USP - Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

**Estudo sobre a Dinâmica da
Hiperinflação: Um Modelo descrito
por um Sistema de Equações
Diferenciais com Atraso**

Pedro Antonio Santoro Salomão¹

Dissertação apresentada ao Instituto de
Matemática e Estatística da USP para
obtenção do grau de mestre em
Matemática Aplicada sob orientação de
Clodoaldo Grotta Ragazzo

São Paulo
1999

¹Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro da FAPESP

Estudo sobre a Dinâmica da Hiperinflação: um Modelo descrito por um Sistema de Equações Diferenciais com Atraso

Este exemplar corresponde à redação final devidamente corrigida e definida por Pedro Antonio Santoro Salomão e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo
1999

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo – IME - USP
- Prof. Dr. Luiz Fichman – IME - USP
- Prof. Dr. Fernando de Holanda Barbosa – FGV-RJ

Ficha Catalográfica

Salomão, Pedro Antonio Santoro Salomão

Estudo sobre a dinâmica da hiperinflação: Um modelo descrito por um sistema de equações diferenciais com atraso. / Pedro Antonio Santoro Salomão
- - São Paulo, 1999.

49p.

Dissertação (mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística,
Universidade de São Paulo.

1. Modelo Econômico. 2. Bifurcação de Hopf. 3. Equação Diferencial com atraso. I. Título.

*Aos meus pais Roberto e Maria Eugênia,
e irmãos Nanda, Paulo e João*

Agradecimentos

Agradeço a todos que me ajudaram durante esses dois anos aqui no IME, principalmente minha família, em particular meus pais.

Aos amigos do Colégio Dante Alighieri, da Escola Politécnica, da Fundação Getúlio Vargas e do IME.

Tive uma orientação excelente do Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo, que soube me motivar durante toda a minha passagem pelo IME, e me ajudou muito nos momentos de maior dificuldade.

Agradeço também ao Professor Dr. Luiz Fichman pela revisão matemática da dissertação e participação da banca examinadora.

Agradeço ao Professor Dr. Fernando de Holanda Barbosa, que me auxiliou na elaboração das hipóteses e conclusão, abordados sob o ponto de vista macroeconômico, além de participar da banca examinadora.

Por fim, a Andréa Luíza R. Beiro, pelo apoio e cuidados com a editoração.

Abstract

A macroeconomic hyperinflation model is studied . The model is given by a system of two delayed differential equations for the variables inflation and real money quantity.

The first part is a stability analysis of equilibrium points and their dependencies on a delay parameter.

It was verified that for a band of delay values, an equilibrium tends to stabilise, making it possible to control the economy.

The existence of periodic orbits is also proved using the Hopf bifurcation theorem. An approximation of the Hopf curve is computed using the Implicit Function Theorem.

Numerical Simulations are done to understand global properties of the system and a more complete macroeconomic model is suggested for possible future works.

Resumo

É feito um estudo de um modelo macroeconômico de hiperinflação. O modelo é descrito por um sistema de duas equações diferenciais com 1 retardamento onde as variáveis dependentes são a inflação e a quantidade de moeda no mercado.

O primeiro passo foi fazer uma análise de estabilidade linear dos pontos de equilíbrio e sua dependência com o parâmetro que representa o atraso. Constatou-se que para uma faixa de valores do atraso em questão, os pontos de equilíbrio tendem a se estabilizar sendo possível, portanto, controlar a economia.

Prova-se, também a existência de órbitas periódicas, através da verificação de ocorrência de bifurcação do tipo Hopf. É calculada uma aproximação da curva de Hopf através do Teorema da Função Implícita.

Simulações numéricas são feitas para validar os resultados obtidos e um modelo macroeconômico, um pouco mais completo, é proposto para possíveis futuros trabalhos.

Sumário

Abstract	
Resumo	
1 Introdução.....	3
1.1 Considerações Gerais sobre o Modelo Econômico.....	5
2 As equações do modelo macroeconômico.....	7
2.1 Análise de estabilidade.....	8
2.2 Redefinição de parâmetros.....	10
2.3 Interpretação dos parâmetros.....	11
2.4 Método para Análise da Estabilidade de Pontos de Equilíbrio de equações com atraso.....	14
2.5 Estabilidade dos Pontos de Equilíbrio no espaço de parâmetros ABC.....	17
2.6 Efeitos do Atraso na Estabilidade do Ponto de Equilíbrio.....	23
3 Bifurcação de Hopf.....	26
3.1 Curvas de Bifurcação de Hopf.....	38
4 Simulações Numéricas e Órbitas Periódicas geradas pela Bifurcação de Hopf.....	42
5 Proposta de um novo Modelo Econômico.....	45
6 Conclusão.....	47
Referências Bibliográficas.....	49

1 Introdução

O modelo macroeconômico estudado neste trabalho é uma modificação de um modelo descrito por um sistema de equações diferenciais ordinárias, já muito estudado em [1] e [2].

Em [1], são explicadas as hipóteses feitas na elaboração do modelo, assim como uma análise de estabilidade linear dos pontos de equilíbrio e bifurcação de Hopf para determinadas regiões dos parâmetros. Em [2], é feito um estudo mais aprofundado, demonstrando-se a existência e unicidade das órbitas periódicas, a existência de órbitas homoclínicas e heteroclínicas.

Este trabalho tem como objetivo estender os trabalhos anteriores, acrescentando um elemento a mais na elaboração do modelo, tornando-o um sistema de equações diferenciais com atraso. Tal modificação enriquece em muito as possibilidades dinâmicas do modelo, mas simultaneamente torna a análise matemática do mesmo uma tarefa muito mais complexa.

Desta forma, não é mais possível se estudar o sistema com as ferramentas usuais de E.D.O's (Equações Diferenciais Ordinárias) como feito nas referências [1] e [2]. Sendo assim, nesta dissertação é apresentada uma análise da dinâmica próxima a pontos de equilíbrio, baseada na teoria existente para equações diferenciais com retardamento, que é complementado por um estudo numérico do comportamento global da equação. É importante realçar que, em contraste ao caso das E.D.O.'s, para as equações diferenciais com atraso que aqui aparecem, não existe uma teoria qualitativa global satisfatória. Sendo assim, o uso de computadores e estudos numéricos mostra-se essencial. Esta dissertação está dividida da seguinte maneira. Primeiramente o modelo a ser tratado é apresentado e é feita uma redefinição de parâmetros de conveniência matemática.

Feita esta mudança de parâmetros, será utilizado um método descrito em [3], para analisar a estabilidade dos pontos de equilíbrio, que são no máximo 2. Esse método consiste em estudar a equação característica do sistema linearizado em torno do ponto de equilíbrio. O método fornece critérios simples para a verificação da estabilidade, reduzindo o problema à determinação de raízes de funções analíticas de uma única variável real.

A partir deste critério, é possível esboçar a carta de estabilidade de um determinado ponto de equilíbrio, e fazer estudos de bifurcação de Hopf em

situações de troca da estabilidade. Após isso, simulações numéricas são apresentadas para uma compreensão global dos efeitos do atraso sobre a dinâmica e verificação do domínio de validade dos resultados acima mencionados.

Por fim, é proposto um novo modelo econômico, a partir de hipóteses mais realistas, que traduzem-se em um sistema de equações funcionais do tipo neutro.

A hipótese introduzida neste trabalho melhorou o entendimento do fenômeno econômico estudado e ampliou seu domínio de validade, revelando resultados satisfatórios do ponto de vista econômico.

1.1 Considerações Gerais sobre o Modelo Econômico

O modelo econômico que é foco deste trabalho é originado de leis gerais da macroeconomia.

A equação do financiamento do déficit público por emissão de moeda, utilizada em uma vasta bibliografia, é dada por:

$$\dot{m}(t) = f - m(t) \cdot \pi(t)$$

Onde m é a quantidade real de moeda, f é o déficit público e π é a taxa de inflação.

A chamada curva salarial de Phillips ampliada com expectativas fornece a seguinte relação:

$$\omega^d(t) = \pi^e(t) + \delta \cdot h(t)$$

onde ω^d é a taxa desejada de crescimento dos salários, π^e é a taxa esperada da inflação e h é o hiato do produto (define-se aqui o hiato do produto como sendo a diferença entre o produto efetivo e o produto potencial da economia) e δ um parâmetro da economia.

É admitido um mecanismo de ajustamento dos salários onde a aceleração dos salários é dada por:

$$\dot{\omega}(t) = \psi \cdot (\omega^d(t) - \omega(t))$$

Quanto maior ψ , mais rápido é o ajustamento.

As hipóteses feitas em [1], mostram que o hiato do produto pode ser escrito usando as equações das curvas IS-LM, obtendo-se:

$$h(t) = -a + b \cdot \ln m(t) + c \cdot \pi^e(t)$$

Onde a , b e c são parâmetros estruturais do modelo.

