$a(x) - a(\tilde{x}) = \vec{a}(x - \tilde{x}) \in V,$$

ou seja, $[a(x)] = [a(\tilde{x})]$. Como, para quaisquer $x \in X$ e $v \in \vec{X}$,

$$[a]([x] + [v]) = [a(x + v)] = [a(x) + \vec{a}(v)] = [a(x)] + [\vec{a}(v)] = [a]([x]) + [\vec{a}](v),$$

sendo $[\vec{a}]: \vec{X}/W \rightarrow \vec{Y}/V$ linear e tal que $[\vec{a}] \circ \rho_{\vec{X}} = \rho_{\vec{Y}} \circ \vec{a}$, concluímos que $[a]$ é afim. $\square$

Finalmente, fixando sistemas de coordenadas $(o_X, (e_i)_{i \in I})$ em X e $(o_Y, (f_j)_{j \in J})$ em Y tais que um subconjunto de $(e_i)_{i \in I}$ forma uma base de W e um subconjunto de $(f_j)_{j \in J}$ forma uma base de V , vamos calcular $[a]: X/W \rightarrow Y/V$ nas coordenadas determinadas pelos sistemas induzidos em X/W e Y/V . Já que

$$[a]([x]) = [a]([o_X]) + [\vec{a}]([x] - [o_X])$$

então

$$[a(x) - o_Y] = [a(o_X) - o_Y] + [\vec{a}]([x] - [o_X])$$

de modo que a matriz de a é formada pela matriz de $[\vec{a}]$ nas bases induzidas e pela projeção de $\dim Y - \dim V$ coordenadas do ponto $a(o_X)$.

1.6 Aplicações Afins com Contradomínio Vetorial

Como cada espaço vetorial possui uma estrutura canônica de espaço afim, é possível considerar o conjunto $A(X, W)$ das aplicações afins do espaço afim X no espaço vetorial W .

Proposição 1.7 $A(X, W)$ é espaço vetorial, pois é subespaço vetorial do espaço vetorial $\text{Map}(X, W)$.

DEMONSTRAÇÃO: Sendo $a, b \in A(X, W)$, $x \in X$, $v \in \vec{X}$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (\lambda a + \mu b)(x + v) &= \lambda a(x + v) + \mu b(x + v) = \lambda a(x) + \lambda \vec{a}(v) + \mu b(x) + \mu \vec{b}(v) \\ &= (\lambda a + \mu b)(x) + (\lambda \vec{a} + \mu \vec{b})(v). \end{aligned}$$

Portanto $\lambda a + \mu b$ é afim com $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ como aplicação linear subjacente. $\square$

Vale observar que se X e Y são espaços afins, $A(X, Y)$ também é afim, com espaço vetorial associado $A(X, \vec{Y})$. De fato, se $a \in A(X, Y)$ e $t \in A(X, \vec{Y})$, definindo $(a+t)(x) = a(x) + t(x)$, segue que $a + t \in A(X, Y)$, pois

$$(a+t)(x+v) = a(x+v) + t(x+v) = a(x) + \vec{a}(v) + t(x) + \vec{t}(v) = (a+t)(x) + (\vec{a} + \vec{t})(v).$$

Assim, é suficiente notar que a aplicação $+: A(X, Y) \times A(X, \vec{Y}) \rightarrow A(X, Y)$ cumpre os axiomas da noção de espaço afim.

Proposição 1.8 *A sequência de espaços vetoriais*

$$0 \longrightarrow W \xrightarrow{i} A(X, W) \xrightarrow{l} L(\vec{X}, W) \longrightarrow 0$$

é exata; em particular, há um isomorfismo natural entre $A(X, W)/W$ e $L(\vec{X}, W)$.

DEMONSTRAÇÃO: A inclusão canônica

$$i: W \rightarrow A(X, W) \quad , \quad w \mapsto \{x \mapsto w\}$$

é obviamente linear e injetora. Já a função

$$l: A(X, W) \rightarrow L(\vec{X}, W) \quad , \quad a \mapsto \vec{a}$$

é claramente sobrejetora. Como $\overline{\lambda a + \mu b} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$, então l é linear. Já que o conjunto das funções afins constantes é idêntico a família das funções afins com parte linear nula, então $\text{im } i = \ker l$. Identificando W com $i(W)$ e lembrando que toda aplicação linear determina um isomorfismo entre a sua imagem e o quociente do seu domínio pelo seu núcleo, obtemos um isomorfismo natural entre $A(X, W)/W$ e $L(\vec{X}, W)$. $\square$

Proposição 1.9 *A escolha de um ponto o em X , como origem, determina uma cisão da sequência exata da proposição anterior e portanto induz um isomorfismo entre os espaços $A(X, W)$ e $W \oplus L(\vec{X}, W)$.*

DEMONSTRAÇÃO: Dado $o \in X$, construímos a aplicação linear

$$c: L(\vec{X}, W) \rightarrow A(X, W) \quad , \quad t \mapsto \{x \mapsto t(x - o)\}.$$

A definição é consistente pois

$$c(t)(x+v) = t(x+v-o) = t(x-o+v) = t(x-o) + t(v) = c(t)(x) + t(v),$$

ou seja, $\overrightarrow{c(t)} = t$, de modo que $c(t)$ é afim e

$$l \circ c = \text{id}_{L(\vec{X}, W)}.$$

Assim, c é uma cisão e portanto induz a aplicação $\phi : W \oplus L(\vec{X}, W) \rightarrow A(X, W)$,

$$\phi(w, t) = i(w) + c(t),$$

que é um isomorfismo de espaços vetoriais. □

Com o auxílio da última proposição é fácil determinar a dimensão do espaço das aplicações afins entre X e W :

$$\dim A(X, W) = \dim W + \dim L(\vec{X}, W).$$

Proposição 1.10 *Para cada espaço vetorial unidimensional R as cisões da sequência exata*

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{i} A(X, R) \xrightarrow{l} L(\vec{X}, R) \longrightarrow 0$$

formam um espaço afim modelado em $\vec{X}^{**}$ e canonicamente isomorfo a X .

DEMONSTRAÇÃO: Como $\ker l$ é isomorfo a R então a diferença entre duas cisões é um elemento de $L(L(\vec{X}, R), R) \cong L(\vec{X}^*, R^* \otimes R)$. Já que R é unidimensional há um isomorfismo natural $R^* \otimes R \cong \mathbb{R}$ e portanto $\vec{X}^{**}$ é o espaço das diferenças. Lembrando que cada ponto $o \in X$ origina uma cisão

$$\phi_o : L(\vec{X}, R) \rightarrow A(X, R) \quad , \quad t \mapsto \{x \mapsto t(x - o)\}$$

fica definida uma aplicação ϕ . de X para o conjunto das cisões. Para todo $v \in \vec{X}$,

$$\phi_{o+v}(t)(x) = t(x - (o + v)) = t(x - o) - t(v) = \phi_o(t)(x) - t(v)$$

de modo que ϕ . é afim com aplicação linear subjacente

$$\vec{\phi} : \vec{X} \rightarrow \vec{X}^{**} \quad , \quad v \mapsto \{v^* \mapsto -v^*(v)\},$$

ou seja, ϕ . é um isomorfismo. □

1.7 Espaço Dual Afim

Dado um espaço afim X , seu *dual afim* é definido como

$$X^* = A(X, \mathbb{R})$$

e constitui uma extensão uni-dimensional do dual comum $\vec{X}^*$, ou seja,

$$\dim X^* = 1 + \dim \vec{X}^* .$$

Dado um sistema de coordenadas $(o, (e_i)_{i \in I})$ do espaço X , podemos usar o isomorfismo entre $\mathbb{R} \oplus \vec{X}^*$ e X^* , induzido pelo ponto $o \in X$, para obter uma base de X^* . Com efeito, a base $(e_i)_{i \in I}$ de $\vec{X}$ determina em $\vec{X}^*$ a base dual $(e^{*i})_{i \in I}$, tal que $e^{*i}(e_j) = \delta_j^i$; portanto, adotando 1 como base de $\mathbb{R}$, temos uma base para o espaço $\mathbb{R} \oplus \vec{X}^*$. Aplicando o isomorfismo obtemos a base dual afim $((e^{*i})_{i \in I}, 1^*)$ de X^* , sendo $1^*(x) = 1$, para todo $x \in X$, e $e^{*i}(x) = x^i$, com $x - o = x^i e_i$. Em particular, o valor da função afim definida pelas coordenadas (p_i^μ, p) no ponto com coordenadas q_μ^i é

$$p_i^\mu q_\mu^i + p .$$

Teorema 1.1 *Sejam X e W um espaço afim e vetorial, respectivamente. Então existe um isomorfismo natural $A(X, W) \cong X^* \otimes W$.*

DEMONSTRAÇÃO: Considere a aplicação

$$\phi : X^* \times W \rightarrow A(X, W) \quad , \quad (x^*, w) \mapsto \{x \mapsto x^*(x)w\}$$

que claramente é bilinear e portanto induz uma aplicação linear $\psi : X^* \otimes W \rightarrow A(X, W)$ tal que $\phi = \psi \circ \otimes$. Agora, se $\psi(x^* \otimes w) = 0$ então $\phi(x^*, w) = 0$, ou seja, $x^*(x)w = 0$, para todo $x \in X$. Mas então ou $x^* = 0$ ou $w = 0$. De qualquer modo, $x^* \otimes w = 0$, e portanto ψ é injetora. Como

$$\dim(X^* \otimes W) = \dim X^* \dim W = \dim W + \dim X \dim W = \dim A(X, W) ,$$

então ψ também é sobrejetora. □

Proposição 1.11 *Sejam X e Y espaços afins. Como $A(X, Y)$ é um espaço afim com espaço modelo $A(X, \vec{Y}) \cong X^* \otimes \vec{Y}$, um par de sistemas de coordenadas em X e Y induz um sistema de coordenadas em $A(X, Y)$ cujas coordenadas de cada aplicação afim são justamente os elementos da sua matriz com respeito aos sistemas em questão.*

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $(o_X, (e_i)_{i \in I})$ e $(o_Y, (f_j)_{j \in J})$ sistemas de coordenadas de X e Y , respectivamente. Sabemos que $(o_X, (e_i)_{i \in I})$ induz a base $((e^{*i})_{i \in I}, 1_X^*)$ de X^* , portanto

$$(e^{*i} \otimes f_j, 1_X^* \otimes f_j)_{i \in I, j \in J}$$

é uma base de $X^* \otimes \vec{Y}$. Para cada $x^* \in X^*$ e $u \in \vec{Y}$, usamos o isomorfismo natural entre $A(X, \vec{Y})$ e $X^* \otimes \vec{Y}$ para identificar $x^* \otimes u$ com a aplicação afim

$$x^* \otimes u : X \rightarrow \vec{Y} \quad , \quad x \mapsto x^*(x) u .$$

Assim, o conjunto citado se transforma numa base de $A(X, \vec{Y})$. Para formar um sistema de coordenadas de $A(X, Y)$ só falta especificar um ponto desse espaço afim como origem que, obviamente, será a aplicação constante

$$o_A : X \rightarrow Y \quad , \quad x \mapsto o_Y$$

determinada pela origem o_Y em Y . Isso posto, podemos determinar as coordenadas de um ponto a de $A(X, Y)$ no sistema

$$(o_A, (e^{*i} \otimes f_j, 1_X^* \otimes f_j)_{i \in I, j \in J}) ,$$

ou seja, calcular os coeficientes a_i^j e a^j tais que

$$a - o_A = a_i^j e^{*i} \otimes f_j + a^j 1_X^* \otimes f_j .$$

Como $(a - o_A)(o_X) = a(o_X) - o_Y = a^j f_j$ e como, para cada elemento da base $(e_i)_{i \in I}$,

$$\vec{a}(e_i) = a(o_X + e_i) - a(o_X) = (a - o_A)(o_X + e_i) - (a - o_A)(o_X) = a_i^j f_j ,$$

temos que os a^j são as coordenadas de $a(o_X)$ no sistema $(o_Y, f_j)_{j \in J}$ e que os a_i^j são as entradas da matriz da aplicação linear $\vec{a}$ relativa às bases $(e_i)_{i \in I}$ e $(f_j)_{j \in J}$. $\square$

O conceito de dual, que relaciona objetos afins com objetos lineares, aplica-se não só aos espaços mas também às aplicações entre eles:

Proposição 1.12 Para cada aplicação afim $a : X \rightarrow Y$, a fórmula

$$(a^*(y^*))(x) = y^*(a(x)) \quad \text{para } y^* \in Y^* \text{ e } x \in X$$

define uma aplicação linear $a^* : Y^* \rightarrow X^*$, ou seja:

$$a : X \xrightarrow{\text{afim}} Y \quad \rightsquigarrow \quad a^* : Y^* \xrightarrow{\text{linear}} X^*$$

DEMONSTRAÇÃO: Sendo $x \in X$ e $v \in \vec{X}$,

$$(a^*(y^*))(x + v) = y^*(a(x + v)) = y^*(a(x) + \vec{a}(v)) = y^*(a(x)) + y^*(\vec{a}(v)) .$$

Assim, $a^*(y^*)$ é um elemento de X^* e sua parte linear é

$$\overrightarrow{a^*(y^*)} = \overrightarrow{y^*} \circ \vec{a} .$$

Finalmente, dados $y^*, \tilde{y}^* \in Y^*$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, segue que

$$\begin{aligned} (a^*(\lambda y^* + \mu \tilde{y}^*))(x) &= (\lambda y^* + \mu \tilde{y}^*)(a(x)) = \lambda y^*(a(x)) + \mu \tilde{y}^*(a(x)) \\ &= \lambda(a^*(y^*))(x) + \mu(a^*(\tilde{y}^*))(x) , \end{aligned}$$

ou seja, $a^*(\lambda y^* + \mu \tilde{y}^*) = \lambda a^*(y^*) + \mu a^*(\tilde{y}^*)$. □

Fixando sistemas de coordenadas $(o_X, (e_i)_{i \in I})$ em X e $(o_Y, (f_j)_{j \in J})$ em Y , sabemos que uma aplicação afim $a : X \rightarrow Y$ é descrita pelas fórmulas

$$y^j = a_i^j x^i + a^j .$$

Considerando as bases de X^* e Y^* induzidas pelos sistemas de coordenadas em questão, podemos calcular a matriz de $a^* : Y^* \rightarrow X^*$ a partir das fórmulas acima. De fato, como

$$(a^*(1_Y^*))(x) = 1_Y^*(a(x)) = 1$$

então $a^*(1_Y^*) = 1_X^*$. Mas

$$(a^*(f^{*j}))(x) = f^{*j}(a(x)) = y^j = a_i^j x^i + a^j = (a_i^j e^{*i} + a^j 1_X^*)(x)$$

implica que $a^*(f^{*j}) = a_i^j e^{*i} + a^j 1_X^*$. Logo a matriz de a^* nas bases $(f^{*j}, 1_Y^*)_{j \in J}$ e $(e^{*i}, 1_X^*)_{i \in I}$ é

$$\begin{pmatrix} a^{*j}_i & 0 \\ a^j & 1 \end{pmatrix} ,$$

onde (a^{*j}_i) é a transposta da matriz (a^j_i) .

A aplicação a^* será denominada *transposta afim* de a , pois sua matriz é a transposta da matriz da aplicação afim em questão.

Proposição 1.13 *Dada uma aplicação afim $a : X \rightarrow Y$, sua transposta afim $a^* : Y^* \rightarrow X^*$ será injetora ou sobrejetora se, e somente se, a for, respectivamente, sobrejetora ou injetora. Em particular, a^* será bijetora se, e somente se, a também for bijetora.*

DEMONSTRAÇÃO: Vamos provar que se a for sobrejetora então a^* será injetora. Os demais casos são semelhantes. Sejam y^* e $\tilde{y}^*$ elementos diferentes de Y^* , isto é, existe $y \in Y$ tal que $y^*(y) \neq \tilde{y}^*(y)$. Como a é sobre, existe $x \in X$ tal que $a(x) = y$, logo

$$(a^*(y^*))(x) = y^*(a(x)) = y^*(y) \neq \tilde{y}^*(y) = \tilde{y}^*(a(x)) = (a^*(\tilde{y}^*))(x),$$

ou seja, $a^*(y^*) \neq a^*(\tilde{y}^*)$. □

Assim, se $a : X \rightarrow Y$ é um isomorfismo afim, então $a^* : Y^* \rightarrow X^*$ é um isomorfismo linear. Usando a proposição abaixo, podemos calcular a inversa da transposta afim de a , obtendo $a^{*-1} = a^{-1*}$.

Proposição 1.14 *Se $a : X \rightarrow Y$ e $b : Y \rightarrow Z$ são afins, então $(b \circ a)^* = a^* \circ b^*$.*

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $x \in X$ e $z^* \in Z^*$. Como $(b \circ a)^* : Z^* \rightarrow X^*$ então

$$((b \circ a)^*(z^*))(x) = z^*((b \circ a)(x)) = z^*(b(a(x))) = (b^*(z^*))(a(x)) = (a^*(b^*(z^*)))(x).$$

Logo $(b \circ a)^*(z^*) = a^*(b^*(z^*))$ para todo $z^* \in Z^*$. □

Os resultados provados mostram que o conceito de dual afim se encaixa de forma natural no contexto da álgebra dos espaços afins, gerando inclusive relações análogas àquelas entre uma aplicação linear e sua transposta.

1.8 Grupo Afim

Com o auxílio da maquinaria algébrica desenvolvida, vamos estudar a estrutura do grupo dos automorfismos afins de um espaço afim X . Do ponto de vista diferenciável, a estrutura de $\text{GA}(X)$ é herdada do espaço afim $A(X)$:

Proposição 1.15 *$\text{GA}(X)$ é um conjunto aberto de $A(X)$.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja o um ponto de $A(X)$. A bijeção $d_o : A(X) \rightarrow A(X, \vec{X})$ obviamente é diferenciável. Como $l : A(X, \vec{X}) \rightarrow L(\vec{X})$ é linear, também é diferenciável. Assim, a composição das duas últimas aplicações com a função $\det : L(\vec{X}) \rightarrow \mathbb{R}$ produz uma aplicação diferenciável

$$\phi : A(X) \xrightarrow{d_o} A(X, \vec{X}) \xrightarrow{l} L(\vec{X}) \xrightarrow{\det} \mathbb{R}$$

tal que $\text{GA}(X) = \phi^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. □

Dado um sistema de coordenadas de X , a aplicação que associa a cada elemento de $A(X)$ sua matriz é uma carta global. A composição de aplicações afins é diferenciável, pois na carta em questão toma a forma

$$((a_i^j, a^j), (\tilde{a}_k^i, \tilde{a}^i)) \mapsto (a_i^j \tilde{a}_k^i, a_i^j \tilde{a}^i + a^j).$$

Assim, $GA(X)$ é um grupo de Lie.

