USP – Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

**Um Estudo sobre
a Dinâmica de
Aplicações do
tipo “twist” no toro**

Salvador Addas Zanata¹

**Tese apresentada ao Instituto de
Matemática e Estatística da USP para
obtenção do grau de doutor em
Matemática Aplicada sob orientação de
Clodoaldo Grotta Ragazzo**

São Paulo 2000

¹**Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro da FAPESP**

Um Estudo sobre a Dinâmica de Aplicações do tipo “twist” no toro

Este exemplar corresponde à redação final devidamente
corrigida e definida por Salvador Addas Zanata e aprovada
pela comissão julgadora.

Banca Examinadora :

Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo	IME – USP
Prof. Dr. Eduardo Colli	IME – USP
Prof. Dr. Walter Felipe Wreszinski	IF – USP
Prof. Dr. Marco Antônio Teixeira	IMECC – UNICAMP
Prof. Dr. Mário Jorge Carneiro	UFMG

Ficha Catalográfica

Zanata, Salvador Addas

Um estudo sobre a dinâmica de aplicações do tipo “twist” no toro. / Salvador Addas Zanata

- - São Paulo, 2000.

148p.

Tese (doutorado) – Instituto de Matemática e Estatística,
Universidade de São Paulo

1. Introdução. **2.** Sobre a origem de F , algumas de suas propriedades e resultados relacionados aos da seção (1.3). **3.** Prova dos resultados descritos em (2.5) e de outros a eles relacionados. **4.** Resultados relacionados à seção (1.4) **5.** Caracterização Variacional para algumas órbitas de F e da aplicação Standard

**Aos meus queridos pais Lauro e Wilma
e a minha companheira Débora**

Agradecimentos :

Agradeço profundamente aos meus queridos pai e mãe por todo o amor, apoio e força que eles sempre me deram e sempre darão. Se não fosse por eles, eu nunca teria chegado até aqui.

Agradeço a todos que me ajudaram durante todo esse tempo aqui no IME, colegas de pós-graduação, professores, funcionários, etc.

Aos amigos de infância, da escola, faculdade e daqui do IME.

Gostaria de agradecer muito ao Professor Clodoaldo Grotta Ragazzo. Não apenas pela sua orientação, que foi excelente, mas principalmente pelo apoio nos momentos difíceis, amizade e estímulo intelectual que foi ser seu aluno.

Gostaria de agradecer aos membros da banca examinadora, em particular ao Professor Eduardo Colli, pela sugestão de estudar as tangências homoclínicas e consequências da existência destas, e ao Professor Mário Jorge Carneiro, pelas correções por ele apontadas e sugestões sobre futuras questões.

Agradeço muito à Débora Amaral Audi, por sempre me ouvir falar sobre matemática, pelo seu carinho e apoio e sobretudo pela tranquilidade que ela me passa, fundamental para o desenvolvimento dessa tese.

E finalmente a Deus, por tudo de bom que eu consegui até hoje.

Abstract :

It has been proved by several authors that, for Hamiltonian systems in 4-dimensional manifolds, the dynamics near homoclinic orbits to saddle-center equilibrium is essentially determined by a 2-dimensional, 2-parameter family of Twist Maps, which is invariant under some dilatation symmetry. Using this symmetry it is possible to consider this family of maps as defined on the torus. For this map in the torus, that is not Lebesgue measure preserving anymore, the existence of many homoclinic tangencies has been proved. As a consequence of their generic unfolding the following structures appear :

- many elliptic periodic points,
- infinitely many sinks,
- Hénon-like strange attractors.

The last two structures represent escaping routes from the original homoclinic orbit.

Also, for a special class of Twist maps in the torus that includes the above one and the well-know Standard Map it has been proved that periodic orbits of a new type with a rational "vertical rotation number" (V.R.N.) actually exist, provided that there is no rotational invariant circle (R.I.C.). So, for a conservative family of Twist maps in the torus (that has a generating function), the break-up of the last R.I.C. is associated to the appearance of solutions to infinitely many variational problems, that had no solution while there was at least one R.I.C. The existence of quasi-periodic orbits associated to irrational V.R.N. and a theorem on the order of appearance of these orbits (they appear with increasing V.R.N.) have also been proved.

Resumo :

Já foi provado por diversos autores, que para sistemas Hamiltonianos em variedades de dimensão 4, a dinâmica na vizinhança de órbitas homoclínicas a equilíbrios do tipo sela-centro é essencialmente determinada por uma família a 2 parâmetros de aplicações do tipo "twist " no plano, família esta invariante por uma certa simetria de dilatação. Usando essa simetria é possível considerar essa família de aplicações como definida no toro. Para essas aplicações no toro, que já não preservam mais a medida de Lebesgue, foi provada a existência de diversas tangências homoclínicas. Como consequência do desdobramento genérico destas, as seguintes estruturas aparecem :

- diversos pontos periódicos do tipo elíptico :
- infinitos poços :
- atratores do tipo Hénon ;

As duas últimas estruturas representam rotas de escape de pontos em vizinhanças arbitrariamente pequenas da órbita homoclínica original.

Também, para uma classe especial de aplicações do tipo "twist " no toro, que inclui aquela acima descrita e a conhecida aplicação "Standard ", foi provado que pontos periódicos de um novo tipo, com um "número de rotação vertical " (N.R.V.) racional, existem, desde que não haja mais círculos rotacionais invariantes (C.R.I.). A existência de órbitas quase-periódicas associadas a N.R.V.'s irracionais e um teorema sobre a ordem na qual essas órbitas aparecem (elas aparecem com N.R.V. crescente) também foram provados.

Glossário

Abstract

Resumo

1 Introdução.....	1
1.1 Motivação.....	1
1.2 Apresentação da aplicação.....	4
1.3 Resultados associados à existência de tangências homoclínicas.....	5
1.3.1 Caso conservativo.....	6
1.3.2 Caso dissipativo.....	6
1.4 Algumas consequências da ruptura do último círculo rotacional invariante.....	7
2 Sobre a origem de F, algumas de suas propriedades e resultados relacionados aos da seção (1.3).....	16
2.1 Idéia de como se obtém a expressão de F	16
2.2 Estudo inicial de F	18
2.3 Involuções.....	21
2.4 Sobre o twist.....	26
2.5 Resultados relacionados à seção (1.3).....	27
2.5.1 Caso conservativo.....	27
2.5.2 Caso dissipativo.....	30
2.5.3 Resultado auxiliares.....	34
3 Prova dos resultados descritos em (2.5) e de outros a eles relacionados.....	35
Prova do teorema (20).....	35
Prova do teorema (21) e de lemas auxiliares.....	45
Prova dos teoremas (13) e (16).....	89
Sobre P_d ser C^3 -linearizável.....	92

4 Resultados relacionados à seção (1.4)	95
Resultados topológicos clássicos sobre aplicações do tipo "twist "	95
Sobre a existência de órbitas que sobem "infinitamente " no cilindro	100
Prova do lema (1)	101
Lema topológico crucial para um dos principais resultados dessa tese	103
Prova do teorema (5)	107
Prova do teorema (6)	112
Prova do teorema (7)	114
Enunciado do lema (5), que implica o teorema (7)	115
Sobre a teoria de Nielsen-Thurston para classificação de homeomorfismos de superfícies	119
Prova do teorema (8)	127
Prova do lema (5)	127
5 Caracterização Variacional para algumas órbitas de F e da aplicação Standard	128
Sobre o significado das órbitas periódicas com $\rho_V \neq 0$ para F	129
Sobre o significado das órbitas periódicas com $\rho_V \neq 0$ para a aplicação Standard	130
Referências Bibliográficas	131

Capítulo 1

Introdução

O objetivo do presente capítulo é motivar o aparecimento da aplicação que será analisada em grande parte desse trabalho e apresentar de uma maneira informal os resultados principais dessa tese.

1.1 Motivação

Seja M uma variedade 4-dimensional, Ω uma forma simplética em M e

$H : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Hamiltoniana real analítica definida em M . Vamos supor que (M, Ω, H) satisfaz as seguintes hipóteses :

1) (M, Ω, H) possui um ponto de equilíbrio η do tipo sela-centro, com autovalores $\pm\nu \neq 0$ e $\pm\omega i \neq 0$

2) (M, Ω, H) possui uma órbita Γ , homoclínica a η

Seja Σ uma seção transversal a Γ (seção de Poincaré).

Figura 1 : Órbita Homoclínica e Seção de Poincaré

Neste caso, como Γ não é órbita periódica, é claro que a aplicação de Poincaré $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ nem sempre está definida, pois uma trajetória que sai de um ponto de Σ , próximo a Γ pode, ao se aproximar de η , acompanhar o ramo não homoclínico à η de $W^U(\eta)$, não retornando mais a Σ (ver [1] e [4]).

Inicialmente, sem perda de generalidade, podemos supor que $H(\eta) = 0$. Da conservação da energia, é natural definir uma família a um parâmetro (E) de aplicações de Poincaré $f_E : \Sigma_E \rightarrow \Sigma_E$, onde Σ_E é a restrição de Σ à superfície de energia $H^{-1}(E)$. Como Σ é seção transversal a Γ em M , Σ é 3-dimensional, assim Σ_E é 2-dimensional. Pode-se mostrar que em uma classe grande e interessante de sistemas Hamiltonianos, a aplicação $f_0 : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_0$ está sempre bem definida (ver [4] e [7]).

Foi mostrado por Lerman [6] e Mielke et al. [7] (veja também [3] e [4]), que num sistema de coordenadas conveniente, para

$|E|, \|z\|$ ($z = (x, y)$, coordenadas em Σ_E) suficientemente pequenos, f_E é dada aproximadamente pela seguinte família de aplicações (ver [3]) :

$$F_E(z) = AR[c - \gamma \log |\frac{1}{2}\omega \|z\|^2 - E|]z, \quad (1.1)$$

com $\|z\| > \sqrt{\frac{2}{\omega}E}$ para $E > 0$ e

$$R(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1/\alpha \end{pmatrix}.$$

O número $\alpha \geq 1$ é obtido a partir de um problema de espalhamento (ver referências [3] e [4]), sendo uma espécie de "coeficiente de Floquet" para a órbita homoclínica e $\gamma = \left| \frac{\omega}{\nu} \right|$. A constante c , no caso estudado nesse trabalho ($E = 0$, $\Sigma_0 \cap \Gamma \neq \emptyset$), não afeta a dinâmica.

Agora segue um exemplo, na tentativa de esclarecer um pouco mais o assunto. Seja a seguinte família a um parâmetro de sistemas Hamiltonianos em $\mathbb{R}^4$, com a forma simplética usual (já estudada em [1] e [2]) :

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2) + bx^2y - \frac{y^3}{3} \quad (1.2)$$

Então a dinâmica deste sistema é regida pelas seguintes equações :

$$\begin{cases} \dot{p}_x = -x - 2bxy \\ \dot{x} = p_x \\ \dot{p}_y = -y - bx^2 + y^2 \\ \dot{y} = p_y \end{cases} \quad (1.3)$$

Para todo valor de $b \geq 0$, este sistema tem o seguinte ponto de equilíbrio :

$\eta = (x, y, p_x, p_y) = (0, 1, 0, 0)$. É fácil ver que η é uma singularidade do tipo sela-centro, com um par de autovalores reais $\pm\nu$ e um par de imaginários $\pm\omega = \pm\sqrt{1+2b}i$.

Por outro lado, o plano $(x = 0, y, p_x = 0, p_y)$ é claramente invariante e nele a dinâmica é regida pela seguinte equação :

$$\ddot{y} = -y + y^2$$

Assim nesse plano temos um contínuo de órbitas periódicas com energia menor que $\frac{1}{6}$ que se acumulam em uma órbita homoclínica à singularidade η , digamos Γ , com $H(\Gamma) = \frac{1}{6}$.

Seja agora $\Sigma = \{(x, y = 0, p_x, p_y > 0)\}$ uma seção de Poincaré para Γ . Então, como já foi dito, podemos definir a seguinte família a um parâmetro (E) de aplicações de Poincaré, $f_E : \Sigma_E \rightarrow \Sigma_E$, onde para cada valor de E , tomamos $p_y = \sqrt{2E - p_x^2 - x^2}$. Assim, (x, p_x) é um sistema de coordenadas para Σ_E , desde que $2E - p_x^2 - x^2 > 0$.

Com essa escolha, para $0 \leq E \leq \frac{1}{6}$, o ponto $(x, p_x) = (0, 0) \stackrel{def}{=} \mathbf{0}$ é fixo para f_E . Para $E < \frac{1}{6}$, esse ponto representa a órbita periódica do plano $(x = 0, y, p_x = 0, p_y)$, de energia E . A aplicação f_E é claramente diferenciável no $\mathbf{0}$. Se $E = \frac{1}{6}$, o ponto $\mathbf{0}$ representa a órbita homoclínica Γ e f_E não é mais diferenciável nesse ponto. Como foi dito acima, para

$|E - \frac{1}{6}|, \|(x, p_x)\| \stackrel{def}{=} \|z\|$ suficientemente pequenos,

f_E é dada aproximadamente pela seguinte família de aplicações :

$$F_E(z) = AR[c - \gamma \log |\frac{1}{2}\omega \|z\|^2 - (E - \frac{1}{6}) \|z|,$$

onde $z = (x, p_x) \in \mathbb{R}^2$, $\|z\| > \sqrt{\frac{2}{\omega}(E - \frac{1}{6})}$ para $E > \frac{1}{6}$, $F_{\frac{1}{6}}(\mathbf{0}) \stackrel{def}{=} \mathbf{0}$, c é uma constante, e $\gamma = \sqrt{1+2b}$.

com,

$$R(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1/\alpha \end{pmatrix}.$$

Nesse caso, pode ser mostrado que $\alpha = B + \sqrt{B^2 + 1}$, onde B é dado por :

$$\left| \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\sqrt{1-48b})}{\sinh(2\pi\sqrt{1+2b})} \right| \quad \text{or} \quad \left| \frac{\cosh(\frac{\pi}{2}\sqrt{48b-1})}{\sinh(2\pi\sqrt{1+2b})} \right|,$$

para $b \leq \frac{1}{48}$ e $b \geq \frac{1}{48}$ respectivamente.

1.2 Apresentação da Aplicação

A partir de agora, vamos supor sempre que $E = 0$, ou seja, o estudo fica restrito a superfície de energia que contém η e Γ . Nesse caso, F_0 é um difeomorfismo de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \leftrightarrow$ e definindo $F_0(0) \stackrel{\text{def}}{=} 0$, temos que F_0 é um homeomorfismo do plano no plano. Vamos ainda usar apenas F , ao invés de F_0 , por não haver possibilidade de confusão. Também, o parâmetro c será tomado igual a zero (como já foi dito, o seu valor não afeta a dinâmica quando $E = 0$) e $\omega = 1$.

Assim, a aplicação F fica :

$$F(z) = AR[-\gamma \log(\frac{1}{2} \|z\|^2)]z, \quad \text{onde } z = (x, y) \text{ e} \quad (1.4)$$

R e A foram definidas em (1.1).

Para o estudo que segue, a propriedade crucial dessa aplicação, além de preservar a medida de Lebesgue, é a sua invariância por dilatações discretas do tipo :

$$z \rightarrow e^{\frac{\pi}{\gamma}} z \quad (1.5)$$

Pois, $F(e^{\frac{\pi}{\gamma}} z) = e^{\frac{\pi}{\gamma}} F(z)$. Assim, a dinâmica de F é a mesma em todos os anéis do tipo : $e^{\frac{k\pi}{\gamma}} \leq \|z\| < e^{\frac{(k+1)\pi}{\gamma}}$, para $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Desta forma, F induz uma transformação $\overline{F} : \text{Toro} \rightarrow \text{Toro}$, onde

$$\text{Toro} = \{z \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \|z\| \leq e^{\frac{\pi}{\gamma}} \text{ e se } \|z\| = 1, \text{ então } z \text{ e } e^{\frac{\pi}{\gamma}} z \text{ são identificados}\},$$

da seguinte forma : dado $z \in \mathbb{R}^2$, com $1 \leq \|z\| < e^{\frac{\pi}{\gamma}}$, existe $l \in \mathbb{Z}$, tal que

$$1 \leq F(z)e^{\frac{-l\pi}{\gamma}} < e^{\frac{\pi}{\gamma}}.$$

Então, definimos $\overline{F}(z) = F(z)e^{\frac{-l\pi}{\gamma}}$.

De uma maneira um pouco mais formal, podemos definir a seguinte ação propriamente descontínua :

$$A_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ dada por : } A_n(z) = e^{n \cdot \frac{\pi}{\gamma}} z, \text{ para } n \in \mathbb{Z}.$$

Assim, o toro é obtido como quociente de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ por essa ação $A_n(z)$:

$$Toro = (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) / \text{Ação}$$

E a aplicação $\overline{F} : Toro \rightarrow Toro$ é induzida por $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ através do quociente pela ação A .

Observação :

Posteriormente, tanto a aplicação no plano ($F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$), como a definida no cilindro ($\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = Cilindro$) serão identificadas pela mesma letra : F .

1.3 Resultados associados à existência de tangências homoclínicas

As aplicações F e $\overline{F}$ podem possuir pontos periódicos de 3 tipos :

i) conservativos : existem tanto para F , como para $\overline{F}$. Um ponto P é N -periódico conservativo, se e só se :

$$\det(DF^N(P)) = 1 \Leftrightarrow \det(D\overline{F}^N(P)) = 1$$

ii) dissipativos : só podem existir para $\overline{F}$ (para F , correspondem às rotas de escape da origem). P é ponto N -periódico dissipativo, se e só se :

$$\det(D\overline{F}^N(P)) < 1$$

iii) expansivos : Será mostrado que os pontos periódicos expansivos e dissipativos sempre aparecem juntos e tem caráter oposto quanto aos seus autovalores. P é ponto N -periódico expansivo. se e só se :

$$\det(DF^N(P)) > 1$$

1.3.1 Caso conservativo

Seja P_c um ponto fixo conservativo de F , que é do tipo sela para todo $\alpha > 1$.

Então temos o seguintes resultado :

Teorema 1 : *Considere a aplicação F , com um valor de $\gamma > 1$ fixado. Então existe uma sequência α_n , com $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, tal que em $\alpha = \alpha_n$, F possui pontos periódicos elípticos genéricos.*

Para provar o teorema acima, basta garantir a existência de uma sequência de tangências "genéricas " entre $W^U(P_c)$ e $W^S(P_c)$, com $\gamma > 1$ fixo e $\alpha \rightarrow \infty$, e depois aplicar o teorema (14), devido a P. Duarte, que garante que do desdobramento dessas tangências no parâmetro α , surgem pontos elípticos genéricos. Um ponto n -periódico P de um difeomorfismo C^4 $f : M^2 \rightarrow M^2$, que preserva área, é dito elíptico genérico se ambos os autovalores de $Df^n(P)$, λ e $\frac{1}{\lambda}$, estão no círculo unitário ($\frac{1}{\lambda} = \bar{\lambda}$), $\lambda^2 \neq 1$, $\lambda^3 \neq 1$ e o primeiro coeficiente da série normal de Birkhoff em P é não-nulo.

Isto implica que pode-se aplicar a teoria KAM e P é um ponto de densidade total de um "Conjunto de Cantor " de curvas invariantes envolvendo P (ver [15] e [16]).

1.3.2 Caso dissipativo

Seja P_d um ponto fixo dissipativo de $\bar{F}$, que é do tipo sela para $\alpha > e^{\frac{\pi}{2\gamma}}$, suficientemente grande.

Então temos os seguintes resultados :

Teorema 2 : *Considere $\bar{F}$, com um valor de $\gamma > 1$ fixado. Então existe uma sequência α'_n , com $\alpha'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, tal em $\alpha = \alpha'_n$, $\bar{F}$ tem infinitos poços.*

Teorema 3 : *Considere $\overline{F}$, com um valor de $\gamma > 1$ fixado. Então existe uma sequência α''_n , com $\alpha''_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, tal em $\alpha = \alpha''_n$, $\overline{F}$ tem um atrator do tipo Hénon.*

Novamente, as provas dos teoremas acima são baseadas na existência de uma sequência de tangências “genéricas” entre $W^U(P_d)$ e $W^S(P_d)$, também para $\gamma > 1$ fixo e $\alpha \rightarrow \infty$, e na aplicação dos teoremas (17) e (18), devidos a C. Robinson e Mora-Viana, que garantem o surgimento de infinitos poços e atratores do tipo Hénon, como decorrência do desdobramento das tangências no parâmetro α .

1.4 Algumas consequências da ruptura do último círculo rotacional invariante

Dizemos que uma aplicação do cilindro no cilindro possui um círculo rotacional invariante (C.R.I.) se existe uma curva fechada simples não homotopicamente trivial, invariante por suas iteradas.

Como já foi provado em [4], existe uma função $\alpha_{nc}(\gamma)$, tal que se $\alpha > \alpha_{nc}(\gamma)$, não existem mais círculos rotacionais invariantes para F . A ruptura do último C.R.I. é um fenômeno complexo, que altera significativamente a dinâmica. Um exemplo disso é o seguinte fato : enquanto houver pelo menos um C.R.I., ele divide o cilindro em 2 regiões invariantes, uma abaixo dele, e outra acima. Isto porque F quando definida no cilindro (ver a expressão (2.7) do capítulo 2), preserva os extremos deste, pois $F_I(\phi, I) \xrightarrow{I \rightarrow \pm\infty} \pm\infty$ (condição trivialmente verificável a partir da expressão (2.7)).

Desta forma, por iteradas de F pontos abaixo do C.R.I. permanecem abaixo e pontos acima permanecem acima. Portanto, enquanto houver pelo menos um C.R.I., não existem órbitas que sobem (ou descem) “infinitamente” no cilindro.

De fato, um resultado bastante simples (ver [10] e o teorema (22) no capítulo 4) mostra que existem órbitas para um twist map no cilindro que sobem (ou descem) “infinitamente”, se e só se, não existem C.R.I.’s. Essa propriedade será muito importante nos resultados futuros.

Os resultados provados nessa etapa, valem para uma classe um pouco mais geral de Twist Maps, na qual a nossa aplicação $\overline{F}$ se encaixa. Começemos com algumas

definições :

Definições :

- 1) Seja $Dif_d^1(S^1 \times \mathbb{R}) = \{ \text{difeomorfismos } C^1 \text{ de } S^1 \times \mathbb{R}, \text{ que preservam os extremos infinitos do cilindro, } \partial_I \phi' > 0 \text{ (condição de desviar a vertical para a direita; twist para a direita) e } \phi'(I, \phi) \xrightarrow{I \rightarrow \pm\infty} \pm\infty \}$. Por analogia ao que será feito com a aplicação F , S^1 será identificado com $\mathbb{R}/(\pi\mathbb{Z})$.
- 2) Seja $D_d^1(\mathbb{R}^2) = \{ \text{levantamento dos elementos de } Dif_d^1(S^1 \times \mathbb{R}) \}$
- 3) Seja $T \in Dif_d^1(S^1 \times \mathbb{R})$ uma aplicação que preserva a medida de Lebesgue, dada por :

$$T : \begin{cases} \phi' = T_\phi(\phi, I) \pmod{\pi} \\ I' = T_I(\phi, I) \end{cases}$$

Então, (ver [10]) existe uma função $h(\phi, \phi')$, definida no $\mathbb{R}^2$, tal que :

$$\begin{cases} I = -\partial_\phi h(\phi, \phi') \\ I' = \partial_{\phi'} h(\phi, \phi') \end{cases}$$

Ou mais explicitamente :

$$\begin{cases} I = -\partial_\phi h(\phi, T_\phi(\phi, I)) \\ I' = T_I(\phi, I) = \partial_{\phi'} h(\phi, T_\phi(\phi, I)) \end{cases}$$

Observação : h é chamada função geratriz de T .

- 4) Seja $T \in Dif_d^1(S^1 \times \mathbb{R})$ tal que T preserva a medida de Lebesgue. T é dita exata, se para todo círculo rotacional C no cilindro, a área acima de C e abaixo de $T(C)$ é igual a área abaixo de C e acima de $T(C)$. Um critério bastante útil é o seguinte : Dada uma aplicação $T \in Dif_d^1(S^1 \times \mathbb{R})$ que preserva a medida de Lebesgue, seja $h(\phi, \phi')$ a sua função geratriz. Então T é exata, se e somente se : $h(\phi + \pi, \phi' + \pi) = h(\phi, \phi')$ (ver [10]).

5) Para todo círculo rotacional C no cilindro, sejam os seguintes conjuntos :

$$C^- = \{x \in S^1 \times \mathbb{R} : x \text{ está abaixo de } C\}$$

$$C^+ = \{x \in S^1 \times \mathbb{R} : x \text{ está acima de } C\}$$

6) Seja $T \in Dif_d^1(S^1 \times \mathbb{R})$. Dizemos que T satisfaz a propriedade de intersecção do círculo, P.I.C., se para todo círculo rotacional C no cilindro (que o divide em duas regiões distintas). vale :

Se $T(C) \neq C$, então :

$$\begin{cases} T(C) \cap C^+ \neq \emptyset \\ e \\ T(C) \cap C^- \neq \emptyset \end{cases}$$

É claro que essa propriedade é intrínseca da aplicação T ; independe do sistema de coordenadas e é satisfeita por uma importante classe de sistemas :

Teorema 4 : *Todo twist map T exato, satisfaz P.I.C.*

Prova :

Seja T um twist map exato. Então, para todo círculo rotacional C :

$$\begin{aligned} Leb(C^+ \cap T(C)^-) &= Leb(C^- \cap T(C)^+), \\ \text{onde } Leb(A) &= \text{medida de Lebesgue de } A \end{aligned} \tag{1.6}$$

Agora, basta observar que, ou $T(C) = C$ e não há nada o que provar, ou $T(C) \neq C$. Nesse caso, (1.6) implica que $T(C) \cap C^+ \neq \emptyset$ e $T(C) \cap C^- \neq \emptyset$, assim T satisfaz P.I.C. $\square$

Como será visto no capítulo 2, a nossa aplicação F , quando escrita nas coordenadas do semi-cilindro, (2.3), preserva área e é exata, pois $h(\phi + \pi, \phi' + \pi) = h(\phi, \phi')$, onde h é a função geratriz de F , dada por (2.5). Assim, F satisfaz P.I.C.

Seja $TQ \subset D_d^1(\mathbb{R}^2)$, tal que todo $T \in TQ$ se escreve como :

$$T : \begin{cases} \phi' = T_\phi(\phi, I) \\ I' = T_I(\phi, I) \end{cases}, \text{ com } \partial_I T_\phi(\phi, I) > 0, \text{ e :} \quad (1.7)$$

$$\begin{cases} T_I(\phi + \pi, I) = T_I(\phi, I) \\ T_I(\phi, I + \pi) = T_I(\phi, I) + \pi \\ T_\phi(\phi + \pi, I) = T_\phi(\phi, I) + \pi \\ T_\phi(\phi, I + \pi) = T_\phi(\phi, I) + \pi \end{cases}$$

É claro que cada $T \in TQ$ induz uma aplicação $\bar{T} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, onde

$$\mathbb{T}^2 \equiv \mathbb{R}^2 / (\pi \cdot \mathbb{Z})^2$$

e

$p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ é a aplicação recobrimento associada.

Também no capítulo 2, será mostrado que por mudanças de coordenadas $\bar{F}$ pode ser escrita como (ver (2.24)):

$$\bar{F} : \begin{cases} I' = \gamma \log(J(\phi)) + I \pmod{\pi} \\ \phi' = \mu(\phi) + I' \pmod{\pi} \end{cases}$$

onde $J(\phi)$ e $\mu(\phi)$ são funções definidas em (2.4) que satisfazem :

$$\begin{aligned} J(\phi + \pi) &= J(\phi) \\ \mu(\phi + \pi) &= \mu(\phi) + \pi \end{aligned}, \text{ para todo } \phi \in \mathbb{R}.$$

Assim, claramente existe um elemento de TQ associado a (que induz) $\bar{F}$:

$$\begin{cases} I' = \gamma \log(J(\phi)) + I \\ \phi' = \mu(\phi) + I' \end{cases} \in TQ$$

O conhecido “Standard Map”, $S_M : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ dado por

$$S_M : \begin{cases} I' = I - \frac{k}{2} \sin(2\phi) \pmod{\pi} \\ \phi' = \phi + I' \pmod{\pi} \end{cases} \quad (1.8)$$

também possui um elemento de TQ a ele associado :

$$\begin{cases} I' = I - \frac{k}{2} \sin(2\phi) \\ \phi' = \phi + I' \end{cases} \in TQ$$

E é claro que S_M satisfaz P.I.C., pois é uma aplicação exata. Isto porque, a sua função geratriz é :

$$h_{S_M}(\phi, \phi') = \frac{(\phi' - \phi)^2}{2} + \frac{k}{4} \cos(2\phi) \Rightarrow h_{S_M}(\phi + \pi, \phi' + \pi) = h_{S_M}(\phi, \phi')$$

Mais ainda, para qualquer difeomorfismo C^2 , $f : S^1 \rightarrow S^1$ ($\tilde{f}(\phi + \pi) = \tilde{f}(\phi) + \pi$, onde $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é um levantamento de f), podemos definir, por analogia com a aplicação F , a seguinte classe de funções geratrizes :

$$h_f(\phi, \phi') = \exp(\phi' - f(\phi)) \quad (1.9)$$

É claro que $h_f(\phi + \pi, \phi' + \pi) = h_f(\phi, \phi')$, o que implica que os twist maps associados são exatos :

$$\begin{cases} I' = \frac{1}{f'(\phi)} I \\ \phi' = f(\phi) + \log(I') \end{cases} \quad (1.10)$$

Através da seguinte mudança de coordenadas,

$$\begin{cases} \tilde{I} = \log(I) \\ \tilde{\phi} = \phi \end{cases}$$

as aplicações definidas em (1.10) podem ser escritas da seguinte forma (vamos omitir o $\sim$ por facilidade de notação) :

$$\begin{cases} I' = \log\left(\frac{1}{f'(\phi)}\right) + I \\ \phi' = f(\phi) + I' \end{cases} \quad (1.11)$$

É imediato ver que as aplicações definidas em (1.11) pertencem a TQ e satisfazem P.I.C.

Para homeomorfismos do toro, uma possível generalização para o número de rotação, originalmente definido para homeomorfismos do círculo, é o chamado vetor

de rotação, que é definido da seguinte forma : Dado $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ e $x \in \mathbb{T}^2$, seja $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um levantamento de f e $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$. Então :

$$\rho(x, \tilde{f}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{f}^n(\tilde{x}) - \tilde{x}}{\pi \cdot n} \in \mathbb{R}^2, \text{ se o limite existe.} \quad (1.12)$$

Para f homotópica à identidade, temos que em diversas condições é garantida a existência de um conjunto $A \subset \mathbb{T}^2$, tal que para todo $v \in B$, um aberto de $\mathbb{R}^2$, $\exists x \in A$, tal que $\rho(x, \tilde{f}) = v$ (ver [32]).

Ocorre que, para todo $T \in TQ$, o difeomorfismo $\bar{T} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ induzido por T não é homotópico à identidade. Isto porque :

Seja $Z \in \mathbb{T}^2$ tal que $\bar{T}(Z) = W \in \mathbb{T}^2$ e sejam $\tilde{Z} \in p^{-1}(Z)$ e $\tilde{W} \in p^{-1}(W)$. Então $\exists r \in \mathbb{Z}^2$, tal que $T(\tilde{Z}) = \tilde{W} + r \cdot \pi$. E da definição de TQ temos que :

$$T(\tilde{Z} + (0, \pi)) = T(\tilde{Z}) + (\pi, \pi) = [\tilde{W} + (0, \pi) + r \cdot \pi] + (\pi, 0),$$

assim $\bar{T}$ não é homotópico à identidade.

Dessa forma, não podem ser aplicados resultados como os de [32], [33] e [34] à $\bar{T}$, pois eles se aplicam somente à homeomorfismos $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, homotópicos à identidade.

Realmente o caso aqui estudado é bastante distinto ao caso homotópico à identidade. Seja $T \in TQ$ e $\bar{T} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ a aplicação induzida por T . Então existem basicamente 2 tipos de órbitas periódicas e quase-periódicas para $\bar{T}$. O primeiro tipo é tal que $\rho(x, T) = (\omega, 0)$, qualquer que seja x pertencente a essa órbita, para algum $\omega \in \mathbb{R}$. Essas são as órbitas periódicas ou quase-periódicas no cilindro, que já existem para a aplicação $\hat{T} : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$, induzida por T . O segundo tipo corresponde a pontos y tais que $\rho(y, T) = (\pm\infty, \omega)$, novamente com $\omega \in \mathbb{R}$ e são aquelas discutidas adiante (com número de rotação vertical não nulo).

Para $(\phi, I) \in \mathbb{R}^2$, vamos definir $p_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $p_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como as projeções em ϕ e I , respectivamente.

Agora segue um lema que elucida um pouco esse comportamento :

Lema 1 : Seja $T \in TQ$ e 3 pontos $z, w_+, w_- \in \mathbb{R}^2$, tais que :

$$|p_2 \circ T^n(z)| < C, \text{ para todo } n \geq 0 \text{ e alguma constante } C > 0$$

$$p_2 \circ T^n(w_{\pm}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pm \infty$$

Então, temos :

$$\exists K > 0, \text{ tal que para todo } n > 0, \left| \frac{p_1 \circ T^n(z) - p_1(z)}{\pi \cdot n} \right| < K$$

$$\frac{p_1 \circ T^n(w_{\pm}) - p_1(w_{\pm})}{\pi \cdot n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pm \infty$$

Ainda são necessárias mais algumas definições :

Definições : Dado $T \in TQ$, $k \in \mathbb{Z}^*$ e $N \in \mathbb{N}^*$, dizemos que $\bar{T}$ possui uma órbita periódica de número de rotação vertical, $\rho_V = \frac{k}{N}$, se $\exists a \in \mathbb{N}^*$, tal que, para algum ponto $P \in S^1 \times \mathbb{R}$ (de (1.7), podemos supor que $P \in S^1 \times [0, \pi[$) :

$$p_2 \circ T^{aN}(P) = p_2(P) + ak\pi$$

e

$$p_1 \circ T^{aN}(P) = p_1(P) \pmod{\pi}$$

Onde, lembrando. $p_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $p_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são as projeções em ϕ e I , respectivamente.

Então, é claro que :

$$\rho_V(P) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{p_2 \circ T^N(P) - p_2(P)}{\pi N}$$

Essa definição é bastante natural, porque como já foi dito, todo $T \in TQ$ induz uma aplicação $\bar{T} : T^2 \rightarrow T^2$ e $\bar{T}^{aN}(P) = P$, sendo que a órbita de P tem $\rho_V = \frac{ak}{aN} = \frac{k}{N}$.

É claro que do lema (1) temos :

$$\text{se } k > 0, \frac{p_1 \circ T^n(P) - p_1(P)}{\pi \cdot n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \text{ e se } k < 0, \frac{p_1 \circ T^n(P) - p_1(P)}{\pi \cdot n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$$

Assim, sendo ρ como em (1.12), $\rho(P, T) = (\pm \infty, \frac{k}{N})$ (órbita periódica do segundo tipo).

Agora já podemos enunciar os primeiros resultados dessa sessão :

Teorema 5 : *Seja $T \in TQ$, tal que T satisfaz P.I.C. Então :*

- *dado $k \in \mathbb{Z}^*$, $\exists N > 0$, tal que $\bar{T}$ (transformação no toro, induzida por T) possui pelo menos 2 órbitas periódicas com ρ_V (número de rotação vertical) $= \frac{k}{N}$, se e somente se, T não possui C.R.I.'s.*

O próximo teorema mostra a ordem na qual esses pontos surgem :

Teorema 6 : *Nas hipóteses do teorema anterior, se $\bar{T}$ possui uma órbita periódica com $\rho_V = \frac{k}{N}$, então para todo par (k', N') , com $0 < \left| \frac{k'}{N'} \right| < \left| \frac{k}{N} \right|$ e $k.k' > 0$, $\bar{T}$ possui pelo menos 2 órbitas periódicas com número de rotação vertical $\rho'_V = \frac{k'}{N'}$.*

Corolário 1 : *Seja $F_\alpha \in TQ$, uma família de Twist Maps no parâmetro α que satisfaz P.I.C. Suponha que, para α crescente, em $\alpha = \alpha_0$ se rompe o último círculo rotacional invariante (C.R.I.) para F_α (se $\alpha < \alpha_0$, temos pelo menos 1 C.R.I. e se $\alpha > \alpha_0$, não há mais nenhum). Então, as órbitas periódicas de $\bar{F}_\alpha$, gerados pela tomada do quociente para o toro, surgem de forma que os módulos dos seus números de rotação vertical são crescentes. Ou seja, primeiro surgem os pontos periódicos com "velocidade" (número de rotação vertical), em módulo, mais baixa e depois aqueles com velocidade mais alta.*

Observação :

• Para a nossa aplicação $\bar{F}$, se existe um ponto com $\rho_V = \frac{k}{N}$, então pela seção (2.3) do capítulo 2, existe um ponto com $\rho_V = -\frac{k}{N}$. (como essas órbitas que sobem, ou descem no cilindro não são conservativas, elas não são reversíveis, portanto sempre aparecem aos pares : uma que sobe, dissipativa e uma que desce, expansiva)

Há mais um ponto interessante a ser mencionado : a existência de órbitas (do segundo tipo) quase-periódicas. Mas antes, vamos a mais uma definição :

Definição : Dado $T \in TQ$, $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, dizemos que $\bar{T}$ possui uma órbita quase-periódica de número de rotação vertical, $\rho_V = \omega$, se existir um conjunto $Q_\omega \subset \mathbb{T}^2$, compacto, $\bar{T}$ -invariante, tal que $\forall z \in Q_\omega$ tenhamos :

$$\rho_V(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{p_2 \circ T^N(z) - p_2(z)}{\pi N} = \omega$$

Novamente, pelo lema (1) temos :

$$\text{se } \omega > 0, \frac{p_1 \circ T^n(z) - p_1(z)}{\pi \cdot n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \text{ e se } \omega < 0, \frac{p_1 \circ T^n(z) - p_1(z)}{\pi \cdot n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$$

Assim, $\rho(z, T) = (\pm\infty, \omega)$.

Agora estamos prontos para enunciar o seguinte :

Teorema 7 : *Nas hipóteses dos teoremas anteriores, acrescentando $\det [DT(\phi, I)] > 0$ (o que implica que $\bar{T}$ preserva orientação no toro), se $\bar{T}$ possui uma órbita com $\rho_V = \omega$ (periódica se $\omega \in \mathbb{Q}$ e quase-periódica caso contrário), então para todo $\omega' \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, com $0 < |\omega'| < |\omega|$ e $\omega \cdot \omega' > 0$, $\bar{T}$ possui pelo menos 1 órbita com número de rotação vertical $\rho'_V = \omega'$.*

Como já foi mostrado, a ruptura do último C.R.I. implica um considerável aumento na complexidade da dinâmica de $\bar{T}$. Vamos agora evidenciar este fato de mais uma forma, mostrando que na ausência de C.R.I.'s, a entropia topológica, $h(\bar{T})$ é estritamente positiva. Sobre entropia topológica ver : [28], [27] e [29]

Teorema 8 : *Todo $T \in TQ$, tal que T não possui C.R.I.'s e T satisfaz P.I.C. induz uma aplicação $\bar{T} : T^2 \rightarrow T^2$, tal que $h(\bar{T}) > 0$.*

Agora segue um resumo do conteúdo dos próximos capítulos :

- no capítulo 2 será dada uma idéia de como a aplicação F é obtida, algumas de suas propriedades básicas serão analisadas e serão enunciados alguns resultados que implicam os teoremas da seção (1.3);
- no capítulo 3 serão provados os teoremas da seção (1.3);
- no capítulo 4 serão provados os resultados da seção (1.4) e outros a eles relacionados;
- no capítulo 5 alguns resultados da seção (1.4) serão caracterizados variacionalmente.

