Preços em Mercados Financeiros e Modelos de Estrutura a Termo

Edivar Vilela de Queiroz Filho ¹

Dissertação apresentada ao
Instituto de Matemática e Estatística da
Universidade de São Paulo
para obtenção do grau de mestre em

Mestre em Matemática Aplicada

Orientador: **Prof. Dr. João Carlos Prandini**

Instituto de Matemática e Estatística da USP

São Paulo, junho de 1999

¹Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do CNPq

Preços em Mercados Financeiros e Modelos de Estrutura a Termo

*Este exemplar corresponde à versão final devidamente
corrigida e defendida por Edivar Vilela de Queiroz Filho
e aprovada pela comissão julgadora.*

Sao Paulo, 23 de agosto de 1999.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. João Carlos Prandini
- Prof. Dr. Vladimir Belitsky
- Pro. Dr. Ricardo Bianconi

Sumário

1	Introdução à Teoria de Mercados Financeiros	12
1.1	Modelos de Mercados Financeiros	12
1.2	O Modelo Uni-Período Discreto	14
1.2.1	Conjunto Orçamento	16
1.2.2	Equilíbrio	17
1.3	Eficiência de Pareto	18
1.4	Estratégias de Arbitragem	24
1.5	Completeness	26
1.6	Medida de Preço do Equilíbrio	29
1.7	O Funcional de Preços	35
1.8	Risco e Retorno	39
2	Modelo Multi-Período Discreto	44
2.1	Elementos do Modelo	44
2.2	Estrutura de Informação	46
2.3	Consistência de Informação	49
2.3.1	Conjunto Orçamento	51
2.3.2	Equilíbrio	52
2.4	Eficiência de Pareto	52
2.5	Completeness	56
2.6	Processo de Valor	64
2.7	Estratégias Auto-Financiáveis	69
3	Medidas de Preço do Equilíbrio no Modelo Multi-Período	74
3.1	Medida de Preço do Equilíbrio	74
3.2	O Funcional de Preços	92

4	Cálculo Estocástico Discreto	98
4.1	Introdução	98
4.2	Processo de Covariância e Martingais Ortogonais	98
4.2.1	Processo de Covariância Quadrático	98
4.2.2	Partições Independentes	101
4.2.3	Martingais Ortogonais	102
4.3	Integrais Estocásticas	105
4.3.1	Integrais Estocásticas e Processos de Covariância	108
4.3.2	Fórmula de Itô	111
4.3.3	Exponenciais Estocásticas	111
4.4	Mudança de Medida e o Teorema de Girsanov	115
4.4.1	Processo da Razão de Verossimilhança	115
4.4.2	Teorema de Girsanov	118
4.5	Representação de Martingais	121
4.6	A Decomposição de Doob	132
5	Extensões do Modelo Multi-Período Discreto	137
5.1	Introdução	137
5.2	Um Modelo Simples de Apreçamento	138
5.3	Uma Fórmula Explícita para Apreçamento	148
5.4	Representação de Medidas de Preço do Equilíbrio	159
5.5	Compleitude	166
5.6	Risco e Retorno	170
6	Modelos Reticulados, <i>Bonds</i> e Derivativos de Taxas de Juros	176
6.1	O Modelo Básico de Estrutura a Termo	176
6.1.1	Estrutura a Termo de Preços de Zero Bonds	176
6.1.2	Estrutura a Termo de <i>Yield to Maturity</i>	182
6.1.3	Estrutura a Termo de Taxa de juros <i>Forward</i>	183
6.2	Reticulados e Cadeias de Markov	185
6.3	Modelos de Estrutura a Termo	198
6.4	Medida de Probabilidade de Preço do Equilíbrio Forward	204
6.5	Opções sobre Bonds e Bonds com Cupons	208

Lista de Figuras

2.1	“Split”	58
2.2	Estrutura de Informação	60
5.1	Reticulado	150
6.1	Espaço de Estados da Cadeia de Markov X.	187
6.2	Modelo de Estrutura a Termo da Cadeia de Markov.	189
6.3	Estrutura do Modelo.	196

Abstract

The purpose of this dissertation is to present in a single work an introduction to the theory of financial markets and some of its applications. Trough out this dissertation, the necessary mathematics is developed simultaneously with the theory thereby making the work self contained. As an application, some option pricing models are developed and the computational complexity of some of these models is discussed.

Abstract

O objetivo desta dissertação é apresentar em um único trabalho uma introdução à teoria de mercados financeiros e algumas aplicações. Os conceitos matemáticos necessários para este desenvolvimento são introduzidos simultaneamente com a teoria, tornando o trabalho auto suficiente. Como aplicação dessa teoria, desenvolvemos alguns modelos de apreçamento de opções que podem servir como guia para o desenvolvimento de novos modelos. No desenvolvimento dessas aplicações, também abordamos questões relacionadas à complexidade computacional.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos meus mestres, em especial ao meu orientador nesta dissertação Prof. Dr. João Carlos Prandini e ao Prof. Dr. Vanderlei Salvador Bagnato.

Agradeço também aos amigos sempre presentes Edésio Raimundo Sibrão e Wanderlei Lima de Paulo, aos amigos Eduardo Mesquita e Loreley Zavattiero, aos amigos distantes Jason Subt e Lyman Jones e a todos os demais.

Agradeço a todo o pessoal da biblioteca do IME e da secretaria de Pós-Graduação, Pinho, Francisca, Feijão, e os demais.

Um agradecimento especial a Patricia Maria Silveira.

Por fim, agradeço a meus pais, Edivar e Maria e minhas irmãs Adriana e Marilisa.

Introdução

O objetivo desta dissertação é apresentar em um único trabalho uma introdução à teoria de mercados financeiros e algumas aplicações. Os conceitos matemáticos necessários para este desenvolvimento são introduzidos simultaneamente com a teoria, tornando o trabalho auto suficiente. Como aplicação dessa teoria, desenvolvemos alguns modelos de apreamento de opções que podem servir como guia para o desenvolvimento de novos modelos. No desenvolvimento dessas aplicações, também abordamos questões relacionadas à complexidade computacional.

Mais especificamente, trabalharemos com modelos discretos Uni e Multi-Períodos. A idéia básica da teoria consiste em identificar fluxos de caixa que são realizáveis via negociação em títulos e no problema associado de apreamento desses fluxos.

As aplicações são formuladas sobre um intervalo de tempo discretizado. No desenvolvimento das aplicações introduzimos o conceito dos reticulados; essa estrutura fornece uma grande flexibilidade e robustez no desenvolvimento das aplicações. Utilizando o reticulado, podemos estender as aplicações de forma a incorporar modelos de apreamento de opções exóticas. Por fim, apresentamos a relação entre os reticulados e as equações diferenciais estocásticas.

A dissertação tem como referências principais os seguintes livros: *Prices in Financial Markets*, Dothan, M.U. [1990] e *Introduction to Mathematical Finance*, Pliska, S.R. [1997]. Os conceitos matemáticos necessários para o desenvolvimento da teoria são: Cálculo, Teoria da Probabilidade e Álgebra Linear; para desenvolver extensões da teoria e aplicações utilizamos conceitos de Cálculo Estocástico Discreto desenvolvidos no Capítulo 4.

Vejamos uma descrição detalhada da dissertação: No Capítulo 1 apresentamos o modelo Uni-Período discreto. Os conceitos introduzidos neste capítulo servem como uma introdução à teoria de mercados financeiros. Estes

conceitos são apresentados de forma intuitiva e, posteriormente são estendidos para o modelo Multi-Período discreto que possua uma maior complexidade matemática. Em resumo, os assuntos apresentados são: Conjunto Orçamento e Equilíbrio, a conexão entre Completude e Eficiência de Pareto. Utilizando o conceito de Medida de Probabilidade de Ajustamento ao Risco, sob o nome de Medida de Preço do Equilíbrio, caracterizamos um mercado completo em termos dessa medida e apresentamos uma representação de preços como expectativa segundo a medida de preço do equilíbrio dos valores finais descontados. Finalmente apresentamos alguns resultados sobre a relação Risco e Retorno.

No Capítulo 2 introduzimos o modelo Multi-Período discreto. Inicialmente definimos o conceito de estrutura de informação e a interpretação de uma variável mensurável em termos da consistência de informação. Em seguida, caracterizamos um sistema de preços completo e por fim apresentamos algumas estratégias de negociação especiais.

No Capítulo 3 definimos a Medida de Probabilidade de Ajustamento ao Risco para o modelo Multi-Período e apresentamos uma caracterização de um sistema de preços completo em termos dessa medida. Destacamos a caracterização da Medida de Preço do Equilíbrio em termos do processo de preços descontados. Finalmente, estendemos o conceito do funcional de preços para o modelo Multi-Período e apresentamos uma representação do funcional em termos da Medida de Preço do Equilíbrio.

No Capítulo 4 apresentamos o análogo discreto do Cálculo Estocástico. Esses conceitos são utilizados para estender os resultados da teoria e aplicações. Em resumo os conceitos apresentados são: Processo de Covariância e Martingais Ortogonais, Integrais Estocásticas, Mudança de Medida e Teorema de Girsanov, Representação de Martingais e Decomposição de Doob.

No Capítulo 5 apresentamos extensões do Modelo Multi-Período, entre as quais destacamos a representação da Medida de Preço do Equilíbrio como uma exponencial estocástica e aplicação dessa representação para os modelos de apreamento de opções. Especificamente, apresentamos um modelo simples de apreamento e mostramos que modelando a componente de inovação como um passeio aleatório sobre a reta obtemos uma fórmula fechada para o apreamento de uma opção em função da distribuição binomial. Neste ponto são apresentadas questões sobre a complexidade computacional desses modelos e introduzimos uma forma discretizada sobre o reticulado que estende sua aplicação para opções exóticas.

Finalmente, no Capítulo 6 introduzimos o conceito de Estrutura a Termo

e utilizando algumas generalizações dos resultados do modelo Multi-Período desenvolvemos modelos para apreçamento de derivativos sobre taxa de juros. Mais uma vez, esses modelos são desenvolvidos sobre a estrutura do reticulado e a questão da complexidade computacional é abordada. Entre os modelos, destacamos o conhecido modelo de Black, Derman & Toy obtido através da imposição de restrições sobre a estrutura de volatilidade do modelo genérico.

Capítulo 1

Introdução à Teoria de Mercados Financeiros

1.1 Modelos de Mercados Financeiros

Para iniciar, definiremos o objeto sobre o qual estaremos desenvolvendo a teoria: um *título* é um contrato para entrega futura de um bem. Por sua vez, um *derivativo* (do inglês *derivative security*) é um título cujo valor depende de outro ativo subjacente. Neste contexto, as opções e os contratos futuros são exemplos de derivativos negociados, em sua grande maioria, em instituições como as Bolsas. Estas, por sua vez, proporcionam um meio com regras e normas que asseguram que o intercâmbio de riscos entre os agentes seja efetuado de maneira organizada.

Para que tal intercâmbio exista, os agentes utilizam-se de títulos assumindo posições distintas tais como

- O *hedger*, que garante um certo preço transformando um ativo de risco em um ativo com valor final conhecido;
- O especulador, que assume a posição contrária à do *hedger*;
- O investidor, capitaliza uma empresa esperando o aumento do seu patrimônio através do desempenho desta.

Nesses mercado, os agentes trocam títulos por dinheiro, e durante as negociação recebem informações sobre cotações, bem como, notícias políticas e econômicas. Além da negociação, os agentes recebem dinheiro pelo trabalho

e outras fontes e gastam seu dinheiro no consumo de bens. A incerteza sobre o montante total a ser recebido pelos agentes torna seu consumo futuro incerto. Os agentes possuem preferências referentes às suas várias possibilidades de consumo, presente e futura.

A teoria de mercados financeiros tem como objetivo quantificar esse processo. Neste modelo teórico estarão envolvidos incertezas, bens de consumo, títulos, agentes, suas informações, a capacidade de consumo e preferências.

Os elementos do modelo estão listados a seguir.

- O **tempo**, que abrange tanto o período do modelo quanto as datas de consumo e negociação.
- A **incerteza**, descrita como uma lista dos eventos básicos ou estados que possam ocorrer durante o período do modelo e suas probabilidades.
- Os **bens**, que são trocados, recebidos ou consumidos.
- Os **títulos**, que são contratos sobre bens para entrega futura, condicionados a um determinado estado.
- Os **agentes** chamados consumidores ou investidores; também a informação disponível para estes agentes em datas de consumo ou negociação.
- A **dotação** de bens que o agente recebe de outras fontes que não a proveniente da negociação.
- As **possibilidades de consumo** de um agente durante o período de tempo do modelo.
- As **preferências** de um agente sobre as possibilidades de consumo durante o período do modelo.

Quando todos estes itens forem especificados, o modelo determinará a demanda dos agentes por títulos, seu consumo e o preço dos títulos em datas de negociação.

Devemos notar que o modelo que estamos estudando possui um paralelo com o mundo real. Após estabelecermos algumas condições tanto o modelo Uni-Período quanto o modelo Multi-Período podem ser vistos como uma “roda” de negociação de um título na Bolsa.

Em cada “roda” apenas um título é negociado, informações chegam a todo momento alterando o preço dos títulos e a negociação não ocorre enquanto os preços não forem tal que a quantidade ofertada seja igual à demandada; chamaremos esse processo de equilíbrio. Note, também, que a riqueza inicial ou dotação é o processo que restringe o consumo inicial de um agente e, o consumo final deve ser atribuído somente ao resultado da negociação, ou seja, ao pagamento dos títulos ou ainda, ao estado vigente. O modelo termina após esse último processo e portanto não há relevância para o processo a fonte necessária para a liquidação dos títulos.

1.2 O Modelo Uni-Período Discreto

Este é o modelo mais simples a ser apresentado. Ele envolve um intervalo de tempo finito, que se estende a partir de uma data inicial até uma data final. Existe somente um número finito de estados na data final e os títulos podem ser trocados por bens somente nas datas inicial e final. A negociação só ocorre na data inicial, e o mercado de títulos se fecha após a mesma.

Os elementos do modelo Uni-Período estão listados a seguir.

- A data inicial 0, a data final T ; negociação somente em 0 e consumo somente em 0 e T .
- Os estados pertencem a um espaço finito Ω com K elementos

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_K\}.$$

Cada estado $\omega \in \Omega$ ocorre com probabilidade positiva $P(\omega)$.

- Existe somente um bem de consumo perecível. Este modelo ignora problemas associados à alocação de consumo entre vários bens e descarta o possível papel especial do dinheiro (a possibilidade de transferir riqueza no tempo). O bem de consumo perecível não pode, pois, ser estocado e, a única maneira pela qual um agente pode transferir consumo entre a data inicial e a data final é através da negociação de títulos.
- Existe um número finito N de títulos endógenos e não há títulos exógenos. Isto significa que todas os títulos são criados pelos agentes e que não existem entidades fora do modelo, tais como governo ou firmas que possam fornecer títulos. Antes do início da negociação em 0, os

agentes decidem quais títulos serão fornecidos e, dentro do modelo, determinam somente as quantidades a serem negociadas. Os títulos são infinitamente divisíveis, ou seja, qualquer quantidade pode ser demandada ou suprida.

Os títulos são completamente caracterizados pelos seus pagamentos na data final T em termos de bens de consumo; esses pagamentos dependendo do estado vigente. Assim sendo, o título n com $1 \leq n \leq N$, é definido como uma variável aleatória d_n em Ω .

É conveniente utilizar a forma matricial para representar os possíveis pagamentos destes títulos na data T . Seja D a matriz de valores onde as linhas representam os estados e as colunas os títulos

$$D = \begin{pmatrix} d_1(\omega_1) & \dots & d_N(\omega_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_1(\omega_K) & \dots & d_N(\omega_K) \end{pmatrix}_{K \times N}$$

- Existe um número finito I de agentes. Em 0 os agentes sabem somente o conjunto dos possíveis estados Ω e em T eles sabem o estado vigente $\omega \in \Omega$.
- Em 0 o agente i recebe uma dotação $e^i(0)$ de bens de consumo e em T recebe uma dotação $e^i(T, \omega)$ condicionada ao estado vigente $\omega \in \Omega$. O par $e^i = \{e^i(0), e^i(T)\}$ é chamado de processo de dotação do agente i .
- Cada agente consome somente nas datas 0 e T . A incerteza decorrente da dotação final e do pagamento dos títulos introduz incerteza no consumo em T . O processo de consumo do agente i é o par $c^i = \{c^i(0), c^i(T)\}$, onde o primeiro elemento é o consumo em 0 e o segundo é o consumo incerto em T . Conseqüentemente todos os agentes tem o mesmo conjunto de consumo $X = \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^\Omega$, onde $\mathfrak{R}$, associado ao consumo $c^i(0)$, representa o conjunto dos números reais e $\mathfrak{R}^\Omega$, associado a $c^i(T)$, representa o conjunto das variáveis aleatórias em Ω , isto é, $X = \mathfrak{R}^{K+1}$.
- No conjunto de consumo X os agentes tem ordem de preferência completa (fraca) contínua, crescente e convexa. O significado destes termos é dado a seguir.

Uma ordem de preferência é completa se e somente se satisfaz a seguinte condição: para dois processos de consumo $c', c'' \in X$ uma das possibilidades ocorre: c' é preferido a c'' ou c'' é preferido a c' . A condição de “preferido a” incorpora o caso onde c' e c'' são igualmente preferidos. Segue daí a notação c' é preferido a c'' equivale a $c' \succeq c''$.

Uma ordem de preferência é contínua se e somente se satisfaz a seguinte condição: para qualquer processo $c \in X \subseteq \mathbb{R}^{K+1}$, tanto o conjunto dos processos preferidos a c quanto o conjunto dos processos no qual c é preferido, são fechados; ou seja seqüências de consumos preferidos/não preferidos que converjam para um dado elemento, digamos x , têm x como elemento do conjunto dos preferidos/não preferidos.

Uma ordem de preferência é crescente se e somente se satisfaz duas condições:

1. Para quaisquer dois processos $c', c'' \in X$, se $c' \geq c''$ então, c' é preferido a c'' .
2. Para quaisquer dois processos $c', c'' \in X$, se $c' \geq c''$ e $c' \neq c''$, então c' estritamente preferido a c'' .

Uma ordem de preferência é convexa se e somente se satisfaz a seguinte condição: para quaisquer três processos de consumo $c', c'', c''' \in X$, tal que $c' \neq c''$, c' é preferido a c''' e c'' é preferido a c''' e, para qualquer número real $0 < \alpha < 1$, é verdade que $\alpha c' + (1 - \alpha)c''$ é preferido a c''' . Em outras palavras, a combinação convexa de dois elementos preferidos a um terceiro permanece preferida a esse terceiro elemento.

1.2.1 Conjunto Orçamento

Na data 0, dados os preços dos títulos $p_1, \dots, p_N$, cada agente i sofre restrições de consumo impostas por seu processo de dotação $e^i = \{e^i(0), e^i(T)\}$. Este conceito é formalizado através da definição do Conjunto Orçamento (capacidade de alocação).

Definição 1.1 Para um processo de dotação e^i e preços de títulos

$$p = (p_1, \dots, p_N),$$

o conjunto orçamento $B(e^i, p)$ de um agente i é um subconjunto do conjunto de consumo X tal que $c \in B(e^i, p)$ se e somente se existirem números $\theta_1, \dots, \theta_N$ que satisfaçam

$$c^i(0) = e^i(0) - \sum_{n=1}^N \theta_n p_n ,$$

$$c^i(T) = e^i(T) + \sum_{n=1}^N \theta_n d_n .$$

A notação $c(T)$ indica uma das possibilidades $c(T, \omega)$, $\omega \in \Omega$. Usaremos também a notação matricial. Seja θ' um vetor linha então,

$$c^i(0) = e^i(0) - \theta' p ,$$

$$c^i(T) = e^i(T) + D\theta .$$

□

Observe que essas equações definem o conjunto orçamento. Ainda, de acordo com a definição, não há transferência de consumo de 0 para T , pois, em cada equação a quantidade consumida é a diferença entre a dotação e o investimento ou ganho na compra de títulos; ou seja, o conjunto orçamento consiste de todos os processos de consumo que um agente pode atingir comprando em 0 e mantendo até T um portfolio de $\theta_1, \dots, \theta_N$ unidades dos títulos 1, ..., N .

O vetor θ é chamado *estratégia de negociação* e o processo de consumo $\{c(0), c(T)\}$ é conhecido como o processo gerado pela dotação e^i e estratégia de negociação θ .

1.2.2 Equilíbrio

Olhando seu conjunto orçamento para as diversas possibilidades de preços, os agentes determinam estratégias de negociação que otimizam suas preferências. No entanto, as negociações não são efetuadas enquanto os preços não forem tais que os mercados se equilibrem, ou seja, a demanda agregada para cada título seja nula. Isto pode ser expresso pelas equações

$$\sum_{i=1}^I \theta_n^i = 0$$

para todo $1 \leq n \leq N$.

A condição dos mercados se equilibrarem indica que a quantidade demandada é igual à quantidade ofertada. Vejamos a definição formal.

Definição 1.2 *Equilíbrio* consiste de um conjunto de preços p_n , $1 \leq n \leq N$, e estratégias de negociação θ_n^i , $1 \leq n \leq N$, $1 \leq i \leq I$, tal que para cada i o processo de consumo gerado pelo processo de dotação dado e^i e pelas estratégias de negociação otimizem (maximizam) a ordem de preferência do agente i sobre seu conjunto orçamento, $B(e^i, p)$ e os mercados se equilibram, ou seja, $\sum_{i=1}^I \theta_n^i = 0$, para cada $1 \leq n \leq N$. $\square$

O processo de consumo $c^i = \{c^i(0), c^i(T)\}$ associado à estratégia de equilíbrio forma a alocação de consumo de equilíbrio; este é o processo que gera o melhor consumo possível para todos os agentes e, qualquer mudança implicaria perda para algum deles. A próxima seção formaliza esse conceito.

1.3 Eficiência de Pareto

A *eficiência de Pareto* é um critério normativo para um bem estar social de uma alocação de consumo. Considere as seguintes definições

Definição 1.3 Uma alocação $\{c^i\}$, onde $c^i = \{c^i(0), c^i(T)\}$, é *viável* se e somente se cada c^i pertence ao conjunto de consumo e

$$\sum_{i=1}^I c^i(0) = \sum_{i=1}^I e^i(0) ,$$

$$\sum_{i=1}^I c^i(T) = \sum_{i=1}^I e^i(T) .$$

$\square$

Em uma alocação viável o consumo em cada data provém somente da dotação e, o consumo agregado terminal não pode exceder a dotação agregada terminal em vista que o produto é perecível. Os consumos agregados menores que dotações agregadas se constituem em desperdício e não precisam ser consideradas quando os agentes têm preferência crescente.

Definição 1.4 Uma alocação viável $\{c^i\}$ é *eficiente no sentido de Pareto* se e somente se não existir nenhuma outra alocação viável $\{b^i\}$ tal que cada agente i prefere estritamente b^i a c^i . $\square$

A definição acima garante que se c^i é uma alocação eficiente no sentido de Pareto então não existe outra alocação viável que possa deixar todos agentes em situação melhor.

Estamos agora, interessados em mostrar que uma alocação de equilíbrio é eficiente no sentido de Pareto. Note que uma alocação de equilíbrio é sempre viável pois os mercados encontram-se em equilíbrio. Vejamos com isso ocorre.

Seja $\{c^i\}$ uma alocação de equilíbrio. Somando o consumo de todos os agentes encontramos

$$\sum_{i=1}^I c^i(0) = \sum_{i=1}^I e^i(0) - \sum_{i=1}^I \sum_{n=1}^N \theta_n^i p_n ,$$

$$\sum_{i=1}^I c^i(T) = \sum_{i=1}^I e^i(T) - \sum_{i=1}^I \sum_{n=1}^N \theta_n^i d_n .$$

Como os mercados se equilibram, $\sum_{i=1}^I \theta_n^i = 0$ para todo n , $1 \leq n \leq N$, o termo à direita das equações acima é nulo. Logo, uma alocação de equilíbrio é viável, ou seja,

$$\sum_{i=1}^I c_i(0) = \sum_{i=1}^I e^i(0) ,$$

$$\sum_{i=1}^I c_i(T) = \sum_{i=1}^I e^i(T) .$$

Definição 1.5 Um processo de consumo $c = \{c(0), c(T)\}$ é *realizável* a preços $p = (p_1, \dots, p_N)$ se e somente se existe um processo de dotação $e = \{e(0), e(T)\}$ tal que $e(T) = 0$ e $c \in B(e, p)$. O conjunto dos processos de consumo realizáveis será denotado por M . $\square$

Este conceito captura a propriedade dos preços que permitem que um certo consumo terminal seja atingido através de negociação e não por alguma dotação afortunada.

Afirmamos que o fato de um consumo ser realizável depende somente do consumo final $c(T)$, sendo independente do consumo inicial $c(0)$. Vejamos como isto ocorre.

Seja c um consumo realizável a preços p então, se $\tilde{c}(T) = c(T)$ então $\tilde{c}$ é realizável a preços p .

Por definição, o consumo c satisfaz às equações

$$c(0) = e(0) - \sum_{n=1}^N \theta_n p_n, \quad (1.1)$$

$$c(T) = \sum_{n=1}^N \theta_n d_n.$$

Agora, como $\tilde{c}(T) = c(T)$ temos, $\tilde{c}(T) = \sum_{n=1}^N \theta_n d_n$ e, o consumo inicial é dado por $\tilde{c}(0) = \tilde{e}(0) - \sum_{n=1}^N \theta_n p_n$, onde

$$\tilde{e}(0) = \tilde{c}(0) - c(0) + e(0).$$

Conseqüentemente $\tilde{c}$ é realizável a preços p , provando assim que a realização de um processo de consumo não depende do consumo na data $t = 0$. A partir desta análise fica claro que uma condição equivalente para que um processo de consumo seja realizável é a existência de uma estratégia de negociação θ tal que

$$c(T) = \sum_{n=1}^N \theta_n d_n.$$

Finalmente o teorema.

Teorema 1.1 Se todo processo de consumo for realizável, então todo equilíbrio é eficiente no sentido de Pareto.

Prova. A prova é por contradição. Vamos supor, por absurdo, que exista uma alocação de equilíbrio $\{c^i\} \in B(e, p)$ que não seja eficiente no sentido de Pareto. Isto implica que existe uma alocação viável $\{b^i\} \in X$ tal que todo agente i prefere estritamente b^i a c^i . Considerando a hipótese de que todo processo de consumo é realizável, mostraremos o consumo $\{b^i\}$ não existe pois, do contrário podemos construir um consumo em $B(e, p)$ preferido a $\{c^i\}$.

Primeiro mostraremos que as hipóteses garantem que a soma dos consumos em 0 e a soma dos consumos em T são nulos. A veracidade deste fato será verificado uma vez que a sua negação possibilitaria a construção de uma alocação preferida à alocação de equilíbrio, c^i .

Por hipótese, todo processo de consumo é realizável, em particular $a^i = b^i - e^i$, onde e^i é o processo de dotação do agente i , o é. Logo existem

estratégias de negociação θ_n^i e números (dotações) α_i tal que para cada i as equações

$$a^i(0) = \alpha^i - \sum_{n=1}^N \theta_n^i p_n ,$$

$$a^i(T) = \sum_{n=1}^N \theta_n^i d_n$$

estão satisfeitas. Note que $\sum_{i=1}^I a^i(T) = 0$ pois, $\{b^i\}$ é viável, ou seja,

$$\sum_{i=1}^I a^i(T) = \sum_{i=1}^I (b^i(T) - e^i(T)) = 0 .$$

Então

$$\sum_{i=1}^I a^i(T) = \sum_{i=1}^I \sum_{n=1}^N \theta_n^i d_n = 0 .$$

Utilizando novamente o fato de $\{b^i\}$ ser viável,

$$\sum_{i=1}^I a^i(0) = \sum_{i=1}^I (b^i(0) - e^i(0)) = 0 ,$$

encontramos

$$\sum_{i=1}^I \alpha^i = \sum_{i=1}^I \sum_{n=1}^N \theta_n^i p_n .$$

Afirmamos que a equação acima deve ser identicamente nula; caso contrário, poderíamos construir uma estratégia de negociação que gerasse uma alocação $\tilde{c}^i$ preferida à alocação de equilíbrio c^i , uma contradição. Vejamos como isto ocorre.

Suponha $\sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I \theta_n^i p_n > 0$.

Seja φ_n^j a estratégia de negociação geradora da alocação de equilíbrio c^j (já mostramos que uma alocação de equilíbrio é viável). Construa a estratégia $\varphi_n^j - \sum_{i=1}^I \theta_n^i$ e seja $\tilde{c}$ seu processo de consumo. Então, o consumo na data 0 será

$$\tilde{c}^j(0) = e^j(0) - \sum_{n=1}^N (\varphi_n^j - \sum_{i=1}^I \theta_n^i) p_n .$$

Como $c^j(0) = e^j(0) - \sum_{n=1}^N \varphi_n^j p_n$, podemos reescrever o consumo $\tilde{c}^j(0)$ como o consumo de equilíbrio em 0 mais um termo adicional,

$$\tilde{c}^j(0) = c^j(0) + \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I \theta_n^i p_n .$$

Na data T , $\tilde{c}^j(T) = c^j(T)$ pois,

$$\tilde{c}^j(T) = \sum_{n=1}^N (\varphi_n^j - \sum_{i=1}^I \theta_n^i) d_n$$

e, como o consumo de equilíbrio em T é dado por $c^j(T) = \sum_{n=1}^N \varphi_n^j d_n$ e, tendo sido mostrado que $\sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I \theta_n^i d_n = 0$, temos que $\tilde{c}^j(T) = c^j(T)$.

Note que acabamos de mostrar que $\tilde{c} \in B(e, p)$.

Como os agentes têm preferência crescente, é verdade que

$$\sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I \theta_n^i p_n = 0$$

pois, do contrário, o agente j prefere estritamente $\tilde{c}^j$ a c^j contradizendo a hipótese de ser $\{c^j\}$ uma alocação de equilíbrio. Este mesmo resultado poderia ser obtido considerando $\sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I \theta_n^i p_n < 0$ e uma estratégia apropriada.

Mostraremos agora, que não existe a alocação viável $\{b^i\}$. Note que $\{b^i(0) - \alpha^i, b^i(T)\} \in B(e, p)$ pois, em 0

$$a^i(0) = \alpha^i - \sum_{n=1}^N \theta_n^i p_n = b^i(0) - e^i(0)$$

ou, reescrevendo na forma usual,

$$b^i(0) - \alpha^i = e^i(0) - \sum_{n=1}^N \theta_n^i p_n$$

e, na data T ,

$$a^i(T) = \sum_{n=1}^N \theta_n^i d_n = b^i(T) - e^i(T),$$

o que também pode ser reescrito como

$$b^i(T) = e^i(T) + \sum_{n=1}^N \theta_n^i d_n.$$

Analisemos, então, as possibilidades. Suponha $\alpha^i \leq 0$ para algum i , $1 \leq i \leq I$; então a alocação $\{b^i(0) - \alpha^i, b^i(T)\} \in B(e, p)$ e todos os agentes preferem essa alocação a b^i (todas as alocações permanecem as mesmas com

exceção da i -ésima). Conseqüentemente eles a preferem estritamente a c^i , contradizendo a hipótese de otimalidade de c^i pois, b^i é preferido à c^i .

Por outro lado, se para todo i , $\alpha^i > 0$, também teremos uma contradição pois,

$$a^i(0) = \alpha^i - \sum_{n=1}^N \theta_n^i p_n$$

e, como $\sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I \theta_n^i p_n = 0$ e $\sum_{i=1}^I \alpha^i > 0$, temos que $\sum_{i=1}^I a^i(0) > 0$!, uma contradição pois, $\sum_{i=1}^I a_i(0) = 0$ (do contrário b^i não seria viável).

Portanto, não existe alocação viável $\{b^i\}$ tal que o agente i prefere estritamente b^i a c^i . Portanto, a alocação de equilíbrio c^i é eficiente no sentido de Pareto. $\square$

Este teorema, contudo, não é muito satisfatório pois, impõe condições endógenas às estratégias de negociação ao invés de algum outro elemento exógeno ao modelo. Felizmente, é possível impor uma condição a elementos exógenos ao modelo de forma a garantir a eficiência no sentido de Pareto para uma alocação de equilíbrio.

É conveniente apresentar estas condições em termos do posto da matriz de valores finais, D . Recordando que o posto de uma matriz é o maior número de linhas ou colunas linearmente independentes, o teorema requer que o posto(D) seja igual ao número de possíveis estados do espaço Ω . Adotando a notação matricial, onde estratégias de negociação e sistemas de preços são vetores N -dimensionais e variáveis aleatórias em Ω são vetores K -dimensionais podemos estabelecer o Teorema.

Teorema 1.2 Se o posto(D) = K , então todo processo de consumo é realizável e conseqüentemente toda alocação de consumo de equilíbrio é eficiente no sentido de Pareto.

Prova. Um processo de consumo $c = \{c(0), c(T)\}$ é realizável se e somente se o sistema de equações lineares

$$D\theta = c(T)$$

tiver uma solução θ . Ou seja, se e somente se $c(T)$ for uma combinação linear das colunas de D . Para garantir esta condição, o número de colunas linearmente independentes de D deve ser K (posto(D) = K). $\square$

O teorema acima mostra que caso exista um número suficiente de títulos linearmente independentes, todos os processos de consumo são realizáveis. Por outro lado, se o posto(D) $< K$, então um dado processo de consumo pode ser realizável ou não através de negociação.

Agora apresentamos uma caracterização do conjunto orçamento que será utilizada posteriormente.

Teorema 1.3 Seja e um processo de dotação, p um sistema de preços, e c um processo de consumo. Então, $c \in B(e, p)$ se e somente se o resultado líquido da negociação $c - e$ for realizável com custo inicial nulo, ou equivalentemente, se e somente se $c - e \in B(0, p)$.

Prova. Para qualquer processo de consumo c temos que $c \in B(e, p)$ se e somente se existir uma estratégia de negociação θ tal que

$$\begin{aligned} c(0) &= e(0) - \sum_{n=1}^N \theta_n p_n, \\ c(T) &= e(T) + \sum_{n=1}^N \theta_n d_n. \end{aligned}$$

Reescrevendo, temos

$$\begin{aligned} c(0) - e(0) &= - \sum_{n=1}^N \theta_n p_n, \\ c(T) - e(T) &= \sum_{n=1}^N \theta_n d_n. \end{aligned}$$

Estas equações indicam que o resultado líquido $c - e$ é realizável a custo inicial nulo; ou, de forma equivalente, que $c - e \in B(0, p)$. A prova contrária é apenas uma reformulação da demonstração acima. $\square$

Note que $B(0, p)$ é um subespaço linear do conjunto realizável, M . Após introduzirmos o conceito de funcional de preços, na seção 1.7, apresentaremos uma outra caracterização do Conjunto Orçamento.

1.4 Estratégias de Arbitragem

Uma estratégia de arbitragem é um “bom negócio”. Um agente utilizando estratégias de arbitragem tem a chance de consumir sem a necessidade de investimento (custo zero). A definição precisa é a que se segue.

Definição 1.6 Uma *estratégia de arbitragem* é uma estratégia que permite um agente com processo de dotação nulo atingir um consumo maior que zero.

Existem duas possibilidades para θ ser uma estratégia de arbitragem.

1. O valor inicial do investimento é $\sum_{n=1}^N \theta_n p_n \leq 0$; o valor final tem que ser $\sum_{n=1}^N \theta_n d_n(\omega) \geq 0$ para todo $\omega \in \Omega$ e, ainda $\sum_{n=1}^N \theta_n d_n(\omega) > 0$ para algum $\omega \in \Omega$.
2. O valor inicial do investimento é $\sum_{n=1}^N \theta_n p_n < 0$ e o valor final é $\sum_{n=1}^N \theta_n d_n(\omega) \geq 0$ para todo $\omega \in \Omega$.

□

Infelizmente o próximo Teorema mostra que estratégias de arbitragem não existem em equilíbrio.

Teorema 1.4 Estratégias de arbitragem não existem em equilíbrio.

Prova. A prova se baseia no fato dos agentes possuírem preferência de consumo crescente.

Suponha que θ^i seja a estratégia que geradora do consumo de equilíbrio para cada agente i . Se existe uma estratégia de arbitragem $\phi_1, \dots, \phi_N$ com os preços de equilíbrio, então

$$\theta_1^i + \phi_1, \dots, \theta_N^i + \phi_N$$

gera com os preços de equilíbrio um consumo que nunca é menor que o consumo original e, excede este último na data 0 ou em algum estado na data T .

Seja $\tilde{c}$ o processo de consumo gerado pela soma das estratégias então,

$$\tilde{c}^i(0) = e^i(0) - (\theta^i + \phi)'p = c^i(0) - \phi'p,$$

$$\tilde{c}^i(T) = e^i(T) + (\theta^i + \phi)'d = c^i(T) + \phi'd.$$

Logo, $\tilde{c} \in B(e, p)$ e, como ϕ é uma estratégia de arbitragem, o agente i prefere estritamente este consumo ao original devido à sua preferência de consumo crescente.

Contudo, isto contradiz a hipótese de equilíbrio. Portanto, não existe estratégia de arbitragem em equilíbrio. □

1.5 Completude

Já vimos que a condição $\text{posto}(D) = K$ implica que qualquer alocação de consumo de equilíbrio é eficiente no sentido de Pareto. Nesta seção trataremos de outras implicações desta condição.

Imagine adicionar ao mercado um novo título, $N + 1$ com valor final $d_{N+1}(\omega)$, $\omega \in \Omega$. Considere um equilíbrio neste mercado expandido com $N + 1$ títulos.

Seja $p_1, \dots, p_{N+1}$ os preços de equilíbrio e, D_N a matriz de valores finais dos títulos $1, \dots, N$. Assuma que o $\text{posto}(D_N) = K$; logo, qualquer vetor em $\mathbb{R}^K$ pode ser escrito como uma combinação linear das colunas de D . Em particular, considere o sistema que reproduz os valores finais de $d_{N+1} \in \mathbb{R}^K$

$$D_N \theta = d_{N+1}.$$

Por hipótese, este sistema tem solução; o vetor θ , $(N \times 1)$, gera um processo de consumo final igual aos valores finais do título, d_{N+1} .

Gostaríamos de estender este procedimento para encontrar o preço inicial de equilíbrio do título $N + 1$, ou seja, encontrar uma estratégia que gera um consumo inicial igual ao preço de equilíbrio do título $N + 1$.

Para atingir este objetivo aumentamos matriz de valores finais D_N . Seja $\hat{D}$ esta matriz blocada com uma coluna e uma linha extras. A coluna extra é colocada ao lado da última coluna de D_N e representa os valores finais do título d_{N+1} . A linha extra é colocada acima da primeira linha de D_N e representa os preços dos títulos na data 0. De forma mais explícita:

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_N & p_{N+1} \\ d_1(\omega_1) & \dots & d_N(\omega_1) & d_{N+1}(\omega_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_1(\omega_K) & \dots & d_N(\omega_K) & d_{N+1}(\omega_K) \end{pmatrix}$$

Definimos uma estratégia ϕ , um vetor $(N + 1 \times 1)$ como a composição de θ nas N primeiras posições e um 0 na posição $N + 1$. Note que o sistema

$$\hat{D}\phi = k$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_N & p_{N+1} \\ d_1(\omega_1) & \dots & d_N(\omega_1) & d_{N+1}(\omega_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_1(\omega_K) & \dots & d_N(\omega_K) & d_{N+1}(\omega_K) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_N \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(0) \\ k(1) \\ \vdots \\ k(K) \end{pmatrix}$$

tem a seguinte propriedade: $k(1) = d_{N+1}(\omega_1), \dots, k(K) = d_{N+1}(\omega_K)$; isto significa que o vetor $k = (k(1), \dots, k(K))$ sintetiza o título $N + 1$.

A questão que segue é se $k(0)$ sintetiza o preço inicial do título $N + 1$. Em outras palavras, estamos tentando responder se a seguinte expressão é verdadeira

$$p_{N+1} = k(0) = \sum_{n=1}^N \theta_n p_n .$$

A resposta é afirmativa. Caso contrário $(\theta, -1)$ ou $(\theta, 1)$ são estratégias que permitem arbitragem contradizendo a hipótese de equilíbrio. Vejamos como isso ocorre.

Suponha $p_{N+1} < \theta' p$; então $(-\theta, 1)$ é uma estratégia que permite arbitragem pois,

$$k(0) = -\theta' p + p_{N+1} < 0 ,$$

$$k(T) = -D\theta + d_{N+1} = -d_{N+1} + d_{N+1} = 0 .$$

A mesma análise pode ser feita no caso $p_{N+1} > \theta' p$. Portanto, $p_{N+1} = \sum_{n=1}^N \theta_n p_n$ sintetiza o preço do título $N + 1$ neste mercado. O exemplo ilustra esta propriedade apreçando uma opção. Mas, primeiro apresentaremos uma Definição e dois Teoremas.

Definição 1.7 Um mercado é *completo* se e somente se todo processo de consumo for realizável. $\square$

Sejam $p_1, \dots, p_N$ preços de equilíbrio; se um subconjunto S de títulos de $1, \dots, N$ forma um mercado completo, então os preços de equilíbrio dos demais são combinações lineares dos títulos em S . Considere um título que não esteja em S com valor final d , e seja $c(T)$ um consumo final tal que $c(T) = d$. Então, existe uma estratégia de negociação com os títulos em S que sintetiza d . Como em equilíbrio não existe arbitragem, o preço deste título é o preço inicial da estratégia.

Utilizando a noção de mercado completo podemos reescrever os Teoremas 1.1 e 1.2.

Teorema 1.5 Se um mercado é completo, então toda alocação de consumo de equilíbrio é eficiente no sentido de Pareto.

Prova. A prova segue imediatamente da Definição 1.7. $\square$

Teorema 1.6 Um mercado é completo se e somente se $\text{posto}(D) = K$.

Prova. A prova segue imediatamente da Definição 1.7. $\square$

Exemplo 1.1 Existem $K = 2$ estados e $N = 3$ títulos com os seguintes valores finais

$$d_1(\omega_1) = 1.1, d_1(\omega_2) = 1.1;$$

$$d_2(\omega_1) = 6, d_2(\omega_2) = 21;$$

$$d_3(\omega) = \max\{0, (d_2(\omega) - 10)\}.$$

O título 3 é uma opção de compra sobre o título 2 com preço de exercício igual a 10. Especificamente, o valor final do título número 3 é

$$d_3(\omega_1) = 0, d_3(\omega_2) = 11.$$

Sejam $p_1 = 1$ e $p_2 = 9$ os preços de equilíbrio dos títulos 1 e 2, gostaríamos de encontrar o preço de equilíbrio da opção de compra sobre 2.

A matriz de valores finais dos títulos 1 e 2, dada por

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1.1 & 6 \\ 1.1 & 21 \end{pmatrix}$$

tem posto = 2, logo como $k = 2$ o mercado é completo. Então, podemos calcular o preço de equilíbrio da opção de compra através da estratégia de negociação que sintetiza o seu valor final em termos dos títulos 1 e 2. Esta estratégia, θ , é a solução do seguinte sistema:

$$D_2\theta = d_3,$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} 1.1 & 6 \\ 1.1 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

E, o valor de θ é

$$\theta_1 = -4, \theta_2 = \frac{11}{15}$$

$\theta_3 = 0$.

Finalmente podemos calcular o valor de equilíbrio da opção de compra apreçando a estratégia calculada acima,

$$p_3 = -4 \times 1 + \frac{11}{15} \times 9 = 2.6.$$

1.6 Medida de Preço do Equilíbrio

Nessa seção assumiremos que existe um título de renda fixa, isto é, um título cujo valor inicial e final são positivos e, na data final seu valor é independente do estado vigente.

Também definimos o conceito de medida de preço de equilíbrio, como uma medida de probabilidade de neutralidade ao risco no espaço de estados Ω . Veremos que esta medida existe se e somente se o sistema de preços não permite estratégias de arbitragem; ou, de outra maneira, se e somente se o sistema de preços for um sistema de preços de equilíbrio para alguma população de agentes com preferência contínua, crescente e convexa.

Mostraremos que a existência da medida de preço de equilíbrio implica que o custo inicial de qualquer consumo realizável é o valor esperado deste consumo relativo a essa medida descontado pela taxa de juros do título de renda fixa. Ainda, esta medida será única se e somente se o mercado for completo.

Então, seja j o título de renda fixa. Definimos

$$r = \frac{d_j}{p_j} - 1$$

e interpretamos r como a taxa de juros relativa ao título. Observe que por definição $r > -1$ (tanto d_j quanto p_j são positivos).

Vamos agora definir a medida de preço de equilíbrio.

Definição 1.8 Se para um sistema de preços p o sistema de equações lineares

$$D'Q = (1 + r)p$$

tiver solução $Q(\omega_1) > 0, \dots, Q(\omega_K) > 0$ então, Q é uma *medida de preço de equilíbrio* para o sistema de preços p . $\square$

Note que a j -ésima equação no sistema acima é dada por

$$\sum_{i=1}^K d_j(\omega_i)Q(\omega_i) = (1 + r)p_j,$$

se o j -ésimo título for a renda fixa, $d_j(\omega_i) = d_j = \text{cte}, \forall \omega_i \in \Omega$, daí

$$\sum_{i=1}^K Q(\omega_i) = (1 + r)\frac{p_j}{d_j} = 1.$$

Juntamente com a imposição $Q(\omega_i) > 0$, estes dois fatos estabelecem Q como uma medida de probabilidade em Ω .

O próximo teorema mostra que a existência da medida de preço do equilíbrio, Q , está associada à não existência de estratégias de arbitragem.

Teorema 1.7 Existe uma medida de preço de equilíbrio se e somente se o sistema de preços p não permitir estratégias de arbitragem.

Prova. Primeiro mostraremos que a existência de Q implica a não existência de uma estratégia de arbitragem.

Suponha que

$$D'Q = (1 + r)p \quad (1.2)$$

tenha solução $Q > 0$. E, suponha, por absurdo, que existe uma estratégia de arbitragem $\theta \in \mathbb{R}^N$. Multiplicando a equação acima por θ à esquerda, podemos rearranjar para obter,

$$(D\theta)'Q = (1 + r)\theta'p.$$

Lembrando que as condições que definem uma estratégia de arbitragem são:

1. O valor inicial do investimento é $\theta'p \leq 0$; o valor final pode ser $D\theta \geq 0$ para todo $\omega \in \Omega$ e, ainda $D\theta > 0$ para algum $\omega \in \Omega$.
2. O valor inicial do investimento é $\theta'p < 0$ e o valor final é $D\theta \geq 0$ para todo $\omega \in \Omega$.

Utilizando o fato que $Q > 0$ e $r > -1$ encontramos uma contradição pois, caso a estratégia de arbitragem θ seja à caracterizada no primeiro item temos

$$(1 + r)\theta'p \leq 0,$$

$$(D\theta)'Q > 0.$$

Caso seja à caracterizado no segundo item temos

$$(1 + r)\theta'p < 0,$$

$$(D\theta)'Q \geq 0$$

e, em ambos os casos temos uma contradição pois, a equação 1.2 garante a igualdade.

Portanto a existência de uma medida de preço de equilíbrio, Q , implica a não existência de uma estratégia de arbitragem, θ .

Agora mostraremos que se o sistema de preços p não permite arbitragem então existe uma medida de preço de equilíbrio. Para isto construiremos dois conjuntos cuja intersecção deve ser vazia caso contrário existe arbitragem. Então, das características destes conjuntos poderemos definir um funcional linear que os separa e a partir deste funcional construir uma medida de preço de equilíbrio consistente com a definição.

Recordamos que o espaço de consumo X é $\mathfrak{R}^{K+1}$ e, o conjunto

$$B(0, p) = \{c \in \mathfrak{R}^{K+1} \text{ tal que } c(0) = -\theta' p, c(T) = D\theta\}$$

é um subespaço linear de X .

Seja

$$H = \{c \in X \text{ tal que } c \in \mathfrak{R}_+^{K+1} \text{ e } c(0) + \sum_{k=1}^K c(T, \omega_k) \geq 1\}$$

Note que H é não vazio pois, qualquer processo de consumo $c \geq 1$ é elemento de H . O conjunto H é convexo pois, para $c_1, c_2 \in H$ e $\forall \lambda[0, 1]$ temos que a combinação $\bar{c} = \lambda c_1 + (1 - \lambda)c_2$ é maior ou igual a 1; logo $\bar{c} \in H$. Finalmente, H é fechado pois, se $c_n \in H$ e c_n tende a um certo $\bar{c}$ então, como $c_n \geq 1$ temos que

$$\bar{c} = \bar{c}(0) + \sum_{k=1}^K \bar{c}(T, \omega_k) \geq 1$$

logo, $\bar{c} \in H$.

Afirmamos que a intersecção entre $B(0, p)$ e H é vazia do contrário existe arbitragem.

Vejamus como isto ocorre. Suponha $c \in H$; por definição temos $c(0) \geq 0, \sum_{k=1}^K c(T, \omega_k) \geq 0$ e $c(0) + \sum_{k=1}^K c(T, \omega_k) \geq 1$, por sua vez, se $c \in B(0, p)$; por definição temos $c(0) = -\theta' p$ e $\sum_{k=1}^K c(T, \omega_k) = D\theta$. Logo, se c é elemento de $B(0, p)$ e H , temos

$$c(0) = -\theta' p \geq 0,$$

$$\sum_{k=1}^K c(T, \omega_k) = D\theta \geq 0$$

ou seja,

$$\theta' p \leq 0,$$

$$D\theta \geq 0.$$

Segue que dois casos podem ocorrer

1. Se $\theta'p < 0$, como $D\theta \geq 0$, θ é uma estratégia de arbitragem.
2. Se $\theta'p = 0$, como $c(0) + \sum_{k=1}^K c(T, \omega_k) = \theta'p + D\theta \geq 1$, temos que $D\theta \geq 1$, logo θ é uma estratégia de arbitragem.

Como, por hipótese, não existe estratégia de arbitragem

$$B(0, p) \cap H = \emptyset .$$

Então, pelo Teorema de Hahn-Banach, existe um funcional linear $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ separando $B(0, p)$ de H ; ou seja,

$$f(x) = 0, \forall x \in B(0, p) ,$$

$$f(x) > 0, \forall x \in H .$$

Considere, agora, a base canônica de $\mathfrak{R}^{K+1}$, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_K$.

Temos que o processo de consumo $\alpha_k \in H$, portanto $f(\alpha_k) > 0$ para todo $0 \leq k \leq K$. Note, também, que $\hat{c} = \{-p_j, d_j\} \in B(0, p)$ para todo $1 \leq j \leq N$ pois, $\hat{c}$ pode ser obtido através da estratégia δ_j definida como sendo 0 em todos os seus elementos exceto na posição j onde vale 1. Ou seja,

$$\hat{c}(0) = -\delta_j'p = -p_j ,$$

$$\hat{c}(T) = D\delta_j = d_j .$$

Conseqüentemente, $f(\{-p_j, d_j\}) = 0$.

Considerando o espaço $\mathfrak{R}^{K+1}$, o consumo $\hat{c}$, na base canônica $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_K$, é escrito como

$$\hat{c} = -p_j\alpha_0 + \sum_{k=1}^K d_j(\omega_k)\alpha_k ,$$

e, o valor de f desse consumo é dado por

$$f(\hat{c}) = -p_j f(\alpha_0) + \sum_{k=1}^K d_j(\omega_k) f(\alpha_k) = 0 .$$

Rearranjando a equação anterior, podemos escrever

$$p_j = \sum_{k=1}^K \left(\frac{f(\alpha_k)}{f(\alpha_0)} \right) d_j(\omega_k) . \quad (1.3)$$

Definimos a medida de preço de equilíbrio como

$$Q(\omega_k) = \frac{f(\alpha_k)}{f(\alpha_0)}(1+r).$$

Note que pela definição acima $Q(\omega_k) > 0$ pois, $f(\alpha_k) > 0$, $0 \leq k \leq K$ e $r > -1$. Ainda, para verificarmos a definição podemos substituí-la na equação 1.3 para concluirmos que

$$p_j(1+r) = \sum_{k=1}^K Q(\omega_k) d_j(\omega_k)$$

representa a j -ésima, $1 \leq j \leq N$, equação do sistema de equações $D'Q = (1+r)p$.

Logo, esta definição satisfaz as condições para que Q seja uma medida de preço de equilíbrio. Portanto, está provado a existência da medida de preço de equilíbrio quando o sistema de preços não permitir estratégias de arbitragem. $\square$

Corolário 1.1 Existe uma medida de preço de equilíbrio, Q , se e somente se o sistema de preços p for um sistema de preços de equilíbrio para alguma população de agentes com preferências contínuas, crescentes e convexas.

Prova. Um sistema de preço de equilíbrio para esta população não permite arbitragem e a existência de Q segue diretamente do Teorema 1.7.

Agora, suponha que existe Q para o sistema de preços p . Mostraremos que para uma certa ordem de preferência, completa, contínua, crescente e convexa a existência de Q garante que existe uma alocação de equilíbrio, ou seja, que p é um sistema de preços de equilíbrio para esta população de agentes.

Sobre o conjunto de consumo $X = \mathfrak{R}^{K+1}$ considere os agentes $1 \leq i \leq I$ com processo de dotação arbitrário, $e^i \in X$, e preferência dada pela seguinte regra: O agente i prefere o processo de consumo c a b se e somente se

$$c(0) + \frac{\sum_{k=1}^K Q(\omega_k) c(T, \omega_k)}{1+r} \geq b(0) + \frac{\sum_{k=1}^K Q(\omega_k) b(T, \omega_k)}{1+r}.$$

Ou seja, se e somente se consumo presente adicionado ao valor presente do consumo futuro esperado segundo Q do consumo c for maior ou igual ao de b .

Note que a relação $\geq$ é de neutralidade ao risco pois, a preferência é dada em termos do valor esperado segundo uma medida Q . Ou seja, dois consumos são indiferentes se tiverem o mesmo valor numérico mesmo que um deles seja constante.

Também, podemos verificar que a relação $\geq$ implica que a preferência é

- completa;
- contínua, representada pela função utilidade

$$u(c) = c(0) + \frac{\sum_{k=1}^K Q(\omega_k) c(T, \omega_k)}{1+r};$$

- crescente;
- convexa pois, u é linear.