A hipótese que é introduzida no modelo estudado neste trabalho é admitir que o hiato da economia num instante t depende de uma combinação da taxa de juros real presente e passada, ou seja, além de depender da taxa de juros no mesmo instante t , depende também da taxa de juros real no instante $t - \tau$. Esse argumento pode ser interpretado como um atraso nos efeitos da taxa de juros real sobre o produto da economia, uma vez que as decisões e realizações de alocação de recursos em investimentos sofre um retardamento e estão baseadas no passado.

Obtém-se com isso a equação modificada do hiato da economia:

$$h(t) = -a + b.\ln m(t - \tau) + c.\pi^e(t - \tau) + d.\ln m(t) + e.\pi^e(t)$$

onde τ é o novo parâmetro e corresponde ao efeito de atraso, além de dois novos parâmetros estruturais da economia.

Por motivos de simplificação matemática, será feito um estudo considerando-se $b=e=0$. Essa consideração determina, portanto, que o hiato da economia é influenciado predominantemente pelas decisões do passado. Dessa forma, apenas um novo parâmetro será adicionado ao modelo, que é o parâmetro que representa o atraso. O caso geral, como será visto adiante, pode ser estudado analogamente, com as mesmas ferramentas utilizadas neste trabalho.

Admitindo-se o *mark-up*, em que os preços são reajustados instantaneamente com os salários, $\pi(t) = \omega(t)$, e que haja previsão perfeita da inflação, $\pi(t) = \pi^e(t)$, obtém-se, finalmente, o sistema de equações, que será objeto de estudo deste trabalho:

$$\dot{m}(t) = f - \pi(t).m(t)$$

$$\dot{\pi}(t) = -k + \beta.\ln m(t) + \gamma.\pi(t - \tau)$$

Fazendo-se $\tau = 0$, obtém-se o sistema de equações diferenciais ordinárias já bastante estudado em [1] e [2], onde analisaram-se os pontos de equilíbrio, o tipo de estabilidade assim como a presença de bifurcações do tipo Hopf. Em [2], centralizou-se o estudo na bifurcação de Bogdanov-Takens. O novo parâmetro τ , quando maior que zero, representa os efeitos atrasados da taxa de juros real sobre a economia alterando o tipo da equação, que passa a ser um sistema de equações funcionais com retardamento e com dinâmica bastante mais complexa que o caso $\tau=0$.

2 As equações do modelo macroeconômico

O modelo macroeconômico que será estudado neste trabalho, deduzido no capítulo anterior, é representado pelo seguinte sistema:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \dot{m}(t) &= f - \pi(t) \cdot m(t) \\ \dot{\pi}(t) &= -k + \beta \cdot \ln m(t) + \gamma \cdot \pi(t - \tau) \end{aligned}$$

onde f , k , β , γ e τ são os parâmetros do modelo e assumem somente valores positivos. A variável dependente m é sempre positiva e π pode ser positiva ou negativa.

Os pontos de equilíbrio do sistema são independentes de τ , logo são os mesmos da E.D.O. (equação diferencial ordinária), vistos em [1]. A equação acima pode ser vista como:

$$\dot{x}(t) = F(x_t)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^2$ é um vetor tendo $m(t)$ e $\pi(t)$ como componentes, e x_t é uma função contínua que mapeia o intervalo $[-\tau, 0]$ em $\mathbb{R}^2$. F é uma função com valores em $\mathbb{R}^2$. (No caso do modelo, $F(x_t)$ depende unicamente dos valores de x nos instantes $t - \tau$ e t)

Note que o espaço das condições iniciais desta equação não é mais um ponto em $\mathbb{R}^2$ como nas E.D.O.'s mas uma função contínua, fazendo com que o espaço de fase da equação tenha dimensão infinita e tornando a análise matemática do problema muito mais complexa do que a análise de E.D.O.'s.

De fato a equação acima gera um semifluxo no espaço de fase dado pelas funções contínuas definidas em $[-\tau, 0]$ com valores em $\mathbb{R}^2$ e com a topologia induzida pela norma do supremo. A teoria geral das equações funcionais com retardamento pode ser encontrada em [4].

2.1 Análise de estabilidade

A condição de existência de dois pontos de equilíbrio para o sistema de equações (2.1) é:

$$k > \beta \cdot (1 + \ln \frac{\gamma \cdot f}{\beta})$$

Fazendo-se a seguinte mudança de coordenadas:

$$m = x + m_0$$

$$\pi = y + \pi_0$$

onde (m_0, π_0) é um ponto de equilíbrio, obtém-se:

$$\dot{x} = -x \cdot y - m_0 \cdot y - \pi_0 \cdot x$$

$$\dot{y} = \beta \cdot \ln\left(\frac{x + m_0}{m_0}\right) + \gamma \cdot y(t - \tau)$$

Linearizando essa equação em $x=0$ e $y=0$, obtém-se:

$$\dot{x} = -m_0 \cdot y - \pi_0 \cdot x$$

$$\dot{y} = \frac{\beta}{m_0} x + \gamma \cdot y(t - \tau)$$

Para que $(x, y) = e^{st}(x_0, y_0)$ seja solução não trivial desse sistema, onde s , x_0 e y_0 são constantes complexas, é necessário e suficiente que

$$D(s) = s^2 + \pi_0 \cdot s - \gamma \cdot e^{-\tau \cdot s} \cdot s - \gamma \cdot \pi_0 \cdot e^{-\tau \cdot s} + \beta = 0$$

Esta é a chamada equação característica do sistema linearizado e pode possuir infinitas soluções complexas. Para se estudar a estabilidade de um

ponto de equilíbrio, deve-se determinar a existência de alguma raiz com parte real estritamente positiva. Caso exista, a equação linearizada apresenta soluções exponencialmente crescentes e o ponto de equilíbrio do sistema não linear (2.1) é instável [4].

A determinação da estabilidade do ponto de equilíbrio da equação (2.1) quando a equação característica possui zeros no eixo imaginário, requer um estudo mais delicado do que a simples análise da equação característica.

Caso todas as raízes tenham parte real estritamente negativa então a equação linearizada só apresenta solução exponencialmente decrescente e o equilíbrio da equação não linear (2.1) é estável [4].

2.2 Redefinição de parâmetros

Definindo-se:

$$s = s' \cdot \sqrt{\beta}$$

pode-se reescrever a equação característica como:

$$D(s) = \left(s + \frac{\pi_0}{\sqrt{\beta}}\right) \left(s - \frac{\gamma}{\sqrt{\beta}} \cdot e^{-\tau \sqrt{\beta} s}\right) + 1$$

onde, por simplicidade, omite-se o apóstrofo de s .

Definindo-se, agora, os seguintes parâmetros positivos:

$$A = \frac{\gamma}{\sqrt{\beta}}$$

$$B = \frac{\pi_0}{\sqrt{\beta}}$$

$$C = \tau \cdot \sqrt{\beta}$$

Obtem-se a seguinte equação com 3 parâmetros:

$$(2.2) \quad D(s) = (s + B) \cdot (s - A \cdot e^{-Cs}) + 1$$

2.3 Interpretação dos parâmetros

Essa escolha de parâmetros é muito interessante por várias razões:

- 1) O objetivo principal do estudo é avaliar o efeito do retardamento introduzido na equação, e como apenas C depende (linearmente) de τ , pode-se estudar os efeitos do atraso fixando os outros parâmetros e variando C .
- 2) Quando a condição de existência de dois pontos de equilíbrio é satisfeita, a localização de cada um deles é muito simplificada quando se observa o gráfico $A \times B$. Em [1], é visto que um dos pontos de equilíbrio, que será denominado por equilíbrio $*$, satisfaz

$$\pi_0^* < \frac{\beta}{\gamma}$$

Enquanto que o outro, denominado equilíbrio $**$, satisfaz

$$\pi_0^{**} > \frac{\beta}{\gamma}$$

Considerando-se a hipérbole $A.B=1$ no plano $A \times B$, e qualquer valor de parâmetro C , percebe-se que o equilíbrio $*$ está localizado sempre abaixo da hipérbole e o equilíbrio $**$ sempre acima.

- 3) Outro ponto muito importante da escolha destes parâmetros é o fato de que a E.D.O. (equação diferencial ordinária) correspondente ao modelo (fazendo-se $C = \tau = 0$) apresenta características diretamente relacionadas com A . Sabe-se que para a E.D.O., um dos seus pontos de equilíbrio (que satisfaz $A.B < 1$) é uma fonte complexa ou real se $1 < A < 2$ e é uma fonte real se $A > 2$. Mostrar-se-á, neste trabalho, que a introdução do atraso pode estabilizar o ponto de equilíbrio para

valores do parâmetro A em que o equilíbrio da E.D.O. se apresentava instável.