Proposição 1.16 *A sequência de grupos de Lie*

$$0 \longrightarrow \vec{X} \xrightarrow{t} GA(X) \xrightarrow{l} GL(\vec{X}) \longrightarrow 0$$

é exata.

DEMONSTRAÇÃO: Considerando o espaço vetorial $\vec{X}$ com a estrutura de grupo induzida pela soma de vetores, a aplicação

$$t: \vec{X} \rightarrow GA(X) \quad , \quad v \mapsto t_v$$

é um homomorfismo injetor. Com efeito, translações por vetores diferentes são obviamente diferentes e a composição de duas translações é $t_{\tilde{v}} \circ t_v = t_{\tilde{v}+v}$. Por sua vez, a aplicação sobrejetora

$$l: GA(X) \rightarrow GL(\vec{X}) \quad , \quad a \mapsto \vec{a}$$

é um homomorfismo pois $\overrightarrow{a \circ \tilde{a}} = \vec{a} \circ \vec{\tilde{a}}$. É óbvio que $\text{im } t$ contém $\ker l$. A outra inclusão segue da observação de que a parte linear de qualquer translação é a identidade de $\vec{X}$, isto é, o elemento neutro de $GL(\vec{X})$. Por fim, é fácil ver que t e l são diferenciáveis. $\square$

Proposição 1.17 *A escolha de um ponto o em X , como origem, determina uma cisão da sequência exata da proposição anterior e portanto induz um isomorfismo entre $GA(X)$ e o produto semidireto $\vec{X} \rtimes GL(\vec{X})$.*

DEMONSTRAÇÃO: Dado $o \in X$ fica determinada a aplicação diferenciável

$$c: GL(\vec{X}) \rightarrow GA(X) \quad , \quad t \mapsto \{x \mapsto o + t(x - o)\}.$$

Como

$$c(t)(x + v) = o + t(x + v - o) = o + t(x - o + v) = o + t(x - o) + t(v) = c(t)(x) + t(v),$$

então c está bem definida e

$$l \circ c = \text{id}_{\text{GL}(\vec{X})}.$$

Já que $c(t \circ \tilde{t})(x) = c(t)(c(\tilde{t})(x))$, para todo $x \in X$, então c é um homomorfismo e portanto também uma cisão da sequência exata considerada. Seja $\vec{X} \rtimes \text{GL}(\vec{X})$ o produto semi-direto de $\vec{X}$ e $\text{GL}(\vec{X})$ com respeito à representação natural de $\text{GL}(\vec{X})$ no espaço $\vec{X}$. A bijeção

$$\phi : \vec{X} \rtimes \text{GL}(\vec{X}) \rightarrow \text{GA}(X) \quad , \quad (v, t) \mapsto t_v \circ c(t)$$

é um isomorfismo de grupos de Lie. □

Se X for um espaço vetorial com estrutura afim dada pela soma de vetores, então $X = \vec{X}$, de modo que $c(t)(x) = t(x)$ é uma cisão da sequência em questão. Assim, para todo espaço vetorial V , a aplicação

$$\phi : V \rtimes \text{GL}(V) \rightarrow \text{GA}(V) \quad , \quad (v, t) \mapsto \{x \mapsto t(x) + v\}$$

é um isomorfismo canônico.

1.9 Categoria dos Espaços e Aplicações Afins

As aplicações da teoria das categorias a diversas partes da Matemática estimulam uma leitura dos conceitos anteriores através da linguagem das categorias e funtores. De fato, há uma categoria cujos objetos são os espaços afins e os morfismos são as aplicações afins, pois:

1. A composta de aplicações afins é uma aplicação afim, e esta composição é associativa.
2. A aplicação identidade de qualquer espaço afim é uma aplicação afim.

Esta categoria será denotada por $\mathcal{A}$. A importante categoria dos espaços vetoriais e aplicações lineares, por sua vez, será indicada por $\mathcal{V}$.

Os mais importantes funtores ligados a categoria $\mathcal{A}$ são:

1. O funtor de linearização $\vec{\cdot} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{V}$, covariante pois associa a cada espaço afim o seu espaço modelo e a cada aplicação afim $a : X \rightarrow Y$ sua parte linear $\vec{a} : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$. De fato, se X é um espaço afim, $\vec{\text{id}_X} = \text{id}_{\vec{X}}$, e $\vec{a \circ b} = \vec{a} \circ \vec{b}$ para quaisquer aplicações afins $a : X \rightarrow Y$ e $b : Y \rightarrow Z$.

2. O funtor contravariante $\cdot^* : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{V}$ que associa a cada espaço afim X seu dual afim X^* e a cada aplicação afim $a : X \rightarrow Y$ sua transposta afim $a^* : Y^* \rightarrow X^*$, ou seja, $\cdot^* : A(X, Y) \rightarrow L(Y^*, X^*)$. Com efeito, para todo espaço afim X , $\text{id}_X^* = \text{id}_{X^*}$, e também, se $a : X \rightarrow Y$ e $b : Y \rightarrow Z$ são afins, então $(b \circ a)^* = a^* \circ b^*$.
3. O funtor $A : \mathcal{A} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, contravariante na primeira variável e covariante na segunda, que associa a cada par (X, W) , formado por um espaço afim X e um espaço vetorial W , o espaço vetorial $A(X, W)$. O comportamento de A sob morfismos é determinado pela correspondência $A : A(X, Y) \times L(V, W) \rightarrow L(A(Y, V), A(X, W))$, dada por

$$A(a, t) : A(Y, V) \rightarrow A(X, W) \quad , \quad s \mapsto t \circ s \circ a \quad .$$

De fato, para quaisquer $x \in X$ e $v \in \vec{X}$,

$$\begin{aligned} (t \circ s \circ a)(x + v) &= (t \circ s)(a(x) + \vec{a}(v)) = t(s(a(x)) + \vec{s}(\vec{a}(v))) \\ &= (t \circ s \circ a)(x) + (t \circ \vec{s} \circ \vec{a})(v) \quad , \end{aligned}$$

ou seja, $t \circ s \circ a : X \rightarrow W$ é afim. A linearidade da aplicação $s \mapsto t \circ s \circ a$ segue da linearidade de t . Assim, só resta confirmar a natureza funtorial de A : É óbvio que, para todo X afim e W vetorial, $A(\text{id}_X, \text{id}_W) = \text{id}_{A(X, W)}$. Como para quaisquer aplicações a e b afins bem como t e s lineares, $A(b \circ a, s \circ t) = A(a, s) \circ A(b, t)$, já que

$$A(b \circ a, s \circ t)(r) = s \circ (t \circ r \circ b) \circ a = A(a, s)(A(b, t)(r)) \quad ,$$

então A é realmente um funtor.

Os funtores $\cdot^*$ e A estão ligados pelo seguinte resultado:

Teorema 1.2 *Há um isomorfismo de funtores $\mathcal{T} : A \rightarrow \cdot^* \otimes \cdot$, ou seja, dados X e Y espaços afins, V e W espaços vetoriais, $a : X \rightarrow Y$ aplicação afim e $t : V \rightarrow W$ aplicação linear, o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} Y^* \otimes V & \xrightarrow{\mathcal{T}(Y, V)} & A(Y, V) \\ a^* \otimes t \downarrow & & \downarrow A(a, t) \\ X^* \otimes W & \xrightarrow{\mathcal{T}(X, W)} & A(X, W) \end{array}$$

comuta, sendo $\mathcal{T}(X, W)$ e $\mathcal{T}(Y, V)$ os isomorfismos naturais entre os espaços em questão.

DEMONSTRAÇÃO: O diagrama em questão é apenas um setor do seguinte:

$$\begin{array}{ccc}
 Y^* \times V & \xrightarrow{\psi} & A(Y, V) \\
 \downarrow a^* \times t & \searrow \otimes & \downarrow A(a, t) \\
 & Y^* \otimes V & \swarrow \mathcal{T}(Y, V) \\
 & \downarrow a^* \otimes t & \\
 & X^* \otimes W & \swarrow \mathcal{T}(X, W) \\
 X^* \times W & \xrightarrow{\phi} & A(X, W)
 \end{array}$$

Como $\mathcal{T}(X, W)$ e $\mathcal{T}(Y, V)$ são os isomorfismos canônicos induzidos pelas aplicações bilineares ϕ e ψ , respectivamente, então a única novidade no último diagrama é a igualdade

$$\phi \circ (a^* \times t) = A(a, t) \circ \psi.$$

Assim, para provar a natureza comutativa do diagrama em questão, basta demonstrar a fórmula acima. Como $\psi(y^*, v)(y) = y^*(y)v$ e $A(a, t)(\psi(y^*, v)) = t \circ \psi(y^*, v) \circ a$, então o valor de $A(a, t)(\psi(y^*, v))$ no ponto x é $y^*(a(x))t(v)$, pois t é linear. Por outro lado, $(a^*(y^*))(x) = y^*(a(x))$; logo $\phi(a^*(y^*), t(v))(x) = (a^*(y^*))(x)t(v)$. Portanto a fórmula citada é verdadeira. $\square$

Com auxílio do isomorfismo de funtores acima, é fácil ver que se $a : X \rightarrow Y$ e $t : V \rightarrow W$ são isomorfismos, o primeiro afim e o segundo linear, então $A(a, t)$ será um isomorfismo linear. Um resultado mais geral é o seguinte:

Proposição 1.18 *Seja $\mathcal{F} : \mathcal{A} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ um funtor contravariante na primeira variável e covariante na segunda. Se $a : X \rightarrow Y$ e $t : V \rightarrow W$ são aplicações bijetoras, respectivamente, afim e linear, então $\mathcal{F}(a, t)$ é também bijetora.*

DEMONSTRAÇÃO: De fato, as hipóteses implicam que a^{-1} é afim e t^{-1} é linear, portanto

$$\mathcal{F}(a, t) \circ \mathcal{F}(a^{-1}, t^{-1}) = \mathcal{F}(a^{-1} \circ a, t \circ t^{-1}) = \mathcal{F}(\text{id}_X, \text{id}_W) = \text{id}_{\mathcal{F}(X, W)}.$$

De forma semelhante concluímos que

$$\mathcal{F}(a^{-1}, t^{-1}) \circ \mathcal{F}(a, t) = \text{id}_{\mathcal{F}(Y, V)}.$$

Logo $\mathcal{F}(a, t)^{-1} = \mathcal{F}(a^{-1}, t^{-1})$. $\square$

É fácil ver que os espaços afins de dimensão n e os automorfismos afins entre tais espaços formam uma subcategoria de $\mathcal{A}$, denotada por $\mathcal{A}_n$. A classe dos automorfismos entre os espaços afins X e Y , ambos de dimensão n , será indicada por $A_n(X, Y)$. De forma análoga, os espaços vetoriais de dimensão m e os automorfismos lineares entre tais espaços originam uma subcategoria de $\mathcal{V}$, indicada por $\mathcal{V}_m$. O conjunto dos automorfismos lineares entre espaços quaisquer V e W da categoria em questão será referido por $L_m(V, W)$. Neste contexto, o último resultado provado afirma que os funtores $\mathcal{F} : \mathcal{A} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ determinam, por restrição, funtores entre as categorias $\mathcal{A}_n \times \mathcal{V}_m$ e $\mathcal{V}_{\mathcal{F}(n,m)}$.

1.10 Referências

Os textos [32] e [39] serviram de inspiração para a redação dos tópicos mais importantes deste capítulo. A noção de espaço afim quociente foi desenvolvida por analogia com o conceito de espaço vetorial quociente, generalizando as definições e os teoremas de [20] a respeito do último. É preciso destacar, por fim, que o emprego de sequências exatas para estudar o grupo afim e os espaços de aplicações afins com contradomínio vetorial revelou-se bastante fecundo, proporcionando provas algébricas para vários teoremas geométricos de [39].

Capítulo 2

Estruturas Diferenciáveis Afins

2.1 Fibrados Afins

Seja $\pi : E \rightarrow M$ uma aplicação sobrejetora e M uma variedade diferenciável. Uma *trivialização local afim* de E é um par (U, Φ) , formado por um aberto U de M e por uma bijeção $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times Z$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & U \times Z \\ & \searrow \pi \quad \swarrow \rho & \\ & U & \end{array}$$

comuta, sendo Z um espaço afim, denominado *fibra típica* de E , e $\rho : U \times Z \rightarrow U$ a projeção no primeiro fator. Duas trivializações locais afins (U_α, Φ_α) e (U_β, Φ_β) são ditas *compatíveis* se $(\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1})(x, z) = (x, \Phi_{\alpha\beta}(x)z)$ com *função de transição* $\Phi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow \text{GA}(Z)$ diferenciável, onde $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$. Um *atlas de fibrado afim* $(U_\alpha, \Phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ para E é um conjunto de trivializações locais afins compatíveis duas a duas e tais que $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ é um recobrimento aberto de M . Dois atlas são equivalentes se a sua união também é um atlas de fibrado afim. Por fim, um *fibrado afim* E é uma classe de equivalência de atlas de fibrado afim para o *espaço total* E com respeito a projeção π de E na *base* M .

Um subfibrado afim $\pi|_F : F \rightarrow M$ de E é um subconjunto $F \subset E$ tal que existe um atlas de fibrado afim $(U_\alpha, \Phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ para E e um subespaço afim $Y \subset Z$ unidos pelo fato de que, para cada $\alpha \in A$, Φ_α leva $\pi^{-1}(x) \cap F$ em Y , para cada $x \in U_\alpha$. Ademais, a restrição das trivializações Φ_α a F deve constituir um atlas de fibrado afim para F .

Dado um fibrado afim E , cada fibra $E_x = \pi^{-1}(x)$ apresenta uma única estrutura de espaço afim compatível com a classe de atlas considerada. Esta é induzida por qualquer aplicação $\Phi_{\alpha,x} : E_x \rightarrow Z$, restrição de Φ_α a E_x , com (U_α, Φ_α) trivialização local afim da classe em questão e tal que $x \in U_\alpha$. Com efeito, se (U_β, Φ_β) é outra trivialização da mesma classe contendo x então $\Phi_{\beta,x}$ induz a mesma estrutura em E_x pois $\Phi_{\alpha\beta}(x) = \Phi_{\alpha,x} \circ \Phi_{\beta,x}^{-1}$ é um isomorfismo afim.

Se $\pi : E \rightarrow M$ e $\rho : F \rightarrow N$ são fibrados afins, um morfismo de fibrado afim entre E e F é um par de aplicações diferenciáveis $\eta : E \rightarrow F$ e $\chi : M \rightarrow N$ tal que $\chi \circ \pi = \rho \circ \eta$ e, para cada $x \in M$, a aplicação induzida $\eta_x : E_x \rightarrow F_{\chi(x)}$ é afim. A composta de morfismos de fibrado afim também é um morfismo, de modo que os fibrados afins e seus morfismos formam uma categoria, denotada por $\mathcal{AB}$. Por sua vez, os fibrados afins sobre uma variedade fixa M formam a subcategoria $\mathcal{AB}(M)$ de $\mathcal{AB}$ cujos morfismos estão sentados sobre a identidade de M . De forma análoga, os fibrados vetoriais e seus morfismos constituem uma categoria, denotada por $\mathcal{VB}$, com uma subcategoria $\mathcal{VB}(M)$ para cada variedade M .

2.2 Operações com Fibrados Afins

Seja $\mathcal{F} : \mathcal{A} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ um funtor contravariante na primeira variável e covariante na segunda. Assim, se $a : Z \rightarrow Y$ e $t : V \rightarrow W$ são aplicações, respectivamente, afim e linear, então a correspondência $\mathcal{F} : A(Z, Y) \times L(V, W) \rightarrow L(\mathcal{F}(Y, V), \mathcal{F}(Z, W))$ associa a função linear $\mathcal{F}(a, t)$ ao par (a, t) . $\mathcal{F}$ é dito diferenciável se para qualquer variedade diferenciável U e para quaisquer aplicações diferenciáveis $\phi : U \rightarrow A(Z, Y)$ e $\psi : U \rightarrow L(V, W)$ a composta

$$\mathcal{F}(\phi, \psi) : U \xrightarrow{\phi \times \psi} A(Z, Y) \times L(V, W) \xrightarrow{\mathcal{F}} L(\mathcal{F}(Y, V), \mathcal{F}(Z, W))$$

também é diferenciável.

Teorema 2.1 *Seja $\mathcal{F}$ um funtor do tipo descrito acima e diferenciável. Então, para cada variedade M , existe um único funtor*

$$\mathcal{F}_M : \mathcal{AB}(M) \times \mathcal{VB}(M) \rightarrow \mathcal{VB}(M)$$

satisfazendo as seguintes condições: Dados E e F fibrados afins sobre M , G e H fibrados vetoriais sobre M e duas aplicações $K : F \rightarrow E$, morfismo de $\mathcal{AB}(M)$, e $L : G \rightarrow H$, morfismo de $\mathcal{VB}(M)$, então, para cada $x \in M$:

1. $\mathcal{F}_M(E, G)_x = \mathcal{F}(E_x, G_x)$
2. $\mathcal{F}_M(K, L)_x = \mathcal{F}(K_x, L_x)$

3. Se E é o fibrado trivial $M \times Z$ e G é o fibrado trivial $M \times W$ então $\mathcal{F}_M(E, G)$ é o fibrado trivial $M \times \mathcal{F}(Z, W)$.

