Bifurcações de Linhas de Curvatura
em Torno de Conexões
de Pontos Umbílicos

Roberto Ferraz Barreto

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
MATEMÁTICA APLICADA

Área de Concentração: Equações Diferenciais e Sistemas Dinâmicos

Orientador: Prof. Dr. Jorge Manuel Sotomayor Tello

*Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro
da CAPES - Convênio PICD.*

Bifurcações de Linhas de Curvatura em Torno de Conexões de Pontos Umbílicos

Este exemplar corresponde à redação
final da tese, devidamente corrigida,
defendida por Roberto Ferraz Barreto
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 08 de dezembro de 2000.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Jorge Manuel Sotomayor Tello (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Antonio Carlos Asperti - IME-USP
- Prof. Dr. Carlos Teobaldo Gutiérrez Vidalon - ICMC-USP-São Carlos
- Prof. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas - ICMC-USP-São Carlos
- Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia - UFG

*Para minha esposa Josy
e minha filha Mariana.*

Agradecimentos

Nesta minha trajetória aqui no IME-USP sou eternamente grato ao Prof. Jorge Sotomayor pela orientação, incentivo e entusiasmo na elaboração deste trabalho. Ao Prof. Ronaldo Garcia do IME-UFG, pelas conversas esclarecedoras e disponibilidade durante suas visitas a este Instituto.

Aos colegas Luiz Fernando Mello, Ana Lúcia Fernandes e Marcelo Messias, companheiros de doutorado que contribuíram para que esta jornada fosse mais leve e agradável.

Aos meus pais Nelson e Risoleta e à minha irmã Marione sempre presentes.

Em especial, agradeço à minha esposa Josy pelo constante apoio e compreensão ao cuidar sozinha de nossa filha Mariana nos últimos dois anos em Belém.

Também, sou grato aos colegas do Departamento de Matemática da UFPa, por terem apoiado o meu afastamento. Em particular aos colegas Marcio Nascimento e Juaci Picanço, com os quais convivi aqui no IME, pelas conversas e solidariedade.

Roberto Ferraz Barreto.

Resumo

Nesta tese damos continuidade ao trabalho de Gutierrez e Sotomayor sobre bifurcações de codimensão um de conexões de pontos umbílicos de superfícies compactas. São estudadas bifurcações de codimensão dois de conexões de pontos umbílicos darbouxianos de tais superfícies. Encontra-se condições para que a aplicação de Poincaré relacionada às conexões umbílicas se desdobre genericamente a dois parâmetros, quando a superfície é deformada em uma vizinhança da conexão umbílica. Obtem-se um diagrama de bifurcação equivalente ao diagrama da bifurcação de Hopf de codimensão dois, para pontos de equilíbrio de campos vetoriais no plano.

Abstract

In this thesis we extend the work of Gutierrez and Sotomayor concerned with codimension one bifurcations of umbilical connections of compact surfaces. Bifurcations of codimension two of connections joining darboxian umbilical points are considered. We state conditions to guarantee that the Poincaré map related to the umbilic connections can be generically unfolded with two parameters when the surface is perturbed in a neighborhood of the umbilic connection. One obtain a bifurcation diagram equivalent to the diagram of the Hopf bifurcation of codimension two of equilibrium points of vector fields in the plane.

Sumário

Introdução	3
1 Preliminares	6
1.1 Configurações Principais	6
1.2 Estabilidade Estrutural das Configurações Principais	8
1.3 Bifurcações nas Configurações Principais	10
2 Aplicações de Retorno das Conexões Umbílicas	13
2.1 Conexão de umbílicos de tipo c_{11}	13
2.1.1 Derivadas das aplicações de transição em torno dos pontos umbílicos	13
2.2 Conexão de umbílicos de tipo c_{22}	30
2.2.1 Aplicação de retorno	30
2.3 Conexão de umbílicos de tipo c_{33}	35
2.3.1 Aplicação de retorno	35
3 Bifurcações de Codimensão 1	40
3.1 Conexão entre umbílicos de tipo c_{11}	40
3.1.1 Segunda derivada em torno dos pontos umbílicos . . .	40
3.1.2 Segunda derivada da aplicação de retorno da conexão c_{11}	46
3.1.3 Terceira derivada da aplicação de transição ao longo da conexão	47

3.2	Exemplos	56
3.2.1	Desenvolvimento assintótico da aplicação de retorno da conexão c_{11}	57
3.2.2	Desdobramento da conexão c_{11}	58
3.2.3	Diagrama de bifurcação	60
3.3	Conexão de umbílicos de tipo c_{22}	62
3.3.1	Desdobramento da conexão c_{22}	62
3.3.2	Diagrama de bifurcação	64
3.4	Conexão de umbílicos de tipo c_{33}	65
3.4.1	Desdobramento da conexão c_{33}	65
3.4.2	Diagrama de bifurcação	67
4	Bifurcações de codimensão 2	68
4.1	Conexão de umbílicos de tipo c_{11}	68
4.1.1	Desdobramento da conexão c_{11}	69
4.1.2	Diagrama de bifurcação	71
4.2	Conexão de umbílicos de tipo c_{22}	73
4.2.1	Desenvolvimento assintótico do retorno	73
4.2.2	Desdobramento da conexão c_{22}	75
4.2.3	Diagrama de bifurcação	77
4.3	Conexão de umbílicos de tipo c_{33}	78
4.3.1	Diagrama de bifurcação	79
	Conclusão	80
	Referências Bibliográficas	81

Introdução

O estudo da configuração principal de uma superfície $\mathbb{R}^3$, isto é, da partição produzida por seus pontos umbílicos e linhas de curvatura, mereceu a atenção inicial de matemáticos como Monge e Dupin, ao estudarem a configuração principal do elipsóide [3]. Darboux estudou a configuração local em torno de pontos umbílicos genéricos (aqui chamados de Darbouxianos). A análise de Darboux usa os métodos desenvolvidos por Poincaré para o estudo dos pontos singulares de equações diferenciais no plano, tais como sela e nó etc. Recentemente Sotomayor, Gutierrez e Garcia têm obtido importantes resultados nessa área, revigorando-a com idéias originárias de Sistemas Dinâmicos e da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias [6].

Gutierrez e Sotomayor estudaram as mudanças qualitativas na configuração principal de superfícies regulares, compactas e orientadas quando estas são submetidas a pequenas perturbações. Em [5] identificaram uma classe ampla de superfícies compactas que são estruturalmente estáveis. Esta classe contém as superfícies cujos pontos umbílicos são todos Darbouxianos; seus ciclos principais são hiperbólicos; não possuem conexões de separatrizes umbílicas e o conjunto limite de cada linha principal está contido no conjunto de pontos umbílicos ou ciclos principais, veja definições 1.2.2, 1.2.3, 1.2.4 e o teorema 1.2.1. Em [12] estudaram superfícies cuja configuração principal possui um ciclo semi-hiperbólico: ciclos que possuem primeira derivada da aplicação de retorno igual a um e a segunda derivada diferente de zero. Neste trabalho mostraram que quando estas superfícies são perturbadas podem ocorrer duas possibilidades: o ciclo principal desaparecer ou o ciclo principal

bifurcar em dois. Em [4] consideraram superfícies com conexões entre pontos umbílicos. Neste caso, estudaram as bifurcações de codimensão 1, isto é, analisaram as condições para a bifurcação de um ciclo principal a partir das conexões, por deformações a um parâmetro da superfície.

Destacamos ainda os trabalhos que estudam as configurações principais em superfícies não regulares e superfícies não compactas. Em [10] Garcia e Sotomayor estudaram a configuração principal das linhas de curvatura próxima a um ponto singular não degenerado de superfícies definidas implicitamente no espaço $\mathbb{R}^3$. Em [11] Garcia e Sotomayor analisaram a configuração das linhas de curvatura no infinito em superfícies algébricas, mais precisamente, estenderam às superfícies algébricas as condições suficientes dadas por Gutierrez-Sotomayor para a estabilidade principal das linhas de curvatura em superfícies compactas.

Neste trabalho, nosso objetivo é estudar as bifurcações de codimensão dois de superfícies que possuem conexões entre pontos umbílicos Darbouxianos. Em outras palavras, encontramos condições para que a aplicação de retorno se desdobre genericamente a dois parâmetros quando a superfície é deformada em uma vizinhança da conexão e determinaremos o diagrama de bifurcação.

No Capítulo 1, fazemos algumas definições e enunciamos resultados a respeito da estabilidade e bifurcações das folheações principais em uma superfície compacta que foram provados em [5, 3, 4].

No Capítulo 2 recalculamos a derivada da aplicação de retorno, que foi calculada por Sotomayor e Gutierrez [4], usando um método que simplifica o cálculo de derivadas superiores.

No Capítulo 3 obtemos alguns resultados que serão fundamentais no desenvolvimento do Capítulo 4: calculamos a segunda derivada das aplicações de transição em torno dos pontos umbílicos; estudamos a terceira derivada ao longo da conexão; exibimos uma expressão para o desenvolvimento assintótico da aplicação de retorno; estudamos as condições para que esse retorno se desdobre a um parâmetro e obtemos o diagrama de bifurcação.

No Capítulo 4, chegamos ao nosso objetivo estudando as bifurcações de

codimensão 2 das conexões de pontos umbílicos: estudamos o desdobramento a dois parâmetros do retorno e obtemos um diagrama de bifurcação que é equivalente ao diagrama da bifurcação de Hopf de codimensão dois para pontos singulares de campos vetoriais planares e laços de codimensão dois [8].

Capítulo 1

Preliminares

Daremos a seguir algumas definições e reveremos resultados sobre estabilidade e bifurcações das folheações principais de uma superfície compacta, provados em [5, 3, 4].

1.1 Configurações Principais

Seja M uma variedade bidimensional suave, compacta, conexa e orientada. Uma imersão α de M em $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação tal que $D\alpha_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora, para cada $p \in M$. Denotemos por $I^r = I^r(M, \mathbb{R}^3)$ o conjunto das imersões de classe C^r de M em $\mathbb{R}^3$ e por $I^{r,s} = I^{r,s}(M, \mathbb{R}^3)$ este conjunto munido da topologia C^s , $s \leq r$. Para cada $\alpha \in I^r$ está definida a aplicação normal $N_\alpha : M \rightarrow S^2$, de classe C^{r-1} :

$$N_\alpha(p) = \frac{\alpha_u \wedge \alpha_v}{\|\alpha_u \wedge \alpha_v\|}$$

onde $(u, v) : (M, p) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ é uma carta positiva de M em torno de p e $\wedge$ denota o produto vetorial em $\mathbb{R}^3$, determinado por alguma orientação de $\mathbb{R}^3$ fixada, $\alpha_u = \frac{\partial \alpha}{\partial u}$, $\alpha_v = \frac{\partial \alpha}{\partial v}$ e $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ é a norma euclidiana em $\mathbb{R}^3$.

Já que $DN_\alpha(p)$ tem sua imagem contida na imagem de $D\alpha(p)$ o endomorfismo $\omega_\alpha : TM \rightarrow TM$ está bem definido por

$$D\alpha \cdot \omega_\alpha = DN_\alpha.$$

É conhecido que ω_α é um endomorfismo auto-adjunto quando TM está munido da norma $\langle, \rangle_\alpha$ induzida por α da métrica $\langle, \rangle$ em $\mathbb{R}^3$.

Sejam $K_\alpha = \det(\omega_\alpha)$ e $H_\alpha = -1/2(\text{traço}(\omega_\alpha))$, respectivamente, as curvaturas Gaussiana e Média da imersão α .

Definição 1.1.1 Um ponto $p \in M$ é dito ponto umbílico α de se $(H_\alpha(p))^2 - K_\alpha(p) = 0$. Isto quer dizer que os autovalores de ω_α são iguais em p . O conjunto dos pontos umbílicos de α será denotado por U_α .

Definição 1.1.2 Os autovalores de $-\omega_\alpha$ são $k_\alpha^2 = -H_\alpha + \sqrt{(H_\alpha)^2 - K_\alpha}$ e $k_\alpha^1 = -H_\alpha - \sqrt{(H_\alpha)^2 - K_\alpha}$ que são chamados respectivamente de curvatura principal máxima e curvatura principal mínima de α .

Os autovetores associados às curvaturas principais k_α^1 e k_α^2 de α em $M - U_\alpha$ definem dois campos de linhas C^{r-2} , L_α e l_α , mutuamente ortogonais em TM (com a métrica $\langle, \rangle_\alpha$), chamados de campos de linhas principais de α . Eles são caracterizados pelas equações de Rodrigues [13, 2]:

$$L_\alpha = \{v \in TM; \omega_\alpha v + k_\alpha^2 v = 0\}$$

$$l_\alpha = \{v \in TM; \omega_\alpha v + k_\alpha^1 v = 0\}.$$

A eliminação de k_α^2 e k_α^1 nessas equações conduz a uma equação diferencial quadrática que, na carta (u, v) , se escreve como

$$\det \begin{pmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E_\alpha & F_\alpha & G_\alpha \\ e_\alpha & f_\alpha & g_\alpha \end{pmatrix} = 0 \quad ,$$

onde a segunda e terceira linha são os coeficientes da primeira, I_α , e segunda, II_α , formas fundamentais de α na carta (u, v) : $I_\alpha = \langle, \rangle_\alpha$, $II_\alpha = \langle N, D^2\alpha \rangle$ [13, 2]. As curvas integrais de L_α (resp. l_α) são chamadas de linhas de curvatura máxima (resp. mínima). A família de curvas, isto é, a folheação

integral de L_α (resp. l_α) em $M - U_\alpha$ será denotado por F_α (resp. f_α) e chamada de **folheação principal máxima** (resp. **folheação principal mínima**) de α .

A tripla $P_\alpha = (U_\alpha, F_\alpha, f_\alpha)$ será chamada de **configuração principal** de α .

1.2 Estabilidade Estrutural das Configurações Principais

Estabeleceremos condições suficientes para que a imersão α de uma superfície orientada compacta tenha sua configuração principal C^s -estruturalmente estável.

Definição 1.2.1 *Diremos que a imersão α é C^s -estruturalmente estável, se para $\beta \in V$, onde V é uma vizinhança de α em $I^{r,s}$, existe um homeomorfismo h em M que aplica U_α em U_β e aplica as linhas de F_α e f_α em F_β e f_β , respectivamente.*

Em [5] é provado que se $p \in U_\alpha$, existe um sistema de coordenadas - que sem perda de generalidade continuaremos a chamar de (u, v) - com orientação positiva de M e uma isometria Γ que preserva orientação de $\mathbb{R}^3$ com $\Gamma(\alpha(p)) = 0$, tal que $\Gamma \circ \alpha(u, v) = (u, v, h(u, v))$, com 3-jato de h em 0 dado por

$$J_0^3 h(u, v) = \frac{k}{2}(u^2 + v^2) + \frac{a}{6}u^3 + \frac{b}{2}uv^2 + \frac{c}{6}v^3. \quad (1.1)$$

Definição 1.2.2 $p \in U_\alpha$ é um ponto umbílico Darbouxiano se, na expressão (1.1), as seguintes condições T e D são satisfeitas:

T) Condição de Transversalidade: $b(b - a) \neq 0$;

D) Condição Discriminante:

$$(D_1) \quad a/b > (c/2b)^2 + 2;$$

$$(D_2) \quad (c/2b)^2 + 2 > a/b > 1, a \neq 2b \text{ ou}$$

$(D_3) \ a/b < 1.$

$i = 1, 2, 3$ de D_i , denota o número de separatrizes de p (linhas que tendem a p e separam regiões de diferentes configurações próximo de p) como podemos ver na figura 1.1.

Figura 1.1: Umbílicos Darbouxianos

Definição 1.2.3 *Um ciclo principal orientado (uma linha de curvatura fechada) γ é hiperbólico (H) se $\pi'_\gamma(0) \neq 1$. Onde π_γ é a transformação de Poincaré de primeiro retorno definida (pelas linhas de curvatura da folheação à qual γ pertence) em um segmento $\sigma : [a, b] \rightarrow S$ de uma linha curvatura da folheação ortogonal com $\sigma(0) \in \gamma$. Equivalentemente se [5, 12, 9]:*

$$\eta(\gamma) = - \int_\gamma \frac{dk_\alpha^1}{k_\alpha^2 - k_\alpha^1} = \int_\gamma \frac{dk_\alpha^2}{k_\alpha^2 - k_\alpha^1} = -\frac{1}{2} \int_\gamma \frac{dH_\alpha}{\sqrt{(H_\alpha)^2 - K_\alpha}} \neq 0,$$

onde η é o coeficiente de hiperbolicidade de γ ; k_α^2 e k_α^1 são, respectivamente, as curvaturas máxima e mínima; $H_\alpha = \frac{1}{2}(k_\alpha^2 + k_\alpha^1)$ é a curvatura média e $K_\alpha = k_\alpha^1 k_\alpha^2$ é a curvatura gaussiana.

Definição 1.2.4 *Uma linha principal γ de α que é a separatriz de dois diferentes pontos umbílicos ou duas vezes a separatriz de um mesmo ponto umbílico é chamada de conexão de pontos umbílicos de α ; no segundo caso γ é chamada de laço de ponto umbílico.*

Segue então o seguinte resultado [5]:

Seja $\Sigma^r(j)$, $j = a, b, c, d$ o conjunto das imersões $\alpha \in I^r$, $r \geq 4$, tais que :

- (a) Todos os pontos umbílicos são Darbouxianos,
- (b) Todos os ciclos principais são hiperbólicos,
- (c) Todas as separatrizes umbílicas são separatrizes de um único ponto umbílico,
- (d) O conjunto limite de cada linha principal está contido no conjunto de pontos umbílicos e ciclos principais.

Teorema 1.2.1 $\Sigma^r = \cap \Sigma^r(j)$, $j = a, b, c, d$, $r \geq 4$, é um aberto em $I^{r,3}$ e denso em $I^{r,2}$. Cada $\alpha \in \Sigma^r$ é C^3 - estruturalmente estável.

1.3 Bifurcações nas Configurações Principais

Em [4] é estudada a mudança na configuração principal das linhas de curvatura de $\alpha \in I^r$ que não satisfazem a condição (c) acima e satisfazem as condições (a),(b) e (d), isto é, quando há uma conexão simples de separatrizes (veja definição abaixo). Em outras palavras, é estudada a mudança topológica - bifurcação - em uma família de superfícies imersas α_t , dependendo de um parâmetro real t , a qual ocorre no valor $t = t_0$ (valor de bifurcação) onde α_t deixa de satisfazer a condição (c). Isto é, quando $\alpha_{t_0} \in I_1^r(c)$, onde $I_1^r(j) = I^r - \Sigma^r(j)$, $j = a, b, c, d$. Nesse caso, é mostrado que esse conjunto de superfícies imersas é uma subvariedade de Banach de codimensão 1 e de classe C^{r-4} , do espaço $I^{r,r}$. Neste contexto a bifurcação acontece quando a família α_t cruza $I_1^r(c)$, transversalmente.

Definição 1.3.1 Sejam $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Chamaremos de c_{ij} uma separatriz γ que liga pontos umbílicos Darbouxianos p e q de tipos D_i e D_j respectivamente. Uma conexão c_{ij} será chamada de conexão simples se:

(i) $i \neq j$;

(ii) $i = j = 1$, $p \neq q$ e a aplicação de retorno T , induzida pela folheação a qual γ pertence, em um segmento transversal à γ é tal que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{T(x)}{x} \neq 1;$$

(iii) $i = j \in \{2, 3\}$, $p = q$ e a aplicação de retorno T , induzida pela folheação a qual γ pertence, em um segmento transversal à γ , é tal que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(T(x))}{\ln(x)} \neq 1.$$

Figura 1.2: Conexões de Umbílicos Darbouxianos

A relação entre os limites acima e os coeficientes a, b e c na expressão das linhas de curvatura, assim como a existência dos mesmos, foi estabelecida em [4]; onde é mostrado que esses limites existem e só dependem do 3-jato da imersão α em torno dos pontos umbílicos.

