BIFURCAÇÃO DE HOPF E UNICIDADE DE
ÓRBITAS PERIÓDICAS EM MODELOS
PARA DOENÇAS MICRO E
MACROPARASÍTICAS

Jocirei Diás Ferreira

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA APLICADA

Orientadora : Prof. Dr. Élvia Mureb Sallum

Área de Concentração : Equações Diferenciais/Sistemas Dinâmicos

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq.

São Paulo, 16 de agosto de 2000

Bifurcação de Hopf e Unicidade de Órbitas Periódicas em Modelos para Doenças Micro e Macroparasíticas

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Jocirei Dias Ferreira e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 16 de Agosto de 2000.

Banca examinadora:

- Prof. Dra. Élvia Mureb Sallum (orientadora) - (IME-USP)
- Prof. Dr. Sergio Muniz Oliva Filho - (IME-USP)
- Prof. Dr. Jair Lício Ferreira dos Santos - (FSP-USP)

A meus pais
e irmãos.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a DEUS por tudo, pois sem ele, não chegaria até aqui.

Em especial, a minha orientadora Prof. Dr. Élvia Mureb Sallum, pela ajuda, paciência, dedicação e admirável conhecimento e experiência demonstrados ao orientar-me, desde a sugestão do trabalho até sua finalização.

À professora Elza Furtado Gomide, pelo acompanhamento e grande ajuda que me proporcionou durante esta caminhada.

Ao professor Jorge Sotomayor, pelas valiosas dicas de seminários durante a realização deste trabalho.

Aos professores Oswaldo, Mary Lilian, Albo, Luiz Augusto, Sônia, Sérgio Oliva, Stanley, Elena, Saulo, Eloi, Roseli, Panazzolo, Iracema, Carmen Cardassi (in memoriam), a todos os professores e funcionários do IME que contribuíram, direta ou indiretamente, em minha formação.

A todos os professores e funcionários da Universidade Federal de Mato Grosso/Instituto de Ciências e Letras do Médio Araguaia - ICLMA, onde iniciei meus estudos em Matemática. Ao professor Paulo Cesar Venere, pelo incentivo no caminho de pesquisa; aos professores Antônio Olímpio, José Pessoa, Hidelberto, por todos os incentivos e conselhos; aos professores Emerson (in memoriam), Admur, Livia, Wanderléia, Aurita, Adarci, Alberto, Erice e a todos aqueles que contribuíram, direta ou indiretamente, em minha formação.

A meus pais José e Jacira, a meus irmãos Jânderson, José Filho e Jaqueline, pela força e apoio. Com poucas frases não é possível expressar minha gratidão a eles.

À Gladys e a nosso filho Paulo Jocirei (PJ), pelo apoio, pela paciência que tiveram esperando-me terminar o mestrado, e pela sua ajuda no conteúdo de probabilidade.

A meus avôs, Raimundo Dias Moraes e Rosa Ribeiro Dias (in memoriam); a minhas avós, Carminha Dias Moraes e Rosa Ferreira Dias.

Aos meus tios e tias, Iraci, Maguinólia, Matilde, Lourdes, Jaci, Jonas (Eigue), Raimundo (Dico), Lourivan, Angelina, Vicente, Firmino, Deni, Elias e a todos os outros pelos conselhos. Aproveito e agradeço, também, à minha madrinha Maria de Lourdes, que me acompanha desde criança.

Aos primos, que não citarei todos os nomes pois são muitos, cito alguns: Kleyber, Kênia, Maila, Alex, Charles, Whashington, Jordânia e irmão, Alba Valéria, Junior, Sérgio e irmão, o meu agradecimento pelo companheirismo de todos.

A meu amigo Raimundo D. Cabral (Raimundinho), pela amizade sincera, pelos conselhos e

por toda ajuda.

Um agradecimento especial, a meus amigos e colegas de estudo que conviveram comigo, substituindo minha família esse tempo que estive aqui: Ronaldo, Emivan, Ramiro, Jefferson, Edna, Adriana, Maria do Carmo, Luciana, Brisset, Zavaleta, dona Maria, Marina e seu José.

Aos colegas do IME, Santos, Gaspar, Luis Kowada, Mário Castro, Xyoby, José Antônio, Walter, Jairo, José Domingo, Mário Salles, Bárbara, Irene, Hernan, Raul, Guzman, Cecília, Antonio Chávez, Calixto, Édson, Sídnei, Samuel, German, Daniel, Nelson, Jorge, Clézio, Flávio, Julio, David, Gláucio, Sandra, Delhi, Nestor, Rodrigo, Kátia Alfaro, Rudimar, Olga, Messias, Barreto, Luiz Fernando, Plácido, Sebastião, pela amizade e receptividade de todos. Desculpe-me se esqueci alguém.

Aos amigos de São Felix do Araguaia e aos professores da Escola Estadual de I e II Graus Governador José Frangelhi, onde concluí meus estudos primários e secundários. Aproveito para agradecer também, ao pessoal da Escola Senador Filinto Muller em Barra do Garças, por todo incentivo.

Resumo

Neste trabalho mostramos a ocorrência de bifurcação de Hopf em dois modelos epidemiológicos, que descrevem doenças micro e macro parasíticas, cada um representado por um sistema de equações diferenciais ordinárias no plano, dados por:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \beta \frac{S^2 + 2\xi IS + \xi^2 IS}{I+S} - \mu S - \frac{\kappa I}{c+S+I} S \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\kappa I}{c+S+I} S - \mu I - \alpha I \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = -\mu N - \alpha P + \beta N \left(\frac{kN}{kN+P(1-\xi)} \right)^k \\ \frac{dP}{dt} = -(\mu + \sigma)P + \frac{\kappa PN}{c+N} - \alpha N \left(\frac{P}{N} + \left(\frac{P}{N} \right)^2 \left(\frac{k+1}{k} \right) \right). \end{cases} \quad (2)$$

Além disso, estudamos a existência e unicidade de órbitas periódicas, via teoria de Liénard. Para finalizar, interpretamos os resultados obtidos, para descrever o comportamento da doença.

Abstract

We show here the occurrence of Hopf bifurcation in two epidemiological models, describing micro and macro parasitical diseases, each model represented by a system of ordinary differential equations in the plane, given by:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \beta \frac{S^2 + 2\xi IS + \xi^2 IS}{I + S} - \mu S - \frac{\kappa I}{c + S + I} S \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\kappa I}{c + S + I} S - \mu I - \alpha I \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = -\mu N - \alpha P + \beta N \left(\frac{kN}{kN + P(1-\xi)} \right)^k \\ \frac{dP}{dt} = -(\mu + \sigma)P + \frac{\kappa PN}{c + N} - \alpha N \left(\frac{P}{N} + \left(\frac{P}{N} \right)^2 \left(\frac{k+1}{k} \right) \right). \end{cases} \quad (4)$$

Furthermore, we study the existence and unicity of periodic orbits, via Liénard's theory. Finally, we interpret the results we obtained, to describe the behavior of the diseases.

Sumário

1	Introdução	1
2	Construção dos modelos	5
2.1	Preliminares	5
2.2	Modelo I: Doenças microparasíticas	6
2.3	Modelo II: Doenças macroparasíticas	8
2.3.1	Imigração e morte de parasitas no hospede	9
2.3.2	Obtenção de φ	11
2.4	Transformação e unificação dos modelos I e II	12
3	Estudo dos pontos críticos e diagramas de bifurcação	20
3.1	Preliminares para o sistema (2.19)	20
3.1.1	Esboço do gráfico de g e os parâmetros ξ_t , κ_t e κ_1	20
3.1.2	Relação entre $\bar{y}(\xi)$ e $y_m(\xi)$. O parâmetro ξ_p	28
3.1.3	O parâmetro κ_2	29
3.1.4	Posição relativa entre $\bar{y}$ e as raízes y^* de g	31
3.2	Preliminares para o sistema (2.21)	38
3.2.1	Esboço do gráfico de g e os parâmetros ξ_t , κ_t e κ_1	38
3.2.2	Relação entre $\bar{y}(\xi)$ e $y_m(\xi)$. O parâmetro ξ_p	42
3.2.3	O parâmetro κ_2	45
3.2.4	Posição relativa entre $\bar{y}$ e as raízes y^* de g	46
3.3	Pontos críticos	51
3.4	Algumas simulações para obtenção de retratos de fase	61
3.5	Diagramas de bifurcação	64

4	Bifurcação de Hopf e unicidade de órbitas periódicas	72
4.1	Sobre órbitas periódicas. Bifurcação de Hopf	72
4.2	Unicidade de órbitas periódicas	84
4.2.1	Transformação em sistemas generalizados de Liénard	84
4.2.2	Resultados sobre unicidade de órbitas periódicas	87
5	Conclusões	96
5.1	Comportamento das soluções para os modelos I e II	96
A	Alguns conceitos de probabilidade	111
A.1	Motivação	111
A.2	Utilizando a função geradora de probabilidades e de momentos	115
	Referências Bibliográficas	118

Capítulo 1

Introdução

O principal objetivo deste trabalho é estudar a dinâmica de dois modelos epidemiológicos, propostos por Diekmann e Kretzschman [5]. Serão provados dois resultados principais: a ocorrência de bifurcação de Hopf para ambos os modelos e, utilizando um teorema para sistemas de Liénard [20], a unicidade de órbitas periódicas.

O primeiro modelo aqui estudado, está relacionado com a dinâmica de doenças macroparasíticas do tipo S-I, i.e, a população é dividida em duas classes, **I-infectados** e **S-suscetíveis**, e é representado por um sistema de equações diferenciais ordinárias no plano:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \beta \frac{S^2 + 2\xi IS + \xi^2 I^2}{I + S} - \mu S - \frac{\kappa I}{c + S + I} S \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\kappa I}{c + S + I} S - \mu I - \alpha I \end{cases} \quad (1.1)$$

onde cada parâmetro tem significados biológicos específicos, relacionados abaixo:

- β : taxa de natalidade natural per capita
- μ : taxa de mortalidade natural per capita
- α : taxa adicional de mortalidade causada pela doença
- ξ : parâmetro que descreve a redução da fertilidade de indivíduos infectados devido à doença ($0 \leq \xi \leq 1$)
- κ : taxa de contato entre infectados e suscetíveis
- φ : taxa de infecção

com a seguinte condição:

$$\mu < \beta < \alpha + \mu.$$

O segundo modelo, é um sistema hospedeiro-parasita, onde a população hospedeira é denotada por N e a população parasita por P . Este modelo é representado pelo sistema de equações diferenciais no plano:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = -\mu N - \alpha P + \beta N \left(\frac{kN}{kN + P(1-\xi)} \right)^k \\ \frac{dP}{dt} = -(\mu + \sigma)P + \frac{\kappa PN}{c+N} - \alpha N \left(\frac{P}{N} + \left(\frac{P}{N} \right)^2 \left(\frac{k+1}{k} \right) \right), \end{cases} \quad (1.2)$$

onde cada parâmetro tem significado biológico específico relacionados abaixo:

- β : taxa de natalidade natural per capita
- μ : taxa de mortalidade natural per capta (com $\mu < \beta$)
- α : taxa adicional de mortalidade causada por um parasita
- ξ : parâmetro que descreve a redução da fertilidade de indivíduos infectados devido a um parasita ($0 \leq \xi \leq 1$)
- κ : taxa de contato entre hospedeiros e estágios contagiosos dos parasitas; os estágios contagiosos, resultam da produção de ovos, cistos, esporos ou larvas.
- φ : taxa de infecção
- σ : taxa de morte de parasitas
- k : parâmetro clumping.

O segundo capítulo, contém uma explanação de como foram construídos os modelos propostos pelos autores. Para o primeiro, utilizou-se uma função de formação de pares dentro de uma população, enquanto que para o segundo modelo, foi utilizada a função geradora de probabilidade da variável aleatória Binomial Negativa. Para estudar sua dinâmica são feitas mudanças de variáveis, propostas pelos autores, com as quais obtém-se os sistemas:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \left(\mu + \alpha y - \beta(1 - (1 - \xi)y)^2 \right) \\ \frac{dy}{dt} = y \left(\left(\frac{\kappa}{cx+1} - \alpha \right) (1 - y) - \beta(1 - (1 - \xi)y)^2 \right) \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \left(\mu + \alpha y - \beta \left(\frac{k}{(1-\xi)y+k} \right)^k \right) \\ \frac{dy}{dt} = y \left(\frac{\kappa}{cx+1} - (\sigma + \alpha) - \frac{\alpha}{k}y - \beta \left(\frac{k}{(1-\xi)y+k} \right)^k \right). \end{cases} \quad (1.4)$$

Será introduzida uma notação unificada sugerida pelos autores, para ambos os sistemas, obtendo como resultado o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xF(y) \\ \frac{dy}{dt} = yG(\kappa, x, y), \end{cases} \quad (1.5)$$

onde para o sistema (1.3) temos

- $F(y) = \mu + \alpha y - \beta(1 - (1 - \xi)y)^2$
- $G(\kappa, x, y) = \left(\frac{\kappa}{cx+1} - \alpha\right)(1 - y) - \beta(1 - (1 - \xi)y)^2,$

e para o sistema (1.4) temos

- $F(y) = \mu + \alpha y - \beta\left(\frac{k}{(1-\xi)y+k}\right)^k$
- $G(\kappa, x, y) = \frac{\kappa}{cx+1} - (\sigma + \alpha) - \frac{\alpha}{k}y - \beta\left(\frac{k}{(1-\xi)y+k}\right)^k.$

O terceiro capítulo, contém o estudo dos pontos críticos e sua natureza para os sistemas no plano x - y , alguns retratos de fase simulados com o software MAPLE V [8] e diagramas de bifurcação. Algumas bifurcações que ocorrem em pontos críticos do eixo- y não foram estudadas por não terem correspondência nos sistemas originais.

No Capítulo 4, surge um dos resultados principais do trabalho:

Teorema : *Para cada κ fixado, $\kappa > \kappa_t(\xi_p)$, o sistema (2.23) (unificação dos sistemas (2.19) e (2.21)), admite uma bifurcação de Hopf no parâmetro ξ , em ξ_p , para o ponto crítico no interior do 1º quadrante.*

Para demonstrar o Teorema acima, que foi apenas sugerido pelos autores sem uma prova formal, seguimos basicamente Marsden e McCracken [13] (ver também [6]) . Primeiramente mostramos a condição de transversalidade para a ocorrência da bifurcação de Hopf, em seguida fizemos uma translação do ponto crítico $(\bar{x}, \bar{y})$ de ambos os sistemas para a origem, e mostramos que é um vague atractor para um certo valor do parâmetro ξ , que denotamos por ξ_p .

Além disso, este capítulo apresenta alguns resultados sobre a unicidade das órbitas periódicas para ambos os sistemas (1.3) e (1.4). Para este estudo, os sistemas foram transformados em **sistemas generalizados de Liénard** para utilizar um lema sobre unicidade de órbitas periódicas, dado em [21] (ver também [17]).

Para finalizar o trabalho, interpretamos os resultados obtidos para os sistemas transformados e descrevemos o comportamento da doença. Além disso, apresentamos uma observação sobre

casos de retratos de fase que não ficaram totalmente esclarecidos durante nosso estudo, os quais pretendemos confirmar futuramente.

Capítulo 2

Construção dos modelos

Nas seções (2.2) e (2.3) deste capítulo, apresentaremos a construção dos modelos para doenças micro e macroparasíticas, respectivamente, construídos por O. Diekmann e M. Kretzschman e publicados no *Journal of Mathematical Biology*, em 1991, volume 29 páginas 539-570 veja [5]. As duas equações de cada modelo, são construídas a partir de hipóteses biológicas específicas que serão discutidas durante sua construção. Os modelos foram, segundo os autores, elaborados de modo a mostrar que a redução da fertilidade em indivíduos infectados, pode provocar um grande efeito na dinâmica populacional. Isto é, se a doença que afeta a população provoca redução na fertilidade dos indivíduos, então os resultados da dinâmicas populacional serão similares aos resultados apresentados neste trabalho para doenças as quais o modelo pode ser aplicado. Para se aplicar estes modelos a doenças específicas, deve-se incluir outros parâmetros no modelo, além dos parâmetros já inclusos. Estes novos parâmetros dependerão da doença que se deseja estudar. Na seção 2.4, faremos uma mudança de variáveis nos modelos construídos e em seguida unificaremos a notação para os sistemas resultantes.

2.1 Preliminares

Daremos a seguir a distinção entre doenças micro e macroparasíticas, introduzida por Anderson e May em *NATURE* 1979 [3, 4]. **Microparasíticas:** São doenças causadas por vírus ou bactérias. Estas se caracterizam pelo seu tamanho microscópico, ciclo de vida curto, taxas altas de reprodução direta no seu hospedeiro e tendência para induzir imunidade à reinfecção em hospedeiros que foram infectados anteriormente.

Macroparasíticas: são doenças causadas por *helminths* ou *artrópodos*. Estes apresentam o ciclo de vida mais longo que os microparasitas, não há multiplicação dentro do hospedeiro ou ocorre numa razão menor. O tempo de imunidade do hospedeiro, que geralmente depende do

número de parasitas presentes, tem duração relativamente curta, ou seja, infecções macroparasíticas são de natureza persistente, pois os hospedeiros podem ser reinfectados continuamente.

Epidemiologicamente a principal diferença é que em doenças microparasíticas a reinfecção de um indivíduo não influencia na dinâmica da doença, enquanto que em doenças macroparasíticas, o número de reinfecções tem que ser levado em conta ao modelar a doença.

Os dois tipos de doenças provocadas por microparasitas ou por macroparasitas, podem completar seu ciclo de vida passando de um hospedeiro para outro, diretamente ou indiretamente, como é explicado abaixo. A transmissão direta se dá, por exemplo, pelo contato entre hospedeiros (doenças venéreas); a indireta, por picadas de mosquitos (hospedeiros intermediários) ou pela penetração de parasitas em estágio de vida livre, no hospedeiro.

Ambos os modelos levam em conta o efeito da doença na fertilidade dos indivíduos infectados.

2.2 Modelo I: Doenças microparasíticas

O modelo introduzido aqui é do tipo S-I, i.e, a população se divide em duas classes, I-infectados e S-suscetíveis. Daremos abaixo uma lista dos principais parâmetros que aparecem no modelo.

Lista 1. Descrição dos principais parâmetros utilizados no modelo

- β : taxa de natalidade natural per capita
- μ : taxa de mortalidade natural per capita
- α : taxa adicional de mortalidade causada pela doença
- ξ : parâmetro que descreve a redução da fertilidade de indivíduos infectados devido à doença ($0 \leq \xi \leq 1$)
- κ : taxa de contato entre infectados e suscetíveis
- φ : taxa de infecção

Assumimos que a variação de crescimento da população de suscetíveis é dada pela taxa de nascimento na população, que resulta da formação de pares dentro da população, menos a taxa de morte natural, menos a taxa de infecção .

Um par dentro da população pode ser formado por dois suscetíveis, um suscetível e um infectado ou por dois infectados. A redução da fertilidade dos indivíduos infectados devido à doença, é introduzida no modelo descrevendo seu efeito em pares dentro da população, ou seja,

se um par é formado por um suscetível e um infectado, este par terá sua fertilidade reduzida pelo fator ξ , devido a presença do infectado, igualmente se temos dois infectado no par, a fertilidade será reduzida pelo fator ξ^2 . Desta forma a taxa de nascimento é então reduzida pelo fator ξ ou ξ^2 , respectivamente, dependendo se um ou ambos os companheiros estão infectados. Conseqüentemente a presença de infectados nos pares, afeta também a fertilidade dos suscetíveis.

A formação de pares é modelada por uma função $\Phi(f, m)$, onde f denota a densidade de fêmeas dentro da população e m a densidade de machos. Keyfitz [11], Palertt [14] e Pollard [15], projetaram e discutiram modelos com diferentes funções de formação de par, e chegaram à conclusão que uma função de formação de par deve ser não linear.

Os exemplos mais comuns de funções de formação de pares na literatura são, a função mínimo

$$\Phi(f, m) = b \min(f, m), \quad b \text{ constante},$$

e a média harmônica

$$\Phi(f, m) = \frac{fm}{f + m}.$$

A função mínimo não é diferenciável em $f=m$, enquanto que a média harmônica é. Sendo assim, utilizaremos para a formação de pares a média harmônica. Para uma discussão mais completa de formação de pares veja Waldstatter [18].

Deste modo, a equação que descreve o crescimento de suscetíveis dentro da população é dada por:

$$\frac{dS}{dt} = \beta \left(\frac{S^2}{I+S} + \frac{S}{I+S} I \xi + \frac{I \xi}{I+S} S + \frac{\xi^2 I^2}{I+S} \right) - \mu S - \varphi S \quad (2.1)$$

onde, S é a classe de suscetíveis e I de infectados.

Observação: $\frac{S}{S+I}$ é a proporção com que um suscetível encontra um parceiro, suscetível ou infectado, dentro da população. Do mesmo modo, interpretamos os outros termos que compõem a equação (2.1).

Assumimos que a variação de crescimento da população de infectados é dada pela taxa de infecção de suscetíveis, menos a mortalidade natural de infectados menos a mortalidade adicional de infectados causada pela doença.

Assim, nosso modelo é representado por um sistema de EDO no plano como segue:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \beta \frac{S^2 + 2\xi IS + \xi^2 I^2}{I+S} - \mu S - \varphi S \\ \frac{dI}{dt} = \varphi S - \mu I - \alpha I. \end{cases} \quad (2.2)$$

A razão de infecção φ é descrita pela função

$$\varphi = \frac{\kappa I}{c + S + I}, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Para sua dedução, leva-se em conta que o número de contatos entre indivíduos dentro da população é finito, devido à distribuição espacial ou social. Na literatura a função $\varphi = \frac{\kappa I}{c+S+I}$ é conhecida como resposta funcional do tipo Holling II. Para uma discussão mais completa sobre este tipo de resposta funcional, veja [9]. Deste modo, o modelo torna-se:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \beta \frac{S^2 + 2\xi IS + \xi^2 I^2}{I+S} - \mu S - \frac{\kappa I}{c+S+I} S \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\kappa I}{c+S+I} S - \mu I - \alpha I. \end{cases} \quad (2.4)$$

2.3 Modelo II: Doenças macroparasíticas

No modelo introduzido aqui, denotaremos a população hospedeira por N e a população parasita por P . O modelo para doenças macroparasíticas, é deduzido a partir de um sistema de equações diferenciais que leva em conta um processo de imigração e morte de parasitas nos hospedeiros, que veremos a seguir. Assumiremos que os parasitas são distribuídos entre os hospedeiros de acordo com uma **distribuição binomial negativa**(DBN). A justificativa da escolha de tal distribuição de probabilidade, vem de um trabalho introduzido por Anderson e May [1]. Nesse trabalho, eles constroem três modelos utilizando distribuições de probabilidade distintas, e concluem que os dados a respeito do número de parasitas por hospedeiro se encaixam melhor com uma (DBN), pois as outras distribuições utilizadas (Poisson e binomial positiva), geram modelos muito instáveis, o que os tornam não realísticos biologicamente. Utilizaremos então, a (DBN) com média $\frac{P}{N}$ e com parâmetros k e ρ , onde k é o parâmetro clumping (clumping é um termo técnico dado a alguns parâmetro nas distribuições de probabilidades usadas em modelos de doenças contagiosas), e ρ a probabilidade de sucesso no experimento em questão. Em um outro trabalho dado em [2], Anderson e May discutem a redução da fertilidade dos hospedeiros influenciada pelos parasitas, que também será levado em conta no modelo. Segue abaixo uma lista dos principais parâmetros que aparecem no modelo.

Lista 2. Descrição dos principais parâmetros utilizados no modelo

- β : taxa de natalidade natural per capita
- μ : taxa de mortalidade natural per capita
- α : taxa adicional de mortalidade causada por um parasita
- ξ : parâmetro que descreve a redução da fertilidade de indivíduos infectados devido a um parasita ($0 \leq \xi \leq 1$)

- κ : taxa de contato entre hospedeiros e estágios contagiosos dos parasitas, onde estes, resultam da produção de ovos, cistos, esporos ou larvas, pelos parasitas.
- φ : taxa de infecção
- σ : taxa de morte de parasitas
- k : parâmetro clumping.

2.3.1 Imigração e morte de parasitas no hóspede

Denotemos por n_i , o número de hospedeiros que carregam i parasitas. Então o sistema de equação abaixo leva em conta a imigração e morte de parasitas no hospedeiro:

$$\begin{cases} \frac{dn_0}{dt} = \beta \sum_{i=0}^{\infty} n_i \xi^i + \sigma n_1 - (\mu + \varphi) n_0 \\ \frac{dn_i}{dt} = \sigma(i+1)n_{i+1} + \varphi n_{i-1} - (\mu + \varphi + i(\alpha + \sigma))n_i, i \geq 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

Considerando

$$\begin{cases} N(t) = \sum_{i=0}^{\infty} n_i \\ P(t) = \sum_{i=0}^{\infty} i n_i \end{cases} \quad (2.6)$$

temos

$$\frac{dN}{dt} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{dn_i}{dt} = \frac{dn_0}{dt} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{dn_i}{dt}, \quad (2.7)$$

e

$$\frac{dP}{dt} = \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{dn_i}{dt}.$$

De (2.5) temos que,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{dn_i}{dt} &= -\mu \sum_{i=1}^{\infty} n_i - \varphi \sum_{i=1}^{\infty} n_i - \alpha \sum_{i=1}^{\infty} i n_i - \sigma \sum_{i=1}^{\infty} i n_i + \sigma \sum_{i=1}^{\infty} (i+1)n_{i+1} + \varphi \sum_{i=1}^{\infty} n_{i-1} \\ &= -\mu \left(n_0 + \sum_{i=1}^{\infty} n_i \right) - \varphi \left(n_0 + \sum_{i=1}^{\infty} n_i + \sum_{i=1}^{\infty} (i+1)n_{i-1} \right) + \sigma \left(n_1 + \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=1}^{\infty} (i+1)n_{i+1} - \sum_{i=1}^{\infty} i n_i \right) - \alpha \sum_{i=1}^{\infty} i n_i + \beta \sum_{i=0}^{\infty} n_i \xi^i. \end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{dN}{dt} = -\mu N + \sigma \left(\sum_{i=1}^{\infty} i n_i - \sum_{i=1}^{\infty} i n_i \right) - \alpha P + \beta \sum_{i=0}^{\infty} n_i \xi^i$$

que resulta em,

$$\frac{dN}{dt} = \beta \sum_{i=0}^{\infty} n_i \xi^i - \mu N - \alpha P. \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \sum_{i=1}^{\infty} i [-(\mu + \varphi + i(\alpha + \sigma)) n_i + \sigma(i+1) n_{i+1} + \varphi n_{i-1}] \\ &= -\mu \left(\sum_{i=1}^{+\infty} i n_i \right) + \varphi \left(\sum_{i=1}^{\infty} i n_{i-1} - \sum_{i=1}^{\infty} i n_i \right) - \alpha \sum_{i=1}^{+\infty} i^2 n_i - \sigma \sum_{i=1}^{\infty} i^2 n_i + \sigma \sum_{i=1}^{\infty} i(i+1) n_{i+1} \end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{dP}{dt} = \varphi N - (\mu + \sigma) P - \alpha \sum_{i=1}^{+\infty} i^2 n_i. \quad (2.9)$$

A partir das equações (2.8) e (2.9) obtemos o sistema,

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = -\mu N - \alpha P + \beta \sum_{i=0}^{\infty} n_i \xi^i \\ \frac{dP}{dt} = -(\mu + \sigma) P + \varphi N - \alpha \sum_{i=0}^{\infty} i^2 n_i. \end{cases} \quad (2.10)$$

Para completar a construção do modelo, precisamos expressar as somas

$$\sum_{i=0}^{\infty} n_i \xi^i \quad (2.11)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i^2 n_i \quad (2.12)$$

e a razão de infecção φ , em termos de N e P .