4. Se $k : N \rightarrow M$ é uma aplicação diferenciável, então:

$$\mathcal{F}_N(k^*E, k^*G) = k^*\mathcal{F}_M(E, G) .$$

DEMONSTRAÇÃO: Segundo o primeiro item, $\mathcal{F}_M(E, G)$ é a união disjunta dos espaços $\mathcal{F}(E_x, G_x)$, com x variando em M . Para provar que esse conjunto é um fibrado vetorial sobre M , precisamos construir um atlas de fibrado vetorial. É possível encontrar $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$, recobrimento aberto de M , tal que $(U_\alpha, \Phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ é atlas de fibrado afim para E e $(U_\alpha, \Psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ é atlas de fibrado vetorial para G . O atlas de fibrado vetorial para $\mathcal{F}_M(E, G)$ é então $(U_\alpha, \mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in A}$, com $\mathcal{F}_{\alpha, x} = \mathcal{F}(\Phi_{\alpha, x}^{-1}, \Psi_{\alpha, x})$.

Para mostrar que $(U_\alpha, \mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in A}$ é um atlas de fibrado vetorial, é necessário calcular $\mathcal{F}_{\alpha, x} \circ \mathcal{F}_{\beta, x}^{-1}$. Como $\mathcal{F}(\Phi_{\beta, x}^{-1}, \Psi_{\beta, x})^{-1} = \mathcal{F}(\Phi_{\beta, x}, \Psi_{\beta, x}^{-1})$ então

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\alpha, x} \circ \mathcal{F}_{\beta, x}^{-1} &= \mathcal{F}(\Phi_{\alpha, x}^{-1}, \Psi_{\alpha, x}) \circ \mathcal{F}(\Phi_{\beta, x}, \Psi_{\beta, x}^{-1}) = \mathcal{F}(\Phi_{\beta, x} \circ \Phi_{\alpha, x}^{-1}, \Psi_{\alpha, x} \circ \Psi_{\beta, x}^{-1}) \\ &= \mathcal{F}(\Phi_{\beta\alpha}(x), \Psi_{\alpha\beta}(x)) . \end{aligned}$$

Portanto $(\mathcal{F}_\alpha \circ \mathcal{F}_\beta^{-1})(x, v) = (x, \mathcal{F}_{\alpha\beta}(x)v)$, com $\mathcal{F}_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow \text{GL}(\mathcal{F}(Z, W))$ dada por

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta}(x) = \mathcal{F}(\Phi_{\beta\alpha}(x), \Psi_{\alpha\beta}(x)) ,$$

onde, para cada x , $\Phi_{\beta\alpha}(x) \in \text{GA}(Z)$ e $\Psi_{\alpha\beta}(x) \in \text{GL}(W)$. Como $\Phi_{\beta\alpha}$ e $\Psi_{\alpha\beta}$ são diferenciáveis, a hipótese de que $\mathcal{F}$ é diferenciável implica que $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ também é diferenciável.

A prova do segundo item é análoga, usando novamente a hipótese de que $\mathcal{F}$ é diferenciável. Já o terceiro item é uma consequência trivial dos fatos usados na demonstração da existência do funtor $\mathcal{F}_M$. Por fim, o último item segue de considerações locais. $\square$

É fácil ver que o funtor $\vec{\cdot}$ de linearização é diferenciável e portanto origina um funtor entre $\mathcal{AB}(M)$ e $\mathcal{VB}(M)$. Assim, a cada fibrado afim E está associado um fibrado vetorial $\vec{E}$ denominado *fibrado modelo* de E .

Proposição 2.1 Se $\mathcal{E}$ é outro funtor diferenciável, do mesmo tipo que $\mathcal{F}$, e $\mathcal{T} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ é um morfismo de funtores, então, para qualquer variedade M , há um morfismo de funtores $\mathcal{T}_M : \mathcal{F}_M \rightarrow \mathcal{E}_M$, definido em cada fibra pela função

$$\mathcal{T}(E_x, G_x) : \mathcal{F}(E_x, G_x) \rightarrow \mathcal{E}(E_x, G_x) .$$

Em particular, se $\mathcal{T}$ é um isomorfismo de funtores, então o mesmo sucede com $\mathcal{T}_M$.

DEMONSTRAÇÃO: Com as mesmas convenções do último teorema, o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F}_M(E, G) & \xrightarrow{\mathcal{T}_M(E, G)} & \mathcal{E}_M(E, G) \\
 \mathcal{F}_M(K, L) \downarrow & & \downarrow \mathcal{E}_M(K, L) \\
 \mathcal{F}_M(F, H) & \xrightarrow{\mathcal{T}_M(F, H)} & \mathcal{E}_M(F, H)
 \end{array}$$

comuta. De fato, em cada fibra as hipóteses assumidas implicam que o diagrama correspondente comuta. Usando trivializações locais é fácil ver que $\mathcal{T}_M(E, G)$ é diferenciável, de modo que, para quaisquer $E \in \mathcal{AB}(M)$ e $G \in \mathcal{VB}(M)$, $\mathcal{T}_M(E, G)$ é um morfismo da categoria $\mathcal{VB}(M)$. Assim, $\mathcal{T}_M$ é um morfismo ou um isomorfismo de funtores conforme $\mathcal{T}$ seja um ou outro. $\square$

Agora, vamos mostrar que os funtores $\cdot^*$ e A são diferenciáveis, induzindo funtores entre as categorias de fibrados correspondentes. Como a noção de diferenciabilidade é local e toda variedade é localmente isomorfa a um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, é suficiente considerar aplicações diferenciáveis do tipo $\phi : U \rightarrow A(Z)$ para provar que $\cdot^*$ é diferenciável. Pelas fórmulas do primeiro capítulo, escolhendo um sistema de coordenadas para Z é possível definir uma carta para $A(Z)$ de modo que, na base de Z^* induzida, $\phi^* : U \rightarrow L(Z^*)$ é uma permutação da representação de ϕ determinada pelo sistema de coordenadas a menos de alguns termos constantes. Assim, se ϕ é diferenciável, ϕ^* também é. Como os funtores A e $\cdot^* \otimes \cdot$ são isomorfos, então o caráter diferenciável do último implica que o primeiro também é diferenciável. Em particular, o último teorema mostra que os funtores citados são isomorfos também no contexto das categorias de fibrados.

Teorema 2.2 *Sejam $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado afim com fibra típica Z e $F \subset \vec{E}$ um subfibrado vetorial do seu fibrado modelo com fibra típica $W \subset \vec{Z}$. Dois pontos $e, \tilde{e} \in E$ são ditos equivalentes módulo F se existe $x \in M$ tal que $e, \tilde{e} \in E_x$ e também $e - \tilde{e} \in F_x$. Como esta relação é reflexiva, simétrica e transitiva os pontos de E são divididos num conjunto E/F de classes disjuntas. E/F tem uma única estrutura de fibrado afim tal que a projeção canônica $\rho : E \rightarrow E/F$ é um morfismo afim sobre a identidade.*

DEMONSTRAÇÃO: É fácil ver que se ρ é afim só pode haver uma estrutura afim em E/F , cuja fibra sobre cada ponto $x \in M$ é E_x/F_x . Para mostrar a existência vamos tomar, sem perda de generalidade, um atlas de fibrado afim $(U_\alpha, \Phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ para E tal que $(U_\alpha, \vec{\Phi}_\alpha)_{\alpha \in A}$ determina, por restrição, um atlas de fibrado vetorial para F . Assim, para cada ponto $x \in M$, $\Phi_{\alpha, x} : E_x \rightarrow Z$ é uma aplicação afim cuja restrição da parte linear a F_x é $\vec{\Phi}_{\alpha, x}|_{F_x} : F_x \rightarrow W$. Portanto, o

atlas de fibrado afim de E/F é $(U_\alpha, [\Phi]_\alpha)_{\alpha \in A}$ onde $[\Phi]_{\alpha, x} : E_x/F_x \rightarrow Z/W$ é a aplicação afim induzida por $\Phi_{\alpha, x}$. Para ver que as funções de transição $[\Phi]_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow GA(Z/W)$ são diferenciáveis basta notar que as funções de transição de E , $\Phi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow GA(Z)$, são descritas pelas fórmulas em coordenadas

$$y^j = a_i^j z^i + b^j$$

onde $a_i^j = a_i^j(x)$ e $b^j = b^j(x)$ são funções diferenciáveis, x^μ são as coordenadas de M e y^j, z^i são as coordenadas de Z . Agora é fácil ver que a representação correspondente de $[\Phi]_{\alpha\beta}$ em coordenadas é formada por $[a_i^j]$, representação em coordenadas das funções de transição de $\vec{E}/F$, e também pela projeção de $\dim Z - \dim W$ coordenadas dos b^j . $\square$

2.3 Jatos e Cojatos

Sendo $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado diferenciável com fibra típica Q , seu *fibrado dos jatos de primeira ordem* $\beta : J^1 E \rightarrow E$ é definido para cada ponto $e \in E$ sentado em $x \in M$ (isto é, $x = \pi(e)$) pela fibra

$$J_e^1 E = \{j \in L(T_x M, T_e E) : T_e \pi \circ j = \text{id}_{T_x M}\},$$

onde $T_e \pi : T_e E \rightarrow T_x M$ é a aplicação tangente à projeção $\pi : E \rightarrow M$ no ponto e . Como o fibrado vertical VE de E é o núcleo de $T\pi$, então a subtração de dois elementos de $J_e^1 E$ pertence a $L(T_x M, V_e E)$, ou seja, $J_e^1 E$ é um espaço afim modelado em

$$\overrightarrow{J_e^1 E} = \{t \in L(T_x M, T_e E) : T_e \pi \circ t = 0\} = L(T_x M, V_e E).$$

Duas seções locais ϕ e ψ de E definidas em abertos que contêm o ponto x e o levam em e são ditas equivalentes se $T_x \phi = T_x \psi$. A condição $\pi \circ \phi = \text{id}_M$ implica que $T_e \pi \circ T_x \phi = \text{id}_{T_x M}$, de modo que há uma correspondência injetora entre as classes determinadas por esta relação de equivalência e os elementos de $J_e^1 E$. Lembrando que localmente E é o produto cartesiano entre um aberto da base e a fibra Q , é fácil provar que a correspondência em questão também é sobrejetora. Assim, os elementos de $J_e^1 E$ são possíveis derivadas de seções locais de E que levam x em e . Em particular, a notação $j_x^1 \phi$, usada para indicar a classe determinada por ϕ , também serve para representar os elementos de $J_e^1 E$.

A projeção $\beta : J^1 E \rightarrow E$ é denominada *projeção alvo* pois associa a cada membro de $J^1 E$ o ponto de E que é o alvo das seções usadas na sua definição. De modo análogo, a sobrejeção $\alpha : J^1 E \rightarrow M$, composição de β e π , é chamada de *projeção fonte*. Com respeito a esta última, é importante observar que cada seção global ϕ de E induz de maneira natural

uma seção global $j^1\phi$ de J^1E sobre M . De fato, a cada ponto $x \in M$, $j^1\phi$ associa o elemento $T_x\phi$ de $J^1_{\phi(x)}E$ e portanto $\alpha \circ j^1\phi = \text{id}_M$.

Para dotar J^1E de uma estrutura diferenciável é necessário considerar $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ recobrimento aberto de M tal que, para cada $\alpha \in A$, $\Pi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times Q$ é uma trivialização local de E , $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma carta local de M e $\psi_\alpha : V_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^q$ é uma carta local de Q . Sem perda de generalidade, vamos supor que os $W_\alpha = \Pi_\alpha^{-1}(U_\alpha \times V_\alpha)$ formam um recobrimento aberto $(W_\alpha)_{\alpha \in A}$ de E , de modo que as cartas locais $\Phi_\alpha : W_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q$ dadas por $\Phi_\alpha = (\varphi_\alpha \times \psi_\alpha) \circ \Pi_\alpha$ constituem um atlas de E . Em particular $\mu \circ \Phi_\alpha = \varphi_\alpha \circ \pi$, sendo $\mu : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^m$ a projeção canônica. Usando o espaço afim

$$J^1(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q) = \{f \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q) : \mu \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}^m}\}$$

modelado no espaço vetorial

$$\overrightarrow{J^1(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q)} = \{g \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q) : \mu \circ g = 0\} = L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^q),$$

definimos $J^1\Phi_\alpha : \beta^{-1}(W_\alpha) \rightarrow W_\alpha \times J^1(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q)$, trivialização local de J^1E , por

$$J^1\Phi_\alpha(j) = (e, T_e\Phi_\alpha \circ j \circ T_{\varphi_\alpha(x)}\varphi_\alpha^{-1}),$$

onde e é o ponto $\beta(j)$ e x é $\pi(e)$. De fato, como $\mu = T(\varphi_\alpha \circ \pi \circ \Phi_\alpha^{-1})$ então

$$\mu \circ T_e\Phi_\alpha \circ j \circ T_{\varphi_\alpha(x)}\varphi_\alpha^{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}^m}$$

e o mesmo cálculo mostra que $\overrightarrow{J^1E}$ é levado em $\overrightarrow{J^1(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q)}$. Por fim, a aplicação inversa $J^1\Phi_\alpha^{-1} : W_\alpha \times J^1(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q) \rightarrow \beta^{-1}(W_\alpha)$ é dada por

$$J^1\Phi_\alpha^{-1}(e, f) = T_{\Phi_\alpha(e)}\Phi_\alpha^{-1} \circ f \circ T_x\varphi_\alpha,$$

de modo que as funções de transição de J^1E são

$$(J^1\Phi_\alpha \circ J^1\Phi_\beta^{-1})(e, f) = (e, T_{\Phi_\beta(e)}(\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}) \circ f \circ T_{\varphi_\alpha(x)}(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})).$$

Para clarificar o significado desta fórmula, vamos representar as cartas locais de M por coordenadas locais x^μ ($\mu = 1, \dots, m$), as cartas locais de Q por coordenadas locais q^i ($i = 1, \dots, q$) e as cartas locais de E obtidas a partir destas e de uma trivialização local pelas coordenadas locais combinadas (x^μ, q^i) . Então a transformação $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ será descrita por uma mudança de coordenadas $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\nu$, onde $\tilde{x}^\nu = \tilde{x}^\nu(x^\mu)$, enquanto que a transformação $\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}$ será descrita por uma mudança de coordenadas $(x^\mu, q^i) \rightarrow (\tilde{x}^\nu, \tilde{q}^j)$, onde $\tilde{x}^\nu = \tilde{x}^\nu(x^\mu)$ e $\tilde{q}^j = \tilde{q}^j(x^\mu, q^i)$, refletindo o fato de que ela respeita a estrutura de E como fibrado sobre M . Representando por q_μ^i as coordenadas em $J^1(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q)$ determinadas pelo

seu sistema canônico, cuja origem é o par formado pela identidade de $\mathbb{R}^m$ e pela aplicação nula e a base é construída a partir das bases canônicas de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^q$, e por (x^μ, q^i, q_μ^i) as coordenadas locais induzidas em $J^1 E$, é fácil ver que a transformação $J^1 \Phi_\alpha \circ J^1 \Phi_\beta^{-1}$ será descrita pela mudança de coordenadas $(x^\mu, q^i, q_\mu^i) \rightarrow (\tilde{x}^\nu, \tilde{q}^j, \tilde{q}_\nu^j)$, onde

$$\begin{pmatrix} \delta_\nu^\lambda \\ \tilde{q}_\nu^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\kappa} & 0 \\ \frac{\partial \tilde{q}^j}{\partial x^\kappa} & \frac{\partial \tilde{q}^j}{\partial q^i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_\mu^\kappa \\ q_\mu^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial x^\mu \\ \partial \tilde{x}^\nu \end{pmatrix},$$

isto é,

$$\tilde{q}_\nu^j = \frac{\partial \tilde{q}^j}{\partial q^i} q_\mu^i \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} + \frac{\partial \tilde{q}^j}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu}.$$

A fórmula acima mostra claramente que a transformação de coordenadas em cada fibra de $J^1 E$ sobre E é afim e também que o fibrado vetorial subjacente a $J^1 E$ é $T^*M \otimes VE$, ou seja, $L(TM, VE)$, conforme exigido pela estrutura afim das fibras de $J^1 E$.

O fibrado dos cojatos $\beta^* : J^{1*}E \rightarrow E$ é formado a partir de $J^1 E$ por meio do funtor $\cdot^*$ de dualização. Assim sua fibra sobre cada ponto $e \in E$ é o espaço vetorial $J_e^{1*}E = A(J_e^1 E, \mathbb{R})$, com uma dimensão a mais que $J_e^1 E$, e sua fibra típica é o espaço $J^1(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q)^*$, cujas coordenadas com respeito a base induzida pelo sistema canônico de coordenadas de $J^1(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q)$ são indicadas por (p_i^μ, p) . Como $\cdot^*$ é um funtor contravariante, as transformações de coordenadas em cada fibra de $J^{1*}E$ são as transpostas inversas das transformações de coordenadas na fibra correspondente de $J^1 E$. Em termos de matrizes, isto significa que denotando a primeira transformação por $q_\mu^i \rightarrow \tilde{q}_\nu^j$, como antes, e a segunda por $(p_i^\mu, p) \rightarrow (\tilde{p}_j^\nu, \tilde{p})$, a lei de transformação

$$\begin{pmatrix} \tilde{q}_\nu^j \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{q}^j}{\partial q^i} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} & \frac{\partial \tilde{q}^j}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_\mu^i \\ 1 \end{pmatrix},$$

implica a lei associada à transposta inversa da última matriz quadrada, isto é,

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_j^\nu \\ \tilde{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q^i}{\partial \tilde{q}^j} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\mu} & 0 \\ -\frac{\partial q^i}{\partial \tilde{q}^j} \frac{\partial \tilde{q}^j}{\partial x^\mu} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_i^\mu \\ p \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\tilde{p}_j^\nu = \frac{\partial q^i}{\partial \tilde{q}^j} p_i^\mu \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\mu} \quad \text{e} \quad \tilde{p} = p - \frac{\partial q^i}{\partial \tilde{q}^j} p_i^\mu \frac{\partial \tilde{q}^j}{\partial x^\mu},$$

cujas linearidade mostra que $J^{1*}E$ é um fibrado vetorial.

