Tópicos em Métodos de Ponto Proximal

Paulo José da Silva e Silva

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE
DOUTOR EM MATEMÁTICA APLICADA

Área de Concentração: **Otimização e Controle**
Orientador: **Prof. Dr. Carlos Humes Júnior**

O aluno recebeu apoio da FAPESP – Processo 96/09939-0

São Paulo, Dezembro 2000

Tópicos em Métodos de Ponto Proximal

Este exemplar corresponde à redação final da tese
devidamente corrigida e defendida por Paulo José
da Silva e Silva e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, dezembro de 2000.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Carlos Humes Junior (orientador)

IME/USP

Prof. Dr. Clóvis Caesar Gonzaga

UFSC

Prof. Dr. Alfredo Noel Iusem

IMPA

Prof. Dr. José Mario Martinez Perez

IMECC/UNICAMP

Profa. Dra. Yoshiko Wakabayashi

IME/USP

*A meus avós João, Antônia,
Francisco e Rita*

Agradecimentos

Uma lista como esta não tem fim...

Aos meus pais, pelo apoio e por me ensinarem, ainda pequeno, a admirar a beleza das idéias.

A minha noiva Silvina, pela paciência, atenção, carinho e, sobretudo, por ser a pessoa que é.

Aos meu irmão, Francisco, que me acompanhou estes últimos anos.

Ao Carlos, pela já longa cumplicidade na Matemática e fora dela.

Aos meus companheiros de Matemática, com quem tive o privilégio de trabalhar, em particular meus co-autores: Marcelo, Benar e Eckstein.

Ao Prof. Iusem, pelo belo curso que me apresentou os métodos proximais e pelo constante apoio em minha curta vida acadêmica.

Ao meu professor do segundo grau, Valdener, por ter me ensinado a me encantar com a Matemática.

Aos meus amigos que, graças a Deus, são muitos: Caputi, Raul, Cibele, Pil, Daniel, Liane, Fábio, Mané, Sônia, Prof. Barone, Possani, Lupa, Jack, Sô, Carine, Luís, Lillian, Rodrigo, Sílvia, Laura, Jerusa, Cláudio e tantos outros com quem dividi minhas horas.

Abstract

This thesis deals with proximal point methods and their use to solve variational inequalities and convex optimization problems.

We present two new regularizations families and the respective proximal methods. The first family, simple in concept, is based on translations of strict convex functions. The second family contains a broad class of coercive regularizations, extending recent results in the literature. In particular, we extend the double regularizations presented by Auslender *et al.* to a wide class that contains Bregman distances and we succeed to prove that these regularizations may be used to solve variational inequalities with maximal monotone operators that may not be para-monotone. We also explore the relationship of proximal and multiplier methods.

Finally, we present some new criteria to accept approximate solutions of the unconstrained problems that have to be solved by multiplier methods.

Índice

1	Introdução e Problemas	1
1.1	Introdução	1
1.2	Os Problemas	3
1.3	Métodos Proximais	5
2	MPP, Descida e Multiplicadores	7
2.1	MPP inexato baseado em descida	7
2.2	Conexão com métodos de multiplicadores	15
3	Distâncias Baseadas em Translação	24
3.1	Métodos de ponto proximal e funções estritamente convexas	24
3.2	Uma versão inexata do ϕ -MPP	28
3.3	Métodos de multiplicadores	30
4	Distâncias Coercivas	34
4.1	Regularizações Coercivas Separáveis	34
4.2	O Método Proximal com Distâncias Coercivas Separáveis	40
4.3	Distância Coercivas Separáveis Aplicadas à Otimização	44
5	Regularizações Duplas	50

ÍNDICE	VII
5.1 Uma Desigualdade Interessante	51
5.2 Análise de Convergência	54
5.3 Exemplos	56
5.4 Penalidades e Métodos de Multiplicadores	61
6 Resolução Aproximada em Métodos de Multiplicadores	65
6.1 Métodos de Multiplicadores com Distâncias Coercivas	65
6.2 O Método Híbrido de Solodov e Svaiter	69
7 Conclusão	74
A Existência de zeros de desigualdades variacionais regularizadas	76
B Conexões entre distâncias de Bregman e φ-divergências	81
C Tabelas dos Testes Numéricos	86
C.1 Mult. e Distâncias Coercivas	87
C.2 Método Híbrido Projeção-Lagrangiano Aumentado Proximal	93

Lista de Figuras

2.1	O ângulo θ	8
2.2	O passo de projeção	14
2.3	Penalidade $P(u) = 2u + \sqrt{u^2 + 1}$	23
3.1	Exemplos de penalidade	31
5.1	Limites para as derivadas de uma regularização dupla	52
5.2	Limites para derivada de uma penalidade	63
B.1	Mudança de escala atuando na dist. de Bregman e na φ -divergência baseadas em $h(x) = x \log(e^x - 1)$	82
B.2	Mudança de escala atuando na dist. de Bregman e na φ -divergência baseadas em $h(x) = \text{dilog}(e^x) + x \log(e^x - 1)$	83
B.3	Mudança de escala atuando na dist. de Bregman e na φ -divergência baseadas em $h(x) = x^2 - \sqrt{x}$	83

Lista de Tabelas

C.1	Conjunto de 130 problemas com restrições de desigualdades da coleção do CUTE/mastsif_small [10] que serviu de base para os testes.	86
C.2	Problemas resolvidos pela versão exata do Algoritmo 4.3.5	87
C.3	Problemas resolvidos pela versão inexata do Algoritmo 4.3.5	87
C.4	Problemas usados no teste comparativo do Algoritmo 4.3.5	88
C.5	Comparação entre as versões exata e inexata do Algoritmo 4.3.5	89
C.6	Comparação entre as versões exata e inexata do Algoritmo 4.3.5	90
C.7	Comparação entre as versões exata e inexata do Algoritmo 4.3.5	91
C.8	Comparação entre as versões exata e inexata do Algoritmo 4.3.5	92
C.9	Problemas resolvidos pela versão exata do algoritmo Híbrido	93
C.10	Problemas resolvidos pela versão inexata do algoritmo Híbrido	93
C.11	Problemas usados no teste comparativo do algoritmo Híbrido	94
C.12	Comparação entre as versões exata e inexata do algoritmo Híbrido	95
C.13	Comparação entre as versões exata e inexata do algoritmo Híbrido	96
C.14	Comparação entre as versões exata e inexata do algoritmo Híbrido	97
C.15	Comparação entre as versões exata e inexata do algoritmo Híbrido	98

Notações e Definições

$a \leq b$: O vetor $a \in \mathbb{R}^n$ é menor ou igual a $b \in \mathbb{R}^n$ coordenada à coordenada. Se a relação for estrita (para todas as coordenadas) escrevemos $a < b$.

a_+ : Vetor, de mesma dimensão de a , cujas coordenadas são iguais a $\max(0, a_i)$, $\forall i$. Analogamente, a_- denota o vetor com coordenadas iguais a $\min(0, a_i)$, $\forall i$.

a_i : a i -ésima coordenada do vetor $a \in \mathbb{R}^n$.

$\text{int } A$: *Interior* do conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$.

$\text{ri } A$: *Interior relativo* do conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ (interior de A com relação à “maior” variedade afim que o contém).

$\{x^k\}_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$: Uma seqüência com índices em $\mathcal{A}$. Se $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, usamos a notação $\{x^k\}$. Caso a seqüência seja de números reais (e não de vetores), usaremos a notação $\{a_k\}$.

$x^k \rightarrow_{\mathcal{A}} \bar{x}$: A seqüência $\{x^k\}_{\mathcal{A}}$ converge para $\bar{x}$. Mais uma vez podemos omitir o conjunto $\mathcal{A}$, caso este coincida com o $\mathbb{N}$.

$f: A \rightarrow B$: Função que associa a cada elemento do conjunto A um elemento de B .

$T: A \rightrightarrows B$: Operador que associa a cada elemento de A um subconjunto de B .

$\text{dom } f$: *Domínio efetivo* de f . Se $f: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é uma função, $\text{dom } f$ é o conjunto de pontos x de A tais que $f(x) < +\infty$. Se $f: A \rightrightarrows B$ é um operador, $\text{dom } f$ é o conjunto de pontos x de A tais que $f(x) \neq \emptyset$.

Uma função $f: A \rightarrow B$ é *fechada* ou *semi-contínua inferior (sci)* se, dada $\{x^k\} \subset A$, $x \rightarrow \bar{x} \in A$, então $\liminf_{k \rightarrow \infty} f(x^k) \geq f(\bar{x})$.

Um operador $T : A \rightrightarrows B$ é *semi-contínuo exterior* se, $\{x^k\} \subset A$, $x \rightarrow \bar{x} \in A$ e $\{y^k\} \subset B$, $y^k \in T(x^k)$ e $y^k \rightarrow \bar{y} \in B$, então $\bar{y} \in T(\bar{x})$.

Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ é dita *própria* se ela não vale $-\infty$ em nenhum ponto $x \in \mathbb{R}^n$ e se f for finita em pelo menos um ponto de seu domínio.

$C \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de conjunto *convexo* se, para todo $\zeta \in [0, 1]$ e todos $c_1, c_2 \in C$, $\zeta c_1 + (1 - \zeta)c_2 \in C$.

Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ é dita *convexa* se sua *epígrafe*, $\text{epi } f = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq \alpha\}$, for um conjunto convexo.

A lista de definições e resultados associados a conjuntos e funções convexas é muito extensa. Duas ótimas referências são [37, 41].

Se $C \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto cujo fecho é convexo, chamamos de *cone de recessão* de C , denotado por C^∞ , o cone composto por todas os vetores $d \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$\forall x \in \text{ri } C, \forall \alpha \geq 0, x + \alpha d \in C.$$

Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty]$ é uma função convexa, fechada e própria, tomemos $\bar{x} \in \text{dom } f$. A função $f^\infty : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty]$, dada por

$$f^\infty(d) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(\bar{x} + td) - f(\bar{x})}{t},$$

é conhecida como *função de recessão* de f .¹

$\delta_A : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty]$, $A \subset \mathbb{R}^n$: Denota a *função indicadora de A* , ou seja, a função que associa a cada $x \in \mathbb{R}^n$ o valor 0, se $x \in A$, e $+\infty$, caso contrário.

Um operador $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ é *monótono* se

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \forall y_1 \in T(x_1), \forall y_2 \in T(x_2), \langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

T é *monótono maximal* se ele não puder ser estendido preservando sua monotonicidade.

É impossível apresentar aqui todos os resultados associados a estes operadores. Uma ótima referência é [41, Capítulo 12].

¹As noções de cone e função de recessão aparecem na literatura com nomes variados. Por exemplo, em [37] temos *recession cone* e *recession function*, já em [23, 24] encontramos *asymptotic cone* e *asymptotic function*. Por fim, em [41] usa-se *horizon cone* e *horizon function*. Optamos por basear nossa tradução em [37] por considerarmos que este livro é a principal referência da área de Análise Convexa em espaços de dimensão finita. Porém mantemos a notação de [41, Capítulo 3], por ser, ao nosso ver, mais sugestiva.

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Um *subgradiente* de f em $\bar{x}$ é um vetor $\gamma \in \mathbb{R}^n$, tal que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) \geq f(\bar{x}) + \langle \gamma, x - \bar{x} \rangle.$$

O operador que associa a todo ponto $x \in \mathbb{R}^n$ o conjunto dos subgradientes de f em x é chamado de *subdiferencial* de f e denotado por ∂f .

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. A função $f^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, definida por

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, f^*(y) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_x \{ \langle y, x \rangle - f(x) \},$$

é conhecida como *função convexo conjugada* a f .

De forma análoga, a função $f_* : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, definida por

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, f_*(y) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_x \{ \langle y, x \rangle - f(x) \},$$

é conhecida como *função côncava conjugada* a f .

Uma sequência $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ é *Fejér monótona* com relação a um conjunto A se

$$\forall a \in A, \forall k \in \mathbb{N}, \|x^{k+1} - a\| \leq \|x^k - a\|.$$

Dizemos que um vetor a é *normal* a um conjunto convexo C em um ponto $\bar{x} \in C$ se a não forma um ângulo agudo com nenhum segmento de C que tenha $\bar{x}$ como um dos extremos:

$$\forall x \in C, \langle x - \bar{x}, a \rangle \leq 0.$$

O conjunto de todos os vetores normais é chamado de *cone normal* a C em $\bar{x}$. Este cone é sempre convexo.

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $A \subset \mathbb{R}^n$. O conjunto de todos os pontos de mínimo (máximo) de f em A será denotado por

$$\underset{x \in A}{\text{Argmin}} \{ f(x) \} \quad \left(\underset{x \in A}{\text{Argmax}} \{ f(x) \} \right).$$

Caso este conjunto contenha um único elemento, vamos denotar este ponto de mínimo (máximo) por

$$\underset{x \in A}{\text{argmin}} \{ f(x) \} \quad \left(\underset{x \in A}{\text{argmax}} \{ f(x) \} \right).$$

Introdução e Problemas

1.1 Introdução

A década de 90 testemunhou uma grande atividade relacionada a métodos de ponto proximal aplicados à otimização convexa e a problemas de desigualdades variacionais, bem como ao estudo de sua conexão com métodos de multiplicadores. Nosso trabalho insere-se nesta tradição e objetiva apresentar algumas contribuições à teoria de pontos proximais.

Nosso envolvimento nesta área iniciou-se no mestrado, quando, baseados em idéias de separadores, analisamos alguns métodos proximais, sob o ponto de vista de convergência de subsequências. A extensão destes resultados durante o primeiro ano de nosso doutorado e a iteração com os pareceristas do artigo [25] convenceram-nos a usar diretamente o separador implícito nestes métodos: a queda da função objetivo.

Esta ferramenta foi então aplicada a várias extensões, descritas abaixo. Mais uma vez, uma análise aprofundada das técnicas desenvolvidas permitiu o estudo de problemas sem a presença de função objetivo, levando-nos à investigação de problemas de desigualdades variacionais com operadores monótonos maximais.

Introduzimos duas novas classes de funções de regularização que permitem provar a convergência, no sentido de subsequências, dos respectivos métodos proximais. A primeira classe, bastante simples, baseia-se em translações de funções estritamente convexas. A segunda consiste de uma ampla gama de regularizações coercivas que estende resultados recentes de Ben-Tal e Zibulevsky [6] e de Auslender, Teboulle e Ben-Tiba [4, 5]. Em particular, analisamos o conceito de regularizações duplas em um contexto que engloba distâncias de Bregman, mostrando que é possível usá-las para resolver problemas de desigualdade variacional com operadores que não são, necessariamente, para-monótonos. Estudamos também a ligação destes métodos com métodos

de multiplicadores.

No caso de otimização, os métodos que propomos apresentam um critério de aceitação de soluções aproximadas dos sub-problemas proximais baseados nas condições propostas por Solodov e Svaiter em [43, 44], mas que não dependem de um passo extra-gradiente para garantir a otimalidade dos pontos de acumulação.

O restante do trabalho é dividido da seguinte forma:

O final do Capítulo 1 descreve os problemas que desejamos resolver e introduz um modelo simples de métodos proximais.

O Capítulo 2 inicia-se com uma nova análise de convergência do método híbrido proposto por Solodov e Svaiter em [43]; baseada em limites para queda da função objetivo a cada passo. A prova apresentada é bastante simples, mas já contém as idéias principais que vão permear a análise dos algoritmos propostos nos capítulos seguintes. Além disto, a Seção 2.2 contém a teoria necessária para relacionar métodos proximais e métodos de multiplicadores.

O Capítulo 3 introduz métodos proximais baseados em translações de funções estritamente convexas. Analisa também os métodos de multiplicadores que podemos derivar a partir desta classe de regularizações, estendendo a classe de penalidades P_E^+ descrita por Bertsekas em [8].

O Capítulo 4 apresenta uma nova classe de distâncias coercivas e analisa a convergência de um modelo de algoritmo proximal baseado nesta classe. Mostramos que é possível construir exemplos de nossos termos coercivos a partir de φ -divergências e distâncias de Bregman, usando uma técnica que denominamos mudança de escala. Em seguida, este modelo é aplicado ao caso de otimização, resultando em uma generalização parcial de [5].

O Capítulo 5 estende a idéia de regularizações duplas descrita em [4, 5]. Esta interessante classe de distâncias generalizadas permite recuperar a Fejér monotonicidade da sequência proximal com relação ao conjunto de soluções de um problema de desigualdade variacional.

O Capítulo 6 discute técnicas para permitir a solução aproximada dos sub-problemas de métodos de multiplicadores. Alguns experimentos numéricos preliminares são apresentados.

No Capítulo 7, apresentamos brevemente algumas linhas de desenvolvimento futuro.

O Apêndice B explora, rapidamente, a correlação entre φ -divergências e distâncias de Bregman quando aplicamos a mudança de escala. Descrevemos como várias regularizações podem ser obtidas, ao mesmo tempo, de membros destas duas classes.

1.2 Os Problemas

Esta seção tem como objetivo servir de ponto central para a definição e referência dos problemas que iremos tratar nesta tese.

Iniciamos denotando por B uma caixa n -dimensional, possivelmente ilimitada:

$$B \stackrel{\text{def}}{=} ([a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]) \cap \mathbb{R}^n,$$

$$-\infty \leq a_i < b_i \leq +\infty \text{ para } i = 1, \dots, n.$$

O problema mais simples que vamos estudar é:

Definição 1.2.1. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ uma função convexa, própria e fechada. O *problema de programação convexa em caixa* é o problema de

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a} \quad & x \in B. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Se $B = \mathbb{R}^n$, vamos empregar também o nome *problema de programação convexa irrestrito*. $\square$

Estamos também interessados em problemas de otimização convexa com restrições funcionais mais gerais:

Definição 1.2.2. Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty]$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty]^m$, tais que f e as componentes de g , g_i , $i = 1, \dots, m$, são funções convexas, próprias, fechadas e para $i = 1, \dots, m$,

$$\text{ri dom } g_i \supset \text{ri dom } f \quad \text{e} \quad \text{dom } g_i \supset \text{dom } f.$$

O *problema de programação convexa primal*, ou simplesmente *primal* é o problema de

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a} \quad & g(x) \leq 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Supomos ainda que este problema possui valor ótimo finito. $\square$

Associado ao problema primal, definimos o seu *dual lagrangiano*:

Definição 1.2.3. O *problema dual* é o problema de

$$\begin{aligned} \max \quad & F(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{L(x, \lambda)\} \\ \text{s.a} \quad & \lambda \geq 0, \end{aligned} \tag{1.3}$$

no qual $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é a *função lagrangiana estendida*, ou simplesmente *lagrangiano*:

$$L(x, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle - \delta_{\mathbb{R}_+^m}(\lambda).$$

$\square$

A ligação entre estes dois problemas tem sido objeto de estudo constante na literatura de programação não-linear e será essencial neste trabalho. Em particular, é fundamental a relação de conjugação entre a *função perturbação do lado-direito*, v , associada a (1.2) e a função objetivo dual:

Lema 1.2.4. [38, Exemplo 1 e Teorema 7] *Seja $v: \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ dada por:*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^m, v(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{ f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n, g(x) \leq \lambda \}.$$

Então,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^m, F(\lambda) = -v^*(-\lambda).$$

□

Outro resultado que desempenhará um papel importante nesta tese é:

Teorema 1.2.5. *O conjunto de soluções duais é não vazio e limitado se, e somente se, existe $\bar{x} \in \text{dom } f$ tal que $g(\bar{x}) < 0$. Chamaremos esta última condição de condição de qualificação de Slater.*

Demonstração. Apesar de acreditarmos que este resultado é clássico, apresentaremos a sua demonstração uma vez que todas as referências que encontramos [21, 30, 31] assumiam que f e g_i , $i = 1, \dots, m$, eram Lipschitz contínuas, o que não é necessariamente verdade na fronteira dos domínios efetivos de funções convexas.

1. Considere que o conjunto de soluções duais é não vazio e limitado.

Seja $\lambda^* \geq 0$ uma solução dual. Suponha, por contradição, que a condição de Slater não é válida:

$$\nexists x \in \text{dom } f, g(x) < 0.$$

Usando o Teorema generalizado de Gordan [29, Teorema 4.2.3], vemos que existe $h \in \mathbb{R}_+^m$, tal que $h \neq 0$ e $\langle h, g(x) \rangle \geq 0$, para todo $x \in \text{dom } f$. Então, para todo real $M > 0$,

$$\forall x \in \text{dom } f, f(x) + \langle \lambda^* + Mh, g(x) \rangle \geq f(x) + \langle \lambda^*, g(x) \rangle.$$

Lembrando que h é positivo e não-nulo, podemos tomar o ínfimo em x e concluir que

$$F(\lambda^* + Mh) \geq F(\lambda^*).$$

Portanto $\lambda^* + Mh$ também é uma solução dual. Como podemos escolher M arbitrariamente grande, temos uma contradição com a limitação do conjunto de soluções duais.

2. Considere que $\exists \bar{x} \in \text{dom } f$, $g(\bar{x}) < 0$.

Usando [37, Corolário 28.2.1], vemos que o conjunto de soluções duais é não vazio. Seja $\lambda^* \geq 0$ uma solução dual e F^* o valor ótimo dual, que é igual a $F(\lambda^*)$.

Chamemos de $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \min_{i=1, \dots, m} \{g_i(\bar{x})\} > 0$. Temos:

$$\begin{aligned} F^* + \mu \|\lambda^*\|_1 &\leq F(\lambda^*) - \langle \lambda^*, g(\bar{x}) \rangle \\ &= \inf_x \{f(x) + \langle \lambda^*, g(x) \rangle\} - \langle \lambda^*, g(\bar{x}) \rangle \\ &\leq f(\bar{x}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\lambda^*\|_1 \leq \frac{f(\bar{x}) - F^*}{\mu}.$$

□

Uma extensão natural dos problemas de otimização acima pode ser feita usando-se operadores monótonos maximais e desigualdades variacionais.¹ Neste contexto, estamos interessados em:

Definição 1.2.6. Seja $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ um operador monótono maximal tal que $\text{dom } T \cap \text{int } B \neq \emptyset$.² O *problema da desigualdade variacional* é o problema de encontrar $x \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$0 \in T(x) + N_B(x). \quad (1.4)$$

Nesta inclusão, $N_B(x)$ denota o cone normal à caixa B em x .

Caso $B = \mathbb{R}^n$, usaremos o nome *busca de zeros de T* .

□

1.3 Métodos Proximais

Considere o problema de programação convexa em caixa (1.1).

Seja $D : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty]$ tal que, para cada $y \in \text{int } B$:

¹Na verdade, o problema de busca de zeros de operadores monótonos maximais generaliza os problemas de otimização convexa, o problema de busca de zero de operadores de sela associados a funções convexo-côncavas, entre outros. Para a definição e resultados sobre operadores monótonos maximais veja [41, Capítulo 12]. Em particular, o operador subdiferencial, ∂f , é monótono maximal [41, Teorema 12.17]; porém existem operadores monótonos maximais que não são subdiferenciais de nenhuma função [41, Teorema 12.25].

²Esta condição é necessária para garantir a maximalidade da soma de operadores: $T + N_B$ [41, Corolário 12.44].

1. $D(\cdot, y)$ é finita em uma vizinhança de y ;
2. $D(\cdot, y)$ é própria, fechada, estritamente convexa em seu domínio efetivo e atinge mínimo em y .

Vamos chamar de *método proximal* uma recursão do tipo:

$$x^1 \in B, \quad x^{k+1} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \{f(x) + \alpha_k D(x, x^k)\}, \quad (1.5)$$

$\{\alpha_k\}$ é uma seqüência de reais positivos conhecidos como *parâmetros de regularização*. A função D receberá o nome de *regularização* ou *distância generalizada*.

Em muitas situações, é interessante considerar que a distância generalizada é separável, isto é, que existem $d_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, \infty]$ tais que

$$D(x, y) = \sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i).$$

Além disso, podemos estar interessados em métodos proximais que permitam o uso de diferentes parâmetros de regularização para cada coordenada. Neste caso, a recursão (1.5) torna-se:

$$x^1 \in B, \quad x^{k+1} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \left\{ f(x) + \sum_{i=1}^n \alpha_i^k d_i(x_i, x_i^k) \right\}. \quad (1.6)$$

Para simplificar a notação, definimos:

$$\nabla_1 D(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial D}{\partial x}(x, y), \quad (1.7)$$

$$d'_i(x_i, y_i) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial d_i}{\partial x_i}(x_i, y_i). \quad (1.8)$$

Vamos também estudar métodos proximais para a resolução do problema de desigualdade variacional (1.4). Neste caso, (1.6) pode ser facilmente generalizada, obtendo-se:

$$x^1 \in B, \quad 0 \in T(x^{k+1}) + \operatorname{diag}(\alpha^k) \nabla_1 D(x^{k+1}, x^k), \quad (1.9)$$

na qual “ $\operatorname{diag}(\alpha^k)$ ” denota a matriz diagonal obtida a partir do vetor de parâmetros α^k .

Por fim, chamaremos de *Método Proximal Clássico* o método proximal que usa o quadrado da norma euclidiana como regularização.

Métodos Proximais como Métodos de Descida e sua Relação com Métodos de Multiplicadores

2.1 Uma versão inexata do método proximal baseada em propriedades de descida

Nesta seção, vamos analisar o método de ponto proximal clássico sob a perspectiva de métodos de descida para programação não-linear. Apresentaremos também um critério para aceitar soluções aproximadas do passo proximal. Outra característica desta seção é que os resultados são obtidos de forma agradavelmente simples, apesar de já apresentarem as idéias básicas que vão permear o restante deste trabalho.

Em [40], Rockafellar provou a convergência do método proximal clássico com resolução aproximada dos sub-problemas. Para obter seus resultados, ele considerou que os erros feitos a cada iteração são somáveis. Em [43], Solodov e Svaiter obtiveram resultados mais robustos, provando que os erros relativos podem se manter constantes caso seja introduzido um passo intermediário composto por uma projeção.

A seguir, vamos apresentar uma nova prova dos resultados de [43], considerando que os operadores estão definidos no $\mathbb{R}^n$. Além disto, demonstraremos que é possível obter resultados de convergência no caso de otimização que não dependem do passo extra de projeção.

Figura 2.1: O ângulo θ .

Caracterização da descida

Estamos interessados em estudar o problema de minimização irrestrita, introduzido na Definição 1.2.1, com a hipótese adicional que a função objetivo é finita e continuamente diferenciável em todo $\mathbb{R}^n$.

Uma estratégia usual para resolução deste tipo de problema é o emprego de um algoritmo que garanta o decréscimo da função objetivo, como o método de Cauchy ou estratégias baseadas em regiões de confiança. A idéia é assegurar a otimalidade dos pontos de acumulação através de um “decréscimo suficiente”¹ da função objetivo.

Suponha que estamos interessados em estudar o quanto f decai em uma sequência $\{x^k\}$. Uma forma indireta de estimar esta queda é usar a convexidade de f para concluir que:

$$\gamma^{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla f(x^{k+1}), \quad f(x^k) \geq f(x^{k+1}) + \langle \gamma^{k+1}, x^k - x^{k+1} \rangle.$$

Isto é equivalente a

$$f(x^k) \geq f(x^{k+1}) + \|\gamma^{k+1}\| \|x^k - x^{k+1}\| \cos \theta, \quad (2.1)$$

na qual θ é o ângulo entre γ^{k+1} e $x^k - x^{k+1}$ (como ilustra a Figura 2.1).

O ponto x^{k+1} certamente será “melhor” do que x^k se θ for um ângulo agudo. Considerando o triângulo $[x^k, x^{k+1}, x^{k+1} + \gamma^{k+1}]$, apresentado na Figura 2.1, θ será agudo se o lado oposto a ele não for o maior dos lados deste triângulo. Uma maneira de garantir esta propriedade é verificar o seguinte *critério de aceitação*:

$$\|\gamma^{k+1} + (x^{k+1} - x^k)\| \leq \sigma \max\{\|\gamma^{k+1}\|, \|x^{k+1} - x^k\|\}, \quad (2.2)$$

¹A palavra *suficiente* não é definida formalmente propositadamente. Existem várias tentativas de dar um significado preciso a *suficiente*. Um exemplo são os modelos básicos de algoritmos em [33].

no qual σ é um número positivo estritamente menor que 1.

Começaremos nossa análise observando algumas propriedades simples do triângulo $[x^k, x^{k+1}, x^{k+1} + \gamma^{k+1}]$. Chamemos de M o comprimento do maior lado deste triângulo, ($M \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\|\gamma^{k+1}\|, \|x^{k+1} - x^k\|\}$) e α o ângulo oposto a este lado.

Lema 2.1.1. *Usando a notação definida acima e (2.2),*

$$0 \leq \sin \theta \leq \sigma \quad (\text{e portanto } \cos \theta \geq \sqrt{1 - \sigma^2}).$$

Demonstração. Usando a lei dos senos:

$$\frac{M}{\sin \alpha} = \frac{\|\gamma^{k+1} + x^{k+1} - x^k\|}{\sin \theta},$$

logo,

$$\frac{\sin \theta}{\sin \alpha} = \frac{\|\gamma^{k+1} + x^{k+1} - x^k\|}{M} \leq \sigma.$$

A demonstração está concluída. □

Este Lema mostra que (2.2) não só garante que θ seja um ângulo agudo, (2.2) força o ângulo θ a não se aproximar do ângulo reto, uma vez que ele deve ser menor que $\arcsen(\sigma) < \pi/2$.

O critério de aceitação também implica que a razão entre $\|\gamma^{k+1}\|$ e $\|x^{k+1} - x^k\|$ é bem comportada:

Lema 2.1.2. *Seja $M \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\|\gamma^{k+1}\|, \|x^{k+1} - x^k\|\}$ e m o menor destes dois números. Se vale (2.2), então*

$$(1 - \sigma)M \leq m \leq M.$$

Demonstração. Claramente,

$$\begin{aligned} M - m &\leq \|x^k - x^{k+1} - \gamma^{k+1}\| \leq \sigma M \Rightarrow \\ &(1 - \sigma)M \leq m. \end{aligned}$$

□

Usando os resultados acima e a estimativa do decréscimo de f dada por (2.1), obtemos:

$$\begin{aligned} f(x^k) &\geq f(x^{k+1}) + (1 - \sigma)\sqrt{1 - \sigma^2}M^2 \\ &\geq f(x^{k+1}) + (1 - \sigma)\sqrt{1 - \sigma^2}\|\gamma^{k+1}\|^2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Isto sugere o seguinte método de descida:

Algoritmo 2.1.3. *Método Proximal Inexato para Funções Diferenciáveis*

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa e diferenciável e seja σ um número em $[0, 1)$.

1. Inicialização: Comece com $x^1 \in \mathbb{R}^n$;
2. Iteração: Encontre x^{k+1} tal que, para $\gamma^{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla f(x^{k+1})$ e $e^{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^{k+1} + x^{k+1} - x^k$,

$$\|e^{k+1}\| \leq \sigma \max\{\|\gamma^{k+1}\|, \|x^{k+1} - x^k\|\}.$$

Isto pode ser feito por meio de uma minimização aproximada de

$$f(x) + \frac{1}{2}\|x - x^k\|^2.$$

□

Aplicando recursivamente a desigualdade (2.3) concluímos que

$$f(x^1) \geq f(x^k) + (1 - \sigma)\sqrt{1 - \sigma^2} \sum_{j=2}^k \|\gamma^j\|^2. \quad (2.4)$$

Portanto, a seqüência $\{f(x^k)\}$ é decrescente, e assim, ou ela é ilimitada inferiormente ou converge para um valor real. Neste último caso, (2.4) implica que $\gamma^k (= \nabla f(x^k)) \rightarrow 0^2$ o que nos leva a enunciar o seguinte resultado de convergência:

Teorema 2.1.4. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexa, continuamente diferenciável e limitada inferiormente. Então, todos os pontos de acumulação da seqüência gerada pelo Algoritmo 2.1.3 são soluções do problema programação de convexa irrestrito.*

Demonstração. Seja $\bar{x}$ o limite de uma subsequência $\{x^k\}_{k \in \mathcal{K}}$. A discussão que segue a desigualdade (2.3) mostrou que, sob as hipóteses acima, $\gamma^k \rightarrow 0$. Portanto, a continuidade de ∇f implica que $\nabla f(\bar{x}) = 0$, assim $\bar{x}$ é um mínimo de f . □

²Na verdade $\|\gamma^k\|$ é l^2 , ou seja ela deve ser quadrado somável.