Os cálculos para a obtenção das somas (2.11) e (2.12), estão feitos no Apêndice A.

Substituindo então (A.13) e (A.15) em (2.10) chegamos a,

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = -\mu N - \alpha P + \beta N \left(\frac{kN}{kN + P(1-\xi)} \right)^k \\ \frac{dP}{dt} = -(\mu + \sigma) P + \varphi N - \alpha N \left(\frac{P}{N} + \left(\frac{P}{N} \right)^2 \left(\frac{k+1}{k} \right) \right). \end{cases} \quad (2.13)$$

2.3.2 Obtenção de φ

Finalmente, para completar a construção do modelo, falta apenas expressar a razão de infecção φ em termos de N e P . Para isto, levaremos em conta a transmissão indireta de parasitas, a qual será discutida abaixo.

Muitas espécies parasitas, reproduzem-se dentro de seu hospedeiro contribuindo diretamente para o crescimento de sua população. Este tipo de reprodução, é distinta da reprodução gerada por estágios de transmissão (tais como ovos ou germes), que passam para o exterior do hospedeiro tornando-se contagiosos para outros membros da população hospedeira.

Quando ocorre a transmissão direta e quando ocorre a indireta?

A transmissão direta ocorre, quando os parasitas se reproduzem diretamente dentro de seus hospedes, enquanto que a indireta quando a reprodução se dá através da contaminação do hospedeiro, por parasitas em estágio de vida livre. Um exemplo de parasita que possui ambas as formas de reprodução, é o protozoa *Entamoeba histolytica* (schaudim) que causam doenças amebíase.

O ciclo da transmissão indireta ocorre como descrito abaixo: o parasita vive no sistema digestivo do homem, e periodicamente pequenos pre-cistos são formados, dando origem a cistos resistentes contendo substâncias reservas. Estes são liberados com as fezes no ambiente externo tornando-se contagiosos para a população hospedeira. Se um tal estágio resistente é ingerido por um hospedeiro, a ameba (ex-cisto) prossegue o crescimento e a reprodução assexuada.

A existência de ambas as reproduções, direta e indireta, no ciclo de vida de parasitas, contribuem para propriedades dinâmicas que são distintas das propriedades obtidas para modelos em que os parasitas têm apenas uma das reproduções citadas acima. Em consequência, consideraremos em nosso modelo a transmissão indireta de parasitas.

Outro fator relevante, é a demora entre o momento de produção de um parasita no estágio de vida livre, e o momento que está apto para a reinfecção. Esta demora muitas vezes está associada a fatores climáticos.

Uma avaliação qualitativa dos efeitos da transmissão indireta de parasitas, pode ser obtida introduzindo uma terceira equação diferencial, dando uma avaliação explícita da dinâmica populacional dos estágios de transmissão, como é sugerido em [2].

Se $\omega(t)$ é o número de estágios contagiosos no tempo t , a equação diferencial que descreve a dinâmica dos estágios de transmissão no decorrer do tempo é dada por:

$$\frac{d\omega}{dt} = \kappa P - \varphi N - \gamma \omega \quad (2.14)$$

onde,

- γ é a taxa de morte dos estágios contagiosos
- $\varphi = \theta\omega$,

onde θ a taxa de transmissão de estágios contagiosos entre hospedeiros.

Observação: No termo $\varphi N = \theta\omega N$ interpretamos $\theta\omega$ como sendo a taxa de larvas absorvidas pelos hóspedes da população. O tempo para que os estágios contagiosos sejam transmitidos, é mais curto que qualquer outro tempo relevante no modelo, pois a duração de vida desses estágios contagiosos no habitat externo é muito curto, o que acarreta nascimento e morte instantânea dos estágios contagiosos. Em consequência, $\omega(t)$ sempre tem seu valor de equilíbrio, que pode ser obtido em termos de N e P fazendo $\frac{d\omega}{dt} = 0$, que resulta em,

$$\omega = \frac{\kappa P}{\gamma + \theta N}. \quad (2.15)$$

substituindo 2.15 na expressão de φ obtemos,

$$\varphi = \frac{\theta \kappa P}{\gamma + \theta N}. \quad (2.16)$$

Fazendo $\frac{\gamma}{\theta} = c$, (2.36) torna-se,

$$\varphi = \frac{\kappa P}{c + N}. \quad (2.17)$$

Substituindo agora o resultado em 2.13, chegamos ao modelo desejado, veja abaixo:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = -\mu N - \alpha P + \beta N \left(\frac{\kappa N}{\kappa N + P(1-\xi)} \right)^k \\ \frac{dP}{dt} = -(\mu + \sigma)P + \frac{\kappa P N}{c + N} - \alpha N \left(\frac{P}{N} + \left(\frac{P}{N} \right)^2 \left(\frac{k+1}{k} \right) \right). \end{cases} \quad (2.18)$$

2.4 Transformação e unificação dos modelos I e II

Nesta seção, será feita uma mudança de variáveis nos sistemas (2.4) e (2.18) proposta por Diekmann e Kretzschmar [5] e em seguida unificaremos a notação para os sistemas resultantes.

Proposição 2.4.1 *O sistema (2.4) pode ser transformado num sistema da forma*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \left(\mu + \alpha y - \beta(1 - (1 - \xi)y)^2 \right) \\ \frac{dy}{dt} = y \left(\left(\frac{\kappa}{cx+1} - \alpha \right) (1 - y) - \beta(1 - (1 - \xi)y)^2 \right) \end{cases} \quad (2.19)$$

com a mudança de variáveis

$$x = \frac{1}{I + S} \quad e \quad y = \frac{I}{I + S}. \quad (2.20)$$

Prova.

Efetuada a mudança de variáveis obtemos,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\frac{1}{(I+S)^2} \left(\frac{dI}{dt} + \frac{dS}{dt} \right) \\ &= -\frac{1}{I+S} \left[\beta \frac{S^2 + 2\xi IS + \xi^2 I^2}{(I+S)^2} - \mu - \alpha \frac{I}{I+S} \right]\end{aligned}$$

É fácil ver, por (2.20) que,

$$\frac{S}{I+S} = 1 - y.$$

De fato, por (2.20), $x(I+S) = 1 \Rightarrow xS = 1 - xI$, conseqüentemente $\frac{S}{S+I} = 1 - \frac{I}{I+S} = 1 - y$. assim,

$$\frac{dx}{dt} = x \left(\mu + \alpha y - \beta(1 - (1 - \xi)y)^2 \right).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= -\frac{I}{(I+S)^2} \frac{dS}{dt} + \frac{S}{(I+S)^2} \frac{dI}{dt} \\ &= -\frac{I}{(I+S)^2} \left(\beta \frac{S^2 + 2\xi IS + \xi^2 I^2}{I+S} - \mu S - \frac{\kappa I}{c+S+I} S \right) + \frac{S}{(I+S)^2} \left(\frac{\kappa I}{c+S+I} S - \mu I - \alpha I \right) \\ &= \frac{\frac{\kappa I S^2}{(\frac{c}{S+I}+1)(S+I)^3} - \alpha \frac{IS}{(I+S)^2} - \beta \frac{IS^2}{(I+S)^3} - 2\beta\xi \frac{I^2 S}{(I+S)^3} - \beta\xi^2 \frac{I^3}{(I+S)^3} + \frac{\kappa I^2 S}{(c+S+I)(I+S)^2}}{ } \\ &= \frac{\frac{\kappa y(1-2y+y^2)}{cx+1} - \alpha y(1-y) - \beta y(1-2y+y^2) - 2\beta\xi y^2(1-y) - \beta\xi^2 y^3 + \frac{\kappa y^2(1-y)}{cx+1}}{ } \\ &= y \left(\left(\frac{\kappa}{cx+1} - \alpha \right) (1-y) - \beta(1-2y+y^2 + 2\xi y - 2\xi y^2 + \xi^2 y^2) \right) \\ &= y \left(\left(\frac{\kappa}{cx+1} - \alpha \right) (1-y) - \beta(1 - (1 - \xi)y)^2 \right)\end{aligned}$$

■

Proposição 2.4.2 *O sistema (2.18) pode ser transformado num sistema da forma*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \left(\mu + \alpha y - \beta \left(\frac{k}{(1-\xi)y+k} \right)^k \right) \\ \frac{dy}{dt} = y \left(\frac{\kappa}{cx+1} - (\sigma + \alpha) - \frac{\alpha}{k} y - \beta \left(\frac{k}{(1-\xi)y+k} \right)^k \right) \end{cases} \quad (2.21)$$

com a mudança de variáveis

$$x = \frac{1}{N} \quad e \quad y = \frac{P}{N}. \quad (2.22)$$

Prova.

Efetuada a mudança de variáveis obtemos,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\frac{1}{N^2} \frac{dN}{dt} \\ &= \frac{\mu}{N} + \frac{\alpha P}{N^2} - \frac{\beta}{N} \left(\frac{kN}{(1-\xi)P+kN} \right)^k \\ &= x \left(\alpha y + \mu - \beta \left(\frac{k}{(1-\xi)y+k} \right)^k \right).\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{1}{N} \frac{dP}{dt} - \frac{P}{N^2} \frac{dN}{dt} \\ &= \frac{1}{N} \left\{ P \left(\frac{\kappa N}{c+N} - (\mu + \sigma + \alpha) - \alpha \frac{k+1}{k} \frac{P}{N} \right) - \frac{P}{N} \left[-\alpha P - \mu N + \beta N \left(\frac{kN}{kN+P(1-\xi)} \right)^k \right] \right\} \\ &= \frac{P}{N} \left\{ \frac{\kappa}{(\frac{c}{N}+1)} - (\mu + \sigma + \alpha) - \frac{\alpha(k+1)P}{kN} + \frac{\alpha P}{N} + \mu - \beta \left(\frac{kN}{kN+P(1-\xi)} \right)^k \right\} \\ &= y \left(\frac{\kappa}{cx+1} - (\sigma + \alpha) - \frac{\alpha y}{k} - \beta \left(\frac{k}{k+(1-\xi)y} \right)^k \right)\end{aligned}$$

■

A dinâmica do sistema (2.19) será estudada na região $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, 0 \leq y < b\}$, onde $b=1$. Da mesma forma, estudaremos a dinâmica do sistema (2.21) na região $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, 0 \leq y < b\}$, onde $b = \infty$.

Em ambos os sistemas, todos os parâmetros, exceto ξ , são positivos e consideraremos $\beta > \mu$, pois se β é a taxa de vida e μ a taxa de morte da população, é natural pensar que o número de indivíduos que nascem é maior que o número de indivíduos que morrem, caso contrário a população se extinguiria. Não devemos nos esquecer também que $\xi \in [0, 1]$. Vamos unificar a notação para os sistemas (2.19) e (2.21), como segue:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xF(y) \\ \frac{dy}{dt} = yG(\kappa, x, y) \end{cases} \quad (2.23)$$

onde $(x, y) \in M$ e $\kappa \geq 0$ com F e G continuamente diferenciáveis. Destacamos a seguir algumas condições satisfeitas por F e G .

Proposição 2.4.3 Considere $0 \leq \xi \leq 1$ e $0 < \mu < \beta$ para os sistemas (2.19) e (2.21). Suponha que para o sistema (2.19) vale a seguinte condição:

$$\beta < \alpha + \mu. \quad (2.24)$$

Então as funções $F(y)$ e $G(\kappa, x, y)$ satisfazem as seguintes condições:

$$(I) \begin{cases} i) \frac{dF}{dy} > 0 \quad e, \quad \exists! \bar{y} \in]0, b[; F(\bar{y}) = 0 \\ ii) \frac{\partial G}{\partial x} < 0 \quad e, \quad \exists! g(\kappa, y); G(\kappa, g(\kappa, y), y) = 0 \\ iii) \frac{\partial G}{\partial \kappa} > 0 \quad e, \quad G(0, x, y) < 0 \quad \forall (x, y) \in M. \end{cases} \quad (2.25)$$

Prova.

sistema (2.19):

i) Dado que $F(y) = \mu + \alpha y - \beta(1 - (1 - \xi)y)^2$ temos,

$$F'(y) = \alpha + 2\beta(1 - \xi)(1 - (1 - \xi)y),$$

portanto para $0 \leq \xi \leq 1$ temos que $F'(y) > 0 \quad \forall y \in [0, 1[$.

Para mostrar que $\exists! \bar{y} \in [0, 1)$ tal que $F(\bar{y}) = 0$, basta observar que

- $F(0) = \mu - \beta < 0$
- $F(1) = \mu + \alpha - \beta\xi > \mu + \alpha - \beta > 0$.

Como F é estritamente crescente, $\exists! \bar{y} \in [0, 1[$ tal que $F(\bar{y}) = 0$.

A expressão para $\bar{y}$, obtemos resolvendo a equação $F(y)=0$, i.e,

$$-\beta(1 - \xi)^2 y^2 + (\alpha + 2(1 - \xi)\beta)y + (\mu - \beta) = 0.$$

No caso $0 \leq \xi < 1$ temos:

$$\bar{y}_1 = \frac{(2(1 - \xi)\beta + \alpha) + \sqrt{(2(1 - \xi)\beta + \alpha)^2 + 4(1 - \xi)^2\beta(\mu - \beta)}}{2(1 - \xi)^2\beta}$$

$$\bar{y}_2 = \frac{(2(1 - \xi)\beta + \alpha) - \sqrt{(2(1 - \xi)\beta + \alpha)^2 + 4(1 - \xi)^2\beta(\mu - \beta)}}{2(1 - \xi)^2\beta}.$$

Estamos interessados na raiz que pertença a $[0, 1[$. Como $\bar{y}_1 \notin [0, 1[$, já que $2(1 - \xi)\beta \geq 2(1 - \xi)^2\beta$ onde $0 \leq \xi \leq 1$, temos que $\bar{y}_2 \in [0, 1[$. Portanto,

$$\bar{y} = \frac{(2(1 - \xi)\beta + \alpha) - \sqrt{(2(1 - \xi)\beta + \alpha)^2 + 4(1 - \xi)^2\beta(\mu - \beta)}}{2(1 - \xi)^2\beta} \in [0, 1[.$$

No caso $\xi = 1$, $\bar{y} = \frac{\beta - \mu}{\alpha} \in [0, 1[$, por (2.24).

ii) Aqui consideraremos três casos como segue:

1º caso $\rightarrow \xi = 0$

Neste caso temos $G(\kappa, x, y) = \left(\frac{\kappa}{cx+1} - \alpha\right)(1-y) - \beta(1-y)^2$. Isolando x de $G(\kappa, x, y) = 0$ obtemos a função desejada:

$$g(\kappa, y) = -\frac{1}{c} \left(1 - \frac{\kappa}{\beta(1-y) + \alpha}\right). \quad (2.26)$$

2º caso $\rightarrow 0 < \xi < 1$

Neste caso temos $G(\kappa, x, y) = \left(\frac{\kappa}{cx+1} - \alpha\right)(1-y) - \beta(1 - (1-\xi)y)^2$. Isolando x de $G(\kappa, x, y) = 0$, obtemos a função desejada:

$$g(\kappa, y) = -\frac{1}{c} \left(1 - \frac{\kappa(1-y)}{\beta(1 - (1-\xi)y)^2 + \alpha(1-y)}\right). \quad (2.27)$$

3º caso $\rightarrow \xi = 1$

Neste caso temos $G(\kappa, x, y) = \left(\frac{\kappa}{cx+1} - \alpha\right)(1-y) - \beta$. Isolando x de $G(\kappa, x, y) = 0$, obtemos a função desejada:

$$g(\kappa, y) = -\frac{1}{c} \left(1 - \frac{\kappa(1-y)}{\alpha(1-y) + \beta}\right). \quad (2.28)$$

Em todos os casos temos

$$G_x(\kappa, x, y) = -\frac{\kappa c(1-y)}{(cx+1)^2} < 0.$$

iii) A partir das expressões de $G(\kappa, x, y)$ dadas no item (ii), em qualquer caso teremos $G_k(\kappa, x, y) = \frac{1-y}{cx+1} > 0$, $\forall 0 \leq \xi \leq 1$, além disso, $G(0, x, y) < 0$, $\forall (x, y) \in M$.

sistema (2.21):

i) Aqui consideraremos dois casos como segue:

1º caso $\rightarrow 0 \leq \xi < 1$

Neste caso temos $F(y) = \alpha y + \mu - \beta \left(\frac{k}{(1-\xi)y+k}\right)^k$, com

$$F'(y) = \alpha + \beta(1-\xi) \left(\frac{k}{(1-\xi)y+k}\right)^{k+1} > 0, \quad \forall 0 \leq \xi \leq 1,$$

isto é, F é estritamente crescente, $\forall y \in [0, \infty[$. Além disso,

$$F(0) = \mu - \beta < 0 \quad e \quad \lim_{y \rightarrow \infty} F(y) = \infty.$$

portanto $\exists! \bar{y} \in [0, b[$, tal que $F(\bar{y}) = 0$. Note que $\bar{y}$ é caracterizado por

$$\alpha y + \mu = \beta \left(\frac{k}{(1-\xi)y+k}\right)^k. \quad (2.29)$$

Assim denote

- $f_1(y) = \alpha y + \mu$
- $f_2(y) = \beta \left(\frac{k}{(1-\xi)y+k} \right)^k$
- $y_\xi = -\frac{k}{1-\xi}$

e, observe que $f_1(y)$ é uma reta que corta o eixo das ordenadas no ponto μ , veja Figura 2.1.

Por outro lado, temos que

$$\lim_{y \rightarrow y_\xi^-} f_2(y) = -\infty$$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} f_2(y) = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow y_\xi^+} f_2(y) = +\infty$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} f_2(y) = 0.$$

Além disso,

$$f_2'(y) = -\beta(1-\xi) \left(\frac{k}{(1-\xi)y+k} \right)^{k+1} < 0,$$

isto implica que f é estritamente decrescente em $\mathbb{R} - \{-\frac{k}{1-\xi}\}$. Observe também que

$$f_2''(y) = \frac{\beta(1-\xi)^2(k+1)}{(1-\xi)y+k} \left(\frac{k}{(1-\xi)y+k} \right)^{k+1}$$

e, $y < -\frac{k}{1-\xi} \Rightarrow f_2''(y) < 0$, $y > -\frac{k}{1-\xi} \Rightarrow f_2''(y) > 0$, portanto no intervalo $]-\infty, -\frac{k}{1-\xi}[$ f_2 tem concavidade voltada para baixo e no intervalo $]-\frac{k}{1-\xi}, +\infty[$ f_2 tem concavidade voltada para cima. Assim o gráfico de f_2 tem a forma dada na Figura 2.1. Em geral $\bar{y}$ não pode ser calculado explicitamente.

2º caso $\rightarrow \xi = 1$

Neste caso temos $F(y) = \alpha y + \mu - \beta$. Logo,

$$\bar{y} = \frac{\beta - \mu}{\alpha} \in [0, b[.$$

Figura 2.1: gráfico

ii) Consideraremos aqui três casos como segue:

1º caso $\rightarrow \xi = 0$

Neste caso $G(\kappa, x, y) = \frac{\kappa}{cx+1} - (\sigma + \alpha) - \frac{\alpha y}{k} - \beta \left(\frac{k}{y+k} \right)^k$. Isolando x de $G(\kappa, x, y) = 0$ obtemos a função desejada:

$$g(\kappa, y) = -\frac{1}{c} \left(1 - \frac{\kappa}{\sigma + \alpha + \frac{\alpha y}{k} + \beta \left(\frac{k}{y+k} \right)^k} \right). \quad (2.30)$$

2º caso $\rightarrow 0 < \xi < 1$

Neste caso $G(\kappa, x, y) = \frac{\kappa}{cx+1} - (\sigma + \alpha) - \frac{\alpha y}{k} - \beta \left(\frac{k}{(1-\xi)y+k} \right)^k$. Isolando x de $G(\kappa, x, y) = 0$ obtemos a função desejada:

$$g(\kappa, y) = -\frac{1}{c} \left(1 - \frac{\kappa}{\sigma + \alpha + \frac{\alpha y}{k} + \beta \left(\frac{k}{(1-\xi)y+k} \right)^k} \right). \quad (2.31)$$

3º caso $\rightarrow \xi = 1$

Neste caso $G(\kappa, x, y) = \frac{\kappa}{cx+1} - (\sigma + \alpha) - \frac{\alpha y}{k} - \beta$. Isolando x de $G(\kappa, x, y) = 0$ obtemos a função desejada:

$$g(\kappa, y) = -\frac{1}{c} \left(1 - \frac{\kappa}{\sigma + \alpha + \beta + \frac{\alpha y}{k}} \right). \quad (2.32)$$

Em todos os casos temos

$$G_x(\kappa, x, y) = -\frac{\kappa c}{(cx+1)^2} < 0.$$

iii) A partir das expressões de $G(\kappa, x, y)$ dadas no item (ii), em qualquer caso teremos $G_\kappa(\kappa, x, y) = \frac{1}{cx+1} > 0, \forall \xi, 0 \leq \xi \leq 1$. Além disso, $G(0, x, y) < 0, \forall (x, y) \in M$. ■

Observação:

1) Daqui em diante, assumiremos válida a condição (2.24) para o sistema (2.19), uma vez que esta é uma condição necessária e suficiente, para a existência de ponto crítico para este sistema no primeiro quadrante e, é uma condição necessária, mas não suficiente, para que ocorra órbita periódica neste quadrante, o que será visto adiante.

2) As isóclinas $\frac{dx}{dt} = 0$, são o eixo y e a reta definida por $y = \bar{y}$, basta observar que $x F(y) = 0$ se $x=0$ ou se $F(y)=0$, i.e, $y = \bar{y}$. De modo análogo verifica-se que as isóclinas $\frac{dy}{dt} = 0$, são o eixo x e o gráfico de $g(\kappa, y)$, se $\xi \neq 0$, veja Figura 2.2

Figura 2.2: isóclinas

Capítulo 3

Estudo dos pontos críticos e diagramas de bifurcação

Neste capítulo, vamos determinar os pontos críticos e classificar sua natureza para cada um dos sistemas (2.19) e (2.21). Além disso, usando o software MAPLE V [8], apresentaremos algumas simulações de retratos de fase. Para finalizar, daremos os diagramas de bifurcação que indicam como o retrato de fase muda com a variação do parâmetro κ , para cada $\xi \in [0, 1]$.

O estudo se realizará da seguinte forma: para cada um dos sistemas, esboçaremos os gráficos de $g_\xi(\kappa, y)$ em y , quando variamos os parâmetros κ e ξ ; além disso, discutiremos a posição relativa entre $\bar{y}$ e as raízes y^* de g_ξ e entre $\bar{y}$ e o ponto de máximo y_m de g_ξ , o que resultará na determinação dos pontos críticos e sua natureza.

Durante o estudo, surgirão parâmetros decisivos, ξ_t , ξ_p , κ_t , κ_1 e κ_2 , para a determinação da natureza dos pontos críticos e dos diagramas de bifurcação.

3.1 Preliminares para o sistema (2.19)

Estudaremos para este sistema, o comportamento do gráfico de $g(\kappa, y)$ para $\xi = 0$, $0 < \xi < 1$ e $\xi = 1$, respectivamente. Daqui em diante, para cada ξ fixado, denotaremos $g_\xi(\kappa, y) = g(\kappa, y)$.

3.1.1 Esboço do gráfico de g e os parâmetros ξ_t , κ_t e κ_1

Dividiremos o estudo em três casos como segue:

1º caso $\rightarrow \xi = 0$

Neste caso, $g(\kappa, y) = -\frac{1}{c} \left(1 - \frac{\kappa}{\beta(1-y)+\alpha} \right)$ (ver (2.26)), logo temos que

- $g_y(\kappa, y) = \frac{\kappa}{c} \frac{\beta}{(\beta(1-y)+\alpha)^2} > 0 \quad \forall \quad y \in [0, 1).$
- $g(\kappa, 1) = -\frac{1}{c} \left(1 - \frac{\kappa}{\alpha} \right)$
- $g(\kappa, 0) = -\frac{1}{c} \left(1 - \frac{\kappa}{\alpha+\beta} \right).$
- $\lim_{y \rightarrow (1+\frac{\alpha}{\beta})^-} g(\kappa, y) = \infty$
- $\lim_{y \rightarrow -\infty} g(\kappa, y) = -\frac{1}{c}.$

Neste caso de $\xi = 0$, denotaremos

$$\kappa_1 = \alpha + \beta \quad e \quad \kappa_t = \alpha.$$

Assim teremos que o conjunto dos pontos (x, y) tais que $G(\kappa, x, y) = 0$, isto é, com $y=1$ ou $x = g(\kappa, y)$, é como na Figura 3.1.