2.4 Prolongamento de Morfismos e Campos

Sejam $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado e $\eta : E \rightarrow E$ um morfismo cobrindo um difeomorfismo local $\chi : M \rightarrow M$. Vamos mostrar como levantar η para J^1E . Dado $j \in J_e^1E$, definimos $J^1\eta(j) \in J_{\eta(e)}^1E$ por

$$J^1\eta(j) = T_e\eta \circ j \circ T_{\chi(x)}\chi^{-1}$$

onde $x = \pi(e)$. De fato,

$$\begin{aligned} T_{\eta(e)}\pi \circ J^1\eta(j) &= T_{\eta(e)}\pi \circ T_e\eta \circ j \circ T_{\chi(x)}\chi^{-1} = T_e(\pi \circ \eta) \circ j \circ T_{\chi(x)}\chi^{-1} \\ &= T_e(\chi \circ \pi) \circ j \circ T_{\chi(x)}\chi^{-1} = T_x\chi \circ T_e\pi \circ j \circ T_{\chi(x)}\chi^{-1} \\ &= T_x\chi \circ \text{id}_{T_xM} \circ T_{\chi(x)}\chi^{-1} = \text{id}_{T_{\chi(x)}M}. \end{aligned}$$

O morfismo $J^1\eta$ é denominado *extensão* ou *prolongamento* de η pois $\eta \circ \beta = \beta \circ J^1\eta$. Para calcular sua expressão em coordenadas é necessário tomar cartas Φ_α e Φ_β de E , como antes, construídas a partir de trivializações Π_α e Π_β , cartas φ_α e φ_β de M e cartas ψ_α e ψ_β de Q , respectivamente. Como

$$J^1\Phi_\alpha \circ J^1\eta \circ J^1\Phi_\beta^{-1}(e, f) = (e, T_{\Phi_\beta(e)}(\Phi_\alpha \circ \eta \circ \Phi_\beta^{-1}) \circ f \circ T_{\varphi_\alpha(x)}(\varphi_\beta \circ \chi^{-1} \circ \varphi_\alpha^{-1}))$$

então supondo que χ (χ^{-1}) seja a transformação $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\nu$ ($\tilde{x}^\nu \rightarrow x^\mu$) e η seja a transformação $(x^\mu, q^i) \rightarrow (\tilde{x}^\nu, \tilde{q}^j)$, $J^1\eta$ será a transformação $(x^\mu, q^i, q_\mu^i) \rightarrow (\tilde{x}^\nu, \tilde{q}^j, \tilde{q}_\nu^j)$ dada pela fórmula já encontrada anteriormente:

$$\tilde{q}_\nu^j = \frac{\partial \tilde{q}^j}{\partial q^i} q_\mu^i \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} + \frac{\partial \tilde{q}^j}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu}.$$

Por meio de fórmulas análogas, é possível levantar qualquer morfismo $\eta : E \rightarrow F$ entre dois fibrados E e F sobre M , gerando um morfismo $J^1\eta : J^1E \rightarrow J^1F$, desde que η cubra um difeomorfismo local χ de M .

Se V é um campo projetável de E , ou seja $T\pi(V)$ é um campo de M , então seu fluxo é formado por automorfismos de E . Assim, é possível definir o prolongamento de V levantando o seu fluxo para J^1E , ou seja, $V = \partial\eta_\lambda/\partial\lambda|_{\lambda=0}$ e $J^1V = \partial J^1\eta_\lambda/\partial\lambda|_{\lambda=0}$. Em coordenadas,

$$V = V^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} + V^j \frac{\partial}{\partial q^j}$$

onde $V^\nu = V^\nu(x^\mu)$ e $V^j = V^j(x^\nu, q^j)$ e portanto

$$J^1V = V^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} + V^j \frac{\partial}{\partial q^j} + \left(\frac{\partial V^j}{\partial x^\nu} + \frac{\partial V^j}{\partial q^k} q_\nu^k - q_\rho^j \frac{\partial V^\rho}{\partial x^\nu} \right) \frac{\partial}{\partial q_\nu^j}.$$

2.5 Jatos de Segunda Ordem

Sendo $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado diferenciável, vamos denotar a projeção alvo de $J^1 E$ por $\beta_E : J^1 E \rightarrow E$ e formar o fibrado dos jatos de primeira ordem de $J^1 E$, considerando este como fibrado sobre M : Obtemos assim o fibrado iterado $\beta_{J^1 E} : J^1 J^1 E \rightarrow J^1 E$. O *fibrado dos jatos semiholônomos de segunda ordem* é o subfibrado $\bar{J}^2 E$ de $J^1 J^1 E$ definido por

$$\bar{J}^2 E = \{s \in J^1 J^1 E : J^1 \beta_E(s) = \beta_{J^1 E}(s)\}$$

onde $J^1 \beta_E : J^1 J^1 E \rightarrow J^1 E$ é o prolongamento do morfismo $\beta_E : J^1 E \rightarrow E$ sobre a identidade de M . Em coordenadas, se $j \in J^1 E$ é representado por (x^μ, q^i, q_μ^i) e $s \in J^1 J^1 E$ é indicado por $(x^\mu, q^i, q_\mu^i, r_\mu^i, q_{\kappa\lambda}^i)$ então $s \in \bar{J}^2 E$ se $q_\mu^i = r_\mu^i$. Como já vimos, as funções de transição de $J^1 E$ são caracterizadas pela mudança de coordenadas $(x^\mu, q^i, q_\mu^i) \rightarrow (\tilde{x}^\nu, \tilde{q}^j, \tilde{q}_\nu^j)$ onde

$$\tilde{q}_\nu^j = \frac{\partial \tilde{q}^j}{\partial q^i} q_\mu^i \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} + \frac{\partial \tilde{q}^j}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu}.$$

De forma análoga, as funções de transição de $J^1 J^1 E$ são dadas pela mudança de coordenadas $(x^\mu, q^i, q_\mu^i, r_\mu^i, q_{\kappa\lambda}^i) \rightarrow (\tilde{x}^\nu, \tilde{q}^j, \tilde{q}_\nu^j, \tilde{r}_\nu^j, \tilde{q}_{\rho\sigma}^j)$ tais que

$$\begin{aligned} \tilde{r}_\nu^j &= \frac{\partial \tilde{q}^j}{\partial q^i} r_\mu^i \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} + \frac{\partial \tilde{q}^j}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} \\ \tilde{q}_{\rho\sigma}^j &= \frac{\partial \tilde{q}_\rho^j}{\partial q_\kappa^i} q_{\kappa\lambda}^i \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\sigma} + \frac{\partial \tilde{q}_\rho^j}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\sigma}, \end{aligned}$$

Combinando as duas mudanças de coordenadas é fácil ver que $q_\mu^i = r_\mu^i$ implica não só que $\tilde{q}_\nu^j = \tilde{r}_\nu^j$, provando que $\bar{J}^2 E$ é um subfibrado de $J^1 J^1 E$, como também

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{q}_\rho^j}{\partial q_\kappa^i} &= \frac{\partial \tilde{q}^j}{\partial q^i} \frac{\partial x^\kappa}{\partial \tilde{x}^\rho} \\ \frac{\partial \tilde{q}_\rho^j}{\partial x^\lambda} &= \frac{\partial^2 \tilde{q}^j}{\partial x^\lambda \partial q^i} q_\kappa^i \frac{\partial x^\kappa}{\partial \tilde{x}^\rho} + \frac{\partial^2 \tilde{q}^j}{\partial x^\lambda \partial x^\kappa} \frac{\partial x^\kappa}{\partial \tilde{x}^\rho}. \end{aligned}$$

Assim, as funções de transição de $\bar{J}^2 E$ são $(x^\mu, q^i, q_\mu^i, q_{\kappa\lambda}^i) \rightarrow (\tilde{x}^\nu, \tilde{q}^j, \tilde{q}_\nu^j, \tilde{q}_{\rho\sigma}^j)$ onde

$$\tilde{q}_{\rho\sigma}^j = \frac{\partial \tilde{q}^j}{\partial q^i} q_{\kappa\lambda}^i \frac{\partial x^\kappa}{\partial \tilde{x}^\rho} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\sigma} + \frac{\partial^2 \tilde{q}^j}{\partial x^\lambda \partial q^i} q_\kappa^i \frac{\partial x^\kappa}{\partial \tilde{x}^\rho} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\sigma} + \frac{\partial^2 \tilde{q}^j}{\partial x^\lambda \partial x^\kappa} \frac{\partial x^\kappa}{\partial \tilde{x}^\rho} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\sigma},$$

mostrando que $\bar{J}^2 E$ é um fibrado afim sobre $J^1 E$ tendo $\otimes^2 T^* M \otimes V E$ como fibrado vetorial associado.

A construção de $\bar{J}^2 E$ é importante como um passo intermediário da definição do fibrado $J^2 E$ dos jatos de segunda ordem. De fato, como $\wedge^2 T^* M \otimes VE$ é um subfibrado de $\otimes^2 T^* M \otimes VE$, é possível tomar o quociente

$$J^2 E = \bar{J}^2 E / \wedge^2 T^* M \otimes VE ,$$

de modo que

$$\vee^2 T^* M \otimes VE = \otimes^2 T^* M \otimes VE / \wedge^2 T^* M \otimes VE$$

é o fibrado vetorial associado ao fibrado afim resultante sobre $J^1 E$. É óbvio que as funções de transição de $J^2 E$ são obtidas simetrizando as mudanças de coordenadas de $\bar{J}^2 E$ acima citadas.

Para comparar a construção do fibrado dos jatos de segunda ordem dada aqui com a definição tradicional é preciso observar que o jato iterado $j^1 j^1 \phi$ de uma seção local ϕ de E assume valores não só em $\bar{J}^2 E$ como também em $J^2 E$, devido à regra de Schwarz. Nas coordenadas locais utilizadas acima temos

$$j^1 j^1 \phi(x) = (x^\mu, \phi^i(x), \partial_\mu \phi^i(x), \partial_\mu \phi^i(x), \partial_\mu \partial_\nu \phi^i(x))$$

onde $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$. Logo, jatos de segunda ordem no sentido tradicional, ou seja, classes de seções locais onde a relação de equivalência é a igualdade da expansão de Taylor até segunda ordem, estão em bijeção com jatos iterados de seções locais.

2.6 Conexões Gerais e Principais

Uma *conexão geral* no fibrado E é um fibrado horizontal sobre E , ou seja, um subfibrado vetorial HE do fibrado tangente TE que é complementar ao fibrado vertical VE , proporcionando uma decomposição de TE em soma direta, $TE = HE \oplus VE$. De modo equivalente, é possível definir uma conexão em E através da sua projeção horizontal $H : TE \rightarrow TE$ ou da sua projeção vertical $V : TE \rightarrow TE$. Estas aplicações são homomorfismos de fibrados vetoriais tais que $H^2 = H$, $V^2 = V$, $VE = \text{im}(V) = \ker(H)$ e $HE = \ker(V) = \text{im}(H)$.

Existe uma estreita relação entre o fibrado dos jatos e a noção de conexão. Com efeito, cada seção global do fibrado afim $J^1 E$ sobre E determina uma conexão geral em E e vice-versa. Para verificar esta equivalência é necessário lembrar que uma seção global ϕ de $J^1 E$ sobre E associa a cada ponto $e \in E$, situado em $x \in M$, um elemento $\phi(e) \in L(T_x M, T_e E)$ tal que $T_e \pi \circ \phi(e) = \text{id}_{T_x M}$. Mas então $V_e E \cap \text{im}(\phi(e)) = \{0\}$ e $\ker(\phi(e)) = \{0\}$. A última relação implica que as dimensões de $\text{im}(\phi(e))$ e $T_x M$ são idênticas, e como $T_e \pi$ é sobrejetora, segue $V_e E \oplus \text{im}(\phi(e)) = T_e E$. Já que, em cada ponto e , $\text{im}(\phi(e))$ é subespaço horizontal

de $T_e E$, então ϕ determina um fibrado horizontal de E . Reciprocamente, a partir de um subespaço horizontal $H_e E$ de $T_e E$, obtemos um elemento de $J_e^1 E$ considerando a inversa da restrição de $T_e \pi$ a $H_e E$. Assim uma conexão em E determina uma seção global de $J^1 E$.

Seja agora $\rho : P \rightarrow M$ um fibrado principal com grupo estrutural G . A ação natural a direita de G em P permite definir uma classe especial de conexões, equivariantes com respeito à ação em questão. Com efeito, a ação a direita

$$P \times G \rightarrow P, \quad (p, g) \mapsto p \cdot g$$

induz uma ação a direita no fibrado tangente

$$TP \times G \rightarrow TP, \quad (v, g) \mapsto v \cdot g$$

por meio da fórmula

$$\left(\frac{d}{dt} p(t) \right) \Big|_{t=0} \cdot g = \frac{d}{dt} (p(t) \cdot g) \Big|_{t=0}.$$

Assim, uma *conexão principal* em P é dada por um fibrado horizontal HP estável com respeito às ações combinadas do grupo G no espaço total P do fibrado principal e no seu fibrado tangente TP , isto é, $H_p P \cdot g = H_{p \cdot g} P$.

Como a ação de G no fibrado TP respeita a estrutura linear das fibras, $(j \cdot g)(v) = j(v) \cdot g$, para $j \in J_p^1 P$ e $v \in T_x M$, determina uma ação a direita de G em $J^1 P$. Esta definição é consistente devido à invariância de ρ , pois $\rho(p \cdot g) = \rho(p)$ implica que $T_{p \cdot g} \rho(j \cdot g) = T_p \rho(j)$ e portanto $j \cdot g$ satisfaz as condições necessárias para ser um elemento de $J_{p \cdot g}^1 P$. Por sua vez, a ação de G em $J^1 P$ permite definir a noção de seção G -equivariante ϕ de $J^1 P$ sobre P por meio da condição $\phi(p \cdot g) = \phi(p) \cdot g$, postulada para quaisquer $p \in P$ e $g \in G$, o que implica a igualdade $\text{im}(\phi(p)) \cdot g = \text{im}(\phi(p \cdot g))$. Assim, a equivalência entre conexões e seções do fibrado dos jatos induz uma bijeção entre as conexões principais em P e as seções G -equivariantes de $J^1 P$ sobre P .

2.7 Fibrado das Conexões Principais

Seja $\rho : P \rightarrow M$ um fibrado principal com grupo estrutural G , como antes. A ação a direita de G em $J^1 P$, apresentada no último parágrafo, pode ser reescrita da seguinte forma

$$J^1 P \times G \rightarrow J^1 P, \quad (j_x^1 \sigma, g) \mapsto (j_x^1 \sigma) \cdot g,$$

onde $x \in U$ e $(j_x^1 \sigma) \cdot g = j_x^1(\sigma \cdot g)$. De fato, como a ação de G em P preserva as fibras, se $\sigma : U \rightarrow P$ é seção local de P sobre o aberto $U \subset M$ então

$$\sigma \cdot g : U \rightarrow P, \quad x \mapsto \sigma(x) \cdot g$$

também é seção local. A definição da ação é consistente pois $j_x^1\sigma = j_x^1\tau$ implica que

$$T_x(\sigma \cdot g) = (T_x\sigma) \cdot g = (T_x\tau) \cdot g = T_x(\tau \cdot g)$$

e portanto $j_x^1(\sigma \cdot g) = j_x^1(\tau \cdot g)$. Pondo

$$CP = J^1P/G,$$

a invariância de $\alpha : J^1P \rightarrow M$ com respeito à ação de G em J^1P induz a aplicação

$$\kappa : CP \rightarrow M, \quad [j_x^1\sigma] \mapsto x,$$

onde $[j_x^1\sigma]$ é a classe de equivalência determinada por $j_x^1\sigma$.

Vamos mostrar que CP tem todas as propriedades para receber o nome de *fibrado das conexões principais* de P , começando pela análise da sua estrutura diferenciável. O primeiro passo é a escolha da fibra típica mais adequada para o cálculo das suas funções de transição. O estudo do fibrado trivial $M \times G$ leva à fibra típica $L(\mathbb{R}^m, \mathfrak{g})$, onde $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie do grupo G .