O caso não-diferenciável

Nesta seção, vamos abrir mão das hipóteses de diferenciabilidade de f e explorar melhor sua convexidade. Isto é, vamos estudar o problema de otimização irrestrito (1.1) sem hipóteses adicionais.

O substituto natural do gradiente de f é o operador subdiferencial [41, Capítulo 8], ∂f , uma vez que para $\gamma^{k+1} \in \partial f(x^{k+1})$ a desigualdade fundamental

$$f(x^k) \geq f(x^{k+1}) + \langle \gamma^{k+1}, x^k - x^{k+1} \rangle$$

ainda se verifica.

Seguindo a seqüência de desigualdades (2.1) a (2.3) podemos observar que, com as definições acima, elas também se mantêm válidas, em particular:

$$f(x^k) \geq f(x^{k+1}) + (1 - \sigma)\sqrt{1 - \sigma^2}\|\gamma^{k+1}\|^2.$$

Mais uma vez, usando esta desigualdade para motivar um algoritmo de otimização, somos levados a minimizar aproximadamente

$$f(x) + \frac{1}{2}\|x - x^k\|^2.$$

Observe que a norma euclidiana regulariza a função objetivo original garantindo convexidade forte e, portanto, melhorando as propriedades de convergência dos algoritmos usuais de minimização. Porém, ela “obriga” o próximo iterado a se manter próximo do ponto atual e é possível que desejemos reduzir este efeito. Introduzimos então o *parâmetro de regularização* α_k que pode ser usado para controlar a “influência” da regularização. A função que vamos minimizar torna-se:

$$f(x) + \frac{\alpha_k}{2}\|x - x^k\|^2.$$

Estas idéias materializam-se no seguinte método proximal:

Algoritmo 2.1.5. Método Proximal Inexato para Funções Convexas

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty]$ uma função convexa, própria e fechada. Seja σ um número em $[0, 1)$ e $\tilde{\alpha}$ uma constante positiva.

1. Inicialização: Comece com $x^1 \in \mathbb{R}^n$;
2. Iteração: Escolha α_k tal que $0 < \alpha_k \leq \tilde{\alpha}$. Encontre x^{k+1} tal que, para $\gamma^{k+1} \in \partial f(x^{k+1})$ e $e^{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^{k+1} + \alpha_k(x^{k+1} - x^k)$,

$$\|e^{k+1}\| \leq \sigma \max\{\|\gamma^{k+1}\|, \alpha_k\|x^{k+1} - x^k\|\}. \quad (2.5)$$

Isto pode ser feito minimizando aproximadamente

$$f(x) + \frac{\alpha_k}{2} \|x - x^k\|^2.$$

□

Teorema 2.1.6. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty]$ uma função convexa, própria, fechada e limitada inferiormente. Então, todos os pontos de acumulação da sequência gerada pelo algoritmo proximal inexato são soluções do problema convexo irrestrito.*

Demonstração. Analogamente ao feito na demonstração do Teorema 2.1.4, definimos

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\|\gamma^{k+1}\|, \alpha_k \|x^{k+1} - x^k\|\} \text{ e} \\ m \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\|\gamma^{k+1}\|, \alpha_k \|x^{k+1} - x^k\|\}.$$

Podemos então mais uma vez percorrer o caminho que levou à desigualdade (2.3) e, com o auxílio de (2.5), mostrar que vale uma pequena variação desta desigualdade:

$$f(x^k) \geq f(x^{k+1}) + \frac{1}{\alpha_k} (1 - \sigma) \sqrt{1 + \sigma^2} \|\gamma^{k+1}\|^2.$$

Lembrando que $\{\alpha_k\}$ é limitada superiormente, podemos concluir mais uma vez que se $\{f(x^k)\}$ for limitada inferiormente, então $\gamma^k \rightarrow 0$. Usando a semi-continuidade exterior do operador subdiferencial concluímos que todo ponto de acumulação de $\{x^k\}$ minimiza f . □

Operadores monótonos maximais

Métodos de ponto proximal são importantes para a solução do problema mais geral de busca de zeros de operadores monótonos maximais: dado um operador $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ monótono e maximal, deseja-se encontrar um ponto x tal que

$$0 \in T(x).$$

Neste contexto ainda é possível usar as idéias geométricas que apresentamos.

Nosso ponto de partida é a versão *exata* do método de ponto proximal clássico, dada por:

$$\gamma^{k+1} \in T(x^{k+1}), \\ \gamma^{k+1} + \alpha_k (x^{k+1} - x^k) = 0.$$

Em [40], Rockafellar introduziu alguns critérios de aproximação para relaxar a igualdade. Em [43], Solodov e Svaiter provaram que, com a introdução de um passo intermediário de projeção, é possível usar critérios de aceitação ainda mais permissivos que os de [40]. Este método é conhecido como *algoritmo híbrido projeção-ponto proximal inexato*. Apresentaremos uma demonstração alternativa da convergência do método proposto por Solodov e Svaiter baseada em idéias semelhantes àsquelas usadas para analisar os Algoritmos 2.1.3 e 2.1.5.

O algoritmo híbrido projeção-ponto proximal usa um passo proximal inexato para obter um hiperplano que separa x^k do conjunto de soluções. O novo iterado, x^{k+1} , será a projeção de x^k sobre este hiperplano; logo x^{k+1} estará mais próximo do conjunto de zeros de T do que x^k (Figura 2.2). Formalmente temos:

Algoritmo 2.1.7. *Algoritmo Híbrido Projeção-Ponto Proximal Inexato*

Seja $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ um operador monótono maximal. Seja σ um número em $[0, 1)$ e $\tilde{\alpha}$ um real positivo.

1. Inicialização: Comece com $x^1 \in \mathbb{R}^n$;
2. Iteração: Escolha α_k tal que $0 < \alpha_k \leq \tilde{\alpha}$. Encontre $\tilde{x}^k$ e $\tilde{\gamma}^k \in T(\tilde{x}^k)$ tais que

$$\|\tilde{\gamma}^k + \alpha_k(\tilde{x}^k - x^k)\| \leq \sigma \max\{\|\tilde{\gamma}^k\|, \alpha_k\|\tilde{x}^k - x^k\|\}, \quad (2.6)$$

o que pode ser feito através de uma resolução aproximada de

$$0 \in T(x) + \alpha_k(x - x^k).$$

Então, x^{k+1} é a projeção de x^k sobre o hiperplano que passa por $\tilde{x}^k$ e que tem $\tilde{\gamma}^k$ como normal, ou seja

$$x^{k+1} = x^k - \frac{\langle \tilde{\gamma}^k, x^k - \tilde{x}^k \rangle}{\|\tilde{\gamma}^k\|^2} \tilde{\gamma}^k. \quad (2.7)$$

□

Destacamos que o algoritmo descrito acima é análogo ao Algoritmo 2.1.5, porém o caso de otimização não necessita da projeção. A necessidade da projeção deve-se à ausência de uma função de mérito explícita para o caso geral de operadores monótonos: não existe uma função sendo minimizada. A projeção garante que o novo ponto x^{k+1} , estará mais próximo dos zeros de T do que x^k . Isto é uma consequência direta da monotonicidade de T , pois para todo $x^* \in T^{-1}(0)$,

$$\langle x^* - \tilde{x}^k, \tilde{\gamma}^k - 0^k \rangle = \langle x^* - \tilde{x}^k, \tilde{\gamma}^k \rangle \leq 0,$$

e, como já vimos, o ângulo θ entre $x^k - \tilde{x}^k$ e $\tilde{\gamma}^k$ é agudo, o que garante que

$$\langle x^k - \tilde{x}^k, \tilde{\gamma}^k \rangle > 0.$$

Figura 2.2: A projeção após o passo proximal aproximado.

Desta forma o hiperplano que passa por $\tilde{x}^k$ e tem $\tilde{\gamma}^k$ como normal separa estritamente x^k e $T^{-1}(0)$ (como sugere a Figura 2.2). Já que x^{k+1} é a projeção de x^k sobre este hiperplano, temos que para todo $x^* \in T^{-1}(0)$:

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - x^k\|^2. \quad (2.8)$$

Assim, a função que decai a cada iteração é a distância ao conjunto solução. Podemos enunciar o principal resultado desta seção:

Teorema 2.1.8. *Seja $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ monótono e maximal. Suponha ainda que T possui pelo menos um zero. Então, a seqüência gerada pelo algoritmo híbrido projeção-ponto proximal inexato converge para um zero de T .*

Demonstração. Mais uma vez, chamamos de θ o ângulo entre $x^k - \tilde{x}^k$ e $\tilde{\gamma}^k$ e definimos

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\|\tilde{\gamma}^k\|, \alpha_k \|\tilde{x}^k - x^k\|\} \text{ e}$$

$$m \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\|\tilde{\gamma}^k\|, \alpha_k \|\tilde{x}^k - x^k\|\}.$$

Usando os Lemas 2.1.1 e 2.1.2, concluímos que

$$\cos \theta \geq \sqrt{1 - \sigma^2}, \quad (2.9)$$

$$\|\tilde{\gamma}^k\| \leq \frac{\alpha_k \|\tilde{x}^k - x^k\|}{1 - \sigma}. \quad (2.10)$$

Seja x^* um zero de T . Usando a equação (2.8), concluímos que $\|x^k - x^*\|$ é uma seqüência não-crescente e limitada inferiormente (por 0) e que $\|x^{k+1} - x^k\| \rightarrow 0$. Já a definição de x^{k+1} diz que

$$\|x^{k+1} - x^k\| = \|\tilde{x}^k - x^k\| \cos \theta,$$

o que, junto a (2.9), leva-nos a concluir que

$$\|\tilde{x}^k - x^k\| \rightarrow 0. \quad (2.11)$$

Como $\{\alpha_k\}$ é limitada superiormente, (2.10) implica que

$$\tilde{\gamma}^k \rightarrow 0. \quad (2.12)$$

Por outro lado, sabemos que $\|x^k - x^*\|$ é não-crescente, logo $\{x^k\}$ é limitada, pois está contida na bola de centro x^1 e raio $\|x^1 - x^*\|$. Seja $\bar{x}$ ponto de acumulação de $\{x^k\}$. A Equação (2.11) diz que $\bar{x}$ também é ponto de acumulação de $\{\tilde{x}^k\}$. Lembrando de (2.12), a semi-continuidade exterior de T implica então que $0 \in T(\bar{x})$.

Por fim, aplicando a desigualdade (2.8) para $x^* = \bar{x}$ concluímos que $\|x^k - \bar{x}\|$ é não-crescente e que $\|x^k - \bar{x}\|$ converge para zero em alguma subsequência. Logo, $\|x^k - \bar{x}\| \rightarrow 0$, ou seja, $x^k \rightarrow \bar{x}$. $\square$

2.2 Conexão com métodos de multiplicadores

Em [39], Rockafellar mostrou que o método de multiplicadores clássico, introduzido por Hestenes [22] e Powell [34], pode ser interpretado como uma forma indireta de aplicar o método proximal clássico à solução do dual de um problema de programação convexa, no qual cada passo proximal equivale a uma minimização irrestrita envolvendo apenas os dados primais.

Essa técnica foi amplamente explorada na literatura para a obtenção de diferentes métodos de multiplicadores a partir de variações do método proximal clássico, como em [8, 28, 27, 6, 5, 3, 25, 42].

Esta seção dedica-se a apresentar, independentemente do termo regularizador usado no método proximal, a relação entre métodos de multiplicadores e métodos proximais. A nossa abordagem baseia-se na análise ligando os métodos clássicos contida em [7, seções 5.4.5, 5.4.6] e estendida para regularizações gerais em [25, 42].

Durante o restante desta seção vamos estudar o problema de programação convexa descrito na Definição 1.2.2. Lembremos que consideramos que *o valor ótimo deste problema é finito*. A ferramenta básica que nós vamos explorar é a relação entre o primal

e seu dual lagrangiano, sobretudo o Lema 1.2.4, bem como resultados de dualidade de Fenchel [36] e [37, Capítulo 31].

Estamos interessados em relacionar soluções da maximização da função objetivo dual perturbada por um termo côncavo (como é feito em métodos proximais) com soluções da minimização de penalizações do problema primal.

Definição 2.2.1. Uma *penalidade* é uma função $P : \mathbb{R}^m \rightarrow (-\infty, \infty]$ convexa, própria, fechada, não-decrescente ($u \geq v \Rightarrow P(u) \geq P(v)$) e tal que $0 \in \text{dom } P$.³

Definimos ainda a seguinte notação: se $x \in \mathbb{R}^n$, $P(g(x))$ denota a composição de P e g , caso $g(x) \in \mathbb{R}^m$, ou $+\infty$, caso contrário.

Chamaremos de *penalização do problema primal* ou de *problema primal penalizado* um problema na forma

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) + P(g(x)) \\ \text{s.a} \quad & x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

□

Uma caracterização alternativa da monotonicidade das penalidades⁴ é dada no lema a seguir:

Lema 2.2.2. *Seja $h : \mathbb{R}^m \rightarrow (-\infty, \infty]$ uma função convexa própria e fechada. Então h é não-decrescente se, e somente se, $\text{dom } h^* \subset \mathbb{R}_+^m$.*

Demonstração.

- h não-decrescente $\Rightarrow \text{dom } h^* \subset \mathbb{R}_+^m$.

Seja $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $y_j < 0$, para algum j . Seja $x \in \text{dom } h$ e denotemos por e^j o j -ésimo vetor da base canônica. Temos

$$\begin{aligned} \forall \alpha > 0, \quad h^*(y) &\geq \langle x - \alpha e^j, y \rangle - h(x - \alpha e^j) \\ &\geq \langle x, y \rangle + \alpha |y_j| - h(x) \Rightarrow \\ h^*(y) &= \infty. \end{aligned}$$

- $\text{dom } h^* \subset \mathbb{R}_+^m \Rightarrow h$ não-decrescente.

Como h é fechada,

$$\begin{aligned} h(x) = h^{**}(x) &= \sup_y \{ \langle y, x \rangle - h^*(y) \} \\ &= \sup_{y \geq 0} \{ \langle y, x \rangle - h^*(y) \}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

³ $0 \in \text{dom } P$ e P não-decrescente, implicam que $\text{dom } P \supset \mathbb{R}_-^m$.

⁴O fato de serem não-decrescentes.

Além disto, dados $a \geq b$ e $y \geq 0$:

$$\begin{aligned} \langle y, a \rangle &\geq \langle y, b \rangle \Rightarrow \\ \langle y, a \rangle - h^*(y) &\geq \langle y, b \rangle - h^*(y) \stackrel{(2.13)}{\Rightarrow} \\ h(a) &\geq h(b). \end{aligned}$$

□

Outro resultado fundamental é:

Lema 2.2.3. *Seja $P : \mathbb{R}^m \rightarrow (-\infty, \infty]$ uma penalidade. Seja $g : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty]^m$ a função restrição do problema primal. Então, a função $P(g(\cdot)) : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty]$, definida em 2.2.1, é própria e convexa.*

Demonstração. Para mostrar que $P(g(\cdot))$ é própria, basta provar que ela é finita em algum ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Seja $\bar{x}$ um ponto viável primal. Então $P(g(\bar{x})) \leq P(0) \in \mathbb{R}$.

Agora, seja $\zeta \in [0, 1]$ e x e y dois pontos em que $P(g(\cdot))$ é finita. Temos:

$$\begin{aligned} P(g(\zeta x + (1 - \zeta)y)) &\leq P(\zeta g(x) + (1 - \zeta)g(y)) && [\text{Conv. } g \text{ e } P \text{ não-dec.}] \\ &\leq \zeta P(g(x)) + (1 - \zeta)P(g(y)). && [\text{Conv. de } P] \end{aligned}$$

□

Lema 2.2.4. *Sejam P , g e $P(g(\cdot))$ como no lema acima. Se $\text{dom } P^* \cap \mathbb{R}_{++}^m \neq \emptyset$, então $P(g(\cdot))$ é fechada.*

Demonstração. Sabemos que $P = P^{**}$. Isto nos leva a tentar provar que:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, P(g(x)) = \sup_{v \in \text{dom } P^*} \{ \langle v, g(x) \rangle - P^*(v) \}.$$

Neste caso, como o Lema 2.2.2 garante que $\text{dom } P^* \subset \mathbb{R}_+^m$, $P(g(\cdot))$ será fechada, por ser o supremo pontual de funções fechadas [41, Proposição 1.26].

A definição de P assegura que a equação acima vale sempre que $g(x) \in \mathbb{R}^m$. Portanto, basta provarmos que, se $g_i(x) = +\infty$, para algum $i = 1, \dots, m$, então o supremo acima também vale $+\infty$. Seja $v \in \text{dom } P^* \cap \mathbb{R}_{++}^m$. Temos:

$$\langle v, g(x) \rangle - P^*(v) = v_i(+\infty) + \sum_{\substack{j=1, \dots, m \\ j \neq i}} v_j g_j(x) - P^*(v) = +\infty.$$

□

No lema anterior assumimos a hipótese que $\text{dom } P^* \cap \mathbb{R}_{++}^m \neq \emptyset$, que será natural em nossas aplicações, uma vez que sempre conheceremos P^* . Porém, esta condição pode ser substituída pela restrição equivalente que P depende de todas suas variáveis, isto é,

$$\exists i \in \{1, \dots, m\} \text{ tal que } \forall u \in \mathbb{R}^m,$$

$$P(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_m) = P(u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_m). \quad (2.14)$$

Esta hipótese é mais adequada se não conhecermos P^* . Esta última condição é natural pois, caso P não dependa de alguma de suas variáveis, o respectivo problema penalizado iria “esquecer” uma restrição.

Notamos ainda que não basta que P seja uma penalidade para que $P(g(\cdot))$ seja fechada. Um exemplo disso é $P(u_1, u_2) = \max(u_2, -1)$ (neste caso, $P^*(u_1, u_2) = +\infty$, se $u_1 \neq 0$). Para $g_1(x) = 1/x - 1 + \delta_{\mathbb{R}_{++}}(x)$ e $g_2(x) = x - 1$, temos

$$P(g_1(x), g_2(x)) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x \leq 0 \\ x - 1 & \text{se } x > 0; \end{cases}$$

que não é fechada.

Apoiados nessas definições e resultados, podemos enfocar a relação entre problemas penalizados e problemas duais perturbados. Um primeiro, e importante, passo nesta direção foi feito em [7, seção 5.4.5]). Apresentamos a seguir uma pequena extensão deste resultado:

Proposição 2.2.5. ([7, seção 5.4.5]) *Seja P uma penalidade, v a função perturbação do lado-direito e F a função objetivo dual. Se $\text{ri dom } v \cap \text{ri dom } P \neq \emptyset$ ou $\text{ri dom } F \cap \text{ri dom } P^* \neq \emptyset$, então:*

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x) + P(g(x))\} = \inf_{u \in \mathbb{R}^m} \{v(u) + P(u)\} = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^m} \{F(\lambda) - P^*(\lambda)\}.$$

Demonstração. Como P é não-decrescente:

$$\begin{aligned} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x) + P(g(x))\} &= \inf_{x \in \mathbb{R}^n, g(x) \in \mathbb{R}^m} \{f(x) + P(g(x))\} \\ &= \inf_{u \in \mathbb{R}^m} \inf_{x \in \mathbb{R}^n, g(x) \leq u} \{f(x) + P(g(x))\} \\ &\leq \inf_{u \in \mathbb{R}^m} \inf_{x \in \mathbb{R}^n, g(x) \leq u} \{f(x) + P(u)\} \\ &= \inf_{u \in \mathbb{R}^m} \{v(u) + P(u)\}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x) + P(g(x))\} &\geq \inf_{x \in \mathbb{R}^n, g(x) \in \mathbb{R}^m} \{v(g(x)) + P(g(x))\} \\ &\geq \inf_{u \in \mathbb{R}^m} \{v(u) + P(u)\}. \end{aligned}$$

Portando, a primeira igualdade está provada.

Já que assumimos que o valor ótimo primal é real, F e v serão funções próprias. Podemos então usar o Lema 1.2.4 e o Teorema de dualidade de Fenchel [37, Teorema 31.1], para concluir que:

$$\inf_{u \in \mathbb{R}^m} \{v(u) + P(u)\} = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \{F(\lambda) - P^*(\lambda)\}.$$

Como fora do ortante positivo F vale $-\infty$ e P vale $+\infty$, a segunda igualdade está demonstrada. $\square$

Infelizmente este resultado relaciona apenas os valores ótimos dos problemas e não suas soluções, como desejamos. Contudo, se a perturbação do dual for estritamente convexa, é possível recuperar a solução da otimização dual a partir de uma solução qualquer do problema primal penalizado, como mostramos a seguir:

Teorema 2.2.6. *Seja $D : \mathbb{R}^m \rightarrow (-\infty, \infty]$ uma função estritamente convexa, própria, fechada e que atinge mínimo no $\mathbb{R}_+^m$. Se P é a função convexo conjugada de $D + \delta_{\mathbb{R}_+^m}$, então P é uma penalidade. Além disto, se*

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \operatorname{argmax}_{\lambda \in \mathbb{R}_+^m} \{F(\lambda) - D(\lambda)\} \text{ e} \\ \bar{x} &\in \operatorname{Argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x) + P(g(x))\}, \end{aligned}$$

então

$$\bar{\lambda} = \nabla P(g(\bar{x})).$$

Demonstração. Vamos mostrar que P é uma penalidade. Claramente P é convexa, própria e fechada, pois é a função conjugada de uma função desta classe. O Lema 2.2.2 garante que P é não-decrescente. Além do mais, se $\bar{u} \in \mathbb{R}_+^m$ é um ponto de mínimo de D , então

$$0 \in \partial(D + \delta_{\mathbb{R}_+^m})(\bar{u}) \Leftrightarrow \bar{u} \in \partial P(0). \quad (2.15)$$

logo P é finita no 0. Portanto, P é uma penalidade.

Para a demonstrar a segunda parte do teorema, faremos uso de:

Teorema 2.2.7. [36, Teorema 2] *Seja f (g) uma função convexo (côncava) e própria no $\mathbb{R}^n$. Suponha que a desigualdade de Fenchel seja válida como uma igualdade. Então, $\bar{x}$ é um ponto onde $f - g$ atinge mínimo, se, e somente se, $\partial f(\bar{x})$ e $\partial g(\bar{x})$ tiverem um ponto em comum. Além disto, a intersecção $\partial f(\bar{x}) \cap \partial g(\bar{x})$ coincide com o conjunto dos pontos onde $g_* - f^*$ atinge máximo.* $\square$

Lembrando de (2.15), vemos que P é subdiferenciável na origem. Como $P^*(= D + \delta_{\mathbb{R}_+^m})$ é estritamente convexa, concluímos que $0 \in \text{int dom } P$ [41, Teorema 11.13]. Por outro lado, assumimos que o valor ótimo do problema primal é finito, e deste modo $0 \in \text{dom } v$. Logo, 0 é aderente a $\text{ri dom } v$. Concluimos que $\text{int dom } P \cap \text{ri dom } v \neq \emptyset$.

Usando a Proposição 2.2.5 obtemos:

$$\begin{aligned} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x) + P(g(x))\} &= \inf_{u \in \mathbb{R}^m} \{v(u) + P(u)\} \\ &= \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^m} \{F(\lambda) - D(\lambda)\}. \end{aligned}$$

A definição de $\bar{x}$ e o fato de P ser não-decrescente garantem que $f(\bar{x}) = v(g(\bar{x}))$. Portanto, definido-se $\bar{u} \stackrel{\text{def}}{=} g(\bar{x})$, temos que

$$\begin{aligned} v(\bar{u}) + P(\bar{u}) &= \inf_{u \in \mathbb{R}^m} \{v(u) + P(u)\} \\ &= \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^m} \{F(\lambda) - D(\lambda)\}. \end{aligned}$$

O Lema 1.2.4 mostra que podemos usar o Teorema 2.2.7 para concluir que:

$$\bar{\lambda} = \operatorname{argmax}_{\lambda \in \mathbb{R}_+^m} \{F(\lambda) - D(\lambda)\} \in \partial P(\bar{u}) = \{\nabla P(g(\bar{x}))\}.$$

A última igualdade é uma consequência do fato de P ser a função convexo conjugada de uma função estritamente convexa, logo P é diferenciável sempre que for subdiferenciável [41, Teorema 11.13]. $\square$

Para aplicar este resultado à resolução do problema dual por um método proximal, basta lembrarmos que dada uma distância generalizada D , $D(\cdot, \lambda^k)$ é estritamente convexa, própria, fechada e atinge mínimo em λ^k . Logo o Teorema 2.2.6 diz que o passo proximal,

$$\lambda^{k+1} = \operatorname{argmax}_{\lambda \in \mathbb{R}_+^m} \{F(\lambda) - D(\lambda, \lambda^k)\},$$

pode ser feito minimizando um problema primal penalizado por

$$P = (D(\cdot, \lambda^k) + \delta_{\mathbb{R}_+^m}(\cdot))^*,$$

sempre que este problema tiver soluções.

Desejamos assim encontrar condições que garantam que o problema primal penalizado tenha soluções, assegurando que o método de multiplicadores proposto esteja bem definido. Apresentamos uma resposta parcial a esta pergunta.

Mais uma vez, chamaremos a função convexo conjugada de $(D + \delta_{\mathbb{R}_+^m})$ de P . Para facilitar a apresentação usaremos também a seguinte convenção:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, p(x) \stackrel{\text{def}}{=} P(g(x)).$$

Lema 2.2.8. *Seja $D : \mathbb{R}^m \rightarrow (-\infty, \infty]$ convexa, própria e fechada atingindo mínimo no $\mathbb{R}_+^m$. Suponha ainda que $\text{dom } D \supset \mathbb{R}_{++}^m$. Seja $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ a intersecção dos cones de recessão dos conjuntos de nível das componentes da função de restrição, g . Então,*

$$p^\infty(d) = \begin{cases} 0 & \text{se } d \in \mathcal{R}; \\ +\infty & \text{se } d \notin \mathcal{R}. \end{cases}$$

Demonstração. Usando o Lema 2.2.4, sabemos que p é uma função convexa, própria e fechada. Seja $\bar{x}$ um ponto viável primal, como $\text{dom } P \supset \mathbb{R}_+^m$, temos que $\bar{x} \in \text{dom } p$, logo:

$$p^\infty(d) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p(\bar{x} + td) - p(\bar{x})}{t}, \quad (2.16)$$

para qualquer $d \in \mathbb{R}^m$.

Por outro lado, como $\text{int dom } (D + \delta_{\mathbb{R}_+^m}) = \mathbb{R}_{++}^m$, sabemos que

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{R}_{++}^m, \exists \gamma, \gamma \in \partial(D + \delta_{\mathbb{R}_+^m})(\lambda) &\Leftrightarrow \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}_{++}^m, \exists \gamma, \lambda \in \partial P(\gamma). \end{aligned}$$

Portando, para todo $t > 0$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}_{++}^m$:

$$\exists \gamma, P(\gamma) + \langle \lambda, g(\bar{x} + td) - \gamma \rangle - p(\bar{x}) \leq p(\bar{x} + td) - p(\bar{x}).$$

Dividindo por t e tomando o limite para $t \rightarrow \infty$, segue de (2.16) que para todo $\lambda \in \mathbb{R}_{++}^m$:

$$\langle \lambda, g^\infty(d) \rangle \leq p^\infty(d), \quad (2.17)$$

já que a função de recessão de uma função convexa própria é uma função própria. Tomando o limite para $\lambda \rightarrow 0$ concluímos que:

$$\forall d \in \mathbb{R}^m, 0 \leq p^\infty(d). \quad (2.18)$$

Agora, basta considerar:

1. $d \in \mathcal{R}$.

$$\begin{aligned} g(\bar{x} + td) &\leq g(\bar{x}), \forall t \geq 0 \Rightarrow \\ p(\bar{x} + td) - p(\bar{x}) &\leq 0, \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Dividindo por t e tomando o limite para $t \rightarrow \infty$, segue que

$$p^\infty(d) \leq 0.$$

Usando (2.18), concluímos que:

$$p^\infty(d) = 0.$$

2. $d \notin \mathcal{R}$.

Sem perda de generalidade, vamos supor que d não está no cone de recessão de $g_1(\cdot)$:

$$g_1^\infty(d) > \zeta > 0.$$

Seja $\lambda = (M, 1, 1, \dots, 1)^t \in \mathbb{R}^m$. Por (2.17), concluimos que

$$\forall M > 0, M\zeta + \sum_{i=2}^m g_i^\infty(d) \leq p^\infty(d).$$

Como $g_i^\infty(d) > -\infty$, $i = 1, \dots, m$, basta tomar o limite para $M \rightarrow \infty$ para concluir que:

$$p^\infty(d) = +\infty.$$

□

Lema 2.2.9. *Seja $D : \mathbb{R}^m \rightarrow (-\infty, \infty]$ convexa, própria e fechada e atingindo mínimo no $\mathbb{R}_+^m$. Suponha ainda que $\text{dom } D \supset \mathbb{R}_{++}^m$. Então $f(\cdot) + P(g(\cdot))$ é convexa, própria e fechada. Se o conjunto de soluções de (P) for compacto e não-vazio, então os conjuntos de nível de $f(\cdot) + P(g(\cdot))$ são compactos. Isto garante a existência de mínimos desta função.*

Demonstração. O Lema 2.2.4 garante que $f(\cdot) + P(g(\cdot))$ é convexa e fechada. Além disto, como o primal é viável e $\text{dom } P \supset \mathbb{R}_-^m$, ela é própria.

Usando o lema anterior e [41, Exercício 3.29] concluimos que:

$$(f(\cdot) + P(g(\cdot)))^\infty(d) = \begin{cases} f^\infty(d) & \text{se } d \in \mathcal{R}; \\ +\infty & \text{se } d \notin \mathcal{R}. \end{cases}$$

O resultado é então consequência da compacidade do conjunto de soluções de (P) , o que implica que $f^\infty(d) > 0$, se $d \in \mathcal{R}$ [8, Seção 5.3]. □

Destacamos que a hipótese $\text{dom } D \supset \mathbb{R}_{++}^m$ é bastante comum na literatura. Por exemplo, ela aparece em [8, p. 306], na descrição da classe de penalidades P_1 e, mais recentemente, em [1], correspondendo às propriedades de recessão exigidas das penalidades θ e à escolha do parâmetro de penalização.