Para estes agentes, o sistema de preços p e a alocação $c^i = e^i$ são um equilíbrio. Pois, o processo de dotação e^i pertence ao conjunto orçamento $B(e^i, p)$ (basta fazer $\theta = 0$). Agora, suponha que o processo de consumo $c^i = \{c^i(0), c^i(T)\}$ pertença ao conjunto orçamento. Então, existe uma estratégia de negociação θ^i tal que

$$c^i(0) = e^i(0) - \sum_{n=1}^N \theta_n p_n,$$

$$c^i(T) = e^i(T) + \sum_{n=1}^N \theta_n d_n.$$

Então o consumo total esperado dado por $c^i(0) + \frac{E_Q[c^i(T)]}{1+r}$ pode ser reescrito utilizando a definição de $c^i(T)$ como

$$c^i(0) + \frac{E_Q[e^i(T)]}{1+r} + \frac{\sum_{n=1}^N \theta_n E_Q[d_n]}{1+r}. \quad (1.4)$$

Da hipótese de existência de Q , $D'Q = (1+r)p$; temos que $E_Q[d_n] = p_n(1+r)$ para $1 \leq n \leq N$ logo, substituindo essa relação na equação 1.4 encontramos

$$c^i(0) + \sum_{n=1}^N \theta_n p_n + \frac{E_Q[e^i(T)]}{1+r} = e^i(0) + \frac{E_Q[e^i(T)]}{1+r}.$$

Ou seja, todo agente $1 \leq i \leq I$ é indiferente entre o consumo c^i e o processo de dotação e^i .

Conseqüentemente, dado o sistema de preços p , o processo de dotação e^i otimiza a preferência de cada agente i sobre seu conjunto orçamento e, juntamente com o fato que neste equilíbrio não há negociação; ou seja os mercados se equilibram, $\sum_{i=1}^I \theta_n^i = 0$ para todo n , temos que o processo de consumo $\hat{c}^i = e^i$, gerado pelo sistema de preços p e estratégia de negociação θ , é um processo de consumo de equilíbrio para uma população de agentes com preferência contínua, crescente e convexa. Ou seja, p é um sistema de preços se equilíbrio. $\square$

Quando o sistema de equações $D'Q = (1+r)p$ tem solução, então esta solução é única se e somente se $\text{posto}(D) = K$. Isto estabelece o próximo teorema.

Teorema 1.8 Se existe uma medida de preço de equilíbrio então, ela é única se e somente se o mercado for completo.

Prova. A existência de uma medida de preço de equilíbrio implica que o sistema de N equações e K incógnitas, $D'Q = (1+r)p$ tem solução Q .

Seja G_H o conjunto de todas as soluções do sistema homogêneo $D'Q = 0$. Então sabemos que $G_H = \text{núcleo}(D')$ é um subespaço de $\mathbb{R}^K$ de dimensão $K - \text{posto}(D')$. Ainda, seja G o conjunto das soluções do sistema não homogêneo e s uma solução. Sabemos que a solução do sistema não homogêneo é dada por

$$G = \{s\} + G_H = \{s + z | z \in G_H\}.$$

Então, para obtermos uma solução única para o sistema, G_H deve ser um conjunto de dimensão nula. Para que esta condição seja verdadeira basta que $\text{posto}(D') = \text{posto}(D) = K$. Ou seja, que o mercado seja completo. $\square$

1.7 O Funcional de Preços

Nesta seção definiremos o funcional de preços. De maneira genérica, para qualquer sistema de preços p que não permite estratégias de arbitragem, o funcional de preços atribui a cada consumo final realizável c o custo inicial deste consumo; ou seja, a dotação inicial $e(0)$ tal que $c \in B(e, p)$ e, $e = \{e(0), 0\}$. Como anteriormente, denote por M o conjunto dos processos de consumo realizáveis. A definição formal é a que segue.

Definição 1.9 Seja p um sistema de preços que não permite estratégias de arbitragem. O funcional de preços $\phi : M \rightarrow \mathfrak{R}$ é tal que para todo $c \in M$

$$\phi(c) = c(0) + \sum_{n=1}^N \theta_n p_n$$

para qualquer estratégia θ tal que

$$c(T) = \sum_{n=1}^N \theta_n d_n .$$

□

A definição acima é consistente pois, se $c(0) = e'(0) - \theta'p = e''(0) - \varphi'p$ e $c(T) = D\theta = D\varphi$ então $e'(0) = e''(0)$; caso contrário existe uma estratégia que permite arbitragem.

Vejamos como isto ocorre. Suponha $e'(0) > e''(0)$, então $\theta'p > \varphi'p$. Considere, a estratégia $\psi = \theta - \varphi$. Na data 0 $c(0) = -\psi'p < 0$ e na data T, $c(T) = D\psi = 0$, logo ψ é uma estratégia de arbitragem.

Em palavras, isto quer dizer que a definição é independente da estratégia escolhida para atingir o processo de consumo em questão!

Ainda, como M é um subespaço linear de X , a definição do funcional de preços ϕ não depende da estratégia em questão, o funcional é linear em M . Vamos mostrar essa afirmação.

Sejam $c, d \in M$ dois processo de consumo realizáveis e $\lambda \in \mathfrak{R}$

$$\begin{aligned} \phi(\lambda c + d) &= (\lambda c + d)(0) + (\lambda \theta + \varphi)'p \\ &= \lambda(c(0) + \theta'p) + (d(0) + \varphi'p) \\ &= \lambda\phi(c) + \phi(d) . \end{aligned}$$

Agora, veremos que o funcional de preços tem uma representação em termos de medida de preço de equilíbrio Q .

Teorema 1.9 Se o sistema de preços não permite arbitragem então, para todo $c \in M$ e toda medida de preço de equilíbrio Q

$$\phi(c) = c(0) + \frac{E_Q[c(T)]}{1+r} .$$

No caso particular em que $\theta \in \mathbb{R}^N$ é tal que

$$\theta_j = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq n, 1 \leq n \leq N \\ 1 & \text{se } j = n \end{cases}$$

a representação do funcional ϕ em termos de Q resulta na seguinte relação

$$\phi(c_{\theta_j}) = c(0) + p_j = c(0) + \frac{E_Q[D\theta'_j]}{1+r},$$

portanto,

$$p_j = \frac{E_Q[d_j]}{1+r} \quad (1.5)$$

para $1 \leq j \leq N$.

Prova. Seja Q uma medida de preço de equilíbrio e c um processo de consumo realizável. Então valem as duas equações abaixo

$$D'Q = (1+r)p,$$

$$c(T) = D\theta.$$

Utilizando estas equações, o funcional ϕ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \phi(c) &= c(0) + \theta'p \\ &= c(0) + \frac{\theta'D'Q}{1+r} \\ &= c(0) + \frac{E_Q[D\theta]}{1+r} \\ &= c(0) + \frac{E_Q[c(T)]}{1+r}. \end{aligned}$$

□

Além de fornecer uma maneira fácil de calcular o funcional de preços, o Teorema 1.9 fornece duas interpretações para $Q(\omega)$.

Primeiro como uma medida de probabilidade de neutralidade ao risco. note que pela equação 1.5, o preço de um título é seu valor esperado segundo a medida de probabilidade de neutralidade ao risco descontado.

Segundo, em um mercado completo (Q é único), podemos obter preço do processo de consumo $\{0, 1_{\{\omega_k\}}\}$, não consumir na data $t = 0$ e consumir exatamente uma unidade na data $t = T$ e estado ω_k , este processo de consumo é

conhecido como processo de consumo elementar e pode ser denotado $1_{\{\omega_k\}}$. E o preço, $Q(\omega_k)$ é o valor futuro desta estratégia. Em outras palavras, podemos interpretar $Q(\omega)$ como o preço não descontado da estratégia $\{0, 1_{\{\omega_k\}}\}$.

Ainda, a representação do funcional de preços em termos da medida de preço de equilíbrio, Q , simplifica o cálculo de preços de equilíbrio para títulos realizáveis. O exemplo a seguir ilustra a utilização do funcional para calcular o preço de equilíbrio de uma opção de compra e sobre uma opção conversível que paga o máximo entre dois títulos.

Exemplo 1.2 Seja $K = 3$, $N = 4$ e, D a matriz de valores finais dada por

$$D = \begin{pmatrix} 100 & 40 & 60 & 120 \\ 100 & 0 & 40 & 80 \\ 100 & 20 & 100 & 200 \end{pmatrix}$$

Os preços iniciais dos títulos são

$$p_1 = 50, p_2 = 7, p_3 = 31, p_4 = 62.$$

Note que, neste caso, $1 + r = 2$ e, a medida de preço de equilíbrio é calculada pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{pmatrix} 100 & 100 & 100 \\ 40 & 0 & 20 \\ 60 & 40 & 100 \\ 120 & 80 & 200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q(\omega_1) \\ Q(\omega_2) \\ Q(\omega_3) \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 50 \\ 7 \\ 31 \\ 62 \end{pmatrix}$$

cujas solução é dada por

$$Q(\omega_1) = \frac{1}{5}, Q(\omega_2) = \frac{1}{2}, Q(\omega_3) = \frac{3}{10}.$$

Da existência de Q temos o sistema de preços não permite arbitragem (Teorema 1.7)! Segue que podemos utilizar a representação do funcional de preços do Teorema 1.9. Ainda, como o posto(D) = K o mercado é completo e conseqüentemente Q é único.

Então, vamos acrescentar dois títulos, números 5 e 6, a este sistema. O título 5 é uma opção de compra sobre a título 4 com preço de exercício igual a 100 e, o título 6 é um título conversível que paga em T o máximo entre o título d_1 e o título d_4 , isto é

$$d_5 = \max\{0, (d_4 - 100)\},$$

$$d_6 = \max\{d_1, d_4\} .$$

Explicitamente, os pagamentos finais destes títulos são:

$$\begin{aligned} d_5(\omega_1) &= 20 , & d_5(\omega_2) &= 0 , & d_5(\omega_3) &= 100 ; \\ d_6(\omega_1) &= 120 , & d_6(\omega_2) &= 100 , & d_6(\omega_3) &= 200 . \end{aligned}$$

Como o mercado original com os títulos 1, 2, 3 e 4 é completo, o consumo representado pelos títulos 5 e 6 são realizáveis e os preços de equilíbrio podem ser calculados utilizando o funcional de preços, equação 1.5, onde os valores de Q são os calculados acima; ou seja,

$$\begin{aligned} p_5 &= \frac{\frac{1}{5} \times 20 + \frac{1}{2} \times 0 + \frac{3}{10} \times 100}{2} = 17 ; \\ p_6 &= \frac{\frac{1}{5} \times 120 + \frac{1}{2} \times 100 + \frac{3}{10} \times 200}{2} = 67 . \end{aligned}$$

Reverendo os resultados desta seção podemos concluir que probabilidade Q é uma medida de ajuste ao risco (observe que a não existência de estratégias de arbitragem, o preço de equilíbrio de um título é calculado utilizando a equação 1.5).

Note também que para a medida de probabilidade real P , a representação dos preços como expectativas de valores finais descontados seria mantida num mercado populado por agentes neutros em relação ao risco. A propriedade de ajuste ao risco de Q faz esta representação verdadeira com respeito a Q mesmo quando os agentes não são neutros em relação ao risco.

1.8 Risco e Retorno

Agora vamos mostrar que se um sistema de preços p não permite arbitragem e Q é uma medida de preço de equilíbrio então a razão de verossimilhança $z = \frac{Q}{P}$, onde P é a medida real de probabilidade, é o único fator de risco no modelo Uni-Período discreto. Especificamente, mostraremos que o prêmio pelo risco de cada título é proporcional à covariância entre a razão de verossimilhança e a taxa de retorno do título.

Definimos a taxa de retorno de um título n como

$$R_n = \frac{d_n - p_n}{p_n} .$$

A taxa de retorno de um título n é dividida em duas partes; uma parte previsível μ que representa uma tendência no título e uma parte de inovação x que representa a resposta à chegada de informações:

$$\mu_n = E_P[R_n] ,$$

$$x_n = R_n - E_P[R_n] .$$

A soma $\mu_n + x_n$ corresponde à taxa de retorno do título n

$$\mu_n + x_n = R_n = \frac{d_n}{p_n} - 1 .$$

Destas definições segue imediatamente que o valor final do título é representada por

$$d_n = p_n(1 + \mu_n + x_n) .$$

Dividindo a equação anterior por $(1 + r)$ e subtraindo p_n em ambos os lados encontramos a seguinte relação:

$$\frac{d_n}{1 + r} - p_n = (\mu_n - r + x_n) \frac{p_n}{1 + r} . \quad (1.6)$$

Agora, para qualquer medida de preço de equilíbrio Q podemos escrever

$$E_Q \left[\frac{P}{Q} \left(\frac{d_n}{1 + r} - p_n \right) \right] = \sum_{k=1}^K Q_k \frac{P_k}{Q_k} \left(\frac{d_{n,k}}{1 + r} - p_n \right) = E_P \left[\frac{d_n}{1 + r} - p_n \right] .$$

Ainda, como

$$\frac{E_Q[d_n]}{1 + r} = p_n ,$$

temos,

$$E_Q \left[\left(\frac{d_n}{1 + r} - p_n \right) \right] = 0$$

logo, também é válida a seguinte relação:

$$E_Q \left[\left(\frac{P}{Q} - 1 \right) \left(\frac{d_n}{1 + r} - p_n \right) \right] = E_P \left[\frac{d_n}{1 + r} - p_n \right] . \quad (1.7)$$

Note que para qualquer variável aleatória u , vale a relação $E_Q(u) = E_P(uz)$. Então, podemos converter uma expectativa em relação à uma medida de probabilidade Q em uma expectativa equivalente em relação à uma medida de probabilidade P .

Utilizando esta propriedade na equação 1.7 obtemos,

$$E_P \left[\left(1 - \frac{Q}{P} \right) \left(\frac{d_n}{1+r} - p_n \right) \right] = E_P \left[\frac{d_n}{1+r} - p_n \right] ,$$

ou ainda,

$$-E_P \left[(z-1) \left(\frac{d_n}{1+r} - p_n \right) \right] = E_P \left[\frac{d_n}{1+r} - p_n \right] .$$

Substituindo 1.6 na equação anterior encontramos

$$-E_P \left[(z-1) \left((\mu_n - r + x_n) \frac{p_n}{1+r} \right) \right] = E_P \left[(\mu_n - r + x_n) \frac{p_n}{1+r} \right] ,$$

expandindo os termos da equação acima temos,

$$-E_P[(z-1)(\mu_n - r)] + E_P[(z-1)x_n] = E_P[(\mu_n - r)] + E_P[x_n] .$$

Como $E_P[x_n] = 0$ e $E_P[(z-1)] = E_P[\frac{Q}{P} - 1] = 0$ temos finalmente que

$$-E_P[(z-1)x_n] = (\mu_n - r) .$$

Teorema 1.10 Se o sistema de preços p não permite arbitragem, então para qualquer medida de preço de equilíbrio Q e título $1 \leq n \leq N$ vale a seguinte relação:

$$\mu_n - r = -\text{covar}_P(x_n, z) .$$

Prova. A prova deste Teorema é imediata da construção acima e da identidade $\text{covar}(x, y) = E[xy] - E[x]E[y]$. $\square$

Este teorema estabelece uma relação simples entre a parte previsível e a componente de inovação da taxa de retorno do título n . Alternativamente, a relação anterior estabelece uma relação entre o prêmio pelo risco de qualquer título e a covariância entre a componente de inovação do título e a razão de verossimilhança.

Agora, vamos estender este tipo de análise para um portfolio definido por uma estratégia de negociação θ .

Seja $c(T) = \sum_{n=1}^N \theta_n d_n$ um consumo final realizável. Então, definimos

$$\mu = \frac{E_P[c(T)]}{\theta' p} - 1 , \quad (1.8)$$

$$x = \frac{c(T) - E_P[c(T)]}{\theta' p} \quad (1.9)$$

onde, μ e x podem ser interpretados como as componentes previsível e de inovação da taxa de retorno da estratégia θ . Segue que a taxa de retorno da carteira $\mu + x$ será dada por

$$\mu + x = \frac{c(T)}{\theta' p} - 1 .$$

Então o consumo final $c(T)$ pode ser escrito como

$$c(T) = \theta' p(1 + \mu + x)$$

e, como antes, a relação entre as componentes previsível e de inovação da taxa de retorno da estratégia θ é

$$\mu - r = -\text{covar}_P(x, z) . \quad (1.10)$$

Agora, suponha que existe uma estratégia ζ que replique z , $z = \sum_{n=1}^N \zeta_n d_n$, então vale a representação

$$z = \zeta' p(1 + \nu + y)$$

onde, como anteriormente, ν e y são as componentes previsível e de inovação da taxa de retorno da estratégia ζ definida de maneira análoga à 1.8 e 1.9 respectivamente. Substituindo esta representação para z na equação 1.10 e utilizando o fato que $1 + \nu = \text{cte}$ encontramos

$$\mu - r = -(\zeta' p) \text{covar}_P(x, y) \quad (1.11)$$

e, em particular, como $\text{covar}_P(y, y) = \text{var}_P(y)$, para a estratégia ζ temos

$$\nu - r = -(\zeta' p) \text{var}_P(y) . \quad (1.12)$$

Isto implica no seguinte teorema.

Teorema 1.11 Suponha que o sistema de preços p não permite arbitragem, o mercado seja completo, Q seja uma medida do preço de equilíbrio, θ é uma estratégia qualquer, ζ é a estratégia que replica a razão de verossimilhança z , μ e ν sejam as componentes previsíveis e x e y sejam as componentes de inovação da taxa de retorno das estratégias θ e ζ respectivamente. Então,

$$\mu - r = \frac{\text{covar}_P(x, y)}{\text{var}_P(y)} (\nu - r) .$$

Prova. A prova deste Teorema é imediata das equações 1.11 e 1.12. $\square$

A razão

$$\beta(x, y) = \frac{\text{covar}_P(x, y)}{\text{var}_P(y)}$$

é conhecida como o beta da estratégia θ com relação à estratégia ζ .

Este teorema diz que se a razão de verossimilhança é realizável, então, o prêmio pelo risco de qualquer estratégia θ é proporcional ao prêmio pelo risco da estratégia ζ , e o coeficiente de proporcionalidade é o beta da estratégia θ com relação à estratégia ζ .

Capítulo 2

Modelo Multi-Período Discreto

2.1 Elementos do Modelo

O Modelo Multi-Período Discreto é o próximo passo na construção de uma teoria de Mercados Financeiros mais realista. Acrescentaremos à teoria a possibilidade de negociação em um número finito de datas intermediárias entre a data inicial e a data final. E, como anteriormente, existe um número finito de títulos que podem assumir valores reais em um número finito de estados.

Podemos justificar a introdução de consumo intermediário de duas maneiras: a necessidade de consumo intermediário dos agentes; contudo, esta necessidade pode ser obtida com a introdução de títulos com pagamentos intermediários. A segunda, e melhor, razão para introdução de negociação intermediária é a chegada de novas informações.

A principal diferença entre os modelos Uni-Período e Multi-Período está na dimensão do conjunto dos processos de consumos realizáveis. Negociações intermediárias podem gerar todos processos de consumo consistentes com a chegada de novas informações com menos títulos linearmente independentes do que seriam necessários caso a possibilidade de consumo intermediário não existisse.

Especificamente os elementos do modelo são:

- Data inicial 0 , data final T , datas intermediárias $1, \dots, T - 1$, datas de negociação $0, \dots, T$.

- Os estados pertencem a um espaço finito Ω com K elementos

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_K\}.$$

A cada estado $\omega \in \Omega$ esta associado uma probabilidade positiva $P(\omega_k)$.

- Existe somente um bem de consumo perecível.
- Existe um número finito N de títulos endógenos e não existem títulos exógenos. Os títulos são infinitamente divisíveis e não existem taxas ou outros tipos de custos associados à negociação. Os títulos somente realizam pagamentos finais aleatórios d_n , que serão arranjados numa matriz de pagamentos finais D como no modelo Uni-Período.
- Existe um número finito I de agentes. Na data 0, os agentes só conhecem o conjunto dos possíveis estados Ω e, em T conhecem o estado vigente $\omega \in \Omega$. Em datas intermediárias eles tem o um conhecimento que está entre estes dois extremos.

Esta incerteza no tempo é comum a todos agentes e será descrita pela estrutura de informação (este conceito será desenvolvido de maneira formal nas seções 2.2 e 2.3).

- Cada agente recebe uma dotação de bens de consumo nas datas 0, 1, ..., T . O processo de dotação do agente i é dado por

$$e^i = \{e^i(0), e^i(1), \dots, e^i(T)\}$$

onde, $e^i(0)$ é um número e cada $e^i(t)$ uma variável aleatória. É necessário que o processo de dotação de cada agente seja consistente com a estrutura de informação. Veremos como isto ocorre na secção 2.3.

- Cada agente pode consumir nas datas 0, 1, ..., T . O processo de consumo do agente i é dado por

$$c^i = \{c^i(0), c^i(1), \dots, c^i(T)\}$$

onde, $c^i(0)$ é um número e cada $c^i(t)$ uma variável aleatória. Análogo ao processo de dotação, é necessário que o processo de consumo de cada agente seja consistente com a estrutura de informação.

- Sobre o conjunto de consumo X os agentes tem ordem de preferência completa, contínua, crescente e convexa.

Para continuar devemos introduzir formalmente os conceitos de estrutura de informação e as condições para consistência entre a estrutura de informação e os processos de dotação, e de consumo, os sistemas de preços e as estratégias de negociação.

2.2 Estrutura de Informação

Imagine um experimento que consiste em sortear “cara ou coroa” com duas moedas: uma de Dez e a outra de Cinquenta centavos. Ao invés de observar o resultado diretamente, definiremos uma variável aleatória que consiste na contagem das moedas que sortearam “cara”. Então, obviamente, teremos somente uma informação parcial sobre o resultado do experimento.

Segue que se a realização do experimento for duas “caras” ou duas “coroas”, então da contagem do número de moedas que sortearam “cara” saberemos que ambas as moedas sortearam “cara” ou ambas sortearam “coroa”. Contudo, quando a moeda de Cinquenta sorteia “cara” e a de Dez “coroa” ou vice-versa, então do resultado da variável aleatória (um) saberemos somente que o resultado foi um dos dois possíveis mas não será possível distinguir qual.

Formalmente, o sorteio das moedas consiste num experimento cujo espaço amostral possui quatro possibilidades ou estados

$$\Omega = \{\text{cara-cara}, \text{cara-coroa}, \text{coroa-cara}, \text{coroa-coroa}\}.$$

A informação contida na variável aleatória pode ser representada pelo seguinte arranjo de estados

$$\mathfrak{S} = \{\{\text{cara-cara}\}, \{\text{cara-coroa}, \text{coroa-cara}\}, \{\text{coroa-coroa}\}\}.$$

Definido desta forma $\mathfrak{S}$ é um conjunto de eventos, isto é, um conjunto de subconjuntos do espaço Ω . E, a informação contida em $\mathfrak{S}$ representa o conhecimento somente do evento que contém o estado vigente. Logo, no caso do resultado ser cara-coroa ou coroa-cara, o conhecimento se restringe a saber que um dos dois casos ocorreu, mas não se pode afirmar qual pois, ambos estados estão no mesmo subconjunto de $\mathfrak{S}$.

Este exemplo ilustra a noção de partição do espaço Ω como uma representação formal da informação. Vejamos a definição.

Definição 2.1 Um conjunto $\mathfrak{S} = \{f_1, \dots, f_u\}$ de subconjuntos do espaço Ω é uma *partição* de Ω se e somente se

1. Para todo i $f_i \neq \emptyset$.
2. Para todo $i \neq j$ temos $f_i \cap f_j = \emptyset$.
3. A união $f_1 \cup \dots \cup f_u = \Omega$.

□

“Quebrando” alguns conjuntos de uma partição produzimos outra partição mais fina. Como alguns conjuntos da partição são menores, e nenhum é maior, a partição mais fina representa mais informação que a original. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 2.1 Seja o espaço $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_K\}$.

1. A partição que representa nenhuma informação, partição nula, é dada por

$$\mathfrak{S} = \{\{\omega_1, \dots, \omega_K\}\}.$$

2. “Quebrando” o conjunto da partição nula nos seus menores elementos construímos a partição de maior informação

$$\mathfrak{S} = \{\{\omega_1\}, \dots, \{\omega_K\}\}$$

onde, cada estado é um evento distinto na partição.

Formalmente, a definição de uma partição mais fina é dada a seguir.

Definição 2.2 Uma partição $G = \{g_1, \dots, g_v\}$ é mais *fina* que uma partição $F = \{f_1, \dots, f_u\}$ se e somente se todo conjunto de G for um subconjunto de algum conjunto de F ; isto é, para todo $1 \leq j \leq v$ existe um $1 \leq i \leq u$ tal que $g_j \subset f_i$. A partição F é mais *grossa* que a partição G se e somente se G é mais fina que F . □

Agora podemos definir o conceito de estrutura de informação. De maneira genérica, no modelo Multi-Período Discreto a estrutura de informação representa a informação que os agentes possuem em cada dia de negociação. Vejamos a definição formal.

Definição 2.3 Uma *estrutura de informação* $\{\mathfrak{S}_t\}$ é uma seqüência de partições $\mathfrak{S}_0, \dots, \mathfrak{S}_T$ tal que:

1. Na data inicial

$$\mathfrak{S}_0 = \{\{\omega_1, \dots, \omega_K\}\}.$$

2. Na data final

$$\mathfrak{S}_T = \{\{\omega_1\}, \dots, \{\omega_K\}\}.$$

3. Para cada $0 \leq t \leq T - 1$ a partição $\mathfrak{S}_{t+1}$ é mais fina que a partição $\mathfrak{S}_t$.

□

Esta definição fixa a informação inicial e final e pressupõe que os agentes não esquecem as informações passadas; ou seja, com o passar do tempo o conhecimento dos agentes não decresce.

Definição 2.4 Seja $\{\mathfrak{S}_t\}$ uma estrutura de informação sobre Ω , então, para $\omega \in \Omega$, $f_t(\omega)$ representa o conjunto da partição $\mathfrak{S}_t$ que contém ω . □

Intuitivamente, a consistência de informação entre uma estrutura de informação e qualquer processo de dotação ou de consumo requer que os processos não representem mais informações do que é disponível aos agentes. A seguir faremos duas definições para estabelecer o conceito de informação gerada por uma variável aleatória.

Definição 2.5 Uma variável aleatória x é *mensurável* numa partição $\mathfrak{S}$ se e somente se é constante em cada conjunto de $\mathfrak{S}$. □

Definição 2.6 Para uma variável aleatória x , a partição mais grossa na qual x é mensurável é chamada de *partição gerada* por x e denotada por $\mathfrak{S}^x$. □

A definição acima implica no seguinte corolário.

Corolário 2.1 Uma variável aleatória x é mensurável numa partição $\mathfrak{S}$ se e somente se $\mathfrak{S}$ é mais fina que $\mathfrak{S}^x$. □

Note que, como uma partição, uma variável aleatória também representa informação. A realização de uma variável aleatória pode revelar algo sobre o estado vigente.

Em um extremo, observar uma variável aleatória que tem um valor diferente em cada estado revela o estado; em outro extremo, observar uma variável aleatória constante em todos os estados não revela nada sobre o estado vigente. No caso intermediário, observar uma variável aleatória que não é constante mas tem o mesmo valor em vários, mas não todos, estados estreita o conjunto dos possíveis estados vigentes. Esse é o mesmo caso onde o observador não pode distinguir entre diferentes estados que estão em partições diferentes ou ainda, a mesma impossibilidade de distinguir estados pertencentes a uma mesma partição.

Destas observações segue que existe uma relação entre a informação representada por uma partição e a representada por uma variável aleatória. De fato, uma variável aleatória x representa exatamente a mesma informação que a partição $\mathfrak{S}^x$ gerada por x . Segue, a definição formal da informação representada por uma variável aleatória.

Definição 2.7 A informação representada por uma variável aleatória x é a informação representada pela partição $\mathfrak{S}^x$. $\square$

2.3 Consistência de Informação

A seção 2.1 deixou aberto alguns elementos do modelo que agora iremos complementar. Vejamos os conceitos a seguir.

- Todos os agentes tem a mesma informação dada pela estrutura de informação $\{\mathfrak{S}_t\}$.
- Na data t o agente i recebe uma dotação $e^i(t)$ que é mensurável em $\mathfrak{S}_t$; isto é, $\mathfrak{S}_t$ é mais fina que $\mathfrak{S}^{e^i(t)}$.
- O processo de consumo do agente i ,

$$c^i = \{c^i(0), c^i(1), \dots, c^i(T)\} ,$$

é tal que cada $c^i(t)$ é mensurável em $\mathfrak{S}_t$.

Denote $\mathfrak{R}^{(\Omega, \mathfrak{S}_t)}$ o conjunto das variáveis aleatórias $\mathfrak{S}_t$ mensuráveis. Então, o conjunto de consumo, X , onde

$$\begin{aligned} c(0) &\rightarrow \mathfrak{R}^{(\Omega, \mathfrak{S}_0)} ; \\ c(1) &\rightarrow \mathfrak{R}^{(\Omega, \mathfrak{S}_1)} ; \\ &\vdots \\ c(T) &\rightarrow \mathfrak{R}^{(\Omega, \mathfrak{S}_T)} ; \end{aligned}$$

é dado por

$$X = \prod_{t=0}^T \mathfrak{R}^{(\Omega, \mathfrak{S}_t)} .$$

Note que, cada $\mathfrak{R}^{(\Omega, \mathfrak{S}_t)}$ é isomorfo a $\mathfrak{R}^{|\mathfrak{S}_t|}$ onde $|\mathfrak{S}_t|$ é o número de elementos de $\mathfrak{S}_t$. Portanto, X é isomorfo a $\mathfrak{R}^{\sum_{t=0}^T |\mathfrak{S}_t|}$.

Os itens acima são os requisitos para consistência de informação dos processos de dotação e consumo. Se a variável aleatória $e^i(t)$ não for mensurável em $\mathfrak{S}_t$, então a dotação contém mais informação do que o agente i supostamente possui, o que não pode acontecer quando este agente observa sua dotação.

Note que $e^i(0)$ é mensurável na partição nula $\mathfrak{S}_0$; ou seja, é constante sobre Ω , isto que dizer que x não é uma variável aleatória. Os mesmos requisitos de consistência se aplicam ao processo de consumo c .

Para evitar repetição das condições de mensurabilidade que garantam consistência de informação, introduziremos os conceitos de seqüência de variáveis aleatórias adaptadas e também o conceito de seqüência de variáveis aleatórias previsíveis.

Definição 2.8 Uma seqüência de variáveis aleatórias $x(0), \dots, x(T)$ é *adaptada* à estrutura de informação $\{\mathfrak{S}_t\}$ se e somente se cada $x(t)$ for $\mathfrak{S}_t$ mensurável. Uma seqüência de variáveis aleatórias adaptadas também é chamada de processo adaptado. $\square$

Quando conveniente, um processo adaptado será denotado por $\{x(t, f_t^j)\}$, onde f_t^j é o conjunto da partição $\mathfrak{S}_t$ e $x(t, f_t^j)$ é o valor de $x(t, \omega)$ para $\omega \in f_t^j$.

Utilizando a definição anterior, a condição necessária para consistência de informação dos processos de dotação ou consumo pode ser estabelecida requerendo que cada um destes processos sejam adaptados à estrutura de informação. Vejamos outra definição.

Definição 2.9 Uma seqüência de variáveis aleatórias $x(1), \dots, x(T)$ é *previsível* sobre estrutura de informação $\{\mathfrak{F}_t\}$ se e somente se cada $x(t)$ for $\mathfrak{F}_{t-1}$ mensurável. Uma seqüência de variáveis aleatórias previsíveis também é chamado de processo previsível. $\square$

Note que uma seqüência $x(1), \dots, x(T)$ é previsível se e somente se a seqüência $y(t) = x(t+1)$ para $0 \leq t \leq T-1$ for adaptada; ou seja, $y(t)$ é $\mathfrak{F}_t$ mensurável.

2.3.1 Conjunto Orçamento

Para cada data $0 \leq t \leq T-1$, dados os preços $p_1(t), \dots, p_N(t)$ cada agente i sofre restrições sobre o consumo impostas pelo processo de dotação $e^i = \{e^i(0), \dots, e^i(T)\}$. Este fato é formalizado sobre a forma do conjunto orçamento.

Definição 2.10 Dado um processo de dotação e^i e preços $p = \{p_n(t)\}$, o conjunto orçamento $B(e^i, p)$ é um subconjunto do conjunto de consumo X tal que $c \in B(e^i, p)$ se e somente se existe um processo previsível $\theta_n^i(t)$, $1 \leq t \leq T$, tal que para todo $0 \leq t \leq T$

$$c^i(t) = e^i(t) + \sum_{n=1}^N [\theta_n^i(t) - \theta_n^i(t+1)] p_n(t)$$

onde, por convenção, $\theta_n^i(0) = \theta_n^i(T+1) = 0$ e $p_n(T) = d_n$. $\square$

A seqüência de variáveis aleatórias $\theta_n^i(t)$ é chamada estratégia de negociação.

Da definição acima, note que $\sum_{n=1}^N \theta_n^i(t) p_n(t)$ representa o resultado do investimento feito em $t-1$ e $\sum_{n=1}^N \theta_n^i(t+1) p_n(t)$ representa a o investimento feito em t .

O fato de $\theta_n^i(t+1)$ ser $\mathfrak{F}_t$ mensurável é uma condição para consistência de informação, em outras palavras, isto quer dizer que no instante t o agente i conhece a quantidade de cada título n que está adquirindo como investimento para o próximo período.

Como anteriormente, esta definição implica que o conjunto orçamento do agente i consiste de todos os processos de consumo que o agente i pode obter adquirindo na data $t-1$ e segurando até t um portfolio de θ_i^n unidades do título n , $1 \leq n \leq N$.

2.3.2 Equilíbrio

Olhando os conjuntos orçamento para vários preços, os agentes determinam as estratégias de negociação que otimizam (maximizam) sua preferência. As negociações não começam enquanto os preços não são tais que os mercados se equilibram; isto é, a demanda agregada para cada título é nula,

$$\sum_{i=1}^I \theta_n^i(t, w) = 0$$

para cada $w \in \Omega$, $1 \leq n \leq N$ e $1 \leq t \leq T$. Essa descrição leva à definição formal de um equilíbrio no modelo Multi-Período.

Definição 2.11 Dado um processo de dotação e^i , um *equilíbrio* Multi-Período consiste de preços adaptados $p_n(t)$ para todo $1 \leq n \leq N$, $0 \leq t \leq T$ e estratégias de negociação previsíveis θ_n^i para todo $1 \leq i \leq I$, $1 \leq n \leq N$, e $1 \leq t \leq T$, tal que o processo de consumo gerado por e^i e θ_n^i otimizam a preferência do agente i sobre $B(e^i, p)$ e os mercados se equilibram. $\square$

Como anteriormente, o processo de consumo adaptado $c^i = \{c^i(t)\}$ associado à estratégia de negociação de equilíbrio forma a alocação de consumo de equilíbrio $c = \{c^i\}$.

2.4 Eficiência de Pareto

A análise da eficiência de Pareto no modelo Multi-Período é diferente do modelo Uni-Período. No modelo Multi-Período uma condição mais fraca que $\text{posto}(D) = K$ pode ser suficiente para garantir a eficiência de Pareto e outras propriedades do equilíbrio.

De fato, esta condição pode garantir o equilíbrio e a eficiência de Pareto mesmo quando o número de títulos linearmente independentes, $\text{posto}(D)$, é substancialmente menor que o número de estados do espaço Ω , K .

Vejamos as definições e o Teorema que estabelecem essas condições.

Definição 2.12 Uma alocação de consumo $c = \{c^i\}$, onde $c^i = \{c^i(t)\}$, é *viável* se e somente se cada processo de consumo $c^i \in X$ e para todo $0 \leq t \leq T$

$$\sum_{i=1}^I c^i(t) = \sum_{i=1}^I e^i(t).$$

$\square$

Definição 2.13 Uma alocação viável $c = \{c^i\}$ é *eficiente no sentido de Pareto* se e somente se não existir uma outra alocação viável $b = \{b^i\}$ tal que cada agente i estritamente prefere b^i a c^i . $\square$

Teorema 2.1 Uma alocação de equilíbrio é viável.

Prova. Seja c^i uma alocação de equilíbrio, então

$$c^i(t) = e^i(t) + \sum_{n=1}^N [\theta_n^i(t) - \theta_n^i(t+1)] p_n(t)$$

para $0 \leq t \leq T$

Como os mercados se equilibram; ou seja, $\sum_{i=1}^I \theta_n^i(t, w) = 0$ para cada $\omega \in \Omega$, $1 \leq n \leq N$ e $1 \leq t \leq T$ temos que o consumo agregado dos agentes é dado por

$$\sum_{i=1}^I c^i(t) = \sum_{i=1}^I e^i(t) + \sum_{i=1}^I \sum_{n=1}^N [\theta_n^i(t) - \theta_n^i(t+1)] p_n(t) = \sum_{i=1}^I e^i(t)$$

Note que esta igualdade também vale para $t = 0$ e $t = T$ devido à convenção $\theta_n^i(0) = \theta_n^i(T+1) = 0$. $\square$

Agora definimos um consumo *realizável*.

Definição 2.14 Um processo de consumo adaptado, $c = \{c(0), \dots, c(T)\}$ é *realizável* a preços p se e somente se existe um processo de dotação e tal que $e(1) = e(2) = \dots = e(T) = 0$ e $c \in B(e, p)$. $\square$

O conjunto dos processos realizáveis é denotado por $M(p)$. $\square$

Teorema 2.2 Note que para um sistema de preços p , se $c(t) = \tilde{c}(t)$ para $1 \leq t \leq T$ e $c \in M(p)$ então, $\tilde{c} \in M(p)$; ou seja, a pertinência a $M(p)$ não depende de $c(0)$.

Prova. Por hipótese, para $1 \leq t \leq T$ temos $c(t) = \tilde{c}(t)$ então,

$$\tilde{c}(t) = [\theta^i(t) - \theta^i(t+1)]' p(t) .$$

Agora, defina $\tilde{e}(0) = \tilde{c}(0) + \theta(1) p'(0)$; logo, $\tilde{c} \in B(\tilde{e}, p)$ e conseqüentemente $\tilde{c} \in M(p)$. $\square$

Esta definição de processo de consumo realizável estende a noção definida no modelo Uni-Período. Como anteriormente a realização de um processo de consumo não depende de $c(0)$. Em outras palavras, um processo de consumo é realizável se e somente se este pode ser atingido por uma estratégia de negociação previsível estabelecida por um agente com processo de dotação intermediário e final nulos.

Finalmente podemos estabelecer a extensão para o modelo Multi-Período do Teorema que garante que todo processo de consumo de equilíbrio é eficiente no sentido de Pareto.

Teorema 2.3 Se todo processo de consumo adaptado é realizável, então toda alocação de consumo de equilíbrio é eficiente no sentido de Pareto.

Prova. A prova deste Teorema é por contradição e segue os mesmos passos da prova do Teorema equivalente no modelo Uni-Período Discreto.

Então, de maneira análoga vamos supor, por absurdo, que exista uma alocação de equilíbrio $\{c^i\}$ que não seja eficiente no sentido de Pareto. Isto implicaria que existe uma alocação viável $\{b^i\}$ tal que todo agente i prefere estritamente b^i a c^i . Considerando a hipótese de que todo processo de consumo é realizável, mostraremos o consumo $\{b^i\}$ não existe pois, do contrário podemos construir um consumo em $B(e, p)$ preferido a $\{c^i\}$.

Primeiro mostraremos que as hipóteses garantem que a soma dos consumos é nula para todo t , $0 \leq t \leq T$. A veracidade desse fato será verificada uma vez que a sua negação possibilitaria a construção de uma alocação preferida à alocação de equilíbrio, c^i .

Por hipótese todo processo de consumo é realizável, em particular $a^i = b^i - e^i$ onde, e^i é o processo de dotação do agente i , o é. Logo, existem estratégias de negociação θ_n^i e números (dotações) α_i tal que para cada i as equações que seguem estão satisfeitas,

$$a^i(0) = \alpha^i - p'(0)\theta^i(1),$$

$$a^i(t) = p'(t)[\theta^i(t) - \theta^i(t+1)]$$

para $1 \leq t \leq T$

Da viabilidade de b^i temos

$$\sum_{i=1}^I a^i(t) = \sum_{i=1}^I (b^i(t) - e^i(t)) = 0$$

para $0 \leq t \leq T$; ou seja,

$$\sum_{i=1}^I p'(t)(\theta^i(t) - \theta^i(t+1)) = 0. \quad (2.1)$$

Por definição $\theta^i(T+1) = 0$ para todo i . Então, para $t = T$ a equação 2.1 resume-se a

$$\sum_{i=1}^I p'(T)\theta^i(T) = 0. \quad (2.2)$$

Agora suponha por absurdo que $\sum_{i=1}^I p'(T-1)\theta^i(T) \neq 0$ então, veremos que é possível construir uma estratégia de negociação que gera uma alocação c^i preferida à alocação de equilíbrio c^i , o que é uma contradição! Vejamos como isto ocorre. Assuma que

$$\sum_{i=1}^I p'(T-1, \omega_j)\theta^i(T, \omega_j) < 0 \quad (2.3)$$

onde, j são os índices dos elementos, ω_j , de um conjunto $f \in \mathfrak{S}_{T-1}$.

Seja ϕ uma estratégia em $\mathfrak{S}_{T-1}$ definida como

$$\phi(T, \omega_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega_j \notin f \\ \sum_{i=1}^I \theta^i(T, \omega_j) & \text{se } \omega_j \in f \end{cases}$$

e, $\phi(t) = 0$ para $t < T$. Note que por definição ϕ é previsível.

Seja Ψ a estratégia definida por $\Psi^i(t) = \theta^i(t) + \phi^i(t)$.

Agora, vamos calcular o consumo gerado por Ψ^i . Quando conveniente, utilizaremos a notação $c_\theta^i(t) = e^i(t) + p'(t)[\theta^i(t) - \theta^i(t+1)]$. Ainda, note que o termo $e^i(t) = 0$ para $1 \leq t \leq T$ já que todo processo de consumo é realizável.

Por definição, $\tilde{c}_\Psi^i(t) = c_\theta^i(t)$ para $t < T-1$.

Para $t = T-1$ temos $\tilde{c}_\Psi^i(T-1) = c_\theta^i(T-1) + c_\phi^i(T-1)$ e, como

$$c_\phi^i(T-1) = p'(T-1)[\phi^i(T-1) - \phi^i(T)] = p'(T-1)[- \phi^i(T)],$$

temos que $\tilde{c}_\Psi^i(T-1) > c_\theta^i(T-1)$ em f .

Finalmente para $t = T$ temos $\tilde{c}_\Psi^i(T) = c_\theta^i(T) + c_\phi^i(T) = c_\theta^i(T)$ pois,

$$c_\phi^i(T) = p'(T)[\phi^i(T)] = \sum_{i=1}^I p'(T)\theta^i(T, \omega_k) = 0,$$

já que se $\omega_k \notin f$, $p'(T)[\phi^i(T, \omega_k)] = 0$ e, se $\omega_k \in f$, a equação 2.2 assegura o resultado.

Portanto, a alocação gerada por Ψ^i , $\tilde{c}^i$, é preferida à alocação de equilíbrio, ou seja, $\tilde{c}^i > c^i$.

Mas, isso é uma contradição pois, c^i é uma alocação de equilíbrio!

O mesmo tipo de contradição é encontrado se assumirmos que a equação 2.3 é maior que zero! Conseqüentemente, vale o seguinte resultado

$$\sum_{i=1}^I p'(T-1)\theta^i(T) = 0.$$

Ainda, da viabilidade dos consumos, equação 2.1, temos imediatamente que

$$\sum_{i=1}^I p'(T-1)\theta^i(T-1) = 0.$$

Repetindo a análise para $0 \leq t \leq T$ encontramos

$$\sum_{i=1}^I p'(t)\theta^i(t) = \sum_{i=1}^I p'(t)\theta^i(t+1) = 0.$$

Agora mostraremos que não existe a alocação viável, $\{b^i\}$. Como anteriormente, note que $\tilde{b}^i$ definido por $\tilde{b}^i(t) = b^i(t)$ para $1 \leq t \leq T$ e $\tilde{b}^i(0) = b^i(0) - \alpha^i$ é elemento de $B(e^i, p)$.

De maneira análoga, analisemos as possibilidades.

Suponha $\alpha^i \leq 0$ para algum $1 \leq i \leq I$, então a alocação $\tilde{b}^i$ é preferida a b^i que por sua vez é estritamente preferida a c^i contradizendo a hipótese de otimalidade de c^i .

Por outro lado, se para todo i , $\alpha^i > 0$ temos, como anteriormente $\sum_{i=1}^I b_0^i > \sum_{i=1}^I e_0^i$, o que uma contradição também.

Portanto não existe uma alocação viável $\{b^i\}$ tal que o agente i estritamente prefere b^i a c^i . Conseqüentemente, concluímos que a alocação de equilíbrio c^i é eficiente de Pareto. $\square$

2.5 Completude

A definição de Completude no modelo Multi-Período difere da definição no modelo Uni-Período pois, sem a possibilidade de negociação intermediária,

a realização é definida somente em termos do consumo final e, conseqüentemente depende somente dos preços finais dos títulos e não dos preços iniciais. Por outro lado, no modelo Multi-Período, a realização é definida em termos do consumo em todas as datas exceto em 0.

Como neste processo esta envolvido o consumo intermediário, existem sistemas de preços que podem garantir que todo processo de consumo seja realizável e, outros que não possuem esta propriedade. Segue que a definição de Completude no modelo Multi-Período deve ser específico para um sistema de preços e não para um mercado! Vejamos a definição.

Definição 2.15 Um *sistema de preços* p é *completo* se e somente se, a estes preços, todo processo de consumo adaptado é realizável, isto é $M(p) = X$. $\square$

Agora, podemos reescrever o Teorema 2.3 em termos da definição de um sistema de preços completo.

Teorema 2.4 Se um sistema de preços de equilíbrio p é completo, então a alocação de consumo associada é eficiente no sentido de Pareto.

Prova. A prova deste Teorema é imediata da definição acima e do Teorema 2.3. $\square$

Agora, iremos caracterizar um sistema de preços completo. Considere as definições e o exemplo a seguir.

Definição 2.16 A *função partição* ν de uma estrutura de informação $\{\mathfrak{F}_t\}$

$$\nu : \{0, \dots, T-1\} \times \Omega \rightarrow N$$

atribui a cada (t, ω) o número de conjuntos da partição $\mathfrak{F}_{t+1}$ que são subconjuntos de $f_t(\omega)$. Daí, para $0 \leq t \leq T-1$ e $\omega \in \Omega$ denotamos $\nu(t, \omega) = \nu(f_t(\omega))$. $\square$

Em outras palavras, a função partição $\nu(t, \omega)$ representa o número de conjuntos em que é particionado $f_t(\omega)$.

Definição 2.17 O *índice de partição* ν de uma estrutura de informação é definido como

$$\nu = \max\{\nu(t, \omega) \text{ tal que } 0 \leq t \leq T-1 \text{ e } \omega \in \Omega\}.$$

$\square$

Apesar da função de partição e o índice de partição serem objetos distintos, é conveniente denotá-los pela mesma letra ν . O significado específico de ν sempre será claro pelo contexto.

Definição 2.18 Dado $f_t \in \mathfrak{F}_t$, $0 \leq t \leq T$ definimos o *split* ou *divisão* de f_t como

$$s(f_t) = \mathfrak{F}_{t+1}(f_t)$$

onde, para uma partição qualquer $\mathfrak{F}$ e um subconjunto H de Ω qualquer definimos

$$\mathfrak{F}(H) = \{E \cap H | E \in \mathfrak{F}\}.$$

□

Assim,

$$s(f_t(\omega)) = \{f_t^1, \dots, f_t^{\nu(t,\omega)}\}$$

e, $f_t^j \in \mathfrak{F}_{t+1}$, $1 \leq j \leq \nu(t,\omega)$. Note que existe um único j tal que $f_t^j = f_{t+1}(\omega)$. A figura a seguir ilustra tal definição.

Figura 2.1: “Split”

Vejamos um exemplo sobre alguns desses conceitos.

Exemplo 2.2 Considere um espaço $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_6\}$ e $T = 3$. E, sejam as partições $\mathfrak{S}_1$ e $\mathfrak{S}_2$ dadas por:

$$\mathfrak{S}_1 = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}\},$$

$$\mathfrak{S}_2 = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}, \{\omega_5, \omega_6\}\}.$$

Como usual,

$$\mathfrak{S}_0 = \{\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}\},$$

$$\mathfrak{S}_3 = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4\}, \{\omega_5\}, \{\omega_6\}\}.$$

Então,

$$\nu(0, \omega_k) = 2 \text{ para } 1 \leq k \leq 6;$$

$$\nu(1, \omega_k) = 1 \text{ para } 1 \leq k \leq 2;$$

$$\nu(1, \omega_k) = 2 \text{ para } 3 \leq k \leq 6.$$

E, o índice de partição desta estrutura de informação é $\nu = 2$.

A função de partição desta estrutura de informação pode ser lida diretamente da figura 2.2. Os vértices desta árvore representam os conjuntos de cada partição de $\mathfrak{S}_t$ para $0 \leq t \leq T$. Os galhos são as estruturas de ligação entre os elementos da partição $\mathfrak{S}_t$ e os elementos da partição $\mathfrak{S}_{t+1}$ que são subconjuntos de um certo $f_t(\omega)$.

É importante notar que podemos analisar isoladamente cada vértice da estrutura de informação em conjunto com os galhos que dele se originam como um modelo Uni-Período. Utilizando esse fato juntamente com o conceito de Completude derivado no modelo Uni-Período podemos estender o conceito de Completude para o modelo Multi-Período. Vejamos como isso ocorre.

Afirmamos que a condição necessária e suficiente para a Completude do sistema de preços é que a matriz de preços que descende de cada vértice da estrutura de informação, $\{\mathfrak{S}_t\}$, $0 \leq t \leq T - 1$ (que isoladamente representa um modelo Uni-Período) tenha posto igual ao valor da função de partição deste vértice.

Para verificar a afirmação acima podemos tentar construir uma base para todos os processos de consumo adaptados. Para isto vamos utilizar os processos de consumo elementar. Existe um processo de consumo elementar para cada vértice da estrutura de informação. Segue a definição.

Figura 2.2: Estrutura de Informação

Definição 2.19 O *processo de consumo elementar* é definido como

$$1_{\{\tau, f\}}(t, \omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \tau = t \text{ e } \omega \in f \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde f são os conjuntos de cada partição de $\mathfrak{F}_\tau$. □

Em palavras, o processo de consumo elementar associado a (τ, f) é nulo em toda estrutura, exceto no vértice (τ, f) .

Estes processos especiais formam uma base para todos os processos de consumo adaptados.

Conseqüentemente, um sistema de preços é completo se e somente se todos os processos de consumo elementar forem realizáveis; ou seja, se e somente se forem elementos de $M(p)$!

Vamos ilustrar esse fato importante com um exemplo.

Exemplo 2.3 Sobre a estrutura de informação definida no exemplo 2.2, considere dois títulos, $N = 2$, com os seguintes pagamentos finais

$$d_1(\omega_k) = 1 \text{ para } k = 1, \dots, 6,$$

isto é, d_1 é uma renda fixa.

$$d_2(\omega_k) = \begin{cases} k & \text{para } k = 1, 2, 3, \\ 6 & \text{para } k = 4, \\ 4 & \text{para } k = 5, \\ 5 & \text{para } k = 6. \end{cases}$$

Então, vamos construir um sistema de preços,

$$p_1 : \{0, \dots, T\} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

$$p_2 : \{0, \dots, T\} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+.$$

que seja completo. Considere o sistema de preços dado pela Tabela 2.1,

p_1	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$t = 0$	0.729	0.729	0.729	0.729	0.729	0.729
$t = 1$	0.81	0.81	0.81	0.81	0.81	0.81
$t = 2$	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
$t = 3$	1	1	1	1	1	1

p_2	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$t = 0$	2.4	2.4	2.4	2.4	2.4	2.4
$t = 1$	1.26	1.26	3.75	3.75	3.75	3.75
$t = 2$	1.4	1.4	4.2	4.2	4.2	4.2
$t = 3$	1	2	3	6	4	5

Tabela 2.1: Sistema de Preços

Observe que nas tabelas os preços $p_n(t)$ são constantes no conjunto das partições $\mathfrak{F}_t$, ou seja, os preços são adaptados.