Capítulo 2

Sobre a origem de F , algumas de suas propriedades e resultados relacionados aos da seção (1.3)

Neste capítulo será dada uma idéia de como se obtém a aplicação F , algumas de suas propriedades serão analisadas e resultados que implicam os teoremas (1), (2) e (3) serão enunciados.

2.1 Idéia de como se obtém a expressão de F

A expressão (1.1) decorre essencialmente do seguinte resultado devido a Moser, complementado por Rüssmann (ver [8] e [9]) :

Teorema 9 *Seja (M, Ω, H) um sistema Hamiltoniano real analítico, com $\dim(M) = 4$ e η um equilíbrio do tipo sela-centro. Então existe uma vizinhança U de η , um sistema de coordenadas (x_1, y_1, x_2, y_2) tal que, nessas coordenadas, $\Omega = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2$ e o Hamiltoniano H é dado por :*

$$H(x_1, y_1, x_2, y_2) = h(I_1, I_2) = I_1 + \gamma I_2 + R(I_1, I_2), \gamma > 0 \quad R(I_1, I_2) = O(I_1^2 + I_2^2),$$

$$\text{onde } I_1 = x_1 y_1 \text{ e } I_2 = (x_2^2 + y_2^2)/2.$$

Seja $\Psi : w \rightarrow \Psi_t(w)$ o fluxo gerado por H . No sistema de coordenadas do teorema (9), Ψ fica :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t\partial_{I_1}h_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{t\partial_{I_1}h_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(t\partial_{I_2}h_0) & -\sin(t\partial_{I_2}h_0) \\ 0 & 0 & \sin(t\partial_{I_2}h_0) & \cos(t\partial_{I_2}h_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ y_1(0) \\ x_2(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

onde $\partial_{I_1}h_0 = \partial_{I_1}h(I_1(0), I_2(0))$, $\partial_{I_2}h_0 = \partial_{I_2}h(I_1(0), I_2(0))$, $I_1(0) = x_1(0)y_1(0)$, $I_2(0) = [x_2^2(0) + y_2^2(0)]/2$.

Podemos definir as seguintes seções de Poincaré:

$$\Sigma_S^- = \{x|x_1 = -\delta\}, \quad \Sigma_L^+ = \{x|y_1 = \delta\}, \quad \Sigma_S^+ = \{x|x_1 = \delta\}, \quad \Sigma_U^- = \{x|y_1 = -\delta\},$$

com $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Trivialmente, $W^S(\eta)$ é dada por $y_1 = x_2 = y_2 = 0$ e $W^U(\eta)$ por $x_1 = x_2 = y_2 = 0$. As coordenadas (x, y) de (1.1) correspondem, na nomenclatura do teorema (9), às componentes (x_2, y_2) . Vamos assumir que a órbita homoclínica Γ deixa η pela semi-vizinhança $y_1 > 0$ (cruza Σ_U^+) e retorna para Σ_S^- .

Figura 2 : Sobre a Obtenção de F

Essa foi a hipótese feita na dedução de (1.1). Então, Σ_S^- corresponde à seção Σ e,

$$z \rightarrow R[-\gamma \log \left| \frac{1}{2} \omega \| z \|^2 - E \right|] z$$

representa a aplicação que vai de $\Sigma_S^- \rightarrow \Sigma_U^+$ de caráter local, na vizinhança U de η . Aqui se usou, de maneira crucial a estrutura dada pelo teorema (9) e,

$$z \rightarrow AR[c]z,$$

é uma aproximação linear da aplicação que vai de $\Sigma_U^+ \rightarrow \Sigma_S^-$ (órbitas "seguem" Γ por dependência contínua e diferenciável em relação as condições iniciais).

Como já foi dito, linearizando o sistema Hamiltoniano original em uma vizinhança de Γ e resolvendo um problema de espalhamento para essa equação linearizada, obtém-se o valor de α , determinando assim A .

2.2 Estudo inicial de F

A fim de facilitar o estudo que se segue, é interessante introduzir as seguintes coordenadas polares :

$$(I, \phi) \xrightarrow{T_1} (x, y), \text{ dada por } \begin{cases} x = \sqrt{2I} \cos(\phi + \gamma \log(I)) \\ y = \sqrt{2I} \sin(\phi + \gamma \log(I)) \end{cases} \quad (2.2)$$

Então, como :

$$DT_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2I}}(\cos(\phi + \gamma \log(I)) - 2\gamma \sin(\phi + \gamma \log(I))) & -\sqrt{2I} \sin(\phi + \gamma \log(I)) \\ \frac{1}{\sqrt{2I}}(\sin(\phi + \gamma \log(I)) + 2\gamma \cos(\phi + \gamma \log(I))) & \sqrt{2I} \cos(\phi + \gamma \log(I)) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det(DT_1) \equiv 1$$

Obtém-se que T_1 é simplética.

Aplicando essa mudança de coordenadas à F como em (1.4), temos :

$$F : \begin{cases} I' = J(\phi)I \\ \phi' = \mu(\phi) - \gamma \log(I') \end{cases} \quad (2.3)$$

onde,

$$\begin{aligned} J(\phi) &= \alpha^2 \cos^2(\phi) + \alpha^{-2} \sin^2(\phi) \\ \mu(\phi) &= \arctan\left(\frac{\tan(\phi)}{\alpha^2}\right), \text{ com } \mu(0) = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Como $J(\phi)$ é π -periódica e $\mu(\phi + \pi) = \mu(\phi) + \pi$, identificando S^1 com $\mathbb{R}/(\pi \cdot \mathbb{Z})$, obtém-se $F : S^1 \times]0, +\infty[\rightarrow S^1 \times]0, +\infty[$ (Para simplificar a notação, como já foi dito na seção 1.2, a aplicação em S^1 e sua suspensão a $\mathbb{R}$ serão denotadas pela mesma letra).

A derivada de F é :

$$DF = \begin{pmatrix} J(\phi) & J'(\phi)I \\ -\frac{\gamma}{I} & \frac{1}{J(\phi)} - \gamma \frac{J'(\phi)}{J(\phi)^2} \end{pmatrix}, \text{ portanto } \det(DF) \equiv 1$$

Assim, como $\partial_I \phi' = -\frac{\gamma}{I} < 0$, F é um twist map no cilindro (o twist é para a esquerda), e por preservar área, admite função geratriz (ver [10]) definida no plano (recobrimento universal do cilindro), dada por :

$$h(\phi, \phi') = -\gamma \exp\left(\frac{\mu(\phi) - \phi'}{\gamma}\right) \quad (2.5)$$

Pois,

$$\begin{cases} I = -\partial_{\phi'} h(\phi, \phi') \\ I' = \partial_{\phi} h(\phi, \phi') \end{cases}$$

Da expressão de h , temos que $h(\phi + \pi, \phi' + \pi) = h(\phi, \phi')$, pois $\mu(\phi + \pi) = \mu(\phi) + \pi$. Assim, F é exata e portanto satisfaz P.I.C., pelo teorema (4).

Façamos agora a seguinte mudança de coordenadas que não preserva área :

$$\begin{cases} \tilde{I} = \gamma \log(I) \\ \tilde{\phi} = \phi \end{cases} \quad (2.6)$$

Assim, ficamos com (vamos omitir o $\sim$ por facilidade de notação):

$$F : S^1 \times \mathbb{R} \hookrightarrow : \begin{cases} I' = F_I(I, \phi) = \gamma \log(J(\phi)) + I \\ \phi' = F_\phi(I, \phi) = \mu(\phi) - I' \end{cases} \quad (2.7)$$

onde, $J(\phi)$ e $\mu(\phi)$ são como em (2.4). Nessas coordenadas,

$$DF = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \frac{J'(\phi)}{J(\phi)} \\ -1 & \frac{1}{J(\phi)} - \gamma \frac{J'(\phi)}{J(\phi)} \end{pmatrix}, \text{ portanto } \det(DF) \equiv \frac{1}{J(\phi)}$$

Assim, $\det(DF) \geq \frac{1}{\alpha^2} > 0$ e a inversa de F é :

$$F^{-1} : \begin{cases} I' = F_I^{-1}(I, \phi) = -\gamma \log(J \circ \mu^{-1}(\phi + I)) + I \\ \phi' = F_\phi^{-1}(I, \phi) = \mu^{-1}(\phi + I) \end{cases} \quad (2.8)$$

Portanto, as equações (2.7) vistas como as componentes de uma aplicação do plano no plano, definem um difeomorfismo.

Como a mudança de coordenadas (2.6) não é simplética, F não preserva a medida de Lebesgue nas novas coordenadas e portanto nestas não admite uma função geratriz. Agora F preserva a medida $\mu(A) = \int_A e^{\frac{I}{\gamma}} dI \wedge d\phi$, trivialmente obtida a partir da mudança (2.6). Nesse novo sistema, como $F_I(I + \pi, \phi) = F_I(I, \phi) + \pi$, temos que F induz uma transformação $\bar{F}$ no toro $T^2 \equiv \mathbb{R}^2 / (\pi \mathbb{Z})^2$,

$$\bar{F} : \begin{cases} I' = \bar{F}_I(I, \phi) = \gamma \log(J(\phi)) + I \pmod{\pi} \\ \phi' = \bar{F}_\phi(I, \phi) = \mu(\phi) - I' \pmod{\pi} \end{cases} \quad (2.9)$$

Um fato a se destacar. é que $\bar{F}$ não preserva a medida $\mu(A) = \int_A e^{\frac{I}{\gamma}} dI \wedge d\phi$, pois a sua função densidade não é I -periódica de período π . Para garantir que $\bar{F}$ é um twist map no toro, basta provar que ela é um difeomorfismo do toro no toro, pois a sua condição de twist é a mesma que a de F . ($\partial_I \phi' = -1 < 0$)

Pelo feito acima, basta provar que $\bar{F}$ é injetora, pois a sobrejetividade sai da inversibilidade de F , e $\det(D\bar{F}) \geq \frac{1}{\alpha^2} > 0$.

Então, dado $(I_1, \phi_1) \in [0, \pi]^2$. queremos provar que existe um único par $(I_0, \phi_0) \in [0, \pi]^2$ tal que

$$F(I_0, \phi_0) = (I_1, \phi_1) \pmod{\pi}.$$

Mas isso é trivial pela expressão (2.8), pois então deve valer :

$$\begin{cases} I_0 = -\gamma \log(J \circ \mu^{-1}(\phi_1 + I_1)) + I_1 \\ \phi_0 = \mu^{-1}(\phi_1 + I_1) \end{cases}$$

e assim o par (I_0, ϕ_0) está determinado $(mod \pi)^2$.

Ao menos formalmente, a aplicação $\bar{F}$ definida em (2.9), possui um limite simples quando $\alpha = \infty$:

$$\begin{cases} I' = c + \gamma \log(\cos^2(I)) + I \pmod{\pi}, \text{ onde } 0 \leq c \leq \pi, c \in \mathbb{R} \\ \phi' = \pi - I' \end{cases} \quad (2.10)$$

Essa função é obtida, observando que :

$$\mu(\phi) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, \text{ se } \phi < \frac{\pi}{2} \\ \pi, \text{ se } \phi > \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ e que } \frac{J(\phi)}{\alpha^2} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} \cos^2(\phi).$$

Assim, o termo $\gamma \log(J(\phi)) \pmod{\pi} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} c + \gamma \log(\cos^2(\phi)) \pmod{\pi}$, onde $c \in [0, \pi]$ é uma constante que "provém" de $\gamma \log(\alpha^2) \pmod{\pi}$.

Possivelmente, diversas propriedades de (2.9), para α suficientemente grande, podem ser obtidas a partir do estudo de (2.10) (como a existência de pontos periódicos atratores), analogamente ao que já foi feito para a aplicação de Hénon em relação à aplicação quadrática (ver [11]). No entanto, esse enfoque não será desenvolvido aqui, podendo ser base para futuros novos estudos.

2.3 Involuções

A transformação F , como em (1.4), satisfaz a seguinte relação de reversibilidade:

$$F \circ \pm B(z) = \pm B \circ F^{-1}(z), \quad (2.11)$$

onde :

$$\pm B(z) = \begin{pmatrix} 0 & \pm \alpha \\ \pm \alpha^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ com } z = (x, y) \quad (2.12)$$

É imediato que B é uma involução ($B^2(z) = I_d(z) = z, \forall z$) e definindo $T = F \circ B$, é claro que $F = T \circ B$. Além disso,

$$F \circ T(z) = F \circ F \circ B(z) = F \circ B \circ F^{-1}(z) = T \circ F^{-1}(z) \quad (2.13)$$

E a aplicação T também é uma involução, pois :

$$T^2 = (F \circ B)^2 = (F \circ B) \circ (B \circ F^{-1}) = I_d$$

Assim, F é um twist map reversível com respeito um par de involuções (B, T) .

Definições : Seja P um ponto n -periódico para F . ($F^n(P) = P$)

$Orb(P) = \{P, F(P), \dots, F^{n-1}(P)\}$. Dizemos que P é B (ou T) reversível se $B(Orb(P)) = Orb(P)$, analogamente para T . Sejam agora os conjuntos :

$F.B. = \{Z : B(Z) = Z\}$ e $F.T. = \{Z : T(Z) = Z\}$ Então, temos os seguintes

Teorema 10 : *Suponha que $P \in F.B.$. Então P é ponto n -periódico, se e só se :*

1- $F^{\frac{n+1}{2}}(P) \in F.T.$, para n ímpar

2- $F^{\frac{n}{2}}(P) \in F.B.$, para n par

Além disso, P é B reversível

Teorema 11 : *Suponha que $P \in F.T.$. Então P é ponto n -periódico, se e só se :*

1- $F^{\frac{n+1}{2}}(P) \in F.B.$, para n ímpar

2- $F^{\frac{n}{2}}(P) \in F.T.$, para n par

Além disso, P é T reversível

A prova destes resultados é bastante simples. Ver, por exemplo, [4].

Vamos determinar agora os conjuntos $F.B.$ e $F.T.$:

$$\begin{cases} F.B. : B(z) = z \Leftrightarrow \alpha y = x \\ F.T. : -B(z) = z \Leftrightarrow \alpha y + x = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Isso, nas coordenadas de (1.4). Mas é claro que B e T também induzem involuções no toro, respectivamente $\overline{B}$ e $\overline{T}$, tais que $\overline{F} = \overline{T} \circ \overline{B}$. Para $\overline{B}$ temos :

$$\begin{cases} F.\overline{B}. : (\phi + I) = \arctan(\frac{1}{\alpha}) \pmod{\pi} \\ F. - \overline{B}. : (\phi + I) = -\arctan(\frac{1}{\alpha}) \pmod{\pi} \end{cases} \quad (2.15)$$

Para obter as expressões acima, basta substituir

$$\begin{cases} x = \sqrt{2e^{\frac{I}{\gamma}}} \cos(\phi + I) \\ y = \sqrt{2e^{\frac{I}{\gamma}}} \sin(\phi + I) \end{cases} \quad (2.16)$$

em (2.14).

É claro que definindo $T = F \circ (-B)$, temos $F = T \circ (-B) = T \circ B$. Assim, existem 2 pares de involuções, (B, T) e $(-B, T)$ associados. A determinação dos conjuntos $F.B.$ e $F. - B.$ foi análoga, portanto agora faremos apenas a de $F.T.$ Cabe ressaltar apenas que, $F.\overline{T}. = F.\overline{T}.$

Nas coordenadas de (1.4), ficamos com :

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin(\arg) & \alpha^2 \cos(\arg) \\ \alpha^{-2} \cos(\arg) & \sin(\arg) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

onde $\arg = -\gamma \log(\frac{\alpha^2 y^2 + \alpha^{-2} x^2}{2})$

Fazendo $T(z) = z$, onde $z = (x, y)$. obtemos 2 equações (uma para cada coordenada) equivalentes. Assim basta uma delas :

$$F.T. = \left\{ \begin{aligned} (x, y) \in \mathbb{R}^2 : & \left[1 - \sin(\gamma \log(\frac{\alpha^2 y^2 + \alpha^{-2} x^2}{2})) \right] x = \\ & = \alpha^2 \cos(\gamma \log(\frac{\alpha^2 y^2 + \alpha^{-2} x^2}{2})) y \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Novamente, substituindo (2.16) na expressão acima, obtemos a sua correspondente para $\overline{T}$:

$$F.\overline{T}. = \left\{ \begin{aligned} (I, \phi) \in \mathbb{T}^2 : & \left[1 - \sin(\gamma \log(J(\phi + I + \frac{\pi}{2}))) + I \right] \cos(\phi + I) + \\ & - \alpha^2 \cos(\gamma \log(J(\phi + I + \frac{\pi}{2}))) + I \sin(\phi + I) \pmod{\pi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

onde $J(\phi)$ é como em (2.4).

No entanto, obter as expressões (2.15) e (2.19) não é de todo imediato, pois a princípio, a tomada do quociente poderia gerar novos pontos periódicos para $\overline{B}$ e para

$\overline{T}$. Vejamos agora que o quociente do plano pelo $Anel = \{z \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \|z\| < e^{\frac{\pi}{\gamma}}\}$ não cria pontos fixos nem para $\overline{B}$, nem para $\overline{T}$, apesar de gerar diversos para $\overline{F} = \overline{T} \circ \overline{B}$. Isso implica em particular que os conjuntos $F.\overline{T}$., $F.\overline{T}$., $F.\overline{B}$., $F. - \overline{B}$., são curvas fechadas sem auto-intersecções no toro (ver [12]).

Vamos agora procurar os pontos fixos de $\overline{B}$ e de $\overline{T}$ (para $-\overline{B}$ e $\overline{T}$ é análogo), vistas como aplicações do $Anel \rightarrow Anel$.

$$\text{para } \overline{B} \text{ temos: } B(z) = e^{\frac{k\pi}{\gamma}} z, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} \alpha y - e^{\frac{k\pi}{\gamma}} x = 0 \\ \alpha^{-1} x - e^{\frac{k\pi}{\gamma}} y = 0 \end{cases} \Rightarrow k = 0,$$

assim a tomada do quociente não gera novos pontos fixos para B

$$\begin{aligned} &\text{para } \overline{T} : T(z) = e^{\frac{k\pi}{\gamma}} z, \text{ para algum } k \text{ inteiro} \Rightarrow \\ \Rightarrow &\begin{cases} (e^{\frac{k\pi}{\gamma}} + \sin(\arg))x - \alpha^2 \cos(\arg)y = 0 \\ \alpha^{-2} \cos(\arg)x - (e^{\frac{k\pi}{\gamma}} - \sin(\arg))y = 0 \end{cases}, \text{ onde } \arg \text{ é como em (2.17)} \end{aligned}$$

Para que as equações acima não sejam incompatíveis, isto é,

tenham soluções não nulas, é necessário que :

$$\det \begin{pmatrix} e^{\frac{k\pi}{\gamma}} + \sin(\arg) & -\alpha^2 \cos(\arg) \\ \alpha^{-2} \cos(\arg) & -(e^{\frac{k\pi}{\gamma}} - \sin(\arg)) \end{pmatrix} = 0,$$

o que implica que $1 - e^{\frac{2k\pi}{\gamma}} = 0 \Rightarrow k = 0$,

assim a tomada do quociente não gera pontos fixos para T

Agora seguem figuras representando os conjuntos $F.T$., $F.\overline{T}$., $F.B$., $F. - B$. e $F.\overline{T}$., $F.\overline{T}$., $F.\overline{B}$., $F. - \overline{B}$., juntamente com órbitas de F e de $\overline{F}$. Podemos observar pontos elípticos reversíveis e o comportamento curioso de $F.T$., $F.\overline{T}$. No toro, observamos que conforme α cresce, parece haver um atrator, de geometria parecida com $F.\overline{T}$.

Representação das órbitas de alguns pontos pela aplicação F e dos conjuntos $F.B.$ e $F.T.$
 $(\alpha=1.14$ e $\gamma=2)$

As espirais em branco são as linhas de ponto fixo de T ($F.T.$) e de $_T$ ($F._T.$).
 As retas são as linhas de ponto fixo de B ($F.B.$) e de $-B$ ($F.-B.$)

Nas próximas páginas seguem figuras análogas à essa, para a aplicação no toro, $\overline{F}$.

F.B. em branco.

F.T. em vermelho.

($\alpha=1.14$ e $\gamma=2$)

F.B. em preto.

F.T. em azul claro.

Nesta figura vemos um ponto periódico elíptico de período 2 e um ponto periódico do tipo poço, também de período 2.

($\alpha=1.65$ e $\gamma=2$)

$\overline{F.B.}$ em preto.

$\overline{F.T.}$ em azul claro.

Nesta figura vemos um ponto periódico elíptico de período 2 e um ponto periódico do tipo poço de período bem grande.

($\alpha=1.6468$ e $\gamma=2$)

$\overline{F.B.}$ em preto.

$\overline{F.T.}$ em azul claro.

Aparentemente temos um atrator de geometria parecida com $\overline{F.T.}$

($\alpha=7$ e $\gamma=2$)

$$\alpha=1,6768$$

$$\gamma=2$$

$$\alpha=1,7$$

$$\gamma=2$$

Para a aplicação $\overline{F}$, temos que diversos pontos periódicos aparecem devido a tomada do quociente. Pelo feito acima, nenhum deles é reversível. Mas isto poderia ser visto de outra maneira, que introduz uma informação nova no problema. Suponha que (I_0, ϕ_0) é um ponto de período N , gerado pelo quociente.

De (2.9), a expressão de $\overline{F}_I^N(\phi_0, I_0)$ é :

$$\overline{F}_I^N(\phi_0, I_0) = \gamma \log(J(\phi_0)J(\phi_1)J(\phi_2)...J(\phi_{N-1})) + I_0 \pmod{\pi},$$

onde $(\phi_0, I_0), (\phi_1, I_1), \dots, (\phi_{N-1}, I_{N-1})$ são pontos sucessivos da órbita de (I_0, ϕ_0) . Dessa forma, se (ϕ_0, I_0) é um ponto de período N , gerado pelo quociente, deve valer :

$$I_0 + l\pi = \gamma \log(J(\phi_0)J(\phi_1)J(\phi_2)...J(\phi_{N-1})) + I_0, \text{ para algum } l \in \mathbb{Z}^*.$$

Assim,

$$J(\phi_0)J(\phi_1)J(\phi_2)...J(\phi_{N-1}) = e^{\frac{l\pi}{\gamma}}.$$

Mas, como $\det[D\overline{F}(\phi, I)] = \frac{1}{J(\phi)}$, se $l > 0$ a órbita é dissipativa e se $l < 0$ é expansiva.

Dessa forma, todos os pontos periódicos gerados pelo quociente são, ou dissipativos, se sobem no cilindro, ou expansivos, se descem. Assim, em particular :

Teorema 12 : *A transformação $\overline{F}$ não possui nenhum ponto elíptico gerado pelo quociente do cilindro no toro. (a tomada do quociente não gera pontos elípticos)*

Por outro lado, suponha que p é ponto N -periódico, B reversível (o caso T reversível é totalmente análogo). Podemos supor, sem perda de generalidade, que $p \in F.B.$ ou a $F.T.$ Então temos :

Caso 1 : $p \in F.B.$

$$F^N(z) = B \circ F^{-N} \circ B(z), \forall z.$$

Derivando essa relação e calculando em $z = p$, temos :

$$DF^N(p) = DB(F^{-N} \circ B(p)).DF^{-N}(B(p)).DB(p).$$

Como $B(p) = p$, pois $p \in F.B. \Rightarrow$
 $\Rightarrow DF^N(p) = DB(p).DF^{-N}(p).DB(p)$. Então,
 $\det(DF^N(p)) = \det(DB(p)).\det(DF^{-N}(p)).\det(DB(p))$.
 Derivando $B^2(z) \equiv z$, e calculando em $z = p$,
 obtemos $\det(DB(p))^2 = 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \det(DF^N(p)) = \det(DF^{-N}(p))$.
 Como $\det(DF) > 0 \Rightarrow \det(DF^N(p)) = 1$,
 ou seja, nenhum ponto periódico gerado pelo quociente é reversível

Caso 2 : $p \in F.T$.

Semelhante ao caso 1, basta trocar B por T .

Assim, é fácil ver que esses pontos periódicos não conservativos (gerados pela tomada do quociente) sempre aparecem aos pares e os elementos de um par tem caráter inverso, quanto aos seus autovalores. Seja P_1 um ponto N -periódico, gerado pelo quociente. Então, a ele temos associado um outro ponto N -periódico, digamos $P_2 = B(P_1)$, tal que :

$$P_1 \text{ tem autovalores } \lambda \text{ e } \sigma \Rightarrow P_2 \text{ tem autovalores } \lambda^{-1} \text{ e } \sigma^{-1}$$

Se, quando vista no cilindro, a órbita de P_1 sobe, então a de P_2 desce e vice-versa. As situações mais comuns (genéricas), são :

$$\begin{aligned} \text{i) } P_1 \text{ é poço com autovalores } |\lambda| < 1, \quad |\sigma| < 1 \text{ e} \\ P_2 \text{ é fonte com autovalores } |\frac{1}{\lambda}| > 1, \quad |\frac{1}{\sigma}| > 1 \\ \text{ii) } P_1 \text{ é sela com autovalores } 0 < |\lambda| < 1 < |\sigma| \text{ e} \\ P_2 \text{ é sela com autovalores } 0 < |\frac{1}{\sigma}| < 1 < |\frac{1}{\lambda}| \end{aligned} \tag{2.20}$$

2.4 Sobre o Twist

Das expressões (2.3) e (2.9) temos que :

$$\partial_I \phi' = -\frac{\gamma}{I} < 0, \text{ nas coordenadas de (2.3)}$$

e

$$\partial_I \phi' = -1 < 0, \text{ nas coordenadas de (2.9)}$$

Em ambos os casos, $\partial_I \phi' < 0$ ou seja. as aplicações F e $\bar{F}$ desviam a vertical para a esquerda. (twist é pra esquerda). Através da seguinte mudança de coordenadas bastante trivial, podemos obter $\partial_I \phi' > 0$:

$$\begin{cases} \tilde{\phi} = \pi - \phi \\ \tilde{I} = I \end{cases} \quad (2.21)$$

Pois nessas novas coordenadas temos, respectivamente (omitindo o $\tilde{}$):

$$F : \begin{cases} I' = J(\phi)I \\ \phi' = \mu(\phi) + \gamma \log(I') \end{cases} \quad (2.22)$$

E, nesse caso, como a aplicação preserva área, novamente podemos encontrar uma função geratriz, que fica:

$$h(\phi, \phi') = \gamma \exp\left(\frac{\phi' - \mu(\phi)}{\gamma}\right) \quad (2.23)$$

E, no caso dissipativo, ficamos com:

$$\bar{F} : \begin{cases} I' = \gamma \log(J(\phi)) + I \pmod{\pi} \\ \phi' = \mu(\phi) + I' \pmod{\pi} \end{cases} \quad (2.24)$$

2.5 Resultados relacionados à seção (1.3)

2.5.1 Caso conservativo

Seja P_c o ponto fixo conservativo de F citado anteriormente, que é do tipo sela para todo $\alpha > 1$.

Então temos o seguinte resultado:

Teorema 13 (*Tangências Conservativas*) : Considere a aplicação F , fixado um valor de $\gamma > 1$. Então existe $\alpha_0 > 1$ e uma sequência $\alpha_n > \alpha_0$, que depende de γ , com $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, tal que $W^S(P_c)$ e $W^U(P_c)$ tem uma tangência quadrática em $\alpha = \alpha_n$, que se desdobra genericamente com α .

A aplicação F preserva área, assim o desdobramento das tangências do teorema (13) gera pontos elípticos, implicando portanto o teorema (1), pois podemos aplicar o seguinte :

Teorema 14 (*Pedro Duarte*) : Seja $\varphi_\mu : M^2 \rightarrow M^2$ uma família de difeomorfismos C^k , com $k \geq 4$, que preservam área, P uma sela hiperbólica de φ_0 , e suponha que $W^S(P)$ e $W^U(P)$ possuem uma tangência quadrática em $\mu = 0$, que se desdobra genericamente. Então, existe uma sequência $(Q_n, \mu_n)_{n \geq n_0}$ no espaço de fase-parâmetro, tal que :

- i) $(Q_n, \mu_n) \in M^2 \times \mathbb{R}$ converge a $(P, 0)$
- ii) Q_n é um ponto periódico elíptico genérico de φ_{μ_n} , com período n .

Prova : ver [14] $\square$

No teorema (13) é necessário que se trabalhe com a aplicação F , e não com $\bar{F}$, pois para aplicar o resultado acima sobre o desdobramento das tangências homoclínicas é necessário que a aplicação em questão preserve área, coisa que não ocorre para $\bar{F}$. Mas é claro que tangências entre $W^S(P_c)$ e $W^U(P_c)$ para $\bar{F}$, correspondem a tangências entre $W^S(P_c)$ e $W^U(e^{\frac{\bar{k} \cdot \pi}{\gamma}} P_c)$ para F (para algum $\bar{k} \in \mathbb{Z}$, que pode não ser zero). No entanto, temos o seguinte :

Teorema 15 Se para $\bar{F}$, em $\alpha = \bar{\alpha}$, temos uma tangência quadrática entre $W^S(P_c)$ e $W^U(P_c)$, que se desdobra genericamente com α , então para α arbitrariamente próximo de $\bar{\alpha}$, também temos uma tangência quadrática entre $W^S(P_c)$ e $W^U(P_c)$, que se desdobra genericamente com α , para F .

Prova :

Da invariância de F (escrita como em (1.4)) por dilatações discretas (ver (1.5)), temos que se P_c é ponto fixo de F , então $e^{\frac{k\pi}{\gamma}} P_c$ também o é, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Em [4], foi

provado que se $\alpha > \alpha_{\text{crit}}(\gamma)$, então $W^U(P_c)$ intersecta transversalmente $W^S(e^{\frac{k\pi}{\gamma}} P_c)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. (suponhamos que $\bar{\alpha} > \alpha_{\text{crit}}(\gamma)$) Assim temos 2 possibilidades :

i) Em $\alpha = \bar{\alpha}$, temos uma tangência quadrática entre $W^S(P_c)$ e $W^U(P_c)$, que se desdobra genericamente com α , para F . Então o teorema está provado.

ii) Em $\alpha = \bar{\alpha}$, temos uma tangência quadrática entre $W^S(P_c)$ e $W^U(e^{\frac{k\pi}{\gamma}} P_c)$, para algum $\bar{k} \in \mathbb{Z}^*$, que se desdobra genericamente com α , para F . Nesse caso, pelo resultado em [4], sabemos que $W^U(P_c)$ intersecta transversalmente $W^S(e^{\frac{\bar{k}\pi}{\gamma}} P_c)$. Então, para todo $\epsilon > 0$, arbitrariamente pequeno e todo $r \geq 2$, pelo λ -lema (ver [22]), $W^U(P_c)$ fica $\epsilon - C^r$ próximo de $W^U(e^{\frac{\bar{k}\pi}{\gamma}} P_c)$, em compactos. Assim, como a tangência entre $W^U(e^{\frac{\bar{k}\pi}{\gamma}} P_c)$ e $W^S(P_c)$ é quadrática e se desdobra genericamente com α , dado $\delta > 0$, $\exists \tilde{\alpha}$ tal que $|\bar{\alpha} - \tilde{\alpha}| < \delta$ e em $\alpha = \tilde{\alpha}$, $W^S(P_c)$ e $W^U(P_c)$ possuem uma tangência quadrática, que também se desdobra genericamente com α . $\square$

Ver a figura abaixo, que ilustra esse comportamento.

Figura 3 : Tangências Heteroclínicas => Tangências Homoclínicas

Esse resultado implica que para provar o teorema (13), é suficiente trabalhar com a aplicação $\overline{F}$.

2.5.2 Caso dissipativo

Seja P_d um ponto fixo dissipativo de $\overline{F}$, que é do tipo sela para $\alpha > e^{\frac{\pi}{2\gamma}}$, suficientemente grande.

Então temos os seguintes resultados :

Teorema 16 (*Tangências Dissipativas*) : *Considere a aplicação $\overline{F}$, fixado um valor de $\gamma > 1$. Então existe $\alpha_0 > 1$ e uma sequência $\alpha'_n > \alpha_0$, que depende de γ , com $\alpha'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, tal que $W^S(P_d)$ e $W^U(P_d)$ tem uma tangência quadrática em $\alpha = \alpha'_n$, que se desdobra genericamente com α .*

Nesse caso, do desdobramento dessas tangências temos :

Teorema 17 (*Robinson*) *Seja $F_\alpha : M \rightarrow M$, uma família de difeomorfismos C^∞ , onde M é uma variedade de dimensão 2, no sentido de que o difeomorfismo induzido em $M \times \mathbb{R}$ é C^∞ . Suponha que F_α possua um ponto (fixo) de sela p_α , tal que $W^S(p_\alpha)$ e $W^U(p_\alpha)$ tenham uma tangência quadrática em $\alpha = \alpha_0$ que se desdobra genericamente com α . Além disso, suponha que $\det(DF(p_{\alpha_0})) < 1$ e F_{α_0} seja C^2 – linearizável numa vizinhança de p_{α_0} (observe que essas 2 condições são abertas, assim valem numa vizinhança de α_0). Então existem intervalos $I \subset \mathbb{R}$, arbitrariamente próximos de α_0 , tais que para α genérico em I , F_α tem infinitos poços.*

Prova : ver [17]□

Teorema 18 (*Mora-Viana*) *Seja $F_\alpha : M \rightarrow M$, uma família de difeomorfismos C^∞ , onde M é uma variedade de dimensão 2. Suponha que F_α possua um ponto (fixo) de sela p_α , tal que $W^S(p_\alpha)$ e $W^U(p_\alpha)$ tenham uma tangência quadrática em $\alpha = \alpha_0$ que se desdobra genericamente com α . Além disso, suponha que $\det(DF(p_{\alpha_0})) < 1$ e F_{α_0} seja C^3 – linearizável numa vizinhança de p_{α_0} . Então o desdobramento dessa tangência quadrática, dentro da família F_α , implica no surgimento de atratores do tipo Hénon.*

Prova : ver [18]□

É claro então que esses 3 resultados implicam os teoremas (2) e (3).

Definição : Dizemos que um conjunto A , atrator não hiperbólico para um difeomorfismo $\varphi : M^2 \rightarrow M^2$, é do tipo Hénon se :

- existe um ponto de sela $p \in A$, tal que $\overline{W^U(p)} = A$;
- a bacia de atração de A contém um aberto;
- $\exists z \in A$, tal que a órbita positiva de z é densa em A e $\exists v \in T_z M^2$, tal que :
 $\|d\varphi^n(z).v\| \geq e^{cn}\|v\|$, para todo $n > 0$ e para uma certa constante $c > 0$

A presença de um atrator do tipo Hénon implica na existência de um aberto (contido na bacia de atração de A) com expoentes de Liapunov positivos em Lebesgue quase todo ponto (maiores ou iguais a $c > 0$). Ver [20] e [21]. Desta forma, para os valores dos parâmetros (γ, α) onde $\overline{F}$ tem atratores do tipo Hénon, existe um aberto $Ab \subset T^2$, um número $N > 0$, tal que, para Lebesgue quase todo $x \in Ab$, $\exists v \in T_x T^2$, tal que vale :

$$\|d\overline{F}^n(x).v\| \geq e^{cn}\|v\|, \text{ para } n > N \text{ e para uma constante } c = c(\alpha, \gamma) > 0 \quad (2.25)$$

Como já foi dito anteriormente, definindo a seguinte mudança de coordenadas,

$$H : S^1 \times]0, \infty[\rightarrow S^1 \times]-\infty, \infty[, \text{ dada por : } \begin{cases} \tilde{\phi} = \phi \\ \tilde{I} = \gamma \log(I) \end{cases}$$

temos, de (2.3), (2.6), (2.7) e (2.9) que :

1) Como, $D\overline{F}(\phi, I)$ é função só de ϕ , pois

$$D\overline{F}(\phi, I) = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \frac{J'(\phi)}{J(\phi)} \\ -1 & \frac{1}{J(\phi)} - \gamma \frac{J'(\phi)}{J(\phi)} \end{pmatrix}$$

é claro que para F como em (2.7), vale algo igual a (2.25);

2) Por facilidade de escrita, vamos dar nomes diferentes, para F nas diferentes coordenadas :

$$F_{sc} : S^1 \times]0, \infty[\rightarrow S^1 \times]0, \infty[, \text{ dada por : } \begin{cases} I' = J(\phi)I \\ \phi' = \mu(\phi) - \gamma \log(I') \end{cases}$$

$$F_c : S^1 \times]-\infty, \infty[\rightarrow S^1 \times]-\infty, \infty[, \text{ dada por : } \begin{cases} I' = F_I(I, \phi) = \gamma \log(J(\phi)) + I \\ \phi' = F_\phi(I, \phi) = \mu(\phi) - I' \end{cases}$$

Então, temos :

$$F_{sc}(y) = H^{-1} \circ F_c \circ H(y), \text{ ou seja :}$$

$$F_{sc}^n(y) = H^{-1} \circ F_c^n \circ H(y), \text{ o que implica que :}$$

$$DF_{sc}^n(y).v = DH^{-1}(F_c^n \circ H(y)).DF_c^n(H(y)).DH(y).v$$

E como já foi dito acima :

Existe um aberto, que chamaremos também de $Ab \subset S^1 \times \mathbb{R}$, um número $N > 0$, tal que, para Lebesgue quase todo $x \in Ab$, $\exists v \in T_x S^1 \times \mathbb{R}$ tal que vale :

$$\|dF_c^n(x).v\| \geq e^{cn}\|v\|, \text{ para } n > N \text{ e para uma constante } c = c(\alpha, \gamma) > 0 \quad (2.26)$$

Agora, seja $B \subset \overline{B} \subset H^{-1}(Ab) \subset S^1 \times]0, \infty[$, um aberto limitado. Sabemos que, para Lebesgue quase todo $y \in B$, existe um vetor $\bar{v} \in T_{H(y)} S^1 \times \mathbb{R}$, tal que (2.26) se verifica, para $x = H(y)$ e para esse $\bar{v}$.

Por outro lado, da definição de H :

$$DH(\phi, I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma}{I} \end{pmatrix} \text{ e } DH^{-1}(\phi, I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{I}{\gamma} \end{pmatrix}$$

Dessa forma, dado $y \in B$, seja $v = (DH(y))^{-1} \bar{v}$, onde $\bar{v}$ é aquele dado por (2.26). Como Ab é um aberto, contido na bacia de atração de um atrator do tipo Hénon para $\overline{F}$, temos que $Leb(\overline{F}^n(Ab)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ e também $Leb(F_c^n(Ab)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, pois o atrator do tipo Hénon tem medida de Lebesgue zero (ver [20] e [21]). Como F_c preserva a medida $\mu(A) = \int_A e^{\frac{I}{\gamma}} dI \wedge d\phi$, é claro que :

$$p_2 \circ F_c^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty, \text{ para Lebesgue quase todo } x \in Ab,$$

$$\text{onde } p_2(\phi, I) = I$$

Assim, para Lebesgue quase todo $y \in \hat{B} \subset B$, $\hat{B}$ um compacto, com $Leb(B \setminus \hat{B})$ arbitrariamente pequena, tal que $p_2 \circ F_c^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, para todo $x \in H(\hat{B})$, temos :

$$DF_{sc}^n(y).v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} \cdot \exp(\frac{\pi_2 \circ F_c^n \circ H(y)}{\gamma}) \end{pmatrix} \cdot DF_c^n(H(y)).\bar{v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|DF_{sc}^n(y).v\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} \cdot \exp(\frac{\pi_2 \circ F_c^n(x)}{\gamma}) \end{pmatrix} \cdot DF_c^n(x).\bar{v} \right\| \geq K(\alpha, \gamma) \cdot e^{cn} \|v\|,$$

onde $K(\alpha, \gamma) > 0$ a princípio também dependeria de y . Mas, como $\hat{B}$ é compacto, essa dependência pode ser suprimida.