Além disto, esta condição não pode ser eliminada do enunciado do Lema 2.2.9. Para justificar esta afirmação, considere $D(\lambda) = -\sqrt{1 - (2 - \lambda)^2}$, cujo domínio é $[1, 3]$. Neste caso, a penalidade torna-se $P(u) = (D + \delta_{\mathbb{R}_+^m})^*(u) = 2u + \sqrt{u^2 + 1}$, representada na Figura 2.2. Como P tem inclinação mínima positiva: se $u \rightarrow -\infty$, P converge para $-\infty$

Figura 2.3: Penalidade $P(u) = 2u + \sqrt{u^2 + 1}$, associada a $D(\lambda) = -\sqrt{1 - (2 - \lambda)^2}$. Note que a penalidade decresce linearmente quando u converge para $-\infty$.

pelo menos linearmente. Logo, é fácil criar um problema de programação linear que possui conjunto de solução compacto e tal que o problema penalizado por P não possua soluções:

$$\begin{array}{ll} \min & x \\ \text{s.a} & -2x \leq 0. \end{array}$$

O problema penalizado é:

$$f(x) + P(g(x)) = -3x + \sqrt{4x^2 + 1}.$$

Esta função não possui conjuntos de nível limitados, na verdade ela converge para $-\infty$ se $x \rightarrow +\infty$. Neste caso, a penalidade faz com que a viabilidade seja mais importante que a otimalidade. Este comportamento seria revertido se a função objetivo fosse capaz de “compensar a inclinação negativa” introduzida pela penalidade, por exemplo, se ela fosse $5x$ ao invés de x .

Distâncias Baseadas em Translação

Neste capítulo, apresentamos uma classe de métodos proximais para otimização, denominada aqui de ϕ -MPP, baseada em translações de funções estritamente convexas. Na Seção 3.1, estudamos a convergência supondo que os sub-problemas são resolvidos exatamente. Esta hipótese é relaxada a seguir, na Seção 3.2, na qual introduzimos um critério de aceitação que permite erros relativos fixos, semelhante ao que foi feito na Seção 2.1. A Seção 3.3 dedica-se à análise dos métodos de multiplicadores baseados no ϕ -MPP. Este capítulo baseia-se em [25].

3.1 Métodos de ponto proximal e funções estritamente convexas

Vamos estudar o problema de minimização irrestrita, apresentado na Definição 1.2.1. Assumimos também que:

Hipótese 3.1.1. A função objetivo, f , é limitada inferiormente no $\mathbb{R}^n$.

Com este objetivo, vamos introduzir um método proximal baseado em regularizações, denotadas por ϕ , tais que:

Hipótese 3.1.2. $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty]$ é uma função estritamente convexa e fechada, $\phi(0) = 0$ e ϕ é diferenciável na origem com $\nabla\phi(0) = 0$.¹

Uma consequência imediata é que ϕ possui conjuntos de nível compactos. Eles são fechados porque ϕ é fechada e são limitados porque ϕ possui um único mínimo [41, Proposição 3.23].

¹A hipótese de $\phi(0) = 0$ não é necessária para obtenção dos nossos resultados, porém ela simplifica praticamente todas as equações. Em particular, ela implica que ϕ é não-negativa.

Apresentamos nosso método proximal:

Algoritmo 3.1.3. *Método de Ponto Proximal Baseado em Translações de Funções Estritamente Convexas (ϕ -MPP)*

Considere o problema de minimização irrestrita, definido em 1.2.1. Suponha que as Hipótese 3.1.1 e 3.1.2 são validas.

Seja $\tilde{\alpha}$ um número real positivo.

1. Inicialização: Comece com $x^1 \in \text{dom } f$.
2. Iteração: Escolha $0 < \alpha_k \leq \tilde{\alpha}$ e calcule

$$x^{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{argmin}} \{f(x) + \alpha_k \phi(x - x^k)\}. \quad (3.1)$$

Se $x^{k+1} = x^k$, pare.

Destacamos que as Hipóteses 3.1.1 e 3.1.2 garantem que a função minimizada na iteração do algoritmo possui conjuntos de nível compactos, resultando na existência de mínimos. Portanto, a sequência gerada pelo Algoritmo 3.1.3 está bem definida. Outro fato importante é que os pontos fixos deste algoritmo são exatamente os pontos de mínimo de f . Esta é uma consequência imediata da Hipótese 3.1.2.

Análise de Convergência

Iniciamos pela caracterização de algumas propriedades importantes de ϕ próximo à origem.

Lema 3.1.4. *Seja $\{z^k\}$ uma sequência no $\mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a). $\phi(z^k) \rightarrow 0$;
- (b). $z^k \rightarrow 0$;
- (c). Existe um $N > 0$ tal que, para todo $k > N$, ϕ é subdiferenciável em z^k e $\forall k > N$, $\forall \gamma^k \in \partial\phi(z^k)$, $\gamma^k \rightarrow 0$.
- (d). Existe um $N > 0$ tal que, para todo $k > N$, ϕ é subdiferenciável em z^k e $\forall k > N$, $\forall \gamma^k \in \partial\phi(z^k)$, $\langle \gamma^k, z^k \rangle \rightarrow 0$.

Demonstração.

1. (a) $\Rightarrow$ (b). Se $\phi(z^k) \rightarrow 0$, então $\{z^k\}$ é limitada, uma vez que ϕ possui conjuntos de nível compactos. Seja $\{z^k\}_{k \in \mathcal{K}}$ uma subsequência convergente de $\{z^k\}$. Como ϕ é fechada,

$$\phi(\bar{z}) \leq \lim_{i \in \mathcal{K}} \phi(z^k) = 0 = \min_{z \in \mathbb{R}^n} \{\phi(z)\}.$$

Portando $\bar{z}$ é o ponto de mínimo de ϕ , ou seja, $\bar{z} = 0$.

2. (b) $\Rightarrow$ (c). Já que $z^k \rightarrow 0$, existe um $N > 0$ tal que para todo $k > N$, z^k está no interior do $\text{dom } \phi$, onde ϕ é subdiferenciável. Para $k > N$, seja $\gamma^k \in \partial\phi(z^k)$. $\{\gamma^k\}_{k > N}$ é limitada [37, Teorema 24.7] e, devido a semi-continuidade exterior de $\partial\phi$, todo ponto de acumulação de $\{\gamma^k\}_{k > N}$ é um elemento de $\partial\phi(0) = \{0\}$.
3. (c) $\Rightarrow$ (d). Basta mostrar que $\{z^k\}$ é limitada. Como $\gamma^k \rightarrow 0$ e

$$\frac{\langle \gamma^k, z^k \rangle}{\|z^k\|} \geq \frac{\phi(z^k) - \phi(0)}{\|z^k\|} = \frac{\phi(z^k)}{\|z^k\|} \geq 0,$$

segue que

$$\frac{\phi(z^k)}{\|z^k\|} \rightarrow 0.$$

Portando $\{z^k\}$ é limitada, pois senão haveria contradição com o fato de ϕ possuir curvas de nível limitadas [41, Corolário 3.27].

4. (d) $\Rightarrow$ (a). Como $\gamma^k \in \partial\phi(z^k)$, $\langle \gamma^k, z^k \rangle \geq \phi(z^k) - \phi(0) = \phi(z^k) \geq 0$. Tomando limites para $k \rightarrow \infty$ temos $\phi(z^k) \rightarrow 0$.

□

Podemos provar o seguinte teorema de convergência para o Algoritmo 3.1.3:

Teorema 3.1.5. *Seja $\{x^k\}$ uma seqüência obtida pelo Algoritmo 3.1.3. Se $\bar{x}$ é um ponto de acumulação desta seqüência, $x^k \rightarrow_{\mathcal{K}} \bar{x}$, então $\bar{x}$ minimiza f e $x^{k+1} \rightarrow_{\mathcal{K}} \bar{x}$.*

Demonstração. Seja $\tilde{\alpha}$ o limite superior de $\{\alpha_k\}$. Para evitar technicalidades associadas a uma subsequência de $\{\alpha_k\}$ convergindo para 0 definimos:

$$\tilde{x}^k \stackrel{\text{def}}{=} \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{argmin}} \{f(x) + \tilde{\alpha}\phi(x - x^k)\}.$$

Claramente,

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}^k) + \tilde{\alpha}\phi(\tilde{x}^k - x^k) &\leq f(x^{k+1}) + \tilde{\alpha}\phi(x^{k+1} - x^k) \\ f(x^{k+1}) + \alpha_k\phi(x^{k+1} - x^k) &\leq f(\tilde{x}^k) + \alpha_k\phi(\tilde{x}^k - x^k) \end{aligned}$$

Usando as desigualdades acima e $\alpha_k \leq \tilde{\alpha}$, concluímos que

$$f(x^{k+1}) \leq f(\tilde{x}^k).$$

Portanto,

$$f(x^{k+1}) + \tilde{\alpha}\phi(\tilde{x}^k - x^k) \leq f(\tilde{x}^k) + \tilde{\alpha}\phi(\tilde{x}^k - x^k) \leq f(x^k).$$

Já que, pela Hipótese 3.1.1, f é limitada inferiormente, segue que

$$0 \leq \tilde{\alpha}\phi(\tilde{x}^k - x^k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) - f(x^{k+1}) = 0.$$

Assim,

$$\phi(\tilde{x}^k - x^k) \rightarrow 0. \quad (3.2)$$

A definição de $\tilde{x}^k$ assegura que existem $\tilde{\gamma}_f^k \in \partial f(\tilde{x}^k)$ e $\tilde{\gamma}_\phi^k \in \partial \phi(\tilde{x}^k - x^k)$ tais que

$$\tilde{\gamma}_f^k + \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}_\phi^k = 0.$$

De (3.2) e, através do Lema 3.1.4, podemos observar que

$$\tilde{x}^k - x^k \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \tilde{\gamma}_f^k = -\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}_\phi^k \rightarrow 0.$$

Finalmente, seja $x^k \rightarrow_{\mathcal{K}} \bar{x}$. O resultado acima implica que $\tilde{x}^k \rightarrow_{\mathcal{K}} \bar{x}$ e, devido à semi-continuidade exterior de ∂f ,

$$0 \in \partial f(\bar{x}).$$

Ou seja, $\bar{x}$ minimiza f .

Resta provar que $\{x^{k+1}\}_{k \in \mathcal{K}}$ converge para $\bar{x}$. Notemos que

$$f(x^{k+1}) + \alpha_k \phi(x^{k+1} - x^k) \leq f(\bar{x}) + \alpha_k \phi(\bar{x} - x^k) \leq f(x^{k+1}) + \alpha_k \phi(\bar{x} - x^k).$$

Conseqüentemente

$$0 \leq \phi(x^{k+1} - x^k) \leq \phi(\bar{x} - x^k).$$

Como $\phi(\bar{x} - x^k) \rightarrow_{\mathcal{K}} 0$, segue que $\phi(x^{k+1} - x^k) \rightarrow_{\mathcal{K}} 0$. O Lema 3.1.4 assegura então que $x^{k+1} \rightarrow_{\mathcal{K}} \bar{x}$. $\square$

Podemos completar este resultado de otimalidade dos pontos de acumulação, com a convergência ao valor ótimo:

Corolário 3.1.6. *Seja $\{x^k\}$ uma seqüência obtida pelo Algoritmo 3.1.3. Se $\{x^k\}$ possuir um ponto de acumulação, então*

$$f(x^k) \rightarrow \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x)\}.$$

Demonstração. Seja $\{x^k\}_{k \in \mathcal{K}}$ uma subsequência convergente de $\{x^k\}$, $x^k \rightarrow_{\mathcal{K}} \bar{x}$. O Teorema 3.1.5 mostra que $\bar{x}$ é um minimizador de f e que $x^{k+1} \rightarrow_{\mathcal{K}} \bar{x}$. Seja $\gamma_{\phi}^{k+1} \in \partial\phi(x^{k+1} - x^k)$ tal que $\exists \gamma_f^{k+1} \in \partial f(x^{k+1})$, $-\alpha_k \gamma_{\phi}^{k+1} = \gamma_f^{k+1}$.

Como $x^{k+1} - x^k \rightarrow_{\mathcal{K}} 0$, temos que $\gamma_{\phi}^{k+1} \rightarrow_{\mathcal{K}} 0$. Portanto,

$$f(\bar{x}) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{k+1}) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{x}) + \alpha_k \langle \gamma_{\phi}^{k+1}, \bar{x} - x^{k+1} \rangle = f(\bar{x}).$$

Já que $\{f(x^k)\}$ é não-crescente e limitada, ela é convergente para $f(\bar{x})$, o mínimo de f . $\square$

3.2 Uma versão inexata do ϕ -MPP

Na seção anterior, apresentamos resultados de convergência para o Algoritmo 3.1.3 caso os sub-problemas sejam resolvidos com exatidão. Surge naturalmente a pergunta: é possível resolver estes sub-problemas aproximadamente e mesmo assim obter resultados de convergência, como foi feito no capítulo anterior? O próximo teorema é uma resposta afirmativa a esta questão.

Teorema 3.2.1. *Suponha que as Hipóteses 3.1.1 e 3.1.2 são válidas. Seja $\sigma \in [0, 1]$ e $\{\alpha_k\}$ uma seqüência de reais positivos limitada superiormente por $\tilde{\alpha}$. Seja $\{x^k\}$ uma seqüência gerada iterativamente tal que para $\gamma_f^{k+1} \in \partial f(x^{k+1})$, $\gamma_{\phi}^{k+1} \in \partial\phi(x^{k+1} - x^k)$ e $e^{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_f^{k+1} + \alpha_k \gamma_{\phi}^{k+1}$,*

$$\|e^{k+1}\| \leq \sigma \frac{\alpha_k \langle \gamma_{\phi}^{k+1}, x^{k+1} - x^k \rangle}{\|x^{k+1} - x^k\|}. \quad (3.3)$$

Suponha ainda que uma das seguintes condições valem:

- (a). $\{\alpha_k\}$ é limitada inferiormente por um certo $\hat{\alpha} > 0$,
- (b). A seqüência $\Delta x^k \stackrel{\text{def}}{=} x^{k+1} - x^k$ está contida em um compacto, K , no interior de $\text{dom } \phi$,
- (c). Existe um $\epsilon > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $\gamma_{\phi} \in \partial\phi(x)$

$$\frac{\langle \gamma_{\phi}, x \rangle}{\|\gamma_{\phi}\| \|x\|} \geq \epsilon.$$

Então, $\gamma_f^k \rightarrow 0$. Em particular, todo ponto de acumulação da seqüência $\{x^k\}$ é um minimizador de f .

Demonstração. Vamos supor, por contradição, que exista uma subsequência $\{\gamma_f^k\}_{k \in \mathcal{K}}$ tal que $\gamma_f^k \not\rightarrow_{\mathcal{K}} 0$. Como $0 < \alpha_{k-1} \leq \tilde{\alpha}$, nós podemos assumir, sem perda de generalidade, que existe $\bar{\alpha} \geq 0$, $\alpha_{k-1} \rightarrow_{\mathcal{K}} \bar{\alpha}$.

De posse desta notação, temos:

$$\begin{aligned} f(x^{k-1}) &\geq f(x^k) + \langle \gamma_f^k, x^{k-1} - x^k \rangle \\ &= f(x^k) + \langle \alpha_{k-1} \gamma_\phi^k, x^k - x^{k-1} \rangle + \langle \gamma_f^k + \alpha_{k-1} \gamma_\phi^k, x^{k-1} - x^k \rangle \\ &\geq f(x^k) + \alpha_{k-1} \langle \gamma_\phi^k, x^k - x^{k-1} \rangle - \|\gamma_f^k + \alpha_{k-1} \gamma_\phi^k\| \|x^k - x^{k-1}\| \\ &\geq f(x^k) + (1 - \sigma) \alpha_{k-1} \langle \gamma_\phi^k, x^k - x^{k-1} \rangle. \end{aligned}$$

A última desigualdade é uma consequência do critério de aceitação (3.3). Portanto,

$$\alpha_{k-1} \langle \gamma_\phi^k, x^k - x^{k-1} \rangle \rightarrow 0. \quad (3.4)$$

Por outro lado, usando mais uma vez (3.3):

$$\|\gamma_f^k\| \leq (1 + \sigma) \alpha_{k-1} \|\gamma_\phi^k\|. \quad (3.5)$$

Consideramos três possibilidades:

A primeira está associada a $\bar{\alpha} > 0$, o que é certamente válido sob (a). Neste caso, (3.4) implica que

$$\langle \gamma_\phi^k, x^k - x^{k-1} \rangle \rightarrow_{\mathcal{K}} 0.$$

Usando Lema 3.1.4 e (3.5), segue que $\gamma_f^k \rightarrow_{\mathcal{K}} 0$.

Os próximos casos estão associados a $\bar{\alpha} = 0$. Se a condição (b) for válida, então $\forall k \in \mathcal{K}$, $\gamma_\phi^k \in \partial\phi(K)$ e, portanto, $\{\gamma_\phi^k\}_{k \in \mathcal{K}}$ é limitada e $\alpha_{k-1} \rightarrow_{\mathcal{K}} 0$. Usando (3.5), concluímos que $\gamma_f^k \rightarrow_{\mathcal{K}} 0$.

Sob a hipótese (c), usando (3.4), temos que

$$\alpha_{k-1} \|\gamma_\phi^k\| \|x^k - x^{k-1}\| \rightarrow_{\mathcal{K}} 0.$$

Vamos mais uma vez provar que $\gamma_f^k \rightarrow_{\mathcal{K}} 0$. Caso contrário, (3.5) assegura que existe uma subsequência $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$ e um $\delta > 0$ tal que $\forall k \in \mathcal{K}'$, $\alpha_{k-1} \|\gamma_\phi^k\| > \delta$. Então, $\|x^k - x^{k-1}\| \rightarrow_{\mathcal{K}'} 0$. Mas, usando o Lema 3.1.4, isto implicaria que $\alpha_{k-1} \gamma_\phi^k \rightarrow_{\mathcal{K}'} 0$, uma contradição.

Em todos os casos, a existência de uma subsequência tal que $\gamma_f^k \not\rightarrow_{\mathcal{K}} 0$ é negada, portanto, $\gamma_f^k \rightarrow 0$. Deste modo, a semi-continuidade exterior de ∂f implica que todo ponto de acumulação de $\{x^k\}$ minimiza f . $\square$

3.3 Métodos de multiplicadores

Nesta seção, nós vamos usar a versão exata do Algoritmo 3.1.3 para apresentar uma classe de métodos de multiplicadores para programação convexa que é uma generalização da classe P_E^+ discutida em [8]. Infelizmente, o critério de aceitação de uma solução aproximada do passo proximal dado por (3.3) não se traduz a uma condição facilmente verificável no contexto de métodos de multiplicadores. A questão da resolução aproximada dos sub-problemas de métodos de multiplicadores será tratada no Capítulo 6, no qual apresentaremos algumas classes de métodos proximais que resolvem parcialmente esta limitação.

Mais uma vez, queremos resolver o problema de programação convexa com restrições (1.2). Para isto, vamos aplicar o Algoritmo 3.1.3 à solução do problema dual (1.3). Neste caso obteríamos a seguinte iteração:

$$\lambda^{k+1} = \operatorname{argmax}_{\lambda \geq 0} \{F(\lambda) - \alpha_k \phi(\lambda - \lambda^k)\}.$$

Usando o Teorema 2.2.6, sabemos que podemos realizar estes passos através do seguinte método de multiplicadores:

Algoritmo 3.3.1. *Método de Multiplicadores Baseado em Funções Estritamente Conexas*

Considere o problema primal (1.2) e seu respectivo dual lagrangiano.

Seja $\tilde{\alpha}$ um número real estritamente positivo e $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow (-\infty, \infty]$ uma função que satisfaz a Hipótese 3.1.2.

1. Inicialização: Comece com λ^1 viável dual.

2. Iteração:

- Escolha $0 < \alpha_k \leq \tilde{\alpha}$ e calcule uma solução, x^{k+1} , do problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) + \alpha_k P\left(\frac{g(x)}{\alpha_k}, \lambda^k\right) \\ \text{s.a} \quad & x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

para,

$$P(u, \lambda^k) \stackrel{\text{def}}{=} (\phi(\cdot - \lambda^k) + \delta_{\mathbb{R}_+^m}(\cdot))^*(u).$$

- Faça

$$\lambda^{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_u P\left(\frac{g(x^{k+1})}{\alpha_k}, \lambda^k\right).$$

Se $\lambda^{k+1} = \lambda^k$, pare.²

□

²Neste caso λ^k é uma solução do problema dual, pois é um ponto fixo do Algoritmo 3.1.3.

Desta forma, a seqüência $\{\lambda^k\}$ é a mesma obtida pelo Algoritmo 3.1.3. Exemplos de algumas penalidades que podem ser obtidas a partir de diferentes escolhas de ϕ são apresentados na Figura 3.1.

Figura 3.1: Exemplos de penalidade: (A) A penalidade clássica, usada no método de multiplicadores de Hestennes e Powell. (B) A penalidade $P(u, \lambda) = u\lambda + \frac{3}{4}u^{4/3}$, obtida a partir de $\phi(u) = \frac{1}{4}u^4$. (C) A função de regularização usada aqui é $\phi(u) = \frac{1}{2}u^2$ restrita a um intervalo contendo a origem. Fora deste intervalo ϕ é igualada a $+\infty$. Isto faz com que a penalidade seja afim acima de um certo valor positivo (2, neste exemplo). (D) Esta penalidade foi obtida usando a função de regularização $\phi(u) = -\ln(\cos(u))$. Como $\phi'(u) = \tan(u)$, a penalidade terá derivada limitada e converge assintoticamente para uma função afim.

Para garantir a obtenção de soluções duais, é preciso que $\{\lambda^k\}$ esteja contida em um compacto. Isto será verdade se os conjuntos de nível de F forem compactos, já que o Algoritmo 3.1.3 é um método de descida. Como vimos no Teorema 1.2.5, a compacidade dos condutos de nível de F é equivalente a validade da condição de qualificação de Slater.

A seqüência primal

Na definição do método de multiplicadores, assumimos que todos os sub-problemas primais que serão resolvidos têm solução. Isto não é sempre verdade, como foi discutido

após a prova do Lema 2.2.9. Entretanto, este mesmo lema apresenta condições para que estas soluções existam: basta que o problema primal (1.2) possua conjunto de soluções compacto e não-vazio e que $\text{dom } \phi = \mathbb{R}^m$, pois desta forma para todo $\lambda \geq 0$, $\text{dom } \phi(\cdot - \lambda) \supset \mathbb{R}_{++}^m$.

Finalmente, apresentamos o principal teorema de convergência para seqüência primal calculada pelo Algoritmo 3.3.1:

Teorema 3.3.2. *Seja $\{(\mathbf{x}^k, \lambda^k)\}$ uma seqüência calculada pelo Algoritmo 3.3.1. Se o problema primal satisfaz a condição de qualificação de Slater, então*

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} g(\mathbf{x}^k) &\leq 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \lambda^k, g(\mathbf{x}^k) \rangle &= 0, \end{aligned}$$

e $f(\mathbf{x}^k)$ converge para o valor ótimo do problema primal, $v(0)$. Portanto, todo ponto de acumulação da seqüência primal é uma solução do problema primal (1.2).

Demonstração. A limitação da seqüência dual e o Teorema 3.1.5 implicam que $\lambda^k - \lambda^{k-1} \rightarrow 0$. Portanto, $\forall \gamma_\phi^k \in \partial\phi(\lambda^k - \lambda^{k-1})$, $\gamma_\phi^k \rightarrow 0$.

Usando definição do algoritmo, sabemos que:

$$\lambda^k = \nabla_u P\left(\frac{g(\mathbf{x}^k)}{\alpha_{k-1}}, \lambda^{k-1}\right) \Leftrightarrow g(\mathbf{x}^k) \in \partial(\alpha_{k-1}\phi(\cdot - \lambda^{k-1}) + \delta_{\mathbb{R}_+^m}(\cdot))(\lambda^k).$$

Isto é equivalente a existência de subgradietes $\gamma_\phi^k \in \partial\phi(\lambda^k - \lambda^{k-1})$ e $\gamma_\delta^k \in \partial\delta_{\mathbb{R}_+^m}(\lambda^k)$, tais que

$$g(\mathbf{x}^k) = \alpha_{k-1}\gamma_\phi^k + \gamma_\delta^k. \quad (3.6)$$

Como $\gamma_\delta^k \leq 0$, temos:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} g(\mathbf{x}^k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{k-1}\gamma_\phi^k = 0.$$

Além disto, a definição de γ_δ^k implica que $\langle \gamma_\delta^k, \lambda^k \rangle = 0$, e assim

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \lambda^k, g(\mathbf{x}^k) \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \lambda^k, \alpha_k \gamma_\phi^k \rangle = 0.$$

A última igualdade é uma conseqüência de $\gamma_\phi^k \rightarrow 0$ e da limitação de $\{\lambda^k\}$ e $\{\alpha_k\}$.

Por fim, vamos prova que $f(\mathbf{x}^k) \rightarrow v(0)$. A definição de P , λ^k , e [37, Teorema 23.5] implicam que

$$\alpha_{k-1}P\left(\frac{g(\mathbf{x}^k)}{\alpha_{k-1}}, \lambda^{k-1}\right) + \alpha_{k-1}\phi(\lambda^k - \lambda^{k-1}) + \delta_{\mathbb{R}_+^m}(\lambda^k) = \langle \lambda^k, g(\mathbf{x}^k) \rangle. \quad (3.7)$$

Além disto, lembrando da Proposição 2.2.5, também temos que

$$\begin{aligned} f(x^k) + \alpha_{k-1}P\left(\frac{g(x^k)}{\alpha_{k-1}}, \lambda^{k-1}\right) &= \min_x \left\{ f(x) + \alpha_{k-1}P\left(\frac{g(x)}{\alpha_{k-1}}, \lambda^{k-1}\right) \right\} \\ &= \max_{\lambda \geq 0} \{F(\lambda) - \alpha_{k-1}\phi(\lambda - \lambda^{k-1})\} \\ &= F(\lambda^k) - \alpha_{k-1}\phi(\lambda^k - \lambda^{k-1}). \end{aligned}$$

Logo, usando (3.7), segue:

$$F(\lambda^k) = f(x^k) + \langle \lambda^k, g(x^k) \rangle. \quad (3.8)$$

ou seja, x^k é um mínimo da função lagrangiana com λ^k como multiplicador.³ Usando o Corolário 3.1.6 e o teorema forte de dualidade, nós concluímos que:

$$v(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(\lambda^k) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) + 0.$$

□

Encerramos esta seção apresentando uma condição que assegura a limitação da seqüência primal e a conseqüente existência de pontos de acumulação, que serão soluções de (1.2).

Corolário 3.3.3. *Suponha que o problema primal satisfaça a condição de qualificação de Slater e que $\{x^k\}$ seja uma seqüência primal obtida pelo Algoritmo 3.3.1. Se o conjunto de soluções do primal for não-vazio e limitado, então $\{x^k\}$ é limitada.*

Demonstração. O Teorema 3.3.2 implica que $\{g(x^k)\}$ é limitada superiormente. Portanto, $\{x^k\}$ está contida em uma intersecção de conjuntos de nível das restrições.

Supomos, por contradição, que $\{x^k\}$ é ilimitada. Uma vez que o conjunto de soluções de (1.2) é compacto e não-vazio, $f(x^k) \rightarrow \infty$, pois, caso contrário, pelo menos um dos pontos de acumulação de $\frac{x^k}{\|x^k\|}$ seria uma direção de recessão comum à função objetivo e todas as restrições. Porém, isto contraria $f(x^k) \rightarrow v(0) \in \mathbb{R}$, provado no Teorema 3.3.2.

□

³Essa argumentação rebuscada faz-se necessária por não conhecermos um teorema do tipo *regra da cadeia* que possa ser usado na composição de P e g . Resultados do tipo [41, Teorema 10.6, 10.19, 10.49] possuem condições restritivas como a separabilidade de P , ou diferenciabilidade de g , ou P estritamente crescente.

Distâncias Coercivas

Na década de 90, observou-se um interesse crescente por métodos proximais baseados em distâncias coercivas [16, 45, 19, 28, 27, 1, 6, 20, 4, 5]. A principal vantagem deste tipo de regularização, quando comparada ao quadrado da norma euclidiana ou às regularizações descritas no Capítulo 3, é a possibilidade da resolução de problemas com restrições simples (como caixas ou poliedros) através de passos proximais irrestritos.¹ Isto se deve ao fato de a distância ter, ao mesmo tempo, funções de regularização e de barreira. Outro ponto positivo é a possibilidade da obtenção de métodos de multiplicadores baseados em penalidades infinitamente diferenciáveis, o que não ocorre no ϕ -MPP.

Este capítulo busca, através do uso de técnicas semelhantes às aquelas presentes nos capítulos anteriores, apresentar uma ampla classe de regularizações separáveis e coercivas para a solução de problemas com restrições do tipo caixa (1.1) e (1.4). Vamos provar a convergência, no sentido de subsequências, dos respectivos métodos proximais e, em seguida, analisaremos o caso de otimização e métodos de multiplicadores. Este capítulo é baseado em [42] e possui uma estreita ligação com os recentes artigos de Auslender, Teboulle e Ben-Tiba [4, 5] nos quais regularizações baseadas em ϕ -divergência são estudadas. Nós iremos colocar este artigos em um contexto mais amplo que engloba também distâncias de Bregman.

4.1 Regularizações Coercivas Separáveis

Vamos nos dedicar ao estudo de métodos proximais baseados em regularizações separáveis e coercivas tais que:

¹Na verdade, métodos baseados em distâncias de Bregman são apresentados conceitualmente para restrições convexas quaisquer. Entretanto, a maior parte das distâncias de Bregman conhecidas explicitamente lidam com restrições simples como caixas, bolas ou poliedros.

Hipótese 4.1.1. Para $i = 1, \dots, n$, as funções $d_i : \mathbb{R} \times (a_i, b_i) \rightarrow (-\infty, \infty]$ possuem as seguintes propriedades:

- (a). Para todo $y_i \in (a_i, b_i)$, $d_i(\cdot, y_i)$ é estritamente convexa, fechada e atinge mínimo em y_i . Ainda, $\text{int dom } d_i(\cdot, y_i) = (a_i, b_i)$.
- (b). d_i é diferenciável em $(a_i, b_i) \times (a_i, b_i)$ com relação ao seu primeiro argumento e esta derivada parcial é contínua em todo ponto da forma $(x_i, x_i) \in (a_i, b_i) \times (a_i, b_i)$. Ainda, lembrando de (1.8), denotamos

$$d'_i(x_i, y_i) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial d_i}{\partial x_i}(x_i, y_i).$$

- (c). Para todo $y_i \in (a_i, b_i)$, $\text{rge } d'_i(\cdot, y_i) = \mathbb{R}$.
- (d). Existem $L, \epsilon > 0$ tais que, sempre que $-\infty < a_i < y_i \leq x_i < a_i + \epsilon$ ou $b_i - \epsilon < x_i \leq y_i < b_i < +\infty$ temos que $|d'_i(x_i, y_i)| \leq L|x_i - y_i|$.

De uma forma geral, tais hipóteses são naturais em métodos proximais. A hipótese de estrita convexidade está presente em praticamente todos os métodos proximais que conhecemos, a exigência de diferenciabilidade também é comum. Escolhemos considerar que a imagem $d'_i(\cdot, y_i)$ é a reta real por simplicidade. Ela é usada somente no Lema 4.2.3, que prova que a seqüência proximal, descrita pelo Algoritmo 4.2.1, está bem definida e contida no interior da caixa B . Existem outras condições, menos restritivas para as regularizações, que garantem a boa definição da seqüência proximal, como as hipóteses apresentadas no Apêndice A. Porém, estas condições restringem o tipo de problemas variacionais que podemos resolver.²

Por fim, a Hipótese 4.1.1(d) é nova na teoria de métodos proximais generalizados, entretanto ela não é muito restritiva na prática. Em particular, mostraremos a seguir que é possível obter regularizações baseadas em distâncias de Bregman e φ -divergências para as quais esta condição é facilmente verificável e válida na grande maioria dos exemplos que conhecemos.