- 4) Será feito um estudo sobre a Bifurcação de Hopf do sistema com atraso, já estudada em [1] sem o atraso, e cujo parâmetro considerado havia sido o déficit público f . Uma variação positiva no déficit público, mantendo os outros parâmetros fixos, corresponde a uma variação positiva apenas do novo parâmetro B , sem alterar A e C . Assim, o estudo da bifurcação de Hopf pode ser feito com os novos parâmetros A, B e C , fixando-se A e C , e fazendo-se variar B . Demonstra-se tal afirmação:

Os pontos de equilíbrio devem satisfazer:

$$(2.3) \quad \beta \cdot \ln \pi_0 = \beta \cdot \ln f - k + \gamma \cdot \pi_0$$

Definindo

$$\begin{aligned} h(\pi) &= \beta \cdot \ln(\pi) \\ g(\pi) &= \beta \cdot \ln f - k + \gamma \cdot \pi \end{aligned}$$

tem-se que as raízes de (2.3) são dadas pelas intersecções dos gráficos de f e g como mostrado na figura 2.3.1.

Figura 2.3.1. Determinação gráfica das raízes de (2.3)

O ponto de equilíbrio que será considerado no estudo da bifurcação de Hopf satisfaz:

$$A.B < 1$$
$$\pi_0 < \frac{\beta}{\gamma}$$

ou seja, corresponde, na Figura (2.3.1), ao ponto π_0^* .

Aumentando-se o valor de f (déficit público), a curva $g(\pi)$ que corresponde à reta subirá e, portanto, π_0^* também aumentará. Com isso, mantendo-se todos os outros parâmetros do sistema original fixos (k, β, τ, γ) e aumentando-se f , aumentará π_0^* , e, portanto, na reparametrização ABC, aumentará apenas o valor do parâmetro B, sem alterar A e C.

2.4 Método para Análise da Estabilidade de Pontos de Equilíbrio de equações com atraso

Para se construir a carta de estabilidade do equilíbrio do sistema, será usado um método proposto em [3]. O método consiste em estudar o comportamento da equação característica do sistema e identificar a existência de zeros com parte real positiva.

Seja $D(s)=0$ a equação característica do sistema e $R(\omega)=\text{Re}(D(i.\omega))$, $S(\omega)=\text{Im}(D(i.\omega))$

Teorema 2.4.1. [3] Considere uma sistema de equações diferenciais com atraso, de dimensão par $n = 2m$. Então a equação característica do sistema possui todas as raízes com parte real estritamente negativa se e somente se

$$S(\rho_k) \neq 0$$

$$\sum_{k=1}^r (-1)^k \text{sgn } S(\rho_k) = (-1)^m . m$$

onde

$$\rho_1 \geq \dots \geq \rho_r > 0$$

são os zeros positivos de $R(\omega)$, que devem ser repetidos tantas vezes quantas forem suas multiplicidades.

Para a equação (2.2), a saber,

$$D(s) = (s + B).(s - A.e^{-Cs}) + 1$$

tem-se

$$\begin{aligned} D(i.\omega) &= -\omega^2 + B.i.\omega - A.i.\omega .e^{-C.\omega.i} - A.B.e^{-C.\omega.i} + 1 \\ &= -\omega^2 + B.i.\omega - A.i.\omega(\cos(C.\omega) - i.\text{sen}(C.\omega)) - A.B.(\cos(C.\omega) - i.\text{sen}(C.\omega)) + 1 \end{aligned}$$

Assim,

$$R(\omega) = \text{Re}\{D(i\omega)\} = -\omega^2 - A\omega \cdot \text{sen}(C\omega) - A.B \cdot \cos(C\omega) + 1$$

$$S(\omega) = \text{Im}\{D(i\omega)\} = B\omega - A\omega \cdot \cos(C\omega) + A.B \cdot \text{sen}(C\omega)$$

É fácil ver que $R(\omega)$ tem um número finito de zeros. Logo basta encontrá-los, enumerando-os do maior para o menor, e calcular o sinal de $S(\omega)$ para cada zero de $R(\omega)$.

Portanto, para que o equilíbrio seja estável, é necessário e suficiente que o sinal de $S(\omega)$ seja diferente de zero para todas as raízes de $R(\omega)$, e valha:

$$(2.4) \quad \text{sgn}(S(\rho_1)) - \text{sgn}(S(\rho_2)) + \dots + (-1)^{r+1} \cdot \text{sgn}(S(\rho_r)) = 1$$

Um exemplo desse método poder visto na figura 2.4.1, onde foram considerados os valores de parâmetros $A=0.6$ $B=0.95$ e $C=10.5$, em que as curvas $R(\omega)$ e $S(\omega)$ foram construídas numericamente:

Figura 2.4.1. Um exemplo da aplicação do Método para valores de parâmetros $A=0.6$, $B=0.95$ e $C=10.5$

Neste caso, $R(\omega)$ possui 3 zeros positivos ($r=3$), sendo o sinal de $S(\omega)$, quando calculado nestes zeros, positivo, satisfazendo portanto a igualdade (2.4) e garantindo a estabilidade do ponto de equilíbrio.

2.5 Estabilidade dos Pontos de Equilíbrio no espaço de parâmetros ABC

O método descrito acima é de bastante utilidade já que o problema, que antes era de localizar os zeros da equação característica (2.2) e decidir se existia algum do lado direito do plano complexo, agora passa a ser a análise de duas funções analíticas reais $R(\omega)$ e $S(\omega)$. É preciso, portanto, encontrar os zeros de $R(\omega)$ e calcular o sinal de $S(\omega)$ para esses zeros.

Proposição 2.5.1. Dados A, B tais que $A.B < 1$, então os zeros positivos de $R(\omega)$ estão todos localizados em $[0, \max\{A+1, 2\})$ para qualquer $C > 0$.

Prova. Os zeros de $R(\omega)$ satisfazem:

$$\omega \cdot (\omega + A \cdot \sin(C \cdot \omega)) = 1 - A \cdot B \cdot \cos(C \cdot \omega)$$

Caso 1. $B < 1$. Neste caso $A > A.B$ e o lado direito da equação é menor que $1 + A$.

Se ω fosse maior que $A+1$, então o lado esquerdo da equação ficaria maior que $(A+1) \cdot (A+1-A) > A+1$ o que seria um absurdo. Portanto, não há solução da equação com $\omega > A+1$.

Caso 2. $B > 1$. Neste caso, $A.B > A$, $A < 1$ e o lado direito da equação é menor que $1+A.B < 2$.

Se ω fosse maior que $A.B + 1$, então o lado esquerdo da equação ficaria maior que $(A.B + 1)(1 + A.B - A) > (1+A.B) > 2$ o que é um absurdo. Portanto, neste caso, não há solução com $\omega > A.B + 1$ que satisfaça a equação.

Assim, os zeros positivos de $R(\omega)$, que são os que interessam, estão em $[0, \max\{A+1, 2\})$, provando a proposição. Mais ainda, a analiticidade de $R(\omega)$ implica que o número de zeros positivos é finito. $\square$

Proposição 2.5.2. O ponto de equilíbrio ** (ver seção 2.3.1) é instável para qualquer valor dos parâmetros A, B e C.

Prova. O ponto de equilíbrio **, na parametrização ABC, satisfaz

$$AB > 1$$

Neste caso a equação característica

$$D(s) = (s + B)(s - A.e^{-Cs}) + 1$$

possui uma raiz real p positiva, ou seja:

$$p^2 + B.p - A.B.e^{-C.p} - A.p.e^{-C.p} + 1 = 0$$

De fato, para $p = 0$, o lado esquerdo da equação acima é menor que zero pois $A.B > 1$. Quando p tende a $+\infty$, o limite do lado esquerdo é $+\infty$, logo, por continuidade, existe pelo menos um valor de p positivo para o qual vale a igualdade acima. $\square$

Devido à proposição 2.5.2, a partir de agora, estudar-se-á apenas a estabilidade do equilíbrio * (ver seção 2.3.1), que satisfaz a condição $A.B < 1$. Como será mostrado, tal equilíbrio pode ser estável ou instável dependendo dos valores dos parâmetros A, B e C.

A figura 2.5.1, obtida numericamente, mostra um diagrama de estabilidade típico do equilíbrio, para um valor fixo do parâmetro C.

Figura 2.5.1. Carta de Estabilidade $A \times B$ para $C=10.3$. A região hachurada corresponde aos valores de parâmetros onde o equilíbrio é estável.

Teorema 2.5.1. Para $A \cdot B < 1$, $B > (A+1) \cdot K$ e $A < \pi/C$, onde $K = \max \{1, 2C/3\pi\}$, o equilíbrio é estável.

Obs: Este Teorema diz que o equilíbrio é estável para os valores de parâmetros em uma região que é tipicamente da forma mostrada na figura 2.5.2.