Ainda, de maneira genérica, para $t = 0, 1, 2$ o vetor coluna que representa os preços nos vértices é dado por

$$\begin{pmatrix} p_1(t, \omega) \\ p_2(t, \omega) \end{pmatrix}$$

e, para $t = 3$ o vetor é dado por

$$\begin{pmatrix} d_1(\omega) \\ d_2(\omega) \end{pmatrix}$$

Continuando, vamos obter o processo de consumo elementar $1_{\{2,f_{2,2}\}}$, onde $f_{2,2} = \{\omega_3, \omega_4\}$. Para isso, devemos encontrar uma estratégia de negociação $\theta_n(t, f)$ que satisfaça as seguintes equações,

Para $t = 3$,

$$\begin{cases} c(3, f_{3,1}) = 0 = 1\theta_1(3, f_{2,1}) + 1\theta_2(3, f_{2,1}) \\ c(3, f_{3,2}) = 0 = 1\theta_1(3, f_{2,1}) + 2\theta_2(3, f_{2,1}) . \end{cases}$$

$$\begin{cases} c(3, f_{3,3}) = 0 = 1\theta_1(3, f_{2,2}) + 3\theta_2(3, f_{2,2}) \\ c(3, f_{3,4}) = 0 = 1\theta_1(3, f_{2,2}) + 6\theta_2(3, f_{2,2}) . \end{cases}$$

$$\begin{cases} c(3, f_{3,5}) = 0 = 1\theta_1(3, f_{2,3}) + 4\theta_2(3, f_{2,3}) \\ c(3, f_{3,6}) = 0 = 1\theta_1(3, f_{2,3}) + 5\theta_2(3, f_{2,3}) . \end{cases}$$

Para $t = 2$,

$$\begin{cases} c(2, f_{2,1}) = 0 = 0.9[\theta_1(2, f_{1,1}) - \theta_1(3, f_{2,1})] + 4.2[\theta_2(2, f_{1,2}) - \theta_2(3, f_{2,2})] . \end{cases}$$

$$\begin{cases} c(2, f_{2,2}) = 1 = 0.9[\theta_1(2, f_{1,2}) - \theta_1(3, f_{2,2})] + 4.2[\theta_2(2, f_{1,2}) - \theta_2(3, f_{2,2})] \\ c(2, f_{2,3}) = 0 = 0.909[\theta_1(2, f_{1,2}) - \theta_1(3, f_{2,3})] + 4.2[\theta_2(2, f_{1,2}) - \theta_2(3, f_{2,3})] . \end{cases}$$

Finalmente, para $t = 1$,

$$\begin{cases} c(1, f_{1,1}) = 0 = 0.81[\theta_1(1, f_0) - \theta_1(2, f_{1,1})] + 1.26[\theta_2(1, f_0) - \theta_2(2, f_{1,1})] \\ c(1, f_{1,2}) = 0 = 0.81[\theta_1(1, f_0) - \theta_1(2, f_{1,2})] + 3.75[\theta_2(1, f_0) - \theta_2(2, f_{1,2})] . \end{cases}$$

Note que existe uma equação para cada vértice intermediário e final da estrutura de informação e, cada um destes sistemas representa um modelo Uni-Período associado ao seu respectivo vértice. Ainda, observe que da maneira que foram estruturados os sistemas cada θ_t é $\mathfrak{F}_{t-1}$ mensurável.

Resolvendo estes sistemas encontramos a seguinte solução,

$$\begin{aligned} \theta_1(1, f_0) &= -0.1116 \\ \theta_2(1, f_0) &= 0.0717 . \end{aligned}$$

Portanto, o processo de consumo elementar $1_{\{2,f_{2,2}\}}$ é realizável e seu custo inicial é

$$0.729 \times \theta_1(1, f_0) + 2.4 \times \theta_2(1, f_0) = 0.0908 .$$

Finalmente poderíamos prosseguir verificando que todos os demais processos de consumo elementar são realizáveis e e assim concluir que este sistema de preços é completo!

Observe que todos os sistemas do exemplo anterior podem ser escritos na forma matricial. Por exemplo para $t = 2$ podemos escrever o sistema da seguinte forma,

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 4.2 \\ 0.909 & 4.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1(2, f_{1,2}) \\ \theta_2(2, f_{1,23}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

onde a e b são constantes que podem depender dos resultados dos sistemas calculados em $t = 3$ mas, a solução deste sistema só depende do número de linhas ou colunas linearmente independentes da matriz que representa os preços neste vértice.

Reverendo o processo de solução destes sistemas, torna-se evidente que a condição necessária e suficiente para realização dos processos de consumo elementar é que cada sistema que representa um modelo Uni-Período tenha solução. Em outras palavras, que os vetores de preços que descendem de um mesmo vértice sejam linearmente independentes.

Então, problemas surgirão somente quando os vetores de preços que descendem de um mesmo vértice forem linearmente dependentes.

Note que sem a presença de consumo intermediário o mercado no exemplo anterior não seria completo. Na verdade existem $K = 6$ estados e somente $\text{posto}(D) = 2$ títulos linearmente independentes.

Esta é a principal diferença entre o modelo Uni-Período e o modelo Multi-Período; ou seja, a possibilidade de negociação intermediária pode tornar todos os processos de consumo adaptados realizáveis com menos títulos linearmente independentes do que seriam necessários caso não existisse tal possibilidade.

A generalização do exemplo anterior leva-nos a um Teorema que caracteriza um sistema de preços completo no modelo Multi-Período.

Para cada $1 \leq t \leq T$ e $\omega \in \Omega$, denote por $D(t, \omega)$ a matriz

$$D(t, \omega) = \begin{pmatrix} p_1[t, f_{t-1}^1(\omega)] & \dots & p_N[t, f_{t-1}^1(\omega)] \\ \dots & \dots & \dots \\ p_1[t, f_{t-1}^{\nu(t-1, \omega)}(\omega)] & \dots & p_N[t, f_{t-1}^{\nu(t-1, \omega)}(\omega)] \end{pmatrix}_{\nu(t-1, \omega) \times N}$$

onde, $f_{t-1}^1(\omega), \dots, f_{t-1}^{\nu(t-1, \omega)}(\omega)$ são os conjuntos da partição $\mathfrak{F}_t$ que são subconjuntos do conjunto $f_{t-1}(\omega)$.

Teorema 2.5 Um sistema de preços adaptado $p_n(t)$ é completo se e somente se

$$\text{posto}[D(t, \omega)] = \nu(t-1, \omega)$$

para cada $1 \leq t \leq T$ e $\omega \in \Omega$.

Prova. A prova consiste em achar uma estratégia de negociação $\theta_n(\tau, \xi)$ que realize o consumo elementar adaptado $1_{\{t, f_t(\omega)\}}$ para $1 \leq t \leq T$ e $\omega \in \Omega$, isto é, a estratégia de negociação que satisfaça

$$\sum_{n=1}^N [\theta_n(\tau, \xi) - \theta_n(\tau + 1, \xi)] p_n(\tau, \xi) = 1_{\{t, f_t(\omega)\}}(\tau, \xi)$$

para todo $1 \leq \tau \leq T$ e $\xi \in \Omega$.

A solução destes sistemas segue a lógica do exemplo 2.3 e, a partir da discussão apresentada, fica claro que posto $[D(t, \omega)] = \nu(t-1, \omega)$ é uma condição necessária e suficiente para garantir a existência da solução e conseqüentemente a completude do mercado. $\square$

Corolário 2.2 Uma condição necessária, mas não suficiente, para um sistema de preços adaptados ser completo é que o número de títulos seja pelo menos tão grande quanto o índice de partição da estrutura de informação. $\square$

2.6 Processo de Valor

Nesta secção introduziremos uma série de novos conceitos e suas propriedades básicas. Estes conceitos são utilizados nos capítulos seguintes para caracterizar estratégias de negociação que não afetam o consumo intermediário, para definir o conjunto orçamento e para caracterizar processos de consumo realizáveis.

Considere que o j -ésimo título é uma renda fixa com uma taxa de juros constante r , isto é

$$d_j = (1 + r)^T .$$

$$p_j(t) = (1 + r)^t .$$

Antes de prosseguirmos com algumas definições, relembramos que $\theta_n(0) = \theta_n(T + 1) = 0$ para todo $1 \leq n \leq N$. Agora faremos as definições.

Definição 2.20 Sejam p um sistema de preços, e um processo de dotação, θ uma estratégia de negociação e, c um processo de consumo gerado pelo processo de dotação e e pela estratégia de negociação θ , dado o sistema de preços p . Definimos os seguintes conceitos:

1. O processo de dotação acumulado é a seqüência de somas

$$\sum_{s=0}^t e_s(\omega) .$$

2. O processo de dotação acumulado descontado é a seqüência de somas

$$\sum_{s=0}^t \frac{e_s(\omega)}{(1+r)^s} .$$

Este processo é conhecido como o valor presente da dotação.

3. O processo de consumo acumulado é a seqüência de somas

$$\sum_{s=0}^t c_s(\omega) .$$

4. O processo de consumo acumulado descontado é a seqüência de somas

$$\sum_{s=0}^t \frac{c_s(\omega)}{(1+r)^s} .$$

Este processo é conhecido como o valor presente do consumo.

5. O processo de valor de pré-consumo é a seqüência de somas

$$\sum_{n=1}^N \theta_{n,t}(\omega) p_{n,t}(\omega) .$$

Este é o valor do portfolio em t .

6. O processo de valor de pós-consumo é a seqüência de somas

$$\sum_{n=1}^N \theta_{n,t+1}(\omega) p_{n,t}(\omega) .$$

Este é o valor do investimento na carteira em t .

7. O processo de valor de pré-consumo descontado é a seqüência de somas

$$\sum_{n=1}^N \frac{\theta_{n,t}(\omega) p_{n,t}(\omega)}{(1+r)^t} .$$

8. O processo de valor de pós-consumo descontado é a sequência de somas

$$\sum_{n=1}^N \frac{\theta_{n,t+1}(\omega) p_{n,t}(\omega)}{(1+r)^t}.$$

9. O processo de ganho é a sequência de somatórias duplas

$$\sum_{s=1}^t \sum_{n=1}^N \theta_{n,s}(\omega) [p_{n,s}(\omega) - p_{n,s-1}(\omega)].$$

Na data $s-1$ o portfolio θ_s é formado com investimento de $p'_{s-1}\theta_s$. Em s os preços se alteraram e o novo valor do portfolio é $p'_s\theta_s$. Portanto o ganho (ou perda) no período corresponde a diferença dos dois valores como descrito na definição.

10. O processo de ganho descontado é a sequência de somatórias duplas

$$\sum_{s=1}^t \sum_{n=1}^N \theta_{n,s}(\omega) \left[\frac{p_{n,s}(\omega)}{(1+r)^s} - \frac{p_{n,s-1}(\omega)}{(1+r)^{s-1}} \right].$$

Agora mostraremos algumas identidades.

Teorema 2.6 Para todo $1 \leq t \leq T$, temos as seguintes identidades contábeis,

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{t-1} c_s + p'_t \theta_t &= \sum_{s=0}^{t-1} e_s + \sum_{s=1}^t [p_s - p_{s-1}]' \theta_s, \\ \sum_{s=0}^t c_s + p'_t \theta_{t+1} &= \sum_{s=0}^t e_s + \sum_{s=1}^t [p_s - p_{s-1}]' \theta_s. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Prova. Primeiro provaremos a primeira relação mostrando que podemos obter o lado direita da igualdade a partir dos termos à esquerda. Utilizando a equação do consumo acumulado até $t-1$ podemos escrever

$$\sum_{t=0}^{t-1} c_t = \sum_{t=0}^{t-1} e_t + \sum_{t=0}^{t-1} p'_t [\theta_t - \theta_{t+1}].$$

Substituindo a identidade acima no primeiro termo à esquerda da equação 2.4 encontramos,

$$\sum_{s=0}^{t-1} c_s + p'_t \theta_t = \sum_{s=0}^{t-1} e_s + \sum_{s=0}^{t-1} p'_s [\theta_s - \theta_{s+1}] + p'_t \theta_t,$$

como $\theta_0 = 0$ podemos rearranjar o lado direito da equação anterior para obter o resultado esperado; ou seja,

$$\sum_{s=0}^{t-1} e_s + p'_t \theta_t + \sum_{s=1}^{t-1} p'_s \theta_s - \sum_{s=1}^t p'_{s-1} \theta_s = \sum_{s=0}^{t-1} e_s + \sum_{s=1}^t [p_s - p_{s-1}]' \theta_s .$$

Portanto, está provada a primeira identidade.

Mostrar a segunda relação segue a mesma lógica. Primeiro considere a seguinte identidade,

$$\sum_{s=0}^t c_s + p'_t \theta_{t+1} = \sum_{s=0}^{t-1} c_s + c_t + p'_t \theta_{t+1} ,$$

utilizando a equação 2.4 podemos substituir $\sum_{s=0}^{t-1} c_s$ na equação anterior e obter

$$\sum_{s=0}^t c_s + p'_t \theta_{t+1} = \sum_{s=0}^{t-1} e_s + \sum_{s=1}^t [p_s - p_{s-1}]' \theta_s + c_t - p'_t \theta_t + p'_t \theta_{t+1} .$$

Finalmente, como $e_t = c_t - p'_t [\theta_t - \theta_{t+1}]$ temos,

$$\sum_{s=0}^t c_s + p'_t \theta_{t+1} = \sum_{s=0}^{t-1} e_s + \sum_{s=1}^t [p_s - p_{s-1}]' \theta_s + e_t = \sum_{s=0}^t e_s + \sum_{s=1}^t [p_s - p_{s-1}]' \theta_s .$$

Logo, está demonstrada a segunda identidade. $\square$

Utilizando as equações do consumo na forma descontada, encontramos a versão descontada do Teorema anterior.

Teorema 2.7 Para todo $1 \leq t \leq T$, temos as seguintes identidades contábeis:

$$\sum_{s=0}^{t-1} \frac{c_s}{(1+r)^s} + \frac{p'_t \theta_t}{(1+r)^t} = \sum_{s=0}^{t-1} \frac{e_s}{(1+r)^s} + \sum_{s=1}^t \left[\frac{p_s}{(1+r)^s} - \frac{p_{s-1}}{(1+r)^{s-1}} \right]' \theta_s ,$$

$$\sum_{s=0}^t \frac{c_s}{(1+r)^s} + \frac{p'_t \theta_{t+1}}{(1+r)^t} = \sum_{s=0}^t \frac{e_s}{(1+r)^s} + \sum_{s=1}^t \left[\frac{p_s}{(1+r)^s} - \frac{p_{s-1}}{(1+r)^{s-1}} \right]' \theta_s .$$

Prova. A prova deste teorema é análoga à do Teorema anterior e segue diretamente da definição do processo de consumo $c_t = e_t + p'_t [\theta_t - \theta_{t+1}]$ descontado por $(1+r)^t$. $\square$

Fazendo $e_1 = e_2 = \dots = e_T = 0$ nos Teoremas 2.6 e 2.7 e utilizando a equação do consumo na data 0, $c_0 = e_0 - p'_0\theta_1$, obtemos o próximo corolário que é uma caracterização alternativa de um sistema de preços completo. E, ainda serve como uma definição para o conjunto dos processos realizáveis tanto no modelo Multi-Período discreto quanto contínuo. Vejamos o corolário.

Corolário 2.3 Um processo de consumo $\{c_0, \dots, c_t\}$ é realizável se e somente se este satisfaz uma das duas condições equivalentes:

1. Para $2 \leq t \leq T$,

$$\sum_{s=1}^{t-1} c_s + p'_t\theta_t = p'_0\theta_1 + \sum_{s=1}^t [p_s - p_{s-1}]' \theta_s .$$

2. Para $2 \leq t \leq T$,

$$\sum_{s=1}^{t-1} \frac{c_s}{(1+r)^s} + \frac{p'_t\theta_t}{(1+r)^t} = p'_0\theta_1 + \sum_{s=1}^t \left[\frac{p_s}{(1+r)^s} - \frac{p_{s-1}}{(1+r)^{s-1}} \right]' \theta_s .$$

Em particular, um processo de consumo realizável satisfaz

$$\sum_{s=1}^T c_s = p'_0\theta_1 + \sum_{s=1}^T [p_s - p_{s-1}]' \theta_s$$

e, também,

$$\sum_{s=1}^T \frac{c_s}{(1+r)^s} = p'_0\theta_1 + \sum_{s=1}^T \left[\frac{p_s}{(1+r)^s} - \frac{p_{s-1}}{(1+r)^{s-1}} \right]' \theta_s$$

pois, $c_t = p'_T\theta_T$.

Em palavras, o processo de consumo acumulado total (descontado) é igual ao valor inicial somado ao ganho (descontado) total com a negociação. Note que o processo de consumo acumulado depende diretamente montante investido na data 0!

Prova. A prova deste corolário é direta da imposição $e_1 = e_2 = \dots = e_T = 0$ e do fato de $c_0 = e_0 - p'_0\theta_1$. $\square$

2.7 Estratégias Auto-Financiáveis

Dois conceitos ainda serão apresentados nesse Capítulo, são eles: as estratégias de arbitragem e as *estratégias auto-financiáveis*. A definição de arbitragem é a mesma do modelo Uni-Período: uma estratégia de arbitragem permite a um agente com processo de dotação nulo atingir um processo de consumo não negativo e não nulo. Como anteriormente, os agentes possuem preferência crescente; logo, arbitragem não existe em equilíbrio.

O outro conceito, diz respeito a um tipo de estratégia que envolve negociação intermediária mas, não afeta o consumo intermediário. A definição formal é a que segue.

Definição 2.21 Uma estratégia $\theta(t)$, é *auto-financiável* a preços $p(t)$, se e somente se para todo $1 \leq t \leq T - 1$

$$[\theta(t) - \theta(t+1)]' p(t) = 0 .$$

□

Um agente que utiliza estratégias auto-financiáveis consome em datas intermediárias exatamente sua dotação intermediária. Em outras palavras, uma estratégia auto-financiável é aquela que utiliza os resultados da negociação em t para formar seu novo portfólio.

Estratégias auto-financiáveis são importantes pois, podem ser utilizadas para caracterizar novos títulos. Vejamos como isto ocorre.

Suponha um sistema em equilíbrio; se o valor final de um título, d_{N+1} , pode ser replicado por uma estratégia auto-financiável com os demais títulos, isto é

$$d_{N+1} = \theta(T)' d . \quad (2.5)$$

Então o preço inicial desta título, $p_{N+1}(0)$, deve ser igual ao custo inicial desta estratégia

$$p_{N+1}(0) = \theta(1)' p(0) , \quad (2.6)$$

do contrário podemos construir uma estratégia de arbitragem, contradizendo a hipótese de equilíbrio. De fato, considere que $p_{N+1}(0) < \theta(1)' p(0)$.

Então, seja $\Psi \in \mathbb{R}^{N+1}$ uma estratégia definida por,

$$\Psi(t) = \begin{cases} -\theta_n(t) & \text{para } n = 1, \dots, N \\ \delta_n & \text{para } n = N + 1 \end{cases}$$

onde, δ_n é 1 em $N + 1$ e 0 nos outros casos, $0 \leq t \leq T$.

Seja $p(t)^*$ o vetor com os $N + 1$ preços, $0 \leq t \leq T$.

Note que a estratégia Ψ é previsível e auto financiável pois

$$c(t) = [\Psi(t) - \Psi(t+1)]' p(t)^* = -\theta(t)' p(t) + p_{N+1}(t) + \theta(t+1)' p(t) - p_{N+1}(t) = 0.$$

para $1 \leq t \leq T - 1$.

No instante $t = 0$ o consumo será dado por

$$c(0) = -\Psi_1' p_0^* = \theta(1)' p_0 - p_{N+1}(0) > 0 ,$$

e, data T o consumo final será dado por

$$c(T) = \Psi(T)' d^* = -\theta(T)' d + d_{N+1} = 0 .$$

Logo, Ψ é uma estratégia de arbitragem o que contradiz a hipótese de equilíbrio. Como o mesmo tipo de contradição pode ser obtido supondo $p_{N+1}(0) > \theta(1)' p(0)$ e uma estratégia Ψ apropriada. Temos que a equação 2.6 é verdadeira.

O próximo exemplo ilustra a propriedade descrita acima para calcular o preço de equilíbrio para uma opção de compra.

Exemplo 2.4 Suponha $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_8\}$, $T = 3$ e $N = 3$.

Os títulos 1 e 2 são definidas por seus pagamentos finais dados por:

$$\begin{aligned} d_1(\omega_k) &= 1.331 \text{ para todo } 1 \leq k \leq 8 , \\ d_2(\omega_k) &= 1.728 \text{ para } k = 1 , \\ d_2(\omega_k) &= 1.152 \text{ para } k = 2, 3, 5 , \\ d_2(\omega_k) &= 0.768 \text{ para } k = 4, 6, 7 , \\ d_2(\omega_k) &= 0.512 \text{ para } k = 8 . \end{aligned}$$

E o título número 3 é uma opção de compra sobre a título número 2 definida por

$$d_3 = \max(0, d_2 - 1) .$$

A evolução da estrutura de informação é dada por

$$\mathfrak{F}_1 = \{\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}\} = \{f_{1,1}, f_{1,2}\} ,$$

$$\mathfrak{F}_2 = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}, \{\omega_5, \omega_6\}, \{\omega_7, \omega_8\}\} = \{f_{2,1}, f_{2,2}, f_{2,3}, f_{2,4}\} .$$

Suponha que os preços de equilíbrio para as títulos 1 e 2 são os que seguem

$$\begin{aligned}
p_1(0) &= 1, & p_2(0) &= 1, \\
p_1(1, f_{1,1}) &= 1.1, & p_2(1, f_{1,1}) &= 1.2, \\
p_1(1, f_{1,2}) &= 1.1, & p_2(1, f_{1,2}) &= 0.8, \\
p_1(2, f_{2,1}) &= 1.21, & p_2(2, f_{2,1}) &= 1.44, \\
p_1(2, f_{2,2}) &= 1.21, & p_2(2, f_{2,2}) &= 0.96, \\
p_1(2, f_{2,3}) &= 1.21, & p_2(2, f_{2,3}) &= 0.96, \\
p_1(2, f_{2,4}) &= 1.21, & p_2(2, f_{2,4}) &= 0.64.
\end{aligned}$$

É fácil verificar que todos pares de vetores que descendem de um mesmo vértice são linearmente independentes, logo, este sistema de preços é completo.

Então, o processo de consumo representado pela opção de compra é realizável por uma estratégia auto-financeável, isto pode ser visto como a solução de um sistema de catorze equações.

Em $t = 3$, temos oito equações do tipo $d_{N+1} = d' \theta_T$, onde $d_{N+1} = \max(0, d_2 - 1)$

$$\begin{aligned}
\max(0, 1.728 - 1) &= 1.331\theta_1(3, f_{2,1}) + 1.728\theta_2(3, f_{2,1}), \\
\max(0, 1.152 - 1) &= 1.331\theta_1(3, f_{2,1}) + 1.152\theta_2(3, f_{2,1}), \\
\max(0, 1.152 - 1) &= 1.331\theta_1(3, f_{2,2}) + 1.152\theta_2(3, f_{2,2}), \\
\max(0, 0.768 - 1) &= 1.331\theta_1(3, f_{2,2}) + 0.768\theta_2(3, f_{2,2}), \\
\max(0, 1.152 - 1) &= 1.331\theta_1(3, f_{2,3}) + 1.152\theta_2(3, f_{2,3}), \\
\max(0, 0.768 - 1) &= 1.331\theta_1(3, f_{2,3}) + 0.768\theta_2(3, f_{2,3}), \\
\max(0, 0.768 - 1) &= 1.331\theta_1(3, f_{2,4}) + 0.768\theta_2(3, f_{2,4}), \\
\max(0, 0.512 - 1) &= 1.331\theta_1(3, f_{2,4}) + 0.512\theta_2(3, f_{2,4}),
\end{aligned}$$

cuja solução é

$$\begin{aligned}
\theta_1(3, f_{2,1}) &= -0.7513, \theta_2(3, f_{2,1}) = 1, \\
\theta_1(3, f_{2,2}) &= -0.2284, \theta_2(3, f_{2,2}) = 0.3958, \\
\theta_1(3, f_{2,3}) &= -0.2284, \theta_2(3, f_{2,3}) = 0.3958, \\
\theta_1(3, f_{2,4}) &= 0, \theta_2(3, f_{2,4}) = 0.
\end{aligned}$$

Em $t = 2$ temos quatro equações do tipo $p'_t[\theta_t - \theta_{t+1}] = 0$, como θ_{t+1} já foi calculado anteriormente temos

$$\begin{aligned} 0.5309 &= 1.21\theta_1(2, f_{1,1}) + 1.41\theta_2(2, f_{1,1}) , \\ 0.1036 &= 1.21\theta_1(2, f_{1,1}) + 0.96\theta_2(2, f_{1,1}) , \\ 0.1036 &= 1.21\theta_1(2, f_{1,2}) + 0.96\theta_2(2, f_{1,2}) , \\ 0 &= 1.21\theta_1(2, f_{1,2}) + 0.64\theta_2(2, f_{1,2}) , \end{aligned}$$

cuja solução é

$$\begin{aligned} \theta_1(2, f_{1,1}) &= -0.6206 , \theta_2(2, f_{1,1}) = 0.8902 , \\ \theta_1(2, f_{1,2}) &= -0.1713 , \theta_2(2, f_{1,2}) = 0.3239 . \end{aligned}$$

Finalmente para $t = 1$ temos duas equações

$$\begin{aligned} 0.3855 &= 1.1\theta_1(1, f_0) + 1.2\theta_2(1, f_0) , \\ 0.3239 &= 1.1\theta_1(1, f_0) + 0.8\theta_2(1, f_0) . \end{aligned}$$

cuja solução é

$$\begin{aligned} \theta_1(1, f_0) &= -0.5083 , \\ \theta_2(1, f_0) &= 0.7872 . \end{aligned}$$

Como a estratégia θ é auto-financeável e replica a opção de compra, o preço inicial de equilíbrio desta opção é igual ao custo inicial dessa estratégia, ou seja,

$$p_3(0) = 1 \times (-0.5083) + 1 \times 0.7872 = 0.2789 .$$

Para finalizar este capítulo apresentaremos uma maneira alternativa de caracterizar uma estratégia auto-financeável baseada nos Teoremas 2.6 e 2.7.

Teorema 2.8 Uma estratégia auto-financeável pode ser caracterizada por uma das duas maneiras equivalentes a seguir.

1. Uma estratégia $\theta_n(t)$ é auto-financeável a preços $p_n(t)$ se e somente se

$$\sum_{n=1}^N \theta_n(t)p_n(t) = \sum_{n=1}^N \theta_n(1)p_n(0) + \sum_{s=1}^t \sum_{n=1}^N \theta_n(s)[p_n(s) - p_n(s-1)]$$

para cada $1 \leq t \leq T$.

2. Uma estratégia $\theta_n(t)$ é auto-financiável a preços $p_n(t)$ se e somente se

$$\sum_{n=1}^N \frac{\theta_n(t)p_n(t)}{(1+r)^t} = \sum_{n=1}^N \theta_n(1)p_n(0) + \sum_{s=1}^t \sum_{n=1}^N \theta_n(s) \left[\frac{p_n(s)}{(1+r)^s} - \frac{p_n(s-1)}{(1+r)^{s-1}} \right]$$

para cada $1 \leq t \leq T$.

Prova. A prova segue imediatamente da substituição da condição que define uma estratégia auto-financiável, $c(1) = c(2) = \dots = c(T-1) = 0$ e da definição de $c(0)$ nos Teoremas 2.6 e 2.7. $\square$

Capítulo 3

Medidas de Preço do Equilíbrio no Modelo Multi-Período

3.1 Medida de Preço do Equilíbrio

Nesse Capítulo analisamos a medida de preço de equilíbrio no modelo Multi-Período e as extensões desse conceito. Da análise, fica claro que a medida de preço do equilíbrio no modelo Multi-Período é uma extensão do mesmo conceito no modelo Uni-Período.

Como anteriormente, medidas de preço de equilíbrio são derivadas do sistema de preços e constituem uma medida de probabilidade artificial. Sua existência está condicionada a um sistema de preços que não permite estratégias de arbitragem e, a unicidade, por sua vez, está condicionada a um sistema de preços completo. Em seguida, mostramos que, relativo a uma medida de preço de equilíbrio, todos os preços são expectativas condicionais dos valores finais, dada a informação disponível, descontados pela taxa de juros.

Em geral, para obter resultados no modelo Multi-Período, analisamos, o modelo Multi-Período como uma série de modelos Uni-Período independentes e, a partir desses resultados, construímos o resultado para o modelo Multi-Período. Em outras palavras, os resultados do modelo Multi-Período são funções dos modelos Uni-Período que o compõem. Então podemos utilizar os resultados obtidos para o modelo Uni-Período para estender os conceitos para o caso Multi-Período.

A construção de uma medida de preço de equilíbrio neste modelo é uma

modificação natural do modelo Uni-Período que utiliza o procedimento descrito acima. De forma genérica, para definir a medida de preço de equilíbrio no modelo Multi-Período, utilizamos a definição usual dessa medida para o modelo Uni-Período e, então, definimos a medida de preço de equilíbrio no modelo Multi-Período como a multiplicação das medidas de preço de equilíbrio dos modelos Uni-Período. Dessa maneira, essas últimas tornam-se valores condicionais da medida para o modelo Multi-Período.

A seguir esses conceitos serão desenvolvidos com mais rigor porém, antes, façamos algumas considerações. Vamos supor que o título número 1 é uma renda fixa, isto é, para $1 \leq t \leq T$ o valor do título é $p_1(t) = (1 + r)^t$.

Considere os preços e as estratégias de negociação como vetores no espaço linear apropriado. Denotamos esses vetores por $p(t)$, $\theta(t)$ ou ainda p_t , θ_t . Como definida no capítulo anterior, seja $D(t, \omega)$ a matriz

$$D(t, \omega) = \begin{pmatrix} p_1[t, f_{t-1}^1(\omega)] & \dots & p_N[t, f_{t-1}^1(\omega)] \\ \dots & \dots & \dots \\ p_1[t, f_{t-1}^{\nu(t-1, \omega)}(\omega)] & \dots & p_N[t, f_{t-1}^{\nu(t-1, \omega)}(\omega)] \end{pmatrix}_{\nu(t-1, \omega) \times N}$$

Ainda, seja $Q[t, \omega]$, $1 \leq t \leq T$, um vetor de $\mathbb{R}^{\nu(t-1, \omega)}$ cujos elementos são os elementos do *split* de $f_{t-1}(\omega)$; ou seja,

$$Q[t, \omega] = \begin{pmatrix} Q[t, f_{t-1}^1(\omega)] \\ \vdots \\ Q[t, f_{t-1}^{\nu(t-1, \omega)}(\omega)] \end{pmatrix}$$

onde, $s(f_{t-1}(\omega)) = \{f_{t-1}^1(\omega), \dots, f_{t-1}^{\nu(t-1, \omega)}(\omega)\}$.

A seguir vejamos a definição da medida de preço do equilíbrio para o modelo Multi-Período.

Definição 3.1 Se, para um sistema de preços p e para todo $1 \leq t \leq T$ o sistema de equações lineares

$$D'(t, \omega)Q[t, \omega] = (1 + r)p(t - 1, \omega) \quad (3.1)$$

tiver solução positiva $Q[t, f_{t-1}^j(\omega)] > 0$ para todo $1 \leq j \leq \nu(t - 1, \omega)$, então, definimos pela expressão

$$Q(\omega) = \prod_{t=1}^T Q[t, f_t(\omega)]. \quad (3.2)$$

a medida de preço do equilíbrio para o sistema de preços p . $\square$

Note que a equação 3.1 é, na verdade, uma representação da seguinte equação

$$p(t-1, w) = \frac{1}{1+r} E_{Q(t, \omega)}[p(t, \omega)] .$$

Em outras palavras, a medida de preço do equilíbrio é a medida de probabilidade que faz com que o valor esperado dos preços no instante t descontados pela taxa de retorno sem risco seja exatamente o preço no instante $t-1$.

O próximo exemplo ilustra a definição.

Exemplo 3.1 Seja $K = 7$ o número de estados do espaço Ω , $T = 3$ a data terminal e $N = 3$ o número de títulos. A estrutura de informação é dada por

$$\mathfrak{S}_1 = \{\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}, \{\omega_6, \omega_7\}\} = \{f_{1,1}, f_{1,2}\} ,$$

$$\mathfrak{S}_2 = \{\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{\omega_4, \omega_5\}, \{\omega_6, \omega_7\}\} = \{f_{2,1}, f_{2,2}, f_{2,3}\} .$$

Utilizando a matriz de valores finais, o valor final dos títulos é representado por,

$$D = \begin{pmatrix} 1.331 & 60 & 120 \\ 1.331 & 30 & 48 \\ 1.331 & 20 & 60 \\ 1.331 & 40 & 50 \\ 1.331 & 40 & 40 \\ 1.331 & 21 & 24 \\ 1.331 & 24 & 21 \end{pmatrix}$$

e, os preços dos títulos por

$$\begin{aligned} p_1(0) &= 1 , & p_2(0) &= 21.64 , & p_3(0) &= 25.02 , \\ p_1(1, f_{1,1}) &= 1.1 , & p_2(1, f_{1,1}) &= 30.99 , & p_3(1, f_{1,1}) &= 41.53 , \\ p_1(1, f_{1,2}) &= 1.1 , & p_2(1, f_{1,2}) &= 19.01 , & p_3(1, f_{1,2}) &= 18.88 , \\ p_1(2, f_{2,1}) &= 1.21 , & p_2(2, f_{2,1}) &= 27.27 , & p_3(2, f_{2,1}) &= 60 , \\ p_1(2, f_{2,2}) &= 1.21 , & p_2(2, f_{2,2}) &= 36.36 , & p_3(2, f_{2,2}) &= 40.91 , \\ p_1(2, f_{2,3}) &= 1.21 , & p_2(2, f_{2,3}) &= 20.91 , & p_3(2, f_{2,3}) &= 20 . \end{aligned}$$

Da lista de preços é evidente que o título número 1 é uma renda fixa com taxa $r = 10\%$.

A partição do conjunto $f_0(\omega)$ é $s(f_0(\omega)) = \{f_{1,1}, f_{1,2}\}$. Para $\omega \in f_{1,1}$ a partição é dada por $s(f_{1,1}(\omega)) = \{f_{2,1}, f_{2,2}\}$ e, para $\omega \in f_{1,2}$ temos $s(f_{1,2}(\omega)) = \{f_{2,3}\}$.

A matriz $D(1, \omega)$ é a mesma para todo ω (sempre será). E, sua dimensão é $\nu(0, \omega) \times N$; nesse exemplo, 2×3 .

$$D(1, \omega) = \begin{pmatrix} 1.1 & 30.99 & 41.53 \\ 1.1 & 19.01 & 18.18 \end{pmatrix}$$

Para calcular o vetor de probabilidades $Q[1, \omega]$, onde

$$Q[1, \omega] = \begin{pmatrix} Q(1, f_{1,1}) \\ Q(1, f_{1,2}) \end{pmatrix}$$

devemos resolver o seguinte sistema de equações lineares

$$D'(1, \omega)Q[1, \omega] = (1 + r)p(t - 1, \omega)$$

Na forma matricial, este sistema é escrito como

$$\begin{pmatrix} 1.1 & 1.1 \\ 30.99 & 19.01 \\ 41.53 & 18.18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q(1, f_{1,1}) \\ Q(1, f_{1,2}) \end{pmatrix} = 1.1 \begin{pmatrix} 1 \\ 21.64 \\ 25.02 \end{pmatrix}$$

e, sua solução é dada por

$$Q(1, f_{1,1}) = \frac{2}{5}, Q(1, f_{1,2}) = \frac{3}{5}.$$

Continuando com o procedimento, resolvemos dois sistemas (dois modelos Uni-Período) para $t = 2$ cujas soluções são dadas por

$$Q(2, f_{2,1}) = \frac{1}{4}, Q(2, f_{2,2}) = \frac{3}{4};$$

$$Q(2, f_{2,3}) = 1.$$

e, três sistemas para $t = 3$, cujas soluções são

$$Q(3, \omega_1) = \frac{1}{6}, Q(3, \omega_2) = \frac{1}{3}, Q(3, \omega_3) = \frac{1}{2};$$

$$Q(3, \omega_4) = \frac{1}{2}, Q(3, \omega_5) = \frac{1}{2};$$

$$Q(3, \omega_6) = \frac{1}{3}, Q(3, \omega_7) = \frac{2}{3}.$$

Como todas as soluções são positivas, existe uma medida de preço de equilíbrio. Logo, utilizando a equação 3.2 esta medida é

$$\begin{aligned} Q(\omega_1) &= \frac{2}{35} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{60}; \\ Q(\omega_2) &= \frac{2}{35} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{30}; \\ Q(\omega_3) &= \frac{2}{35} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{20}; \\ Q(\omega_4) &= \frac{2}{35} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{20}; \\ Q(\omega_5) &= \frac{2}{35} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{20}; \\ Q(\omega_6) &= \frac{2}{35} \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}; \\ Q(\omega_7) &= \frac{2}{35} \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Note que $\sum_{k=1}^K Q(\omega_k) = 1$.

Como no modelo Uni-Período, todas as medidas de preço de equilíbrio são medidas de probabilidade artificiais no espaço Ω .

Resta mostrar que Q é uma medida de probabilidade.

Antes, porém, vejamos alguns resultados intermediários. Recordemos que o título número 1 é uma renda fixa com taxa de juros constante, logo, a primeira equação, ou a primeira restrição sobre cada um dos modelos Uni-Período que compõe o modelo Multi-período é dada por

$$\sum_{j=1}^{\nu(t-1, \omega)} p_1(t, f_{t-1}^j(\omega)) Q[t, f_{t-1}^j(\omega)] = (1+r)p_1(t-1, \omega). \quad (3.3)$$

Como o título número 1 é uma renda fixa temos que

$$p_1(t, f_{t-1}^j(\omega)) = (1+r)p_1(t-1, \omega) \quad (3.4)$$

para todo $1 \leq j \leq \nu(t-1, \omega)$.

Logo, substituindo a relação acima na equação 3.3 temos,

$$\sum_{j=1}^{\nu(t-1, \omega)} Q[t, f_{t-1}^j(\omega)] = \frac{(1+r)p_1(t-1, \omega)}{(1+r)p_1(t-1, \omega)} = 1. \quad (3.5)$$

Retornando, para mostrar que Q é uma medida de probabilidade, duas condições devem ser satisfeitas. Primeiro $Q(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$. E, segundo que $\sum_{\omega \in \Omega} Q(\omega) = 1$.

Para mostrar a primeira condição note que $Q[t, f_t(\omega)] > 0$ para todo $1 \leq t \leq T$ e $\omega \in \Omega$; logo, segue imediatamente da definição, equação 3.2, que $Q(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$.

Para mostrar a segunda condição utilizaremos indução sobre T . Iniciando, para $T = 1$ então, $Q(\omega) = Q[1, f_1(\omega)] = Q[1, \{\omega\}]$ para todo $\omega \in \Omega$. Agora, pela equação 3.5 temos que $\sum_{j=1}^{\nu(\hat{t}-1, \hat{\omega})} Q[t, f_{\hat{t}-1}^j(\hat{\omega})] = 1$ para todo $\hat{\omega} \in \Omega$ e $\hat{t} \in [1, T]$.

Portanto, nesse caso é imediato que para $\hat{\omega} \in \Omega$, $\sum_{j=1}^{\nu(0, \hat{\omega})} Q[1, \{\omega_j\}] = 1$; e, como $\nu(0, \omega) = K$, segue o resultado esperado.

Para o caso geral, utilizamos a seguinte identidade,

$$\sum_{\omega \in \Omega} Q(\omega) \equiv \sum_{i=1}^{\nu(0, \hat{\omega})} \sum_{\omega \in f_0^i(\hat{\omega})} Q(\omega)$$

para um $\hat{\omega} \in \Omega$.

Então, utilizando a equação 3.5 e a igualdade $f_1(\omega) = f_0^i(\hat{\omega})$ se $\omega \in f_0^i(\hat{\omega})$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega} Q(\omega) &= \sum_{i=1}^{\nu(0, \hat{\omega})} \sum_{\omega \in f_0^i(\hat{\omega})} \prod_{t=1}^T Q[t, f_t(\omega)] \\ &= \sum_{i=1}^{\nu(0, \hat{\omega})} \sum_{\omega \in f_0^i(\hat{\omega})} Q[1, f_1(\omega)] \prod_{t=2}^T Q[t, f_t(\omega)] \\ &= \sum_{i=1}^{\nu(0, \hat{\omega})} \sum_{\omega \in f_0^i(\hat{\omega})} Q[1, f_0^i(\hat{\omega})] \prod_{t=2}^T Q[t, f_t(\omega)] \\ &= \sum_{i=1}^{\nu(0, \hat{\omega})} Q[1, f_0^i(\hat{\omega})] \sum_{\omega \in f_0^i(\hat{\omega})} \prod_{t=2}^T Q[t, f_t(\omega)]. \end{aligned}$$

Assuma que a relação seja verdadeira para $T - 1$. Da observação que a partir de cada $f_0^i(\hat{\omega})$, utilizando a relação 3.4, podemos montar um novo modelo com $T - 1$ períodos, apenas sem que p_1 tenha valor inicial 1 temos,

$$\sum_{\omega \in \Omega} Q(\omega) = \sum_{i=1}^{\nu(0, \hat{\omega})} Q[1, f_0^i(\hat{\omega})].$$

Então, segue imediatamente da equação 3.5 que $\sum_{\omega \in \Omega} Q(\omega) = 1$. Logo, a relação é verdadeira para um T qualquer e, Q é uma medida de probabilidade sobre ω .

Note que da análise anterior podemos concluir que a partir de qualquer vértice (t, ω) da estrutura de informação existe um modelo com $(T - t)$ períodos que dele se origina.

Ou seja, para todo $f_t(\omega) \in \mathfrak{F}_t$ temos que

$$\sum_{\xi \in f_t(\omega)} Q(\xi) = \sum_{\xi \in f_t(\omega)} \prod_{s=t+1}^T Q[s, f_s(\xi)] = 1 \quad (3.6)$$

Esses fatos, levam-nos a concluir que uma medida de preço de equilíbrio no modelo Multi-Período é um produto de probabilidades condicionais, como veremos a seguir.

Antes, apresentamos a definição de *expectativa condicional* e mostramos que a probabilidade condicional é um caso especial dessa definição.

Definição 3.2 Para uma variável aleatória x sobre um espaço de probabilidades (Ω, P) e partição $\mathfrak{F}$ de Ω , definimos a *expectativa condicional* de x dado $\mathfrak{F}$, denotada por $E_P[x|\mathfrak{F}]$, como uma variável aleatória que satisfaz às seguintes condições,

1. $E_P[x|\mathfrak{F}]$ é $\mathfrak{F}$ mensurável.
- 2.

$$\int_f x \, dP = \int_f E_P[x|\mathfrak{F}] \, dP$$

para todo $f \in \mathfrak{F}$.

□

Continuando, mostramos uma propriedade que nos fornece uma fórmula para calcular a expectativa condicional. Afirmamos que

$$E_P[x|\mathfrak{F}] = \sum_{f \in \mathfrak{F}} \left(\frac{1}{P(f)} \int_f x \, dP \right) 1_f. \quad (3.7)$$

Vejamos porque essa afirmação é verdadeira. Considere $f \in \mathfrak{F}$ logo, para $\zeta \in f$, a primeira condição da definição 3.2 temos que $E_P[x|\mathfrak{F}](\zeta) = \text{cte}$. Então, sobre f , a segunda condição assegura que

$$\int_f x \, dP = \int_f E_P[x|\mathfrak{F}] \, dP = E_P[x|\mathfrak{F}]P(f).$$

Generalizando para todo $f \in \mathfrak{F}$ encontramos a equação 3.7. Ainda, sob a forma discreta, para um $\omega \in \Omega$ a equação 3.7 fica,

$$E_P[x|\mathfrak{F}](\omega) = \frac{1}{\mathfrak{F}(\omega)} \sum_{\zeta \in \mathfrak{F}(\omega)} x(\zeta)P(\zeta).$$

Finalmente, para um evento g sobre o espaço de probabilidades (Ω, P) e partição $\mathfrak{F}$ de Ω , a expectativa condicional da função indicadora de g dado $\mathfrak{F}$ define a *probabilidade condicional* de g dado $\mathfrak{F}$. Denote $P[g|\mathfrak{F}]$ essa probabilidade então,

$$P[g|\mathfrak{F}] = E[1_g|\mathfrak{F}] = \sum_{f \in \mathfrak{F}} \left(\frac{1}{P(f)} \int_f 1_g dP \right) 1_f.$$

E, sob a forma discreta, para $\omega \in \Omega$ a equação acima fica

$$P[g|\mathfrak{F}](\omega) = \frac{1}{P(\mathfrak{F}(\omega))} \sum_{\zeta \in \mathfrak{F}(\omega)} 1_g(\zeta)P(\zeta) = \frac{1}{P(\mathfrak{F}(\omega))} P(g \cap \mathfrak{F}(\omega)).$$

Note que a probabilidade condicional é $\mathfrak{F}$ mensurável e que esse conceito define simultaneamente a probabilidade $P(g|f^j)$ onde, os f^j são os elementos de $\mathfrak{F}$.

Vejamos um exemplo de expectativa condicional e um de probabilidade condicional.

Exemplo 3.2 Seja, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_5\}$, $P(\omega_k) = \frac{1}{5}$ para $k = 1, \dots, 5$. Definimos a partição como

$$\mathfrak{F} = \{\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5\}, \{\omega_4\}\} = \{f_1, f_2\}$$

e, seja $g = \{\omega_4, \omega_5\}$. Então,

$$P[g|\mathfrak{F}](\omega) = \begin{cases} \frac{P[g \cap \mathfrak{F}(\omega_5)=\omega_5]}{P(\mathfrak{F}(\omega_5)=f_1)} = \frac{1/5}{4/5} = \frac{1}{4} \text{ se } \omega \in f_1, \\ \frac{P[g \cap \mathfrak{F}(\omega_4)=\omega_4]}{P(\mathfrak{F}(\omega_4)=f_2)} = \frac{1/5}{1/5} = 1 \text{ se } \omega = \omega_4. \end{cases}$$

Note que não há como distinguir entre os resultados de $P[g|\mathfrak{F}](\omega_k)$ para $k = 1, 2, 3, 5$.

Exemplo 3.3 Considere as mesmas condições do exemplo anterior e,

$$x(\omega_1) = 1, x(\omega_2) = 1, x(\omega_3) = 2, x(\omega_4) = 3, x(\omega_5) = 2.$$

Então,

$$E_P[x|\mathfrak{F}](\omega_1) = \frac{(1 + 1 + 2 + 2)/5}{4/5} = \frac{3}{2},$$

note que esse resultado é o mesmo para todos elementos de $\mathfrak{F}(\omega_1) = f_1$.

E,

$$E_P[x|\mathfrak{F}](\omega_4) = \frac{3/5}{1/5} = 3.$$

O próximo Teorema diz que calcular a expectativa condicional dada uma partição e em seguida calcula a expectativa desse resultado dada uma partição mais grossa que a primeira é o mesmo que calcular a expectativa condicional dada a partição mais grossa somente.

Teorema 3.1 (*Lei das Expectativas Iteradas*). Se uma partição F é mais grossa que uma partição G , então para qualquer variável aleatória x

$$E_P[E_P(x|G)|F] = E_P[x|F].$$

Prova. Seja E um evento de F . Utilizando a definição de expectativa condicional, mostrar a relação acima é equivalente a mostrar que

$$\int_E E_P[x|F] dP = \int_E x dP = \int_E E[E[x|G]|F] dP. \quad (3.8)$$

Definindo $E[x|G] = z$, temos que a integral à direita na equação 3.8 pode ser escrita como

$$\int_E E[z|F] dP = \int_E z dP = \int_E E[x|G] dP$$

pois, z é F mensurável e constante em E .

Agora, como G é mais fino que F , E pode ser escrito como uma união de elementos disjuntos de G ; ou seja, $E = \cup H_j$, $H_j \in G$ logo,

$$\int_E E[x|G] dP = \sum_j \int_{H_j} E[x|G] dP.$$

Novamente, como x é G mensurável e conseqüentemente constante em H_j , temos que a equação anterior se resume a

$$\sum_j \int_{H_j} x dP = \int_E x dP .$$

Portanto, está demonstrado o Teorema. $\square$

Após essas considerações, apresentamos o Teorema que mostra que a medida de preço de equilíbrio, definida pela equação 3.2, é um produto de probabilidades condicionais.

Teorema 3.2 Afirmamos que

$$Q[f_t(\omega)|\mathfrak{F}_{t-1}](\omega) = Q[t, f_t(\omega)]$$

para todo $1 \leq t \leq T$ e $\omega \in \Omega$.

Prova. Utilizando as definições de probabilidade condicional e a de medida de preço do equilíbrio temos,

$$\begin{aligned} Q[f_t(\omega)|\mathfrak{F}_{t-1}](\omega) &= \frac{Q[f_t(\omega) \cap \mathfrak{F}_{t-1}(\omega)]}{Q[\mathfrak{F}_{t-1}(\omega)]} \\ &= \frac{Q[f_t(\omega)]}{Q[\mathfrak{F}_{t-1}(\omega)]} \\ &= \frac{\sum_{\zeta \in f_t(\omega)} Q(\zeta)}{\sum_{\eta \in \mathfrak{F}_{t-1}(\omega)} Q(\eta)} \\ &= \frac{\sum_{\zeta \in f_t(\omega)} \prod_{s=1}^T Q[s, f_s(\zeta)]}{\sum_{\eta \in \mathfrak{F}_{t-1}(\omega)} \prod_{s=1}^T Q[s, f_s(\eta)]} \\ &= \frac{\sum_{\zeta \in f_t(\omega)} \prod_{s=1}^t Q[s, f_s(\zeta)] \prod_{s=t+1}^T Q[s, f_s(\zeta)]}{\sum_{\eta \in \mathfrak{F}_{t-1}(\omega)} \prod_{s=1}^{t-1} Q[s, f_s(\eta)] \prod_{s=t}^T Q[s, f_s(\eta)]} . \end{aligned}$$

Como já foi observado, temos que a partir dos vértices $(t, f_t(\omega))$ e $(t-1, \mathfrak{F}_{t-1}(\omega))$ originam-se modelos Multi-Períodos reduzidos. Logo, pela equação 3.6 temos que,

$$\begin{aligned} \sum_{\zeta \in f_t(\omega)} \prod_{s=t+1}^T Q[s, f_s(\zeta)] &= 1 , \\ \sum_{\eta \in \mathfrak{F}_{t-1}(\omega)} \prod_{s=t}^T Q[s, f_s(\eta)] &= 1 . \end{aligned}$$

Ainda, note que dado um $\omega \in \Omega$, $f_s(\zeta) = f_s(\eta) = f_s(\omega)$ para $1 \leq s \leq t-1$ pois, para todo $\eta \in f_t(\omega)$ os elementos $\mathfrak{F}_s(\eta)$ são os mesmos que os $\mathfrak{F}_s(\zeta)$, $1 \leq s \leq t-1$, em vista que $\mathfrak{F}_{t-1}(\omega) \cap f_t(\omega) = f_t(\omega)$ e que $\mathfrak{F}_t$ é mais grossa que $\mathfrak{F}_{t+1}$, $0 \leq t \leq T$. Logo, com esses argumentos justificamos as seguintes passagens

$$\begin{aligned} Q[f_t(\omega)|\mathfrak{F}_{t-1}](\omega) &= \frac{\sum_{\zeta \in f_t(\omega)} \prod_{s=1}^t Q[s, f_s(\zeta)]}{\sum_{\eta \in \mathfrak{F}_{t-1}(\omega)} \prod_{s=1}^{t-1} Q[s, f_s(\eta)]} \\ &= \frac{\prod_{s=1}^{t-1} Q[s, f_s(\omega)] \sum_{\zeta \in \mathfrak{F}_t(\omega)} Q[t, f_t(\zeta)]}{\prod_{s=1}^{t-1} Q[s, f_s(\omega)]} \\ &= Q[t, f_t(\omega)] . \end{aligned}$$

□

Importantes propriedades da medida de preço de equilíbrio do modelo Uni-Período são estendidas para o modelo Multi-Período. Podemos demonstrar, embora não o façamos aqui, que valem os Teoremas abaixo.

Teorema 3.3 Existe uma medida de preços de equilíbrio se e somente se o sistema de preços dado p não permitir arbitragem. □

Corolário 3.1 Existe uma medida de preço de equilíbrio se e somente se o sistema de preços dado p for um sistema de preços de equilíbrio para alguma população de agentes com preferência contínua, convexa e crescente. □

Teorema 3.4 Se existe uma medida de preço de equilíbrio, esta será única se e somente se o sistema de preços for completo. □

A seguir, mostramos que relativo a uma medida de preço de equilíbrio todos os preços são expectativas condicionais dos valores finais, dada a informação disponível, descontados pela taxa de juros.

Teorema 3.5 Se Q é uma medida de preço de equilíbrio então,

$$p_n(t) = \frac{EQ[d_n|\mathfrak{F}_t]}{(1+r)^{T-t}}$$

para cada $1 \leq n \leq N$ e $0 \leq t \leq T$.

Prova. Seja $f_t(\omega) \in \mathfrak{S}_t$ e, $s(f_t(\omega)) = \{f_t^1, \dots, f_t^{\nu(t, \omega)}\}$. Recorde que

$$D'(t+1, \omega)Q(t+1, \omega) = (1+r)p(t, \omega) \quad (3.9)$$

Para um título n no vértice $f_t(\omega)$ a equação 3.9 é

$$\sum_{j=1}^{\nu(t, \omega)} p_n(t+1, f_t^j(\omega))Q(t+1, f_t^j(\omega)) = (1+r)p_n(t, f_t(\omega)),$$

ou, em notação matricial,

$$p_n'(t+1)Q(t+1) = (1+r)p_n(t).$$

Afirmamos que

$$p_n'(t+1)Q(t+1) = (1+r)p_n(t) = E_Q[p_n(t+1)|\mathfrak{S}_t] = (1+r)p_n(t)$$

para $0 \leq t \leq T-1$.

Então, vamos calcular $E_Q[p_n(t+1)|\mathfrak{S}_t]$. Sobre $f_t(\omega)$ temos que o valor de $p(t+1)$ é dado pela seguinte identidade,

$$p(t+1)(f_t(\omega)) \equiv \sum_{j=1}^{\nu(t, \omega)} \pi_j 1_{f_t^j}$$

onde, $\pi_j = p(t+1, f_t^j)$.

Segue que

$$\begin{aligned} E_Q[p_n(t+1)|\mathfrak{S}_t] &= E_Q \left[\sum_{j=1}^{\nu(t, \omega)} \pi_j 1_{f_t^j} | \mathfrak{S}_t \right] \\ &= \sum_{j=1}^{\nu(t, \omega)} \pi_j E_Q[1_{f_t^j} | \mathfrak{S}_t] \\ &= \sum_{j=1}^{\nu(t, \omega)} \pi_j Q[f_t^j | \mathfrak{S}_t]. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.2 temos que $Q[f_t^j | \mathfrak{S}_t] = Q(t+1, f_t^j)$. Logo,

$$E_Q[p_n(t+1)|\mathfrak{S}_t] = \sum_{j=1}^{\nu(t, \omega)} \pi_j Q(t+1, f_t^j) = (1+r)p(t, f_t(\omega))$$

e, conseqüentemente é verdadeira a afirmação. Reescrevendo, temos que

$$p_n(t) = \frac{E_Q[p_n(t+1)|\mathfrak{F}_t]}{(1+r)}. \quad (3.10)$$

Finalmente, utilizando a equação 3.10 de forma iterada e a lei das expectativas iteradas temos,

$$\begin{aligned} p_n(t) &= \frac{E_Q[p_n(t+1)|\mathfrak{F}_t]}{(1+r)} \\ &= \frac{E_Q\{E_Q[p_n(t+2)|\mathfrak{F}_{t+1}]|\mathfrak{F}_t\}}{(1+r)^2} \\ &= \frac{E_Q[p_n(t+2)|\mathfrak{F}_t]}{(1+r)^2} \dots, \end{aligned}$$

e, prosseguindo com esse processo obtemos o resultado esperado

$$p_n(t) = \frac{E_Q[d_n|\mathfrak{F}_t]}{(1+r)^{T-t}}$$

□

A prova desse Teorema sugere uma outra caracterização dos preços de equilíbrio em termos de uma medida de preço de equilíbrio Q . Para isso definimos o conceito de variável aleatória *martingal* e algumas propriedades.