Mudança de Escala

Para obter regularizações d que obedeçam à Hipótese 4.1.1, vamos usar uma técnica que denominamos *mudança de escala*. Se $\tilde{d}(\cdot, \cdot)$, é uma componente de uma distância

²Por exemplo, se a desigualdade variacional vier de um problema de minimização, basta supor que as regularizações agem como uma barreira, não deixando os iterados proximais saírem de $\text{int } B$.

generalizada separável³, definimos uma nova componente:

$$d(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tilde{d}(x, y)}{\tilde{d}''(y, y)}. \quad (4.1)$$

Pode-se interpretar esta fórmula como uma tentativa de recuperar o comportamento do termo regularizador clássico em uma vizinhança do centro, forçando-se sua hessiana a coincidir com a identidade.

Distâncias de Bregman

As distâncias de Bregman foram introduzidas em [11] e aplicadas a métodos de ponto proximal em [16, 18, 19] e vários artigos posteriores. A construção destas distâncias usa uma função estritamente convexa auxiliar, $h : \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, \infty]$, $\text{int dom } h = (a, b)$. Se y é o centro, então a distância de um outro ponto ao centro é a diferença entre h e sua aproximação linear em y , ou seja, $\tilde{d}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} h(x) - h(y) - h'(y)(x - y)$. Também é possível obter distâncias não separáveis estendendo esta fórmula para o caso multi-dimensional. Mas neste texto trataremos apenas o caso separável, que é o mais corriqueiro.

Como foi discutido anteriormente, estamos interessados em usar como regularização a distância obtida a partir de $\tilde{d}$ através da mudança de escala dada por (4.1):

$$d(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{h(x) - h(y) - h'(y)(x - y)}{h''(y)}. \quad (4.2)$$

As propriedades a seguir garantem que a Hipótese 4.1.1 seja válida para d :

Hipótese 4.1.2. Seja $h : \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, \infty]$, $\text{int dom } h = (a, b)$:

- (a). h é convexa, fechada e duas vezes diferenciável em (a, b) , com segunda derivada estritamente positiva. Isto implica que h é estritamente convexa.
- (b). $\text{rge } h' = \mathbb{R}$.
- (c). Existem $M > 0$ e $\epsilon > 0$ tais que se $-\infty < a < y \leq x < a + \epsilon$ ou se $b - \epsilon < x \leq y < b < +\infty$, então $|h'(x) - h'(y)| \leq M h''(y) |x - y|$.

³Como as regularizações atuam separadamente em cada coordenada, nós podemos fazer a apresentação dos exemplos assumindo que as distâncias atuam em $\mathbb{R}$ ao invés de $\mathbb{R}^n$, evitando a presença de índices para as componentes das distâncias e das variáveis e empregando, assim, uma notação mais simples.

A Hipótese 4.1.2(c) é nova na teoria de funções de Bregman e corresponde a Hipótese 4.1.1(d), uma vez que $\tilde{d}''(x, y) = h''(x)$. Vamos analisá-la com mais cuidado. Para isto, consideremos o caso no qual a é finito. Como $\lim_{x \downarrow a} h'(x) = -\infty$, sabemos que $h''(x)$ deve ser ilimitada superiormente a medida que x se aproxima de a . Para violar a 4.1.2(c), $h''(x)$ teria que oscilar de forma cada vez mais rápida para $x \downarrow a$, o que configuraria um comportamento inesperado para uma regularização. De uma forma geral, podemos afirmar que as funções de Bregman usualmente propostas na literatura têm um comportamento ainda mais regular, obedecendo à hipótese do seguinte lema:

Lema 4.1.3. *Se existe um $\epsilon > 0$ tal que h'' é não-crescente em $(a, a + \epsilon) \cap \mathbb{R}$ e h'' é não-decrescente, em $(b - \epsilon, b) \cap \mathbb{R}$, então a Hipótese 4.1.2(c) é satisfeita.*

Demonstração. Suponha que $a \in \mathbb{R}$ e sejam $x, y \in (a, a + \epsilon)$ tais que $y < x$. Então,

$$\begin{aligned} |h'(x) - h'(y)| &= \left| \int_y^x h''(z) dz \right| \\ &\leq h''(y) |x - y|. \end{aligned}$$

Portando, a Hipótese 4.1.2(c) vale com $M = 1$. O caso $b \in \mathbb{R}$ é análogo. $\square$

Exemplos de funções que obedecem à Hipótese 4.1.2 e às condições do lema acima são:

- $h(x) = x \log(x)$, para $(a, b) = \mathbb{R}_{++}$;
- $h(x) = x^\alpha - x^\beta$, se $\alpha \in (1, 2]$, $\beta \in (0, 1)$ e $(a, b) = \mathbb{R}_{++}$;
- $h(x) = x \log(e^x - 1)$, para $(a, b) = \mathbb{R}_{++}$;
- $h(x) = \frac{1}{2}x^2$, para $(a, b) = \mathbb{R}$;
- $h(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^2$, para $(a, b) = \mathbb{R}_{++}$;§
- $h(x) = -\log(x) + \frac{1}{2}x^2$, para $(a, b) = \mathbb{R}_{++}$;§
- $h(x) = x - x^\beta + \frac{1}{2}x^2$, se $\beta \in (0, 1)$ e $(a, b) = \mathbb{R}_{++}$.§

Devemos chamar atenção para o fato de que não há nenhuma hipótese sobre o comportamento da função de Bregman nos extremos do intervalo (a, b) . Esta condição, que é comum para distâncias de Bregman, não é necessária em nossa análise.

§No caso de otimização, como discutido no Apêndice A, poderíamos empregar $h(x)$ igual a $\frac{1}{x}$ ou $-\log(x)$ ou $x - x^\beta$, respectivamente.

φ -divergências

As regularizações conhecidas por φ -divergências aparecem freqüentemente em textos sobre pontos proximais, por exemplo em [28], e mais recentemente em [6, 4, 5]. Nestes trabalhos, a caixa B é o ortante positivo do $\mathbb{R}^n$. Uma função estritamente convexa, $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow (-\infty, \infty]$, é usada na definição da distância $\tilde{d}$, através da fórmula:

$$\tilde{d}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} y \varphi\left(\frac{x}{y}\right). \quad (4.3)$$

Mais uma vez definimos d através da mudança de escala (4.1). Como $\tilde{d}''(y, y) = 1/y\varphi''(1)$, temos que d possui a forma

$$d(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y^2}{\varphi''(1)} \varphi\left(\frac{x}{y}\right). \quad (4.4)$$

Neste caso, a Hipótese 4.1.1 transforma-se em:

Hipótese 4.1.4. Seja $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, \infty]$, $\text{int dom } \varphi = \mathbb{R}_{++}$:

- (a). φ é estritamente convexa e fechada;
- (b). φ é duas vezes diferenciável no $\mathbb{R}_{++}$;
- (c). $\varphi(1) = \varphi'(1) = 0$, $\varphi''(1) > 0$;
- (d). $\text{rge } \varphi' = \mathbb{R}$;
- (e). Existe um $L > 0$ tal que $\varphi'(t) \leq L\varphi''(t)(t-1)$, $\forall t \geq 1$.

Com pequenas variações, esta hipótese aparece em vários artigos, em particular [6, 4, 5], que também são os primeiros trabalhos a sugerir o uso de termos regularizadores baseados em (4.4), substituindo a definição anterior (4.3). Desta forma os resultados deste capítulo podem ser vistos como uma extensão de [6, 4, 5].

Alguns exemplos de funções que satisfazem a Hipótese 4.1.4 presentes em [5]:

- $\varphi(x) = x \log(x) - x + 1$;
- $\varphi(x) = x^{-1} + x - 2$;
- $\varphi(x) = 2(\sqrt{x} - 1)^2 + \frac{1}{2}(x - 1)^2; \mathbb{N}$

$$\bullet \quad \varphi(x) = -\log(x) + x - 1 + \frac{1}{2}(x - 1)^2. \P$$

É interessante notar que, em [28], os autores afirmam que a única intersecção entre φ -divergências e distâncias de Bregman é a distância conhecida como Kullback-Leibler:

$$d(x, y) = x \log \frac{x}{y} + y - x.$$

Porém, se fizermos a mudança de escala, veremos que as distâncias dadas por (4.4) e por (4.2) coincidem em vários outros casos. Dedicaremos o Apêndice B ao estudo da relação entre essas classes de distâncias.

Claramente, a Hipótese 4.1.4 é uma releitura da Hipótese 4.1.1 no contexto de φ -divergências. O único ponto que merece um pouco mais de atenção é a equivalência entre as condições 4.1.1(d) e 4.1.4(e). Isto é objeto do lema:

Lema 4.1.5. *Seja d_i uma distância definida por (4.4). Então as Condições 4.1.1(d) e 4.1.4(e) são equivalentes.*

Demonstração. Observemos primeiro que:

$$\begin{aligned} d'_i(x_i, y_i) &= \frac{y_i}{\varphi''(1)} \varphi' \left(\frac{x_i}{y_i} \right) \\ d''_i(x_i, y_i) &= \frac{1}{\varphi''(1)} \varphi'' \left(\frac{x_i}{y_i} \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$d''_i(y_i, y_i) = 1.$$

Portanto, a Hipótese 4.1.1(d) se reduz a:

$$\exists L, \epsilon > 0: \quad 0 < y_i \leq x_i < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \varphi' \left(\frac{x_i}{y_i} \right) \leq \frac{L\varphi''(1)}{y_i} (x_i - y_i). \quad (4.5)$$

Tomando $x_i \in (0, \epsilon)$ e fazendo com que y_i percorra o intervalo $(0, x_i]$, obtemos:

$$\exists L > 0: \quad \varphi'(x) \leq L\varphi''(1)(x - 1) \quad \forall x \geq 1. \quad (4.6)$$

Reciprocamente, se (4.6) é válida, o mesmo ocorre com (4.5) para qualquer $\epsilon > 0$. $\square$

^{\P}Mais uma vez, no caso de otimização, estes dois últimos exemplos poderiam ser simplificados para $2(\sqrt{x} - 1)^2$ e $-\log(x) + x - 1$.

4.2 O Método Proximal com Distâncias Coercivas Separáveis

Uma vez caracterizada a classe de regularizações de nosso interesse, podemos apresentar o respectivo método proximal para resolução do problema de desigualdade variacional (1.4) e analisar sua convergência.

Algoritmo 4.2.1. *Método Proximal com Distâncias Coercivas para Desigualdades Variacionais*

Considere o problema da desigualdade variacional (1.4).

Seja $\tilde{\alpha}$ um real positivo e $\{\beta_k\}$ uma sequência somável de reais positivos. Sejam d_i , $i = 1, \dots, n$, regularizações que obedecem a Hipótese 4.1.1. Defina $D \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n d_i$.

1. **Inicialização:** Comece com $x^1 \in \text{int } B$;
2. **Iteração:** Escolha $0 < \alpha_i^k \leq \tilde{\alpha}$, $i = 1, \dots, n$ e encontre $x^{k+1} \in \text{int } B \cap \text{dom } T$ e e^{k+1} tais que

$$e^{k+1} \in T(x^{k+1}) + \text{diag}(\alpha^k) \nabla_1 D(x^{k+1}, x^k), \quad (4.7)$$

$$|e_i^{k+1}| \leq \alpha_i^k |d'_i(x_i^{k+1}, x_i^k)| + \beta_{k+1}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.8)$$

Se $x^{k+1} = x^k$, pare.⁶

□

Para provar a convergência do Algoritmo 4.2.1, vamos lançar mão de uma hipótese adicional que, apesar de sua artificialidade aparente, será facilmente verificada em várias especializações deste algoritmo. Desta forma, temporariamente, o método proximal descrito acima deve ser visto como um algoritmo abstrato que auxiliará a resolução de problemas de programação convexa e de desigualdades variacionais, temas da próxima seção e do Capítulo 5.

Começamos por introduzir uma notação que será usada constantemente no restante do texto:

$$\gamma^k \stackrel{\text{def}}{=} e^k - \text{diag}(\alpha^{k-1}) \nabla_1 D(x^k, x^{k-1}). \quad (4.9)$$

Usando (4.7) segue que $\gamma^k \in T(x^k)$ para todo $k \geq 1$.

A hipótese aparentemente artificial que necessitamos é:

Hipótese 4.2.2. Se $x^k \rightarrow_{\mathcal{K}} \bar{x}$, então, para cada $i = 1, \dots, n$, ou $\gamma_i^k \rightarrow_{\mathcal{K}} 0$ ou existe um conjunto infinito $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}$ tal que $x_i^{k-1} \rightarrow_{\mathcal{K}'} \bar{x}_i$.

⁶É fácil observar que, neste caso x^k é uma solução da desigualdade variacional com $T(x^k) = 0$.

Análise de Convergência

Esta seção dedica-se a análise de convergência da seqüência $\{x^k\}$ gerada pelo Algoritmo 4.2.1. Ela está organizada da seguinte maneira: primeiro provamos que a existência do iterados. Em seguida mostramos que todos os possíveis limites da seqüência $\{\gamma^k\}$, definida em (4.9), possuem uma estrutura de sinais que caracteriza as soluções do problema da desigualdade variacional (1.4). Isto é feito no Lema 4.2.4. Finalmente, observamos que as subseqüências de $\{\gamma^k\}$ associadas a subseqüências convergentes de $\{x^k\}$ são limitadas. Isto permitirá provar que todo ponto de acumulação de $\{x^k\}$ é uma solução do problema de (1.4).

Lema 4.2.3. *Seja $H : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty]$ uma função estritamente convexa, fechada tal que $\text{dom } \partial H = \text{int } B$, H é diferenciável em $\text{int } B$ e $\text{rge } \partial H = \mathbb{R}^n$. Então existe $\bar{x} \in \text{int } B \cap \text{dom } T$ tal que*

$$0 \in T(\bar{x}) + \nabla H(\bar{x}).$$

Isto implica que a seqüência $\{x^k\}$ computada pelo Algoritmo 4.2.1 está bem definida.

Demonstração. Para provar este resultado vamos mostrar que a equação generalizada

$$0 \in T(\bar{x}) + N_B(\bar{x}) + \partial H(\bar{x})$$

possui soluções. Em seguida mostraremos que estas soluções estão em $\text{int } B$, onde H é diferenciável e N_B é identicamente nula.

Observamos primeiro que, como $\text{dom } T \cap \text{int } B \neq \emptyset$, podemos usar o [41, Corolário 12.44] e concluir que $T + N_B + \partial H$ é um operador monótono maximal.

Como a imagem de ∂H é o $\mathbb{R}^n$, [35, Proposição 3] nos diz que o mesmo ocorre com $T + N_B + \partial H$. Portanto este operador possui zeros.

Suponha que algum destes zeros está na fronteira da caixa. Neste caso, H , deve ser subdiferenciável na fronteira de B , o que contraria $\text{dom } \partial H = \text{int } B$. Logo os zeros de $T + N_B + D(\cdot, x^k)$ estão em $\text{int } B$ e, desta forma, a equação

$$0 \in T(x^{k+1}) + \nabla_1 D(x^{k+1}, x^k)$$

possui soluções.

Assim, o resultado acima prova que o passo iterativo do Algoritmo 4.2.1 pode ser realizado com $e^{k+1} = 0$. Para ver isto, basta tomar $H(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i^k d_i(x_i, x_i^k)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Analisamos a seguir a estrutura de sinais dos possíveis limites da seqüência $\{\gamma^k\}$, definida em (4.9).

Lema 4.2.4. *Seja $\{x^k\}$ uma seqüência obtida pelo Algoritmo 4.2.1 e assumamos que a Hipótese 4.2.2 é válida. Se $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de acumulação de $\{x^k\}$, $x^k \rightarrow_{\mathcal{K}} \bar{x}$, então para $i = 1, \dots, n$,*

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_i^k &= 0 && \text{se } \bar{x}_i \in (a_i, b_i) \\ \liminf_{k \rightarrow \infty} \gamma_i^k &\geq 0 && \text{se } \bar{x}_i = a_i \\ \limsup_{k \rightarrow \infty} \gamma_i^k &\leq 0 && \text{se } \bar{x}_i = b_i. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Demonstração. Para cada i , vamos considerar os três casos possíveis:

Primeiro, supomos que $\bar{x}_i \in (a_i, b_i)$. Com o objetivo de obter uma contradição, vamos assumir que $\gamma_i^k \not\rightarrow_{\mathcal{K}} 0$. Então, usando a Hipótese 4.2.2, deve existir um conjunto infinito de índices $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}$ e um escalar $\zeta > 0$ tal que para todo $k \in \mathcal{K}'$, $|\gamma_i^k| \geq \zeta$ e $x_i^{k-1} \rightarrow_{\mathcal{K}'} \bar{x}_i$. Logo,

$$\begin{aligned} |\gamma_i^k| &= |e_i^k - \alpha_i^{k-1} d'_i(x_i^k, x_i^{k-1})| \\ &\leq \alpha_i^{k-1} |d'_i(x_i^k, x_i^{k-1})| + |e_i^k| \\ &\leq 2\alpha_i^{k-1} |d'_i(x_i^k, x_i^{k-1})| + \beta_k && [\text{Equação 4.8}] \\ &\leq 2\tilde{\alpha} |d'_i(x_i^k, x_i^{k-1})| + \beta_k && [\text{Escolha de } \alpha_i^k] \\ &\xrightarrow{\mathcal{K}'} 2\tilde{\alpha} |d'_i(\bar{x}_i, \bar{x}_i)| + 0 && [\text{Hipótese 4.1.1(b)}] \\ &= 0. && [\text{Mín. de } d_i(\cdot, \bar{x}_i) \text{ em } \bar{x}_i] \end{aligned}$$

O que contradiz $|\gamma_i^k| > \zeta$, $k \in \mathcal{K}'$.

Agora, vamos analisar o caso $\bar{x}_i = a_i$. Assumimos que $\liminf_{k \rightarrow \infty} \gamma_i^k < 0$ para obter uma contradição. A Hipótese 4.2.2 garante que existem um escalar $\zeta > 0$ e um conjunto infinito $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}$ tal que para todo $k \in \mathcal{K}'$, $\gamma_i^k \leq -\zeta$ e $x_i^{k-1} \rightarrow_{\mathcal{K}'} \bar{x}_i$. Portanto,

$$\begin{aligned} \zeta &\leq |\gamma_i^k| \\ &= |e_i^k - \alpha_i^{k-1} d'_i(x_i^k, x_i^{k-1})| \\ &\leq 2\alpha_i^{k-1} |d'_i(x_i^k, x_i^{k-1})| + \beta_k \\ &\leq 2\tilde{\alpha} |d'_i(x_i^k, x_i^{k-1})| + \beta_k. \end{aligned}$$

Seja ϵ dado pela Hipótese 4.1.1(d). Se existir um conjunto infinito de índices $\mathcal{K}'' \subseteq \mathcal{K}'$ tal que $x_i^{k-1} \leq x_i^k \leq a_i + \epsilon$ para $k \in \mathcal{K}''$, nós podemos usar esta hipótese para concluir que:

$$\begin{aligned} \zeta &\leq 2\tilde{\alpha} |d'_i(x_i^k, x_i^{k-1})| + \beta_k \\ &\leq 2\tilde{\alpha} L |x_i^k - x_i^{k-1}| + \beta_k \\ &\xrightarrow{\mathcal{K}''} 0, \end{aligned}$$

uma vez que $x^{k-1} \rightarrow_{\mathcal{K}'} \bar{x}_i$ e $\beta_k \rightarrow 0$; porém isto contradiz $\zeta > 0$. Segue que, $x_i^k \leq x_i^{k-1}$ para $k \in \mathcal{K}'$ suficientemente grande.

Como $d_i(\cdot, x_i^{k-1})$ atinge mínimo em x_i^{k-1} , $x_i^k \leq x_i^{k-1}$ implica que $d'_i(x_i^k, x_i^{k-1}) \leq 0$. Deste modo,

$$\begin{aligned} \gamma_i^k &= e_i^k - \alpha_i^{k-1} d'_i(x_i^k, x_i^{k-1}) \\ &\geq \alpha_i^{k-1} |d'_i(x_i^k, x_i^{k-1})| - |e_i^k| \\ &\geq -\beta_k \\ &> -\zeta \end{aligned}$$

para $k \in \mathcal{K}'$ suficientemente grande. Uma contradição com $\gamma_i^k \leq -\zeta < 0$, $k \in \mathcal{K}'$.

O caso $\bar{x}_i = b_i$ é análogo ao caso $\bar{x}_i = a_i$. $\square$

Lema 4.2.5. *Seja $\{x^k\}$ uma seqüência obtida pelo Algoritmo 4.2.1 e assumamos que a Hipótese 4.2.2 é válida. Seja $\bar{x}$ um ponto de acumulação de $\{x^k\}$, $x^k \rightarrow_{\mathcal{K}} \bar{x}$. Então, $\{\gamma^k\}_{k \in \mathcal{K}}$ é limitada.*

Demonstração. A Definição 1.2.6 garante que existe $\tilde{x} \in \text{dom } T \cap \text{int } B$. Seja $\tilde{\gamma} \in T(\tilde{x})$. Então a monotonicidade de T implica que, para todo $k \geq 0$,

$$0 \leq \langle x^k - \tilde{x}, \gamma^k - \tilde{\gamma} \rangle = \sum_{i=1}^n (x_i^k - \tilde{x}_i)(\gamma_i^k - \tilde{\gamma}_i). \quad (4.11)$$

Vamos mostrar que a ilimitação de $\{\gamma^k\}_{k \in \mathcal{K}}$ gera uma contradição com esta desigualdade para k suficientemente grande.

Se $\{\gamma^k\}_{k \in \mathcal{K}}$ for ilimitada, existe um subconjunto infinito $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}$ tal que $\{\gamma^k\}_{\mathcal{K}'}$ converge em $\overline{\mathbb{R}}$, com pelo menos uma componente $\{\gamma_i^k\}_{\mathcal{K}'}$ ilimitada. O Lema 4.2.4 implica que cada uma destas coordenadas ilimitadas, deve obedecer a:

$$\begin{aligned} \gamma_i^k &\rightarrow_{\mathcal{K}'} +\infty, \text{ se } \bar{x}_i = a_i \\ &\text{ou} \\ \gamma_i^k &\rightarrow_{\mathcal{K}'} -\infty, \text{ se } \bar{x}_i = b_i. \end{aligned}$$

Portanto, cada componente ilimitada de $\{\gamma^k\}_{\mathcal{K}'}$, tem a propriedade que

$$\begin{aligned} (x_i^k - \tilde{x}_i)(\gamma_i^k - \tilde{\gamma}_i) &\rightarrow_{\mathcal{K}'} (a_i - \tilde{x}_i)(+\infty) = -\infty \\ &\text{ou} \\ (x_i^k - \tilde{x}_i)(\gamma_i^k - \tilde{\gamma}_i) &\rightarrow_{\mathcal{K}'} (b_i - \tilde{x}_i)(-\infty) = -\infty \end{aligned}$$

Por outro lado, caso $\{\gamma_i^k\}_{\mathcal{K}'}$ seja limitada, $(x_i^k - \tilde{x}_i)(\gamma_i^k - \tilde{\gamma}_i)$ também o é. Portanto, para $k \in \mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}$ suficientemente grande, $\langle x^k - \tilde{x}, \gamma^k - \tilde{\gamma} \rangle$ seria negativo, uma contradição com (4.11). $\square$

Agora é possível enunciar e provar o principal teorema de convergência para o Algoritmo 4.2.1.

Teorema 4.2.6. *Seja $\{x^k\}$ uma seqüência obtida pelo Algoritmo 4.2.1 e assumamos que a Hipótese 4.2.2 é válida. Todo ponto de acumulação de $\{x^k\}$ é uma solução da desigualdade variacional (1.4).*

Demonstração. Seja $\bar{x}$ um ponto de acumulação de $\{x^k\}$, $x^k \rightarrow_{\mathcal{K}} \bar{x}$. Seja $\{\gamma^k\}_{k \in \mathcal{K}}$ dada por 4.9. O Lema 4.2.5 diz que esta subsequência é limitada. Logo, deve haver um subconjunto infinito de índices $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}$ tal que $\gamma^k \rightarrow_{\mathcal{K}'} \bar{\gamma} \in \mathbb{R}^n$. Como T é semi-contínuo exterior [41, 12.8(b)], temos que $\bar{\gamma} \in T(\bar{x})$. Lema 4.2.4 prova então que:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_i &= 0 && \text{se } \bar{x}_i \in (a_i, b_i), \\ \bar{\gamma}_i &\geq 0 && \text{se } \bar{x}_i = a_i, \\ \bar{\gamma}_i &\leq 0 && \text{se } \bar{x}_i = b_i, \end{aligned}$$

e isto é equivalente a $0 \in T(\bar{x}) + N_B(\bar{x})$. □

De posse deste resultado, passamos a analisar casos nos quais as hipóteses do Teorema 4.2.6 são facilmente verificáveis. Em particular, a condição que se mostra mais difícil é a Hipótese 4.2.2, já que as outras dependem apenas de uma escolha adequada das regularizações e da possibilidade de resolver o passo proximal aproximadamente, com precisão controlada pelo critério de aceitação dado em (4.8).

4.3 Métodos Proximais com Distâncias Coercivas Separáveis Aplicados à Otimização

Analisaremos aqui o Algoritmo 4.2.1 para a solução do problema programação convexa em caixas (1.1). A estrutura extra que este problema possui, em particular a presença de uma função objetivo, permite uma fácil verificação da Hipótese 4.2.2.

Iniciamos com uma releitura da condição $\text{dom } T \cap \text{int } B \neq \emptyset$, presente na Definição 1.2.6, para o caso de otimização. Neste caso, ela se resume a $\text{dom } \partial f \cap \text{int } B \neq \emptyset$. Porém, como f é convexa, própria e fechada, ela é subdiferenciável no interior relativo de seu domínio efetivo. Assim, já que B tem interior não vazio podemos simplificar esta condição à $\text{dom } f \cap \text{int } B \neq \emptyset$.

O Algoritmo 4.2.1 torna-se:

Algoritmo 4.3.1. *Método Proximal com Distâncias Coercivas para Otimização*

Considere o problema de minimização em caixa definido em 1.2.1. Assuma que $\text{dom } f \cap \text{int } B \neq \emptyset$.

Seja $\tilde{\alpha}$ um real positivo e $\sigma \in [0, 1]$. Sejam d_i , $i = 1, \dots, n$, regularizações que obedecem a Hipótese 4.1.1. Defina $D \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n d_i$.

1. **Inicialização:** Comece com $x^1 \in \text{int } B$;
2. **Iteração:** Escolha $0 < \alpha_i^k \leq \tilde{\alpha}$, $i = 1, \dots, n$, e encontre $x^{k+1} \in \text{int } B \cap \text{dom } \partial f$ e e^{k+1} tais que

$$e^{k+1} \in \partial f(x^{k+1}) + \text{diag}(\alpha^k) \nabla_1 D(x^{k+1}, x^k), \quad (4.12)$$

$$|e_i^{k+1}| \leq \sigma \alpha_i^k |d'_i(x_i^{k+1}, x_i^k)|, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.13)$$

Se $x^{k+1} = x^k$, pare.

□

Análise de Convergência

Seja $\{x^k\}$ uma seqüência computada pelo Algoritmo 4.3.1. Lembrando do Teorema 4.2.6, notamos que para provar a otimalidade dos pontos de acumulação de $\{x^k\}$ basta provar que a Hipótese 4.2.2 é automaticamente satisfeita, desta forma, passamos a esta tarefa.

Como em (4.9), definimos:

$$\gamma^k \stackrel{\text{def}}{=} e^k - \text{diag}(\alpha^{k-1}) \nabla_1 D(x_i^k, x_i^{k-1}).$$

Lembramos que esta definição implica que $\gamma^k \in \partial f(x^k)$.

Começamos a análise demonstrando um lema técnico:

Lema 4.3.2. *Seja $\{x^k\}$ uma seqüência obtida pelo Algoritmo 4.3.1. Para todo $k \geq 2$ e todo $i = 1, \dots, n$, $\gamma_i^k(x_i^{k-1} - x_i^k) \geq 0$.*

Demonstração. Temos,

$$\begin{aligned} \gamma_i^k(x_i^{k-1} - x_i^k) &= (e_i^k - \alpha_i^{k-1} d'_i(x_i^k, x_i^{k-1})) (x_i^{k-1} - x_i^k) \\ &\geq \underbrace{-\alpha_i^{k-1} d'_i(x_i^k, x_i^{k-1})(x_i^{k-1} - x_i^k)}_{\geq 0} - |e_i^k| |x_i^{k-1} - x_i^k| \\ &= \alpha_i^{k-1} \left(|d'_i(x_i^k, x_i^{k-1})| - \frac{1}{\alpha_i^{k-1}} |e_i^k| \right) |x_i^{k-1} - x_i^k| \\ &\geq (1 - \sigma) \alpha_i^{k-1} |d'_i(x_i^k, x_i^{k-1})| |x_i^{k-1} - x_i^k| \quad [(4.12)] \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

□

Lema 4.3.3. *Seja $\{x^k\}$ uma seqüência obtida pelo Algoritmo 4.3.1. A seqüência $\{f(x^k)\}$ é não-crescente e portanto convergente se f for limitada inferiormente em B . Neste caso,*

$$|\gamma_i^k| |x_i^{k-1} - x_i^k| \rightarrow 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

Demonstração. Como $\gamma^k \in \partial f(x^k)$,

$$f(x^{k-1}) \geq f(x^k) + \langle \gamma^k, x^{k-1} - x^k \rangle = f(x^k) + \sum_{i=1}^n \gamma_i^k (x_i^{k-1} - x_i^k),$$

e assim a tese resulta do fato de $\gamma_i^k (x_i^{k-1} - x_i^k)$ ser não-negativo. $\square$

Observamos que, se f for limitada inferiormente em B , a Hipótese 4.2.2 é uma consequência imediata deste lema. Portanto, o Teorema 4.2.6 garante a otimalidade dos pontos de acumulação da seqüência $\{x^k\}$. No caso de otimização, este resultado ainda pode ser melhorado:

Teorema 4.3.4. *Seja $\{x^k\}$ uma seqüência obtida pelo Algoritmo 4.3.1. Se f for limitada inferiormente em B e $\{x^k\}$ tiver um ponto de acumulação, então $\{f(x^k)\}$ converge para o ínfimo de f em B e, conseqüentemente, todo ponto de acumulação de $\{x^k\}$ será uma solução do problema de programação convexa na caixa B (1.1).*

Demonstração. Seja $\bar{x}$ um ponto de acumulação de $\{x^k\}$, $x^k \rightarrow_{\mathcal{K}} \bar{x}$. O Teorema 4.2.6 mostra que $\bar{x}$ minimiza f em B . Deste modo, como $\gamma^k \in \partial f(x^k)$, sabemos que

$$\min_{x \in B} \{f(x)\} = f(\bar{x}) \geq f(x^k) + \sum_{i=1}^n \gamma_i^k (\bar{x}_i - x_i).$$

Lembrando que $x^k \rightarrow_{\mathcal{K}} \bar{x}$ e que $\{\gamma^k\}_{\mathcal{K}}$ é limitada (Lema 4.2.5), podemos tomar o limite em $\mathcal{K}$ acima para concluir que

$$\min_{x \in B} \{f(x)\} = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k).$$

Finalmente, como $\{f(x^k)\}$ é não-crescente, pelo Lema 4.3.3, temos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = \min_{x \in B} \{f(x)\}.$$

$\square$

Devemos ainda destacar que, como o Algoritmo 4.3.1 é um método de descida, $\{x^k\}$ será limitada sempre que o conjunto solução, ou qualquer outra intersecção entre um conjunto de nível de f e B , for limitado. De fato, o conjunto solução é um conjunto de nível de $f + \delta_B$, e portanto sua limitação é equivalente à limitação de todos os outros conjuntos de nível desta função [41, Proposição 3.23].