Chamaremos de $\Sigma_1^r(c)$ o conjunto de $\alpha \in \cap \Sigma^r(j)$, $j = a, b, c$ tal que α tem exatamente uma conexão de umbílicos, que é simples. Chamaremos de $\tilde{\Sigma}_1^r(c)$ o conjunto de $\alpha \in \Sigma_1^r$ tal que suas conexões umbílicas não estão contidas no limite de outras separatrizes umbílicas.

Definição 1.3.2 *Uma imersão α pertencente a $C \subset I^r$ é C^s -estruturalmente estável relativamente a C (resp. estruturalmente estável ao longo de C) se existe uma vizinhança V de α em $I^{r,s}$ tal que para cada $\beta \in V \cap C$ (resp. β na componente conexa de α em $V \cap C$), existe um homeomorfismo $h = h_\beta$ em M que aplica U_α em U_β e as linhas de F_α e f_α nas linhas de F_β e f_β .*

Teorema 1.3.1 [4] *Seja $r \geq 6$.*

- a) $\Sigma_1^r(c)$ (resp. $\tilde{\Sigma}_1^r(c)$) é uma subvariedade de Banach imersa (resp. mergulhada) de $I^{r,r}$ de codimensão 1 e de classe C^{r-4} ;*
- b) $\tilde{\Sigma}_1^r(c)$ é um subconjunto aberto de $I_1^{r,4}(c)$;*
- c) cada $\alpha \in \Sigma_1^r(c)$ (resp. $\alpha \in \tilde{\Sigma}_1^r(c)$) é C^4 -estruturalmente estável ao longo de $\Sigma_1^r(c)$ (resp. relativo a I_1^r).*

Teorema 1.3.2 [4] *Seja $r \geq 6$. O conjunto $\tilde{\Sigma}_1^r(c)$ é denso no subespaço $\Sigma^r(c) \cap I_1^r(c)$ de $I_1^{r,2}(c)$.*

Capítulo 2

Aplicações de Retorno das Conexões Umbílicas

Neste capítulo nosso objetivo será calcular a derivada da aplicação de retorno da conexão c_{11} , usando o campo de Lie-Cartan na superfície projetiva definida implicitamente pela equação diferencial das linhas de curvatura e a forma normal de Roussarie [7, 8]. Ressaltamos que nossa opção por um método diferente do usado em [4] se deve ao fato de permitir simplificações no cálculo das derivadas de ordem superior das aplicações de transição que compõem a aplicação de retorno.

2.1 Conexão de umbílicos de tipo c_{11}

2.1.1 Derivadas das aplicações de transição em torno dos pontos umbílicos

Mostraremos a seguir que a aplicação de retorno T em uma vizinhança da conexão γ de tipo c_{11} , que conecta os pontos p_1 e p_2 , é de classe C^1 e que o logaritmo de $T'(0)$ é uma função nos coeficientes do 3-jato de α em $\{p_1, p_2\}$.

Seja V uma vizinhança de $\gamma \in F_\alpha$. Suponhamos V pequena e que a orientação de $F_\alpha|_{V-\gamma}$ em torno de γ , é como na figura 2.1

Definição 2.1.1 *Consideremos*

$$\lambda : (-\delta, \delta) \rightarrow V$$

uma curva regular transversal à F_α que encontra γ exatamente em $p_0 = \lambda(0)$. Suporemos que λ cruza γ de forma que se γ está orientada de p_1 para p_2 , então o par ordenado $\{\gamma'(0), \lambda'(0)\}$, é uma base positiva para $T_{p_0}(M)$.

Denotemos por

$$T : [0, \delta) \rightarrow [0, \delta)$$

a expressão coordenada da aplicação de retorno de Poincaré $\lambda([0, \delta)) \rightarrow \lambda([0, \delta))$ induzida por $F_\alpha|_{V-\gamma}$.

Figura 2.1: Orientação ao longo de γ

Nosso objetivo nesta seção é demonstrar a proposição seguinte, que está demonstrada em [4] de um modo um pouco diferente da que faremos aqui.

Proposição 2.1.1

- 1) T é de classe C^1 ,
- 2) $\frac{2}{\pi} \ln(T'(0)) = \chi(p_1) + \chi(p_2)$, onde $\chi(p) = \frac{c}{\sqrt{(a-2b)b-(c^2/4)}}$.

Definição 2.1.2 A função χ acima chama-se assimetria de α em p .

Observação 1 *Em particular, a conexão umbilica γ é simples se, e somente se, $T'(0) \neq 1$, isto é, $\chi(p_1) + \chi(p_2) \neq 0$.*

Para demonstrarmos a proposição 2.1.1 necessitaremos do lema abaixo que está provado em [5].

Lema 2.1.1 *Seja $p \in U_\alpha$ do tipo D_1 . Existem um sistema de coordenadas $(u, v) : (M, p) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ com orientação positiva de M e uma isometria Γ que preserva orientação de $\mathbb{R}^3$ com $\Gamma(\alpha(p)) = 0$, tal que $\Gamma \circ \alpha(u, v) = (u, v, h(u, v))$, com 3-jato de h em 0 dado por*

$$J_0^3 h(u, v) = \frac{k}{2}(u^2 + v^2) + \frac{a}{6}u^3 + \frac{b}{2}uv^2 + \frac{c}{6}v^3,$$

onde

- i) $b \neq 0$ e as raízes de $bt^2 - ct + a - 2b = 0$ não são reais (isto é $a/b > (c/2b)^2 + 2$),
- ii) o raio $\{(u, 0) | u > 0\}$ é tangente em p à separatriz de p pertencente a F_α .

Definição 2.1.3 (Equação diferencial para as linhas principais)

A equação diferencial para as linhas principais de α , em torno de $p \in \{p_1, p_2\}$, quando o sistema de coordenadas é como no lema 2.1.1 é:

$$[bv + L]dv^2 - [(b - a)u + cv + M]dudv - [bv + N]du^2 = 0 \quad (2.1)$$

onde L, M e N são funções de ordem $O[(u + v)^2]$ e de classe C^{r-3} .

Uma ferramenta importante que utilizaremos se insere no estudo das equações diferenciais implícitas. Trata-se do campo de Lie-Cartan, que é um levantamento da equação diferencial das linhas principais em uma superfície no fibrado projetivo da variedade M [3, 1].

Seja PM o fibrado projetivo sobre α definido pela seguinte relação de equivalência: para $p, q \in M$ e $w, v \in TM$ (fibrado tangente de M), (p, v) é equivalente a (q, w) , se $p = q$ e v e w são colineares, isto é, $v \wedge w = 0$. Se P é a projeção natural de PM em M , em termos da carta (u, v) com domínio U em M , segue que as cartas $(u, v; q = du/dv)$ e $(u, v; p = dv/du)$ estão definidas em $P^{-1}(U)$ e seus domínios cobrem este conjunto aberto.

Consideremos a superfície LM em PM definida pelas soluções da equação 2.1. A expressão desta superfície depende da carta usada.

Na carta $(u, v; p = dv/du)$, LM se escreve como

$$\mathcal{L}(u, v; p) = [bv + L]p^2 - [(b - a)u + cv + M]p - [bv + N] = 0, \quad (2.2)$$

e na carta $(u, v; q = du/dv)$

$$\mathcal{L}(u, v; p) = [bv + L] - [(b - a)u + cv + M]q - [bv + N]q^2 = 0. \quad (2.3)$$

Observação 2 Se $p \in U_\alpha$ é Darbouxiano a condição de transversalidade da definição 1.2.2 garante que $\mathcal{L}$ é regular ao longo do eixo projetivo [3], veja figura 2.2.

Definição 2.1.4 Chamaremos de campo de Lie-Cartan ou levantamento da equação diferencial das linhas principais o seguinte campo:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \mathcal{L}_p \\ \dot{v} &= p\mathcal{L}_p \\ \dot{p} &= -\{\mathcal{L}_u + p\mathcal{L}_v\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Observação 3 O campo de Lie-Cartan é tangente a superfície $\mathcal{L}$ [1] e sua projeção em $(u, v, p) \in \mathcal{L}$ no plano (u, v) satisfaz $\frac{dv}{du} = p$; suas singularidades estão no eixo $(0, 0, p)$ e são genericamente de tipo sela ou nó. Em particular, nos casos D_1 , D_2 e D_3 as singularidades são, respectivamente, uma de tipo sela, duas de tipo sela e uma de tipo nó e três de tipo sela.

Figura 2.2: superfície projetiva LM para D_1

Figura 2.3: D_1

Para calcularmos o valor da primeira derivada de T na origem será conveniente considerá-la como composição de algumas aplicações de transição. Iniciaremos analisando o lado esquerdo da conexão c_{11} , ou seja, calcularemos as derivadas das transições em uma vizinhança de p_1 inicialmente. Sejam os seguintes raios partindo de p_1 :

$$\Sigma_1 = \{(u, -\epsilon u)\}, \quad \Sigma_2 = \{(u, \epsilon u)\}, \text{ para } u > 0, \epsilon > 0;$$

$$\Sigma_\infty = \{(u, 0)\}, \text{ para } u < 0;$$

$$\bar{\Sigma}_1 = \{(u, \epsilon u)\}, \quad \bar{\Sigma}_2 = \{(u, -\epsilon u)\}, \text{ para } u < 0, \epsilon > 0.$$

Sejam

$$\Gamma_{1\epsilon} : \Sigma_1 \rightarrow \bar{\Sigma}_1,$$

$$\Gamma_{2\epsilon} : \bar{\Sigma}_2 \rightarrow \Sigma_2,$$

$$\Gamma_{1\infty} : \bar{\Sigma}_1 \rightarrow \Sigma_\infty,$$

$$\Gamma_{2\infty} : \Sigma_\infty \rightarrow \bar{\Sigma}_2,$$

$$\Gamma_\epsilon : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2,$$

onde

$$\Gamma_\epsilon = \Gamma_{2\epsilon} \circ \Gamma_{2\infty} \circ \Gamma_{1\infty} \circ \Gamma_{1\epsilon}. \quad (2.5)$$

Consideremos também, suficientemente próximo à p_1 , uma seção λ_1 transversal a γ como na figura 2.4.

Faremos o estudo das aplicações acima na superfície projetiva $\mathcal{L}$. Portanto, consideremos a seguinte forma normal da equação diferencial das linhas de curvatura em torno de um ponto umbílico que está demonstrada em [1].

$$v dv^2 + (\xi u + \eta v) dv du + (-v + a_1 u^2 + a_2 uv + a_3 v^2 + M) du^2 = 0, \quad (2.6)$$

onde $\eta = -\frac{\epsilon}{b}$, $\xi = -(\frac{b-a}{b})$ e M é uma função de ordem $O[u^3 + v^3]$ e de classe C^{r-4} .

Figura 2.4: Aplicações de transição e seções transversais

Neste caso,

$$\mathcal{L}(u, v; p) = vp^2 + (\xi u + \eta v)p + (-v + a_1u^2 + a_2uv + a_3v^2 + M) = 0. \quad (2.7)$$

Lema 2.1.2 *A superfície $\mathcal{L}$ é um gráfico com relação ao plano (v, p) se $p \neq 0$, isto é, $\mathcal{L}(u, v, p) = \mathcal{L}(u(v, p), v, p) = 0$*

Demonstração

De fato, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}|_{(0,0,p)} = \xi p$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}|_{(0,0,p)} = p^2 + \eta p - 1$, $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u^2}|_{(0,0,p)} = 2a_1$, $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u \partial v}|_{(0,0,p)} = a_2$ e $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v^2}|_{(0,0,p)} = 2a_3$. Como $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}|_{(0,0,p)} \neq 0$, se $p \neq 0$, pelo Teorema da Função Implícita podemos colocar a variável u como função das variáveis v e p .

Já que

$$\frac{\partial u}{\partial v}(0, p) = \frac{1 - \eta p - p^2}{\xi p} = u_1(p), \quad e \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}(0, p) = \frac{\begin{Bmatrix} 2a_1(1 - \eta p - p^2)^2 \\ -2a_2\xi p(1 - \eta p - p^2) - 2\xi^2 a_3 p^2 \end{Bmatrix}}{(\xi p)^3} = u_2(p) \quad (2.9)$$

segue que

$$u(v, p) = u_1(p)v + \frac{u_2(p)}{2}v^2 + O(v^3). \quad (2.10)$$

Agora consideremos a projeção, X , do campo de Lie-Cartan sobre $\mathcal{L}(u, v, p) = 0$, no plano (v, p) ,

$$X(v, p) = \begin{cases} \dot{v} = p(2vp + \xi u + \eta v) \\ \dot{p} = -\{\xi p + 2a_1 u + a_2 v + p(p^2 + \eta p - 1 + a_2 u + 2a_3 v)\} \end{cases} \quad (2.11)$$

Substituindo 2.10 em 2.11 obtemos

$$\frac{dv}{dp} = \frac{p(2vp + \xi(u_1(p)v + \frac{u_2(p)}{2}v^2 + O(v^3)) + \eta v)}{\begin{cases} -[\xi p + 2a_1(u_1(p)v + \frac{u_2(p)}{2}v^2 + O(v^3)) + a_2 v \\ + p(p^2 + \eta p - 1 + a_2(u_1(p)v + \frac{u_2(p)}{2}v^2 + O(v^3)) + 2a_3 v) \end{cases}} \quad (2.12)$$

Nos interessa estudar a primeira variação da solução $v(v_0, p)$ da equação diferencial 2.12, com condição inicial $v(v_0, 0) = v_0$. De fato, seja $V = V(v, p) = \frac{dv}{dp}$. Segue, então, que

$$\frac{\partial}{\partial v}(V(v, p))|_{v=0} = \frac{\frac{\partial \dot{v}}{\partial v}(0, p)}{\dot{p}(0, p)} = \frac{p(2p + \xi u_1 + \eta)}{-\{\xi p + p(p^2 + \eta p - 1)\}}$$

e usando 2.8 temos que

$$\frac{\partial}{\partial v}(V(v, p))|_{v=0} = \frac{p^2 + 1}{-p(p^2 + \eta p + \xi - 1)} \quad (2.13)$$

Observação 4 As seções $\bar{\Sigma}_1$, $\bar{\Sigma}_2$, Σ_1 , Σ_2 e Σ_∞ possuem, cada uma delas, uma correspondente na superfície projetiva $\mathcal{L}$, onde as correspondentes de $\bar{\Sigma}_1$ e $\bar{\Sigma}_2$ estão próximo ao infinito; as de Σ_1 e Σ_2 estão próximas da origem, para ϵ suficientemente pequeno, e Σ_∞ é o próprio infinito no projetivo. Continuaremos, sem perda de generalidade, chamando essas seções - no projetivo - pelo mesmo nome e assumiremos que $\bar{\Sigma}_1$ e $\bar{\Sigma}_2$ passam, respectivamente, por $p = -1/\epsilon$ e $p = 1/\epsilon$.

A demonstração da proposição 2.1.1 decorrerá dos lemas abaixo.

Lema 2.1.3 *Se uma aplicação de retorno T é dada por uma composição de aplicações de transição em cartas distintas, então T depende apenas da carta que contém a seção transversal. Em particular, no nosso caso, $\phi : LM \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\phi(u, v, p) = (u, v)$.*

Demonstração

Faremos a demonstração para duas cartas. Para n cartas, $n \in \mathbb{N}$, a demonstração é idêntica.

Sejam as cartas ϕ e ψ ; seções transversais $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4 = \Sigma_1; \bar{\Sigma}_1, \bar{\Sigma}_2, \bar{\Sigma}_3, \bar{\Sigma}_4 = \bar{\Sigma}_1$ e aplicações de transição $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2$ e $\bar{\pi}_3$ como na figura 2.5.

Figura 2.5: Composição de cartas

Então,

$$\bar{\pi}_3 \circ \phi \circ \psi^{-1} \circ \bar{\pi}_2 \circ \psi \circ \phi^{-1} \circ \bar{\pi}_1 = \phi \circ \pi_3 \circ \pi_2 \circ \pi_1 \circ \phi^{-1},$$

onde

$$\bar{\pi}_1 = \phi \circ \pi_1 \circ \phi^{-1},$$

$$\bar{\pi}_2 = \psi \circ \pi_1 \circ \psi^{-1},$$

$$\bar{\pi}_3 = \phi \circ \pi_3 \circ \phi^{-1}.$$

■

Observação 5 No que segue, consideraremos que a carta (u, v) é uma carta principal e portando, para estudarmos as derivadas do retorno, é suficiente estudarmos as derivadas de $\pi_3 \circ \pi_2 \circ \pi_1 \circ \dots \circ \pi_n$, dependendo do número de cartas que estivermos compondo.

Lema 2.1.4 $\Gamma'_\epsilon(0) = \exp [\vartheta(\epsilon) + \Theta(\epsilon)]$, onde,

$$\vartheta(\epsilon) = -2\eta \int_\epsilon^{1/\epsilon} \frac{p^2 + 1}{(p^2 + \eta p + \xi - 1)(p^2 - \eta p + \xi - 1)} dp \quad e$$

$$\Theta(\epsilon) = -2\eta \int_{1/\epsilon}^\infty \frac{p^2 + 1}{(p^2 + \eta p + \xi - 1)(p^2 - \eta p + \xi - 1)} dp ,$$

com $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Theta(\epsilon) = 0 \quad e$

$$\vartheta(0) = \frac{\pi(b-a)}{2(2b-a)} \chi(p_1), \quad \chi(p_1) = \frac{c}{\sqrt{(a-2b)b - (c^2/4)}}$$

Demonstração

De fato, considerando a observação 4 e a equação 2.13, segue que a derivada das aplicações de transição $\Gamma_{1\epsilon}$ e $\Gamma_{2\epsilon}$ na origem para p variando entre $-\epsilon$ e $-1/\epsilon$ para $\Gamma_{1\epsilon}$ e entre $1/\epsilon$ e ϵ para $\Gamma_{2\epsilon}$ são:

$$\Gamma'_{1\epsilon}(0) = \exp \left(\int_{-\epsilon}^{-1/\epsilon} \frac{\partial}{\partial v} (V(0, p)) dp \right) = \exp \left(\int_{-\epsilon}^{-1/\epsilon} \frac{p^2 + 1}{-p(p^2 + \eta p + \xi - 1)} dp \right);$$

$$\Gamma'_{2\epsilon}(0) = \exp \left(\int_{1/\epsilon}^\epsilon \frac{\partial}{\partial v} (V(0, p)) dp \right) = \exp \left(\int_{1/\epsilon}^\epsilon \frac{p^2 + 1}{-p(p^2 + \eta p + \xi - 1)} dp \right).$$

Analogamente

$$\Gamma'_{1\infty}(0) = \exp \left(\int_{-1/\epsilon}^{-\infty} \frac{\partial}{\partial v} (V(0, p)) dp \right) = \exp \left(\int_{-1/\epsilon}^{-\infty} \frac{p^2 + 1}{-p(p^2 + \eta p + \xi - 1)} dp \right);$$

$$\Gamma'_{2\infty}(0) = \exp \left(\int_{+\infty}^{1/\epsilon} \frac{\partial}{\partial v} (V(0, p)) dp \right) = \exp \left(\int_{+\infty}^{1/\epsilon} \frac{p^2 + 1}{-p(p^2 + \eta p + \xi - 1)} dp \right).$$