Definição 3.3 Uma seqüência de variáveis aleatórias $x(t)$, $0 \leq t \leq T$ é uma *martingal* sobre a estrutura de informação $\{\mathfrak{F}_t\}$ e medida de probabilidade P se e somente se

$$E_P[x(t)|\mathfrak{F}_s] = x(s)$$

para todo $0 \leq s \leq t \leq T$.

□

Em palavras, para uma martingal, x , a expectativa condicional de seu valor futuro é seu próprio valor atual. Note que, por definição uma martingal é adaptada; ou seja, cada $x(s)$ é $\mathfrak{F}_s$ mensurável.

Note que, da definição anterior, podemos derivar algumas propriedades que, na verdade podem ser utilizadas para estabelecer condições necessárias e suficiente para uma variável aleatória, digamos x , ser martingal. De forma explícita temos que se x é um processo martingal então,

$$E_P[x_t|\mathfrak{F}_{t-1}] = x_{t-1}$$

para todo $\omega \in \Omega$. Rearranjando a equação acima temos,

$$E_P[x_t|\mathfrak{S}_{t-1}] - x_{t-1} = E_P[x_t - x_{t-1}|\mathfrak{S}_{t-1}] = E_P[dx_t|\mathfrak{S}_{t-1}] = 0 .$$

Então, se a expectativa condicional do incremento de uma variável aleatória for nula, essa variável é martingal.

Ainda, seja $f \in \mathfrak{S}_{t-1}$ e $s(f) = \{f^1, \dots, f^k\}$. Para $\omega \in f$, considerando a relação acima e a fórmula para calcular a expectativa condicional temos as seguintes equivalências

$$E_P[dx_t|\mathfrak{S}_{t-1}](\omega) = \frac{1}{P(f)} \int_f dx_t dP = 0 .$$

Como $dx_t = x_t - x_{t-1}$ podemos reescrever a equação acima para obter a seguinte relação,

$$\int_f x_t dP = \int_f x_{t-1} dP ,$$

ou, sob a forma discreta

$$x_{t-1}(f)P(f) = \sum_{i=1}^k x_t(f^i)P(f^i) .$$

Agora, note que $P(f) = \sum_{i=1}^k P(f^i)$ e $x_{t-1}(f) = \sum_{i=1}^k x_t(f^i)$. Substituindo esses valores na equação acima temos

$$\sum_{i=1}^k x_{t-1}(f^i)P(f^i) = \sum_{i=1}^k x_t(f^i)P(f^i) ,$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^k dx_t(f^i)P(f^i) = 0$$

Dessa análise, concluímos que a partir de um vértice qualquer da estrutura de informação o incremento de uma martingal é perpendicular à probabilidade; denotamos esse fato por

$$\langle dx_t, P \rangle (s(f)) = 0 . \quad (3.11)$$

Então, a equação 3.11 representa outra condição necessária e suficiente para x ser martingal.

Teorema 3.6 Se Q é uma medida de preço do equilíbrio então, para todo título n , $1 \leq n \leq N$, a seqüência de preços descontados é Q martingal, isto é

$$E_Q \left[\frac{p_n(t)}{(1+r)^t} | \mathfrak{F}_s \right] = \frac{p_n(s)}{(1+r)^s}$$

para todo $0 \leq s \leq t \leq T$.

Prova. Utilizando $p_n(t)$ dado pelo Teorema 3.5 e a lei das expectativas iteradas temos

$$E_Q \left[\frac{p_n(t)}{(1+r)^t} | \mathfrak{F}_s \right] = \frac{E_Q \{ E_Q [d_n | \mathfrak{F}_t] | \mathfrak{F}_s \}}{(1+r)^T}.$$

Como $\mathfrak{F}_s$ é mais grossa que $\mathfrak{F}_t$, a equação anterior se reduz a

$$\frac{E_Q [d_n | \mathfrak{F}_s]}{(1+r)^T} = \frac{p_n(s)(1+r)^{T-s}}{(1+r)^T} = \frac{p_n(s)}{(1+r)^s}.$$

□

Assim, se uma seqüência de preços descontados for uma Q -martingal, então este sistema de preços é um sistema de preços de equilíbrio.

A recíproca desse Teorema é dada a seguir.

Teorema 3.7 Se Q é uma medida de probabilidade tal que o processo de preços descontados é Q -martingal então, Q é uma medida de preço do equilíbrio.

Prova. Seja $f_{t-1}(\omega) \in \mathfrak{F}_{t-1}$ e $s(f_{t-1}(\omega)) = \{f_{t-1}^1(\omega), \dots, f_{t-1}^{\nu(t-1, \omega)}\}$. Mostraremos que para cada $f_{t-1}^j \in \mathfrak{F}_t$, $Q[t, f_{t-1}^j]$, $1 \leq j \leq \nu(t-1, \omega)$ define uma componente do vetor solução do sistema que define uma medida de preço do equilíbrio,

$$\sum_{j=1}^{\nu(t-1, \omega)} p_n[t, f_{t-1}^j(\omega)] Q[t, f_{t-1}^j(\omega)] = (1+r)p_n[t-1, f_{t-1}(\omega)],$$

$1 \leq n \leq N$, $1 \leq t \leq T$.

É evidente que cada $f_{t-1}^j(\omega)$ é um $f_t(\omega) \in \mathfrak{F}_t$.

Definimos $\tilde{Q}[t, f_t(\omega)] = \frac{Q[f_t(\omega)]}{Q[f_{t-1}(\omega)]}$, $1 \leq t \leq T$.

Mostraremos que o sistema

$$\sum_{j=1}^{\nu(t-1, \omega)} p_n[t, f_{t-1}^j(\omega)] \chi^j = (1+r)p_n[t-1, f_{t-1}(\omega)],$$

$1 \leq n \leq N$, tem solução dada por $\chi^j = \tilde{Q}[t, f_{t-1}^j(\omega)]$.

De fato como o processo de preços descontado é Q -martingal temos, $E_Q[p_{n,t}/(1+r)^t | \mathfrak{S}_{t-1}] = p_{n,t-1}/(1+r)^{t-1}$ ou ainda, $E_Q[p_{n,t} | \mathfrak{S}_{t-1}] = (1+r)p_{n,t-1}$. Então, sobre $f_{t-1}(\omega)$ temos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q[f_{t-1}(\omega)]} \int_{f_{t-1}(\omega)} p_{n,t} dQ &= (1+r)p_n[t-1, f_{t-1}(\omega)] \\ \sum_{j=1}^{\nu(t-1, \omega)} p_n[t, f_{t-1}^j(\omega)] \frac{Q[f_{t-1}^j(\omega)]}{Q[f_{t-1}(\omega)]} &= (1+r)p_n[t-1, f_{t-1}(\omega)]; \end{aligned}$$

ou seja, $\tilde{Q}[t, f_{t-1}^j(\omega)]$, $1 \leq j \leq \nu(t-1, \omega)$ é solução do sistema.

Então, fazendo $\tilde{Q}(\omega) = \prod_{t=1}^T \tilde{Q}[t, f_t(\omega)]$ temos que $\tilde{Q}(\omega) = \frac{Q[f_T(\omega)]}{Q[f_0(\omega)]} = Q(\omega)$, logo, está demonstrado o Teorema.

Ainda, podemos mostrar que $Q[t, f_t(\omega)] = \frac{Q[f_t(\omega)]}{Q[f_{t-1}(\omega)]}$. Pois, $Q[t, f_t(\omega)] = Q[f_t(\omega) | \mathfrak{S}_{t-1}](\omega)$, isto é,

$$Q[t, f_t(\omega)] = \frac{Q[f_t(\omega) \cap \mathfrak{S}_{t-1}(\omega)]}{Q[\mathfrak{S}_{t-1}(\omega)]} = \frac{Q[f_t(\omega)]}{Q[f_{t-1}(\omega)]},$$

logo $\tilde{Q}[t, f_t(\omega)] = Q[t, f_t(\omega)]$. □

Teorema 3.8 Afirmamos que soma dos processos de consumo cumulativo descontado e de valor de pré-consumo descontado,

$$\sum_{s=0}^{t-1} \frac{c(s)}{(1+r)^s} + \frac{\sum_{n=1}^N \theta_n(t) p_n(t)}{(1+r)^t}$$

para $1 \leq t \leq T$ é Q -martingal. Ainda, se a estratégia é auto financiável então o processo de valor descontado

$$\frac{\sum_{n=1}^N \theta_n(t) p_n(t)}{(1+r)^t}$$

para $1 \leq t \leq T$ é Q -martingal.

Prova. Utilizando a notação matricial, calculamos a expectativa condicional para $t = 1$,

$$\begin{aligned} E_Q \left[c(0) + \frac{\theta'(1)p(1)}{(1+r)} | \mathfrak{S}_0 \right] &= c(0) + \theta'(1) E_Q \left[\frac{p(1)}{(1+r)} | \mathfrak{S}_0 \right] \\ &= c(0) + \theta'(1)p(0), \end{aligned}$$

na última passagem utilizamos o Teorema 3.6. Logo, o processo é Q martingal para $t = 1$. Note que a mesma demonstração vale para estratégias auto financiáveis.

Resta mostrar que a relação é verdadeira para $2 \leq t \leq T$. Pelo Corolário 2.3 temos que

$$\sum_{s=0}^{t-1} \frac{c_s}{(1+r)^s} + \frac{p'_t \theta_t}{(1+r)^t} = p'_0 \theta_1 + \sum_{s=1}^t d \left(\frac{p'}{(1+r)^{\cdot}} \right)_s \theta_s$$

para $2 \leq t \leq T$.

Agora, $p'_0 \theta_1$ é uma variável aleatória constante, logo uma martingal. Então, resta somente calcular a expectativa condicional do outro termo à direita. Ou seja,

$$\begin{aligned} E_Q \left[\sum_{k=1}^t d \left(\frac{p'}{(1+r)^{\cdot}} \right)_k \theta_k | \mathfrak{S}_s \right] &= E_Q \left[\sum_{z=1}^s d \left(\frac{p'}{(1+r)^{\cdot}} \right)_z \theta_z | \mathfrak{S}_s \right] + \\ &\quad E_Q \left[\sum_{m=s+1}^t d \left(\frac{p'}{(1+r)^{\cdot}} \right)_m \theta_m | \mathfrak{S}_s \right] \\ &= \sum_{z=1}^s d \left(\frac{p'}{(1+r)^{\cdot}} \right)_z \theta_z + \\ &\quad \sum_{m=s+1}^t E_Q \left[d \left(\frac{p'}{(1+r)^{\cdot}} \right)_m \theta_m | \mathfrak{S}_s \right]. \end{aligned}$$

Então, para que o Teorema seja verdadeiro o segundo termo da equação acima deve ser nulo.

De fato,

$$E_Q \left[d \left(\frac{p'}{(1+r)^{\cdot}} \right)_m \theta_m | \mathfrak{S}_s \right] = 0.$$

pois, para $s \leq m - 1$ podemos utilizar a lei das expectativas iteradas e escrever

$$\begin{aligned} E_Q \left[d \left(\frac{p'_m}{(1+r)^m} \right) \theta_m | \mathfrak{F}_s \right] &= E_Q \left[E_Q \left[d \left(\frac{p'_m}{(1+r)^m} \right) \theta_m | \mathfrak{F}_{m-1} \right] | \mathfrak{F}_s \right] \\ &= E_Q \left[E_Q \left[d \left(\frac{p'_m}{(1+r)^m} \right) | \mathfrak{F}_{m-1} \right] \theta_m | \mathfrak{F}_s \right], \end{aligned}$$

onde, a última passagem segue do fato de θ_m ser previsível, ou seja, $\theta_m \in \mathfrak{F}_{m-1}$.

Finalmente, pelo Teorema 3.6 o processo $\frac{p'_m}{(1+r)^m}$ é Q martingal, logo a expectativa condicional do seu incremento é nula, ou seja,

$$E_Q \left[d \left(\frac{p'_m}{(1+r)^m} \right) | \mathfrak{F}_{m-1} \right] = 0.$$

Portanto, esta demonstrado o Teorema.

Ainda, pelo Teorema 2.8 temos que θ é uma estratégia auto-financiável se e somente se

$$\frac{p'_t \theta_t}{(1+r)^t} = p'_0 \theta_1 + \sum_{s=1}^t d \left(\frac{p'_s}{(1+r)^s} \right) \theta_s.$$

Então, argumentando como antes, segue imediatamente que o processo é uma Q martingal. $\square$

Revido esses resultados podemos dizer que Q é uma medida de probabilidade de ajustamento ao risco no modelo Multi-Período.

Para a medida real de probabilidade P , a representação de preços dada pelo Teorema 3.5 e a propriedade descrita pelo Teorema 3.6 e 3.7 permaneceriam verdadeiras num mercado populado por agentes neutros em relação ao risco.

A propriedade de ajustamento ao risco de Q faz estas representações verdadeiras com respeito a Q mesmo quando os agentes não são neutros em relação ao risco.

Ainda, o Teorema 3.8 garante que, após o ajustamento ao risco, a expectativa de retorno para qualquer estratégia de negociação é exatamente a taxa de retorno sem risco!

3.2 O Funcional de Preços

Nessa seção veremos que uma medida de preço de equilíbrio produz uma representação simples do funcional de preços. Como no modelo Uni-Período, o funcional de preços é definido como o custo inicial de um processo de consumo realizável.

Definição 3.4 O *funcional de preços*, $\phi : M(p) \rightarrow \mathfrak{R}$ é tal que para todo $c \in M(p)$

$$\phi(c) = c(0) + \sum_{n=1}^N \theta_n(1)p_n(0)$$

para qualquer estratégia $\theta_n(t)$ tal que

$$\sum_{n=1}^N [\theta_n(t) - \theta_n(t+1)]p_n(t) = c(t)$$

para todo $1 \leq t \leq T$; onde, como usual, $\theta_n(T+1) = 0$ e $p_n(T) = d_n$. $\square$

Como no modelo Uni-Período, o conjunto dos processos de consumo realizáveis, $M(p)$ é um espaço linear de vetores reais e ϕ , como definido acima, é um funcional linear em $M(p)$.

Continuando com as analogias, o funcional de preços tem uma representação em termos de uma medida de preço de equilíbrio qualquer. O próximo Teorema apresenta esta representação.

Teorema 3.9 Se um sistema de preços p não permite estratégias de arbitragem então, para todo $c \in M(p)$ e toda medida de preço de equilíbrio Q temos,

$$\phi(c) = \sum_{t=0}^T \frac{E_Q[c(t)]}{(1+r)^t}.$$

Prova. A idéia dessa prova é mostrar que é possível construir tal representação. Utilizando a definição do funcional de preços para o processo de consumo $c(t)$, $1 \leq t \leq T$ e a representação de preços do Teorema 3.5 para substituir $p(t)$, temos que

$$\begin{aligned} c(t) &= [\theta'(t) - \theta'(t+1)] \frac{E_Q[d|\mathfrak{S}_t]}{(1+r)^{T-t}} \\ &= \frac{E_Q[(\theta'(t) - \theta'(t+1))d|\mathfrak{S}_t]}{(1+r)^{T-t}}, \end{aligned}$$

a última passagem utilizamos o fato que $\theta(t)$ é $\mathfrak{F}_{t-1}$ mensurável.

Calculando a expectativa condicional em relação a $\mathfrak{F}_0$ temos

$$E_Q \left[\frac{c(t)}{(1+r)^t} | \mathfrak{F}_0 \right] = E_Q \left[\left(\frac{E_Q[(\theta'(t) - \theta'(t+1))d | \mathfrak{F}_t]}{(1+r)^T} \right) | \mathfrak{F}_0 \right]$$

ou seja,

$$\frac{E_Q[c(t)]}{(1+r)^t} = \frac{E_Q[(\theta'(t) - \theta'(t+1))d]}{(1+r)^T}.$$

Somando sobre t , $1 \leq t \leq T$ e considerando o termo c_0 em ambos os lados temos

$$\sum_{t=1}^T \frac{E_Q[c(t)]}{(1+r)^t} + c(0) = \frac{\sum_{t=1}^T E_Q[(\theta'(t) - \theta'(t+1))d]}{(1+r)^T} + c(0),$$

então, note que os termos intermediários e final da somatória no lado direito da equação acima se cancelam, restando somente o termo $\theta(1)$. Logo, temos o seguinte resultado,

$$\sum_{t=0}^T \frac{E_Q[c(t)]}{(1+r)^t} = c(0) + \frac{\theta'(1)E_Q[d]}{(1+r)^T}.$$

Finalmente, utilizando, mais uma vez, a representação de preços do Teorema 3.5 para substituir $E_Q[d]$, $E_Q[d] = \frac{p(0)}{(1+r)^T}$, na equação anterior obtemos o resultado esperado,

$$\sum_{t=0}^T \frac{E_Q[c(t)]}{(1+r)^t} = c(0) + \theta'(1)p(0) = \phi(c).$$

□

Dentre as várias utilidades da representação do funcional de preços em termos de uma medida de preço de equilíbrio, destacamos a simplificação que essa fórmula traz para o cálculo dos preços iniciais de equilíbrio de títulos realizáveis.

Como exemplo considere um sistema de preços completo; então, a medida de preço de equilíbrio é única e, para qualquer título $1 \leq n \leq N$ e qualquer número positivo a , a opção de compra (européia) sobre o título n com preço de exercício a é realizável.

Afirmamos que o preço inicial de equilíbrio desse título, digamos $p_k(0)$ é dado por,

$$p_k(0) = \frac{E_Q[\max\{(d_n - a), 0\}]}{(1 + r)^T}.$$

Vejamos o porque dessa afirmação. Como o sistema de preços é completo, qualquer processo de consumo adaptado é realizável. Então, existe $\theta(T)$ tal que $c(T) = \theta'(T)d$ replica qualquer consumo final. Em particular podemos considerar $c(T) = d_k = \max\{(d_n - a), 0\}$; o consumo final gerado por uma opção de compra.

Considere a estratégia auto financiável definida por $\theta(1) = \dots = \theta(T)$. Como essa estratégia replica um consumo final temos que seu custo inicial é dado por $c(0) = \theta'(1)p(0)$. No caso particular em questão, o consumo inicial é o preço inicial de equilíbrio da opção, $c(0) = p_k(0) = \theta'(1)p(0)$.

Então, utilizando a fórmula do Teorema 3.9 e as considerações acima, calculamos o funcional de preços; vejamos os passos,

$$\begin{aligned}\phi(c) &= \sum_{t=0}^T \frac{E_Q[c(t)]}{(1 + r)^t} \\ &= c(0) + \frac{E_Q[c(T)]}{(1 + r)^T} \\ &= c(0) + \frac{E_Q[\theta'(T)d]}{(1 + r)^T}.\end{aligned}$$

Recordando a definição do funcional de preços, $\phi(c) = c(0) + \theta'(1)p(0)$, temos

$$\theta'(1)p(0) = \frac{E_Q[\theta'(T)d]}{(1 + r)^T};$$

ou, no caso particular em consideração,

$$p_k(0) = \frac{E_Q[\max\{(d_n - a), 0\}]}{(1 + r)^T}.$$

Vejamos um exemplo que ilustra a utilização dessa representação.

Exemplo 3.4 Seja $K = 3$ o número de estados do espaço Ω , $N = 3$ o número de títulos no modelo e $T = 2$. A estrutura de informação é dada por

$$f_{1,1} = \{\omega_1, \omega_2\}, f_{1,2} = \{\omega_3\}.$$

A matriz de valores finais é

$$D = \begin{pmatrix} 32 & 22 & 10 \\ 16 & 12 & 10 \\ 12 & 14 & 10 \end{pmatrix}$$

Note que nesta economia o título número 3 é uma renda fixa com taxa de juros $r = 0\%$.

Finalmente, os preços intermediários e iniciais são dados por

$$\begin{aligned} p_1(0) &= 16, & p_2(0) &= 15, & p_3(0) &= 10, \\ p_1(1, f_{1,1}) &= 24, & p_2(1, f_{1,1}) &= 17, & p_3(1, f_{1,1}) &= 10, \\ p_1(1, f_{1,2}) &= 12, & p_2(1, f_{1,2}) &= 14, & p_3(1, f_{1,2}) &= 10. \end{aligned}$$

Afirmamos que o sistema de preços acima é um sistema de preço do equilíbrio. Logo, existe uma única medida de preço do equilíbrio e todo processo de consumo é realizável.

Para verificar a afirmação acima, considere os sistemas de equações lineares.

Para $t = 1$ temos

$$\begin{aligned} 24Q(1, f_{1,1}) + 12Q(1, f_{1,2}) &= 16, \\ 17Q(1, f_{1,1}) + 14Q(1, f_{1,2}) &= 15, \\ 10Q(1, f_{1,1}) + 10Q(1, f_{1,2}) &= 10. \end{aligned}$$

Para $t = 2$ temos

$$\begin{aligned} 32Q(2, \omega_1) + 16Q(2, \omega_2) &= 24 \quad ;, \\ 22Q(2, \omega_1) + 12Q(2, \omega_2) &= 17, \\ 10Q(2, \omega_1) + 10Q(2, \omega_2) &= 10, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12Q(2, \omega_3) &= 12, \\ 14Q(2, \omega_3) &= 14, \\ 10Q(2, \omega_3) &= 10. \end{aligned}$$

A solução destes sistemas é única. Explicitamente,

$$Q(1, f_{1,1}) = \frac{1}{3}, Q(1, f_{1,2}) = \frac{2}{3};$$

$$Q(2, \omega_1) = \frac{1}{2}, Q(2, \omega_2) = \frac{1}{2};$$

$$Q(2, \omega_3) = 1 .$$

Segue imediatamente que a medida de preço de equilíbrio é dada por

$$\begin{aligned} Q(\omega_1) &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} , \\ Q(\omega_2) &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} , \\ Q(\omega_3) &= \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3} . \end{aligned}$$

Acrescentamos à essa economia os títulos número 4, 5 e 6 com os seguintes valores finais

$$\begin{aligned} d_4 &= \max(0, d_2 - 13) , \\ d_5 &= \max(d_1, d_2) , \\ d_6 &= \max(p_2, d_2) . \end{aligned}$$

Note que o título 4 é uma opção de compra sobre o título 2. O título 5 é um título conversível que permite uma mudança entre os títulos 1 e 2. E, o título 6 tem como pagamento final uma dependência no preço histórico do título 2, sendo que seu preço final será o maior entre os valores histórico e final.

Os valores finais destes títulos são,

$$\begin{aligned} d_4(\omega_1) &= 9 , \quad d_4(\omega_2) = 0 , \quad d_4(\omega_3) = 1 ; \\ d_5(\omega_1) &= 32 , \quad d_5(\omega_2) = 16 , \quad d_5(\omega_3) = 14 ; \\ d_6(\omega_1) &= 22 , \quad d_6(\omega_2) = 17 , \quad d_6(\omega_3) = 14 . \end{aligned}$$

Então, a representação do funcional de preços em termos da medida de preço de equilíbrio fornece uma forma fácil para calcular os preços iniciais de equilíbrio destes títulos.

$$\begin{aligned} p_4(0) &= \frac{1}{6} \times 9 \frac{1}{6} \times 0 \frac{2}{3} \times 1 = 2 \frac{1}{6} , \\ p_5(0) &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} \times 1 = 17 \frac{1}{3} , \\ p_6(0) &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} \times 1 = 15 \frac{5}{6} . \end{aligned}$$

Finalizando esse Capítulo mostramos que para todo processo de dotação adaptado e o conjunto $B(e, p) - e$ de resultados líquido de negociação, ou seja, dos processos $c - e$ tal que $c \in B(e, p)$, é $B(0, p)$ logo, segue o seguinte resultado.

Teorema 3.10 Suponha que e é um processo de dotação adaptado, p é um sistema de preços e c um processo de consumo adaptado. Então, $c \in B(e, p)$ se e somente se $c - e \in B(0, p)$.

Prova. A prova deste teorema é imediata. Note que $c \in B(e, p)$ implica que existe uma seqüência previsível de variáveis aleatórias θ_t , $1 \leq t \leq T$ tal que para todo $0 \leq t \leq T$,

$$c_t = e_t + [\theta'_t - \theta'_{t+1}]p_t$$

onde, $\theta_0 = \theta_{T+1} = 0$. Portanto se definirmos um processo $x_t = c_t - e_t$, temos

$$x_t = [\theta'_t - \theta'_{t+1}]p_t$$

e, conseqüentemente $x \in B(0, p)$, ou seja $c - e \in B(0, p)$. A mesma análise, começando pela definição do processo x_t , pode ser feita para mostrar que se $c - e \in B(0, p)$ então $c \in B(e, p)$. $\square$

Capítulo 4

Cálculo Estocástico Discreto

4.1 Introdução

Nesse Capítulo desenvolvemos os conceitos básicos do cálculo estocástico discreto. Esses conceitos serão utilizados nos Capítulos seguintes para completar a teoria e desenvolver aplicações práticas do modelo Multi-Período discreto.

Considere, no decorrer do Capítulo, que o espaço de estados Ω é finito, $\{\mathfrak{S}_t\}$, $0 \leq t \leq T$ é uma estrutura de informação em Ω e, P e Q são medidas de probabilidade em Ω tal que $P(\omega) > 0$ e $Q(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$.

Definimos um *processo estocástico discreto* x como a seqüência de variáveis aleatórias $x(0), \dots, x(T)$ e, denotá-lo-emos $\{x_t\}$; ou ainda, x , $x(t)$ e x_t . Por sua vez, a realização do processo x em uma data t e estado ω , $x(t, \omega)$, será denotada, quando for conveniente, por $x_t(\omega)$.

4.2 Processo de Covariância e Martingais Ortogonais

4.2.1 Processo de Covariância Quadrático

Para dois processos x e y quaisquer, adaptados ou não, definimos o *processo de covariância quadrático opcional* e o *processo de covariância quadrático previsível*. Antes de apresentarmos formalmente estes conceitos vamos introduzir uma notação que simplificará as demonstrações e, de certa forma, traz consistência à teoria. Então, definimos o diferencial de um processo $\{v_t\}$

como

$$dv_s = \Delta v_s = v_s - v_{s-1} .$$

Agora, vamos às definições formais.

Definição 4.1 O *processo de covariância quadrático opcional* de $\{x_t\}$ e $\{y_t\}$, denotado $\{[x, y]\}$, é o processo

$$[x, y]_0 = (xy)_0, \text{ para } t = 0,$$

$$[x, y]_t = (xy)_0 + \sum_{s=1}^t dx_s dy_s, \text{ para } 1 \leq t \leq T.$$

□

O processo de covariância opcional de x consigo mesmo, $\{[x, x]_t\}$ é chamado de processo de variância opcional de x . Ainda, note que este processo é crescente (soma de números positivos)!

Agora derivaremos uma fórmula de recorrência para este processo que será utilizada posteriormente.

Teorema 4.1 Afirmamos que

$$[x, y]_{t+1} = [x, y]_t + dx_{t+1} dy_{t+1} . \quad (4.1)$$

Prova. Pela definição temos que

$$\begin{aligned} [x, y]_{t+1} &= (xy)_0 + \sum_{s=1}^{t+1} dx_s dy_s \\ &= (xy)_0 + \sum_{s=1}^t dx_s dy_s + dx_{t+1} dy_{t+1} \\ &= [x, y]_t + dx_{t+1} dy_{t+1} . \end{aligned}$$

□

Note que utilizando a notação para o diferencial de um processo e a relação acima podemos temos imediatamente que

$$d[x, y]_{t+1} = dx_{t+1} dy_{t+1} . \quad (4.2)$$

Agora definiremos o processo de covariância previsível.

Definição 4.2 O processo de covariância quadrático previsível de $\{x_t\}$ e $\{y_t\}$ relativo à uma estrutura de informação $\{\mathfrak{F}_t\}$ e medida de probabilidade P , denotado $\{< x, y >\}$, é o processo

$$\begin{aligned} < x, y >_0 &= E_P[(xy)_0], \text{ para } t = 0, \\ < x, y >_t &= E_P[(xy)_0] + \sum_{s=1}^t E_P[dx_s dy_s | \mathfrak{F}_{s-1}], \text{ para } 1 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

□

Note que, por definição, o processo de covariância $\{< x, y >_t\}$ é previsível, isto é, $< x, y >_t$ é $\mathfrak{F}_{t-1}$ mensurável.

O processo de covariância previsível de x consigo mesmo, $\{< x, x >_t\}$ é chamado de processo de variância previsível de x . Ainda, note, também, que este processo é crescente (soma de números positivos).

Agora derivamos uma fórmula de recorrência para esse processo.

Teorema 4.2 Afirmamos que

$$< x, y >_{t+1} = < x, y >_t + E_P[dx_{t+1} dy_{t+1} | \mathfrak{F}_t]. \quad (4.3)$$

Prova. Pela definição temos que

$$\begin{aligned} < x, y >_{t+1} &= E_P[(xy)_0] + \sum_{s=1}^{t+1} E_P[dx_s dy_s | \mathfrak{F}_{s-1}] \\ &= E_P[(xy)_0] + \sum_{s=1}^t E_P[dx_s dy_s | \mathfrak{F}_{s-1}] + E_P[dx_{t+1} dy_{t+1} | \mathfrak{F}_t] \\ &= < x, y >_t + E_P[dx_{t+1} dy_{t+1} | \mathfrak{F}_t]. \end{aligned}$$

□

Note que a equação 4.3 implica que o diferencial do processo $< x, y >_t$ será dado por

$$d < x, y >_{t+1} = E_P[dx_{t+1} dy_{t+1} | \mathfrak{F}_t]. \quad (4.4)$$

4.2.2 Partições Independentes

Esta seção apresenta a definição de *partições independentes* que generaliza o conceito de variáveis aleatórias independentes. Vejamos a definição.

Definição 4.3 As partições $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{N}$ são independentes relativo à uma medida de probabilidade P se e somente se para cada $f \in \mathfrak{F}$ e $n \in \mathfrak{N}$

$$P(f \cap n) = P(f)P(n) .$$

□

A independência de variáveis aleatórias é definida em termos da independência das partições por elas geradas. Vejamos o conceito de uma maneira formal.

Definição 4.4 Uma variável aleatória x e uma partição $\mathfrak{F}$ são independentes relativo à uma medida de probabilidade P se e somente se as partições $\mathfrak{F}^x$ e $\mathfrak{F}$ são independentes. Segue que variáveis aleatórias x e y são independentes se e somente se as partições $\mathfrak{F}^x$ e $\mathfrak{F}^y$ são independentes. □

O próximo Teorema estabelece uma importante consequência dos conceitos de independência.

Teorema 4.3 Se uma variável aleatória x e uma partição $\mathfrak{N}$ são independentes então,

$$E_P[x|\mathfrak{N}] = E_P[x] .$$

Prova. A demonstração deste Teorema consiste em verificar que, sob a condição descrita acima, $E_P[x]$ satisfaz as duas condições que definem a esperança condicional $E_P[x|\mathfrak{N}]$; ou seja,

- $E_P[x]$ é $\mathfrak{N}$ -mensurável;
- $\forall A \in \mathfrak{N}$ temos a seguinte relação para os valores esperados

$$\int_A x dP = \int_A E_P[x|\mathfrak{N}] dP .$$

Então, para mostrar que $E_P[x]$ é $\mathfrak{N}$ -mensurável note que para todo $\omega \in \Omega$ temos,

$$E_P[x] = E_P[x|\mathfrak{S}_0] = \text{cte}$$

logo, $E_P[x]$ é $\mathfrak{N}$ mensurável.

Agora, para mostrar o segundo item vamos calcular o valor esperado de x sobre A . Primeiro, note que se E_i , $1 \leq i \leq m$ é um dos conjuntos da partição gerada por $\mathfrak{S}^x$, podemos escrever x como

$$x = \sum_{i=1}^m x_i 1_{E_i}$$

então, o valor esperado de x sobre A é dado por

$$\int_A x dP = \sum_{i=1}^m x_i P(A \cap E_i),$$

como A e E_i são independentes qualquer que seja i , o termo à direita da equação anterior pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m x_i P(A)P(E_i) &= E_P[x]P(A) \\ &= \int_A E_P[x] dP. \end{aligned}$$

Portanto está demonstrado o Teorema. □

4.2.3 Martingais Ortogonais

Essa seção descreve uma propriedade do processo de covariância quadrático e introduz o conceito de martingais ortogonais.

Porém, antes de apresentarmos um novo conceito iremos estabelecer uma propriedade que será muito importante na identificação de processos martingais.

Teorema 4.4 Se a expectativa condicional do diferencial de um processo for nulo, então este processo é martingal; ou seja, se

$$E_P[dx_t|\mathfrak{S}_{t-1}] = 0$$

para $1 \leq t \leq T$ então, o processo $\{x_t\}$ é martingal.

Prova. Seja $\{x_t\}$ um processo martingal então, a expectativa condicional do diferencial de x é

$$E_P[dx_t|\mathfrak{F}_{t-1}] = E_P[x_t|\mathfrak{F}_{t-1}] - x_{t-1} = 0$$

para $1 \leq t \leq T$. □

Outra propriedade importante é a descrita pelo Teorema a seguir.

Teorema 4.5 Se $\{x_t\}$ e $\{y_t\}$ são martingais, então

$$\begin{aligned} & \{(xy)_t - [x, y]_t\}, \\ & \{(xy)_t - \langle x, y \rangle_t\} \end{aligned}$$

também são martingais.

Prova. Para demonstrar estas relações utilizaremos o Teorema 4.4. Então, o diferencial da primeira relação é dado por

$$d\{(xy) - [x, y]\}_t = d(xy)_t - d[x, y]_t.$$

A expectativa condicional desse diferencial é dada por

$$\begin{aligned} E_P[d(xy)_t - d[x, y]_t|\mathfrak{F}_{t-1}] &= E_P[d(xy)_t|\mathfrak{F}_{t-1}] - E_P[d[x, y]_t|\mathfrak{F}_{t-1}] \\ &= E_P[d(xy)_t|\mathfrak{F}_{t-1}] - E_P[dx_t dy_t|\mathfrak{F}_{t-1}]; \end{aligned}$$

expandindo os termos do lado direito da equação temos

$$\begin{aligned} E_P[d(xy)_t|\mathfrak{F}_{t-1}] - E_P[dx_t dy_t|\mathfrak{F}_{t-1}] &= E_P[x_t y_t - x_{t-1} y_{t-1}|\mathfrak{F}_{t-1}] \\ &\quad - E_P[(x_t - x_{t-1})(y_t - y_{t-1})|\mathfrak{F}_{t-1}] \\ &= E_P[x_t y_t|\mathfrak{F}_{t-1}] - x_{t-1} y_{t-1} \\ &\quad - \{E_P[x_t y_t|\mathfrak{F}_{t-1}] - E_P[x_t y_{t-1}|\mathfrak{F}_{t-1}] \\ &\quad - E_P[x_{t-1} y_t|\mathfrak{F}_{t-1}] + x_{t-1} y_{t-1}\} \\ &= -2x_{t-1} y_{t-1} + E_P[x_t y_{t-1}|\mathfrak{F}_{t-1}] \\ &\quad + E_P[x_{t-1} y_t|\mathfrak{F}_{t-1}] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pois, para dois processos martingais quaisquer, digamos $\{w_t\}$ e $\{q_t\}$ temos que

$$E_P[w_{t-1} q_t|\mathfrak{F}_{t-1}] = w_{t-1} E_P[q_t|\mathfrak{F}_{t-1}] = w_{t-1} q_{t-1}.$$

Logo, $E_P[x_t y_{t-1} | \mathfrak{F}_{t-1}] = E_P[x_{t-1} y_t | \mathfrak{F}_{t-1}] = x_{t-1} y_{t-1}$.

Portanto, $\{(xy)_t - [x, y]_t\}$ é martingal.

Agora mostraremos a segunda afirmação. De maneira análoga, o diferencial da segunda relação é dado por

$$\begin{aligned} d\{(xy)_t - [x, y]_t\} &= d(xy)_t - d[x, y]_t \\ &= d(xy)_t - E_P[dx_t dy_t | \mathfrak{F}_{t-1}]. \end{aligned}$$

A expectativa condicional desse diferencial é dada por

$$\begin{aligned} E_P[d\{(xy)_t - [x, y]_t\} | \mathfrak{F}_{t-1}] &= E_P[d(xy)_t | \mathfrak{F}_{t-1}] - \\ &\quad E_P[E_P[dx_t dy_t | \mathfrak{F}_{t-1}] | \mathfrak{F}_{t-1}] \\ &= E_P[d(xy)_t | \mathfrak{F}_{t-1}] - E_P[dx_t dy_t | \mathfrak{F}_{t-1}]. \end{aligned}$$

onde, na última passagem utilizamos a lei das expectativas iteradas.

Então, pela demonstração anterior, segue imediatamente que a diferença dos dois termos à direita da equação acima são nulos. Portanto, $\{(xy)_t - [x, y]_t\}$ é martingal. $\square$

Agora definimos o conceito de martingal ortogonal.

Definição 4.5 dois processos martingais $\{x_t\}$ e $\{y_t\}$ são *ortogonais* se e somente se $[x, y]_t = 0$ para todo $0 \leq t \leq T$. $\square$

O próximo Teorema é uma consequência dessa definição.

Teorema 4.6 Se os processos martingais $\{x_t\}$ e $\{y_t\}$ são ortogonais, então $(xy)_0 = 0$ e o processo $\{(xy)_t\}$ é martingal. Reciprocamente, se $(xy)_0 = 0$ e $\{(xy)_t\}$ for martingal, então os processos martingais $\{x_t\}$, $\{y_t\}$ são ortogonais.

Prova. Primeiro, considere que $[x, y]_t = 0$ para $0 \leq t \leq T$. Em particular

$$[x, y]_0 = E_P[(xy)_0] = 0$$

mas, x_0 e y_0 são constantes, logo

$$[x, y]_0 = (xy)_0 = 0.$$

Então, utilizando o fato que $[x, y]_t = 0$, $0 \leq t \leq T$ e o Teorema 4.5 é imediato que

$$E_P[d\{(xy)_t - [x, y]_t\} | \mathfrak{F}_{t-1}] = E_P[d(xy)_t | \mathfrak{F}_{t-1}] = 0.$$

Reciprocamente, se o processo $\{x_t\}$ e $\{y_t\}$ são martingais e, ainda, $\{(xy)_t\}$ é martingal temos que o segundo termo na relação de recorrência 4.3 é nulo. Logo,

$$\langle x, y \rangle_t = \langle x, y \rangle_{t-1} . \quad (4.5)$$

Então, como

$$(xy)_0 = 0 = E_P[(xy)_0] = \langle x, y \rangle_0 ,$$

temos pela equação 4.5 que $\langle x, y \rangle_t = 0$ para $0 \leq t \leq T$. Portanto, $\{x_t\}$ e $\{y_t\}$ são ortogonais. $\square$

O próximo Teorema estabelece outra propriedade para processos martingais ortogonais.

Teorema 4.7 Se os processos martingais $\{x_t\}$ e $\{y_t\}$ são ortogonais então

$$E_P[x_t y_t | \mathfrak{F}_s] = E_P[x_t | \mathfrak{F}_s] E_P[y_t | \mathfrak{F}_s]$$

para $0 \leq s \leq t \leq T$.

Prova. Pela hipótese $\langle x, y \rangle_t = 0$ para $0 \leq t \leq T$. Segue imediatamente pelo Teorema acima que o processo $\{(xy)_t\}$ é martingal. Logo,

$$E_P[x_t y_t | \mathfrak{F}_s] = x_s y_s = E_P[x_t | \mathfrak{F}_s] E_P[y_t | \mathfrak{F}_s] .$$

$\square$

4.3 Integrais Estocásticas

O conceito integral estocástica é fundamental para a teoria de martingais e para os modelos de preços nos mercados financeiros. Sua importância segue da observação feita anteriormente que relacionou o lucro ou perda proporcionado pela negociação gerada por uma estratégia de negociação previsível $\theta_{n,t}$ e preços $p_{n,t}$,

$$\sum_{n=1}^N \sum_{s=1}^T \theta_{n,t} (p_{n,s} - p_{n,s-1}) ,$$

como uma forma do conceito de integral estocástica.

Vejamos a definição formal.

Definição 4.6 Para quaisquer processos $\{\alpha_t\}$ e $\{x_t\}$ a *integral estocástica*

$$\int_0^t \alpha_s dx_s$$

é definida como o processo

$$\int_0^t \alpha_s dx_s = \begin{cases} 0 & \text{se } t = 0, \\ \sum_{s=1}^t \alpha_s dx_s & \text{se } 1 \leq t \leq T. \end{cases}$$

□

A integral estocástica acima também é chamada a transformada do processo $\{x_t\}$ pelo processo $\{\alpha_t\}$ e denotado $\{(\alpha \cdot x)_t\}$.

Para qualquer processo $\alpha = \{\alpha_t\}$ defina o processo $\alpha_- = \{\alpha_{t-}\}$ fazendo $\alpha_{t-} = \alpha_{t-1}$ para $1 \leq t \leq T$. A integral estocástica $\int_0^t \alpha_{s-} dx_s$, também denotada por $\{(\alpha_- \cdot x)_t\}$, é por definição

$$\int_0^t \alpha_{s-} dx_s = \begin{cases} 0 & \text{se } t = 0, \\ \sum_{s=1}^t \alpha_{s-1} dx_s & \text{se } 1 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Vamos, agora, estabelecer algumas propriedades fundamentais sobre as integrais estocásticas.

A primeira delas é bastante simples e refere-se ao diferencial da integral estocástica. Vejamos a propriedade.

Teorema 4.8 Afirmamos que

$$d(\alpha \cdot x) = \alpha dx$$

para quaisquer processos α e x .

Prova. A demonstração desta propriedade segue diretamente das definições de diferencial e de integral estocástica.

Para $t \geq 0$ temos

$$\begin{aligned} d\left(\int_0^\cdot \alpha_s dx_s\right)_t &= \left(\int_0^\cdot \alpha_s dx_s\right)_t - \left(\int_0^\cdot \alpha_s dx_s\right)_{t-1} \\ &= \sum_{s=1}^t \alpha_s dx_s - \sum_{s=1}^{t-1} \alpha_s dx_s \\ &= \alpha_t dx_t. \end{aligned}$$

□

Segue do Teorema acima que podemos facilmente encontrar uma relação de recorrência para a integral estocástica,

$$\begin{aligned}\int_0^t \alpha_s dx_s &= \sum_{s=1}^{t-1} \alpha_s dx_s + \alpha_t dx_t \\ &= \int_0^{t-1} \alpha_s dx_s + \alpha_t dx_t ,\end{aligned}$$

ou de outra forma,

$$(\alpha \cdot x)_t = (\alpha \cdot x)_{t-1} + \alpha_t dx_t .$$

A segunda propriedade consiste na preservação de martingais. Vejamos o Teorema.

Teorema 4.9 Se o processo $\{\alpha_t\}$ é previsível e o processo $\{x_t\}$ martingal, então a integral

$$\int_0^t \alpha_s dx_s$$

é martingal.

Prova. Utilizando o Teorema 4.4 basta mostra que para $1 \leq t \leq T$

$$E_P[d(\alpha \cdot x)_t | \mathfrak{F}_{t-1}] = 0 .$$

De fato, utilizando a primeira propriedade das integrais estocásticas temos,

$$\begin{aligned}E_P[d(\alpha \cdot x)_t | \mathfrak{F}_{t-1}] &= E_P[\alpha_t dx_t | \mathfrak{F}_{t-1}] \\ &= \alpha_t E_P[dx_t | \mathfrak{F}_{t-1}] \\ &= 0\end{aligned}$$

pois, $\{\alpha_t\}$ é previsível e $\{x_t\}$ uma martingal. □

A terceira propriedade é a propriedade associativa das integrais estocásticas.

Teorema 4.10 Para quaisquer processos α , β e x afirmamos que

$$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x .$$

Prova. Para demonstrar este Teorema utilizaremos a seguinte técnica que garante a igualdade de dois processos. A condição necessária e suficiente

para que dois processos x_t e y_t sejam iguais resume-se em: $x_0 = y_0$ e para $1 \leq t \leq T$ $dx_t = dy_t$.

Então para $t = 0$ temos

$$(\alpha \cdot (\beta \cdot x))_0 = 0 = ((\alpha\beta) \cdot x)_0 .$$

Agora mostraremos que os diferenciais são iguais para $1 \leq t \leq T$. Então, Utilizando repetidamente a primeira propriedade das integrais estocásticas temos

$$\begin{aligned} d(\alpha \cdot (\beta \cdot x))_t &= \alpha_t d(\beta \cdot x)_t \\ &= \alpha_t \beta_t dx_t \\ &= d((\alpha\beta) \cdot x)_t . \end{aligned}$$

□

4.3.1 Integrais Estocásticas e Processos de Covariância

A quarta propriedade fundamental das integrais estocásticas consiste na propriedade associativa com respeito aos processos de covariância quadráticos. Vejamos o Teorema que estabelece a associatividade.

Teorema 4.11 Estabelecemos as seguintes propriedades

1. Para quaisquer processos estocásticos α , x e y , afirmamos que

$$[\alpha \cdot x, y] = \alpha \cdot [x, y] .$$

2. Para um processo previsível α e quaisquer processos x e y , afirmamos que

$$\langle \alpha \cdot x, y \rangle = \alpha \cdot \langle x, y \rangle .$$

Prova. Para mostrar esta igualdades utilizaremos a mesma técnica do Teorema 4.10. Então para a primeira igualdade temos para $t = 0$

$$[\alpha \cdot x, y]_0 = (\alpha \cdot x)_0 y_0 = 0 y_0 = 0 = (\alpha \cdot [x, y])_0 .$$

Agora mostramos que os diferenciais são iguais. Então,

$$\begin{aligned} d[\alpha \cdot x, y]_t &= d(\alpha \cdot x)_t dy_t \\ &= \alpha_t dx_t dy_t \\ &= \alpha_t d[x, y]_t \\ &= d(\alpha \cdot [x, y])_t . \end{aligned}$$

A demonstração da segunda relação é análoga a primeira.
Para $t = 0$ temos,

$$\langle \alpha \cdot x, y \rangle_0 = E_P[(\alpha \cdot x)_0 y_0] = E_P[0 y_0] = 0 = (\alpha \cdot \langle x, y \rangle)_0.$$

Agora mostramos que os diferenciais são iguais. Recordando que neste caso α_t é previsível temos,

$$\begin{aligned} d \langle \alpha \cdot x, y \rangle_t &= E_P[d(\alpha \cdot x)_t dy_t | \mathfrak{F}_{t-1}] \\ &= E_P[\alpha_t dx_t dy_t | \mathfrak{F}_{t-1}] \\ &= \alpha_t E_P[dx_t dy_t | \mathfrak{F}_{t-1}] \\ &= d(\alpha \cdot \langle x, y \rangle)_t. \end{aligned}$$

□

No próximo Teorema calculamos o valor de uma integral estocástica.

Teorema 4.12 Afirmamos que

$$\int_0^t x_{s-} dx_s = \frac{1}{2}(x_t^2 - [x, x]_t).$$

Prova. Utilizaremos novamente a técnica do Teorema 4.10 para demonstrar essa igualdade.

Então, para $t = 0$ temos para o termo à esquerda

$$\int_0^0 x_{s-} dx_s = 0$$

e, para o termo à direita

$$\frac{1}{2}(x_0^2 - [x, x]_0) = \frac{1}{2}(x_0^2 - x_0^2) = 0.$$

Para $1 \leq t \leq T$ temos para o termo à esquerda,

$$d \int_0^t x_{s-} dx_s = x_{t-1} dx_t$$

e, para o termo à direita

$$\begin{aligned} d \left\{ \frac{1}{2}(x_t^2 - [x, x]_t) \right\} &= \frac{1}{2} \{ (x_t + x_{t-1}) dx_t - (dx_t)^2 \} \\ &= \frac{1}{2} dx_t \{ x_t + x_{t-1} - x_t + x_{t-1} \} \\ &= x_{t-1} dx_t. \end{aligned}$$

Logo, está demonstrada a afirmação.

□

O próximo Teorema apresenta uma fórmula para integração por partes.

Teorema 4.13

$$\int_0^t x_{s-} dy_s = x_t y_t - \int_0^t y_{s-} dx_s - [x, y]_t. \quad (4.6)$$

Prova. Novamente, utilizando a técnica do Teorema 4.10 temos
Para $t = 0$, o termo à esquerda resulta em

$$\int_0^0 x_{s-} dy_s = 0$$

e, para o termo à direita temos

$$x_0 y_0 - \int_0^0 y_{s-} dx_s - [x, y]_0 = x_0 y_0 - x_0 y_0 = 0.$$

Para $1 \leq t \leq T$, o incremento do termo à esquerda resulta em

$$d \int_0^t x_{s-} dy_s = x_{t-1} dy_t$$

e, para o termo à direita temos

$$\begin{aligned} d\{x_t y_t - \int_0^t y_{s-} dx_s - [x, y]_t\} &= d(x_t y_t) - y_{t-1} dx_t - dx_t dy_t \\ &= x_t y_t - x_{t-1} y_{t-1} - y_{t-1}(x_t - x_{t-1}) \\ &\quad - (x_t - x_{t-1})(y_t - y_{t-1}) \\ &= x_{t-1} dy_t. \end{aligned}$$

Logo, está demonstrado o Teorema. $\square$

Note que calculando o diferencial da equação 4.6 podemos rearranjar a equação e obter uma equação para o incremento do processo $\{(xy)_t\}$. Então, após alguma álgebra encontramos,

$$d(xy)_t = x_{t-} dy_t + y_{t-} dx_t + d[x, y]_t.$$

4.3.2 Fórmula de Itô

Esta seção é dedicada ao estudo da fórmula de Itô para a mudança de variáveis em uma integral estocástica. No contexto discreto esta fórmula é apenas uma identidade trivial. O estudo a partir do contexto discreto tem como objetivo estabelecer a base e a intuição para uma futura extensão para o caso contínuo.

Teorema 4.14 (Fórmula de Itô). Se a função $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ é diferenciável, então para todo $1 \leq t \leq T$

$$f(x_t) = f(x_0) + \int_0^t f'(x_{s-}) dx_s + \sum_{s=1}^t [f(x_s) - f(x_{s-}) - f'(x_{s-}) dx_s] .$$

Prova. Note que o último termo à direita na equação anterior é exatamente

$$\sum_{s=1}^t f'(x_{s-}) dx_s = \int_0^t f'(x_{s-}) dx_s$$

logo, este termo e a integral da fórmula se anulam. Ainda, o restante da somatória resulta em

$$\sum_{s=1}^t [f(x_s) - f(x_{s-})] = f(x_t) - f(x_0)$$

o que anula o termo $f(x_0)$ da fórmula, resultando uma identidade. $\square$

4.3.3 Exponenciais Estocásticas

Nessa seção introduziremos o conceito de exponencial estocástica. Essas exponenciais estocásticas são soluções de uma equação diferencial estocástica e, como veremos posteriormente a solução deste tipo de equações é fundamental no desenvolvimento de modelos de apreamento de opções.

Heuristicamente, a exponencial estocástica, $\{x_t\}$ de $\{w_t\}$ é a solução da seguinte equação diferencial estocástica,

$$dx_t = x_{t-} dw_t . \tag{4.7}$$

Formalmente o conceito é definido no próximo Teorema.

Teorema 4.15 Seja $\{w_t\}$ um processo adaptado e x_0 uma constante arbitrária. Então existe um único processo adaptado $\{x_t\}$ tal que

$$x_t = x_0 + \int_0^t x_{s-} dw_s . \quad (4.8)$$

E, esse processo, $\{x_t\}$, é dado pela fórmula

$$x_t = x_0 \prod_{s=1}^t (1 + dw_s) \quad (4.9)$$

para $1 \leq t \leq T$.

Afirmamos, ainda, que se o processo $\{w_t\}$ é martingal, então o processo $\{x_t\}$ também o é.

Prova. Utilizando a técnica do Teorema 4.10 temos imediatamente que para $t = 0$ ambas as equações se reduzem a x_0 , logo a identidade é verdadeira para $t = 0$.

Então, resta mostrar que as diferenciais são iguais para $1 \leq t \leq T$. Para a equação 4.8 temos imediatamente que,

$$\begin{aligned} dx_t &= d \left(x_0 + \int_0^t x_{s-} dw_s \right)_t \\ &= x_{t-1} dw_t , \end{aligned}$$

agora para a equação 4.9 temos,

$$\begin{aligned} dx_t &= x_0 \prod_{s=1}^{t-1} (1 + dw_s) (1 + dw_t) - x_0 \prod_{s=1}^{t-1} (1 + dw_s) \\ &= x_{t-1} (1 + dw_t) - x_{t-1} \\ &= x_{t-1} dw_t . \end{aligned}$$

Finalmente, o Teorema 4.9 garante que se o processo $\{w_t\}$ é martingal então $\{x_t\}$ também o é. $\square$

Note que no caso contínuo a equação 4.7 tem como solução a $x = \exp(w)$; logo, de maneira análoga a equação 4.8 define a exponencial estocástica pois, é a solução (integrando ambos os lados) da equação 4.7.

A próxima definição estabelece formalmente o conceito da exponencial estocástica de um processo $\{w_t\}$.