Assim, de :

$$\|DF_{sc}^n(y).v\| \geq K(\alpha, \gamma) \cdot e^{cn} \|v\|, \text{ para } n > N,$$

obtemos :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|DF_{sc}^n(y).v\| \geq c, \text{ para Lebesgue quase todo } y \in \hat{B}.$$

O que implica que obtivemos "expoentes de Liapunov positivos" (entre aspas, pois a variedade não é compacta) em um conjunto de medida de Lebesgue positiva no cilindro, para uma aplicação do tipo Twist map (2.3), que preserva a medida de Lebesgue. Ou seja, temos o seguinte :

Teorema 19 : Para todo $\gamma > 1$ fixado, $\exists \alpha_n(\gamma) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, um conjunto $\hat{B} \subset S^1 \times]0, \infty[$, com $Leb(\hat{B}) > 0$, tal que para Lebesgue quase todo $y \in \hat{B}$, $\exists v \in T_y S^1 \times]0, +\infty[$, tal que (é claro que $c = c(\alpha, \gamma)$ e $\hat{B} = \hat{B}(\alpha, \gamma)$):

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|DF_{sc}^n(y).v\| \geq c > 0, \text{ para } \alpha = \alpha_n(\gamma).$$

2.5.3 Resultados auxiliares relacionados às tangências

As provas dos teoremas (13) e (16) são análogas e basicamente decorrem dos seguintes resultados para $\bar{F} : T^2 \rightarrow T^2$ (nas coordenadas de (2.9)) :

Observação : $\gamma > 1$ está fixado.

Definições : Para o ponto P_c , sejam γ_1 e γ_2 segmentos de retas que saem de P_c nas direções (1,-1) e (0,-1) respectivamente, tais que os comprimentos deles tendem a zero, de maneira conveniente, para $\alpha \rightarrow \infty$. Para o ponto P_d , sejam δ_1 e δ_2 curvas analogamente definidas, tais que os seus comprimentos também tendem a zero, para $\alpha \rightarrow \infty$. Definições mais precisas desses pontos e dessas curvas, serão dadas mais adiante.

Teorema 20 : Para $\gamma > 1$ fixado, existe uma sequência α_n (α'_n), tal que $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ ($\alpha'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$) e para $\alpha = \alpha_n$ ($\alpha = \alpha'_n$) $\bar{F}(\gamma_1)$ ($\bar{F}(\delta_1)$) possui uma tangência quadrática com $\bar{F}^{-1}(\gamma_2)$ ($\bar{F}^{-1}(\delta_2)$) que se desdobra genericamente com α .

Teorema 21 : Para $\gamma > 1$ fixado, dado $\epsilon > 0$, $\exists \alpha_0(\gamma, \epsilon)$ suficientemente grande, tal que para $\alpha \geq \alpha_0$, $W^U(P_c)$ ($W^U(P_d)$) está $\epsilon - C^2$ próximo de γ_1 (δ_1). Analogamente, $W^S(P_c)$ ($W^S(P_d)$) está $\epsilon - C^2$ próximo de γ_2 (δ_2).

Ou seja, as variedades estáveis e instáveis dos pontos P_c e P_d ficam tão próximas quanto se queira das curvas γ_1 e γ_2 , δ_1 e δ_2 , conforme α cresce. Então das tangências provadas no teorema (20), existem (ver prova no capítulo 3) sequências $\tilde{\alpha}_n$, próxima de α_n e $\tilde{\alpha}'_n$, próxima de α'_n , tais que para α percorrendo essas novas sequências, obtém-se tangências quadráticas entre $W^S(P_c)$ e $W^U(P_c)$, e, $W^S(P_d)$ e $W^U(P_d)$, para $\bar{F}$. Só isso, já implica o teorema (16). Aplicando agora (15), obtemos o teorema (13).

Capítulo 3

Prova dos resultados descritos em 2.5 e de outros a eles relacionados

Inicialmente vamos precisar algumas definições importantes para o que segue (como já foi dito, a partir de agora as coordenadas são as de (2.9), salvo menção em contrário) :

$$\begin{cases} P_c = (\phi_c, I_c) = (\arctan(\alpha), \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \arctan(\frac{1}{\alpha})) \\ P_d = (\phi_d, I_d) = \left(\pi - \arccos \left(\sqrt{\frac{e^{\frac{\pi}{\gamma}} - \alpha^{-2}}{\alpha^2 - \alpha^{-2}}} \right), (\mu(\phi_d) - \phi_d) \bmod \pi \right) \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = (t + \phi_c, -t + I_c), \quad t \in (0, 2 \cdot \arctan(\frac{1}{\alpha})) \\ \gamma_2(t) = (\phi_c, -t + I_c), \quad t \in (0, 2 \cdot \arctan(\frac{1}{\alpha})) \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} \delta_1(t) = (-t + \phi_d, t + I_d), \quad t \in (0, \frac{k}{\alpha}) \\ \delta_2(t) = (\phi_d, t + I_d), \quad t \in (0, \frac{k}{\alpha}) \end{cases} \quad (3.3)$$

onde $k = k(\gamma)$ é uma constante real positiva.

Teorema 20 : *Para $\gamma > 1$ fixado, existe uma sequência α_n (α'_n), tal que $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ ($\alpha'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$) e para $\alpha = \alpha_n$ ($\alpha = \alpha'_n$) $\overline{F}(\gamma_1)$ ($\overline{F}(\delta_1)$) possui uma tangência quadrática com $\overline{F}^{-1}(\gamma_2)$ ($\overline{F}^{-1}(\delta_2)$) e essa tangência se desdobra genericamente com α .*

Prova :

É fácil ver que P_c é sempre uma sela, para todo $\alpha > 1$ e que por exemplo, para $\alpha > \alpha_{\min 1}(\gamma) = e^{\frac{\pi}{\gamma}}$, P_d também é sela.

É claro que a direção das curvas $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$ não é bem a dos autovetores de $D\bar{F}$ nos pontos P_c e P_d . O que ocorre na verdade, é que com $\alpha \rightarrow \infty$, esses autovetores tendem a essas direções. Isso será mostrado no teorema (21).

A demonstração para P_c e P_d é completamente análoga, por isso será feita em detalhe só no caso de P_c .

Assim, para P_c temos :

$$\bar{F}(\gamma_1) = \begin{cases} \bar{F}_I(\gamma_1)(t) = \gamma \log(J(t + \arctan(\alpha))) + \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \arctan(\frac{1}{\alpha}) - t \\ \bar{F}_\phi(\gamma_1)(t) = \mu(t + \arctan(\alpha)) - \bar{F}_I(\gamma_1)(t) \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\bar{F}^{-1}(\gamma_2) = \begin{cases} \bar{F}_I^{-1}(\gamma_2)(t) = -\gamma \log(J \circ \bar{F}_\phi^{-1}(\gamma_2)(t)) + \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \arctan(\frac{1}{\alpha}) - t \\ \bar{F}_\phi^{-1}(\gamma_2)(t) = \mu^{-1}(-t + \arctan(\frac{1}{\alpha}) + \pi) \end{cases} \quad (3.5)$$

Obviamente, as expressões acima são (mod π).

Agora vamos observar que :

$$\begin{aligned} &\text{Definindo } f(\phi) = \mu(\phi) - \arctan(\alpha) - \gamma \log(J(\phi)), \text{ para} \\ &\phi \in [\pi - \arctan(\alpha), \pi + \arctan(\alpha)], \text{ então} \\ &\bar{F}^{-1}(\gamma_2) = \{(\phi, f(\phi) \pmod{\pi}) : \phi \in [\pi - \arctan(\alpha), \pi + \arctan(\alpha)]\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ou seja, $\bar{F}^{-1}(\gamma_2)$ é gráfico sobre o eixo ϕ . Vamos agora analisar $f(\phi)$.

$$\begin{aligned} f'(\phi_0) = 0 &\Rightarrow \phi_0 = \pi - \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1}{\gamma(\alpha^2 - \alpha^{-2})}\right), \\ \text{para } \alpha &> \alpha_{\min 2}(\gamma) = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 4\gamma^2}}{2\gamma}}. \text{ E, nesse caso, } \phi_0 \in (\frac{3\pi}{4}, \pi). \\ \text{Obs : } \phi_0 &\xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} \pi \end{aligned} \quad (3.7)$$

É fácil ver que, $f(\phi_0) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} -\infty$, (mais ainda, $f(\phi_0)$ vista como função de α , é estritamente decrescente) ou seja, o ponto de $\overline{F}^{-1}(\gamma_2)$ que tem reta tangente horizontal, cruza o toro verticalmente, (nesse trabalho sempre pensamos no toro, como sendo o quadrado $[0, \pi]^2$, com os lados opostos identificados) um número de vezes que tende a infinito, conforme α cresce. Isto porque,

$$\begin{aligned}
 f(\phi_0) &= \mu(\phi_0) - \arctan(\alpha) - \gamma \log(J(\phi_0)) < \\
 &< 2\pi - \gamma \log(J(\phi_0)) = \\
 &= 2\pi - \gamma \log\left(\frac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha^{-2}) + \frac{1}{2}(\alpha^2 - \alpha^{-2}) \cos(2\phi_0)\right) \\
 \text{Como } \phi_0 &\in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right), \text{ temos que } 2\phi_0 \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \cos(2\phi_0) > 0, \text{ portanto :} \\
 f(\phi_0) &< 2\pi - \gamma \log\left(\frac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha^{-2})\right) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} -\infty
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Mais ainda. $\forall \phi \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$, temos que $2\phi \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \Rightarrow \cos(2\phi) \geq 0$. Assim, nesse caso :

$$f(\phi) < 2\pi - \gamma \log(J(\phi)) < 2\pi - \gamma \log\left(\frac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha^{-2})\right) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} -\infty$$

Agora, se impomos que $f'(\phi_1) = -1$, obtemos :

$$\begin{aligned}
 1 + \gamma(\alpha^2 - \alpha^{-2}) \sin(2\phi_1) + \frac{1}{2}(\alpha^2 - \alpha^{-2}) \cos(2\phi_1) + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha^{-2}) &= 0, \\
 \text{ou seja, } \exists \alpha_{\min 4} \text{ tal que, se } \alpha > \alpha_{\min 4} \text{ temos :} & \\
 \left| \phi_1 - \left(\pi - \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{4\gamma}{4\gamma^2 + 1}\right)\right) \right| < 0.1. \quad \forall \gamma > 1 \text{ fixo e,} & \\
 \phi_1 \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right] \text{ (aqui foi usado que } \gamma > 1) &
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

É claro que existe $\alpha_{\min 5}(\gamma)$, tal que, se $\alpha > \alpha_{\min 5}(\gamma)$, $\phi_0 > \phi_1$. Como existe um único ϕ_0 , tal que $f'(\phi_0) = 0$, temos que para todo $\phi \in [\phi_1, \phi_0[$, $f'(\phi) < 0$. Além disso, como será mostrado em (3.16),

$$f''(\phi) > 0, \text{ para } \phi \in [\phi_1, \phi_0]. \tag{3.10}$$

Da expressão de $\overline{F}(\gamma_1)$, (3.4), temos (esquecendo o (mod π)) :

$$\begin{aligned}
& \overline{F}_\phi(\gamma_1)(t) - \overline{F}_\phi(\gamma_1)(0) = \\
& = \mu(t + \arctan(\alpha)) - \mu(\arctan(\alpha)) - \gamma \log(J(t + \arctan(\alpha))) + t \\
& \text{Queremos encontrar } T = T(\alpha, \gamma) \in (0, \pi - 2 \arctan(\alpha)), \text{ tal que} \\
& \overline{F}_\phi(\gamma_1)(T) - \overline{F}_\phi(\gamma_1)(0) > \pi \\
& \text{É claro que basta } T \text{ satisfizer :} \\
& J(T + \arctan(\alpha)) = e^{\frac{-\pi}{\gamma}}. \\
& \text{Mas para isso, é necessário que } \alpha > \sqrt{\alpha_{\min 1}(\gamma)} = e^{\frac{\pi}{2\gamma}} \\
& \text{Então, } T = T(\alpha, \gamma) = \arccos \left(\sqrt{\frac{e^{\frac{-\pi}{\gamma}} - \alpha^{-2}}{\alpha^2 - \alpha^{-2}}} \right) - \arctan(\alpha)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Portanto, $\overline{F}(\gamma_1)([0, T])$ cruza o toro $([0, \pi]^2)$ horizontalmente pelo menos 1 vez. Vamos agora mostrar que $\overline{F}(\gamma_1)([0, T])$ é aproximadamente linear, com coeficiente angular próximo de -1.

De (3.4), temos que $\overline{F}(\gamma_1)'(t)$, é dado por :

$$F(\gamma_1)'(t) = \begin{cases} \overline{F}'_I(\gamma_1)(t) = - \left(-\gamma \frac{J'(t + \arctan(\alpha))}{J(t + \arctan(\alpha))} + 1 \right) \\ \overline{F}'_\phi(\gamma_1)(t) = \frac{1}{J(t + \arctan(\alpha))} + \left(-\gamma \frac{J'(t + \arctan(\alpha))}{J(t + \arctan(\alpha))} + 1 \right) \end{cases} \tag{3.12}$$

E para $t \in [0, T]$, vale :

$$e^{\frac{-\pi}{\gamma}} \leq J(t + \arctan(\alpha)) \leq 1, \quad \forall \alpha > 1$$

e,

$$J'(t + \arctan(\alpha)) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} -\infty$$

o que implica que $\exists \alpha_{\min 3}(\gamma)$, tal que, se $\alpha > \alpha_{\min 3}(\gamma)$, temos, para $t \in [0, T]$ (observe que $T = T(\alpha, \gamma)$) :

$$-1 < \frac{\overline{F}'_I(\gamma_1)(t)}{\overline{F}'_\phi(\gamma_1)(t)} < -0.9 \tag{3.13}$$

Por outro lado, para aplicações futuras, será importante garantir cruzamento transversal entre as variedades estável e instável dos pontos fixos P_c e P_d . Assim,

agora vamos provar que $\exists \alpha_{tran}(\gamma)$, tal que para $\alpha > \alpha_{tran}(\gamma)$, $\overline{F}(\gamma_1)$ intersecta $\overline{F}^{-1}(\gamma_2)$ transversalmente :

$$\begin{aligned} f(\pi - \arctan(\alpha)) &= \pi - \arctan\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \arctan(\alpha) \text{ e,} \\ &\text{supondo que } \alpha > e^{\frac{\pi}{\gamma}}, \text{ temos :} \\ \pi - \arccos\left(\sqrt{\frac{e^{\frac{2\pi}{\gamma}} - \alpha^{-2}}{\alpha^2 - \alpha^{-2}}}\right) &\in [\pi - \arctan(\alpha), \pi + \arctan(\alpha)]. \\ f(\pi - \arccos\left(\sqrt{\frac{e^{\frac{2\pi}{\gamma}} - \alpha^{-2}}{\alpha^2 - \alpha^{-2}}}\right)) &= \pi - \mu(\arccos\left(\sqrt{\frac{e^{\frac{2\pi}{\gamma}} - \alpha^{-2}}{\alpha^2 - \alpha^{-2}}}\right)) - \arctan(\alpha) - 2\pi \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\left| f(\pi - \arctan(\alpha)) - f(\pi - \arccos\left(\sqrt{\frac{e^{\frac{2\pi}{\gamma}} - \alpha^{-2}}{\alpha^2 - \alpha^{-2}}}\right)) \right| = \\ &= \left| 2\pi - \arctan\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \mu(\arccos\left(\sqrt{\frac{e^{\frac{2\pi}{\gamma}} - \alpha^{-2}}{\alpha^2 - \alpha^{-2}}}\right)) \right| > \frac{7\pi}{4}. \end{aligned}$$

Logo, $f([\pi - \arctan(\alpha), \pi - \arccos\left(\sqrt{\frac{e^{\frac{2\pi}{\gamma}} - \alpha^{-2}}{\alpha^2 - \alpha^{-2}}}\right)])$ cruza o toro verticalmente, pelo menos 1 vez. Assim, para $\alpha > \alpha_{\min 3}(\gamma)$, $f([\pi - \arctan(\alpha), \pi - \arccos\left(\sqrt{\frac{e^{\frac{2\pi}{\gamma}} - \alpha^{-2}}{\alpha^2 - \alpha^{-2}}}\right)])$ cruza $\overline{F}(\gamma_1)([0, T])$ em pelo menos um ponto. Agora, vamos mostrar que esse cruzamento é, para α suficientemente grande, transversal. Calculando $f'(\phi)$, obtemos :

$$f'(\phi) = \frac{1}{J(\phi)} - \gamma \frac{J'(\phi)}{J(\phi)}$$

E, é claro que para $\phi \in [\pi - \arctan(\alpha), \pi - \arccos\left(\sqrt{\frac{e^{\frac{2\pi}{\gamma}} - \alpha^{-2}}{\alpha^2 - \alpha^{-2}}}\right)]$, temos :

$$\begin{aligned} 1 &\leq J(\phi) \leq e^{\frac{2\pi}{\gamma}} \\ &\text{e,} \\ J'(\phi) &\xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} \infty \end{aligned}$$

Assim, $\exists \alpha_{der}(\gamma)$, tal que, se $\alpha > \alpha_{der}(\gamma)$, $|f'(\phi)| > 2$, para $\phi \in [\pi - \arctan(\alpha), \pi - \arccos\left(\sqrt{\frac{e^{\frac{2\pi}{\gamma}} - \alpha^{-2}}{\alpha^2 - \alpha^{-2}}}\right)]$. Logo, de (3.13), escolhendo $\alpha_{tran}(\gamma)$ tal que $\alpha_{tran}(\gamma) >$

$\max\{e^{\frac{\pi}{\gamma}}, \alpha_{\min 3}(\gamma), \alpha_{\text{der}}(\gamma)\}$, temos que se $\alpha > \alpha_{\text{tran}}(\gamma)$, $\overline{F}(\gamma_1)$ intersecta $\overline{F}^{-1}(\gamma_2)$ transversalmente.

Voltando as tangências, é claro que, escolhendo

$$\alpha_M(\gamma) > \max\{\alpha_{\min 1}(\gamma), \alpha_{\min 2}(\gamma), \alpha_{\min 3}(\gamma), \alpha_{\min 4}, \alpha_{\min 5}(\gamma)\},$$

existe uma sequência $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ de valores de α , todos maiores que $\alpha_M(\gamma)$, tal que, das relações (3.8), (3.11), (3.10) e (3.13), $\overline{F}(\gamma_1)$ e $\overline{F}^{-1}(\gamma_2)$ são tangentes em $\alpha = \alpha_n$. Além disso, essas tangências se dão em pontos, cuja reta tangente a $\overline{F}(\gamma_1)$ e $\overline{F}^{-1}(\gamma_2)$ tem coef angular, maior que -1, e menor que -0.9.

Vamos agora mostrar que essas tangências são quadráticas e se desdobram genericamente com α :

- tangências quadráticas;

Para $\overline{F}^{-1}(\gamma_2)$ que, como já foi mostrado em (3.6), coincide com o gráfico da função $I = f(\phi) \pmod{\pi}$, vamos calcular $f''(\phi)$ e estimá-la em $[\phi_1, \phi_0]$.

Como $\overline{F}(\gamma_1)(t)$ satisfaz (3.13) para $t \in [0, T]$, temos que também pode ser escrita como gráfico de uma certa função $I = g(\phi) \pmod{\pi}$, para $\phi \in F_\phi(\gamma_1)([0, T])$. Vamos então mostrar que $f''(\phi) \big|_{[\phi_1, \phi_0]} - g''(\phi) \big|_{F_\phi(\gamma_1)([0, T])} \gg 0$, portanto as tangências são sempre quadráticas.

Agora, vamos calcular $f''(\phi)$:

$$f''(\phi) = \frac{-J'(\phi)}{J(\phi)^2} + \gamma \left(\frac{J'(\phi)}{J(\phi)} \right)^2 - \gamma \frac{J''(\phi)}{J(\phi)} \quad (3.14)$$

Primeiro, calculemos :

$$f''(\phi_0) = \frac{-J'(\phi_0)}{J(\phi_0)^2} + \gamma \left(\frac{J'(\phi_0)}{J(\phi_0)} \right)^2 - \gamma \frac{J''(\phi_0)}{J(\phi_0)}$$

Sabemos que :

$$f'(\phi_0) = \frac{1}{J(\phi_0)} - \gamma \frac{J'(\phi_0)}{J(\phi_0)} = 0, \text{ o que implica :}$$

$$f''(\phi_0) = -\gamma \frac{J''(\phi_0)}{J(\phi_0)}.$$

Então,

$$f''(\phi_0) = \frac{2\gamma(\alpha^2 - \alpha^{-2}) \cos(2\phi_0)}{\frac{1}{2}(\alpha^2 - \alpha^{-2}) \cos(2\phi_0) + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha^{-2})} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} \frac{2\gamma}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 2\gamma \quad (3.15)$$

Logo, $\exists \alpha_{\min 6}$, tal que para $\alpha > \alpha_{\min 6}$, temos que $f''(\phi_0) > 1.5\gamma$.

Por outro lado, $\forall \phi \in [\phi_1, \phi_0[$, temos :

$$f'(\phi) = \frac{1}{J(\phi)} - \gamma \frac{J'(\phi)}{J(\phi)} < 0.$$

Ainda, é claro que :

$$f''(\phi) = \frac{-J'(\phi)}{J(\phi)} \left(\frac{1}{J(\phi)} - \gamma \frac{J'(\phi)}{J(\phi)} \right) - \gamma \frac{J''(\phi)}{J(\phi)} = \frac{-J'(\phi)}{J(\phi)} f'(\phi) - \gamma \frac{J''(\phi)}{J(\phi)}.$$

Como $2\phi_1 \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, temos que se $\phi \in [\phi_1, \phi_0[$, $\cos(2\phi) > 0$. Assim :

$$\begin{aligned} f''(\phi) &= -f'(\phi) \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{J(\phi)} - f'(\phi) \right) - \gamma \frac{J''(\phi)}{J(\phi)} > \frac{1}{\gamma} (f'(\phi))^2 - \gamma \frac{J''(\phi)}{J(\phi)} = \\ &= \frac{1}{\gamma} (f'(\phi))^2 + \frac{2\gamma(\alpha^2 - \alpha^{-2}) \cos(2\phi)}{\frac{1}{2}(\alpha^2 - \alpha^{-2}) \cos(2\phi) + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha^{-2})} > \frac{1}{\gamma} (f'(\phi))^2 > 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

De (3.13), se $\alpha > \alpha_{\min 3}(\gamma)$, as tangências se dão em pontos, cuja reta tangente a $\bar{F}(\gamma_1)$ e $\bar{F}^{-1}(\gamma_2)$ tem coef angular, maior que -1, e menor que -0.9. Assim, nos pontos de tangência, $|f'(\phi)| > 0.9$. Portanto, de (3.16), no ponto de tangência $P_{\tan} = (\phi_{\tan}, I_{\tan})$, como $\phi_{\tan} \in [\phi_1, \phi_0[$, temos :

$$\begin{aligned} f''(\phi_{\tan}) &> \frac{3}{4\gamma}, \\ \text{para } \alpha &> \max\{\alpha_{\min 1}(\gamma), \alpha_{\min 2}(\gamma), \alpha_{\min 3}(\gamma), \alpha_{\min 4}, \alpha_{\min 5}(\gamma)\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$\bar{F}(\gamma_1)(t)$, restrito a $[0, T]$, como já foi dito, pode ser escrito como gráfico da seguinte função $I = g(\phi) \pmod{\pi}$, onde $\phi \in \bar{F}_{\phi}(\gamma_1)([0, T])$. Definamos agora,

$$m(t) = \frac{F'_I(\gamma_1)(t)}{F'_\phi(\gamma_1)(t)} = \frac{1}{[\gamma J'(t + \arctan(\alpha)) - J(t + \arctan(\alpha))]^{-1} - 1} \quad (3.18)$$

Então, a sua derivada fica :

$$m'(t) = -\frac{d}{dt} \left([\gamma J'(t + \arctan(\alpha)) - J(t + \arctan(\alpha))]^{-1} - 1 \right) m(t)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m'(t) = \frac{\gamma J''(t + \arctan(\alpha)) - J'(t + \arctan(\alpha))}{[\gamma J'(t + \arctan(\alpha)) - J(t + \arctan(\alpha))]^2} m(t)^2$$

De (3.13), se $\alpha > \alpha_{\min 3}(\gamma)$, $m(t)^2 < 1$, o que implica que :

$$|m'(t)| < \left| \frac{\gamma J''(t + \arctan(\alpha)) - J'(t + \arctan(\alpha))}{[\gamma J'(t + \arctan(\alpha)) - J(t + \arctan(\alpha))]^2} \right|$$

E, $m(t)$ se relaciona com $g(\phi)$ da seguinte forma :

$$\begin{aligned} m(t) &= g'(F_\phi(\gamma_1)(t)), \text{ o que implica que :} \\ g''(F_\phi(\gamma_1)(t)) &= \frac{m'(t)}{F'_\phi(\gamma_1)(t)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Assim,

$$|g''(F_\phi(\gamma_1)(t))| \leq \left| \frac{m'(t)}{F'_\phi(\gamma_1)(t)} \right|, \text{ onde :}$$

$$\left| \frac{1}{F'_\phi(\gamma_1)(t)} \right| = \left| \frac{J(t + \arctan(\alpha))}{\gamma J'(t + \arctan(\alpha)) - J(t + \arctan(\alpha)) - 1} \right|$$

Para $t \in [0, T]$, $\exists \alpha_{\min 7}(\gamma)$, tal que para $\alpha > \alpha_{\min 7}(\gamma)$, temos :

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\pi}{\gamma}} &\leq J(t + \arctan(\alpha)) \leq 1 \\ c_{1e}\alpha &\leq |J'(t + \arctan(\alpha))| \leq c_{1d}\alpha \\ c_{2e}\alpha^2 &\leq |J''(t + \arctan(\alpha))| \leq c_{2d}\alpha^2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde $c_{1e}, c_{1d}, c_{2e}, c_{2d}$ são constantes reais positivas

Assim,

$$|g''(F_\phi(\gamma_1)(t))| < \left| \frac{\gamma c_{2d}\alpha^2 + c_{1d}\alpha}{[\gamma c_{1e}\alpha - 1]^2} \right| \cdot \left| \frac{1}{\gamma c_{1e}\alpha - 2} \right| \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0 \quad (3.21)$$

O que implica que :

Para $t \in [0, T]$, $\exists \alpha_{\min 8}(\gamma)$, tal que para $\alpha > \alpha_{\min 8}(\gamma)$, temos :

$$\begin{aligned} |g''(F_\phi(\gamma_1)(t))| &< \frac{3}{8\gamma}, \text{ ou seja, em particular :} \\ |g''(\phi_{\tan})| &= |g''(F_\phi(\gamma_1)(t_{\tan}))| < \frac{3}{8\gamma}, \text{ onde } t_{\tan} \in [0, T] \end{aligned} \quad (3.22)$$

Portanto, de (3.17) e (3.22), temos :

$$f''(\phi_{\tan}) - g''(\phi_{\tan}) > \frac{3}{8\gamma}, \text{ ou seja, o contato é quadrático.} \quad (3.23)$$

• tangências se desdobram genericamente com α :

Agora, vamos mostrar que $\exists$ uma função $\alpha_{desge}(\gamma)$, tal que para todo $\alpha > \alpha_{desge}(\gamma)$, $\phi \in [\phi_1, \phi_0] \subset [\frac{3\pi}{4}, \pi]$, temos :

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\phi) - \frac{\partial g}{\partial \alpha}(\phi) < 0$$

Como os pontos de tangência $P_{\tan} = (\phi_{\tan}, I_{\tan})$ são tais que $\phi_{\tan} \in [\phi_1, \phi_0]$, o desdobramento das tangências é genérico com α .

Para $\phi \in [\frac{3\pi}{4}, \pi]$, das expressões de f e de g , temos que existem constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e uma função $\alpha_{\min 9}(\phi, \gamma)$, tal que :

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} f(\phi) = -\infty \text{ e para } \alpha > \alpha_{\min 9}(\phi, \gamma) :$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\phi) < 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}(\phi) > 0, \quad c_1 < g(\phi) < c_2, \quad \frac{\partial g}{\partial \alpha}(\phi) < 0 \text{ e } \frac{\partial^2 g}{\partial \alpha^2}(\phi) > 0$$

Assim, para cada $\phi \in [\frac{3\pi}{4}, \pi]$, $\exists$ uma função $\alpha_{dg}(\phi, \gamma) > \alpha_{\min 9}(\phi, \gamma)$, tal que para todo $\alpha > \alpha_{dg}(\phi, \gamma)$, temos :

Teorema 21 : Para $\gamma > 1$ fixado, dado $\epsilon > 0$. $\exists \alpha_0(\gamma, \epsilon)$ suficientemente grande, tal que para $\alpha \geq \alpha_0$, $W^U(P_c)$ ($W^U(P_d)$) está $\epsilon - C^2$ próximo de γ_1 (δ_1). Analogamente, $W^S(P_c)$ ($W^S(P_d)$) está $\epsilon - C^2$ próximo de γ_2 (δ_2).

Prova :

Nesse caso, a prova para P_c e P_d possui diferenças, e essas serão evidenciadas.

Para P_c :

A transformação $\bar{F}$ possui, como já foi dito, o seguinte ponto fixo :

$$P_c = (\phi_c, I_c) = (\arctan(\alpha), \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \arctan(\frac{1}{\alpha}))$$

Assim, através de uma simples translação de coordenadas, podemos escrever $\bar{F}$ da seguinte forma :

$$\bar{F} : \begin{cases} I' = g(\phi) + I \pmod{\pi} \\ \phi' = h(\phi) - I \pmod{\pi} \end{cases} \quad (3.24)$$

onde.

$$\begin{aligned} g(\phi) &= \gamma \log(J(\phi + \phi_c)) \\ h(\phi) &= \mu(\phi + \phi_c) - \gamma \log(J(\phi + \phi_c)) - \mu(\phi_c) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Assim, como $g(0) = h(0) = 0$, essa translação leva P_c em $(0,0)$.

A primeira etapa, será majorar $g^{(n)}(0)$ e $h^{(n)}(0)$:

Lema 2 : Valem as seguintes desigualdades :

$$\begin{aligned} |g^{(n)}(0)| &\leq \gamma \cdot 4^n \cdot \alpha^n \cdot n! \\ |h^{(n)}(0)| &\leq \gamma \cdot 4^n \cdot \alpha^n \cdot n! \end{aligned}$$

Ou seja, os raios de convergência dessas funções caem com $\frac{1}{\alpha}$.

Prova :

A primeira etapa dessa prova é majorar $J^{(N)}(\phi_c)$. Para isso, vamos primeiro calcular as derivadas da função $J(\phi)$:

$$\begin{aligned} J^{(2n)}(\phi) &= (-1)^n \cdot 2^{2n-1} \cdot \cos(2\phi) \cdot (\alpha^2 - \alpha^{-2}) \\ J^{(2n+1)}(\phi) &= (-1)^{n+1} \cdot 2^{2n} \cdot \sin(2\phi) \cdot (\alpha^2 - \alpha^{-2}) \end{aligned} \quad (3.26)$$

E, da expressão de ϕ_c :

$$\sin(2\phi_c) = \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2}$$

$$\cos(2\phi_c) = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2}$$

Assim, uma majoração trivial é :

$$| J^{(2N)}(\phi_c) | \leq 2^{2N} \cdot \alpha^2$$

$$| J^{(2N+1)}(\phi_c) | \leq 2^{2N+1} \cdot \alpha$$

Derivando a expressão de $g(\phi)$, (3.25), obtemos :

$$g'(\phi)J(\phi + \phi_c) - \gamma J'(\phi + \phi_c) = 0 \quad (3.27)$$

Assim, $|g'(0)| < \gamma \cdot 2 \cdot \alpha$. Derivando $(n-1)$ vezes a expressão (3.27), obtemos :

$$g^{(n)}(\phi) \cdot J(\phi + \phi_c) + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} g^{(n-i)}(\phi) \cdot J^{(i)}(\phi + \phi_c) - \gamma J^{(n)}(\phi + \phi_c) = 0 \quad (3.28)$$

Dessa forma,

$$| g^{(n)}(0) | \leq \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} | g^{(n-i)}(0) | \cdot | J^{(i)}(\phi_c) | + \gamma | J^{(n)}(\phi_c) |$$

É fácil ver que a maior potência em α que $|g^{(n)}(0)|$ pode ter, tem grau n . Para isto, basta supor por indução que até ordem $n-1$ isso é verdade, e ver que os termos em potência de α que surgem, quando majoramos $|g^{(n)}(0)|$ são dos

seguintes tipos : $\alpha^{n-1}.\alpha$, $\alpha^{n-2}.\alpha^2$, $\alpha^{n-3}.\alpha$. etc, sendo todos de grau menor ou igual a n , em α . A base de indução é : $|g'(0)| < \gamma.2.\alpha < 4.\gamma.\alpha$

Assim, definindo a seguinte sequência :

$$\begin{aligned} a_1 &= 4\gamma \\ a_n &= \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} 2^i . a_{n-i} + \gamma 2^n \end{aligned} \quad (3.29)$$

Temos trivialmente que :

$$|g^{(n)}(0)| \leq a_n . \alpha^n$$

Agora, vamos provar que $a_n \leq \gamma . 4^n . n!$

A base de indução é : $a_1 \leq 4\gamma$. Suponha por hipótese de indução que $a_i \leq \gamma . 4^i . i!$, para $i=1,2,\dots,n-1$. Então temos :

$$\begin{aligned} a_n &\leq \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} 2^i . \gamma . 4^{n-i} . (n-i)! + \gamma 2^n = \gamma 2^n \left(\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} 2^{n-i} . (n-i)! + 1 \right) \leq \\ &\leq \gamma 2^n \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(n-1)! 2^n (n-i)}{2^i . i!} + 1 \right) = \gamma 2^n \left((n-1)! . 2^n \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(n-i)}{2^i . i!} \right] + 1 \right) \leq \\ &\leq \gamma 2^n ((n-1)! . 2^n [n-1] + 1) \leq \gamma 2^n (2^n . (n-1)! (n-1) + 2^n . (n-1)!) = \gamma . 4^n . n! \end{aligned}$$

Obs : Foi usado que $\left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(n-i)}{2^i . i!} \right] \leq (n-1)$, o que é trivial, pois :

$$\left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(n-i)}{2^i . i!} \right] \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(n-1)}{2^i} = (n-1) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i} < (n-1)$$

Para $h(\phi)$ temos :

$$h'(\phi) = \frac{1}{J(\phi + \phi_c)} - \gamma \frac{J'(\phi + \phi_c)}{J(\phi + \phi_c)}, \text{ o que implica que :}$$

$$h'(\phi).J(\phi + \phi_c) + \gamma J'(\phi + \phi_c) = 1 \quad (3.30)$$

Novamente, derivando a expressão (3.30) $(n-1)$ vezes, obtemos :

$$h^{(n)}(\phi).J(\phi + \phi_c) + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} h^{(n-i)}(\phi).J^{(i)}(\phi + \phi_c) + \gamma J^{(n)}(\phi + \phi_c) = 0 \quad (3.31)$$

E, agora $h'(0) = 1 - \gamma J'(\phi_c) \Rightarrow |h'(0)| \leq 1 + 2\gamma.\alpha \leq 4\gamma.\alpha$, para $\gamma > 1$ e $\alpha > 1$. Assim, é claro que :

$$|h^{(n)}(0)| \leq a_n.\alpha^n. \text{ onde } a_n \text{ novamente é dada por (3.29).}$$

O que prova o lema. $\square$

Calculando $D\bar{F}(P_c)$, é fácil ver que o autovetor associado ao autovalor maior que 1 (tangente a variedade instável em P_c) tende a $(1, -1)$ e o autovetor associado ao autovalor menor que 1 (tangente a variedade estável em P_c) tende a $(0, 1)$, ambos para $\alpha \rightarrow \infty$ e todo $\gamma > 1$ fixo.

$$W^U(P_c) :$$

Assim, é claro que (ver as majorações abaixo, em especial (3.34)), se $\alpha > 10$, ao menos numa vizinhança de P_c , podemos escrever $W^U(P_c)$ como gráfico de uma função $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $l = l(\phi)$. Além disso, como $g(\phi)$ e $h(\phi)$ são funções analíticas, $l(\phi)$ também o é (ver [24]). Pela invariância de $W^U(P_c)$, temos :

$$l(h(\phi) - l(\phi)) = g(\phi) + l(\phi) \quad (3.32)$$

Então, derivando a expressão acima, e calculando em $\phi = 0$ (que corresponde a P_c), obtemos :

$$\begin{aligned}
l'(0)(h'(0) - l'(0)) &= g'(0) + l'(0) \Rightarrow \\
\Rightarrow l'(0)^2 + g'(0)l'(0) + g'(0) &= 0, \\
\text{pois } h'(0) &= 1 - g'(0)
\end{aligned}$$

Assim, definindo $a = \gamma(\alpha - \alpha^{-1})$, temos :

$$l'(0) = a \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2}{a}} \right) \quad (3.33)$$

É fácil ver que $\partial_\alpha l'(0) < 0$, pois :

$$\partial_\alpha l'(0) = \partial_a l'(0) \cdot \partial_\alpha a \text{ e :}$$

$$\begin{aligned}
\partial_a l'(0) &= \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2}{a}} \right) + \frac{1}{a\sqrt{1 + \frac{2}{a}}} = 1 + \frac{1 - a\sqrt{1 + \frac{2}{a}} \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{a}}}{a\sqrt{1 + \frac{2}{a}}} = \\
&= 1 - \frac{1 + a}{a\sqrt{1 + \frac{2}{a}}} < 0, \text{ porque } (1 + a) > a\sqrt{1 + \frac{2}{a}},
\end{aligned}$$

$$\text{pois } (1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2 > \left(a\sqrt{1 + \frac{2}{a}} \right)^2 = a^2 + 2a, \text{ e}$$

$$\partial_\alpha a = \gamma \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} \right) > 0$$

Assim, $l'(0)$ é decrescente com α .

Por outro lado, é claro que :

$$\begin{aligned}
1 + l'(0) &= 1 + a \left(1 - \left(1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2 \cdot 2!} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{a^n \cdot n!} + \dots \right) \right) = \\
&= \frac{1}{a \cdot 2!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{a^{n-1} \cdot n!} + \dots \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow |1 + l'(0)| \leq \frac{1}{a \cdot 2!} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{a^n \cdot (n+1)!} + \dots$$

Observando agora que :

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \leq 2^n \cdot (n+1)!, \text{ temos :}$$

$$|1 + l'(0)| \leq \frac{2}{a} + \left(\frac{2}{a}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{a}\right)^n + \dots$$

Então, se $\alpha > 10$, como $\gamma > 1$, temos $a > 9 \Rightarrow \frac{2}{a} < \frac{2}{9} \Rightarrow 1 - \frac{2}{a} > \frac{7}{9}$. Assim,

$$|1 + l'(0)| \leq \frac{\frac{2}{a}}{1 - \frac{2}{a}} \leq \frac{18}{7a} < \frac{3}{a} = \frac{3}{\gamma(\alpha - \alpha^{-1})} < \frac{4}{\gamma\alpha} \quad (3.34)$$

Logo, está provado que $l'(0) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} -1$, e que, $l'(0) > -1$, pois como já foi mostrado acima, $l'(0)$ é decrescente com α . Isto implica em particular, que o autovetor correspondente ao autovalor expansivo, em P_c , tende à $(1, -1)$. para $\alpha \rightarrow \infty$, como já foi dito.