Figura 2.5.2. Região típica de estabilidade do equilíbrio assegurada pelo Teorema 2.5.1.

Prova.

$$R(\omega) = -\omega^2 - A\omega \cdot \sin(C\omega) - A.B \cdot \cos(C\omega) + 1$$

$$S(\omega) = B\omega - A\omega \cdot \cos(C\omega) + A.B \cdot \sin(C\omega)$$

1º Passo. Para $A.B < 1$, há um número ímpar de zeros de $R(\omega)$, contando-se a multiplicidade de cada zero.

Sendo $R(0) = 1 - A.B > 0$ e

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} R(\omega) = -\infty$$

Então, como $R(\omega)$ é analítica, o número de zeros deve ser ímpar quando se conta suas respectivas multiplicidades.

2º Passo. $S(\omega)$ é positivo para qualquer valor de ω .

OBS: Pode-se concluir facilmente, pelas hipóteses, que $B > A$.

Este 2º Passo será dividido em 3 partes:

a) Para ω satisfazendo $2k\pi/C < \omega \leq 2k\pi/C + \pi/C$, $k=0,1,2,\dots$, tem-se:

$$S(\omega) = \omega(B - A \cdot \cos(C \cdot \omega)) + A \cdot B \cdot \sin(C \cdot \omega) > 0$$

pois o primeiro termo é positivo já que $B > A$, e o segundo termo é ≥ 0 .

b) Para ω satisfazendo $2k\pi/C + \pi/C < \omega \leq 2k\pi/C + 3\pi/2C$, $k=0,1,2,\dots$, tem-se:

$$S(\omega) = B \cdot (\omega + A \cdot \sin(C \cdot \omega)) - A \cdot \omega \cdot \cos(C \cdot \omega) > B \cdot (\frac{\pi}{C} - A) > 0$$

onde usou-se a hipótese que $A < \pi/C$ e o segundo termo é positivo.

c) Para ω satisfazendo $2k\pi/C + 3\pi/2C < \omega \leq 2k\pi/C + 2\pi/C$, $k=0,1,2,\dots$, e usando as hipóteses $B > (A+1) \cdot K$, $A \cdot B < 1$, $K = \max\{1, 2 \cdot C/3\pi\}$, tem-se:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= B \cdot \omega - A \cdot \omega \cdot \cos(C \cdot \omega) + A \cdot B \cdot \sin(C \cdot \omega) > (A+1) \cdot K \cdot \omega - A \cdot \omega \cdot \cos(C \cdot \omega) - 1 > \\ A \cdot K \cdot \omega + K \cdot \omega - A \cdot \omega - 1 &\geq A \cdot (K-1) \cdot \omega + \frac{2 \cdot C}{3 \cdot \pi} \cdot \omega - 1 > A \cdot (K-1) \cdot \omega + \frac{2 \cdot C}{3 \cdot \pi} \cdot \frac{3 \cdot \pi}{2 \cdot C} - 1 \geq 0 \end{aligned}$$

Como consequência de a), b) e c), obtém-se que $S(\omega) > 0$ para $\omega > 0$.

3º Passo Do Teorema 2.4.1 da seção 2.4, tem-se que para provar a estabilidade do equilíbrio é suficiente mostrar que:

$$S(\rho_k) \neq 0$$

e

$$\text{sgn}(S(\rho_1)) - \text{sgn}(S(\rho_2)) + \dots + (-1)^{r+1} \cdot \text{sgn}(S(\rho_r)) = 1$$

onde $\rho_1 \leq \rho_2 \leq \dots \leq \rho_r$ são as raízes de $R(\omega)$.

No passo 1 provou-se que r é ímpar e no passo 2 provou-se que $\text{sgn}(S(\rho_k))=1$, portanto, pode-se aplicar o Teorema 2.4.1 e mostrar que o equilíbrio em questão é estável. $\square$

2.6 Efeitos do Atraso na Estabilidade do Ponto de Equilíbrio

A estabilidade do ponto de equilíbrio em questão depende do parâmetro C , que representa o atraso. Nesta seção, será estudada a carta de estabilidade $A \times C$, que facilita a visualização do efeito do atraso, para um determinado valor do parâmetro B fixo.

Em primeiro lugar, analisa-se o efeito do atraso para uma economia onde o déficit público é igual a zero, ou seja, $f=0$. Neste caso, $B=0$ e se o atraso também é nulo, $C=0$, então o equilíbrio, cuja taxa de inflação é nula, é instável. Esta situação indica instabilidade econômica mesmo quando o déficit público é zero. Neste contexto, o atraso introduzido neste trabalho, tem um interessante efeito estabilizador.

Figura 2.6.1. Carta de Estabilidade $A \times C$ para déficit público zero, obtida numericamente. A região hachurada corresponde aos valores de parâmetros onde o equilíbrio é estável.

Da figura 2.6.1., percebe-se uma certa periodicidade nos valores do atraso onde ocorre estabilidade. Em particular, no intervalo $[\pi/2, 3\pi/2]$ (que será denominado de banda de estabilidade), a economia pode ser estabilizada para muitos valores do parâmetro A , inclusive para alguns valores de A maiores que 1, o que era impossível no caso do modelo representado pela E.D.O., independente do valor do déficit público [1]. Enquanto isso, nos outros intervalos é muito mais difícil a estabilização.

No entanto, para déficit público não muito grande, de forma que o parâmetro B fique em torno de 0.4, a estabilidade aparece para uma região muito grande dentro do espaço de parâmetros da economia, principalmente para valores de atraso dentro de uma banda de estabilidade semelhante ao caso em que o déficit público é zero. A figura 2.6.2 comprova essa afirmação.

Figura 2.6.2. Carta de Estabilidade $A \times C$ para $B=0.4$, obtida numericamente. A região hachurada corresponde aos valores de parâmetros onde o equilíbrio é estável.

É importante notar que agora até mesmo sistemas onde A é maior do que 2 podem ser estabilizados para valores do parâmetro C (correspondente ao atraso) no intervalo $[\pi/2, 3\pi/2]$.

Para valores de déficit público muito alto, ou seja, B grande, os efeitos do atraso são praticamente desprezíveis como mostra a figura 2.6.3.

Figura 2.6.3. Carta de Estabilidade $A \times C$ para $B=1.2$, obtida numericamente. A região hachurada corresponde aos valores de parâmetros onde o equilíbrio é estável.

Isso mostra que quando o déficit público é relativamente alto, o efeito do atraso é praticamente desprezível, chegando até a desestabilizar o ponto de equilíbrio, quando o atraso é muito grande.

Como consequência da análise destas cartas de estabilidade, chega-se à conclusão que o atraso introduzido neste trabalho pode ser muito relevante quando o déficit público não é muito alto em relação a outros parâmetros da economia. Para valores muito altos do atraso, os efeitos estabilizadores são muito pequenos e podem até desestabilizar uma economia que antes possuía uma dinâmica razoavelmente estável.

3 Bifurcação de Hopf

Como mostrou-se no capítulo anterior, o ponto de equilíbrio $*$ (ver seção 2.3.1) estudado pode ser estável ou instável, dependendo dos valores dos parâmetros da equação. Nesta seção, é exibido um dos mecanismos pelo qual o equilíbrio perde estabilidade devido à variação contínua de um parâmetro. Mostra-se que para certos valores dos parâmetros C e A , fixos, ocorre uma bifurcação de Hopf ao se variar o parâmetro B .

A bifurcação de Hopf ocorre quando um autovalor da equação característica cruza o eixo imaginário transversalmente ao se variar um dos parâmetros. Como consequência, tem-se a troca de estabilidade do ponto de equilíbrio e o aparecimento ou desaparecimento de uma órbita periódica na sua vizinhança.

Para se demonstrar a existência de uma bifurcação do tipo Hopf, serão fixados os parâmetros C e A , fazendo-se variar o parâmetro B .

O Teorema de Hopf utilizado neste trabalho assim como algumas de suas aplicações pode ser encontrado em [4] e [9].

Teorema 3.1 (Bifurcação de Hopf). Para valores de parâmetros A e C fixos, seja $D_B(s)=0$ a equação característica do sistema de equações com retardamento linearizado em torno do ponto de equilíbrio, dependendo do parâmetro B e seja,

$$\sigma(B) = \{s \mid D_B(s) = 0\}$$

o seu espectro. Suponha que:

- (1) existem funções C^1 , $\lambda_1(B)$ e $\lambda_2(B)$, numa vizinhança de B_0 , $\lambda_1(B)$ e $\lambda_2(B)$ pertencem a $\sigma(B)$, tal que
$$\lambda_1(B) = \alpha(B) + i\omega(B), \lambda_2(B) = \alpha(B) - i\omega(B),$$
onde $\alpha(B_0)=0$, $\omega(B_0)=\omega_0$,
e $\alpha'(B_0) \neq 0$ (hipótese de transversalidade);
- (2) todos os outros elementos de $\sigma(B_0)$ tem parte real negativa;

Então existem soluções periódicas com período próximo a $2\pi/\omega_0$ para valores do parâmetro B próximo a B_0 , numa vizinhança do ponto de equilíbrio.