Definição 4.7 Seja

$$x_t = 1 + \int_0^t x_{s-} dw_s$$

então, o processo $\{x_t\}$ definido pela equação acima é único e conhecido como a exponencial estocástica do processo $\{w_t\}$. Denotamos esse processo por

$$x_t = \varepsilon_t(w) .$$

□

Vejamos o significado desta notação. Pela definição temos,

$$\begin{aligned} \varepsilon_t(w) &= 1 + \int_0^t x_{s-} dw_s \\ &= 1 + \sum_{s=1}^t x_{s-1} dw_s . \end{aligned}$$

Note que pela definição temos que $x_0 = \varepsilon_0(w) = 1$. Segue, pela equação 4.9 que

$$x_t = \varepsilon_t(w) = \prod_{s=1}^t (1 + dw_s)$$

para $t \geq 1$.

Utilizando a notação definida acima e o Teorema 4.10 a solução para a integral estocástica

$$x_t = x_0 + \int_0^t x_{s-} dw_s$$

é dada por

$$x_t = x_0 \varepsilon_t(w) .$$

Recordando a demonstração do Teorema 4.10 temos que o diferencial de uma exponencial estocástica é dado por,

$$dx_t = x_{t-1} dw_t , \tag{4.10}$$

ou seja, as equações acima estabelecem a relação entre a integral, a exponencial e a equação diferencial estocásticas.

Agora, calculamos outra integral.

Teorema 4.16 Para um processo qualquer $\{\alpha_t\}$ temos que a solução para a integral

$$x_t = x_0 + \int_0^t x_{s-} \alpha_s dw_s$$

é dada por

$$x_t = x_0 \varepsilon_t(\alpha \cdot w) .$$

Prova. Para provar esse resultado mostraremos que as duas equações são equivalente.

Para $t = 0$ temos que ambas equações reduzem-se a x_0 . E, para $1 \leq t \leq T$ temos que o diferencial da integral é dado por

$$\begin{aligned} dx_t &= d \left(x_0 + \int_0^t x_{s-} \alpha_s dw_s \right)_t \\ &= x_{t-1} \alpha_t dw_t . \end{aligned}$$

Por sua vez, o diferencial da exponencial estocástica é dado portemos,

$$\begin{aligned} dx_t &= d(x_0 \varepsilon_t(\alpha \cdot w))_t \\ &= x_{t-1} d(\alpha \cdot w)_t \\ &= x_{t-1} \alpha_t dw_t . \end{aligned}$$

□

Finalmente, terminamos essa seção apresentando uma fórmula para multiplicação de exponenciais estocásticas.

Teorema 4.17 A seguinte equação é verdadeira:

$$\varepsilon_t(x) \varepsilon_t(y) = \varepsilon_t(x + y + [x, y]) .$$

Prova. Para $t = 0$ ambos os lados da igualdade reduzem-se a 1. Prosseguindo, denote $f_t = \varepsilon_t(x)$ e $g_t = \varepsilon_t(y)$. Então, a equação diferencial que define a multiplicação das exponenciais estocásticas pode ser escrita utilizando a fórmula para integração por partes como

$$d(f_t g_t) = f_{t-} dg_t + g_{t-} df_t + d[f, g]_t . \quad (4.11)$$

Agora, note que $df_t = f_{t-} dx_t$ logo, podemos estabelecer as seguintes identidades

$$df_t = f_{t-} dx_t ,$$

$$dg_t = g_{t-} dy_t .$$

Ainda, utilizando as duas identidades acima e a definição de processo de covariância opcional podemos estabelecer uma terceira,

$$\begin{aligned} d[f, g]_t &= df_t dg_t \\ &= f_{t-} dx_t g_{t-} dy_t \\ &= f_{t-} g_{t-} d[x, y]_t . \end{aligned}$$

Substituindo estas três identidades na equação 4.11 obtemos a forma da equação diferencial estocástica que define a multiplicação das exponenciais. Vejamos como isto ocorre.

$$\begin{aligned} d(f_t g_t) &= f_{t-} g_{t-} dy_t + g_{t-} f_{t-} dx_t + f_{t-} g_{t-} d[x, y]_t \\ &= f_{t-} g_{t-} (dx_t + dy_t + d[x, y]_t) \\ &= f_{t-} g_{t-} d(x_t + y_t + [x, y]_t) . \end{aligned}$$

Portanto, está demonstrada a afirmação. $\square$

4.4 Mudança de Medida e o Teorema de Girsanov

Nesta seção apresentamos uma martingal especial, z , gerada pela razão entre duas medidas de probabilidade, P e Q .

4.4.1 Processo da Razão de Verossimilhança

Definição 4.8 O *processo da razão de verossimilhança* é definido como

$$z_t(\omega) = E_P \left[\frac{Q}{P} | \mathfrak{F}_t \right] (\omega) .$$

$\square$

O próximo exemplo ilustra esta definição mas, antes faremos duas afirmações sobre o processo da razão de verossimilhança. Primeiro, note que z

é positivo pois, $\frac{Q}{P}$ é positivo. Ainda, z é martigal pois, para $1 \leq s \leq t \leq T$ temos

$$\begin{aligned} E_P[z_t | \mathfrak{F}_s] &= E_P \left[E_P \left[\frac{Q}{P} | \mathfrak{F}_t \right] | \mathfrak{F}_s \right] \\ &= E_P \left[\frac{Q}{P} | \mathfrak{F}_s \right] \\ &= z_s . \end{aligned}$$

Exemplo 4.1 Seja o espaço $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_6\}$, $P(\omega) = \frac{1}{6}$ para todo $\omega \in \Omega$,

$$Q(\omega_i) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{para } i = 1, 6, \\ \frac{1}{8} & \text{para } i = 2, 3, 4, 5. \end{cases}$$

e, a estrutura de informação é dada por

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_1 &= \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}\}, \\ \mathfrak{F}_2 &= \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}, \{\omega_5, \omega_6\}\}. \end{aligned}$$

Então,

$$\frac{Q}{P}(\omega) = \begin{cases} \frac{1/4}{1/6} = \frac{3}{2} & \text{se } \omega = \omega_1, \omega_6, \\ \frac{1/8}{1/6} = \frac{3}{4} & \text{se } \omega = \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5 \end{cases}$$

e, o processo da razão de verossimilhança é

p_1	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$t = 0$	1	1	1	1	1	1
$t = 1$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{15}{16}$
$t = 2$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$
$t = 3$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$

Vamos ilustrar o cálculo de alguns valores.

Para $t = 0$ temos para todo $\omega \in \Omega$

$$z_0(\omega) = \frac{\sum_{i=1}^6 \frac{Q(\omega_i)}{P(\omega_i)} P(\omega_i)}{\sum_{i=1}^6 P(\omega_i)} = 1 .$$

Para $t = 1$ e $\omega \in f_{1,2}$ temos

$$\begin{aligned}
 z_1 &= \frac{1}{P(f_{1,2})} \int_{f_{1,2}} \frac{Q}{P}(\eta) P(\eta) \\
 &= \frac{1}{4/6} [Q(\omega_3) + Q(\omega_4) + Q(\omega_5) + Q(\omega_6)] \\
 &= \frac{1}{4/6} \left[\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \right] \\
 &= \frac{15}{16}.
 \end{aligned}$$

O próximo Teorema relaciona o processo da razão de verossimilhança à expectativa condicional relativo às medidas P e Q .

Teorema 4.18 Para qualquer processo adaptado $\{x_t\}$ e $0 \leq s \leq t \leq T$ afirmamos que

$$\frac{E_P[z_t x_t | \mathfrak{S}_s]}{E_P[z_t | \mathfrak{S}_s]} = E_Q[x_t | \mathfrak{S}_s].$$

Prova. Seja $A = E_P[z_t x_t | \mathfrak{S}_s]$ e $B = E_P[z_t | \mathfrak{S}_s] E_Q[x_t | \mathfrak{S}_s]$. Então, utilizando a definição de z podemos escrever

$$\begin{aligned}
 A &= E_P \left[E_P \left(\frac{Q}{P} | \mathfrak{S}_t \right) x_t | \mathfrak{S}_s \right] \\
 &= E_P \left[E_P \left(\frac{Q}{P} x_t | \mathfrak{S}_t \right) | \mathfrak{S}_s \right] \\
 &= E_P \left[\frac{Q}{P} x_t | \mathfrak{S}_s \right]
 \end{aligned}$$

e, como z_t é uma martingal temos

$$B = z_s E_Q[x_t | \mathfrak{S}_s].$$

Para mostrarmos que $A = B$ escolhemos um subconjunto $E \in \mathfrak{S}_s$. Sobre E tanto A quanto B são constantes, digamos α e β ; então, gostaríamos de mostrar que $\alpha = \beta$. Agora,

$$\begin{aligned}
 \int_E A dP &= \alpha P(E), \\
 \int_E B dQ &= \beta Q(E)
 \end{aligned}$$

logo, para que $\alpha = \beta$ é necessário e suficiente que

$$\frac{1}{P(E)} \int_E A dP = \frac{1}{Q(E)} \int_E B dQ . \quad (4.12)$$

Calculemos, então, as integrais

$$\int_E A dP = \sum_{\eta \in E} \frac{Q(\eta)}{P(\eta)} x_t(\eta) P(\eta) = \sum_{\eta \in E} x_t(\eta) Q(\eta) ,$$

$$\int_E B dQ = \frac{Q(E)}{P(E)} \sum_{\eta \in E} x_t(\eta) Q(\eta)$$

logo, a condição 4.12 está satisfeita e conseqüentemente está demonstrada a afirmação. $\square$

Corolário 4.1 Um processo adaptado $\{x_t\}$ é Q -martingal se e somente se o processo $\{z_t x_t\}$ for P -martingal.

Prova. A prova desse corolário segue imediatamente do Teorema acima reescrito na forma da seguinte igualdade

$$E_P[z_t x_t | \mathfrak{F}_s] = z_s E_Q[x_t | \mathfrak{F}_s] .$$

$\square$

4.4.2 Teorema de Girsanov

Nessa seção estaremos considerando integrais estocásticas associadas ao processo da razão de verossimilhança,

$$\int_0^t \frac{dz_s}{z_{s-}} , \quad (4.13)$$

$$\int_0^t \frac{d[x, z]_s}{z_s} , \quad (4.14)$$

$$\int_0^t \frac{d \langle x, z \rangle_s}{z_{s-}} . \quad (4.15)$$

Da definição da integral estocástica, o processo definido por 4.13 é

$$\int_0^t \frac{dz_s}{z_{s-}} = \begin{cases} 0 & \text{para } t = 0, \\ \sum_{s=1}^t \frac{dz_s}{z_{s-1}} & \text{para } 1 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Note que como $\frac{1}{z_{s-}}$ é previsível e o processo $\{z_t\}$ é P -martingal pelo Teorema 4.9 temos imediatamente que a integral definida por 4.13 é P -martingal.

Continuando, o processo definido por 4.14 é

$$\int_0^t \frac{d[x, z]_s}{z_s} = \begin{cases} 0 & \text{para } t = 0, \\ \sum_{s=1}^t \frac{d[x, z]_s}{z_s} & \text{para } 1 \leq t \leq T. \end{cases}$$

E, o processo definido por 4.15 é

$$\int_0^t \frac{d \langle x, z \rangle_s}{z_{s-}} = \begin{cases} 0 & \text{para } t = 0, \\ \sum_{s=1}^t \frac{d \langle x, z \rangle_s}{z_{s-1}} & \text{para } 1 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Finalmente o Teorema.

Teorema 4.19 Teorema de Girsanov. Se um processo $\{x_t\}$ é P -martingal, então

$$x_t - \int_0^t \frac{d[x, z]_s}{z_s},$$

$$x_t - \int_0^t \frac{d \langle x, z \rangle_s}{z_{s-}}$$

são Q -martingais.

Prova. Vejamos o primeiro caso. Para $1 \leq t \leq T$ a expectativa condicional do primeiro processo é dada por

$$E_Q \left[x_t - \int_0^t \frac{d[x, z]_s}{z_s} \middle| \mathfrak{F}_{t-1} \right].$$

Utilizando a definição de integral estocástica podemos escrever a equação acima como

$$E_Q[x_t | \mathfrak{F}_t] - \int_0^{t-1} \frac{d[x, z]_s}{z_s} - E_Q \left[\frac{dx_t dz_t}{z_t} \middle| \mathfrak{F}_{t-1} \right]. \quad (4.16)$$

Então, para que o processo acima seja Q -martingal o último termo da equação 4.16 deve ser $E_Q[x_t | \mathfrak{F}_{t-1}] - x_{t-1}$.

Vamos mostrar que este fato é verdadeiro. Note que, o processo $\frac{dx_t dz_t}{z_t}$ (último termo à direita da equação 4.16) é adaptado, logo pelo Teorema

4.18 podemos escrever

$$\begin{aligned} E_Q \left[\frac{dx_t dz_t}{z_t} | \mathfrak{F}_{t-1} \right] &= \frac{E_P \left[\frac{dx_t dz_t}{z_t} z_t | \mathfrak{F}_{t-1} \right]}{E_P[z_t | \mathfrak{F}_{t-1}]} \\ &= \frac{E_P[dx_t dz_t | \mathfrak{F}_{t-1}]}{E_P[z_t | \mathfrak{F}_{t-1}]} . \end{aligned}$$

Recordando que z é P -martingal podemos escrever o lado direito da equação acima em uma forma mais conveniente,

$$E_P \left[dx_t \left(\frac{z_t}{z_{t-1}} - 1 \right) | \mathfrak{F}_{t-1} \right] ,$$

expandido os termos encontramos (recorde que $\{x_t\}$ é P -martingal)

$$E_P \left[\frac{x_t z_t}{z_{t-1}} - x_t - \frac{x_{t-1} z_t}{z_{t-1}} + x_{t-1} | \mathfrak{F}_{t-1} \right] = E_P \left[\frac{x_t z_t}{z_{t-1}} | \mathfrak{F}_{t-1} \right] - x_{t-1} E_P \left[\frac{z_t}{z_{t-1}} | \mathfrak{F}_{t-1} \right] .$$

Analise os dois termos da equação acima. Utilizando o Teorema 4.18 temos que o primeiro termo pode ser escrito como,,

$$E_P \left[\frac{x_t z_t}{z_{t-1}} | \mathfrak{F}_{t-1} \right] = \frac{E_P[x_t z_t | \mathfrak{F}_{t-1}]}{E_P[z_t | \mathfrak{F}_{t-1}]} = E_Q[x_t | \mathfrak{F}_{t-1}] .$$

Por sua vez, como z é P -martingal o segundo termo se reduz a

$$x_{t-1} E_P \left[\frac{z_t}{z_{t-1}} | \mathfrak{F}_{t-1} \right] = x_{t-1} \frac{1}{z_{t-1}} E_P[z_t | \mathfrak{F}_{t-1}] = x_{t-1} .$$

Portanto está demonstrada a afirmação.

A demonstração da propriedade do segundo processo segue os mesmos passos. Vejamos como ocorre. Para $1 \leq t \leq T$ a expectativa condicional do processo é dada por

$$E_Q \left[x_t - \int_0^t \frac{d \langle x, z \rangle_s}{z_{s-}} | \mathfrak{F}_{t-1} \right] .$$

Utilizando a definição de integral estocástica podemos escrever

$$E_Q[x_t | \mathfrak{F}_t] - \int_0^{t-1} \frac{d \langle x, z \rangle_s}{z_{s-}} - E_Q \left[\frac{d \langle x, z \rangle_t}{z_{t-1}} | \mathfrak{F}_{t-1} \right] .$$

Então, para que o processo seja Q -martingal o último termo da equação anterior deve ser $E_Q[x_t|\mathfrak{F}_{t-1}] - x_{t-1}$.

Vamos mostrar que este fato é verdadeiro. Primeiro, note que utilizando a notação diferencial e recordando que o processo de covariância quadrático é previsível temos

$$E_Q \left[\frac{d \langle x, z \rangle_t}{z_{t-1}} | \mathfrak{F}_{t-1} \right] = \frac{d \langle x, z \rangle_t}{z_{t-1}}.$$

Agora, como z é P -martingal podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{d \langle x, z \rangle_t}{z_{t-1}} &= \frac{E_P[dx_t dz_t | \mathfrak{F}_{t-1}]}{E_P[z_t | \mathfrak{F}_{t-1}]} \\ &= \frac{E_P \left[dx_t \left(1 - \frac{z_{t-1}}{z_t} \right) z_t | \mathfrak{F}_{t-1} \right]}{E_P[z_t | \mathfrak{F}_{t-1}]} \\ &= E_Q \left[dx_t \left(1 - \frac{z_{t-1}}{z_t} \right) | \mathfrak{F}_{t-1} \right] \end{aligned}$$

onde, utilizamos o Teorema 4.18 na última passagem.

Então, expandindo os termos da expectativa com respeito a Q acima temos,

$$E_Q[x_t | \mathfrak{F}_{t-1}] - x_{t-1} - E_Q \left[\frac{dx_t z_{t-1}}{z_t} | \mathfrak{F}_{t-1} \right]. \quad (4.17)$$

Para finalizar a demonstração resta mostrar que o último termo na equação 4.17 é nulo. De fato, utilizando o Teorema 4.18 e recordando que o processo $\{x_t\}$ é P -martingal temos,

$$\begin{aligned} E_Q \left[\frac{dx_t z_{t-1}}{z_t} | \mathfrak{F}_{t-1} \right] &= \frac{E_P \left[\frac{dx_t z_{t-1}}{z_t} z_t | \mathfrak{F}_{t-1} \right]}{E_P[z_t | \mathfrak{F}_{t-1}]} \\ &= \frac{z_{t-1} E_P[dx_t | \mathfrak{F}_{t-1}]}{z_{t-1}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto está demonstrada a segunda afirmação. $\square$

4.5 Representação de Martingais

Nessa seção mostraremos que qualquer processo martingal, $\{x_t\}$, pode ser representado como uma soma de integrais estocásticas relativas a $\nu - 1$ pro-

cessos martingais especiais

$$\{w_{1,t}\}, \dots, \{w_{\nu-1,t}\}$$

onde, ν é o índice de divisão da estrutura de informação $\{\mathfrak{F}_t\}$.

Ainda, se o processo $\{x_t\}$ for sempre diferente de zero podemos representá-lo como uma soma de exponenciais estocásticas dos processos $\{w_{1,t}\}, \dots, \{w_{\nu-1,t}\}$.

Note que desta forma, os processos especiais acima podem ser interpretados como uma base para a representação de martingais.

Antes de introduzirmos o Teorema vejamos um exemplo.

Exemplo 4.2 Seja o espaço de probabilidades $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, a medida de probabilidade é $P(\omega) = \frac{1}{4}$ para qualquer $\omega \in \Omega$, $T = 2$ e, a estrutura de informação é dada por

$$\mathfrak{F}_1 = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}\}.$$

Considere as seguintes variáveis aleatórias $\epsilon_1, \dots, \epsilon_4$ definidas por

$$\epsilon_h(\omega_k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = h, \\ 0 & \text{se } k \neq h. \end{cases}$$

E, seja $\epsilon_{h,t} = E_P[\epsilon_h | \mathfrak{F}_t]$ um processo martingal.

Estes processos são dados nas Tabelas a seguir,

ϵ_1	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$t = 0$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$t = 1$	1	0	0	0
$t = 2$	1	0	0	0

ϵ_2	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$t = 0$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$t = 1$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$t = 2$	0	1	0	0

ϵ_3	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$t = 0$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$t = 1$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$t = 2$	0	0	1	0

ϵ_4	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$t = 0$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$t = 1$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$t = 2$	0	0	0	1

Afirmamos que qualquer processo martingal $\{x_t\}$ pode ser representado por

$$x_t(\omega_k) = \sum_{h=1}^4 x_T(\omega_h) \epsilon_{h,t}(\omega_k) \quad (4.18)$$

para $t = 0, 1, 2$.

Por exemplo, considere o seguinte processo

x	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$t = 0$	1	1	1	1
$t = 1$	16	-4	-4	-4
$t = 2$	16	3	-24	9

podemos verificar que este processo é martingal, pois para $0 \leq s \leq t \leq T$, temos $E_P[x_t | \mathfrak{F}_s] = x_s$; logo, o processo $\{x_t\}$ pode ser representado por

$$x_t = 16\epsilon_{1,t} + 3\epsilon_{2,t} - 24\epsilon_{3,t} + 9\epsilon_{4,t}.$$

Note que nesta representação as coordenadas 16, 3, -24 e 9 são independentes de t !

Evidentemente esta representação de martingais é equivalente à representação de vetores em uma base vetorial e, continuando com a analogia, os processos $\{\epsilon_{h,t}\}$ para $h = 1, 2, 3, 4$ formam a base para essa representação.

Genericamente, o exemplo sugere que se o espaço amostral Ω tem K elementos então, existe uma base de K processos martingais que podem representar qualquer processo martingal através da forma definida pela equação 4.18.

Ainda, será interessante procurar uma base de m martingais $\{w_{h,t}\}$ que permita a representação do incremento de qualquer martingal $\{x_t\}$ em termos do incremento da base dos processos $\{w_{h,t}\}$ ou seja,

$$dx_t = \sum_{h=1}^m \alpha_{h,t} dw_{h,t} \quad (4.19)$$

onde, $\alpha_{h,t}$ são processos previsíveis.

O Teorema que veremos a seguir garante que a base para a representação na forma definida pela equação 4.19, são necessários $m = \nu - 1$ martingais e, que esta base pode ser construída de maneira tal que qualquer dois elementos distintos da base sejam ortogonais.

No exemplo anterior temos $\nu = 3$ e existe uma base ortogonal bidimensional dada por

w_1	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$t = 0$	0	0	0	0
$t = 1$	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$t = 2$	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$

w_2	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$t = 0$	0	0	0	0
$t = 1$	0	0	0	0
$t = 2$	0	1	-2	1

A construção desta base ficará mais clara após a demonstração do Teorema a seguir.

Porém, antes de estabelecermos o Teorema vejamos as definições formais de uma base no sentido da equação 4.19 e o conceito de informação representado por uma base.

Definição 4.9 Um conjunto finito de martingais $\{w_{1,t}\}, \dots, \{w_{m,t}\}$ é uma base se e somente se para todo martingal $\{x_t\}$ existem processos previsíveis

$$\{\alpha_{1,t}\}, \dots, \{\alpha_{m,t}\}$$

tal que para $1 \leq t \leq T$ temos

$$x_t = x_0 + \sum_{h=1}^m \int_0^t \alpha_{h,s} dw_{h,s} ,$$

ou de forma equivalente,

$$dx_t = \sum_{h=1}^m \alpha_{h,t} dw_{h,t} .$$

Ainda, se os processos $\{w_{1,t}\}, \dots, \{w_{m,t}\}$ são dois a dois ortogonais, então, a base $\{w_{1,t}\}, \dots, \{w_{m,t}\}$ é ortogonal. $\square$

Note que

$$x_t = x_0 + \sum_{h=1}^m \int_0^t \alpha_{h,s} dw_{h,s}$$

pode ser interpretado como uma representação previsível do processo martingal $\{x_t\}$. E, como todo processo martingal tem uma representação em uma base, a informação representada pela base não pode ser menor que $\{\mathfrak{F}_t\}$. Para formalizar este conceito vejamos como podemos definir a estrutura de informação gerada por um conjunto de processos estocásticos.

Definição 4.10 A estrutura de informação $\{\mathfrak{F}_t^{v_1, \dots, v_m}\}$ gerada pelos processos estocásticos $\{v_{1,t}\}, \dots, \{v_{m,t}\}$ é tal que

1. A partição $\mathfrak{F}_0^{v_1, \dots, v_m}$ é a partição mais grossa na qual as variáveis aleatórias $v_{1,0}, \dots, v_{m,0}$ são mensuráveis.
2. Para todo $1 \leq t \leq T$ a partição $\mathfrak{F}_t^{v_1, \dots, v_m}$ é a partição mais grossa mais fina que $\mathfrak{F}_{t-1}^{v_1, \dots, v_m}$ sobre a qual as variáveis aleatórias $v_{1,t}, \dots, v_{m,t}$ são mensuráveis.

$\square$

Finalmente o Teorema.

Teorema 4.20 Seja ν o índice de divisão da estrutura de informação $\{\mathfrak{F}_t\}$. Então, afirmamos que existe uma base ortogonal de $\nu - 1$ martingais

$$\{w_{1,t}\}, \dots, \{w_{\nu-1,t}\}.$$

Prova. Faremos a demonstração deste Teorema mostrando que é possível construir uma base com as características acima. Enumerando, a base a ser construída deve satisfazer às seguinte condições:

1. Os processos que definem as bases são dois a dois ortogonais.
2. Dado o sistema de k equações lineares que definem os incrementos dx_t^q , $1 \leq q \leq k$ a partir de um vértice $(t-1, \omega)$ da estrutura de informação, uma das equações deste sistema será combinação linear das $k-1$ outras. Logo, a dimensão da base definida no vértice $(t-1, \omega)$ será $k-1$.
3. O sistema formado pelas primeiras $k-1$ equações que definem a base tem solução única.
4. A informação gerada pela base, $\mathfrak{F}_t^{w_1, \dots, w_m}$ é a mesma gerada pela partição $\mathfrak{F}_t$.

Iniciamos com algumas considerações.

Seja a partição $\mathfrak{F}_{t-1}$ definida pelos conjuntos

$$\mathfrak{F}_{t-1} = \{f_{t-1}^1, \dots, f_{t-1}^j\}$$

onde, j é um número finito e, seja ν o índice de divisão desta estrutura de informação.

Agora, suponha que um dos elementos de $\mathfrak{F}_{t-1}$, digamos f_{t-1}^p , $1 \leq p \leq j$, tenha um split dado por $s(f_{t-1}^p) = \{f_t^{1^p}, \dots, f_t^{k^p}\}$, $1 \leq k^p \leq \nu$.

A idéia, agora, é mostrar que a k^p -ésima equação que define a base a partir do vértice f_{t-1}^p é uma combinação linear das $k^p - 1$ -ésima primeiras. Em particular se $k^p = \nu$ estaremos mostrando que a base é composta de $\nu - 1$ elementos!

Assumindo que a o processo x_t é martingal temos, por definição que $x_{t-1} = E_P[x_t | \mathfrak{F}_{t-1}]$, ou seja, sobre o vértice f_{t-1}^p temos,

$$x_{t-1}(f_{t-1}^p) = \frac{1}{P(f_{t-1}^p)} \sum_{q^p=1}^{k^p} x_t(f_t^{q^p}) P(f_t^{q^p}). \quad (4.20)$$

Agora escrevemos $x(f_t^{k^p})$ de forma conveniente. Então, utilizando a identidade

$$P(f_{t-1}^p) \equiv \sum_{q^p=1}^{k^p} P(f_t^{q^p}) \quad (4.21)$$

temos,

$$x(f_t^{k^p}) = \frac{1}{P(f_{t-1}^p)} \sum_{q^p=1}^{k^p} P(f_t^{q^p}) x(f_t^{k^p}). \quad (4.22)$$

Prosseguindo, note que como $f_{t-1}^p = \cup_{q^p=1}^{k^p} f_t^{q^p}$ e x_t é adaptado temos que

$$x_{t-1}(f_{t-1}^p) = x_{t-1}(f_t^{k^p}).$$

Então, utilizando a relação acima e as equações 4.20 e 4.22 podemos escrever o incremento $dx_t(f_t^{k^p})$ como

$$\begin{aligned} dx_t(f_t^{k^p}) &= x_t(f_t^{k^p}) - x_{t-1}(f_t^{k^p}) \\ &= \frac{1}{P(f_{t-1}^p)} \sum_{q^p=1}^{k^p} [x_t(f_t^{k^p}) - x_t(f_t^{q^p})] P(f_t^{q^p}) \\ &= \frac{1}{P(f_{t-1}^p)} \sum_{q^p=1}^{k^p-1} [x_t(f_t^{k^p}) - x_t(f_t^{q^p})] P(f_t^{q^p}). \end{aligned}$$

Note que a somatória na última passagem reduz-se a $k^p - 1$ termos pois, a diferença interna à somatória se anula para $q^p = k^p$.

Utilizando novamente o fato de x_t ser adaptado temos que

$$x_{t-1}(f_t^{k^p}) = x_{t-1}(f_t^{q^p})$$

para $1 \leq q^p \leq k^p$.

Portanto, $x_{t-1}(f_t^{k^p}) - x_{t-1}(f_t^{q^p}) = 0$ e, podemos somar/subtrair essa relação na equação para $dx_t(f_t^{k^p})$ sem nada alterar,

$$\begin{aligned} dx_t(f_t^{k^p}) &= \frac{1}{P(f_{t-1}^p)} \sum_{q^p=1}^{k^p-1} [x_t(f_t^{k^p}) - x_t(f_t^{q^p}) - x_{t-1}(f_t^{k^p}) + x_{t-1}(f_t^{q^p})] P(f_t^{q^p}) \\ &= \frac{1}{P(f_{t-1}^p)} \sum_{q^p=1}^{k^p-1} [dx_t(f_t^{k^p}) - dx_{t-1}(f_t^{q^p})] P(f_t^{q^p}). \end{aligned}$$

Finalmente, utilizando a identidade 4.21 na equação anterior, após alguma álgebra encontramos

$$dx_t(f_t^{k^p}) = - \sum_{q^p=1}^{k^p-1} \frac{P(f_t^{q^p})}{P(f_t^{k^p})} dx_t(f_t^{q^p}) .$$

Portanto, está satisfeito a condição número 2. Ainda, pela demonstração, podemos afirmar que para qualquer variável aleatória z temos que uma condição suficiente para que esta seja martingal é

$$dz_t(f_t^{q^p}) = - \sum_{r^p=1, r^p \neq q^p}^{k^p-1} \frac{P(f_t^{r^p})}{P(f_t^{q^p})} dz_t(f_t^{r^p}) . \quad (4.23)$$

Agora, mostramos que podemos construir a base dw_t^m de maneira tal que os processos $\{w_t^m\}$ sejam dois a dois ortogonais.

A matriz de tamanho $(k^p \times k_p - 1)$, a seguir ilustra a definição que faremos em seguida. Nessa representação, $\star$ é uma forma da equação 4.23.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \star & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \star & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \star & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \star \\ \star & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{array} \quad (4.24)$$

Formalmente temos para $m = 1$

$$\begin{aligned} dw_t^1(f_t^1) &= 1 , \\ dw_t^1(f_t^{q^p}) &= 0 \text{ para } 2^p \leq q^p \leq k^p - 1 , \\ dw_t^1(f_t^{k^p}) &= -\frac{P(f_t^{1^p})}{P(f_t^{k^p})} \end{aligned}$$

e, para $1 < m \leq k^p - 1$ temos,

$$\begin{aligned} dw_t^m(f_t^{q^p}) &= 1 \text{ para } 1 \leq q^p < m , \\ dw_t^m(f_t^{m^p}) &= - \sum_{h^p=1, h^p \neq m^p}^{k^p} \frac{P(f_t^{h^p})}{P(f_t^{m^p})} dw_t^m(f_t^{h^p}) , \\ dw_t^m(f_t^{q^p}) &= 0 \text{ para } m < q^p \leq k^p - 1 , \\ dw_t^m(f_t^{k^p}) &= 1 . \end{aligned}$$

Note que a definição acima é consistente com o fato de w ser martingal pois, a equação para $dw_t^m(f_t^{m^p})$ está de acordo com a equação 4.23. Afir-mamos que estas martingais são ortogonais. Então, assumindo por indução que a relação é verdadeira para $t - 1$, resta mostrar que

$$\langle w^m, w^n \rangle_t = \langle w^m, w^n \rangle_{t-1} + E_P[dw_t^m dw_t^n | \mathfrak{S}_{t-1}] = 0$$

ou seja que, $E_P[dw_t^m dw_t^n | \mathfrak{S}_{t-1}] = 0$.

Sobre f_{t-1}^p , a equação acima é dada por,

$$E_P[dw_t^m dw_t^n | \mathfrak{S}_{t-1}] = \frac{1}{P(f_{t-1}^p)} \sum_{r^p=1}^{k^p} dw_t^m(f_t^{r^p}) dw_t^n(f_t^{r^p}) P(f_t^{r^p}).$$

Para $m = 1$ e qualquer n que todos as multiplicações do tipo $dw_t^1 dw_t^n$ são nulas exceto para os elementos nas posições $r^p = 1$ e $r^p = k^p$. Segue, pela definição dos elementos da base, que os dois termos restantes no o cálculo da expectativa condicional são

$$E_P[dw_t^1 dw_t^n | \mathfrak{S}_{t-1}] = \frac{1}{P(f_{t-1}^p)} \left[1 \times P(f_t^{1^p}) + \left(-\frac{P(f_t^{1^p})}{P(f_t^{k^p})} P(f_t^{k^p}) \right) \right] = 0.$$

Portanto, para $m = 1$ e $2 \leq n \leq k^p - 1$ os processos são ortogonais.

Agora, resta mostrar que a relação continua verdadeira para $1 < m < n$. Note que, de acordo com a definição, os elementos que não se anulam dependem do índice m . Para ser mais específico, a multiplicação de dois incrementos da base tem os seguintes resultados

$$\begin{aligned} dw_t^m(f_t^{q^p}) dw_t^n(f_t^{q^p}) &= 1 \text{ para } 1^p \leq q^p < m^p, \\ dw_t^m(f_t^{q^p}) dw_t^n(f_t^{q^p}) &= - \sum_{h^p=1}^{m^p-1} \frac{P(f_t^{h^p})}{P(f_t^{m^p})} - \frac{P(f_t^{k^p})}{P(f_t^{m^p})} \text{ para } q^p = m^p, \\ dw_t^m(f_t^{q^p}) dw_t^n(f_t^{q^p}) &= 1 \text{ para } q^p = k^p \end{aligned}$$

e, as demais posições são nulas. Então os termos restantes no cálculo da expectativa condicional são

$$\begin{aligned} E_P[dw_t^1 dw_t^n | \mathfrak{S}_{t-1}] &= \frac{1}{P(f_{t-1}^p)} \left[\sum_{h=1}^{(m-1)^p} P(f_t^{h^p}) + \right. \\ &\quad \left(- \sum_{h=1}^{(m-1)^p} \frac{P(f_t^{h^p})}{P(f_t^{m^p})} - \frac{P(f_t^{k^p})}{P(f_t^{m^p})} \right) P(f_t^{m^p}) + P(f_t^{k^p}) \Big] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, esta demonstrado que os processos $\{w_t^m\}$ são ortogonais.

Agora mostraremos que $\mathfrak{S}_t^{\vec{w}} = \mathfrak{S}_t$. Isso será feito por indução.

Utilizando a representação definida pela matriz 4.24 temos que a partição gerada por w_t^1 (primeira coluna da matriz) resulta em

$$\mathfrak{S}_t^{w_t^1} = \{f_t^{1^p}, \cup_{q^p=2}^{k^p-1} f_t^{q^p}, f_t^{k^p}\}$$

e, a partição gerada por w_t^2 (segunda coluna da matriz) resulta em

$$\mathfrak{S}_t^{w_t^2} = \{f_t^{1^p} \cup f_t^{k^p}, f_t^{2^p}, \cup_{q^p=3}^{k^p-1} f_t^{q^p}\}$$

então, para que w_t^1 e w_t^2 sejam simultaneamente mensuráveis, a partição gerada por estas duas variáveis aleatórias deve ser

$$\mathfrak{S}_t^{w_t^1, w_t^2} = \{f_t^{1^p}, f_t^{2^p}, f_t^{k^p}, \cup_{q^p=3}^{k^p-1} f_t^{q^p}\}. \quad (4.25)$$

Note que, o conjunto acima foi obtido através da intersecção (termo a termo) dos elementos de $\mathfrak{S}_t^{w_t^1}$ e $\mathfrak{S}_t^{w_t^2}$. Agora, a partição gerada por w_t^1, w_t^2, w_t^3 onde,

$$\mathfrak{S}_t^{w_t^3} = \{f_t^{1^p} \cup f_t^{2^p} \cup f_t^{k^p}, f_t^{3^p}, \cup_{q^p=4}^{k^p-1} f_t^{q^p}\}$$

resulta no acréscimo do conjunto $f_t^{3^p}$ na partição descrita por 4.25; ou seja,

$$\mathfrak{S}_t^{w_t^1, w_t^2, w_t^3} = \{f_t^{1^p}, f_t^{2^p}, f_t^{3^p}, f_t^{k^p}, \cup_{q^p=4}^{k^p-1} f_t^{q^p}\}.$$

Então, como a partição gerada por w_t^m , $2 \leq m \leq k^p$ é

$$\mathfrak{S}_t^{w_t^m} = \{\cup_{q^p=1}^{m-1} f_t^{q^p} \cup f_t^{k^p}, f_t^{m^p}, \cup_{q^p=m+1}^{k^p-1} f_t^{q^p}\},$$

cada variável aleatória, w_t^m , acrescentada à estrutura de informação gera o elemento $f_t^{m^p}$ na partição anterior. Logo, ao final, teremos

$$\mathfrak{S}_t^{\vec{w}} = \{f_t^{1^p}, f_t^{2^p}, f_t^{3^p}, \dots, f_t^{k^p}\} = \mathfrak{S}_t !$$

Finalmente, mostramos que o sistema formado pelas $k^p - 1$ equações tem solução única. Assim estará demonstrado que estes elementos definem uma base.

Recordando que a k^p -ésima equação é uma combinação linear das $k^p - 1$ primeiras, a matriz é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & dw^2(f_t^{2^p}) & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & dw^3(f_t^{3^p}) & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & dw^{k^p}(f_t^{k^p}) \end{pmatrix}$$

Das caraterísticas desta matriz o determinante é dado por

$$\prod_{m=2}^{k^p-1} dw^{m^p}(f_t^{m^p}) \neq 0$$

logo, a matriz é invertível e conseqüentemente existe uma única solução para sistema de equações representado por esta matriz. $\square$

A prova do Teorema anterior sugere que existe uma relação simples entre os processos previsíveis da representação de martingais como soma de integrais estocásticas e a representação de martingais como exponenciais estocásticas. Vejamos o Teorema.

Teorema 4.21 Se o processo $\{x_t\}$ é tal que $x_t(\omega) \neq 0$ para todo t e ω , então existem processos previsíveis $\{\beta_{1,t}\}, \dots, \{\beta_{\nu-1,t}\}$ tal que

$$x_t = x_0 \varepsilon_t \left(\sum_{h=1}^{\nu-1} \beta_h \cdot w_h \right)$$

para todo $1 \leq t \leq T$.

Prova. Vejamos quem são esses processos. Como já vimos um processo martingal pode ser representado pela soma de integrais estocásticas

$$x_t = x_0 + \sum_{h=1}^m \int_0^t \alpha_{h,s} dw_{h,s} .$$

Utilizando a propriedade $d(\alpha \cdot x) = \alpha dx$ podemos escrever

$$x_t = x_0 + \int_0^t \sum_{h=1}^m d(\alpha_{h,s} \cdot w_{h,s}) ,$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} x_t &= x_0 + \int_0^t d \left(\sum_{h=1}^m \alpha_{h,s} \cdot w_{h,s} \right) \\ &= x_0 + \int_0^t x_{s-} d \left(\sum_{h=1}^m \frac{\alpha_{h,s}}{x_{s-}} \cdot w_{h,s} \right) \end{aligned}$$

evidentemente que a última passagem só é possível porque $\{x_t\} \neq 0$ para todo t , $0 \leq t \leq T$ e $\omega \in \Omega$.

Definindo

$$\beta_{h,s} = \frac{\alpha_{h,s}}{x_{s-}}$$

temos,

$$x_t = x_0 + \int_0^t x_{s-} d \left(\sum_{h=1}^m (\beta_{h,s} \cdot w_{h,s}) \right) .$$

Logo, pela definição de exponencial estocástica, x_t pode ser escrito como

$$x_t = x_0 \varepsilon_t \left(\sum_{h=1}^m \beta_h \cdot w_h \right) .$$

□

Reciprocamente se $\{x_t\}$ tem uma representação como uma exponencial estocástica, o processo $\alpha_{h,s} = \beta_h x_{s-}$ define uma representação previsível de $\{x_t\}$ como soma de integrais estocásticas.

4.6 A Decomposição de Doob

O último resultado que veremos nesse Capítulo sobre a teoria de processos martingais discretos diz respeito à decomposição de um processo adaptado como uma soma de martingais e processos previsíveis. Vejamos o Teorema.

Teorema 4.22 Decomposição de Doob. Dado um número real a , todo processo adaptado x tem uma decomposição única dada por

$$x_t = a_t + w_t$$

onde, $\{a_t\}$ é um processo previsível tal que $a_0 = a$ e $\{w_t\}$ é martingal

Prova. Primeiro provaremos a existência da decomposição. Para isso, defina

$$a_t = \begin{cases} a & \text{para } t = 0, \\ a_{t-1} - x_{t-1} + E_P[x_t|\mathfrak{F}_{t-1}] & \text{para } 1 \leq t \leq T. \end{cases}$$

$$w_t = \begin{cases} x_0 - a & \text{para } t = 0, \\ w_{t-1} + x_t - E_P[x_t|\mathfrak{F}_{t-1}] & \text{para } 1 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Pela definição é claro que a_t é previsível. Também, podemos verificar que w_t é P -martingal pois,

$$E_P[dw_t|\mathfrak{F}_{t-}] = E_P[x_t|\mathfrak{F}_{t-1}] - E_P[x_t|\mathfrak{F}_{t-1}] = 0$$

Ainda, devemos verificar que a decomposição é consistente. Então para $1 \leq t \leq T$, substituindo os valores de a_t e w_t temos

$$x_t = a_{t-1} - x_{t-1} + E_P[x_t|\mathfrak{F}_{t-1}] + w_{t-1} + x_t - E_P[x_t|\mathfrak{F}_{t-1}],$$

cancelando os termos encontramos $x_{t-1} = a_{t-1} + w_{t-1}$.

Para $t = 0$ temos $x_0 = a + x_0 - a = x_0$.

Agora devemos mostrar a unicidade. Suponha um processo $\{a'_t\}$ tal que $a'_0 = a$ e um processo martingal $\{w'_t\}$ tal que

$$x_t = a'_t + w'_t = a_t + w_t.$$

O diferencial da equação acima é dado por,

$$dx_t = da'_t + dw'_t = da_t + dw_t.$$

Calculando a expectativa condicional da equação acima temos $da'_t = da_t$. Como $a_0 = a = a'_0$ segue que $a_t = a'_t$ e conseqüentemente que $w_t = w'_t$. Portanto está demonstrado o Teorema. $\square$

Na decomposição do processo $\{x_t\}$, os processos $\{a_t\}$ e $\{w_t\}$ recebem nomes especiais. Vejamos a definição.

Definição 4.11 Na decomposição de Doob do processo adaptado $\{x_t\}$,

$$x_t = a_t + w_t,$$

o processo $\{a_t\}$ é denominado a *componente previsível* de $\{x_t\}$ e o processo martingal $\{w_t\}$ é denominado a *componente de inovação* de $\{x_t\}$. $\square$

Agora vamos apresentar as definições de submartingal e supermartingal.

Definição 4.12 Um processo adaptado $\{x_t\}$ é chamado de *submartingal* (*supermartingal*) relativo à uma medida de probabilidade P se e somente se

$$E_P[x_t|\mathfrak{F}_s] \geq (\leq) x_s$$

para $0 \leq s \leq t \leq T$. □

Note que se x é submartingal (supermartingal), como $E_P[x_t|\mathfrak{F}_{t-1}] - x_{t-1} = da_t$, segue que $da_t \geq (\leq) 0$ ou seja, que a é crescente (decrescente).

Por fim iremos estabelecer mais dois resultados sobre a decomposição de Doob de um processo adaptado. O primeiro resultado é colocado sobre a forma do processo previsível de projeção dual apresentado na definição a seguir. O resultado a ser apresentado garante que a componente previsível de um processo é sua projeção previsível dual.

O segundo resultado refere-se a decomposição de Doob de um processo P -martingal, quando a decomposição é efetuada em relação à uma outra medida de probabilidade, digamos Q . Esse Teorema pode ser interpretado como uma variação do Teorema de Girsanov.

Vejamos a definição.

Definição 4.13 Para um processo estocástico $\{x_t\}$ definimos a *projeção previsível* de x como o processo

$$(\pi x)_t = \begin{cases} x_0 & \text{para } t = 0, \\ E_P[x_t|\mathfrak{F}_{t-1}] & \text{para } 1 \leq t \leq T \end{cases}$$

e, o *processo previsível dual* de x como

$$(\pi^* x)_t = \begin{cases} x_0 & \text{para } t = 0, \\ x_0 + \sum_{s=1}^t E_P[dx_s|\mathfrak{F}_{s-1}] & \text{para } 1 \leq t \leq T. \end{cases}$$

□

Pela definição é evidente que os processos de projeção são previsíveis. Vamos ao Teorema.

Teorema 4.23 Seja x um processo adaptado. Então, o processo

$$x - \pi^* x$$

é martingal.

Prova. Primeiro note que podemos escrever

$$d(\pi^* x)_t = (\pi^* x)_t - (\pi^* x)_{t-1} = E_P[dx_t | \mathfrak{F}_{t-1}]. \quad (4.26)$$

Calculando a expectativa condicional desse processo temos,

$$\begin{aligned} E_P[d(x - (\pi^* x))_t | \mathfrak{F}_{t-1}] &= E_P[dx_t - d(\pi^* x)_t | \mathfrak{F}_{t-1}] \\ &= E_P[dx_t | \mathfrak{F}_{t-1}] - E_P[E_P[dx_t | \mathfrak{F}_{t-1}] | \mathfrak{F}_{t-1}] \\ &= E_P[dx_t | \mathfrak{F}_{t-1}] - E_P[dx_t | \mathfrak{F}_{t-1}] \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Ainda podemos mostrar a relação de dualidade entre os dois processos de projeção.

Teorema 4.24 Afirmamos que

$$E_P \left[\int_0^t (\pi x)_s dy_s \right] = E_P \left[\int_0^t x_s dy(\pi^* y)_s \right].$$

Prova. Para mostrar a relação acima mostramos que os incrementos são equivalente para qualquer t , $0 \leq t \leq T$. Logo é suficiente mostrar que

$$E_P[(\pi x)_t dy_t] = E_P[x_t dy(\pi^* y)_t]$$

para todo t .

Então, para $t = 0$ temos $E_P[(\pi x)_0 dy_0] = E_P[x_0 dy(\pi^* y)_0]$. Note que pela equação 4.26 temos que $d(\pi^* y)_0 = (\pi^* y)_0 = y_0$, segue imediatamente que

$$E_P[x_0 y_0] = E_P[x_0 y_0]$$

Resta mostra que a igualdade é verdadeira para qualquer t ou seja, que

$$E_P[(\pi x)_t dy_t] = E_P[x_t dy(\pi^* y)_t].$$

Utilizando a definição de projeção e a equação 4.26 temos,

$$E_P\{E_P[x_t|\mathfrak{F}_{t-1}]dy_t\} = E_P\{x_tE_P[dy_t|\mathfrak{F}_{t-1}]\}.$$

Aplicando o operador expectativa condicional em ambos os lados da equação e utilizando a lei das expectativas iteradas temos,

$$\begin{aligned} E_P[E_P\{E_P(x_t|\mathfrak{F}_{t-1})dy_t\}|\mathfrak{F}_{t-1}] &= E_P[E_P\{x_tE_P(dy_t|\mathfrak{F}_{t-1})\}|\mathfrak{F}_{t-1}] \\ E_P[E_P\{E_P(x_t|\mathfrak{F}_{t-1})dy_t|\mathfrak{F}_{t-1}\}] &= E_P[E_P\{x_tE_P(dy_t|\mathfrak{F}_{t-1})|\mathfrak{F}_{t-1}\}] \\ E_P\{E_P[x_t|\mathfrak{F}_{t-1}]E_P[dy_t|\mathfrak{F}_{t-1}]\} &= E_P\{E_P[x_t|\mathfrak{F}_{t-1}]E_P[dy_t|\mathfrak{F}_{t-1}]\}. \end{aligned}$$

□

O corolário a seguir é imediato do Teorema de Doob.

Corolário 4.2 Seja x um processo adaptado então, a decomposição de Doob do processo x com valor inicial da componente previsível igual a x_0 é dada por

$$x = \pi^*x + (x - \pi^*x).$$

Prova. Pela definição π^*x é previsível e $(\pi^*x)_0 = x_0$. Como acabamos de demonstrar o processo $x - \pi^*x$ é martingal. Finalmente, note que $(x - \pi^*x)_0 = x_0 - x_0 = 0$. Logo, o Teorema de Doob garante a decomposição. □

Finalmente suponha que Q seja uma medida de probabilidade sobre o espaço Ω e que $Q(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$. Então temos o seguinte corolário.

Corolário 4.3 Seja x um processo P -martingal. Então a decomposição de Doob de x relativo à medida Q tal que a componente de inovação seja nula em $t = 0$ é

$$x_t = x_0 + \int_0^t \frac{d\langle x, z \rangle}{z_{s-}} + \left(x_t - x_0 - \int_0^t \frac{d\langle x, z \rangle}{z_{s-}} \right).$$

Prova. Pelo Teorema de Girsanov temos que $x_t - x_0 - \int_0^t \frac{d\langle x, z \rangle}{z_{s-}}$ é um processo Q -martingal e, note que para $t = 0$ seu valor é nulo; ainda, o processo $x_0 + \int_0^t \frac{d\langle x, z \rangle}{z_{s-}}$ é previsível. Logo, o Teorema de Doob garante a decomposição. □

Capítulo 5

Extensões do Modelo Multi-Período Discreto

5.1 Introdução

Nesse Capítulo utilizaremos os conceitos do cálculo estocástico desenvolvidos no Capítulo 4 para extrairmos outros resultados do modelo Multi-Período Discreto. Na Seção 5.2 justificamos para processo da razão de verossimilhança, entre qualquer medida de preço de equilíbrio e a medida real de probabilidade, o nome *processo de ajustamento ao risco*. Mostraremos também que partindo de um sistema completo de preços obtemos uma representação do processo de ajustamento ao risco na forma de uma exponencial estocástica.

Na seção seguinte, calculamos uma fórmula para precificação de uma opção de compra (call) envolvendo a função distribuição de probabilidades binomial (um caso particular da seção anterior). Também mostramos que no limite essa fórmula converge para a fórmula de Black & Scholes.

Em seguida, na Seção 5.5, apresentamos uma nova caracterização para um sistema de preços completo. Em resumo, mostramos que um sistema de preços p que não permite estratégias de arbitragem é completo se e somente se o processo de preços descontados $\frac{p_{2,t}}{(1+r)^t}, \dots, \frac{p_{n,t}}{(1+r)^t}$ formam uma base para martingais com respeito à alguma medida de preço de equilíbrio.

Finalmente apresentamos uma interpretação do processo de ajustamento ao risco como o único fator de risco no Modelo Multi-Período Discreto. Isso é feito através da decomposição de Doob e o Teorema de Girsanov que implicam numa relação entre a componente previsível e de inovação da taxa

de retorno de todos os títulos. Especificamente, o prêmio pelo risco de todo título é proporcional à covariância condicional entre o processo da razão de verossimilhança e a componente de inovação da taxa de retorno do título.

5.2 Um Modelo Simples de Apreçamento

Nessa seção analisaremos um modelo Multi-Período discreto com dois títulos e estrutura de informação $\{\mathfrak{S}_t\}$ cujo índice de divisão é $\nu = 2$. O título 1 é uma renda fixa com taxa de juros constante; isto é, seu valor final e preços são

$$d_1 = (1 + r)^T,$$

$$p_{1,t} = (1 + r)^t.$$

Considere que o preço do título 2, $p_{2,t}$, é positivo para todo t , $0 \leq t \leq T$ e $\omega \in \Omega$. Ainda, a partição gerada pelos preços do título 2 representa toda informação para os agentes; ou seja, $\mathfrak{S}_t^{p_2} = \mathfrak{S}_t$, para todo t , $0 \leq t \leq T$.

Seja o retorno desse título definido por,

$$R_t = \frac{p_{2,t} - p_{2,t-1}}{p_{2,t-1}} = \frac{p_{2,t}}{p_{2,t-1}} - 1.$$

Definimos, para $1 \leq t \leq T$

$$\mu_t = E_P[R_t | \mathfrak{S}_{t-1}] = E_P \left[\frac{p_{2,t}}{p_{2,t-1}} | \mathfrak{S}_{t-1} \right] - 1,$$

$$dw_t = R_t - E_P[R_t | \mathfrak{S}_{t-1}] = \frac{p_{2,t}}{p_{2,t-1}} - E_P \left[\frac{p_{2,t}}{p_{2,t-1}} | \mathfrak{S}_{t-1} \right]$$

onde, w_0 é uma constante arbitrária e $p_{2,T} = d_2$.

Note que o processo $\{\mu_t\}$ é previsível e representa a expectativa condicional da taxa de retorno do título 2 durante o período $[t-1, t]$. Por sua vez, o processo w_t representa a componente de inovação da taxa de retorno do título 2 durante o período $[t-1, t]$ e, esse processo é martingal pois,

$$\begin{aligned} E_P[dw_t | \mathfrak{S}_{t-1}] &= E_P[R_t - E_P[R_t | \mathfrak{S}_{t-1}] | \mathfrak{S}_{t-1}] \\ &= E_P[R_t | \mathfrak{S}_{t-1}] - E_P[R_t | \mathfrak{S}_{t-1}] \\ &= 0. \end{aligned}$$

A taxa de retorno efetiva do título 2 durante o período $[t - 1, t]$ é dada por

$$R_t = \mu_t + dw_t ,$$

ou

$$\frac{p_{2,t}}{p_{2,t-1}} = 1 + \mu_t + dw_t . \quad (5.1)$$

Essa última decomposição baseada na decomposição de Doob, como uma soma de uma componente previsível e uma de inovação é única para cada w_0 . Vejamos por que esse fato é verdadeiro. Suponha que exista outra representação

$$\frac{p_{2,t}}{p_{2,t-1}} = 1 + \mu'_t + dw'_t$$

então $1 + \mu_t + dw_t = 1 + \mu'_t + dw'_t$. Calculando as expectativas condicionais encontramos

$$E_P[\mu_t | \mathfrak{F}_{t-1}] = E_P[\mu'_t | \mathfrak{F}_{t-1}] ,$$

logo, $\mu_t = \mu'_t$ para todo $1 \leq t \leq T$ e $dw_t = dw'_t$. Portanto, definindo $w_0 = w'_0$ temos $w_t = w'_t$ para todo t , $0 \leq t \leq T$.