Agora, derivando (3.32) 2 vezes, e calculando em $\phi = 0$, obtemos :

$$l''(0) = \frac{g''(0) - l'(0) \cdot h''(0)}{[(h'(0) - l'(0))^2 - l'(0) - 1]}$$

E, por indução, temos que a expressão de $l^{(n)}(0)$ tem o seguinte aspecto:

$$l^{(n)}(0) = \frac{A + B}{[(h'(0) - l'(0))^n - l'(0) - 1]}, \quad (3.35)$$

com

$$A = \sum_{i=2}^{2^n} \left(\bar{a}_i \cdot \tilde{l}^{(i)}(0) \cdot (h'(0) - l'(0))^{b_i} \dots (h^{(n-1)}(0) - l^{(n-1)}(0))^{b_{n-1}^i} \right)$$

$$B = g^{(n)}(0) - l'(0) \cdot h^{(n)}(0)$$

Onde :

- $\tilde{i}(i)$ é uma função tal que : $\tilde{i} : \{2, 3, 4, \dots, 2^n\} \rightarrow \{2, 3, 4, \dots, n-1\}$;
- $b_j^i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, com $j=1, 2, \dots, n-1$ e vale : $b_1^i + 2b_2^i + \dots + (n-1)b_{n-1}^i = n$;
- $\bar{a}_i \in \mathbb{R}$ (obviamente podem ser zero)

Do lema (2), temos que $|h^{(i)}(0)| \leq \gamma \cdot 4^i \cdot \alpha^i \cdot i!$ e resta agora majorar $g^{(n)}(0) - l'(0) \cdot h^{(n)}(0)$:

$$|g^{(n)}(0) - l'(0) \cdot h^{(n)}(0)| \leq |g^{(n)}(0) + h^{(n)}(0)| + |(1 + l'(0)) \cdot h^{(n)}(0)| \leq$$

$$\leq |g^{(n)}(0) + h^{(n)}(0)| + |1 + l'(0)| \cdot |h^{(n)}(0)|$$

Agora, basta ver que $g(\phi) + h(\phi) = \mu(\phi + \phi_c) - \mu(\phi_c)$, assim $g'(\phi) + h'(\phi) = \mu'(\phi + \phi_c) = \frac{1}{J(\phi + \phi_c)}$, ou seja :

$$\mu'(\phi + \phi_c) \cdot J(\phi + \phi_c) = 1. \text{ Fazendo agora, como no lema (2) :}$$

$$\mu^{(n)}(\phi + \phi_c) \cdot J(\phi + \phi_c) + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} \mu^{(n-i)}(\phi + \phi_c) \cdot J^{(i)}(\phi + \phi_c) = 0, \text{ o que implica :}$$

$$|\mu^{(n)}(\phi_c)| \leq \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} |\mu^{(n-i)}(\phi_c)| \cdot |J^{(i)}(\phi_c)|$$

E, $\mu'(\phi_c) = 1$. Utilizando as majorações para $|J^{(2k)}(\phi_c)|$ e para $|J^{(2k+1)}(\phi_c)|$, obtemos por indução, de maneira análoga ao feito no lema (2), que :

$$|\mu^{(n)}(\phi_c)| \leq b_n \alpha^{n-1}, \text{ onde } b_n \text{ é dada por :}$$

$$b_1 = 1, \text{ e } b_n = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} 2^i \cdot b_{n-i}$$

Observando a expressão de a_n em (3.29), fica claro que fazendo $\gamma = 1$, obtemos $a_1 = 4 > 1 = b_1$ e claramente, $a_n > b_n$. Assim,

$$|g^{(n)}(0) + h^{(n)}(0)| = |\mu^{(n)}(\phi_c)| < 4^n \cdot \alpha^{n-1} \cdot n!$$

Ainda, se $\alpha > 10$, como vale (3.34), temos :

$$|1 + l'(0)| \cdot |h^{(n)}(0)| < \frac{4}{\gamma \alpha} \cdot \gamma \cdot 4^n \cdot \alpha^n \cdot n! = 4^{n+1} \cdot \alpha^{n-1} \cdot n! \text{, o que finalmente implica que :}$$

$$|g^{(n)}(0) - l'(0) \cdot h^{(n)}(0)| \leq 5 \cdot 4^n \cdot \alpha^{n-1} \cdot n!$$

Vamos agora, majorar $D_n = [(h'(0) - l'(0))^n - l'(0) - 1]$, que é o denominador de $l^{(n)}(0)$, para todo $n \geq 2$.

$$D_n = \left[\left(2\gamma\alpha + \left(1 - \frac{2\gamma}{\alpha} - l'(0) \right) \right)^n - l'(0) - 1 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |D_n| \geq (2\gamma\alpha)^n, \text{ para } \alpha > \max\{10, 2, \gamma\} \quad (3.36)$$

Das majorações acima :

$$|l'''(0)| \leq \frac{5 \cdot 4^2 \cdot 2! \cdot \alpha}{(2\gamma\alpha)^2} = \frac{c(2, \gamma)}{\alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0 \quad (3.37)$$

Assim, vamos supor por indução que $|l^{(i)}(0)| \leq \frac{c(i, \gamma)}{\alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0$, para $i=2, 3, \dots, n-1$. A expressão (3.37) é a base da indução. O termo de maior grau em α de

$$(h'(0) - l'(0))^{b_1} \dots (h^{(n-1)}(0) - l^{(n-1)}(0))^{b_{n-1}},$$

com $b_1^i + 2b_2^i + \dots + (n-1)b_{n-1}^i = n$ é, das majorações para $|h^{(i)}(0)|$, igual a α^n . Então,

$$|l^{(n)}(0)| \leq \frac{|A| + |B|}{|[(h'(0) - l'(0))^n - l'(0) - 1]|}$$

com

$$|A| \leq \sum_{i=2}^{2^n} \left(|\overline{a_i}| \cdot |\tilde{l}^{(i)}(0)| \cdot (h'(0) - l'(0))^{b_1^i} \dots (h^{(n-1)}(0) - l^{(n-1)}(0))^{b_{n-1}^i} \right)$$

$$|B| = |g^{(n)}(0) - l'(0) \cdot h^{(n)}(0)|$$

$$\text{Assim, } |l^{(n)}(0)| \leq \frac{\left[\sum_{i=2}^{2^n} \left(|\overline{a_i}| \cdot \frac{c(\tilde{l}(i), \gamma)}{\alpha} \cdot K(i, n, \gamma) \cdot \alpha^n \right) + 5 \cdot 4^n \cdot \alpha^{n-1} \cdot n! \right]}{(2\gamma\alpha)^n} =$$

$$= \left[\frac{\sum_{i=2}^{2^n} \left(|\overline{a_i}| \cdot c(\tilde{l}(i), \gamma) \cdot K(i, n, \gamma) \right) + 5 \cdot 4^n \cdot n!}{(2\gamma)^n} \right] \cdot \frac{1}{\alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0$$

Ou seja,

$$l(0) = 0, \quad l'(0) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} -1 \quad \text{e} \quad l^{(n)}(0) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0, \quad \text{para } n \geq 2. \quad (3.38)$$

Sabemos que $l(\phi)$ é analítica.

Agora, vamos mostrar que o raio de convergência de

$$l(\phi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{l^{(i)}(0)}{i!} \cdot \phi^i \quad \text{é maior que uma constante independente de } \alpha. \quad (3.39)$$

Isso feito, está provado que, dado $\epsilon > 0$ arb. pequeno, $\exists \alpha_U(\gamma, \epsilon)$ suficientemente grande, tal que para $\alpha > \alpha_U(\gamma, \epsilon)$, $W^U(P_c)$ está $\epsilon - C^2$ próxima de γ_1 , definida em (3.2). Isso porque, suponha que o raio de convergência de $l(\phi)$ é maior que

$\frac{1}{a(\gamma)}$, para um certo $a(\gamma) > 0$ (para todo α arbitrariamente grande). Então para todo $n > 1$,

$$|l^{(n)}(0)| < K_\gamma \cdot a(\gamma)^n \cdot n!, \text{ onde } K_\gamma > 0 \text{ é uma constante, que não depende de } n.$$

De (3.38), existem funções $\psi_n^\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\psi_n^\gamma(\alpha) < K_\gamma$, $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \psi_n^\gamma(\alpha) = 0$ e vale :

$$|l^{(n)}(0)| < \psi_n^\gamma(\alpha) \cdot a(\gamma)^n \cdot n!$$

E, é claro que para $\alpha \in [-\frac{1}{2a(\gamma)}, \frac{1}{2a(\gamma)}]$ temos :

• proximidade na primeira derivada (para $\alpha > 10$) :

$$|l'(\phi) + 1| = |l'(\phi) - l'(0) + l'(0) + 1| \leq |l'(\phi) - l'(0)| + |l'(0) + 1| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{4}{\gamma\alpha} + \sum_{i=2}^{\infty} i \cdot \frac{\psi_i^\gamma(\alpha) \cdot a(\gamma)^i \cdot i!}{i!} \cdot \left(\frac{1}{2a(\gamma)}\right)^{i-1} = \\ &= \frac{4}{\gamma\alpha} + 2a(\gamma) \cdot \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{i \cdot \psi_i^\gamma(\alpha)}{2^i}\right) \end{aligned}$$

Vamos analisar o termo da somatória :

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{i \cdot \psi_i^\gamma(\alpha)}{2^i}\right) &= \sum_{i=2}^N \frac{\psi_i^\gamma(\alpha) \cdot i}{2^i} + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{\psi_i^\gamma(\alpha) \cdot i}{2^i} < \\ &< \sum_{i=2}^N \frac{\psi_i^\gamma(\alpha) \cdot i}{2^i} + K_\gamma \cdot \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{i}{2^i} \end{aligned}$$

Assim, dado $\epsilon > 0$. seja $N(\epsilon, \gamma)$ tal que :

$$\sum_{i=N(\epsilon, \gamma)+1}^{\infty} \frac{i}{2^i} < \frac{\epsilon}{8K_\gamma \cdot a(\gamma)} \quad (3.40)$$

Tal $N(\epsilon, \gamma)$ existe, porque $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{i}{2^i} = C < \infty$, pois

definindo $c_i = \frac{i}{2^i}$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{c_{i+1}}{c_i} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \sum_{i=2}^{\infty} c_i$ converge.

Falta agora majorar

$$\sum_{i=2}^{N(\epsilon, \gamma)} \frac{\psi_i^\gamma(\alpha) \cdot i}{2^i} < C. \quad \sum_{i=2}^{N(\epsilon, \gamma)} \psi_i^\gamma(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0$$

Assim, existe $\tilde{\alpha}(\gamma, \epsilon)$, tal que se $\alpha > \tilde{\alpha}(\gamma, \epsilon)$ temos :

$$\sum_{i=2}^{N(\epsilon, \gamma)} \frac{\psi_i^\gamma(\alpha) \cdot i}{2^i} < \frac{\epsilon}{8 \cdot a(\gamma)} \quad (3.41)$$

Então, para $\alpha > \bar{\alpha}(\gamma, \epsilon) = \max. \{ \tilde{\alpha}(\gamma, \epsilon), \frac{8}{\gamma \epsilon}, 10 \}$, temos (de (3.40) e (3.41)):

$$\begin{aligned} |l'(\phi) + 1| &\leq \frac{4}{\gamma \alpha} + 2a(\gamma) \cdot \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{i \cdot \psi_i^\gamma(\alpha)}{2^i} \right) \leq \\ &\leq \frac{4}{\gamma \alpha} + 2a(\gamma) \cdot \left[\sum_{i=2}^{N(\epsilon, \gamma)} \left(\frac{i \cdot \psi_i^\gamma(\alpha)}{2^i} \right) + K_\gamma \cdot \sum_{i=N(\epsilon, \gamma)+1}^{\infty} \frac{i}{2^i} \right] < \\ &< \frac{\epsilon}{2} + 2a(\gamma) \cdot \left[\frac{\epsilon}{8 \cdot a(\gamma)} + K_\gamma \cdot \frac{\epsilon}{8 K_\gamma \cdot a(\gamma)} \right] = \\ &= \frac{\epsilon}{2} + \left[\frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} \right] = \epsilon \end{aligned}$$

• proximidade na segunda derivada :

$$\begin{aligned} |l''(\phi)| &\leq \sum_{i=2}^{\infty} i \cdot (i-1) \cdot \frac{\psi_i^\gamma(\alpha) \cdot a(\gamma)^i \cdot i!}{i!} \cdot \left(\frac{1}{2a(\gamma)} \right)^{i-2} = \\ &= \sum_{i=2}^{\infty} 4 \cdot a(\gamma)^2 \cdot \left(\frac{\psi_i^\gamma(\alpha) \cdot i \cdot (i-1)}{2^i} \right) = 4 \cdot a(\gamma)^2 \cdot \left(\sum_{i=2}^{\infty} \frac{\psi_i^\gamma(\alpha) \cdot i \cdot (i-1)}{2^i} \right) \end{aligned}$$

Vamos agora analisar :

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\psi_i^{\gamma}(\alpha).i.(i-1)}{2^i} &= \sum_{i=2}^N \frac{\psi_i^{\gamma}(\alpha).i.(i-1)}{2^i} + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{\psi_i^{\gamma}(\alpha).i.(i-1)}{2^i} < \\ &< \sum_{i=2}^N \frac{\psi_i^{\gamma}(\alpha).i.(i-1)}{2^i} + K_{\gamma} \cdot \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{i.(i-1)}{2^i} \end{aligned}$$

$$\text{Sabemos que, } \sum_{i=2}^{\infty} \frac{i.(i-1)}{2^i} = \text{Const} < \infty,$$

$$\text{porque definindo } c_i = \frac{i.(i-1)}{2^i}, \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{c_{i+1}}{c_i} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \sum_{i=2}^{\infty} c_i \text{ converge.}$$

Assim, dado $\epsilon > 0$. $\exists N(\epsilon, \gamma)$, tal que :

$$\sum_{i=N(\epsilon, \gamma)+1}^{\infty} \frac{i.(i-1)}{2^i} < \frac{\epsilon}{8.a(\gamma)^2.K_{\gamma}} \quad (3.42)$$

E,

$$\sum_{i=2}^{N(\epsilon, \gamma)} \frac{\psi_i^{\gamma}(\alpha).i.(i-1)}{2^i} < \text{Const.} \left(\sum_{i=2}^{N(\epsilon, \gamma)} \psi_i^{\gamma}(\alpha) \right) \quad (3.43)$$

Agora, basta tomar $\bar{\alpha}(\gamma, \epsilon)$, que só depende de γ e de ϵ . tal que :

$$\text{se } \alpha > \bar{\alpha}(\gamma, \epsilon), \text{ então } \psi_i^{\gamma}(\alpha) < \frac{\epsilon}{8.\text{Const}.N(\epsilon, \gamma).a(\gamma)^2}, \text{ para } i = 2, 3, \dots, N(\epsilon, \gamma)$$

Então, se $\alpha > \bar{\alpha}(\gamma, \epsilon)$, temos (por (3.42) e (3.43)) :

$$\begin{aligned} |l'''(\phi)| &< 4.a(\gamma)^2 \cdot \left(\sum_{i=2}^{\infty} \frac{\psi_i^{\gamma}(\alpha).i.(i-1)}{2^i} \right) < \\ &< 4.a(\gamma)^2 \cdot \left[\left(\sum_{i=2}^{N(\epsilon, \gamma)} \frac{\psi_i^{\gamma}(\alpha).i.(i-1)}{2^i} \right) + K_{\gamma} \cdot \left(\sum_{i=N(\epsilon, \gamma)+1}^{\infty} \frac{i.(i-1)}{2^i} \right) \right] < \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< 4.a(\gamma)^2. \left[Const. \left(\sum_{i=2}^{N(\epsilon, \gamma)} \frac{\epsilon}{8.Const.N(\epsilon, \gamma).a(\gamma)^2} \right) + K_\gamma \cdot \frac{\epsilon}{8.a(\gamma)^2.K_\gamma} \right] < \\
&< 4.a(\gamma)^2. \left[\left(\frac{\epsilon}{8.a(\gamma)^2} \right) + \left(\frac{\epsilon}{8.a(\gamma)^2} \right) \right] = \epsilon
\end{aligned}$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, é suficiente que $\alpha_U(\gamma, \epsilon)$ seja tal que, para $\alpha > \alpha_U(\gamma, \epsilon)$:

$$\begin{cases} \alpha > 2.\gamma \\ \alpha > \bar{\alpha}(\gamma, \epsilon) \\ \alpha > \bar{\bar{\alpha}}(\gamma, \epsilon) \\ \pi - 2 \arctan(\alpha) < \frac{1}{2a(\gamma)} \end{cases}$$

Escolhemos então,

$$\alpha_U(\gamma, \epsilon) > \max \left\{ 2.\gamma, \bar{\alpha}(\gamma, \epsilon), \bar{\bar{\alpha}}(\gamma, \epsilon), \tan \left(\frac{\pi - \frac{1}{2a(\gamma)}}{2} \right) \right\}$$

Agora vamos mostrar (3.39). Para isso, $W^U(P_c)$ será escrita como uma curva, da seguinte forma,

$$\begin{cases} I = u(s) \\ \phi = v(s) \end{cases} \quad (3.44)$$

e mostraremos que os raios de convergência de $u(s)$ e de $v(s)$ são maiores que certas constantes fixas positivas, independentes de α . É imediato então, que o mesmo vale para $l(\phi)$. Isto porque, sem perda de generalidade podemos fixar $v'(0) = 1$, assim, existe um intervalo U em torno de $s = 0$, com tamanho fixo, independente de α , no qual $v(s)$ pode ser invertida. Basta que $v'(s) > 0$, para $s \in U$. Então, obtemos $s = v^{-1}(\phi)$, para $\phi \in v(U)$. Existe um outro intervalo $T \subset U$, $0 \in T$, tal que $v'(s) > \frac{1}{2}$, para $s \in T$. E o intervalo T também pode ser tomado de tamanho fixo, independente de α , pelo mesmo motivo que U pode

(raio de convergência de $v(s)$ é maior que uma constante positiva, independente de α). Assim, $v(U) \supset v(T)$ e vale :

$$\text{Leb}(v(U)) \geq \text{Leb}(v(T)) > \frac{1}{2} \cdot \text{Leb}(T)$$

Assim, finalmente temos :

$$l(\phi) = u \circ v^{-1}(\phi), \text{ para } \phi \in v(U)$$

Logo, como $l(\phi)$ é a composta de 2 funções analíticas, ambas com raios de convergência maiores que constantes independentes de α , $l(\phi)$ também o é.

A nossa aplicação $\bar{F}$ continua escrita nas coordenadas de (3.24). Seja $\lambda > 1$ um dos autovalores de $D\bar{F}(P_c)$ (o outro é λ^{-1}). Podemos supor que $u(s)$ e $v(s)$ são tais que, ao menos numa vizinhança de $P_c = (0, 0)$, temos :

$$u(\lambda s) = g(v(s)) + u(s) \quad (3.45)$$

$$v(\lambda s) = h(v(s)) - u(s) \quad (3.46)$$

Então, de (3.46), $v(\lambda^2 s) = h(v(\lambda s)) - u(\lambda s)$. Substituindo essa expressão e a própria (3.46) em (3.45), obtemos :

$$h(v(\lambda s)) - v(\lambda^2 s) = g(v(s)) + h(v(s)) - v(\lambda s) \quad (3.47)$$

Como já foi dito, podemos supor sem perda de generalidade que $v'(0) = 1$:

$$\begin{cases} v(s) = s + v_2 s^2 + \dots \\ u(s) = u_1 s + u_2 s^2 + \dots \end{cases}, \text{ porque } v(0) = u(0) = 0 \quad (3.48)$$

Pelo lema (2), $g(\phi)$ e $h(\phi)$ são funções analíticas, assim :

$$\begin{cases} g(\phi) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \cdot \phi^i \\ h(\phi) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i \cdot \phi^i \end{cases}$$

Sejam,

$$\begin{cases} \tilde{g}(\phi) = g(\phi) - g_1 \cdot \phi \\ \tilde{h}(\phi) = h(\phi) - h_1 \cdot \phi \end{cases} \quad (3.49)$$

Substituindo (3.49) em (3.47), obtemos :

$$v(\lambda s) - v(\lambda^2 s) + h_1 \cdot v(\lambda s) - g_1 \cdot v(s) - h_1 \cdot v(s) = \tilde{g}(v(s)) + \tilde{h}(v(s)) - \tilde{h}(v(\lambda s))$$

Definindo $e(\phi) = g(\phi) + h(\phi) = \mu(\phi + \phi_c) - \mu(\phi_c)$, como $(g_1 + h_1) = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow v(\lambda^2 s) - (1 + h_1) \cdot v(\lambda s) + v(s) = - [\tilde{e}(v(s)) - \tilde{h}(v(\lambda s))] \quad (3.50)$$

Agora, vamos lembrar as majorações de $\tilde{e}^{(n)}(0)$ e $\tilde{h}^{(n)}(0)$ (para $n > 1$):

$$\begin{aligned} |\tilde{e}^{(n)}(0)| &= |\mu^{(n)}(\phi_c)| \leq 4^n \cdot \alpha^{n-1} \cdot n! < \gamma \cdot 4^n \cdot \alpha^n \cdot n! \\ |\tilde{h}^{(n)}(0)| &\leq \gamma \cdot 4^n \cdot \alpha^n \cdot n! \end{aligned}$$

Assim, temos que $|v| \ll |V|$, se V satisfaz : ($V(0) = 0$ e $V_1 = 1$)

$$V(\lambda^2 s) - (1 + h_1) \cdot V(\lambda s) + V(s) = \gamma \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(\frac{V(s)}{\frac{1}{4\alpha}} \right)^n + \left(\frac{V(\lambda s)}{\frac{1}{4\alpha}} \right)^n \right]$$

Agora, basta observar que, como $V(0) = 0$ e $V_1 = V'(0) = 1$, existe uma vizinhança $U_\alpha(0)$ tal que para $s \in U_\alpha(0)$,

$$\left| \frac{V(s)}{\frac{1}{4\alpha}} \right| < \frac{1}{2} \text{ e } \left| \frac{V(\lambda s)}{\frac{1}{4\alpha}} \right| < \frac{1}{2}.$$

Assim, se $s \in U_\alpha(0)$, temos (seja $r = \frac{1}{4\alpha}$) :

$$V(\lambda^2 s) - (1 + h_1).V(\lambda s) + V(s) = \gamma \cdot \left[\frac{V(s)^2}{r(r - V(s))} + \frac{V(\lambda s)^2}{r(r - V(\lambda s))} \right]$$

Agora, definindo :

$$a(s) = \frac{V(s)^2}{r(r - V(s))} \text{ e } b(s) = \frac{V(\lambda s)^2}{r(r - V(\lambda s))} \Rightarrow \lambda^n . a^{(n)}(0) = b^{(n)}(0)$$

Desta forma, definindo $\tilde{V}$, tal que $\tilde{V}(0) = 0$ e $\tilde{V}'_1 = 1$, temos que $|\tilde{V}| \gg |V|$, se :

$$\tilde{V}(\lambda^2 s) - (1 + h_1).\tilde{V}(\lambda s) + \tilde{V}(s) = 2.\gamma \cdot \frac{\tilde{V}(\lambda s)^2}{r(r - \tilde{V}(\lambda s))}$$

Então,

$$r^2 \left[\tilde{V}(\lambda^2 s) - (1 + h_1).\tilde{V}(\lambda s) + \tilde{V}(s) \right] =$$

$$= 2\gamma \tilde{V}(\lambda s)^2 + r\tilde{V}(\lambda^2 s).\tilde{V}(\lambda s) - r.(1 + h_1).\tilde{V}(\lambda s)^2 + r\tilde{V}(s).\tilde{V}(\lambda s)$$

Novamente, definindo $\tilde{\tilde{V}}$, tal que $\tilde{\tilde{V}}(0) = 0$ e $\tilde{\tilde{V}}'_1 = 1$, temos $|\tilde{\tilde{V}}| \gg |\tilde{V}|$, se :

$$r^2 \left[\tilde{\tilde{V}}(\lambda^2 s) - (1 + h_1).\tilde{\tilde{V}}(\lambda s) + \tilde{\tilde{V}}(s) \right] =$$

$$= 2\gamma \tilde{\tilde{V}}(\lambda s)^2 + r\tilde{\tilde{V}}(\lambda^2 s).\tilde{\tilde{V}}(\lambda s) + r.(1 + h_1).\tilde{\tilde{V}}(\lambda s)^2 + r\tilde{\tilde{V}}(s).\tilde{\tilde{V}}(\lambda s)$$

E claramente vale :

$$\left(\tilde{\tilde{V}}(\lambda s) \right)^2 = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \tilde{\tilde{V}}_j . \tilde{\tilde{V}}_{n-j} \right) . \lambda^n . s^n$$

$$\tilde{V}(\lambda^2 s) \cdot \tilde{V}(\lambda s) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \tilde{V}_j \cdot \tilde{V}_{n-j} \cdot \lambda^j \right) \cdot \lambda^n \cdot s^n$$

$$\tilde{V}(s) \cdot \tilde{V}(\lambda s) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \tilde{V}_j \cdot \tilde{V}_{n-j} \cdot \lambda^j \right) \cdot s^n$$

Então, substituindo as expressões acima e expandindo em s o lado esquerdo da igualdade envolvendo $\tilde{V}(s)$, temos :

$$\begin{aligned} & r^2 \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{V}_n \cdot (\lambda^{2n} - (1 + h_1) \cdot \lambda^n + 1) s^n \right] = \\ & = \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ (2\gamma + r | 1 + h_1 |) \left(\sum_{j=1}^{n-1} \tilde{V}_j \cdot \tilde{V}_{n-j} \right) \lambda^n + r \left(\sum_{j=1}^{n-1} \tilde{V}_j \cdot \tilde{V}_{n-j} \cdot \lambda^j \right) (1 + \lambda^n) \right\} s^n \end{aligned}$$

O que implica que :

$$\left| \tilde{V}_n \right| \leq \frac{(2\gamma + r | 1 + h_1 | + r) \lambda^n + r \lambda^{2n-1}}{r^2 \cdot (\lambda^{2n} - (1 + h_1) \cdot \lambda^n + 1)} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n-1} \tilde{V}_j \cdot \tilde{V}_{n-j} \right)$$

Seja agora, $\tilde{\tilde{V}}$ tal que, $\tilde{\tilde{V}}(0) = 0$ e $\tilde{\tilde{V}}_1 = 1$. Então, $|\tilde{\tilde{V}}| \gg |\tilde{V}|$, se :

$$\tilde{\tilde{V}}_n = \frac{2\gamma \lambda^n + r \lambda^{2n-1} + r \cdot | 1 + h_1 | \cdot \lambda^n + r \lambda^n}{r^2 \cdot (\lambda^{2n} - (1 + h_1) \cdot \lambda^n + 1)} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n-1} \tilde{\tilde{V}}_j \cdot \tilde{\tilde{V}}_{n-j} \right)$$

Vamos definir :

$$C_n(\alpha, \gamma) = \frac{2\gamma \lambda^n + r \lambda^{2n-1} + r \cdot | 1 + h_1 | \cdot \lambda^n + r \lambda^n}{r^2 \cdot (\lambda^{2n} - (1 + h_1) \cdot \lambda^n + 1)}, \text{ para } n \geq 2.$$

Para $\alpha \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow 2 \cdot \gamma \cdot \alpha$ ($\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{2 \cdot \gamma \cdot \alpha} = 1$) e $| 1 + h_1 | \rightarrow 2\gamma\alpha$. Assim, como $r = \frac{1}{4\alpha}$, temos :

$$C_n(\alpha, \gamma) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} \frac{2\gamma(2\gamma\alpha)^n + \frac{\gamma}{2}(2\gamma\alpha)^{2n-2} + \frac{\gamma}{2} \cdot (2\gamma\alpha)^n + \frac{\gamma}{2}(2\gamma\alpha)^{n-1}}{\left(\frac{\gamma^2}{4}(2\gamma\alpha)^{2n-2} - \frac{\gamma^2}{4}(2\gamma\alpha)^{n-1} + 1 \right)} \quad (3.51)$$

$$\text{para } n=2, C_n(\alpha, \gamma) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} \frac{2\gamma + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2}}{\frac{\gamma^2}{4}} = \frac{12}{\gamma}$$

$$\text{para } n > 2, C_n(\alpha, \gamma) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\frac{\gamma}{2}}{\frac{\gamma^2}{4}} = \frac{2}{\gamma}$$

Então, das expressões acima, $\exists \bar{\alpha}(\gamma)$ tal que, para $\alpha > \bar{\alpha}(\gamma)$, temos :

$$C_n(\alpha, \gamma) < K_\gamma = \left(\frac{12}{\gamma} + 1 \right), \text{ para todo } n \geq 2.$$

Assim, definindo $\bar{V}$, tal que $\bar{V}(0) = 1$ e $\bar{V}_1 = 1$, temos $|\bar{V}| \gg |\tilde{\tilde{V}}|$, se :

$$\bar{V}_n = K_\gamma \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \bar{V}_j \cdot \bar{V}_{n-j}$$

Por outro lado, é claro que :

$$\begin{aligned} \bar{V}_n &= W_n \cdot (K_\gamma)^{n-1}, \text{ onde :} \\ W_n &= \sum_{i=1}^{n-1} W_i \cdot W_{n-i} \text{ e } W_0 = 0 \text{ e } W_1 = 1 \end{aligned}$$

Agora é só observar que W_n é a conhecida sequência de Catalão (ver [23]). Portanto,

$$W_n < 4^n$$

Assim, $\bar{V}_n < 4^n \cdot (K_\gamma)^{n-1} < (4 \cdot K_\gamma)^n$, pois $K_\gamma > 1$ e $v(s)$ (ver (3.48)) satisfaz :

$$|v_n| \leq |\bar{V}_n| < (4 \cdot K_\gamma)^n, \text{ assim :}$$

$$|v^{(n)}(0)| < (4 \cdot K_\gamma)^n \cdot n! \quad (3.52)$$

O que implica que, $v(s)$ tem raio de convergência maior que $(4 \cdot K_\gamma)^{-1}$, para todo $\alpha > \bar{\alpha}(\gamma)$.

Vamos agora mostrar que $u(s)$ também tem raio de convergência que não tende a zero com $\alpha \rightarrow \infty$.

De (3.45) e (3.46), temos que :

$$u(s) + v(s) = e(v(\frac{s}{\lambda})) \Rightarrow u(s) = e(v(\frac{s}{\lambda})) - v(s) \quad (3.53)$$

E, já sabemos que :

$$\begin{aligned} v(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cdot s^n, \text{ com } |v_n| < (4.K_\gamma)^n \\ e(\phi) &= \sum_{n=1}^{\infty} e_n \cdot \phi^n, \text{ com } |e_n| < (4.\alpha)^n \\ \exists \alpha_{aut}(\gamma), \text{ tal que, se } \alpha > \alpha_{aut}(\gamma), \text{ então, } \lambda > \gamma.\alpha \end{aligned}$$

Assim, o raio de convergência de $v(\frac{s}{\lambda})$ satisfaz, para $\alpha > \{\alpha_{aut}(\gamma), \bar{\alpha}(\gamma)\}$:

$$R_{conv} \left[v(\frac{s}{\lambda}) \right] > \frac{\gamma.\alpha}{4.K_\gamma}$$

Falta ainda analisar :

$$R_{conv} \left[e(v(\frac{s}{\lambda})) \right]$$

Para isso, primeiramente vamos definir :

$$f_1(s) = e(\frac{s}{\alpha}) \text{ e } f_2(s) = \alpha.v(\frac{s}{\lambda}) \Rightarrow f_1(0) = f_2(0) = 0$$

Então :

$$e(v(\frac{s}{\lambda})) = f_1 \circ f_2(s) \quad (3.54)$$

Agora, é só observar que para $\alpha > \{\alpha_{aut}(\gamma), \bar{\alpha}(\gamma)\}$, temos ($\forall n > 0$) :

$$|f_1^{(n)}(0)| = \frac{1}{\alpha^n} \cdot |e^{(n)}(0)| < 4^n . n!$$

$$\left| f_2^{(n)}(0) \right| = \frac{\alpha}{\lambda^n} \cdot \left| v^{(n)}(0) \right| < \frac{1}{\gamma^n \cdot \alpha^{n-1}} \cdot (4.K_\gamma)^n \cdot n! < (4.K_\gamma)^n \cdot n!$$

Desta forma, de (3.54), o $R_{conv} \left[e(v(\frac{s}{\lambda})) \right]$ é maior que uma certa constante fixa positiva, independente de α , para todo $\alpha > \{\alpha_{aut}(\gamma), \bar{\alpha}(\gamma)\}$. O que, pela expressão (3.53), implica o mesmo para o raio de convergência de $u(s)$.

Portanto, se $\alpha > \max\{\bar{\alpha}(\gamma), \alpha_{aut}(\gamma)\}$, a curva $(v(s), u(s))$, cujo traço é $W^U(P_c)$, é analítica, com raio de convergência maior que uma constante, que independe de α . Assim, pelo que foi dito anteriormente, a função $l(\phi)$ é analítica e tem raio de convergência maior que $\frac{1}{a(\gamma)}$, para uma certa função $a(\gamma) > 0$.

$$W^S(P_c) :$$

Essa parte é bastante semelhante a anterior (para $W^U(P_c)$), assim muitos resultados que forem análogos não serão feitos em detalhe.

Aqui também, se $\alpha > 10$, ao menos numa vizinhança de P_c , podemos escrever $W^S(P_c)$ como gráfico de uma função $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $m = m(I)$. Além disso, $m(I)$ também é função analítica (ver [24]). Da invariância de $W^S(P_c) :$

$$m(g(m(I)) + I) = h(m(I)) - I \quad (3.55)$$

Como antes, derivando (3.55) e calculando em $I = 0$, obtemos :

$$g'(0) \cdot m'(0)^2 + g'(0) \cdot m'(0) + 1 = 0$$

E, definindo $a = \gamma(\alpha - \alpha^{-1})$, temos :

$$m'(0) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{a}} - 1 \right)$$

Se $\gamma > 1$ e $\alpha > 10$,

$$\frac{1}{3\gamma\alpha} < m'(0) < \frac{2}{\gamma\alpha} \text{ e } \lim_{\alpha \rightarrow \infty} m'(0).2\gamma\alpha = 1 \quad (3.56)$$

Derivando (3.55) 2 vezes, e calculando em $I = 0$, obtemos :

$$m''(0) = \frac{-m'(0)^3.g''(0) + h''(0).m'(0)^2}{(g'(0).m'(0) + 1)^2 + m'(0).g'(0) - h'(0)}$$

Das majorações de $g''(0)$, $h''(0)$ e $m'(0)$ é claro que a maior potência em α no numerador da expressão acima é $\alpha^0 = 1$, pois $|m'(0)^3.g''(0)| < \left(\frac{2}{\gamma\alpha}\right)^3 . \gamma.4^2.2!.\alpha^2 = \frac{2^8}{\gamma^2\alpha}$ e $|h''(0).m'(0)^2| < \left(\frac{2}{\gamma\alpha}\right)^2 . \gamma.4^2.2!.\alpha^2 = \frac{2^7}{\gamma}$.

Para todo $n \geq 2$, derivando (3.55) n vezes, obtemos :

$$m^{(n)}(0) = \frac{(**)}{(g'(0).m'(0) + 1)^n + m'(0).g'(0) - h'(0)}$$

Assim, o denominador de $m^{(n)}(0)$ é :

$$D_n = (g'(0).m'(0) + 1)^n + m'(0).g'(0) - h'(0), \text{ com}$$

$$\begin{aligned} g'(0) &= -2\gamma(\alpha - \alpha^{-1}) \Rightarrow g'(0).m'(0) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} -1 \text{ e} \\ h'(0) &= 1 - g'(0). \end{aligned}$$

Portanto, se $\alpha > \max\{10, 2\gamma\}$ e $\gamma > 1$, temos :

$$|D_n| \geq 2\gamma\alpha$$

Logo,

$$|m''(0)| < \frac{\frac{2^8}{\gamma^2\alpha} + \frac{2^7}{\gamma}}{2\gamma\alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0$$

Agora, vamos supor por indução que $m^{(i)}(0).\alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} c(i, \gamma)$, para $i=2,3,\dots,n-1$ (a base de indução é a expressão acima). Por um argumento análogo ao feito para $W^U(P_c)$, obtemos que o termo de maior grau em α de $(**)$ é α^0 . Assim como $|D_n| \geq 2\gamma\alpha$,

$$m^{(n)}(0) \cdot \alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} c(n, \gamma) \Rightarrow m^{(n)}(0) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0$$

Dessa forma, ficamos com :

$$m(0) = 0 \text{ e } m^{(n)}(0) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0, \text{ para } n \geq 1 \quad (3.57)$$

Sabemos que $m(I)$ é analítica.

Ainda falta mostrar que o raio de convergência de

$$m(I) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{m^{(i)}(0)}{i!} \cdot I^i \text{ é, maior que uma constante, independente de } \alpha. \quad (3.58)$$

Isso feito, está provado que, dado $\epsilon > 0$ arb. pequeno, $\exists \alpha_S(\gamma, \epsilon)$ suficientemente grande, tal que para $\alpha > \alpha_S(\gamma, \epsilon)$, $W^S(P_c)$ está $\epsilon - C^2$ próxima de γ_2 , definida em (3.2) (Igual ao feito para $W^U(P_c)$).

Analogamente ao que foi feito para $W^U(P_c)$, é suficiente provar que, se escrevermos $W^S(P_c)$ como uma curva da seguinte forma,

$$\begin{cases} I = u(s) \\ \phi = v(s) \end{cases} \quad (3.59)$$

os raios de convergência de $u(s)$ e de $v(s)$ são maiores que certas constantes fixas positivas, independentes de α . É imediato então, que o mesmo vale para $m(I)$. Cabe apenas observar, que agora é $u(s)$ que pode ser invertida numa vizinhança de $s = 0$ (porque o autovetor correspondente a direção contrativa em P_c tende a ficar vertical, para $\alpha \rightarrow \infty$). Assim, obtemos $\phi = m(I) = v \circ u^{-1}(I)$.

No entanto, nesse caso apresentaremos uma solução alternativa, bem mais simples e independente do que já foi feito, que com as devidas modificações se aplica também à $W^U(P_c)$. Para facilitar a notação, voltaremos as coordenadas (ϕ, I) do toro (anteriores à translação), nas quais $\bar{F}$ se escreve :

$$\overline{F} : \begin{cases} I' = \overline{F}_I(I, \phi) = \gamma \log(J(\phi)) + I \pmod{\pi} \\ \phi' = \overline{F}_\phi(I, \phi) = \mu(\phi) - I' \pmod{\pi} \end{cases},$$

onde

$$\begin{aligned} J(\phi) &= \alpha^2 \cos^2(\phi) + \alpha^{-2} \sin^2(\phi) \\ \mu(\phi) &= \arctan\left(\frac{\tan(\phi)}{\alpha^2}\right), \text{ com } \mu(0) = 0 \end{aligned}$$

Inicialmente, vamos apresentar algumas definições :

- Seja V o seguinte intervalo : $V = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \arctan\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right]$
- $m_{(0)} : V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por : $m_{(0)}(I) = \phi_c = \arctan(\alpha)$,
- onde $P_c = (\phi_c, I_c) = (\arctan(\alpha), \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \arctan\left(\frac{1}{\alpha}\right))$.

Das majorações anteriormente feitas para os autovetores em P_c , é claro que existe $\alpha_{tr}(\gamma)$, tal que se $\alpha > \alpha_{tr}(\gamma)$. o gráfico $(m_{(0)}) = \{(m_{(0)}(I), I) : I \in V\}$ é uma curva transversal à $W^U(P_c)$. Assim o λ -lema garante que :

$$\begin{aligned} \overline{F}^{-n}(m_{(0)}(I), I) \text{ fica } C^2 \text{ próxima de} \\ W^S(P_c) \text{ em compactos, para } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Agora, vamos observar que $\overline{F}^{-1}(m_{(0)}(I), I)$ coincide, como já foi visto no teorema (20), com o gráfico da seguinte função :

$$\begin{aligned} f(\phi) &= \mu(\phi) - \arctan(\alpha) - \gamma \log(J(\phi)), \\ \text{para } \phi &\in [\pi - \arctan(\alpha), \pi + \arctan(\alpha)]. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Ou seja, $\overline{F}^{-1}(m_{(0)}(I), I) = \{(\phi \pmod{\pi}, f(\phi) \pmod{\pi}) : \phi \in [\pi - \arctan(\alpha), \pi + \arctan(\alpha)]\}$.