Obs: Existem casos degenerados em que não aparecem órbitas periódicas para valores de parâmetros diferentes de B_0 . Para se saber o número e a estabilidade das órbitas periódicas, assim como a estabilidade do ponto de equilíbrio em questão, é necessário se fazer um estudo mais complexo da bifurcação onde são calculados os principais coeficientes da expansão em série de algumas funções associadas à bifurcação e não é objetivo deste trabalho entrar em tais detalhes. Tal teoria poder ser vista com mais profundidade em [4] e [9]. As simulações numéricas auxiliarão em alguns resultados de interesse mais imediato.

Seja

$$(3.1) \quad I_0 = (0, \frac{\pi}{2}) \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} (\frac{3.\pi}{2} + 2.k.\pi, \frac{5.\pi}{2} + 2.k.\pi)$$

Proposição 3.1 Para $B=0$ e $C \in I_0$, $\exists A_0$ tal que se $0 < A < A_0$, então o ponto de equilíbrio é instável. (ver figura 2.6.1)

Prova.

1º Passo

a) Para $B=0$, tem-se que:

$$\begin{aligned} R(\omega) &= -\omega^2 - A.\omega . \sin(C.\omega) + 1 \\ S(\omega) &= -A.\omega . \cos(C.\omega) \end{aligned}$$

b) Para $A=0$, $\omega=1$ é a única solução positiva de $R(\omega)$, mas não se aplica o Teorema da Estabilidade (Teorema 2.4.1) pois $S(\omega)=0$;

c) Além disso, $R(0)=1$,

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} R(\omega) = -\infty$$

e

$$-R'(\omega) = \omega + A \cdot \sin(C \cdot \omega) + \omega \cdot (1 + A \cdot C \cdot \cos(C \cdot \omega)) > 0$$

para $0 \leq A < 1/C$ e $\omega > 0$, pois

$$1 + A \cdot C \cdot \cos(C \cdot \omega) > 0$$

pois $A < 1/C$,

$$\omega + A \cdot \sin(C \cdot \omega) > 0$$

pois é crescente em ω e vale zero em $\omega=0$.

Com isso, para cada valor de A no intervalo $[0, 1/C)$, $R(\omega)$ tem um único zero, que será denotado por $\varpi(A)$.

Uma vez que $-R'(\omega) > 0$ para $0 < A < 1/C$, o Teorema da Função Implícita implica que a função $A \rightarrow \varpi(A)$ é analítica e $\varpi(0)=1$.

2º Passo Com isso, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que se $0 < A < \delta$, então $\varpi \in I_\varepsilon = [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$. Como $C \in I_0$, então:

$$\frac{3 \cdot \pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi < C < \frac{5 \cdot \pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$. Pode-se escolher ε , a priori, suficientemente pequeno para que valha

$$\frac{3 \cdot \pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi < C \cdot \overline{\varpi} < \frac{5 \cdot \pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi$$

com $\varpi \in I_\varepsilon = [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$, o que implica que $\cos(C \cdot \varpi) > 0$.

3º Passo Assim, para $B=0$, $0 < A < \min\{\delta, 1/C\}$ e $C \in I_0$, $R(\omega)$ tem um único zero ϖ , para o qual $S(\varpi) = -A \cdot \varpi \cdot \cos(C \cdot \varpi) < 0$ pois $\cos(C \cdot \varpi) > 0$, e, pelo Teorema 2.4.1, o equilíbrio é instável. Basta, agora, fazer $A_0 = \min\{\delta, 1/C\}$ e a proposição está provada. $\square$

Fixando o parâmetro $C \in I_0$, e considerando-se a carta de estabilidade $A \times B$, será verificada a existência de bifurcação de Hopf para valores de parâmetros A e B próximo de zero.

Proposição 3.2. Para $A=0$ e B maior que zero, o ponto de equilíbrio é estável.

Prova. Para $A=0$, a equação característica (2.2) fica:

$$D(s) = s^2 + B \cdot s + 1$$

cujas únicas soluções são:

$$s_{1,2} = -\frac{B}{2} \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4}}{2}$$

Logo, os autovalores possuem sempre parte real negativa. Com isso, o ponto de equilíbrio é estável. $\square$

Seja $D(A,B,s)=0$ a equação característica do sistema para valores de parâmetros A e B (ver equação 2.2). Quando $A=B=0$, $D(0,0,s)=0$ possui apenas as duas raízes $\lambda_1=+i$ e $\lambda_2=-i$. Para A e B maiores que zero e suficientemente pequenos, existem raízes $\lambda_1(A,B)$ e $\lambda_2(A,B)$ que estão próximas de i e $-i$, dependendo analiticamente dos parâmetros A e B além de infinitas outras raízes que têm parte real menor que zero. Esta afirmação será demonstrada na proposição 3.3 e Lema 3.1. Denota-se o conjunto dessas outras infinitas raízes de $\sigma_1(A,B)$.

Proposição 3.3. $\exists \varepsilon > 0$ e funções analíticas $(A,B) \rightarrow \lambda_1(A,B) \in \mathcal{C}$, $\lambda_2(A,B)$ (λ_2 é complexo conjugado de λ_1) definidas para $|A| < \varepsilon$, $|B| < \varepsilon$, tais que $\lambda_1(A,B)$ e $\lambda_2(A,B)$ são raízes da equação característica $D(s,A,B)=0$. Mais ainda, $\lambda_1(0,0)=i$.

Prova. Claramente $D(0,0,i)$ é solução da equação. Mais ainda, no ponto $A=0$, $B=0$ e $s=i$

$$\frac{d}{ds} D(A, B, s) = 2 \cdot i \neq 0$$

Assim, pelo Teorema da Função Implícita, $\exists \lambda_1(A,B)=s$ analítica tal que $D(A,B,\lambda_1(A,B))=0$ e $\lambda_1(0,0)=i$ e analogamente se tem o mesmo resultado para $\lambda_2(A,B)$. E a proposição está provada. $\square$

Lema 3.1. $\exists A_0$ e B_0 tal que para $0 < A < A_0$ e $0 < B < B_0$, todos os elementos de $\sigma_1(A,B)$ têm parte real negativa. Portanto a estabilidade do ponto de equilíbrio fica determinada apenas pela parte real de $\lambda_1(A,B)$ e $\lambda_2(A,B)$.

Prova. Pela Proposição 3.3 e pelo Teorema da Função Implícita em torno de $(A,B,s)=(0,0,i) \exists \varepsilon_0 > 0$ e $\delta_0 > 0$ tal que para $|s-i| < \varepsilon_0$, $|A| < \delta_0$, $|B| < \delta_0$, existe um único $s=\lambda_1(A,B)$ com $D(A,B,s)=0$ e analogamente para para $|s+i| < \varepsilon_0$, $|A| < \delta_0$, $|B| < \delta_0$, existe um único $s=\lambda_2(A,B)$ com $D(A,B,s)=0$. Portanto, para qualquer $\varepsilon < \varepsilon_0$, $\varepsilon > 0$, $\exists \delta < \delta_0$, $\delta > 0$, tal que se $|A| < \delta$ e $|B| < \delta$ então $|\lambda_1(A,B)-i| < \varepsilon$ e $|\lambda_2(A,B)+i| < \varepsilon$. (ver Figura 3.1.1)

Figura 3.1.1 Região hachurada correspondente à possível localização das raízes $\lambda_1(A,B)$ e $\lambda_2(A,B)$ que estão próximas de i e $-i$, para um certo $\varepsilon > 0$.

Dado $R > 0$ e $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \varepsilon_0$ seja K o seguinte conjunto compacto $K = \{ s \in \mathcal{C} \mid |s| \leq R, |s-i| \geq \varepsilon \text{ e } |s+i| \geq \varepsilon \}$. Tem-se que:

$$\min\{|D(A=0, B=0, s)|, s \in K\} > 0$$

Essa desigualdade, a continuidade de $D(A,B,s)$ com relação a A e B e a compacidade de K implicam que existem A_0, B_0 , com $0 < A_0 < \delta$ e $0 < B_0 < \delta$ tais que

$$\inf\{|D(A, B, s)|, s \in K, |A| < A_0, |B| < B_0\} > 0$$

Portanto, todas as possíveis raízes de $D(A,B,s)=0$ para $|A| < A_0$, $|B| < B_0$ têm módulo maior que R , exceto $\lambda_1(A,B)$ e $\lambda_2(A,B)$. (que são as únicas nas bolas de raio ε em torno de i e $-i$ respectivamente)

Obs: Quanto maior R e menor ε escolhidos, menores serão os valores de A_0 e B_0 que satisfaçam tais condições.