Por indução sobre t , a representação da taxa efetiva de retorno, equação 5.1, encontramos a seguinte representação para os preços para todo t , $0 \leq t \leq T$; ($\prod_{s=1}^0 = 1$)

$$p_{2,t} = p_{2,0} \prod_{s=1}^t (1 + \mu_s + dw_s) . \quad (5.2)$$

Note também que a forma da equação 5.2 implica que

$$\begin{aligned} dp_t &= p_{t-1}(1 + \mu_t + dw_t) - p_{t-1} \\ &= p_{t-1}(\mu_t + dw_t) \\ &= p_{t-1}\mu_t dt + p_{t-1} dw_t \end{aligned}$$

onde, $dt = 1$.

Agora iremos deduzir as condições para construir uma medida de preço do equilíbrio nesse mercado. A idéia consiste em partir de uma medida de probabilidade Q no espaço Ω tal que $Q(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$, então utilizar o Teorema 3.7, que garante que Q é uma medida de preço do equilíbrio se $\frac{p_{2,t}}{(1+r)^t}$ for Q -martingal; e, então obter uma condição para Q ser uma medida de preço do equilíbrio.

Em seguida, mostraremos que satisfeita a condição imposta sobre a medida de probabilidade, podemos reconstruir a medida de preço do equilíbrio. Na realidade, mostraremos que essa medida é única.

Iniciando, considere Q como uma medida de probabilidade. Seja $\{z_t\}$ o processo da razão de verossimilhança e defina a transformação

$$v_t = w_t - \int_0^t \frac{d \langle w, z \rangle_s}{z_{s-}} .$$

Em termos do processo $\{v_t\}$, temos, pela equação 5.2, a seguinte representação para o preço do título 2

$$p_{2,t} = p_{2,0} \prod_{s=1}^t \left(1 + \mu_s + dv_s + \frac{d \langle w, z \rangle_s}{z_{s-}} \right)$$

ou, na forma descontada,

$$\frac{p_{2,t}}{(1+r)^t} = p_{2,0} \prod_{s=1}^t \left(\frac{1 + \mu_s + dv_s + \frac{d \langle w, z \rangle_s}{z_{s-}}}{1+r} \right) .$$

Afirmamos que a condição necessária e suficiente para $\frac{p_{2,t}}{(1+r)^t}$ ser Q -martingal é dada por

$$E_Q \left[\frac{1 + \mu_t + dv_t + \frac{d \langle w, z \rangle_t}{z_{t-}}}{1+r} \middle| \mathfrak{F}_{t-1} \right] = 1 . \quad (5.3)$$

Verifiquemos a afirmação acima. A razão $\frac{p_{2,t}}{(1+r)^t}$ é Q -martingal se e somente se

$$E_Q \left[d \left(\frac{p_{2,\cdot}}{(1+r)^{\cdot}} \right)_t \middle| \mathfrak{F}_{t-1} \right] = 0 , \quad (5.4)$$

expandindo o termo interno à expectativa encontramos

$$\begin{aligned} d \left(\frac{p_{2,\cdot}}{(1+r)^{\cdot}} \right)_t &= \frac{1}{(1+r)^{t-1}} \left[\frac{p_{2,t}}{(1+r)} - p_{2,t-1} \right] \\ &= \frac{1}{(1+r)^{t-1}} \left[p_{2,t-1} \left(\frac{1 + \mu_t + dv_t + \frac{d \langle w, z \rangle_t}{z_{t-1}}}{(1+r)} \right) - p_{2,t-1} \right] \\ &= \frac{1}{(1+r)^{t-1}} p_{2,t-1} \left[\frac{1 + \mu_t + dv_t + d \langle w, z \rangle_t / z_{t-1}}{(1+r)} - 1 \right] . \end{aligned}$$

Então, a equação 5.4 será verdadeira se e somente se

$$\frac{1}{(1+r)^{t-1}} p_{2,t-1} E_Q \left[\frac{1 + \mu_t + \frac{d\langle w, z \rangle_t}{z_{t-1}}}{(1+r)} - 1 | \mathfrak{F}_{t-1} \right] = 0.$$

Como $p_{2,t} \neq 0$ para todo t , temos que a condição necessária e suficiente para $\frac{p_{2,t}}{(1+r)^t}$ ser Q -martingal resume-se à equação 5.3.

Continuando a análise, como $\{w_t\}$ é P -martingal temos pelo Teorema de Girsanov que o processo $\{v_t\}$ é Q -martingal, logo $E_Q \left[\frac{dv_t}{1+r} | \mathfrak{F}_{t-1} \right] = 0$. Segue que a equação 5.3 reduz-se a

$$E_Q \left[\frac{1 + \mu_t + \frac{d\langle w, z \rangle_t}{z_{s-}}}{1+r} | \mathfrak{F}_{t-1} \right] = 1.$$

Note que como μ_t é previsível e já mostramos que $d\langle \cdot, \cdot \rangle_t$ também o é, temos que a equação acima reduz-se novamente a

$$1 + \mu_t + \frac{d\langle w, z \rangle_t}{z_{s-}} = 1 + r$$

ou seja, uma condição necessária e suficiente para que Q seja uma medida de preço do equilíbrio é dada por,

$$\frac{d\langle w, z \rangle_t}{z_{t-}} = -(\mu_t - r). \quad (5.5)$$

Prosseguindo, utilizamos a estrutura do modelo e a definição do processo da razão de verossimilhança para obter uma consequência da existência da medida de preço do equilíbrio. Contudo, antes de continuarmos a análise mostraremos um resultado que será utilizado a seguir.

Teorema 5.1 Se o índice de divisão de uma estrutura de informação $\{\mathfrak{F}_t\}$ for $\nu = 2$ então, qualquer martingal w tal que $\mathfrak{F}_t^w = \mathfrak{F}_t$, para todo t , $0 \leq t \leq T$ é uma base.

Prova. Para provar esse Teorema devemos mostrar que a equação $dx_t = \alpha_t dw_t$ tem uma solução previsível α_t para $1 \leq t \leq T$ (recorde que x é martingal). Então, seja $f \in \mathfrak{F}_{t-1}^w = \mathfrak{F}_{t-1}^x$; devemos definir $\alpha_t(f)$.

Seja $\{g_1, g_2\} \in \mathfrak{F}_t$ os subconjuntos de f resultante da sua divisão, denote essa divisão por $s(f) = \{g_1, g_2\}$. Agora $w_t(g_1) \neq w_t(g_2)$ (caso contrário

$s(f) = \{f\}$ e tanto dx_t quanto dw_t são nulos e $\alpha_t(f)$ pode ser qualquer número).

Recorde que no Capítulo 3 mostramos que uma condição necessária e suficiente para um processo v_t ser martingal é dado por $\langle dv_t, P \rangle (s(f)) = 0$, $\forall t \in [1, T]$ e $\forall f \in \mathfrak{F}_{t-1}$.

Em nosso caso específico temos,

$$dw_t(g_1)P(g_1) + dw_t(g_2)P(g_2) = 0,$$

$$dx_t(g_1)P(g_1) + dx_t(g_2)P(g_2) = 0,$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} dw_t(g_1) & dw_t(g_2) \\ dx_t(g_1) & dx_t(g_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(g_1) \\ P(g_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{pmatrix} P(g_1) \\ P(g_2) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ temos que as linhas da matriz são linearmente dependentes logo,

$$\begin{pmatrix} dw_t(g_1) \\ dw_t(g_2) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} dx_t(g_1) \\ dx_t(g_2) \end{pmatrix}$$

então, basta definirmos $\alpha_t(f) = \lambda$. □

Retornando, afirmamos que $\mathfrak{F}^w = \mathfrak{F}$, ou seja, que $\mathfrak{F}_t^w = \mathfrak{F}_t^{p_2}$ para todo t , $0 \leq t \leq T$.

Provaremos a afirmação por indução sobre t . Para $t = 0$, $w_0 = cte$; porém $p_{2,0}$ também o é. Portanto $\mathfrak{F}_0^w = \mathfrak{F}_0^{p_2}$.

Assuma que $\mathfrak{F}_{t-1}^w = \mathfrak{F}_{t-1}^{p_2}$. Então para $1 \leq t \leq T$ temos

$$w_t = \frac{p_{2,t}}{p_{2,t-1}} - E_P \left[\frac{p_{2,t}}{p_{2,t-1}} \middle| \mathfrak{F}_{t-1} \right] + w_{t-1}$$

e, por simplicidade considere $p_t = p_{2,t}$. Sejam $E \in \mathfrak{F}_t^p$ e $A \in \mathfrak{F}_{t-1}^p$ tal que $E \subseteq A$. Devemos mostrar que $E \in \mathfrak{F}_t^w$; para isso três condições devem ser satisfeitas,

- E deve ser um subconjunto de algum elemento de $\mathfrak{F}_{t-1}^w$.

Prova. Este fato é verdadeiro pois, pela hipótese de indução $\mathfrak{F}_{t-1}^w = \mathfrak{F}_{t-1}^p$ e $E \subseteq A$. □

- Para qualquer $\alpha, \beta \in E$ temos $w_t(\alpha) = w_t(\beta)$.

Prova. Para α temos

$$w_t(\alpha) = w_{t-1}(\alpha) + \frac{p_t(\alpha) - E_P[p_t|\mathfrak{F}_{t-1}](\alpha)}{p_{t-1}(\alpha)},$$

porém $\alpha, \beta \in E \subseteq A$, logo $w_{t-1}(\alpha) = w_{t-1}(\beta)$; $p_{t-1}(\alpha) = p_{t-1}(\beta)$; e $p_t(\alpha) = p_t(\beta)$ ($E \in \mathfrak{F}_t^p$).

Sobre A temos $E_P[p_t|\mathfrak{F}_{t-1}](\alpha) = \frac{1}{P(A)} \int_A p_t dP = E_P[p_t|\mathfrak{F}_{t-1}](\beta)$ pois, $E \subseteq A$. $\square$

- Para qualquer $\alpha \in E$ e qualquer $\beta \in A \setminus E$ temos $w_t(\alpha) \neq w_t(\beta)$

Prova. Assuma por absurdo que $w_t(\alpha) = w_t(\beta)$ então,

$$w_{t-1}(\alpha) + \frac{p_t(\alpha) - E_P[p_t|\mathfrak{F}_{t-1}](\alpha)}{p_{t-1}(\alpha)} = w_{t-1}(\beta) + \frac{p_t(\beta) - E_P[p_t|\mathfrak{F}_{t-1}](\beta)}{p_{t-1}(\beta)},$$

porém $w_{t-1}(\alpha) = w_{t-1}(\beta)$; $p_{t-1}(\alpha) = p_{t-1}(\beta)$ pois, $A \in \mathfrak{F}_{t-1}^w = \mathfrak{F}_{t-1}^p$.

Ainda. $E_P[p_t|\mathfrak{F}_{t-1}](\alpha) = \frac{1}{P(A)} \int_A p_t dP = E_P[p_t|\mathfrak{F}_{t-1}](\beta)$ pois, $E \subseteq A$. Logo para que a igualdade seja verdadeira temos que $p_t(\alpha) = p_t(\beta)$ mas, isso é impossível pois, $\alpha \in E \in \mathfrak{F}_t^p$, $\beta \in A \setminus E$ e $E \subseteq A$. $\square$

Reciprocamente, assuma que $E \in \mathfrak{F}_t^w$ e $E \subseteq A \in \mathfrak{F}_{t-1}^w$. Argumentado como anteriormente concluímos que

- E é um subconjunto de algum elemento de $\mathfrak{F}_{t-1}^p$.
- Qualquer que seja $\alpha, \beta \in E$ temos $p_t(\alpha) = p_t(\beta)$.
- Qualquer que seja $\alpha \in E$ e $\beta \in A \setminus E$ temos $p_t(\alpha) \neq p_t(\beta)$.

Portanto, $E \in \mathfrak{F}_t^p$.

Agora podemos afirmar que w é uma base ortogonal pois, como $\nu = 2$ e já mostramos que $\mathfrak{F}_t^w = \mathfrak{F}_t$, para todo t , $0 \leq t \leq T$ temos pelo Teorema 5.1 que w é uma base; ainda, essa base é ortogonal ($\nu - 1 = 1$).

Ainda, pelo Teorema 4.21, se um processo adaptado qualquer, digamos $x_t(\omega) \neq 0$ para todo t , $0 \leq t \leq T$, x_t pode ser representado como uma exponencial estocástica, $x_t = x_0 \varepsilon_t(\beta \cdot w)$, onde o processo $\{\beta_t\}$ é previsível.

Por definição o processo da razão de verossimilhança é tal que $z_t = E_P \left[\frac{Q}{P} | \mathfrak{F}_t \right] > 0$ para todo t , $0 \leq t \leq T$ e $\omega \in \Omega$ então, pelo Teorema 4.21, podemos escrever z em termos da base w ,

$$z_t = z_0 \varepsilon_t(\beta \cdot w)$$

onde, $\beta_s = \frac{\alpha_s}{z_{s-}}$ e, $dz_t = \alpha_t dw_t$ ou seja,

$$dz_t = z_{t-1} \beta_t dw_t.$$

Continuando, recordamos que $d \langle w, z \rangle_t = E_P[dw_t dz_t | \mathfrak{F}_{t-1}]$. Substituindo dz_t na equação acima temos

$$d \langle w, z \rangle_t = z_{t-1} \beta_t E_P[(dw)^2 | \mathfrak{F}_{t-1}] = z_{t-1} \beta_t d \langle w \rangle_t$$

pois, tanto β_t quanto z_{t-1} são $\mathfrak{F}_{t-1}$ -mensuráveis.

Então substituindo o resultado acima na equação 5.5 temos

$$\beta_t = \frac{-(\mu_t - r)}{d \langle w \rangle_t} \quad (5.6)$$

para $1 \leq t \leq T$.

Analisemos a equação 5.6.

- Se $d \langle w \rangle_t = 0$, então $dw_t = 0$ pois, $d \langle w \rangle_t = E_P[(dw)^2 | \mathfrak{F}_{t-1}] = \sum_{E \in \mathfrak{F}_{t-1}} \left(\frac{1}{P(E)} \int_E (dw_t)^2 dP \right) 1_E$. Segue desta análise que β_t é indefinido.
- Se $d \langle w \rangle_t \neq 0$ então, definindo σ_t^2 como a variância condicional de um processo $\{x_t\}$; ou seja, $\sigma_t^2 = E_P[(x_t - E_P[x_t | \mathfrak{F}_{t-1}])^2 | \mathfrak{F}_{t-1}]$, calculamos a variância condicional da taxa de retorno R_t

$$E_P[R_t | \mathfrak{F}_{t-1}] = E_P[\mu_t | \mathfrak{F}_{t-1}] + E_P[dw_t | \mathfrak{F}_{t-1}] = \mu_t$$

e, como $dw_t = R_t - E_P[r_t | \mathfrak{F}_{t-1}] = R_t - \mu_t$ temos,

$$\sigma_t^2(r) = E_P[(dw_t)^2 | \mathfrak{F}_{t-1}] = d \langle w \rangle_t = \sigma_t^2$$

e, a equação 5.6 pode ser escrita como

$$\beta_t = \frac{-(\mu_t - r)}{\sigma_t^2}. \quad (5.7)$$

Podemos interpretar β_t como o preço de mercado do risco. O numerador é o prêmio sobre a taxa de retorno livre de risco; o denominador é o risco (condicional). Então, a razão definida pela equação 5.7 representa uma forma de compararmos investimentos, o preço do risco. Note que quanto mais negativo for β melhor será a relação risco retorno! Também podemos interpretar β_t como o negativo de um índice de Sharpe condicional.

Prosseguindo, como $z_0 = E_P \left[\frac{Q}{P} \right] = 1$ podemos retornar à representação do processo $\{z_t\}$ em termos da base w e escrever

$$z_t = \varepsilon_t(\beta \cdot w) = \prod_{s=1}^t (1 + \beta_s dw_s);$$

substituindo β_t dado pela equação 5.7 na equação acima encontramos

$$z_t = \prod_{s=1}^t \left(1 - \frac{(\mu_s - r)}{\sigma_s^2} dw_s \right)$$

então, por ser $\{z_t\}$ o processo da razão de verossimilhança ($z_t(\omega) > 0$, para todo t , $0 \leq t \leq T$ e $\omega \in \Omega$), a existência de uma medida de preço do equilíbrio e acarreta a seguinte condição

$$\frac{\mu_t - r}{\sigma_t^2} dw_t < 1$$

para $1 \leq t \leq T$.

Finalmente mostraremos que satisfeita a condição acima podemos construir uma medida de preço do equilíbrio que satisfaz a equação 5.4. Então, assuma que para $1 \leq t \leq T$ e todo $\zeta \in \Omega$ tenhamos a seguinte condição satisfeita,

$$\frac{\mu_t(\zeta) - r}{\sigma_t^2(\zeta)} dw_t(\zeta) < 1.$$

Ainda, assuma que $\{z_t\}$ seja dado por

$$z_t(\zeta) = \prod_{s=1}^t \left[1 - \frac{\mu_s(\zeta) - r}{\sigma_s^2(\zeta)} dw_s(\zeta) \right] \quad (5.8)$$

para $1 \leq t \leq T$, e $z_0(\zeta) = 1$, para todo $\zeta \in \Omega$.

Definimos Q da seguinte forma,

$$Q(\zeta) = z_T(\zeta)P(\zeta). \quad (5.9)$$

Afirmamos que Q é uma medida de preço do equilíbrio. Vejamos os passos necessários para que isso seja verdadeiro.

- z_t é P -martingal. **Prova.** Note que $\frac{\mu_t - r}{\sigma_t^2}$ é previsível então, z_t satisfaz a seguinte equação

$$z_t = z_0 + \int_0^t z_{s-} \left(-\frac{\mu_s - r}{\sigma_s^2} dw_s \right),$$

como $\{w_t\}$ é P -martingal, pelo Teorema 4.9 temos que $\{z_t\}$ é P -martingal. $\square$

- Q é uma medida de probabilidade estritamente positiva.

Prova. Note que para todo $\zeta \in \Omega$ temos $Q(\zeta) > 0$ pois, $P(\zeta) > 0$ e $z_T(\zeta) > 0$. E, $Q(\Omega) = E_P[z_T] = E_P[z_0] = 1$. $\square$

- Afirmamos que $z_t = E_P \left[\frac{Q}{P} | \mathfrak{F}_t \right]$.

Prova. De fato se z é P -martingal, $E_P[z_T | \mathfrak{F}_t] = z_t$; ou seja, $E_P \left[\frac{Q}{P} | \mathfrak{F}_t \right] = z_t$. $\square$

Prosseguindo, da análise acima temos que dz_t pode ser representado por $dz_t = z_{t-} \beta_t dw_t$, onde $\beta_t = -\frac{\mu_t - r}{\sigma_t^2}$. E, como já mostramos que $d \langle w, z \rangle_t = d \langle w \rangle_t z_{t-} \beta_t$ e $d \langle w \rangle_t = \sigma_t^2$, rearranjando os termos, podemos encontrar a seguinte relação

$$\frac{d \langle w, z \rangle_t}{z_{t-}} = -(\mu_t - r).$$

Contudo, a relação acima é a mesma da equação 5.5. Portanto, nossa definição para medida de preço do equilíbrio é consistente e o processo de preços descontado do título número 2 é Q -martingal. Portanto, pelo Teorema 3.7 é imediato que Q seja uma medida de preço de equilíbrio!

Outro ponto importante da análise diz respeito à unicidade da medida de preço do equilíbrio. Mostraremos que essa medida é única. A idéia consiste em supor a existência de uma outra medida de preço do equilíbrio $\tilde{Q}$ e através da definição, equação 5.9, mostrar que $\tilde{Q} = Q$.

Então suponha que $\tilde{Q}$ seja uma outra medida de preço do equilíbrio. Segue imediatamente que $\left\{\frac{p_{2,t}}{(1+r)^t}\right\}$ é $\tilde{Q}$ -martingal. Sendo $\tilde{z}_t = E_P\left[\frac{\tilde{Q}}{\tilde{P}}|\mathfrak{F}_t\right]$ o processo da razão de verossimilhança, segue da análise acima que a equação 5.5 é verdadeira para o processo $\tilde{z}$ ou seja,

$$\frac{d < w, \tilde{z} >_t}{\tilde{z}_{s-}} = -(\mu_t - r) .$$

Ainda, como $\mathfrak{F}_t^w = \mathfrak{F}_t$ para todo t , $0 \leq t \leq T$, $\nu = 2$ e w é martingal temos, pelo Teorema 5.1 que w é uma base ortogonal e pelo Teorema 4.21 que $\{\tilde{z}_t\}$ deve satisfazer

$$d\tilde{z}_t = \tilde{z}_{t-}\tilde{\beta}_t dw_t \quad (5.10)$$

onde $\{\tilde{\beta}_t\}$ é um processo previsível.

Porém, como anteriormente $\tilde{\beta}_t = \beta_t = \frac{-\mu_t - r}{\sigma_t^2}$. Portanto, como $\tilde{z}_0 = z_0 = 1$ temos pela equação 5.10 que $\tilde{z}_t = z_t$ para $1 \leq t \leq T$. Finalmente, pela equação 5.9 temos imediatamente que $\tilde{Q} = Q$.

Como consequência (Teorema 3.3 e Teorema 3.4) não existem estratégias de arbitragem e o sistema de preços é completo. Então, utilizando o Corolário 4.1 temos que o processo $\left\{z_t \frac{p_{2,t}}{(1+r)^t}\right\}$ é P -martingal; em outras palavras, o processo z_t transforma o processo de preços descontados numa P -martingal removendo o *spread*. Por essa razão esse processo é chamado de *processo de ajustamento ao risco*.

Note que pela definição 5.8 temos imediatamente que o processo de ajustamento ao risco pode ser representado por uma exponencial estocástica,

$$z_t = \varepsilon_t \left(-\frac{\mu - r}{\sigma^2} \cdot w \right) .$$

Retornando ao modelo podemos aplicar esse resultado para calcular o preço de uma opção. Suponha que p_3 seja uma opção européia sobre o título número 2 com maturidade T e exercício a . Como esse mercado é completo todos os consumos são realizáveis. Ainda, $z_t \frac{p_{3,t}}{(1+r)^t}$ é P -martingal logo, o preço inicial dessa *security* pode ser calculado por

$$\begin{aligned} p_{3,0} &= E_P \left[z_T \frac{p_{3,T}}{(1+r)^T} \right] \\ &= \frac{1}{(1+r)^T} E_P \left[\max\{0, p_{2,T} - a\} \varepsilon_T \left(-\frac{\mu_t - r}{\sigma_t^2} \cdot w \right) \right] . \end{aligned}$$

Prosseguindo com os resultados, mostraremos que o prêmio sobre a taxa de juros livre de risco é a expectativa condicional do incremento da componente de inovação com respeito à medida de preço do equilíbrio. Vejamos o Teorema.

Teorema 5.2 O prêmio sobre a taxa de retorno sem risco é a expectativa condicional do incremento da componente de inovação com respeito à medida de preço do equilíbrio; ou seja,

$$-(\mu_t - r) = E_Q[dw_t | \mathfrak{F}_{t-1}] .$$

Prova. Utilizando o Teorema 4.18 podemos escrever

$$\frac{E_P[z_t dw_t | \mathfrak{F}_{t-1}]}{z_{t-1}} = E_Q[dw_t | \mathfrak{F}_{t-1}] ,$$

somando e subtraindo $z_{t-1} dw_t$ no lado esquerdo da equação acima temos,

$$\frac{E_P[z_t dw_t \pm z_{t-1} dw_t | \mathfrak{F}_{t-1}]}{z_{t-1}} = \frac{E_P[dz_t dw_t | \mathfrak{F}_{t-1}]}{z_{t-1}} - E_P[dw_t | \mathfrak{F}_{t-1}] ;$$

agora, $E_P[dw_t | \mathfrak{F}_{t-1}] = 0$ pois, $\{w_t\}$ é P -martingal. Logo,

$$\frac{E_P[dz_t dw_t | \mathfrak{F}_{t-1}]}{z_{t-1}} = E_Q[dw_t | \mathfrak{F}_{t-1}] .$$

Ainda, recorde que $E_P[dz_t dw_t | \mathfrak{F}_{t-1}] = d \langle w, z \rangle_t$ portanto, da equação 5.5 temos o resultado esperado

$$\frac{d \langle w, z \rangle_t}{z_{t-}} = -(\mu_t - r) = E_Q[dw_t | \mathfrak{F}_{t-1}] .$$

□

5.3 Uma Fórmula Explícita para Apreçamento

O objetivo dessa seção é apresentar um modelo cuja componente de inovação do título de risco, nesse caso o título número 2, seja um *passeio aleatório*

simétrico sobre a reta. É importante salientar que esse modelo, denominá-lo-emos binomial, é apenas um caso especial do modelo apresentado na seção anterior. Contudo sua importância é tal que no limite sua fórmula converge para a conhecida fórmula de Black & Scholes que é considerada, hoje em dia, a fórmula mais utilizada nas Ciências Sociais.

Também, introduzimos nessa seção a representação de um modelo sobre a estrutura de um reticulado, aproveitando para apresentar um modelo computacional para o cálculo de opções baseado no modelo a ser apresentado.

Iniciamos nossa análise definindo um passeio aleatório simétrico sobre a reta.

Definição 5.1 Um *passeio aleatório simétrico sobre a reta* descreve o movimento de uma partícula sobre os pontos $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ da reta dos inteiros. Nesse processo cada passo para direita ou esquerda é dado em intervalos de tempo iguais e, as probabilidades de movimento em qualquer uma das direções são iguais e independentes da posição da partícula. $\square$

De forma mais específica, considere que a partícula esteja na posição I_0 no instante $t = 0$. Após $t = T$ intervalos de tempo a posição da partícula será dada por

$$x_T = I_0 + \sum_{t=1}^T y_t \quad (5.11)$$

onde, $y_1, \dots, y_T$ são variáveis aleatórias independentes com distribuição dada por $P(y_i = +1) = P(y_i = -1) = 1/2$.

O espaço de estados Ω consiste de todas as seqüências de T elementos da forma $\{\pm 1, \pm 1, \dots\}$ ou seja, o espaço é composto de 2^T elementos (seqüências) $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_{2^T}\}$. Ainda, como cada seqüência é equiprovável temos que $P(\omega_k) = 2^{-T}$ para $1 \leq k \leq 2^T$.

Note que após t intervalos de tempo existem apenas $t+1$ valores possíveis para x_t ; ou seja, para cada instante t existe um número de seqüências $y_1, y_2, \dots, y_t$ cuja soma (x_t) resulta num mesmo valor. Representando a posição da partícula no instante t por $y_t = t - 2j$, $0 \leq j \leq t$ onde, j , representa o número de realizações $y_t = -1$; segue que o número de seqüências cuja soma resulta em um mesmo valor de x_t é dada pelo coeficiente binomial $\binom{t}{j}$.

Então, a distribuição de probabilidades dessa partícula é dada por

$$P(x_t = t - 2j) = \binom{t}{j} 2^{-t}$$

Definimos um *reticulado* como a representação no plano-xy dos possíveis valores (t, x_t) (nós) conectados por semi retas que indicam as possíveis evoluções do nó (t, x_t) para o nó $(t+1, x_t \pm 1)$. Sem perda de generalidade considere $I_0 = 0$ então, podemos representar a posição da partícula pelo diagrama (reticulado) da Figura 5.1

Figura 5.1: Reticulado

Observe que o coeficiente binomial representa o número de caminhos no reticulado que levam a um mesmo ponto.

Voltando ao modelo, considere um mercado com três títulos. O primeiro título é uma renda fixa com taxa de juros constante r ; a componente previsível da taxa de retornos do título número 2 é uma constante, $\mu_t = \mu$ e a componente de inovação é a martingal $w_t = \sigma x_t$. O título número 3 é uma opção Européia de compra sobre o título número 2 com preço de exercício a .

Utilizando a mesma definição para as componentes previsível e de inovação da taxa de retorno do ativo número 2, temos que os preços desses títulos são dados a seguir: para $t=T$

$$d_1 = (1 + r)^T,$$

$$d_2 = p_{2,0} \prod_{t=1}^T [1 + \mu + \sigma dx_t] ,$$

$$d_3 = \max\{(d_2 - a), 0\} ,$$

e, para um instante t qualquer temos

$$p_{1,t} = (1 + r)^t ,$$

$$p_{2,t} = p_{2,0} \prod_{s=1}^t [1 + \mu + \sigma dx_s] .$$

Nosso objetivo é obter uma fórmula para apreçar a opção Européia nesse mercado, ou seja, uma fórmula que calcule o preço do título número 3.

Agora iremos construir uma medida de preço do equilíbrio nesse mercado. Para isso utilizaremos o mesmo raciocínio da seção anterior. Então, vale a condição imposta pela equação 5.5 com $\mu_t = \mu$.

Seja $\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_t^x$ a estrutura de informação desse modelo; o índice de divisão dessa estrutura é $\nu = 2$; se mostrarmos que $\{x_t\}$ é martingal sobre essa estrutura de informação então, pelo Teorema 5.1 teremos que $\{x_t\}$ é uma base ortogonal. Vejamos a demonstração.

Para mostrar que $\{x_t\}$ é martingal basta mostrar que $E_P[dx_t|\mathfrak{F}_{t-1}] = 0$. Note que

$$dx_t = I_0 + \sum_{i=1}^t y_i - \left(I_0 + \sum_{i=1}^{t-1} y_i \right) = y_t .$$

Então, recordando que $\{y_t\}$ são independentes temos,

$$E_P[dx_t|\mathfrak{F}_{t-1}] = E_P[y_t|\mathfrak{F}_{t-1}] = E_P[y_t] = 0 .$$

De maneira análoga à seção anterior, pelo Teorema 4.21 temos que o processo da razão de verossimilhança pode ser representado por uma exponencial estocástica e conseqüentemente vale a seguinte relação

$$dz_t = z_{t-1} \beta_t dx_t$$

onde, β_t é um processo previsível. Argumentando como anteriormente encontramos a equação 5.6 com $\mu_t = \mu$. Agora, como w_t é uma martingal e $dx_t = \pm 1$ o processo de variância condicional torna-se constante no tempo,

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= E_P[(dw_t)^2|\mathfrak{F}_{t-1}] \\ &= E_P[\sigma^2(dx_t)^2|\mathfrak{F}_{t-1}] \\ &= \sigma^2 . \end{aligned}$$

Note que $E_P[(dw_t)^2|\mathfrak{F}_{t-1}] = dt < w >_t$.

Portanto,

$$\beta_t = \lambda = -\frac{\mu - r}{\sigma^2}.$$

Então, da representação de $\{z_t\}$ como uma exponencial estocástica temos

$$z_t = \prod_{s=1}^t [1 + \lambda \sigma dx_s], \quad (5.12)$$

logo, a medida de preço do equilíbrio Q fica definida pela equação 5.9. E, provar sua unicidade segue os mesmos passos da seção anterior.

Analisando a equação 5.12, a não existência de arbitragem é garantida por $\lambda \sigma dx_t < 1$ para $1 \leq t \leq T$ ou ainda, como $dx_t = \pm 1$, por

$$-1 < \lambda \sigma < 1 \quad (5.13)$$

ou ainda, $r - \sigma < \mu < r + \sigma$.

Retornando à análise dos preços temos que após T intervalos de tempo existem $T+1$ preços possíveis para o título número 2, equivalentes às $T-2j$, $0 \leq j \leq T$ possíveis posições de uma partícula que se move segundo um passeio aleatório sobre a reta. Denotando essa posição por um índice superior temos que os preços do título número 2 são descritos pela seguinte equação

$$d_2^{(T-2j)} = p_{2,0}(1 + \mu + \sigma)^{T-j}(1 + \mu - \sigma)^j \quad (5.14)$$

Note que a equação acima representa $T-j$ incrementos $dx_t = 1$ e j incrementos $dx_t = -1$ (como deveria ser!).

Da análise acima temos imediatamente que a probabilidade de se atingir um dos pontos descritos pela equação 5.14 é dada por

$$P\{d_2 = p_{2,0}(1 + \mu + \sigma)^{T-j}(1 + \mu - \sigma)^j\} = \binom{T}{j} 2^{-T}.$$

Agora vamos relacionar o preço de exercício aos possíveis valores finais do título número 2. Note que para a opção de compra ter valor a deve ser menor que o maior preço possível do título número 2; isto é, $a < p_{2,0}(1 + \mu + \sigma)^T$.

Definimos

$$\kappa(a) = \arg \max\{j | 0 \leq j \leq T \wedge p_{2,0}(1 + \mu + \sigma)^{T-j}(1 + \mu - \sigma)^j > a\},$$

ou seja, $\kappa(a)$ define o número máximo de incrementos $dx_t = -1$ para que a opção tenha valor diferente de 0. Então, para $j = \kappa(a)$, a é tal que

$$\begin{aligned} & p_{2,0}(1 + \mu + \sigma)^{T-\kappa(a)-1}(1 + \mu - \sigma)^{\kappa(a)+1} \\ & \leq a < p_{2,0}(1 + \mu + \sigma)^{T-\kappa(a)}(1 + \mu - \sigma)^{\kappa(a)}. \end{aligned}$$

Finalmente, como esse mercado é completo, conhecemos a distribuição de probabilidades dos preços do título número 2 e o processo da razão de verossimilhança z_t , equação 5.12, transforma o processo $\left\{ \frac{p_{3,t}}{(1+r)^t} z_t \right\}$ em um processo P -martingal, podemos calcular a equação 5.11 e obter o preço da opção no instante $t = 0$,

$$\begin{aligned} p_{3,0} &= E_P \left[\frac{p_{3,T}}{(1+r)^T} z_T \right] \\ &= \frac{1}{(1+r)^T} E_P [\max\{0, p_{2,T} - a\} z_T] \\ &= \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{j=0}^T [\max\{(p_{2,0}(1 + \mu + \sigma)^{T-j}(1 + \mu + \sigma)^j - a), 0\} \\ &\quad \binom{T}{j} 2^{-T} (1 - \lambda\sigma)^{T-j} (1 + \lambda\sigma)^j], \end{aligned}$$

utilizando a definição de $\kappa(a)$ temos

$$\begin{aligned} p_{3,0} &= \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{j=0}^{\kappa(a)} [\{p_{2,0}(1 + \mu + \sigma)^{T-j}(1 + \mu + \sigma)^j - a\} \\ &\quad \binom{T}{j} 2^{-T} (1 - \lambda\sigma)^{T-j} (1 + \lambda\sigma)^j]. \end{aligned}$$

Escrevendo a fórmula acima em termos da diferença das somas, o preço dessa opção pode ser colocado de forma mais conveniente utilizando uma função de distribuição binomial. Vejamos uma breve introdução a esse conceito.

Considere uma variável aleatória y definida como o número de sucessos numa sequência de m experimentos aleatórios tal que o resultado do experimento é um sucesso ou um fracasso. A probabilidade de sucesso é sempre π e os resultados dos experimentos são independentes. Então y pode assumir os valores $0, 1, 2, \dots, m$ e sua distribuição é

$$P(y = j) = \binom{m}{j} \pi^j (1 - \pi)^{m-j}.$$

A função de distribuição de y , denotada por $B_m(j, \pi)$ é dada por

$$B_m(j, \pi) = P(y \leq j) = \sum_{h=0}^j \binom{m}{h} \pi^h (1 - \pi)^{m-h}.$$

Após alguma álgebra encontramos que as transformações que permitem que a equação 5.15 possa ser escrita em termos da função de distribuição $B_m(j, \pi)$ são:

$$\begin{aligned} m &= T, \\ j &= \kappa(a), \\ \pi &= \frac{(1 + \mu - \sigma)(1 + \lambda\sigma)}{2(1 + r)}, \\ \pi' &= \frac{1 + \lambda\sigma}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, o preço da opção é dado por

$$p_{3,0} = p_{2,0} B_T \left(\kappa(a), \frac{(1 + \mu - \sigma)(1 + \lambda\sigma)}{2(1 + r)} \right) - a \frac{1}{(1 + r)^T} B_T \left(\kappa(a), \frac{1 + \lambda\sigma}{2} \right). \quad (5.15)$$

Como π e π' são probabilidades, devem satisfazer

$$0 < \frac{(1 + \mu - \sigma)(1 + \lambda\sigma)}{2(1 + r)} < 1 \text{ e } 0 < \frac{1 + \lambda\sigma}{2} < 1$$

e essas condições são garantidas por $0 < 1 + \mu - \sigma < 1$, $r \geq 0$ e pela própria condição de não existência de arbitragem. Vejamos a primeira condição,

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{(1 + \mu - \sigma)(1 + \lambda\sigma)}{2(1 + r)} \\ 0 &< (1 + \mu - \sigma)(1 + \lambda\sigma) \\ 0 &< 1 + \lambda\sigma \end{aligned}$$

pois, $0 < 1 + \mu - \sigma$. Logo, pela equação 5.13 está demonstrada a primeira condição. Agora, mostraremos a segunda condição,

$$\frac{(1 + \mu - \sigma)(1 + \lambda\sigma)}{2(1 + r)} < 1$$

mas, $(1 + \mu - \sigma)(1 + \lambda\sigma) < (1 + \lambda\sigma)$ pois, $1 + \mu - \sigma < 1$. Logo,

$$\frac{(1 + \mu - \sigma)(1 + \lambda\sigma)}{2(1 + r)} < \frac{(1 + \lambda\sigma)}{2(1 + r)}$$

então, basta provar que $\frac{(1+\lambda\sigma)}{2(1+r)} < 1$ ou seja, $1 - \frac{(\mu-r)}{\sigma} < 1$. Rearranjando os termos temos, $r - \sigma < \mu + 2r\sigma$; contudo, $r - \sigma < \mu \leq \mu + 2r\sigma$.

Vejamos as condições da segunda probabilidade,

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1 + \lambda\sigma}{2} \\ 0 &< 1 + \lambda\sigma, \end{aligned}$$

por sua vez,

$$\begin{aligned} \frac{1 + \lambda\sigma}{2} &< 1 \\ \lambda\sigma &< 1. \end{aligned}$$

Antes de prosseguirmos com a análise e mostrar que a equação 5.15 converge para a fórmula de Black & Scholes, mostraremos como utilizar a estrutura de um reticulado para obter um algoritmo para apreçar uma opção Européia nesse modelo.

Definimos $u \equiv (1 + \mu + \sigma)$ e $d \equiv (1 + \mu - \sigma)$ como os fatores de subida e descida respectivamente, ou seja, u representa a realização de um incremento +1 e d representa a realização de um incremento -1.

Podemos associar cada nó do reticulado com uma ocorrência num certo instante de tempo do preço do título número 2. Pela equação 5.14 o preço na posição $t - 2j$ é dado por $p_{2,0}u^{t-j}d^j$ então, dada um posição qualquer do reticulado, $(t - 2j, t)$, é fácil calcular o preço associado à essa posição. Em particular para apreçar uma opção Européia, os únicos preços necessários são os $(T + 1)$ preços finais!

O próximo passo consiste em calcular os possíveis valores do título número 3 (opção) no instante $t = T$ (no vencimento). Por definição, esses valores são dados por $\max\{(d_2 - a), 0\}$. Como os $T + 1$ possíveis valores do título número 2 já foram calculados basta fazer $T + 1$ comparações para encontrar os valores finais da opção. Note que iniciando as comparações a partir da posição $(T - 2j, T)$ com $j = 0, 1, \dots, T$ a primeira posição em que o valor da opção é nulo é dado por $j = \kappa(a) + 1$; também para todo $j > \kappa(a) + 1$ o valor da opção será sempre nulo!

Agora, utilizando o critério de preço de equilíbrio (livre de arbitragem) devemos calcular o processo de ajustamento ao risco para cada um dos $T + 1$ preços finais. Em uma posição equivalente à da partícula, descrita por $T - 2j$, $0 \leq j \leq t$, o valor de z_T pode ser calculado pela equação 5.12,

$$z_T^{(T-2j)} = (1 + \lambda\sigma)^{T-j}(1 - \lambda\sigma)^j ;$$

segue imediatamente que o preço de equilíbrio da opção será dado por

$$p_{3,0} = \frac{1}{(1+r)^T} E_P[d_3 z_T] .$$

Então como $P(d_3^{(T-2j)}) = \binom{T}{j} 2^{-T}$ fica evidente que podemos construir um algoritmo para o cálculo de uma opção em $O(T)$.

Note que, mesmo utilizando uma aproximação como a de Stirling, o cálculo do coeficiente binomial pode limitar a utilização do algoritmo para T muito grande (existe uma limitação na precisão dos tipos de variáveis). Essa limitação pode ser contornada através da construção de um novo tipo (uma variável com maior precisão), contudo; a construção desse novo tipo implica na construção dos operadores matemáticos que atuam sobre ele e assim, o procedimento pode tornar-se muito trabalhoso.

Podemos contornar esse problema introduzindo um método mais geral (uma forma discretizada no reticulado) para calcular o valor da opção. Existem duas grandes vantagens na utilização desse método. Primeiro, eliminamos o cálculo de números fatoriais. Segundo, esse método permite que opções com características exóticas como por exemplo opções Americanas (opções que podem ser exercidas em qualquer instante do intervalo $[1, T]$), possam ser facilmente adaptadas a um algoritmo genérico.

Contudo, utilizando esse método o algoritmo terá ordem $O(T^2)$ mas, isso é um preço pequeno em comparação à flexibilidade e robustez que ganhamos.

O método é uma consequência imediata da definição da medida de preço do equilíbrio e, consiste em calcular o preço da opção em todos os nós do instante t a partir dos preços calculados no instante $t + 1$.

No modelo em questão, $\nu(t, \omega) = 2$, $0 \leq t \leq T - 1$ e $\omega \in \Omega$, utilizando a definição da medida de preço do equilíbrio temos,

$$p_{t-1}[f_{t-1}(\omega)] = \frac{1}{1+r} \{ Q[t, f_{t-1}^1(\omega)] p_t[f_{t-1}^1(\omega)] + Q[t, f_{t-1}^2(\omega)] p_t[f_{t-1}^2(\omega)] \} \quad (5.16)$$

onde, $s(f_{t-1}(\omega)) = \{f_{t-1}^1(\omega), f_{t-1}^2(\omega)\}$ e $Q[t, f_{t-1}^2(\omega)] = 1 - Q[t, f_{t-1}^1(\omega)]$.

Recorde que $Q[f_t(\omega)|\mathfrak{F}_{t-1}](\omega) = Q[t, f_t(\omega)]$ logo, $Q[t, f_t(\omega)]$ é uma probabilidade condicional. Segue que devemos determinar essas medidas de probabilidade condicional para todo $1 \leq t \leq T$ e $\omega \in \Omega$.

No modelo em questão esse cálculo é bem simples pois,

$$p_t[f_{t-1}^1(\omega)] = up_{t-1}[f_{t-1}(\omega)] ,$$

$$p_t[f_{t-1}^2(\omega)] = dp_{t-1}[f_{t-1}(\omega)] .$$

Logo, substituindo esses valores na equação 5.16 e rearranjando temos,

$$Q[t, f_{t-1}^1(\omega)] = q = \frac{1 + r - d}{u - d}$$

para todo $1 \leq t \leq T$ e $\omega \in \Omega$; ou seja, como μ , σ e r são constantes, a medida de probabilidade condicional também o é.

Mostraremos, agora, que a equação 5.15 converge para a conhecida fórmula de Black & Scholes. Para obter o limite dividimos o intervalo $[0, T]$ em m intervalos de tamanho T/m tal que a cada instante m tenhamos $m + 1$ possíveis preços, o espaço de estados tem seu tamanho aumentado para 2^m elementos equiprováveis com probabilidade 2^{-m} e, o número de seqüências que terminam em um mesmo ponto é dado por $\binom{m}{j}$. Ainda, definimos

$$R = \frac{mr}{T}, M = \frac{m\mu}{T}, \Sigma = \frac{\sqrt{m}\sigma}{\sqrt{T}}$$

Calculemos um resultado intermediário. Primeiro

$$\begin{aligned} E_P \left[\ln \frac{p_{2,T}}{p_{2,0}} \right] &= E_P [\ln \{ (1 + \mu + \sigma)^{m-j} (1 + \mu - \sigma)^j \}] \\ &= \sum_{j=0}^m \ln \{ (1 + \mu + \sigma)^{m-j} (1 + \mu - \sigma)^j \} \binom{m}{j} 2^{-m} \\ &= \sum_{j=0}^m m \ln(1 + \mu + \sigma) \binom{m}{j} 2^{-m} \\ &\quad + \sum_{j=0}^m j \ln \left(\frac{1 + \mu - \sigma}{1 + \mu + \sigma} \right) \binom{m}{j} 2^{-m} \\ &= m 2^{-m} \ln(1 + \mu + \sigma) \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \\ &\quad + 2^{-m} \ln \left(\frac{1 + \mu - \sigma}{1 + \mu + \sigma} \right) \sum_{j=0}^m j \binom{m}{j} , \end{aligned}$$

como $\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} = 2^m$ e $\sum_{j=0}^m j \binom{m}{j} = \frac{m}{2} 2^m$, continuando com o cálculo acima encontramos,

$$\begin{aligned} E_P \left[\ln \frac{p_{2,T}}{p_{2,0}} \right] &= \frac{m}{2} \{ \ln(1 + \mu + \sigma) + \ln(1 + \mu - \sigma) \} \\ &= \frac{m}{2} \ln \{ (1 + \mu)^2 - \sigma^2 \} . \end{aligned}$$

Substituindo as definições para R , M e Σ temos,

$$E_P \left[\ln \frac{p_{2,T}}{p_{2,0}} \right] = \frac{m}{2} \ln \left\{ \left(1 + \frac{MT}{m} \right)^2 - \frac{\Sigma^2 T}{m} \right\} .$$

Calculando a variância do mesmo processo encontramos

$$\begin{aligned} \text{var}_P \left[\ln \frac{p_{2,T}}{p_{2,0}} \right] &= \frac{m}{2} \left[\ln \left(1 + \frac{MT}{m} + \frac{\Sigma\sqrt{T}}{\sqrt{m}} \right) \right]^2 \\ &\quad + \frac{m}{2} \left[\ln \left(1 + \frac{MT}{m} - \frac{\Sigma\sqrt{T}}{\sqrt{m}} \right) \right]^2 \\ &\quad - \frac{m}{4} \left\{ \ln \left[\left(1 + \frac{MT}{m} \right)^2 - \frac{\Sigma^2 T}{m} \right] \right\}^2 , \end{aligned}$$

(no cálculo acima utilizamos a identidade $\text{var}[x] = E[x^2] - (E[x])^2$ e na manipulação algébrica a relação $2 \ln(A + B) \ln(A - B) = [\ln(A^2 - B^2)]^2 - [\ln(A + B)]^2 - [\ln(A - B)]^2$).

Calculando o limite temos desses resultados temos,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} E_P \left[\ln \frac{p_{2,T}}{p_{2,0}} \right] &= \frac{1}{2} (2MT - \Sigma^2 T) , \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \text{var}_P \left[\ln \frac{p_{2,T}}{p_{2,0}} \right] &= \frac{1}{2} (\Sigma^2 T) + \frac{1}{2} (\Sigma^2 T) . \end{aligned}$$

Finalmente, utilizando o Teorema de Lindeberg-Feller, veja a demonstração desse Teoema em Rabbat, M. [8, página 53], as funções de distribuição binomial da equação 5.15 convergem para as seguintes funções de distribuição normal

$$\lim_{m \rightarrow \infty} B_T \left[\kappa(a), \frac{(1 + \mu - \sigma)(1 + \lambda\sigma)}{2(1 + r)} \right] = N \left[\frac{\ln \left(\frac{p_{2,0}}{a} \right) + (R + \frac{1}{2} \Sigma^2) T}{\Sigma \sqrt{T}} \right]$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} B_T \left[\kappa(a), \frac{1 + \lambda\sigma}{2} \right] = N \left[\frac{\ln \left(\frac{p_{2,0}}{a} \right) + (R - \frac{1}{2}\Sigma^2)T}{\Sigma\sqrt{T}} \right] .$$

Por sua vez, o limite do fator de desconto é dado por

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{RT}{m}} \right)^m = e^{-RT}$$

Portanto, no limite, a equação 5.15 torna-se a fórmula de Black & Scholes,

$$\begin{aligned} p_{3,0} = & p_{2,0} N \left[\frac{\ln \left(\frac{p_{2,0}}{a} \right) + (R + \frac{1}{2}\Sigma^2)T}{\Sigma\sqrt{T}} \right] \\ & - a e^{-RT} N \left[\frac{\ln \left(\frac{p_{2,0}}{a} \right) + (R - \frac{1}{2}\Sigma^2)T}{\Sigma\sqrt{T}} \right] . \end{aligned}$$

5.4 Representação de Medidas de Preço do Equilíbrio

Nessa seção generalizamos o procedimento aplicado nas seções anteriores e encontramos uma representação para a medida de preço do equilíbrio em um modelo Multi-Período discreto com um número N títulos e uma estrutura de informação $\{\mathfrak{F}_t\}$, $0 \leq t \leq T$, com índice de divisão $\nu = N$.

Vejamos o procedimento. Seja o título número 1 uma renda fixa com taxa de juros constante, isto é,

$$d_{1,T} = (1 + r)^T ,$$

$$p_{1,t} = (1 + r)^t .$$

Assuma que $p_{n,t} > 0$, para $2 \leq n \leq N$, todo $\omega \in \Omega$ e todo t , $0 \leq t \leq T$. Seja $\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_t^{p_2, \dots, p_N}$ a estrutura de informação, para todo t , $0 \leq t \leq T$; ou seja, o preço dos títulos $2, \dots, N$ representa toda informação disponível aos agentes.

Como anteriormente definimos o retorno no instante t , $1 \leq t \leq T$, de um título n , $2 \leq n \leq N$ por

$$R_{n,t} = \frac{p_{n,t} - p_{n,t-1}}{p_{n,t-1}} = \frac{p_{n,t}}{p_{n,t-1}} - 1 .$$

Prosseguindo com as definições usuais temos,

$$\mu_{n,t} = E_P[R_{n,t}|\mathfrak{S}_{t-1}] ,$$

$$dx_{n,t} = R_{n,t} - E_P[R_{n,t}|\mathfrak{S}_{t-1}]$$

onde, $x_{n,0}$ são constantes arbitrárias e $p_{n,T} = d_n$. A interpretação dos termos μ e dx é análogo à seção 5.2.

Iniciamos a análise mostrando que o processo $\{x_{n,t}\}$ é P -martingal,

$$\begin{aligned} E_P[dx_{n,t}|\mathfrak{S}_{t-1}] &= E_P[R_{n,t} - E_P[R_{n,t}|\mathfrak{S}_{t-1}]|\mathfrak{S}_{t-1}] \\ &= E_P[R_{n,t}|\mathfrak{S}_{t-1}] - E_P[R_{n,t}|\mathfrak{S}_{t-1}] \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Analisemos a representação de preços.

Teorema 5.3 Para $1 \leq t \leq T$ e $2 \leq n \leq N$ temos a seguinte representação de preços

$$p_{n,t} = p_{n,0} \prod_{s=1}^t (1 + \mu_{n,s} + dx_{n,s}) .$$

Prova. Para mostrar a relação acima, primeiro note que as definições das componentes previsível e de inovação implicam na seguinte equação

$$p_{n,t} = p_{n,t-1}(1 + \mu_{n,t} + dx_{n,t})$$

Então, para $t = 1$ a equação acima implica que o Teorema é verdadeiro. Assuma que o Teorema seja verdadeiro para $t - 1$, segue que

$$\begin{aligned} p_{n,t} &= p_{n,0} \prod_{s=1}^{t-1} (1 + \mu_{n,s} + dx_{n,s})(1 + \mu_{n,t} + dx_{n,t}) \\ &= p_{n,0} \prod_{s=1}^t (1 + \mu_{n,s} + dx_{n,s}) . \end{aligned}$$

□

Note que o incremento do preço no intervalo é dado por

$$dp_{n,t} = \mu_{n,t}p_{n,t-1} dt + p_{n,t-1} dx_{n,t}$$

onde $dt = 1$.

Seja $\kappa_{n,t} = \sum_{s=1}^t \mu_{n,s}$ o processo cumulativo da componente previsível da taxa de retorno. Então, como $d\kappa_{n,t} = \mu_{n,t}$ temos $d(\kappa_n + x_n)_t = \mu_{n,t} + dx_{n,t}$. Substituindo essa equação na representação de preços do Teorema 5.3 temos,

$$p_{n,t} = p_{n,0} \prod_{s=1}^t (1 + d(\kappa_n + x_n)_s) . \quad (5.17)$$

Como ilustração note que a equação 5.17 é a definição da exponencial estocástica logo,

$$p_{n,t} = p_{n,0} \varepsilon_t(\kappa_n + x_n) .$$

Agora, utilizando o Teorema 4.20 podemos garantir a existência de uma base ortogonal formada por $w_1, \dots, w_{\nu-1}$ martingais e de um processo previsível $\{\alpha_{n,h,t}\}$ tal que qualquer martingal pode ser escrita em termos da base e do processo previsível. Em particular, para a martingal que representa a componente de inovação da taxa de retornos temos,

$$dx_{n,t} = \sum_{h=1}^{\nu-1} \alpha_{n,h,t} dw_{h,t} ,$$

para $1 \leq t \leq T$ e $2 \leq n \leq N$.

Substituindo a equação acima na representação de preços da equação 5.17 encontramos

$$p_{n,t} = p_{n,0} \prod_{s=1}^t (1 + \mu_{n,s} + \sum_{h=1}^{\nu-1} \alpha_{n,h,s} dw_{h,s}) , \quad (5.18)$$

para $1 \leq t \leq T$.

Iniciamos o processo para determinar uma medida de preço do equilíbrio. Como anteriormente a idéia é utilizar o Teorema 3.7, que garante que um a medida de probabilidade será uma medida de preço do equilíbrio se $\left\{ \frac{p_{n,t}}{1+r} \right\}$ for martingal sobre essa medida, para derivar condições sobre a medida de probabilidade de forma a transformá-la em uma medida de preço do equilíbrio.