E ainda :

$$f(\pi + \arctan(\alpha)) = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \arctan\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Por hipótese $\alpha > e^{\frac{\pi}{2\gamma}}$, assim seja

$$\phi_\pi = \pi + \arccos\left(\sqrt{\frac{e^{\frac{\pi}{\gamma}} - \alpha^{-2}}{\alpha^2 - \alpha^{-2}}}\right) < \pi + \arctan(\alpha). \quad (3.62)$$

Então é claro que $f(\phi_\pi) < \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \arctan\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \pi < \frac{\pi}{2}$, assim

$$\exists \phi_{\frac{\pi}{2}}^{(0)} \in (\phi_\pi, \pi + \arctan(\alpha)), \text{ tal que } f(\phi_{\frac{\pi}{2}}^{(0)}) = \frac{\pi}{2}.$$

Por outro lado, para $\phi \in (\phi_\pi, \pi + \arctan(\alpha))$, $\exists \alpha_J(\gamma)$, tal que para $\alpha > \alpha_J(\gamma)$, temos :

$$\begin{aligned} 1 &\leq J(\phi) \leq e^{\frac{\pi}{\gamma}} \\ -c_d^1 \cdot \alpha &\leq J'(\phi) \leq -c_e^1 \cdot \alpha, \\ c_e^2 \cdot \alpha^2 &\leq |J''(\phi)| \leq c_d^2 \cdot \alpha^2 \end{aligned} \quad (3.63)$$

onde c_e^1, c_d^1, c_e^2 e c_d^2 são constantes reais positivas.

Agora vamos calcular $f'(\phi)$ e $f''(\phi)$:

$$\begin{aligned} f'(\phi) &= \frac{1}{J(\phi)} - \gamma \frac{J'(\phi)}{J(\phi)} \\ f''(\phi) &= \frac{-J'(\phi)}{J(\phi)^2} + \gamma \left(\frac{J'(\phi)}{J(\phi)} \right)^2 - \gamma \frac{J''(\phi)}{J(\phi)} \end{aligned}$$

Assim, para $\phi \in (\phi_\pi, \pi + \arctan(\alpha))$:

$$f'(\phi) \geq \frac{1 + \gamma \cdot c_e^1 \cdot \alpha}{e^{\frac{\pi}{\gamma}}} > 0$$

$$|f''(\phi)| \leq c_d^1 \cdot \alpha + \gamma \cdot (c_d^1 \cdot \alpha)^2 + \gamma \cdot c_d^2 \cdot \alpha^2$$

Desta forma, podemos definir a seguinte função :

$$m_{(1)} : V \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dada por : } m_{(1)}(I) = f^{-1}(I).$$

Calculando as derivadas de $m_{(1)}(I)$ obtemos :

$$m'_{(1)}(I) = (f^{-1}(I))' = \frac{1}{f'(\phi)}$$

$$m''_{(1)}(I) = (f^{-1}(I))'' = \frac{-f''(\phi)}{(f'(\phi))^3}$$

Assim,

$$0 \leq m'_{(1)}(I) \leq \frac{e^{\frac{\pi}{\gamma}}}{\gamma \cdot c_e^1 \cdot \alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0,$$

$$|m''_{(1)}(I)| \leq e^{\frac{3\pi}{\gamma}} \cdot \left[\frac{c_d^1 \cdot \alpha + \gamma \cdot (c_d^1 \cdot \alpha)^2 + \gamma \cdot c_d^2 \cdot \alpha^2}{(\gamma \cdot c_e^1 \cdot \alpha)^3} \right] \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0.$$

Agora, vamos provar que dado $\epsilon > 0$, $\exists \alpha_S(\gamma, \epsilon)$, tal que para $\alpha > \alpha_S(\gamma, \epsilon)$, podemos obter recursivamente uma sequência de funções,

$$m_{(n)} : V \rightarrow \mathbb{R}, \text{ para todo } n \geq 0,$$

$$\text{com } 0 \leq m'_{(n)}(I) \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ e } |m''_{(n)}(I)| \leq \frac{\epsilon}{2}, \text{ da seguinte forma :}$$

A função inicial, $m_{(0)} : V \rightarrow \mathbb{R}$ é aquela definida acima, $m_{(0)}(I) = \phi_c$. Então, $m'_{(0)}(I) = m''_{(0)}(I) = 0$, para todo $I \in V$.

Dada $m_{(n)} : V \rightarrow \mathbb{R}$, inicialmente calculamos :

$$\overline{F}^{-1}(m_{(n)}(I), I), \text{ para } I \in V.$$

Definindo $q_{(n)}(I) = I + m_{(n)}(I)$, temos que $q_{(n)}(I)$ é claramente inversível, pois $q'_{(n)}(I) \geq 1$. Agora, da mesma forma que para $m_{(0)}(I)$, temos que $\overline{F}^{-1}(m_{(n)}(I), I)$ coincide com o gráfico da seguinte função :

$f_{(n)}(\phi) = q_{(n)}^{-1} \circ \mu(\phi) - \gamma \log(J(\phi))$, para $\phi \in [\mu^{-1} \circ q_{(n)}(\frac{\pi}{2}), \pi + \arctan(\alpha)]$.
 Além disso, como $m'_{(n)}(I) \geq 0$, é claro que $\mu^{-1} \circ q_{(n)}(\frac{\pi}{2}) \leq \pi - \arctan(\alpha)$.

Assim, $\overline{F}^{-1}(m_{(n)}(I), I) \supset \{(\phi \pmod{\pi}, f_{(n)}(\phi) \pmod{\pi}) : \phi \in [\pi - \arctan(\alpha), \pi + \arctan(\alpha)]\}$.

Agora novamente :

$$f_{(n)}(\pi + \arctan(\alpha)) = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \arctan\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

E. como para $m_{(0)}(I)$, é claro que :

$$f_{(n)}(\phi_\pi) < q_{(n)}^{-1} \circ \mu(\pi + \arctan(\alpha)) - \pi < \frac{\pi}{2}, \text{ onde } \phi_\pi \text{ é como em (3.62).}$$

Assim,

$$\exists \phi_{\frac{\pi}{2}}^{(n)} \in (\phi_\pi, \pi + \arctan(\alpha)), \text{ tal que } f_{(n)}(\phi_{\frac{\pi}{2}}^{(n)}) = \frac{\pi}{2}.$$

Agora vamos calcular $f'_{(n)}(\phi)$ e $f''_{(n)}(\phi)$:

$$f'_{(n)}(\phi) = (q_{(n)}^{-1})'(\mu(\phi)) \cdot \frac{1}{J(\phi)} - \gamma \frac{J'(\phi)}{J(\phi)}$$

$$f''_{(n)}(\phi) = (q_{(n)}^{-1})''(\mu(\phi)) \cdot \frac{1}{J(\phi)^2} - (q_{(n)}^{-1})'(\mu(\phi)) \cdot \frac{J'(\phi)}{J(\phi)^2} + \gamma \left(\frac{J'(\phi)}{J(\phi)} \right)^2 - \gamma \frac{J''(\phi)}{J(\phi)}$$

Onde, é claro que,

$$\begin{aligned} (q_{(n)}^{-1})'(\phi) &= \frac{1}{q'_{(n)}(I)} \\ &\text{e} \\ (q_{(n)}^{-1})''(\phi) &= -\frac{q''_{(n)}(I)}{(q'_{(n)}(I))^3}. \end{aligned}$$

Assim, de (3.63), para $\phi \in (\phi_{\frac{\pi}{2}}^{(n)}, \pi + \arctan(\alpha))$, temos :

$$f'_{(n)}(\phi) \geq \frac{1}{1 + \frac{\epsilon}{2}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\pi}{\gamma}}} + \frac{\gamma \cdot c_e^1 \cdot \alpha}{e^{\frac{\pi}{\gamma}}} > 0$$

$$|f''_{(n)}(\phi)| \leq \frac{\epsilon}{2} + c_d^1 \cdot \alpha + \gamma \cdot (c_d^1 \cdot \alpha)^2 + \gamma \cdot c_d^2 \cdot \alpha^2$$

Desta forma, podemos definir a seguinte função :

$$m_{(n+1)} : V \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dada por : } m_{(n+1)}(I) = f_{(n)}^{-1}(I).$$

Calculando as derivadas de $m_{(n+1)}(I)$ obtemos :

$$m'_{(n+1)}(I) = (f_{(n)}^{-1}(I))' = \frac{1}{f'_{(n)}(\phi)}$$

$$m''_{(n+1)}(I) = (f_{(n)}^{-1}(I))'' = \frac{-f''_{(n)}(\phi)}{(f'_{(n)}(\phi))^3}$$

Assim, para garantir que $0 \leq m'_{(n+1)}(I) \leq \frac{\epsilon}{2}$ e $|m''_{(n+1)}(I)| \leq \frac{\epsilon}{2}$ basta escolher $\alpha_S(\gamma, \epsilon)$, com $\alpha_S(\gamma, \epsilon) > \max. \{ \alpha_{tr}(\gamma), e^{\frac{\pi}{2\gamma}}, \alpha_J(\gamma) \}$, tal que para $\alpha > \alpha_S(\gamma, \epsilon)$ tenhamos :

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{1 + \frac{\epsilon}{2}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\pi}{\gamma}}} + \frac{\gamma \cdot c_e^1 \cdot \alpha}{e^{\frac{\pi}{\gamma}}} \right)} \leq \frac{\epsilon}{2} \quad (3.64)$$

$$\frac{\frac{\epsilon}{2} + c_d^1 \cdot \alpha + \gamma \cdot (c_d^1 \cdot \alpha)^2 + \gamma \cdot c_d^2 \cdot \alpha^2}{\left(\frac{1}{1 + \frac{\epsilon}{2}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\pi}{\gamma}}} + \frac{\gamma \cdot c_e^1 \cdot \alpha}{e^{\frac{\pi}{\gamma}}} \right)^3} \leq \frac{\epsilon}{2} \quad (3.65)$$

Desta forma, para o $\epsilon > 0$ dado, se $\alpha > \alpha_S(\gamma, \epsilon)$,

$$0 \leq m'_{(n)}(I) \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ e } |m''_{(n)}(I)| \leq \frac{\epsilon}{2}, \text{ para todo } n \geq 0.$$

Por outro lado, de (3.60) sabemos que $\{(m_{(n)}(I), I) : I \in V\}$ fica $\frac{\epsilon}{2} - C^2$ próximo de $W^S(P_c)$, para n suficientemente grande. Desta forma, para $\alpha > \alpha_S(\gamma, \epsilon)$, $W^S(P_c)$ fica $\epsilon - C^2$ próxima de $\{(m_{(0)}(I), I) : I \in V\} = \gamma_2$, curva definida em (3.2).

Agora, finalmente basta tomar (no caso do ponto conservativo, P_c) :

$$\alpha_0^c(\gamma, \epsilon) = \max. \{ \alpha_S(\gamma, \epsilon), \alpha_U(\gamma, \epsilon), \bar{\alpha}(\gamma), \alpha_{aut}(\gamma) \}$$

Para P_d :

A transformação $\bar{F}$, como já foi dito, possui o seguinte ponto fixo dissipativo, para $\alpha > e^{\frac{\pi}{2\gamma}}$:

$$P_d = (\phi_d, I_d) = \left(\pi - \arccos \left(\sqrt{\frac{e^{\frac{\pi}{\gamma}} - \alpha^{-2}}{\alpha^2 - \alpha^{-2}}} \right), (\mu(\phi_d) - \phi_d) \bmod \pi \right)$$

É fácil ver que P_d é ponto de sela, se $\alpha > e^{\frac{\pi}{\gamma}}$. Assim, nessa parte será sempre suposto que $\alpha > e^{\frac{\pi}{\gamma}}$.

Através de uma simples translação de coordenadas, podemos escrever $\bar{F}$ da seguinte forma :

$$\bar{F} : \begin{cases} I' = g(\phi) + I \pmod{\pi} \\ \phi' = h(\phi) - I \pmod{\pi} \end{cases} \quad (3.66)$$

onde,

$$\begin{aligned} g(\phi) &= \gamma \log(J(\phi + \phi_d)) - \pi \\ h(\phi) &= \mu(\phi + \phi_d) - \gamma \log(J(\phi + \phi_d)) + \pi - \mu(\phi_d) \end{aligned} \quad (3.67)$$

Assim, como $g(0) = h(0) = 0$, temos que, essa translação leva P_d em $(0, 0)$.

A primeira etapa, será majorar $g^{(n)}(0)$ e $h^{(n)}(0)$:

Lema 3 : Valem as seguintes desigualdades :

$$\begin{aligned} |g^{(n)}(0)| &\leq \gamma \cdot 4^n \cdot \alpha^n \cdot n! \\ |h^{(n)}(0)| &\leq \gamma \cdot 4^n \cdot \alpha^n \cdot n! \end{aligned}$$

Ou seja, os raios de convergência dessas funções caem com $\frac{1}{\alpha}$.

Prova :

A primeira etapa dessa prova é majorar $J^{(N)}(\phi_d)$. Para isso, de (3.26), temos :

$$\begin{aligned} J^{(2n)}(\phi) &= (-1)^n \cdot 2^{2n-1} \cdot \cos(2\phi) \cdot (\alpha^2 - \alpha^{-2}); \\ J^{(2n+1)}(\phi) &= (-1)^{n+1} \cdot 2^{2n} \cdot \sin(2\phi) \cdot (\alpha^2 - \alpha^{-2}); \end{aligned}$$

E, da expressão de ϕ_d :

$$\sin(2\phi_d) = -2 \cdot \frac{\sqrt{\left(e^{\frac{\pi}{\gamma}} - \alpha^{-2}\right) \cdot \left(\alpha^2 - e^{\frac{\pi}{\gamma}}\right)}}{\alpha^2 - \alpha^{-2}}$$

$$\cos(2\phi_d) = \frac{2 \cdot e^{\frac{\pi}{\gamma}} - (\alpha^2 + \alpha^{-2})}{\alpha^2 - \alpha^{-2}}$$

Assim, uma majoração trivial é :

$$|J^{(2N)}(\phi_d)| \leq 2^{2N} \cdot \alpha^2$$

$$|J^{(2N+1)}(\phi_d)| \leq 2^{2N+1} \cdot e^{\frac{\pi}{2\gamma}} \cdot \alpha$$

Derivando a expressão de $g(\phi)$, (3.67), obtemos :

$$g'(\phi)J(\phi + \phi_d) - \gamma J'(\phi + \phi_d) = 0 \quad (3.68)$$

Assim, $|g'(0)| < 2 \cdot \gamma \cdot \alpha \cdot e^{\frac{\pi}{2\gamma}}$. Derivando $(n-1)$ vezes a expressão (3.68), temos :

$$g^{(n)}(\phi).J(\phi + \phi_d) + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} g^{(n-i)}(\phi).J^{(i)}(\phi + \phi_d) - \gamma J^{(n)}(\phi + \phi_d) = 0 \quad (3.69)$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} |g^{(n)}(0)| &\leq \frac{1}{e^{\frac{\pi}{\gamma}}} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} |g^{(n-i)}(0)| \cdot |J^{(i)}(\phi_d)| + \gamma |J^{(n)}(\phi_d)| \right] < \\ &< \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} |g^{(n-i)}(0)| \cdot \left(|J^{(i)}(\phi_d)| \cdot e^{-\frac{\pi}{\gamma}} \right) + \gamma \left(|J^{(n)}(\phi_d)| \cdot e^{-\frac{\pi}{\gamma}} \right) \end{aligned}$$

Da mesma forma que para P_c , é fácil ver por indução, que a maior potência em α que $|g^{(n)}(0)|$ pode ter, tem grau n . A base de indução é : $|g'(0)| < 2 \cdot \gamma \cdot \alpha \cdot e^{\frac{\pi}{2\gamma}} < 4 \cdot \gamma \cdot \alpha$

Assim, definindo a sequência

$$\begin{aligned} a_1 &= 4\gamma \\ a_n &= \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} 2^i \cdot a_{n-i} + \gamma 2^n \end{aligned} \quad (3.70)$$

já utilizada anteriormente no estudo de P_c , temos que :

$$|g^{(n)}(0)| \leq a_n \cdot \alpha^n < \gamma \cdot 4^n \cdot \alpha^n \cdot n!$$

Para $h(\phi)$ temos :

$$h'(\phi) = \frac{1}{J(\phi + \phi_d)} - \gamma \frac{J'(\phi + \phi_d)}{J(\phi + \phi_d)}, \text{ o que implica que :}$$

$$h'(\phi).J(\phi + \phi_d) + \gamma J'(\phi + \phi_d) = 1 \quad (3.71)$$

Novamente, derivando $(n-1)$ vezes a expressão (3.71), obtemos :

$$h^{(n)}(\phi).J(\phi+\phi_d)+\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}h^{(n-i)}(\phi).J^{(i)}(\phi+\phi_d)+\gamma J^{(n)}(\phi+\phi_d)=0 \quad (3.72)$$

E, agora $h'(0) = e^{-\frac{\pi}{\gamma}} (1 - \gamma J'(\phi_d)) \Rightarrow |h'(0)| \leq e^{-\frac{\pi}{\gamma}} \left(1 + 2\gamma.e^{\frac{\pi}{2\gamma}}.\alpha\right) \leq 4\gamma.e^{-\frac{\pi}{2\gamma}}.\alpha < 4\gamma.\alpha$, para $\gamma > 1$ e $\alpha > 1$. Assim, é claro que :

$$|h^{(n)}(0)| \leq a_n.\alpha^n, \text{ onde } a_n \text{ novamente é dada por (3.70).}$$

O que prova o lema. $\square$

Calculando $D\overline{F}(P_d)$, é fácil ver que o autovetor associado ao autovalor maior que 1 (tangente a variedade instável em P_d) tende a (1,-1) e o autovetor associado ao autovalor menor que 1 (tangente a variedade estável em P_d) tende a (0,1), ambos para $\alpha \rightarrow \infty$ e todo $\gamma > 1$ fixo. Agora, podemos fazer uma análise bastante semelhante à feita no caso de P_c .

$$W^U(P_d) :$$

Novamente, é claro que (ver as majorações abaixo, em especial (3.74)), se $\alpha > \alpha_0(\gamma)$, para uma certa função $\alpha_0(\gamma)$, ao menos numa vizinhança de P_d , podemos escrever $W^U(P_d)$ como gráfico de uma função $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $l = l(\phi)$. Além disso, como $g(\phi)$ e $h(\phi)$ são funções analíticas, $l(\phi)$ também o é (ver [24]). Pela invariância de $W^U(P_d)$:

$$l(h(\phi) - l(\phi)) = g(\phi) + l(\phi) \quad (3.73)$$

Então, derivando a expressão acima, e calculando em $\phi = 0$ (que corresponde a P_d), temos :

$$l'(0)(h'(0) - l'(0)) = g'(0) + l'(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l'(0)^2 + (1 - h'(0))l'(0) + g'(0) = 0$$

Assim, definindo $a = (1 - h'(0))$ e $b = g'(0)$, temos :

$$l'(0) = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Por métodos análogos aos usados para o ponto conservativo P_c , temos que :

$$|1 + l'(0)| < \frac{c(\gamma)}{\alpha}, \text{ para } \gamma \geq 1, \alpha > \alpha_{lin}(\gamma), \quad (3.74)$$

onde $c(\gamma)$ e $\alpha_{lin}(\gamma)$ são funções de γ

Assim, $l'(0) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} -1$. Isto implica em particular, que o autovetor correspondente ao autovalor expansivo, em P_d , tende à $(1, -1)$, para $\alpha \rightarrow \infty$, como já foi dito.

Agora, derivando (3.73) 2 vezes, e calculando em $\phi = 0$ obtemos :

$$l''(0) = \frac{g''(0) - l'(0).h''(0)}{[(h'(0) - l'(0))^2 - l'(0) - 1]}$$

E, por indução, temos que a expressão de $l^{(n)}(0)$ tem o seguinte aspecto:

$$l^{(n)}(0) = \frac{A + B}{[(h'(0) - l'(0))^n - l'(0) - 1]},$$

novamente com

$$A = \sum_{i=2}^{2^n} \left(\bar{a}_i . l^{\tilde{i}(i)}(0) . (h'(0) - l'(0))^{b_i^1} \dots (h^{(n-1)}(0) - l^{(n-1)}(0))^{b_{n-1}^i} \right)$$

$$B = g^{(n)}(0) - l'(0).h^{(n)}(0)$$

Onde :

- $\tilde{i}(i)$ é uma função tal que : $\tilde{i} : \{2, 3, 4, \dots, 2^n\} \rightarrow \{2, 3, 4, \dots, n-1\}$;
- $b_j^i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, com $j=1, 2, \dots, n-1$ e vale : $b_1^i + 2b_2^i + \dots + (n-1)b_{n-1}^i = n$;

- $\bar{a}_i \in \mathbb{R}$ (obviamente podem ser zero)

Tudo semelhante ao que foi feito para P_c .

Do lema (3), temos que $|h^{(i)}(0)| \leq \gamma \cdot 4^i \cdot \alpha^i \cdot i!$ e vamos majorar $g^{(n)}(0) - l'(0) \cdot h^{(n)}(0)$:

$$|g^{(n)}(0) - l'(0) \cdot h^{(n)}(0)| \leq |g^{(n)}(0) + h^{(n)}(0)| + |(1 + l'(0)) \cdot h^{(n)}(0)| \leq$$

$$\leq |g^{(n)}(0) + h^{(n)}(0)| + |1 + l'(0)| \cdot |h^{(n)}(0)|$$

Agora, basta ver que $g(\phi) + h(\phi) = \mu(\phi + \phi_d) - \mu(\phi_d)$, assim, $g'(\phi) + h'(\phi) = \mu'(\phi + \phi_d) = \frac{1}{J(\phi + \phi_d)}$. ou seja :

$$\mu'(\phi + \phi_d) \cdot J(\phi + \phi_d) = 1. \text{ Fazendo agora, como no lema (3) :}$$

$$\mu^{(n)}(\phi + \phi_d) \cdot J(\phi + \phi_d) + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} \mu^{(n-i)}(\phi + \phi_d) \cdot J^{(i)}(\phi + \phi_d) = 0, \text{ o que implica :}$$

$$|\mu^{(n)}(\phi_d)| \leq \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} |\mu^{(n-i)}(\phi_d)| \cdot (|J^{(i)}(\phi_d)| \cdot e^{\frac{-\pi}{\gamma}})$$

E, $\mu'(\phi_c) = e^{\frac{-\pi}{\gamma}} < 1$. Novamente, utilizando as majorações para $|J^{(2k)}(\phi_d)|$ e para $|J^{(2k+1)}(\phi_d)|$, obtemos por indução, de maneira análoga ao feito no lema (3), que :

$$|\mu^{(n)}(\phi_d)| \leq b_n \alpha^{n-1}, \text{ onde } b_n \text{ é dada por :}$$

$$b_1 = 1, \text{ e } b_n = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} 2^i \cdot b_{n-i}$$

Observando a expressão de a_n em (3.70), fica claro que fazendo $\gamma = 1$, obtemos $a_1 = 4 > 1 = b_1$ e claramente, $a_n > b_n$. Assim,

$$|g^{(n)}(0) + h^{(n)}(0)| = |\mu^{(n)}(\phi_d)| < 4^n \cdot \alpha^{n-1} \cdot n!$$

Ainda, se $\alpha > \alpha_{lin}(\gamma)$, como vale (3.74), temos :

$$|1 + l'(0)| \cdot |h^{(n)}(0)| < \frac{c(\gamma)}{\alpha} \cdot \gamma \cdot 4^n \cdot \alpha^n \cdot n! = c(\gamma) \cdot \gamma \cdot 4^n \cdot \alpha^{n-1} \cdot n!, \text{ o que implica que :}$$

$$|g^{(n)}(0) - l'(0) \cdot h^{(n)}(0)| \leq (1 + c(\gamma) \cdot \gamma) \cdot 4^n \cdot \alpha^{n-1} \cdot n!$$

Para $D_n = [(h'(0) - l'(0))^n - l'(0) - 1]$, que é o denominador de $l^{(n)}(0)$ para todo $n \geq 2$, temos :

$$|D_n| \geq (c_u(\gamma) \cdot \alpha)^n, \text{ para } \alpha > \alpha_1(\gamma) \text{ (uma função de } \gamma), \quad (3.75)$$

onde $c_u(\gamma)$ também é uma função de γ

Das majorações acima :

$$|l''(0)| \leq \frac{(1 + c(\gamma) \cdot \gamma) \cdot 4^2 \cdot \alpha \cdot 2!}{(c_u(\gamma) \alpha)^2} = \frac{c(2, \gamma)}{\alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0 \quad (3.76)$$

Assim, vamos supor por indução que $|l^{(i)}(0)| \leq \frac{c(i, \gamma)}{\alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0$, para $i=2, 3, \dots, n-1$. A expressão (3.76) é a base da indução. O termo de maior grau em α de

$$(h'(0) - l'(0))^{b_1^i} \dots (h^{(n-1)}(0) - l^{(n-1)}(0))^{b_{n-1}^i},$$

com $b_1^i + 2b_2^i + \dots + (n-1)b_{n-1}^i = n$ é, das majorações para $|h^{(i)}(0)|$, igual a α^n .

Então,

$$|l^{(n)}(0)| \leq \frac{|A| + |B|}{|[(h'(0) - l'(0))^n - l'(0) - 1]|}$$

com

$$|A| \leq \sum_{i=2}^{2^n} \left(|\bar{a}_i| \cdot |\tilde{l}^{(i)}(0)| \cdot |(h'(0) - l'(0))^{b_1^i} \dots (h^{(n-1)}(0) - l^{(n-1)}(0))^{b_{n-1}^i}| \right)$$

$$|B| = |g^{(n)}(0) - l'(0).h^{(n)}(0)|$$

$$\begin{aligned} \text{Assim, } |l^{(n)}(0)| &\leq \frac{\left[\sum_{i=2}^{2^n} \left(|\bar{a}_i| \cdot \frac{c(\tilde{l}(i), \gamma)}{\alpha} \cdot K(i, n, \gamma) \cdot \alpha^n \right) + (1 + c(\gamma) \cdot \gamma) \cdot 4^n \cdot \alpha^{n-1} \cdot n! \right]}{(c_u(\gamma) \cdot \alpha)^n} = \\ &= \left[\frac{\sum_{i=2}^{2^n} \left(|\bar{a}_i| \cdot c(\tilde{l}(i), \gamma) \cdot K(i, n, \gamma) \right) + (1 + c(\gamma) \cdot \gamma) \cdot 4^n n!}{(c_u(\gamma))^n} \right] \cdot \frac{1}{\alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$l(0) = 0, \quad l'(0) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} -1 \quad \text{e} \quad l^{(n)}(0) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0, \quad \text{para } n \geq 2. \quad (3.77)$$

Da mesma forma que para P_c , ainda falta mostrar, que o raio de convergência de

$$l(\phi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{l^{(i)}(0)}{i!} \cdot \phi^i \quad \text{é, maior que uma constante, independente de } \alpha. \quad (3.78)$$

Isso feito, está provado que, dado $\epsilon > 0$ arb. pequeno, $\exists \alpha_U(\gamma, \epsilon)$ suficientemente grande, tal que para $\alpha > \alpha_U(\gamma, \epsilon)$, $W^U(P_d)$ está $\epsilon - C^2$ próxima de δ_1 , definida em (3.3). A prova dessa afirmação é exatamente igual à feita no caso do ponto conservativo P_c .

Para mostrar (3.78), o procedimento também é análogo ao de P_c . Primeiro, seja $W^U(P_d)$ dada pela seguinte curva :

$$\begin{cases} I = u(s) \\ \phi = v(s) \end{cases} \quad (3.79)$$

Então, de maneira análoga, mostraremos que os raios de convergência de $u(s)$ e de $v(s)$ são maiores que certas constantes fixas positivas, independentes de α . É imediato então, que o mesmo vale para $l(\phi)$.

A nossa aplicação $\overline{F}$ continua nas coordenadas de (3.66). Seja λ ($|\lambda| > 1$) um dos autovalores de $D\overline{F}(P_d)$ (o outro é $e^{-\frac{\pi}{i}} \cdot \lambda^{-1}$). Podemos supor que $u(s)$ e $v(s)$ são tais que, ao menos numa vizinhança de $P_d = (0, 0)$, temos :

$$u(\lambda s) = g(v(s)) + u(s) \quad (3.80)$$

$$v(\lambda s) = h(v(s)) - u(s) \quad (3.81)$$

Então, de (3.81), $v(\lambda^2 s) = h(v(\lambda s)) - u(\lambda s)$. Substituindo essa expressão e a própria (3.81) em (3.80) obtemos :

$$h(v(\lambda s)) - v(\lambda^2 s) = g(v(s)) + h(v(s)) - v(\lambda s) \quad (3.82)$$

Novamente, podemos supor sem perda de generalidade, que $v'(0) = 1$:

$$\begin{cases} v(s) = s + v_2 s^2 + \dots \\ u(s) = u_1 s + u_2 s^2 + \dots \end{cases}, \text{ porque } v(0) = u(0) = 0 \quad (3.83)$$

Como foi dito no lema (3), $g(\phi)$ e $h(\phi)$ são funções analíticas, assim :

$$\begin{cases} g(\phi) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \cdot \phi^i \\ h(\phi) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i \cdot \phi^i \end{cases}$$

Sejam,

$$\begin{cases} \tilde{g}(\phi) = g(\phi) - g_1 \cdot \phi \\ \tilde{h}(\phi) = h(\phi) - h_1 \cdot \phi \end{cases} \quad (3.84)$$

Substituindo (3.84) em (3.82), obtemos :

$$v(\lambda s) - v(\lambda^2 s) + h_1 \cdot v(\lambda s) - g_1 \cdot v(s) - h_1 \cdot v(s) = \tilde{g}(v(s)) + \tilde{h}(v(s)) - \tilde{h}(v(\lambda s))$$

Definindo $e(\phi) = g(\phi) + h(\phi) = \mu(\phi + \phi_d) - \mu(\phi_d)$ e como $(g_1 + h_1) = e^{-\frac{\pi}{\gamma}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow v(\lambda^2 s) - (1 + h_1) \cdot v(\lambda s) + \frac{1}{e^{\frac{\pi}{\gamma}}} v(s) = - [\tilde{e}(v(s)) - \tilde{h}(v(\lambda s))] \quad (3.85)$$

Agora, vamos lembrar as majorarações de $\tilde{e}^{(n)}(0)$ e $\tilde{h}^{(n)}(0)$ (para $n > 1$):

$$\begin{aligned} |\tilde{e}^{(n)}(0)| &= |\mu^{(n)}(\phi_d)| \leq 4^n \cdot \alpha^{n-1} \cdot n! < \gamma \cdot 4^n \cdot \alpha^n \cdot n! \\ |\tilde{h}^{(n)}(0)| &\leq \gamma \cdot 4^n \cdot \alpha^n \cdot n! \end{aligned}$$

Assim, temos que $|v| \ll |V|$, se V satisfaz : ($V(0) = 0$ e $V_1 = 1$)

$$V(\lambda^2 s) - (1 + h_1) \cdot V(\lambda s) + \frac{1}{e^{\frac{\pi}{\gamma}}} V(s) = \gamma \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(\frac{V(s)}{\frac{1}{4\alpha}} \right)^n + \left(\frac{V(\lambda s)}{\frac{1}{4\alpha}} \right)^n \right]$$

Agora, basta observar que. como $V(0) = 0$ e $V_1 = V'(0) = 1$, existe uma vizinhança $U_\alpha(0)$ tal que para $s \in U_\alpha(0)$,

$$\left| \frac{V(s)}{\frac{1}{4\alpha}} \right| < \frac{1}{2} \text{ e } \left| \frac{V(\lambda s)}{\frac{1}{4\alpha}} \right| < \frac{1}{2}.$$

Assim, se $s \in U_\alpha(0)$, temos (seja $r = \frac{1}{4\alpha}$) :

$$V(\lambda^2 s) - (1 + h_1) \cdot V(\lambda s) + \frac{1}{e^{\frac{\pi}{\gamma}}} V(s) = \gamma \cdot \left[\frac{V(s)^2}{r(r - V(s))} + \frac{V(\lambda s)^2}{r(r - V(\lambda s))} \right]$$

Agora, definindo :

$$a(s) = \frac{V(s)^2}{r(r - V(s))} \text{ e } b(s) = \frac{V(|\lambda|s)^2}{r(r - V(|\lambda|s))} \Rightarrow |\lambda|^n \cdot a^{(n)}(0) = b^{(n)}(0)$$

Desta forma, definindo $\tilde{V}$, tal que $\tilde{V}(0) = 0$ e $\tilde{V}_1 = 1$, temos que $|\tilde{V}| \gg |V|$, se :

$$\tilde{V}(\lambda^2 s) - (1 + h_1) \cdot \tilde{V}(\lambda s) + \frac{1}{e^{\frac{\pi}{\gamma}}} \tilde{V}(s) = 2 \cdot \gamma \cdot \frac{\tilde{V}(|\lambda|s)^2}{r(r - \tilde{V}(|\lambda|s))}$$

Então,

$$\begin{aligned} & r^2 \left[\tilde{V}(\lambda^2 s) - (1 + h_1) \cdot \tilde{V}(\lambda s) + \frac{1}{e^{\frac{\pi}{\gamma}}} \tilde{V}(s) \right] = \\ & = 2\gamma \tilde{V}(|\lambda|s)^2 + r \tilde{V}(\lambda^2 s) \cdot \tilde{V}(|\lambda|s) - r \cdot (1 + h_1) \cdot \tilde{V}(\lambda s) \cdot \tilde{V}(|\lambda|s) + r \frac{1}{e^{\frac{\pi}{\gamma}}} \tilde{V}(s) \cdot \tilde{V}(|\lambda|s) \end{aligned}$$

Novamente, definindo $\tilde{\tilde{V}}$, tal que $\tilde{\tilde{V}}(0) = 0$ e $\tilde{\tilde{V}}_1 = 1$, temos $|\tilde{\tilde{V}}| \gg |\tilde{V}|$, se :

$$\begin{aligned} & r^2 \left[\tilde{\tilde{V}}(\lambda^2 s) - (1 + h_1) \cdot \tilde{\tilde{V}}(\lambda s) + \frac{1}{e^{\frac{\pi}{\gamma}}} \tilde{\tilde{V}}(s) \right] = \\ & = 2\gamma \tilde{\tilde{V}}(|\lambda|s)^2 + r \tilde{\tilde{V}}(\lambda^2 s) \cdot \tilde{\tilde{V}}(|\lambda|s) + r \cdot |1 + h_1| \cdot \tilde{\tilde{V}}(|\lambda|s)^2 + r \frac{1}{e^{\frac{\pi}{\gamma}}} \tilde{\tilde{V}}(s) \cdot \tilde{\tilde{V}}(|\lambda|s) \end{aligned}$$

E claramente vale :

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\tilde{V}}(|\lambda|s) \right)^2 &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \tilde{\tilde{V}}_j \cdot \tilde{\tilde{V}}_{n-j} \right) \cdot |\lambda|^n \cdot s^n \\ \tilde{\tilde{V}}(\lambda^2 s) \cdot \tilde{\tilde{V}}(|\lambda|s) &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \tilde{\tilde{V}}_j \cdot \tilde{\tilde{V}}_{n-j} \cdot |\lambda|^j \right) \cdot |\lambda|^n \cdot s^n \end{aligned}$$

$$\tilde{V}(s) \cdot \tilde{V}(|\lambda|s) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \tilde{V}_j \cdot \tilde{V}_{n-j} \cdot |\lambda|^j \right) \cdot s^n$$

Então, substituindo as expressões acima e expandindo em s o lado esquerdo da igualdade envolvendo $\tilde{V}(s)$, temos :

$$\begin{aligned} & r^2 \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{V}_n \cdot \left(\lambda^{2n} - (1 + h_1) \cdot \lambda^n + \frac{1}{e^{\frac{\pi}{\gamma}}} \right) s^n \right] = \\ & = \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ (2\gamma + r |1 + h_1|) \left(\sum_{j=1}^{n-1} \tilde{V}_j \cdot \tilde{V}_{n-j} \right) |\lambda|^n + r \left(\sum_{j=1}^{n-1} \tilde{V}_j \cdot \tilde{V}_{n-j} \cdot |\lambda|^j \right) \left(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{\gamma}}} + |\lambda|^n \right) \right\} s^n \end{aligned}$$

O que implica que :

$$\left| \tilde{V}_n \right| \leq \frac{\left(2\gamma + r |1 + h_1| + \frac{r}{e^{\frac{\pi}{\gamma}}} \right) |\lambda|^n + r |\lambda|^{2n-1}}{r^2 \cdot \left| \lambda^{2n} - (1 + h_1) \cdot \lambda^n + \frac{1}{e^{\frac{\pi}{\gamma}}} \right|} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n-1} \tilde{V}_j \cdot \tilde{V}_{n-j} \right)$$

Seja agora, $\tilde{\tilde{V}}$ tal que, $\tilde{\tilde{V}}(0) = 0$ e $\tilde{\tilde{V}}_1 = 1$. Então, $|\tilde{\tilde{V}}| \gg |\tilde{V}|$. se :

$$\tilde{\tilde{V}}_n = \frac{2\gamma |\lambda|^n + r |\lambda|^{2n-1} + r \cdot |1 + h_1| \cdot |\lambda|^n + r \frac{1}{e^{\frac{\pi}{\gamma}}} |\lambda|^n}{r^2 \cdot \left| \lambda^{2n} - (1 + h_1) \cdot \lambda^n + \frac{1}{e^{\frac{\pi}{\gamma}}} \right|} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n-1} \tilde{\tilde{V}}_j \cdot \tilde{\tilde{V}}_{n-j} \right)$$

Vamos definir :

$$C_n(\alpha, \gamma) = \frac{2\gamma |\lambda|^n + r |\lambda|^{2n-1} + r \cdot |1 + h_1| \cdot |\lambda|^n + r \frac{1}{e^{\frac{\pi}{\gamma}}} |\lambda|^n}{r^2 \cdot \left| \lambda^{2n} - (1 + h_1) \cdot \lambda^n + \frac{1}{e^{\frac{\pi}{\gamma}}} \right|}, \text{ para } n \geq 2. \quad (3.86)$$

Para $\alpha \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow -2\gamma \cdot \alpha \cdot \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2\gamma}}}$ ($\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\lambda e^{\frac{\pi}{2\gamma}}}{2\gamma \cdot \alpha} = -1$) e $|1 + h_1| \rightarrow 2\gamma \cdot e^{-\frac{\pi}{2\gamma}} \cdot \alpha$.

Assim, como $r = \frac{1}{4\alpha}$, da expressão (3.86), $\exists \bar{\alpha}(\gamma)$ tal que, para $\alpha > \bar{\alpha}(\gamma)$, vale :

$$|C_n(\alpha, \gamma)| < K_\gamma, \text{ para todo } n \geq 2 \text{ e alguma constante } K_\gamma > 1$$

Logo definindo $\bar{V}$, tal que $\bar{V}(0) = 1$ e $\bar{V}_1 = 1$, temos $|\bar{V}| \gg |\tilde{\tilde{V}}|$, se :

$$\bar{V}_n = K_\gamma \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \bar{V}_j \cdot \bar{V}_{n-j}$$

Por outro lado, é claro que :

$$\begin{aligned} \bar{V}_n &= W_n \cdot (K_\gamma)^{n-1}, \text{ onde :} \\ W_n &= \sum_{i=1}^{n-1} W_i \cdot W_{n-i} \text{ e } W_0 = 0 \text{ e } W_1 = 1 \end{aligned}$$

E, novamente, W_n é a sequência de Catalão (ver [23]). Portanto,

$$W_n < 4^n$$

Assim $\bar{V}_n < 4^n \cdot (K_\gamma)^{n-1} < (4 \cdot K_\gamma)^n$, pois $K_\gamma > 1$ e $v(s)$ (ver (3.83)) satisfaz :

$$|v_n| < |\bar{V}_n| < (4 \cdot K_\gamma)^n, \text{ o que implica :}$$

$$|v^{(n)}(0)| < (4 \cdot K_\gamma)^n \cdot n! \quad (3.87)$$

Logo $v(s)$ tem raio de convergência maior que $(4 \cdot K_\gamma)^{-1}$, para todo $\alpha > \bar{\alpha}(\gamma)$.