Figura 3.1: $\xi = 0$, sistema (2.19)

2º caso $\rightarrow 0 < \xi < 1$

Neste caso, $g(\kappa, y) = -\frac{1}{c} \left(1 - \frac{\kappa(1-y)}{\beta(1-(1-\xi)y)^2 + \alpha(1-y)} \right)$ (ver (2.27)). Para determinar o domínio de g , procuraremos as raízes (y_1, y_2) de $\beta[1 - (1-\xi)y]^2 + \alpha(1-y) = 0$. Como

$$\Delta = \alpha \left[-4\beta(1-\xi)^2 + 4\beta(1-\xi) + \alpha \right] > 0$$

para $0 < \xi < 1$ (ver Figura 3.2), então

$$y_{1,2} = \frac{2\beta(1-\xi) + \alpha \mp \sqrt{(2\beta(1-\xi) + \alpha)^2 - 4\beta(1-\xi)^2(\alpha + \beta)}}{2\beta(1-\xi)^2}.$$

Figura 3.2: Sinal de Δ

Observe que $1 < y_1$, uma vez que

$$2\beta(1-\xi) + \alpha - \sqrt{(2\beta(1-\xi) + \alpha)^2 - 4\beta(1-\xi)^2(\alpha + \beta)} > 2\beta(1-\xi)^2$$

e $y_1 < \frac{1}{1-\xi}$, já que

$$2\beta(1-\xi) + \alpha - \sqrt{(2\beta(1-\xi) + \alpha)^2 - 4\beta(1-\xi)^2(\alpha + \beta)} < 2\beta(1-\xi).$$

Além disso, é fácil ver que $y_1 < \frac{1}{1-\xi} < y_2$.

Vamos estudar agora o crescimento e decrescimento de g . Note que

$$\begin{aligned} g_y(\kappa, y) &= \frac{\frac{\kappa}{c} \left(\frac{\beta(1-(1-\xi)y)^2 + \alpha(1-y)}{\left[\alpha(1-y) + \beta(1-(1-\xi)y)^2 \right]^2} + (1-y) \left(\frac{-2\beta(1-\xi)(1-(1-\xi)y) - \alpha}{\left[\alpha(1-y) + \beta(1-(1-\xi)y)^2 \right]^2} \right) \right)}{c} \\ &= \frac{\kappa\beta(1-(1-\xi)y)((1-\xi)(2-y)-1)}{c(\alpha(1-y) + \beta(1-(1-\xi)y)^2)^2}. \end{aligned}$$

e $g_y(\kappa, y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{1-\xi}$ ou $y = 2 - \frac{1}{1-\xi}$, onde $\frac{1}{1-\xi} > 1$, $0 \leq 2 - \frac{1}{1-\xi} \leq 1$ se $\xi \leq \frac{1}{2}$ e $2 - \frac{1}{1-\xi} < 0$ se $\xi > \frac{1}{2}$. Assim, o sinal de g_y e o crescimento e decrescimento de g são dados na Figura 3.3.

Figura 3.3: Variação de g

Conseqüentemente o máximo de g para $y \leq 1$ é

$$y_m = 2 - \frac{1}{1 - \xi}. \quad (3.1)$$

Se $0 < \xi \leq \frac{1}{2}$, teremos $y_m \in [0, 1[$. Denotaremos

$$\xi_t = \frac{1}{2}.$$

Temos também:

$$\bullet \lim_{y \rightarrow y_1^-} g(\kappa, y) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} g(\kappa, y) = -\frac{1}{c}.$$

Observe que, as seguintes possibilidades para $g(\kappa, 0) = -\frac{1}{c} \left(1 - \frac{\kappa}{\beta + \alpha}\right)$, são válidas:

- $g(\kappa, 0) < 0 \Leftrightarrow \kappa < \alpha + \beta$
- $g(\kappa, 0) = 0 \Leftrightarrow \kappa = \alpha + \beta$
- $g(\kappa, 0) > 0 \Leftrightarrow \kappa > \alpha + \beta$.

As raízes de g são dadas por:

$$\bullet y_1^* = \frac{(2\beta(1-\xi) + \alpha - \kappa) - \sqrt{(2\beta(1-\xi) + \alpha - \kappa)^2 + 4\beta(1-\xi)^2(\kappa - \beta - \alpha)}}{2\beta(1-\xi)^2}$$

$$\bullet y_2^* = \frac{(2\beta(1-\xi) + \alpha - \kappa) + \sqrt{(2\beta(1-\xi) + \alpha - \kappa)^2 + 4\beta(1-\xi)^2(\kappa - \beta - \alpha)}}{2\beta(1-\xi)^2},$$

que serão reais se $(2\beta(1-\xi) + \alpha - \kappa)^2 + 4\beta(1-\xi)^2(\kappa - \beta - \alpha) > 0 \Leftrightarrow (\alpha - \kappa)(\alpha - \kappa + 4\beta(1-\xi) - 4\beta(1-\xi)^2) \geq 0$. Não é difícil ver que teremos duas raízes reais distintas em $[0, 1[$ se, e

somente se, $\kappa > \alpha + 4\beta\xi(1 - \xi)$ e que teremos uma única raiz real em $[0, 1[$ se, e somente se, $\kappa = \alpha + 4\beta\xi(1 - \xi)$.

Pretendemos exibir todas as possibilidades para o gráfico de $g(\kappa, y)$ conforme os seguintes casos:

i) Para $\kappa < \alpha + \beta \Leftrightarrow g(\kappa, 0) < 0$

Observe que $g(\kappa, y_m) = -\frac{1}{c} \left[\frac{-4\beta\xi^2 + 4\beta\xi + \alpha - \kappa}{4\beta\xi(1 - \xi) + \alpha} \right]$, pois $y_m = 2 - \frac{1}{1 - \xi}$. Para estudar o sinal de $g(\kappa, y_m)$ basta estudar o sinal de $f(\xi) = -4\beta\xi^2 + 4\beta\xi + \alpha - \kappa$ uma vez que $4\beta\xi(1 - \xi) + \alpha > 0$. As raízes de $f(\xi) = 0$ são dadas por:

$$\xi_{1,2} = \frac{1}{2} \left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{\alpha - \kappa}{\beta}} \right).$$

Note que $1 + \frac{\alpha - \kappa}{\beta} > 0 \Leftrightarrow \beta + \alpha - \kappa > 0$ pois $\kappa < \alpha + \beta$. Logo temos as seguintes opções para $\xi_{1,2}$, para os sinais de $f(\xi)$ e conseqüentemente de $g(\kappa, y_m(\xi))$:

- $\alpha < \kappa \Rightarrow 0 < \xi_1 < \frac{1}{2} < \xi_2 < 1$. Assim se $\xi_1 < \xi < \xi_2$, $f(\xi) > 0$, logo $g(\kappa, y_m) < 0$. Por outro lado, se $0 < \xi < \xi_1$ ou $\xi_2 < \xi < 1$, $f(\xi) < 0$, logo $g(\kappa, y_m) > 0$, veja Figura 3.4.
- $\alpha = \kappa \Rightarrow \xi_1 = 0$ e $\xi_2 = 1$. Assim $\forall \xi \in]0, 1[$, $f(\xi) > 0$, logo $g(\kappa, y_m) < 0$, veja Figura 3.5.
- $\alpha > \kappa \Rightarrow \xi_1 < 0 < 1 < \xi_2$. Assim $\forall \xi \in]0, 1[$, $f(\xi) > 0$, logo $g(\kappa, y_m) < 0$, veja Figura 3.6.

Figura 3.4: $f(\xi)$ e $g(\kappa, y_m(\xi))$ para $\alpha < \kappa < \alpha + \beta$

Figura 3.5: $f(\xi)$ e $g(\kappa, y_m(\xi))$ para $\alpha = \kappa < \alpha + \beta$

Figura 3.6: $f(\xi)$ e $g(\kappa, y_m(\xi))$ para $\kappa < \alpha$ Figura 3.7: $\kappa < \alpha + \beta$, $\alpha < \kappa$ e $0 < \xi < 1$, sistema (2.19)

Figura 3.8: $\kappa < \alpha + \beta$, $\alpha \geq \kappa$ e $0 < \xi < 1$, sistema (2.19)

ii) $\kappa = \alpha + \beta$ que é equivalente a $g(\kappa, 0) = 0$. Como no primeiro caso, é fácil ver que $g(\kappa, y_m(\xi)) > 0 \Leftrightarrow \xi \neq \frac{1}{2}$.

Figura 3.9: $\kappa = \alpha + \beta$ e $0 < \xi < 1$, sistema (2.19)

iii) $\kappa > \alpha + \beta$ que é equivalente a $g(\kappa, 0) > 0$. Aqui, $g(\kappa, y_m(\xi)) > 0$ para todo ξ .

Figura 3.10: $\kappa > \alpha + \beta$ e $0 < \xi < 1$, sistema (2.19)

Observe que para cada ξ , existe um único κ que denotaremos por

$$\kappa_t = \alpha + 4\beta\xi(1 - \xi), \quad (3.2)$$

tal que $g(\kappa_t, y) = 0$ e além disso, κ_t é o valor para o qual o gráfico de $g(\kappa, y) = 0$ tangencia o eixo-y em $[0, 1[$. Quando $\xi = \xi_t$ teremos $\kappa_1 = \kappa_t = \alpha + \beta$ e $g(\kappa_t, y_m) = g(\kappa_t, 0) = 0$. Quando $\xi \neq \xi_t$, teremos $\kappa_t < \kappa_1$.

3º caso $\rightarrow \xi = 1$

Neste caso, $g(\kappa, y) = -\frac{1}{c} \left(1 - \frac{\kappa(1-y)}{\alpha(1-y)+\beta} \right)$ definida para $y \neq 1 + \frac{\beta}{\alpha}$ (ver (2.28)), logo temos que

$$g_y(\kappa, y) = -\frac{\kappa^2}{c} \frac{\beta}{\left(\beta + \alpha(1-y) \right)^2} < 0.$$

Observe também que:

- $\beta + \alpha(1 - y) > 0 \Leftrightarrow y < 1 + \frac{\beta}{\alpha}$
- $g(\kappa, 0) = -\frac{1}{c} \left(1 - \frac{\kappa}{\alpha + \beta} \right)$
- $g(\kappa, 1) = -\frac{1}{c}$.
- $\lim_{y \rightarrow (1 + \frac{\beta}{\alpha})^-} g(\kappa, y) = -\infty$ e $\lim_{y \rightarrow (1 + \frac{\beta}{\alpha})^+} g(\kappa, y) = +\infty$

- $\lim_{y \rightarrow -\infty} g(\kappa, y) = -\frac{1}{c} \left(1 - \frac{\kappa}{\alpha}\right).$

Assim teremos as seguintes possibilidades para o gráfico de g :

Figura 3.11: $\xi = 1$, sistema (2.19)

Neste caso definiremos $\kappa_1 = \alpha + \beta$.

3.1.2 Relação entre $\bar{y}(\xi)$ e $y_m(\xi)$. O parâmetro ξ_p

Vamos esboçar os gráficos de $\bar{y}(\xi)$ e $y_m(\xi)$. Começaremos estudando $\bar{y}(\xi)$ com $0 \leq \xi < 1$.

Como $F(\xi, \bar{y}(\xi)) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \alpha + 2\beta(1 - \xi)(1 - (1 - \xi)y) > 0$ e $\frac{\partial F}{\partial \xi} = -2\beta(1 - (1 - \xi)y)y < 0$ para $0 < y \leq 1$, concluímos que $\frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial \xi}}{\frac{\partial F}{\partial y}} > 0$, isto é, $\bar{y}$ é crescente em ξ . Temos :

- $\bar{y}(0) = \frac{2\beta + \alpha - \sqrt{4\beta\alpha + \alpha^2 + 4\beta\mu}}{2\beta} > 0$ pois $(2\beta + \alpha)^2 > \sqrt{4\beta\alpha + \alpha^2 + 4\beta\mu}2\beta \Leftrightarrow 4\beta(\beta - \mu) > 0$

- $\bar{y}(\xi) = \frac{(2\beta(1-\xi)+\alpha) - \sqrt{(2\beta(1-\xi)+\alpha)^2 + 4\beta(1-\xi)^2(\mu-\beta)}}{2\beta(1-\xi)^2} > 0$
- $\bar{y}(0) < 1$, já que $\alpha < \sqrt{4\beta\alpha + \alpha^2 + 4\beta\mu} \Leftrightarrow 4\beta\alpha + 4\beta\mu > 0$.
- $\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \xi^2} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial \xi} \bar{y}'(\xi) \right) - \frac{\partial F}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \bar{y}'(\xi) + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial \xi} \right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2} = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial \xi}}{\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^3}$.

Como

- i) $\frac{\partial F}{\partial y} = \alpha + 2\beta(1-\xi)(1-(1-\xi)y) > 0$
- ii) $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2\beta(1-\xi)^2 < 0$
- iii) $\frac{\partial F}{\partial \xi} = -2\beta y(1-(1-\xi)y) < 0$
- iv) $\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = -2\beta y^2 < 0$
- v) $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial \xi} = -2\beta(1-(1-\xi)y) + 2\beta y(1-\xi)$,

$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial \xi} < 0$ para $\xi < \frac{1}{2} = \xi_t$. Então $\bar{y}(\xi)$ tem concavidade voltada para cima para $\xi < \xi_t$.

- $\lim_{\xi \rightarrow 1^-} \bar{y}(\xi) = \frac{\beta - \mu}{\alpha}$.

Pelos resultados obtidos acima, podemos esboçar os gráficos de $y_m(\xi)$ e $\bar{y}(\xi)$:

Figura 3.12: gráficos de y_m e $\bar{y}$, sistema (2.19)

Denotaremos por ξ_p , o único valor para o qual temos $\bar{y}(\xi_p) = y_m(\xi_p)$.

3.1.3 O parâmetro κ_2

Vamos verificar agora que existe κ_2 para o qual $g(\kappa_2, \bar{y}) = 0$, isto é, para o qual $y^* = \bar{y}$, pois isto será relevante para a obtenção dos pontos críticos e para o estudo dos diagramas de

bifurcação do sistema (2.19). Dividiremos em três casos, $\xi = 0$, $0 < \xi < 1$ e $\xi = 1$.

1º caso $\rightarrow \xi = 0$

Neste caso, existe $y^* \in [0, 1[$ se $\alpha < \kappa < \alpha + \beta$, basta observar Figura 3.1. Note que:

- $\bar{y}$ é caracterizado por $\alpha\bar{y} + \mu = \beta(1 - \bar{y})^2$;
- y^* é caracterizado por $(\kappa - \alpha)(1 - y^*) = \beta(1 - y^*)^2$.

Denotando $P_1(y) = \alpha y + \mu$, $P_2(y) = (\kappa - \alpha)(1 - y)$ e $P_3(y) = \beta(1 - y)^2$, κ_2 é o valor do parâmetro κ para o qual os gráficos de P_1 , P_2 e P_3 , se interceptam em um único ponto, veja Figura 3.13.

Figura 3.13: Obtenção de κ_2 para $\xi = 0$, sistema (2.19)

2º caso $\rightarrow 0 < \xi < 1$

Neste caso, note que:

- $\bar{y}$ é caracterizado por $\mu + \alpha\bar{y} = \beta(1 - (1 - \xi)\bar{y})^2$;
- y^* é caracterizado por $\kappa(1 - y^*) - \alpha(1 - y^*) = \beta(1 - (1 - \xi)y^*)^2$.

Portanto, $\bar{y} = y^*$ quando os gráficos de $P_1(y) = \mu + \alpha y$, $P_2(y) = \kappa(1 - y) - \alpha(1 - y)$ e $P_3(y) = \beta(1 - (1 - \xi)y)^2$ se interceptam num único ponto. Denotaremos κ_2 o valor do parâmetro κ , para o qual $\bar{y} = y^*$, veja Figura 3.14.

Figura 3.14: Obtenção de κ_2 para $0 < \xi < 1$, sistema (2.19)

Observação: A intersecção de $P_1(y)$ com $P_3(y)$ se dá abaixo do ponto 1 no eixo das ordenadas, por (2.24) da Proposição 2.4.3.

3º caso $\rightarrow \xi = 1$

Neste caso, $g(\kappa, y) = 0$ tem raiz (única) $y^* = \frac{\kappa - \alpha - \beta}{\kappa - \alpha} \Leftrightarrow \alpha \neq \kappa$.

Se $\alpha \leq \kappa$, $y^* > 1$

Se $\alpha > \kappa$, $y^* < 1$.

Como $\bar{y} = \frac{\beta - \mu}{\alpha} \in [0, 1[$ por (2.24) desde que $\beta > \mu$ então, para $\alpha \neq \kappa$ temos $\bar{y} = y^* \Leftrightarrow \kappa = \frac{\alpha(\alpha + \mu)}{\alpha + \mu - \beta} > 0$ por (2.24).

Indicaremos $\kappa_2 = \frac{\alpha(\alpha + \mu)}{\alpha + \mu - \beta}$.

3.1.4 Posição relativa entre $\bar{y}$ e as raízes y^* de g

É importante também saber a localização de $\bar{y}$ com respeito a y_m e aos zeros de $g(\kappa, y)$, para podermos determinar todos os pontos críticos do sistema (2.19). Faremos os cálculos no caso $\xi \in]0, 1[$, pois para os casos $\xi = 0$ e $\xi = 1$ não temos máximo para $g(\kappa, y)$.

Para $\xi \in]0, 1[$ temos que a expressão de g é dada por (2.27), logo

$$g_\kappa(\kappa, y) = -\frac{1}{c} - \frac{(1-y)}{\beta(1-(1-\xi)y)^2 + \alpha(1-y)} > 0, \text{ para } 0 \leq y < 1,$$

i.e, o gráfico de $g(\kappa, y)$ move-se no sentido positivo do eixo-x quando aumentamos κ .

Vamos fixar ξ e variar κ para obter algumas formas para o gráfico de g .

i) Fixando $\xi = \xi_t = \frac{1}{2}$ e variando κ obtemos as seqüências da Figura 3.15 para o gráfico de g .

Figura 3.15: $\xi = \xi_t$, sistema (2.19)

Note que para $\xi = \xi_t = \frac{1}{2}$, $\kappa_1 < \kappa_2$, portanto para ξ suficientemente próximo de ξ_t , κ_1 ainda é menor que κ_2 . Além disso, para $\xi_p < \xi < \xi_t$, teremos $0 < y_m < \bar{y}$.

ii) Fixando $\xi_p < \xi < \xi_t$ suficientemente próximo de ξ_t e variando κ obtemos as seqüências da Figura 3.16 para o gráfico de g .

Figura 3.16: $\xi_p < \xi < \xi_t$, sistema (2.19)

iii) Agora consideraremos $\xi = \xi_p$ e vamos variar κ . Observe que neste caso teremos $\bar{y} = y_m$, e $\kappa_t = \kappa_2$, veja Figura 3.17.

Figura 3.17: $\xi = \xi_p$, sistema (2.19)

iv) Agora vamos fixar $0 < \xi < \xi_p$ e variar κ . Neste caso $0 < \bar{y} < y_m$, logo o gráfico de g vai colidir com o ponto $(0, \bar{y})$, antes de colidir com o ponto $(0, 0)$, isto significa que $\kappa_1 > \kappa_2$ (veja Figura 3.18).

Figura 3.18: $0 < \xi < \xi_p$, sistema (2.19)

v) Daremos agora a ilustração geométrica das posições entre $\bar{y}$ e y^* nos casos $\xi = 0$ e $\xi = 1$.

Figura 3.19: $\xi = 0$, sistema (2.19)

Figura 3.20: $\xi = 1$, sistema (2.19)

3.2 Preliminares para o sistema (2.21)

Estudaremos para este sistema, o comportamento do gráfico de $g(\kappa, y)$ para $\xi \in [0, 1[$ e, em seguida faremos o estudo para o caso $\xi = 1$.

3.2.1 Esboço do gráfico de g e os parâmetros ξ_t , κ_t e κ_1

Dividiremos o estudo em dois casos, como segue:

1º Caso $\rightarrow 0 \leq \xi < 1$

Neste caso, temos que a expressão para $g(\kappa, y)$ é dada por (2.31), i.e, por

$$g(\kappa, y) = -\frac{1}{c} \left(1 - \frac{\kappa}{\phi(y)} \right),$$

onde $\phi(y) = \sigma + \alpha + \frac{\alpha y}{k} + \beta \left(\frac{k}{(1-\xi)y+k} \right)^k$.

Inicialmente estudaremos o gráfico da função $\phi(y)$:

- $\phi'(y) = \frac{\alpha}{k} - \beta(1-\xi) \left(\frac{k}{y(1-\xi)+k} \right)^{k+1} \geq 0 \Leftrightarrow y \geq y_m$, onde

$$y_m = \frac{k}{1-\xi} \left[\left(\frac{k\beta(1-\xi)}{\alpha} \right)^{\frac{1}{k+1}} - 1 \right]. \quad (3.3)$$

O crescimento e decrescimento de $\phi(y)$ são indicados na Figura 3.21.

Figura 3.21: Variação de ϕ

- $\lim_{y \rightarrow \infty} \phi(y) = \infty$
- $\lim_{y \rightarrow \left(-\frac{k}{1-\xi}\right)^+} \phi(y) = \infty$.
- $\phi(0) = \sigma + \alpha + \beta$
- $\phi(y_m) = \sigma + \alpha + \frac{\alpha}{1-\xi} \left[\left(\frac{k\beta(1-\xi)}{\alpha} \right)^{\frac{1}{k+1}} - 1 \right] + \beta \left[\frac{k\beta(1-\xi)}{\alpha} \right]^{-\frac{1}{k+1}}$

Daremos um esboço para as formas que o gráfico de $\phi(y)$ pode assumir. No caso $\xi > 1 - \frac{\alpha}{k\beta}$ teremos $y_m < 0$, porém não sabemos se $\phi(y_m)$ é maior, menor ou igual a zero, por isso daremos apenas um esboço parcial do gráfico neste caso.

Figura 3.22: gráfico de ϕ

Como $g_y(\kappa, y) = -\frac{1}{c} \frac{\kappa \phi'(y)}{\phi(y)^2}$ podemos concluir o sinal de g_y e o crescimento e decrescimento de g , como na Figura 3.23.

Figura 3.23: Variação de g

Além disso temos:

- $\lim_{y \rightarrow \left(\frac{k}{1-\xi}\right)^+} g(\kappa, y) = -\frac{1}{c}$
- $\lim_{y \rightarrow \infty} g(\kappa, y) = -\frac{1}{c}$
- $g(\kappa, 0) = -\frac{1}{c} \left(1 - \frac{\kappa}{\sigma + \alpha + \beta}\right)$
- $g(\kappa, y_m) = -\frac{1}{c} \left(\frac{\phi(y_m) - \kappa}{\phi(y_m)}\right).$

Observação:

- 1) • $g(\kappa, y) < 0 \Leftrightarrow \kappa < \sigma + \alpha + \beta$
- $g(\kappa, y) = 0 \Leftrightarrow \kappa = \sigma + \alpha + \beta$

- $g(\kappa, y) > 0 \Leftrightarrow \kappa > \sigma + \alpha + \beta$.

2) $y_m = 0 \Leftrightarrow \xi = 1 - \frac{\alpha}{k\beta}$

Denotaremos para este sistema,

$$\kappa_1 = \sigma + \alpha + \beta \quad (3.4)$$

$$\xi_t = 1 - \frac{\alpha}{k\beta}. \quad (3.5)$$

Desta maneira, podemos ter as seguintes possibilidades para o gráfico de g :

Figura 3.24: $\alpha < k\beta$ e $0 \leq \xi < \xi_t$, sistema (2.21)

Figura 3.25: $\alpha \leq k\beta$ e $\xi = \xi_t$, sistema (2.21) Figura 3.26: $\alpha < k\beta$ e $\xi_t < \xi < 1$, sistema (2.21)

Vale observar que $g(\kappa, y_m) = 0 \Leftrightarrow \kappa = \sigma + \alpha + \frac{\alpha}{1-\xi} \left[\left(\frac{k\beta(1-\xi)}{\alpha} \right)^{\frac{1}{k+1}} - 1 \right] + \beta \left[\frac{k\beta(1-\xi)}{\alpha} \right]^{-\frac{1}{k+1}}$. Denotaremos

$$\kappa_t = \sigma + \alpha + \frac{\alpha}{1-\xi} \left[\left(\frac{k\beta(1-\xi)}{\alpha} \right)^{\frac{1}{k+1}} - 1 \right] + \beta \left[\frac{k\beta(1-\xi)}{\alpha} \right]^{-\frac{1}{k+1}}. \quad (3.6)$$

κ_t é o valor para o qual $g(\kappa, y)$ tangencia o eixo-y. Quando $\xi = \xi_t$, teremos $\kappa_1 = \kappa_t = \sigma + \alpha + \beta$ e $g(\kappa_t, y_m) = g(\kappa_t, 0)$. Quando $\xi \neq \xi_t$, teremos $\kappa_t < \kappa_1$.

Observação: Pelo que vimos acima, nota-se que $\phi(y_m) = \kappa_t$.

2º Caso $\rightarrow \xi = 1$

Neste caso, $g(\kappa, y) = -\frac{1}{c} \left(1 - \frac{\kappa}{\sigma + \alpha + \beta + \frac{\alpha y}{k}} \right)$ (ver 2.32), logo temos que:

- $g_y(\kappa, y) = -\frac{\kappa\alpha}{ck} \frac{1}{(\sigma + \alpha + \beta + \frac{\alpha y}{k})^2} < 0$

- $g(\kappa, 0) = -\frac{1}{c} \left(1 - \frac{\kappa}{\sigma + \alpha + \beta} \right)$.
- $\lim_{y \rightarrow (-\frac{k}{a}(\sigma + \alpha + \beta))^+} g(\kappa, y) = +\infty$
- $\lim_{y \rightarrow +\infty} g(\kappa, y) = -\frac{1}{c}$

Assim teremos as seguintes possibilidades para o gráfico de g :

Figura 3.27: gráfico g para $\xi = 1$, sistema (2.21)

Neste caso definiremos $\kappa_1 = \sigma + \alpha + \beta$.

Pelos gráficos de g , podemos afirmar que $g(\kappa, y)$ tem no máximo duas raízes, as quais vamos denotar por $(0, y_1^*)$ e $(0, y_2^*)$.

3.2.2 Relação entre $\bar{y}(\xi)$ e $y_m(\xi)$. O parâmetro ξ_p

Vamos estudar o comportamento de y_m com relação a ξ , $0 \leq \xi < 1$.

- Vimos anteriormente que $y_m \geq 0 \Leftrightarrow \xi \leq \xi_t$.
- $y'_m(\xi) = \frac{k}{(1-\xi)^2} \left[\left(\frac{k\beta(1-\xi)}{\alpha} \right)^{\frac{1}{k+1}} \frac{k}{k+1} - 1 \right] \leq 0 \Leftrightarrow \xi \geq 1 - \frac{\alpha}{k\beta} \left(\frac{k+1}{k} \right)^{k+1}$. Portanto y_m é crescente para $\xi < 1 - \frac{\alpha}{k\beta} \left(\frac{k+1}{k} \right)^{k+1}$ e decrescente caso contrário, logo

$$\xi_m = 1 - \frac{\alpha}{k\beta} \left(\frac{k+1}{k} \right)^{k+1} \quad (3.7)$$

é um máximo para $y_m(\xi)$. Note que $\xi_t = 1 - \frac{\alpha}{k\beta} > \xi_m$.