Considere uma medida de probabilidade Q no espaço Ω tal que $Q(\omega) > 0$, $\forall \omega \in \Omega$. Seja z_t o processo da razão de verossimilhança e defina a transformação

$$v_{h,t} = w_{h,t} - \int_0^t \frac{d \langle w_h, z \rangle_s}{z_{s-}} .$$

Em termos do processo $\{v_{h,t}\}$, temos, pela equação 5.18, a seguinte representação para o preço de um título n

$$p_{n,t} = p_{n,0} \prod_{s=1}^t \left[1 + \mu_{n,s} + \sum_{h=1}^{\nu-1} \alpha_{n,h,s} \left(dv_{h,s} + \frac{d \langle w_h, z \rangle_s}{z_{s-}} \right) \right]$$

ou, na forma descontada,

$$\frac{p_{n,t}}{(1+r)^t} = p_{n,0} \prod_{s=1}^t \frac{1 + \mu_{n,s} + \sum_{h=1}^{\nu-1} \alpha_{n,h,s} \left(dv_{h,s} + \frac{d\langle w_h, z \rangle_s}{z_{s-}} \right)}{1+r}.$$

Afirmamos que a condição necessária e suficiente para $\left\{ \frac{p_{n,t}}{(1+r)^t} \right\}$ ser Q -martingal para $2 \leq n \leq N$ é dada por

$$E_Q \left[\frac{1 + \mu_{n,t} + \sum_{h=1}^{\nu-1} \alpha_{n,h,t} \left(dv_{h,t} + \frac{d\langle w_h, z \rangle_t}{z_{t-}} \right)}{1+r} \middle| \mathfrak{F}_{t-1} \right] = 1. \quad (5.19)$$

A demonstração dessa afirmação segue a mesma argumentação apresentada na seção 5.2.

Prosseguindo, como $\{\alpha_{n,h,t}\}$ é previsível e pelo Teorema de Girsanov $\{v_{h,t}\}$ é Q -martingal, logo $E_Q \left[\frac{dv_t}{1+r} \middle| \mathfrak{F}_{t-1} \right] = 0$. E, a equação 5.19 reduz-se a

$$E_Q \left[\frac{1 + \mu_{n,t} + \sum_{h=1}^{\nu-1} \alpha_{n,h,t} \left(\frac{d\langle w_h, z \rangle_t}{z_{t-}} \right)}{1+r} \middle| \mathfrak{F}_{t-1} \right] = 1.$$

Note que como $\mu_{n,t}$ é previsível e já mostramos que $d\langle \cdot, \cdot \rangle_t$ também o é, temos que a equação acima reduz-se novamente a

$$\sum_{h=1}^{\nu-1} \alpha_{n,h,t} \frac{d\langle w_h, z \rangle_t}{z_{t-}} = -(\mu_{n,t} - r). \quad (5.20)$$

Note que a equação acima é a forma generalizada da equação 5.5.

Utilizando novamente o Teorema 4.21 para representar o processo $\{z_t\}$ em termos de uma base (recorde que $z_0 = 1$ e $z_t(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$ e todo t $0 \leq t \leq T$) temos,

$$z_t = \varepsilon_t \left(\sum_{h=1}^{\nu-1} \beta_h \cdot w_h \right)$$

onde, β_s é previsível. Como

$$z_t = \prod_{s=1}^t \left(1 + \sum_{h=1}^{\nu-1} \beta_{h,s} dw_{h,s} \right) \quad (5.21)$$

temos,

$$dz_t = z_{t-1} \sum_{h=1}^{\nu-1} \beta_{h,t} dw_{h,t} . \quad (5.22)$$

Continuando, recordamos que $d \langle w_h, z \rangle_t = E_P[dw_{h,t} dz_t | \mathfrak{F}_{t-1}]$. Substituindo dz_t dado pela equação 5.22 nessa última relação temos,

$$\begin{aligned} d \langle w_h, z \rangle_t &= E_P[dw_{h,t} z_{t-1} \sum_{k=1}^{\nu-1} \beta_{k,t} dw_{k,t} | \mathfrak{F}_{t-1}] \\ &= z_{t-1} \sum_{k=1}^{\nu-1} \beta_{k,t} E_P[dw_{h,t} dw_{k,t} | \mathfrak{F}_{t-1}] \\ &= z_{t-1} \sum_{k=1}^{\nu-1} \beta_{k,t} d \langle w_h, w_k \rangle_t \end{aligned}$$

pois, tanto β_t quanto z_{t-1} são $\mathfrak{F}_{t-1}$ -mensuráveis.

Ainda, w_h e w_k são ortogonais se $h \neq k$, logo $\langle w_h, w_k \rangle_t = 0$ para $h \neq k$ e $0 \leq t \leq T$, ou seja $d \langle w_h, w_k \rangle_t = 0$ para $h \neq k$ e $1 \leq t \leq T$. Com este resultado a relação anterior pode ser escrita como

$$d \langle w_h, z \rangle_t = z_{t-1} \beta_{h,t} d \langle w_h \rangle_t .$$

Então, substituindo o resultado acima na equação 5.20 temos,

$$\sum_{h=1}^{\nu-1} \alpha_{n,h,t} \beta_{h,t} d \langle w_h \rangle_t = -(\mu_{n,t} - r) . \quad (5.23)$$

Para analisar a equação acima introduza a seguinte notação: $\Gamma_{n,h,t} = \text{cov}_P[x_{n,t}, w_{h,t} | \mathfrak{F}_{t-1}]$; como $\{x_t\}$ e $\{w_t\}$ são P -martingais temos imediatamente que

$$\Gamma_{n,h,t} = E_P[dx_{n,t} dw_{h,t} | \mathfrak{F}_{t-1}] .$$

Como, ainda, $dx_{n,t} = \sum_{k=1}^{\nu-1} \alpha_{n,k,t} dw_{k,t}$ temos,

$$\begin{aligned} \Gamma_{n,h,t} &= \sum_{k=1}^{\nu-1} \alpha_{n,k,t} E_P[dw_{k,t} dw_{h,t} | \mathfrak{F}_{t-1}] \\ &= \alpha_{n,h,t} d \langle w_h \rangle_t \end{aligned}$$

pois, α_t é previsível e w_k e w_h são ortogonais para $h \neq k$.

Finalmente, substituindo o resultado acima na equação 5.23 encontramos a forma generalizada da equação 5.6

$$\sum_{h=1}^{\nu-1} \Gamma_{n,h,t} \beta_{h,t} = -(\mu_{n,t} - r)$$

para $2 \leq n \leq N$ e $1 \leq t \leq T$.

Fazendo Γ_t ser a matriz $(N-1) \times (N-1)$ cujos elementos são $\Gamma_{n,h,t}$, $2 \leq n \leq N$ e $1 \leq h \leq (N-1)$; β_t o vetor $1 \times (N-1)$ cujos elementos são $\beta_{h,t}$, $1 \leq h \leq (N-1)$; μ_t o vetor $1 \times (N-1)$ cujos elementos são $\mu_{n,t}$, $2 \leq n \leq N$; $\mathbf{1}$ o vetor $1 \times (N-1)$ cujos elementos são todos 1. Podemos escrever a condição acima em notação matricial

$$\Gamma_t \cdot \beta_t = -(\mu_t - r \cdot \mathbf{1}).$$

Assuma que Γ_t seja invertível para $1 \leq t \leq T$ e, seja $\delta_t = \Gamma_t^{-1}$. Então,

$$\beta_{h,t} = - \sum_{n=2}^N \delta_{n,h,t} (\mu_{n,t} - r)$$

e, o processo $\{z_t\}$, equação 5.21, será dado por

$$z_t = \prod_{s=1}^t \left[1 - \sum_{h=1}^{\nu-1} \sum_{n=2}^N \delta_{n,h,s} (\mu_{n,s} - r) dw_{h,s} \right]. \quad (5.24)$$

Pela equação acima e definição do processo da razão de verossimilhança, temos que a existência de uma medida de preço do equilíbrio acarreta a seguinte condição

$$\sum_{h=1}^{\nu-1} \sum_{n=2}^N \delta_{n,h,s} (\mu_{n,s} - r) dw_{h,s} < 1 \quad (5.25)$$

segue da inequação acima que $z_t(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$ e todo t , $0 \leq t \leq T$. Note que $\delta_{n,h,t}$, $\mu_{n,t}$ e $\omega_{h,t}$ são endógenos ao modelo.

Finalmente, mostraremos que satisfeita a condição 5.25 podemos construir uma medida de preço do equilíbrio que satisfaz a equação 5.20. Definimos a medida de preço do equilíbrio por

$$Q(\omega) = z_T(\omega) P(\omega) \quad (5.26)$$

onde, z_T é dado pela equação 5.25.

Vejamos os passos necessários,

- z_t é P -martingal.

Prova. Revertendo os passos, se definirmos $\beta_{h,t} = -\sum_{n=2}^N \delta_{n,h,t}(\mu_{n,t} - r)$ temos que $\beta_{h,t}$ é previsível e $z_t = \prod_{s=1}^t \left(1 + \sum_{h=1}^{\nu-1} \beta_{h,s} dw_{h,s}\right) = \varepsilon_t \left(\sum_{h=1}^{\nu-1} \beta_h \cdot w_h\right)$, ou seja, uma solução da equação

$$z_t = 1 + \sum_{h=1}^{\nu-1} \int_0^t \beta_{h,s} z_{s-} dw_{h,s}$$

logo, pelo Teorema 4.9 $\{z_t\}$ é uma martingal. $\square$

- Q é uma medida de probabilidade estritamente positiva.

Prova. Q é positivo devido à condição 5.25. Ainda, $Q(\omega) = E_P[z_T] = E_P[z_0] = 1$. $\square$

- z_t é o processo de verossimilhança $\frac{Q}{P}$.

Prova. Como $\{z_t\}$ é martingal é imediato que $z_t = E_P[z_T | \mathfrak{F}_t] = E_P\left[\frac{Q}{P} | \mathfrak{F}_t\right]$. $\square$

- O processo $\left\{\frac{p_{n,t}}{(1+r)^t}\right\}$ é Q -martingal.

Prova. Note que pela definição de β item 1 podemos retroceder e escrever $\sum_{h=1}^{\nu-1} \alpha_{n,h,t} \beta_{h,t} d \langle w_h, z \rangle_t = -(\mu_{n,t} - r)$. Como a base w é ortogonal, essa equação pode ser escrito como

$$\sum_{h=1}^{\nu-1} \alpha_{n,h,t} \frac{d \langle w_h, z \rangle_t}{z_{t-}} = -(\mu_{n,t} - r)$$

ou seja, recuperamos a equação 5.20. $\square$

- Finalmente, Q é uma medida de preço do equilíbrio.

Prova. Essa demonstração é imediata do item anterior e o Teorema 3.7. $\square$

Outro resultado importante refere-se a unicidade de Q . Como $\Gamma_{n,h,t} = cov_P[x_{n,t}, w_{h,t} | \mathfrak{F}_{t-1}]$, se $\Gamma_{n,h,t}$ for invertível então $\beta_{h,t}$ é univocamente determinado para uma escolha de w . Então, seja $\tilde{Q}$ outra medida de preço do equilíbrio e $\tilde{z}$ o processo de verossimilhança associado.

Para esse novo modelo temos, $\Gamma \cdot \tilde{\beta} = -(\mu - r \cdot 1)$. Portanto, se Γ for invertível $\tilde{\beta}$ é univocamente determinado e $\tilde{\beta} = \beta$. Portanto $\tilde{z} = z$ e, pela equação 5.26 $\tilde{Q} = Q$.

Segue que podemos afirmar que se Γ é invertível então, a medida de preço do equilíbrio é única e o mercado é completo!

Depois dessa análise resta somente definir o papel do processo de verossimilhança no modelo.

Definição 5.2 Um processo estocástico $\{y_t\}$ é chamado de *processo de ajustamento ao risco* se e somente se para cada $1 \leq n \leq N$ o processo $\left\{y_t \frac{p_{n,t}}{(1+r)^t}\right\}$ for P -martingal. $\square$

Para finalizar essa seção note que pelo corolário 4.1, se Q é uma medida de preço do equilíbrio então, o processo da razão de verossimilhança, $z_t = \left[\frac{Q}{P} | \mathfrak{F}_t\right]$, é um processo de ajustamento ao risco.

5.5 Completude

Nessa seção continuamos com um modelo Multi-Período, com N títulos e estrutura de informação $\{\mathfrak{F}_t\}$ e, como anteriormente considere o título número 1 uma renda fixa. Nosso objetivo consiste em mostrar que um sistema de preços p que não permite estratégia de arbitragem é completo se e somente se o processo de preços descontado formam uma base para martingais com respeito à medida de preço do equilíbrio.

Iniciaremos com a caracterização de um processo de consumo realizável. Recordando, um processo de consumo é realizável a preços p se e somente se $c \in B(e, p)$ e o processo de dotação é tal que $e_t = 0$ para $1 \leq t \leq T$.

Afirmamos que c é realizável se e somente se seu valor presente pode ser representado como uma soma de integrais estocásticas relativo aos preços descontados.

Para simplificar, denote $\alpha'_t x_t \equiv \sum_{n=1}^n \alpha_{n,t} x_{n,t}$ e

$$\int_0^t \alpha'_s dx_s \equiv \sum_{n=1}^N \int_0^t \alpha_{n,s} dx_{n,s}$$

. Vejamos o Teorema.

Teorema 5.4 Suponha que o sistema de preços p não permita estratégias de arbitragem e seja Q uma medida de preço do equilíbrio. Então, $c \in X$ é realizável a preços p se e somente se existir um processo previsível $\{\alpha_t\}$ tal que para todo $0 \leq t \leq T$

$$E_Q \left[\sum_{s=1}^T \frac{c_s}{(1+r)^s} \middle| \mathfrak{F}_t \right] = E_Q \left[\sum_{s=1}^T \frac{c_s}{(1+r)^s} \right] + \int_0^t \alpha'_s d \left(\frac{p \cdot}{(1+r) \cdot} \right)_s. \quad (5.27)$$

Prova. Para $t = 0$ a igualdade acima torna-se uma identidade.

Então, considere $1 \leq t \leq T$; nesse caso, c ser realizável implica que existe um processo previsível $\{\theta_t\}$ tal que $c_t = (\theta'_t - \theta'_{t+1})p_t$ e, $\theta_{T+1} = 0$. Portanto, partindo do processo de consumo acumulado descontado temos

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T \frac{c_t}{(1+r)^t} &= \sum_{t=1}^T \frac{\theta'_t p_t}{(1+r)^t} - \sum_{t=1}^T \frac{\theta'_{t+1} p_t}{(1+r)^t} \\ &= \sum_{t=1}^T \frac{\theta'_t p_t}{(1+r)^t} - \sum_{t=2}^{T+1} \frac{\theta'_t p_{t-1}}{(1+r)^{t-1}} \\ &= +\theta'_1 p_0 + \sum_{t=1}^T \theta'_t d \left(\frac{p \cdot}{(1+r) \cdot} \right)_t \\ &= \theta'_1 p_0 + \int_0^T \theta'_s d \left(\frac{p \cdot}{(1+r) \cdot} \right)_s. \end{aligned}$$

Note que a integral na equação acima é Q -martingal pois, como o processo $\left\{ \frac{p_s}{(1+r)^s} \right\}$ é Q -martingal e θ_s é previsível temos,

$$\begin{aligned} E_Q \left[d \left(\int_0^t \theta'_s d \left(\frac{p \cdot}{(1+r) \cdot} \right)_s \right) \middle| \mathfrak{F}_{t-1} \right] &= E_Q \left[\theta'_t d \left(\frac{p \cdot}{(1+r) \cdot} \right)_t \middle| \mathfrak{F}_{t-1} \right] \\ &= \theta'_t E_Q \left[d \left(\frac{p \cdot}{(1+r) \cdot} \right)_t \middle| \mathfrak{F}_{t-1} \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Então, a expectativa condicional do processo é dada por

$$E_Q \left[\sum_{s=1}^T \frac{c_s}{(1+r)^s} \middle| \mathfrak{F}_t \right] = \theta'_1 p_0 + \int_0^t \theta'_s d \left(\frac{p \cdot}{(1+r) \cdot} \right)_s. \quad (5.28)$$

Como para $t = 0$ a equação acima resulta em

$$E_Q \left[\sum_{s=1}^T \frac{c_s}{(1+r)^s} \right] = \theta'_1 p_0,$$

podemos substituir esse resultado na própria equação 5.28 e obter o resultado esperado, ou seja,

$$E_Q \left[\sum_{s=1}^T \frac{c_s}{(1+r)^s} | \mathfrak{F}_t \right] = E_Q \left[\sum_{s=1}^T \frac{c_s}{(1+r)^s} \right] + \int_0^t \theta'_s d \left(\frac{p_s}{(1+r)^s} \right)$$

e, $\alpha_{n,t} = \theta_{n,t}$ para $1 \leq n \leq N$ e $1 \leq t \leq T$.

Reciprocamente, suponha que a equação 5.27 seja verdadeira e defina $\alpha_{n,t} = \theta_{n,t}$ para $2 \leq n \leq N$ e $1 \leq t \leq T$. E, para $n = 1$ e $1 \leq t \leq T - 1$, defina

$$\theta_{1,t+1} = E_Q \left[\sum_{s=1}^T \frac{c_s}{p_{1,s}} \right] + \int_0^t \alpha'_s d \left(\frac{p_s}{p_{1,s}} \right) - \sum_{s=1}^t \frac{c_s}{p_{1,s}} - \sum_{n=2}^N \theta_{n,t+1} \frac{p_{n,t}}{p_{1,t}}$$

note que $\theta_{1,t+1}$ é $\mathfrak{F}_t$ -mensurável. Para $n = 1$ e $t = 0$ temos

$$\theta_{1,1} = E_Q \left[\sum_{s=1}^T \frac{c_s}{p_{1,s}} \right] - \sum_{n=2}^N \theta_{n,1} p_{n,0}$$

note que $\frac{p_{n,0}}{p_{1,0}} = p_{n,0}$ pois, $p_{1,0} = (1+r)^0 = 1$.

Então, para $1 \leq t \leq T - 1$, utilizando a equação para $\theta_{1,t+1}$ podemos escrever

$$- \left(\theta_{1,t+1} \frac{p_{1,t}}{p_{1,t}} + \sum_{n=2}^N \theta_{n,t+1} \frac{p_{n,t}}{p_{1,t}} \right) + E_Q \left[\sum_{s=1}^T \frac{c_s}{p_{1,s}} \right] + \int_0^t \alpha'_s d \left(\frac{p_s}{p_{1,s}} \right) = \sum_{s=1}^t \frac{c_s}{p_{1,s}}$$

ou seja,

$$-\theta'_{t+1} \frac{p_t}{p_{1,t}} + E_Q \left[\sum_{s=1}^T \frac{c_s}{p_{1,s}} \right] + \int_0^t \alpha'_s d \left(\frac{p_s}{p_{1,s}} \right) = \sum_{s=1}^t \frac{c_s}{p_{1,s}}$$

Agora, como $d \left(\frac{p_{1,s}}{p_{1,s}} \right) = 0$ temos

$$\begin{aligned} \int_0^t \theta'_s d \left(\frac{p_s}{p_{1,s}} \right) &= \sum_{n=2}^N \int_0^t \theta_{n,s} d \left(\frac{p_{n,s}}{p_{1,s}} \right) \\ &= \sum_{n=2}^N \int_0^t \alpha_{n,s} d \left(\frac{p_{n,s}}{p_{1,s}} \right) \\ &= \int_0^t \alpha'_s d \left(\frac{p_s}{p_{1,s}} \right) \end{aligned}$$

e,

$$\sum_{s=1}^t \frac{c_s}{p_{1,s}} = -\theta'_{t+1} \frac{p_t}{p_{1,t}} + E_Q \left[\sum_{s=1}^T \frac{c_s}{p_{1,s}} \right] + \int_0^t \theta'_s d \left(\frac{p_s}{p_{1,s}} \right) \quad (5.29)$$

Tomando a primeira diferença da equação acima obtemos

$$\frac{c_t}{p_{1,t}} = -\theta'_{t+1} \frac{p_t}{p_{1,t}} + \theta'_t \frac{p_{t-1}}{p_{1,t-1}} + \theta'_t d \left(\frac{p_t}{p_{1,t}} \right)$$

o que após alguma álgebra encontramos $c_t = [\theta'_t - \theta'_{t+1}]p_t$ para $1 \leq t \leq T-1$.

Resta somente mostrar que o resultado funciona para $t = T$. Então, substituindo $t = T$ na equação 5.27 temos que todos os consumos dentro da expectativa no lado esquerdo são $\mathfrak{F}_T$ -mensuráveis, logo,

$$\sum_{s=1}^T \frac{c_s}{p_{1,s}} = E_Q \left[\sum_{s=1}^T \frac{c_s}{p_{1,s}} \right] + \int_0^T \theta'_s d \left(\frac{p_s}{p_{1,s}} \right)$$

e, o incremento dessa equação resulta em

$$\frac{c_T}{p_{1,T}} = \theta'_T d \left(\frac{p_T}{p_{1,T}} \right) + \theta'_T \frac{p_{T-1}}{p_{1,T-1}}$$

logo, $c_T = \theta'_T p_T$. Portanto o consumo é realizável. $\square$

Corolário 5.1 Suponha que o sistema de preços p não permita estratégias de arbitragem e seja Q uma medida de preço do equilíbrio. Então, p é completo se e somente se para todo processo, x , Q -martingal sobre a estrutura de informação $\{\mathfrak{F}_t\}$ existir uma representação previsível

$$x_t = x_0 + \int_0^t \alpha'_s d \left(\frac{p_{n,s}}{p_{1,s}} \right)$$

Prova. Recordamos que p é completo se e somente se todo processo de consumo adaptado for realizável a preços p , isto é, $X = M(p)$.

Primeiro mostraremos que se todo processo Q -martingal tiver uma representação previsível então, todo processo de consumo é realizável e portanto o sistema de preços é completo.

Então, suponha que todo processo Q -martingal tenha uma representação previsível. Seja $c \in X$ e, em particular, é imediato pela lei das expectativas

iteradas que o processo $\left\{E_Q \left[\sum_{s=1}^T \frac{c_s}{p_{1,s}} | \mathfrak{F}_t \right] \right\}$ seja Q -martingal logo, esse processo tem uma representação previsível. Então, pelo Teorema 5.4 temos que c é realizável e conseqüentemente p é completo.

Reciprocamente, mostraremos que se o sistema de preços é completo então, todo processo Q -martingal tem uma representação previsível.

Seja $\{x_t\}$ um processo Q -martingal. Considere o seguinte processo de consumo $c_t = 0$ para $1 \leq t < T$ e $c_T = x_T p_{1,T}$ então, por definição temos,

$$x_t = E_Q[x_T | \mathfrak{F}_t] = E_Q \left[\frac{c_T}{p_{1,T}} | \mathfrak{F}_t \right] = E_Q \left[\sum_{s=1}^T \frac{c_s}{p_{1,s}} | \mathfrak{F}_t \right]$$

como c é realizável (p é completo), pelo Teorema 5.4 temos que $\{x_t\}$ tem uma representação previsível. $\square$

Para finalizar podemos resumir a caracterização de um sistema de preços completo com o próximo Teorema.

Teorema 5.5 Suponha que o sistema de preços p não permita estratégias de arbitragem e seja Q uma medida de preço do equilíbrio. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. O sistema de preços p é completo.
2. A medida de preço do equilíbrio Q é única.
3. O processo de preços descontado $\left\{ \frac{p_n}{p_1} \right\}$ forma uma base para Q -martingais.

Prova. De fato, a afirmação 1 é equivalente à 2 e o Corolário 5.1 garante a equivalência entre 2 e 3. $\square$

5.6 Risco e Retorno

Nessa seção mostramos que podemos interpretar o processo de ajustamento ao risco como o único fator de risco no modelo Multi-Período discreto. A interpretação resulta da relação linear entre o risco e o retorno esperado, onde o risco é definido como a covariância condicional entre a componente de inovação da taxa de retorno e o processo de ajustamento ao risco. Na realidade já utilizamos essa relação nas equações 5.5 e 5.20 contudo, por sua

importância e pelo fato dessa relação permanecer verdadeira para mercados incompletos apresentaremos uma discussão detalhada do assunto.

Como anteriormente, considere um modelo com N títulos e seja o título número 1 o título de renda fixa.

Seja Q uma medida de preço do equilíbrio nesse modelo. Aqui não precisamos assumir que o sistema de preços seja completo, logo, a medida Q não é necessariamente única.

Seja o processo da razão de verossimilhança, $z_t = E_P \left[\frac{Q}{P} | \mathfrak{F}_t \right]$, o processo de ajustamento ao risco da medida de preço do equilíbrio Q com respeito à medida de probabilidade P . Então, para $f_t(\omega) \in \mathfrak{F}_t$ segue imediatamente da definição de expectativa condicional que

$$z_t[f_t(\omega)] = \frac{1}{P[f_t(\omega)]} \int_{f_t(\omega)} \frac{Q}{P} dP = \frac{Q[f_t(\omega)]}{P[f_t(\omega)]}.$$

Então,

$$\frac{1}{z_t[f_t(\omega)]} = \frac{P[f_t(\omega)]}{Q[f_t(\omega)]} = E_Q \left[\frac{P}{Q} | \mathfrak{F}_t \right] (\omega)$$

é o processo de ajustamento ao risco da medida de probabilidade P com respeito à medida de preço do equilíbrio Q .

O próximo Teorema estabelece a relação entre o risco e o retorno esperado dos N títulos nesse mercado. A sua utilidade ficará clara mais adiante.

Utilizaremos para esse fim a notação do operador de projeção previsível dual π^* introduzida no Capítulo 4. Como no contexto estão envolvidas duas medidas de probabilidade, P e Q ; utilizamos um índice superior para distinguir entre a projeção previsível com relação às medidas P e Q . Vejamos o Teorema.

Teorema 5.6 Suponha que o sistema de preços p não permita estratégias de arbitragem e seja Q uma medida de preço do equilíbrio. Então, para qualquer título $1 \leq n \leq N$ e $0 \leq t \leq T$ temos

$$\pi_P^* \left(\frac{p_n}{p_1} \right)_t = p_{n,0} - \int_0^t \frac{1}{z_{s-}} d \left\langle \frac{p_n}{p_1}, z \right\rangle_s^P$$

onde, $\langle \cdot, \cdot \rangle_s^P$ é o processo de covariância quadrático com relação a P .

Prova. Utilizando o Corolário 4.3 temos que para um processo Q -martingal, digamos $\{x_t\}$, a decomposição de Doob de x com respeito a P

com componente previsível cujo valor inicial é x_0 com componente de inovação nula em zero é dada por

$$x_t = x_0 + \int_0^t \frac{d \langle x, z^P \rangle_s^Q}{z_{s-}^P} + \left(x_t - x_0 - \int_0^t \frac{d \langle x, z^P \rangle_s^Q}{z_{s-}^P} \right)$$

onde, $z_t^P = \frac{1}{z_t} = E_Q \left[\frac{P}{Q} | \mathfrak{F}_t \right]$.

Substituindo o processo $\{x_t\}$ por $\left(\frac{p_n}{p_1} \right)_t$ temos que a componente previsível da decomposição desse processo é

$$p_{n,0} + \int_0^t z_{s-} d \left\langle \frac{p_n}{p_1}, \frac{1}{z} \right\rangle_s^Q ,$$

note que o valor inicial é dado por $\frac{p_{n,0}}{p_{1,0}} = p_{n,0}$.

Ainda, pelo Corolário 4.2 a relação descrita acima é a projeção previsível dual do processo de preços descontado com valor inicial $p_{n,0}$ ou seja,

$$\pi_P^* \left(\frac{p_n}{p_1} \right)_t = p_{n,0} + \int_0^t z_{s-} d \left\langle \frac{p_n}{p_1}, \frac{1}{z} \right\rangle_s^Q . \quad (5.30)$$

Agora adaptamos o Teorema 4.18 às nossas necessidades.

Para qualquer processo adaptado $\{x_t\}$,

$$E_Q[z_t^P x_t | \mathfrak{F}_s] = E_Q[z_t^P | \mathfrak{F}_s] E_P[x_t | \mathfrak{F}_s] = z_s^P E_P[x_t | \mathfrak{F}_s] ,$$

$0 \leq s \leq t \leq T$.

Então, fazendo $x_t = d \left(\frac{p_n}{p_1} \right) dz_t$ (note que esse processo é adaptado) temos,

$$E_Q \left[\frac{1}{z_t} d \left(\frac{p_n}{p_1} \right) dz_t | \mathfrak{F}_{t-1} \right] = \frac{1}{z_{t-1}} E_P \left[d \left(\frac{p_n}{p_1} \right) dz_t | \mathfrak{F}_{t-1} \right] ,$$

multiplicando os dois lados da equação acima por $\frac{1}{z_{t-1}}$ temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_{t-1}^2} E_P \left[d \left(\frac{p_n}{p_1} \right) dz_t | \mathfrak{F}_{t-1} \right] &= E_Q \left[d \left(\frac{p_n}{p_1} \right) \frac{(z_t - z_{t-1})}{z_t z_{t-1}} | \mathfrak{F}_{t-1} \right] \\ &= -E_Q \left[d \left(\frac{p_n}{p_1} \right) \frac{1}{dz_t} | \mathfrak{F}_{t-1} \right] . \end{aligned}$$

Utilizando a definição do processo de covariância quadrático, a relação acima pode ser escrita como

$$-\frac{1}{z_{t-1}^2} d \left\langle \frac{p_n}{p_1}, z \right\rangle_t^P = d \left\langle \frac{p_n}{p_1}, \frac{1}{z} \right\rangle_t^Q.$$

Integrando ambos os lados da relação obtemos,

$$-\int_0^t \frac{1}{z_{s-1}} d \left\langle \frac{p_n}{p_1}, z \right\rangle_s^P = \int_0^t z_{s-} d \left\langle \frac{p_n}{p_1}, \frac{1}{z} \right\rangle_s^Q$$

Portanto, utilizando a identidade acima na equação 5.30 obtemos o resultado esperado

$$\pi_P^* \left(\frac{p_n}{p_1} \right)_t = p_{n,0} - \int_0^t \frac{1}{z_{s-}} d \left\langle \frac{p_n}{p_1}, z \right\rangle_s^P.$$

□

Agora analisaremos o prêmio pelo risco de um título.

Definimos o retorno de um título n como

$$R_{n,t} = \frac{p_{n,t} - p_{n,t-1}}{p_{n,t-1}},$$

Como anteriormente, utilizando a decomposição de Doob, decomponemos a taxa de retorno de um título em componetes previsível e de inovação, ou seja,

$$\mu_{n,t} = E_P[R_{n,t} | \mathfrak{F}_{t-1}] = E_P \left[\frac{p_{n,t}}{p_{n,t-1}} | \mathfrak{F}_{t-1} \right] - 1,$$

$$dx_{n,t} = R_{n,t} - E_P[R_{n,t} | \mathfrak{F}_{t-1}] = \frac{p_{n,t}}{p_{n,t-1}} - E_P \left[\frac{p_{n,t}}{p_{n,t-1}} | \mathfrak{F}_{t-1} \right]$$

para $2 \leq n \leq N$ e $1 \leq t \leq T$, x_0 é uma constante arbitrária e $p_{n,T} = d_n$.

Agora calculamos um resultado intermediário que será relacionado com o operador previsível dual. Com as componentes previsível e de inovação calculamos o incremento do processo de preços descontado utilizando alguma álgebra para chegar à relação desejada. Vejamos os passos,

$$d \left(\frac{p_n}{p_1} \right)_t = \frac{p_{n,t}}{p_{1,t}} - \frac{p_{n,t-1}}{p_{1,t-1}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{p_{n,t-1}}{p_{1,t}} \left(\pm 1 + \frac{p_{n,t}}{p_{n,t-1}} - \frac{p_{1,t}}{p_{1,t-1}} \right) \\
&= \frac{p_{n,t-1}}{p_{1,t}} \left(\frac{p_{n,t}}{p_{n,t-1}} - 1 - \left(\frac{p_{1,t}}{p_{1,t-1}} - 1 \right) \right) \\
&= \frac{p_{n,t-1}}{p_{1,t}} \left(\pm E_P \left[\frac{p_{n,t}}{p_{n,t-1}} \middle| \mathfrak{F}_{t-1} \right] + \frac{p_{n,t}}{p_{n,t-1}} - 1 - r \right) \\
&= \frac{p_{n,t-1}}{p_{1,t}} (\mu_{n,t} - r + dx_{n,t}) .
\end{aligned}$$

Calculando a expectativa condicional da relação acima encontramos,

$$\begin{aligned}
E_P \left[d \left(\frac{p_n}{p_1} \right)_t \middle| \mathfrak{F}_{t-1} \right] &= E_P \left[\frac{p_{n,t-1}}{p_{1,t}} (\mu_{n,t} - r + dx_{n,t}) \middle| \mathfrak{F}_{t-1} \right] \\
&= \frac{p_{n,t-1}}{p_{1,t}} (\mu_{n,t} - r)
\end{aligned}$$

pois, x_n é P -martingal; $p_{1,t} = cte$ e tanto $\mu_{n,t}$ quanto $p_{n,t-1}$ são $\mathfrak{F}_{t-1}$ -mensuráveis.

Ainda, pela definição 4.11 temos $d\pi_P^* \left(\frac{p_n}{p_1} \right)_t = E_P \left[d \left(\frac{p_n}{p_1} \right)_t \middle| \mathfrak{F}_{t-1} \right]$ logo,

$$d\pi_P^* \left(\frac{p_n}{p_1} \right)_t = \frac{p_{n,t-1}}{p_{1,t}} (\mu_{n,t} - r) . \quad (5.31)$$

Prosseguindo, calculamos mais uma relação intermediária que será associada ao processo de covariância condicional entre os processos $\{x_t\}$ e $\{z_t\}$. Multiplicando ambos os lados da equação 5.31 por dz_t e calculando a expectativa condicional encontramos,

$$\begin{aligned}
E_P \left[d \left(\frac{p_n}{p_1} \right)_t dz_t \middle| \mathfrak{F}_{t-1} \right] &= E_P \left[\frac{p_{n,t-1}}{p_{1,t}} (\mu_{n,t} - r + dx_{n,t}) dz_t \middle| \mathfrak{F}_{t-1} \right] \\
&= \frac{p_{n,t-1}}{p_{1,t}} (\mu_{n,t} - r) E_P [dz_t | \mathfrak{F}_{t-1}] \\
&\quad + \frac{p_{n,t-1}}{p_{1,t}} E_P [dx_{n,t} dz_t | \mathfrak{F}_{t-1}] \\
&= \frac{p_{n,t-1}}{p_{1,t}} E_P [dx_{n,t} dz_t | \mathfrak{F}_{t-1}]
\end{aligned}$$

pois, como $\{z_t\}$ é P -martingal $E_P [dz_t | \mathfrak{F}_{t-1}] = 0$.

Como tanto $\{z_t\}$ quanto $\{x_t\}$ são P -martingais, podemos identificar a relação acima com o processo de covariância condicional pois,

$$\text{cov}_P[x_{n,t}, z_t | \mathfrak{F}_{t-1}] = E_P[dx_{n,t} dz_t | \mathfrak{F}_{t-1}],$$

segue que

$$\begin{aligned} \text{cov}_P[x_{n,t}, z_t | \mathfrak{F}_{t-1}] &= \frac{p_{1,t}}{p_{n,t-1}} E_P \left[d \left(\frac{p_n}{p_1} \right)_t dz_t | \mathfrak{F}_{t-1} \right] \\ &= \frac{p_{1,t}}{p_{n,t-1}} d \left\langle \left(\frac{p_n}{p_1} \right), z \right\rangle_t^P \end{aligned}$$

onde, na última passagem foi utilizada a definição do processo de covariância quadrático.

Multiplicando ambos os lados da equação acima por $-\frac{1}{z_{t-1}}$ temos imediatamente do Teorema 5.6 na forma de um incremento e da equação 5.31 que

$$\begin{aligned} -\text{cov}_P[x_{n,t}, z | \mathfrak{F}_{t-1}] \frac{1}{z_{t-1}} &= \frac{p_{1,t}}{p_{n,t-1}} \left(\frac{-d \left\langle \frac{p_n}{p_1}, z \right\rangle_t^P}{z_{t-1}} \right) \\ &= \frac{p_{1,t}}{p_{n,t-1}} d\pi^* \left(\frac{p_n}{p_1} \right)_t \\ &= \mu_{n,t} - r. \end{aligned}$$

Com esse resultado estabelecemos o próximo Teorema.

Teorema 5.7 Suponha que o sistema de preços p não permita estratégias de arbitragem e seja Q uma medida de preço do equilíbrio. Então, para $1 \leq n \leq N$ e $1 \leq t \leq T$ temos

$$\mu_{n,t} - r = -\frac{1}{z_{t-1}} \text{cov}_P[x_{n,t}, z_t | \mathfrak{F}_{t-1}].$$

Prova. A prova desse Teorema é imediata da construção acima. $\square$

Em palavras, o prêmio pelo risco de um título é proporcional à covariância condicional entre a componente de inovação da taxa de retorno e o processo de ajustamento ao risco. Note que se o sistema de preços não for completo, o fator de risco z não é único e conseqüentemente o prêmio pelo risco também não será!

Capítulo 6

Modelos Reticulados, *Bonds* e Derivativos de Taxas de Juros

6.1 O Modelo Básico de Estrutura a Termo

Apesar da característica genérica dos títulos apresentados nos modelos dos capítulos anteriores, o tratamento de títulos de renda fixa tal como os *bonds*, quando inclusos entre os títulos de risco, merecem um tratamento à parte. Os modelos para esse tipo de mercado são conhecidos como *modelos de estrutura a termo*.

Para um modelo ser classificado como um modelo de estrutura a termo, três condições são necessárias. Primeiro, o modelo deve ser Multi-Período. Segundo, o processo de taxa de juros $\{r_t\}$ deve ser estritamente positivo e previsível, $\mathfrak{F}_{t-1}$ mensurável. Terceiro, dentre os ativos de risco deve existir uma coleção de *zero bonds*; isto é, títulos com pagamento de cupom nulo.

Definição 6.1 *Zero bonds* são título cujo valor no vencimento, digamos τ , é certo de ser 1 para todo τ , $1 \leq \tau \leq T$. Denotamos seu preço em t por Z_t^τ .

Segue que $Z^\tau = \{Z_t^\tau\}$, $0 \leq t \leq \tau$ é um processo adaptado com $Z_\tau^\tau = 1$. O preço de Z^τ não está definido para $t > \tau$. $\square$

6.1.1 Estrutura a Termo de Preços de Zero Bonds

Um modelo de estrutura a termo pressupõem a existência de um zero bond, Z^τ para todo τ , $1 \leq \tau \leq T$. Então, para cada instante t existe uma coleção $\{Z_t^{t+1}, Z_t^{t+2}, \dots, Z_t^T\}$ de zero bonds representando os preços no instante t de

uma série de títulos com vencimentos em $t + 1, t + 2, \dots, T$. Essa coleção é conhecida como a *estrutura a termo de preços dos zero bonds*.

Considere uma generalização do Teorema 3.7 para um processo de taxa de juros dependente do tempo. Então, se existe uma medida de probabilidade, digamos Q , tal que o processo de preços dos zero bonds descontados é martingal temos imediatamente que Q é uma medida de preço do equilíbrio; ou seja, se existe Q tal que

$$Z_s^\tau = E_Q \left[\frac{Z_t^\tau}{(1 + r_{s+1}) \dots (1 + r_t)} \middle| \mathfrak{F}_s \right] \quad (6.1)$$

para $0 \leq s \leq t \leq \tau$, o modelo não permite estratégias de arbitragem.

Fazendo $t = \tau$ temos imediatamente que o preço do zero bond deve satisfazer a seguinte equação ($Z_\tau^\tau = 1$),

$$Z_s^\tau = E_Q[1/\{(1 + r_{s+1}) \dots (1 + r_\tau)\} | \mathfrak{F}_s] \quad (6.2)$$

para $0 \leq s \leq \tau$.

Recordando que o processo de taxa de juros é previsível e fazendo $\tau = s + 1$ na equação anterior temos,

$$1 + r_{s+1} = \frac{1}{Z_s^{s+1}} \quad (6.3)$$

para $0 \leq s \leq T - 1$.

O procedimento a seguir descreve os passos a serem seguidos durante a construção de um modelo de estrutura a termo onde o valor futuro de alguns títulos são conhecidos. Primeiro especificamos um espaço de probabilidades $(\Omega, \mathfrak{F}, Q, f)$ onde Q é a medida de preço do equilíbrio. Especificamos o processo de taxa de juros $\{r_t\}$, com seu comportamento probabilístico em termos de Q e, em seguida utilizamos a equação 6.2 para especificar o preço dos zero bonds.

Segue que é possível construir um modelo de estrutura a termo sem nos preocuparmos com os processos de taxa de juros e dos preços dos zero bonds em relação à medida real de probabilidade!

Além disso, não é óbvio que exista ou não uma medida real de probabilidade, digamos P em relação a qual $\{r_t\}$ e os preços dos zero bonds comportem-se de forma realística ou mesmo desejada! Ainda mais, pode ser muito difícil calcular esse P , mesmo sabendo que tal medida existe.

Vejamos um exemplo do procedimento definido acima.

Exemplo 6.1 (Liberdade na escolha de $\mathbf{Q}$) Seja $T = 3$, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_6\}$ e a estrutura de informação $\{\mathfrak{F}_t\}$ é dada por

$$\mathfrak{F}_1 = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}, \{\omega_5, \omega_6\}\},$$

$$\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_3.$$

A especificação do processo de taxa de juros é dado por

$$r_1 = 0.06.$$

$$r_2(\omega) = \begin{cases} 0.09 & \text{para } \omega = \omega_1, \omega_2, \\ 0.06 & \text{para } \omega = \omega_3, \omega_4, \\ 0.09 & \text{para } \omega = \omega_5, \omega_6. \end{cases}$$

$$r_3(\omega) = \begin{cases} 0.10 & \text{para } \omega = \omega_1, \\ 0.08 & \text{para } \omega = \omega_2, \\ 0.07 & \text{para } \omega = \omega_3, \\ 0.05 & \text{para } \omega = \omega_4, \\ 0.04 & \text{para } \omega = \omega_5, \\ 0.02 & \text{para } \omega = \omega_6. \end{cases}$$

Passamos agora à especificação do processo de preços dos zero bonds Z^1, Z^2, Z^3 .

Esses processos de preço não podem ser arbitrários exigindo apenas que $Z_t^\tau < 1$ para $t < \tau$ e $Z_\tau^\tau = 1$. A equação 6.1 deve ser respeitada para que não exista arbitragem no modelo.

De fato, a equação 6.3 determina os preços $Z_{\tau-1}^\tau$ para $\tau = 1, 2, 3$. Esses preços estão na Tabela 6.1.

Prosseguindo, como $\mathfrak{F}_1(\omega_1) = \mathfrak{F}_1(\omega_2)$ temos $Z_1^3(\omega_1) = Z_1^3(\omega_2)$. Fazendo $t = s + 1$ na equação 6.1 temos,

$$Z_s^\tau = \frac{1}{(1 + r_{s+1})} E_Q[Z_{s+1}^\tau | \mathfrak{F}_s]. \quad (6.4)$$

Agora temos flexibilidade na escolha de Z_s^τ para $s < \tau - 1$ proveniente da liberdade na escolha da probabilidade condicional. Em particular, dado as duas possibilidades de preço para $Z_2^3(\omega)$ que se ramificam a partir de $Z_1^3(\omega) \in \mathfrak{F}_1(\omega)$, $(1 + r_2(\omega))Z_1^3(\omega)$ pode assumir qualquer valor entre os possíveis valores de $Z_2^3(\omega)$. Em outra palavras, para $\mathfrak{F}_1(\omega_1)$ $(1 + r_2(\omega_1))Z_1^3(\omega_1)$ deve ser um ponto no segmento $[Z_2^3(\omega_1), Z_2^3(\omega_2)]$,

$$Z_2^3(\omega_1) < (1 + r_2(\omega_1))Z_1^3(\omega_1) = (1 + r_2(\omega_2))Z_1^3(\omega_2) < Z_2^3(\omega_2)$$

ou ainda,

$$0.9091 < 1.09Z_1^3(\omega_1) = 1.09Z_1^3(\omega_2) < 0.9259$$

De maneira análoga podemos montar as demais restrições para calcular o preço de todos $Z_1^3(\omega)$. Os valores escolhidos nesse caso estão na tabela 6.1.

O cálculo dos preços de Z_0^2 e Z_0^3 é um pouco mais complexo pois, o preço de cada um destes zero bonds ramifica-se em três possíveis valores. E, a equação 6.4 deve ser satisfeita por Z_0^2 e Z_0^3 , ou seja,

$$1.06Z_0^2 = 0.9174p + 0.9434q + 0.9709(1 - p - q),$$

$$1.06Z_0^3 = 0.84p + 0.89q + 0.94(1 - p - q)$$

onde, $p = Q(\omega_1) + Q(\omega_2)$ e $q = Q(\omega_3) + Q(\omega_4)$. As equações acima juntamente com $p > 0$, $q > 0$, e $p + q < 1$ formam o conjunto de restrições sobre os preços Z_0^2 e Z_0^3 .

Por simplicidade façamos $p = q = 0.3$; conseqüentemente $Z_0^2 = 0.893$ e $Z_0^3 = 0.844$.

Isto completa a especificação do modelo. Todos os resultados estão na Tabela 6.1.

ω	Z_0^1	Z_0^2	Z_1^2	Z_0^3	Z_1^3	Z_2^3
ω_1	0.9434	0.893	0.9174	0.844	0.84	0.9091
ω_2	0.9434	0.893	0.9174	0.844	0.84	0.9259
ω_3	0.9434	0.893	0.9434	0.844	0.89	0.9346
ω_4	0.9434	0.893	0.9434	0.844	0.89	0.9524
ω_5	0.9434	0.893	0.9709	0.844	0.94	0.9615
ω_6	0.9434	0.893	0.9709	0.844	0.94	0.9804

Tabela 6.1: Resultados

Note que Z^3 não é um processo crescente! Ainda, utilizando a definição de medida de preço do equilíbrio temos

$$Q(\omega_1) = 0.3 \times 0.6131 = 0.1839,$$

$$Q(\omega_2) = 0.3 \times (1 - 0.6131) = 0.1161,$$

$$Q(\omega_3) = 0.3 \times 0.5056 = 0.1517,$$

$$Q(\omega_4) = 0.3 \times (1 - 0.5056) = 0.1483,$$

$$Q(\omega_5) = 0.4 \times 0.6455 = 0.2582,$$

$$Q(\omega_6) = 0.4 \times (1 - 0.6455) = 0.1418.$$

No próximo exemplo apresentamos a especificação do mesmo modelo de outra forma.

Exemplo 6.2 (Q escolhido previamente) Com $T = 3$, espaço de estados Ω , estrutura de informação $\{\mathfrak{F}_t\}$, e o processo de taxa de juros $\{r_t\}$ idênticos aos do exemplo 6.1, podemos diretamente especificar a medida de preço do equilíbrio Q . De fato, basta definir uma medida de probabilidade estritamente positiva.

Para ilustrar façamos $Q(\omega_1) = \dots = Q(\omega_6) = 1/6$. Com isso a especificação do modelo está completa (a não ser que se deseje a medida real de probabilidade P). Resta somente calcular os preços do zero bonds utilizando as equações 6.2 e 6.4.

Os valores de Z_τ^{r-1} para $\tau = 1, 2, 3$ são os mesmos do exemplo 6.1. Utilizando a equação 6.4 para $s = 1$, $\tau = 3$ e, $\omega = \omega_1$ ou $\omega = \omega_2$ temos,

$$Z_1^3(\omega_1) = Z_1^3(\omega_2) = \frac{1}{1.09} \left[\frac{1}{2} 0.9091 + \frac{1}{2} 0.9259 \right] = 0.8417.$$

De forma análoga, $Z_1^3(\omega_3) = Z_1^3(\omega_4) = 0.8901$ e $Z_1^3(\omega_5) = Z_1^3(\omega_6) = 0.9427$. Por sua vez, para $s = 0$ e $\tau = 3$ temos,

$$Z_0^3 = \frac{1}{1.06} \left[\frac{1}{3} 0.8417 + \frac{1}{3} 0.8901 + \frac{1}{3} 0.9427 \right] = 0.8410$$

e, para $s = 0$ e $\tau = 2$ temos $Z_0^2 = 0.8905$.

Os resultados do modelo estão na Tabela 6.2.

ω	Z_0^1	Z_0^2	Z_1^2	Z_0^3	Z_1^3	Z_2^3
ω_1	0.9434	0.8905	0.9174	0.8410	0.8417	0.9091
ω_2	0.9434	0.8905	0.9174	0.8410	0.8417	0.9259
ω_3	0.9434	0.8905	0.9434	0.8410	0.8901	0.9346
ω_4	0.9434	0.8905	0.9434	0.8410	0.8901	0.9524
ω_5	0.9434	0.8905	0.9709	0.8410	0.9427	0.9615
ω_6	0.9434	0.8905	0.9709	0.8440	0.9427	0.9804

Tabela 6.2: Resultados

Note que contrário ao exemplo 6.1 todos os processos de preços dos zero bonds são crescentes.

Os procedimentos apresentados nos exemplos 6.1 e 6.2 são de fácil implementação computacional; contudo, não existe nenhum controle sobre os preços ou taxas efetivamente observados a partir do instante inicial, $t = 0$. Para fins práticos é importante que o modelo seja compatível com o conjunto de dados reais observados no instante $t = 0$.

Para obter tal modelo podemos iniciar o processo com os valores pre-determinados e então utilizar as equações de 6.1 a 6.4 para obter valores futuros de preços e taxas que não permitam estratégias de arbitragem.

O exemplo a seguir ilustra esse caso; note que nesse e caso a medida de preço do equilíbrio é introduzida simultaneamente.

Exemplo 6.3 Com $T = 3$, espaço de estados Ω , estrutura de informação $\{\mathfrak{F}_t\}$ idênticos ao exemplo 6.1, suponha que os seguintes dados são observados em $t = 0$, $r_1 = 0.06$, $Z_0^1 = 0.9434$, $Z_0^2 = 0.89$, $Z_0^3 = 0.84$.

Para calcular valores futuros de preços e taxas compatíveis com os dados observados em $t = 0$, utilizamos as equações 6.3 e 6.4, movendo um passo a frente a cada instante. Ainda, introduzimos simultaneamente as medidas de probabilidade condicional.

Considere os seguintes valores arbitrários $Z_1^2(\omega_1) = 0.91$, $Z_1^2(\omega_3) = 0.94$, $Z_1^2(\omega_5) = 0.97$ e $Q[1, f_1(\omega_1)] = 0.3$ segue da equação 6.4 com $s = 0$ e $\tau = 2$ que

$$Z_0^2 = \frac{1}{1 + r_1} E_Q[Z_1^2 | \mathfrak{F}_0],$$

ou seja,

$$0.89 = \frac{1}{1 + 0.06} [0.3 \times 0.91 + q \times 0.94 + (1 - (0.3 + q)) \times 0.97]$$

onde $q = Q[1, f_1(\omega_3)]$ e, $(1 - (0.3 + q)) = Q[1, f_1(\omega_5)]$. Resolvendo essa equação temos, $Q[1, f_1(\omega_3)] = 0.2867$ e $Q[1, f_1(\omega_5)] = 0.4133$

Substituindo os valores arbitrários dos preços $Z_1^2(\omega)$ na equação 6.3 temos,

$$r_2(\omega) = \begin{cases} 0.0989 & \text{para } \omega = \omega_1, \omega_2, \\ 0.0638 & \text{para } \omega = \omega_3, \omega_4, \\ 0.0309 & \text{para } \omega = \omega_5, \omega_6. \end{cases}$$

Note que uma vez especificadas essas probabilidades para calcular Z_1^3 determinamos dois valores arbitrariamente e então obtemos o terceiro pela equação 6.4.

Considere $Z_1^3(\omega_3) = 0.89$ e $Z_1^3(\omega_5) = 0.94$; logo, $Z_1^3(\omega_1)$ é dado por

$$0.84 = \frac{1}{1 + 0.06} [0.3 \times Z_1^3(\omega_1) + 0.2867 \times 0.89 + 0.4133 \times 0.94],$$

ou seja, $Z_1^3(\omega_1) = 0.8223$.

Para determinar os valores das probabilidades condicionais $Q[2, f_2(\omega)]$ escolhemos arbitrariamente os valores de Z_2^3 e em seguida calculamos essas probabilidades através da equação 6.4 com $s = 1$ e $\tau = 3$.

Então, seja $Z_2^3(\omega_1) = 0.90$ e $Z_2^3(\omega_2) = 0.92$. Resolvendo a equação,

$$0.8223 = \frac{1}{1.0989} [q0.90 + (1 - q)0.92]$$

onde, $q = Q[2, f_2(\omega_1)]$ e $1 - q = Q[2, f_2(\omega_2)]$ temos $Q[2, f_2(\omega_1)] = 0.81873$ e $Q[2, f_2(\omega_2)] = 0.18127$.

De maneira análoga, escolhendo $Z_2^3(\omega_3) = 0.94$ e $Z_2^3(\omega_4) = 0.95$ temos, $Q[2, f_2(\omega_3)] = 0.32$ e $Q[2, f_2(\omega_4)] = 0.68$. E, finalmente, fazendo $Z_2^3(\omega_5) = 0.96$ e $Z_2^3(\omega_6) = 0.98$ temos, $Q[2, f_2(\omega_5)] = 0.55$ e $Q[2, f_2(\omega_6)] = 0.45$.

Substituindo os valores arbitrários dos preços $Z_2^3(\omega)$ na equação 6.3 temos,

$$r_3(\omega) = \begin{cases} 0.111 & \text{para } \omega = \omega_1, \\ 0.08696 & \text{para } \omega = \omega_2, \\ 0.06383 & \text{para } \omega = \omega_3, \\ 0.05623 & \text{para } \omega = \omega_4, \\ 0.04167 & \text{para } \omega = \omega_5, \\ 0.0204 & \text{para } \omega = \omega_6. \end{cases}$$

Os valores da medida de preço do equilíbrio são calculados, como no exemplo anterior,

$$\begin{aligned} Q(\omega_1) &= 0.3 \times 0.81873 = 0.24562, \\ Q(\omega_2) &= 0.3 \times 0.18127 = 0.05438, \\ Q(\omega_3) &= 0.2867 \times 0.32180 = 0.09226, \\ Q(\omega_4) &= 0.2867 \times 0.67820 = 0.19444, \\ Q(\omega_5) &= 0.4133 \times 0.54770 = 0.22636, \\ Q(\omega_6) &= 0.4133 \times 0.45230 = 0.18694. \end{aligned}$$

6.1.2 Estrutura a Termo de *Yield to Maturity*

O *yield to maturity* é um processo estocástico adaptado, denotado Y_t^τ , $0 \leq t < \tau \leq T$ que está univocamente associado ao zero bond. Formalmente temos.