Vamos agora mostrar que $u(s)$ também tem raio de convergência que não tende a zero com $\alpha \rightarrow \infty$.

De (3.80) e (3.81), temos que :

$$u(s) + v(s) = e(v(\frac{s}{\lambda})) \Rightarrow u(s) = e(v(\frac{s}{\lambda})) - v(s) \quad (3.88)$$

E, já sabemos que :

$$\begin{aligned}
v(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cdot s^n, \text{ com } |v_n| < (4.K_\gamma)^n \\
e(\phi) &= \sum_{n=1}^{\infty} e_n \cdot \phi^n, \text{ com } |e_n| < (4.\alpha)^n \\
\exists \alpha_{aut}(\gamma), \text{ tal que, se } \alpha > \alpha_{aut}(\gamma), \text{ então, } |\lambda| > \bar{c}(\gamma).\alpha, \\
&\text{para uma certa função } \bar{c}(\gamma).
\end{aligned}$$

Assim, o raio de convergência de $v(\frac{s}{\lambda})$ satisfaz, para $\alpha > \{\alpha_{aut}(\gamma), \bar{\alpha}(\gamma)\}$:

$$R_{conv} \left[v\left(\frac{s}{\lambda}\right) \right] > \frac{\bar{c}(\gamma).\alpha}{4.K_\gamma}$$

Falta ainda analisar :

$$R_{conv} \left[e\left(v\left(\frac{s}{\lambda}\right)\right) \right]$$

Para isso, como no caso de P_c , vamos definir :

$$f_1(s) = e\left(\frac{s}{\alpha}\right) \text{ e } f_2(s) = \alpha.v\left(\frac{s}{\lambda}\right) \Rightarrow f_1(0) = f_2(0) = 0$$

Então :

$$e\left(v\left(\frac{s}{\lambda}\right)\right) = f_1 \circ f_2(s) \quad (3.89)$$

Agora, é só observar que para $\alpha > \{\alpha_{aut}(\gamma), \bar{\alpha}(\gamma)\}$, temos $(\forall n > 0)$:

$$|f_1^{(n)}(0)| = \frac{1}{\alpha^n} \cdot |e^{(n)}(0)| < 4^n \cdot n!$$

$$|f_2^{(n)}(0)| = \frac{\alpha}{|\lambda|^n} \cdot |v^{(n)}(0)| < \frac{1}{\bar{c}(\gamma)^n \cdot \alpha^{n-1}} \cdot (4.K_\gamma)^n \cdot n! < \frac{1}{\bar{c}(\gamma)^n} (4.K_\gamma)^n \cdot n!$$

Desta forma, de (3.89), o $R_{conv} \left[e\left(v\left(\frac{s}{\lambda}\right)\right) \right]$ é maior que uma certa constante fixa, independente de α , para todo $\alpha > \{\alpha_{aut}(\gamma), \bar{\alpha}(\gamma)\}$. O que, pela expressão (3.88), implica o mesmo para o raio de convergência de $u(s)$.

Portanto, se $\alpha > \max\{\bar{\alpha}(\gamma), \alpha_{aut}(\gamma)\}$, a curva $(v(s), u(s))$, cujo traço é $W^U(P_d)$, é analítica, com raio de convergência maior que uma constante positiva, que independe de α . Assim, pelo que foi dito anteriormente, a função $l(\phi)$ é analítica e tem raio de convergência maior que $\frac{1}{a(\gamma)}$, para uma certa função $a(\gamma) > 0$.

$$W^S(P_d) :$$

Essa parte também é bastante semelhante ao anteriormente feito (para $W^S(P_c)$ e $W^U(P_d)$), assim muitos resultados análogos não serão feitos em detalhe.

Aqui também, se $\alpha > \alpha_0(\gamma)$ (uma certa função de γ), ao menos numa vizinhança de P_d , podemos escrever $W^S(P_d)$ como gráfico de uma função $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $m = m(I)$. Além disso, $m(I)$ também é função analítica (ver [24]). Pela invariância de $W^S(P_d)$:

$$m(g(m(I)) + I) = h(m(I)) - I \quad (3.90)$$

Novamente, derivando (3.90) e calculando em $I = 0$, obtemos :

$$g'(0).m'(0)^2 + (1 - h'(0)).m'(0) + 1 = 0$$

Definindo $a = g'(0)$ e $b = 1 - h'(0)$, temos :

$$m'(0) = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2a}$$

Se $\gamma > 1$ e $\alpha > \alpha_0(\gamma)$, vale :

$$\frac{c_{\min}(\gamma)}{\alpha} < m'(0) < \frac{c_{\max}(\gamma)}{\alpha} \text{ e } \lim_{\alpha \rightarrow \infty} m'(0).\alpha = c_{\lim}(\gamma) \quad (3.91)$$

onde $c_{\min}(\gamma)$, $c_{\max}(\gamma)$ e $c_{\lim}(\gamma)$ são funções de γ

Derivando (3.90) 2 vezes, e calculando em $I = 0$, obtemos :

$$m''(0) = \frac{-m'(0)^3 \cdot g''(0) + h''(0) \cdot m'(0)^2}{(g'(0) \cdot m'(0) + 1)^2 + m'(0) \cdot g'(0) - h'(0)}$$

É claro, das majorações de $g''(0)$, $h''(0)$ e $m'(0)$ que a maior potência em α no numerador da expressão acima é $\alpha^0 = 1$, pois $|m'(0)^3 \cdot g''(0)| < \left(\frac{c_{\max}(\gamma)}{\alpha}\right)^3 \cdot \gamma \cdot 4^2 2! \alpha^2 = \frac{2^5 \gamma}{\alpha} \cdot c_{\max}(\gamma)^3$ e $|h''(0) \cdot m'(0)^2| < \left(\frac{c_{\max}(\gamma)}{\alpha}\right)^2 \cdot \gamma \cdot 4^2 2! \alpha^2 = 2^5 \gamma \cdot c_{\max}(\gamma)^2$.

Para todo $n \geq 2$, derivando (3.90) n vezes, obtemos :

$$m^{(n)}(0) = \frac{(**)}{(g'(0) \cdot m'(0) + 1)^n + m'(0) \cdot g'(0) - h'(0)}$$

Assim, o denominador de $m^{(n)}(0)$ é :

$$\begin{aligned} D_n &= (g'(0) \cdot m'(0) + 1)^n + m'(0) \cdot g'(0) - h'(0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow |D_n| \geq c_s(\gamma) \cdot \alpha, \text{ para} \\ &\alpha > \max\{10, 2\gamma\} \text{ e } \gamma > 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$|m''(0)| < \frac{\frac{2^5 \gamma}{\alpha} \cdot c_{\max}(\gamma)^3 + 2^5 \gamma \cdot c_{\max}(\gamma)^2}{c_s(\gamma) \cdot \alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0$$

Agora, vamos supor por indução que $m^{(i)}(0) \cdot \alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} c(i, \gamma)$, para $i=2,3,\dots,n-1$ (a base de indução é a expressão acima). Por um argumento análogo aos anteriores, obtemos que o termo de maior grau em α de $(**)$ é α^0 . Assim como $|D_n| \geq c_s(\gamma) \cdot \alpha$,

$$m^{(n)}(0) \cdot \alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} c(n, \gamma) \Rightarrow m^{(n)}(0) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0$$

Dessa forma, ficamos com :

$$m(0) = 0 \text{ e } m^{(n)}(0) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0, \text{ para } n \geq 1 \quad (3.92)$$

Sabemos que $m(I)$ é analítica.

Ainda é necessário mostrar que o raio de convergência de

$$m(I) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{m^{(i)}(0)}{i!} \cdot I^i \text{ é, maior que uma constante, independente de } \alpha. \quad (3.93)$$

Isso feito, está provado que, dado $\epsilon > 0$ arb. pequeno, $\exists \alpha_S(\gamma, \epsilon)$ suficientemente grande, tal que para $\alpha > \alpha_S(\gamma, \epsilon)$, $W^S(P_d)$ está $\epsilon - C^2$ próxima de δ_2 , definida em (3.3).

Analogamente ao que foi feito para $W^U(P_d)$, é suficiente provar que se escrevermos $W^S(P_d)$ como uma curva da seguinte forma.

$$\begin{cases} I = u(s) \\ \phi = v(s) \end{cases} \quad (3.94)$$

os raios de convergência de $u(s)$ e de $v(s)$ são maiores que certas constantes fixas, independentes de α . É imediato então, que o mesmo vale para $m(I)$.

Aqui também podemos provar a C^2 proximidade de $W^S(P_d)$ com δ_2 por um argumento idêntico ao feito para $W^S(P_c)$ em relação a γ_2 . Por essa prova ser bem mais simples que a feita no caso das variedades instáveis e praticamente idêntica à de $W^S(P_c)$, ela será omitida. Cabe ressaltar apenas que para as variedades instáveis, tanto de P_c , como de P_d , podem ser dadas provas por esse mesmo tipo de argumento.

Agora, finalmente basta tomar (no caso do ponto dissipativo, P_d) :

$$\alpha_0^d(\gamma, \epsilon) = \max. \{ \alpha_S(\gamma, \epsilon), \alpha_U(\gamma, \epsilon), \bar{\alpha}(\gamma), \alpha_{aut}(\gamma) \}$$

E a prova do teorema (21) está completa. $\square$

Teorema 13 (Tangências Conservativas) : *Considere a aplicação F , fixado um valor de $\gamma > 1$. Então existe $\alpha_0 > 1$ e uma sequência $\alpha_n > \alpha_0$, que depende de γ , com $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, tal que $W^S(P_c)$ e $W^U(P_c)$ tem uma tangência quadrática em $\alpha = \alpha_n$, que se desdobra genericamente com α .*

Prova :

Pelo que foi feito na seção 2.5 (teorema (15)), basta provar o teorema acima para $\bar{F}$. Como já foi dito, a prova decorre basicamente dos teoremas (20) e (21).

Do teorema (21), dado $\epsilon > 0$, $\exists \bar{\alpha}_0(\gamma, \epsilon)$, tal que para $\alpha > \bar{\alpha}_0(\gamma, \epsilon)$, $W^U(P_c)$ está $\epsilon - C^2$ próxima de γ_1 .

Por definição, $\gamma_1 = \{(\phi, d(\phi))$, para $\phi \in I_\alpha = [\arctan(\alpha), \pi - \arctan(\alpha)]\}$ e, ao menos localmente,

$W_{loc}^U(P_c) = \{(\phi, s(\phi))$, para $\phi \in I_\alpha\}$. Da definição de $\epsilon - C^2$ próximo, temos que

$$\|d - s\|_2 = \sup_{\phi \in I_\alpha} \{|d(\phi) - s(\phi)|, |d'(\phi) - s'(\phi)|, |d''(\phi) - s''(\phi)|\} < \epsilon.$$

Assim, da expressão de $\bar{F}$:

$$\|\bar{F}(\gamma_1) - \bar{F}(W_{loc}^U(P_c))\|_2 \leq \|(\|d - s\|_2, \|d - s\|_2)\| < \sqrt{2} \cdot \epsilon \quad (3.95)$$

Novamente do teorema (21), para esse $\epsilon > 0$ dado, podemos supor que $\bar{\alpha}_0(\gamma, \epsilon)$ é tal que para $\alpha > \bar{\alpha}_0(\gamma, \epsilon)$, $W^S(P_c)$ também está $\epsilon - C^2$ próxima de γ_2 .

Por definição, $\gamma_2 = \{(\phi_c, I)$, para $I \in J_\alpha = [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \arctan(\frac{1}{\alpha})]\}$. Assim, como visto no teorema (20), $\bar{F}^{-1}(\gamma_2)$ coincide com o gráfico da seguinte função :

$$I = f(\phi) \pmod{\pi} = \mu(\phi) - \arctan(\alpha) - \gamma \log(J(\phi)) \pmod{\pi},$$

para $\phi \in [\pi - \arctan(\alpha), \pi + \arctan(\alpha)]$

Ainda, localmente, $W_{loc}^S(P_c) = \{(m(I), I), \text{ para } I \in J_\alpha\}$ e $\|m - \phi_c\|_2 < \epsilon$.

Seja agora $q(I) = m(I) + I$. Do teorema (21), $1 \leq q'(I) \leq 1 + \epsilon$, pois $m'(I) \geq 0$. Assim, $q(I)$ é inversível e $\overline{F}^{-1}(W_{loc}^S(P_c))$ coincide com o gráfico da seguinte função :

$$I = \tilde{f}(\phi) \pmod{\pi} = q^{-1} \circ \mu(\phi) - \gamma \log(J(\phi)) \pmod{\pi},$$

$$\text{para } \phi \in [\mu^{-1} \circ q(\frac{\pi}{2}), \pi + \arctan(\alpha)]$$

Como $m'(I) \geq 0$,

$$m(\frac{\pi}{2}) \leq m(\frac{\pi}{2} + 2 \cdot \arctan(\frac{1}{\alpha})) = \arctan(\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q(\frac{\pi}{2}) \leq \pi - \arctan(\frac{1}{\alpha}) \Rightarrow \mu^{-1} \circ q(\frac{\pi}{2}) \leq \pi - \arctan(\alpha).$$

Desta forma, para $\phi \in [\pi - \arctan(\alpha), \pi + \arctan(\alpha)]$:

$$\left| F^{-1}(\gamma_2)(\phi) - F^{-1}(W_{loc}^S(P_c))(\phi) \right| = \left| f(\phi) - \tilde{f}(\phi) \right| =$$

$$= \left| \mu(\phi) - \arctan(\alpha) - q^{-1} \circ \mu(\phi) \right| =$$

$$= |\mu(\phi) - \arctan(\alpha) - (-\arctan(\alpha) + \mu(\phi)) + \text{erro}(\phi)| = |\text{erro}(\phi)|$$

Onde, $\|\text{erro}(\phi)\|_2 < K \cdot \epsilon$, para uma constante $K > 0$ suficientemente grande, independente de α .

Portanto, para $\phi \in [\pi - \arctan(\alpha), \pi + \arctan(\alpha)]$:

$$\left\| \overline{F}^{-1}(\gamma_2) - \overline{F}^{-1}(W_{loc}^S(P_c)) \right\|_2 < K \cdot \epsilon \quad (3.96)$$

Já sabemos que para $\alpha > \overline{\alpha}_0(\gamma, \epsilon)$, $W_{loc}^U(P_c)$ está $\epsilon - C^2$ próxima de γ_1 e $W_{loc}^S(P_c)$ está $\epsilon - C^2$ próxima de γ_2 . Do teorema (20), $\exists$ uma função $\alpha_{desge}(\gamma)$, tal que para todo $\alpha > \alpha_{desge}(\gamma)$, o desdobramento das tangências entre $\overline{F}(\gamma_1)$ e $\overline{F}^{-1}(\gamma_2)$ é genérico com α . Isso foi provado mostrando que :

$$\text{para } \alpha > \alpha_{desge}(\gamma), \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\phi) - \frac{\partial g}{\partial \alpha}(\phi) < 0, \quad \text{com } \phi \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right] \quad (3.97)$$

Onde $g(\phi)$ é uma função, cujo gráfico coincide com um trecho inicial de $\overline{F}(\gamma_1)$ e $f(\phi)$ é a função cujo gráfico coincide com $\overline{F}^{-1}(\gamma_2)$, para $\phi \in [\pi - \arctan(\alpha), \pi + \arctan(\alpha)]$. Assim, se $\epsilon > 0$ for escolhido suficientemente pequeno, pode ser provado da mesma maneira que (3.97) que $\exists$ uma função $\overline{\alpha}_{desge}(\gamma)$, tal que :

$$\text{para } \alpha > \overline{\alpha}_{desge}(\gamma), \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \alpha}(\phi) - \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \alpha}(\phi) < 0, \quad \text{com } \phi \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right] \quad (3.98)$$

Onde $\tilde{g}(\phi)$ é uma função, cujo gráfico coincide com um trecho inicial de $\overline{F}(W_{loc}^U(P_c))$ e $\tilde{f}(\phi)$ é a função cujo gráfico coincide com $\overline{F}^{-1}(W_{loc}^S(P_c))$. Assim, como a tangência analisada é tal que $\phi_{tan} \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$, o desdobramento das tangências entre $\overline{F}(W_{loc}^U(P_c))$ e $\overline{F}^{-1}(W_{loc}^S(P_c))$ também é genérico com α , para $\alpha > \overline{\alpha}_{desge}(\gamma)$.

Desta forma, escolhendo um $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, definindo $\alpha_0 = \max.\{\overline{\alpha}_0(\gamma, \epsilon), \overline{\alpha}_{desge}(\gamma)\}$ (obviamente, como ϵ está fixo, $\alpha_0 = \alpha_0(\gamma)$) temos aplicando o teorema (20), (3.95) e (3.96) que o teorema está provado. $\square$

Teorema 16 (Tangências Dissipativas) : Considere a aplicação $\overline{F}$, fixado um valor de $\gamma > 1$. Então existe $\alpha_0 > 1$ e uma sequência $\alpha'_n > \alpha_0$, que depende de γ , com $\alpha'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, tal que $W^S(P_d)$ e $W^U(P_d)$ tem uma tangência quadrática em $\alpha = \alpha'_n$, que se desdobra genericamente com α .

Prova : análoga à anterior. $\square$

Para aplicar os teoremas (17) e (18), falta ainda provar alguns detalhes :

A nossa aplicação $\overline{F}$ é analítica, como função definida no toro, e também é analítica nos parâmetros. $\alpha > 1$ e $\gamma > 0$.

Ainda devem ser provadas as condições sobre a sela dissipativa P_d ser C^3 – *linearizável*, nos valores de α onde se dão as tangências. Para isso, vamos adaptar os resultados de [25] e [26] ao problema aqui estudado.

Seja λ ($|\lambda| > 1$) o autovalor expansivo em P_d . É fácil ver que, para todo $\gamma > 1$ fixo, $\exists \alpha_{cresc}(\gamma)$, tal que para $\alpha > \alpha_{cresc}(\gamma)$, $|\lambda| = |\lambda(\alpha, \gamma)|$ é função crescente de α . Isto porque :

$$|\lambda| = \frac{|tr(DF(P_d))| + \sqrt{|tr(DF(P_d))|^2 - 4 \cdot \exp\left(\frac{-\pi}{\gamma}\right)}}{2}$$

Por outro lado,

$$DF(P_d) = \begin{pmatrix} \frac{1-\gamma J'(\phi_d)}{J(\phi_d)} & -1 \\ \frac{\gamma J'(\phi_d)}{J(\phi_d)} & 1 \end{pmatrix}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |tr(DF(P_d))| &= \left| 1 + \frac{1-\gamma J'(\phi_d)}{J(\phi_d)} \right| = \left| \frac{\gamma J'(\phi_d) - (J(\phi_d) + 1)}{J(\phi_d)} \right| = \\ &= \frac{1}{J(\phi_d)} \cdot |\gamma J'(\phi_d) - (J(\phi_d) + 1)| \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned} J'(\phi_d) &= -\sin(2\phi_d) \cdot (\alpha^2 - \alpha^{-2}) = 2 \cdot \frac{\sqrt{\left(e^{\frac{\pi}{\gamma}} - \alpha^{-2}\right) \cdot \left(\alpha^2 - e^{\frac{\pi}{\gamma}}\right)}}{\alpha^2 - \alpha^{-2}} \cdot (\alpha^2 - \alpha^{-2}) = \\ &= 2 \cdot \sqrt{e^{\frac{\pi}{\gamma}} \cdot (\alpha^2 + \alpha^{-2}) - (1 + e^{\frac{2\pi}{\gamma}})}, \text{ que é crescente para todo } \alpha > 1. \end{aligned}$$

Observação : $J(\phi_d) = e^{\frac{\pi}{\gamma}}$

Assim, $\exists \alpha_{c1}(\gamma)$, tal que para $\alpha > \alpha_{c1}(\gamma)$, $J'(\phi_d) > \frac{1}{\gamma} \cdot (J(\phi_d) + 1)$. O que implica que, para $\alpha > \alpha_{c1}(\gamma)$, $|tr(DF(P_d))|$ é crescente com α . Da expressão de $J'(\phi_d)$, é claro que $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} |tr(DF(P_d))| = \infty$. Assim, $\exists \alpha_{c2}(\gamma)$, tal que para $\alpha > \alpha_{c2}(\gamma)$, $|tr(DF(P_d))| > 2 \cdot \exp\left(\frac{-\pi}{2\gamma}\right)$. Então, definindo $\alpha_{cresc}(\gamma) = \max\{\alpha_{c1}(\gamma), \alpha_{c2}(\gamma)\}$, temos que para $\alpha > \alpha_{cresc}(\gamma)$, $|\lambda(\alpha, \gamma)|$ é função crescente de α .

Por outro lado, a condição de P_d ser C^3 - linearizável, pode ser expressa assim :

$\exists N(\alpha, \gamma)$ função contínua de α e de γ , tal que, para $1 \leq n, m \leq N(\alpha, \gamma)$, com $n, m \in \mathbb{Z}$, vale :

$$\left(e^{-\frac{\pi}{\gamma}}\right)^n \neq \lambda^{-m}$$

Dos teoremas (20), (21) e (16), $\exists \alpha_{trans}(\gamma)$, tal que para $\alpha > \alpha_{trans}(\gamma)$, $W^U(P_d)$ intersecta $W^S(P_d)$ transversalmente.

Suponha agora que em $\bar{\alpha} > \max\{\alpha_{cresc}(\gamma) + 1, \alpha_{trans}(\gamma) + 1\}$, $W^S(P_d)$ e $W^U(P_d)$ tem uma tangência quadrática que se desdobra genericamente com α . Então, para todo $0 < \epsilon < 1$, arbitrariamente pequeno, aplicando o λ -lemma, existe uma sequência $\alpha_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \bar{\alpha}$, com $\alpha_i \in [\bar{\alpha} - \epsilon, \bar{\alpha} + \epsilon]$, tal que em $\alpha = \alpha_i$, $W^S(P_d)$ e $W^U(P_d)$ também tem uma tangência quadrática que se desdobra genericamente com α .

Seja agora, $N = \sup_{\alpha \in [\bar{\alpha} - \epsilon, \bar{\alpha} + \epsilon]} N(\alpha, \gamma) < \infty$. É claro que, definindo $\lambda_i = \lambda(\alpha_i, \gamma)$, temos $\lambda_i \neq \lambda_j$, se $i \neq j$.

Ainda, é claro que existe um número finito de racionais do tipo $\frac{m}{n}$, com $1 \leq n, m \leq N$ (por exemplo, menor que N^2).

Agora, suponha, por contradição, que para todo $\alpha = \alpha_i$, $\exists$ um par (m_i, n_i) , tal que $1 \leq n_i, m_i \leq N$ e :

$$\left(e^{-\frac{\pi}{\gamma}}\right) = \lambda_i^{-\frac{m_i}{n_i}}$$

Como i pode ser tão grande quanto se queira, isso implica que existe $\frac{\tilde{m}}{\tilde{n}}$, com $1 \leq \tilde{n}, \tilde{m} \leq N$, tal que, para algum par (i, j) , com $i \neq j$, vale :

$$\left(e^{-\frac{\pi}{\gamma}}\right) = \lambda_i^{-\frac{\tilde{m}}{\tilde{n}}} = \lambda_j^{-\frac{\tilde{m}}{\tilde{n}}} \Rightarrow \lambda_i = \lambda_j, \text{ que é absurdo.}$$

Assim, existe $\alpha_{i_0} \in [\bar{\alpha} - \epsilon, \bar{\alpha} + \epsilon]$, tal que em α_{i_0} , $W^S(P_d)$ e $W^U(P_d)$ tem uma tangência quadrática que se desdobra genericamente com α e além disso, para todo $1 \leq n, m \leq N$, temos :

$$\left(e^{-\frac{\pi}{\gamma}}\right) \neq \lambda_{i_0}^{-\frac{m}{n}}$$

Ou seja, em $\alpha = \alpha_{i_0}$, P_d é C^3 – *linearizável*.

Assim, a partir do que foi feito acima, e do teorema (16), existe uma sequência $\alpha_n'' \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, tal que cada α_n'' é tão próximo quanto se queira de α_n' , e para $\alpha = \alpha_n''$, $W^S(P_d)$ e $W^U(P_d)$ tem uma tangência quadrática que se desdobra genericamente com α e P_d é C^3 – *linearizável*.

Capítulo 4

Resultados relacionados à seção 1.4

Neste capítulo, vamos provar os resultados da seção (1.4) e outros a eles relacionados. Vamos começar relembrando algumas definições básicas :

- $Dif_d^1(S^1 \times \mathbb{R}) = \{ \text{difeomorfismos } C^1 \text{ de } S^1 \times \mathbb{R}, \text{ que preservam os extremos infinitos do cilindro, } \partial_I \phi' > 0 \text{ (condição de desviar a vertical para a direita; twist para a direita) e } \phi'(I, \phi) \xrightarrow{I \rightarrow \pm\infty} \pm\infty \}$. Por analogia ao que foi feito com a aplicação F , S^1 será identificado com $\mathbb{R}/(\pi.\mathbb{Z})$.

- $D_d^1(\mathbb{R}^2) = \{ \text{levantamento dos elementos de } Dif_d^1(S^1 \times \mathbb{R}) \}$

- $p_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por : $p_1(\phi, I) = \phi$

- $p_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por : $p_2(\phi, I) = I$

Seja $f \in Dif_d^1(S^1 \times \mathbb{R})$ e $\tilde{f} \in D_d^1(\mathbb{R}^2)$ o seu levantamento. Para todo par (p, q) , $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}^*$, definimos o seguinte conjunto :

$$K(p, q) = \left\{ x \in S^1 \times \mathbb{R} \mid p_1(\tilde{f}^q(x)) = p_1(x) + p.\pi \right\} \quad (4.1)$$

Então, temos a seguinte (ver Le Calvez [30]) :

Proposição 1 : *Para todo $q \in \mathbb{N}^*$ e $p \in \mathbb{Z}$, $K(p, q) \supset C(p, q)$, uma curva fechada, não homotopicamente trivial, que separa o cilindro $(S^1 \times \mathbb{R})$ em duas partes, uma acima dela, e outra abaixo.*

Prova :

Para $q = 1$, é imediata a partir da condição de Twist, pois para cada $\phi \in S^1$, $\exists$ um único ponto de K (K é conexo e é gráfico sobre S^1).

Se $q > 1$, K pode não ser mais um conjunto conexo, assim é preciso procurar um compacto conexo, contido em K , que separe $S^1 \times \mathbb{R}$. Primeiramente, definamos o seguinte conjunto aberto :

$$O_1 = \{x \in S^1 \times \mathbb{R} / p_1(\tilde{f}^q(x)) < p_1(x) + p.\pi\}$$

Agora, vamos observar o seguinte :

Para qualquer $\phi \in S^1$, seja $\mu_q(t) = \tilde{f}^q(\phi, t)$, com $t \in \mathbb{R}$. Então, temos :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p_2 \circ \mu_q(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} p_1 \circ \mu_q(t) = +\infty \quad (4.2)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} p_2 \circ \mu_q(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} p_1 \circ \mu_q(t) = -\infty \quad (4.3)$$

Onde (4.2) e (4.3) são consequências triviais da condição de Twist.

Assim, existe $M > 0$ suficientemente grande, tal que :

$$O_1 \supset S^1 \times]-\infty, -M[\text{ e } O_1 \cap S^1 \times]M, +\infty[= \emptyset$$

Agora, seja O_2 a componente conexa de O_1 , que contém $S^1 \times]-\infty, -M[$. E, seja O_3 a componente conexa de $S^1 \times \mathbb{R} \setminus \overline{O_2}$, que contém $S^1 \times]M, +\infty[$. Então é claro que $\partial(O_3)$ é uma curva fechada C , não homotopicamente trivial, que separa $S^1 \times \mathbb{R}$.

E ainda, $C \subset \text{Fronteira}(O_2) \subset \text{Fronteira}(O_1) \Rightarrow$ para todo $x \in C$, temos :

$$p_1(\tilde{f}^q(x)) = p_1(x) + p.\pi \Rightarrow C \subset K. \square$$

Como antes, para cada $q \geq 1$, $\bar{\phi} \in \mathbb{R}$, vamos definir :

$$\mu_q(t) = \tilde{f}^q(\bar{\phi}, t), \text{ para } t \in \mathbb{R} \quad (4.4)$$

Diremos, para $\mu_q(t)$ definida como em (4.4), que o primeiro encontro de μ_q com a vertical por ϕ_0 , se dá para :

$t_P \in \mathbb{R}$, tal que :

$$t_P = \min\{t \in \mathbb{R} : p_1 \circ \mu_q(t) = p_1 \circ \tilde{f}^q(\bar{\phi}, t) = \phi_0\}$$

Analogamente, o último encontro de μ_q com a vertical por ϕ_0 , se dá para :

$t_U \in \mathbb{R}$, tal que :

$$t_U = \max\{t \in \mathbb{R} : p_1 \circ \mu_q(t) = p_1 \circ \tilde{f}^q(\bar{\phi}, t) = \phi_0\}$$

É claro que, para todo $\bar{\phi}, \phi_0 \in \mathbb{R}$, $t_P \leq t_U$.

Então, vale (ver Le Calvez [30]) :

Proposição 2 : Para todo $\phi_0, \bar{\phi} \in \mathbb{R}$, seja $\mu_q(t) = \tilde{f}^q(\bar{\phi}, t)$, como em (4.4). Então valem as seguintes desigualdades : $p_2 \circ \mu_q(t_U) \leq p_2 \circ \mu_q(\bar{t}_N) \leq \dots \leq p_2 \circ \mu_q(\bar{t}_1) \leq p_2 \circ \mu_q(t_P)$, onde $t_P < \bar{t}_1 < \dots < \bar{t}_N < t_U$ e : $p_1 \circ \mu_q(\bar{t}_i) = \phi_0$.

Prova :

Para $q = 1$ é evidente, pois $\mu_1(t)$ encontra cada vertical em um único ponto (da condição de Twist).

Para $q > 1$, a prova será feita por indução, assim suponha que o resultado seja válido para $1, 2, \dots, q-1$.

Seja $x_0 = (\phi_0, r_0) = \mu_q(t_P)$, o primeiro ponto de encontro de μ_q com a vertical por ϕ_0 .

Seja $x_1 = (\phi_1, r_1) = \mu_{q-1}(t_P) = \tilde{f}^{-1}(x_0)$. Então, vale :

$$\mu_{q-1}([-\infty, t_P]) \cap \tilde{f}^{-1}(\phi_0, [r_0, +\infty]) = \emptyset. \quad (4.5)$$

Vamos agora provar (4.5). Suponha, por absurdo que $P \in \mu_{q-1}([-\infty, t_P]) \cap \tilde{f}^{-1}(\phi_0, [r_0, +\infty])$. Então, seja $A = \tilde{f}^{-q+1}(P) \Rightarrow A = (\bar{\phi}, T)$, com $T < t_P$. Mas, $\mu_q(T) = \tilde{f}^q(A) = \tilde{f}^q(P) \in \text{vert. por } \phi_0$, absurdo, pois $T < t_P$.

Se existir $Q \in \mu_{q-1}([-\infty, t_P])$, com $p_1(Q) > \phi_1$, como $\lim_{t \rightarrow -\infty} p_1 \circ \mu_{q-1}(t) = -\infty$, temos que existe $\hat{t} < t_P$, tal que $p_1 \circ \mu_{q-1}(\hat{t}) = \phi_1$ e, da hipótese de indução, $p_2 \circ \mu_{q-1}(\hat{t}) > r_1 = p_2 \circ \mu_{q-1}(t_P)$.

Por outro lado, como $\tilde{f} \in D_d^1(\mathbb{R}^2)$, temos que :

$$\begin{aligned} p_1 \left(\tilde{f}^{-1}(\phi_0,]r_0, +\infty[) \right) &=]-\infty, \phi_1[\\ p_2 \left(\tilde{f}^{-1}(\phi_0,]r_0, +\infty[) \right) &\supseteq]r_1, \infty[\end{aligned}$$

O que implica, de (4.3), que existe $t_* < \hat{t} < t_P$, tal que :

$$\mu_{q-1}(t_*) \in \tilde{f}^{-1}(\phi_0,]r_0, +\infty[),$$

absurdo, pois contradiz (4.5). Dessa forma, $\mu_{q-1}(] - \infty, t_P[)$ está a esquerda da vertical por ϕ_1 e $\mu_{q-1}(t_P)$ é o primeiro ponto de encontro de μ_{q-1} com a vertical por ϕ_1 , portanto é o de altura máxima.

Suponha agora, que existe $t_{\#} > t_P$, tal que $p_1 \circ \mu_q(t_{\#}) = \phi_0$ e, $p_2 \circ \mu_q(t_{\#}) > r_0 = p_2 \circ \mu_q(t_P)$. Mas então, $\mu_{q-1}(t_{\#}) \in \tilde{f}^{-1}(\phi_0,]r_0, +\infty[)$. Assim, de (4.2), $\exists t_{int}$, com $t_P < t_{\#} < t_{int}$, tal que $p_1 \circ \mu_{q-1}(t_{int}) = \phi_1$ e, $p_2 \circ \mu_{q-1}(t_{int}) > r_1 = p_2 \circ \mu_{q-1}(t_P)$, o que contradiz $\mu_{q-1}(t_P)$ ser o ponto de altura máxima na vertical por ϕ_1 .

Assim, $\mu_q(t_P)$ é o ponto de máxima altura na vertical por ϕ_0 ($\forall t \in \mathbb{R}$, tal que $p_1 \circ \mu_q(t) = \phi_0$, $p_2 \circ \mu_q(t) < r_0 = p_2 \circ \mu_q(t_P)$).

A prova da proposição para os pontos de encontro intermediários (seq. $\bar{t}_i$) e para o último deles (t_L) é análoga. $\square$

A figura que segue, ilustra a prova anterior.

Figura 5 : Ilustração sobre a prova da proposição (2)

Agora, dados $s \in \mathbb{Z}$, $N > 0$, temos, da proposição (1), que existe $C(s, N) \subset K(s, N)$, onde $K(s, N)$ é como em (4.1). Definamos agora, para $\phi \in S^1$, $\mu^-(\phi) = \min\{p_2(Q) : Q \in C(s, N) \text{ e } p_1(Q) = \phi\}$ e, analogamente $\mu^+(\phi) = \max\{p_2(Q) : Q \in C(s, N) \text{ e } p_1(Q) = \phi\}$.

Como $C(s, N)$ é curva fechada simples, rotacional no cilindro $(S^1 \times \mathbb{R})$, $f^N(C(s, N))$ também o é. Podemos então definir, $\nu^-(\phi) = \min\{p_2(Q) : Q \in f^N(C(s, N)) \text{ e } p_1(Q) = \phi\}$ e, analogamente $\nu^+(\phi) = \max\{p_2(Q) : Q \in f^N(C(s, N)) \text{ e } p_1(Q) = \phi\}$.

Corolário 2 (da proposição (2)) : $f^N(\phi, \mu^-(\phi)) = (\phi, \nu^+(\phi))$ e $f^N(\phi, \mu^+(\phi)) = (\phi, \nu^-(\phi))$.

Prova :

Imediata, a partir da proposição (2). □

Vamos continuar relembrando algumas definições :

- Para todo círculo rotacional C no cilindro, sejam os seguintes conjuntos :

$$C^- = \{x \in S^1 \times \mathbb{R} : x \text{ está abaixo de } C\}$$

$$C^+ = \{x \in S^1 \times \mathbb{R} : x \text{ está acima de } C\}$$

- Seja $T \in Dif_d^1(S^1 \times \mathbb{R})$. Dizemos que T satisfaz a propriedade de intersecção do círculo, P.I.C., se para todo círculo rotacional C no cilindro, que o divide em duas regiões distintas, vale :

Se $T(C) \neq C$, então :

$$\begin{cases} T(C) \cap C^+ \neq \emptyset \\ e \\ T(C) \cap C^- \neq \emptyset \end{cases}$$

É claro que essa propriedade é intrínseca da aplicação T ; independe do sistema de coordenadas.

- Seja $TQ \subset D_d^1(\mathbb{R}^2)$, tal que todo $T \in TQ$ se escreve como :

$$T : \begin{cases} \phi' = T_\phi(\phi, I) \\ I' = T_I(\phi, I) \end{cases}, \text{ com } \partial_I T_\phi(\phi, I) > 0, \text{ e :} \\ \begin{cases} T_I(\phi + \pi, I) = T_I(\phi, I) \\ T_I(\phi, I + \pi) = T_I(\phi, I) + \pi \\ T_\phi(\phi + \pi, I) = T_\phi(\phi, I) + \pi \\ T_\phi(\phi, I + \pi) = T_\phi(\phi, I) + \pi \end{cases}$$

- Seja $\hat{T} : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ a aplicação no cilindro induzida por T .

Teorema 22 : Dado $T \in TQ$, tal que T satisfaz a propriedade P.I.C., então :

$$\exists P, Q \in S^1 \times \mathbb{R} \text{ tal que } \begin{cases} p_2 \circ \hat{T}^n(P) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \\ p_2 \circ \hat{T}^n(Q) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \end{cases}, \text{ se e somente se, } \hat{T} \text{ não possui}$$

C.R.I.'s.

Prova :

A prova da existência de P e Q é análoga, assim basta fazer a de P .

$(\Rightarrow)$

Trivial, pois se houver pelo menos um C.R.I., digamos C , então os conjuntos :

$$C^- = \{x \in S^1 \times \mathbb{R} : x \text{ está abaixo de } C\}$$

$$C^+ = \{x \in S^1 \times \mathbb{R} : x \text{ está acima de } C\}$$

São $\hat{T}$ -invariantes ($\hat{T}(C^-) = C^-$ e $\hat{T}(C^+) = C^+$), pois $\hat{T}$ preserva os extremos infinitos do cilindro. Mas como $T \in TQ$, podemos supor que $P \in C^-$ e, para $k > 0$ suficientemente grande, $\hat{T}^k(P) \in C^+$, o que é um absurdo, assim não existem C.R.I.'s.

$(\Leftarrow)$

Para $s \in \mathbb{R}$, seja $V_s = \{x \in S^1 \times \mathbb{R} : p_2(x) < s\}$. É claro que V_s é um aberto. Suponha que não existe P como no enunciado do teorema. Então, $\exists a \in \mathbb{R}$, tal que :

$$V = \bigcup_{n \geq 0} \hat{T}^n(V_a) \subset V_b, \text{ para algum } b \in \mathbb{R}$$

Como V_a é aberto e $\hat{T}$ é inversível, $\hat{T}^n(V_a)$ é aberto para todo $n \geq 0$. Além disso, $\hat{T}^n(V_a)$ é conexo para todo $n \geq 0$, pois V_a é conexo e $\hat{T}$ é contínua. Como $\hat{T}$ preserva

os extremos infinitos do cilindro, $\hat{T}^n$ também os preserva, para todo $n \geq 0$. O que implica que V é conexo, porque dados $x, y \in V$ temos que $x \in \hat{T}^{n_x}(V_a)$ e $y \in \hat{T}^{n_y}(V_a)$, para certos $n_x, n_y \geq 0$. Da preservação dos extremos infinitos do cilindro por $\hat{T}^n$, é claro que $\hat{T}^{n_x}(V_a) \cap \hat{T}^{n_y}(V_a) \neq \emptyset$. Então, existe uma curva γ contínua, contida em $\hat{T}^{n_x}(V_a) \cup \hat{T}^{n_y}(V_a)$, que liga x a y .