Todos os elementos de $\sigma_1(A,B)$ devem satisfazer $D(A,B,s)=0$ para valores fixados de A e B . Logo, se $s \in \sigma_1(A,B)$ então:

$$(3.2) \quad s + \frac{1}{s+B} = A \cdot e^{-C \cdot s}$$

Tirando o módulo dos dois lados da expressão (3.2), tem-se:

$$(3.3) \quad \left| s + \frac{1}{s+B} \right| = A \cdot e^{-C \cdot \text{Re}\{s\}}$$

Como para $s \in \sigma_1(A,B)$, $|A| < A_0$, $|B| < B_0$, têm-se que $|s| > R$, e é possível escolher R tal que o lado esquerdo da equação (3.3) seja maior que A_0 . Portanto, para que a equação (3.3) seja satisfeita, para $|A| < A_0$ e $|B| < B_0$, é necessário que:

$$\text{Re}\{s\} < 0$$

Isto mostra que todos os elementos de $\sigma_1(A,B)$, para $|A| < A_0$ e $|B| < B_0$ têm parte real negativa.

Desta forma, a estabilidade do ponto de equilíbrio para $A > 0$ e $B > 0$ suficientemente pequenos, depende apenas da parte real de $\lambda_1(A,B)$ e $\lambda_2(A,B)$.
□

Proposição 3.4. Para B contido numa vizinhança de zero, $C \in I_0$ (ver equação 3.1), existe uma função analítica $A=A(B)$, crescente, e $\omega=\omega(B)$, satisfazendo $A(0)=0$ e $\omega(0)=1$, tais que $s=\omega(B).i$ é raiz da equação característica (2.2) para valores de parâmetros $A=A(B)$ e B .

Prova. Seja $s = v + \omega.i$ e $D(A, B, s) = F(v, \omega, A, B) + i. G(v, \omega, A, B)$. Para B suficientemente próximo de zero, quer se encontrar funções $A=A(B)$ e $\omega=\omega(B)$ tais que a seguinte equação seja satisfeita:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} F(0, \omega(B), A(B), B) &= 0 \\ G(0, \omega(B), A(B), B) &= 0 \end{aligned}$$

(Obs: quando $v=0$, $F(0, \omega, A, B)=\text{Re}\{D(A,B, \omega.i)\}=R(\omega)$ e $G(0, \omega, A, B) = \text{Im}\{D(A,B, \omega.i)\}=S(\omega)$, onde $R(\omega)$ e $S(\omega)$ são as funções definidas na seção 2.4)

Para $B=0$, $A=0$ e $\omega=1$, tem-se que:

$$\begin{aligned} F(0,1,0,0) &= 0 \\ G(0,1,0,0) &= 0 \end{aligned}$$

Para que seja possível escrever A e ω em função de B , será usado o Teorema de Função Implícita numa vizinhança do ponto $\omega=1$, $A=0$ e $B=0$. Para isso, é preciso que neste ponto:

$$\det \begin{pmatrix} F_A & F_\omega \\ G_A & G_\omega \end{pmatrix} \neq 0$$

Mas

$$F_{\omega} = -2 \cdot \omega + A \cdot B \cdot C \cdot \text{sen}(C \cdot \omega) - A \cdot \text{sen}(C \cdot \omega) - A \cdot C \cdot \omega \cdot \text{sen}(C \cdot \omega)$$

$$F_A = -B \cdot \cos(C \cdot \omega) - \omega \cdot \text{sen}(C \cdot \omega)$$

$$G_{\omega} = B - A \cdot \cos(C \cdot \omega) + A \cdot C \cdot \omega \cdot \text{sen}(C \cdot \omega) + A \cdot B \cdot C \cdot \cos(C \cdot \omega)$$

$$G_A = -\omega \cdot \cos(C \cdot \omega) + B \cdot \text{sen}(C \cdot \omega)$$

E para $B=0$, $A=0$ e $\omega = 1$, tem-se:

$$F_{\omega} = -2$$

$$F_A = -\text{sen}(C)$$

$$G_{\omega} = 0$$

$$G_A = -\cos(C)$$

Com isso,

$$\det \begin{pmatrix} F_A & F_{\omega} \\ G_A & G_{\omega} \end{pmatrix} = -2 \cdot \cos(C) \neq 0$$

pois $C \in I_0$.

Portanto as função $B \rightarrow A(B)$ e $B \rightarrow \omega(B)$ estão definidas para $|B|$ suficientemente pequeno e são analíticas.

Para mostrar que a derivada de $A(B)$ é positiva (denotar-se-á a derivação com respeito a B por um ponto), derivam-se as equações (3.4) com relação a B , obtendo-se:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} F_A \cdot \dot{A} + F_{\omega} \cdot \dot{\omega} + F_B &= 0 \\ G_A \cdot \dot{A} + G_{\omega} \cdot \dot{\omega} + G_B &= 0 \end{aligned}$$

Logo, para $A=0$, $B=0$ e $\omega=1$, tem-se

$$\dot{A} = \frac{F_{\omega} \cdot G_B - F_B \cdot G_{\omega}}{F_A \cdot G_{\omega} - F_{\omega} \cdot G_B} = \frac{1}{\cos(C)} > 0$$

A proposição 3.4 implica que para $C \in I_0$ as funções de $\lambda_1(A,B)$ e $\lambda_2(A,B)$ definidas pela proposição 3.3 satisfazem $\text{Re}(\lambda_1(A(B),B)) = \text{Re}(\lambda_2(A(B),B)) = 0$. Obtém-se, desta forma, curvas no espaço de parâmetros $A \times B$, para valores de C fixos, em que a equação característica possui raízes imaginárias puras. Essas são as possíveis curvas de bifurcação de Hopf como pode ser visualizado na figura 3.1.2 (a).

Figura 3.1.2. (a) Curva no plano $A \times B$, que corresponde a pares de parâmetros para os quais a equação característica possui um zero imaginário puro. (b) Autovalor $\omega.i$ em função de B .

Seja $v(A,B) = \text{Re}(\lambda_1(A,B)) = \text{Re}(\lambda_2(A,B))$ onde $\lambda_1(A,B)$ e $\lambda_2(A,B)$ são as funções dadas na proposição 3.3. Note que $v(A(B),B)=0$ onde $B \rightarrow A(B)$ é a função dada na proposição 3.4.

Devido ao Lema 3.1 e as proposições 3.1 a 3.4, conclui-se que o equilíbrio é instável para (A,B) a esquerda da curva $B \rightarrow A(B)$ e estável para (A,B) a direita da mesma curva (ver figura 3.1.3).

Abaixo mostrar-se-á que:

$$(3.6) \quad \left. \frac{\partial v(A, B)}{\partial B} \right|_{A=A(B)} < 0$$

Esse fato e o Teorema 3.1 (Bifurcação de Hopf) implicam que a curva $B \rightarrow A(B)$ é uma curva de bifurcação de Hopf.

Figura 3.1.3. Aspecto típico da Carta de Estabilidade $A \times B$ para $C \in I_0$, decorrente do Lema 3.1 e das proposições 3.1 a 3.4.

Proposição 3.5. Para B suficientemente pequeno, $C \in I_0$, e para $A=A(B)$ dada na proposição 3.4, a desigualdade (3.6) é verdadeira.

Prova. Uma vez que $\lambda_1(A,B) = v(A,B) + i\omega(A,B)$ e $\lambda_2(A,B) = v(A,B) - i\omega(A,B)$, tem-se que:

$$F(v(A, B), \omega(A, B), A, B) = 0$$

$$G(v(A, B), \omega(A, B), A, B) = 0$$

O que implica que:

$$\begin{aligned} F_v \cdot \partial_B v + F_\omega \cdot \partial_B \omega + F_B &= 0 \\ G_v \cdot \partial_B v + G_\omega \cdot \partial_B \omega + G_B &= 0 \end{aligned}$$

Daí:

$$(3.7) \quad \partial_B v(A, B) = \frac{G_B \cdot F_\omega - G_\omega \cdot F_B}{F_v \cdot G_\omega - G_v \cdot F_\omega}$$

Tem-se que:

$$\begin{aligned} F_\omega &= -2.\omega + A.B.C.\text{sen}(C.\omega) - A.\text{sen}(C.\omega) - A.C.\omega.\text{sen}(C.\omega) \\ F_B &= -A.\cos(C.\omega) \\ G_\omega &= B - A.\cos(C.\omega) + A.C.\omega.\text{sen}(C.\omega) + A.B.C.\cos(C.\omega) \\ G_B &= \omega + A.\text{sen}(C.\omega) \end{aligned}$$

Para $B=0$, $A(B)=0$, $\omega(0,0)=1$ tem-se, da prova da proposição 3.3, que, no ponto $s=i, A=0$ e $B=0$:

$$F_v \cdot G_\omega - G_v \cdot F_\omega = \left| \frac{dD}{ds}(s, A, B) \right|^2 = |2.i|^2 = 4$$

e

$$G_B \cdot F_\omega - G_\omega \cdot F_B = -2$$

Substituindo esses valores em 3.7, para $B=0$ e $A=A(0)=0$, tem-se:

$$\partial_B v(0,0) = -\frac{1}{2}$$

Devido à continuidade de $(A,B) \rightarrow v(A,B)$ e $B \rightarrow A(B)$, tem-se que a desigualdade (3.6) é verdadeira para B suficientemente pequeno. $\square$

3.2 Curvas de Bifurcação de Hopf

É possível encontrar uma expressão aproximada para a curva de bifurcação de Hopf que passa pelo ponto $(B=0, A=0)$. Será utilizada uma expansão em Taylor até segunda ordem para se estimar esta curva, que, quando vista na carta de estabilidade $A \times B$, dependerá apenas do valor do parâmetro C .