Como $\Gamma_\epsilon = \Gamma_{2\epsilon} \circ \Gamma_{2\infty} \circ \Gamma_{1\infty} \circ \Gamma_{1\epsilon}$ segue, então, que

$$\begin{aligned}\Gamma'_\epsilon(0) &= \Gamma'_{2\epsilon}(0) \cdot \Gamma'_{2\infty}(0) \cdot \Gamma'_{1\infty}(0) \cdot \Gamma'_{1\epsilon}(0) \\ &= \exp \left[\begin{aligned} &-2\eta \int_\epsilon^{1/\epsilon} \frac{p^2+1}{(p^2+\eta p+\xi-1)(p^2-\eta p+\xi-1)} dp \\ &-2\eta \int_{1/\epsilon}^\infty \frac{p^2+1}{(p^2+\eta p+\xi-1)(p^2-\eta p+\xi-1)} dp \end{aligned} \right]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Para concluir observemos que $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p^2+1}{(p^2+\xi p+\eta-1)(p^2-\xi p+\eta-1)} = 0$ e, portanto, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Theta(\epsilon) = 0$. O cálculo de $\vartheta(0)$ é feito usando o Teorema dos Resíduos para funções de uma variável complexa. De fato,

$$\begin{aligned}\vartheta(0) &= -2\eta \int_0^\infty \frac{p^2+1}{(p^2+\eta p+\xi-1)(p^2-\eta p+\xi-1)} dp, \\ &= 2bc \int_0^\infty \frac{1+p^2}{(-bp^2+cp+2b-a)(-bp^2-cp+2b-a)} dp, \\ &= 2bc\pi I\{res(f_1, p_1) + res(f_1, p_2)\}, \quad I = \sqrt{-1},\end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned}p_1 &= -\frac{1}{2} \frac{c}{b} + \frac{1}{2} I \sqrt{4 \frac{a}{b} - \frac{c^2}{b^2} - 8} \\ p_2 &= \frac{1}{2} \frac{c}{b} + \frac{1}{2} I \sqrt{4 \frac{a}{b} - \frac{c^2}{b^2} - 8}, \\ f_1 &= \frac{1+p^2}{(-bp^2+cp+2b-a)(-bp^2-cp+2b-a)} \\ res(f_1, p_1) &= -\frac{1}{2} \frac{-6b^2 + Ic \sqrt{\frac{4ab-c^2-8b^2}{b^2}} b + 2ab - c^2}{cb(4ab - c^2 - 8b^2 + Ic \sqrt{\frac{4ab-c^2-8b^2}{b^2}} b)}, \\ res(f_1, p_2) &= \frac{1}{2} \frac{-6b^2 - Ic \sqrt{\frac{4ab-c^2-8b^2}{b^2}} b + 2ab - c^2}{cb(4ab - c^2 - 8b^2 - Ic \sqrt{\frac{4ab-c^2-8b^2}{b^2}} b)}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$2\pi I(res(f_1, p_1) + res(f_1, p_2)) = \frac{4\pi b \sqrt{\frac{4ab-c^2-8b^2}{b^2}} (-b+a)}{\omega(p)},$$

onde,

$$\omega(p) = (4ab - c^2 - 8b^2 + Ic\sqrt{\frac{4ab - c^2 - 8b^2}{b^2}} - b)(4ab - c^2 - 8b^2 - Ic\sqrt{\frac{4ab - c^2 - 8b^2}{b^2}} - b) .$$

Então, segue que:

$$\begin{aligned} 2\pi I\{res(f_1, p_1) + res(f_1, p_2)\} &= \frac{4\pi b\sqrt{\frac{4ab - c^2 - 8b^2}{b^2}}(-b + a)}{(4ab - c^2 - 8b^2)^2 + c^2(4ab - c^2 - 8b^2)} \\ &= \frac{4\pi b\sqrt{\frac{4ab - c^2 - 8b^2}{b^2}}(-b + a)}{(4ab - c^2 - 8b^2)(4ab - 8b^2)} \\ &= \frac{\pi(-b + a)}{b(a - 2b)\sqrt{4ab - c^2 - 8b^2}} . \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \vartheta(0) = 2bc\pi I\{res(f_1, p_1) + res(f_1, p_2)\} &= \frac{\pi c(-b + a)}{(a - 2b)\sqrt{4ab - c^2 - 8b^2}} \\ &= \frac{\pi c(b - a)}{2(2b - a)\sqrt{ab - \frac{c^2}{4} - 2b^2}} . \end{aligned}$$

■

De modo análogo, sejam os seguintes raios partindo de p_2 : $\Lambda_1 = \{(u, -\epsilon u)\}$, $\Lambda_2 = \{(u, \epsilon u)\}$, para $u > 0$, $\epsilon > 0$; $\Lambda_\infty = \{(u, 0)\}$, para $u < 0$; $\bar{\Lambda}_1 = \{(u, \epsilon u)\}$, $\bar{\Lambda}_2 = \{(u, -\epsilon u)\}$, para $u < 0$, $\epsilon > 0$. Sejam $\Upsilon_{1\epsilon} : \Lambda_1 \rightarrow \bar{\Lambda}_1$, $\Upsilon_{2\epsilon} : \bar{\Lambda}_2 \rightarrow \Lambda_2$, $\Upsilon_{1\infty} : \bar{\Lambda}_1 \rightarrow \Lambda_\infty$, $\Upsilon_{2\infty} : \Lambda_\infty \rightarrow \bar{\Lambda}_2$ e $\Upsilon_\epsilon : \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2$, onde $\Upsilon_\epsilon = \Upsilon_{2\epsilon} \circ \Upsilon_{2\infty} \circ \Upsilon_{1\infty} \circ \Upsilon_{1\epsilon}$. Consideremos também, suficientemente próximo a p_2 , uma seção λ_2 transversal a γ como na figura 2.4.

Observação 6 *Por causa da definição 2.1.1 os eixos coordenados em p_1 e p_2 estão invertidos. Veja figura 2.1.*

Repetindo os cálculos feitos para demonstrar o lema 2.1.4, segue a demonstração do seguinte lema:

Lema 2.1.5 $\Upsilon'_\epsilon(0) = \exp[\bar{\vartheta}(\epsilon) + \bar{\Theta}(\epsilon)]$, onde,

$$\bar{\vartheta}(\epsilon) = -2\bar{\eta} \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} \frac{p^2 + 1}{(p^2 + \bar{\eta}p + \bar{\xi} - 1)(p^2 - \bar{\eta}p + \bar{\xi} - 1)} dp \quad e$$

$$\bar{\Theta}(\epsilon) = -2\bar{\eta} \int_{1/\epsilon}^{\infty} \frac{p^2 + 1}{(p^2 + \bar{\eta}p + \bar{\xi} - 1)(p^2 - \bar{\eta}p + \bar{\xi} - 1)} dp ,$$

$$\text{com } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{\Theta}(\epsilon) = 0 \quad e$$

$$\bar{\vartheta}(0) = \frac{\pi(\bar{b} - \bar{a})}{2(2\bar{b} - \bar{a})} \chi(p_2), \quad \chi(p_2) = \frac{\bar{c}}{\sqrt{(\bar{a} - 2\bar{b})\bar{b} - (\bar{c}^2/4)}} .$$

De agora em diante, neste trabalho, a menos de menção explícita em contrário, consideraremos que α é uma imersão de classe C^∞ ou C^r , para r suficientemente grande. Isto nos permitirá usar métodos desenvolvidos por Roussarie [7, 8]

Sejam as aplicações de transição: $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \lambda_1$, $\bar{\sigma} = \sigma^{-1} : \lambda_1 \rightarrow \Sigma_1$, $\bar{\eta} = \eta^{-1} : \lambda_2 \rightarrow \Lambda_1$ e $\eta : \Lambda_2 \rightarrow \lambda_2$. Estas aplicações são transições na vizinhança da sela no projetivo, portanto, são um desenvolvimento de Dulac [8]. Veja figuras 2.4 e 2.2.

Para estudarmos estas transições usaremos a teoria de formas normais que nos permite expressar o campo de Lie-Cartan, projetado no plano (u, p) , como uma C^k -equivalência, para $k \in \mathbb{N}$ fixado, com o campo abaixo [7, 8].

Seja X_λ uma família de campos vetoriais no plano, $\lambda \in \mathbb{R}^\Lambda$, tal que, para $\lambda = 0$, o campo X_0 possui uma sela hiperbólica $P_0 = (x, y) = (0, 0)$. Sejam $r_1(\lambda)$ e $r_2(\lambda)$ com $r_1(\lambda) < 0 < r_2(\lambda)$ os autovalores de X_λ e $r(\lambda) = -\frac{r_1(\lambda)}{r_2(\lambda)}$ a razão de hiperbolicidade da sela.

- (1) Se $r_0 = r(0) = \frac{r_1(0)}{r_2(0)}$, a razão de hiperbolicidade de X_0 em P_0 , é irracional então para $k \in \mathbb{N}$, o campo X_λ , para $\lambda \in W \ni 0$, é C^k -equivalente à:

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = r(\lambda)y \end{cases} \quad (2.15)$$

- (2) Se $r_0 = r(0) = \frac{r_1(0)}{r_2(0)} = \frac{p}{q}$, a razão de hiperbolicidade de X_0 em P_0 , é racional então para um $k \in \mathbb{N}$, o campo X_λ , para $\lambda \in W_k \ni 0$, é C^k -equivalente à:

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y[-r_0 + \sum_{i=0}^{N(k)} \alpha_{i+1}(\lambda)(x^p y^q)^i], \end{cases} \quad (2.16)$$

onde $N(k)$ é um inteiro que depende de k e $\alpha_i(\lambda) : W_i \rightarrow \mathbb{R}$, W_i é uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}$ de modo que, $i \geq 1$, $0 \in \dots W_{i+1} \subset W_i \subset \dots \subset W_1$, $\alpha_1(\lambda) = p - qr(\lambda)$.

Suporemos que X_λ possui os eixos $0x$ e $0y$, respectivamente, como variedades estável e instável. Se τ_1 e τ_2 são seções transversais como na figura abaixo, o fluxo de X_λ define uma aplicação de transição, chamada de aplicação de Dulac $D_\lambda : \tau_1 \rightarrow \tau_2$.

Figura 2.6: aplicação de Dulac

Teorema 2.1.1 [7, 8] *Seja $k \in \mathbb{N}$. Então, a aplicação de transição D_λ definida pelo fluxo de X_λ (relativa às seções τ_1 e τ_2) tem a seguinte expressão:*

(1) se $r_0 = r(0) = \frac{r_1(0)}{r_2(0)}$ é irracional

$$D_\lambda(x) = x^{r(\lambda)}, \quad (2.17)$$

(2) se $r_0 = r(0) = \frac{r_1(0)}{r_2(0)} = \frac{p}{q}$ é racional

$$(D_\lambda(x))^q = x^p + \alpha_1[x^p\omega + \dots] + \alpha_2[x^{2p}\omega + \dots] + \dots + \alpha_k[x^{kp}\omega + \dots] + \Psi_K(x, \lambda), \quad (2.18)$$

onde $K = K(k)$ e cada elemento dentro do colchete é uma combinação finita de termos do tipo $x^i\omega^j$ (que satisfazem a seguinte relação de ordem: $x^i\omega^j \prec x^{i'}\omega^{j'} \iff i' > i$ ou $i' = i$ e $j < j'$); os coeficientes dos termos $x^i\omega^j$ não escritos depois do sinal $+$ são polinômios em α_s que se anulam se $\lambda = 0$. O último termo Ψ_k é uma função C^{kp} em (x, λ) , que é k -flat para $x = 0$, isto é, suas derivadas se anulam até a ordem k ; $\alpha_1 = r_0 - r(\lambda)$ e $\omega(x, \alpha_1)$ é uma função dada por:

$$\begin{cases} \omega(x, \alpha_1) = \frac{x^{-\alpha_1-1}}{\alpha_1} & \text{se } \alpha_1 \neq 0 \\ \omega(x, 0) = -\ln(x). \end{cases} \quad (2.19)$$

Observação 7 Derivando o campo de Lie-Cartan, no plano (u, p) , para p_1 e p_2 , veremos que os coeficientes de hiperbolicidade são, respectivamente, $\nu = \frac{2b-a}{b-a}$ e $\mu = \frac{2\bar{b}-\bar{a}}{b-\bar{a}}$.

Pelo teorema acima teremos quatro possibilidades para as transições σ , $\bar{\sigma}$, η e $\bar{\eta}$, pois: ν e μ podem ser racionais; podem ser irracionais; um pode ser racional e o outro irracional e vice versa. Por isso segue o seguinte lema.

Lema 2.1.6 (a) Se ν e μ forem irracionais,

$$\begin{cases} \sigma(x) = x^\nu, & \bar{\sigma}(x) = x^{1/\nu} \\ \eta(x) = x^\mu, & \bar{\eta}(x) = x^{1/\mu} \end{cases} \quad (2.20)$$

(b) Se $\nu = \frac{p}{q}$ e $\mu = \frac{r}{s}$ forem racionais,

$$\begin{cases} \sigma(x) = x^\nu [1 + \frac{1}{q}\alpha_2 x^p (-\ln x) + \frac{1}{q}\alpha_3 x^{2p} (-\ln x) + \Psi(x)], \\ \bar{\sigma}(x) = x^{1/\nu} [1 + \frac{1}{p}\bar{\alpha}_2 x^q (-\ln x) + \bar{\Psi}(x)], \\ \eta(x) = x^\mu [1 + \frac{1}{s}\beta_2 x^r (-\ln x) + \frac{1}{s}\beta_3 x^{2r} (-\ln x) + \Phi(x)], \\ \bar{\eta}(x) = x^{1/\mu} [1 + \frac{1}{r}\bar{\beta}_2 x^s (-\ln x) + \bar{\Phi}(x)], \end{cases} \quad (2.21)$$

onde $\Psi, \bar{\Psi}, \Phi$ e $\bar{\Phi}$ são 2-flat.

(c) Se $\nu = \frac{p}{q}$ for racional e μ for irracional

$$\begin{cases} \sigma(x) = x^\nu [1 + \frac{1}{q}\alpha_2 x^p (-\ln x) + \frac{1}{q}\alpha_3 x^{2p} (-\ln x) + \Psi(x)], \\ \bar{\sigma}(x) = x^{1/\nu} [1 + \frac{1}{p}\bar{\alpha}_2 x^q (-\ln x) + \bar{\Psi}(x)], \\ \eta(x) = x^\mu, \bar{\eta}(x) = x^{1/\mu}, \end{cases} \quad (2.22)$$

Ψ e $\bar{\Psi}$ são 2-flat.

(d) Se ν for irracional e $\mu = \frac{r}{s}$ for racional

$$\begin{cases} \sigma(x) = x^\nu, \\ \bar{\sigma}(x) = x^{1/\nu}, \\ \eta(x) = x^\mu [1 + \frac{1}{s}\beta_2 x^r (-\ln x) + \frac{1}{s}\beta_3 x^{2r} (-\ln x) + \Phi(x)], \\ \bar{\eta}(x) = x^{1/\mu} [1 + \frac{1}{r}\bar{\beta}_2 x^s (-\ln x) + \bar{\Phi}(x)], \end{cases} \quad (2.23)$$

onde Φ e $\bar{\Phi}$ são 2-flat.

Demonstração

No teorema 2.1.1 faça $k = 2$, observe que $\alpha_1(0) = \beta_1(0) = 0$ e desenvolva o termo do lado direito da igualdade considerando que $p \geq 1, r \geq 1, q \geq 2$ e $s \geq 2$, pois, $\nu < 1$ e $\mu < 1$.

Agora, consideremos as aplicações $f : \lambda_1 \rightarrow \lambda_2$ e $g = f^{-1} : \lambda_2 \rightarrow \lambda_1$. ■

Lema 2.1.7 [3, 9] A aplicação f é C^∞ e pode ser escrita como

$$f(x) = f_1 x + f_2 x^2 + O(x^3),$$

onde $f_1 \neq 0$.

Demonstração [da proposição 2.1.1]:

Usando os lemas 2.1.3, 2.1.4, 2.1.5, 2.1.6 e 2.1.7 sejam

$$\Gamma_\epsilon = m_1 x + O(x^2),$$

$$\Upsilon_\epsilon = n_1 x + O(x^2),$$

onde $m_1 = \Gamma'_\epsilon(0)$ e $n_1 = \Upsilon'_\epsilon(0)$.

Agora, consideremos as aplicações $T_1 : \lambda_1 \rightarrow \lambda_1$ e $T_2 : \lambda_2 \rightarrow \lambda_2$, tais que

$$T_1 = \sigma \circ \Gamma_\epsilon \circ \bar{\sigma},$$

$$T_2 = \eta \circ \Upsilon_\epsilon \circ \bar{\eta}.$$

Através de um cálculo imediato conclui-se que

$$T_1(x) = m_1^\nu x + \Psi_1(x) \text{ e}$$

$$T_2(x) = n_1^\mu x + \Phi_1(x)$$

onde Ψ_1 e Φ_1 são 1-flat.

Disso segue que $T : \lambda_1 \rightarrow \lambda_1$ é dada por

$$T = g \circ T_2 \circ f \circ T_1 \text{ e}$$

$$\begin{aligned} T'(0) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [g'(0) \cdot T'_2(0) \cdot f'(0) \cdot T'_1(0)] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [g_1 \cdot n_1^\nu \cdot f_1 \cdot m_1^\mu] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [n_1^\nu \cdot m_1^\mu] \\ &= \exp \left[\frac{\pi}{2} (\chi(p_1) + \chi(p_2)) \right], \end{aligned}$$

já que, pelos lemas 2.1.4, 2.1.5 e 2.1.7

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} m_1^\nu = \exp\left(\frac{\pi}{2} \chi(p_1)\right),$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} n_1^\mu = \exp\left(\frac{\pi}{2} \chi(p_2)\right) \text{ e}$$

$$f_1 \cdot g_1 = 1.$$

■

2.2 Conexão de umbílicos de tipo c_{22}

Nesta seção obteremos uma expressão para a aplicação de retorno que caracteriza a configuração principal em uma vizinhança do laço c_{22} .

2.2.1 Aplicação de retorno

Seja $\alpha \in I^r$, $r \geq 5$, que possui uma conexão γ de tipo c_{22} , Pertencente a F_α , em um ponto p . denotaremos por $L_1 = L_1(p)$ e $L_2 = L_2(p)$ os raios em $T_p M$ que são tangentes às separatrizes de p e por $L_0 = L_0(p)$ o raio que é uma tangente comum a todas as linha que se aproximam de p . Considerando a orientação positiva de M , denotaremos por $\theta_i = \theta_i(p)$, $i = 1, 2$, o ângulo orientado de L_0 para L_i . Veja figura 2.7.

Figura 2.7: conexão c_{22}

Definição 2.2.1 Chamaremos de *assimetria de α no ponto umbílico p de tipo D_2* ao número $\tau_1 + \tau_2$, onde $\tau_1 = \tan(\theta_1)$ e $\tau_2 = \tan(\theta_2)$.

Orientemos γ partindo de p na direção de L_1 . Seja V uma vizinhança de γ e $\bar{W}$ uma componente conexa de $V - \gamma$ contendo as linhas principais de $F_\alpha|_V$ em torno de γ . Estendamos a orientação de γ a $F_\alpha|_W$, onde $W = \bar{W} \cup \gamma$.

Sejam

$$\lambda_1 : [0, \delta) \rightarrow W ,$$

$$\lambda_2 : [0, \delta) \rightarrow W$$

curvas regulares transversais a F_α que encontram γ exatamente em $\gamma_1(0)$, $\gamma_2(0)$ e suficientemente próximas a p .

Seja

$$T : [0, \delta) \rightarrow [0, \delta)$$

a expressão coordenada da aplicação de retorno de Poincaré, $\lambda_2([0, \delta)) \rightarrow \lambda_2([0, \delta))$ induzida por $F_\alpha|_W$.

Proposição 2.2.1 *Sejam*

$$\varsigma = \left| \frac{\frac{\tau_1^2 + 2 - \frac{a}{b}}{\tau_1^2 + 1}}{\frac{\tau_2^2 + 2 - \frac{a}{b}}{\tau_2^2 + 1}} \right| ,$$

então

$$T(x) = Ax^\varsigma(1 + r(x)),$$

onde $r(x)$ é contínua, $r(0) = 0$ e A é uma constante positiva.

Como no caso da conexão c_{11} , neste caso também usaremos o seguinte lema [5].

Lema 2.2.1 *Seja $p \in U_\alpha$ do tipo D_2 . Existe um sistema de coordenadas $(u, v) : (M, p) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ com orientação positiva de M e uma isometria Γ que preserva orientação de $\mathbb{R}^3$ com $\Gamma(\alpha(p)) = 0$, tal que $\Gamma \circ \alpha(u, v) = (u, v, h(u, v))$, com 3-jato de h em 0 dado por*

$$J_0^3 h(u, v) = \frac{k}{2}(u^2 + v^2) + \frac{a}{6}u^3 + \frac{b}{2}uv^2 + \frac{c}{6}v^3,$$

onde

- i) $b \neq 0$ e as raízes de $bt^2 - ct + a - 2b = 0$ são: $\tau_1 = \frac{c}{2b} + \sqrt{(\frac{c}{2b})^2 - \frac{a}{b} + 2}$
e $\tau_2 = \frac{c}{2b} - \sqrt{(\frac{c}{2b})^2 - \frac{a}{b} + 2}$. Além disso, $\tau_1 \cdot \tau_2 > -1$.

ii) a derivada de (u, v) em p é a identidade e: $L_0 = \{(u, 0) \mid u > 0\}$,
 $L_1 = \{(u, \tau_1 u) \mid u > 0\}$, $L_2 = \{(u, \tau_2 u) \mid u > 0\}$.