Por construção, $\hat{T}(V) \subset V$. Seja agora U a componente conexa de V^c , que contém V_b^c (é claro que $U \subset V_a^c$). Como V é conexo, U é homeomorfo ao cilindro, assim o ∂U é uma curva fechada simples, não homotopicamente trivial no cilindro. Seja $\alpha = \partial U$. É claro que $\alpha \subset \partial V$. Como T satisfaz a propriedade P.I.C., caso $\hat{T}(\alpha) \neq \alpha$, então $\hat{T}(\alpha) \cap \alpha^+ \neq \emptyset \Rightarrow \exists X \in \hat{T}(V)$, tal que $X \notin V$, absurdo, pois $\hat{T}(V) \subset V$. Logo $\hat{T}(\alpha) = \alpha$, o que contradiz a hipótese de não haver C.R.I's. Assim, existe P como no enunciado do teorema. $\square$

Agora provaremos o lema (1) :

Lema 1 : *Seja $T \in TQ$ e 3 pontos $z, w_+, w_- \in \mathbb{R}^2$, tais que :*

$$|p_2 \circ T^n(z)| < C, \text{ para todo } n \geq 0 \text{ e alguma constante } C > 0$$

$$p_2 \circ T^n(w_{\pm}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pm \infty$$

Então, temos :

$$\exists K > 0, \text{ tal que para todo } n > 0, \left| \frac{p_1 \circ T^n(z) - p_1(z)}{\pi \cdot n} \right| < K$$

$$\frac{p_1 \circ T^n(w_{\pm}) - p_1(w_{\pm})}{\pi \cdot n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pm \infty$$

Prova :

A demonstração para w_+ e w_- é análoga, assim basta fazê-la para w_+ , que chamaremos simplesmente de w por não haver possibilidade de confusão.

Para todo $n > 0$, sejam :

$$z = (\phi_z^0, I_z^0), \quad \phi_z^n = p_1 \circ T^n(z), \quad I_z^n = p_2 \circ T^n(z)$$

e

$$w = (\phi_w^0, I_w^0), \quad \phi_w^n = p_1 \circ T^n(w), \quad I_w^n = p_2 \circ T^n(w)$$

Como já foi dito, todo $T \in TQ$ se escreve da seguinte forma :

$$T : \begin{cases} \phi' = T_\phi(\phi, I) \\ I' = T_I(\phi, I) \end{cases}, \text{ com } \partial_I T_\phi(\phi, I) > 0. \text{ e : } \begin{cases} T_I(\phi + \pi, I) = T_I(\phi, I) \\ T_I(\phi, I + \pi) = T_I(\phi, I) + \pi \\ T_\phi(\phi + \pi, I) = T_\phi(\phi, I) + \pi \\ T_\phi(\phi, I + \pi) = T_\phi(\phi, I) + \pi \end{cases}$$

Assim, definindo $\widetilde{T}_\phi(\phi, I) = T_\phi(\phi, I) - \phi$ temos que $\widetilde{T}_\phi(\phi + \pi, I) = \widetilde{T}_\phi(\phi, I)$.

Para z temos :

$$\begin{aligned} p_1 \circ T^n(z) - p_1(z) &= \phi_z^n - \phi_z^0 = (\phi_z^n - \phi_z^{n-1}) + \dots + (\phi_z^1 - \phi_z^0) = \\ &= (T_\phi(\phi_z^{n-1}, I_z^{n-1}) - \phi_z^{n-1}) + \dots + (T_\phi(\phi_z^0, I_z^0) - \phi_z^0) = \sum_{j=0}^{n-1} \widetilde{T}_\phi(\phi_z^j, I_z^j) \end{aligned}$$

Do enunciado do lema, temos que $|I_z^j| < C$, para todo $j > 0$. Assim, $\forall j > 0$, $|\widetilde{T}_\phi(\phi_z^j, I_z^j)| \leq \max |\widetilde{T}_\phi(\phi, I)| < \pi.K$, com $(\phi, I) \in [0, \pi] \times [-C, C]$, para alguma constante $K > 0$. Desta forma, para todo $n > 0$,

$$\left| \frac{p_1 \circ T^n(z) - p_1(z)}{\pi.n} \right| = \left| \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \widetilde{T}_\phi(\phi_z^j, I_z^j)}{\pi.n} \right| \leq \frac{\sum_{j=0}^{n-1} |\widetilde{T}_\phi(\phi_z^j, I_z^j)|}{\pi.n} < \frac{n.\pi.K}{\pi.n} = K$$

Agora, vamos escrever $I_w^n = I_{w0}^n + k_n.\pi$, com $I_{w0}^n \in [0, \pi)$ e $k_n \in \mathbb{Z}$. É claro que do enunciado do lema, $k_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, pois $p_2 \circ T^n(w) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Assim temos :

$$\begin{aligned} p_1 \circ T^n(w) - p_1(w) &= \phi_w^n - \phi_w^0 = (\phi_w^n - \phi_w^{n-1}) + \dots + (\phi_w^1 - \phi_w^0) = \\ &= (T_\phi(\phi_w^{n-1}, I_w^{n-1}) - \phi_w^{n-1}) + \dots + (T_\phi(\phi_w^0, I_w^0) - \phi_w^0) = \sum_{j=0}^{n-1} \widetilde{T}_\phi(\phi_w^j, I_w^j) = \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (\widetilde{T}_\phi(\phi_w^j, I_{w0}^j) + k_j.\pi) \end{aligned}$$

Analogamente ao que foi feito acima, $\forall j > 0$, $|\widetilde{T}_\phi(\phi_w^j, I_w^j)| \leq \max |\widetilde{T}_\phi(\phi, I)| < \overline{K}$, com $(\phi, I) \in [0, \pi]^2$, para alguma constante $\overline{K} > 0$. Então, para todo $n > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{p_1 \circ T^n(w) - p_1(w)}{\pi \cdot n} &= \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \widetilde{T}_\phi(\phi_w^j, I_w^j)}{\pi \cdot n} = \\ &= \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \widetilde{T}_\phi(\phi_w^j, I_w^j) + \sum_{j=0}^{n-1} k_j \cdot \pi}{\pi \cdot n} > \frac{-\overline{K} \cdot n + \sum_{j=0}^{n-1} k_j \cdot \pi}{\pi \cdot n} = -\frac{\overline{K}}{\pi} + \frac{\sum_{j=0}^{n-1} k_j}{n} \end{aligned}$$

Vamos agora mostrar que :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} k_j = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=0}^{n-1} k_j}{n} = \infty.$$

$$\text{Então, pelo feito acima : } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_1 \circ T^n(w) - p_1(w)}{\pi \cdot n} = \infty.$$

Dado $\epsilon > 0$ arbitrariamente grande, $\exists j_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que para $j \geq j_\epsilon$, $k_j > \epsilon$. Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=0}^{n-1} k_j}{n} > \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=0}^{j_\epsilon-1} k_j + \sum_{j=j_\epsilon}^{n-1} \epsilon}{n} = \epsilon. \text{ Como } \epsilon \text{ é arbitrário, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=0}^{n-1} k_j}{n} = \infty. \square$$

Agora segue um lema bastante importante.

Lema 4 : Dado $T \in TQ$ que satisfaz P.I.C., tal que a aplicação no cilindro induzida por T , $\widehat{T} : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$, não possui C.R.I.'s, temos :

Para todo $k \in \mathbb{N}^*$, $\exists N > 0$, $\tilde{P} = (\phi_{\tilde{P}}, I_{\tilde{P}}) \in S^1 \times [0, \pi]$, tal que $T^N(\tilde{P}) = T^N(\phi_{\tilde{P}}, I_{\tilde{P}}) = (\phi_{\tilde{P}} + s \cdot \pi, I_{\tilde{P}}^N)$, com $I_{\tilde{P}}^N > I_{\tilde{P}} + k\pi$, para algum $s \in \mathbb{Z}$.

Prova :

Com T não possui C.R.I.'s, pelo teorema (22) existe

$$P = (\phi_P, I_P) \in S^1 \times \mathbb{R}, \text{ tal que } p_2 \circ T^N(P) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty.$$

Como $T \in TQ$, podemos supor que $P \in S^1 \times [0, \pi]$.

Seja $r = \{(\phi, I) \in S^1 \times [0, \pi] : \phi = \phi_P\}$

Definindo agora :

$$C.H.Max(T^n(r)) = \sup_{a, b \in [0, \pi]} |p_1 \circ T^n(\phi_P, a) - p_1 \circ T^n(\phi_P, b)| \quad (4.6)$$

Fica claro que :

$$C.H.Max(T^n(r)) \geq |p_1 \circ T^n(\phi_P, 0) - p_1 \circ T^n(\phi_P, \pi)| = n \cdot \pi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \quad (4.7)$$

Logo, para todo $n > 1$. $\exists$ pelo menos um $s \in \mathbb{Z}$, tal que $\phi_P + s \cdot \pi \in p_1(T^n(r))$.

Vamos agora provar um resultado simples, mas importante para o que se segue.

Proposição 3 : Para $T \in TQ$, $\exists a > 0$, tal que $\forall Q \in S^1 \times \mathbb{R}$, $p_2 \circ (T(Q) - Q) > -a$.

Prova :

Da definição de TQ , basta tomar :

$$a > - \inf_{Q \in S^1 \times [0, \pi]} p_2 \circ (T(Q) - Q)$$

Como $S^1 \times [0, \pi]$ é compacto. $a < \infty$. $\square$

A prova será feita agora, por contradição. Suponha que existe $k_0 \geq 1$, tal que, para $\forall N > 0$, não existe $\tilde{P} \in r$ tal que $T^N(\tilde{P}) = T^N(\phi_P, I_{\tilde{P}}) = (\phi_P + s \cdot \pi, I_{\tilde{P}}^N)$, com $I_{\tilde{P}}^N > I_{\tilde{P}} + k_0 \pi$, para algum $s \in \mathbb{Z}$.

Assim, vamos supor que, para todo $n > 0$ e $Q \in r$, tal que

$$p_1 \circ T^n(Q) = \phi_P \pmod{\pi}, \quad (4.8)$$

vale

$$p_2 \circ T^n(Q) \leq (k_0 + 1) \cdot \pi \quad (4.9)$$

Como P é tal que $p_2 \circ T^N(P) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty$, $\exists N_0 > 1$ suficientemente grande, tal que, para $N \geq N_0$,

$$p_2 \circ T^N(P) > (k_0 + 2) \cdot \pi + a$$

Para todo $N \geq N_0$, seja $P_1 = P_1(N) \in r$, tal que :

$$p_2 \circ T^N(P_1) = (k_0 + 2) \cdot \pi + a$$

e,

$\forall Q \in$ segmento de r entre P e P_1 ,

$$p_2 \circ T^N(Q) > (k_0 + 2) \cdot \pi + a$$

É claro que tal P_1 existe, pois. como já foi dito, para todo $N \geq N_0$, $\exists$ pelo menos um $s \in \mathbb{Z}$, tal que $\phi_P + s \cdot \pi \in p_1(T^N(r))$. E de (4.8) e (4.9), $T^N(r)$ cruza a reta l dada por :

$$l = \{(\phi, (k_0 + 2) \cdot \pi + a), \text{ com } \phi \in \mathbb{R}\}$$

Denotando agora por I_{P_1P} o intervalo de r , entre P e P_1 , temos (também de (4.8) e (4.9)) :

$$\sup_{Q, R \in I_{P_1P}} |p_1 \circ T^N(R) - p_1 \circ T^N(Q)| < \pi$$

Seja agora $\gamma_N : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ a seguinte curva :

$$\gamma_N(t) = T^N(\phi_P, t), \text{ com } t \in I = \text{intervalo de extremos } I_P \text{ e } I_{P_1}$$

É claro que :

$$\begin{aligned} p_2 \circ \gamma_N(I_P) - p_2 \circ \gamma_N(I_{P_1}) &= \\ &= p_2 \circ T^N(P) - (k_0 + 2) \cdot \pi - a \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty \end{aligned}$$

E,

$$\sup_{t, s \in I} |p_1 \circ \gamma_N(t) - p_1 \circ \gamma_N(s)| < \pi$$

Figura 6 : Caracterização de $T^N(\overline{P_1 P})$

Por outro lado, como $T \in TQ$:

$$T : \begin{cases} \phi' = T_\phi(\phi, I) \\ I' = T_I(\phi, I) \end{cases}$$

Vale para todo $(\phi, I) \in \mathbb{R}^2$:

$$\exists b > 0, \text{ tal que } \left| \frac{\partial T_\phi}{\partial \phi} \right| < b \quad (4.10)$$

$$\exists K > 0, \text{ tal que } \frac{\partial T_\phi}{\partial I} \geq K \text{ (condição de twist)} \quad (4.11)$$

Agora, vamos provar mais um resultado útil :

Proposição 4 : Seguindo a notação anterior, dada uma curva $\gamma : J = [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$, com :

$$\sup_{t,s \in J} |p_1 \circ \gamma(t) - p_1 \circ \gamma(s)| < \pi \quad (4.12)$$

$$|p_2 \circ \gamma(\beta) - p_2 \circ \gamma(\alpha)| > \frac{(2+b).\pi}{K} \quad (4.13)$$

Então, $\exists s \in \mathbb{Z}$, tal que $\phi_P + s.\pi \in p_1(T \circ \gamma(J))$.

Prova :

$$\begin{aligned} & \sup_{t,s \in J} |p_1 \circ T \circ \gamma(t) - p_1 \circ T \circ \gamma(s)| = \\ & = \sup_{t,s \in J} |T_\phi \circ \gamma(t) - T_\phi \circ \gamma(s)| \geq |T_\phi \circ \gamma(\beta) - T_\phi \circ \gamma(\alpha)| \geq \\ & \geq -b.\pi + K \cdot \frac{(2+b).\pi}{K} = 2.\pi \end{aligned}$$

Assim, é claro que a proposição está provada. $\square$

Agora, vamos escolher $N_1 > N_0$, tal que para $N \geq N_1$, temos :

$$p_2 \circ T^N(P) > \left[(k_0 + 2) + \frac{(2+b)}{K} \right] . \pi + a$$

É claro que, $\gamma_{N_1}(t) = T^{N_1}(\phi_P, t)$, onde $t \in I$ = intervalo de extremos I_P e $I_{P_1(N_1)}$, satisfaz as hipóteses da proposição (4), por construção. Assim, $\exists s \in \mathbb{Z}$, tal

que $\phi_P + s.\pi \in p_1(T \circ \gamma_{N_1}(I)) = p_1(T^{N_1+1}(I_{P_1P}))$, onde, como já foi dito, $I_{P_1P} =$ intervalo de r entre P e $P_1(N_1)$.

Por outro lado, como

$$\inf_{t \in I} p_2(\gamma_{N_1}(t)) = p_2(\gamma_{N_1}(I_{P_1})) = (k_0 + 2).\pi + a,$$

da proposição (3), temos :

$$\inf_{t \in I} p_2(T \circ \gamma_{N_1}(t)) > (k_0 + 2).\pi$$

Assim, está provado que existe $\bar{t} \in I$ e $\bar{P} = (\phi_P, \bar{t}) \in r$, tal que :

$$\begin{aligned} p_1 \circ T^{N_1+1}(\bar{P}) &= \phi_P \pmod{\pi} \\ p_2 \circ T^{N_1+1}(\bar{P}) &> (k_0 + 2).\pi \end{aligned}$$

O que contradiz (4.8) e (4.9). Assim, para todo $k \geq 1$, $\exists N > 0$, $\tilde{P} \in r$, tal que $T^N(\tilde{P}) = T^N(\phi_P, I_{\tilde{P}}) = (\phi_P + s.\pi, I_{\tilde{P}}^N)$, com $I_{\tilde{P}}^N > I_{\tilde{P}} + k\pi$, para algum $s \in \mathbb{Z}$. $\square$

Observação :

• É claro que, para todo $k \leq -1$, $k \in \mathbb{Z}$, também existem $N > 0$, $\tilde{Q} = (\phi_{\tilde{Q}}, I_{\tilde{Q}}) \in S^1 \times [0, \pi]$, tal que $T^N(\tilde{Q}) = T^N(\phi_{\tilde{Q}}, I_{\tilde{Q}}) = (\phi_{\tilde{Q}} + s.\pi, I_{\tilde{Q}}^N)$, com $I_{\tilde{Q}}^N < I_{\tilde{Q}} + (k - 1).\pi$, para algum $s \in \mathbb{Z}$. A prova nesse caso é completamente análoga, pois como T não possui C.R.I.'s, novamente pelo teorema (22), existe $Q = (\phi_Q, I_Q) \in S^1 \times \mathbb{R}$, tal que $p_2 \circ T^N(Q) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} -\infty$.

Já estamos prontos para começar a prova do teorema (5).

Teorema 5 : *Seja $T \in TQ$, tal que T satisfaz P.I.C. Então :*

- *dado $k \in \mathbb{Z}^*$, $\exists N > 0$, tal que $\bar{T}$ (transformação no toro, induzida por T) possui pelo menos 2 órbitas periódicas com ρ_V (número de rotação vertical) $= \frac{k}{N}$, se e somente se, T não possui C.R.I.'s.*

Prova :

Vamos supor $k > 0$. O outro caso é análogo.

($\Rightarrow$)

É claro que, se $\bar{T}$ possui um ponto periódico P , com $\rho_V(P) = \frac{k}{N}$, para algum par $k > 0, N > 0$, então existe um inteiro $a > 0$, tal que :

$$\begin{aligned} p_2 \circ T^{aN}(P) &= p_2(P) + a.k.\pi \\ &e, \\ p_1 \circ T^{aN}(P) &= p_1(P) \pmod{\pi} \end{aligned}$$

Assim, é claro que :

$$p_2 \circ T^n(P) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

O que implica que não pode haver nenhum círculo rotacional invariante para T . Isto porque, como $T \in TQ$, se T possuir um C.R.I., digamos C , é claro que existe $l \in \mathbb{Z}$, tal que $P + (0, l.\pi)$ está abaixo de C . E,

$$p_2 \circ T^n(P + (0, l.\pi)) = p_2 \circ T^n(P) + l.\pi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

O que contradiz o fato de pontos abaixo de C permanecerem abaixo de C por iteradas de T .

($\Leftarrow$)

Para provarmos a existência de pelo menos 2 órbitas periódicas com $\rho_V = \frac{k}{N}$, para $k > 0$ dado, e $N > 0$ suficientemente grande, é suficiente provar a existência de 2 conjuntos de pontos distintos :

$$\begin{aligned} P_1^0, P_1^1, \dots, P_1^{N-1} \\ &e, \\ P_2^0, P_2^1, \dots, P_2^{N-1} \end{aligned}$$

Tais que :

$$p_2 \circ T^N(P_i^j) = p_2(P_i^j) + k.\pi \quad (4.14)$$

$$p_1 \circ T^N(P_i^j) = p_1(P_i^j) \pmod{\pi} \quad (4.15)$$

onde $i = 1, 2$ e $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Isto porque, $2.N$ pontos distintos com essas características, correspondem no mínimo a 2 órbitas periódicas.

Como $T \in TQ$, para cada $(s, l) \in \mathbb{Z}^2$, $N > 0$, os conjuntos (curvas) $C(s, N)$, definidos na proposição (1), satisfazem :

$$C(s + l.N, N) = C(s, N) + (0, l.\pi)$$

Assim, para cada $N > 0$ fixo, só existem N conjuntos deste tipo, distintos :

$$C(0, N), C(1, N), \dots, C(N-1, N)$$

Os outros, são apenas translações verticais destes, por múltiplos inteiros de π .

Outra observação sobre as curvas $C(s, N)$, trivial a partir da definição, é :

$$C(s, N) \cap C(r, N) = \emptyset, \text{ se } s \neq r$$

Assim, se provarmos que :

Dado $k > 0$, $\exists N > 0$ tal que, para todo $s \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$, $C(s, N) \supset \{P_1^s, P_2^s\}$ e esses $2.N$ pontos satisfazem (4.14) e (4.15), então, o teorema está provado.

Para todo $s \in \mathbb{Z}$, $N > 0$, $C(s, N)$ é uma curva contínua, sem auto-intersecções, não homotopicamente trivial (rotacional). Logo, $\exists \gamma_{s,N} : I = [a, b] \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$, contínua, tal que $\gamma_{s,N}(a) = \gamma_{s,N}(b)$ e o traço de $\gamma_{s,N}$ é $C(s, N)$ ($\gamma_{s,N}(I) = C(s, N)$). É claro que $I = I_{s,N}$.

Como $\gamma_{s,N}$ é contínua, $T^N \circ \gamma_{s,N}$ também o é. Assim, denotando $T^N(\phi, I) = (T_\phi^N(\phi, I), T_I^N(\phi, I))$, podemos escrever $\gamma_{s,N}(t) = (\gamma_\phi^{s,N}(t), \gamma_I^{s,N}(t))$, $T^N \circ \gamma_{s,N}(t) = (T_\phi^N \circ \gamma_{s,N}(t), T_I^N \circ \gamma_{s,N}(t))$, onde cada uma das componentes é contínua.

Definamos agora a seguinte função. $f_{s,N} : I \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f_{s,N}(t) = T_I^N \circ \gamma_{s,N}(t) - \gamma_I^{s,N}(t) \quad (4.16)$$

É claro que $f_{s,N}$ é contínua, pois é a subtração de 2 funções contínuas. Como, pela definição de $C(s, N)$,

$$T_\phi^N \circ \gamma_{s,N}(t) = \gamma_\phi^{s,N}(t) + s.\pi, \text{ para todo } t \in I$$

Temos :

$$f_{s,N}(\bar{t}) = 0 \Leftrightarrow \gamma_{s,N}(\bar{t}) \in C(s, N) \text{ é um ponto } (s, N) \text{ periódico para } T,$$

onde dizemos que um ponto Q é (s, N) periódico para T , se e só se :

$$\begin{aligned} p_2 \circ T^N(Q) &= p_2(Q) \\ p_1 \circ T^N(Q) &= p_1(Q) + s.\pi \end{aligned}$$

Como T satisfaz a propriedade P.I.C., $T(C(s, N)) \cap C(s, N) \neq \emptyset$.

Agora, vamos aplicar a seguinte proposição (ver Le Calvez [30]) :

Proposição 5 : Se $z \in T(C(s, N)) \cap C(s, N) \Rightarrow z$ é ponto (s, N) periódico para T .

Prova :

Para cada $z \in \mathbb{R}^2$, seja V_z a reta vertical por z . Como T desvia a vertical para a direita ($T \in D_d^1(\mathbb{R}^2)$), $T(V_{T^{-1}(z)}) \cap V_z = z$. Agora suponha que $z \in T(C(s, N)) \cap C(s, N)$:

$$\begin{aligned} T^N(z) &= T(V_{T^{N-1}(z)}) \cap V_{T^N(z)} = \\ &= T(V_{T^{-1}(z)+(s.\pi, 0)}) \cap V_{z+(s.\pi, 0)} = T(V_{T^{-1}(z+(s.\pi, 0))}) \cap V_{z+(s.\pi, 0)} = \\ &= z + (s.\pi, 0) \end{aligned}$$

Assim, z é ponto (s, N) periódico para T . $\square$

Logo, para todos $s \in \mathbb{Z}$, $N > 0$. $\exists \bar{t} \in I$, tal que $f_{s,N}(\bar{t}) = 0$.

Do lema (4), para o $k > 0$ dado, $\exists N > 0$, $\tilde{P} = (\phi_{\tilde{P}}, I_{\tilde{P}}) \in S^1 \times \mathbb{R}$, tal que $T^N(\tilde{P}) = T^N(\phi_{\tilde{P}}, I_{\tilde{P}}) = (\phi_{\tilde{P}} + r.\pi, I_{\tilde{P}}^N)$, com $I_{\tilde{P}}^N > I_{\tilde{P}} + (k+1).\pi$, para algum $r \in \mathbb{Z}$. Para cada $s \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ fixo, como $T \in TQ$, podemos supor que :

1) $\tilde{P}$ está abaixo de $C(s, N)$ e $\tilde{P} + (0, \pi)$ está acima, ou

2) $\tilde{P} \in C(s, N)$.

Para ver isto, basta tomar a família de pontos $\tilde{P} + (0, l.\pi)$, com $l \in \mathbb{Z}$ e observar que para l suficientemente pequeno $\tilde{P} + (0, l.\pi)$ está abaixo de $C(s, N)$ e para l suficientemente grande $\tilde{P} + (0, l.\pi)$ está acima de $C(s, N)$. Assim, ou existe pelo menos um $l_0 \in \mathbb{Z}$, tal que $\tilde{P} + (0, l_0.\pi)$ está abaixo de $C(s, N)$ e $\tilde{P} + (0, (l_0 + 1).\pi)$ está acima de $C(s, N)$, ou $\tilde{P} + (0, l_0.\pi) \in C(s, N)$. Agora, basta chamar $\tilde{P} + (0, l_0.\pi)$ de $\tilde{P}$.

O caso 2 acima implica que $\exists \tilde{t} \in I = [a, b]$, tal que $\gamma_{s,N}(\tilde{t}) = \tilde{P} \Rightarrow f_{s,N}(\tilde{t}) > (k+1).\pi > k.\pi$

O caso 1, implica que $\mu^-(\phi_{\tilde{P}}) < I_{\tilde{P}} + \pi$, pois $\tilde{P} + (0, \pi)$ está acima de $C(s, N)$. Do corolário (2), temos que $\hat{T}^N(\phi_{\tilde{P}}, \mu^-(\phi_{\tilde{P}})) = (\phi_{\tilde{P}}, \nu^+(\phi_{\tilde{P}}))$, onde $\hat{T}$ é a aplicação no cilindro, induzida por T . Como $\tilde{P}$ está abaixo de $C(s, N)$ e $\hat{T} \in \text{Diff}_d^1(S^1 \times \mathbb{R})$ (preserva os extremos infinitos do cilindro), $\hat{T}^N(\tilde{P})$ está abaixo de $\hat{T}^N(C(s, N))$. Logo, $\nu^+(\phi_{\tilde{P}}) > p_2 \circ \hat{T}^N(\tilde{P}) > I_{\tilde{P}} + (k+1).\pi = k.\pi + (I_{\tilde{P}} + \pi) > k.\pi + \mu^-(\phi_{\tilde{P}})$. Assim, seja $\tilde{t} \in I = [a, b]$, tal que $\gamma_{s,N}(\tilde{t}) = (\phi_{\tilde{P}}, \mu^-(\phi_{\tilde{P}})) \Rightarrow f_{s,N}(\tilde{t}) > k.\pi$

Assim, em ambos os casos, 1 e 2, $\exists \tilde{t} \in I = [a, b]$, tal que $f_{s,N}(\tilde{t}) > k.\pi$. Como já foi dito antes, também $\exists \bar{t} \in I$, tal que $f_{s,N}(\bar{t}) = 0$. Além disso, $f_{s,N}(a) = f_{s,N}(b)$. Logo, $\exists t_1, t_2 \in [a, b]$, com $\{t_1, t_2\} \neq \{a, b\}$, tais que $f_{s,N}(t_1) = f_{s,N}(t_2) = k.\pi$.

Sejam agora, $P_1^s = \gamma_{s,N}(t_1)$ e $P_2^s = \gamma_{s,N}(t_2)$. Então, é claro que, para $i = 1, 2$:

$$p_2 \circ T^N(P_i^s) = p_2(P_i^s) + k.\pi$$

$$p_1 \circ T^N(P_i^s) = p_1(P_i^s) \pmod{\pi}$$

E, como $t_1 \neq t_2$, $P_1^s \neq P_2^s$. Mais ainda, $P_i^{s_1} \neq P_j^{s_2}$, para $s_1 \neq s_2$, com $0 < s_1, s_2 < N-1$, $\forall i, j \in \{1, 2\}$.

Assim, fazendo s percorrer todo o conjunto $\{0, 1, 2, \dots, N-1\}$, o teorema está provado. $\square$

Agora, vamos provar o teorema :

Teorema 6 : *Nas hipóteses do teorema anterior, se $\bar{T}$ possui uma órbita periódica com $\rho_V = \frac{k}{N}$, então para todo par (k', N') , com $0 < \left| \frac{k'}{N'} \right| < \left| \frac{k}{N} \right|$ e $k.k' > 0$, $\bar{T}$ possui pelo menos 2 órbitas periódicas com número de rotação vertical $\rho'_V = \frac{k'}{N'}$.*

Prova :

Novamente, vamos supor $k > 0 \Rightarrow k' > 0$. No caso $k < 0$, a demonstração é análoga.

Das hipóteses do teorema, $\exists a > 0$ inteiro. $P = (\phi_P, I_P) \in S^1 \times \mathbb{R}$, tal que :

$$\begin{aligned} p_2 \circ T^{aN}(P) &= p_2(P) + a.k.\pi \\ p_1 \circ T^{aN}(P) &= p_1(P) \pmod{\pi} \end{aligned}$$

Seja $M = mmc(a.N, N')$. Então, $M = c.a.N = c'.N'$, para algum par c, c' de inteiros positivos. E, é claro que :

$$\begin{aligned} p_2 \circ T^M(P) &= p_2(P) + c.a.k.\pi \\ p_1 \circ T^M(P) &= p_1(P) \pmod{\pi} \end{aligned}$$

Como,

$$\frac{k'}{N'} = \frac{c'.k'}{M} < \frac{k}{N} = \frac{c.a.k}{M} \Rightarrow c'.k' < c.a.k$$

Assim,

$$\begin{aligned} p_2 \circ T^M(P) &\geq p_2(P) + (c'.k' + 1).\pi \\ p_1 \circ T^M(P) &= p_1(P) \pmod{\pi} \end{aligned}$$

Agora, a demonstração segue a do teorema anterior.

Para cada $s \in \{0, 1, 2, \dots, M-1\}$ fixo, definimos como anteriormente, a função $f_{s,M} : I \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f_{s,M}(t) = T_I^M \circ \gamma_{s,M}(t) - \gamma_I^{s,M}(t)$$

Além disso, como T satisfaz a propriedade P.I.C., $T(C(s, M)) \cap C(s, M) \neq \emptyset$, o que implica, da proposição (5), que $\exists \bar{t} \in I$, tal que $f_{s,M}(\bar{t}) = 0$ (como no teorema anterior).

Agora, temos 2 possibilidades (como no teorema anterior) :

- 1) P está abaixo de $C(s, M)$ e $P + (0, \pi)$ está acima. ou
- 2) $P \in C(s, M)$.

O caso 2 acima implica que $\exists \tilde{t} \in I = [a, b]$, tal que $\gamma_{s,M}(\tilde{t}) = P \Rightarrow f_{s,M}(\tilde{t}) > c'.k'.\pi$

O caso 1. implica que $\mu^-(\phi_P) < I_P + \pi$, pois $P + (0, \pi)$ está acima de $C(s, M)$. Do corolário (2), temos que $\hat{T}^M(\phi_P, \mu^-(\phi_P)) = (\phi_P, \nu^+(\phi_P))$, onde $\hat{T}$ é a aplicação no cilindro, induzida por T . Como P está abaixo de $C(s, M)$ e $\hat{T} \in \text{Dif}_d^1(S^1 \times \mathbb{R})$ (preserva os extremos infinitos do cilindro), $\hat{T}^M(P)$ está abaixo de $\hat{T}^M(C(s, M))$. Logo, como anteriormente, $\nu^+(\phi_P) > p_2 \circ \hat{T}^M(P) \geq I_P + (c'.k' + 1).\pi = c'.k'.\pi + (I_P + \pi) > c'.k'.\pi + \mu^-(\phi_P)$. Assim, seja $\tilde{t} \in I = [a, b]$, tal que $\gamma_{s,M}(\tilde{t}) = (\phi_P, \mu^-(\phi_P)) \Rightarrow f_{s,M}(\tilde{t}) > c'.k'.\pi$

Assim, tanto em 1 como em 2, $\exists \tilde{t} \in I = [a, b]$, tal que $f_{s,M}(\tilde{t}) > c'.k'.\pi$. Como já foi dito antes, também $\exists \bar{t} \in I$, tal que $f_{s,M}(\bar{t}) = 0$. Além disso, $f_{s,M}(a) = f_{s,M}(b)$. Logo, $\exists t_1, t_2 \in [a, b]$, com $\{t_1, t_2\} \neq \{a, b\}$, tais que $f_{s,M}(t_1) = f_{s,M}(t_2) = c'.k'.\pi$.

Sejam agora, $P_1^s = \gamma_{s,M}(t_1)$ e $P_2^s = \gamma_{s,M}(t_2)$. Então, é claro que, para $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} p_2 \circ T^M(P_i^s) &= p_2(P_i^s) + c'.k'.\pi \\ p_1 \circ T^M(P_i^s) &= p_1(P_i^s) \pmod{\pi} \end{aligned}$$

O que implica que,

$$\rho_V(P_i^s) = \frac{c'.k'}{M} = \frac{c'.k'}{c'.N'} = \frac{k'}{N'}$$

E , como $t_1 \neq t_2$, $P_1^s \neq P_2^s$. Mais ainda, $P_i^{s_1} \neq P_j^{s_2}$, para $s_1 \neq s_2$, com $0 < s_1, s_2 < M - 1$, $\forall i, j \in \{1, 2\}$.

Assim, fazendo s percorrer todo o conjunto $\{0, 1, 2, \dots, M - 1\}$, o teorema está provado. $\square$

Agora vamos à prova do teorema que complementa o anterior :

Teorema 7 : *Nas hipóteses dos teoremas anteriores, acrescentando $\det [DT(\phi, I)] > 0$ (o que implica que $\bar{T}$ preserva orientação no toro), se $\bar{T}$ possui uma órbita com $\rho_V = \omega$ (periódica se $\omega \in \mathbb{Q}$ e quase-periódica caso contrário), então para todo $\omega' \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, com $0 < |\omega'| < |\omega|$ e $\omega.\omega' > 0$, $\bar{T}$ possui pelo menos 1 órbita com número de rotação vertical $\rho_V = \omega'$.*

Prova :

Vamos dividir a prova em 2 casos (como antes, vamos supor $\omega > 0 \Rightarrow \omega' > 0$. O outro caso é análogo) :

Caso I) $\omega \in \mathbb{Q}$.

Como $\omega' \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, existe uma sequência

$$\frac{p_i}{q_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \omega', \text{ com } 0 < \frac{p_i}{q_i} < \omega, \forall i > 0$$

e (do teorema anterior) uma família de órbitas periódicas

$$E_i = \{P_1^i, P_2^i, \dots, P_{N_i}^i\} \subset T^2, \text{ com } \rho_V(E_i) = \frac{p_i}{q_i}.$$

Então, na topologia de Hausdorff, existe uma subsequência $E_{i_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E$. Por facilidade de notação, vamos chamar essa subsequência simplesmente de E_n .

A convergência na topologia de Hausdorff, $E_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E$, significa que :

Dado $\epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \geq n_0$, $E_n \subset B_\epsilon(E)$ e $E \subset B_\epsilon(E_n)$.

Dessa forma, para todo $z \in E$, existe uma sequência $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z$, com $z_n \in E_n$. O grande problema para se obter que $\rho_V(z) = \omega'$, para todo $z \in E$, reside no fato de que, a priori, não há um controle sobre a uniformidade dos números de rotação verticais para as órbitas E_n . Se soubessemos que dado $\epsilon > 0$, $\exists \hat{i}(\epsilon) > 0$ ($\hat{i}$ independente de n), tal que $(\forall z_n \in E_n)$

$$\left| \frac{p_2 \circ T^i(z_n) - p_2(z_n)}{\pi i} - \frac{p_n}{q_n} \right| < \epsilon, \text{ para todo } i > \hat{i}, \forall n > 0,$$

o problema estaria resolvido. No entanto, alguns resultados de [35] e algumas idéias de [32] podem ser aqui adaptados e implicam no seguinte :

Lema 5 : Nas hipóteses anteriores, para todo $\omega' \in (0, \omega) \setminus \mathbb{Q}$, existe uma órbita quase-periódica $\bar{E}$, tal que $\rho_V(\bar{E}) = \omega'$.

Prova :

Será feita mais adiante, na página 127. $\square$

Caso II) $\omega \notin \mathbb{Q}$.

Pelo que foi feito no caso I), basta provar que para todo $0 < \frac{p}{q} < \omega$, existe uma órbita periódica com $\rho_V = \frac{p}{q}$.

A prova desse fato será feita através de um argumento semelhante ao utilizado no lema (4).

Seja $z = (\phi_z, I_z) \in \mathbb{T}^2$, tal que $\rho_V(z) = \omega$. Por hipótese, $T \in TQ$, assim escrevendo T como

$$T : \begin{cases} \phi' = T_\phi(\phi, I) \\ I' = T_I(\phi, I) \end{cases}, \text{ temos (como já foi visto) que para todo } (\phi, I) \in \mathbb{R}^2$$

$$\exists b > 0, \text{ tal que } \left| \frac{\partial T_\phi}{\partial \phi} \right| < b \text{ e}$$

$$\exists K > 0, \text{ tal que } \frac{\partial T_\phi}{\partial I} \geq K \text{ (condição de twist).}$$

Vamos agora relembrar as proposições (3) e (4) :

Proposição 3 : Para $T \in TQ$, $\exists a > 0$, tal que $\forall Q \in S^1 \times \mathbb{R}$,
 $p_2 \circ (T(Q) - Q) > -a$.

Proposição 4 : Dada uma curva $\gamma : J = [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que :

$$\sup_{t,s \in J} |p_1 \circ \gamma(t) - p_1 \circ \gamma(s)| < \pi$$

$$|p_2 \circ \gamma(\beta) - p_2 \circ \gamma(\alpha)| > \frac{(2+b) \cdot \pi}{K}$$

Então, $\exists k \in \mathbb{Z}$, tal que $\phi_z + k \cdot \pi \in p_1(T \circ \gamma(J))$.

Seja r o segmento de reta vertical dado por $r = \{(\phi, I) \in S^1 \times [0, \pi[: \phi = \phi_z\}$.