O objetivo é, portanto, obter aproximadamente as curvas $B \rightarrow A(B)$ e $B \rightarrow \omega(B)$ dadas pela proposição 3.4.

Então, derivando as expressões de F e G , como na equação (3.5) tem-se:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} F_{\omega} \cdot \dot{\omega} + F_A \cdot \dot{A} + F_B &= 0 \\ G_{\omega} \cdot \dot{\omega} + G_A \cdot \dot{A} + G_B &= 0 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \frac{d\omega}{dB} \\ \dot{A} &= \frac{dA}{dB} \\ F_{\omega} &= \frac{\partial F}{\partial \omega} \\ \text{etc ...} \end{aligned}$$

e

$$F_{\omega} = -2.\omega + A.B.C.\text{sen}(C.\omega) - A.\text{sen}(C.\omega) - A.C.\omega.\text{sen}(C.\omega)$$

$$F_B = -A.\cos(C.\omega)$$

$$G_{\omega} = B - A.\cos(C.\omega) + A.C.\omega.\text{sen}(C.\omega) + A.B.C.\cos(C.\omega)$$

$$G_B = \omega + A.\text{sen}(C.\omega)$$

$$F_A = -B.\cos(C.\omega) - \omega.\text{sen}(C.\omega)$$

$$G_A = -\omega.\cos(C.\omega) + B.\text{sen}(C.\omega)$$

Para $A=0$, $B=0$ e $\omega=1$, tem-se:

$$F_{\omega} = -2$$

$$F_B = 0$$

$$G_{\omega} = 0$$

$$G_B = 1$$

$$F_A = -\text{sen}(C)$$

$$G_A = -\text{cos}(C)$$

Para $C \in \mathbb{I}_0$, $A=0$, $B=0$, $\omega=1$ é possível resolver o sistema (3.8), obtendo-se:

$$\dot{\omega}(0) = -\frac{\tan(C)}{2}$$

$$\dot{A}(0) = \frac{1}{\cos(C)}$$

Derivando as expressões (3.8) mais uma vez com relação a B, obtém-se:

$$(F_{\omega\omega} \cdot \dot{\omega} + F_{\omega A} \cdot \dot{A} + F_{\omega B}) \cdot \dot{\omega} + F_{\omega} \cdot \ddot{\omega} + (F_{A\omega} \cdot \dot{\omega} + F_{AA} \cdot \dot{A} + F_{AB}) \cdot \dot{A} + F_A \cdot \ddot{A} + F_{B\omega} \cdot \dot{\omega} + F_{BA} \cdot \dot{A} + F_{BB} = 0$$

$$(G_{\omega\omega} \cdot \dot{\omega} + G_{\omega A} \cdot \dot{A} + G_{\omega B}) \cdot \dot{\omega} + G_{\omega} \cdot \ddot{\omega} + (G_{A\omega} \cdot \dot{\omega} + G_{AA} \cdot \dot{A} + G_{AB}) \cdot \dot{A} + G_A \cdot \ddot{A} + G_{B\omega} \cdot \dot{\omega} + G_{BA} \cdot \dot{A} + G_{BB} = 0$$

Sendo

$$F_{\omega\omega} = A.B.C^2 \cdot \cos(C.\omega) - 2 - 2.A.C \cdot \cos(C.\omega) + A.C^2 \cdot \omega \cdot \text{sen}(C.\omega)$$

$$F_{\omega B} = A.C \cdot \text{sen}(C.\omega)$$

$$F_{\omega A} = B.C \cdot \text{sen}(C.\omega) - \text{sen}(C.\omega) - \omega.C \cdot \text{sen}(C.\omega)$$

$$F_{BB} = 0$$

$$F_{BA} = -\cos(C.\omega)$$

$$F_{AA} = 0$$

$$G_{\omega\omega} = 2.A.C \cdot \text{sen}(C.\omega) - A.B.C^2 \cdot \text{sen}(C.\omega) + A.C^2 \cdot \omega \cdot \cos(C.\omega)$$

$$G_{\omega B} = 1 + A.C \cdot \cos(C.\omega)$$

$$G_{\omega A} = -\cos(C.\omega) + C.\omega \cdot \text{sen}(C.\omega) + B.C \cdot \cos(C.\omega)$$

$$G_{BB} = 0$$

$$G_{BA} = \text{sen}(C.\omega)$$

$$G_{AA} = 0$$

No ponto $A=0$, $B=0$ e $\omega=1$, tem-se:

$$F_{\omega\omega} = -2$$

$$F_{\omega B} = 0$$

$$F_{\omega A} = -\text{sen}(C) - C \cdot \text{sen}(C)$$

$$F_{BB} = 0$$

$$F_{BA} = -\cos(C)$$

$$F_{AA} = 0$$

$$G_{\omega\omega} = 0$$

$$G_{\omega B} = 1$$

$$G_{\omega A} = -\cos(C) + C \cdot \text{sen}(C)$$

$$G_{BB} = 0$$

$$G_{BA} = \text{sen}(C)$$

$$G_{AA} = 0$$

De onde se conclui que, para $A=0$, $B=0$ e $\omega=1$:

$$\ddot{A}(0) = \frac{\tan(C)}{\cos(C)} \cdot (2 - C \tan(C))$$

$$\ddot{\omega}(0) = \frac{C \tan(C)}{2} - \frac{3 \tan^2(C)}{4} + \frac{C \cdot \tan^3(C)}{2} - 1$$

Sumarizando os resultados desse capítulo, tem-se o seguinte Teorema:

Teorema 3.2. Para valores de parâmetros A e B suficientemente pequenos e $C \in I_0$ fixo, onde I_0 é dado na equação 3.1, o diagrama de estabilidade $A \times B$ é dado pela figura 3.1.3, ocorrendo Bifurcação de Hopf na curva $B \rightarrow A(B)$ dada pela proposição 3.4 (curva $v=0$ da figura 3.1.3). Uma estimativa desta curva de bifurcação de Hopf $A=A(B)$, e da curva de frequência associada à bifurcação $\omega=\omega(B)$ são dadas por:

$$\omega(B) = 1 - \frac{\tan(C)}{2} \cdot B + \frac{\ddot{\omega}(0)}{2} B^2 + O(B^3)$$

$$A(B) = \frac{1}{\cos(C)} B + \frac{\ddot{A}(0)}{2} \cdot B^2 + O(B^3)$$

4 Simulações Numéricas e Órbitas Periódicas geradas pela Bifurcação de Hopf

Já foi visto no capítulo anterior que para $C \in I_0$, e A suficientemente próximo de zero, existe um valor do parâmetro $B = B_0$, em que ocorre a Bifurcação de Hopf. Por exemplo, para $C=1.4$, tem-se a seguinte carta de estabilidade, de onde se pode visualizar a curva de bifurcação de Hopf:

Figura 4.1. Carta de Estabilidade $A \times B$ para $C=1.4$. Exemplo de curva de

Bifurcação de Hopf

No ponto B_0 , existe um autovalor $\omega_0 i$, imaginário puro. O Teorema da Bifurcação de Hopf, utilizado na sessão anterior, garante que para valores do parâmetro B próximos de B_0 , existem soluções periódicas. Esses valores de parâmetros de B , em que aparecem tais órbitas periódicas podem ser, a princípio, maiores ou menores que B_0 . Além disso, elas podem ser estáveis ou instáveis assintoticamente dependendo da bifurcação ser supercrítica ou subcrítica, respectivamente. Este trabalho não tem como objetivo analisar o caráter da bifurcação de forma analítica, mas sim o fazer numericamente.