Lema 2.2.2 A superfície $\mathcal{L}$ é um gráfico no plano (u, p) se p não for raiz de $p^2 - \eta p - 1 = 0$, i.é, $\mathcal{L}(u, v(u, p), p) = 0$.

Figura 2.8: Superfície projetiva LM de D_2 e campo de Lie-Cartan

Figura 2.9: Projeção do campo de Lie-Cartan

Demonstração

Basta observar que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}|_{(0,0,p)} = \xi p$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}|_{(0,0,p)} = p^2 + \eta p - 1$, $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u^2}|_{(0,0,p)} = 2a_1$, $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u \partial v}|_{(0,0,p)} = a_2$ e $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v^2}|_{(0,0,p)} = 2a_3$. Como $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}|_{(0,0,p)} \neq 0$, se $p = \tau_i$, $i = 1, 2$, pelo Teorema da Função Implícita podemos colocar a variável u como função das variáveis v e p . Para encontrar uma expansão para $u(v, p)$, é só seguir a demonstração do lema 2.1.2. ■

Demonstração (da proposição 2.2.1):

Consideremos a equação diferencial das linhas de curvatura principal em p , quando o sistema de coordenadas é como no lema 2.2.1.

$$[bv + L]dv^2 - [(b - a)u + cv + M]dudv - [bv + N]du^2 = 0, \quad (2.24)$$

onde L, M e N são funções de ordem $O[(u^2 + v^2)^2]$ e de classe C^{r-2} .

Agora, consideremos: os raios $\bar{L}_1 = \{(u, 2\tau_1 u) \mid u > 0\}$ e $\bar{L}_2 = \{(u, 2\tau_2 u) \mid u > 0\}$; as aplicações de transição $T_1 : \bar{L}_2 \rightarrow \bar{L}_1$, $\sigma_1 : \bar{L}_1 \rightarrow \lambda_1$, $f : \lambda_1 \rightarrow \lambda_2$ e $\sigma_2 : \lambda_2 \rightarrow \bar{L}_2$, como na figura 2.7.

Seja, a superfície LM em PM definida pelas soluções da equação 2.24. Na carta $(u, v; p = dv/du)$, LM_α se escreve como

$$\mathcal{L}(u, v; p) = [bv + L]p^2 - [(b - a)u + cv + M]p - [bv + N] = 0, \quad (2.25)$$

e na carta $(u, v; q = du/dv)$

$$\mathcal{L}(u, v; p) = [bv + L] - [(b - a)u + cv + M]q - [bv + N]q^2 = 0. \quad (2.26)$$

Analogamente, ao caso da seção anterior, consideremos o campo de Lie-Cartan tangente à superfície $\mathcal{L}$, veja figura 2.8 e a forma normal 2.6.

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \mathcal{L}_p \\ \dot{v} &= p\mathcal{L}_p \\ \dot{p} &= -\{\mathcal{L}_u + p\mathcal{L}_v\} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Agora consideremos a projeção, X , do campo de Lie-Cartan no plano (u, p) .

$$X(u, p) = \begin{cases} \dot{u} = 2v(u, p)p + \xi u + \eta v(u, p) \\ \dot{p} = -\{\xi p + 2a_1 u + a_2 v(u, p) + p(p^2 + \eta p - 1 + a_2 u + 2a_3 v(u, p))\} \end{cases} \quad (2.28)$$

Calculemos a derivada do campo $X|_{(0,0,\tau_i)}$, $i = 1, 2$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{u}}{\partial u}|_{(u,v(u,p),p)} &= 2p \frac{\partial v}{\partial u} + \eta \frac{\partial v}{\partial u} + \xi \\ \frac{\partial \dot{p}}{\partial u}|_{(u,v(u,p),p)} &= -\{2a_1 + a_2 \frac{\partial v}{\partial u} + p[a_2 + 2a_3 \frac{\partial v}{\partial u}]\} \\ \frac{\partial \dot{u}}{\partial p}|_{(u,v(u,p),p)} &= 2v(u, p) + 2p \frac{\partial v}{\partial p} + \eta \frac{\partial v}{\partial p} \\ \frac{\partial \dot{p}}{\partial p}|_{(u,v(u,p),p)} &= -\{\xi + a_2 \frac{\partial v}{\partial p} + p^2 + \eta p - 1 + a_2 u + 2a_3 v(u, p) + p[2p + \eta + 2a_3 \frac{\partial v}{\partial p}]\} \end{aligned}$$

Portanto, pela demonstração do lema 2.2.2, temos que

$$\frac{\partial v}{\partial u}|_{(0,\tau_i)} = -\frac{\xi \tau_i}{\tau_i^2 + \eta \tau_i - 1} \quad e$$

$$\frac{\partial v}{\partial p}|_{(0,\tau_i)} = 0,$$

segue então que

$$DX|_{(0,\tau_i)} = \begin{pmatrix} \tau_i^2 + 1 & 0 \\ \frac{\partial \dot{p}}{\partial u}|_{(0,\tau_i)} & -(\tau_i^2 - \xi + 1) \end{pmatrix},$$

onde $\xi = \frac{a}{b} - 1$ e, portanto, $-(\tau_i^2 - \eta + 1) = -(\tau_i^2 + 2 - \frac{a}{b})$.

Usando os lemas 2.1.3, 2.1.4, 2.1.6 e 2.1.7 temos que

$$T_1 = m_1^\nu x + O(x^3),$$

onde $m_1^\nu = \Gamma'_\epsilon(0)$.

Agora, consideremos a aplicação $\bar{T} : \lambda_2 \rightarrow \lambda_1$, tal que

$$\bar{T} = \sigma_1 \circ T_1 \circ \sigma_2,$$

Através de um cálculo imediato conclui-se que

$$\bar{T}(x) = m_1^\nu x^{\mu_1 \mu_2} (1 + \psi(x)) ,$$

onde $\mu_1 = \frac{\tau_1^2 + 1}{\tau_1^2 + 2 - \frac{a}{b}}$, $\mu_2 = \frac{\tau_2^2 + 2 - \frac{a}{b}}{\tau_2^2 + 1}$ e $\psi \in I$. Seja $f(x) = f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + O(x^4)$.

Disso segue que $T : \lambda_2 \rightarrow \lambda_2$ é dada por

$$\begin{aligned} T(x) &= f \circ \bar{T}(x) \\ &= f_1 m_1^\nu x^{\mu_1 \mu_2} (1 + \psi(x)). \end{aligned}$$

Na expressão acima, fazendo $\varsigma = \mu_1 \mu_2$, $A = f_1 m_1^\nu$ e $r(x) = \psi(x)$, segue a demonstração da proposição. ■

2.3 Conexão de umbílicos de tipo c_{33}

Nesta seção obteremos uma expressão para a aplicação de retorno que caracteriza a configuração principal em uma vizinhança do laço c_{33} .

2.3.1 Aplicação de retorno

Seja $\alpha \in I^r$, $r \geq 5$, que possui uma conexão γ de tipo c_{33} , pertencente a F_α , em um ponto p . denotaremos por $L_1 = L_1(p)$ e $L_2 = L_2(p)$ os raios em $T_p M$ que são tangentes às separatrizes de p e por $L_0 = L_0(p)$ o raio que não é uma tangente a γ em p . Considerando a orientação positiva de M , denotaremos por $\theta_i = \theta_i(p)$, $i = 1, 2$, o ângulo orientado de L_0 para L_i . Veja figura 2.10.

Definição 2.3.1 *Chamaremos de assimetria de α no ponto umbílico p de tipo D_3 , com respeito a L_0 , ao número $\tau_1 + \tau_2$, onde $\tau_1 = \tan(\theta_1)$ e $\tau_2 = \tan(\theta_2)$.*

Orientemos γ partindo de p na direção de L_1 . Seja V uma vizinhança de γ e $\bar{W}$ uma componente conexa de $V - \gamma$ contendo as linhas principais de

Figura 2.10: conexão c_{33}

$F_\alpha|_V$ em torno de γ . Estendamos a orientação de γ a $F_\alpha|_W$, onde $W = \bar{W} \cup \gamma$, como na figura 2.10.

Sejam

$$\lambda_1 : [0, \delta) \rightarrow W ,$$

$$\lambda_2 : [0, \delta) \rightarrow W$$

curvas regulares transversais a F_α que encontram γ exatamente em $\lambda_1(0)$, $\lambda_2(0)$ e suficientemente próximas a p , como na figura 2.10.

seja

$$T : [0, \delta) \rightarrow [0, \delta)$$

a expressão coordenada da aplicação de retorno de Poincaré, $\lambda_2([0, \delta)) \rightarrow \lambda_2([0, \delta))$ induzida por $F_\alpha|_W$.

Proposição 2.3.1 *Seja*

$$\varsigma = \left| \frac{\frac{\tau_1^2 + 2 - \frac{a}{b}}{\tau_1^2 + 1}}{\frac{\tau_2^2 + 2 - \frac{a}{b}}{\tau_2^2 + 1}} \right| ,$$

então

$$T(x) = Ax^\varsigma(1 + r(x)),$$

onde $r(x)$ é contínua, $r(0) = 0$ e A é uma constante positiva.

Lema 2.3.1 *Seja $p \in U_\alpha$ do tipo D_3 . Existe um sistema de coordenadas $(u, v) : (M, p) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ com orientação positiva de M e uma isometria Γ que preserva orientação de $\mathbb{R}^3$ com $\Gamma(\alpha(p)) = 0$, tal que $\Gamma \circ \alpha(u, v) = (u, v, h(u, v))$, com 3-jato de h em 0 dado por*

$$J_0^3 h(u, v) = \frac{k}{2}(u^2 + v^2) + \frac{a}{6}u^3 + \frac{b}{2}uv^2 + \frac{c}{6}v^3,$$

onde

- i) $b \neq 0$ e as raízes de $bt^2 - ct + a - 2b = 0$ são: $\tau_1 = \frac{c}{2b} + \sqrt{(\frac{c}{2b})^2 - \frac{a}{b} + 2}$ e $\tau_2 = \frac{c}{2b} - \sqrt{(\frac{c}{2b})^2 - \frac{a}{b} + 2}$. Além disso, $\tau_1 \tau_2 < -1$.
- ii) a derivada de (u, v) em p é a identidade e: $L_0 = \{(u, 0) \mid u > 0\}$, $L_1 = \{(u, \tau_1 u) \mid u > 0\}$, $L_2 = \{(u, \tau_2 u) \mid u > 0\}$.

Demonstração (da proposição 2.3.1)

Consideremos a equação diferencial das linhas de curvatura principais em p , quando o sistema de coordenadas é como no lema 2.3.1.

$$[bv + L]dv^2 - [(b - a)u + cv + M]dudv - [bv + N]du^2 = 0 \quad (2.29)$$

onde L, M e N são funções de ordem $O[(u^2 + v^2)^2]$ e de classe C^{r-2} .

Agora, consideremos: os raios $\bar{L}_1 = \{(u, \frac{\tau_1}{2}u) \mid u > 0\}$ e $\bar{L}_2 = \{(u, \frac{\tau_2}{2}u) \mid u > 0\}$; as aplicações de transição $T_1 : \bar{L}_2 \rightarrow \bar{L}_1$, $\sigma_1 : \bar{L}_1 \rightarrow \lambda_1$, $f : \lambda_1 \rightarrow \lambda_2$ e $\sigma_2 : \lambda_2 \rightarrow \bar{L}_2$, como na figura 2.10.

Analogamente, ao caso da seção anterior, consideremos o campo de Lie-Cartan tangente à superfície $\mathcal{L}$, veja figura 2.11 e a forma normal 2.6.

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \mathcal{L}_p \\ \dot{v} &= p\mathcal{L}_p \\ \dot{p} &= -\{\mathcal{L}_u + p\mathcal{L}_v\} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Figura 2.11: Superfície projetiva D_3 e campo de Lie-Cartan

Figura 2.12: Projeção do campo de Lie-Cartan

Agora consideremos a projeção, X , do campo de Lie-Cartan no plano (u, p) .

$$X(u, p) = \begin{cases} \dot{u} = 2v(u, p)p + \xi u + \eta v(u, p) \\ \dot{p} = -\{\xi p + 2a_1 u + a_2 v(u, v) + p(p^2 + \eta p - 1 + a_2 u + 2a_3 v(u, p))\} \end{cases} \quad (2.31)$$

O restante da prova desta proposição é idêntico ao feito para demonstrar a proposição 2.2.1. ■

Capítulo 3

Bifurcações de Codimensão 1

Neste capítulo usaremos o campo de Lie -Cartan para calcularmos a segunda derivada da aplicação de transição em torno dos pontos umbílicos, estudaremos a terceira derivada ao longo da conexão, encontraremos a expressão do desenvolvimento assintótico do retorno, faremos a perturbação de α a um parâmetro e obteremos o diagrama de bifurcação.

3.1 Conexão entre umbílicos de tipo c_{11}

3.1.1 Segunda derivada em torno dos pontos umbílicos

Como no cálculo da primeira derivada feita na seção anterior, agora faremos a análise da segunda variação através do campo de Lie-Cartan projetado no plano (v, p) . Por isso temos:

$$V(v, p) = \frac{dv}{dp}(v, p),$$

$$\Gamma''_{1\epsilon} = \exp \left(\int_{-\epsilon}^{-1/\epsilon} \frac{\partial}{\partial v}(V(0, p)) dp \right) \int_{-\epsilon}^{-1/\epsilon} \left[\exp \left(\int_{-\epsilon}^p \frac{\partial}{\partial v}(V(0, p)) dp \right) \frac{\partial^2}{\partial v^2}(V(0, p)) \right] dp, \quad (3.1)$$

$$\Gamma''_{2\epsilon} = \exp \left(\int_{1/\epsilon}^{\epsilon} \frac{\partial}{\partial v}(V(0, p)) dp \right) \int_{1/\epsilon}^{\epsilon} \left[\exp \left(\int_{1/\epsilon}^p \frac{\partial}{\partial v}(V(0, p)) dp \right) \frac{\partial^2}{\partial v^2}(V(0, p)) \right] dp. \quad (3.2)$$

Derivando duas vezes 2.13 obtemos

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2}(V(v, p))|_{v=0} = \frac{\frac{\partial^2 \dot{v}}{\partial v^2}(0, p)}{\dot{p}(0, p)} - 2 \frac{\frac{\partial \dot{v}}{\partial v}(0, p) \frac{\partial \dot{p}}{\partial v}(0, p)}{(\dot{p}(0, p))^2}, \quad (3.3)$$

por 2.11 e 2.12 temos que

$$\frac{\partial^2 \dot{v}}{\partial v^2}(0, p) = \xi u_2 p \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \dot{p}}{\partial v}(0, p) = -(2a_1 u_1 + a_2 + a_2 u_1 p + 2a_3 p). \quad (3.5)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial v^2}(V(v, p))|_{v=0} = & \frac{2a_1(1-\eta p-p^2)^2-2a_2\xi p(1-\eta p-p^2)-2\xi^2 a_3 p^2}{\xi^2 p^3(p^2+\eta p+\xi-1)^2} + \\ & + 2 \frac{p(2p+\xi u_1+\eta)(2a_1 u_1+a_2+a_2 u_1 p+2a_3 p)}{\xi^2 p^3(p^2+\eta p+\xi-1)^2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Na proposição abaixo calcularemos a segunda derivada da aplicação de transição Γ_ϵ definida em 2.5.

Proposição 3.1.1

$$\begin{aligned} \Gamma''_0(0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} & [\Gamma''_{2\epsilon}(0)(\Gamma'_{2\infty}(0))^2(\Gamma'_{1\infty}(0))^2(\Gamma'_{1\epsilon}(0))^2 \\ & + \Gamma'_{2\epsilon}(0)(\Gamma''_{2\infty}(0))(\Gamma'_{1\infty}(0))^2(\Gamma'_{1\epsilon}(0))^2 \\ & + \Gamma'_{2\epsilon}(0)(\Gamma'_{2\infty}(0))(\Gamma''_{1\infty}(0))(\Gamma'_{1\epsilon}(0))^2 \\ & + \Gamma'_{2\epsilon}(0)(\Gamma'_{2\infty}(0))(\Gamma'_{1\infty}(0))\Gamma''_{1\epsilon}(0)] = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

A prova dessa proposição segue do seguinte lema.

$$\textbf{Lema 3.1.1} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\Gamma''_{2\epsilon}(0)(\Gamma'_{1\epsilon}(0))^2] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\Gamma'_{2\epsilon}(0)\Gamma''_{1\epsilon}(0)] = 0$$

Demonstração

Inicialmente, usando 2.14 obtemos

$$\int_{1/\epsilon}^p \frac{\partial}{\partial v}(V(0, p))dp = \int_{1/\epsilon}^p \frac{p^2 + 1}{-p(p^2 + \eta p + \xi - 1)} dp \quad e \quad (3.8)$$

$$\int_{-\epsilon}^p \frac{\partial}{\partial v}(V(0, p)) dp = - \int_{\epsilon}^p \frac{p^2 + 1}{-p(p^2 - \eta p + \xi - 1)} dp \quad e \quad (3.9)$$

integrando as expressões 3.8 e 3.9, temos

$$\int_{1/\epsilon}^p \frac{p^2 + 1}{-p(p^2 + \eta p + \xi - 1)} dp = \begin{cases} -\frac{\ln p}{\xi-1} - \frac{\xi-2}{2(\xi-1)} \ln(p^2 + \eta p + \xi - 1) \\ + \frac{\xi\eta}{(\xi-1)\sqrt{4\xi-4-\eta^2}} \arctan\left(\frac{2p+\eta}{\sqrt{4\xi-4-\eta^2}}\right) \\ + \frac{\ln(1/\epsilon)}{\xi-1} + \frac{\xi-2}{2(\xi-1)} \ln((1/\epsilon)^2 + \eta(1/\epsilon) + \xi - 1) \\ - \frac{\xi\eta}{(\xi-1)\sqrt{4\xi-4-\eta^2}} \arctan\left(\frac{2(1/\epsilon)+\eta}{\sqrt{4\xi-4-\eta^2}}\right) \end{cases} ; \quad (3.10)$$

$$- \int_{\epsilon}^p \frac{p^2 + 1}{p(p^2 - \eta p + \xi - 1)} dp = \begin{cases} -\frac{\ln p}{\xi-1} - \frac{\xi-2}{2(\xi-1)} \ln(p^2 - \eta p + \xi - 1) \\ - \frac{\xi\eta}{(\xi-1)\sqrt{4\xi-4-\eta^2}} \arctan\left(\frac{2p-\eta}{\sqrt{4\xi-4-\eta^2}}\right) \\ + \frac{\ln \epsilon}{\xi-1} + \frac{\xi-2}{2(\xi-1)} \ln(\epsilon^2 - \eta\epsilon + \xi - 1) \\ + \frac{\xi\eta}{(\xi-1)\sqrt{4\xi-4-\eta^2}} \arctan\left(\frac{2\epsilon-\eta}{\sqrt{4\xi-4-\eta^2}}\right) \end{cases} . \quad (3.11)$$

Fazendo a substituição de 2.8 em 3.6 concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial v^2} (V(v, p))|_{v=0} = & \frac{2a_1(1-\eta p-p^2)^2-2a_2\xi p(1-\eta p-p^2)-2\xi^2 a_3 p^2}{\xi^2 p^3(p^2+\eta p+\xi-1)^2} + \\ & + 2 \frac{(p^2+1)(2a_1(1-\eta p-p^2)+a_2\xi p+a_2(1-\eta p-p^2)p+2a_3\xi p^2)}{\xi p^3(p^2+\eta p+\xi-1)^2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ajeitando a expressão 3.12 teremos que