- $y_m(0) = k \left(\sqrt[k+1]{\frac{k\beta}{\alpha}} - 1 \right)$
- $y_m(\xi_t) = 0$

•

$$\begin{aligned}
y_m''(\xi) &= \frac{2k}{(1-\xi)^3} \left[\left(\frac{k\beta(1-\xi)}{\alpha} \right)^{\frac{1}{k+1}} \frac{k}{k+1} - 1 \right] + \frac{k}{(1-\xi)^2} \left[\frac{k}{(k+1)^2} \left(\frac{k\beta(1-\xi)}{\alpha} \right)^{\frac{1}{k+1}-1} \left(-\frac{k\beta}{\alpha} \right) \right] \\
&= \frac{2k}{(1-\xi)^3} \left[\left(\frac{k\beta(1-\xi)}{\alpha} \right)^{\frac{1}{k+1}} \frac{k}{k+1} - 1 \right] - \frac{k^2}{(1-\xi)^3(k+1)^2} \left(\frac{k\beta(1-\xi)}{\alpha} \right)^{\frac{1}{k+1}} \\
&= \frac{k}{(1-\xi)^3} \left[\frac{k(2k+1)}{(k+1)^2} \left(\frac{k\beta(1-\xi)}{\alpha} \right)^{\frac{1}{k+1}} - 2 \right].
\end{aligned}$$

Portanto $y_m''(\xi) < 0 \Leftrightarrow \frac{k\beta(1-\xi)}{\alpha} < \left(\frac{2(k+1)^2}{k(2k+1)} \right)^{k+1} \Leftrightarrow \xi > 1 - \frac{\alpha}{k\beta} \left(\frac{2(k+1)^2}{k(2k+1)} \right)^{k+1}$. Denotaremos

$$\bar{\xi} = 1 - \frac{\alpha}{k\beta} \left(\frac{2(k+1)^2}{k(2k+1)} \right)^{k+1}. \quad (3.8)$$

Observe que $\bar{\xi} < \xi_m$ uma vez que $\left(\frac{2(k+1)^2}{k(2k+1)} \right)^{k+1} > \left(\frac{k+1}{k} \right)^{k+1}$. Além disso, y_m tem concavidade voltada para baixo para $\xi > \bar{\xi}$ e para cima caso contrário.

Portanto temos três possibilidades para o gráfico de y_m , dependendo da posição de ξ_m com relação a 0, veja Figura 3.29.

Estudemos agora o gráfico de $\bar{y}(\xi)$, para $0 \leq \xi < 1$:

- $\bar{y}(\xi)$ é crescente. De fato, $F(\bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} \bar{y} + \frac{\mu}{\beta} = \left(\frac{k}{(1-\xi)\bar{y}+k} \right)^k$. Derivando com relação a ξ obtemos:

$$\frac{\alpha}{\beta} \bar{y}'(\xi) = \left(\frac{k}{(1-\xi)\bar{y}+k} \right)^{k+1} (\bar{y} - (1-\xi)\bar{y}') \text{ e conseqüentemente } \bar{y}'(\xi) = \frac{\bar{y} \left(\frac{k}{(1-\xi)\bar{y}+k} \right)^{k+1}}{\frac{\alpha}{\beta} + (1-\xi) \left(\frac{k}{(1-\xi)\bar{y}+k} \right)^{k+1}} > 0.$$

- A concavidade de $\bar{y}(\xi)$ esta voltada para cima pois:

$$\frac{\alpha}{\beta} \bar{y}''(\xi) = (k+1) \left(\frac{k}{(1-\xi)\bar{y}+k} \right)^{k+1} \frac{(\bar{y} - (1-\xi)\bar{y}')^2}{(\bar{y}(1-\xi)+k)^2} + \left(\frac{k}{(1-\xi)\bar{y}+k} \right)^{k+1} (2\bar{y}' - (1-\xi)\bar{y}''(\xi))$$

- $\bar{y}(1) = \frac{\beta-\mu}{\alpha}$

- Temos que $\bar{y}(0)$ é determinado por $\frac{\alpha}{\beta} \bar{y} + \mu = \beta \left(\frac{k}{\bar{y}+k} \right)^k$, portanto $\bar{y}(0) < y_m(0)$ se $\mu < \beta$ com μ suficiente próximo de β . De fato, $y_m(0)$ independe de μ , portanto quando variamos μ , com $\mu \rightarrow \beta$, $\bar{y}(0) \rightarrow 0$ e se afasta de $y_m(0)$, veja Figura 3.28.

Figura 3.28: Posição de $\bar{y}(0)$ em relação a $y_m(0)$ para $\alpha < k\beta$

Logo exigindo que $\mu < \beta$ com μ suficiente próximo de β , teremos $\bar{y}(0) < y_m(0)$.

Pelos resultados obtidos acima, os gráficos de y_m e $\bar{y}$ como funções de ξ , assumem uma das seguintes formas dadas na Figura 3.29.

Figura 3.29: gráfico $y_m(\xi)$ e $\bar{y}(\xi)$ para $\alpha < k\beta$, $\mu < \beta$, $\mu \approx \beta$

$$\xi_m = 1 - \frac{\alpha}{k\beta} \left(\frac{k+1}{k} \right)^{k+1} \quad e \quad \xi_t = 1 - \frac{\alpha}{k\beta}$$

- No caso $\alpha < k\beta$ denotaremos por ξ_p , o ponto onde $\bar{y}(\xi_p) = y_m(\xi_p)$.

3.2.3 O parâmetro κ_2

Vamos verificar agora que existe κ_2 para o qual $g(\kappa, \bar{y}) = 0$, i.e, para o qual $\bar{y} = y^*$, o que será relevante para a obtenção dos pontos críticos do sistema (2.21) e para o estudo dos seus diagramas de bifurcação. Esta verificação será dividida em dois casos, $0 \leq \xi < 1$ e $\xi = 1$.

1º Caso $\rightarrow 0 \leq \xi < 1$

Neste caso,

- y^* é caracterizado por $\kappa - \alpha - \sigma - \frac{\alpha}{k}y^* = \beta \left(\frac{k}{(1-\xi)y^*+k} \right)^k$.
- $\bar{y}$ é caracterizado por $\alpha\bar{y} + \mu = \beta \left(\frac{k}{(1-\xi)\bar{y}+k} \right)^k$.

Portanto $g(\kappa, \bar{y}) = 0$ quando os gráficos de $P_1(y) = \kappa - \alpha - \sigma - \frac{\alpha}{k}y$, $P_2(y) = \alpha y + \mu$ e $P_3(y) = \beta \left(\frac{k}{(1-\xi)y+k} \right)^k$ se interceptam num único ponto, veja Figura 3.30. Denotaremos por κ_2 o valor do parâmetro κ para o qual $\bar{y} = y^*$.

Figura 3.30: Obtenção de κ_2 , sistema (2.21)

2º Caso $\rightarrow \xi = 1$

Como

- $\bar{y} = \frac{\beta - \mu}{\alpha}$ e $y^* = \frac{k}{\alpha}\kappa - \frac{k}{\alpha}(\sigma + \alpha + \beta)$,

então, $\kappa_2 = \frac{\beta - \mu}{k} + \alpha + \beta$. Observe que $\kappa_1 < \kappa_2$.

3.2.4 Posição relativa entre $\bar{y}$ e as raízes y^* de g

É importante também saber a localização de $\bar{y}$ com respeito a y_m e as raízes de $g(\kappa, y)$, para se obter futuramente os pontos críticos do sistema (2.21). Faremos os cálculos para o caso $0 \leq \xi < 1$, uma vez que para $\xi = 1$, $g(\kappa, y)$ não tem máximo.

Observe que:

- $g(\kappa_2, \bar{y}) = 0$
- para $\xi \in]0, 1[$ a expressão de g é dada por (2.31), logo

$$g_\kappa(\kappa, y) = -\frac{1}{c} \left[-\frac{\sigma + \alpha + \frac{\alpha y}{k} + \beta \left(\frac{k}{(1-\xi)y+k} \right)^k}{\left(\sigma + \alpha + \frac{\alpha y}{k} + \beta \left[\frac{k}{(1-\xi)y+k} \right]^k \right)^2} \right] > 0,$$

i.e, o gráfico de $g(\kappa, y)$ move-se no sentido positivo do eixo-x quando aumentamos κ .

Vamos então fixar ξ e variar κ para obter algumas formas para o gráfico de g .

i) Para $\xi = \xi_t$, lembramos que $g(\kappa_1, y_m) = 0$ e $\kappa_1 < \kappa_2$. Neste caso temos as seguintes seqüências para o gráfico de g , variando κ .

Figura 3.31: $\xi = \xi_t$, sistema (2.21)

ii) Para $\xi_p < \xi < \xi_t$, com $\xi \approx \xi_t$, temos que $0 < y_m < \bar{y}$ e que $\kappa_t < \kappa_1 < \kappa_2$. Neste caso temos as seguintes seqüências para o gráfico de g , quando variamos κ :

Figura 3.32: $\xi_p < \xi < \xi_t$, sistema (2.21)

iii) Para $\xi = \xi_p$, temos $\bar{y} = y_m$ e $\kappa_t = \kappa_2$. Neste caso temos as seguintes seqüências para o gráfico de g , quando variamos κ :

Figura 3.33: $\xi = \xi_p$, sistema (2.21)

iv) Para $0 < \xi < \xi_p$ temos $0 < \bar{y} < y_m$. Neste caso, o gráfico de g vai tangenciar o eixo y antes de colidir com $(0, \bar{y})$ e vai colidir com o ponto $(0, \bar{y})$, antes de colidir com o ponto $(0, 0)$. Isto significa que teremos $\kappa_t < \kappa_2 < \kappa_1$. Neste caso temos as seguintes seqüências para o gráfico de g , quando variamos κ :

Figura 3.34: $0 < \xi < \xi_p$, sistema (2.21)

v) Para $\xi = 1$, lembramos que $\kappa_1 < \kappa_2$. Daremos abaixo a ilustração geométrica das posições entre $\bar{y}$ e y^* .

Figura 3.35: $\xi = 1$, sistema 2.21

3.3 Pontos críticos

Como vimos nas seções 3.1 e 3.2, os pontos que anulam a primeira equação do sistema (2.23), unificação dos sistemas (2.19) e (2.21), são dados por $x=0$ e $y = \bar{y}$. Por outro lado, os pontos que anulam a segunda são dados por $y=0$ e por $x = g(\kappa, y)$. Portanto podemos obter no máximo quatro pontos críticos:

- 1) O ponto crítico trivial $x=0$ e $y=0$
- 2) No máximo dois pontos críticos do tipo $(0, y^*)$ onde y^* é dado por $G(\kappa, 0, y^*) = 0$.
- 3) No máximo um ponto crítico do tipo $(\bar{x}, \bar{y})$, dado por $F(\bar{y}) = 0$ e $G(\kappa, x, \bar{y}) = 0$.
- 4) No caso $\xi = 0$ para o sistema (2.19), é natural incluir a reta $y = 1$ na região M, uma vez que neste caso $(0, 1)$ também é ponto crítico.

A Figura abaixo ilustra geometricamente os tipos de pontos críticos que podemos ter para o sistema (2.19), quando $0 < \xi < 1$, e para o sistema (2.21) quando $0 \leq \xi < 1$.

Figura 3.36: Pontos críticos. sistema (2.19), $0 < \xi < 1$. sistema (2.21), $0 \leq \xi < 1$.

A Figura 3.37 (a) ilustra os tipos de pontos críticos que podemos ter para o sistema (2.19) no caso $\xi = 0$. A Figura 3.37 (b) ilustra os tipos de pontos críticos que podemos ter para o sistema (2.19) no caso $\xi = 1$. A Figura 3.37 (c), ilustra os tipos de pontos críticos que podemos ter para o sistema (2.21) no caso $\xi = 1$.

Figura 3.37: Pontos críticos

Agora analisaremos os pontos críticos hiperbólicos do sistema (2.23). No próximo Capítulo, analisaremos os pontos críticos não hiperbólicos do tipo $(\bar{x}, \bar{y})$.

i) *Ponto crítico $(0,0)$*

Neste caso, a jacobiana do sistema 2.23 avaliada no ponto $(0,0)$ é dada por:

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} F(0) & 0 \\ 0 & G(0,0) \end{bmatrix}.$$

Portanto, os autovalores associados a $J(0,0)$ são:

- $\lambda_1 = F(0)$
- $\lambda_2 = G(0,0)$.

De acordo com a condição I(i) de (2.25) segue que $F(0) < 0$, assim a estabilidade do ponto crítico $(0,0)$ é determinada pelo sinal de $G(0,0)$ e, conseqüentemente, pelo sinal de $g(0)$, como ilustra a Figura 3.38. No caso $g(0) < 0$, equivalente a $\kappa < \kappa_1$, $(0,0)$ é um nó atrator e, no caso $g(0) > 0$, equivalente a $\kappa > \kappa_1$, ele é um ponto de sela.

Figura 3.38: $0 < \xi < 1$

ii) *Ponto crítico $(0, y^*)$ com $y^* > 0$*

Neste caso, a jacobiana do sistema (2.23) é dada por:

$$J(0, y^*) = \begin{bmatrix} F(y^*) & 0 \\ y^* G_x(0, y^*) & y^* G_y(0, y^*) \end{bmatrix}.$$

e os autovalores são dados por

- $\lambda_1 = F(y^*)$

- $\lambda_2 = y^* G_y(0, y^*)$.

De acordo com a condição I(i) de (2.25), o sinal do primeiro autovalor depende da posição de y^* em relação a $\bar{y}$. De fato, se $y^* < \bar{y} \Rightarrow F(y^*) < 0$, portanto $\lambda_1 < 0$, agora se $y^* > \bar{y} \Rightarrow F(y^*) > 0$, portanto $\lambda_1 > 0$. A partir do Teorema da Função Implícita temos

$$G(\kappa, g(\kappa, y), y) = 0 \Rightarrow G_x g_y + G_y = 0 \Rightarrow g_y = -\frac{G_y}{G_x}.$$

Conseqüentemente, o sinal de $G_y(0, y^*)$ (e portanto o sinal do segundo autovalor) é igual ao sinal de $g_y(y^*)$ pois $G_x < 0$ (condição I(ii) de (2.25)). Assim podemos ter os seguintes casos:

- 1- $0 < y^* < \bar{y}$ e $g_y(y^*) > 0 \Rightarrow \lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$; neste caso $(0, y^*)$ é uma sela
- 2- $0 < y^* < \bar{y}$ e $g_y(y^*) < 0 \Rightarrow \lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$; neste caso $(0, y^*)$ é um nó atrator
- 3- $0 < \bar{y} < y^*$ e $g_y(y^*) < 0 \Rightarrow \lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$; neste caso $(0, y^*)$ é uma sela
- 4- $0 < \bar{y} < y^*$ e $g_y(y^*) > 0 \Rightarrow \lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$; neste caso $(0, y^*)$ é um nó repulsor.

Estes casos estão ilustrados na Figura 3.39(a), (b), (c), (d) e (e).

Figura 3.39: pontos críticos para o sistema (2.23)

Observe que, para o sistema (2.19):

Se $\xi = 0$, $g_y > 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$, assim podemos ter os seguintes casos:

- 1- $0 < y^* < \bar{y} \Rightarrow \lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$; neste caso $(0, y^*)$ é uma sela
- 2- $0 < \bar{y} < y^* \Rightarrow \lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$; neste caso $(0, y^*)$ é um nó repulsor.

Se $\xi = 1$, $g_y < 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$, assim podemos ter os seguintes casos:

- 1- $0 < y^* < \bar{y} \Rightarrow \lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$; neste caso $(0, y^*)$ é um nó atrator
- 2- $0 < \bar{y} < y^* \Rightarrow \lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$; neste caso $(0, y^*)$ é uma sela

Por outro lado, para o sistema (2.21), se $\xi = 1$, $g_y < 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$, e as conclusões são as mesmas que para o sistema (2.19) caso $\xi = 1$.

iii) Ponto crítico $(\bar{x}, \bar{y})$ com $\bar{x} > 0$

$$J(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{bmatrix} 0 & \bar{x}F'(\bar{y}) \\ \bar{y}G_x(\bar{x}, \bar{y}) & \bar{y}G_y(\bar{x}, \bar{y}) \end{bmatrix}.$$

As condições I(i) e I(ii) implicam que o $\det J(\bar{x}, \bar{y}) = -\bar{x}F'(\bar{y})\bar{y}G_x(\bar{x}, \bar{y})$ é positivo, assim a natureza de $(\bar{x}, \bar{y})$ depende do sinal do traço, $\text{tr } J(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y}G_y(\bar{x}, \bar{y})$ e, conseqüentemente do sinal de $g_y(\bar{y})$. Note que o sinal de $g_y(\bar{y})$ vai depender da posição de $\bar{y}$ com relação a y_m .

No caso do sistema (2.19):

- se $\xi > \xi_p$ temos $\bar{y} > y_m$ logo $g_y(\bar{y}) < 0$ então $(\bar{x}, \bar{y})$ é um foco (ou nó) atrator, isto dependerá do sinal do discriminante, $\Delta = \bar{y}^2 G_y^2(\bar{x}, \bar{y}) + 4\bar{y}G_x(\bar{x}, \bar{y})\bar{x}F'(\bar{y})$, se for menor ou maior que 0, respectivamente.
- se $0 < \xi < \xi_p$ temos $\bar{y} < y_m$ logo $g_y(\bar{y}) > 0$ e $(\bar{x}, \bar{y})$ é um foco (ou nó) repulsor, isto dependerá do sinal do discriminante, $\Delta = \bar{y}^2 G_y^2(\bar{x}, \bar{y}) + 4\bar{y}G_x(\bar{x}, \bar{y})\bar{x}F'(\bar{y})$, se for menor ou maior que 0, respectivamente.

Vale o mesmo para o sistema (2.21) desde que $\mu < \beta$ com μ suficientemente próximo de β (veja Figuras 3.12 e 3.29).

Agora note que, para o sistema (2.19):

- se $\xi = 0 \Rightarrow g_y > 0 \forall y \in \mathbb{R}$, logo quando existir $(\bar{x}, \bar{y})$ é um foco (ou nó) repulsor, isto dependerá do sinal do discriminante, $\Delta = \bar{y}^2 G_y^2(\bar{x}, \bar{y}) + 4\bar{y}G_x(\bar{x}, \bar{y})\bar{x}F'(\bar{y})$, se for menor ou maior que 0, respectivamente.
- se $\xi = 1 \Rightarrow g_y < 0 \forall y \in \mathbb{R}$, logo quando existir $(\bar{x}, \bar{y})$ é um foco (ou nó) atrator, isto dependerá do sinal do discriminante, $\Delta = \bar{y}^2 G_y^2(\bar{x}, \bar{y}) + 4\bar{y}G_x(\bar{x}, \bar{y})\bar{x}F'(\bar{y})$, se for menor ou maior que 0, respectivamente.

Por outro lado, para o sistema (2.21), se $\xi = 1$, $g_y < 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$, logo as conclusões são as mesmas que para o sistema (2.19), caso $\xi = 1$.

iv) Ponto crítico $(0, 1)$ no caso $\xi = 0$ para o sistema (2.19)

Neste caso, a jacobiana do sistema (2.23) avaliada no ponto $(0, 1)$ é dada por:

$$J(0, 1) = \begin{bmatrix} F(1) & 0 \\ G_x(0, 1) & G_y(0, 1) \end{bmatrix}.$$

portanto, os autovalores associados a $J(0, 1)$ são:

- $\lambda_1 = F(1) > 0$
- $\lambda_2 = G_y(0, 1) = \alpha - \kappa$.
- Se $\kappa < \kappa_t = \alpha$ temos que $\lambda_2 > 0$, logo $(0, 1)$ é nó instável
- Se $\kappa > \kappa_t = \alpha$ temos que $\lambda_2 < 0$, logo $(0, 1)$ é sela.

Observação: Os autovalores associados a $J(\bar{x}, \bar{y})$ são:

$$\begin{aligned} \bullet \lambda_1 &= \frac{\bar{y}G_y(\bar{x}, \bar{y}) + \sqrt{\bar{y}^2 G_y^2(\bar{x}, \bar{y}) + 4\bar{y}G_x(\bar{x}, \bar{y})\bar{x}F'(\bar{y})}}{2} \\ \bullet \lambda_2 &= \frac{\bar{y}G_y(\bar{x}, \bar{y}) - \sqrt{\bar{y}^2 G_y^2(\bar{x}, \bar{y}) + 4\bar{y}G_x(\bar{x}, \bar{y})\bar{x}F'(\bar{y})}}{2}. \end{aligned}$$

Quando $\xi = \xi_p$, $y_m = \bar{y}$, conseqüentemente $g_y(\bar{y}) = G_y(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ e, portanto teremos

$$\lambda(\xi) = \frac{\sqrt{+4\bar{y}G_x(\bar{x}, \bar{y})\bar{x}F'(\bar{y})}}{2}$$

que é imaginário puro uma vez que $G_x(\bar{x}, \bar{y}) < 0$ e $F'(\bar{y}) > 0$. Agora para $\xi \in (\xi_p - \varepsilon, \xi_p + \varepsilon)$, $\lambda(\xi)$ ainda é complexo mas não é imaginário puro, e temos que:

- para $\xi_p < \xi < \xi_p + \varepsilon$, $Re\lambda(\xi) = \frac{\bar{y}G_y(\bar{x}, \bar{y})}{2} < 0$, pois $y_m < \bar{y}$
- para $\xi = \xi_p$, $Re\lambda(\xi) = \frac{\bar{y}G_y(\bar{x}, \bar{y})}{2} = 0$, pois $y_m = \bar{y}$
- para $\xi_p - \varepsilon < \xi < \xi_p$, $Re\lambda(\xi) = \frac{\bar{y}G_y(\bar{x}, \bar{y})}{2} > 0$, pois $y_m > \bar{y}$.

Isto nos induz a um estudo mais detalhado sobre a natureza deste ponto crítico para o parâmetro ξ_p , uma vez que esta observação sugere ocorrência de bifurcação de Hopf neste parâmetro. Este estudo será feito no próximo capítulo.

Consideraremos agora κ fixado e por enquanto, o anularemos da notação. Mostraremos agora que, exceto para o sistemas(2.19) caso $\xi = 0$, a região $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, 0 \leq y < b\}$, onde $b = 1$ ou $b = \infty$, é positivamente invariante e contém uma região Q que absorve todas as órbitas do primeiro quadrante:

Proposição 3.3.1 *O conjunto M é positivamente invariante e existe uma região Q limitada, $Q \subset M$, que absorve todas as órbitas do primeiro quadrante. Quando g não tem zero à direita de $\bar{y}$, as órbitas convergem para pontos críticos do segmento do eixo- y entre 0 e $\bar{y}$; quando g não tem raízes reais em M , $(0,0)$ é globalmente assintoticamente estável (veja Figura 3.40).*

Figura 3.40:

Prova.

Observemos primeiramente que os eixos x e y são invariantes, já que $X(0,y) = (0, yG(0,y))$ e $X(x,0) = (xF(0),0)$. Agora basta verificar o comportamento do campo na reta $y=b=1$, no caso do sistema (2.19). Como

$$X(x, 1) = \left(x(\mu + \alpha - \beta(1 - (1 - \xi))^2), -\beta(1 - (1 - \xi)^2) \right) = \left(x(\mu + \alpha - \beta\xi^2), -\beta\xi^2 \right),$$

e, por (2.24), $\mu + \alpha - \beta\xi^2 < 0$, então o campo se comporta na fronteira de M , como na Figura 3.41. Assim concluímos que M é invariante.

Vamos mostrar agora que existe uma região limitada, $Q \subset M$, que absorve todas as órbitas do primeiro quadrante. Escolha $\tilde{y}$ tal que, $\bar{y} < \tilde{y} < b$ com $g(y) < 0$ para $y > \tilde{y}$ e

$$\tilde{x} > \sup_{0 \leq y < b} g(y).$$

Então, ao longo da reta $y = \tilde{y}$ com $x \geq \tilde{x}$ temos que $G(x, \tilde{y}) < 0$ (veja Figura 3.38).

Seja $-\eta = \max\{G(\tilde{x}, y); \bar{y} \leq y \leq \tilde{y}\}$. Temos que $G(x, y) \geq -\eta$ em $S = \{(x, y); x \geq \tilde{x}, \bar{y} \leq y \leq \tilde{y}\}$ pois como G é decrescente em x , então para $x \geq \tilde{x}$, $G(x, y) \leq G(\tilde{x}, y) \leq -\eta < 0$.

Denote por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ a órbita tal que $\gamma(0) = (\tilde{x}, \tilde{y})$. Uma vez que $F(\tilde{y}) > 0$ e $G(\tilde{x}, \tilde{y}) < 0$, a trajetória $\gamma(t)$ entra em S . Como em S temos $xF(y) \geq 0$ (pois $y \geq \bar{y}$) e $yG(x, y) \leq 0$ (uma vez que $x \geq \tilde{x}$ e $\bar{y} \leq y \leq \tilde{y}$) então $x(t)$ é crescente e $y(t)$ é decrescente. Desta forma, num tempo finito $\gamma(t)$ atinge a reta $y = \bar{y}$ quando $x = x_0 > \tilde{x}$, caso não atingisse tal

Figura 3.41: Região M do sistema (2.19)

reta, a órbita teria uma assíntota horizontal em S, isto significa que o numerador do quociente $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ se anulava em algum ponto de S, o que não é verdade.

Considere agora a região Q limitada pelos eixos x e y, as retas $x = x_0$ e $y = \bar{y}$ e a parte de $\gamma(t)$ dentro de S (veja Figura 3.42).

Afirmamos que Q é positivamente invariante. De fato,

- 1) os eixos x e y são invariantes;
- 2) na reta $x = x_0$ com $y \leq \bar{y}$, temos $X(x_0, y) = (x_0 F(y), y G(x_0, y))$ com $x_0 F(y) \leq 0$ e $y G(x_0, y) < 0$;
- 3) Na reta $y = \bar{y}$ temos, $X(x, \bar{y}) = (x F(\bar{y}), \bar{y} G(x, \bar{y}))$ com $F(\bar{y}) > 0$ e $G(x, \bar{y}) < 0$;
- 4) $\gamma(t)$ entra em Q após atingir $(x_0, \bar{y})$ devido ao comportamento do campo visto em 2). (Ver Figura 3.42).