Seja $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ um recobrimento aberto de M tal que, para cada $\alpha \in A$, existe uma seção local $\sigma_\alpha : U_\alpha \rightarrow P$ de P e uma carta local $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^m$ de M . Cada seção induz uma trivialização local cuja inversa é

$$\Pi_\alpha^{-1} : U_\alpha \times G \rightarrow \rho^{-1}(U_\alpha), \quad (x, g) \mapsto \sigma_\alpha(x) \cdot g,$$

levando à definição da aplicação $\Sigma_\alpha = (\varphi_\alpha \times \text{id}_G) \circ \Pi_\alpha$ que, por sua vez, induz uma trivialização local de CP :

$$C\Sigma_\alpha : \kappa^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times L(\mathbb{R}^m, \mathfrak{g}), \quad [j_x^1\sigma] \mapsto (x, (f(x)^{-1} \cdot T_x f) \circ (T_x \varphi_\alpha)^{-1}),$$

onde $f : V_\alpha \rightarrow G$, com $V_\alpha \subset U_\alpha$ uma vizinhança aberta do ponto x , é tal que $\sigma \cdot f = \sigma_\alpha$. Para verificar a consistência desta definição é necessário trabalhar com outra seção local τ e outra função $h : V_\alpha \rightarrow G$ tais que $\tau \cdot h = \sigma_\alpha$ e $[j_x^1\sigma] = [j_x^1\tau]$. A segunda condição significa que existe $g \in G$ tal que $\sigma(x) = \tau(x) \cdot g$ e $T_x\sigma = (T_x\tau) \cdot g$, enquanto que a primeira condição implica $\sigma \cdot f = \tau \cdot h$ e, em particular, $g = h(x)f(x)^{-1}$. Assim,

$$(T_x\sigma) \cdot f(x) = ((T_x\tau) \cdot g) \cdot f(x) = (T_x\tau) \cdot (g f(x)) = (T_x\tau) \cdot h(x).$$

Por outro lado,

$$(T_x\sigma) \cdot f(x) + \sigma(x) \cdot T_x f = T_x(\sigma \cdot f) = T_x(\tau \cdot h) = (T_x\tau) \cdot h(x) + \tau(x) \cdot T_x h$$

e portanto

$$(\tau(x) \cdot g) \cdot T_x f = \sigma(x) \cdot T_x f = \tau(x) \cdot T_x h,$$

ou seja, $T_x h = g \cdot T_x f$, ou ainda,

$$h(x)^{-1} \cdot T_x h = f(x)^{-1} \cdot T_x f .$$

Invertendo a argumentação, concluímos que a inversa de $C\Sigma_\alpha$ é dada por

$$C\Sigma_\alpha^{-1} : U_\alpha \times L(\mathbb{R}^m, \mathfrak{g}) \rightarrow \kappa^{-1}(U_\alpha) \quad , \quad (x, A) \mapsto [j_x^1 \sigma]$$

onde σ é uma seção local de P tal que $\sigma \cdot f = \sigma_\alpha$, sendo $f : V_\alpha \rightarrow G$, com $V_\alpha \subset U_\alpha$ uma vizinhança aberta do ponto x , uma aplicação qualquer tal que $A \circ T_x \varphi_\alpha = f(x)^{-1} \cdot T_x f$. Para calcular as funções de transição de CP determinadas pela composição das trivializações locais $C\Sigma_\alpha$ e $C\Sigma_\beta^{-1}$ é necessário introduzir as funções de transição $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ tais que para quaisquer $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ e $g \in G$

$$(\Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta^{-1})(\varphi_\beta(x), g) = (\varphi_\alpha(x), g_{\alpha\beta}(x) g) ,$$

o que equivale a

$$\sigma_\beta(x) = \sigma_\alpha(x) \cdot g_{\alpha\beta}(x) .$$

Como antes,

$$(C\Sigma_\alpha \circ C\Sigma_\beta^{-1})(x, A) = C\Sigma_\alpha([j_x^1 \tau])$$

onde τ é uma seção local de P tal que $\tau \cdot h = \sigma_\beta$, sendo $h : V_\beta \rightarrow G$, com $V_\beta \subset U_\beta$ uma vizinhança aberta do ponto x , uma aplicação satisfazendo $A \circ (T_x \varphi_\beta) = h(x)^{-1} \cdot T_x h$. Substituindo V_α e V_β por sua intersecção caso necessário, procuramos então a aplicação $f : V_\alpha \rightarrow G$ tal que $\tau \cdot f = \sigma_\alpha$, ou seja, $f = h g_{\alpha\beta}^{-1}$. Assim

$$T_x f = (T_x h) \cdot g_{\alpha\beta}(x)^{-1} + h(x) \cdot T_x g_{\alpha\beta}^{-1}$$

e portanto

$$\begin{aligned} f(x)^{-1} \cdot T_x f &= \text{Ad}_{g_{\alpha\beta}(x)} \circ (h(x)^{-1} \cdot T_x h) + g_{\alpha\beta}(x) \cdot T_x g_{\alpha\beta}^{-1} \\ &= \text{Ad}_{g_{\alpha\beta}(x)} \circ (h(x)^{-1} \cdot T_x h) - T_x g_{\alpha\beta} \cdot g_{\alpha\beta}(x)^{-1} . \end{aligned}$$

Logo,

$$(C\Sigma_\alpha \circ C\Sigma_\beta^{-1})(x, A) = (x, \text{Ad}_{g_{\alpha\beta}(x)} \circ A \circ (T_x \varphi_\beta \circ (T_x \varphi_\alpha)^{-1}) - (T_x g_{\alpha\beta} \cdot g_{\alpha\beta}(x)^{-1}) \circ (T_x \varphi_\alpha)^{-1}) ,$$

mostrando que as funções de transição de CP são exatamente as transformações locais de calibre.

Para escrever a fórmula acima em coordenadas é necessário representar as cartas locais de M por coordenadas locais x^μ , como antes, e as compostas das últimas e das trivializações de P por (x^μ, g_a^b) , sendo G é um grupo de matrizes. Assim, $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ é indicada por $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\nu$,

$\Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta^{-1}$ por $(x^\mu, g_a^b) \rightarrow (\tilde{x}^\nu, \tilde{g}_c^d)$ e a aplicação $g_{\alpha\beta}$ pela matriz $\widetilde{M}_b^d$ tal que $\tilde{g}_e^d = \widetilde{M}_b^d g_e^b$. Denotando por $A_{a\mu}^b$ as coordenadas de $L(\mathbb{R}^m, \mathfrak{g})$ relativas à sua base canônica e por $(x^\mu, A_{a\mu}^b)$ as coordenadas induzidas em CP , é fácil ver que $C\Sigma_\alpha \circ C\Sigma_\beta^{-1}$ será descrita pela lei de transformação $(x^\mu, A_{a\mu}^b) \rightarrow (\tilde{x}^\nu, \tilde{A}_{c\nu}^d)$ tal que

$$\tilde{A}_{c\nu}^d = \widetilde{M}_b^d M_c^a A_{a\mu}^b \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} + \widetilde{M}_b^d \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\nu} M_c^b,$$

onde $\widetilde{M}_b^d M_c^b = \delta_c^d$. Como a transformação de coordenadas em cada fibra de CP sobre M é afim então CP é um fibrado afim e a transformação linear subjacente em cada fibra mostra que $L(TM, LP)$ é o fibrado vetorial modelo, com $LP = P \times_G \mathfrak{g}$.

Para finalizar o estudo sobre CP é necessário caracterizar a relação entre o conjunto $\Gamma(CP)$ das suas seções e o conjunto $\Gamma(J^1P)^G$ das seções G -equivariantes de J^1P sobre P .

Proposição 2.2 *Existe uma bijeção entre as seções de CP e as conexões principais de P .*

DEMONSTRAÇÃO: Como a ação à direita de G em P é transitiva e livre em cada fibra, é possível definir a bijeção $\Psi : \Gamma(CP) \rightarrow \Gamma(J^1P)^G$ por

$$\Psi(\psi) : P \rightarrow J^1P, \quad p \mapsto \gamma^{-1}(\psi \circ \rho(p)) \cap \beta^{-1}(p)$$

onde $\gamma : J^1P \rightarrow CP$ é a projeção que relaciona cada elemento de J^1P com sua classe de equivalência em CP e ψ é um seção de CP .

Primeiro é necessário verificar que a definição de $\Psi(\psi)$ é consistente. Dados $j_x^1\sigma$ e $j_x^1\tau$ elementos de $\gamma^{-1}(\psi \circ \rho(p))$ existe $g \in G$ tal que $(j_x^1\sigma) \cdot g = j_x^1\tau$ e $\beta(j_x^1\tau) = \beta(j_x^1\sigma) \cdot g$. Por outro lado, se $j_x^1\sigma$ e $j_x^1\tau$ também pertencem a $\beta^{-1}(p)$ então $p \cdot g = p$, ou seja, $g = 1$ e $j_x^1\sigma = j_x^1\tau$. Tomando τ seção local de P sobre x tal que $[j_x^1\tau] = \psi \circ \rho(p)$, existe $g \in G$ satisfazendo $p \cdot g = \tau(x)$. Mas então, $\sigma = \tau \cdot g^{-1}$ é seção local de P sobre x tal que $\sigma(x) = \tau(x) \cdot g^{-1} = p$. Além disso, $(j_x^1\sigma) \cdot g = j_x^1(\sigma \cdot g) = j_x^1\tau$, de modo que $[j_x^1\sigma] = [j_x^1\tau]$. Logo $\gamma^{-1}(\psi \circ \rho(p)) \cap \beta^{-1}(p) = \{j_x^1\sigma\}$.

Para mostrar que $\Psi(\psi)$ é G -equivariante é preciso escolher uma seção local τ de P sobre x tal que $j_x^1\tau = \gamma^{-1}(\psi \circ \rho(p)) \cap \beta^{-1}(p)$ e considerar $\sigma = \tau \cdot g$, sendo g um elemento qualquer de G . Como $j_x^1\sigma = \gamma^{-1}(\psi \circ \rho(p \cdot g)) \cap \beta^{-1}(p \cdot g)$ e $(j_x^1\tau) \cdot g = j_x^1(\tau \cdot g) = j_x^1\sigma$ então

$$\gamma^{-1}(\psi \circ \rho(p \cdot g)) \cap \beta^{-1}(p \cdot g) = (\gamma^{-1}(\psi \circ \rho(p)) \cap \beta^{-1}(p)) \cdot g$$

ou seja, $\Psi(\psi)(p \cdot g) = (\Psi(\psi)(p)) \cdot g$.

Ψ é uma bijeção pois sua inversa $\Psi^{-1} : \Gamma(J^1P)^G \rightarrow \Gamma(CP)$ é dada por

$$\Psi^{-1}(\phi) : M \rightarrow CP, \quad x \mapsto \gamma \circ \phi \circ \tau(x)$$

onde ϕ é seção G -equivariante de J^1P e $\tau(x)$ é um elemento qualquer de $\rho^{-1}(x)$. A escolha é livre pois, para qualquer par p e q de elementos da fibra $\rho^{-1}(x)$ existe $g \in G$ tal que $p \cdot g = q$ e portanto

$$\gamma \circ \phi(q) = \gamma \circ \phi(p \cdot g) = \gamma \circ \phi(p)$$

devido à equivariância de ϕ e à invariância de γ . $\square$

2.8 Fibrado das Conexões Lineares

Seja M uma variedade diferenciável. O fibrado dos referenciais $\rho : FM \rightarrow M$ é um fibrado principal cuja fibra sobre cada ponto $x \in M$ é o conjunto

$$F_x M = \{(e_i)_{i \in I} : (e_i)_{i \in I} \text{ é uma base de } T_x M\}.$$

Dada uma base $(e_i)_{i \in I}$ de $T_x M$, qualquer outra base $(f_i)_{i \in I}$ está associada a um único elemento (a_i^j) de $GL(m)$ por meio da relação $f_i = a_i^j e_j$, de modo que a fibra típica de FM é $GL(m)$. A partir de um atlas $(U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ de M as trivializações de FM são dadas por

$$F\phi_\alpha : \rho^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times GL(m) \quad , \quad (e_i)_{i \in I} \mapsto (x, (a_i^j))$$

onde x é o ponto $\rho((e_i)_{i \in I})$, $T_x \phi_\alpha(e_i) = a_i^j f_j$ e $(f_i)_{i \in I}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^m$. Como

$$F\phi_\alpha \circ F\phi_\beta^{-1}(x, g) = (x, T_{\phi_\beta(x)}(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})g)$$

então as funções de transição $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(m)$ são dadas por

$$g_{\alpha\beta}(x) = T_{\phi_\beta(x)}(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}).$$

Logo, usando as mesmas notações da última seção, a lei $(x^\mu, g_\lambda^\kappa) \rightarrow (\tilde{x}^\nu, \tilde{g}_\sigma^\rho)$ é tal que

$$\tilde{g}_\tau^\rho = \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\kappa} g_\tau^\kappa.$$

Como a escolha de uma conexão principal em FM é equivalente a escolha de uma conexão linear em M , existe uma bijeção entre conexões lineares e seções globais do fibrado

$$CM = JFM/GL(m).$$

As fórmulas em coordenadas da última seção mostram que a lei de transformação de CM é $(x^\mu, \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa) \rightarrow (\tilde{x}^\nu, \tilde{\Gamma}_{\sigma\nu}^\rho)$ com

$$\tilde{\Gamma}_{\sigma\nu}^\rho = \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\sigma} \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} + \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\kappa} \frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial \tilde{x}^\nu \partial \tilde{x}^\sigma}.$$

Assim as leis de transição de CM são idênticas às regras de transformação dos símbolos de Christoffel com respeito a dois sistemas de coordenadas distintos, o que justifica chamar CM de *fibrado das conexões lineares*.

2.9 Referências

A definição de fibrado afim usada é a mesma de [37]. Os teoremas a respeito de operações com fibrados afins são generalizações dos teoremas sobre operações com fibrados vetoriais apresentados, por exemplo, em [29] e [1]. A construção dos jatos de primeira e segunda ordem é uma modificação do processo usual, com um acentuado sabor algébrico. No caso dos jatos de segunda ordem, o parágrafo correspondente de [15] contém uma formulação bem próxima da empregada. Quanto ao fibrado das conexões principais, seguimos as linhas gerais de [27], procurando fornecer fórmulas explícitas, ao contrário da abordagem mais abstrata da referência citada. Por último, gostaríamos de mencionar que ainda não vimos publicada a bijeção definida entre o conjunto das conexões principais e as seções do fibrado das conexões principais.

Capítulo 3

Estruturas Dinâmicas

3.1 Lagrangiano e Equações de Euler-Lagrange

O sucesso do formalismo simplético no estudo dos sistemas dinâmicos e das suas simetrias sugere sua generalização para a teoria geométrica dos campos. O primeiro passo nesta direção é a definição do contexto capaz de englobar os principais tipos de campos da física, que normalmente são divididos em quatro grandes classes:

- Campos de matéria: São campos que, no contexto da teoria quântica, estão associados às partículas que constituem a matéria. No modelo padrão estas partículas são os quarks e léptons.
- Campos de calibre: São campos que descrevem as diversas interações entre as partículas. No modelo padrão temos três interações fundamentais: a eletromagnética, a fraca e a forte. Na linguagem da teoria quântica, correspondem à troca de outras partículas conhecidas como “bósons de calibre” que são, respectivamente, o fóton γ , os bósons $W^\pm$, Z^0 e os glúons.
- Campo gravitacional: Historicamente a relatividade geral foi o primeiro exemplo de uma teoria de campos nos moldes matemáticos modernos. Nela o campo gravitacional ocupa uma posição privilegiada em relação a todos os demais campos. Matematicamente ele é descrito pelo tensor métrico.
- Campos não-lineares: Este tipo de campo aparece como resultado da imposição de vínculos que restringem o contradomínio a uma subvariedade não-linear do espaço vetorial original. Exemplos típicos são o modelo ferromagnético de Heisenberg e o modelo sigma.

Um formalismo geral para a teoria clássica dos campos deve se basear em conceitos capazes de englobar todos os tipos de campos mencionados acima. Felizmente, a solução deste problema é bastante simples: Cada campo é uma seção de um fibrado apropriado E sobre o espaço-tempo M . Geralmente este fibrado não possui nenhuma estrutura adicional, sendo que os diferentes tipos de campos correspondem a diferentes tipos de fibrados:

- Campos de matéria: São seções de fibrados vetoriais, construídos a partir do fibrado tangente do espaço-tempo (para dar conta da natureza tensorial ou espinorial dos campos) e possivelmente de fibrados vetoriais associados a algum fibrado principal sobre o espaço-tempo cujo grupo estrutural descreve simetrias internas.
- Campos de calibre: São seções de fibrados afins, conforme demonstrado no capítulo anterior.
- O campo gravitacional: É uma seção do fibrado das métricas de Lorentz

$$LM = FM/O(m-1,1) ,$$

subfibrado aberto do fibrado dos tensores simétricos de segunda ordem $\vee^2 T^*M$.

- Campos não-lineares: Normalmente, são seções de fibrados globalmente triviais $E = M \times Q$, que podem ser identificadas com aplicações de M para Q . Na versão mais geral do modelo sigma Q é uma variedade riemanniana.

Assim, cada teoria possui o seu próprio *fibrado dos campos*, cujas seções estão em correspondência com os seus campos.

O próximo passo na extensão dos conceitos do formalismo simplético para a teoria dos campos consiste na procura da estrutura análoga ao fibrado tangente da mecânica. O fibrado dos jatos de primeira ordem é a resposta correta para a última pergunta. De fato, dada uma teoria com fibrado dos campos $\pi : E \rightarrow M$, seu lagrangiano produz uma densidade a partir do campo e das suas primeiras derivadas, ou seja, é um morfismo de fibrados

$$\mathcal{L} : J^1 E \rightarrow \wedge^m T^*M$$

induzindo a identidade em M . Em muitos casos, a escolha de um elemento de volume para M permite interpretar o lagrangiano como uma função em $J^1 E$. Entretanto, nem sempre é possível fazer esta simplificação, como mostra a teoria topológica de Chern-Simons. Contudo, localmente o lagrangiano está sempre associado a uma função pela fórmula

$$\mathcal{L} = L(x^\mu, q^i, q_\mu^i) d^m x ,$$

sendo $d^m x = dx^0 \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{m-1}$ e (x^μ, q^i, q_μ^i) as coordenadas locais de $J^1 E$ induzidas por coordenadas locais adaptadas (x^μ, q^i) de E , onde x^μ são coordenadas locais de M e q^i são coordenadas locais de Q , fibra típica de E .

O lagrangiano é o núcleo da abordagem variacional para a teoria dos campos na medida em que determina o funcional de ação

$$S(\phi) = \int_M \mathcal{L}(j^1 \phi),$$

onde ϕ é uma seção de E . Como na mecânica, as propriedades de S determinam as equações e as leis de conservação da teoria dos campos. Por exemplo, para estender o princípio de Hamilton é necessário introduzir o conceito de *variação de suporte compacto* de uma seção ϕ , ou seja, uma família a um parâmetro de seções ϕ_λ de E satisfazendo $\phi_\lambda|_{\lambda=0} = \phi$ e tal que

$$\delta \phi = \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \phi_\lambda \right|_{\lambda=0}$$

é uma seção com suporte compacto do fibrado vetorial $\phi^* \tau_E|_{VE} : \phi^* VE \rightarrow M$. Uma seção ϕ de E é um *ponto estacionário* de S se

$$D_\phi S(\delta \phi) = \left. \frac{d}{d\lambda} S(\phi_\lambda) \right|_{\lambda=0} = 0$$

para toda variação de suporte compacto ϕ_λ . O princípio da ação estacionária afirma que os campos físicos são sempre os pontos estacionários de um funcional de ação, constituindo a generalização do princípio de Hamilton para sistemas com número infinito de graus de liberdade.

A partir de uma carta de fibrado $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q$ de E sobre uma carta $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ construímos a carta $J^1 \Phi$ de $J^1 E$. Assim a seção de $\alpha : J^1 E \rightarrow M$ induzida pela seção ϕ de $\pi : E \rightarrow M$ é representada por

$$j^1 \phi(x) = (x^\mu, \phi^i(x), \partial_\mu \phi^i(x)).$$

Já que $TJ^1 \Phi$ é carta de $TJ^1 E$ e $TJ^1 \Phi (\partial j^1 \phi_\lambda / \partial \lambda|_{\lambda=0}) = \partial J^1 \Phi(j^1 \phi_\lambda) / \partial \lambda|_{\lambda=0}$ então, como δ comuta com as derivadas parciais ∂_μ , a variação induzida em $J^1 E$ é

$$\delta j^1 \phi = \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} j^1 \phi_\lambda \right|_{\lambda=0} = \delta \phi^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \partial_\mu \delta \phi^i \frac{\partial}{\partial q_\mu^i}.$$

Teorema 3.1 *Uma seção ϕ do fibrado $\pi : E \rightarrow M$ é estacionária com respeito à ação S se e somente se as equações de Euler-Lagrange*

$$\frac{\partial L}{\partial q^i}(j^1 \phi) - \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial q_\mu^i}(j^1 \phi) \right) = 0.$$

são satisfeitas em cada sistema de coordenadas.