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2} (V(v, p))|_{v=0} = 2 \frac{c_4 p^4 + c_3 p^3 + c_2 p^2 + c_1 p + c_0}{\xi^2 p^2 (p^2 + \eta p + \xi - 1)^2}, \quad (3.13)$$

onde

$$\begin{aligned}
c_4 &= -2\xi a_2, \\
c_3 &= -3\xi\eta a_2 + 3\xi^2 a_3, \\
c_2 &= 2\xi a_2 - \xi\eta^2 a_2 + \xi^2\eta a_3, \\
c_1 &= -\xi^2\eta a_2 + \xi\eta a_2 + \xi^3 a_3 + \xi^2 a_3, \\
c_0 &= 2\xi^2 a_2.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Substituindo 3.10 e 3.13 em 3.2, veremos que

$$\Gamma_{2\epsilon}''(0) = -m(\epsilon) \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} h(p)g(p)f(\epsilon)dp, \tag{3.15}$$

onde,

$$m(\epsilon) = \exp \left\{ \begin{aligned} &+ \frac{\ln \epsilon}{\xi-1} + \frac{\xi-2}{2(\xi-1)} \ln(\epsilon^2 + \eta\epsilon + \xi - 1) \\ &- \frac{\xi\eta}{(\xi-1)\sqrt{4\xi-4-\eta^2}} \arctan \left(\frac{2\epsilon+\eta}{\sqrt{4\xi-4-\eta^2}} \right) \\ &- \frac{\ln(1/\epsilon)}{\xi-1} - \frac{\xi-2}{2(\xi-1)} \ln((1/\epsilon)^2 + \eta(1/\epsilon) + \xi - 1) \\ &+ \frac{\xi\eta}{(\xi-1)\sqrt{4\xi-4-\eta^2}} \arctan \left(\frac{2(1/\epsilon)+\beta}{\sqrt{4\xi-4-\eta^2}} \right) \end{aligned} \right\}, \tag{3.16}$$

$$f(\epsilon) = \exp \left\{ \begin{aligned} &\frac{\ln(1/\epsilon)}{\xi-1} + \frac{\xi-2}{2(\xi-1)} \ln((1/\epsilon)^2 + \eta(1/\epsilon) + \xi - 1) \\ &- \frac{\xi\eta}{(\xi-1)\sqrt{4\xi-4-\eta^2}} \arctan \left(\frac{2(1/\epsilon)+\beta}{\sqrt{4\xi-4-\eta^2}} \right) \end{aligned} \right\}, \tag{3.17}$$

$$h(p) = \left(2 \frac{c_4 p^4 + c_3 p^3 + c_2 p^2 + c_1 p + c_0}{\xi p(p^2 + \eta p + \xi - 1)^2} \right) p^{-\frac{1}{\xi-1}} (p^2 + \eta p + \xi - 1)^{\frac{\xi-2}{2(\xi-1)}}, \tag{3.18}$$

$$g(p) = \exp \left\{ \frac{\xi\eta}{(\xi-1)\sqrt{4\xi-4-\eta^2}} \arctan \left(\frac{2p+\eta}{\sqrt{4\xi-4-\eta^2}} \right) \right\}. \tag{3.19}$$

De maneira análoga, repetindo os cálculos feitos para encontrarmos a expressão 3.15, obteremos

$$\Gamma''_{1\epsilon}(0) = -\bar{m}(\epsilon) \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} \bar{h}(p) \bar{g}(p) \bar{f}(\epsilon) dp, \quad (3.20)$$

onde,

$$\bar{m}(\epsilon) = \exp \left\{ \begin{aligned} & \frac{\ln \epsilon}{\xi-1} + \frac{\xi-2}{2(\xi-1)} \ln(\epsilon^2 - \eta\epsilon + \xi - 1) \\ & + \frac{\xi\eta}{(\xi-1)\sqrt{4\xi-4-\eta^2}} \arctan \left(\frac{2\epsilon-\eta}{\sqrt{4\xi-4-\eta^2}} \right) \\ & - \frac{\ln(1/\epsilon)}{\xi-1} - \frac{\xi-2}{2(\xi-1)} \ln((1/\epsilon)^2 - \eta(1/\epsilon) + \xi - 1) \\ & - \frac{\xi\eta}{(\xi-1)\sqrt{4\xi-4-\eta^2}} \arctan \left(\frac{2(1/\epsilon)-\beta}{\sqrt{4\xi-4-\eta^2}} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (3.21)$$

$$\bar{f}(\epsilon) = \exp \left\{ \begin{aligned} & \frac{\ln(\epsilon)}{\xi-1} + \frac{\xi-2}{2(\xi-1)} \ln((\epsilon)^2 - \eta(\epsilon) + \xi - 1) \\ & + \frac{\xi\eta}{(\xi-1)\sqrt{4\xi-4-\eta^2}} \arctan \left(\frac{2(\epsilon)-\beta}{\sqrt{4\xi-4-\eta^2}} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (3.22)$$

$$\bar{h}(p) = \left(2 \frac{\bar{c}_4 p^4 + \bar{c}_3 p^3 + \bar{c}_2 p^2 + \bar{c}_1 p + \bar{c}_0}{\xi^2 p^2 (p^2 - \eta p + \xi - 1)^2} \right) p^{-\frac{1}{\xi-1}} (p^2 - \eta p + \xi - 1)^{\frac{\xi-2}{2(\xi-1)}}, \quad (3.23)$$

$$\bar{g}(p) = \exp \left\{ - \frac{\xi\eta}{(\xi-1)\sqrt{4\xi-4-\eta^2}} \arctan \left(\frac{2p-\eta}{\sqrt{4\xi-4-\eta^2}} \right) \right\} e \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} c_4 &= \bar{c}_4, & c_3 &= -\bar{c}_3, \\ c_2 &= \bar{c}_2, & c_1 &= -\bar{c}_1, \\ c_0 &= \bar{c}_0, \end{aligned} \quad (3.25)$$

Agora, vejamos que

$$\bar{m}(\epsilon) \cdot m(\epsilon) \cdot \bar{f}(\epsilon) = \epsilon^{\frac{2\xi-2}{\xi-1}} G(\epsilon) \quad e \quad (3.26)$$

$$(\bar{m}(\epsilon))^2 \cdot m(\epsilon) \cdot f(\epsilon) = \epsilon^{\frac{4\xi-1}{\xi-1}} \bar{G}(\epsilon), \quad (3.27)$$

com G e $\bar{G}$ funções C^∞ .

Observemos que a função $h.g$ (resp. $\bar{h}.\bar{g}$) é contínua no intervalo $[\epsilon, 1/\epsilon]$, para cada $\epsilon > 0$ e, portanto, existe primitiva F (resp. $\bar{F}$). Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_{\epsilon}^{1/\epsilon} h(p)g(p)dp = F(1/\epsilon) - F(\epsilon) \quad e \quad (3.28)$$

$$\int_{\epsilon}^{1/\epsilon} \bar{h}(p)\bar{g}(p)dp = \bar{F}(1/\epsilon) - \bar{F}(\epsilon). \quad (3.29)$$

Já que,

$$\Gamma_{2\epsilon}''(0)(\Gamma_{1\epsilon}'(0))^2 = -\bar{m}(\epsilon).m(\epsilon).\bar{f}(\epsilon) \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} \bar{h}(p)\bar{g}(p)dp \quad (3.30)$$

$$\Gamma_{2\epsilon}'(0)\Gamma_{1\epsilon}''(0) = -(\bar{m}(\epsilon))^2.m(\epsilon).f(\epsilon) \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} h(p)g(p)dp \quad (3.31)$$

e como

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{m}(\epsilon).m(\epsilon).\bar{f}(\epsilon) &= 0 \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\bar{m}(\epsilon))^2.m(\epsilon).f(\epsilon) &= 0, \end{aligned} \quad (3.32)$$

segue o resultado do lema se as integrais 3.28 e 3.29 convergirem. Agora, se essas integrais não convergirem, podemos considerar a indeterminação de tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e usar a regra de L'hospital.

Faremos o limite de 3.30, o de 3.31 é análogo.

Seja $H(\epsilon) = \bar{F}(1/\epsilon) - \bar{F}(\epsilon)$. Temos que $H'(\epsilon) = -\frac{1}{\epsilon^2}\bar{F}'(1/\epsilon) - \bar{F}'(\epsilon)$ e considerando que F é uma primitiva de $\bar{h}.\bar{g}$, é imediato que

$$H'(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon^{2+\frac{1}{\xi-1}}}M(\epsilon), \quad (3.33)$$

para M uma função C^∞ .

Portanto, usando 3.26 e 3.33 temos:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{m}(\epsilon).m(\epsilon).\bar{f}(\epsilon)H(\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\epsilon^{(2+\frac{1}{\xi-1})}}M(\epsilon)}{\frac{-(\frac{2\xi-2}{\xi-1})[\epsilon^{(\frac{2\xi-2}{\xi-1}-1)}G(\epsilon)+\epsilon^{(\frac{2\xi-2}{\xi-1})}G'(\epsilon)]}{[\epsilon^{(\frac{2\xi-2}{\xi-1})}G(\epsilon)]^2}} \quad (3.34)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{\frac{\xi+1}{\xi-1}} K(\epsilon) = 0,$$

pois, $\frac{\xi+1}{\xi-1} > 0$ e K é C^∞ na origem. ■

Demonstração (da proposição 3.1.1):

Já que, pelos lemas 2.1.4 e 2.1.5,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma'_{2\infty}(0)(\Gamma'_{1\infty}(0)) = 0 \text{ e}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma''_{2\infty}(0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma''_{1\infty}(0) = 0$$

Segue o resultado da proposição, usando o lema 3.1.1 ■

3.1.2 Segunda derivada da aplicação de retorno da conexão c_{11}

Lema 3.1.2 Se $T'(0) = 1$ e T é C^2 , então $T''(0) = 0$.

Demonstração

De fato, suponhamos que $T''(0) \neq 0$, então o gráfico de T seria:

Figura 3.1: gráfico atrator e repulsor

Ou seja, a conexão γ seria atratora e repulsora, o que não é possível. Logo, segue o lema. ■

3.1.3 Terceira derivada da aplicação de transição ao longo da conexão

Seja α uma imersão que possui uma conexão γ de tipo c_{11} ou c_{22} ou c_{33} , pertencente à folheação mínima l_α , parametrizada pelo comprimento de arco, orientada de p_1 para p_2 e tem comprimento l . Seja $\bar{\gamma}$ uma curva sobre α , tal que $\gamma \subset \bar{\gamma}$ e $\bar{\gamma}$ contém parte das separatrizes de $\gamma(0) = p_1$ e $\gamma(l) = p_2$, pertencentes à folheação máxima L_α . Consideremos a carta (u, v) em torno de $\bar{\gamma}$ dada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \alpha(u, v) = & \alpha \circ \bar{\gamma}(u) + v N_\alpha \circ \bar{\gamma}(u) \wedge T_\alpha \\ & + v^2 [\tfrac{1}{2} K_n \circ \bar{\gamma}(u) + A(u, v)] N_\alpha \circ \bar{\gamma}(u), \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde $T_\alpha = (\alpha \circ \bar{\gamma})'(u)$, N_α é a normal positiva de α , A é uma função C^∞ e

$$K_n = \begin{cases} K = -H_\alpha + \sqrt{(H_\alpha)^2 - K_\alpha}, & \text{se } 0 < u < l \\ k = -H_\alpha - \sqrt{(H_\alpha)^2 - K_\alpha}, & \text{se } u < 0 \text{ ou } u > l \\ -H_\alpha, & \text{se } u = 0 \text{ ou } u = l \end{cases} \quad (3.36)$$

Lema 3.1.3 *Existem $a, \bar{a} \in \mathbb{R}$, não nulos, tais que:*

- (i) $K'_n(0) = -\sqrt{a}$, $K'_n(l) = \sqrt{\bar{a}}$,
- (ii) (a) $K(u) = K + \sqrt{a}u + \dots$

$k(u) = k - \sqrt{a}u + \dots$, para $u \in [0, \epsilon_1)$, $\epsilon_1 > 0$ suficientemente pequeno.

- (b) $K(u) = K - \sqrt{\bar{a}}u + \dots$

$k(u) = k + \sqrt{\bar{a}}u + \dots$, para $u \in (l - \epsilon_1, l]$, $\epsilon_1 > 0$ suficientemente pequeno.

Demonstração

Como os pontos umbílicos darbouxianos são singularidades de Morse [1] da função $H^2 - K$, em uma vizinhança destes pontos temos

$$H^2 - K = au^2 + buv + cv^2 .$$

Em particular, sobre γ

$$H^2 - K = au^2 .$$

Então, segue que

(i)

$$\begin{aligned} K'_n(0) &= \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{-H + \sqrt{H^2 - K} - (-H)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{H^2 - K}}{u} \\ &= \frac{\sqrt{a}|u|}{u} = -\sqrt{a} , \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} K'_n(0) &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{-H - \sqrt{H^2 - K} - (-H)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{-\sqrt{H^2 - K}}{u} \\ &= \frac{-\sqrt{a}|u|}{u} = -\sqrt{a} , \end{aligned} \quad (3.38)$$

(ii)

$$\begin{aligned} K'(0) &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{-H + \sqrt{H^2 - K} - (-H)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{H^2 - K}}{u} = \sqrt{a} , \\ k'(0) &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{-H - \sqrt{H^2 - K} - (-H)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{-\sqrt{H^2 - K}}{u} = -\sqrt{a} , \\ K'(l) &= \lim_{u \rightarrow l^-} \frac{-H + \sqrt{H^2 - K} - (-H)}{u - l} = \lim_{u \rightarrow l^-} \frac{\sqrt{H^2 - K}}{u - l} = -\sqrt{a} , \\ k'(l) &= \lim_{u \rightarrow l^-} \frac{-H - \sqrt{H^2 - K} - (-H)}{u - l} = \lim_{u \rightarrow l^-} \frac{-\sqrt{H^2 - K}}{u - l} = \sqrt{a} . \end{aligned}$$

Segue o lema.

Na carta 3.35 a equação das linhas de curvatura em uma vizinhança de γ , ou seja, para $0 \leq u \leq l$ é [12, 9] :

$$M_1 dv^2 + M_2 dudv + M_3 du^2 = 0, \quad (3.39)$$

para

$$M_1 = Fg - Gf = v[1 - k_g v - \frac{1}{2}kKv^2 - kv^2A][-K' - 2A_u - A_{uv}v] + \\ + v^2[-\frac{1}{2}K' - A_u][k_g + kKv + 2kA_v + kA_vv^2] + O(v^3), \quad (3.40)$$

$$M_2 = Eg - Ge = 2A + K - k + [4A_v - 4k_gA - 2k_gK + 2k_gk]v + \\ + [A_{vv} - 4k_gA_v - \frac{1}{2}kK^2 - 2kKA - 2kA^2 \\ - 2k_g(4A_v - 2k_gA - k_gA - k_gK) \\ + (2A + K)(k_g^2 - kK - 2kA) - k(K + 2A)^2 \\ - (kk_g^2 + \frac{1}{2}K'' + 2k_g^2K - k^2K - k_gA_v + A_{uu} \\ - 2k^2A + 4k_g^2A)v^2 + O(v^3), \quad (3.41)$$

$$M_3 = Ef - Fe = (K' + 2A_u)v + (A_{uv} - 5k_gA_u - \frac{3}{2}k_gK')v^2 + O(v^3), \quad (3.42)$$

onde e, f, g, E, F, G são os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais de α , expressas nas coordenadas (u, v) ; e k_g é a curvatura geodésica de γ .

Observação 8 *No que segue estaremos considerando superfícies que possuem conexões de tipo c_{11} com a assimetria χ , H_v e H_{uv} suficientemente pequenas. Uma superfície deste tipo pode ser conseguida perturbando o elipsóide de três eixos distintos com o termo v^3 .*

Para facilitar nossa escrita, na proposição abaixo, adotaremos a seguinte notação:

$$\int_0^l f(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{l-\epsilon} f(x)dx,$$

$$[f(x)]_0^l = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [f(x)]_\epsilon^{l-\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{f(l-\epsilon) - f(\epsilon)\}$$

Proposição 3.1.2 *Sejam λ_1 e λ_2 , seções transversais à $\bar{\gamma}$, respectivamente, em $\bar{\gamma}(0) = p_1$ e $\bar{\gamma}(l) = p_2$ e $f : \lambda_1 \rightarrow \lambda_2$. Então,*

$$f'(0) = e^{-\int_0^l \frac{K'}{K-k} du} < \infty , \quad (3.43)$$

$$f''(0) = e^{-\int_0^l \frac{K'}{K-k} du} \int_0^l e^{-(\int_0^u \frac{K'}{K-k} d\tau)} P(u) du < \infty , \quad (3.44)$$

$$P(u) = \frac{-2K'[2k_g k + 2H_v] + [2H_{uv} - k_g K' + 2k'_g K - 2Kk_g](K-k)}{(K-k)^2} ;$$

$$f'''(0) = R + e^{-\int_0^l \frac{K'}{K-k} du} \int_0^l Q(u) du < \infty , \quad (3.45)$$

onde,

$$\begin{aligned} Q(u) &= \varphi_1(u) + \varphi_2(u) + \varphi_3(u) + \varphi_4(u) + \varphi_5(u) + \varphi_6(u); \\ R &= e^{-\int_0^l \frac{K'}{K-k} du} \left[\begin{aligned} &-\frac{2}{3} \frac{H_{vv} \sigma_1^2}{K-k} + \frac{\sigma_1^2}{6(K-k)} (2k_g^2 \\ &+ 2kK + 20k_g^2 K + 6k_g H_v - kK^2 \\ &+ 8k_g^2 - k'' + 4k_g kK + K^3 + 2k_g K + 2k_g k) \end{aligned} \right]_0^l \\ \varphi_1(u) &= \frac{2\sigma_1^2 k' H_{vv}}{(K-k)^2} , \\ \varphi_2(u) &= \frac{H_v [-\sigma_1(12k'_g + 6k'_g K' - 2k'_g k') - 2k'_g \sigma_1(K-k)]}{(K-k)^2} , \\ \varphi_3(u) &= \frac{\sigma_2 [-6k_g K'(K-k) + 3k_g(3K' - k)]}{(K-k)^2} , \end{aligned}$$

$$\varphi_4(u) = \frac{\sigma_1^2[k'(3K^3 - K'') - K'(12Kk + 3K'' - 3k^2K) - \frac{6(K')^3}{K-k}]}{(K-k)^2},$$

$$\varphi_5(u) = \frac{\sigma_1[6k_g k'_g + k_g^2(3K' + k') + kK(6K' + k')]}{(K-k)},$$

$$\varphi_6(u) = \frac{6H_v k' \sigma_2}{(K-k)^2}$$

$$H = H_\alpha,$$

$$\sigma_1(u) = e^{-\int_0^u \frac{K'}{K-k} du},$$

$$\sigma_2(u) = -\frac{(\sigma_1(u))^2[2H_v + k_g(k-k)]}{K-k} - \frac{(\sigma_1(\epsilon))^2[2H_v + k_g(K-k)]}{K-k} + (3.46)$$

$$+ \sigma_1(u) \int_0^u \sigma_1(u) \left[\frac{2k_g(K-k)H_u + 2k'H_v}{(K-k)^2} \right] du \quad (3.47)$$

Demonstração

A demonstração de 3.43 e 3.44 está em [12, 9]. Sejam $v = v(u, v_0)$ a solução de 3.39 com condição inicial $v(0, v_0) = v_0$ e

$$f'(0) = \eta = \frac{\partial v}{\partial v_0}(u, o), \quad f''(0) = \nu = \frac{\partial^2 v}{\partial v_0^2}(u, o), \quad f'''(0) = \xi = \frac{\partial^3 v}{\partial v_0^3}(u, o).$$

Substituindo $v = v(u, v_0)$ em 3.39 e diferenciando três vezes, segue que η' , ν' e ξ' satisfazem ao seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\eta'[M_2] + \eta[M_3]_v = 0, \quad (3.48)$$

$$\nu'[M_2] + \nu[M_3]_v + 2(\eta')^2[M_1] + 2\eta'\eta[M_2]_v + (\eta')^2[M_3]_{vv} = 0, \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} & \xi' [M_2] + \xi [M_3]_v + 6(\eta')^2 \eta [M_1]_v + 3\nu' \eta [M_2]_v \\ & + 3\eta' \eta^2 [M_2]_{vv} + 2\eta' \nu [M_2]_v + (\eta)^3 [M_3]_{vvv} + 3\eta \nu [M_3]_{vv} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.50)$$

Disso, segue que

$$\eta(u) = e^{-\int_0^u \frac{[M_3]_v}{[M_2]} d\tau} \quad , \quad (3.51)$$

Substituindo 3.51 e η' em 3.50; assumindo, pelo lema 3.1.2, que $\nu(l) = 0$, temos que

$$\xi = -\eta(l) \int_0^l (\eta(u))^2 \left\{ \frac{6 \frac{([M_3]_v)^2 [M_1]_v}{([M_2])^3} + 3 \frac{[2[M_3]_v [M_2]_v - [M_3]_{vv} [M_2]_v] [M_2]_v}{([M_2])^3}}{-3 \frac{[M_3]_v [M_2]_{vv}}{([M_2]_v)^2} + \frac{[M_3]_{vvv}}{[M_2]}} \right\} du \quad . \quad (3.52)$$

Para conseguirmos a expressão 3.45, basta derivarmos as funções M_1 , M_2 e M_3 , e usar que

$$2H(EG - F^2)^{\frac{3}{2}} = eG - 2fF + gE$$

para obtermos as derivadas da função A em função de H , k , K e suas derivadas.