Métodos de Multiplicadores

Nesta seção, voltamos nossa atenção aos métodos de multiplicadores que podem ser obtidos a partir do Algoritmo 4.3.1. Ou seja, desejamos resolver o problema de programação convexa com restrições (1.2) através da aplicação dos métodos proximais com distâncias coercivas e resolução exata dos sub-problemas⁷ à resolução do problema dual (1.3). Usando o Teorema 2.2.6, obtemos o seguinte método:

Algoritmo 4.3.5. Método de Multiplicadores com Distâncias Coercivas

Considere o problema primal (1.2) e seu respectivo dual lagrangiano. Suponha ainda que exista um ponto viável dual estritamente positivo.

Seja $\tilde{\alpha}$ um real positivo. Sejam $d_i : \mathbb{R} \times (\alpha_i, +\infty) \rightarrow (-\infty, \infty]$, $i = 1, \dots, n$, regularizações que obedeçam a Hipótese 4.1.1, tais que $\alpha_i \leq 0$.

1. Inicialização: Comece com $\lambda^1 > 0$.

2. Iteração:

- Escolha $0 < \alpha_i^k \leq \tilde{\alpha}$, $i = 1, \dots, m$, e calcule uma solução, x^{k+1} , do problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) + \sum_{i=1}^m \alpha_i^k P_i \left(\frac{g_i(x)}{\alpha_i^k}, \lambda_i^k \right) \\ \text{s.a} \quad & x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

para,

$$P_i(u_i, \lambda_i^k) \stackrel{\text{def}}{=} (d_i(\cdot, \lambda_i^k) + \delta_{\mathbb{R}_+}(\cdot))^*(u_i).$$

- Faça

$$\lambda_i^{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial P_i}{\partial u_i} \left(\frac{g_i(x^{k+1})}{\alpha_i^k}, \lambda_i^k \right), \quad i = 1, \dots, m.$$

Se $\lambda^{k+1} = \lambda^k$, pare.

□

Mais uma vez, a limitação da sequência de multiplicadores é garantida caso o problema primal obedeça à condição de qualificação de Slater (ver Teorema 1.2.5) e a otimalidade dos seus pontos de acumulação é uma consequência do Teorema 4.3.4.

⁷A análise de métodos de multiplicadores com resolução aproximada dos sub-problemas será feita no Capítulo 6.

A seqüência primal

Vamos procurar provar que o teorema de convergência dos iterados primais apresentado para os métodos de multiplicadores baseados no ϕ -MPP também é válido para o Algoritmo 4.3.1. Este tipo de resultado é interessante uma vez que ele mostra que é possível garantir a viabilidade dos pontos de acumulação primal mesmo se usarmos regularizações baseadas em distâncias de Bregman, estendendo os resultados obtidos para φ -divergência em [6, 5]. Enunciamos então o resultado que desejamos demonstrar:

Teorema 4.3.6. *Seja $\{(\mathbf{x}^k, \lambda^k)\}$ uma seqüência calculada pelo Algoritmo 4.3.5. Se o problema primal satisfaz a condição de qualificação de Slater, então*

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} g(\mathbf{x}^k) &\leq 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \lambda^k, g(\mathbf{x}^k) \rangle &= 0, \end{aligned}$$

e $f(\mathbf{x}^k)$ converge para o valor ótimo do problema primal, $v(0)$. Portanto, todo ponto de acumulação da seqüência primal é uma solução do problema primal (1.2).

Demonstração. Já sabemos, graças ao Teorema 4.3.4 e a Condição de Slater, que a seqüência de multiplicadores é limitada e que $F(\lambda^k) \rightarrow v(0)$. Analisemos a seqüência primal.

A definição de λ^k garante que existem $\zeta_i^k \in \partial \delta_{\mathbb{R}_+}(\lambda_i^k)$, $i = 1, \dots, m$ tais que

$$g_i(\mathbf{x}^k) = \alpha_i^{k-1} d'_i(\lambda_i^k, \lambda_i^{k-1}) + \zeta_i^k.$$

Desta forma, se γ^k é o vetor definido em (4.9), temos $\gamma_i^k = -g_i(\mathbf{x}^k) + \zeta_i^k$.

O Lema 4.2.4 garante então que, para toda subsequência convergente da seqüência de multiplicadores, $\lambda^k \rightarrow_{\mathcal{K}} \bar{\lambda}$, $-g_i(\mathbf{x}^k) + \zeta_i^k$ obedece à:

$$0 = \lim_{k \rightarrow \mathcal{K}\infty} (g_i(\mathbf{x}^k) - \zeta_i^k) = \lim_{k \rightarrow \mathcal{K}\infty} g_i(\mathbf{x}^k) \quad \text{se } \bar{\lambda}_i > 0, \quad (4.14)$$

$$0 \geq \limsup_{k \rightarrow \mathcal{K}\infty} (g_i(\mathbf{x}^k) - \zeta_i^k) \geq \limsup_{k \rightarrow \mathcal{K}\infty} g_i(\mathbf{x}^k) \quad \text{se } \bar{\lambda}_i = 0. \quad (4.15)$$

Como $\{\lambda^k\}$ é limitada, concluímos facilmente que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} g_i(\mathbf{x}^k) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Agora vamos provar que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \lambda^k, g(\mathbf{x}^k) \rangle = 0.$$

Para isto, vamos supor, com objetivo de obter uma contradição, que para algum $i = 1, \dots, n$, temos $|\lambda_i^k g_i(x^k)| \not\rightarrow 0$. Neste caso, já que $\{\lambda^k\}$ é limitada e positiva, devem existir um conjunto infinito de índices $\mathcal{K} \subset \mathbb{N}$, $\bar{\lambda} \geq 0$ e um real $\epsilon > 0$ tais que $\lambda^k \rightarrow_{\mathcal{K}} \bar{\lambda}$ e $\forall k \in \mathcal{K}$, $|\lambda_i^k g_i(x^k)| > \epsilon$. Usando as Equações (4.14) e (4.15), observamos que isto só é possível se $g_i(x^k) \rightarrow_{\mathcal{K}} -\infty$. Isto não é possível, pois o Lema 4.2.5 garante que $\{-g_i(x^k) + \zeta_i^k\}_{\mathcal{K}}$ é uma seqüência limitada, logo $g_i(x^k) \rightarrow_{\mathcal{K}} -\infty$ implica que $\zeta_i^k \rightarrow_{\mathcal{K}} -\infty$. Conseqüentemente λ_i^k deve ser 0 infinitas vezes em $\mathcal{K}$, o que contrariaria $\forall k \in \mathcal{K}$, $|\lambda_i^k g_i(x^k)| > \epsilon$.

Finalmente, resta mostrar que $f(x^k)$ converge para o valor ótimo do problema primal (e dual), $v(0)$. Para isto, usando a fórmula de atualização do multiplicador λ^k e [41, Proposição 11.3], observamos que para cada $i = 1, \dots, n$:

$$\alpha_i^{k-1} P_i \left(\frac{g_i(x^k)}{\alpha_i^{k-1}}, \lambda_i^k \right) + \alpha_i^{k-1} d_i(\lambda_i^k, \lambda_i^{k-1}) = \lambda_i^k g_i(x^k).$$

Por outro lado, as definições de x^k e a Proposição 2.2.5 e o Teorema 2.2.6 implicam que:

$$f(x^k) + \sum_{i=1}^m \alpha_i^k P_i \left(\frac{g_i(x)}{\alpha_i^k}, \lambda_i^k \right) = F(\lambda^k) - \sum_{i=1}^m \alpha_i^k d_i(\lambda_i^k, \lambda_i^{k-1}).$$

Portanto,

$$f(x^k) + \langle \lambda^k, g(x^k) \rangle = F(\lambda^k).$$

Como $\langle \lambda^k, g(x^k) \rangle \rightarrow 0$ e $F(\lambda^k) \rightarrow v(0)$ segue que $f(x^k)$ também converge para o valor ótimo do problema primal. $\square$

Um fato que deve ser destacado é que a existência dos iterados primais está garantida sempre que o problema primal possuir conjunto de soluções não vazio e compacto. Isto se deve ao Lema 2.2.9 e à condição que $(a_i, b_i) \supset \mathbb{R}_{++}$, garantindo que, para todo $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$, $\text{dom} \sum_{i=1}^M d_i(\cdot, \lambda_i) \supset \mathbb{R}_{++}$.

Resta-nos apenas apresentar um resultado que assegure a limitação da seqüência primal:

Corolário 4.3.7. *Suponha que o problema primal satisfaça a condição de qualificação de Slater e que $\{x^k\}$ seja uma seqüência primal obtida pelo Algoritmo 4.3.5. Se o conjunto de soluções do primal for não-vazio e limitado, então $\{x^k\}$ é limitada.*

Demonstração. A prova deste corolário é igual à prova do Corolário 3.3.3, e, por este motivo, será omitida. $\square$

Regularizações Duplas

No capítulo anterior, introduzimos um método proximal conceitual, Algoritmo 4.2.1, para resolver o problema da desigualdade variacional.¹ Para garantir sua convergência, fizemos uso da Hipótese 4.2.2² que é, aparentemente, difícil de ser verificada sem que façamos novas suposições sobre o problema que desejamos resolver ou sobre o método que queremos aplicar.

Neste capítulo, apresentaremos uma forma de assegurar a validade da Hipótese 4.2.2 que depende apenas da escolha das regularizações e outros parâmetros do algoritmo. A nossa estratégia é baseada na idéia de combinar um termo coercivo com outro quadrático, como feito recentemente em [4, 5]. Deste modo, é possível recuperar a Fejér monotonicidade da seqüência proximal com relação ao conjunto de soluções, que foi perdida com a mudança de escala. Neste sentido, mais uma vez, este capítulo pode ser visto como uma extensão dos resultados apresentados em [4, 5].

Usaremos a seguinte classe de distâncias generalizadas:

Definição 5.1.1. Seja γ um número real *estritamente maior que 1*. Para $i = 1, \dots, n$, seja $d_i : \mathbb{R} \times (a_i, b_i) \rightarrow (-\infty, \infty]$ uma função diferenciável com relação a primeira variável. Definimos

$$\tilde{d}_i(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} d_i(x_i, y_i) + \frac{\gamma}{2}(x_i - y_i)^2.^\dagger \quad (5.1)$$

Se $\tilde{d}_i$ obedece às condições 4.1.1(a)-4.1.1(c),⁴ então chamaremos $\tilde{d}_i$ de uma *regula-*

¹Definido no Capítulo 1, Equação 1.4.

²Seja $\{x^k\}$ um seqüência obtida pelo Algoritmo 4.2.1. Se $x^k \rightarrow_{\mathcal{K}} \bar{x}$, então, para cada $i = 1, \dots, n$, ou $\gamma_i^k \rightarrow_{\mathcal{K}} 0$ ou existe um conjunto infinito $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}$ tal que $x_i^{k-1} \rightarrow_{\mathcal{K}'} \bar{x}_i$.

³Em [5], os autores consideram pesos diferentes para d_i e para a norma euclidiana ao quadrado. Como os dois tipos de regularização coincidem a menos de uma multiplicação por uma constante, preferimos adotar peso 1 para d_i .

⁴A propriedade exigida na condição 4.1.1(d) será um conseqüência da Hipótese 5.1.2 apresentada a

rização dupla.

□

5.1 Uma Desigualdade Interessante

Queremos provar que uma seqüência obtida pelo Algoritmo 4.2.1 baseado em regularizações duplas é Fejér monótona com relação ao conjunto de soluções da desigualdade variacional, de forma semelhante ao que acontece com o método proximal clássico. Para que isto seja possível, usaremos uma hipótese adicional que força o termo coercivo, d_i , a se manter “próximo” da norma euclidiana ao quadrado. Esta idéia é formalizada pela condição abaixo.⁵ Destacamos que, pela primeira vez, exigimos condições sobre o comportamento da derivada da regularização sem distinguir um lado com relação ao centro. Por exemplo, no caso $B = \mathbb{R}_{++}$, a Hipótese 4.1.1 limitava o comportamento de $d'_i(x_i, y_i)$ somente se $y_i < x_i$, já a condição abaixo deve valer também se $x_i < y_i$.

Hipótese 5.1.2. Para cada $i = 1, \dots, n$, seja $d_i : \mathbb{R} \times (a_i, b_i) \rightarrow \mathbb{R}$ e $x, y \in (a_i, b_i)$, temos:

1. Caso a_i e b_i sejam finitos, então

$$\frac{(x-y)(y-a_i)}{x-a_i} \leq d'_i(x, y) \leq \frac{(x-y)(b_i-y)}{b_i-x}.$$

2. Se o intervalo (a_i, b_i) for ilimitado, tomando o respectivo limite nas desigualdades acima, obtemos:

- (a) Apenas a_i é finito ($b_i = +\infty$).

$$\frac{(x-y)(y-a_i)}{x-a_i} \leq d'_i(x, y) \leq x-y.$$

- (b) Apenas b_i é finito ($a_i = -\infty$).

$$x-y \leq d'_i(x, y) \leq \frac{(x-y)(b_i-y)}{b_i-x}.$$

- (c) $(a_i, b_i) = \mathbb{R}$.

$$d'_i(x, y) = x-y.$$

Usando esta condição, podemos demonstrar uma desigualdade fundamental para análise de nosso método proximal:

seguir. Desta forma, não há necessidade dela ser verificada. Isto é demonstrado no Lema 5.2.4.

⁵Esta condição é uma extensão da definição da classe de regularizações ϕ_2 , apresentada em [5]. Ver Seção 5.3 a seguir.

Figura 5.1: Limites para as derivadas de d_i no caso do intervalo $(a_i, b_i) = (0, 2)$. Observamos que a derivada da regularização clássica mantém-se entre os dois limites.

Lema 5.1.3. *Se valer a Hipótese 5.1.2, então para todo $i = 1, \dots, n$ e $z \in [a_i, b_i] \cap \mathbb{R}$, $x, y \in (a, b)$, temos:*

$$(z - x)d'_i(x, y) \leq (z - y)(x - y). \quad (5.2)$$

Demonstração. A desigualdade é trivial caso $x = y$, $x = z$ ou $y = z$.

Vamos considerar que $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. O caso de intervalos ilimitados, como ocorre na própria Hipótese 5.1.2, pode ser visto como limite do caso de intervalos limitados.

O restante da demonstração será dividida em quatro casos:

1. $x < y$, $x < z$

Se $z < y$, é imediato que $(z - x)d'_i(x, y) \leq 0 \leq (z - y)(x - y)$.

Se $z > y$, então

$$(b_i - z)x \leq (b_i - z)y \Rightarrow \quad (5.3)$$

$$b_i x + yz \leq b_i y + xz \Rightarrow$$

$$xy - b_i x - yz + b_i z \geq xy - b_i y - xz + b_i z \Rightarrow$$

$$(z - x)(b_i - y) \geq (z - y)(b_i - x) \Rightarrow$$

$$\frac{b_i - y}{b_i - x} \geq \frac{z - y}{z - x} \Rightarrow \quad (5.4)$$

$$\frac{(x - y)(b_i - y)}{b_i - x} \leq \frac{(x - y)(z - y)}{z - x} \xrightarrow{\text{Hip. 5.1.2}} \quad (5.5)$$

$$d'_i(x, y) \leq \frac{(x - y)(z - y)}{z - x} \Rightarrow$$

$$(z - x)d'_i(x, y) \leq (x - y)(z - y). \quad (5.6)$$

2. $x < y$, $x > z$

Seguindo uma seqüência de passos análogos as que nos levaram da desigualdade (5.3) à desigualdade (5.4), podemos concluir que

$$(z - a_i)x \leq (z - a_i)y \Rightarrow$$

$$\frac{y - z}{x - z} \geq \frac{y - a_i}{x - a_i}.$$

Multiplicando-se esta última desigualdade por $x - y$ e aplicando a Hipótese 5.1.2, concluimos mais uma vez (5.2).

3. $x > y$, $x > z$

Como no primeiro caso, se $z > y$, temos $(z - x)d'(x, y) \leq 0 \leq (z - y)(x - y)$.

Caso $z < y$, usamos as mesmas idéias presentes acima para concluir que

$$(z - a_i)x \geq (z - a_i)y \Rightarrow$$

$$\frac{y - z}{x - z} \leq \frac{y - a_i}{x - a_i}.$$

Outra vez multiplicamos esta última por $x - y$ e usamos a Hipótese 5.1.2 e obtemos (5.2).

4. $x > y$, $x < z$

Análogo aos casos anteriores.

□

5.2 Análise de Convergência

Já dispomos de todas as ferramentas necessárias a prova de convergência da seguinte instância do Algoritmo 4.2.1:

Algoritmo 5.2.1. *Método Proximal com Regularizações Duplas para Desigualdades Variacionais*

Seja $\tilde{\alpha}$ um real positivo. Sejam $\tilde{d}_i$, $i = 1, \dots, n$, regularizações duplas obedecendo à Hipótese 5.1.2. Defina

$$D(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \tilde{d}_i(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i) + \frac{\gamma}{2} (x_i - y_i)^2.$$

1. **Inicialização:** Comece com $x^1 \in \text{int } B$;
2. **Iteração:** Escolha um real $0 < \alpha_k \leq \tilde{\alpha}$, e encontre $x^{k+1} \in \text{int } B \cap \text{dom } T$ tal que

$$0 \in T(x^{k+1}) + \alpha_k \nabla_1 D(x^{k+1}, x^k). \quad (5.7)$$

Se $x^{k+1} = x^k$, pare.

□

Para provar a convergência da sequência $\{x^k\}$ a uma solução do problema da desigualdade variacional, vamos mostrar que esta sequência se aproxima do conjunto de soluções. Começamos pelo seguinte lema:

Lema 5.2.2. *Seja D como no Algoritmo 5.2.1. Então, para todo $z \in B$ e $x, y \in \text{int } B$,*

$$\langle z - x, \nabla_1 D(x, y) \rangle \leq \frac{\gamma + 1}{2} (\|z - y\|^2 - \|z - x\|^2) - \frac{\gamma - 1}{2} \|x - y\|^2.$$

Demonstração. Para cada $i = 1, \dots, n$, temos:

$$\begin{aligned} (z_i - x_i) \nabla_1 D(x, y)_i &= (z_i - x_i) (d'_i(x_i, y_i) + \gamma(x_i - y_i)) \\ &\leq (z_i - y_i)(x_i - y_i) + \gamma(z_i - x_i)(x_i - y_i). \end{aligned} \quad [\text{Lema 5.1.3}]$$

Somando todos os termos obtemos:

$$\langle z - x, \nabla_1 D(x, y) \rangle \leq \langle z - y, x - y \rangle + \gamma \langle z - x, x - y \rangle.$$

^{||}Devemos destacar que a exigência de solução exata dos sub-problemas do Algoritmo 5.2.1 é feita por simplicidade de exposição. Para adoção de erros na resolução dos sub-problemas, poder-se-ia utilizar uma fórmula semelhante ao critério de aceitação proposto por Eckstein em [20] e retomado por Silva, Eckstein e Humes na última seção de [42].

Lembrando que,

$$\begin{aligned}\langle z - y, x - y \rangle &= \frac{\|z - y\|^2 - \|z - x\|^2 + \|x - y\|^2}{2} \\ \langle z - x, x - y \rangle &= \frac{\|z - y\|^2 - \|z - x\|^2 - \|x - y\|^2}{2},\end{aligned}$$

podemos concluir que

$$\langle z - x, \nabla_1 D(x, y) \rangle \leq \frac{\nu + 1}{2} (\|z - y\|^2 - \|z - x\|^2) - \frac{\nu - 1}{2} \|x - y\|^2.$$

□

A propriedade de aproximação e a validade da Hipótese 4.2.2, mencionadas na introdução, tornam-se, então, uma consequência imediata:

Lema 5.2.3. *Seja $\{x^k\}$ uma seqüência obtida pelo Algoritmo 5.2.1. A seqüência $\{x^k\}$ é Fejér monótona com relação ao conjunto de soluções da desigualdade variacional (1.4). Ainda, caso o conjunto de soluções de (1.4) seja não vazio, então $x^{k+1} - x^k \rightarrow 0$ e, portanto, a Hipótese 4.2.2 é válida.*

Demonstração. Seja $z \in (T + N_B)^{-1}(0)$. Como em toda iteração $x^k \in \text{int } B$ e os passos são realizados com exatidão, obtemos $-\alpha_k \nabla_1 D(x^{k+1}, x^k) \in (T + N_B)(x^{k+1})$. Usando a monotonicidade de $T + N_B$ e o Lema 5.2.2, concluímos que:

$$\begin{aligned}0 &\leq \langle z - x^{k+1}, \alpha_k^{-1} \nabla_1 D(x^{k+1}, x^k) \rangle \\ &\leq \frac{\nu + 1}{2\alpha_k} (\|z - x^k\|^2 - \|z - x^{k+1}\|^2) - \frac{\nu - 1}{2\alpha_k} \|x^{k+1} - x^k\|^2.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|z - x^{k+1}\| \leq \|z - x^k\|,$$

O que implica a Fejér monotonicidade de $\{x^k\}$. Além disto, como $\nu > 1$,

$$\|x^{k+1} - x^k\|^2 \leq \frac{\nu + 1}{\nu - 1} (\|z - x^k\|^2 - \|z - x^{k+1}\|^2).$$

Como a Fejér monotonicidade assegura que $\|z - x^k\|$ é convergente para qualquer $z \in (T + N_B)^{-1}(0)$, se $(T + N_B)^{-1}(0)$ for não-vazio, teremos $\|x^{k+1} - x^k\| \rightarrow 0$. □

Finalmente, para que possamos usar o teorema de convergência do Algoritmo 4.2.1, basta provar que as regularizações duplas, $\tilde{d}_i$, $i = 1, \dots, n$, obedecem à Hipótese 4.1.1(d).⁷ Faremos isto a seguir.

⁷Existem $L, \epsilon > 0$ tais que, sempre que $-\infty < a_i < y_i \leq x_i < a_i + \epsilon$ ou $b_i - \epsilon < x_i \leq y_i < b_i < +\infty$ temos que $|d'_i(x_i, y_i)| \leq L|x_i - y_i|$.

Lema 5.2.4. *Seja $\epsilon = \min_{i=1,\dots,n}\{(b_i - a_i)/2\}$. Se $-\infty < a_i < y_i \leq x_i < a_i + \epsilon$ ou $b_i - \epsilon < x_i \leq y_i < b_i < +\infty$, então $|d'_i(x_i, y_i)| \leq 2|x_i - y_i|$. Conseqüentemente $|\tilde{d}'_i(x_i, y_i)| \leq (2 + \nu)|x_i - y_i|$.*

Demonstração. Se $-\infty < a_i < y_i \leq x_i < a_i + \epsilon$ e $b_i = \infty$ a tese segue facilmente da Hipótese 5.1.2. Caso $b_i \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} |d'_i(x_i, y_i)| &= d'_i(x_i, y_i) \\ &\leq \frac{(x_i - y_i)(b_i - y_i)}{b_i - x_i} \\ &= \frac{|x_i - y_i|(b_i - y_i)}{b_i - x_i} \\ &\leq \frac{|x_i - y_i|(b_i - a_i)}{(b_i - a_i - \epsilon)} \\ &\leq 2|x_i - y_i|. \end{aligned}$$

O caso $b_i - \epsilon < x_i \leq y_i < b_i < +\infty$ é análogo, usando a outra desigualdade dada pela Hipótese 5.1.2. $\square$

Teorema 5.2.5. *Se o conjunto de soluções da desigualdade variacional for não-vazio, então uma seqüência obtida pelo Algoritmo 5.2.1 converge a uma solução.*

Demonstração. Como assumimos que as regularizações $\tilde{d}_i$, $i = 1, \dots, n$, obedecem às Condições 4.1.1(a)-4.1.1(c), podemos usar o Lema 5.2.4 para ver que a Hipótese 4.1.1 está inteiramente satisfeita. Além disto, o Lema 5.2.3 garante que a Hipótese 4.2.2 também vale. Portanto, podemos usar o Teorema 4.2.6 para assegurar que todo ponto de acumulação de $\{x^k\}$ é uma solução da desigualdade variacional.

Deste modo, a convergência de $\{x^k\}$ a uma solução é uma conseqüência de sua Fejér monotonicidade. $\square$

5.3 Exemplos

Nesta seção, vamos apresentar alguns exemplos de regularizações coercivas que obedecem à Hipótese 5.1.2, e, portanto, podem ser usadas para construir uma dupla regularização que garanta a convergência da seqüência proximal a uma solução do problema da desigualdade variacional.

Vamos nos concentrar no caso $(a, b) = \mathbb{R}_{++}$. A partir de uma regularização deste tipo é fácil, através de translações e mudanças de sinal, obter uma regularização para intervalos com extremos quaisquer. Por exemplo temos:

Lema 5.3.1. *Seja $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow (-\infty, \infty]$ uma função que obedece à Hipótese 5.1.2. Então, dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ e $\zeta \in (0, 1)$, temos que*

$$\hat{d}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \zeta d(x - a, y - a) + (1 - \zeta)d(b - x, b - y)$$

obedece a esta mesma condição para o intervalo (a, b) .

Demonstração. Dados $x, y \in (a, b)$, Usamos a Hipótese 5.1.2 para d e obtemos:

$$\frac{\zeta(x - a - y + a)(y - a)}{x - a} \leq \zeta d'(x - a, y - a) \leq \zeta(x - a - y + a),$$

e também

$$\frac{(1 - \zeta)(b - x - b + y)(b - y)}{b - x} \leq (1 - \zeta)d'(b - x, b - y) \leq (1 - \zeta)(b - x - b + y).$$

Multiplicando a segunda desigualdade por -1 e somando temos:

$$\begin{aligned} \frac{\zeta(x - y)(y - a)}{x - a} + (1 - \zeta)(x - y) &\leq \zeta d'(x - a, y - a) - (1 - \zeta)d'(b - x, b - y) \\ &\leq \frac{(1 - \zeta)(x - y)(b - y)}{b - x} + \zeta(x - y). \end{aligned}$$

Por outro lado, lembrando que, $x, y \in (a, b)$, é fácil ver que

$$\begin{aligned} \frac{(x - y)(y - a)}{x - a} &\leq x - y, \\ x - y &\leq \frac{(x - y)(b - y)}{b - x}. \end{aligned}$$

Usando a definição de $\hat{d}$, segue que para $x, y \in (a, b)$

$$\frac{(x - y)(y - a)}{x - a} \leq \hat{d}'(x, y) \leq \frac{(x - y)(b - y)}{b - x}.$$

□

φ -divergências

Como destacamos na introdução, os resultados deste capítulo podem ser vistos como uma extensão de idéias introduzidas em [5, 4]. Nestes artigos, os autores consideram termos coercivos obtidos pela técnica de mudança de escala aplicada a φ -divergências⁸

⁸Ver Seção 4.1, na qual mostramos que a mudança de escala recupera a regra de formação de regularizações coercivas usada por estes autores.

e adicionam a norma euclidiana ao quadrado obtendo uma regularização dupla para o ortante positivo.

Vamos provar que a Hipótese 5.1.2 nada mais é do que uma extensão da definição da classe de regularizações ϕ_2 de [5]. Neste trabalho, os termos coercivos têm a forma:

$$d_i(x, y) = y^2 \varphi\left(\frac{x}{y}\right),$$

para alguma $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ obedecendo à Hipótese 4.1.4. Neste caso a Hipótese 5.1.2 torna-se:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_{++}, \frac{(x-y)y}{x} \leq y \varphi'\left(\frac{x}{y}\right) \leq x-y.$$

Fazendo a troca de variáveis $t = \frac{x}{y}$, esta desigualdade mostra-se equivalente a

$$\forall t > 0, (1 - 1/t) \leq \varphi'(t) \leq (t - 1),$$

que é usada para definir a classe ϕ_2 .

Por fim, Auslender, Teboulle e Ben-Tiba apresentam os seguintes exemplos de funções que obedecem a esta última desigualdade:

1. $\varphi(t) = t \log(t) - t + 1$;
2. $\varphi(t) = 2(\sqrt{t} - 1)^2$;††
3. $\varphi(t) = -\log(t) + t - 1$.††

Entre estes exemplos destacamos $\varphi(t) = -\log(t) + t - 1$, que dá origem à regularização logarítmica-quadrática, primeira regularização dupla estudada na literatura [4]. Outra característica interessante é que, para esta φ ,

$$d'_\varphi(x, y) = \frac{(x-y)y}{x}.$$

Ou seja, a derivada de sua distância coincide com o limite inferior da Hipótese 5.1.2.

Distâncias de Bregman

Vamos apresentar funções de Bregman que gerem distâncias obedecendo à Hipótese 5.1.2 após a mudança de escala.¹⁰ Desta forma, seremos capazes de resolver problemas variacionais sem a necessidade de hipóteses de para-monotonicidade comuns na literatura

††Como adicionamos o termo quadrático ao termo coercivo para obter $\tilde{d}$, temos $\text{rge } \tilde{d}'_i(\cdot, y) = \mathbb{R}$ e a dificuldade associada ao uso destas regularizações, comentada na Seção 4.1, desaparece.

¹⁰Ver Seção 4.1.

que trata deste tipo de regularização [27, 44, 35]. Observamos que [42, Seção 4] obtém resultados semelhantes, porém fazendo uso de uma versão mais forte da mudança de escala, na qual, para $x, y \in B$:

$$\alpha = \max_{i=1, \dots, n} \{h_i''(y_i)\},$$

$$D(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{h_i(x_i) - h_i(y_i) - h_i'(y_i)(x_i - y_i)}{\alpha}.$$

Destacamos que neste caso o fator de escala vai para zero mesmo que a respectiva coordenada não se aproxime dos extremos da caixa B , o que não ocorre com as regularizações duplas.

Antes dos exemplos, vamos apresentar um pequeno lema que pode simplificar bastante a verificação da Hipótese 5.1.2:

Lema 5.3.2. *Seja $h : \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, \infty]$, $\text{int dom } h = \mathbb{R}_{++}$. Se, para $x \in \mathbb{R}_{++}$, $h''(x)$ for não-crescente e $x^2 h''(x)$ for não-decrescente, então a distância generalizada, dada por*

$$d(x, y) = \frac{h(x) - h(y) - h'(y)(x - y)}{h''(y)},$$

obedece à Hipótese 5.1.2, para $(a, b) = \mathbb{R}_{++}$.

Demonstração. Para $(a, b) = \mathbb{R}_{++}$, temos que o limite inferior de $d'(x, y)$, dado pela Hipótese 5.1.2, reduz-se a $h''(y)(x - y)y \leq (h'(x) - h'(y))x$. Para provar que esta desigualdade é válida, consideraremos dois casos:

1. Se $0 < x < y$, temos:

$$\begin{aligned} h'(y) - h'(x) &= \int_x^y h''(z) dz \\ &\leq \int_x^y \frac{y^2 h''(y)}{z^2} dz && [x^2 h''(x) \text{ não-decr.}] \\ &= h''(y) \left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right) y^2 \\ &= h''(y) \frac{y - x}{xy} y^2 \\ &= h''(y)(y - x) \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

2. Se $0 < y < x$, seguimos a idéia do item anterior para concluir que

$$\begin{aligned} h'(x) - h'(y) &= \int_y^x h''(z) dz \\ &\geq \int_y^x \frac{y^2}{z^2} h''(y) dz && [x^2 h''(x) \text{ não-decr.}] \\ &= h''(y)(x - y) \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Já o limite superior torna-se: $h'(x) - h'(y) \leq h''(y)(x - y)$. Para verificar que este limite vale, consideramos mais uma vez dois casos:

1. Se $0 < x_i < y_i$.

$$\begin{aligned} h'(y) - h'(x) &= \int_x^y h''(z) dz \\ &\geq \int_x^y h''(y) dz && [h''(x) \text{ não-cresc.}] \\ &= h''(y)(y - x). \end{aligned}$$

2. O caso $0 < y < x$ é análogo ao caso anterior.

□

Alguns exemplos de funções de Bregman que podemos usar para obter regularizações duplas são:

1. $h(x) = \text{dilog}(e^x) + x \log(e^x - 1)$. Neste caso,

$$h''(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}.$$

Claramente, $h''(x)$ é não-crescente.