DEMONSTRAÇÃO: Restringindo o princípio da ação estacionária às variações com suporte contido no domínio de φ e usando a regra da cadeia segue que

$$\begin{aligned}
D_\phi S(\delta\phi) &= \int_U d^m x \left(\frac{\partial L}{\partial q^i}(j^1\phi) \delta\phi^i + \frac{\partial L}{\partial q_\mu^i}(j^1\phi) \partial_\mu \delta\phi^i \right) \\
&= \int_U d^m x \left(\frac{\partial L}{\partial q^i}(j^1\phi) \delta\phi^i - \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial q_\mu^i}(j^1\phi) \right) \delta\phi^i \right) \\
&\quad + \int_U d^m x \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial q_\mu^i}(j^1\phi) \delta\phi^i \right) \\
&= \int_U d^m x \left(\frac{\partial L}{\partial q^i}(j^1\phi) - \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial q_\mu^i}(j^1\phi) \right) \right) \delta\phi^i \\
&\quad + \int_\Sigma d\Sigma_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial q_\mu^i}(j^1\phi) \delta\phi^i \right),
\end{aligned}$$

sendo $\Sigma = \partial U$. Como as variações escolhidas são nulas em Σ o último termo desaparece, de modo que as seções estacionárias são soluções das equações de Euler-Lagrange. Para mostrar a recíproca é necessário considerar ϕ que satisfaz as equações locais de Euler-Lagrange e tomar uma variação compacta ϕ_λ , de modo que $\phi_\lambda = \phi$ em $M - C$, sendo C um subconjunto compacto de M . Tomando o recobrimento de C formado por projeções de domínios de cartas de fibrado de E construímos uma partição da unidade $(\sigma_i)_{i \in I}$ subordinada. Logo

$$\begin{aligned}
D_\phi S(\delta\phi) &= \frac{d}{d\lambda} \left(\int_M \mathcal{L}(j^1\phi_\lambda) \right) \Big|_{\lambda=0} \\
&= \frac{d}{d\lambda} \left(\int_C \mathcal{L}(j^1\phi_\lambda) \right) \Big|_{\lambda=0} + \frac{d}{d\lambda} \left(\int_{M-C} \mathcal{L}(j^1\phi_\lambda) \right) \Big|_{\lambda=0} \\
&= \frac{d}{d\lambda} \left(\sum_i \int_C \sigma_i \mathcal{L}(j^1\phi_\lambda) \right) \Big|_{\lambda=0}
\end{aligned}$$

e um cálculo idêntico ao anterior mostra que ϕ é um ponto estacionário. $\square$

3.2 Dualidade e Transformação de Legendre

Para generalizar a transformação de Legendre da mecânica para o contexto da teoria dos campos é necessário considerar o fibrado dinâmico dos cojatos

$$J^{1\otimes}E = A(J^1E, \wedge^m T^*M) = J^{1*}E \otimes \wedge^m T^*M$$

cujas fibras sobre cada ponto e de E , projetado no ponto $x = \pi(e)$ de M , é o espaço vetorial

$$J_e^{1\otimes}E = A(J_e^1E, \wedge^m T_x^*M).$$

As coordenadas na fibra $J_e^{1\otimes}E$ são denotadas por (p_i^μ, p) e representam aplicações afins

$$q_\mu^i \mapsto (p_i^\mu q_\mu^i + p) d^m x$$

com q_μ^i as coordenadas em $J_e^1 E$. Como $J^{1\otimes}E$ é o produto tensorial de $J^{1*}E$ e $\wedge^m T^*M$, cada mudança de coordenadas $(x^\mu, q^i) \rightarrow (\tilde{x}^\nu, \tilde{q}^j)$ em E tal que

$$\tilde{x}^\nu = \tilde{x}^\nu(x^\mu) \quad , \quad \tilde{q}^j = \tilde{q}^j(x^\mu, q^i)$$

induz em $J^{1\otimes}E$ uma transformação de coordenadas $(x^\mu, q^i, p_i^\mu, p) \rightarrow (\tilde{x}^\nu, \tilde{q}^j, \tilde{p}_j^\nu, \tilde{p})$ dada por

$$\tilde{p}_j^\nu = \det\left(\frac{\partial x}{\partial \tilde{x}}\right) \frac{\partial q^i}{\partial \tilde{q}^j} p_i^\mu \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\mu} \quad , \quad \tilde{p} = \det\left(\frac{\partial x}{\partial \tilde{x}}\right) \left(p - \frac{\partial q^i}{\partial \tilde{q}^j} p_i^\mu \frac{\partial \tilde{q}^j}{\partial x^\mu}\right) .$$

A transformação de Legendre é o morfismo $\mathbb{F}\mathcal{L} : J^1 E \rightarrow J^{1\otimes}E$ sobre a identidade de E cujo valor no ponto $j \in J_e^1 E$ é a aplicação afim entre $J_e^1 E$ e $\wedge^m T_x^* M$ dada por

$$\mathbb{F}\mathcal{L}(j) \cdot k = \mathcal{L}(j) + \frac{d}{d\lambda} \mathcal{L}(j + \lambda(k - j)) \Big|_{\lambda=0}$$

onde $k \in J_e^1 E$. A ligação com a definição usual é feita pelo segundo termo, idêntico à derivada de $\mathcal{L}$ restrita à fibra $J_e^1 E$ e calculada em $k - j$. A expressão em coordenadas é obtida fazendo $j = q_\mu^i$ e $k = r_\mu^i$, de modo que $\mathbb{F}\mathcal{L}(j) \cdot k$ é a função

$$\left(L + \frac{\partial L}{\partial q_\mu^i} (r_\mu^i - q_\mu^i)\right) d^m x$$

afim em r_μ^i e cujas partes linear e constante são

$$p_i^\mu = \frac{\partial L}{\partial q_\mu^i} \quad \text{e} \quad p = L - \frac{\partial L}{\partial q_\mu^i} q_\mu^i$$

respectivamente. Assim, cada lagrangiano determina uma transformação de Legendre.

3.3 Forma Canônica e Forma de Cartan

Seja $\xi : \Lambda \rightarrow E$ o fibrado das m -formas diferenciais do espaço total E , ou seja, $\Lambda = \wedge^m T^*E$. Considerando os subespaços das fibras de Λ dados por

$$Z_e = \{z \in \Lambda_e : i_u i_v z = 0 \text{ para todo } u, v \in V_e E\}$$

obtemos um subfibrado denotado por Z . Como antes, as coordenadas de E ao redor do ponto e são denotadas por (x^μ, q^i) de modo que os elementos de Z_e podem ser escritos de forma única como

$$z = p_i^\mu dq^i \wedge d^{m-1}x_\mu + p d^m x ,$$

onde $d^{m-1}x_\mu = i_{\partial_\mu} d^m x$. Assim as coordenadas nas fibras de Z são (p_i^μ, p) , tal como nas fibras de $J^{1\oplus}E$. Para ver que Z é idêntico a $J^{1\oplus}E$ basta construir o isomorfismo de fibrados vetoriais $\Phi : Z \rightarrow J^{1\oplus}E$,

$$\Phi(z) \cdot j = j^* z \in \wedge^m T_x^* M ,$$

onde $z \in Z_e$, $j \in J_e^1 E$ e $x = \pi(e)$. Como

$$j^*(p_i^\mu dq^i \wedge d^{m-1}x_\mu + p d^m x) = (p_i^\mu q_\mu^i + p) d^m x$$

então a expressão local de Φ é obtida igualando as coordenadas nas fibras de Z e $J^{1\oplus}E$.

Tal como no fibrado cotangente, existe uma m -forma canônica em Λ dada por

$$\theta_\Lambda(z)(v_1, \dots, v_m) = z(T\xi \cdot v_1, \dots, T\xi \cdot v_m) = \xi^* z(v_1, \dots, v_m) ,$$

onde $z \in \Lambda$ e $v_1, \dots, v_m \in T_z \Lambda$. Aplicando a derivada exterior, $\omega_\Lambda = -d\theta_\Lambda$, obtemos a $(m+1)$ -forma canônica de Λ e puxando as formas θ_Λ e ω_Λ pela inclusão natural $i_Z : Z \rightarrow \Lambda$ obtemos a m -forma canônica de Z , $\theta = i_Z^* \theta_\Lambda$, bem como a $(m+1)$ -forma canônica, $\omega = -d\theta = i_Z^* \omega_\Lambda$. Nas coordenadas (x^μ, q^i, p_i^μ) a forma θ é descrita por

$$\theta = p_i^\mu dq^i \wedge d^{m-1}x_\mu + p d^m x$$

e portanto

$$\omega = dq^i \wedge dp_i^\mu \wedge d^{m-1}x_\mu - dp \wedge d^m x .$$

Puxando a m -forma θ de $Z \cong J^{1\oplus}E$ pela transformação de Legendre, $\theta_{\mathcal{L}} = (\mathbb{F}\mathcal{L})^* \theta$, obtemos a forma de Cartan associada ao lagrangiano $\mathcal{L}$. A expressão da transformação de Legendre em coordenadas implica que

$$\theta_{\mathcal{L}} = \frac{\partial L}{\partial q_\mu^i} dq^i \wedge d^{m-1}x_\mu + \left(L - \frac{\partial L}{\partial q_\mu^i} q_\mu^i \right) d^m x .$$

A derivada exterior da forma de Cartan é $\omega_{\mathcal{L}} = -d\theta_{\mathcal{L}} = (\mathbb{F}\mathcal{L})^* \omega$, isto é,

$$\omega_{\mathcal{L}} = dq^i \wedge d\left(\frac{\partial L}{\partial q_\mu^i}\right) \wedge d^{m-1}x_\mu - d\left(L - \frac{\partial L}{\partial q_\mu^i} q_\mu^i\right) \wedge d^m x .$$

Teorema 3.2 *Dado o lagrangiano $\mathcal{L} : J^1 E \rightarrow \wedge^m T^* M$ a expressão*

$$\mathbb{E}(j^2 \phi) \cdot V = (j^1 \phi)^*(i_{J^1 V} \omega_{\mathcal{L}})$$

define o morfismo de Euler-Lagrange $\mathbb{E} : J^2 E \rightarrow V^ E \otimes \wedge^m T^* M$, tal que $\mathbb{E}(j^2 \phi)$ é nula se e somente se ϕ é uma seção estacionária do funcional de ação.*

DEMONSTRAÇÃO: Para cada campo vertical $V = V^i \partial_i$ de E , onde $\partial_i = \partial/\partial q^i$, a fórmula

$$(j^1\phi)^*(i_{J^1V}\omega_{\mathcal{L}}) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^\mu \partial q_\mu^i} V^i d^m x + \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial q_\mu^i} V^i \partial_\mu \phi^j d^m x + \frac{\partial^2 L}{\partial q_\nu^j \partial q_\mu^i} V^i \partial_{\mu\nu} \phi^j d^m x - \frac{\partial L}{\partial q^i} V^i d^m x$$

mostra que $\mathfrak{E}$ depende da seção local ϕ através da classe de equivalência $j^2\phi$. Como

$$\mathfrak{E}(j^2\phi) = \left(\partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial q_\mu^i} (j^1\phi) \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} (j^1\phi) \right) dq^i \otimes d^m x$$

então $\mathfrak{E}(j^2\phi)$ é a seção nula se e somente se ϕ satisfaz as equações de Euler-Lagrange.

3.4 Hamiltoniano e Morfismo de Hamilton

A existência de uma projeção natural do espaço das aplicações afins para o espaço das aplicações lineares induz uma projeção $\mu : J^{1\oplus}E \rightarrow M^1E$, onde

$$M^1E = L(\overrightarrow{J^1E}, \wedge^m T^*M)$$

é o *fibrado dos momentos de primeira ordem*. Compondo μ com a transformação de Legendre é possível definir a aplicação $\overrightarrow{\mathbb{F}\mathcal{L}} : J^1E \rightarrow M^1E$, idêntica a derivada vertical de $\mathcal{L}$. Quando $\overrightarrow{\mathbb{F}\mathcal{L}}$ é um difeomorfismo $\mathcal{L}$ é dito *hiperregular*; neste caso o *hamiltoniano* é a seção de μ dada por

$$\mathcal{H} = \mathbb{F}\mathcal{L} \circ (\overrightarrow{\mathbb{F}\mathcal{L}})^{-1}.$$

É fácil ver que as funções de transição de $J^{1\oplus}E$ sobre E transformam $\mu : J^{1\oplus}E \rightarrow M^1E$ em um fibrado afim em linha e que $\mathcal{H}$ é descrito em coordenadas por

$$H = L - \frac{\partial L}{\partial q_\mu^i} q_\mu^i.$$

Em geral qualquer seção $\mathcal{H}$ de μ é chamada de *hamiltoniano* pois induz em M^1E a m -forma $\theta_{\mathcal{H}} = \mathcal{H}^*\theta$ bem como a $(m+1)$ -forma $\omega_{\mathcal{H}} = \mathcal{H}^*\omega$.

Teorema 3.3 Para cada $\mathcal{H}$ seção de $\mu : J^{1\oplus}E \rightarrow M^1E$ a fórmula

$$\mathfrak{H}(j^1\phi) \cdot V = \phi^*(i_V \omega_{\mathcal{H}})$$

define o *morfismo de Hamilton* $\mathfrak{H} : J^1M^1E \rightarrow V^*M^1E \otimes \wedge^m T^*M$, equivalente ao morfismo de Euler-Lagrange no caso hiperregular.

DEMONSTRAÇÃO: Dado $V = V^i \partial_i + V_i^\mu \partial_\mu^i$ campo vertical de $M^1 E$, com $\partial_\mu^i = \partial / \partial p_i^\mu$, vale

$$\phi^*(i_V \omega_{\mathcal{H}}) = \frac{\partial H}{\partial q^i} V^i d^m x - \partial_\mu \phi_i^\mu V^i d^m x + \frac{\partial H}{\partial p_i^\mu} V_i^\mu d^m x + \partial_\mu \phi^i V_i^\mu d^m x$$

para qualquer seção local $\phi(x) = (x^\mu, \phi^i(x), \phi_i^\mu(x))$ de $M^1 E$ sobre M , de modo que $\mathfrak{H}$ depende apenas da classe de equivalência $j^1 \phi$. Quando $\mathcal{L}$ é hiperregular é fácil verificar, usando a expressão local

$$\mathfrak{H}(j^1 \phi) = \left(\frac{\partial H}{\partial q^i}(\phi) - \partial_\mu \phi_i^\mu \right) dq^i \otimes d^m x + \left(\frac{\partial H}{\partial p_i^\mu}(\phi) + \partial_\mu \phi^i \right) dp_i^\mu \otimes d^m x$$

e a fórmula em coordenadas para $\mathcal{H}$, que σ satisfaz as equações de Euler-Lagrange se e somente se $\phi = \vec{\mathbb{F}}\mathcal{L} \circ j^1 \sigma$ anula $\mathfrak{H}$. $\square$

3.5 Transformação Inversa de Legendre

Para finalizar a extensão dos conceitos do formalismo simplético para a teoria dos campos é necessário considerar a transformação responsável pela definição do lagrangiano a partir do hamiltoniano. Dada uma seção $\mathcal{H} : M^1 E \rightarrow J^{1\oplus} E$ de μ sua *transformação inversa de Legendre* é o morfismo $\mathbb{F}\mathcal{H} : M^1 E \rightarrow J^1 E$ definido por meio da derivada de $\mathcal{H}$ restrita às fibras de $M^1 E$. De fato, para cada $e \in E$ e $h \in M_e^1 E$, a derivada

$$\mathbb{F}\mathcal{H}(h) = T_h \mathcal{H}|_{M_e^1 E}$$

é uma cisão da sequência exata

$$0 \longrightarrow \wedge^m T_x^* M \xrightarrow{i} J_e^{1\oplus} E \xrightarrow{l} M_e^1 E \longrightarrow 0$$

onde $x = \pi(e)$. Como $\wedge^m T_x^* M$ é um espaço vetorial unidimensional há um isomorfismo natural entre o conjunto das cisões e o espaço afim $J_e^1 E$, de modo que $\mathbb{F}\mathcal{H}(h) \in J_e^1 E$. Em coordenadas,

$$q_\mu^i = - \frac{\partial H}{\partial p_i^\mu},$$

com o sinal negativo devido ao isomorfismo linear subjacente. Quando $\mathbb{F}\mathcal{H}$ é inversível $\mathcal{H}$ é chamado de *hiperregular* e para cada $j \in J^1 E$

$$\mathcal{L}(j) = \mathcal{H}((\mathbb{F}\mathcal{H})^{-1}(j))(j)$$

determina o lagrangiano $\mathcal{L} : J^1 E \rightarrow \wedge^m T^* M$. Representando j por q_μ^i e lembrando que

$$\mathcal{L} = L(x^\mu, q^i, q_\mu^i) d^m x$$

localmente, segue que

$$L = H + p_i^\mu q_\mu^i$$

e portanto

$$L = H - \frac{\partial H}{\partial p_i^\mu} p_i^\mu .$$

Finalmente, um cálculo trivial mostra que $\vec{\mathbb{F}}\mathcal{L} = -(\mathbb{F}\mathcal{H})^{-1}$.

3.6 Referências

As principais referências deste capítulo são [17], [19] e [18]. Elas contém a maior parte das construções multisimpléticas, definindo inclusive a forma de Cartan. A última também contém um tratamento detalhado de diversos exemplos, como a gravidade, o eletromagnetismo e a teoria topológica de Chern-Simons. O morfismo de Euler-Lagrange é abordado em [33] e o formalismo hamiltoniano é tratado em [4]. A única novidade desenvolvida neste capítulo é a definição do lagrangiano a partir de um hamiltoniano hiperregular com o auxílio da transformação inversa de Legendre.