Para concluirmos esta demonstração, vejamos que para $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$ bastante pequenos, $\epsilon < \epsilon_1$ e $\epsilon < \epsilon_2$

$$\int_{\epsilon}^{\epsilon_1} \frac{K'}{K - k} du = \int_{\epsilon}^{\epsilon_1} \frac{\sqrt{a} + O(u)}{2\sqrt{a}u + O(u^2)} du = \int_{\epsilon}^{\epsilon_1} \frac{1}{2u} \left(\frac{1 + O(u)}{1 + O(u)} \right)_1 du \leq \frac{M}{2} \int_{\epsilon}^{\epsilon_1} \frac{du}{u} \quad ,$$

$$\begin{aligned} \int_{l-\epsilon_2}^{l-\epsilon} \frac{K'}{K - k} du &= \int_{l-\epsilon_2}^{l-\epsilon} \frac{-\sqrt{a} + O(u - l)}{-2\sqrt{a}(u - l) + O((u - l)^2)} du \\ &= - \int_{\epsilon}^{\epsilon_2} \frac{1}{2u} \left(\frac{1 + O(u)}{1 + O(u)} \right)_2 du \leq -\frac{N}{2} \int_{\epsilon}^{\epsilon_2} \frac{du}{u} \quad , \end{aligned}$$

$$\int_{\epsilon}^{\epsilon_1} \frac{K'}{K - k} du = \int_{\epsilon}^{\epsilon_1} \frac{\sqrt{a} + O(u)}{2\sqrt{a}u + O(u^2)} du = \int_{\epsilon}^{\epsilon_1} \frac{1}{2u} \left(\frac{1 + O(u)}{1 + O(u)} \right)_1 du \geq \frac{\bar{M}}{2} \int_{\epsilon}^{\epsilon_1} \frac{du}{u} \quad ,$$

$$\begin{aligned}
\int_{l-\epsilon_2}^{l-\epsilon} \frac{K'}{K-k} du &= \int_{l-\epsilon_2}^{l-\epsilon} \frac{-\sqrt{a} + O(u-l)}{-2\sqrt{a}(u-l) + O((u-l)^2)} du \\
&= - \int_{\epsilon}^{\epsilon_2} \frac{1}{2u} \left(\frac{1+O(u)}{1+O(u)} \right)_2 du \geq -\frac{\bar{N}}{2} \int_{\epsilon}^{\epsilon_2} \frac{du}{u},
\end{aligned}$$

onde M e $\bar{M}$ são, respectivamente, máximo e mínimo da função $\left(\frac{1+O(u)}{1+O(u)}\right)_1$ no intervalo $[0, \bar{\epsilon}]$; N e $\bar{N}$ são, respectivamente, mínimo e máximo da função $\left(\frac{1+O(u)}{1+O(u)}\right)_2$ no intervalo $[0, \bar{\epsilon}]$.

Agora, consideremos que $\bar{\epsilon} > \epsilon_2$ e $\bar{\epsilon} > \epsilon_1$

$$\frac{\bar{M}}{2} \int_{\epsilon}^{\epsilon_1} \frac{du}{u} - \frac{\bar{N}}{2} \int_{\epsilon}^{\epsilon_2} \frac{du}{u} \leq \int_{\epsilon}^{\epsilon_1} \frac{\sqrt{a} + \dots}{2\sqrt{a}u + \dots} du + \quad (3.53)$$

$$+ \int_{\epsilon}^{\epsilon_2} \frac{-\sqrt{a} + \dots}{-2\sqrt{a}u + \dots} du \leq \frac{M}{2} \int_{\epsilon}^{\epsilon_1} \frac{du}{u} - \frac{N}{2} \int_{\epsilon}^{\epsilon_2} \frac{du}{u}. \quad (3.54)$$

Como

$$\frac{M}{2} \int_{\epsilon}^{\epsilon_1} \frac{du}{u} - \frac{N}{2} \int_{\epsilon}^{\epsilon_2} \frac{du}{u} = \frac{N}{2} \left[\frac{M}{N} \int_{\epsilon}^{\epsilon_1} \frac{du}{u} - \int_{\epsilon}^{\epsilon_2} \frac{du}{u} \right],$$

$$\frac{\bar{M}}{2} \int_{\epsilon}^{\epsilon_1} \frac{du}{u} - \frac{\bar{N}}{2} \int_{\epsilon}^{\epsilon_2} \frac{du}{u} = \frac{\bar{N}}{2} \left[\frac{\bar{M}}{\bar{N}} \int_{\epsilon}^{\epsilon_1} \frac{du}{u} - \int_{\epsilon}^{\epsilon_2} \frac{du}{u} \right].$$

Observemos que $\frac{M}{N} \leq 1$ e $\frac{\bar{M}}{\bar{N}} \geq 1$. Façamos a escolha de $\epsilon_1 > \epsilon_2$, tal que

$$\frac{\bar{M}}{\bar{N}} \int_{\epsilon}^{\epsilon_1} \frac{du}{u} - \int_{\epsilon}^{\epsilon_2} \frac{du}{u} = 0 \quad e \quad (3.55)$$

$$\frac{N}{2} \left[\frac{M}{N} \int_{\epsilon}^{\epsilon_1} \frac{du}{u} - \int_{\epsilon}^{\epsilon_2} \frac{du}{u} \right] = \frac{M}{2} \int_{\bar{\epsilon}_1}^{\epsilon_1} \frac{du}{u}, \text{ onde } \epsilon < \bar{\epsilon}_1 < \epsilon_1. \quad (3.56)$$

Já que,

$$f'(0) = e^{\int_0^l \frac{K'}{K-k} du} = e^{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\epsilon}^{\epsilon_1} \frac{K'}{K-k} du + \int_{\epsilon_1}^{l-\epsilon_2} \frac{K'}{K-k} du + \int_{l-\epsilon_2}^{l-\epsilon} \frac{K'}{K-k} du \right]},$$

usando 3.55 e 3.56, temos

$$e^{\left[\int_{\epsilon_1}^{l-\epsilon_2} \frac{K'}{K-k} du\right]} \leq f'(0) \leq e^{\left[\int_{\epsilon_1}^{l-\epsilon_2} \frac{K'}{K-k} du + \frac{M}{2} \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_1} \frac{du}{u}\right]}.$$

Para mostrar que $f'''(0) < \infty$, consideremos ϵ , ϵ_1 e ϵ_2 como acima. Então,

$$\begin{aligned} & \int_{\epsilon}^{\epsilon_2} e^{(-2 \int_{\epsilon}^u \frac{K'}{K-k} d\tau)} (\varphi_1(u) + \varphi_2(u) + \varphi_4(u) + \varphi_5(u)) du = \\ & - \int_{\epsilon}^{\epsilon_2} e^{(-2 \int_{\epsilon}^u \frac{K'}{K-k} d\tau)} \frac{3(1 + O(u))}{4u^3(1 + O(u))} du \sim - \int_{\epsilon}^{\epsilon_2} \frac{3\epsilon}{4u^4} \left(\frac{(1 + O(u))}{(1 + O(u))} \right)_2 du \\ & \leq - \frac{3N\epsilon}{4} \int_{\epsilon}^{\epsilon_2} \frac{du}{u^4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\epsilon}^{\epsilon_1} e^{(-2 \int_{\epsilon}^u \frac{K'}{K-k} d\tau)} (\varphi_1(u) + \varphi_2(u) + \varphi_4(u) + \varphi_5(u)) du = \\ & \int_{\epsilon}^{\epsilon_1} e^{(-2 \int_{\epsilon}^u \frac{K'}{K-k} d\tau)} \frac{3(1 + O(u))}{4u^3(1 + O(u))} du \sim \int_{\epsilon}^{\epsilon_1} \frac{3\epsilon}{4u^4} \left(\frac{(1 + O(u))}{(1 + O(u))} \right)_2 du \\ & \leq - \frac{3M\epsilon}{4} \int_{\epsilon}^{\epsilon_1} \frac{du}{u^4} \end{aligned}$$

$$\int_{\epsilon}^{\epsilon_1} e^{(-2 \int_{\epsilon}^u \frac{K'}{K-k} d\tau)} (\varphi_1(u) + \varphi_2(u) + \varphi_4(u) + \varphi_5(u)) du \geq \frac{3\epsilon\bar{M}}{4} \int_{\epsilon}^{\epsilon_1} \frac{du}{u^4}$$

$$\int_{\epsilon}^{\epsilon_2} e^{(-2 \int_{\epsilon}^u \frac{K'}{K-k} d\tau)} (\varphi_1(u) + \varphi_2(u) + \varphi_4(u) + \varphi_5(u)) du \geq - \frac{3\epsilon\bar{N}}{4} \int_{\epsilon}^{\epsilon_2} \frac{du}{u^4}$$

Onde M e $\bar{M}$ são, respectivamente, máximo e mínimo da função $\left| \left(\frac{(1+O(u))}{(1+O(u))} \right)_1 \right|$ no intervalo $[0, \bar{\epsilon}]$; N e $\bar{N}$ são, respectivamente, mínimo e máximo da função $\left| \left(\frac{(1+O(u))}{(1+O(u))} \right)_2 \right|$ no intervalo $[0, \bar{\epsilon}]$.

Para concluir, observe que

$$R < \infty \quad \text{e} \quad \int_0^l (\varphi_3(u) + \varphi_6(u)) du < \infty$$

repetindo os passos anteriores, sempre considerando que próximo aos pontos umbílicos as expressões possuem sinais contrários.

■

Lema 3.1.4 *Seja γ uma conexão de tipo c_{11} , pertencente à folheação f_α de uma imersão $\alpha \in C^\infty$, como na observação 8. Suponhamos que k_α^2 seja não constante ao longo de γ . Então α pode ser arbitrariamente aproximada por uma imersão α_ϵ que tem γ como conexão de tipo c_{11} e $f'_\epsilon(0) \neq 0$.*

Demonstração

Consideremos a seguinte perturbação de α :

$$\alpha_\epsilon(u, v) = \alpha(u, v) + \epsilon h k' \frac{v^4}{24} N(u), \quad (3.57)$$

onde $\{v=0\}$ é a conexão γ de α e h é uma função “bump”, tal que o suporte de $h|_\gamma$ é um pequeno arco $\gamma_0 = \gamma|_{[t_1, t_2]}$ suficientemente próxima a p_1 ou p_2 e $dk_\alpha^2|_{\gamma_0} \neq 0$. Suponhamos que γ_0 está próxima de p_1 e $p_1 \notin \gamma_0$.

Realizando os cálculos temos que:

$$\begin{aligned} k &= k_{\alpha_\epsilon}^1 = k_\alpha^1 \\ k_{\alpha_\epsilon}^2 &= k_\alpha^2 + \epsilon \frac{h k' v^2}{2} + O(v^3), \quad K = k_\alpha^2 \\ H_{\alpha_\epsilon} &= H_\alpha + \epsilon \frac{h k' v^2}{4} + O(v^3). \end{aligned}$$

Disso, segue, usando o lema 3.1.3 e 3.45, que

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} f'_\epsilon(0) = e^{-\int_{\gamma_0} \frac{K'}{K-k} du} \left[-\frac{2}{3} \frac{\sigma_1^2 h k'}{K-k} \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{\gamma_0} \frac{2\sigma_1^2 h (k')^2}{(K-k)^2} du \right] \neq 0, \quad (3.58)$$

se γ_0 está suficientemente próxima a p_1 , porque

$$\frac{k'}{K-k} \sim -\frac{1}{u}.$$

Assim, temos

$$f'_\epsilon(0) = f'''(0) + e^{-\int_{\gamma_0} \frac{K'}{K-k} du} \left[-\frac{2}{3} \frac{\sigma_1^2 h k'}{K-k} \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{\gamma_0} \frac{2\sigma_1^2 h (k')^2}{(K-k)^2} du \right] \epsilon + O(\epsilon^2).$$

■

3.2 Exemplos

1) conexão c_{11} .

Consideremos o elipsóide

$$u^2 + \frac{v^2}{2} + \frac{w^2}{3} = 1. \quad (3.59)$$

Os pontos umbílicos deste elipsóide são: $p_1 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ e $p_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.

Usando o Maple V e o algoritmo que está em [14], consideraremos esta superfície, em uma vizinhança de p_1 e p_2 , na forma de Monge. Portanto, através de longos cálculos concluímos que em p_2 :

$$(1) \quad c = 0,$$

$$(2) \quad a = \frac{3}{8}\sqrt{3}$$

$$(3) \quad b = \frac{1}{16}\sqrt{6}\sqrt{2}$$

Como a assimetria $\chi(p) = \frac{c}{\sqrt{(a-2b)b-(c^2/4)}}$, temos que $\chi(p_2) = 0$, analogamente, $\chi(p_1) = 0$. além disso,

Deformando 3.59 com o termo tv^3 , t bastante pequeno, continua existindo a conexão e, através de cálculos, concluímos que os pontos umbílicos continuam sendo $p_1 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ e $p_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ e que em p_2 :

$$(1) \quad c = -\frac{1}{4}\sqrt{6}t \neq 0, \quad \text{se } t \neq 0,$$

$$(2) \quad a = \frac{3}{8}\sqrt{3},$$

$$(3) \quad b = \frac{1}{16}\sqrt{6}\sqrt{2}.$$

Logo, a assimetria $\chi(p_2) \neq 0$.

De modo análogo, em p_1 temos:

$$(1) \quad c = \frac{1}{4}\sqrt{6}t \neq 0, \quad \text{se } t \neq 0,$$

$$(2) \quad a = \frac{3}{8}\sqrt{3},$$

$$(3) \quad b = \frac{1}{16}\sqrt{6}\sqrt{2}.$$

Portanto, a assimetria $\chi(p_1) \neq 0$. Além disso, como o valor de c em p_1 e p_2 possuem sinais contrários, implica que $\chi(p_1)$ e $\chi(p_2)$ possuem sinais contrários e são iguais em módulo.

Assim, pelo lema 3.1.4, este elipsóide, deformado, satisfaz as condições do teorema 4.1.1, pois a soma das assimetrias é nula.

2) conexões c_{22} e c_{33} .

Para obtermos exemplos para as conexões c_{22} e c_{33} deveremos considerar superfícies que possuem pontos umbílicos de tipo D_2 e D_3 , e colar com uma canaleta (3.35) sobre uma curva conectando as separatrizes.

3.2.1 Desenvolvimento assintótico da aplicação de retorno da conexão c_{11}

Proposição 3.2.1 *Sejam α uma imersão que possui uma conexão γ de tipo c_{11} e $T : \lambda_1 \rightarrow \lambda_1$, onde $\lambda_1 : (-\delta, \delta) \rightarrow \alpha$ é uma seção transversal a γ , a aplicação de retorno. Então, o desenvolvimento assintótico de T é :*

- (i) $T(x) = m_1^\nu n_1^\mu x + bx^2 + ax^3 + O(x^4)$, se ν e μ são irracionais,
- (ii) $T(x) = m_1^\nu n_1^\mu x + bx^2 + ax^3 + a_1 x^{q+1}(-\ln(x)) + a_2 x^{r+1}(-\ln(g(x))) + a_3 x^{q+1}(-\ln(\Gamma_0(x))) + a_4 x^{r+1}(-\ln(\Upsilon_0(x))) + \psi(x)$, se ν e μ são racionais; a_1, a_2, a_3 e a_4 dependem, respectivamente, de $\bar{\alpha}_2, \bar{\beta}_2, \alpha_2$ e β_2 ; $a \neq 0$ depende da terceira derivada da transição ao longo da conexão e ψ é 3-flat, em $x = 0$.

Demonstração

Faremos o caso irracional, o caso racional é mais trabalhoso, mas sai seguindo a mesma idéia da prova do irracional.

Pelos lemas 2.1.6 e 3.1.2 e pelas proposições 3.1.1 e 2.1.1 temos que

$T : \lambda_1 \rightarrow \lambda_1$ é dada por

$$\begin{aligned}
T &= g \circ T_2 \circ f \circ T_1, \text{ onde} \\
T_1(x) &= \sigma \circ \Gamma_\epsilon \circ \bar{\sigma}(x) = m_1^\nu x + \psi(x), \quad m_1^\nu = \exp\left(\frac{\pi}{2}\chi(p_1)\right), \\
T_2(x) &= \eta \circ \Upsilon_\epsilon \circ \bar{\eta}(x) = n_1^\mu x + \phi(x), \quad n_1^\mu = \exp\left(\frac{\pi}{2}\chi(p_2)\right), \\
f(x) &= f_1 x + f_3 x^3 + O(x^4),
\end{aligned}$$

onde $f_1 \neq 0$.

$$g(x) = f^{-1}(x) = g_1 x + g_3 x^3 + O(x^4)$$

e ψ, ϕ são 3-flat. Para concluir a prova basta desenvolver as composições das funções acima. ■

3.2.2 Desdobramento da conexão c_{11}

Definição 3.2.1 *Seja α uma imersão que possui uma conexão de tipo c_{11} ou de tipo c_{22} ou de tipo c_{33} . Diremos que uma família α_t , $t \in V$, V uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^\Lambda$, é uma deformação ou perturbação de α , se $\alpha_0 = \alpha$.*

Figura 3.2: Desdobramento de c_{11}

Sejam α_t uma pequena perturbação de α , λ_{1t} e λ_{2t} seções transversais, respectivamente, às separatrizes que partem de p_{1t} e p_{2t} , e suficientemente próximas a esses pontos, como na figura 3.2. Consideremos $\lambda_{1t}^+ = \lambda_{1t}|_{[0,\delta]}$, $\lambda_{1t}^- = \lambda_{1t}|_{(-\delta,0]}$, $\lambda_{2t}^- = \lambda_{2t}|_{(-\delta,0]}$ e $\lambda_{2t}^+ = \lambda_{2t}|_{[0,\delta]}$.

Também neste caso, pelo lema 2.1.6, devemos considerar todas as possibilidades para ν e μ .

a) Suponhamos que ν e μ são irracionais. Como na proposição 3.2.1, sejam

$$T_{1t} : \lambda_{1t}^- \rightarrow \lambda_{1t}^+,$$

$$T_{2t} : \lambda_{2t}^- \rightarrow \lambda_{2t}^+,$$

$$f : \lambda_{1t} \rightarrow \lambda_{2t}$$

dadas por

$$T_{1t}(x) = m_{1t}^{\nu(t)}x + \psi(x, t),$$

$$T_{2t}(x) = n_{1t}^{\mu(t)}x + \phi(x, t),$$

$$f(x, t) = f_{0t} + f_{1t}x + f_{2t}x^2 + f_{3t}x^3 + O(x^4),$$

onde $f_{1t} \neq 0$.