Nas referências [1] e [2], cujo modelo estudado é idêntico ao deste trabalho fazendo-se $\tau=0$ ($C=0$), que corresponde a uma E.D.O. (equação diferencial ordinária), os pontos de bifurcação satisfazem $A \cdot B < 1$ e $A=B$ ($\pi_0 = \gamma$) conforme a figura 4.2.

Figura 4.2. Carta de Estabilidade $A \times B$ para $C=0$. O Sistema corresponde a uma equação diferencial ordinária.

É demonstrado em [2], que as órbitas periódicas surgem para $B < A$, e que estas são assintoticamente estáveis. Assim, por continuidade, é de se esperar que para valores de τ próximos de zero, as órbitas periódicas geradas também sejam estáveis e ocorram para valores de $B < B_0$, onde B_0 é o valor do parâmetro B onde ocorre a bifurcação. Trata-se, portanto, de uma bifurcação supercrítica.

Isso significa que o ponto de equilíbrio estável passa para instável, surgindo órbitas periódicas estáveis, ao cruzar-se a reta $B=A$ da direita para a esquerda. Assim, em termos econômicos, no plano de fase $\pi \times m$, conforme o déficit público fosse diminuindo, a inflação de equilíbrio cairia, mas, de repente, a partir do ponto de bifurcação, o equilíbrio perderia sua estabilidade, e a inflação, assim como a quantidade de moeda no mercado, oscilariam num intervalo de forma estável (correspondente à órbita periódica estável).

A simulação numérica comprova esse fato, e as órbitas periódicas podem ser nitidamente visualizadas no diagrama de fase $\pi \times m$ da figura 4.3(a) e (b).

Figura 4.3. (a) Simulação numérica no espaço de fase $\pi \times m$ para $B > B_0$. (b) Idem para $B < B_0$.

Percebe-se claramente que quando $B > B_0$, o ponto de equilíbrio é estável, conforme visto na carta de estabilidade e, portanto, não há órbita periódica em sua vizinhança. Para $B < B_0$, o ponto de equilíbrio passa a ser instável e a simulação numérica aponta uma órbita periódica estável, na vizinhança do equilíbrio.

5 Proposta de um novo Modelo Econômico

Será feita uma proposta de um modelo econômico, baseado no modelo estudado, introduzindo-se novas hipóteses. Tais hipóteses consistem em acrescentar algumas considerações sobre os efeitos de atraso gerados por algumas variáveis macroeconômicas.

Em primeiro lugar, foi feita uma hipótese de *mark-up*, em que os preços são reajustados concomitantemente aos salários. No entanto, deve-se considerar que muitas vezes esse reajuste instantâneo não pode ser efetivamente realizado, devido à falta de informação e atraso nos contratos trabalhistas. Essa hipótese se traduziria em:

$$\omega(t) = \pi(t - \tau_1)$$

Também será considerado que a equação de demanda agregada é da seguinte forma:

$$h(t) = -a + b.\ln m(t - \tau) + c.\pi^e(t - \tau) + d.\ln m(t) + e.\pi^e(t)$$

onde a influência da taxa de juros real é uma combinação entre o modelo estudado em [1], [2], e o modelo baseado na hipótese feita no início deste trabalho.

A equação do financiamento do déficit público também não será modificado. Também será admitida a previsão perfeita da inflação, a equação da aceleração dos salários, assim como a equação salarial de Phillips, vistas na introdução.

Desta forma, o novo modelo econômico toma a seguinte forma:

$$\frac{dm(t)}{dt} = f - m(t)\pi(t)$$

$$\frac{d\pi(t-\tau_1)}{dt} = -k_0 + k_1 \cdot \ln m(t) + k_2 \cdot \ln m(t-\tau) + k_3 \cdot \pi(t) + k_4 \cdot \pi(t-\tau) - k_5 \cdot \pi(t-\tau_1)$$

que é um sistema de equações diferenciais funcionais do tipo neutra, e seu estudo requer uma teoria ainda mais complexa que a das equações funcionais com atraso. O número de parâmetros agora é 9, um pouco grande para se iniciar um estudo detalhado. No entanto, é quase sempre possível reduzir o número de parâmetros e realizar um estudo em torno do sistema já estudado, de forma perturbativa. Tal modelo é uma proposta para futuros trabalhos e sua dinâmica pode ser totalmente diferente do modelo estudado neste trabalho, podendo quem sabe servir para explicar fenômenos econômicos mais complexos nos quais os modelos anteriores se revelaram falhos.

6 Conclusão

O trabalho mostrou que os efeitos do atraso da taxa de juros real sobre o hiato da economia podem ser muito grandes, quando comparados aos estudos anteriores em que esse atraso era igual a zero ([1] e [2]). As cartas de estabilidade obtidas com o auxílio do computador mostram que em geral, quando o valor do atraso aumenta muito, a estabilidade dos equilíbrios da economia sofre muito pouca influência ou podem até se desestabilizar. Isso poderia ser interpretado como uma certa desordem nos ajustes da demanda agregada, quando esta é expressa pela taxa de juros real do passado muito distante, perdendo qualquer sentido para os agentes econômicos no processo de alocação de recursos e ajustamento dos mercados de bens e monetário, de acordo com as necessidades atuais.

Apesar disso, para uma faixa de valores de atraso não muito grande, a tendência é estabilizar os equilíbrios da economia, até mesmo para economias que apresentavam total instabilidade, quando vistas pelo modelo de E.D.O.. Isso significa que os efeitos de atraso da taxa de juros real sobre a demanda agregada conseguem conciliar a oferta e a demanda do mercado de ativos e de trabalho, de forma coordenada, a ponto de controlar os efeitos auto-destrutivos de uma economia baseada no financiamento de déficit público por emissão de moeda. Chama-se essa faixa de valores de atraso, na qual a economia tende a se estabilizar, de banda de estabilidade.

Para déficit público igual a zero, o atraso introduzido na equação consegue estabilizar equilíbrios dependendo dos outros parâmetros da economia, o que não acontecia neste modelo quando o atraso era igual a zero. Tal instabilidade é característica de muitos modelos com expectativa racional.

Para déficit público não muito grande o atraso têm um grande efeito estabilizador, conforme visto nas cartas de estabilidade da seção 2.6. Para déficit público grande o efeito do atraso é muito pequeno.

Este trabalho teve como objetivo sistematizar o estudo inicial de sistemas descritos por equações diferenciais com atraso, buscando compreender a dinâmica das variáveis numa vizinhança dos pontos de equilíbrio, considerando-se um conjunto de parâmetros externos. Com isso, a utilização de um modelo macroeconômico, permitiu não somente ampliar o conhecimento teórico sobre o tema, dentro de um novo ponto de vista, mas também mostrar a importância

dos efeitos de novas hipóteses sobre os modelos matemáticos, como é o caso de vários tipos de atraso que existem na dinâmica real de muitos sistemas, presentes também nos modelos associados a outras Ciências, e que muitas vezes são desconsideradas por motivos de simplificação matemática.

Como sugestão à continuação dessa linha de pesquisa segue:

- Estudos empíricos que estimem o valor do atraso para diferentes economias. Formas de o governo implementar políticas econômicas que sejam capazes de controlar o valor do atraso da taxa de juros real sobre a demanda agregada, deixando-o dentro da banda de estabilidade.
- Estudos sobre possíveis modificações do modelo, como a introdução de um atraso distribuído, e novos atrasos sobre outras variáveis do modelo, como foi feito na proposta do Capítulo 5.
- Estudos sobre a Bifurcação de Hopf, levando-se em consideração outros parâmetros do modelo, como o próprio parâmetro que representa o atraso.

Referências Bibliográficas

- [1] Barbosa, F. H.; Oliva, W. M.; Sallum, E. M. A dinâmica da hiperinflação. Revista de Economia Política, Rio de Janeiro, v. 13, n. 1 (49), p.5-24, 1993.
- [2] Messias, Marcelo. A dinâmica da hiperinflação: Um exemplo de Bifurcação de Bogdanov-Takens. São Paulo: USP, 1992. Dissertação (Mestrado em Matemática). - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, 1992.
- [3] Stépán, G. Retarded Dynamical Systems: Stability. England: Longman Scientific & Technical, 1989.
- [4] Hale, J. K. Theory of Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1993.
- [5] Guckenheimer, J.; Holmes, P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. Appl. Math. Sciences, 42, New York: Springer-Verlag, 1983.
- [6] Dornbush, R.; Fischer, S. Macroeconomia. São Paulo: MAKRON Books, 1990.
- [7] Blanchard, O. J.; Fischer, S. Lectures on Macroeconomics. England: The MIT Press, 1989.
- [8] Ahlfors, L. V. Complex Analysis. New York: Mc Graw-Hill, 1979.
- [9] Hassard, B. D.; Kazarinoff, N. D.; Wan, Y. H. Theory and Applications of Hopf Bifurcation. London: Cambridge University Press, 1981.