Capítulo 4

Espaço de Fase Covariante

4.1 Espaço das Configurações

Inicialmente, gostaríamos de lembrar a relação que existe numa variedade simplética N entre a forma simplética ω e o colchete de Poisson. A cada $f \in C^\infty(N)$ é associado um campo vetorial hamiltoniano X_f por

$$i_{X_f}\omega = df ,$$

de modo que o colchete de poisson entre duas funções $f, g \in C^\infty(N)$ é a função

$$\{f, g\} = -i_{X_f}i_{X_g}\omega .$$

O objetivo desta seção, e ao mesmo tempo o resultado principal desta tese, é demonstrar que uma construção análoga para o espaço de fase covariante, que tem dimensão infinita, relaciona a forma simplética de Witten e o colchete de Peierls.

O *espaço de fase covariante*, denotado por $\mathcal{E}$, é o conjunto das soluções das equações de movimento. No contexto lagrangiano os elementos de $\mathcal{E}$ são os pontos estacionários do funcional de ação, dentro do *espaço das configurações*, formado pelas seções do fibrado dos campos E sobre M e aqui denotado por $\mathcal{F}$. Pelo menos formalmente, é possível dotar $\mathcal{F}$ de uma estrutura diferenciável tal que o espaço tangente a cada seção ϕ é formado pelas seções do fibrado vetorial $V_\phi E = \phi^*VE$ sobre M :

$$T_\phi\mathcal{F} = \Gamma^\infty(V_\phi E) .$$

O espaço cotangente a cada seção ϕ será então formado pelas seções do fibrado vetorial $V_\phi^*E = \phi^*V^*E \otimes \wedge^m T^*M$ sobre M :

$$T_\phi^*\mathcal{F} = \Gamma^\infty(V_\phi^*E) ,$$

sendo o pareamento entre $\Gamma^\infty(V_\phi E)$ e $\Gamma^\infty(V_\phi^\otimes E)$ dado por contração e subsequente integração da forma resultante sobre M .

Seja agora $S : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional diferenciável: $S \in C^\infty(\mathcal{F})$. Sua *derivada funcional* no ponto ϕ é definida como a seção $\delta S / \delta \phi$ de $V_\phi^\otimes E$ que satisfaz

$$D_\phi S(\delta \phi) = \int_M d^m x \frac{\delta S}{\delta \phi^i}(x) \delta \phi^i(x)$$

para toda seção $\delta \phi$ de $V_\phi E$ que é variação de suporte compacto de ϕ , isto é, $\delta \phi = \partial \phi_\lambda / \partial \lambda|_{\lambda=0}$ onde $\phi = \phi_\lambda|_{\lambda=0}$ e

$$D_\phi S(\delta \phi) = \frac{d}{d\lambda} S(\phi_\lambda) \Big|_{\lambda=0}$$

é a *derivada de Fréchet* de S na direção $\delta \phi$. Em coordenadas locais adaptadas,

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = \frac{\delta S}{\delta \phi^i} dq^i \otimes d^m x.$$

Quando S é definido por meio de um lagrangiano $\mathcal{L} : J^1 E \rightarrow \wedge^m T^* M$, a aplicação que leva ϕ em $-\delta S / \delta \phi$ é o operador de Euler-Lagrange $\mathfrak{D} : \Gamma^\infty(E) \rightarrow \Gamma^\infty(V^* E \otimes \wedge^m T^* M)$, fruto da composição da operação de prolongamento com o morfismo de Euler-Lagrange $\mathfrak{E} : J^2 E \rightarrow V^* E \otimes \wedge^m T^* M$. Vale observar que $\mathfrak{D}$ é um operador entre espaços de seções de fibrados sobre M tal que, em coordenadas locais adaptadas,

$$\phi(x) = (x^\mu, \phi^i(x))$$

implica

$$\mathfrak{D}(\phi)(x) = (x^\mu, \phi^i(x), \delta^* \phi_i(x))$$

com

$$\delta^* \phi_i = \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial q_\mu^i}(j^1 \phi) \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i}(j^1 \phi).$$

De forma análoga, a segunda derivada funcional de S em ϕ é a seção $\delta^2 S / \delta \phi^i \delta \phi^j$ do produto tensorial externo $V_\phi^\otimes E \boxtimes V_\phi^\otimes E$ sobre $M \times M$ que satisfaz

$$D_\phi^2 S(\delta_1 \phi, \delta_2 \phi) = \int_M d^m x \int_M d^m y \frac{\delta^2 S}{\delta \phi^i \delta \phi^j}(x, y) \delta_1 \phi^i(x) \delta_2 \phi^j(y)$$

para quaisquer

$$\delta_1 \phi = \frac{\partial \phi_{\lambda_1, \lambda_2=0}}{\partial \lambda_1} \Big|_{\lambda_1=0}, \quad \delta_2 \phi = \frac{\partial \phi_{\lambda_1=0, \lambda_2}}{\partial \lambda_2} \Big|_{\lambda_2=0}$$

em $T_\phi \mathcal{F}$, sendo $\phi_{\lambda_1, \lambda_2}$ uma família a dois parâmetros de seções de E e

$$D_\phi^2 S(\delta_1 \phi, \delta_2 \phi) = \frac{\partial^2 S(\phi_{\lambda_1, \lambda_2})}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \Big|_{\lambda_1, \lambda_2=0}.$$

4.2 Operador de Jacobi

Para caracterizar $T_\phi \mathcal{E}$ quando $\mathcal{E}$ é determinado por um lagrangiano $\mathcal{L} : J^1 E \rightarrow \wedge^m T^* M$, é preciso linearizar o operador de Euler-Lagrange, em torno de uma solução dada $\phi \in \mathcal{E}$, obtendo o operador linear de Jacobi $\mathfrak{J}_\phi : \Gamma^\infty(V_\phi E) \rightarrow \Gamma^\infty(V_\phi^\oplus E)$, cujo núcleo será identificado com o subespaço $T_\phi \mathcal{E}$ de $T_\phi \mathcal{F}$. Para tanto, é necessário considerar uma variação qualquer ϕ_λ em torno de ϕ e calcular $\mathfrak{D}(\phi_\lambda)$, seção de $V_{\phi_\lambda}^\oplus E$, para cada λ . Já que $\phi_\lambda|_{\lambda=0} = \phi$ é um ponto estacionário, então $\mathfrak{D}(\phi_\lambda)|_{\lambda=0}$ é a seção nula de $V_\phi^\oplus E$. Assim, em coordenadas locais adaptadas, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathfrak{D}(\phi_\lambda) \Big|_{\lambda=0} &= \delta \phi^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \left(\partial_\mu \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial q_\mu^i} (j^1 \phi) \delta \phi^j + \frac{\partial^2 L}{\partial q_\nu^j \partial q_\mu^i} (j^1 \phi) \partial_\nu \delta \phi^j \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial q^i} (j^1 \phi) \delta \phi^j - \frac{\partial^2 L}{\partial q_\nu^j \partial q^i} (j^1 \phi) \partial_\nu \delta \phi^j \right) dq^i \otimes dx^\mu . \end{aligned}$$

Para mostrar que a projeção desta expressão sobre o segundo termo possui um significado global é necessário fazer uma breve digressão: Considere um fibrado vetorial F sobre E , com projeção $\rho : F \rightarrow E$, que também é um fibrado (mas geralmente não um fibrado vetorial) sobre M , com projeção $\pi \circ \rho : F \rightarrow M$. Usando a seção nula $0 : E \rightarrow F$ e considerando o espaço vertical $V_{0(e)} F = \ker T_{0(e)}(\pi \circ \rho)$ em relação a M , é possível definir a aplicação linear

$$i : F_e \rightarrow V_{0(e)} F \quad , \quad v \mapsto \frac{d}{d\lambda} (0(e) + \lambda v) \Big|_{\lambda=0}$$

uma vez que

$$T_{0(e)}(\pi \circ \rho) \left(\frac{d}{d\lambda} (0(e) + \lambda v) \Big|_{\lambda=0} \right) = \frac{d}{d\lambda} (\pi \circ \rho (0(e) + \lambda v)) \Big|_{\lambda=0} = 0 .$$

O mesmo cálculo mostra que $\text{im } i \subset \ker T_{0(e)} \rho$. Como i é injetora e as dimensões de F_e e $\ker T_{0(e)} \rho$ são iguais então $\text{im } i = \ker T_{0(e)} \rho$. Assim, para cada $e \in E$

$$0 \longrightarrow F_e \xrightarrow{i} V_{0(e)} F \xrightarrow{T_{0(e)} \rho} V_e E \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata de espaços vetoriais. Já que

$$T_{0(e)} \rho \circ T_e 0 = \text{id}_{V_e E}$$

então a seção nula de F determina uma cisão e portanto especifica uma aplicação linear $\sigma : V_{0(e)} F \rightarrow F_e$ que também cinde a sequência exata.

Isso posto, podemos completar a definição de $\mathfrak{I}_\phi$, escolhendo $F = V^*E \otimes \wedge^m T^*M$ e notando que

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \mathfrak{D}(\phi_\lambda)(x) \right|_{\lambda=0}$$

pertence a $V_{0(\phi(x))}(V^*E \otimes \wedge^m T^*M)$ e sua projeção em $V_{\phi(x)}E$ é

$$\delta\phi(x) = \left. \frac{d}{d\lambda} \phi_\lambda(x) \right|_{\lambda=0}$$

de modo que

$$\mathfrak{I}_\phi(\delta\phi) = \sigma\left(\left. \frac{\partial}{\partial\lambda} \mathfrak{D}(\phi_\lambda) \right|_{\lambda=0}\right)$$

é uma seção de $V_\phi^\oplus E$ que depende apenas de ϕ e $\delta\phi$. Em coordenadas locais adaptadas,

$$\phi(x) = (x^\mu, \phi^i(x)) \quad , \quad \delta\phi(x) = (x^\mu, \delta\phi^i(x))$$

implica

$$\mathfrak{I}_\phi(\delta\phi)(x) = (x^\mu, \delta^* \phi_i(x))$$

com

$$\begin{aligned} \delta^* \phi_i &= \frac{\partial^2 L}{\partial q_\nu^j \partial q_\mu^i} (j^1 \phi) \partial_\mu \partial_\nu \delta\phi^j \\ &+ \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial q_\nu^i} (j^1 \phi) + \partial_\mu \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q_\nu^j \partial q_\mu^i} (j^1 \phi) \right) - \frac{\partial^2 L}{\partial q_\nu^j \partial q^i} (j^1 \phi) \right) \partial_\nu \delta\phi^j \\ &+ \left(\partial_\mu \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial q_\mu^i} (j^1 \phi) \right) - \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial q^i} (j^1 \phi) \right) \delta\phi^j. \end{aligned}$$

Lembrando que

$$D_\phi \frac{\delta S}{\delta \phi^i}(x)(\delta\phi) = \int_M d^m y \frac{\delta^2 S}{\delta \phi^i \delta \phi^j}(x, y) \delta\phi^j(y) ,$$

segue que $\mathfrak{I}_\phi(\delta\phi) = \delta^* \phi$ com

$$\delta^* \phi_i(x) = - \int_M d^m y \frac{\delta^2 S}{\delta \phi^i \delta \phi^j}(x, y) \delta\phi^j(y) ,$$

mostrando que a segunda derivada funcional da ação é o operador de Jacobi.

4.3 Colchete de Peierls

Nas teorias relativísticas com lagrangiano regular o operador de Jacobi $\mathfrak{I}_\phi$ em torno de qualquer $\phi \in \mathcal{E}$ é hiperbólico. Um exemplo típico desta situação é o modelo sigma, onde E é o fibrado trivial $M \times Q$, sendo M a base e Q a fibra, com métricas lorentziana g e riemanniana h , respectivamente. Como $L = 1/2\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}h_{ij}q_\mu^i q_\nu^j$ então os coeficientes dos termos do operador de Jacobi com grau mais elevado são $\partial^2 L / \partial q_\nu^j \partial q_\mu^i = 1/2\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}h_{ij}$, mostrando sua natureza hiperbólica.

Neste contexto é possível mostrar a existência e a unicidade das funções de Green retardada (G_ϕ^-) e avançada (G_ϕ^+) tais que, para quaisquer $x, y \in M$, $G_\phi^-(x, y) = 0$ se $x \notin J^+(y)$ e $G_\phi^+(x, y) = 0$ se $x \notin J^-(y)$, onde $J^+(y)$ denota o cone futuro e $J^-(y)$ o cone passado de y . Ambas são soluções das equações de Jacobi inhomogêneas

$$\mathfrak{I}_{\phi,x} G_\phi^\pm(x, y) = \delta(x, y) \quad , \quad \mathfrak{I}_{\phi,y} G_\phi^\pm(x, y) = \delta(x, y) \quad ,$$

ou mais explicitamente,

$$(\mathfrak{I}_{\phi,x} G_\phi^\pm)_i^j(x, y) = \delta_i^j \delta(x, y) \quad , \quad (\mathfrak{I}_{\phi,y} G_\phi^\pm)_i^j(x, y) = \delta_i^j \delta(x, y) \quad ,$$

onde $\mathfrak{I}_{\phi,z}$ é o operador de Jacobi com respeito à variável z , e satisfazem

$$G_\phi^{\pm ji}(y, x) = G_\phi^{\mp ij}(x, y) \quad .$$

Assim, as soluções retardada e avançada da equação de Jacobi inhomogênea associada a $A \in C^\infty(\mathcal{F})$,

$$\mathfrak{I}_\phi(\delta_A^\pm \phi) = \frac{\delta A}{\delta \phi} \quad ,$$

são dadas por

$$\delta_A^\pm \phi^i(x) = \int_M d^m y \, G_\phi^{\pm ij}(x, y) \frac{\delta A}{\delta \phi^j}(y) \quad .$$

Agora é fácil definir, para cada funcional $A \in C^\infty(\mathcal{F})$, um campo vetorial hamiltoniano sobre $\mathcal{E}$, que associa a cada solução $\phi \in \mathcal{E}$ das equações de Euler-Lagrange uma solução $\delta_A \phi \in T_\phi \mathcal{E}$ das equações de Jacobi homogêneas. De fato, basta introduzir o propagador causal do operador $\mathfrak{I}_\phi$, isto é,

$$G_\phi = G_\phi^- - G_\phi^+$$

e definir

$$\delta_A \phi^i(x) = \int_M d^m y \, G_\phi^{ij}(x, y) \frac{\delta A}{\delta \phi^j}(y) \quad ,$$

uma vez que

$$\mathfrak{I}_\phi(\delta_A \phi) = \mathfrak{I}_\phi(\delta_A^- \phi) - \mathfrak{I}_\phi(\delta_A^+ \phi) = \frac{\delta A}{\delta \phi} - \frac{\delta A}{\delta \phi} = 0 \quad .$$

Através de G também é possível definir o *colchete de Peierls* $\{A, B\} \in C^\infty(\mathcal{E})$ entre dois funcionais $A, B \in C^\infty(\mathcal{E})$ segundo DeWitt:

$$\{A, B\}(\phi) = \int_M d^m x \int_M d^m y \frac{\delta A}{\delta \phi^i}(x) G_\phi^{ij}(x, y) \frac{\delta B}{\delta \phi^j}(y) .$$

Essa definição requer estender A e B a funcionais definidos sobre $\mathcal{F}$ e não apenas sobre $\mathcal{E}$ e portanto é necessário verificar que o resultado não depende da escolha da extensão. É possível mostrar que a diferença entre dois elementos de $C^\infty(\mathcal{F})$ que coincidem em $\mathcal{E}$ é um funcional

$$C(\phi) = \int_M d^m x c_\phi^i(x) \frac{\delta S}{\delta \phi^i}(x) ,$$

onde $c_\phi \in T_\phi \mathcal{F}$ para cada $\phi \in \mathcal{F}$ e S é o funcional de ação. Usando que

$$(\mathfrak{I}_{\phi, x} G_\phi^\pm)_i^j(x, y) = - \int_M d^m z \frac{\delta^2 S}{\delta \phi^i \delta \phi^k}(x, z) G_\phi^{\pm kj}(z, y) ,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \delta_C^\pm \phi^i(x) &= \int_M d^m y G_\phi^{\pm ij}(x, y) \frac{\delta C}{\delta \phi^j}(y) = \int_M d^m y G_\phi^{\pm ij}(x, y) \int_M d^m z c_\phi^k(z) \frac{\delta^2 S}{\delta \phi^j \delta \phi^k}(y, z) \\ &= \int_M d^m z c_\phi^k(z) \int_M d^m y \frac{\delta^2 S}{\delta \phi^k \delta \phi^j}(z, y) G_\phi^{\mp ji}(y, x) \\ &= - \int_M d^m z c_\phi^k(z) (\mathfrak{I}_{\phi, z} G^\mp)_k^i(z, x) = - \int_M d^m z c_\phi^k(z) \delta_k^i \delta(z, x) = -c_\phi^i(x) . \end{aligned}$$

Logo, para qualquer $A \in C^\infty(\mathcal{F})$, $\{C, A\} = 0$, mostrando a independência do colchete de Peierls com respeito as extensões necessárias para sua definição.

A importância do colchete de Peierls reside no fato de que ele constitui a generalização covariante do colchete de Poisson, satisfazendo todas as propriedades estruturais exigidas: bilinearidade, antisimetria, identidade de Jacobi e regra de Leibniz. Assim, para quaisquer $A, B, C \in C^\infty(\mathcal{E})$, vale

$$\begin{aligned} \{\lambda A + \mu B, C\} &= \lambda \{A, C\} + \mu \{B, C\} , \\ \{A, B\} + \{B, A\} &= 0 , \\ \{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} &= 0 , \\ \{A, BC\} &= \{A, B\}C + \{A, C\}B , \end{aligned}$$

sendo que estas propriedades são consequências da definição e das propriedades de G_ϕ .