Agora, seja $\delta : \lambda_{1t}^- \rightarrow \lambda_{2t}^+$, dada por

$$\begin{aligned} \delta(x) &= f(T_{1t}(x)) - T_{2t}(f(x)) \\ &= f_{0t}(1 - n_{1t}^\mu) + f_{1t}(m_{1t}^\nu - n_{1t}^\mu)x + f_{2t}(m_{1t}^{2\nu} - n_{1t}^\mu)x^2 \\ &\quad + f_{3t}(m_{1t}^{3\nu} - n_{1t}^\mu)x^3 + \Psi(f(x, t), t) + \psi(x, t) \end{aligned} \quad (3.60)$$

onde Ψ é 3-flat em $f(x) = 0$ e ψ é 3-flat em $x = 0$; $f_{00} = 0$, $f_{10} = f_1$, $f_{20} = f_2$, $f_{30} = f_3$ e $m_{10}^\nu = n_{10}^\mu$.

b) Suponhamos que ν e μ são racionais. Pelo teorema 2.1.1 temos,

$$\begin{aligned} \sigma(x, t) &= x^\nu(1 + h_1(x, t)), \quad \bar{\sigma}(x, t) = x^{\frac{1}{\nu}}(1 + h_2(x, t)) \\ \eta(x, t) &= x^\mu(1 + h_3(x, t)), \quad \bar{\eta}(x, t) = x^{\frac{1}{\mu}}(1 + h_4(x, t)), \end{aligned} \quad (3.61)$$

onde $h_i, i = 1, \dots, 4$, satisfaz $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} h_i(x, t) = 0$.

Observação 9 Chamaremos de I ao conjunto das funções que satisfazem a condição das h_i acima.

Através de um cálculo simples teremos que

$$T_{1t}(x) = m_{1t}^{\nu(t)} x(1 + \psi(x, t)),$$

$$T_{2t}(x) = n_{1t}^{\mu(t)} x(1 + \phi(x, t)), \text{ onde, } \phi, \psi \in I.$$

$$f(x, t) = f_{0t} + f_{1t}x + f_{2t}x^2 + f_{3t}x^3 + O(x^4),$$

onde $f_{1t} \neq 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} \delta(x) &= f(T_{1t}(x)) - T_{2t}(f(x)) \\ &= f_{0t}(1 - n_{1t}^{\mu}) + f_{1t}(m_{1t}^{\nu} - n_{1t}^{\mu})x + f_{2t}(m_{1t}^{2\nu} - n_{1t}^{\mu})x^2 \\ &\quad + f_{3t}(m_{1t}^{3\nu} - n_{1t}^{\mu})x^3 + f(x, t)\bar{\Psi}(f(x, t), t) + x\bar{\psi}(x, t), \end{aligned} \quad (3.62)$$

onde, $\bar{\phi}, \bar{\Psi} \in I$.

Observação 10 *Encontrar os zeros de $T(x, t) - x = 0$, é equivalente a encontrar os zeros de $\delta(x) = 0$. Lembrando que cada zero de $T(x, t) - x = 0$, corresponde ao surgimento de um ciclo limite em α_t .*

3.2.3 Diagrama de bifurcação

Teorema 3.2.1 *Seja α uma imersão que possui uma conexão γ de tipo c_{11} e $T : \lambda_1 \rightarrow \lambda_1$, onde $\lambda_1 : (-\delta, \delta) \rightarrow \alpha$ é uma seção transversal a γ , a aplicação de retorno de Poincaré da proposição 3.2.1, com $T'(0) = m_1^{\nu}n_1^{\mu} \neq 1$, ou seja, $\chi(p_1) \neq \chi(p_2)$. Então,*

- (a) *se $m_1^{\nu}n_1^{\mu} > 1 \Rightarrow \alpha_t$ possui um único ciclo principal para $b_0 < 0$ e não possui ciclos se $b_0 > 0$,*
- (b) *se $m_1^{\nu}n_1^{\mu} < 1 \Rightarrow \alpha_t$ possui um único ciclo principal para $b_0 > 0$ e não possui ciclos se $b_0 < 0$.*

O diagrama de bifurcação de α_t é como na figura 3.5.

Demonstração

- a) Suponhamos na equação 3.62 $b_1 = f_{1t}(m_{1t}^{\nu} - n_{1t}^{\mu}) > 0$ e $b_0 = f_{0t}(1 - n_{1t}^{\mu})$.

Figura 3.3: gráfico de δ para $b_1 > 0$

Neste caso, temos $\frac{\partial \delta}{\partial x}(0) > 0$, se $t \in V$, for suficientemente pequeno. Logo, concluímos que σ é estritamente crescente em $[0, \epsilon)$, $\epsilon > 0$ pequeno. Então, o gráfico de σ é como na figura 3.3,

ou seja, se $b_0 > 0$, não surge ciclo principal e se $b_0 < 0$, surge um único ciclo principal.

b) Suponhamos na equação 3.62 $b_1 = f_{1t}(m_{1t}^\nu - n_{1t}^\mu) < 0$.

Neste caso, temos $\frac{\partial \delta}{\partial x}(0) < 0$, se $t \in V$, for suficientemente pequeno. Logo, concluímos que σ é estritamente decrescente em $[0, \epsilon)$, $\epsilon > 0$ pequeno. Então, o gráfico de σ é como na figura 3.4.

Figura 3.4: gráfico de δ para $b_1 < 0$

■

Figura 3.5: diagrama de bifurcação

3.3 Conexão de umbílicos de tipo c_{22}

Nesta seção veremos que ao perturbarmos uma superfície que possui uma conexão tipo c_{22} poderemos ter o surgimento, ou não, de um ciclo principal.

3.3.1 Desdobramento da conexão c_{22}

Sejam α_t uma pequena perturbação de α , λ_{1t} e λ_{2t} seções transversais à conexão γ e próximas ao ponto p , como na figura 3.6.

Figura 3.6: desdobramento da conexão c_{22}

Consideremos

$$\begin{aligned} \lambda_{1t}^+ &= \lambda_{1t}|_{[0,\delta)}, & \lambda_{1t}^- &= \lambda_{1t}|_{(-\delta,0]}, \\ \lambda_{2t}^- &= \lambda_{2t}|_{(-\delta,0]} \text{ e } \lambda_{2t}^+ &= \lambda_{2t}|_{[0,\delta)}. \end{aligned}$$

Também neste caso, pelo lema 2.1.6, devemos considerar todas as possibilidades para μ_1 e μ_2 da demonstração da proposição 2.2.1.

a) Suponhamos que μ_1 e μ_2 são irracionais. Como na proposição 3.2.1, sejam

$$T_{1t} : \lambda_{1t}^- \rightarrow \lambda_{2t}^+,$$

$$f : \lambda_{1t} \rightarrow \lambda_{2t}$$

dadas por

$$\begin{aligned} T_{1t}(x) &= m_{1t}^{\nu(t)} x^{\mu_{1t}\mu_{2t}} + \psi(x, t), \quad \psi \text{ é 2-flat em } x = 0 \\ f(x, t) &= f_{0t} + f_{1t}x + f_{2t}x^2 + f_{3t}x^3 + O(x^4), \end{aligned}$$

onde $f_{1t} \neq 0$.

Agora, seja $\delta : \lambda_{1t}^- \rightarrow \lambda_{2t}^+$, dada por

$$\begin{aligned} \delta(x, t) &= T_{1t}(x) - f(x) \\ &= m_{1t}^{\nu(t)} x^{\mu_{1t}\mu_{2t}} - f_{0t} - f_{1t}x - f_{2t}x^2 + \psi(x, t) \end{aligned} \quad (3.63)$$

onde ψ é 2-flat em $x = 0$; $f_{00} = 0$, $f_{10} = f_1$, $f_{20} = f_2$.

b) Suponhamos que μ_1 e μ_2 são racionais. Pelo teorema 2.1.1 temos,

$$\sigma_1(x, t) = x^{\mu_{1t}}(1 + h_1(x, t)), \quad \sigma_2(x, t) = x^{\mu_{2t}}(1 + h_2(x, t)) \quad (3.64)$$

onde $h_i, i = 1, 2$, satisfaz $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} h_i(x, t) = 0$.

Através de um cálculo simples teremos que

$$T_{1t}(x) = m_{1t}^{\nu(t)} x^{\mu_{1t}\mu_{2t}} (1 + \psi(x, t)), \text{ onde, } \psi \in I.$$

$$f(x, t) = f_{0t} + f_{1t}x + f_{2t}x^2 + f_{3t}x^3 + O(x^4), \quad f_{1t} \neq 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \delta(x, t) &= T_{1t}(x) - f(x) \\ &= m_{1t}^{\nu(t)} x^{\mu_{1t}\mu_{2t}} + \Psi(x, t) - f(x) \end{aligned} \quad (3.65)$$

onde, $\Psi = m_{1t}^{\nu(t)} x^{\mu_{1t}\mu_{2t}} \psi(x, t) \in I$.

3.3.2 Diagrama de bifurcação

Teorema 3.3.1 *Sejam α uma imersão que possui uma conexão γ de tipo c_{22} e $T : \lambda_1 \rightarrow \lambda_1$, onde $\lambda_1 : (-\delta, \delta) \rightarrow \alpha$ é uma seção transversal a γ , a aplicação de retorno de Poincaré da proposição 2.2.1, com $\varsigma \neq 1$. Então,*

- (a) *se $\varsigma > 1 \Rightarrow \alpha_t$ possui um único ciclo principal para $b_0 > 0$ e não possui ciclos se $b_0 < 0$,*
- (b) *se $\varsigma < 1 \Rightarrow \alpha_t$ possui um único ciclo principal para $b_0 < 0$ e não possui ciclos se $b_0 > 0$.*

O diagrama de bifurcação de α_t é como na figura 3.7.

Figura 3.7: diagrama de bifurcação

Demonstração

a) Suponhamos na equação 3.65, $\varsigma_t = \mu_{1t}\mu_{2t} > 1$ e $b_0 = -f_{0t}$.

Neste caso, temos $\frac{\partial \delta}{\partial x}(0) = -f_{1t} < 0$, se $t \in V$, for suficientemente pequeno. Logo, concluímos que σ é estritamente decrescente em $[0, \epsilon)$, $\epsilon > 0$ pequeno. Então, o gráfico de σ é como na figura 3.4, ou seja, se $b_0 < 0$, não surge ciclo principal e se, $b_0 > 0$, surge um único ciclo principal.

b) Suponhamos na equação 3.65, $\varsigma_t = \mu_{1t}\mu_{2t} < 1$.

Neste caso, temos $\frac{\partial \delta}{\partial x}(0) = \infty$, se $t \in V$, for suficientemente pequeno. Logo, concluímos que σ é estritamente crescente em $[0, \epsilon)$, $\epsilon > 0$ pequeno. Então, o gráfico de σ é como na figura 3.8 e se $b_0 > 0$, α_t não possui ciclos principais; se $b_0 < 0$, α_t possui um único ciclo principal. ■

Figura 3.8: gráfico de σ para $\varsigma < 1$

3.4 Conexão de umbílicos de tipo c_{33}

Nesta seção veremos que ao perturbarmos uma superfície que possui uma conexão tipo c_{33} poderemos ter o surgimento, ou não, de um ciclo principal.

3.4.1 Desdobramento da conexão c_{33}

Sejam α_t uma pequena perturbação de α , λ_{1t} e λ_{2t} seções transversais à conexão γ e próximas ao ponto p , como na figura 3.9.

Figura 3.9: desdobramento da conexão c_{33}

Consideremos

$$\begin{aligned} \lambda_{1t}^+ &= \lambda_{1t}|_{[0,\delta)}, & \lambda_{1t}^- &= \lambda_{1t}|_{(-\delta,0]}, \\ \lambda_{2t}^- &= \lambda_{2t}|_{(-\delta,0]} \text{ e } & \lambda_{2t}^+ &= \lambda_{2t}|_{[0,\delta)}. \end{aligned}$$

Também neste caso, pelo lema 2.1.6, devemos considerar todas as possibilidades para μ_1 e μ_2 da demonstração da proposição 2.2.1.

a) Suponhamos que μ_1 e μ_2 são irracionais. Como na proposição 3.2.1, sejam

$$T_{1t} : \lambda_{1t}^- \rightarrow \lambda_{2t}^+,$$

$$f : \lambda_{1t} \rightarrow \lambda_{2t}$$

dadas por

$$T_{1t}(x) = m_{1t}^{\nu(t)} x^{\mu_{1t}\mu_{2t}} + \psi(x, t), \quad \psi \text{ é 2-flat em } x = 0$$

$$f(x, t) = f_{0t} + f_{1t}x + f_{2t}x^2 + f_{3t}x^3 + O(x^4),$$

onde $f_{1t} \neq 0$.

Agora, seja $\delta : \lambda_{1t}^- \rightarrow \lambda_{2t}^+$, dada por

$$\begin{aligned} \delta(x, t) &= T_{1t}(x) - f(x) \\ &= m_{1t}^{\nu(t)} x^{\mu_{1t}\mu_{2t}} - f_{0t} - f_{1t}x - f_{2t}x^2 + \psi(x, t) \end{aligned} \quad (3.66)$$

onde ψ é 2-flat em $x = 0$; $f_{00} = 0$, $f_{10} = f_1$, $f_{20} = f_2$.

b) Suponhamos que μ_1 e μ_2 são racionais. Pelo teorema 2.1.1 temos,

$$\sigma_1(x, t) = x^{\mu_{1t}}(1 + h_1(x, t)), \quad \sigma_2(x, t) = x^{\mu_{2t}}(1 + h_2(x, t)) \quad (3.67)$$

onde $h_i, i = 1, 2$, satisfaz

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} h_i(x, t) = 0. \quad (3.68)$$

Através de um cálculo simples teremos que

$$T_{1t}(x) = m_{1t}^{\nu(t)} x^{\mu_{1t}\mu_{2t}}(1 + \psi(x, t)), \quad \text{onde, } \psi \in I.$$

$$f(x, t) = f_{0t} + f_{1t}x + f_{2t}x^2 + f_{3t}x^3 + O(x^4), \quad f_{1t} \neq 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \delta(x, t) &= T_{1t}(x) - f(x) \\ &= m_{1t}^{\nu(t)} x^{\mu_{1t}\mu_{2t}} + \Psi(x, t) - f(x) \end{aligned} \quad (3.69)$$

onde, $\Psi = m_{1t}^{\nu(t)} x^{\mu_{1t}\mu_{2t}} \psi(x, t) \in I$.

3.4.2 Diagrama de bifurcação

Teorema 3.4.1 *Sejam α uma imersão que possui uma conexão γ de tipo c_{33} e $T : \lambda_1 \rightarrow \lambda_1$, onde $\lambda_1 : (-\delta, \delta) \rightarrow \alpha$ é uma seção transversal a γ , a aplicação de retorno de Poincaré da proposição 2.3.1, com $\varsigma \neq 1$. Então,*

- (a) *se $\varsigma > 1 \Rightarrow \alpha_t$ possui um único ciclo principal para $b_0 > 0$ e não possui ciclos se $b_0 < 0$,*
- (b) *se $\varsigma < 1 \Rightarrow \alpha_t$ possui um único ciclo principal para $b_0 < 0$ e não possui ciclos se $b_0 > 0$.*

O diagrama de bifurcação de α_t é como na figura 3.10.

Demonstração

Para demonstrar este teorema basta seguir os passos da demonstração do teorema 3.3.1.

Figura 3.10: Diagrama bifurcação

■

Capítulo 4

Bifurcações de codimensão 2

Neste capítulo estudaremos as condições para que as conexões c_{11} , c_{22} e c_{33} se desdobrem a dois parâmetros e usaremos a mesma notação do capítulo anterior.

4.1 Conexão de umbílicos de tipo c_{11}

Proposição 4.1.1 *Sejam α uma imersão que possui uma conexão γ de tipo c_{11} e $T : \lambda_1 \rightarrow \lambda_1$, onde $\lambda_1 : (-\delta, \delta) \rightarrow \alpha$ é uma seção transversal a γ , a aplicação de retorno de Poincaré, tal que, $T'(0) = 1$ e $T'''(0) = a \neq 0$, ou seja, $\chi(p_1) = -\chi(p_2)$. Então, o desenvolvimento assintótico de T é :*

(i) $T(x) = x + ax^3 + O(x^4)$, se ν e μ são irracionais,

(ii) $T(x) = x + ax^3 + a_1x^{q+1}(-\ln(x)) + a_2x^{r+1}(-\ln(g(x))) + a_3x^{q+1}(-\ln(\Gamma_0(x))) + a_4x^{r+1}(-\ln(\Upsilon_0(x))) + \psi(x)$, se ν e μ são racionais; a_1, a_2, a_3 e a_4 dependem, respectivamente, de $\bar{\alpha}_2, \bar{\beta}_2, \alpha_2$ e β_2 ; a depende da terceira derivada da transição ao longo da conexão e ψ é 3-flat.

Demonstração

Na proposição 3.2.1 faça $m_1^\nu n_1^\mu = 1$ e use o lema 3.1.2 para concluir que $T''(0) = 0$. $\blacksquare$

4.1.1 Desdobramento da conexão c_{11}

Uma conexão de umbílicos de tipo c_{11} que satisfaz as condições da proposição 4.1.1 é de codimensão 2, pois, uma condição é a conexão e a outra é a derivada $T'(0) = 1$.

Figura 4.1: Desdobramento de c_{11}

Sejam α_t uma pequena perturbação de α , λ_{1t} e λ_{2t} seções transversais, respectivamente, às separatrizes que partem de p_{1t} e p_{2t} , e suficientemente próximas a esses pontos, como na figura 4.1, $t \in V$, para V uma vizinhança da origem no espaço de parâmetros $\mathbb{R}^2$. Consideremos

$$\begin{aligned} \lambda_{1t}^+ &= \lambda_{1t}|_{[0,\delta)}, & \lambda_{1t}^- &= \lambda_{1t}|_{(-\delta,0]}, \\ \lambda_{2t}^- &= \lambda_{2t}|_{(-\delta,0]} \text{ e } \lambda_{2t}^+ &= \lambda_{2t}|_{[0,\delta)}. \end{aligned}$$

Também neste caso, pelo lema 2.1.6, devemos considerar todas as possibilidades para ν e μ . Repetindo os cálculos feitos na subseção 3.2.2, temos que :

a) Se ν e μ são irracionais. Como na proposição 3.2.1, sejam

$$T_{1t} : \lambda_{1t}^- \rightarrow \lambda_{1t}^+,$$

$$T_{2t} : \lambda_{2t}^- \rightarrow \lambda_{2t}^+,$$

$$f : \lambda_{1t} \rightarrow \lambda_{2t}$$

dadas por

$$\begin{aligned} T_{1t}(x) &= m_{1t}^{\nu(t)} x + \psi(x, t), \\ T_{2t}(x) &= n_{1t}^{\mu(t)} x + \phi(x, t), \\ f(x, t) &= f_{0t} + f_{1t}x + f_{2t}x^2 + f_{3t}x^3 + O(x^4), \end{aligned}$$

onde $f_{1t} \neq 0$.

Agora, seja $\delta : \lambda_{1t}^- \rightarrow \lambda_{2t}^+$, dada por

$$\begin{aligned} \delta(x) &= f(T_{1t}(x)) - T_{2t}(f(x)) \\ &= f_{0t}(1 - n_{1t}^{\mu}) + f_{1t}(m_{1t}^{\nu} - n_{1t}^{\mu})x + f_{2t}(m_{1t}^{2\nu} - n_{1t}^{\mu})x^2 \\ &\quad + f_{3t}(m_{1t}^{3\nu} - n_{1t}^{\mu})x^3 + \Psi(f(x, t), t) + \psi(x, t) \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde Ψ é 3-flat em $f(x) = 0$ e ψ é 3-flat em $x = 0$; $f_{00} = 0$, $f_{10} = f_1$, $f_{20} = f_2$, $f_{30} = f_3$ e $m_{10}^{\nu} = n_{10}^{\mu}$.

b) Suponhamos que ν e μ são racionais. Pelo teorema 2.1.1 temos,

$$\begin{aligned} \sigma(x, t) &= x^{\nu}(1 + h_1(x, t)), \quad \bar{\sigma}(x, t) = x^{\frac{1}{\nu}}(1 + h_2(x, t)) \\ \eta(x, t) &= x^{\mu}(1 + h_3(x, t)), \quad \bar{\eta}(x, t) = x^{\frac{1}{\mu}}(1 + h_4(x, t)), \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde $h_i \in I$ (veja 3.68), $i = 1, \dots, 4$.