Por outro lado, para provarmos que $x^2 h''(x)$ é não-decrescente, vamos provar que sua derivada é sempre positiva. Esta derivada é

$$\frac{e^x x (2e^x - x - 2)}{(e^x - 1)^2}.$$

Seu sinal é definido pelo sinal de $2e^x - x - 2$, que vale 0, se $x = 0$, e é estritamente crescente. Logo o sinal da derivada de $x^2 h''(x)$ é sempre positivo.

Portanto esta função gera uma distância de Bregman que obedece à Hipótese 5.1.2.

2. $h(x) = x^\alpha - x^\beta$, $\alpha \geq 1$, $\beta \in (0, 1)$. Aqui,

$$h''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} + \beta(1 - \beta)x^{\beta-2}.$$

$$x^2 h''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^\alpha + \beta(1 - \beta)x^\beta.$$

Notamos que $x^2 h''(x)$ é sempre não-decrescente em $\mathbb{R}_{++}$ e $h''(x)$ é não-crescente se, e somente se, $\alpha \leq 2$.

Logo, a distância de Bregman obtida a partir de h obedecerá à Hipótese 5.1.2 se, e somente se, $\alpha \in [1, 2]$ e $\beta \in (0, 1)$.

5.4 Penalidades e Métodos de Multiplicadores

Nesta seção, vamos caracterizar penalidades geradas a partir de regularizações duplas usando a Hipótese 5.1.2. Em seguida discutiremos brevemente sua relação com um artigo de Chen e Mangasarian [17] que pode nos ajudar a encontrar novas penalidades.

Lema 5.4.1. *Seja $\nu > 1$. Seja $P : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$, denotemos por $P'(u, \lambda)$ a derivada de P com respeito à primeira variável. Se $P'(\cdot, \lambda)$ for estritamente crescente e estritamente positiva e, além disto,*

$$\frac{u}{\nu + 1} + \lambda \leq P'(u, \lambda) \leq \frac{u + (\nu - 1)\lambda + \sqrt{(u + (\nu - 1)\lambda)^2 + 4\nu\lambda^2}}{2\nu}, \quad (5.8)$$

então existe uma regularização dupla, $\tilde{d}$, que obedece à Hipótese 5.1.2 e tal que

$$P(u, \lambda) = \left(\tilde{d}(\cdot, \lambda) \right)^* (u).$$

Demonstração. Dado $\lambda \in \mathbb{R}_{++}$, a derivada de $P(\cdot, \lambda)$ é estritamente crescente, logo esta função é estritamente convexa. Chamemos de $\tilde{d}(\cdot, \lambda)$ sua função convexo conjugada.

Sabemos que:

1. Para todo $\lambda \in \mathbb{R}_{++}$, $\tilde{d}(\cdot, \lambda)$ é estritamente convexa, pois $P(\cdot, \lambda)$ é diferenciável.
2. Para todo $\lambda \in \mathbb{R}_{++}$, $\tilde{d}(\cdot, \lambda)$ é diferenciável, pois $P(\cdot, \lambda)$ é estritamente convexa. Além disto, $\tilde{d}'(\cdot, \lambda) = (P')^{-1}(\cdot, \lambda)$.
3. Usando os limites sobre $P'(\cdot, \lambda)$, concluímos que $P'(0, \lambda) = \lambda$. Portanto $\tilde{d}'(\lambda, \lambda) = 0$, ou seja, $\tilde{d}(\cdot, \lambda)$ atinge mínimo em λ .

4. Como $\tilde{d}(\cdot, \lambda)$ é a convexo conjugada de uma penalidade, temos $\text{dom } \tilde{d} \subset \mathbb{R}_+$ (Lema 2.2.2). Ainda, uma vez que $\text{dom } P'(\cdot, \lambda) = \mathbb{R}$, então $\text{rge } \tilde{d}'(\cdot, \lambda) = \mathbb{R}$.

Definindo $d(\gamma, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{d}(\gamma, \lambda) - \frac{\gamma}{2} \|\gamma - \lambda\|^2$, as propriedades acima asseguram que $\tilde{d}$ é uma regularização dupla caso seja verdade que para todo $\lambda \in \mathbb{R}_{++}$, se $\{(\gamma^k, \lambda^k)\}$ é uma seqüência em $\mathbb{R}_{++}$ convergindo para (λ, λ) , então $\tilde{d}'(\gamma^k, \lambda^k) \rightarrow 0$. Mas, isto é uma consequência da Hipótese 5.1.2 aplicada à d e, portanto, devemos apenas provar sua validade. Faremos isto em duas etapas:

1. Começamos por

$$\begin{aligned} \frac{u}{\nu+1} + \lambda &\leq P'(u, \lambda) \iff \\ (P')^{-1} \left(\frac{u}{\nu+1} + \lambda, \lambda \right) &\leq u \\ \tilde{d}' \left(\frac{u}{\nu+1} + \lambda, \lambda \right) &\leq u. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u}{\nu+1} + \lambda$ e lembrando a definição de d , obtemos

$$\forall \gamma \in \mathbb{R}_{++}, d'(\gamma, \lambda) \leq (\gamma - \lambda).$$

2. Por outro lado,

$$\begin{aligned} P'(u, \lambda) &\leq \frac{u + (\nu-1)\lambda + \sqrt{(u + (\nu-1)\lambda)^2 + 4\nu\lambda^2}}{2\nu} \iff \\ u &\leq \tilde{d}' \left(\frac{u + (\nu-1)\lambda + \sqrt{(u + (\nu-1)\lambda)^2 + 4\nu\lambda^2}}{2\nu}, \lambda \right) \end{aligned}$$

De novo, trocamos variáveis: $\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u + (\nu-1)\lambda + \sqrt{(u + (\nu-1)\lambda)^2 + 4\nu\lambda^2}}{2\nu}$

$$\forall \gamma \in \mathbb{R}_{++}, \frac{(\gamma - \lambda)\lambda}{\gamma} \leq d'(\gamma, \lambda)$$

A demonstração está completa. Destacamos ainda que, como provamos que a desigualdade (5.8) é equivalente a Hipótese 5.1.2, demonstramos, implicitamente, que (5.8) é coerente (o limite inferior apresentado é sempre menor do que o limite superior, como observamos na Figura 5.4). $\square$

Figura 5.2: Os limites para derivada de uma penalidade no caso $\lambda = 1$.

Observamos que o limite superior para a derivada de uma penalidade dado no lema acima,

$$\frac{u + (\nu - 1)\lambda + \sqrt{(u + (\nu - 1)\lambda)^2 + 4\nu\lambda^2}}{2\nu},$$

coincide com a derivada da penalidade obtida a partir da regularização logarítmica-quadrática.¹¹

Outro fato interessante, e que não foi destacado por Auslender, Teboulle e Ben-Tiba em [4, 5], é que esta penalidade já havia sido apresentada, implicitamente, por Chen e Mangasarian no contexto de métodos de penalização puros [17]. Neste artigo, os autores sugerem o uso de uma família de aproximações da função $\max(u, 0)$ para a solução de problemas variacionais. Entre elas está a *Chen-Harker-Kanzow-Smale Plus Function*, que é definida a partir de um parâmetro de penalização, β , como:

$$P'(u, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u + \sqrt{u^2 + 4\beta^2}}{2}.$$

Recuperamos a derivada da penalidade baseada na regularização logarítmica-quadrática através de $P'(u + (\nu - 1)\lambda, \sqrt{\nu\lambda})$.

¹¹Assim como o limite inferior dado pela Hipótese 5.1.2 coincide com a derivada desta regularização. Ver Seção 5.3.

Acreditamos que um estudo cuidadoso da família de aproximações da função máximo sugerida em [17] pode levar a outras penalidades associadas a regularizações duplas. Em particular, seria interessante obter uma penalidade baseada na *neural networks smooth plus function*, já que esta função apresentou os melhores resultados numéricos.

Por fim, devemos destacar que as penalidades obtidas a partir de regularizações duplas podem ser usadas para obter diferentes versões de métodos de multiplicadores para a solução de problemas variacionais com restrições convexas gerais, descobertos recentemente por Auslender e Teboulle [3] e Pennanen [32].

Resolução Aproximada em Métodos de Multiplicadores

Neste capítulo, apresentaremos novos critérios de aceitação de soluções aproximadas dos sub-problemas irrestritos que compõem os passos iterativos de um método de multiplicadores. *Destacamos que vamos restringir nossa análise a problemas de programação convexa (1.2) cujas funções são diferenciáveis em todo o $\mathbb{R}^n$. Assumimos ainda que vale uma condição de qualificação, como a condição de Slater ou a condição estrita¹, e, portanto, os problemas primal e dual possuem mesmo valor ótimo.*

Analisaremos dois métodos. Primeiro, o Algoritmo 4.3.5, apresentado no Capítulo 4. Neste caso, vamos obter um critério semelhante aos critérios de [39, 5], cuja versão implementável depende de hipóteses extras sobre o problema primal. Em seguida, discutiremos o uso do método híbrido de Solodov e Svaiter, Algoritmo 2.1.7, para a busca de um ponto de sela do lagrangiano associado ao primal. A respectiva condição para aceitação de soluções aproximadas será bastante permissiva e não dependerá de hipóteses adicionais sobre o problema que desejamos resolver.

6.1 Métodos de Multiplicadores com Distâncias Coercivas

Sejam $d_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, \infty]$, $i = 1, \dots, m$ distâncias coercivas generalizadas obedecendo à Hipótese 4.1.1 para $(a_i, b_i) = (0, +\infty)$. Como desejamos usar o Algoritmo 4.3.5, assumimos que existe um ponto dual viável e estritamente positivo.

¹Estes e outros exemplos de condições de qualificação são apresentados por Mangasarian em [29, Capítulos 5 e 7].

Uma consequência, fundamental em nossa análise, da coercitividade de d_i em $\mathbb{R}_{++}$ é que, fixo $\lambda_i > 0$, as penalidades associadas a estas regularizações se reduzem à função convexo conjugada de d_i com relação à sua primeira variável:

$$P_i(u_i, \lambda_i) \stackrel{\text{def}}{=} (d_i(\cdot, \lambda_i) + \delta_{\mathbb{R}_+}(\cdot))^*(u_i), \quad i = 1, \dots, m. \quad (6.1)$$

Desejamos estudar seqüências do tipo:

$$0 < \alpha_i^k \leq \tilde{\alpha}, \quad i = 1, \dots, m; \quad (6.2)$$

$$x^{k+1} \approx \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{Argmin}} \left\{ f(x) + \sum_{i=1}^m \alpha_i^k P_i \left(\frac{g_i(x)}{\alpha_i^k}, \lambda_i^k \right) \right\}; \quad (6.3)$$

$$\lambda_i^{k+1} = \frac{\partial P_i}{\partial u_i} \left(\frac{g_i(x^{k+1})}{\alpha_i^k}, \lambda_i^k \right), \quad i = 1, \dots, m. \quad (6.4)$$

Que nada mais são do que o Algoritmo 4.3.5 com resolução aproximada do sub-problema de minimização. Lembrando que Algoritmo 4.3.5 é uma especialização do Algoritmo 4.3.1 aplicado ao problema de maximização da função dual, F . Podemos tentar usar o seu critério de aceitação, expresso pela Desigualdade (4.12), para decretar que um novo ponto primal pode ser aceito.

Seja $\sigma \in [0, 1]$ e denotemos $D \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^m d_i$. (6.1) implica que a Equação (6.4) é equivalente a

$$g_i(x^{k+1}) = \alpha_i^k d'_i(\lambda_i^{k+1}, \lambda_i^k), \quad i = 1, \dots, m.$$

Portanto, a condição (4.12), reduz-se a

$$\exists \gamma_F \in \partial F(\lambda^{k+1}), |(\gamma_F)_i - g_i(x^{k+1})| \leq \sigma |g_i(x^{k+1})|, \quad i = 1, \dots, m. \quad (6.5)$$

Contudo, não é simples obter um elemento de $\partial F(\lambda^{k+1})$, para verificar a relação acima. De fato, a forma típica de se obter um subgradiente da função objetivo dual é através de uma minimização irrestrita do lagrangiano com o multiplicador fixo. Formalmente, sabemos que se

$$\hat{x} \in \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{Argmin}} \{ f(x) + \langle \lambda^{k+1}, g(x) \rangle \}, \quad (6.6)$$

então

$$g(\hat{x}) \in \partial F(\lambda^{k+1}).$$

Usando este resultado, concluímos que o critério (6.5) será atendido se

$$|g_i(\hat{x}) - g_i(x^{k+1})| \leq \sigma |g_i(x^{k+1})|, \quad i = 1, \dots, m. \quad (6.7)$$

Surge assim a necessidade de estimar o lado esquerdo desta desigualdade.

Outros trabalhos, em particular [39, 5], também chegaram a condições de parada de difícil verificação.² Para contornar os obstáculos encontrados, estes autores lançaram mão da hipótese de convexidade forte da função objetivo. Seguindo esta tradição, apesar de considerarmos esta condição restritiva, vamos assumir durante o restante desta seção que:

Hipótese 6.1.1. A função objetivo do problema primal, f , é fortemente convexa com módulo ζ . Além disto as restrições, g_i , $i = 1, \dots, m$ são globalmente Lipschitz com constantes L_i , $i = 1, \dots, m$.

Destacamos que se conheçêssemos uma caixa limitada que contém as soluções primais a condição de Lipschitz continuidade não seria necessária. Neste caso, as restrições que formam a caixa poderiam ser tratadas pelo algoritmo que resolve o sub-problema penalizado, evitando o uso de penalidades para este tipo simples de restrição. A condição de Lipschitz continuidade estaria então automaticamente verificada, já que toda função convexa real é Lipschitz em compactos.

Vamos usar esta nova hipótese, podemos simplificar (6.7). com este objetivo, definimos

$$\phi_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + \sum_{i=1}^m \alpha_i^k p_i \left(\frac{g_i(x)}{\alpha_i^k}, \lambda_i^k \right) \quad (6.8)$$

A definição λ^{k+1} garante que

$$\nabla \phi_k(x^{k+1}) = \nabla_x L(x^{k+1}, \lambda^{k+1}). \quad (6.9)$$

Já a convexidade forte de f assegura que $L(\cdot, \lambda^{k+1})$ também é fortemente convexa e com o mesmo módulo (ζ). Portanto, usando [41, Exercício 12.59],

$$\begin{aligned} \zeta |\hat{x} - x^{k+1}|^2 &\leq \langle \hat{x} - x^{k+1}, \nabla_x L(\hat{x}, \lambda^{k+1}) - \nabla_x L(x^{k+1}, \lambda^{k+1}) \rangle \\ &\leq |\hat{x} - x^{k+1}| |\nabla_x L(\hat{x}, \lambda^{k+1}) - \nabla_x L(x^{k+1}, \lambda^{k+1})|, \end{aligned}$$

uma vez que $\hat{x}$ minimiza $L(\cdot, \lambda^{k+1})$, $\nabla_x L(\hat{x}, \lambda^{k+1}) = 0$. Desta forma, as desigualdades acima implicam que

$$\zeta |\hat{x} - x^{k+1}| \leq |\nabla_x L(x^{k+1}, \lambda^{k+1})|.$$

A Equação (6.9) nos diz que isto é equivalente a

$$\zeta |\hat{x} - x^{k+1}| \leq |\nabla \phi_k(x^{k+1})|.$$

Finalmente, usamos a continuidade de Lipschitz das restrições para deduzir que para cada $i = 1, \dots, m$,

$$\frac{\zeta}{L_i} |g_i(\hat{x}) - g_i(x^{k+1})| \leq |\nabla \phi_k(x^{k+1})|.$$

²As condições destes artigos estavam ligadas a garantir ϵ -otimalidade do ponto primal atual.

E desta forma, o critério de aceitação (6.7) será satisfeito se

$$|\nabla \phi_k(x^{k+1})| \leq \frac{\zeta \sigma}{L_i} |g_i(x^{k+1})|, \quad i = 1, \dots, m. \quad (6.10)$$

Destacamos que este critério depende apenas dos dados primais e da solução aproximada do problema de minimização, sendo, desta forma, fácil de ser testado.

Portanto, a otimalidade dual dos pontos de acumulação de uma sequência de multiplicadores obtida através de (6.2)-(6.4), usando (6.10) como critério de aceitação de uma solução aproximada do problema de minimização do lagrangiano aumentado, (6.3), é uma consequência do teorema de convergência do Algoritmo 4.3.1, Teorema 4.3.4. A limitação da sequência de multiplicadores, mais uma vez, estará assegurada se a condição de qualificação de Slater for válida (Teorema 1.2.5).

Testes Numéricos

Fizemos alguns testes numéricos preliminares com o objetivo de verificar a adequação do critério de aceitação proposto em (6.10). Em particular, queremos verificar se a adoção desta condição de parada interfere na “capacidade de resolução de problemas” do algoritmo e se há algum ganho de desempenho quando comparado a uma implementação que busque resolver todos os sub-problemas com precisão elevada.

Implementamos então o método de multiplicadores baseado na penalidade logarítmica-quadrática, descrita na Seção 5.3. Para resolver os sub-problemas irrestritos usamos o L-BFGS-B, código de domínio público descrito em [15].³ Este programa mostrou-se especialmente interessante por fazer comunicação reversa a cada passo, o que permitiu a incorporação de nosso novo critério de parada sem a necessidade de alteração do código original.

Os problemas de teste foram escolhidos na coleção de problemas de pequeno porte `mastsif_small`, que pode ser obtida junto com o CUTE [10]. Nela encontramos 130 problemas cujas restrições são todas de desigualdade ou limites nas variáveis. Uma lista completa destes problemas pode ser encontrada no Apêndice.

Buscamos resolver os problemas escolhidos com nossa implementação do Algoritmo 4.3.5. Um par (x, λ) foi aceito como um par de soluções primal-dual se ocorrer:

1. Viabilidade.

$$\max_{i=1, \dots, m} \{ \max(0, g_i(x)) \} \leq 10^{-6}.$$

³O código fonte deste programa está disponível na página <http://www-c.mcs.anl.gov/home/otc/>.

2. Complementaridade.

$$|\langle \lambda, g(x) \rangle| \leq 10^{-6} \max(f(x), 1.0).$$

3. Mínimo do lagrangiano.

$$\frac{\max_{i=1,\dots,m} \{ |\nabla_x L(x, \lambda)_i| \max(|x_i|, 1.0) \}}{\max(L(x, \lambda), 1.0)} \leq 10^{-6}.$$

Cada problema foi abordado de duas formas. Primeiro, buscamos resolver *todos* os sub-problemas até que a norma do respectivo gradiente fosse próxima de zero.⁴ Chamaremos esta versão de *exata*. A segunda maneira usou o critério de aceitação (6.10) caso este se verifique antes que o gradiente torne-se muito pequeno. Chamaremos esta versão de *inexata*.

A versão exata resolveu 95 dos 130 problemas, já a inexata 92. Concluimos que, nesta amostra, a “capacidade de solução dos problemas” de ambos é, qualitativamente, a mesma. Dos 130 problemas, 90 foram resolvidos pelas duas versões implementadas. Destes, 9 foram resolvidos usando um único sub-problema, ou seja eram problemas irrestritos, ou o ponto dual inicial fornecido pelo CUTE era uma solução do dual. Usamos os 81 problemas restantes para um teste de desempenho.

A versão inexata resolveu estes 81 problemas em média em 77,6% do tempo da versão exata, computando o gradiente da função objetivo apenas 88,0% do número de vezes que este mesmo gradiente foi computado pela versão exata. Já os gradientes das restrições foram computados 88,9% vezes o número de cálculos destes gradientes feito pelo método exato. Assim, podemos dizer que a condição de parada apresentou-se como uma alternativa interessante para ganho de desempenho em métodos de multiplicadores.

Por outro lado, em apenas 59,3% dos casos o critério (6.10) foi capaz de garantir a aceitação de no mínimo 75% das soluções aproximadas dos problemas penalizados. Logo, é freqüente que o critério de aceitação degenere “rapidamente” na solução exata dos sub-problemas. Porém, mesmo nesta situação, a menor precisão exigida nas primeiras minimizações garante uma vantagem de desempenho.

Tabelas com os nomes de todos os problemas resolvidos e os parâmetros de desempenho para cada um deles estão presentes no Apêndice C.

6.2 O Método Híbrido de Solodov e Svaiter

Em [39], Rockafellar apresentou uma alternativa ao método de multiplicadores que chamou de *método do lagrangiano aumentado proximal*. Para obter este algoritmo, ele

⁴Menor ou igual a 10^{-8} .

aplicou o método de ponto proximal clássico à solução do problema de encontrar um ponto de sela do lagrangiano. O algoritmo obtido é um método primal-dual bastante semelhante ao método do lagrangiano aumentado clássico, porém com melhores propriedades de convergência.

Nesta seção, nós vamos aplicar o método híbrido de Solodov e Svaiter, apresentado na Seção 2.1, para obter uma versão do método do lagrangiano aumentado proximal com um critério de aceitação de soluções aproximadas de seus sub-problemas de fácil verificação e sem a necessidade de hipóteses restritivas sobre o problema que desejamos resolver. Esta seção é baseada no artigo [26].

Consideremos o problema primal, definido no Capítulo 1. A respectiva função lagrangiana estendida é dada por:

$$L(x, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle - \delta_{\mathbb{R}_+^m}(\lambda).$$

Como L é uma função convexa em x e côncava em λ , podemos associar a ela um operador monótono maximal cujos zeros coincidem com seus pontos de sela [41, Exemplo 12.27]. Chamaremos este operador de T_L e ele é definido por:

$$T_L(x, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x) \\ -g(x) + N_{\mathbb{R}_+^m}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

$N_{\mathbb{R}_+^m}(\lambda)$ é o cone normal associado a $\mathbb{R}_+^m$ em λ , cuja fórmula é:

$$N_{\mathbb{R}_+^m}(\lambda)_i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \{0\} & \text{se } \lambda_i > 0; \\ (-\infty, 0] & \text{se } \lambda_i = 0; \\ \emptyset & \text{se } \lambda_i < 0. \end{cases}$$

Por outro lado, os pontos de sela de L coincidem com os pares de soluções dos problemas primal e dual, uma vez que assumimos a validade de uma condição de qualificação [29, Teorema 5.4.7]. Podemos então aplicar um método proximal para encontrar zeros de T_L , e assim obter soluções do problema primal (e dual).

O Método Híbrido Projeção-Lagrangiano Aumentado Proximal

Seguindo os passos de Rockafellar em [39], sabemos que o passo proximal do método híbrido aplicado a busca de zeros de T_L pode ser aproximado por:

$$P(u, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m [(\lambda_i + u_i)_+^2 - (\lambda_i)^2]; \quad \P \quad (6.11)$$

$$0 < \alpha_k \leq \tilde{\alpha}; \quad (6.12)$$

$$\tilde{x}^k \approx \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{Argmin}} \left\{ f(x) + \alpha_k P \left(\frac{g(x)}{\alpha_k}, \lambda^k \right) + \frac{\alpha_k}{2} \|x - x^k\|^2 \right\}; \quad (6.13)$$

$$\tilde{\lambda}^k \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_u P \left(\frac{g(\tilde{x}^k)}{\alpha_k}, \lambda_i^k \right). \quad (6.14)$$

No restante deste capítulo, vamos denotar a função de x que é minimizada em (6.13) por $\phi_k(x)$.

Para aceitarmos esta aproximação é preciso que, dado $\sigma \in [0, 1]$, $\exists \tilde{\gamma}^k \in T_L(\tilde{x}^k, \tilde{\lambda}^k)$,

$$\left\| \tilde{\gamma}^k + \alpha_k \left(\begin{bmatrix} \tilde{x}^k \\ \tilde{\lambda}^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x^k \\ \lambda^k \end{bmatrix} \right) \right\| \leq \sigma \max \left\{ \|\tilde{\gamma}^k\|, \alpha_k \left\| \begin{bmatrix} \tilde{x}^k \\ \tilde{\lambda}^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x^k \\ \lambda^k \end{bmatrix} \right\| \right\}. \quad (6.15)$$

Entre os elementos de T_L que podemos usar para verificar este critério de aceitação, aquele que nos parece mais interessante é:

Lema 6.2.1. *Sejam $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$ e $\alpha > 0$. Defina*

$$\tilde{\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_u P \left(\frac{g(\tilde{x})}{\alpha}, \lambda \right) \text{ e } \tilde{\eta} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\lambda + \frac{g(\tilde{x})}{\alpha} \right)_-,$$

então

$$\tilde{\eta} \in N_{\mathbb{R}_+^m}(\tilde{\lambda}).$$

Logo,

$$\tilde{\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \nabla f(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i \nabla g_i(\tilde{x}) \\ -g(\tilde{x}) + \alpha \tilde{\eta} \end{bmatrix} \in T_L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}).$$

Demonstração. O resultado é uma consequência imediata de $\nabla_u P(u, \lambda) = (\lambda + u)_+$. $\square$

A escolha de $\tilde{\eta}$ entre os elementos de $N_{\mathbb{R}_+^m}(\tilde{\lambda})$ é justificada pelo seguinte lema:

^{\P}Lembramos que a regularização usada para a obtenção do método híbrido foi o quadrado da norma euclidiana.

Lema 6.2.2. *Sejam $\tilde{x}^k \in \mathbb{R}^n$, $\lambda^k \in \mathbb{R}_+^m$ e $\alpha_k > 0$. Definindo $\tilde{\lambda}^k$, $\tilde{\eta}^k$ e $\tilde{\gamma}^k$, como no lema anterior, temos:*

$$\tilde{\gamma}^k + \alpha_k \left(\begin{bmatrix} \tilde{x}^k \\ \tilde{\lambda}^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x^k \\ \lambda^k \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \nabla \phi_k(\tilde{x}^k) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.16)$$

Demonstração. Usando a regra da cadeia e a definição de $\tilde{\lambda}^k$, segue que $\nabla \phi_k(\tilde{x}^k) = \nabla f(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i \nabla g_i(\tilde{x}) + \alpha_k(\tilde{x}^k - x^k)$.

Além do mais,

$$\begin{aligned} -g(\tilde{x}^k) + \alpha_k \tilde{\eta}^k + \alpha_k(\tilde{\lambda}^k - \lambda^k) &= \\ &= -g(\tilde{x}^k) + \alpha_k \min\{\lambda^k + g(\tilde{x}^k)/\alpha_k, 0\} + \\ &\quad + \alpha_k(\max\{\lambda^k + g(\tilde{x}^k)/\alpha_k, 0\} - \lambda^k) \\ &= \alpha_k(\min\{\lambda^k, -g(\tilde{x}^k)/\alpha_k\} + \max\{g(\tilde{x}^k)/\alpha_k, -\lambda^k\}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Isto completa a prova. □

De posse destes lemas, podemos simplificar o critério de aceitação (6.15):

$$\|\nabla \phi_k(\tilde{x})\| \leq \sigma \max \left\{ \|\tilde{\gamma}^k\|, \alpha_k \left\| \begin{bmatrix} \tilde{x}^k \\ \tilde{\lambda}^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x^k \\ \lambda^k \end{bmatrix} \right\| \right\}. \quad (6.17)$$

O novo par de pontos primal-dual, (x^{k+1}, λ^{k+1}) é obtido pela projeção de (x^k, λ^k) sobre o hiperplano que passa por $(\tilde{x}^k, \tilde{\lambda}^k)$ e com normal dada por $\tilde{\gamma}^k$, definida como no Lema 6.2.1.

Finalmente, o Teorema 2.1.8 garante a convergência de $\{(x^k, \lambda^k)\}$ a um zero de T_L , ou seja, a um par de soluções primal-dual.

Testes Numéricos

Usamos o mesmo programa e conjunto de teste descritos na seção anterior para analisar o sucesso do critério de aceitação do método híbrido projeção-lagrangiano aumentado proximal.

Poucas modificações foram necessárias no código fonte dos programas para adaptá-lo a este novo algoritmo. Em particular, mantivemos o L-BFGS-B como rotina para solução dos problemas irrestritos.

Como na seção anterior, temos duas versões do método do lagrangiano aumentado proximal. Uma, que chamamos *exata*, resolve todos os sub-problemas com grande precisão, a segunda, ou *inexata*, implementa o critério de aceitação (6.17).

Dos 130 problemas presentes em nossa massa de testes, as versões exata e inexata resolveram 91 (não necessariamente os mesmos). Concluimos que a “capacidade de solução dos problemas” de ambos é, qualitativamente, a mesma. Já, 84 problemas foram resolvidos pelas duas versões. Destes, 8 eram problemas irrestritos, ou o ponto dual inicial fornecido pelo CUTE era uma solução do dual. Usamos os 76 problemas restantes para um teste de desempenho.

Os resultados dos testes de desempenho são, até um certo ponto inesperados. A versão inexata foi mais rápida, levando 88,5% do tempo da versão exata, em média. Porém ela perdeu em todos os outros parâmetros de desempenho: o número de vezes que os gradientes da função objetivo e das restrições foram computados foi 5% maior do que o que foi feito pela versão exata. Portanto, concluimos que nesta amostra não há ganho de desempenho com a aceitação antecipada das soluções dos sub-problemas.

Por outro lado, em 58 problemas (69,0%), o critério de aceitação foi atingindo em pelo menos 75% das minimizações irrestritas. Desta forma, o critério descrito em (6.17) mostrou-se mais robusto em nossa amostra do que o critério da seção anterior. Mas observando as tabelas, vemos que nos problemas nos quais esse critério foi mal sucedido o desempenho da versão inexata foi bem pior do que o desempenho da versão exata. Acreditamos que é necessário um estudo mais aprofundado destes resultados para uma melhor compreensão dos casos nos quais o uso da versão inexata pode trazer ganhos de desempenho.

Mais uma vez, tabelas com os nomes de todos os problemas resolvidos e os parâmetros de desempenho para cada um deles estão presentes no Apêndice C.

Conclusão

Neste trabalho, apresentamos contribuições a teoria de métodos proximais. Em particular, introduzimos duas novas classes de regularizações: uma baseada em translações de funções convexas e a outra composta de termos coercivos adaptados a solução de problemas em caixa. Provamos a convergência dos respectivos algoritmos sob variadas condições. Tais métodos podem ser usados para resolução de problemas de otimização convexa e desigualdades variacionais. Em particular, estendemos os resultados de Auslender, Teboulle e Ben-Tiba apresentados em [4, 5], de forma a incluir regularizações baseadas em distâncias de Bregman.

Desta forma, recuperamos os resultados sobre métodos inexatos de Solodov e Svaiter em [43], sem a necessidade de um passo extra-gradiente no caso de otimização convexa. Recentemente, encontramos um artigo de Birge, Qi e Wei [9] que contém o resultado de convergência sem passo extra-gradiente. Este artigo lida apenas com o caso de otimização e possui uma análise semelhante àquela apresentada no início da Seção 2.1, centrando o estudo na queda da função objetivo.