Considere agora uma trajetória qualquer em S, mas não em Q. Usando argumentos análogos aos usados acima, concluímos que ela atinge a reta $y = \bar{y}$ em algum ponto de abscissa $x_1 > x_0$ e que entra na região $\{(x, y); x_0 < x < x_1, 0 < y < \bar{y}\}$, onde temos $\dot{x} < 0$ e $\dot{y} < 0$. Conseqüentemente ela entra em Q pela fronteira $x = x_0$, pois na região acima não existe ponto crítico.

Finalmente, considere qualquer trajetória partindo com $y > \bar{y}$. Defina $\zeta = -\sup\{G(0, y); \bar{y} \leq y < b\}$. Assim, usando os mesmos argumentos usados anteriormente, conclui-se que a trajetória atinge a reta $y = \bar{y}$, pois $\dot{x} > 0$ e $\dot{y} < 0$ para $y > \bar{y}$ e $x \geq 0$. Assim a trajetória entra em Q e está terminado, ou ela entra em S e usamos o resultado que órbitas que partem de S entram em Q.

No caso que g não tem zeros à direita de $\bar{y}$, i.e, $g(y) < 0, \forall y > \bar{y}$, afirmamos que a faixa

Figura 3.42: a Região Q

$R = \{(x, y); x \geq 0 \text{ e } 0 \leq y < \bar{y}\}$ é positivamente invariante e absorvente. De fato, os eixos x e y são invariantes e, o comportamento do campo na reta $y = \bar{y}$, é dado como na Figura 3.43 já que $X(x, \bar{y}) = (0, \bar{y}G(x, \bar{y}))$ com $G(x, \bar{y}) < 0$; se $\gamma(t)$ é uma órbita que começa no primeiro

Figura 3.43:

quadrante fora de R , pelos argumentos anteriores, ela intercepta (verticalmente) a reta $y = \bar{y}$ em um tempo finito. Depois que $\gamma(t)$ entra em R , $x(t)$ é decrescente e $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Assim R absorve órbitas e qualquer órbita tende para o segmento do eixo- y entre 0 e $\bar{y}$.

No caso particular em que g não tem raízes reais em M , teremos apenas o ponto crítico $(0,0)$, além disso, $\dot{y} < 0$ em R , assim $y(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, logo $(0,0)$ é globalmente atrator. Isto completa a prova da proposição. ■

3.4 Algumas simulações para obtenção de retratos de fase

Nesta seção, daremos um esboço do retrato de fase do sistema (2.19), para alguns valores dos parâmetros. Observe que a relação entre os valores dos parâmetros, nos fornece o número de pontos críticos que o sistema possui, enquanto que a natureza desses pontos críticos é determinada pelo sinal do vetor ($\text{sign } g(0)$, $\text{sign } g(\bar{y})$, $\text{sign } g_y(\bar{y})$). As simulações para se obter os retratos de fase, foram feitas com o software MAPLE V, (ver [8]).

1 - Considere o sistema (2.19) com parâmetros $\mu = 1.2$, $\alpha = 1.0$, $\beta = 1.8$, $\xi = 0.7$, $c = 1.0$, $\kappa = 2.85$, $\kappa_t = 1.51$, $\kappa_1 = 2.8$, $\kappa_2 = 3.14$. Neste caso temos os pontos críticos $(0, 0)$ e $(0, y^*)$. Como $(\text{sign } g(0), \text{sign } g(\bar{y}), \text{sign } g_y(\bar{y})) = (+, -, -)$, concluímos que $(0, 0)$ é uma sela hiperbólica e $(0, y^*)$ é um atrator hiperbólico (veja Figura 3.44).

Figura 3.44:

2 - Considere o sistema (2.19) com parâmetros $\mu = 1.2$, $\alpha = 1.0$, $\beta = 1.8$, $\xi = 0.58$, $c = 0.0001$, $\kappa = 4.0$, $\kappa_t = 2.75$, $\kappa_1 = 2.8$, $\kappa_2 = 3.03$. Neste caso temos os pontos críticos $(0, 0)$, $(0, y^*)$ e $(\bar{x}, \bar{y})$. Como $(\text{sign } g(0), \text{sign } g(\bar{y}), \text{sign } g_y(\bar{y})) = (+, +, -)$, $(0, 0)$ é uma sela hiperbólica, $(0, y^*)$ é uma sela hiperbólica e $(\bar{x}, \bar{y})$ é um atrator hiperbólico (veja Figura 3.45).

Figura 3.45:

3 - Considere o sistema (2.19) com parâmetro $\mu = 1.2$, $\alpha = 1.0$, $\beta = 1.8$, $\xi = 0.44$, $c = 0.1$, $\kappa = 4$, $\kappa_t = 2.77$, $\kappa_1 = 3.0$, $\kappa_2 = 2.9$. Neste caso temos os pontos críticos $(0, 0)$, $(0, y^*)$ e $(\bar{x}, \bar{y})$. Como $(\text{sign } g(0), \text{sign } g(\bar{y}), \text{sign } g_y(\bar{y})) = (+, +, +)$, $(0, 0)$ é uma sela hiperbólica, $(0, y^*)$ é uma sela hiperbólica e $(\bar{x}, \bar{y})$ é um repulsor hiperbólico (veja Figura 3.46).

Figura 3.46:

4 - Finalmente, considere o sistema (2.19) com parâmetros $\mu = 1.2$, $\alpha = 1.0$, $\beta = 1.8$, $\xi = 0.3$, $c = 0.1$, $\kappa = 3.2$, $\kappa_t = 2.51$, $\kappa_1 = 3.0$, $\kappa_2 = 2.83$. Neste caso temos os pontos críticos $(0, 0)$, $(0, y^*)$ e $(\bar{x}, \bar{y})$. Como $(\text{sign } g(0), \text{sign } g(\bar{y}), \text{sign } g_y(\bar{y})) = (+, +, +)$, $(0, 0)$ é uma sela hiperbólica, $(0, y^*)$ é uma sela hiperbólica e $(\bar{x}, \bar{y})$ é um repulsor hiperbólico (veja Figura 3.47).

Figura 3.47:

3.5 Diagramas de bifurcação

Nesta seção, faremos os diagramas de bifurcação no plano $\kappa - y$, para observar a transição do retrato de fase com a variação do parâmetro κ , fixado ξ . Antes de iniciarmos esta investigação, note que o sinal de $g_y(\kappa, \bar{y})$ não depende de κ , em outras palavras, a natureza do ponto crítico

interior $(\bar{x}, \bar{y})$ não muda quando variamos κ . De fato, já que o sinal de g_y é idêntico ao sinal de G_y (conforme já vimos na seção 3.3), basta observar que para o sistema (2.19)

$$G_y(\kappa, g(\kappa, \bar{y}), \bar{y}) = -\beta \frac{(1 - (1 - \xi)\bar{y})^2}{1 - \bar{y}} + 2\beta(1 - \xi)(1 - (1 - \xi)\bar{y}),$$

e para o sistema (2.21)

$$G_y(\kappa, g(\kappa, \bar{y}), \bar{y}) = -\frac{\alpha}{k} + \frac{\beta \left(\frac{k}{(1 - \xi)\bar{y} + k} \right)^k k(1 - \xi)}{(1 - \xi)\bar{y} + k},$$

que não dependem de κ . Em consequência, a terceira componente do vetor $(\text{sign } g(0), \text{sign } g(\bar{y}), \text{sign } g_y(\bar{y}))$ permanece constante quando κ varia.

Para a construção dos diagramas de bifurcação, estudaremos abaixo a variação da função $\kappa(y^*)$ de cada sistema. Primeiramente consideraremos o sistema (2.19) e em seguida (2.21).

1º Caso $\rightarrow$ sistema(2.19) :

Aqui, y^* é caracterizado por $(\kappa - \alpha)(1 - y) = \beta(1 - (1 - \xi)y)^2$, isto é, $\kappa(y) = \alpha + \frac{\beta[1 - (1 - \xi)y]^2}{1 - y}$, logo temos que $\kappa'(y) = \frac{1 - (1 - \xi)y}{(1 - y)^2} \left\{ \beta[1 - (1 - \xi)y](1 - \xi) + \beta[1 - (1 - \xi)y]^2 \right\}$.

i) Para $0 < \xi < 1$, $\kappa'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1 - 2\xi}{1 - \xi}$. Assim, podemos apresentar o crescimento e decrescimento de $\kappa(y)$ como na Figura 3.48.

Figura 3.48: variação de $\kappa(y)$, $0 < \xi < 1$, sistema (2.19)

Além disso:

- $\kappa\left(\frac{1-2\xi}{1-\xi}\right) = \alpha + 4\beta\xi(1 - \xi)$
- $\kappa(0) = \alpha + \beta$
- $\lim_{y \rightarrow 1^+} \kappa(y) = \infty$

ii) Para $\xi = 0$, temos que $y^*(\kappa) = 1 - \frac{\kappa - \alpha}{\beta}$.

iii) Para $\xi = 1$, $y^*(\kappa) = 1 - \frac{\beta}{\kappa - \alpha}$.

Observação: 1- No caso do sistema (2.19), quando $0 < \xi < 1$ a curva $y^*(\kappa)$ tende assintoticamente para a reta $y = 1$ quando $\kappa \rightarrow \infty$. Devemos ficar atentos a essa observação ao estudar os diagramas de bifurcação, uma vez que não colocamos nos diagramas o limite para a curva $y^*(\kappa)$.

2º Caso $\rightarrow$ sistema (2.21) :

Aqui, y^* é caracterizado por $(\kappa + \sigma + \alpha) = \frac{\alpha}{k} - \beta \left(\frac{k}{(1-\xi)y+k} \right)^k$, isto é, $\kappa(y) = \sigma + \alpha + \frac{\alpha}{k}y + \beta \left(\frac{k}{(1-\xi)y+k} \right)^k$, logo temos que $\kappa'(y) = \frac{\alpha}{k} - \beta(1-\xi) \left(\frac{k}{(1-\xi)y+k} \right)^{k+1}$.

i) Para $0 \leq \xi < 1$, $\kappa'(y) = 0 \Leftrightarrow y_m = \frac{k}{1-\xi} \left(\left[\frac{k\beta(1-\xi)}{\alpha} \right]^{\frac{1}{k+1}} - 1 \right)$. Assim, podemos apresentar o crescimento e decrescimento de $\kappa(y)$ como na Figura 3.49.

Figura 3.49: variação de $\kappa(y)$, $0 \leq \xi < 1$, sistema (2.21)

Além disso:

- $\kappa \left(\frac{k}{1-\xi} \left(\left[\frac{k\beta(1-\xi)}{\alpha} \right]^{\frac{1}{k+1}} - 1 \right) \right) = \sigma + \alpha + \frac{\alpha}{1-\xi} \left[\left(\frac{k\beta(1-\xi)}{\alpha} \right)^{\frac{1}{k+1}} - 1 \right] + \beta \left[\frac{k\beta(1-\xi)}{\alpha} \right]^{-\frac{1}{k+1}}$
- $\kappa(0) = \sigma + \alpha + \beta$
- $\lim_{y \rightarrow \infty} \kappa(y) = \infty$

ii) Para $\xi = 1$, $y^*(\kappa) = \frac{k}{\alpha}\kappa + \frac{k}{\alpha}(\kappa + \sigma + \alpha)$.

Já estamos em condições de construir os diagramas de bifurcação. Partiremos da situação na qual $g(y) < 0$, $\forall y \geq 0$ (ou seja, $(0,0)$ é globalmente atrator). Denotaremos esta situação simbolicamente por $(-)$. Dependendo da forma do gráfico de g , obtemos uma das seguintes seqüências de transição quando aumentamos κ , válidas para os dois sistemas, (2.19) e (2.21).

Diagrama 1 $(-) \rightarrow (-,-,+) \rightarrow (-,+,+) \rightarrow (+,+,+)$, quando $\xi = 0$.

Figura 3.50: $\xi = 0$, sistema (2.19)

Diagrama 2 $(-) \rightarrow (-,-,+) \rightarrow (-,+,+) \rightarrow (+,+,+)$, para $\xi = 0$.

Figura 3.51: $\xi = 0$, sistema (2.21)

Diagrama 3 $(-) \rightarrow (-,-,+) \rightarrow (-,+,+) \rightarrow (+,+,+)$, para $0 < \xi < \xi_p$, com ξ suficientemente próximo de ξ_p .

Figura 3.52: $0 < \xi < \xi_p$, $\xi \approx \xi_p$, sistemas (2.19) e (2.21)

Diagrama 4 $(-) \rightarrow (-,+, -) \rightarrow (+,+, -)$, para $\xi = \xi_p$.

Figura 3.53: $\xi = \xi_p$, sistemas (2.19) e (2.21)

Diagrama 5 $(-) \rightarrow (-, +, -) \rightarrow (+, +, -)$, para $\xi_p < \xi < \xi_t$, ξ suficientemente próximo de ξ_p

Figura 3.54: $\xi_p < \xi < \xi_t$, $\xi \approx \xi_p$, sistemas (2.19) e (2.21)

Diagrama 6 $(-) \rightarrow (+, -, -) \rightarrow (+, +, -)$, para $\xi_p < \xi < \xi_t$, ξ suficientemente próximo de ξ_t

Figura 3.55: $\xi_p < \xi < \xi_t$, $\xi \approx \xi_t$, sistemas (2.19) e (2.21)

Diagrama 7 $(-) \rightarrow (+, -, -) \rightarrow (+, -, -)$, para $\xi = \xi_t$

Figura 3.56: $\xi = \xi_t$, sistemas (2.19) e (2.21)

Diagrama 8 $(-) \rightarrow (+, -, -) \rightarrow (+, -, -)$, para $\xi_t < \xi < 1$.

Figura 3.57: $\xi > \xi_t$, sistemas (2.19) e (2.21)

Diagrama 9 $(-) \rightarrow (-,-,-) \rightarrow (-,+,-) \rightarrow (+,+,-)$, para $\xi = 1$.

Figura 3.58: $\xi = 1$, sistema (2.19)

Diagrama 10 $(-) \rightarrow (-,-,-) \rightarrow (-,+,-) \rightarrow (+,+,-)$, quando $\xi = 1$.

Figura 3.59: $\xi = 1$, sistema (2.21)

Capítulo 4

Bifurcação de Hopf e unicidade de órbitas periódicas

Neste Capítulo temos dois objetivos principais. Primeiramente na seção 4.1, provaremos a ocorrência de bifurcação de Hopf nos sistemas (2.19) e (2.21) e, conseqüentemente nos sistemas (2.4) e (2.18). Em seguida provaremos que se o sistema (2.23), em M , tiver órbita periódica não trivial, então ela é única. Para isto, na seção 4.2.1 faremos uma mudança de variáveis para transformar os sistemas (2.19) e (2.21) em sistemas generalizados de Liénard e, na subseção 4.2.2 daremos os resultados sobre órbitas periódicas para ambos os sistemas.

4.1 Sobre órbitas periódicas. Bifurcação de Hopf

Inicialmente mostraremos na Proposição 4.1.1 que para $\xi > \xi_t$ e qualquer $\kappa > 0$, ambos os sistemas, (2.19) e (2.21), não admitem órbitas periódicas em M . Para isso, usaremos o seguinte:

Teorema 4.1.1 (Dulac)

Considere o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \end{cases} \quad (4.1)$$

onde, P e Q são funções C^1 num aberto G simplesmente conexo do $\mathbb{R}^2$. Então, se existe uma função $B : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , tal que $\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y}$ tem sinal constante e não é identicamente nulo em nenhum aberto ($\neq \emptyset$) de G , o sistema (4.1) não possui órbitas fechadas em G .

Prova.

A prova deste teorema pode ser encontrada em [19] ■

Proposição 4.1.1 Para $\xi > \xi_t$, os sistemas (2.19) e (2.21), não admitem órbitas periódicas em M .

Prova.

Consideraremos inicialmente o sistema (2.19) e, em seguida, o sistema (2.21).

Para o sistema (2.19):

Considere em $\overset{\circ}{M}$ a função

$$B(x, y) = \frac{1}{xy(1-y)}.$$

É fácil ver que para $\xi > \xi_t$,

$$\frac{\partial}{\partial x} (B(x, y)x F(y)) + \frac{\partial}{\partial y} (B(x, y)y G(\kappa, x, y)) = -\frac{\beta(1 - (1 - \xi)y)}{x(1 - y)^2} ((1 - \xi)y + 2\xi - 1) < 0$$

$\forall (x, y) \in \overset{\circ}{M}$.

Para o sistema (2.21):

Considere em $\overset{\circ}{M}$ a função

$$B(x, y) = \frac{1}{xy}.$$

Logo temos que

$$\frac{\partial}{\partial x} (B(x, y)x F(y)) + \frac{\partial}{\partial y} (B(x, y)y G(\kappa, x, y)) = \frac{1}{x} G_y(\kappa, x, y), \quad \forall (x, y) \in M.$$

Uma vez que

$$G_y(\kappa, x, y) = -\frac{\alpha}{k} + \beta(1 - \xi) \left(\frac{k}{(1 - \xi)y + k} \right)^{k+1},$$

então, $G_y(\kappa, x, y) < 0$ é equivalente a

$$\frac{\alpha}{k} > \beta(1 - \xi) \left(\frac{k}{(1 - \xi)y + k} \right)^{k+1}.$$

Como o lado direito desta desigualdade, $q(y) = \beta(1 - \xi) \left(\frac{k}{(1 - \xi)y + k} \right)^{k+1}$, é estritamente decrescente em y e $q(0) = \beta(1 - \xi) < \frac{\alpha}{k}$, pois $\xi > \xi_t = 1 - \frac{\alpha}{k\beta}$ então, $G_y < 0$.

Assim podemos concluir utilizando o Teorema 4.1.1 que, para $\xi > \xi_t$ os sistemas (2.19) e (2.21), não admitem órbitas periódicas em $\overset{\circ}{M}$ (portanto em M). ■

Recordemos que para os sistemas (2.19) e (2.21) temos:

- quando $\xi = \xi_p$ e $\forall \kappa \geq \kappa_t(\xi_p) = \kappa_2(\xi_p)$, $(\bar{x}, \bar{y})$ é ponto crítico com autovalores imaginários puros, dados por

$$\lambda(\xi_p) = \pm i \frac{\sqrt{-4\bar{y}G_x(\bar{x}, \bar{y})\bar{x}F'(\bar{y})}}{2}$$

onde $G_x(\bar{x}, \bar{y}) < 0$;

- quando $\xi < \xi_p$, suficientemente próximos, e $\forall \kappa \geq \kappa_2(\xi)$, $(\bar{x}, \bar{y})$ é ponto crítico com autovalores dados por:

$$\lambda(\xi_p) = \frac{\bar{y}G_y(\bar{x}, \bar{y}) \pm i\sqrt{-4\bar{y}G_x(\bar{x}, \bar{y})\bar{x}F'(\bar{y})}}{2}$$

onde $\bar{y}G_y(\bar{x}, \bar{y}) > 0$;

- quando $\xi > \xi_p$, suficientemente próximos, e $\forall \kappa \geq \kappa_2(\xi)$, $(\bar{x}, \bar{y})$ é ponto crítico com autovalores dados por:

$$\lambda(\xi_p) = \frac{\bar{y}G_y(\bar{x}, \bar{y}) \pm i\sqrt{-4\bar{y}G_x(\bar{x}, \bar{y})\bar{x}F'(\bar{y})}}{2}$$

onde $\bar{y}G_y(\bar{x}, \bar{y}) < 0$;

Isso sugere que para cada κ fixado, $\kappa \geq \kappa(\xi_p)$, os sistemas (2.19) e (2.21) devem apresentar uma bifurcação de Hopf, quando variamos o parâmetro ξ , em ξ_p .

Para verificar a ocorrência dessa bifurcação, enunciaremos o Teorema da Bifurcação de Hopf em $\mathbb{R}^2$ dado em [13] e, em seguida, mostraremos que os sistemas (2.19) e (2.21) satisfazem suas hipóteses (a menos de mudanças de coordenadas).

Teorema 4.1.2 *Seja $Z(\xi, x, y) \in C^r$, $r \geq 4$, em $]a, b[\times \mathbb{R}^2$, com $Z(\xi, x, y) = Z_\xi(x, y)$, um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ tal que, $Z_\xi(0, 0) = (0, 0)$, $\forall \xi \in]a, b[$. Suponha que exista $\xi_p \in]a, b[$ tal que $DZ_\xi(0, 0)$ tem dois autovalores complexos conjugados com parte imaginária não nula, $\lambda(\xi)$ e $\bar{\lambda}(\xi)$, com $\text{Re}\lambda(\xi) > 0$ para $\xi < \xi_p$, $\text{Re}\lambda(\xi_p) = 0$ para $\xi = \xi_p$ e $\text{Re}\lambda(\xi) < 0$ para $\xi > \xi_p$. Assuma também que $\frac{d}{d\xi}\text{Re}\lambda(\xi)|_{\xi=\xi_p} \neq 0$ e ainda, que $(\xi_p, 0, 0)$ é um atrator vago de X_{ξ_p} (cuja definição daremos posteriormente). Então*

i) *Existem $\varepsilon > 0$ e uma função, $\xi = \xi(x)$, de classe C^{k-2} , $\xi :]-\varepsilon, +\varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\xi(0) = \xi_p$, $\xi'(0) = 0$, $\xi''(0) < 0$ e a órbita de $Z_{\xi(x)}$ por $(x, 0)$ para cada $x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $x \neq 0$ é fechada de período aproximadamente $\frac{2\pi}{|\lambda(0)|}$.*

ii) *Existe uma vizinhança U de $(\xi, x, y) = (\xi_p, 0, 0)$ em $\mathbb{R}^3$ tal que qualquer órbita fechada, não trivial, de $Z(\xi, x, y)$ em U é uma dessas citadas acima, e é atratora.*

Prova.

A prova deste teorema pode ser encontrada em [13].

■

Figura 4.1: bifurcação de Hopf

Observação: Nas condições do teorema, como os autovalores de $DZ_{\xi_p}(0,0)$ são puramente imaginários, localmente em $(\xi_p, 0, 0)$ ficam definidas a transformação de Poincaré $P(\xi, x) = P(\xi, x, 0)$ e $V(\xi, x) = P(\xi, x) - x$. Dizemos que o ponto $(\xi_p, 0, 0)$ é um **atrator vago** para Z_ξ se $\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}(\xi_p, 0) < 0$.

Figura 4.2: Aplicação de Poincaré

Em (2.23), fixaremos κ , não o colocaremos na notação durante a verificação das hipóteses do Teorema 4.1.2. Nosso campo vetorial é dado por $X_\xi(x, y) = (x^F(y), yG(\xi, x, y))$. Queremos mostrar que variando ξ , ocorre bifurcação de Hopf a partir do ponto crítico $(\bar{x}, \bar{y})$ no parâmetro ξ_p .

Inicialmente mostraremos a condição de transversalidade da bifurcação de Hopf, i.e, vamos provar que $\frac{d}{d\xi} \operatorname{Re} \lambda(\xi)|_{\xi_p} \neq 0$. Vimos anteriormente que:

para o sistema (2.19),

$$1- G(x, y) = \left(\frac{\kappa}{cx+1} - \alpha \right) (1 - y) - \beta \left(1 - (1 - \xi)y \right)^2$$

$$2- G_y(x, y) = \alpha - \frac{\kappa}{cx+1} + 2\beta(1 - \xi) \left(1 - (1 - \xi)y \right) \text{ e } G_y(\bar{x}(\xi_p), \bar{y}(\xi_p)) = 0$$

$$3- G_{yy}(x, y) = -2\beta(1 - \xi)^2 < 0$$

$$4- \text{em } \xi = \xi_p \text{ temos que } G_y(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \text{ e } g'(\bar{y}) = 0;$$

Para o sistema (2.21),

$$1- G(x, y) = \frac{\kappa}{cx+1} - (\sigma + \alpha) - \frac{\alpha}{k}y - \beta \left(\frac{k}{(1-\xi)y+k} \right)^k$$

$$2- G_y(x, y) = -\frac{\alpha}{k} + \beta(1 - \xi) \left(\frac{k}{(1-\xi)y+k} \right)^{k+1} \text{ e } G_y(\bar{x}(\xi_p), \bar{y}(\xi_p)) = 0$$

$$3- G_{yy}(x, y) = -\frac{\beta(1-\xi)^2(k+1)}{(1-\xi)y+k} \left(\frac{k}{(1-\xi)y+k} \right)^{k+1} < 0$$

$$4- \text{em } \xi = \xi_p \text{ temos que } G_y(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \text{ e } g'(\bar{y}) = 0.$$

Como para o sistema (2.23), $2\operatorname{Re} \lambda(\xi) = \bar{y}(\xi)G_y(\bar{x}(\xi), \bar{y}(\xi))$, temos :

$$2 \frac{d}{d\xi} \operatorname{Re} \lambda(\xi) = \bar{y}'(\xi)G_y(\bar{x}(\xi), \bar{y}(\xi)) + \bar{y}(\xi) \left(G_{xy}(\bar{x}(\xi), \bar{y}(\xi))\bar{x}'(\xi) + \bar{y}'(\xi)G_{yy}(\bar{x}(\xi), \bar{y}(\xi)) \right),$$

logo

$$\begin{aligned} 2 \frac{d}{d\xi} \operatorname{Re} \lambda(\xi)|_{\xi_p} &= 0 + \bar{y}(\xi_p) \left(G_{xy}(\bar{x}(\xi_p), \bar{y}(\xi_p))g_y(\bar{y}(\xi_p))\bar{y}'(\xi_p) + \bar{y}'(\xi_p)G_{yy}(\bar{x}(\xi_p), \bar{y}(\xi_p)) \right) \\ &= \bar{y}(\xi_p)\bar{y}'(\xi_p)G_{yy}(\bar{x}(\xi_p), \bar{y}(\xi_p)). \end{aligned}$$

Conseqüentemente, $\frac{d}{d\xi} \operatorname{Re} \lambda(\xi)|_{\xi_p} = \frac{\bar{y}(\xi_p)\bar{y}'(\xi_p)G_{yy}(\bar{x}(\xi_p), \bar{y}(\xi_p))}{2} < 0$ para ambos os sistemas, (2.19) e (2.21), assim ocorre bifurcação de Hopf em $\xi = \xi_p$.

Para verificar que $(\bar{x}, \bar{y})$ é um atrator vago faremos uma translação de $(\bar{x}, \bar{y})$ para a origem e uma mudança de coordenadas conveniente.