Como na demonstração da proposição 3.2.1, teremos que

$$\begin{aligned} T_{1t}(x) &= m_{1t}^{\nu(t)} x(1 + \psi(x, t)), \\ T_{2t}(x) &= n_{1t}^{\mu(t)} x(1 + \phi(x, t)), \text{ onde, } \phi, \psi \in I. \\ f(x, t) &= f_{0t} + f_{1t}x + f_{2t}x^2 + f_{3t}x^3 + O(x^4), \end{aligned}$$

onde $f_{1t} \neq 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} \delta(x) &= f(T_{1t}(x)) - T_{2t}(f(x)) \\ &= f_{0t}(1 - n_{1t}^{\mu}) + f_{1t}(m_{1t}^{\nu} - n_{1t}^{\mu})x + f_{2t}(m_{1t}^{2\nu} - n_{1t}^{\mu})x^2 \\ &\quad + f_{3t}(m_{1t}^{3\nu} - n_{1t}^{\mu})x^3 + f(x, t)\bar{\Psi}(f(x, t), t) + x\bar{\psi}(x, t), \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde, $\bar{\phi}, \bar{\psi} \in I$.

4.1.2 Diagrama de bifurcação

Teorema 4.1.1 *Seja α uma imersão como na proposição 4.1.1, com $a \neq 0$, então o diagrama de bifurcação do desdobramento α_t de α é o da figura 4.3.*

Demonstração

Inicialmente fazemos a unificação das equações 4.1 e 4.3 fazendo:

$$b_0 = f_{0t}(1 - n_{1t}^\mu),$$

$$b_1 = f_{1t}(m_{1t}^\nu - n_{1t}^\mu),$$

$$b_2 = f_{2t}(m_{1t}^{2\nu} - n_{1t}^\mu),$$

$$b_3 = f_{3t}(m_{1t}^{3\nu} - n_{1t}^\mu).$$

$$\Phi(x, t) = \begin{cases} \Psi(f(x, t), t), & \text{se } \nu \text{ e } \mu \text{ forem irracionais} \\ f(x, t)\bar{\Psi}(f(x, t), t), & \text{se } \nu \text{ e } \mu \text{ forem racionais} \end{cases}$$

$$\varphi(x, t) = \begin{cases} \psi(x, t), & \text{se } \nu \text{ e } \mu \text{ forem irracionais} \\ x\bar{\psi}(x, t), & \text{se } \nu \text{ e } \mu \text{ forem racionais} \end{cases}$$

Então, temos

$$\delta(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \Phi(x, t) + \varphi(x, t) \quad (4.4)$$

As soluções da equação $\delta(x) = 0$, correspondem aos ciclos de α_t . Fazemos $t = (b_0, b_1)$.

a) Suponhamos $b_1 > 0$. Seja $l > 0$ o diâmetro de V_l , onde V_l é como na definição 3.2.1. Derivando a equação 4.4 obtemos,

$$\delta_1(x) = \frac{\partial \delta}{\partial x}(x, t) = b_1 + 2b_2x + 3b_3x^2 + \Phi'(x, t) + \varphi'(x, t). \quad (4.5)$$

Isto implica que existe $l_0 > 0$, tal que, $\delta_1(0) = b_1 + \Phi'(0, t) + \varphi'(0, t) > 0$, para $t \in V_l$, $l < l_0$. Portanto, δ_1 é estritamente crescente para $x \in [0, \epsilon)$, $\epsilon > 0$ pequeno. Veja figura 3.3.

Agora, a equação

$$-b_0 = b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \Phi(x, t) + \varphi(x, t)$$

não tem solução para $b_0 > 0$ e tem uma solução para $b_0 < 0$. Logo, o diagrama de bifurcação é como na figura 4.3

b) Suponhamos $b_1 < 0$ e $b_0 > 0$. Façamos a seguinte mudança de variável $x = \rho b_0$, $\rho > 0$.

Substituindo $b_0 = \frac{x}{\rho}$ em 4.4 e derivando temos

$$\delta_1(x) = \frac{\partial \delta}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{\rho} + b_1 + O(x), \quad (4.6)$$

Por 4.6, existem $\rho_0 > 0$ e $\epsilon > 0$, tal que, $\delta_1(x) > 0$. Ou seja,

$$\delta_1(x) > 0, \text{ se } x \in (\rho b_0, \epsilon),$$

$$\delta_1(x) < 0, \text{ se } x \in [0, \rho b_0) \text{ e}$$

$$\delta_1(\rho b_0) = 0.$$

Disso, segue que o Gráfico de δ é como na figura 4.2.

Figura 4.2: gráfico de δ para $b_1 < 0$

Como $\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2}(x_t, t) \neq 0$. Pelo Teorema da Função Implícita, implica que existe uma curva Γ em V_t , $b_0 = \Gamma(b_1)$, tal que sobre essa curva α_t possui ciclo principal semi-estável.

Se considerarmos l suficientemente pequeno, pelas equações $\delta(x_t) = 0$ e $\delta_1(x_t) = 0$,

$$b_0 = \Gamma(b_1) = \frac{b_1^2}{2b_2}$$

como na figura 4.3.

Figura 4.3: Diagrama de bifurcação

■

Observação 11 Se na proposição 4.1.1, $q > 2$ e $r > 2$, o desdobramento da conexão c_{11} é genérico.

4.2 Conexão de umbílicos de tipo c_{22}

4.2.1 Desenvolvimento assintótico do retorno

Proposição 4.2.1 Sejam α uma imersão que possui uma conexão γ de tipo c_{22} e $T : \lambda_2 \rightarrow \lambda_2$, onde $\lambda_1 : (-\delta, \delta) \rightarrow \alpha$ é uma seção transversal a γ , a aplicação de retorno. Então, se na proposição 2.2.1, $\varsigma = 1$, o desenvolvimento assintótico de T é :

- (i) $T(x) = f_1 m_1^{\mu_1} x + f_2 m_1^{2\mu_1} x^2 + f_3 m_1^{3\mu_1} x^3 + O(x^4)$, se μ_1 e μ_2 são irracionais,

Figura 4.4: conexão c_{22}

(ii)

$$T(x) = f_1 m_1^{\mu_1} x + f_2 m_1^{2\mu_1} x^2 + f_3 m_1^{3\mu_1} x^3 + \frac{f_1 \alpha_2 m_1^{\mu_1}}{p} x^{q+1} (-\ln(x)) + \frac{f_1 \beta_2 m_1^{\mu_1}}{r} x^{q+1} (-\ln(T_1 \circ \sigma_2(x))) + \psi(x),$$

onde ψ é 3-flat, em $x = 0$, se μ_1 e μ_2 são racionais.

Demonstração

Usando os lemas 2.1.4, lema 2.1.6, lema 2.1.7 e a proposição 2.2.1. Sejam $\mu_1 = \frac{\tau_1^2 + 1}{\tau_1^2 + 2 - \frac{a}{b}}$, $\mu_2 = \frac{\tau_2^2 + 2 - \frac{a}{b}}{\tau_2^2 + 1}$, $f(x) = f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + O(x^4)$ e $T_1 = m_1 x + O(x^3)$, $m_1 = \Gamma'_\epsilon(0)$. Além disso,

(a) Se μ_1 e μ_2 forem irracionais,

$$\sigma_1(x) = x^{\mu_1}, \quad \sigma_2(x) = x^{\mu_2} \quad e \quad (4.7)$$

(b) Se μ_1 e μ_2 forem racionais,

$$\begin{aligned} \sigma_1(x) &= x^{\mu_1} [1 + \frac{1}{p} \alpha_2 x^q (-\ln x) + \psi_1(x)], \\ \sigma_2(x) &= x^{\mu_2} [1 + \frac{1}{r} \beta_2 x^s (-\ln x) + \frac{1}{r} \beta_3 x^{2s} (-\ln x) + \psi_2(x)] \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde ψ_1, ψ_2 , são 2-flat em $x = 0$ e σ_1, σ_2 são como na figura 4.4.

Agora, consideremos a aplicação $\bar{T} : \lambda_2 \rightarrow \lambda_1$, tal que

$$\bar{T} = \sigma_1 \circ T_1 \circ \sigma_2.$$

Através de um cálculo imediato conclui-se que

$$\bar{T}(x) = m_1^{\mu_1} x(1 + \psi(x)) ,$$

onde ψ é 3-flat, se μ_1 e μ_2 forem irracionais.

Disso segue que $T : \lambda_1 \rightarrow \lambda_1$ é dada por

$$\begin{aligned} T(x) &= f \circ \bar{T}(x) \\ &= f_1 m_1^{\mu_1} x + f_2 m_1^{2\mu_1} x^2 + f_3 m_1^{3\mu_1} x^3 + O(x^4). \end{aligned}$$

Se μ_1 e μ_2 forem racionais,

$$\bar{T}(x) = m_1^{\mu_1} x \left(1 + \frac{\alpha_2}{p} x^q (-\ln(x)) + \frac{\beta_2}{r} x^q (-\ln(T_1 \circ \sigma_2(x))) + \psi(x) \right) ,$$

onde ψ é 3-flat em $x = 0$.

Logo,

$$\begin{aligned} T(x) &= f \circ \bar{T}(x) \\ &= f_1 m_1^{\mu_1} x + f_2 m_1^{2\mu_1} x^2 + f_3 m_1^{3\mu_1} x^3 + \frac{f_1 \alpha_2 m_1^{\mu_1}}{p} x^{q+1} (-\ln(x)) + \\ &\quad + \frac{f_1 \beta_2 m_1^{\mu_1}}{r} x^{q+1} (-\ln(T_1 \circ \sigma_2(x))) + \psi(x), \quad \psi \text{ é 3-flat em } x = 0. \end{aligned}$$

■

4.2.2 Desdobramento da conexão c_{22}

Sejam $\alpha_t, t \in V$, V uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^2$, uma pequena perturbação de α ; λ_{1t} e λ_{2t} seções transversais à conexão γ e próximas ao ponto p , como na figura 4.5.

Consideremos

Figura 4.5: desdobramento da conexão c_{22}

$$\begin{aligned} \lambda_{1t}^+ &= \lambda_{1t}|_{[0,\delta)}, & \lambda_{1t}^- &= \lambda_{1t}|_{(-\delta,0]}, \\ \lambda_{2t}^- &= \lambda_{1t}|_{(-\delta,0]} \text{ e } \lambda_{2t}^+ &= \lambda_{1t}|_{[0,\delta)}. \end{aligned}$$

Também neste caso, pelo lema 2.1.6, devemos considerar todas as possibilidades para μ_1 e μ_2 da demonstração da proposição 2.2.1.

a) Suponhamos que μ_1 e μ_2 são irracionais. Como na proposição 3.2.1, sejam

$$T_{1t} : \lambda_{1t}^- \rightarrow \lambda_{2t}^+,$$

$$f : \lambda_{1t} \rightarrow \lambda_{2t}$$

dadas por

$$T_{1t}(x) = m_{1t}^{\nu(t)} x^{\mu_{1t}\mu_{2t}} + \psi(x, t), \text{ } \psi \text{ é 2-flat em } x = 0$$

$$f(x, t) = f_{0t} + f_{1t}x + f_{2t}x^2 + f_{3t}x^3 + O(x^4),$$

onde $f_{1t} \neq 0$.

Agora, seja $\delta : \lambda_{1t}^- \rightarrow \lambda_{2t}^+$, dada por

$$\begin{aligned} \delta(x, t) &= T_{1t}(x) - f(x) \\ &= m_{1t}^{\nu(t)} x^{\mu_{1t}\mu_{2t}} - f_{0t} - f_{1t}x - f_{2t}x^2 + \psi(x, t) \end{aligned} \tag{4.9}$$

onde ψ é 2-flat em $x = 0$; $f_{00} = 0$, $f_{10} = f_1$, $f_{20} = f_2$.

b) Suponhamos que μ_1 e μ_2 são racionais. pelo teorema 2.1.1 temos,

$$\sigma_1(x, t) = x^{\mu_{1t}}(1 + h_1(x, t)), \quad \sigma_2(x, t) = x^{\mu_{2t}}(1 + h_2(x, t)) \quad (4.10)$$

onde $h_i, i = 1, 2$, satisfazem $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} h_i(x, t) = 0$.

Através de um cálculo simples teremos que

$$T_{1t}(x) = m_{1t}^{\nu(t)} x^{\mu_{1t}\mu_{2t}}(1 + \psi(x, t)), \text{ onde, } \psi \in I.$$

$$f(x, t) = f_{0t} + f_{1t}x + f_{2t}x^2 + f_{3t}x^3 + O(x^4), \quad f_{1t} \neq 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \delta(x, t) &= T_{1t}(x) - f(x) \\ &= m_{1t}^{\nu(t)} x^{\mu_{1t}\mu_{2t}}(1 + \psi(x, t)) - f(x) \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde, $\psi \in I$.

4.2.3 Diagrama de bifurcação

Teorema 4.2.1 *seja α uma imersão como na proposição 4.2.1 e que satisfaz $f_1 m_1^{\mu_1} \neq 1$, então o diagrama de bifurcação do desdobramento α_t de α é o da figura 4.6.*

Demonstração

a) Suponhamos nas equações 4.9 e 4.11, $\varsigma_t = \mu_{1t}\mu_{2t} < 1$.

Neste caso, temos $\frac{\partial \sigma}{\partial x}(0) = \infty$, se $t \in V$, for suficientemente pequeno. Logo, concluímos que σ é estritamente crescente em $[0, \epsilon)$, $\epsilon > 0$ pequeno. Então, o gráfico de σ é como na figura 3.8 e se $b_0 > 0$, α_t não possui ciclos principais; se $b_0 < 0$, α_t possui um único ciclo principal.

b) Suponhamos nas equações 4.9 e 4.11, $\varsigma_t = \mu_{1t}\mu_{2t} > 1$ e $b_0 = -f_{0t}$.

$$\delta_1(x) = \frac{\partial \delta}{\partial x}(x, t) = -f_{1t} + o(x, t), \quad (4.12)$$

Observe que $(o(0, t))' = +\infty$ e portanto, existe $\epsilon > 0$ e x_t , tais que

$$\begin{aligned}\delta_1(x) &> 0, \text{ se } x \in (x_t, \epsilon), \\ \delta_1(x) &< 0, \text{ se } x \in [0, x_t) \text{ e} \\ \delta_1(x_t) &= 0.\end{aligned}$$

Disso segue que o gráfico de δ é como na figura 4.2.

Como $\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2}(x_t, t) \neq 0$, o Teorema da Função Implícita, implica que existe uma curva Γ em V_t , $b_0 = \Gamma(\varsigma)$, tal que sobre essa curva α_t possui ciclos principais semi-estáveis.

Se considerarmos l suficientemente pequeno, pelas equações $\delta(x_t) = 0$ e $\delta_1(x_t) = 0$,

$$b_0 = \Gamma(\varsigma) = \frac{\varsigma - 1}{\varsigma^{(\frac{\varsigma}{\varsigma-1})} c_1^{(\frac{1}{\varsigma-1})}},$$

onde $c_1 = f_1 m_1^{\mu_1} \neq 1$. Como na figura 4.6.

Figura 4.6: Diagrama de bifurcação da conexão c_{22}

■

4.3 Conexão de umbílicos de tipo c_{33}

Proposição 4.3.1 *Sejam α uma imersão que possui uma conexão γ de tipo c_{33} e $T : \lambda_2 \rightarrow \lambda_2$, onde $\lambda_1 : (-\delta, \delta) \rightarrow \alpha$ é uma seção transversal a γ , a aplicação de retorno. Então, se na proposição 2.2.1, $\varsigma = 1$, o desenvolvimento assintótico de T é :*

Figura 4.7: Conexão c_{33}

(i) $T(x) = f_1 m_1^{\mu_1} x + f_2 m_1^{2\mu_1} x^2 + f_3 m_1^{3\mu_1} x^3 + O(x^4)$, se μ_1 e μ_2 são irracionais,

(ii)

$$T(x) = f_1 m_1^{\mu_1} x + f_2 m_1^{2\mu_1} x^2 + f_3 m_1^{3\mu_1} x^3 + \frac{f_1 \alpha_2 m_1^{\mu_1}}{p} x^{q+1} (-\ln(x)) + \frac{f_1 \beta_2 m_1^{\mu_1}}{r} x^{q+1} (-\ln(T_1 \circ \sigma_2(x))) + \psi(x),$$

onde ψ é 3-flat, em $x = 0$, se μ_1 e μ_2 são racionais.

Demonstração

Basta repetir os passos da demonstração da 4.2.1

■

4.3.1 Diagrama de bifurcação

Teorema 4.3.1 *seja α uma imersão como na proposição 4.3.1 e que satisfaz $f_1 m_1^{\mu_1} \neq 1$, então o diagrama de bifurcação do desdobramento α_t de α é o da figura 4.6.*

Demonstração

Basta repetir os passos da demonstração do 4.2.1.

■

Conclusão

Após o trabalho de Gutierrez e Sotomayor, esta tese insere o estudo das bifurcações de linhas de curvatura em superfícies compactas no contexto dos trabalhos desenvolvidos por Roussarie, Mourtada e outros, sobre as bifurcações de laços de selas hiperbólicas através do desenvolvimento assintótico da aplicação de Poincaré. Deixa mais evidente a relação que existe entre o estudo das bifurcações de linhas de curvatura e o das bifurcações dos laços de campos vetoriais planares, ao provarmos que o diagrama de bifurcação de codimensão dois dos três casos estudados aqui, são topologicamente equivalentes ao diagrama de bifurcação do laço de codimensão 2.

Além disso, os métodos usados abrem perspectivas para o estudo das bifurcações de codimensões superiores das conexões de pontos umbílicos darbouxianos.

Referências Bibliográficas

- [1] J. W. Bruce and F. Tari. On binary differential equations. *Nonlinearity*, (8):255–221, 1995.
- [2] Struik D. *Lectures on Classical Differential Geometry*. Addison Wesley, 1950.
- [3] C. Gutierrez and Sotomayor J. *Lines of Principal Curvature and Umbilic Points on Surfaces*. 18th Brazilian Math. Colloquium, IMPA-RJ, 1991.
- [4] C. Gutierrez and Sotomayor J. Periodic lines of curvature bifurcating from darbouxian umbilical connections. *Springer Lect. Notes on Math*, (1455), 1991.
- [5] C. Gutierrez and J. Sotomayor. Structurally stable configurations of lines of principal curvature. *Astérisque*, pages 195–215–, 1982.
- [6] C. Gutierrez and J. Sotomayor. Lines of curvature, umbilic points and caratheodory conjecture. *Resenhas IME-USP*, 3(3), 1998.
- [7] R. Roussarie. On number of limit cycles which appear by perturbation of separatrix loop of planar vector fields. *Bull. Soc. Bras. Math.*, 17(2):67–101, 1986.
- [8] R. Roussarie. *Bifurcations of planar vector fields and Hilbert's 16th problem*. Birkhauser Verlag, Basel, 1998.

- [9] J. Sotomayor and R. Garcia. Lines of curvature near principal cycles. *Annals of Global Analysis and Geometry*, (10):275–289, 1992.
- [10] J. Sotomayor and R. Garcia. Lines of curvature near singular points of implicit surfaces. *Bull. Sci. Math.*, (117):313–331, 1993.
- [11] J. Sotomayor and R. Garcia. Lines of curvature on algebraic surfaces. *Bull. Sci. Math.*, (120):367–395, 1996.
- [12] J. Sotomayor and C. Gutierrez. Closed principal lines and bifurcation. *Bull. Soc. Bras. Math.*, 17(1):1–19, 1986.
- [13] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, volume 3. Publish of Perish, 1979.
- [14] N. M. Patrikalakis T. Maekawa, F. E. Wolter. Umbilics and lines of curvature for shape interrogation. *Computer Aided Geometric Design*, (13):133–161, 1996.