Como $|p_1 \circ T^n(\phi_z, 0) - p_1 \circ T^n(\phi_z, \pi)| = n \cdot \pi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, para todo $n > 1$, $\exists$ pelo menos um $k \in \mathbb{Z}$, tal que $\phi_z + k \cdot \pi \in p_1(T^n(r))$. Como $p_1(z) = \omega$, temos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{p_2 \circ T^N(z) - p_2(z)}{\pi N} = \omega.$$

Por outro lado, como $0 < \frac{p}{q} < \omega$, é claro que existe $N_0 > 1$, tal que

$$\text{para todo } n \geq N_0 \Rightarrow \frac{p}{q} \left(\frac{n+1}{n} \right) + \left[\frac{(2+b) \cdot \pi}{K} + \frac{(a+3 \cdot \pi)}{\pi} \right] \frac{1}{n} < \omega$$

Assim, existe $N_1 \geq N_0$, tal que :

$$n \geq N_1 \Rightarrow p_2 \circ T^n(z) - p_2(z) > \frac{p}{q} \cdot \pi \cdot (n+1) + \left[\frac{(2+b) \cdot \pi}{K} + a + 3 \cdot \pi \right] \quad (4.17)$$

Fixemos agora $\bar{n} > 0$, tal que $\bar{n} \cdot q - 1 > N_1 > 1$. Então, de (4.17) temos que :

$$p_2 \circ T^{\bar{n} \cdot q - 1}(z) - p_2(z) > \left[p \cdot \bar{n} \cdot \pi + \frac{(2+b) \cdot \pi}{K} + a + 3 \cdot \pi \right]$$

Vamos supor por absurdo que, para todo $n \in \{2, \dots, \bar{n}.q\}$, temos :

$$\begin{aligned} & \text{Se } \tilde{z} \in r \text{ é tal que } p_1 \circ T^n(\tilde{z}) - p_1(\tilde{z}) = l.\pi, \text{ para algum } l \in \mathbb{Z}, \\ & \text{então : } \frac{p_2 \circ T^n(\tilde{z}) - p_2(\tilde{z})}{\pi.n} \leq \frac{p}{q} + \frac{2}{n} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Como $\exists l \in \mathbb{Z}$ tal que $\phi_z + l.\pi \in p_1(T^n(r))$, para todo $n \in \{2, \dots, \bar{n}.q\}$ (obviamente, $l = l(n)$), de (4.18) temos que existe $z_1 \in r$ tal que :

$$\begin{aligned} & p_2 \circ T^{\bar{n}.q-1}(z_1) - p_2(z_1) = p.\pi.\bar{n} + a + 2.\pi \\ & e \forall t \in \overline{z_1 z} \subset r \text{ temos :} \\ & p_2 \circ T^{\bar{n}.q-1}(t) - p_2(t) > p.\pi.\bar{n} + a + 2.\pi, \\ & \sup_{t, x \in \overline{z_1 z}} |p_1 \circ T^{\bar{n}.q-1}(t) - p_1 \circ T^{\bar{n}.q-1}(x)| < \pi \end{aligned}$$

Então, das proposições (4) e (3), $\exists \bar{z} \in \overline{z_1 z} \subset r$, tal que :

$$\begin{aligned} & p_1 \circ T^{\bar{n}.q}(\bar{z}) - p_1(\bar{z}) = l.\pi, \text{ para algum } l \in \mathbb{Z} \\ & p_2 \circ T^{\bar{n}.q}(\bar{z}) - p_2(\bar{z}) > p.\pi.\bar{n} + 2.\pi = (p.\bar{n} + 2).\pi \end{aligned}$$

O que implica que :

$$\frac{p_2 \circ T^{\bar{n}.q}(\bar{z}) - p_2(\bar{z})}{\pi.\bar{n}.q} > \frac{p}{q} + \frac{2}{\bar{n}.q}.$$

O que contradiz (4.18). Ou seja, $\exists n \in \{2, \dots, \bar{n}.q\}$, $\bar{z} = (\phi_z, I_{\bar{z}}) \in r$, tal que :

$$\begin{aligned} & p_1 \circ T^n(\bar{z}) - p_1(\bar{z}) = l.\pi, \text{ para algum } l \in \mathbb{Z} \\ & \frac{p_2 \circ T^n(\bar{z}) - p_2(\bar{z})}{\pi.n} > \frac{p}{q} + \frac{2}{n} \end{aligned}$$

Agora, basta observar que :

$$p_2 \circ T^n(\bar{z}) - p_2(\bar{z}) > \left(\frac{p}{q}.n + 2 \right) . \pi$$

Seja agora, como nos teoremas anteriores, para cada $s \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ fixo, a seguinte função $f_{s,n} : I \rightarrow \mathbb{R}$ ($\gamma_{s,n}(I) = C(s, n)$):

$$f_{s,n}(t) = T_I^n \circ \gamma_{s,n}(t) - \gamma_I^{s,n}(t)$$

Como já foi mostrado nos teoremas anteriores, $\exists \bar{t} \in I$, tal que $f_{s,n}(\bar{t}) = 0$. Podemos supor que (por $T \in TQ$) :

1) $\bar{z}$ está abaixo de $C(s, n)$ e $\bar{z} + (0, \pi)$ está acima, ou

2) $\bar{z} \in C(s, n)$.

A prova desse fato já foi feita anteriormente.

O caso 2 acima implica que $\exists \tilde{t} \in I = [a, b]$, tal que $f_{s,n}(\tilde{t}) > \left(\frac{p}{q}.n + 1\right) \cdot \pi$

O caso 1, implica que $\mu^-(\phi_z) < I_{\bar{z}} + \pi$, pois $\bar{z} + (0, \pi)$ está acima de $C(s, n)$. Do corolário (2), temos que $\hat{T}^n(\phi_z, \mu^-(\phi_z)) = (\phi_z, \nu^-(\phi_z))$, onde $\hat{T}$ é a aplicação no cilindro, induzida por T . Como $\bar{z}$ está abaixo de $C(s, n)$ e $\hat{T} \in Dif_d^1(S^1 \times \mathbb{R})$ (preserva os extremos infinitos do cilindro), $\hat{T}^n(\bar{z})$ está abaixo de $\hat{T}^n(C(s, n))$. Logo, $\nu^+(\phi_z) > p_2 \circ \hat{T}^n(\bar{z}) > I_{\bar{z}} + \left(\frac{p}{q}.n + 2\right) \cdot \pi = \left(\frac{p}{q}.n + 1\right) \cdot \pi + (I_{\bar{z}} + \pi) > \left(\frac{p}{q}.n + 1\right) \cdot \pi + \mu^-(\phi_z)$. Assim, seja $\tilde{t} \in I = [a, b]$, tal que $\gamma_{s,n}(\tilde{t}) = (\phi_z, \mu^-(\phi_z)) \Rightarrow f_{s,n}(\tilde{t}) > \left(\frac{p}{q}.n + 1\right) \cdot \pi$.

Portanto, em ambos os casos, 1 e 2, $\exists \tilde{t} \in I = [a, b]$, tal que $f_{s,n}(\tilde{t}) > \left(\frac{p}{q}.n + 1\right) \cdot \pi$. Como já foi dito antes, também $\exists \bar{t} \in I$, tal que $f_{s,n}(\bar{t}) = 0$. Além disso, $f_{s,n}(a) = f_{s,n}(b)$. Logo, $\exists t_1, t_2 \in [a, b]$, com $\{t_1, t_2\} \neq \{a, b\}$, tais que $f_{s,n}(t_1) = f_{s,n}(t_2) = m_{int} \cdot \pi$, onde

$$m_{int} \text{ é o inteiro positivo, tal que : } \frac{p}{q}.n \leq m_{int} < \frac{p}{q}.n + 1$$

Sejam agora, $Z_1^s = \gamma_{s,n}(t_1)$ e $Z_2^s = \gamma_{s,n}(t_2)$. Então, é claro que, para $i = 1, 2$:

$$p_2 \circ T^n(Z_i^s) = p_2(Z_i^s) + m_{int} \cdot \pi$$

$$p_1 \circ T^n(Z_i^s) = p_1(Z_i^s) \pmod{\pi}$$

E , como $t_1 \neq t_2$, $Z_1^s \neq Z_2^s$. Mais ainda. $Z_i^{s_1} \neq Z_j^{s_2}$, para $s_1 \neq s_2$, com $0 < s_1, s_2 < n - 1$, $\forall i, j \in \{1, 2\}$.

Assim, fazendo s percorrer todo o conjunto $\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$, garantimos a existência de pelo menos 2 órbitas periódicas com

$$\rho_V = \frac{m_{int}}{n} \geq \frac{p}{q}.$$

E finalmente, se $\frac{m_{int}}{n} > \frac{p}{q}$, basta aplicar o teorema (6) para garantir a existência de uma órbita periódica com $\rho_V = \frac{p}{q}$. $\square$

A prova do teorema (8) é essencialmente uma adaptação da prova do teorema 1. parte i) de [32], que por sua vez é uma aplicação da teoria de Nielsen-Thurston sobre a classificação de homeomorfismos de superfícies (ver [36] e [37]), teoria esta, também crucial na prova do lema (5). Além disso, a prova desse lema depende também da generalização de alguns resultados de [35].

Assim, vamos começar com algumas definições e teoremas úteis.

Definições : Seja M uma superfície conexa, orientável, compacta, com ou sem bordo e $f : M \rightarrow M$ um homeomorfismo. 2 homeomorfismos são ditos isotópicos se eles forem homotópicos via homeomorfismos. De fato, para superfícies fechadas orientáveis, todos os pares de homeomorfismos homotópicos são isotópicos (ver [40]).

Um homeomorfismo f é dito de ordem finita, se $\exists n > 0$, tal que $f^n = Id$ em M . O menor desses $n > 0$ é chamado ordem de f . Homeomorfismos de ordem finita tem entropia topológica nula.

Um homeomorfismo $f : M \rightarrow M$ é chamado de pseudo-Anosov se existe $\lambda > 1$ e um par de folheações transversais F_S e F_U tais que $f(F_S) = \lambda^{-1} \cdot F_S$ e $f(F_U) = \lambda \cdot F_U$. Homeomorfismos pseudo-Anosov são topologicamente transitivos, tem entropia topológica positiva e admitem partições de Markov (ver [38]).

Um homeomorfismo f é dito redutível por um sistema de curvas

$$C = \bigcup_{i=1}^n C_i$$

disjuntas, simples e fechadas se :

- $\forall i, C_i$ não é homotópica a um ponto, nem a uma componente do ∂M ,
- $\forall i \neq j, C_i$ não é homotópica à C_j ,
- C é invariante por f .

Observação : As curvas C_i são ditas redutíveis.

Vamos agora enunciar alguns resultados importantes (para provas, ver as referências citadas) :

Teorema 23 : Se $\chi(M) < 0$, então qualquer homeomorfismo $f : M \rightarrow M$ é isotópico a um homeomorfismo $F : M \rightarrow M$ tal que ou :

- i) F tem ordem finita.
- ii) F é pseudo-Anosov.
- iii) F é redutível por um sistema de curvas C

Prova : ver [36], [38] e [39]. $\square$

Teorema 24 : Se f é pseudo-Anosov e g é isotópico a f , então $h(g) \geq h(f) > 0$.

Prova : ver [36] e [38]. $\square$

As proposições 1.1 e 1.2 de [35] podem ser trivialmente adaptadas de forma que se troque o anel A pelo toro T^2 e se use as seguintes definições, para número de rotação e conjunto de rotação :

Dada $f : T^2 \rightarrow T^2$, homotópica a uma aplicação $\bar{T}$, induzida por um elemento de TQ , e um levantamento de f para o cilindro, $\hat{f} : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$, definimos o conjunto de rotação vertical $\rho_V(\hat{f}) = \cup \rho_V(\hat{f}, z)$, onde a união é feita sobre todo $z \in T^2$, tal que o número de rotação vertical

$$\rho_V(\hat{f}, z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{p_2 \circ \hat{f}^N(z) - p_2(z)}{\pi N} \text{ existe.}$$

Dizemos que $f : T^2 \rightarrow T^2$ é pseudo-anosov relativamente a um conjunto finito invariante Q , se todas as propriedades de um homeomorfismo pseudo-anosov são satisfeitas, exceto que as folheações estável e instável podem ter singularidades em pontos de Q .

Proposição 6 (1.1 modificada) : Se $f : T^2 \rightarrow T^2$, homotópica a uma aplicação $\bar{T}$, induzida por um elemento de TQ , é pseudo-anosov relativamente a um conjunto finito invariante Q , então $\rho_V(\hat{f})$ é um intervalo fechado. Para cada $\omega \in \rho_V(\hat{f})$, existe um conjunto compacto invariante $E_\omega \subset T^2$, tal que $\rho_V(\hat{f}, z) = \omega$, para todo $z \in E_\omega$. Mais ainda, se $\omega \in \text{int}(\rho_V(\hat{f}))$, então podemos escolher $E_\omega \subset T^2 \setminus Q$.

Prova : Como em [35]. $\square$

Proposição 7 (1.2 modificada) : Suponha que $f : T^2 \rightarrow T^2$ é pseudo-anosov relativamente a um conjunto finito invariante Q e que $\bar{T} : T^2 \rightarrow T^2$ (induzida por algum elemento de TQ) é homotópica à f relativamente a Q . Se $\hat{f} : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ e $\hat{T} : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ são levantamentos respectivamente de f e de $\bar{T}$, equivariantemente homotópicos relativamente a $\hat{Q}$, pré-imagem de Q no cilindro pela projeção do cilindro no toro, então $\rho_V(\hat{T}) \supset \text{int}(\rho_V(\hat{f}))$. Mais ainda, para cada $\omega \in \text{int}(\rho_V(\hat{f}))$, existe um conjunto compacto $\bar{T}$ -invariante E_ω , tal que $\rho_V(\hat{T}, z) = \omega$, para todo $z \in E_\omega$.

Prova : Também como em [35]. $\square$

Agora vamos provar alguns resultados que serão úteis nas provas do teorema (8) e do lema (5).

Lema 6 : Seja $\bar{T}$ uma aplicação no toro $T^2 = S^1 \times S^1$, induzida por algum $T \in TQ$ e $C \subset T^2$ uma curva fechada simples, não homotopicamente trivial, $\bar{T}^s$ -invariante, para algum $s > 0$. Então C é uma curva fechada simples rotacional no cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$. Mais ainda, a classe de homotopia de C é a única classe de homotopia de curvas fechadas simples que é preservada por iteradas de $\bar{T}$.

Prova :

A prova desse lema depende de algumas observações :

- i) $\pi_1(T^2) \stackrel{\text{isomorfo}}{\simeq} \mathbb{Z}^2$, ou seja é um grupo abeliano,
- ii) Como $\bar{T}$ é um difeomorfismo no toro, a aplicação $\bar{T}_* : \pi_1(T^2) \rightarrow \pi_1(T^2)$ induzida por $\bar{T}$ é um endomorfismo e uma bijeção (ou seja, é um automorfismo),
- iii) 2 possíveis geradores para $\pi_1(T^2)$ são $x_1 = (1, 0)$ e $x_2 = (0, 1)$. Toda curva C como no enunciado do lema é tal que $[C] = x_1^n \cdot x_2^m$, para algum par $(n, m) \neq (0, 0)$,

iv) $\bar{T}_*([C]) = [\bar{T} \circ C]$, assim $\bar{T}_*^n([C]) = [\bar{T}^n \circ C]$,

v) Por $T \in TQ$, $\bar{T}_*(x_1) = x_1$ e $\bar{T}_*(x_2) = x_1.x_2$

Assim, se C é uma curva fechada simples, não homotopicamente trivial, $\bar{T}^s$ -invariante, para algum $s > 0$, é claro que :

$$[C] = [\bar{T}^s \circ C] \Leftrightarrow \bar{T}_*^s([C]) = [C]$$

Agora, sejam (n_C, m_C) tais que $[C] = x_1^{n_C}.x_2^{m_C}$. Então,

$$\bar{T}_*^s([C]) = x_1^{n_C+s.m_C}.x_2^{m_C} = [C] = x_1^{n_C}.x_2^{m_C} \Rightarrow m_C = 0.$$

Assim, $[C] = x_1^{n_C}$. Como C é curva fechada simples, $n_C = 1$ e o lema está provado. $\square$

Lema 7 : Sejam $f, g : T^2 \rightarrow T^2$ 2 homeomorfismos isotópicos. Então $f_* = g_*$, onde $f_*, g_* : \pi_1(T^2) \xrightarrow{\cdot} \pi_1(T^2)$ são as aplicações induzidas respectivamente por f e por g em $\pi_1(T^2)$.

Prova :

Seja $\gamma : I \rightarrow T^2$ uma curva fechada simples. Como f e g são isotópicos, existe uma função contínua $F : [0, 1] \times T^2 \rightarrow T^2$, tal que :

i) para todo $t \in [0, 1]$ fixo, $F(t, \bullet) : T^2 \rightarrow T^2$ é um homeomorfismo,

ii) $F(0, \bullet) = f(\bullet)$ e $F(1, \bullet) = g(\bullet)$.

Seja agora $F(t, \gamma(s)) : [0, 1] \times I \rightarrow T^2$. É claro que essa função é contínua em (t, s) . $F(0, I) = f(\gamma)$ e $F(1, I) = g(\gamma)$. Logo $[f(\gamma)] = [g(\gamma)] \Rightarrow f_*([\gamma]) = g_*([\gamma])$. Como γ é qualquer, o lema segue. $\square$

Lema 8 : Seja $f : T^2 \rightarrow T^2$ um homeomorfismo isotópico a uma aplicação no toro induzida por um elemento de TQ . Se existe $l > 0$, tal que f^l possui uma curva fechada simples invariante γ , com $[\gamma] = x_1 = (1, 0)$, então f não pode possuir uma órbita com número de rotação vertical $\rho_V \neq 0$ e outra com $\rho_V = 0$.

Prova :

Suponha que $f^n(P) = P$, para algum $P \in T^2$ e $\rho_V(P) = \frac{k}{n} > 0$ (o caso < 0 é análogo) e $f^m(R) = R$, para algum $R \in T^2$ e $\rho_V(R) = 0$. Do enunciado do lema é claro que (seja $\hat{f} : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ a aplicação no cilindro induzida por f) :

$\hat{f}^l(\hat{\gamma}) = \hat{\gamma} + (0, r.\pi)$, para algum $r \in \mathbb{Z}$, onde $\hat{\gamma}$ é qualquer curva no cilindro, tal que a sua projeção no toro coincide com γ , suposta invariante por f^l .

Como γ é curva fechada simples rotacional no toro, $(\hat{\gamma} + (0, i.\pi)) \cap \hat{\gamma} = \emptyset$, $\forall i \in \mathbb{Z}^*$. Sejam agora $N = mmc(n, m, l) = a.n = b.m = c.l$ e $\hat{P}$ e $\hat{R}$ quaisquer pontos do cilindro, que quando projetados no toro coincidem respectivamente com P e R . Temos agora 2 casos a analisar :

i) $(\hat{R}, \hat{\gamma})$ podem ser escolhidos tais que $\hat{R} \in \hat{\gamma}$.

$$\hat{f}^N(\hat{R}) = \hat{R} \in \hat{\gamma}$$

$$\hat{f}^N(\hat{R}) \in \hat{f}^N(\hat{\gamma}) = \hat{\gamma} + (0, c.r.\pi)$$

$$\text{Assim. } \hat{\gamma} \cap (\hat{\gamma} + (0, c.r.\pi)) \neq \emptyset \Rightarrow c.r = 0 \Rightarrow r = 0.$$

$$\text{Ou seja, } \forall i > 1 \text{ inteiro. } \hat{f}^{i.l}(\hat{\gamma}) = \hat{\gamma}.$$

ii) $(\hat{R}, \hat{\gamma})$ podem ser escolhidos tais que $\hat{R}$ está acima de $\hat{\gamma}$ e abaixo de $\hat{\gamma} + (0, \pi)$.

$$\hat{f}^N(\hat{R}) = \hat{R} \in \text{região entre } \hat{\gamma} \text{ e } \hat{\gamma} + (0, \pi)$$

$$\hat{f}^N(\hat{R}) \in \text{região entre } \hat{\gamma} + (0, c.r.\pi) \text{ e } \hat{\gamma} + (0, \pi) + (0, c.r.\pi)$$

$$\text{Assim. } c.r = 0 \Rightarrow r = 0.$$

$$\text{Ou seja, } \forall i > 1 \text{ inteiro, } \hat{f}^{i.l}(\hat{\gamma}) = \hat{\gamma}.$$

Por outro lado, em qualquer uma das situações acima podemos escolher $\hat{P}$ abaixo de $\hat{\gamma}$. O que implica que $\hat{f}^{i.l}(\hat{P})$ está abaixo de $\hat{f}^{i.l}(\hat{\gamma}) = \hat{\gamma}$, para todo $i > 1$. Mas, da escolha de P , $\lim_{j \rightarrow \infty} p_2 \circ \hat{f}^j(\hat{P}) = +\infty$, assim para i suficientemente grande, $\hat{f}^{i.l}(\hat{P})$ fica acima de $\hat{\gamma}$, o que é um absurdo. Logo não podem existir 2 órbitas como no enunciado do lema. $\square$

Já vimos que todo $T \in TQ$, que satisfaz P.I.C. e não possui C.R.I.'s, induz uma aplicação $\bar{T}$ no toro que possui órbitas periódicas com número de rotação vertical não nulo. Suponha que $\bar{T}$ possua uma órbita periódica com $\rho_V = \omega > 0$.

Afirmção : Dado $\omega' \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, com $0 < \omega' < \omega$, existem $\frac{a_1}{b_1}$ e $\frac{a_2}{b_2}$, frações irredutíveis, tais que

$$0 < \frac{a_1}{b_1} < \omega' < \frac{a_2}{b_2} \leq \omega,$$

e órbitas periódicas Q_1 e Q_2 , com $\rho_V(Q_i) = \frac{a_i}{b_i}$ e $\#\{Q_i\} = b_i$, para $i = 1, 2$. Basta escolher (a_i, b_i) apropriadamente.

Prova :

Suponha que $\omega = \frac{a}{b}$, com $\text{mdc}(a, b) = 1$. Então, existe $s \in \mathbb{N}^*$, $z \in \mathbb{T}^2$ tal que :

$$p_2 \circ T^{s.b}(z) = p_2(z) + s.a.\pi$$

$$p_1 \circ T^{s.b}(z) = p_1(z) \pmod{\pi}$$

O s escolhido é o menor deles com a propriedade acima.

a) $i = 1$;

Seja $a_1 = 1$ e $l_1 \in \mathbb{N}^*$, tal que $\frac{a_1}{l_1.s.b} < \omega'$. Da demonstração do teorema (6), existe uma órbita periódica Q_1 , com $\rho_V(Q_1) = \frac{a_1}{l_1.s.b}$ e $\#\{Q_1\} = l_1.s.b$. Assim, $(a_1, b_1) = (1, l_1.s.b)$.

b) $i = 2$;

Se $s = 1$, basta fazer Q_2 igual a órbita periódica de $\rho_V = \omega$. Nesse caso, $\rho_V(Q_2) = \frac{a}{b}$ e $\#\{Q_2\} = b$. Assim, $(a_2, b_2) = (a, b)$.

Se $s > 1$, é claro que existe um inteiro $l_0 > 1$, tal que para $l > l_0$,

$$\omega' < \frac{s.a.l-1}{s.b.l} < \omega,$$

$$(a.s).l - 1 > b.$$

Por um teorema devido a Dirichlet, a P.A.

$$x_l = \{(a.s).l - 1, l \in \mathbb{N}^*\}$$

contém infinitos primos. Agora vamos escolher $l_2 > l_0$, tal que $x_{l_2} = (a.s).l_2 - 1$ é primo. Como

$$(a.s).l_2 - 1 > b, \quad (a.s).l_2 - 1 > s, \quad (a.s).l_2 - 1 > l_2,$$

$$\text{temos que } \text{mdc}((a.s).l_2 - 1, s.b.l_2) = 1.$$

Novamente da demonstração do teorema (6), existe uma órbita periódica Q_2 , com $\rho_V(Q_2) = \frac{s.a.l_2-1}{s.b.l_2}$ e $\#\{Q_2\} = l_2.s.b$. Assim, $(a_2, b_2) = (s.a.l_2 - 1, l_2.s.b)$. $\square$

Como $T \in TQ$ e satisfaz P.I.C., é claro que existe $R \in T^2$, tal que :

$$\begin{aligned} p_2 \circ T(R) &= p_2(R) \\ p_1 \circ T(R) &= p_1(R) \pmod{\pi} \end{aligned}$$

Seja $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup R$. Vamos fazer um "blow-up" em cada $x \in Q$ para um círculo S_x . Seja T_Q^2 a compactificação de $T^2 \setminus Q$, com S_x sendo a componente do bordo onde x foi retirado. Agora vamos estender $\bar{T} : T^2 \setminus Q \rightarrow T^2 \setminus Q$ para $\bar{T}_Q : T_Q^2 \rightarrow T_Q^2$, definindo $\bar{T}_Q : S_x \rightarrow S_x$ pela sua derivada: basta pensar em S_x como sendo o círculo unitário em $T_x T^2$ e definir

$$\bar{T}_Q(v) = \frac{D\bar{T}_x(v)}{\|D\bar{T}_x(v)\|}, \text{ para } v \in S_x.$$

$\bar{T}_Q$ é contínua em T_Q^2 porque $\bar{T}$ é C^1 em T^2 . Seja $b : T_Q^2 \rightarrow T^2$ a aplicação que colapsa cada S_x em x . Então $\bar{T} \circ b = b \circ \bar{T}_Q$, o que implica $h(\bar{T}_Q) \geq h(\bar{T})$ (ver página 111 de [27]). Na verdade $h(\bar{T}_Q) = h(\bar{T})$, pois cada fibra $b^{-1}(y)$ é um ponto ou um S_x e a entropia de $\bar{T}$ em qualquer uma dessas fibras é zero (a aplicação no círculo induzida por qualquer aplicação linear tem entropia nula). Essa construção é devida a Bowen (ver [29]).

Agora temos então o seguinte :

Teorema 25 : A aplicação $\bar{T}_Q : T_Q^2 \rightarrow T_Q^2$ é isotópica a um homeomorfismo pseudo-anosov em T_Q^2 .

Prova :

Pelo teorema (23), $\bar{T}_Q$ é isotópica a um homeomorfismo $F_Q : T_Q^2 \rightarrow T_Q^2$ (forma canônica de Thurston), de um dos seguintes tipos :

- i) F_Q tem ordem finita.
- ii) F_Q é pseudo-Anosov,
- iii) F_Q é redutível por um sistema de curvas C .

T_Q^2 deve ser pensado como sendo o toro com um número finito de discos do mesmo tamanho removidos, cada um centrado em um ponto $x \in Q$. Seja $F : T^2 \rightarrow T^2$ o completado de F_Q , isto é, o homeomorfismo obtido pela extensão radial de F_Q em todos os discos (ver [41]).

É fácil ver que F_Q não tem ordem finita, pois possui pontos com diferentes números de rotação (por construção de Q).

Dizemos que uma curva γ fechada simples, num toro com buracos, é rotacional, se depois de fechados os buracos, γ não é homotopicamente trivial. Suponha que F_Q possui uma curva γ , rotacional e redutível e seja $[\gamma] \in \pi_1(T^2)$ a sua classe de homotopia no toro sem buracos. Então, para algum $n > 0$, temos :

$$F_Q^n(\gamma) = \gamma \Rightarrow F^n(\gamma) = \gamma.$$

Aplicando agora o lema (7), temos :

$$(F^n)_*([\gamma]) = [\gamma] \Rightarrow \bar{T}_*^n([\gamma]) = [\gamma],$$

pois F_Q é isotópica à $\bar{T}_Q$, assim F é isotópica a qualquer aplicação no toro, induzida por um elemento de TQ . Desta forma, do lema (6), a classe de homotopia de γ no toro $T^2 = S^1 \times S^1$ só pode ser $[\gamma] = x_1 = (1, 0)$ (γ é curva fechada simples rotacional no cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$).

Como já foi dito, F é isotópica a qualquer aplicação no toro, induzida por um elemento de TQ . Assim, da existência das órbitas periódicas Q_1 (ou Q_2) e R , aplicando o lema (8) temos que, F e portanto F_Q , não possuem curvas rotacionais redutíveis.

Por outro lado, se γ é uma curva redutível, não-rotacional, então γ precisa envolver no mínimo 2 buracos (porque γ não é homotópica a uma componente do ∂T_Q^2). Esses buracos precisam ter o mesmo número de rotação, o que é impossível, pois $\rho_V(Q_1) \neq \rho_V(Q_2) \neq \rho_V(R) = 0$ e 2 pontos da mesma órbita não podem ser envolvidos pela mesma curva (por construção de Q_1 e Q_2).

Logo $F_Q : T_Q^2 \rightarrow T_Q^2$ é um homeomorfismo pseudo-anosov. $\square$

Vamos agora à prova do teorema (8) :

Teorema 8 : *Todo $T \in TQ$, tal que T não possui C.R.I.'s e T satisfaz P.I.C. induz uma aplicação $\bar{T} : T^2 \rightarrow T^2$, tal que $h(\bar{T}) > 0$.*

Prova :

Basta notar que após fazer toda a construção anterior, a aplicação $\bar{T}_Q : T_Q^2 \rightarrow T_Q^2$ é isotópica à um homeomorfismo pseudo-anosov em T_Q^2 . Então :

$h(\bar{T}) = h(\bar{T}_Q)$ e $h(\bar{T}_Q)$ é estritamente maior que zero, pelo teorema (24). $\square$

E finalmente, a prova do lema (5) :

Lema 5 : *Nas hipóteses anteriores, para todo $\omega' \in (0, \omega) \setminus \mathbb{Q}$, existe uma órbita quase-periódica $\bar{E}$, tal que $\rho_{\setminus \cdot}(\bar{E}) = \omega'$.*

Prova :

Pelo teorema (25), $\bar{T}_Q : T_Q^2 \rightarrow T_Q^2$ é isotópica a $F_Q : T_Q^2 \rightarrow T_Q^2$, um homeomorfismo pseudo-anosov. Então, como Q é um conjunto finito e invariante, agora é só aplicar as proposições (6) e (7). $\square$

Capítulo 5

Caracterização variacional para algumas órbitas de F e da aplicação Standard

A nossa aplicação $\overline{F}$, nas coordenadas de (2.24), satisfaz as hipóteses dos teoremas (5) e (6). Por outro lado, de [3] sabemos que existe uma função $\alpha_{nc}(\gamma)$, tal que para $\alpha > \alpha_{nc}(\gamma)$, F não possui C.R.I.'s. Assim, para todo $\alpha > \alpha_{nc}(\gamma)$, dado $k \in \mathbb{Z}^*$, $\exists N > 0$ tal que $\overline{F}$ possui pontos N -periódicos com número de rotação vertical $\rho_V = \frac{k}{N}$ (pelo menos dois).

Agora vamos interpretar o que essas órbitas periódicas significam para F nas coordenadas de (2.22), nas quais F admite a função geratriz $h(\phi, \phi')$, dada por (2.23).

Teorema 26 : *Seja $P_0 = (\phi_0, I_0) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$ e $\tilde{P}_0 = (\phi_0, \tilde{I}_0) = (\phi_0, \gamma \log(I_0)) \in \mathbb{R}^2$. Então, para algum par (k, N) , com $k \in \mathbb{Z}^*$ e $N > 0$ vale :*

$$\overline{F}^N(\tilde{P}_0) = \tilde{P}_0$$

e,

$$\rho_V(\tilde{P}_0) = \frac{k}{N}$$

se e somente se,

$\exists$ uma sequência $\phi_0, \phi_1 = p_1 \circ F(\phi_0, I_0), \phi_2, \dots, \phi_{N-1}, \phi_N = \phi_0 + l\pi$, para algum $l \in \mathbb{Z}$, tal que :

$$\frac{\partial h}{\partial \phi'}(\phi_{N-1}, \phi_0 + l\pi) + e^{\frac{k\pi}{\gamma}} \cdot \frac{\partial h}{\partial \phi}(\phi_0, \phi_1) = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \phi'}(\phi_i, \phi_{i+1}) + \frac{\partial h}{\partial \phi}(\phi_{i+1}, \phi_{i+2}) = 0, \text{ para } i = 0, 1, \dots, N-2 \quad (5.2)$$

Prova :

Se $\bar{F}^N(\tilde{P}_0) = \tilde{P}_0$ e $\rho_1(\tilde{P}_0) = \frac{k}{N}$, então para F nas coordenadas de (2.22), vale :

$$\begin{aligned} p_2 \circ F^N(P_0) &= e^{\frac{k\pi}{\gamma}} p_2(P_0) \\ p_1 \circ F^N(P_0) &= p_1(P_0) + l\pi \end{aligned} \quad (5.3)$$

Agora basta observar que as expressões (5.1) e (5.2) são simplesmente a caracterização da órbita de P_0 (5.3) através da função geratriz $h(\phi, \phi')$. $\square$

Desta forma relacionamos a ruptura do último círculo rotacional invariante (C.R.I.) à solução de infinitos problemas variacionais :

Corolário 3 : A aplicação F não possui C.R.I.'s, se e somente se para todo $k \in \mathbb{Z}^*$, $\exists N > 0$, $l \in \mathbb{Z}$, uma sequência $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N-1}, \phi_N = \phi_0 + l\pi$, com $\phi_i \in \mathbb{R}$, tal que a sua função geratriz $h(\phi, \phi')$, definida em (2.23), satisfaz :

$$\frac{\partial h}{\partial \phi'}(\phi_{N-1}, \phi_0 + l\pi) + e^{\frac{k\pi}{\gamma}} \cdot \frac{\partial h}{\partial \phi}(\phi_0, \phi_1) = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial \phi'}(\phi_i, \phi_{i+1}) + \frac{\partial h}{\partial \phi}(\phi_{i+1}, \phi_{i+2}) = 0, \text{ para } i = 0, 1, \dots, N-2$$

Prova :

($\Leftarrow$) Evidente, pois implica a existência de $P \in S^1 \times]0, +\infty[$, tal que :

$$\begin{aligned} p_2 \circ F^n(P) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty, \text{ se } k > 0, \text{ ou} \\ p_2 \circ F^n(P) &\xrightarrow{n \rightarrow -\infty} -\infty, \text{ se } k < 0. \end{aligned}$$

($\Rightarrow$) Trivial, a partir do teorema (5) e do resultado anterior. $\square$

Para a aplicação Standard no cilindro. $S_M : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$, dada por

$$S_M : \begin{cases} I' = I - \frac{k}{2} \sin(2\phi) \\ \phi' = \phi + I' \pmod{\pi} \end{cases}$$

valem resultados análogos. Basta observar que a função geratriz de S_M é :

$$h_{S_M}(\phi, \phi') = \frac{(\phi' - \phi)^2}{2} + \frac{k}{4} \cos(2\phi) \Rightarrow h_{S_M}(\phi + \pi, \phi' + \pi) = h_{S_M}(\phi, \phi') \quad (5.4)$$

Ou seja, como já foi dito, S_M satisfaz P.I.C. Assim, temos :

Teorema 27 : *A aplicação S_M não possui C.R.I.'s. se e somente se para todo $k \in \mathbb{Z}^*$. $\exists N > 0, l \in \mathbb{Z}$, uma sequência $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N-1}, \phi_N = \phi_0 + l.\pi$, com $\phi_i \in \mathbb{R}$, tal que a sua função geratriz $h_{S_M}(\phi, \phi')$, definida em (5.4), satisfaz :*

$$\frac{\partial h_{S_M}}{\partial \phi'}(\phi_{N-1}, \phi_0 + l.\pi) + \frac{\partial h_{S_M}}{\partial \phi}(\phi_0, \phi_1) = k.\pi$$

$$\frac{\partial h_{S_M}}{\partial \phi'}(\phi_i, \phi_{i+1}) + \frac{\partial h_{S_M}}{\partial \phi}(\phi_{i+1}, \phi_{i+2}) = 0, \text{ para } i = 0, 1, \dots, N-2$$

Prova :

Como acima. $\square$

Referências Bibliográficas

- [1] Grotta Ragazzo C. e Addas Zanata S. (2000): Classical Scattering and Geometric Properties of a generalized Hénon-Heiles family of Hamiltonian Systems. In Preparation
- [2] Grotta Ragazzo C., Figueiredo J. e Malta C. (1998): Two important numbers in the Hénon-Heiles dynamics. *Physics Letters A*. **241**. 35-40
- [3] Grotta Ragazzo C. (1997): On the Stability of Double Homoclinic Loops. *Comm. Math. Phys.* **184**. 251-272
- [4] Grotta Ragazzo C. (1997): Irregular Dynamics and Homoclinic Orbits to Hamiltonian Saddle Centers. *Comm. Pure App. Math.* **L**, 105-147
- [5] Grotta Ragazzo C. (1994): Nonintegrability of some Hamiltonian systems, scattering and analytic continuation. *Comm. Math. Phys.* **166**, 255-277
- [6] Lerman L. M. (1991): Hamiltonian systems with loops of a separatrix of a saddle-center. *Sel. Math. Sov.* **10**, 297-306.
- [7] Mielke, A., Holmes P., O'Reilly O. (1992): Cascades of homoclinic orbits to, and chaos near, a Hamiltonian saddle center. *J. Dyn. Diff. Eqns.* **4**, 95-126.
- [8] Moser J. (1958): On the generalization of a theorem of Liapunoff. *Comm. Pure Appl. Math.* **11**, 257-271.
- [9] Rüssmann H. (1964): Über das Verhalten analytischer Hamiltonscher differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung. *Math. Ann.* **154**, 285-300.

- [10] Meiss J. D. (1992): Symplectic maps, variational principles, and transport. *Rev. Mod. Phys.* **64**, 795-848.
- [11] Benedicks M. e Carleson L. (1991): Dynamics of the Hénon map. *Annals of Math.* **133**, 73-169
- [12] Devaney R. (1976): Reversible Diffeomorphisms and Flows. *Transactions of the American Mathematical Society.* **218**, 89-113.
- [13] Arnold V. (1987): Reversible Systems. *Nonlinear and Turbulent Proc. in Phys* **3**, 1161-1174
- [14] Duarte P. (1994): Plenty of elliptic islands for the standard family of area preserving maps. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **11**, 359-409.
- [15] Arnold V. (1978): *Mathematical Methods of Classical Mechanics.* **60**, Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag
- [16] Moser J. (1973): *Stable and Random Motions in Dynamical Systems.* Princeton: Princeton University Press.
- [17] Robinson C. (1983): Bifurcation to infinitely many sinks. *Comm. Math. Phys.* **90**, 433-459
- [18] Mora L. e Viana M. (1993): Abundance of Strange Attractors, *Acta Math.* **171**, 1-71
- [19] Palis J. e Takens F. (1993): *Hiperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations.* Cambridge studies in advanced mathematics **35**, Cambridge University Press
- [20] Benedicks M. e Viana M. (1999): Solution of the basin problem for Hénon like attractors, preprint
- [21] Benedicks M. e Young L. (1993): SBR-measures for certain Hénon maps. *Invent. Math.* **112**, 541-576

- [22] Palis, J. (1969): On Morse Smale Dynamical Systems. *Topology* **8**, 385-405.
- [23] Dörrie H. (1965): 100 Great Problems of Elementary Mathematics. Their History and Solution. Dover Publications, Inc.
- [24] Poincaré H. (1950): Oeuvres, Tome IV. Gauthier-Villars, Paris
- [25] Sternberg S. (1957): Local contractions and a theorem of Poncaré. *Amer. J. Math.* **79**, 809-824
- [26] Sternberg S. (1958): On the structure of local homeomorphisms of Euclidean n -space II. *Amer. J. Math.* **80**, 623-631
- [27] Katok A. e Hasselblatt B. (1995): Introduction to Modern Theory of Dynamical Systems. Cambridge University Press
- [28] Walters P. (1982): An Introduction to Ergodic Theory. **79**. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag
- [29] Bowen R. (1978): Entropy and the Fundamental Group. *Springer Lec. Notes in Math.* **668**, 21-29
- [30] Le Calvez P. (1986): Existence d'orbites quasi-périodiques dans les attracteurs de Birkhoff. *Comm. Math. Phys.* **106**, 383-394
- [31] Le Calvez P. (1991): Propriétés Dynamiques des Difféomorphismes de L'Anneau et du Tore. *Astérisque* **204**
- [32] Llibre J. e Mackay R. (1991): Rotation vectors and entropy for homeomorphisms of the torus isotopic to the identity. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **11**, 115-128
- [33] Misiurewicz M. e Ziemian K. (1989): Rotation Sets for Maps of Tori. *J. London Math. Soc.* (2) **40**, 490-506
- [34] Franks J. (1988): Recurrence and fixed points of surface homeomorphisms. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **8***, 99-107

- [35] Handel M. (1990): The Rotation Set of a Homeomorphism of the Annulus is Closed. *Comm. Math. Phys.* **127**, 339-349
- [36] Thurston W. (1988): On the Geometry and Dynamics of Diffeomorphisms of Surfaces. *Bull. Amer. Math. Society.* **19** (2) 417-431
- [37] Nielsen J. (1944): Surface transformation classes of algebraically finite type. *Danske Vid. Selsk. Math. Phys. Medd.* **68**
- [38] Fathi A., Laudenbach F. e Poenaru V. (1979): Travaux de Thurston sur les surfaces. *Astérisque.* **66-67**
- [39] Handel M. e Thurston W. (1985): New proofs of some Results of Nielsen. *Adv. Math.* **56**, 173-191
- [40] Epstein D. (1966): Curves on 2-manifolds and isotopies. *Acta Math.* **115**, 83-107
- [41] Epstein D. (1981): Pointwise periodic homeomorphisms. *Proc. London Math. Soc.* **42**, 415-460