Para

$$\begin{cases} x = X + \bar{x} \\ y = Y + \bar{y} \end{cases} \quad (4.2)$$

o sistema (2.23) se transforma em

$$Z_\xi : \begin{cases} \dot{X} = XF(Y + \bar{y}) + \bar{x}F(Y + \bar{y}) \\ \dot{Y} = YG(X + \bar{x}, Y + \bar{y}) + \bar{y}G(X + \bar{x}, Y + \bar{y}). \end{cases} \quad (4.3)$$

A derivada do campo avaliada em $(0, 0)$ é dada por

$$DZ_\xi(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & \bar{x}F'(\bar{y}) \\ \bar{y}G_x(\bar{x}, \bar{y}) & \bar{y}G_y(\bar{x}, \bar{y}) \end{bmatrix}.$$

Por outro lado,

$$DZ_{\xi_p}(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & \bar{x}F'(\bar{y}) \\ \bar{y}G_x(\bar{x}, \bar{y}) & 0 \end{bmatrix}$$

com autovalores dados por $\lambda(\xi_p) = \pm i\sqrt{-\bar{y}G_x(\bar{x}, \bar{y})\bar{x}F'(\bar{y})}$. Agora faremos uma mudança conveniente de coordenadas de modo que

$$DZ_{\xi_p}(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & |\lambda(\xi_p)| \\ -|\lambda(\xi_p)| & 0 \end{bmatrix},$$

para utilizar a expressão de $\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}(\xi_p, 0, 0)$, dada em [13].

Sejam

$$v_1 = \left(1, i\frac{\sqrt{-\bar{x}F'(\bar{y})\bar{y}G_x(\bar{x}, \bar{y})}}{\bar{x}F'(\bar{y})}\right) \quad e \quad v_2 = \left(1, -i\frac{\sqrt{-\bar{x}F'(\bar{y})\bar{y}G_x(\bar{x}, \bar{y})}}{\bar{x}F'(\bar{y})}\right),$$

autovetores da aplicação linear $DZ_{\xi_p}(0, 0)$ em $\mathbb{C}^2$, associados aos autovalores

$$\lambda(\xi_p) = \pm i\sqrt{-\bar{x}F'(\bar{y})\bar{y}G_x(\bar{x}, \bar{y})}.$$

As novas coordenadas do campo (X, Y) na base $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$, onde

$$\tilde{e}_1 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) = (1, 0) \quad e \quad \tilde{e}_2 = -\frac{i}{2}(v_1 - v_2) = \left(0, \frac{\sqrt{-\bar{x}F'(\bar{y})\bar{y}G_x(\bar{x}, \bar{y})}}{\bar{x}F'(\bar{y})}\right),$$

são dadas por

$$\begin{cases} \tilde{X} = X \\ \tilde{Y} = \frac{\bar{x}F'(\bar{y})}{\sqrt{-\bar{x}F'(\bar{y})\bar{y}G_x(\bar{x}, \bar{y})}}Y, \end{cases} \quad (4.4)$$

conseqüentemente, o campo nas novas coordenadas é dado por $\tilde{Z} = (Z_1(\tilde{X}, \tilde{Y}), Z_2(\tilde{X}, \tilde{Y}))$:

$$\tilde{Z} : \begin{cases} \dot{\tilde{X}} = \tilde{X} F \left(\frac{\sqrt{-\bar{x}F'(\bar{y})\bar{y}G_x(\bar{x},\bar{y})}}{\bar{x}F'(\bar{y})} \tilde{Y} + \bar{y} \right) + \bar{x} F \left(\frac{\sqrt{-\bar{x}F'(\bar{y})\bar{y}G_x(\bar{x},\bar{y})}}{\bar{x}F'(\bar{y})} \tilde{Y} + \bar{y} \right) \\ \dot{\tilde{Y}} = \tilde{Y} G \left(\tilde{X} + \bar{x}, \frac{\sqrt{-\bar{x}F'(\bar{y})\bar{y}G_x(\bar{x},\bar{y})}}{\bar{x}F'(\bar{y})} \tilde{Y} + \bar{y} \right) + \bar{y} \frac{\bar{x}F'(\bar{y})}{\sqrt{-\bar{x}F'(\bar{y})\bar{y}G_x(\bar{x},\bar{y})}} G \left(\tilde{X} + \bar{x}, \frac{\sqrt{-\bar{x}F'(\bar{y})\bar{y}G_x(\bar{x},\bar{y})}}{\bar{x}F'(\bar{y})} \tilde{Y} + \bar{y} \right). \end{cases} \quad (4.5)$$

Mostraremos que $\frac{\partial^3 V}{\partial \tilde{X}^3}(\xi_p, 0, 0) < 0$ onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 V}{\partial \tilde{X}^3}(\xi_p, 0, 0) &= \frac{3\pi}{4|\lambda(\xi_p)|} \left(\frac{\partial^3 Z^1}{\partial \tilde{X}^3}(\xi_p, 0, 0) + \frac{\partial^3 Z^1}{\partial \tilde{X} \partial \tilde{Y}^2}(\xi_p, 0, 0) + \frac{\partial^3 Z^2}{\partial \tilde{X}^2 \partial \tilde{Y}}(\xi_p, 0, 0) + \frac{\partial^3 Z^2}{\partial \tilde{Y}^3}(\xi_p, 0, 0) \right) + \\ &\quad \frac{3\pi}{4|\lambda(\xi_p)|^2} \left(-\frac{\partial^2 Z^1}{\partial \tilde{X}^2}(\xi_p, 0, 0) \frac{\partial^2 Z^1}{\partial \tilde{X} \partial \tilde{Y}}(\xi_p, 0, 0) + \frac{\partial^2 Z^2}{\partial \tilde{Y}^2}(\xi_p, 0, 0) \frac{\partial^2 Z^2}{\partial \tilde{X} \partial \tilde{Y}}(\xi_p, 0, 0) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial^2 Z^2}{\partial \tilde{X}^2}(\xi_p, 0, 0) \frac{\partial^2 Z^2}{\partial \tilde{X} \partial \tilde{Y}}(\xi_p, 0, 0) - \frac{\partial^2 Z^1}{\partial \tilde{Y}^2}(\xi_p, 0, 0) \frac{\partial^2 Z^1}{\partial \tilde{X} \partial \tilde{Y}}(\xi_p, 0, 0) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial^2 Z^1}{\partial \tilde{X}^2}(\xi_p, 0, 0) \frac{\partial^2 Z^2}{\partial \tilde{X}^2}(\xi_p, 0, 0) - \frac{\partial^2 Z^1}{\partial \tilde{Y}^2}(\xi_p, 0, 0) \frac{\partial^2 Z^2}{\partial \tilde{Y}^2}(\xi_p, 0, 0) \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Denotando $a = \frac{\sqrt{-\bar{x}F'(\bar{y})\bar{y}G_x(\bar{x},\bar{y})}}{\bar{x}F'(\bar{y})}$, temos que

- $\frac{\partial Z^1}{\partial \tilde{X}}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = F(a\tilde{Y} + \bar{y}) \Rightarrow \frac{\partial Z^1}{\partial \tilde{X}}(0, 0) = F(\bar{y}) = 0$
- $\frac{\partial^2 Z^1}{\partial \tilde{X}^2}(0, 0) = 0$
- $\frac{\partial^3 Z^1}{\partial \tilde{X}^3}(0, 0) = 0$
- $\frac{\partial Z^1}{\partial \tilde{Y}}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{X} a F'(a\tilde{Y} + \bar{y}) + \bar{x} a F'(a\tilde{Y} + \bar{y}) \Rightarrow \frac{\partial Z^1}{\partial \tilde{Y}}(0, 0) = \bar{x} a F'(\bar{y})$
- $\frac{\partial^2 Z^1}{\partial \tilde{Y}^2}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{X} a^2 F''(a\tilde{Y} + \bar{y}) + \bar{x} a^2 F''(a\tilde{Y} + \bar{y}) \Rightarrow \frac{\partial^2 Z^1}{\partial \tilde{Y}^2}(0, 0) = \bar{x} a^2 F''(\bar{y})$
- $\frac{\partial^3 Z^1}{\partial \tilde{X} \partial \tilde{Y}^2}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = a^2 F''(a\tilde{Y} + \bar{y}) \Rightarrow \frac{\partial^3 Z^1}{\partial \tilde{X} \partial \tilde{Y}^2}(0, 0) = a^2 F''(\bar{y})$
- $\frac{\partial^2 Z^1}{\partial \tilde{X} \partial \tilde{Y}}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = a F'(a\tilde{Y} + \bar{y}) \Rightarrow \frac{\partial^2 Z^1}{\partial \tilde{X} \partial \tilde{Y}}(0, 0) = a F'(\bar{y})$
- $\frac{\partial Z^2}{\partial \tilde{Y}}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = G(\tilde{X} + \bar{x}, a\tilde{Y} + \bar{y}) + a\tilde{Y} G_y(\tilde{X} + \bar{x}, a\tilde{Y} + \bar{y}) + \bar{y} G_y(\tilde{X} + \bar{x}, a\tilde{Y} + \bar{y}) \Rightarrow \frac{\partial Z^2}{\partial \tilde{Y}}(0, 0) = 0$
- $\frac{\partial^2 Z^2}{\partial \tilde{Y}^2}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 2a G_y(\tilde{X} + \bar{x}, a\tilde{Y} + \bar{y}) + a^2 \tilde{Y} G_{yy}(\tilde{X} + \bar{x}, a\tilde{Y} + \bar{y}) + a\bar{y} G_{yy}(\tilde{X} + \bar{x}, a\tilde{Y} + \bar{y}) \Rightarrow$
 $\frac{\partial^2 Z^2}{\partial \tilde{Y}^2}(0, 0) = a\bar{y} G_{yy}(\bar{x}, \bar{y})$
- $\frac{\partial^3 Z^2}{\partial \tilde{Y}^3}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 3a^2 G_{yy}(\tilde{X} + \bar{x}, a\tilde{Y} + \bar{y}) + a^3 \tilde{Y} G_{yyy}(\tilde{X} + \bar{x}, a\tilde{Y} + \bar{y}) + a^2 \bar{y} G_{yyy}(\tilde{X} + \bar{x}, a\tilde{Y} + \bar{y}) \Rightarrow$
 $\frac{\partial^3 Z^2}{\partial \tilde{Y}^3}(0, 0) = 3a^2 G_{yy}(\bar{x}, \bar{y})$

- $\frac{\partial^2 Z^2}{\partial \tilde{X} \partial \tilde{Y}}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = G_x(\tilde{X} + \bar{x}, a\tilde{Y} + \bar{y}) + a\tilde{Y}G_{yx}(\tilde{X} + \bar{x}, a\tilde{Y} + \bar{y}) + \bar{y}G_{yx}(\tilde{X} + \bar{x}, a\tilde{Y} + \bar{y}) \Rightarrow$
- $\frac{\partial^2 Z^2}{\partial \tilde{X} \partial \tilde{Y}}(0, 0) = G_x(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{y}G_{yx}(\bar{x}, \bar{y})$
- $\frac{\partial Z^2}{\partial \tilde{X}}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{Y}G_x(\tilde{X} + \bar{x}, a\tilde{Y} + \bar{y}) + \frac{\bar{y}}{a}G_x(\tilde{X} + \bar{x}, a\tilde{Y} + \bar{y}) \Rightarrow \frac{\partial Z^2}{\partial \tilde{X}}(0, 0) = \frac{\bar{y}}{a}G_x(\bar{x}, \bar{y})$
- $\frac{\partial^2 Z^2}{\partial \tilde{X}^2}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{Y}G_{xx}(\tilde{X} + \bar{x}, a\tilde{Y} + \bar{y}) + \frac{\bar{y}}{a}G_{xx}(\tilde{X} + \bar{x}, a\tilde{Y} + \bar{y}) \Rightarrow \frac{\partial^2 Z^2}{\partial \tilde{X}^2}(0, 0) = \frac{\bar{y}}{a}G_{xx}(\bar{x}, \bar{y})$
- $\frac{\partial^3 Z^2}{\partial \tilde{X}^3}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{Y}G_{xxx}(\tilde{X} + \bar{x}, a\tilde{Y} + \bar{y}) + \frac{\bar{y}}{a}G_{xxx}(\tilde{X} + \bar{x}, a\tilde{Y} + \bar{y}) \Rightarrow \frac{\partial^3 Z^2}{\partial \tilde{X}^3}(0, 0) = \frac{\bar{y}}{a}G_{xxx}(\bar{x}, \bar{y})$
- $\frac{\partial^3 Z^2}{\partial \tilde{X}^2 \partial \tilde{Y}}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = G_{xx}(\tilde{X} + \bar{x}, a\tilde{Y} + \bar{y}) + a\tilde{Y}G_{yx}(\tilde{X} + \bar{x}, a\tilde{Y} + \bar{y}) + \bar{y}G_{yx}(\tilde{X} + \bar{x}, a\tilde{Y} + \bar{y})$
- $\Rightarrow \frac{\partial^3 Z^2}{\partial \tilde{X}^2 \partial \tilde{Y}}(0, 0) = G_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{y}G_{yx}(\bar{x}, \bar{y})$

Agora estamos em condições de calcular $\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}(\xi_p, 0, 0)$. Primeiramente faremos os cálculos correspondentes ao sistema (2.19) e em seguida para o sistema (2.21).

Para o sistema (2.19):

Note que para esse sistema, $G_{yyy} = 0$ uma vez que G é um polinômio de 2º grau em y . Assim temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 V}{\partial x^3}(\xi_p, 0, 0) &= \frac{3\pi}{4|\lambda(\xi_p)|} \left(0 + a^2 F''(\bar{y}) + G_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{y}G_{yx}(\bar{x}, \bar{y}) + 3a^2 G_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) \right) + \\ &\quad \frac{3\pi}{4|\lambda(\xi_p)|^2} \left[0 + \left(\bar{y}aG_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\bar{y}}{a}G_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) \right) \left(G_x(\bar{x}, \bar{y}) + 3a^2 G_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) \right) - \right. \\ &\quad \left. a^2 \bar{x} F''(\bar{y}) \left(aF'(\bar{y}) + \bar{y}aG_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) \right) \right]. \end{aligned}$$

Dado que

$$F(y) = \mu + \alpha y - \beta[(1 - (1 - \xi)y)^2] \quad e \quad G(x, y) = \left(\frac{\kappa}{cx + 1} - \alpha \right) (1 - y) - \beta(1 - (1 - \xi)y)^2$$

temos

- $F'(y) = \alpha + 2\beta(1 - \xi)[(1 - (1 - \xi)y)^2] > 0$
- $F''(y) = -2\beta(1 - \xi)^2 < 0$
- $G_x(x, y) = -\frac{\kappa c}{(cx + 1)^2} (1 - y) < 0$
- $G_{xx}(x, y) = \frac{2\kappa c^2}{(cx + 1)^3} (1 - y) > 0$
- $G_y(x, y) = -\left(\frac{\kappa}{cx + 1} - \alpha \right) - 2\beta(1 - \xi)(1 - (1 - \xi)y) < 0$
- $G_{yy}(x, y) = -2\beta(1 - \xi)^2 < 0$

- $G_{yx}(x, y) = \frac{kc}{(cx+1)^2} > 0$
- $G_{yxx}(x, y) = -\frac{kc^2}{(cx+1)} < 0$
- $|\lambda(\xi)| = \sqrt{-\bar{x}F'(\bar{y})\bar{y}G_x(\bar{x}, \bar{y})}$

conseqüentemente

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 V}{\partial x^3}(\xi_p, 0, 0) &= \frac{3\pi}{4|\lambda(\xi_p)|} \left\{ a^2 F''(\bar{y}) + G_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{y}G_{yxx}(\bar{x}, \bar{y}) + 3a^2 G_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{|\lambda(\xi)|} \left[\left(\bar{y}aG_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\bar{y}}{a}G_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) \right) \left(G_x(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{y}G_{yx}(\bar{x}, \bar{y}) \right) \right] - \right. \\ &\quad \left. \bar{x}a^2 F''(\bar{y}) \frac{aF'(\bar{y}) + \bar{y}aG_{yy}(\bar{x}, \bar{y})}{|\lambda|} \right\}. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{aF'(\bar{y})}{|\lambda(\xi)|} + \frac{\bar{y}aG_{yy}(\bar{x}, \bar{y})}{\lambda(\xi)} &= \frac{\frac{F'(\bar{y})\sqrt{-\bar{x}F'(\bar{y})\bar{y}G_x(\bar{x}, \bar{y})}}{\bar{x}F'(\bar{y})}}{\sqrt{-\bar{x}F'(\bar{y})\bar{y}G_x(\bar{x}, \bar{y})}} + \frac{\frac{\bar{y}G_{yy}(\bar{x}, \bar{y})\sqrt{-\bar{x}F'(\bar{y})\bar{y}G_x(\bar{x}, \bar{y})}}{\bar{x}F'(\bar{y})}}{\sqrt{-\bar{x}F'(\bar{y})\bar{y}G_x(\bar{x}, \bar{y})}} \\ &= \frac{1}{\bar{x}} + \frac{\bar{y}G_{yy}(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{x}F'(\bar{y})}, \end{aligned}$$

assim temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 V}{\partial x^3}(\xi_p, 0, 0) &= \frac{3\pi}{4|\lambda(\xi_p)|} \left\{ a^2 F''(\bar{y}) + G_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{y}G_{yxx}(\bar{x}, \bar{y}) + 3a^2 G_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) + \right. \\ &\quad \bar{y} \left(\frac{aG_{yy}(\bar{x}, \bar{y})}{|\lambda(\xi)|} + \frac{G_{xx}(\bar{x}, \bar{y})}{a|\lambda(\xi)|} \right) \left(G_x(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{y}G_{yx}(\bar{x}, \bar{y}) \right) + a^2 F''(\bar{y}) - \\ &\quad \left. \frac{a^2 \bar{y}F''(\bar{y}) + G_{yy}(\bar{x}, \bar{y})}{F'(\bar{y})} \right\}. \end{aligned}$$

Observe também que

$$\begin{aligned} \frac{aG_{yy}(\bar{x}, \bar{y})}{|\lambda(\xi)|} + \frac{G_{xx}(\bar{x}, \bar{y})}{a|\lambda(\xi)|} &= \frac{\bar{y}G_{yy}(\bar{x}, \bar{y})\sqrt{-\bar{x}F'(\bar{y})\bar{y}G_x(\bar{x}, \bar{y})}}{\bar{x}F'(\bar{y})} \sqrt{-\bar{x}F'(\bar{y})\bar{y}G_x(\bar{x}, \bar{y})} + \frac{G_{xx}(\bar{x}, \bar{y})}{(\sqrt{-\bar{x}F'(\bar{y})\bar{y}G_x(\bar{x}, \bar{y})})^2} \\ &= \frac{G_{yy}(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{x}F'(\bar{y})} - \frac{G_{xx}(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{y}G_x(\bar{x}, \bar{y})} \end{aligned}$$

conseqüentemente

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 V}{\partial x^3}(\xi_p, 0, 0) &= \frac{3\pi}{4|\lambda(\xi_p)|} \left\{ G_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{y}G_{yxx}(\bar{x}, \bar{y}) + 3a^2 G_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) + \right. \\ &\quad \left(\frac{G_{yy}(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{x}F'(\bar{y})} - \frac{G_{xx}(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{y}G_x(\bar{x}, \bar{y})} \right) \left(G_x(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{y}G_{yx}(\bar{x}, \bar{y}) \right) - \frac{\bar{y}a^2 F''(\bar{y})G_{yy}(\bar{x}, \bar{y})}{F'(\bar{y})} \right\} \\ &= \frac{3\pi}{4|\lambda(\xi_p)|} \left\{ G_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{y}G_{yxx}(\bar{x}, \bar{y}) + 3a^2 G_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\bar{y}G_{yy}(\bar{x}, \bar{y})G_x(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{x}F'(\bar{y})} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\bar{y}^2 G_{yy}(\bar{x}, \bar{y})G_{yx}(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{x}F'(\bar{y})} - G_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) - \frac{\bar{y}G_{xx}(\bar{x}, \bar{y})G_{yx}(\bar{x}, \bar{y})}{G_x(\bar{x}, \bar{y})} - \frac{\bar{y}a^2 F''(\bar{y})G_{yy}(\bar{x}, \bar{y})}{F'(\bar{y})} \right\}. \end{aligned}$$

Agora observe que

- $3a^2 G_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\bar{y} G_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) G_x(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{x} F'(\bar{y})} = G_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) \left(-\frac{3\bar{x} F'(\bar{y}) \bar{y} G_x(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{x}^2 F'(\bar{y})^2} \right) = -\frac{2\bar{y} G_x(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{x} F'(\bar{y})} G_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) < 0$
- $\bar{y} G_{yx}(\bar{x}, \bar{y}) - \frac{\bar{y} G_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) G_{yx}(\bar{x}, \bar{y})}{G_x(\bar{x}, \bar{y})} = \bar{y} \left(-\frac{2\kappa c^2}{cx+1} + \frac{2\kappa c^2}{(cx+1)^3} \right) = \frac{2\bar{y}\kappa c^2}{cx+1} \left(\frac{1}{(cx+1)^2} - 1 \right) < 0$

conseqüentemente

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 V}{\partial x^3}(\xi_p, 0, 0) &= \frac{3\pi}{4|\lambda(\xi_p)|} \left\{ \frac{\bar{y}^2 G_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) G_{yx}(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{x} F'(\bar{y})} - \frac{\bar{y} a^2 F''(\bar{y}) G_{yy}(\bar{x}, \bar{y})}{F'(\bar{y})} - \frac{2\bar{y} G_x(\bar{x}, \bar{y}) G_{yy}(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{x} F'(\bar{y})} + \right. \\ &\quad \left. \frac{2\bar{y}\kappa c^2}{cx+1} \left(\frac{1}{(cx+1)^2} - 1 \right) \right\} < 0. \end{aligned}$$

Assim, acabamos de provar que $(\bar{x}, \bar{y})$ é um atrator vago para o sistema (2.19).

Para o sistema (2.21):

Dado que

$$F(y) = \alpha y + \mu - \beta \left(\frac{k}{(1-\xi)y+k} \right)^k \quad e \quad G(x, y) = \frac{\kappa}{cx+1} - (\sigma + \alpha) - \frac{\alpha y}{k} - \beta \left(\frac{k}{(1-\xi)y+k} \right)^k$$

temos

- $F'(y) = \alpha + \beta(1-\xi) \left(\frac{k}{(1-\xi)y+k} \right)^{k+1} > 0$
- $F''(y) = -\frac{\beta(1-\xi)k+1}{(1-\xi)y+k} \left(\frac{k}{(1-\xi)y+k} \right)^{k+1} < 0$
- $G_x(x, y) = -\frac{\kappa c}{(cx+1)^2} < 0$
- $G_{xx}(x, y) = \frac{2\kappa c^2}{(cx+1)^3} > 0$
- $G_{xxx}(x, y) = -\frac{6\kappa c^3}{(cx+1)^4} < 0$
- $G_y(x, y) = -\frac{\alpha}{k} + \beta(1-\xi) \left(\frac{k}{(1-\xi)y+k} \right)^{k+1}$
- $G_{yy}(x, y) = -\frac{\beta(1-\xi)^2(k+1)}{(1-\xi)y+k} \left(\frac{k}{(1-\xi)y+k} \right)^{k+1} < 0$
- $G_{yyy}(x, y) = \frac{\beta(1-\xi)^3(k+1)(k+2)}{((1-\xi)y+k)^2} \left(\frac{k}{(1-\xi)y+k} \right)^{k+1} < 0$
- $G_{yx}(x, y) = 0$
- $G_{yxx}(x, y) = 0$

assim, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 V}{\partial x^3}(\xi_p, 0, 0) &= \frac{3\pi}{4|\lambda(\xi_p)|} \left(0 + a^2 F''(\bar{y}) + G_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{y} G_{yxx}(\bar{x}, \bar{y}) + 3a^2 G_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) + \right. \\ &\quad \left. \bar{y} a^2 G_{yyy}(\bar{x}, \bar{y}) \right) + \frac{3\pi}{4|\lambda(\xi_p)|^2} \left[0 + \bar{y} a G_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) \left(G_x(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{y} G_{yx}(\bar{x}, \bar{y}) \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\bar{y}}{a} G_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) \left(G_x(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{y} G_{yx}(\bar{x}, \bar{y}) \right) - \bar{x} a^3 F''(\bar{y}) F'(\bar{y}) + a^3 \bar{x} F''(\bar{y}) \bar{y} G_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) \right]. \end{aligned}$$

Já sabemos que

$$\frac{a F'(\bar{y})}{|\lambda(\xi)|} + \frac{\bar{y} a G_{yy}(\bar{x}, \bar{y})}{\lambda(\xi)} = \frac{1}{\bar{x}} + \frac{\bar{y} G_{yy}(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{x} F'(\bar{y})},$$

portanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 V}{\partial x^3}(\xi_p, 0, 0) &= \frac{3\pi}{4|\lambda(\xi_p)|} \left\{ a^2 F''(\bar{y}) + G_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) + 3a^2 G_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{y} a^2 G_{yyy}(\bar{x}, \bar{y}) + \right. \\ &\quad \left. \bar{y} G_x(\bar{x}, \bar{y}) \left(\frac{a G_{yy}(\bar{x}, \bar{y})}{|\lambda(\xi_p)|} + \frac{G_{xx}(\bar{x}, \bar{y})}{a |\lambda(\xi_p)|} \right) - \frac{a^2 \bar{x} F''(\bar{y})}{\bar{x}} - \frac{G_{xx}(\bar{x}, \bar{y})}{a |\lambda(\xi_p)|} - \frac{a^2 \bar{x} F''(\bar{y}) \bar{y} G_{yy}(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{x} F'(\bar{y})} \right\}. \end{aligned}$$

Sabemos também que

$$\frac{a G_{yy}(\bar{x}, \bar{y})}{|\lambda(\xi)|} + \frac{G_{xx}(\bar{x}, \bar{y})}{a |\lambda(\xi)|} = \frac{G_{yy}(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{x} F'(\bar{y})} - \frac{G_{xx}(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{y} G_x(\bar{x}, \bar{y})}$$

assim temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 V}{\partial x^3}(\xi_p, 0, 0) &= \frac{3\pi}{4|\lambda(\xi_p)|} \left\{ G_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) + 3a^2 G_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{y} a^2 G_{yyy}(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\bar{y} G_x(\bar{x}, \bar{y}) G_{yy}(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{x} F'(\bar{y})} - \right. \\ &\quad \left. \frac{\bar{y} G_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) G_x(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{y} G_x(\bar{x}, \bar{y})} - \frac{a^2 \bar{x} F''(\bar{y}) \bar{y} G_{yy}(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{x} F'(\bar{y})} \right\} \\ &= \frac{3\pi}{4|\lambda(\xi_p)|} \left(3a^2 G_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{y} a^2 G_{yyy}(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\bar{y} G_x(\bar{x}, \bar{y}) G_{yy}(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{x} F'(\bar{y})} - \frac{a^2 \bar{y} F''(\bar{y}) G_{yy}(\bar{x}, \bar{y})}{F'(\bar{y})} \right). \end{aligned}$$

Substituindo o valor de $a = \frac{\sqrt{-\bar{x} F'(\bar{y}) \bar{y} G_x(\bar{x}, \bar{y})}}{\bar{x} F'(\bar{y})}$, e observando as identidades

$$G_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) = F''(\bar{y})$$

$$G_{yyy}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{(k+2)(1-\xi)}{(1-\xi)y+k} G_{yy}(\bar{x}, \bar{y})$$

temos

- $\frac{\bar{y} G_x(\bar{x}, \bar{y}) G_{yy}(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{x} F'(\bar{y})} - \frac{a^2 \bar{y} F''(\bar{y}) G_{yy}(\bar{x}, \bar{y})}{F'(\bar{y})} = \frac{\bar{y} G_x(\bar{x}, \bar{y}) G_{yy}(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{x} F'(\bar{y})} \left(1 + \frac{\bar{y} F''(\bar{y})}{F'(\bar{y})} \right)$
- $3a^2 G_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{3 \bar{y} G_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) G_x(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{x} F'(\bar{y})}$

conseqüentemente obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^3 V}{\partial x^3}(\xi_p, 0, 0) &= \frac{3\pi}{4|\lambda(\xi_p)|} \left[3a^2 G_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{y}a^2 G_{yyy}(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\bar{y}G_x(\bar{x}, \bar{y})G_{yy}(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{x}F'(\bar{y})} \left(1 + \frac{\bar{y}F''(\bar{y})}{F'(\bar{y})} \right) \right. \\
 &= \frac{3\pi}{4|\lambda(\xi_p)|} \left[-\frac{3\bar{y}G_{yy}(\bar{x}, \bar{y})G_x(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{x}F'(\bar{y})} + \frac{(k+2)(1-\xi)}{(1-\xi)y+k} G_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\bar{y}G_{yy}(\bar{x}, \bar{y})G_x(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{x}F'(\bar{y})} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{\bar{y}^2 G_{yy}^2(\bar{x}, \bar{y})G_x(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{x}F'^2(\bar{y})} \right] \\
 &= \frac{3\pi}{4|\lambda(\xi_p)|} \left[G_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) \left(-\frac{2\bar{y}}{\bar{x}F'(\bar{y})} - \frac{(k+2)(1-\xi)G_x(\bar{x}, \bar{y})\bar{y}^2 \bar{x}F'(\bar{y})}{\bar{x}^2 F'^2(\bar{y})((1-\xi)y+k)} + \frac{\bar{y}^2 G_{yy}(\bar{x}, \bar{y})G_x(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{x}F'^2(\bar{y})} \right) \right] \\
 &= \frac{3\pi}{4|\lambda(\xi_p)|} \left[G_{yy}(\bar{x}, \bar{y})G_x(\bar{x}, \bar{y}) \left(-\frac{2\bar{y}}{\bar{x}F'(\bar{y})} - \frac{(k+2)(1-\xi)\bar{y}^2}{\bar{x}F'(\bar{y})((1-\xi)y+k)} + \frac{\bar{y}^2 G_{yy}(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{x}F'^2(\bar{y})} \right) \right] < 0.
 \end{aligned}$$

Logo $(0,0)$ é um atrator vago para o sistema (2.21).