Por fim, apresentamos novas regras de aceitação de soluções aproximadas dos problemas irrestritos que surgem em alguns métodos de multiplicadores e fizemos alguns testes computacionais para validar estas regras.

Surgem destes resultados novas questões que merecem investigação, dentre as quais destacamos três, que são objeto presente de nossa pesquisa:

1. Estudo das penalidades geradas a partir de regularizações duplas, se possível explorando a conexão, estabelecida no final do Capítulo 5, com o artigo de Chen e Mangasarian [17].
2. Extensão da análise do método proximal baseado em distâncias coercivas (Algoritmo 4.2.1) de maneira a incluir ϵ -extensões [13] de operadores monótonos.

3. Adaptação do algoritmo acima para problemas com restrições lineares gerais (poliedros), preservando, se possível, seu critério de aceitação.

Existência de zeros de desigualdades variacionais regularizadas

Vamos estudar o problema de existência de zeros de desigualdades variacionais regularizadas por um termo estritamente convexo. Deste modo, apresentaremos resultados que podem ser usados para provar a existência de iterados proximais usando diferentes hipóteses sobre as distâncias generalizadas e/ou sobre operador T . Em particular estendemos o Lema 4.2.3 apresentado no Capítulo 4.

Dado uma desigualdade variacional (1.4), desejamos estudar a existência de soluções para

$$0 \in T(x^*) + N_B(x^*) + \partial D(x^*), \quad (\text{A.1})$$

na qual

Hipótese A.1.1. A função $D : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty]$ é fechada e estritamente convexa. Ainda, D é essencialmente lisa¹, $\text{int dom } D = \text{int } B$ e D possui mínimo em $\text{int } B$.

Claramente, estas regularizações englobam as distâncias coercivas apresentadas no Capítulo 4, φ -divergências e distâncias de Bregman com zona $\text{int } B$.

Provamos inicialmente que:

Lema A.1.2. *Qualquer solução de (A.1) está em $\text{int } B$.*

Demonstração. Isto é uma consequência trivial do fato de D ser essencialmente lisa e $\text{int dom } D = \text{int } B$. $\square$

Passamos a apresentar condições que assegurem a existência de zeros (A.1).

¹ D é diferenciável no interior de $\text{dom } D$, que é não vazio, e $\partial D = \emptyset$ em todos os pontos $x \in \text{int dom } D$.

Lema A.1.3. *Se $\text{rge } D = \mathbb{R}^n$, então existe um ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$ que resolve (A.1).²*

Demonstração. Como $\text{dom } T \cap \text{int } B \neq \emptyset$, sabemos que deve existir um ponto $\bar{x} \in \text{ri dom } T \cap \text{int } B$. Portanto $\bar{x} \in \text{ri dom}(T + N_B)$. Além disto, como $\text{dom } \partial D = \text{int } B$, concluímos que $T + N_B + \partial D$ é monótono maximal.

Portanto, usamos [35, Proposition 3] para concluir que

$$\text{rge}(T + N_B + \partial D) = \mathbb{R}^n.$$

□

Lema A.1.4. *Se T é o subdiferencial de uma função, f , própria, fechada, convexa e limitada inferiormente em B , então existe um ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$ que resolve (A.1).*

Demonstração. Neste caso (A.1) é equivalente a $f + D$ possuir ponto de mínimo em B . Para mostrar isto, basta provarmos que os conjuntos de nível desta função são limitados em B . Seja l um limite inferior de f em B . Dado qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) + D(x) \leq \alpha\} \cap B &= \{x \in B \mid f(x) + D(x) \leq \alpha\} \\ &\supset \{x \in B \mid D(x) \leq \alpha - l\}. \end{aligned}$$

O último conjunto é um conjunto de nível de D em B , que é limitado pois D possui um único mínimo em B . □

Lema A.1.5. *Seja*

$$h_{T,B}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{ \langle v, x - y \rangle \mid y \in B, v \in T(y) \}.$$

Se $h_{T,B}(x) < \infty$ para todo $x \in B \cap \text{dom } T$, então existe um ponto $x^ \in \mathbb{R}^n$ que resolve (A.1).*

Antes de apresentarmos a prova deste lema, destacamos que a hipótese $h_{T,B}(x) < \infty$ para todo $x \in B \cap \text{dom } T$ já apareceu na literatura, por exemplo em [35, Teorema 2] e [14]. Em particular, a Proposição 3.1 de [14] garante que esta condição vale sempre que:

1. T é coerciva;
2. T é o subdiferencial de uma função própria, fechada, convexa e limitada inferiormente em B . Portanto, este Lema generaliza o Lema A.1.4;

²Este é, na verdade, o Lema 4.2.3, porém decidimos repeti-lo para que a exposição seja completa.

3. $T + N_B$ é regular e possui zeros;
4. T é fortemente monótono;
5. $\overline{\text{dom } T}$ é limitado;

Demonstração. (do Lema A.1.5). Seja $\bar{x}$ o ponto de mínimo de D em B . Como D é subdiferenciável em $\bar{x}$, $\bar{x} \in \text{int } B$.

Seja $\alpha = |h_{T,B}(\bar{x})|$. Como os conjuntos de nível de D são limitados, sabemos que deve existir um $\rho > 0$ tal que, se $\|x - \bar{x}\| \geq \rho$, então

$$D(x) - D(\bar{x}) \geq \alpha.$$

Sejam $x, v \in \mathbb{R}^n$ tais que $\|x - \bar{x}\| \geq \rho$, e $v \in (T + N_B + \partial D)(x)$. Como $\partial D(x) \neq \emptyset$, sabemos que $x \in \text{int } B$, portanto $N_B(x) = \{0\}$. Assim, v pode ser escrito na forma $v_T + v_D$, para $v_T \in T(x)$ e $v_D \in \partial D(x)$. Logo,

$$\begin{aligned} \langle v, x - \bar{x} \rangle &= \langle v_T, x - \bar{x} \rangle + \langle v_D, x - \bar{x} \rangle \\ &\geq -\alpha + \langle v_D, x - \bar{x} \rangle \\ &\geq -\alpha + \alpha \\ &= 0. \end{aligned}$$

Concluimos, usando o [41, Teorema 12.51] que $T + N_B + \partial D$ possui um zero. $\square$

O próximo resultado possui uma prova mais sofisticada, mas parece novo. Em particular, ele garante a existência de iterados para qualquer método proximal baseado em distâncias de Bregman que assuma que a função de Bregman é finita em B (o fecho da zona). Este é o caso em [19, 35, 20], logo provamos que hipóteses do tipo “ $\text{rge } h' = \mathbb{R}^n$ ” não seriam necessárias.

Iniciamos relembrando um resultado de Brézis e Haraux. Denotaremos por $\text{conv } A$ o casco convexo de um conjunto A .

Lema A.1.6. [12, Lema 1] *Seja H um espaço de Hilbert. Seja C um operado monótono maximal em H e $F \subset H$ tais que*

$$\forall v \in F, \exists x_v \in H \text{ tal que}$$

$$\sup \{ \langle u - v, x_v - x \rangle \mid x \in \text{dom } C, u \in C(x) \} < +\infty. \quad (\text{A.2})$$

Então, $\text{conv } F \subset \overline{\text{rge } C}$ e $\text{int}(\text{conv } F) \subset \text{rge } C$.

Podemos agora apresentar o nosso resultado. A demonstração apresentada é uma generalização, mais ou menos direta, da prova do Teorema A.1 de [2].

Lema A.1.7. Se $0 \in \overline{\text{rge}(T + N_B)}$ e para todo $y \in \text{int } B$, $w \in B$

$$\sup_{z \in \text{int } B} \{ \langle \nabla D(z) - \nabla D(y), w - z \rangle \} < +\infty. \quad (\text{A.3})$$

Então, existe um ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$ que resolve (A.1). Ainda, se D for finita em B , então (A.3) é válida.

Demonstração. A prova está dividida em três partes:

$$1. \overline{\text{rge}(T + N_B + \partial D)} \supset \overline{\text{rge}(T + N_B)} + \overline{\text{rge } \partial D}.$$

Vamos aplicar o Lema A.1.6 com $F = \text{rge}(T + N_B) + \text{rge } \partial D$ e $C = T + N_B + \partial D$. Uma vez que $\text{dom}(T + N_B + \partial D) = \text{dom } T \cap \text{int } B$, devemos provar que

$$\begin{aligned} \forall v \in \text{rge}(T + N_B) + \text{rge } \partial D, \exists x_v \in \mathbb{R}^n \text{ tal que} \\ \sup \{ \langle u - v, x_v - x \rangle \mid x \in \text{dom } T \cap \text{int } B, u \in (T + \nabla D)(x) \} < +\infty \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Dado $v \in \text{rge}(T + N_B) + \text{rge } \partial D$, sejam $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, $x_v \in B$ e $\tilde{x}_v \in \text{int } B$ tais que:

$$v = v_1 + v_2, v_1 \in (T + N_B)(x_v), v_2 \in \nabla D(\tilde{x}_v).$$

E sejam $x \in \text{dom } T \cap \text{int } B$ e $u \in (T + \nabla D)(x)$, tais que $u = u_1 + u_2$ para algum $u_1 \in T(x)$ e $u_2 \in \nabla D(x)$.

Temos

$$\begin{aligned} \langle u - v, x_v - x \rangle &= \langle u_1 + u_2 - v_1 - v_2, x_v - x \rangle \\ &= \langle u_1 - v_1, x_v - x \rangle + \langle u_2 - v_2, x_v - x \rangle \\ &\leq \langle u_2 - v_2, x_v - x \rangle && [\text{Monot. de } T + N_B] \\ &= \langle \nabla D(x) - \nabla D(\tilde{x}_v), x_v - x \rangle \end{aligned}$$

Tomando o supremo em $x \in \text{dom } T \cap \text{int } B$, podemos usar (A.3) e concluir que (A.4) vale.

Deste modo, aplicando o Lema A.1.6, segue que

$$\begin{aligned} \overline{\text{rge}(T + N_B + \partial D)} &\supset \text{conv}(\overline{\text{rge}(T + N_B)} + \overline{\text{rge } \partial D}) \implies \\ \overline{\text{rge}(T + N_B + \partial D)} &\supset \overline{\text{rge}(T + N_B) + \text{rge } \partial D} \\ &\supset \overline{\text{rge}(T + N_B)} + \overline{\text{rge } \partial D}. \end{aligned}$$

2. Seja $\delta_K^*(\cdot)$ a função suporte de um conjunto K :

$$\delta_K^*(d) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in K} \{\langle x, d \rangle\}$$

Desejamos estimar

$$\begin{aligned} \delta_{\overline{\text{rge}(T+N_B+\partial D)}}^*(d) &\geq \delta_{\overline{\text{rge}(T+N_B)+\text{rge } \partial D}}^*(d) && [\text{item anterior}] \\ &= \delta_{\overline{\text{rge}(T+N_B)}}^*(d) + \delta_{\text{rge } \partial D}^*(d) \\ &\geq \delta_{\text{rge } \partial D}^*(d), \end{aligned}$$

uma vez que $0 \in \overline{\text{rge}(T+N_B)}$.

Por outro lado, seja $\bar{x}$ o ponto de $\text{int } B$ que minimiza D . Dado $d \neq 0$, seja α um número estritamente positivo pequeno o suficiente para que $\bar{x} + \alpha d \in \text{int } B$. Temos:

$$\begin{aligned} \alpha \delta_{\text{rge } \partial D}^*(d) &\geq \langle \nabla D(x^* + \alpha d), \alpha d \rangle \\ &\geq D(x^* + \alpha d) - D(x^*) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\forall d \neq 0, \delta_{\overline{\text{rge}(T+N_B+\partial D)}}^*(d) > 0.$$

Como $\overline{\text{rge}(T+N_B+\partial D)}$ é um conjunto convexo [41, Teorema 12.41], podemos usar [37, Teorema 13.1] e concluir que

$$0 \in \overline{\text{intrge}(T+N_B+\partial D)}.$$

Mais uma vez por [41, Teorema 12.41], observamos que $\overline{\text{intrge}(T+N_B+\partial D)}$ também é convexo e coincide com $\text{intrge}(T+N_B+\partial D)$. Portanto,

$$0 \in \text{intrge}(T+N_B+\partial D).$$

3. Finalmente provamos que se A.3 vale sempre que D for finita em B . Seja $y \in \text{int } B$, $w \in B$. Para todo $z \in \text{int } B$:

$$\begin{aligned} \langle \nabla D(z) - \nabla D(y), w - z \rangle &\leq D(w) - D(z) - \langle \nabla D(y), w - z \rangle \\ &= D(w) - D(z) - \langle \nabla D(y), w \rangle + \langle \nabla D(y), z \rangle \\ &\leq D(w) - D(z) - \langle \nabla D(y), w \rangle + D(z) - D(y) + \langle \nabla D(y), y \rangle \\ &= D(w) - D(y) + \langle \nabla D(y), y - w \rangle. \end{aligned}$$

Como o lado-direito não depende de z , o supremo é finito.

A prova está completa. □

Outras regularizações importantes que obedecem a A.3 são as “distâncias de Bregman” e φ -divergências obtidas a partir de $-\log x$ [2, Apêndice A].

Conexões entre distâncias de Bregman e φ -divergências

Neste apêndice, vamos discutir algumas conexões entre distâncias de Bregman e φ -divergências com mudança de escala, descrita na Seção 4.1.

Em [28], os autores destacam que a única regularização que é, ao mesmo tempo, uma distância de Bregman e uma φ -divergência é a distância de Kullback-Leibler, dada por

$$d(x, y) = x \log \frac{x}{y} + y - x.$$

Esta regularização é a distância de Bregman associada a $h(x) = x \ln x$ e a φ -divergência associada a $\varphi(t) = t \log t - t + 1$.

Por outro lado, ao empregarmos a técnica de mudança de escala a diversas outras regularizações, observamos que o número de φ -divergências correspondendo a distâncias de Bregman é bem maior. Até o momento observamos que, *após a divisão pela segunda derivada*, as seguintes regularizações coincidem:

1. Distância de Bregman obtida de $h(x) = x \log x$ e φ -divergência baseada em $\varphi(x) = x \log x - x + 1$;
2. Distância de Bregman obtida de $h(x) = -\log x$ e φ -divergência baseada em $\varphi(t) = -\log t + t - 1$;
3. Distância de Bregman obtida de $h(x) = 1/x$ e φ -divergência baseada em $\varphi(t) = 1/2(1/x + x - 2)$;
4. Distância de Bregman obtida de $h(x) = x - \sqrt{x}$ e φ -divergência baseada em $\varphi(t) = 2(\sqrt{t} - 1)^2$;

Figura B.1: Mudança de escala atuando na distância de Bregman (linha contínua) e na φ -divergência (linha tracejada) baseadas em $h(x) = x \log(e^x - 1)$, com mudança de escala e centro em 0.5.

Por outro lado, é claro, existem casos onde não é possível estabelecer esta correlação. Dada uma função de Bregman, h , para que os dois tipos de regularizações coincidam é preciso que:

$$\frac{h(x) - h(1) - h'(1)(x - 1)}{h''(1)} = \frac{\varphi(x)}{\varphi''(1)}.$$

Assim, temos uma maneira de determinar o único núcleo φ que pode gerar uma φ -divergência que coincida com a distância de Bregman gerada a partir de h .

Consideremos $h(x) = x \log(e^x - 1)$ e seja φ obtida de h da forma descrita acima. Podemos então usar a técnica de mudança de escala e estudar as regularizações coercivas baseadas nas respectivas distâncias de Bregman e φ -divergência. A Figura B.1 mostra seus gráficos com o centro fixado em 0,5. Notamos que a distância que domina muda de acordo com o lado com relação ao centro e, portanto, as regularizações não coincidem. Outros exemplo de funções h gerando distâncias generalizadas diferentes são $h(x) = \text{dilog}(e^x) + x \log(e^x - 1)$ (Figura B.2) e $h(x) = x^2 - \sqrt{x}$ (Figura B.3).

Figura B.2: Mudança de escala atuando na distância de Bregman (linha contínua) e na φ -divergência (linha tracejada) baseadas em $h(x) = \text{dlog}(e^x) + x \log(e^x - 1)$, com mudança de escala e centro em 0.5.

Figura B.3: Mudança de escala atuando na distância de Bregman (linha contínua) e na φ -divergência (linha tracejada) baseadas em $h(x) = x^2 - \sqrt{x}$, com mudança de escala e centro em 0.5.

Terminamos esta seção com um Teorema, gentilmente cedido pelo Prof. Iusem em uma comunicação pessoal, que caracteriza totalmente a intersecção das duas classes de regularizações.

Consideremos $[a, b] = \mathbb{R}_+$ e sejam φ e h funções obedecendo às Hipóteses 4.1.2 e 4.1.4 respectivamente. Supomos ainda que φ é continuamente duas vezes diferenciável no $\mathbb{R}_{++}$. Denotamos por d_φ a φ -divergência com mudança de escala obtida a partir de φ , dada por (4.4), e d_h a distância de Bregman com mudança de escala obtida a partir de h , dada por (4.2).

Teorema B.1.1. *Se para todo $x, y \in \mathbb{R}_{++}$*

$$d_\varphi(x, y) = d_h(x, y), \quad (\text{B.1})$$

então existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi''(x) = \varphi''(1)x^\gamma. \quad (\text{B.2})$$

Ainda, se definirmos $\delta \stackrel{\text{def}}{=} h''(1)/\varphi''(1)$, existem α e β tais que

$$h(x) = \delta\varphi(x) + \alpha x + \beta. \quad (\text{B.3})$$

Demonstração. Derivando (B.1) dos dois lados temos:

$$\frac{y}{\varphi''(1)} \varphi' \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{h'(x) - h'(y)}{h''(y)}.$$

Tomando $y = 1$ e $\alpha = h'(1)$, temos

$$h'(x) = \delta\varphi'(x) + \alpha.$$

Assim, (B.3) segue por integração.

Substituindo então (B.3) em (B.1) e derivando duas vezes com relação a x temos:

$$\frac{\varphi''(x/y)}{\varphi''(1)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi''(y)}.$$

Fazendo $s = x/y$, chegamos a

$$\varphi''(s)\varphi''(y) = \varphi''(sy)\varphi''(1). \quad (\text{B.4})$$

Definimos então

$$\begin{aligned} \psi(y) &\stackrel{\text{def}}{=} \log \varphi''(e^y) \\ \rho(y) &\stackrel{\text{def}}{=} \psi(y) - \psi(0). \end{aligned}$$

Usando (B.4) e as definições obtemos facilmente que

$$\rho(s+y) = \rho(s) + \rho(y). \quad (\text{B.5})$$

Como φ'' é contínua, ρ também o é e, portanto, (B.5) garante que ρ é linear. Assim, ψ é afim, ou seja, existem $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ tais que $\psi(y) = \mu + \nu y$. Invertendo a definição de ψ temos que $\varphi''(y) = e^\mu y^\nu$, com $\varphi''(1) = e^\mu$, ou seja (B.2). $\square$

Temos em nossas mãos ferramentas suficientes para apresentar as possíveis expressões explícitas para φ e h :

Corolário B.1.2. *Se para todo $x, y \in \mathbb{R}_{++}$*

$$d_\varphi(x, y) = d_h(x, y), \quad (\text{B.6})$$

então vale um dos seguintes casos:

1. *Existe $\gamma \in \mathbb{R}_{++}$ tal que*

$$\varphi(x) = \gamma(x \log x - x + 1)$$

e existem $\lambda, \eta, \theta \in \mathbb{R}$ tais que

$$h(x) = \lambda x \log x + \eta x + \theta.$$

2. *Existe $\gamma \in \mathbb{R}_{++}$ tal que*

$$\varphi(x) = \gamma(-\log x + x - 1)$$

e existem $\lambda, \eta, \theta \in \mathbb{R}$ tais que

$$h(x) = -\lambda \log x + \eta x + \theta.$$

3. *Existem $\gamma \in \mathbb{R}_{++}$ e $\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma \neq 0, 1$, tais que*

$$\varphi(x) = \frac{\gamma}{\sigma(\sigma-1)}(t^\sigma - \sigma t + \sigma - 1)$$

e existem $\lambda, \eta, \theta \in \mathbb{R}$ tais que

$$h(x) = \lambda x^\sigma + \eta x + \theta.$$

Demonstração. As fórmulas para φ vêm da integração de (B.2) para $\nu = -1$, $\nu = -2$ e $\nu \neq -1, -2$ respectivamente. As fórmulas de h seguem então de (B.3). $\square$

Tabelas dos Testes Numéricos

Seguem as tabelas dos testes numéricos descritos no Capítulo 6. Iniciamos pela tabela com todos os problemas de teste.

AIRPORT	ALLINITC	AVGASA	AVGASB	CANTILVR	CB2
CB3	CHACONN1	CHACONN2	CONGIGMZ	CRESC100	CRESC4
CRESC50	DEMYMALO	DIPIGRI	ELATTAR	EQC	EXPFITA
EXPFITB	GIGOMEZ1	GIGOMEZ2	GIGOMEZ3	GOFFIN	HAIFAM
HAIFAS	HALDMADS	HIMMELBI	HIMMELP2	HIMMELP3	HIMMELP4
HIMMELP5	HIMMELP6	HS10	HS100	HS100MOD	HS105
HS106	HS108	HS11	HS113	HS117	HS12
HS13	HS15	HS16	HS17	HS18	HS19
HS20	HS21	HS21MOD	HS22	HS23	HS24
HS268	HS29	HS30	HS31	HS33	HS34
HS35	HS35I	HS35MOD	HS36	HS37	HS43
HS44	HS44NEW	HS57	HS59	HS64	HS65
HS66	HS70	HS72	HS76	HS76I	HS86
HS88	HS89	HS90	HS91	HS92	HS93
HS95	HS96	HS97	HS98	HUBFIT	KIWCRESC
LHAIFAM	LOOTSMA	LSQFIT	MADSEN	MAKELA1	MAKELA2
MAKELA3	MAKELA4	MATRIX2	MIFFLIN1	MIFFLIN2	MINMAXBD
MINMAXRB	MISTAKE	OPTPRLOC	POLAK1	POLAK2	POLAK3
POLAK4	POLAK5	POLAK6	PRIMAL1	PRIMALC1	PRIMALC2
PRIMALC5	QC	QCNEW	ROSENMMX	S268	S365
SIMPLLPB	SIMPLLPB	SNAKE	SYNTHES1	TWOBARS	WOMFLET
ZECEVIC2	ZECEVIC3	ZECEVIC4	ZY2		

Tabela C.1: Conjunto de 130 problemas com restrições de desigualdades da coleção do CUTE/mastsif_small [10] que serviu de base para os testes.

C.1 Método Multiplicadores com Distâncias Coercivas (Algoritmo 4.3.5)

Entre testes da Tabela C.1, as versões exatas e inexatas do Algoritmo 4.3.5 resolveram os subconjuntos de problemas dados nas tabelas a seguir. Apresentamos também a tabela com os 81 problemas usados na comparação entre os métodos.

AIRPORT	AVGASA	AVGASB	CB2	CHACONN1	CONGIGMZ
DEMYMALO	DIPIGRI	EXPFITA	EXPFITB	GIGOMEZ1	GIGOMEZ2
HAIFAS	HIMMELBI	HIMMELP3	HIMMELP4	HIMMELP5	HIMMELP6
HS10	HS100	HS100MOD	HS105	HS108	HS11
HS113	HS117	HS12	HS15	HS16	HS17
HS18	HS20	HS21	HS21MOD	HS22	HS23
HS24	HS29	HS30	HS31	HS33	HS34
HS35	HS35I	HS35MOD	HS36	HS37	HS43
HS44	HS44NEW	HS57	HS59	HS65	HS66
HS70	HS72	HS76	HS76I	HS86	HS89
HS91	HS95	HS96	HS97	HS98	HUBFIT
KIWCRESC	LSQFIT	MADSEN	MAKELA1	MAKELA2	MAKELA3
MAKELA4	MATRIX2	MIFFLIN1	MIFFLIN2	MINMAXBD	MINMAXRB
MISTAKE	POLAK4	POLAK5	POLAK6	PRIMAL1	PRIMALC5
QC	ROSENMMX	SIMPLLPB	SIMPLLPB	SYNTHES1	TWOBARS
WOMFLET	ZECEVIC2	ZECEVIC3	ZECEVIC4	ZY2	

Tabela C.2: Problemas resolvidos pela versão exata do Algoritmo 4.3.5

AIRPORT	AVGASA	AVGASB	CB2	CHACONN1	CONGIGMZ
DEMYMALO	DIPIGRI	EXPFITA	EXPFITB	GIGOMEZ1	GIGOMEZ2
HAIFAS	HIMMELBI	HIMMELP2	HIMMELP3	HIMMELP4	HIMMELP5
HIMMELP6	HS10	HS100	HS100MOD	HS105	HS108
HS11	HS117	HS12	HS15	HS16	HS17
HS18	HS19	HS20	HS21	HS21MOD	HS22
HS23	HS24	HS29	HS30	HS31	HS33
HS34	HS35	HS35I	HS35MOD	HS36	HS37
HS43	HS44	HS44NEW	HS65	HS66	HS72
HS76	HS76I	HS86	HS91	HS95	HS96
HS97	HS98	HUBFIT	KIWCRESC	LSQFIT	MADSEN
MAKELA1	MAKELA2	MAKELA3	MAKELA4	MATRIX2	MIFFLIN1
MIFFLIN2	MINMAXBD	MINMAXRB	MISTAKE	POLAK4	POLAK5
POLAK6	PRIMAL1	PRIMALC5	QC	ROSENMMX	SIMPLLPB
SIMPLLPB	SYNTHES1	TWOBARS	WOMFLET	ZECEVIC2	ZECEVIC3
ZECEVIC4	ZY2				

Tabela C.3: Problemas resolvidos pela versão inexata do Algoritmo 4.3.5

AIRPORT	AVGASA	AVGASB	CB2	CHACONN1	CONGIGMZ
DEMYMALO	DIPIGRI	EXPFITA	EXPFITB	GIGOMEZ1	GIGOMEZ2
HAIFAS	HIMMELBI	HS10	HS100	HS100MOD	HS108
HS11	HS117	HS12	HS15	HS16	HS17
HS18	HS20	HS22	HS23	HS24	HS29
HS31	HS33	HS34	HS35	HS35I	HS35MOD
HS36	HS37	HS43	HS44	HS44NEW	HS65
HS66	HS72	HS76	HS76I	HS86	HS91
HS95	HS96	HS97	HS98	HUBFIT	KIWCRESC
LSQFIT	MADSEN	MAKELA1	MAKELA2	MAKELA3	MAKELA4
MATRIX2	MIFFLIN1	MIFFLIN2	MINMAXBD	MINMAXRB	MISTAKE
POLAK4	POLAK5	POLAK6	PRIMAL1	PRIMALC5	ROSENMMX
SIMPLLPB	SIMPLLPB	SYNTHES1	TWOBARS	WOMFLET	ZECEVIC2
ZECEVIC3	ZECEVIC4	ZY2			

Tabela C.4: Problemas usados no teste comparativo do Algoritmo 4.3.5

Apresentamos a seguir as tabelas com indicadores de desempenho das duas versões do Algoritmo 4.3.5. Estas tabelas trazem as seguintes informações:

- A primeira linha refere-se a versão exata do Algoritmo 4.3.5, a segunda a versão inexata.
- A coluna Tempo traz o tempo médio de resolução do problema em segundos. Esta média é obtida de 50 resoluções a partir dos pontos iniciais dados pelo CUTE.
- ∇f é o número de vezes que o algoritmo calculou o gradiente da função objetivo.
- ∇g , número de cálculos do gradiente das restrições.
- N. Iter. mede o número de sub-problemas que foram resolvidos para se obter soluções dentro da precisão estipulada.
- V. ótimo é o valor ótimo obtido.
- 75% Inex. Esta coluna possui 1 caso o critério proposto para aceitar uma solução aproximada dos sub-problemas tenha sido atingindo pelo menos 75% das vezes. 0 aparece caso contrário.