4.4 Forma Simplética

Como antes, vamos considerar apenas as teorias com lagrangiano regular. Com o auxílio de uma hipersuperfície do tipo espaço $\Sigma \subset M$ e da forma de Cartan

$$\theta_{\mathcal{L}} = \frac{\partial L}{\partial q_{\mu}^i} dq^i \wedge d^{m-1}x_{\mu} + \left(L - \frac{\partial L}{\partial q_{\mu}^i} q_{\mu}^i \right) d^m x$$

determinada por $\mathcal{L}$ é possível definir uma 1-forma canônica Θ em $\mathcal{F}$,

$$\Theta_{\phi}(\delta\phi) = \int_{\Sigma} i_{\Sigma}^*(j^1\phi)^* \theta_{\mathcal{L}}(\delta j^1\phi),$$

onde $i_{\Sigma} : \Sigma \rightarrow M$ é a inclusão e $\delta\phi \in T_{\phi}\mathcal{F}$. Em coordenadas locais adaptadas, temos

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \phi_{\lambda} \right|_{\lambda=0} = \delta\phi^i \frac{\partial}{\partial q^i}, \\ \delta j^1\phi &= \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} j^1\phi_{\lambda} \right|_{\lambda=0} = \delta\phi^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \partial_{\mu} \delta\phi^i \frac{\partial}{\partial q_{\mu}^i}, \end{aligned}$$

de modo que

$$\Theta_{\phi}(\delta\phi) = \int_{\Sigma} d\Sigma_{\mu} \frac{\partial L}{\partial q_{\mu}^i} \delta\phi^i.$$

Por sua vez, é fácil ver que $\Omega = -d\Theta$ é a 2-forma

$$\Omega_{\phi}(\delta_1\phi, \delta_2\phi) = \int_{\Sigma} i_{\Sigma}^*(j^1\phi)^* \omega_{\mathcal{L}}(\delta_1 j^1\phi, \delta_2 j^1\phi),$$

onde $\delta_1\phi, \delta_2\phi \in T_{\phi}\mathcal{F}$. Como $dx^{\mu} \wedge d^{m-1}x_{\mu} = d^m x$ então

$$\begin{aligned} \omega_{\mathcal{L}} &= \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial q_{\mu}^i} dq^i \wedge dq^j + \frac{\partial^2 L}{\partial q_{\nu}^j \partial q_{\mu}^i} dq^i \wedge dq_{\nu}^j \right) \wedge d^{m-1}x_{\mu} \\ &\quad + \frac{\partial^2 L}{\partial x^{\mu} \partial q_{\mu}^i} dq^i \wedge d^m x - d \left(L - \frac{\partial L}{\partial q_{\mu}^i} q_{\mu}^i \right) \wedge d^m x, \end{aligned}$$

de modo que

$$\Omega_{\phi}(\delta_1\phi, \delta_2\phi) = \int_{\Sigma} d\Sigma_{\mu} J^{\mu}(\delta_1\phi, \delta_2\phi),$$

onde, em coordenadas locais adaptadas,

$$J^{\mu}(\delta_1\phi, \delta_2\phi) = \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial q_{\mu}^i} (\delta_1\phi^j \delta_2\phi^i - \delta_2\phi^j \delta_1\phi^i) + \frac{\partial^2 L}{\partial q_{\nu}^j \partial q_{\mu}^i} (\delta_2\phi^i \partial_{\nu} \delta_1\phi^j - \delta_1\phi^i \partial_{\nu} \delta_2\phi^j)$$

é chamada de corrente simplética de Witten. Reagrupando $J^\mu(\delta_1\phi, \delta_2\phi)$ como

$$J^\mu(\delta_1\phi, \delta_2\phi) = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial q_\mu^i} \delta_1\phi^j + \frac{\partial^2 L}{\partial q_\nu^j \partial q_\mu^i} \partial_\nu \delta_1\phi^j \right) \delta_2\phi^i - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial q_\mu^i} \delta_2\phi^j + \frac{\partial^2 L}{\partial q_\nu^j \partial q_\mu^i} \partial_\nu \delta_2\phi^j \right) \delta_1\phi^i$$

segue que

$$\begin{aligned} \partial_\mu J^\mu(\delta_1\phi, \delta_2\phi) &= \partial_\mu \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial q_\mu^i} \delta_1\phi^j + \frac{\partial^2 L}{\partial q_\nu^j \partial q_\mu^i} \partial_\nu \delta_1\phi^j \right) \delta_2\phi^i \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial q_\mu^i} \delta_1\phi^j + \frac{\partial^2 L}{\partial q_\nu^j \partial q_\mu^i} \partial_\nu \delta_1\phi^j \right) \partial_\mu \delta_2\phi^i \\ &\quad - \partial_\mu \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial q_\mu^i} \delta_2\phi^j + \frac{\partial^2 L}{\partial q_\nu^j \partial q_\mu^i} \partial_\nu \delta_2\phi^j \right) \delta_1\phi^i \\ &\quad - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial q_\mu^i} \delta_2\phi^j + \frac{\partial^2 L}{\partial q_\nu^j \partial q_\mu^i} \partial_\nu \delta_2\phi^j \right) \partial_\mu \delta_1\phi^i . \end{aligned}$$

Se $\phi \in \mathcal{E}$ e os vetores $\delta_1\phi$ e $\delta_2\phi$ são soluções da equação de Jacobi homogênea

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial q_\mu^i} \delta_{1,2}\phi^j + \frac{\partial^2 L}{\partial q_\nu^j \partial q_\mu^i} \partial_\nu \delta_{1,2}\phi^j \right) - \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial q^i} \delta_{1,2}\phi^j - \frac{\partial^2 L}{\partial q_\nu^j \partial q^i} \partial_\nu \delta_{1,2}\phi^j = 0$$

então

$$\begin{aligned} \partial_\mu J^\mu(\delta_1\phi, \delta_2\phi) &= \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial q^i} \delta_1\phi^j + \frac{\partial^2 L}{\partial q_\nu^j \partial q^i} \partial_\nu \delta_1\phi^j \right) \delta_2\phi^i \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial q_\mu^i} \delta_1\phi^j + \frac{\partial^2 L}{\partial q_\nu^j \partial q_\mu^i} \partial_\nu \delta_1\phi^j \right) \partial_\mu \delta_2\phi^i \\ &\quad - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial q^i} \delta_2\phi^j + \frac{\partial^2 L}{\partial q_\nu^j \partial q^i} \partial_\nu \delta_2\phi^j \right) \delta_1\phi^i \\ &\quad - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial q_\mu^i} \delta_2\phi^j + \frac{\partial^2 L}{\partial q_\nu^j \partial q_\mu^i} \partial_\nu \delta_2\phi^j \right) \partial_\mu \delta_1\phi^i = 0 , \end{aligned}$$

de modo que em $\mathcal{E}$ a forma simplética Ω não depende da hiperfície $\Sigma \subset M$ escolhida.

Se $\phi \in \mathcal{E}$ e $\delta\phi$ é uma solução da equação de Jacobi homogênea, como antes, mas

$$\delta_A\phi = \delta_A^-\phi - \delta_A^+\phi$$

é a solução da equação de Jacobi inhomogênea associada ao funcional $A \in C^\infty(\mathcal{F})$,

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial q_\mu^i} \delta_A\phi^j + \frac{\partial^2 L}{\partial q_\nu^j \partial q_\mu^i} \partial_\nu \delta_A\phi^j \right) - \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial q^i} \delta_A\phi^j - \frac{\partial^2 L}{\partial q_\nu^j \partial q^i} \partial_\nu \delta_A\phi^j = \frac{\delta A}{\delta \phi^i} ,$$

então um cálculo idêntico ao anterior mostra que

$$\partial_\mu J^\mu(\delta_A \phi, \delta \phi) = \frac{\delta A}{\delta \phi^i} \delta \phi^i .$$

Supondo que M é globalmente hiperbólico e denotando por $-\infty$ e $+\infty$ o limite no passado e no futuro de um conjunto de hiperfícies do tipo espaço formando uma folheação de M , segue que

$$\begin{aligned} \int_\Sigma d\Sigma_\mu J^\mu(\delta_A^- \phi, \delta \phi) &= \int_{-\infty}^\Sigma d\Sigma_\mu J^\mu(\delta_A^- \phi, \delta \phi) + \int_{-\infty}^\Sigma d^m x \frac{\delta A}{\delta \phi^i} \delta \phi^i \\ \int_\Sigma d\Sigma_\mu J^\mu(\delta_A^+ \phi, \delta \phi) &= \int_{+\infty}^\Sigma d\Sigma_\mu J^\mu(\delta_A^+ \phi, \delta \phi) - \int_\Sigma^{+\infty} d^m x \frac{\delta A}{\delta \phi^i} \delta \phi^i . \end{aligned}$$

As condições de fronteira impostas sobre $G_\phi^\pm$ implicam que $\delta_A^- \phi$ se anula no limite $-\infty$, o mesmo ocorrendo com $\delta_A^+ \phi$ em relação ao limite $+\infty$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_\Sigma d\Sigma_\mu J^\mu(\delta_A \phi, \delta \phi) &= \int_\Sigma d\Sigma_\mu J^\mu(\delta_A^- \phi, \delta \phi) - \int_\Sigma d\Sigma_\mu J^\mu(\delta_A^+ \phi, \delta \phi) \\ &= \int_{-\infty}^\Sigma d^m x \frac{\delta A}{\delta \phi^i} \delta \phi^i + \int_\Sigma^{+\infty} d^m x \frac{\delta A}{\delta \phi^i} \delta \phi^i . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Omega_\phi(\delta_A \phi, \delta \phi) = \int_\Sigma d\Sigma_\mu J^\mu(\delta_A \phi, \delta \phi) = \int_M d^m x \frac{\delta A}{\delta \phi^i} \delta \phi^i ,$$

provando que $\delta_A \phi$ é o campo hamiltoniano de A com respeito a restrição de Ω a $\mathcal{E}$.

Teorema 4.1 *O colchete de Peierls é o colchete de Poisson determinado pela forma simplética de Witten no espaço de fase covariante.*

DEMONSTRAÇÃO: Para $A, B \in C^\infty(\mathcal{E})$, tal como na mecânica,

$$\{A, B\} = -i_{\delta_A \phi} i_{\delta_B \phi} \Omega = -i_{\delta_A \phi} dB ;$$

lembrando que dB é a derivada funcional de B , segue que o colchete de Poisson associado a Ω é igual ao colchete de Peierls de A e B . $\square$

4.5 Referências

Os aspectos essenciais dos operadores diferenciais e das suas linearizações são discutidos em [35]. A construção global do operador de Jacobi está em [16]. Esta referência também contém uma interessante derivação das equações de Jacobi como equações de Euler-Lagrange determinadas por um lagrangiano quadrático. Os conteúdos necessários para o estudo rigoroso das funções de Green retardada e avançada são desenvolvidos em [31], no caso de distribuições tensoriais, e em [22], no caso de distribuições em fibrados vetoriais quaisquer. O colchete de Peierls [36] é estudado em [10], [11] e [12]. O apêndice do primeiro capítulo de [23] contém os detalhes essenciais da prova de que a diferença de dois elementos de $C^\infty(\mathcal{F})$ que coincidem em $\mathcal{E}$ é a contração de um campo de $\mathcal{F}$ com o operador de Euler-Lagrange. Finalmente, a forma simplética em $\mathcal{E}$ foi definida em [7] e [44], por meio de argumentos funcionais.

Bibliografia

- [1] R. Abraham, J. Marsden and T. Ratiu: *Manifolds, Tensor Analysis and Applications*, 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin 1988.
- [2] A. Ashtekar, L. Bombelli and O. Reula: "The Covariant Phase Space of Asymptotically Flat Gravitational Fields", in: M. Francaviglia (ed.), *Mechanics, Analysis and Geometry: 200 Years After Lagrange*, pp. 417-450, North-Holland, Amsterdam 1991.
- [3] G. Barnich, M. Henneaux and C. Schomblond: "Covariante Description of the Canonical Formalism", *Phys. Rev. D* **44** (1991) R939-R941.
- [4] J. F. Cariñena, M. Crampin and L. A. Ibort: "On the Multisymplectic Formalism for First Order Field Theories", *Diff. Geom. App.* **1** (1991) 345-374.
- [5] E. Cartan: *Leçons sur les Invariants Intégraux*, Herman, Paris 1921.
- [6] C. Crnković: "Symplectic Geometry of Covariant Phase Space", *Class. Quantum Grav.* **5** (1988) 1557-1575.
- [7] C. Crnković and E. Witten: "Covariant Description of Canonical Formalism in Geometrical Theories", in: W. Israel and S. Hawking (eds.), *Three Hundred Years of Gravitation*, pp. 676-684, Cambridge 1987.
- [8] Th. De Donder: *Théorie Invariant du Calcul des Variations*, Gauthier-Villars, Paris 1935.
- [9] B. DeWitt: "Invariant Commutators for the Quantized Gravitational Field", *Phys. Rev. Lett.* **4** (1960) 317-320.
- [10] B. DeWitt: *Supermanifolds*, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge 1992.
- [11] B. DeWitt: "Dynamical Theory of Groups and Fields", in: B. DeWitt and C. DeWitt (eds.), *Relativity, Groups and Topology, 1963 Les Houches Lectures*, pp. 585-820, Gordon and Breach, New York 1964.

- [12] B. DeWitt: "The Spacetime Approach to Quantum Field Theory", in: B. DeWitt and R. Stora (eds.), *Relativity, Groups and Topology II, 1983 Les Houches Lectures*, pp. 382-738, Elsevier, Amsterdam 1984.
- [13] P. L. Garcia: "The Poincaré-Cartan Invariant in the Calculus of Variations", *Symp. Math.* **14** (1974) 219-246.
- [14] P. L. Garcia: "Tangent Structure of Yang-Mills Equations and Hodge Theory", *Lect. Not. in Math.* **836**, Springer-Verlag, Berlin 1979.
- [15] G. Giachetta, L. Mangiarotti and G. Sardanashvily: *New Lagrangian and Hamiltonian Methods in Field Theory*, Singapore, World Scientific 1997.
- [16] H. Goldschmidt and S. Sternberg: "The Hamilton-Cartan Formalism in the Calculus of Variations", *Ann.Inst.Fourier* **23** (1973) 203-267.
- [17] M. J. Gotay: "A Multisymplectic Framework for Classical Field Theory and the Calculus of Variations I. Covariant Hamiltonian Formalism", in: M. Francaviglia (ed.), *Mechanics, Analysis and Geometry: 200 Years After Lagrange*, pp. 203-235, North Holland, Amsterdam 1991.
- [18] M. J. Gotay, J. A. Isenberg, J. E. Marsden, R. Montgomery, J. Śniatycki and P. B. Yaskin: "Momentum Maps and Classical Relativistic Fields I", preprint, physics/9801019.
- [19] M. J. Gotay and J. E. Marsden: "Stress-Energy-Momentum Tensors and the Belinfante-Rosenfeld Formula", *Contemp. Math.* **132** (1992) 367-392.
- [20] W. H. Greub: *Linear Algebra*, 3rd edition, Springer-Verlag, Berlin 1967.
- [21] V. Guillemin and S. Sternberg: *Geometric Asymptotics*, AMS, Providence 1977.
- [22] P. Günther: *Huygens' Principle and Hyperbolic Equations*, Academic Press, New York 1988.
- [23] M. Henneaux and C. Teitelboim: *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press, Princeton 1992.
- [24] C. G. J. Jacobi: "Zur Theorie der Variations-Rechnung und der Differential-Gleichungen", *Jour. f. reine u. angew. Math.* **17** (1837) 68-82.
- [25] J. Kijowski and W. Szczyrba: "Multisymplectic Manifolds and the Geometrical Construction of the Poisson Brackets in the Classical Field Theory", in: J. -M. Souriau (ed.) *Géometrie Symplectique et Physique Mathématique*, pp. 347-379, C.N.R.S., Paris 1975.

- [26] J. Kijowski and W. M. Tulczyjew: *A Symplectic Framework for Field Theories*, Lect. Not. in Phys. **107**, Springer-Verlag, Berlin 1979.
- [27] I. Kolář, P. W. Michor and J. Slovák: *Natural Operations in Differential Geometry*, Springer-Verlag, Berlin 1993.
- [28] J. L. Lagrange: "Mémoire sur la Théorie des Variations des Éléments des Planètes", Mém. Cl. Sci. Math. Phys. Inst. France (1808) 1-72.
- [29] S. Lang: *Differential Manifolds*, Addison-Wesley, Reading 1972.
- [30] J. Lee and R. Wald: "Local Symmetries and Constraints", J. Math. Phys. **B 31** (1990) 725-743.
- [31] A. Lichnerowicz: *Propagateurs et Commutateurs en Relativité Générale*, Publications I.H.E.S., No. 10, 1961.
- [32] A. I. Malcev: *Fundamentos de Álgebra Lineal*, Mir, Moscou 1974.
- [33] J. E. Marsden, G. W. Patrick and S. Shkoller: "Multisymplectic Geometry, Variational Integrators and Nonlinear PDEs", Commun. Math. Phys. **199** (1998) 351-395.
- [34] V. Moncrief: "Reduction of the Yang-Mills Equations", Lect. Not. in Math. **836**, Springer-Verlag, Berlin 1979.
- [35] R. Palais: *Foundations of Non-Linear Global Analysis*, Benjamin, New York 1968.
- [36] R. E. Peierls: "The Commutation Laws of Relativistic Field Theory", Proc. Roy. Soc. (London) **A214** (1952), 143-157.
- [37] J. Pommaret: *Systems of Partial Differential Equations and Lie Pseudogroups*, Gordon and Breach, New York 1979.
- [38] S. D. Poisson, "Essai sur le Calcul des Variations", Journ. Ec. Polytechn. **8** (1809) 266-344.
- [39] A. A. M. Rodrigues: *Álgebra Linear e Geometria Euclidiana*, L.P.M., São Paulo 1966.
- [40] J. -M. Souriau: *Structure of Dynamical Systems*, Birkhäuser, Boston 1997.
- [41] R. Wald: *Quantum Field Theory in Curved Space-Time and Black-Hole Thermodynamics*, University of Chicago Press, Chicago 1994.
- [42] H. Weyl: "Geodesic Fields in the Calculus of Variations for Multiple Integrals, Ann. of Math. **36** (1935) 607-629.

- [43] N. M. J. Woodhouse: *Geometric Quantization*, 2nd edition, Oxford University Press, Oxford 1992.
- [44] G. Zuckerman: "Action Principles and Global Geometry", in: S. -T. Yau (ed.), *Mathematical Aspects of String Theory*, pp. 259-288, World Scientific, Singapore 1987.