Assim acabamos de provar o seguinte

Teorema 4.1.3 *Para cada κ fixado, $\kappa > \kappa_t(\xi_p)$, o sistema (2.23) (unificação dos sistemas (2.19) e (2.21)), admite uma bifurcação de Hopf no parâmetro ξ , em ξ_p , para o ponto crítico no interior do 1º quadrante.*

Figura 4.3: bifurcação de Hopf

4.2 Unicidade de órbitas periódicas

Nesta seção será provado que se os sistemas (2.19) e (2.21) admitem uma órbita periódica ela é única. Para isso, transformaremos os sistemas em sistemas generalizados de Liénard, através de mudanças de variáveis propostas por Zegeling e Kooij [21], e usaremos um lema também dado em [21], para mostrar os resultados desejados.

4.2.1 Transformação em sistemas generalizados de Liénard

Faremos agora uma mudança de variáveis para transformar os sistemas (2.19) e (2.21) em sistemas de Liénard.

Proposição 4.2.1 *A mudança de variáveis,*

$$x = e^{-u} \quad e \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{y(1-y)} \quad \text{onde } 0 < y < 1 \quad (4.7)$$

transforma o sistema (2.19) no sistema:

$$\begin{cases} \frac{dy}{d\tau} = \psi_1(u) - F_1(y) \\ \frac{du}{d\tau} = -g_1(y), \end{cases} \quad (4.8)$$

onde

$$\psi_1(u) = \frac{\kappa}{ce^{-u} + 1} - \alpha \quad (4.9)$$

$$F_1(y) = \frac{\beta(1 - (1 - \xi)y)^2}{1 - y} \quad (4.10)$$

$$g_1(y) = \frac{\mu + \alpha y - \beta(1 - (1 - \xi)y)^2}{y(1 - y)}. \quad (4.11)$$

Prova.

Efetuada a mudança de variáveis obtemos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{du} \frac{du}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = -e^{-u} \frac{du}{d\tau} y(1 - y).$$

Dado que $\frac{dx}{dt} = e^{-u}(\mu + \alpha - \beta(1 - (1 - \xi)y)^2)$, obtemos:

$$\frac{du}{d\tau} = -\frac{e^{-u}(\mu + \alpha y - \beta(1 - (1 - \xi)y)^2)}{e^{-u}y(1 - y)} = -g_1(y).$$

Por outro lado,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{dy}{d\tau} y(1-y).$$

Agora, uma vez que $\frac{dy}{dt} = y \left(\left(\frac{\kappa}{ce^{-u}+1} - \alpha \right) (1-y) - \beta(1-(1-\xi)y)^2 \right)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= \frac{y(1-y) \left(\frac{\kappa}{ce^{-u}+1} - \alpha \right) - y\beta(1-(1-\xi)y)^2}{y(1-y)} \\ &= \frac{\kappa}{ce^{-u}+1} - \alpha - \frac{\beta(1-(1-\xi)y)^2}{1-y} \\ &= \psi_1(u) - F_1(y). \end{aligned}$$

■

Observação: Note que, se existir órbita periódica para o sistema (2.19), esta órbita periódica não pode interceptar a reta $y=0$, porque esta linha é invariante. Este ciclo também não pode interceptar a reta $y=1$, uma vez que nela o campo aponta para baixo, já que $(\frac{dy}{dt})_{y=1} = -\beta\xi^2 < 0$. Por isso podemos utilizar a mudança de variáveis 4.7.

Proposição 4.2.2 *A mudança de variáveis,*

$$x = e^{-u} \quad e \quad \frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{y} \tag{4.12}$$

transforma o sistema (2.21) no sistema:

$$\begin{cases} \frac{dy}{d\tau} = \psi_2(u) - F_2(y) \\ \frac{du}{d\tau} = -g_2(y), \end{cases} \tag{4.13}$$

onde

$$\psi_2 = \frac{\kappa}{ce^{-u}+1} \tag{4.14}$$

$$F_2(y) = \sigma + \alpha + \frac{\alpha y}{k} + \beta \left(\frac{k}{(1-\xi)y+k} \right)^k \tag{4.15}$$

$$g_2(y) = \frac{\mu + \alpha y - \beta \left(\frac{k}{(1-\xi)y+k} \right)^k}{y}. \tag{4.16}$$

Prova.

Efetuada a mudança de variáveis obtemos,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{du} \frac{du}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = -e^{-u} \frac{du}{d\tau} y.$$

agora, uma vez que $\frac{dx}{dt} = e^{-u} \left(\alpha + \mu - \beta \left(\frac{k}{(1-\xi)y+k} \right)^k \right)$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= - \frac{e^{-u} \left(\mu + \alpha - \beta \left(\frac{k}{(1-\xi)y+k} \right)^k \right)}{e^{-u} y} \\ &= -g_2(y). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{dy}{d\tau} y.$$

Dado que $\frac{dy}{dt} = y \left(\frac{\kappa}{ce^{-u}+1} - (\sigma + \alpha) - \frac{\alpha}{k} y - \beta \left(\frac{k}{(1-\xi)y+k} \right)^k \right)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= \frac{y \left(\frac{\kappa}{ce^{-u}+1} - (\sigma + \alpha) - \frac{\alpha}{k} y - \beta \left(\frac{k}{(1-\xi)y+k} \right)^k \right)}{y} \\ &= \psi_2(u) - F_2(y). \end{aligned}$$

■

Admitiremos sem demonstrar, o seguinte lema de [21], que também pode ser encontrado em [12].

Lema 4.2.1 *Considere o sistema de Liénard*

$$\begin{cases} \frac{dy}{d\tau} = \psi(u) - \bar{F}(y) \\ \frac{du}{d\tau} = -g(y), \end{cases} \quad (4.17)$$

e $f(y) = \bar{F}'(y)$. Suponha que as seguintes condições são válidas:

- i) As funções $f(y)$ e $g(y)$ são de classe C^1 no intervalo aberto $]r_1, r_2[$ onde $r_1 < r_2$, e $\psi(u)$ é uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}$;
- ii) $\psi'(u) > 0$, $\forall u \in \mathbb{R}$;
- iii) y_0 é o único valor em $]r_1, r_2[$ tal que $(y - y_0)g(y) > 0$ para $y \neq y_0$ e $g(y_0) = 0$.

Se,

(a) $\exists C \in \mathbb{R}$ tal que $f - Cg$ não é identicamente nula e não muda de sinal, então o sistema (4.17) não admite órbita periódica na região $N = \{(u, y); u \in \mathbb{R} \text{ e } y \in]r_1, r_2[\}$

(b) $\forall C \in \mathbb{R}$, $f - Cg$ não tem raízes múltiplas, então o sistema (4.17) tem no máximo uma órbita periódica na região $N = \{(u, y); u \in \mathbb{R} \text{ e } y \in]r_1, r_2[\}$, e, se ele existir, é hiperbólico.

4.2.2 Resultados sobre unicidade de órbitas periódicas

Agora, estudaremos o número de órbitas periódicas para os sistemas (2.19) e (2.21) e consequentemente para (2.4) e (2.18), aplicando o Lema 4.2.1 aos sistemas (4.8) e (4.13), respectivamente.

Mostraremos inicialmente, que as condições (i), (ii) e (iii) do Lema 4.2.1 são satisfeitas para o sistema (4.8). Em seguida enunciaremos e demonstraremos os resultados obtidos sobre a unicidade de órbita periódica para este sistema.

Proposition 4.2.1 *Suponha válida a condição (2.24). Então o sistema (4.8) satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) do Lema 4.2.1, quando $r_1 = 0$ e $r_2 = 1$.*

Prova.

O item (i) do lema é satisfeito, uma vez que F_1 e g_1 são de classe C^∞ em $]0,1[$ e ψ é de classe C^∞ em $\mathbb{R}$.

O item (ii) é satisfeito uma vez que $\psi'(u) = \frac{\kappa c e^{-u}}{(c e^{-u} + 1)^2} > 0, \forall u \in \mathbb{R}$. Como foi visto no capítulo 2, $F(y) = \mu + \alpha y - \beta(1 - (1 - \xi)y)^2$ é estritamente crescente e tem uma única raiz $\bar{y} \in]0,1[$, desde que seja válido (2.24). Portanto existe $y_0 = \bar{y}$ que verifica a condição (iii).

■

Para $\xi > \xi_t = \frac{1}{2}$, já mostramos na Proposição 4.1.1 que o sistema (2.19) não tem órbitas fechadas.

Para $\xi = 0$, o Teorema 4.1.1, garante que o sistema 2.19 não tem órbitas fechadas, uma vez que

$$\frac{\partial}{\partial y}(\psi_1(u) - F_1(y)) + \frac{\partial}{\partial u}(-g_1(y)) = \frac{\partial}{\partial y}(-F_1(y)) = -f_1(y) = \beta > 0, \quad \forall y \in]0,1[,$$

pois

$$f_1(y) = \frac{(\beta(1 - (1 - \xi)y)(2\xi + (1 - \xi)y - 1))}{(1 - y)^2}. \quad (4.18)$$

Para $0 < \xi < \xi_t = \frac{1}{2}$, o seguinte teorema dá os resultados obtidos sobre órbitas periódicas.

Teorema 4.2.2 *Considere (2.19) com a condição (2.24). Nas notações do capítulo anterior, para $\xi \in [0, \frac{1}{2}[$ e $\kappa > \kappa_2(\xi)$, temos:*

I) Se $y_m < \bar{y}$ (i.e, $\xi > \xi_p$), então o sistema (2.19) não tem órbita periódica.

II) Se $y_m = \bar{y}$ (i.e, $\xi = \xi_p$), então o sistema (2.19) não tem órbita periódica.

III) Se $y_m > \bar{y}$ (i.e, $\xi < \xi_p$), então o sistema (2.19) tem no máximo uma órbita periódica, e, se ela existir, é hiperbólica.

Prova.

Para provar o item (I), mostraremos que a condição (a) do lema 4.2.1 é satisfeita. Para isto, observe que

$$f_1 - Cg_1 = \frac{y(\beta(1 - (1 - \xi)y)(2\xi + (1 - \xi)y - 1) - C(1 - y)F(y))}{y(1 - y)^2}$$

ou ainda

$$y(1 - y)^2(f_1 - Cg_1) = y(\beta(1 - (1 - \xi)y)(2\xi + (1 - \xi)y - 1) - C(1 - y)F(y))$$

Denotaremos

- $\tilde{f}_1(y) = \beta y((1 - (1 - \xi)y)(2\xi + (1 - \xi)y - 1))$
- $\tilde{g}_1(y) = (1 - y)F(y)$.

Note que $\tilde{f}_1(0) = \tilde{f}_1(\frac{1}{1-\xi}) = \tilde{f}_1(2 - \frac{1}{1-\xi}) = 0$, $\tilde{g}_1(1) = \tilde{g}_1(\bar{y}) = 0$, e os sinais de $\tilde{f}_1$ e $\tilde{g}_1$ são dados na Figura 4.4.

Figura 4.4: sinal de $\tilde{f}_1$ e $\tilde{g}_1$

Logo, como $\tilde{f}_1$ e $\tilde{g}_1$ são polinômios de grau 3, então só podemos ter as possibilidades da Figura 4.5 para os gráficos de $\tilde{f}_1(y)$ e $\tilde{g}_1(y)$.

Figura 4.5: gráfico de $\tilde{f}_1$ e $\tilde{g}_1$

Em qualquer caso, a hipótese (a) do lema é satisfeita. De fato, para a Figura 4.5 (a), (b) e (c), basta tomar $C=1$; para a Figura 4.5 (d), existe C tal que os gráficos de $\tilde{f}_1$ e $C\tilde{g}_1$ apresentam-se como em (b); para a Figura 4.5 (e), existe C tal que os gráficos de $\tilde{f}_1$ e $C\tilde{g}_1$ apresentam-se como em (c). Portanto (I) está provado.

No caso II, i.e, $\bar{y} = y_m$:

as possibilidades para os gráficos de $\tilde{f}_1$ e $\tilde{g}_1$, são apresentadas na Figura 4.6. Em qualquer caso a hipótese (a) do lema 4.2.1 é satisfeita, i.e, o sistema não admite órbita periódica.

Figura 4.6: gráfico de $\tilde{f}_1$ e $\tilde{g}_1$

Vamos agora verificar o item (III) do Teorema. Observe que nas hipóteses deste item, não existe C tal que a hipótese de (a) do lema 4.2.1 seja satisfeita. Para $y_m > \bar{y}$, os gráficos de $\tilde{f}_1(y)$ e $\tilde{g}_1(y)$ são dados na Figura 4.7.

Figura 4.7: gráfico de $\tilde{f}_1$ e $\tilde{g}_1$

Seja $h(y) = \tilde{f}_1(y) - C\tilde{g}_1(y)$. Para $C \neq -1$, $h(y)$ é polinômio cúbico que não tem raízes múltiplas. Para $C = -1$, $h(y) = \tilde{f}_1(y) + \tilde{g}_1(y)$ é um polinômio quadrático e, tem duas raízes distintas. De fato,

$$\begin{aligned}
h(y) &= \beta y \{ [1 - (1 - \xi)y][2\xi - 1 + (1 - \xi)y] \} + (1 - y) \{ \mu + \alpha y - \beta [1 - (1 - \xi)y]^2 \} \\
&= \beta y (2\xi - 1) + 2\beta y^2 (1 - \xi)^2 + \mu + \alpha y - \beta + 2\beta y (1 - \xi) - \beta y^2 (1 - \xi)^2 - \mu y - \alpha y^2 + \\
&\quad \beta y - 2\beta y^2 (1 - \xi) \\
&= (\beta(1 - \xi)^2 - 2\beta y^2 (1 - \xi) - \alpha)y^2 + (\alpha - \mu + 2\beta)y + \mu - \beta,
\end{aligned}$$

cujo discriminante é dado por $\Delta = 4\beta\xi^2(\beta - \mu) + \mu^2 + 2\alpha\mu + \alpha^2 > 0$. Conseqüentemente a condição (b) do lema 4.2.1 é satisfeita, o que prova o teorema. ■

Estudaremos agora, o número de órbita periódica para o sistema (2.21) e, conseqüentemente para (2.18), mostrando que o sistema (4.13) satisfaz as condições do lema 4.2.1.

Proposição 4.2.3 *O sistema (4.13) satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) do lema 4.2.1, quando $r_1 = 0$ e $r_2 = +\infty$.*

Prova.

O item (i) do lema é satisfeito, uma vez que F_2 e g_2 são de classe C^∞ em $]0, \infty[$ e ψ é de classe C^∞ em $\mathbb{R}$.

O item (ii) do lema é satisfeito uma vez que $\dot{\psi}(u) = \frac{\kappa c e^{-u}}{(c e^{-u} + 1)^2} > 0, \forall u \in \mathbb{R}$.

Como foi visto no capítulo 2, $F(y) = \mu + \alpha y - \beta \left(\frac{k}{1 - (\xi)y + k} \right)^k$ é estritamente crescente e tem uma única raiz $\bar{y} \in]0, \infty[$. Portanto existe $y_0 = \bar{y}$ tal que a condição (iii) é satisfeita. ■

Para $\xi > \xi_t = 1 - \frac{\alpha}{k\beta} > 0$, já mostramos na Proposição 4.1.1 que o sistema (2.19) não tem órbitas fechadas.

Para $0 \leq \xi < \xi_t$, o seguinte teorema dá os resultados obtidos sobre órbitas periódicas.

Teorema 4.2.3 *Nas notações do capítulo anterior, para $0 \leq \xi < \xi_t = 1 - \frac{\alpha}{k\beta}$ e $\kappa \geq \kappa_2(\xi)$, o sistema (4.13) (e portanto (2.21)) tem no máximo uma órbita periódica, e, se ela existir, é hiperbólica.*

Prova.

Para provar este teorema, estudaremos as formas que os gráficos de $g_2(y)$ e

$$f_2(y) = F'(y) = \frac{\alpha}{k} - \beta(1 - \xi) \left(\frac{k}{(1 - \xi)y + k} \right)^{k+1}$$

podem assumir.

Inicialmente, indicaremos $1 - \xi = \gamma k$, para simplificar a nossa notação. Assim temos:

- $f_2(y) = \frac{\alpha}{k} - \beta\gamma k \left(\frac{1}{1+\gamma y} \right)^{k+1} \Rightarrow (1+\gamma y)^{k+1} f_2(y) = \frac{\alpha}{k} (1+\gamma y)^{k+1} - \beta\gamma k$
- $g_2(y) = \frac{\mu+\alpha y - \beta \left(\frac{1}{1+\gamma y} \right)^k}{y} \Rightarrow (1+\gamma y)^{k+1} g_2(y) = \frac{(\mu+\alpha y)(1+\gamma y)^{k+1} - \beta(1+\gamma y)}{y}.$

Denote por

- $\tilde{f}_2(y) = \frac{\alpha}{k} (1+\gamma y)^{k+1} - \beta\gamma k$
- $\tilde{g}_2(y) = \frac{(\mu+\alpha y)(1+\gamma y)^{k+1} - \beta(1+\gamma y)}{y}.$

Fazendo a mudança de variáveis $z = (1+\gamma y)^{k+1}$, i.e, $y(z) = \frac{z^{\frac{1}{k+1}} - 1}{\gamma}$ (note que $y \geq 0 \Rightarrow z \geq 1$) obtemos:

- $\tilde{f}_2(z) = \frac{\alpha}{k} z - \beta\gamma k$
- $\tilde{g}_2(z) = \frac{(\mu+\alpha y)(1+\gamma y)^{k+1} - \beta(1+\gamma y)}{y}.$

Provaremos que o gráfico de $\tilde{g}_2(z)$ tem concavidade voltada para baixo, isto é, $\frac{d^2 \tilde{g}_2(z)}{dz^2} < 0$.

A partir de

- $\frac{d\tilde{g}_2(z)}{dz} = \frac{d\tilde{g}_2(z)}{dy} \frac{dy}{dz}$
- $\frac{dy}{dz} = \frac{1}{\gamma(k+1)(1+\gamma y)^k}$

podemos escrever

$$\begin{aligned}
 \frac{d\tilde{g}_2(z)}{dz} &= \frac{[\alpha(1+\gamma y)^{k+1} + \gamma(k+1)(\mu+\alpha y)(1+\gamma y)^k - \beta\gamma]y + \beta(1+\gamma y) - (\mu+\alpha y)(1+\gamma y)^{k+1}}{\gamma y^2 (k+1)(1+\gamma y)^k} \\
 &= \frac{\frac{\alpha y(1+\gamma y)}{\gamma(k+1)} + \mu y + \alpha y^2 - \frac{\beta y}{(k+1)(1+\gamma y)^k} + \frac{\beta(1+\gamma y)}{\gamma(k+1)(1+\gamma y)^k} - \frac{(\mu+\alpha y)(1+\gamma y)}{\gamma(k+1)}}{y^2} \\
 &= \frac{\mu y + \alpha y^2 - \frac{\mu(1+\gamma y)}{\gamma(k+1)} + \frac{\beta}{\gamma(k+1)(1+\gamma y)^k}}{y^2}.
 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\bullet \quad \frac{d^2 \tilde{g}_2(y(z))}{dz^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{\mu y + \alpha y^2 - \frac{\mu(1+\gamma y)}{\gamma(k+1)} + \frac{\beta}{\gamma(k+1)(1+\gamma y)^k}}{y^2} \right) \frac{dy}{dz}$$

Como $\frac{dy}{dz} > 0$, basta estudar o sinal de $\frac{d}{dy} \left(\frac{d\tilde{g}_2(y(z))}{dz} \right)$. Agora temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \left(\frac{\mu y + \alpha y^2 - \frac{\mu(1+\gamma y)}{\gamma(k+1)} + \frac{\beta}{\gamma(k+1)(1+\gamma y)^k}}{y^2} \right) &= \frac{y[\mu + 2\alpha y - \frac{\mu}{(k+1)} - \frac{\beta k(1+\gamma y)^{-(k+1)}}{(k+1)}] - 2[\mu y + \alpha y^2 - \frac{\mu(1+\gamma y)}{\gamma(k+1)} + \frac{\beta}{\gamma(k+1)(1+\gamma y)^k}]}{y^3} \\ &= \frac{-\mu y - \frac{\beta k y}{(k+1)(1+\gamma y)^{k+1}} + \frac{\mu y}{(k+1)} - \frac{2\beta}{\gamma(k+1)(1+\gamma y)^k} + \frac{2\mu}{\gamma(k+1)}}{y^3} \\ &= \frac{-\mu k y(1+\gamma y)^{k+1} + \frac{2\mu}{\gamma}(1+\gamma y)^{k+1} - \frac{2\beta}{\gamma}(1+\gamma y) - \beta k y}{y^3(k+1)(1+\gamma y)^{k+1}}. \end{aligned}$$

Vamos estudar o sinal de

$$j(y) = -\mu k y(1+\gamma y)^{k+1} + \frac{2\mu}{\gamma}(1+\gamma y)^{k+1} - \frac{2\beta}{\gamma}(1+\gamma y) - \beta k y.$$

Observe que

- $j'(y) = -\mu k(1+\gamma y)^{k+1} - \mu \gamma k y(k+1)(1+\gamma y)^k + 2\mu(k+1)(1+\gamma y)^k - 2\beta - \beta k$
- $j''(y) = -\mu k(k+1)(k+2)\gamma^2 y(1+\gamma y)^{k-1} < 0$.

Como $j'(0) = (\mu - \beta)(k+2) < 0$, então $j'(y) < 0$, $\forall y > 0$. Por outro lado, como $j(0) = \frac{2}{\gamma}(\mu - \beta) < 0$, então $j(y) < 0$, $\forall y > 0$. Assim, concluímos que $\frac{d^2\tilde{g}_2(y(z))}{dz^2} < 0$, $\forall y > 0$, logo $\tilde{g}_2(z)$ tem concavidade voltada para baixo.

Faremos agora um esboço para os gráficos de $\tilde{f}_2(z)$ e $\tilde{g}_2(z)$. Sabemos que $\tilde{f}_2(z)$ é uma função linear em z

- $\tilde{f}_2(0) = -\beta \gamma k$
- $\tilde{f}_2(1) = \frac{\alpha}{k} - \beta(1 - \xi) < 0 \Leftrightarrow \xi < 1 - \frac{\alpha}{k\beta}$.

Para um esboço do gráfico de $\tilde{g}_2(z)$, observe que:

- $\lim_{z \rightarrow 1^+} y(z) = 0$
- $\lim_{z \rightarrow \infty} y(z) = \infty$
- $\lim_{z \rightarrow 1^+} \tilde{g}_2(z) = -\infty$
- $\lim_{z \rightarrow \infty} \tilde{g}_2(z) = \infty$.

Conseqüentemente, só podemos ter uma das possibilidades da Figura 4.8 para os gráficos de $\tilde{f}_2(z)$ e $\tilde{g}_2(z)$.

Figura 4.8: gráfico de $\tilde{f}_2$ e $\tilde{g}_2$

Como $f_2(y) - Cg_2(y) = \frac{1}{(1+\gamma y)^{k+1}}(\tilde{f}_2(y) - C\tilde{g}_2(y))$, basta estudar $\tilde{f}_2(y) - C\tilde{g}_2(y)$. Nos casos da Figura 4.8 (a), (b) e (c) vale a hipótese do lema 4.2.1 (a), logo não existe órbita periódica para o sistema. No caso da Figura 4.8 (d), $\forall C \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}_2(y) - C\tilde{g}_2(y)$ tem duas raízes simples, logo pelo lema 4.2.1 (b), o sistema admite no máximo uma órbita periódica. ■

Para finalizar este capítulo, faremos uma observação importante sobre os resultados obtidos nesta seção e os obtidos na seção 4.1.