Problema	Tempo	∇f	∇g	N. Iter.	V. ótimo	75% Inex.
AIRPORT	1.37E+01	1702	1701	21	4.795E+04	0
AIRPORT	1.14E+01	1380	1379	21	4.795E+04	0
AVGASA	1.98E-01	238	123	8	-4.632E+00	0
AVGASA	1.49E-01	220	110	8	-4.632E+00	1
AVGASB	2.26E-01	254	154	8	-4.483E+00	0
AVGASB	1.61E-01	186	108	8	-4.483E+00	1
CB2	1.61E-02	70	58	5	1.952E+00	0
CB2	1.18E-02	63	51	5	1.952E+00	1
CHACONN1	1.86E-02	77	65	5	1.952E+00	0
CHACONN1	1.21E-02	61	50	5	1.952E+00	1
CONGIGMZ	9.77E-02	169	83	7	2.800E+01	0
CONGIGMZ	1.09E-01	238	110	7	2.800E+01	0
DEMYMALO	1.84E-02	61	48	2	-3.000E+00	0
DEMYMALO	1.72E-02	80	67	4	-3.000E+00	1
DIPIGRI	1.92E-01	163	76	4	6.806E+02	0
DIPIGRI	1.80E-01	198	94	4	6.806E+02	0
EXPFITA	9.62E-01	581	157	4	1.137E-03	0
EXPFITA	8.21E-01	495	141	4	1.137E-03	1
EXPFITB	2.22E+00	660	112	9	5.019E-03	0
EXPFITB	2.39E+00	721	114	10	5.019E-03	0
GIGOMEZ1	2.16E-02	64	50	2	-3.000E+00	0
GIGOMEZ1	1.69E-02	71	57	3	-3.000E+00	0
GIGOMEZ2	2.14E-02	80	67	5	1.952E+00	0
GIGOMEZ2	1.65E-02	72	60	5	1.952E+00	1
HAIFAS	1.54E-01	182	106	6	-4.500E-01	0
HAIFAS	9.13E-02	229	104	6	-4.500E-01	0
HIMMELBI	7.00E+00	1359	775	3	-1.736E+03	0
HIMMELBI	6.11E+00	1256	715	3	-1.736E+03	0
HS10	2.27E-02	101	101	5	-1.000E+00	0
HS10	1.45E-02	72	72	5	-1.000E+00	1
HS100	1.90E-01	194	92	4	6.806E+02	0
HS100	1.88E-01	205	97	4	6.806E+02	0
HS100MOD	1.72E-01	181	48	4	6.787E+02	0
HS100MOD	1.56E-01	138	37	4	6.787E+02	0
HS108	6.46E-02	62	54	2	-8.660E-01	0
HS108	6.47E-02	62	54	2	-8.660E-01	0
HS11	1.41E-02	108	108	7	-8.498E+00	0
HS11	8.75E-03	78	78	7	-8.498E+00	1
HS117	9.84E-01	516	475	4	3.235E+01	0
HS117	1.10E+00	490	449	4	3.235E+01	0
HS12	1.01E-02	75	68	4	-3.000E+01	0
HS12	7.45E-03	71	64	4	-3.000E+01	1

Tabela C.5: Comparação entre as versões exata e inexata do Algoritmo 4.3.5

Problema	Tempo	∇f	∇g	N. Iter.	V. ótimo	75% Inex
HS15	2.94E-02	164	97	17	3.065E+02	0
HS15	2.57E-02	121	76	17	3.065E+02	1
HS16	7.85E-03	27	23	2	2.500E-01	0
HS16	6.75E-03	26	22	2	2.500E-01	1
HS17	1.56E-01	1497	1496	106	1.000E+00	0
HS17	1.43E-01	1382	1381	106	1.000E+00	0
HS18	3.93E-02	80	34	2	5.000E+00	0
HS18	3.38E-02	78	33	2	5.000E+00	1
HS20	1.57E-02	110	57	12	3.820E+01	0
HS20	1.19E-02	92	50	12	3.820E+01	1
HS22	1.01E-02	69	68	7	1.000E+00	0
HS22	7.80E-03	62	61	7	1.000E+00	1
HS23	2.44E-02	129	82	10	2.000E+00	0
HS23	1.91E-02	116	74	10	2.000E+00	1
HS24	4.30E-03	35	23	3	0.000E+00	0
HS24	2.40E-03	27	18	3	0.000E+00	0
HS29	3.89E-02	113	104	4	-2.263E+01	0
HS29	2.80E-02	95	86	4	-2.263E+01	0
HS31	5.10E-03	37	37	4	6.000E+00	0
HS31	4.25E-03	37	37	5	6.000E+00	1
HS33	3.25E-03	29	16	4	-4.000E+00	0
HS33	2.65E-03	26	14	4	-4.000E+00	1
HS34	1.52E-02	62	62	5	-8.340E-01	0
HS34	1.21E-02	58	58	5	-8.340E-01	1
HS35	1.61E-02	122	122	5	1.111E-01	0
HS35	8.10E-03	56	56	5	1.111E-01	1
HS35I	1.61E-02	122	122	5	1.111E-01	0
HS35I	8.15E-03	56	56	5	1.111E-01	1
HS35MOD	9.95E-03	78	78	5	2.500E-01	0
HS35MOD	5.70E-03	51	51	6	2.500E-01	1
HS36	4.10E-03	68	67	3	-3.300E+03	0
HS36	2.85E-03	44	43	4	-3.300E+03	1
HS37	1.40E-03	15	11	6	0.000E+00	0
HS37	1.45E-03	15	11	6	0.000E+00	0
HS43	6.18E-02	232	163	11	-4.400E+01	0
HS43	4.55E-02	160	114	11	-4.400E+01	1
HS44	1.37E-02	67	31	6	-1.500E+01	0
HS44	9.85E-03	58	26	6	-1.500E+01	1
HS44NEW	1.46E-02	88	36	6	-1.500E+01	0
HS44NEW	9.05E-03	52	23	6	-1.500E+01	1
HS65	1.24E-02	70	62	3	9.535E-01	0
HS65	1.19E-02	69	61	3	9.535E-01	0

Tabela C.6: Comparação entre as versões exata e inexata do Algoritmo 4.3.5

Problema	Tempo	∇f	∇g	N. Iter.	V. ótimo	75% Inex
HS66	2.47E-02	91	91	6	5.182E-01	0
HS66	2.28E-02	90	90	6	5.182E-01	0
HS72	1.31E-01	468	468	33	7.277E+02	0
HS72	9.28E-02	364	364	33	7.277E+02	1
HS76	1.67E-02	74	39	5	-4.682E+00	0
HS76	1.05E-02	57	31	5	-4.682E+00	1
HS76I	1.68E-02	74	39	5	-4.682E+00	0
HS76I	1.04E-02	57	31	5	-4.682E+00	1
HS86	1.29E-01	313	124	11	-3.235E+01	0
HS86	8.53E-02	198	81	11	-3.235E+01	1
HS91	4.81E+00	339	339	30	1.363E+00	0
HS91	4.46E+00	317	317	30	1.363E+00	0
HS95	7.40E-03	79	12	2	1.562E-02	0
HS95	7.40E-03	82	12	4	1.562E-02	1
HS96	7.50E-03	79	12	2	1.562E-02	0
HS96	6.95E-03	66	10	3	1.562E-02	0
HS97	4.40E-02	72	31	3	4.071E+00	0
HS97	3.75E-02	70	30	3	4.071E+00	0
HS98	4.40E-02	72	31	3	4.071E+00	0
HS98	3.76E-02	70	30	3	4.071E+00	0
HUBFIT	6.85E-03	58	58	6	1.689E-02	0
HUBFIT	4.45E-03	44	44	5	1.689E-02	1
KIWCRESC	1.11E-02	56	55	5	1.069E-07	0
KIWCRESC	8.10E-03	52	51	5	1.063E-07	1
LSQFIT	1.31E-02	82	82	7	3.379E-02	0
LSQFIT	9.05E-03	71	71	7	3.379E-02	1
MADSEN	1.91E-02	63	41	4	6.164E-01	0
MADSEN	1.24E-02	54	34	4	6.164E-01	1
MAKELA1	9.75E-03	82	81	8	-1.414E+00	0
MAKELA1	7.10E-03	64	63	8	-1.414E+00	1
MAKELA2	3.59E-02	110	75	4	7.200E+00	0
MAKELA2	2.83E-02	107	73	4	7.200E+00	0
MAKELA3	2.14E-01	95	89	2	-4.339E-10	0
MAKELA3	1.57E-01	88	82	3	-1.349E-10	0
MAKELA4	3.39E-01	166	96	2	2.645E-10	0
MAKELA4	2.65E-01	188	74	17	-8.587E-11	1
MATRIX2	3.30E-02	46	46	2	1.297E-10	0
MATRIX2	1.33E-02	34	34	2	3.560E-21	0
MIFFLIN1	3.90E-03	23	23	2	-1.000E+00	0
MIFFLIN1	5.55E-03	37	37	4	-1.000E+00	1
MIFFLIN2	2.66E-02	80	77	5	-1.000E+00	0
MIFFLIN2	1.84E-02	77	74	5	-1.000E+00	1

Tabela C.7: Comparação entre as versões exata e inexata do Algoritmo 4.3.5

Problema	Tempo	∇f	∇g	N. Iter.	V. ótimo	75% Inex
MINMAXBD	5.03E-01	421	86	3	1.157E+02	0
MINMAXBD	4.83E-01	405	84	3	1.157E+02	0
MINMAXRB	9.52E-02	88	82	2	6.597E-10	0
MINMAXRB	8.42E-02	83	77	2	1.836E-07	1
MISTAKE	3.83E-01	216	142	5	-1.000E+00	0
MISTAKE	1.06E-01	128	78	5	-1.000E+00	1
POLAK4	1.29E-01	564	499	15	-8.548E-12	0
POLAK4	1.29E-01	564	499	15	-8.548E-12	0
POLAK5	9.25E-03	104	84	2	5.000E+01	0
POLAK5	9.05E-03	103	83	2	5.000E+01	0
POLAK6	1.65E-01	190	131	4	-4.400E+01	0
POLAK6	1.63E-01	190	132	8	-4.400E+01	0
PRIMAL1	2.18E+01	1487	1209	9	-3.501E-02	0
PRIMAL1	2.07E+01	1439	1152	9	-3.501E-02	0
PRIMALC5	3.99E+00	1738	797	39	-4.272E+02	0
PRIMALC5	4.08E+00	1678	753	25	-4.272E+02	0
ROSENNMX	1.38E-01	205	143	4	-4.400E+01	0
ROSENNMX	1.28E-01	169	116	4	-4.400E+01	0
SIMPLLPB	5.40E-03	38	31	4	1.000E+00	0
SIMPLLPB	3.95E-03	33	27	4	1.000E+00	1
SIMPLLPB	8.45E-03	43	34	3	1.100E+00	0
SIMPLLPB	6.80E-03	45	34	4	1.100E+00	1
SYNTHES1	5.80E-02	200	111	11	7.593E-01	0
SYNTHES1	4.70E-02	178	99	11	7.593E-01	0
TWOBARS	1.32E-02	80	50	8	1.509E+00	0
TWOBARS	8.40E-03	65	41	8	1.509E+00	1
WOMFLET	1.37E-01	140	122	3	-4.533E-09	0
WOMFLET	1.44E-01	140	122	3	-8.577E-09	0
ZECEVIC2	7.45E-03	37	28	3	-4.125E+00	0
ZECEVIC2	4.35E-03	31	23	3	-4.125E+00	1
ZECEVIC3	1.30E-02	108	59	7	9.731E+01	0
ZECEVIC3	7.75E-03	67	38	7	9.731E+01	1
ZECEVIC4	7.40E-03	50	28	5	7.558E+00	0
ZECEVIC4	5.60E-03	44	25	5	7.558E+00	1
ZY2	3.25E-03	29	16	4	2.000E+00	0
ZY2	2.80E-03	27	15	4	2.000E+00	1

Tabela C.8: Comparação entre as versões exata e inexata do Algoritmo 4.3.5

C.2 Método Híbrido Projeção-Lagrangiano Aumentado Proximal

Apresentamos a seguir as tabelas com os problemas resolvidos por cada uma das versões de nossa implementação do método híbrido. Como o conjunto inicial de 130 testes é o mesmo da seção anterior ele não será repetido.

AIRPORT	AVGASA	AVGASB	CANTILVR	CB2	CHACONN1
CONGIGMZ	DEMYMALO	DIPIGRI	GIGOMEZ1	GIGOMEZ2	HAIFAS
HALDMADS	HIMMELBI	HIMMELP2	HIMMELP3	HIMMELP4	HIMMELP5
HIMMELP6	HS10	HS100	HS100MOD	HS108	HS11
HS113	HS12	HS15	HS16	HS17	HS18
HS20	HS21	HS21MOD	HS22	HS23	HS24
HS29	HS30	HS31	HS33	HS34	HS35
HS35I	HS35MOD	HS36	HS37	HS43	HS44
HS44NEW	HS65	HS66	HS72	HS76	HS76I
HS86	HS88	HS90	HS91	HS92	HS95
HS96	HS97	HS98	HUBFIT	KIWCRESC	LSQFIT
MADSEN	MAKELA1	MAKELA2	MAKELA3	MAKELA4	MATRIX2
MIFFLIN1	MIFFLIN2	MINMAXBD	MINMAXRB	MISTAKE	POLAK5
POLAK6	PRIMAL1	QC	ROSENMMX	SIMPLLPB	SIMPLLPB
SYNTHE1	TWOBARS	WOMFLET	ZECEVIC2	ZECEVIC3	ZECEVIC4
ZY2					

Tabela C.9: Problemas resolvidos pela versão exata do algoritmo Híbrido

AVGASA	AVGASB	CANTILVR	CB2	CB3	CHACONN1
CHACONN2	CONGIGMZ	DEMYMALO	DIPIGRI	GIGOMEZ1	GIGOMEZ2
GIGOMEZ3	HAIFAS	HALDMADS	HIMMELP2	HIMMELP3	HIMMELP4
HIMMELP5	HIMMELP6	HS10	HS100	HS100MOD	HS108
HS11	HS113	HS117	HS12	HS15	HS16
HS17	HS18	HS19	HS20	HS21	HS21MOD
HS22	HS23	HS24	HS29	HS30	HS31
HS33	HS34	HS35	HS35I	HS35MOD	HS36
HS37	HS43	HS44	HS44NEW	HS65	HS66
HS72	HS76	HS76I	HS86	HS88	HS89
HS90	HS91	HS92	HS93	HS97	HS98
HUBFIT	KIWCRESC	LSQFIT	MADSEN	MAKELA1	MAKELA2
MATRIX2	MIFFLIN1	MIFFLIN2	MINMAXRB	MISTAKE	POLAK5
POLAK6	PRIMAL1	QC	ROSENMMX	SIMPLLPB	SIMPLLPB
SYNTHE1	TWOBARS	WOMFLET	ZECEVIC2	ZECEVIC3	ZECEVIC4
ZY2					

Tabela C.10: Problemas resolvidos pela versão inexata do algoritmo Híbrido

AVGASA	AVGASB	CANTILVR	CB2	CHACONN1	CONGIGMZ
DEMYMALO	DIPIGRI	GIGOMEZ1	GIGOMEZ2	HAIFAS	HALDMADS
HIMMELP5	HIMMELP6	HS10	HS100	HS100MOD	HS108
HS11	HS113	HS12	HS15	HS16	HS17
HS18	HS20	HS22	HS23	HS24	HS29
HS31	HS33	HS34	HS35	HS35I	HS35MOD
HS36	HS43	HS44	HS44NEW	HS65	HS66
HS72	HS76	HS76I	HS86	HS88	HS90
HS91	HS92	HS97	HS98	HUBFIT	KIWCRESC
LSQFIT	MADSEN	MAKELA1	MAKELA2	MATRIX2	MIFFLIN1
MIFFLIN2	MINMAXRB	MISTAKE	POLAK5	POLAK6	PRIMAL1
ROSENMMX	SIMPLLP	SIMPLLPB	SYNTHES1	TWOBARS	WOMFLET
ZECEVIC2	ZECEVIC3	ZECEVIC4	ZY2		

Tabela C.11: Problemas usados no teste comparativo do algoritmo Híbrido

Apresentamos a seguir as tabelas com indicadores de desempenho das duas versões do método híbrido. Mais uma vez, estas tabelas trazem as seguintes informações:

- A primeira linha refere-se a versão exata do método híbrido projeção-lagrangiano aumentado proximal, a segunda a versão inexata.
- A coluna Tempo traz o tempo médio de resolução do problema em segundos. Esta média é obtida de 50 resoluções a partir dos pontos iniciais dados pelo CUTE.
- ∇f é o número de vezes que o algoritmo calculou o gradiente da função objetivo.
- ∇g , número de cálculos do gradiente das restrições.
- N. Iter. mede o número de sub-problemas que foram resolvidos para se obter soluções dentro da precisão estipulada.
- V. ótimo é o valor ótimo obtido.
- 75% Inex. Esta coluna possui 1 caso o critério proposto para aceitar uma solução aproximada dos sub-problemas tenha sido atingindo pelo menos 75% das vezes. 0 aparece caso contrário.

Problema	Tempo	∇f	∇g	N. Iter.	V. ótimo	75% Inex
AVGASA	2.25E-01	285	122	8	-4.632E+00	0
AVGASA	3.23E-01	283	110	8	-4.632E+00	0
AVGASB	1.69E-01	213	97	8	-4.483E+00	0
AVGASB	3.68E-01	383	159	8	-4.483E+00	0
CANTILVR	5.02E-02	244	225	19	1.340E+00	0
CANTILVR	1.72E-02	184	165	20	1.340E+00	1
CB2	1.80E-02	108	75	8	1.952E+00	0
CB2	1.48E-02	106	71	8	1.952E+00	1
CHACONN1	1.50E-02	128	90	10	1.952E+00	0
CHACONN1	1.16E-02	104	73	10	1.952E+00	1
CONGIGMZ	1.51E-01	384	174	12	2.800E+01	0
CONGIGMZ	3.23E-01	1065	460	16	2.800E+01	0
DEMYMALO	2.92E-02	157	135	7	-3.000E+00	0
DEMYMALO	2.04E-02	136	101	8	-3.000E+00	1
DIPIGRI	2.43E-01	264	124	5	6.806E+02	0
DIPIGRI	1.57E-01	179	74	4	6.806E+02	1
GIGOMEZ1	5.40E-02	193	135	7	-3.000E+00	0
GIGOMEZ1	2.76E-02	169	103	8	-3.000E+00	1
GIGOMEZ2	2.44E-02	109	70	8	1.952E+00	0
GIGOMEZ2	1.20E-02	94	60	7	1.952E+00	1
HAIFAS	1.74E-01	347	154	8	-4.500E-01	0
HAIFAS	2.30E-01	444	178	8	-4.500E-01	1
HALDMADS	8.10E-01	790	326	17	1.222E-04	0
HALDMADS	1.15E+00	998	326	17	1.222E-04	1
HIMMELP5	4.66E-02	263	57	7	-5.901E+01	0
HIMMELP5	1.86E-02	209	35	8	-5.901E+01	1
HIMMELP6	4.76E-02	263	34	7	-5.901E+01	0
HIMMELP6	3.54E-02	178	19	8	-5.901E+01	1
HS10	1.90E-02	129	125	9	-1.000E+00	0
HS10	9.00E-03	102	100	9	-1.000E+00	1
HS100	2.40E-01	225	104	5	6.806E+02	0
HS100	2.94E-01	269	119	5	6.806E+02	1
HS100MOD	2.06E-01	214	52	5	6.787E+02	0
HS100MOD	2.88E-01	236	57	5	6.787E+02	1
HS108	1.42E-01	186	92	7	-8.660E-01	0
HS108	2.87E-01	235	128	7	-8.660E-01	0
HS11	8.40E-03	77	74	7	-8.498E+00	0
HS11	4.80E-03	70	66	7	-8.498E+00	1
HS113	5.31E-01	480	331	6	2.431E+01	0
HS113	5.69E-01	526	352	8	2.431E+01	0
HS12	1.58E-02	153	136	5	-3.000E+01	0
HS12	8.60E-03	89	75	5	-3.000E+01	1

Tabela C.12: Comparação entre as versões exata e inexata do algoritmo Híbrido

Problema	Tempo	∇f	∇g	N. Iter.	V. ótimo	75% Inex
HS15	4.14E-02	122	68	17	3.065E+02	0
HS15	4.44E-02	284	144	17	3.065E+02	0
HS16	1.76E-02	53	22	5	2.500E-01	0
HS16	9.60E-03	73	19	6	2.500E-01	0
HS17	3.22E-02	129	114	10	1.000E+00	0
HS17	1.38E-02	114	99	10	1.000E+00	1
HS18	7.56E-02	1024	508	96	5.000E+00	0
HS18	6.62E-02	1087	527	99	5.000E+00	1
HS20	1.78E-02	158	57	12	3.820E+01	0
HS20	1.36E-02	137	69	12	4.020E+01	0
HS22	6.00E-03	64	58	7	1.000E+00	0
HS22	3.60E-03	57	51	7	1.000E+00	1
HS23	1.76E-02	138	60	9	2.000E+00	0
HS23	1.00E-02	123	52	9	2.000E+00	1
HS24	9.20E-03	93	46	9	-1.000E+00	0
HS24	5.20E-03	83	42	9	-1.000E+00	1
HS29	4.14E-02	166	148	6	-2.263E+01	0
HS29	2.90E-02	141	118	6	-2.263E+01	1
HS31	7.40E-03	72	69	8	6.000E+00	0
HS31	5.40E-03	72	69	8	6.000E+00	0
HS33	4.40E-03	58	23	7	-4.000E+00	0
HS33	4.60E-03	62	25	7	-4.000E+00	0
HS34	7.22E-02	439	436	28	-8.340E-01	0
HS34	1.04E-01	654	567	28	-8.340E-01	1
HS35	1.48E-02	128	125	8	1.111E-01	0
HS35	6.20E-03	75	72	8	1.111E-01	1
HS35I	1.46E-02	128	125	8	1.111E-01	0
HS35I	6.20E-03	75	72	8	1.111E-01	1
HS35MOD	1.08E-02	116	42	13	2.500E-01	0
HS35MOD	1.06E-02	114	47	13	2.500E-01	0
HS36	1.80E-03	33	30	8	-3.300E+03	0
HS36	5.40E-03	75	67	8	-3.300E+03	0
HS43	5.20E-02	185	118	8	-4.400E+01	0
HS43	3.28E-02	129	83	8	-4.400E+01	1
HS44	1.26E-02	83	23	7	-1.500E+01	0
HS44	1.28E-02	87	24	7	-1.500E+01	0
HS44NEW	1.24E-02	93	27	7	-1.500E+01	0
HS44NEW	3.74E-02	195	50	7	-1.500E+01	0
HS65	3.78E-02	190	136	10	9.535E-01	0
HS65	2.94E-02	182	134	10	9.535E-01	1
HS66	7.24E-02	335	333	23	5.182E-01	0
HS66	4.00E-02	294	289	23	5.182E-01	1

Tabela C.13: Comparação entre as versões exata e inexata do algoritmo Híbrido

Problema	Tempo	∇f	∇g	N. Iter.	V. ótimo	75% Inex
HS72	8.72E-02	426	426	30	7.277E+02	0
HS72	7.56E-02	365	361	30	7.277E+02	1
HS76	1.38E-02	91	26	8	-4.682E+00	0
HS76	6.54E-02	192	50	8	-4.682E+00	0
HS76I	1.40E-02	91	26	8	-4.682E+00	0
HS76I	6.56E-02	192	50	8	-4.682E+00	0
HS86	9.80E-02	230	75	10	-3.235E+01	0
HS86	7.90E-02	198	67	10	-3.235E+01	1
HS88	1.31E+00	360	360	31	1.363E+00	0
HS88	1.79E+00	485	485	34	1.363E+00	0
HS90	2.82E+00	319	319	31	1.363E+00	0
HS90	8.00E+00	893	887	34	1.363E+00	0
HS91	5.67E+00	444	444	31	1.363E+00	0
HS91	1.76E+01	1348	1346	39	1.363E+00	0
HS92	6.05E+00	358	358	31	1.363E+00	0
HS92	1.53E+01	894	885	34	1.363E+00	0
HS97	1.66E-02	67	15	3	4.071E+00	0
HS97	4.06E-02	115	27	3	4.071E+00	0
HS98	1.68E-02	67	15	3	4.071E+00	0
HS98	4.04E-02	115	27	3	4.071E+00	0
HUBFIT	1.18E-02	101	70	10	1.689E-02	0
HUBFIT	6.60E-03	87	64	10	1.689E-02	1
KIWCRESC	2.46E-02	128	121	8	-1.387E-07	0
KIWCRESC	1.02E-02	109	100	9	-4.891E-08	1
LSQFIT	9.00E-03	91	67	10	3.379E-02	0
LSQFIT	5.40E-03	83	66	10	3.379E-02	1
MADSEN	3.02E-02	123	43	7	6.164E-01	0
MADSEN	1.36E-02	98	33	7	6.164E-01	1
MAKELA1	8.00E-03	69	57	7	-1.414E+00	0
MAKELA1	3.40E-03	55	44	7	-1.414E+00	1
MAKELA2	3.68E-02	155	100	10	7.200E+00	0
MAKELA2	3.32E-02	177	111	10	7.200E+00	1
MATRIX2	1.16E-02	75	37	8	6.454E-15	0
MATRIX2	1.62E-02	96	48	8	8.594E-14	0
MIFFLIN1	1.22E-02	95	90	8	-1.000E+00	0
MIFFLIN1	5.60E-03	76	72	8	-1.000E+00	1
MIFFLIN2	2.96E-02	147	124	8	-1.000E+00	0
MIFFLIN2	3.04E-02	175	148	8	-1.000E+00	1
MINMAXRB	1.39E-01	310	207	9	-6.011E-12	0
MINMAXRB	1.14E-01	267	192	9	4.449E-09	1
MISTAKE	1.78E-01	214	68	7	-1.000E+00	0
MISTAKE	4.82E-02	134	42	7	-1.000E+00	1

Tabela C.14: Comparação entre as versões exata e inexata do algoritmo Híbrido

Problema	Tempo	∇f	∇g	N. Iter.	V. ótimo	75% Inex
POLAK5	7.62E-02	224	205	10	5.000E+01	0
POLAK5	4.08E-02	322	220	10	5.000E+01	1
POLAK6	5.16E-01	753	233	11	-4.400E+01	0
POLAK6	3.58E-01	741	269	15	-4.400E+01	1
PRIMAL1	1.11E+01	966	708	6	-3.501E-02	0
PRIMAL1	7.30E+00	622	453	6	-3.501E-02	1
ROSENMMX	2.25E-01	601	197	12	-4.400E+01	0
ROSENMMX	3.89E-01	765	274	15	-4.400E+01	1
SIMPLLPB	2.40E-03	41	24	8	1.000E+00	0
SIMPLLPB	3.20E-03	57	34	9	1.000E+00	0
SIMPLLPB	6.00E-03	69	45	9	1.100E+00	0
SIMPLLPB	6.40E-03	82	53	9	1.100E+00	1
SYNTHES1	4.78E-02	380	189	10	7.593E-01	0
SYNTHES1	1.15E-01	292	125	10	7.593E-01	0
TWOBARS	1.02E-02	118	62	8	1.509E+00	0
TWOBARS	4.60E-03	63	32	8	1.509E+00	1
WOMFLET	2.69E-01	452	372	14	1.212E-11	0
WOMFLET	2.46E-02	162	53	10	6.050E+00	1
ZECEVIC2	9.00E-03	80	40	8	-4.125E+00	0
ZECEVIC2	4.20E-03	64	32	8	-4.125E+00	1
ZECEVIC3	7.80E-03	74	36	7	9.731E+01	0
ZECEVIC3	4.60E-03	66	32	7	9.731E+01	1
ZECEVIC4	6.20E-03	108	53	6	7.558E+00	0
ZECEVIC4	3.60E-03	58	27	7	7.558E+00	1
ZY2	4.60E-03	57	22	7	2.000E+00	0
ZY2	8.80E-03	90	38	7	2.000E+00	0

Tabela C.15: Comparação entre as versões exata e inexata do algoritmo Híbrido

Referências Bibliográficas

- [1] A. Auslender, R. Cominetti, and M. Haddou. Asymptotic analysis for penalty and barrier methods in convex and linear programming. *Mathematics of Operations Research*, 22(1):43–62, 1997.
- [2] A. Auslender and M. Haddou. An interior-proximal methods for convex linearly constrained problems and its extension to variational problems. *Mathematical Programming*, 71:77–100, 1995.
- [3] A. Auslender and M. Teboulle. Lagrangian duality and related multiplier methods for variational inequality problems. *SIAM J. Optim.*, 10(4):1097–1115, 2000.
- [4] A. Auslender, M. Teboulle, and S. Ben-Tiba. Interior proximal and multiplier methods based on second order homogeneous kernels. *Mathematics of Operations Research*, 24:645–668, 1999.
- [5] A. Auslender, M. Teboulle, and S. Ben-Tiba. A logarithmic-quadratic proximal method for variational inequalities. *Computational Optimization and Applications*, 12:31–40, 1999.
- [6] A. BenTal and M. Zibulevsky. Penalty/barrier multiplier methods for convex programming problems. *SIAM Journal on Optimization*, 7(2):347–366, 1997.
- [7] D. Bertsekas. *Nonlinear Programming*. Athena Scientific, 1995.
- [8] D. Bertsekas. *Constrained Optimization and Lagrange Multipliers*. Athena Scientific, 1996.
- [9] J. R. Birge, L. Qi, and Z. Wei. A general approach to convergence properties of some methods for nonsmooth convex optimization. *Applied Mathematics and Optimization*, 38:141–158, 1998.

- [10] I. Bongartz, A. R. Conn, N. Gold, and Ph.L. Toint. CUTE: Constrained and Unconstrained Testing Environment. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 21:121–160, 1995.
- [11] L Bregman. The relaxation method of finding the common points of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 7:200–217, 1967.
- [12] H. Brézis and A. Haraux. Image d’une somme d’opérateurs monotones et applications. *Israel Journal of Mathematics*, 23(2):165–186, 1976.
- [13] R. Burachik and B. Svaiter. ϵ -enlargements of maximal monotone operators in Banach spaces. *Set valued Analysis*, 7(2):117–132, 1999.
- [14] R. S. Burachik. *Generalized Proximal Point Methods for the Variational Inequality Problem*. PhD thesis, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, 1995.
- [15] R. H. Byrd, P. Lu, J. Nocedal, and C. Y. Zhu. A limited memory algorithm for bound constrained optimization. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 16(5):1190–1208, 1995.
- [16] Y. Censor and J Zenios. The proximal minimization algorithms with D-functions. *Journal of Optimization: Theory and Applications*, 73:451–464, 1992.
- [17] Chunhui Chen and O. L. Mangasarian. A class of smoothing functions for nonlinear and mixed complementarity problems. *Comput. Optim. Appl.*, 5(2):97–138, 1996.
- [18] G. Chen and M. Teboulle. A convergence analysis of proximal-like minimization algorithms using Bregman functions. *SIAM Journal on Optimization*, 3:538–543, 1993.
- [19] J. Eckstein. Nonlinear proximal point algorithms using Bregman functions, with applications to convex programming. *Mathematics of Operations Research*, 18:202–226, 1993.
- [20] J. Eckstein. Approximate iterations in Bregman-function-based proximal algorithms. *Mathematical Programming*, 83:113–124, 1998.
- [21] J. Gauvin. A necessary and sufficient condition to have bounded multipliers in nonconvex programming. *Mathematical Programming*, 12:136–138, 1977.
- [22] M.R. Hestenes. Multiplier and gradient methods. *Journal on Optimization: Theory and Applications*, 4:303–320, 1969.

- [23] J.-B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal. *Convex analysis and minimization algorithms. I, Fundamentals*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [24] J.-B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal. *Convex analysis and minimization algorithms. II, Advanced theory and bundle methods*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [25] C. Humes and P. Silva. Strict convex regularizations, proximal point and augmented lagrangians. *RAIRO Operations Research*, 34(3):283–303, 2000.
- [26] C. Humes, P. Silva, and B. F. Svaiter. An inexact hybrid projection-proximal augmented lagrangian algorithm. In *Proceedings of the Thirty Sixth Annual Allerton Conference on Communication, Control and Computing*, pages 450–459, 1998.
- [27] A. Iusem. *Métodos de Ponto Proximal em Otimização*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - CNPq, 1995. Livro do 20º Colóquio Brasileiro de Matemática.
- [28] A. Iusem, M. Teboulle, and B. Svaiter. Entropy-like proximal methods in convex programming. *Mathematics of Operations Research*, 19(4):790–814, Novembro 1994.
- [29] O. L. Mangasarian. *Nonlinear Programming*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1969.
- [30] V.H. Nguyen, J.J. Strodiot, and R. Mifflin. Conditions to have bounded multipliers in locally Lipschitz programming. *Mathematical Programming*, 16(3):100–106, 1978.
- [31] M. Pappalardo. Error bounds for generalized Lagrange multipliers in locally Lipschitz programming. *Journal on Optimization: Theory and Applications*, 73(1):205–210, 1992.
- [32] T. Pennanen. Multiplier methods for monotone inclusions. comunicação pessoal, 1998.
- [33] L. Polak. *Optimization: Algorithms and Consistent Approximations*. Springer Verlag, 1997.
- [34] M.J.D. Powell. *Optimization*, chapter A method for nonlinear constraints in minimization problems, pages 283–298. Academic Press, New York, 1969. Edited by Fletcher, R.
- [35] Burachick. R. and A. Iusem. A generalized proximal point algorithm for the variational inequality problem in a Hilbert space. *SIAM Journal on Optimization*, 8(1):197–216, 1998.

- [36] R. T. Rockafellar. Extension of Fenchel's duality theorem for convex functions. *Duke Mathematical Journal*, 33:81–89, 1966.
- [37] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton University Press, 1970.
- [38] R. T. Rockafellar. *Conjugate Duality and Optimization*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1974.
- [39] R. T. Rockafellar. Augmented lagrangians and applications of the proximal point algorithm in convex programming. *Mathematics of Operations Research*, 1:97–116, 1976.
- [40] R. T. Rockafellar. Monotone operators and the proximal point algorithm. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 14:887–898, Agosto 1976.
- [41] R. T. Rockafellar and R. J.-B. Wets. *Variational analysis*, volume 317 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [42] P. Silva, J. Eckstein, and C. Humes. Rescaling and stepsize selection in proximal methods using generalized distances. Technical Report RRR 35-99, Rutgers Center for Operations Research, 1999. Submetido.
- [43] M. Solodov and B. Svaiter. A hybrid projection-proximal point algorithm. *Journal of Convex Analysis*, 6(1), 1999.
- [44] M. Solodov and B. Svaiter. An inexact hybrid generalized proximal point algorithm and some new results in the theory of Bregman functions. *Mathematics of Operations Research*, 25(2):214–230, 2000.
- [45] M. Teboulle. Entropic proximal methods with applications to nonlinear programming. *Mathematics of Operations Research*, 17:670–690, 1992.