Observe que os resultados obtidos nos teoremas da seção 4.2, são coerentes com os resultados do teorema 4.1.3, obtidos na seção 4.1. Além disso, os resultados para o Teorema 4.1.3, garantem

apenas a unicidade local de órbitas periódicas, em M , no caso $\xi < \xi_p$ com $\xi \approx \xi_p$. Porém os teoremas provados nesta seção, mais que a unicidade local destas órbitas, eles garantem que, se ela existir, é única.

Capítulo 5

Conclusões

5.1 Comportamento das soluções para os modelos I e II

Neste capítulo interpretaremos os resultados obtidos até aqui para os sistemas originais, para se conhecer o comportamento da doença no decorrer do tempo.

Para os sistemas (2.19) e (2.4):

A mudança de coordenadas $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ utilizada no Capítulo 2, é um difeomorfismo $\mathcal{C}^\infty$, que transforma a região $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, 0 \leq y < 1\}$ do plano $\mathbf{x-y}$ sobre o primeiro quadrante do plano $\mathbf{I-S}$, dada por

$$\Phi : \begin{cases} I = \frac{y}{x} \\ S = \frac{1-y}{x} \end{cases} \quad (5.1)$$

com inversa

$$\Phi^{-1} : \begin{cases} x = \frac{1}{I+S} \\ y = \frac{I}{I+S} \end{cases} \quad (5.2)$$

Neste caso, como sugere a Figura 5.1, Φ leva:

- o eixo- x do plano $\mathbf{x-y}$, no eixo- S do plano $\mathbf{I-S}$. Note que $\Phi(x, y)$ não está definida no eixo- y ;
- a reta $y = 1$ do plano $\mathbf{x-y}$, no eixo- I do plano $\mathbf{I-S}$;
- a reta $y=c$ do plano $\mathbf{x-y}$, na reta $S = \frac{1-c}{c}I$ no plano $\mathbf{I-S}$;
- a reta $x=c$ do plano $\mathbf{x-y}$, na reta $S = \frac{1}{c} - I$, no plano $\mathbf{I-S}$.

Figura 5.1:

Para os sistemas (2.21) e (2.18):

A mudança de coordenadas $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ utilizada no Capítulo 2, é um difeomorfismo $\mathcal{C}^\infty$, que transforma a região $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, 0 \leq y < \infty\}$ do plano **x-y** sobre o primeiro quadrante do plano **P-N**, dada por

$$\Phi : \begin{cases} P = \frac{y}{x} \\ N = \frac{1}{x} \end{cases} \quad (5.3)$$

com inversa

$$\Phi^{-1} : \begin{cases} x = \frac{1}{N} \\ y = \frac{P}{N} \end{cases} \quad (5.4)$$

Neste caso, como sugere a Figura 5.2, Φ leva:

- o eixo-x do plano **x-y**, no eixo-N do plano **P-N**. Note que $\Phi(x, y)$ não está definida no eixo-y do plano **x-y**;
- a reta $y=c$ do plano **x-y**, na reta $P=cN$, no plano **P-N**;
- a reta $x=c$ do plano **x-y**, é levada numa reta $N = \frac{1}{c}$, no plano **P-N**.

Figura 5.2:

Segue abaixo esboços de alguns retratos de fase, dos sistemas (2.19) e (2.21) no plano x - y , e seus transformados por Φ , nos planos I - S e P - N , respectivamente.

- 1) Para $\xi = 1$ e $\kappa < \kappa_t = \kappa_1 < \kappa_2$, temos o ponto crítico $(x, y) = (0, 0)$ que é globalmente assintoticamente estável, como é dado na Figura 5.3. Aqui a doença se extingue.

Figura 5.3:

Observação: Para $0 \leq \xi \leq 1$, se tivermos $0 < \kappa < \kappa_t$, a interpretação é dada como na Figura 5.3.

2) Para $\xi = 1$ e $\kappa_t = \kappa_1 < \kappa < \kappa_2$, temos dois pontos críticos $(0,0)$ que é uma sela e $(0, y^*)$ que é um nó atrator. Ambas as populações **S** de suscetíveis e **I** de infectados (**P** de parasitas e **N** de hospedeiros) crescem exponencialmente, de acordo com a

Figura 5.4.

Figura 5.4:

3) Para $\xi = 1$ e $\kappa_t = \kappa_1 < \kappa_2 < \kappa$, aparece mais um ponto crítico interior que é um foco atrator cujo retrato de fase é mostrado na Figura 5.5. Neste caso, a doença regula o crescimento populacional que tende para um equilíbrio no qual a doença é endêmica. Lembramos que para o sistema 2.19, este ponto crítico existe se, e somente se, a condição $\beta - \mu < \alpha$, é satisfeita.

Figura 5.5:

- 4) O caso $\xi_t < \xi < 1$ e $\kappa_t \leq \kappa < \kappa_1 < \kappa_2$, tem retrato de fase igual ao da Figura 5.3.
- 5) O caso $\xi_t < \xi < 1$ e $\kappa_t < \kappa_1 < \kappa < \kappa_2$, tem retrato de fase igual ao da Figura 5.4.
- 6) O caso $\xi_t < \xi < 1$ e $\kappa_t < \kappa_1 < \kappa_2 < \kappa$, tem retrato de fase igual ao da Figura 5.5.
- 7) O caso $\xi = \xi_t$ e $\kappa_t = \kappa_1 < \kappa < \kappa_2$, tem retrato de fase igual ao da Figura 5.4.
- 8) O caso $\xi = \xi_t$ e $\kappa_t = \kappa_1 < \kappa_2 < \kappa$, tem retrato de fase igual ao da Figura 5.5.

9) Para $\xi_p < \xi < \xi_t$ e $\kappa_t < \kappa < \kappa_1 < \kappa_2$, temos três pontos críticos no plano x - y , dois nós atratores $(0, 0)$ e $(0, y_2^*)$ e uma sela $(0, y_1^*)$. A separatriz da sela, divide M em duas regiões, onde temos órbitas tendendo para cada um dos pontos críticos $(0, 0)$ e $(0, y_2^*)$, como na Figura 5.6. Dependendo da condição inicial, podemos ter extinção da doença ou um crescimento exponencial de ambas as populações.

Figura 5.6:

10) Para $\xi_p < \xi < \xi_t$ e $\kappa_t < \kappa_1 < \kappa < \kappa_2$, a interpretação é dada como na Figura 5.4.

11) Para $\xi_p < \xi < \xi_t$ e $\kappa_t < \kappa_1 < \kappa_2 < \kappa$, a interpretação é dada como na Figura 5.5.

12) O caso $\xi_p < \xi < \xi_t$ e $\kappa_t < \kappa < \kappa_2 < \kappa_1$, tem retrato de fase igual ao da Figura 5.6.

13) Para $\xi_p < \xi < \xi_t$ e $\kappa_t < \kappa_2 < \kappa < \kappa_1$, temos quatro pontos críticos, dois atratores $(0,0)$ e $(\bar{x}, \bar{y})$ e duas selas $(0, y_1^*)$ e $(0, y_2^*)$. A separatriz da sela $(0, y_1^*)$ divide M em duas sub regiões sendo que em uma delas as órbitas tendem ao ponto crítico atrator $(\bar{x}, \bar{y})$ no plano $x-y$, e isto significa no modelo original que as soluções tendem para um ponto crítico atrator onde a doença é endêmica. Na outra região, as órbitas tendem ao ponto crítico atrator $(0,0)$ que no modelo original significa a extinção da doença e o crescimento da população de suscetíveis S (parasitas P), como na Figura 5.7

(a)

(b)

Figura 5.7:

14) Para $\xi_p < \xi < \xi_t$ e $\kappa_t < \kappa_2 < \kappa_1 < \kappa$, temos três pontos críticos, um atrator $(\bar{x}, \bar{y})$ interior ao primeiro quadrante e duas selas $(0, 0)$ e $(0, y_2^*)$. Neste caso, todas as órbitas tendem para o ponto crítico $(\bar{x}, \bar{y})$ no plano x - y , e isto significa no modelo original que as soluções tendem para um ponto crítico atrator onde a doença é endêmica. Veja Figura 5.8.

Figura 5.8:

15) Para $0 < \xi < \xi_p$ e $\kappa_t < \kappa < \kappa_2 < \kappa_1$, temos três pontos críticos no plano x - y , um nó atrator $(0, 0)$, um nó repulsor $(0, y_1^*)$ e uma sela $(0, y_2^*)$. Neste caso todas as órbitas do interior de M tendem para o ponto crítico $(0, 0)$, como na Figura 5.9. Aqui temos extinção da doença.

(a)

(b)

Figura 5.9:

16) Para $0 < \xi < \xi_p$, com $\xi \approx \xi_p$, e $\kappa_2 < \kappa < \kappa_1$, com $\kappa > \kappa_t(\xi_p)$, temos quatro pontos críticos, um nó atrator $(0,0)$, duas selas $(0, y_1^*)$ e $(0, y_2^*)$ e um nó repulsor interior ao primeiro quadrante. Os resultados do capítulo anterior, garantem a ocorrência de uma única órbita periódica estável e hiperbólica, envolvendo o ponto crítico interior que é repulsor. A separatriz da sela $(0, y_1^*)$ divide a região M em duas sub regiões sendo que em uma delas, as soluções tendem a uma órbita periódica e na outra tendem ao nó $(0,0)$. Dependendo da condição inicial tomada, a população I de infectados (P de parasitas) e S de suscetíveis (N de hospedeiros) pode crescer exponencialmente ou tender a uma órbita periódica, permanecendo estável. Outra possibilidade é ocorrer extinção da doença.

(a)

(b)

Figura 5.10:

17) Para $0 < \xi < \xi_p$, com $\xi \approx \xi_p$, e $\kappa_2 < \kappa_1 < \kappa$, com $\kappa > \kappa_t(\xi_p)$, temos três pontos críticos, duas selas $(0,0)$ e $(0, y_2^*)$ e um nó repulsor interior ao primeiro quadrante. Os resultados do capítulo anterior, garantem a ocorrência de uma única órbita periódica estável e hiperbólica, envolvendo o ponto crítico interior que é repulsor. Neste caso, a população **I** de infectados (**P** de parasitas) e **S** de suscetíveis (**N** de hospedeiros) permanecem estáveis no decorrer do tempo, isto é, para qualquer número inicial de infectados ou suscetíveis dentro da população, as duas populações se estabilizam na órbita periódica, com o passar do tempo, ou seja, as populações não se extinguem nem se expandem (ver Figura 5.11)

(a)

(b)

Figura 5.11:

18) Para $\xi = 0$ e $\kappa_t < \kappa < \kappa_2 < \kappa_1$, temos três pontos críticos no plano x - y , um nó atrator $(0,0)$, um nó repulsor $(0, y^*)$ e uma sela $(0,1)$, de acordo com a Figura 5.12. Neste caso temos extinção da doença.

Figura 5.12:

19) Para $\xi = 0$ e $\kappa_t < \kappa_2 < \kappa < \kappa_1$, temos quatro pontos críticos no plano x - y , um nó atrator $(0,0)$, duas selas $(0, y^*)$ e $(0,1)$ e um nó repulsor interior ao primeiro quadrante $(\bar{x}, \bar{y})$, como na Figura 5.13. Neste caso temos extinção da doença para qualquer condição inicial tomada fora da separatriz da sela $(0, y^*)$ que sai do ponto crítico instável.

Figura 5.13:

20) Para $\xi = 0$ e $\kappa_t < \kappa_2 < \kappa_1 < \kappa$, temos três pontos críticos no plano x - y , duas selas $(0,0)$ e $(0,1)$ e um nó repulsor interior ao primeiro quadrante $(\bar{x}, \bar{y})$, como na Figura 5.14. Neste caso ambas as populações oscilam no decorrer do tempo, sendo que às vezes a população S de suscetíveis cresce (N) e a de infectados I decresce (P) e vice versa.

Figura 5.14:

Terminamos esta dissertação com intenção de continuar estudando outras bifurcações que aparecem nestes modelos para os pontos críticos do eixo - y . Estudaremos também, como é o limite das órbitas periódicas que surgem pela bifurcação de Hopf e eventuais conexões de selas.

(a)

(b)

Figura 5.15:

(a)

(b)

Figura 5.16:

Apêndice A

Alguns conceitos de probabilidade

Para obtermos as somas (2.11) e (2.12), utilizaremos a função geradora de probabilidades e de momentos da DBN. Antes disso, introduziremos alguns conceitos básicos de probabilidade. Faremos, em particular, um estudo de alguns conceitos relativos a Variável Aleatória Binomial Negativa (VABN), e sobre suas funções geradora de probabilidades e de momentos. Uma discussão mais completa sobre os conceitos aqui introduzidos, pode ser encontrada em [7, 10, 16].

A.1 Motivação

Considere um experimento real ou imaginário que estamos procurando modelar. A primeira coisa que devemos fazer é decidir sobre os possíveis resultados do experimento. Uma vez decididos sobre os possíveis resultados, escolhemos um conjunto Ω (espaço amostral) cujos pontos ω estão associados a estes resultados. Tomamos a seguir uma coleção não vazia Λ de subconjuntos de Ω , que representará a coleção de “eventos” aos quais desejamos associar probabilidades. Um evento significa por definição, um conjunto A em Λ . A afirmação: O evento A ocorre, significa que o resultado do nosso experimento é representado por algum ponto $\omega \in A$.

Definição 1 *Uma variável aleatória X definida em um espaço de probabilidade (Ω, Λ, P) é uma função cujo domínio é Ω e cujo contra-domínio é um subconjunto finito ou infinito, porém enumerável, $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ de números reais tal que $\{\omega; X(\omega) = x_i\}$, $i=1, 2, \dots$, é um evento $\forall i$.*

Observação: $\{\omega; X(\omega) = x_i\}$ é um evento e, portanto podemos falar de sua probabilidade, que denotaremos por $P(\omega; X(\omega) = x_i)$ ou somente por $P(x)$.

- primeiro momento e segundo momento

Seja ω um evento de um espaço amostral Ω e X uma variável aleatória discreta real de Ω em $\mathbb{R}$.

Definição 2 O primeiro momento de X é definido por

$$E(X) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} xp(\omega : X(\omega) = x),$$

onde $x \in \mathbb{R}$ e $p(\omega : X(\omega) = x)$ é a probabilidade da variável aleatória aplicada ao evento ω , ser igual a x , que denotaremos simplesmente por $p(x)$.

Definição 3 O segundo momento de X é definido por:

$$E(X^2) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} x^2 p(x).$$

Observação: O primeiro momento também é chamado de Esperança ou média.

- função geradora de probabilidades e de momentos

Seja X uma variável aleatória como acima.

Definição 4 A função geradora de probabilidade de X é a função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$g(\xi) = E(\xi^x) = \sum_{x=0}^{\infty} \xi^x p(x). \quad (\text{A.1})$$

Definição 5 A função geradora de momento de X , é uma função $m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, definida por,

$$m(\xi) = E(e^{\xi x}) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} e^{\xi x} p(x). \quad (\text{A.2})$$

Observação: Os nomes função geradora de probabilidades e função geradora de momentos é dado porque as funções $g(\xi)$ e $m(\xi)$ geram probabilidades e momentos, basta observar que:

$$p(x) = \frac{g^{(x)}(\xi)}{x!} \Big|_{\xi=0} \quad e, \quad (\text{A.3})$$

$$E(\xi^k) = m^{(k)}(\xi) \Big|_{\xi=0}. \quad (\text{A.4})$$

- função de distribuição de probabilidade da VABN

Se X é uma VABN discreta real, então a função de distribuição de X é dada por:

$$p(X = x + k) = \begin{cases} \binom{x+k-1}{k-1} \rho^k (1-\rho)^x & , \quad x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & , \quad c.c. \end{cases} \quad (A.5)$$

onde k e ρ são os parâmetros da distribuição; k é o parâmetro de incremento (ou clumping), ρ é a probabilidade de sucesso no experimento realizado e $q = 1 - \rho$ é a probabilidade de fracasso.

- função geradora de probabilidade e de momento da VABN

Teorema A.1.1 A função geradora de probabilidades da VABN X com parâmetros ρ e k é,

$$g(\xi) = \left(\frac{\rho}{1 - \xi(1 - \rho)} \right)^k. \quad (A.6)$$

Prova.

Sabemos que $p(X = x + k) = \binom{x+k-1}{k-1} \rho^k (1-\rho)^x$, e como

$$\begin{aligned} \binom{x+k-1}{k-1} &= \frac{(x+k-1)!}{(k-1)!x!} \\ &= \frac{(k+x-1)!}{(k-1)!x!} \\ &= \binom{k+x-1}{x} \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} p(X = x + k) &= \binom{k+x-1}{x} \rho^k (1-\rho)^x \\ &= \frac{(k+x-1) \dots (k+1)k(k-1)!}{(k-1)!x!} \rho^k q^x \\ &= \frac{-k(-k-1) \dots (-k-(x+1))}{x!} \rho^k (-q)^x \end{aligned}$$

que resulta em,

$$p(X = x + k) = \binom{-k}{x} \rho^k (-q)^x. \quad (\text{A.7})$$

De (A.7) obtemos,

$$\begin{aligned} g(\xi) &= \sum_{x=0}^{\infty} p(x + k) \xi^x \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} \binom{-k}{x} \rho^k (-q)^x \xi^x. \end{aligned}$$

Agora utilizando a fórmula binomial negativa

$$(1 + q)^{-k} = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{-k}{x} q^x \quad (\text{A.8})$$

obtemos,

$$g(\xi) = \rho^k (1 + (-q\xi))^{-k}$$

o que prova o teorema. ■

Teorema A.1.2 *A função geradora de momentos da VABN discreta real X com parâmetros ρ e k é dada por*

$$m(\xi) = \left(\frac{\rho}{1 - e^{\xi}(1 - \rho)} \right)^k. \quad (\text{A.9})$$

Prova.

Utilizando (A.2), é fácil ver que

$$\begin{aligned} m(\xi) &= \rho^k \sum_{x=0}^{\infty} \binom{-k}{x} (-qe^{\xi})^x \\ &= \rho^k (1 + (-qe^{\xi}))^{-k} \\ &= \left(\frac{\rho}{1 - e^{\xi}(1 - \rho)} \right)^k. \end{aligned}$$
■

• primeiro momento e segundo momento da VABN

1- primeiro momento

De (A.4) temos que

$$E(X) = m'(\xi)|_{\xi=0}$$

e por (A.9) temos,

$$\begin{aligned} m'(\xi) &= k \left(\frac{\rho}{1-e^\xi(1-\rho)} \right)^{k-1} \left(\frac{-\rho(-e^\xi(1-\rho))}{(1-e^\xi(1-\rho))^2} \right) \\ &= \frac{ke^\xi(1-\rho)}{1-e^\xi(1-\rho)} \left(\frac{\rho}{1-e^\xi(1-\rho)} \right)^k \end{aligned}$$

fazendo $\xi = 0$ obtemos

$$m'(\xi)|_{\xi=0} = \frac{k(1-\rho)}{\rho}.$$

Assim temos que o primeiro momento da VABN é dado por,

$$E(X) = \frac{k(1-\rho)}{\rho}. \quad (\text{A.10})$$

2- segundo momento

A segunda derivada de $m(\xi)$ é dada por,

$$\begin{aligned} m''(\xi) &= \frac{ke^\xi(1-\rho) \left(1-e^\xi(1-\rho) \right) - ke^\xi(1-\rho) \left(-e^\xi(1-\rho) \right)}{\left(1-e^\xi(1-\rho) \right)^2} \left(\frac{\rho}{1-e^\xi(1-\rho)} \right)^k + \left(\frac{ke^\xi(1-\rho)}{1-e^\xi(1-\rho)} \right)^2 \left(\frac{\rho}{1-e^\xi(1-\rho)} \right)^k \\ &= \frac{ke^\xi(1-\rho) \left(1-e^\xi(1-\rho) + e^\xi(1-\rho) \right)}{\left(1-e^\xi(1-\rho) \right)^2} \left(\frac{\rho}{1-e^\xi(1-\rho)} \right)^k + \left(\frac{ke^\xi(1-\rho)}{1-e^\xi(1-\rho)} \right)^2 \left(\frac{\rho}{1-e^\xi(1-\rho)} \right)^k \end{aligned}$$

fazendo $q = 1 - \rho$ e $\xi = 0$ obtemos

$$m''(\xi)|_{\xi=0} = \frac{k^2q^2+kq}{\rho^2},$$

conseqüentemente, por (A.4) obtemos,

$$E(X^2) = \frac{k^2q^2+kq}{\rho^2}.$$

A.2 Utilizando a função geradora de probabilidades e de momentos

Queremos agora, expressar as somas (2.11) e (2.12) em termos de N e P.

Denotamos anteriormente por i , o número de parasitas que um hóspede carrega. Esta será nossa variável aleatória com distribuição binomial negativa contendo os parâmetros k e ρ , e com média $\frac{P}{N}$.

Vamos expressar primeiramente ρ e q em termos de P e N . Para este fim, observe que,

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} ip(i), \text{ com } p(i) = \frac{n_i}{N}$$

ou seja,

$$\frac{P}{N} = \frac{k(1-\rho)}{\rho},$$

assim obtemos

$$\rho = \frac{kN}{P + kN}. \quad (\text{A.11})$$

Agora, como $q = 1 - \rho$, segue que

$$q = \frac{P}{P + kN}. \quad (\text{A.12})$$

Expressemos então a soma (2.11). Para este fim, note que a função geradora de probabilidade de i com $p(i) = \frac{n_i}{N}$ e parâmetros ρ e q , é denotada por,

$$\begin{aligned} g(\xi) &= \sum_{i=0}^{\infty} p(i)\xi^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{n_i}{N}\xi^i, \end{aligned}$$

por outro lado,

$$g(\xi) = \left(\frac{\rho}{1 - \xi(1 - \rho)} \right)^k.$$

Substituindo os valores de ρ e q na expressão acima obtemos:

$$g(\xi) = \left(\frac{kN}{kN + P(1 - \xi)} \right)^k$$

conseqüentemente,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{n_i}{N}\xi^i = \left(\frac{kN}{kN + P(1 - \xi)} \right)^k$$

que pode ser escrito na forma,

$$\sum_{i=0}^{\infty} n_i \xi^i = N \left(\frac{kN}{kN + P(1 - \xi)} \right)^k. \quad (\text{A.13})$$

Vamos agora expressar (2.12) em termos de P e N . Como já foi visto,

$$E(X^2) = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 p(i)$$

onde $p(i) = \frac{n_i}{N}$, desta forma,

$$E(X^2) = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \frac{n_i}{N}.$$

por outro lado,

$$E(X^2) = \frac{k^2 q^2 + kq}{\rho^2}, \quad (\text{A.14})$$

substituindo (A.11) e (A.12) no segundo membro da equação acima obtemos,

$$E(X^2) = \frac{P}{N} + \left(\frac{P}{N}\right)^2 \left(\frac{k+1}{k}\right),$$

conseqüentemente

$$\sum_{i=0}^{\infty} i^2 \frac{n_i}{N} = \frac{P}{N} + \left(\frac{P}{N}\right)^2 \left(\frac{k+1}{k}\right).$$

Assim obtemos,

$$\sum_{i=0}^{\infty} i^2 n_i = N \frac{P}{N} + \left(\frac{P}{N}\right)^2 \left(\frac{k+1}{k}\right). \quad (\text{A.15})$$

Referências Bibliográficas

- [1] R. M. Anderson e R. M. May, Regulation and stability of host-parasite population interactions. i regulatory processes, *J. Anim. Ecol.* **47** (1978), 219–247.
- [2] ———, Regulation and stability of host-parasite population interactions. ii destabilizing processes, *J. Anim. Ecol.* **47** (1978), 249–267.
- [3] ———, Population biology of infectious diseases: Part i, *Nature* **280** (1979), 361–367.
- [4] ———, Population biology of infectious diseases: Part ii, *Nature* **280** (1979), 455–461.
- [5] O. Diekmann e M. Kretzschmar, Patterns in the effects of infectious diseases on population growth, *Journal of Mathematical Biology* **29** (1991), 539–570.
- [6] A. A. Andronov et al., *Theory of bifurcation of dynamical systems on plane*, New York, 1973, translated by Wiley and Sons.
- [7] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, NY, 1950, John Wiley and Sons.
- [8] K.M. Heal, M.L. Hansen e K.M. Rickard, *Maple v learning guide*, Springer-Verlag, 1996.
- [9] C. S. Holling, The components of predation as revealed by study of smallmammal predation of the european pine sawfly, *Canad. Entomol.* **91** (1959), 293–320.
- [10] N. L. Johnson e S. Kotz, *Discrete distributions*, NY, 1969, John Wiley and Sons.
- [11] N. Keyfitz, The mathematics of sex and marriage., *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. IV: Biology and Health* (1972), 89–108.
- [12] C. D. Laerte e N. M. Helmar, *Existência e unicidade de ciclos limites em um sistema presa-predador com resposta funcional do tipo ivlev*, Master's thesis, Universidade de Brasília, outubro 1999.
- [13] J.E Marsden e M. McCracken, *The hopf bifurcation and its applications*, vol. 19, 1976, Springer-Verlag.

- [14] B. Parlett, Can there be a marriage function? in greville, t.n.e.,(ed), *Population Dynamics* (1972), 107–135, New York London, Academic Press.
- [15] J. H. Pollard, The two sex problem, *Mathematical models for the growth of human populations* (1973), Cap.7, Cambridge University Press.
- [16] R. Ross, *A first course in probability*, 4 ed., vol. 1, MacMillan College Publishing Company, 1994, Robert Pirtle.
- [17] J. Sotomayor, *Licções de equações diferenciais ordinárias*, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada/CNPq, 1979.
- [18] R. Waldstatter, Pair formation in sexually transmitted diseases. in: C. castillo-chavez (ed) mathematical and statistical approaches to aids epidemiology., *Lect. Notes Biomath.* **83** (1989).
- [19] Y. Yan, *Theory of limit cycles*, vol. 66, 1986, American Mathematical Society.
- [20] Zhifen Z., Proof of the uniqueness theorem of limit cycles of generalized lienard equations, *Applicable Analysis* **23** (1986), 63–76, Communicated by Jack Hale.
- [21] A. Zegeling e E. R. Kooij, Uniqueness of limit cycles in models for microparasitic and macroparasitic diseases, *Journal of Mathematical Biology* **36** (1998), 407–417.