Definição 6.2 O *yield to maturity* de um bond é definido como a taxa interna de retorno tal que

$$Z_t^\tau (1 + Y_t^\tau)^{\tau-t} = 1$$

para $0 \leq t < \tau \leq T$. □

A equação acima é mais utilizada nas seguintes formas

$$Z_t^\tau = (1 + Y_t^\tau)^{t-\tau}$$

ou ainda,

$$Y_t^\tau = (Z_t^\tau)^{\frac{1}{t-\tau}} - 1. \quad (6.5)$$

A cada instante t existe uma coleção $\{Y_t^{t+1}, \dots, Y_t^T\}$ de yields conhecida como *estrutura a termo de yield to maturity* ou *curva de yields*. Em vista das equações acima é claro que o conhecimento da curva de yields é equivalente ao conhecimento da estrutura a termo dos preços de zero bonds.

O exemplo a seguir ilustra a definição acima.

Exemplo 6.4 Considere as condições do exemplo 6.1. Substituindo os valores da Tabela 6.1 na equação 6.5 obtemos os seguintes yields,

ω	Y_0^1	Y_0^2	Y_0^3	Y_1^2	Y_1^3	Y_2^3
ω_1	0.06	0.05822	0.05816	0.09	0.9109	0.10
ω_2	0.06	0.05822	0.05816	0.09	0.9109	0.08
ω_3	0.06	0.05822	0.05816	0.06	0.0600	0.07
ω_4	0.06	0.05822	0.05816	0.06	0.0600	0.05
ω_5	0.06	0.05822	0.05816	0.03	0.0314	0.04
ω_6	0.06	0.05822	0.05816	0.03	0.0314	0.02

Note que várias estruturas a termo são formadas; decrescente partindo de $t = 0$, crescente em dois casos para $t = 1$ e constante no outro caso para $t = 1$.

6.1.3 Estrutura a Termo de Taxa de juros *Forward*

Agora apresentamos o conceito de *taxas de juros forward*. Seja s o instante atual; denote O_s^t preço forward de um zero bond com maturidade τ a ser

entregue na data t , $s \leq t \leq \tau$. O preço desse forward é dado por

$$O_s^t = \frac{Z_s^\tau}{E_Q[1/\{(1+r_{s+1})\dots(1+r_t)\}|\mathfrak{F}_s]} = \frac{Z_s^\tau}{Z_s^t}$$

para $0 \leq s \leq t \leq \tau \leq T$. Note que a equação acima não permite estratégias de arbitragem pois, o numerador representa o preço de equilíbrio de um bond com vencimento em t .

Para $\tau = t + 1$, temos

$$O_s^t = \frac{Z_s^{t+1}}{Z_s^t}$$

para $0 \leq s \leq t \leq T$.

Definição 6.3 Definimos a *taxa de juros forward* associada ao período (s, t) , como o yield correspondente ao preço acima, ou seja,

$$f(s, t) = \frac{Z_s^t}{Z_s^{t+1}} - 1. \quad (6.6)$$

□

Note que $f(s, t) > 0$ pois, Z_s^t é uma função estritamente decrescente em t .

Fazendo $t = s$ na equação 6.6 temos pela equação 6.4 que

$$f(s, s) = \frac{Z_s^s}{Z_s^{s+1}} - 1 = r_{s+1}$$

para $0 \leq s \leq T$. Esse fato é consistente pois, se a entrega for imediata a taxa forward deve ser a taxa de juros atual!

A equação 6.6 também nos mostra que $f(s, t)$ é uma variável aleatória $\mathfrak{F}_s$ mensurável. Logo, para cada t fixo, $f(s, t)$ é um processo adaptado.

A coleção $\{f(s, s), \dots, f(s, T - 1)\}$ é conhecida como a *estrutura a termo forward de taxa de juros do instante s* . Em vista da equação 6.6 o conhecimento da estrutura a termo dos preços dos zero bonds é equivalente ao conhecimento da estrutura a termo forward. O inverso também é verdadeiro pois, como $Z_s^s = 1$ podemos utilizar a equação 6.6 para obter os demais zero bonds de forma recursiva. Portanto, todas as formas de estrutura a termo são equivalentes!

Uma relação útil entre as taxas forward e o preço de um zero bond é obtida a partir da seguinte identidade

$$Z_s^\tau \equiv \prod_{t=s+1}^{\tau} \frac{Z_s^t}{Z_s^{t-1}}.$$

Note que o produtório acima inicia-se com o termo $\frac{Z_s^{s+1}}{Z_s^s} = Z_s^{s+1}$ e os termos intermediários se cancelam restando somente o termo Z_s^τ .

Substituindo 6.6 na identidade acima temos,

$$Z_s^\tau = \prod_{t=s+1}^{\tau} [1 + f(s, t-1)]^{-1}. \quad (6.7)$$

Vejamos um exemplo do cálculo das taxas de juros forward.

Exemplo 6.5 Com as mesmas condições do exemplo 6.1, utilizamos a equação 6.6 e obtemos as seguintes taxas de juros forward

ω	$f(0, 0)$	$f(0, 1)$	$f(0, 2)$	$f(1, 1)$	$f(1, 2)$	$f(2, 2)$
ω_1	0.06	0.0564	0.05806	0.09	0.0921	0.10
ω_2	0.06	0.0564	0.05806	0.09	0.0921	0.08
ω_3	0.06	0.0564	0.05806	0.06	0.0600	0.07
ω_4	0.06	0.0564	0.05806	0.06	0.0600	0.05
ω_5	0.06	0.0564	0.05806	0.02997	0.0329	0.04
ω_6	0.06	0.0564	0.05806	0.02997	0.0329	0.02

Esses resultados são consistentes com a equação 6.7 pois, por exemplo

$$Z_0^2 = \frac{1}{(1.06)(1.0564)} = 0.893.$$

6.2 Reticulados e Cadeias de Markov

Dada uma estrutura de informação $\{\mathfrak{F}_t\}$, geralmente é difícil especificar o processo de taxa de juros e os demais elementos do modelo de forma que os vários processos de taxas de juros e preços tenham um comportamento

realista sob uma medida de probabilidade real P e, ainda, serem consistentes com a estrutura a termo observada na data $t = 0$.

O objetivo dessa seção é desenvolver uma classe de modelos onde as características apresentadas acima sejam atingidas da melhor forma.

Um candidato imediato para essa classe seria uma versão do modelo binomial apresentado na seção 5.3 adaptada para taxa de juros. A idéia consiste em modelar o processo de taxa de juros $\{r_t\}$ como um título qualquer, calcular uma medida de probabilidade condicional e, então obter o preço dos zero bonds através da equação 6.2. Contudo, como esse modelo envolve apenas quatro parâmetros r , u , d e q , não existe razão para esperar que os preços dos zero bonds obtidos sejam consistentes com uma estrutura a termos arbitrária previamente determinada.

Porém, introduzindo uma pequena generalização no modelo obtemos resultados satisfatórios. Para isso definimos uma *cadeia de Markov*.

Definição 6.4 Seja $\{X_t\}$, $t = 0, 1, 2, \dots$, um processo estocástico, $E = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ o espaço de estados e, considere que a partição $\{\mathfrak{S}_t\}$ seja gerada por X ; ou seja, $\mathfrak{S}_t = \mathfrak{S}_t^X$.

Uma *cadeia de Markov* é, um processo tal que

$$P\{X_{t+1} = j | \mathfrak{S}_t\} = P\{X_{t+1} = j | X_t\}$$

para todo $t \geq 0$. □

Para $X_t = i \in E$, dizemos que processo encontra-se no estado i no instante t . Note que, no evento $X_t = i$, o valor de $P\{X_{t+1} = j | X_t\}$ é $P\{X_{t+1} = j | X_t = i\}$; isto é, $\frac{P\{X_{t+1}=j \cap X_t=i\}}{P\{X_t=i\}}$.

A definição nos diz que a única informação pertinente para prever valores futuros é a informação do estado atual; em outras palavras, os valores futuros do processo dependem apenas do presente.

Mantendo a mesma estrutura de informação do modelo binomial, faremos que o processo de taxa de juros seja uma cadeia de Markov.

Para ser preciso, seja X uma cadeia de Markov com valor inicial $X_0 = 0$, espaço de estados $E = \{0, 1, \dots, T\}$ e probabilidades de transição satisfazendo as seguintes equações

$$\begin{aligned} P\{X_{t+1} = j | X_t = n\} &> 0 \text{ para } j = n + 1 \text{ ou } j = n, \\ P\{X_{t+1} = j | X_t = n\} &= 0 \text{ caso contrário,} \end{aligned}$$

$t = 0, 1, \dots, T - 1$.

Note que podemos interpretar X_t como o número total de "caras" após t sorteios de uma moeda; o estado do processo pode apenas crescer de uma unidade ou manter-se constante. Note que, ao contrário do processo binomial, os sorteios não são necessariamente independentes ou identicamente distribuídos. Em palavras, a probabilidade de ser sorteado "cara" no instante $t + 1$ depende, em geral, de t e do estado atual X_t .

A figura 6.1 ilustra a representação dos possíveis estados que X pode assumir partindo de X_0 . É evidente que essa figura é a mesma do modelo reticulado do binomial.

Figura 6.1: Espaço de Estados da Cadeia de Markov X .

Considere que as cadeias de Markov sejam homogêneas, isto é,

$$P\{X_{t+1} = j | X_t = i\} = P_{(i,j)},$$

$i, j \in E$; ou seja, $P\{X_{t+1} = j | X_t = i\}$ não depende de t . Essa forma será mais conveniente para o modelo de estrutura a termo que estamos desenvolvendo.

Considere as funções $\rho_t : E \rightarrow (0, \infty)$ para $t = 0, 1, \dots, T - 1$. Exigiremos que cada função seja estritamente crescente no seu domínio. Definimos o processo de taxa de juros fazendo

$$r_{t+1} = \rho_t(X_t(\omega))$$

para $t = 0, 1, \dots, T - 1$.

A cadeia de Markov X pode ser interpretado como um fator exógeno ao modelo com a propriedade que o conhecimento desse processo implica no conhecimento do processo de taxa de juros $\{r_t\}$.

Note que se no instante t , $X_t = n$ temos imediatamente que $r_{t+1} = \rho_t(n)$ e que no instante $t + 1$, r_{t+2} tornar-se-a $\rho_{t+1}(n)$ ou $\rho_{t+1}(n + 1)$. Em particular se cada função ρ_t for estritamente crescente no seu domínio então, o conhecimento de r_{t+1} é equivalente ao conhecimento de X_t (pois ρ é invertível).

Para desenvolver o modelo de estrutura a termo podemos partir diretamente da representação do espaço de estados da figura 6.1 especificando o valor de r_t em cada um dos nós do reticulado. Denotamos $r_{t+1}(n)$ o valor da taxa de juros associada ao estado (n, t) .

Para finalizar o modelo devemos calcular as probabilidades condicionais para o processo X_t . Como $X_t = (n, t)$ só pode evoluir para os estados $(n + 1, t + 1)$ e $(n, t + 1)$, é conveniente introduzir a seguinte notação

$$q(n, t) = Q\{X_{t+1} = (n + 1, t + 1) | X_t = (n, t)\}$$

para $n = 0, 1, \dots, t$ e $t = 0, 1, \dots, T - 1$, q é a probabilidade de subida. Note que

$$Q\{X_{t+1} = (n, t + 1) | X_t = (n, t)\} = 1 - q(n, t).$$

Ainda, como a partição é gerada por $\{X_t\}$ é claro que qualquer estado $(n, t + 1)$ representa um elemento de $\mathfrak{S}_{t+1}$ logo, existe uma consistência de notação.

A especificação completa do modelo pode agora ser vista em termos do diagrama de estados da figura 6.2. Note que com T estados no diagrama existe um total de $T(T + 1)/2$ nós, descontados os nós terminais. Como devemos especificar um valor de r e um valor de q para cada nó existe um total de $T(T + 1)$ parâmetros a serem determinados.

Figura 6.2: Modelo de Estrutura a Termo da Cadeia de Markov.

Por sua vez, o preço dos zero bonds podem ser obtidos a partir da equação 6.2 e da propriedade das cadeias de Markov

$$\begin{aligned} Z_t^T &= E_Q[1/\{(1+r_{t+1})...(1+r_\tau)\}|\mathfrak{F}_t] \\ &= E_Q[1/\{(1+r_{t+1})...(1+r_\tau)\}|X_t]. \end{aligned}$$

Em palavras, o preço do zero bond depende do estado atual X_t porém, é independente do histórico de preços e taxas.

De forma análoga ao processo de taxa de juros, o valor de Z_t^T pode ser expresso em termos de uma certa função de X_t . Denote $Z_t^T(n)$ o valor correspondente de Z_t^T no nó $X_t = n$.

Utilizando a equação 6.4 podemos escrever $Z_t^T(n)$ em termos da taxa de

juros e das probabilidades condicionais,

$$Z_t^\tau(n) = \frac{1}{1 + r_{t+1}(n)} \{q(n, t)Z_{t+1}^\tau(n+1) + [1 - q(n, t)]Z_{t+1}^\tau(n)\}. \quad (6.8)$$

Agora, denote

$$\delta(n, t, 1) = \frac{q(n, t)}{1 + r_{t+1}(n)},$$

$$\delta(n, t, 0) = \frac{1 - q(n, t)}{1 + r_{t+1}(n)}$$

então, a equação 6.8 pode ser escrita como

$$Z_t^\tau(n) = \sum_{i_1=0}^1 \delta(n, t, i_1) Z_{t+1}^\tau(n + i_1). \quad (6.9)$$

Utilizando recursivamente a equação 6.9 para calcular $Z_{t+1}^\tau(n + i)$ temos

$$Z_{t+1}^\tau(n + i_1) = \sum_{i_2=0}^1 \delta(n + i_1, t + 1, i_2) Z_{t+2}^\tau(n + i_1 + i_2).$$

Em geral temos,

$$Z_{t+j}^\tau(n + i_1 + \dots + i_j) = \sum_{i_{j+1}=0}^1 \delta(n + i_1 + \dots + i_j, t + j, i_{j+1}) Z_{t+j+1}^\tau(n + i_1 + \dots + i_{j+1}).$$

Fazendo $j = \tau - t - 1$ temos,

$$Z_{\tau-1}^\tau(n + i_1 + \dots + i_{\tau-t-1}) = \sum_{i_{\tau-t}=0}^1 \delta(n + i_1 + \dots + i_{\tau-t-1}, \tau - 1, i_{\tau-t}) Z_\tau^\tau.$$

Então, como $Z_\tau^\tau = 1$, temos

$$Z_t^\tau(n) = \sum_{i_1=0}^1 \delta(n, t, i_1) \sum_{i_2=0}^1 \delta(n + i_1, t + 1, i_2) \dots \sum_{i_{\tau-t}=0}^1 \delta(n + i_1 + \dots + i_{\tau-t-1}, \tau - 1, i_{\tau-t}).$$

Em particular para o instante $t = 0$ e conseqüentemente $n = 0$, podemos calcular os preços dos zero bonds por

$$Z_0^\tau(0) = \sum_{i_1=0}^1 \delta(0, 0, i_1) \sum_{i_2=0}^1 \delta(i_1, 1, i_2) \dots \sum_{i_{\tau}=0}^1 \delta(i_1 + \dots + i_{\tau-1}, \tau - 1, i_{\tau}). \quad (6.10)$$

A princípio podemos utilizar a equação 6.10 para obter um modelo consistente com a estrutura a termo observada no instante $t = 0$ contudo, dois problemas surgem desse método. Primeiro, note que trabalhar com a equação 6.10, na escolha de parâmetros para o lado direito, pode ser muito difícil. Segundo, a estrutura a termo observada em $t = 0$ fornece somente T equações em um total de $T(T+1)$ incógnitas. Logo, ainda há um número muito grande de graus de liberdade na escolha dos parâmetros.

Para solucionar esses problemas devemos efetuar algumas simplificações no modelo. A idéia consiste em reduzir o número de parâmetros no modelo impondo condições sobre o processo de taxa de juros e/ou sobre a medida de probabilidade condicional. O objetivo final é obter um sistema de equações que seja solúvel para um único conjunto de parâmetros.

A simplificação usual consiste em impor condições sobre a "volatilidade" que definimos como a razão $r_{t+1}(n+1)/r_{t+1}(n)$ ou $[1+r_{t+1}(n+1)]/[1+r_{t+1}(n)]$. Os dois exemplos a seguir ilustram esses procedimentos.

Exemplo 6.6 Considere que as medidas de probabilidade condicional sejam independentes de n , isto é,

$$q(n, t) = q(t)$$

para $0 \leq n \leq t < T$.

Então, dados os valores de $q(0), q(1), \dots, q(T-1)$ temos imediatamente todas as medidas de probabilidade condicional. Ainda definimos T valores de "volatilidade", $\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(T-1)$ pela razão

$$\frac{Z_t^{t+1}(n+1)}{Z_t^{t+1}(n)} = \frac{1 + r_{t+1}(n)}{1 + r_{t+1}(n+1)} = \sigma(t) \quad (6.11)$$

para $0 \leq n \leq t < T$; para $t = 0$ temos $\sigma(0) = 1 + r_1(0)$. Note que a medida que acabamos de definir é independente de n .

Utilizando a equação 6.11 recursivamente para calcular $Z_t^{t+1}(n+2)$, temos

$$Z_t^{t+1}(n+2) = \sigma(t) Z_t^{t+1}(n+1);$$

ou seja,

$$Z_t^{t+1}(n+2) = \sigma^2(t) Z_t^{t+1}(n).$$

Prosseguindo com esse processo recursivo obtemos uma fórmula para determinar o preço do zero bond em qualquer nó i do processo,

$$Z_t^{t+1}(n+i) = \sigma^i(t) Z_t^{t+1}(n) \quad (6.12)$$

para $0 \leq n \leq n+i \leq t-1 < T$.

Em particular, para $n = 0$ temos

$$Z_{t-1}^t(i) = \sigma^i(t-1)Z_{t-1}^t(0) \quad (6.13)$$

para $0 \leq i \leq t-1 < T$.

Segue dessa análise que dado $r_t(0)$ temos imediatamente todas as demais taxas do instante t pois, $Z_{t-1}^t(n) = 1/(1+r_t(n))$ e qualquer $Z_{t-1}^t(n)$, $0 \leq n \leq t-1 < T$, pode ser calculado pela equação anterior.

Portanto para termos uma especificação completa do modelo e ainda a consistência com a estrutura a termo observada em $t = 0$ basta escolhermos os valores de $r_0(0), \dots, r_{T-1}(0)$ ou equivalentemente, $Z_0(0), \dots, Z_{T-1}(0)$ de forma a serem consistente com os preços dos zero bonds observados no instante $t = 0$.

Para mostrar esse fato definimos a seguinte equação,

$$Z_t^\tau(n) = \prod_{j=t}^{\tau-1} g(j, \tau-1) Z_j^{j+1}(n) \quad (6.14)$$

para $n = 0, 1, \dots, t$ onde

$$\begin{aligned} g(s, s) &\equiv 1, \\ g(j, s) &\equiv 1 - q(j) + q(j) \prod_{i=0}^s \sigma(i), \end{aligned}$$

$j = 0, 1, \dots, s-1$

A equação 6.14 pode ser verificada com uma indução (reversa) sobre t . Começando com $t = \tau - 1$ temos imediatamente que a equação é verdadeira. Assumindo que a equação seja verdadeira para $t + 1$ substituímos seu valor na equação 6.8,

$$\begin{aligned} Z_t^\tau(n) &= Z_t^{t+1}(n) \left[q(t) \prod_{j=t+1}^{\tau-1} g(j, \tau-1) Z_j^{j+1}(n+1) \right. \\ &\quad \left. + \{1 - q(t)\} \prod_{k=t+1}^{\tau-1} g(k, \tau-1) Z_k^{k+1}(n) \right], \end{aligned}$$

utilizando a equação 6.12 temos,

$$Z_t^\tau(n) = Z_t^{t+1}(n) \left[q(t) \prod_{j=t+1}^{\tau-1} g(j, \tau-1) Z_j^{j+1}(n) \sigma(j) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \{1 - q(t)\} \prod_{k=t+1}^{\tau-1} g(k, \tau - 1) Z_k^{k+1}(n) \Big] \\
& = Z_t^{t+1}(n) \left(\prod_{j=t+1}^{\tau-1} g(j, \tau - 1) Z_j^{j+1}(n) \right) \left(q(t) \prod_{j=t+1}^{\tau-1} \sigma(j) + 1 - q(t) \right)
\end{aligned}$$

mas, $q(t) \prod_{j=t+1}^{\tau-1} \sigma(j) + 1 - q(t) = g(t, \tau - 1)$ logo,

$$Z_t^\tau(n) = Z_t^{t+1}(n) g(t, \tau - 1) \prod_{j=t+1}^{\tau-1} g(j, \tau - 1) Z_j^{j+1}(n) = \prod_{j=t}^{\tau-1} g(j, \tau - 1) Z_j^{j+1}(n).$$

Portanto, a equação é verdadeira para t .

Segue da equação 6.14 que

$$\frac{Z_0^{t+1}(0)}{Z_0^t(0)} = \frac{\prod_{j=0}^t g(j, t) Z_j^{j+1}(0)}{\prod_{j=0}^{t-1} g(j, t-1) Z_j^{j+1}(0)} = \frac{Z_t^{t+1}(0) \prod_{j=0}^{t-1} g(j, t)}{\prod_{j=0}^{t-2} g(j, t-1)}$$

onde a segunda igualdade utiliza a relação $g(t, t) = g(t-1, t-1) = 1$.

Utilizando a equação 6.13 para substituir $Z_t^{t+1}(0)$ na equação acima encontramos uma fórmula para o cálculo do preço dos zero bonds em termos de $q(t)$, $\sigma(t)$ e a estrutura a termo dos zero bonds no instante $t = 0$ (dados previamente especificados),

$$Z_t^{t+1}(n) = \frac{Z_0^{t+1}(0)}{Z_0^t(0)} \frac{\prod_{j=0}^{t-2} g(j, t-1)}{\prod_{j=0}^{t-1} g(j, t)} \sigma^n(t) \quad (6.15)$$

para $0 \leq n \leq t < T$.

Segue imediatamente da equação 6.15 que o processo de taxa de juros é conhecido para todo i e t pois, $r_{t+1}(i) = 1/Z_t^{t+1}(i) - 1$.

Devemos observar que, na prática, $\sigma(t)$ deve ser próximo de 1 para todo t , $0 \leq t < T$, o que significa que a taxa de juros não muda muito de um estado para outro. Na realidade, esses números devem ser escolhidos com cuidado para que a taxa de juros não se tornar muito grande ou mesmo negativa.

Note que fazendo $\sigma(t) = 1$ então, pela equação 6.12 é claro que $Z_t^{t+1}(n+i) = Z_t^{t+1}(n)$; ou seja, $Z_t^{t+1}(n)$ torna-se independente de n . Ainda temos $g(j, t) = g(j, t-1) = 1$ e conseqüentemente

$$Z_t^{t+1}(n) = Z_0^{t+1}(0)/Z_0^t(0);$$

ou seja, o preço de um zero bond em t para um período não depende do estado i mas, somente da estrutura a termo inicial!

Ainda, podemos generalizar o modelo para permitir que a medida de probabilidade condicional seja dependente do estado. Contudo, um importante caso especial do modelo é obtido fazendo $q(t) = q$ e $\sigma(t) = 1/k$ para todo t , onde q e k são números positivos previamente determinados com $q < 1$. Então, para $j < s$ a função g torna-se

$$g(j, s) = 1 - q + qk^{j-s} \equiv \frac{1}{h(s-j)}.$$

Nesse caso a equação 6.15 será dada por

$$Z_t^{t+1}(i) = \frac{Z_0^{t+1}(0)}{Z_0^t(0)} k^{-i} h(t).$$

A seguir apresentamos outro exemplo.

Exemplo 6.7 Assuma que $q(n, t) = 0.5$ para todo n e t então,

$$\delta(n, t, 1) = \delta(n, t, 0) = \frac{0.5}{1 + r_{t+1}(n)} = 0.5 Z_t^{t+1}(n).$$

Por sua vez, a equação 6.10 fica

$$Z_0^t = \left(\frac{1}{2}\right)^{\tau-1} Z_0^1(0) \sum_{i_1=0}^1 Z_1^2(i_1) \sum_{i_2=0}^1 Z_2^3(i_1+i_2) \dots \sum_{i_{\tau-1}=0}^1 Z_{\tau-1}^{\tau}(i_1+\dots+i_{\tau-1}) \quad (6.16)$$

Resta somente calcular os $T(T+1)/2$ valores das taxas de juros. Esses valores serão obtidos de forma a serem consistentes com a estrutura a termo de preços dos zero bonds observados no instante $t = 0$ bem como com a medida de volatilidade da taxa. Definimos a medida de volatilidade por

$$\sigma_t(n) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{r_{t+2}(n+1)}{r_{t+2}(n)} \right) \quad (6.17)$$

para $0 \leq n \leq t \leq T-1$.

Podemos escrever a equação acima de forma mais conveniente,

$$r_{t+2}(n+1) = r_{t+2}(n) \exp\{2\sigma_t(n)\}.$$

Utilizando a equação acima recursivamente temos,

$$r_{t+2}(n+1) = r_{t+2}(0) \exp\{2[\sigma_t(0) + \dots + \sigma_t(n)]\}$$

logo, fica claro que o conhecimento de r_{t+1} ou Z_t^{t+1} para um nó n , implica no conhecimento dos valores de ambas as variáveis para todo $0 \leq n \leq t$.

Utilizando essa idéia, a equação 6.16 e a estrutura a termo do instante $t = 0$ podemos encontrar todos os valores das taxas de juros nos nós do reticulado iniciando no instante $t = 0$ e prosseguindo passo a passo em direção ao vencimento, T .

Por exemplo fazendo $\tau = 2$ na equação 6.16 e $t = 0$ na equação 6.17 obtemos $r_2(0)$ e $r_2(1)$. Vejamos os passos,

Da equação 6.16 temos,

$$Z_0^2 = \frac{1}{2} Z_0^1 \sum_{i_1=0}^1 Z_1^2(i_1),$$

e, da equação 6.17 temos,

$$r_2(1) = r_2(0) \exp\{2\sigma_0(0)\}.$$

Ainda, como $Z_s^{s+1}(n) = \frac{1}{r_{s+1}(n)+1}$ temos,

$$\begin{aligned} Z_0^2 &= \frac{1}{2} Z_0^1 [Z_1^2(0) + Z_1^2(1)] \\ &= \frac{1}{2} Z_0^1 \left[\frac{1}{1+r_2(0)} + \frac{1}{1+r_2(1)} \right] \\ &= \frac{1}{2} Z_0^1 \left[\frac{1}{1+r_2(0)} + \frac{1}{1+r_2(0) \exp\{2\sigma_0(0)\}} \right] \end{aligned}$$

A figura 6.3 ilustra o procedimento acima.

Repetindo os passos anteriores obtemos $r_3(0)$, $r_3(1)$ e $r_3(2)$ através da seguinte equação,

$$\begin{aligned} Z_0^3 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 Z_0^1 \left[Z_1^2(0) \left(\frac{1}{1+r_3(0)} + \frac{1}{1+r_3(0) \exp\{2\sigma_1(0)\}} \right) \right. \\ &\quad \left. + Z_1^2(1) \left(\frac{1}{1+r_3(0) \exp\{2\sigma_1(0)\}} + \frac{1}{1+r_3(0) \exp\{2[\sigma_1(0) + \sigma_1(1)]\}} \right) \right] \end{aligned}$$

Prosseguindo com o processo obtemos todo o processo de taxa de juros!

Figura 6.3: Estrutura do Modelo.

Ainda, considerando que as volatilidades são independentes do estado isto é, que $\sigma_t(n+1) = \sigma_t(n)$ temos imediatamente o modelo de Black, Derman & Toy (BDT). Nesse caso as equações que determinam as taxas de juros são dadas por,

$$Z_0^2 = \frac{1}{2} Z_0^1 \left[\frac{1}{1 + r_2(0)} + \frac{1}{1 + r_2(0) \exp\{2\sigma(0)\}} \right],$$

$$Z_0^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 Z_0^1 \left[Z_1^2(0) \left(\frac{1}{1 + r_3(0)} + \frac{1}{1 + r_3(0) \exp\{2\sigma_1(0)\}} \right) \right. \\ \left. + Z_1^2(1) \left(\frac{1}{1 + r_3(0) \exp\{2\sigma_1(0)\}} + \frac{1}{1 + r_3(0) \exp\{4\sigma_1(0)\}} \right) \right].$$

E, como antes, prosseguindo com esse procedimento obtemos todo o processo de taxa de juros.

A última consideração nesse exemplo diz respeito à sua implementação computacional. Note que para calcular todo o processo de taxa de juros temos de resolver T equações do tipo 6.16 que, em geral, são transcendentais.

Então, devemos recorrer a um método numérico tal como o método da bissecção para obtermos uma solução dentro de um certo erro previamente determinado.

Segue a complexidade desse algoritmo é $TO(\log(n))$ onde $n = \frac{k}{\epsilon}$, k é o limite superior do intervalo de busca e ϵ é o erro. Vejamos, seja $r \in [0, k]$ a solução de uma das T equações, ao determinarmos o erro, ϵ , discretizamos o intervalo em $\frac{k}{\epsilon}$ intervalos logo, uma bissecção torna-se equivalente a um processo de busca binária que tem complexidade $O(\log(n))$.

Um alternativa ao método proposto no exemplo acima consiste em modelar o processo de taxa de juros por uma equação diferencial estocástica,

$$dr_{t+1} = \mu(t, r_t) + \sigma(t, r_t) dy_t \quad (6.18)$$

onde $\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ são funções especificadas e $\{dy_t\}$ é uma seqüência de variáveis aleatória independentes com $Q(dy_t = 1) = Q(dy_t = -1) = 0.5$; um passeio aleatório sobre a reta. Note que como os incrementos dy_t são independentes $E_Q[dy_t | \mathfrak{F}_{t-1}] = E_Q[dy_t] = 0$.

Segue que sobre a medida de preço do equilíbrio temos,

$$\begin{aligned} E_Q[dr_{t+1} | \mathfrak{F}_t] &= E_Q[\mu(t, r_t) | \mathfrak{F}_t] + E_Q[\sigma(t, r_t) dy_t | \mathfrak{F}_t] \\ &= \mu(t, r_t) + \sigma(t, r_t) E_Q[dy_t] \\ &= \mu(t, r_t) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{var}_Q[dr_t | \mathfrak{F}_{t-1}] &= E_Q[(dr_{t+1} - E_Q[dr_{t+1} | \mathfrak{F}_t])^2 | \mathfrak{F}_t] \\ &= E_Q[(\mu(t, r_t) + \sigma(t, r_t) dy_t - \mu(t, r_t) | \mathfrak{F}_t] \\ &= \sigma^2(t, r_t) E_Q[dy_t^2] \\ &= \sigma^2(t, r_t) . \end{aligned}$$

Se considerarmos o processo de taxa de juros sobre o reticulado, podemos facilmente encontrar funções consistentes para μ e σ . Por exemplo, sabendo $r_t(n)$, $r_{t+1}(n)$ e $r_{t+1}(n+1)$, substituindo $dy_t = 1$ na equação 6.18 temos,

$$r_{t+1}(n+1) - r_t(n) = \mu(t, r_t(n)) + \sigma(t, r_t(n)) ,$$

para $dy_t = -1$ temos,

$$r_{t+1}(n+1) - r_t(n) = \mu(t, r_t(n)) - \sigma(t, r_t(n)) .$$

Resolvendo o sistema acima temos,

$$\mu(t, r_t(n)) = \frac{r_{t+1}(n+1) + r_{t+1}(n) - 2r_t(n)}{2},$$

$$\sigma(t, r_t(n)) = \frac{r_{t+1}(n+1) - r_{t+1}(n)}{2}.$$

Um segundo método, de certa forma mais útil, consiste em iniciar com uma equação diferencial estocástica para a taxa de juros e impor restrições sobre a formulação do reticulado. Por exemplo, considere um reticulado e a seguinte equação para r ,

$$dr_{t+1} = \phi(t) - ar_t + \sigma(t) dx_t$$

onde a é um escalar no intervalo $(0, 1)$, e ϕ e σ são funções positivas com domínio em $\mathbb{R}$.

Note que a equação acima captura a tendência do mercado se ajustar de acordo com a lei da oferta e demanda para taxa de juros pois a taxa tende a decrescer se $r_t > \phi(t)/a$ e tende a crescer se $r_t < \phi(t)/a$.

A condição imposta à volatilidade provém do reticulado; sob essa formulação um movimento para cima, $dy_t = 1$, seguido de um movimento para baixo, $dy_{t+1} = -1$, deve ser equivalente a um movimento para baixo seguido de um movimento para cima. Ou seja,

$$\begin{aligned} r_{t+2} &= \phi(t+1) + (1-a)[\phi(t) + (1-a)r_t + \sigma(t)] - \sigma(t+1) \\ &= \phi(t+1) + (1-a)[\phi(t) + (1-a)r_t - \sigma(t)] + \sigma(t+1) \end{aligned}$$

para todo t . Uma condição necessária e suficiente (assumindo $\sigma > 0$) para esse fato ser verdadeiro é que

$$\sigma(t+1) = (1-a)\sigma(t) = (1-a)^t \sigma(1).$$

Note que as restrições impostas à volatilidade provenientes da formulação reticulado podem ser muito severas. Essas restrições podem ser relaxadas adotando uma formulação trinomial para o reticulado!

6.3 Modelos de Estrutura a Termo

Nas seções anteriores enfatizamos o papel do processo de taxa de juros $\{r_t\}$ na construção dos modelos de estrutura a termo. O procedimento, nesses

casos, consistia em especificar o espaço de probabilidades e a estrutura de informação, o processo de taxa de juros e finalmente, obter o processo de preços dos zero bonds através de uma fórmula tal como 6.2.

Esse procedimento produz modelos que são facilmente implementáveis de forma eficiente. Contudo, é difícil para essa classe de modelos capturar o comportamento de yields e preços dos zero bonds em diferentes vencimentos.

Uma alternativa para construir esses modelos, conhecido como *modelos de estrutura a termo*, consiste em considerar toda a estrutura a termo como um estado do processo estocástico. Após especificar o espaço de probabilidades e a estrutura de informação, especificamos a evolução temporal da estrutura a termo!

Esse procedimento pode ser abordado através da estrutura a termo dos yields, dos preços dos zero bonds ou das taxas forward. Independentemente da escolha, após a especificação de uma delas, as demais seguem imediatamente. Usualmente, considera-se que o processo da estrutura a termo seja uma cadeia de Markov e pode-se trabalhar tanto com a medida de probabilidade real ou de preço do equilíbrio. Esse procedimento apresenta a desvantagem de introduzir uma dificuldade extra na implementação quando levamos em consideração estratégias de arbitragem.

Vejamos o procedimento. Combinando as equações 6.3 e 6.4 temos,

$$Z_s^\tau = Z_s^{s+1} E_Q[Z_{s+1}^\tau | \mathfrak{F}_s] \quad (6.19)$$

para $0 \leq s < \tau \leq T$.

A condição necessária e suficiente para que não haja estratégias de arbitragem, é a existência de uma medida de probabilidade Q (medida de preço do equilíbrio) tal que a equação acima seja satisfeita para todo s e todo τ .

Porém, como ilustrado no exemplo a seguir, uma coleção arbitrária de processos de estrutura a termo podem não satisfazer a equação 6.19 qualquer que seja a medida de probabilidade.

Exemplo 6.8 Seja $T = 3$, $K = 8$ e a estrutura de informação $\{\mathfrak{F}_t\}$ com $\nu_t = 2$ para todo t , $0 \leq t \leq T - 1$. Os preços no instante $t = 0$ são dados por

$$Z_0^1 = 0.95, Z_0^2 = 0.90, Z_0^3 = 0.85.$$

No caso de um movimento para cima os novos preços no instante $t = 1$ são dados por

$$Z_1^2 = 0.94, Z_1^3 = 0.89,$$

e, no caso de um movimento para baixo temos,

$$Z_1^2 = 0.96, Z_1^3 = 0.91.$$

Seja q a medida de probabilidade condicional no caso de um movimento para cima no intervalo $[0, 1]$. Então, utilizando a equação 6.19 com $\tau = 2$ e $s = 0$ podemos calcular q ,

$$0.90 = 0.95[q0.94 + (1 - q)0.96]$$

ou seja, $q = 0.63158$.

De forma análoga, para $\tau = 3$ e $s = 0$ temos $q = 0.76316$! Logo, concluímos que não existe uma medida de probabilidade Q sobre a qual a equação 6.19 seja satisfeita simultaneamente para $\tau = 2$ e $\tau = 3$. Consequentemente existem estratégias de arbitragem.

O problema no exemplo acima é a superdeterminação do modelo. Para evitar esse tipo de problema, a especificação de Q e do processo da estrutura a termo devem permitir graus de liberdade de forma que 6.19, ou outras equações equivalentes, possam ser utilizadas para univocamente especificar os elementos do modelo.

A seguir mostramos como atingir essa determinação ótima (determinação que faz o sistema ter solução única) em uma estrutura de informação binomial.

Seja q a medida de probabilidade condicional associada a um movimento para cima, em geral, o valor de q pode variar de um nó para outro contudo, só estamos interessados em encontrar a especificação ótima do processo de estrutura a termo dos preços dos zero bonds.

Considere que $\{Z_s^{s+1}, Z_s^{s+2}, \dots, Z_s^T\}$ seja a estrutura a termo dos preços dos zero bonds no instante s . A única restrição sobre essa coleção de $T - s$ números é dada por

$$1 > Z_s^{s+1} > Z_s^{s+2} > \dots > Z_s^T > 0.$$

Nosso objetivo é especificar os preços dos zero bonds nos dois nós do instante $s + 1$ que representam os movimentos para cima e para baixo a partir do nó que os originam. É evidente que estabelecido esse procedimento para um nó, os demais serão somente uma extensão do mesmo processo. Vejamos o procedimento.

Iniciamos escolhendo arbitrariamente os $T - s - 1$ preços dos zero bonds no evento de um movimento para cima. Denotamos esses preços por $Z_{s+1}^{s+n}(u)$, $n = 2, \dots, T - 2$. É claro que esses números devem satisfazer à seguinte restrição,

$$1 > Z_{s+1}^{s+2}(u) > Z_{s+1}^{s+3}(u) > \dots > Z_{s+1}^T(u) > 0. \quad (6.20)$$

Note que podemos substituir a escolha arbitrária dos preços de forma que o modelo incorpore atributos especiais, tais como a forma que a estrutura a termo evolui de um período para o próximo, etc..

O passo seguinte consiste em utilizar a equação 6.19 para calcular os $T - s - 1$ preços dos zero bonds no evento de um movimento para baixo. Ou seja, devemos resolver a seguinte equação para $Z_{s+1}^\tau(d)$

$$Z_s^\tau = Z_s^{s+1} [q Z_{s+1}^\tau(u) + (1 - q) Z_{s+1}^\tau(d)].$$

De forma explícita,

$$Z_{s+1}^\tau(d) = \frac{Z_s^\tau / Z_s^{s+1} - q Z_{s+1}^\tau(u)}{1 - q} \quad (6.21)$$

para $\tau = s + 2, \dots, T$.

Logo, está completa a especificação do modelo; exceto por um possível problema: não existe nenhuma garantia que a estrutura a termo dos preços irá satisfazer as inequações

$$1 > Z_{s+1}^{s+2}(d) > Z_{s+1}^{s+3}(d) > \dots > Z_{s+1}^T(d) > 0.$$

Portanto, outras restrições devem ser impostas ao modelo de forma a garantir as inequações acima. Vejamos quais são essas restrições.

Em vista da equação 6.21 temos que $Z_{s+1}^T(d) > 0$ se e somente se

$$Z_{s+1}^T(u) < \frac{Z_s^T}{q Z_s^{s+1}}. \quad (6.22)$$

Satisfazer essa restrição é relativamente fácil uma vez que o termo à direita da inequação acima é estritamente positivo.

Outra restrição é imposta por $1 > Z_{s+1}^{s+2}(d)$. Utilizando novamente a equação 6.21 temos que essa condição será verdadeira se e somente se

$$Z_{s+1}^{s+2}(u) > \frac{Z_s^{s+2} / Z_s^{s+1} - (1 - q)}{q}. \quad (6.23)$$

Essa inequação também é facilmente satisfeita uma vez que seu lado direito é estritamente menor que 1 pois,

$$\frac{Z_s^{s+2}/Z_s^{s+1} - (1-q)}{q} = 1 + \frac{Z_s^{s+2}/Z_s^{s+1} - 1}{q}$$

e, $Z_s^{s+2}/Z_s^{s+1} - 1 < 0$.

O restante das inequações são da forma $Z_{s+1}^\tau(d) > Z_{s+1}^{\tau+1}(d)$ para $\tau = s+2, \dots, T-1$. Mais uma vez, pela equação 6.21 temos

$$Z_{s+1}^\tau(d) = \frac{Z_s^\tau/Z_s^{s+1} - qZ_{s+1}^\tau(u)}{1-q},$$

$$Z_{s+1}^{\tau+1}(d) = \frac{Z_s^{\tau+1}/Z_s^{s+1} - qZ_{s+1}^{\tau+1}(u)}{1-q};$$

então, para que a inequação seja satisfeita, temos mais uma restrição dada por,

$$Z_{s+1}^\tau(u) - Z_{s+1}^{\tau-1}(u) < \frac{Z_s^\tau - Z_s^{\tau+1}}{qZ_s^{s+1}} \quad (6.24)$$

para $\tau = s+2, \dots, T-1$.

Portanto, dados valores arbitrários para $q \in (0, 1)$ e $1 > Z_s^{s+1} > \dots > Z_s^T > 0$, é possível escolher valores para $Z_{s+1}^{s+2}(u), \dots, Z_{s+1}^{s+2}(u)$ de forma a satisfazerem as restrições 6.24 bem como 6.20, 6.22, e 6.23.

De forma análoga, dados valores arbitrários para $1 > Z_s^{s+1} > \dots > Z_s^T > 0$ e $Z_{s+1}^{s+2}(u), \dots, Z_{s+1}^{s+2}(u)$ satisfazendo 6.20 é possível escolher um valor para q tal que 6.24 seja satisfeita.

Segue dessa análise que a partir de uma certa estrutura a termo dada em um nó sempre é possível especificar estruturas a termo consistentes nos dois nós subsequentes. Ainda, a ausência de estratégias de arbitragem fica assegurada pela utilização da equação 6.19.

Vejamos um exemplo.

Exemplo 6.9 Considere que $Z_s^{s+i} = \delta^i$ e $Z_{s+1}^{s+1+i} = \theta^i$, para $i = 1, 2, \dots$ e dois números $\delta, \theta \in (0, 1)$. Ainda, temos que δ e T são fixos e existe alguma flexibilidade na escolha de q e θ . A restrição 6.22 nesse exemplo é dada por

$$q\theta^{T-s-1} < \delta^{T-s-1}.$$

Por sua vez, 6.23 é dada por

$$1 - q - q\theta > \delta$$

e, 6.24 é equivalente a

$$q(1 - \theta)\theta^{\tau-s-1} < (1 - \delta)\delta^{\tau-s-1}$$

para $\tau = s + 2, \dots, T - 1$.

Então, seja $\theta = \delta + \epsilon$ para algum $\epsilon > 0$; a primeira restrição no exemplo permanecerá verdadeira dado que $q < (\delta/\theta)^{T-s-1}$. Segue que valores razoáveis para q podem ser encontradas dado que ϵ seja suficientemente pequeno.

A segunda restrição será sempre verdadeira pois, $1 - q + q\theta > 1 - q + q\delta > (1 - q)\delta + q\delta = \delta$ (recorde que $\delta \in (0, 1)$).

Finalmente a última inequação será verdadeira para todo $\tau < T - 1$ se, e somente se, for verdadeira para $\tau = T - 1$. Então, a última restrição sobre q e ϵ é dada por

$$q < \left(\frac{1 - \delta}{1 - \delta - \epsilon} \right) \left(\frac{\delta}{\delta + \epsilon} \right)^{T-s-2}.$$

O método apresentado acima requer muito cuidado em sua implementação uma vez que os preços devem satisfazer uma série de restrições. Contudo, adotando a estrutura a termo das taxas forward como objeto a ser modelado, a única restrição que encontramos nesse caso requer que as taxas forward sejam positivas em todos os nós (é evidente que as condições de não arbitragem devem ser satisfeitas).

Vejamos como construir um modelo dessa maneira.

Seja $\{f(s, s), \dots, f(s, T)\}$ a estrutura a termo de taxas forward (não negativas) no instante $t = s$ e considere uma estrutura de informação binomial.

Seja q a medida de probabilidade condicional associada a um movimento para cima onde a estrutura a termo $\{f_u(s + 1, s + 1), \dots, f_u(s + 1, T - 1)\}$ também é conhecida. O objetivo é utilizar condições de não arbitragem para construir uma estrutura a termo $\{f_d(s + 1, s + 1), \dots, f_d(s + 1, T - 1)\}$ no nó que representa o movimento para baixo.

Substituindo Z dado pela equação 6.7 em 6.19 obtemos a condição de não arbitragem

$$\prod_{t=s+2}^{\tau} [1 + f(s, t - 1)]^{-1} = E_Q \left[\prod_{t=s+2}^{\tau} [1 + f(s + 1, t - 1)]^{-1} | \mathfrak{F}_s \right] \quad (6.25)$$

para $\tau = s + 2, \dots, T$.

A idéia agora é utilizar essas $T - s - 1$ equações para encontrar as $T - s - 1$ incógnitas $f_d(s + 1, s + 1), \dots, f_d(s + 1, T - 1)$. Denote

$$g(s, t) \equiv [1 + f(s, t)]^{-1},$$

$$g_u(s, t) \equiv [1 + f_u(s, t)]^{-1},$$

$$g_d(s, t) \equiv [1 + f_d(s, t)]^{-1}.$$

Segue que 6.25 pode ser reescrita como

$$\prod_{t=s+2}^{\tau} g(s, t - 1) = q \prod_{t=s+2}^{\tau} g_u(s + 1, t - 1) + (1 - q) \prod_{t=s+2}^{\tau} g_d(s + 1, t - 1).$$

Rearranjando temos,

$$g_d(s + 1, \tau - 1) = \frac{\prod_{t=s+2}^{\tau} g(s, t - 1) - q \prod_{t=s+2}^{\tau} g_u(s + 1, t - 1)}{(1 - q) \prod_{t=s+2}^{\tau-1} g_d(s + 1, t - 1)}$$

para $\tau = s + 2, \dots, T$. Logo, podemos calcular os valores de g_d recursivamente a partir de $\tau = s + 2$ (nesse caso o denominador da equação é $1 - q$).

Resumindo, dados valores arbitrários para q , $\{f(s, t)\}$, $s \leq t \leq T - 1$ e $\{f_u(s + 1, t)\}$, $s + 1 \leq t \leq T - 1$ não existe garantia que a estrutura a termo de forwards $\{f_d(s + 1, t)\}$ tenha todos os elementos positivos. Contudo, dado $\{f(s, t)\}$ arbitrário e alguma flexibilidade na escolha de q e de $\{f_u(s + 1, t)\}$ é sempre possível encontrar $\{f_d(s + 1, t)\}$ cujos elementos são todos positivos.

6.4 Medida de Probabilidade de Preço do Equilíbrio Forward

Nessa seção introduzimos uma nova medida de probabilidade, a *medida de probabilidade de preço do equilíbrio forward*. O objetivo desse novo conceito é facilitar o cálculo dos modelos. Porém, antes iremos rever alguns conceitos da teoria de probabilidade.

Considere um instante de tempo fixo $\tau \leq T$ e uma variável aleatória estritamente positiva M_τ , $\mathfrak{F}_\tau$ mensurável tal que $E_Q[M_\tau] = 1$. Até o instante nenhuma condição foi imposta sobre Q mas, em breve tomaremos Q como a medida de preço do equilíbrio.

Definimos a nova medida de probabilidade como

$$P_\tau(\omega) \equiv M_\tau(\omega)Q(\omega)$$

para todo $\omega \in \Omega$.

Note que P_τ é de fato uma medida de probabilidade pois, $P_\tau(\omega) > 0$, para todo $\omega \in \Omega$ e $P_\tau(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} M_\tau(\omega)Q(\omega) = E_Q[M_\tau] = 1$. Ainda, seja E_τ o operador expectativa com relação à medida P_τ .

Prosseguindo, definimos $\{M_t\}$, $0 \leq t \leq \tau$ como um processo martingal; isto é,

$$M_t = E_Q[M_\tau | \mathfrak{F}_t]$$

para $t = 0, 1, \dots, \tau$. Note, também, que $M_0 = E_Q[M_\tau] = 1$.

Agora apresentamos um resultado que relaciona expectativas condicionais sobre duas medidas de probabilidade.

Teorema 6.1 Seja x uma variável aleatória qualquer então,

$$E_\tau[M_t x | \mathfrak{F}_t] = E_Q[M_\tau x | \mathfrak{F}_t]$$

para $t = 0, 1, \dots, \tau$.

Prova. Para $x \in \mathfrak{F}_t$, $\mathfrak{F}_t$ mensurável, a prova do Teorema é imediata pois, nesse caso temos $M_t x = x E_Q[M_\tau | \mathfrak{F}_t] = E_Q[M_\tau x | \mathfrak{F}_t]$.

Por outro lado, para $t = 0$ a prova também é imediata pois, $M_0 = 1$ e,

$$E_\tau[x] = \int_\Omega x dP_\tau = \int_\Omega x M_\tau dQ = E_Q[M_\tau x].$$

Para o caso geral é suficiente considerar um evento A sobre $\mathfrak{F}_t$ e, então mostra que

$$E_\tau[M_t x | A] = E_Q[M_\tau x | A].$$

Trabalhando com o lado esquerdo da equação acima temos

$$\begin{aligned} E_\tau[M_t x | A] &= \frac{1}{P_\tau(A)} \int_A x M_t dP_\tau \\ &= \frac{1}{P_\tau(A)} \int_A x M_t M_\tau dQ \\ &= \frac{M_t(A)}{P_\tau(A)} \int_A x M_\tau dQ \end{aligned}$$

onde, a última passagem segue do fato de M_t ser constante sobre A . Agora, note que podemos escrever $M_t(A)$ da seguinte forma

$$M_t(A) = E_Q[M_\tau|A] = E_Q\left[\frac{P_\tau}{Q}|A\right] = \frac{P_\tau(A)}{Q(A)}.$$

Substituindo $M_t(A)$ na equação para $E_\tau[M_tx|A]$ temos,

$$E_\tau[M_tx|A] = \frac{1}{Q(A)} \int_A x M_\tau dQ = E_Q[M_\tau x|A].$$

□

Agora apresentamos um Corolário do Teorema acima.

Corolário 6.1 O processo estocástico $\{(yM)_t\}$, $0 \leq t \leq \tau$ é martingal sobre Q se e somente se $\{y_t\}$, $0 \leq t \leq \tau$ for martingal sobre P_τ .

Prova. Suponha que $(yM)_t$ seja Q -martingal então, $E_Q[y_\tau M_\tau|\mathfrak{F}_t] = y_t M_t$ e pelo Teorema anterior temos que

$$\begin{aligned} y_t M_t &= E_\tau[y_\tau M_\tau|\mathfrak{F}_t] \\ &= M_t E_\tau[y_\tau|\mathfrak{F}_t]. \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha $y_t = E_\tau[y_\tau|\mathfrak{F}_t]$ então, utilizando o Teorema anterior novamente temos que,

$$\begin{aligned} E_Q[M_\tau y_\tau|\mathfrak{F}_t] &= E_\tau[M_t y_\tau|\mathfrak{F}_t] \\ &= M_t E_\tau[y_\tau|\mathfrak{F}_{t-1}] \\ &= M_t y_t. \end{aligned}$$

□

Com esses resultados podemos retornar ao modelo. Seja $\{p_t\}$, $0 \leq t \leq s$ o processo estocástico que representa o preço de um título qualquer com $\tau \leq s \leq T$. Defina $y_t = p_t/Z_t^\tau$ e note que y_t representa o preço forward do título no instante t com entrega em τ .

Antes de prosseguirmos introduzimos uma forma alternativa para representar o processo de taxa de juros. Seja $\{B_t\}$, $0 \leq t \leq T$ um processo com $B_0 = 1$ e $B_t(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$ e t , $0 \leq t \leq T$. E, seja $r_t \equiv \frac{B_t - B_{t-1}}{B_{t-1}}$.

Considere, também, que Q seja uma medida de preço do equilíbrio e defina

$$M_\tau = [B_\tau Z_0^\tau]^{-1}.$$

Então, $M_\tau(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$ e

$$E_Q[M_\tau] = 1/Z_0^\tau E_Q[1/B_\tau] = 1$$

pois, $E_Q[1/B_\tau] = Z_0^\tau$.

Prosseguindo como anteriormente, definimos $\{M_t\}$, $0 \leq t \leq T$ como um processo martingal, isto é,

$$M_t = E_Q[M_\tau | \mathfrak{F}_t] = \frac{1}{Z_0^\tau} E_Q[1/B_\tau | \mathfrak{F}_t] = \frac{1}{Z_0^\tau} \frac{Z_t^\tau}{B_t}$$

onde a última passagem segue da equação 6.2.

Finalmente, definimos a *medida de probabilidade de preço do equilíbrio forward*, por

$$P_\tau(\omega) = M_\tau(\omega)Q(\omega) = \frac{Q(\omega)}{Z_0^\tau B_\tau(\omega)}.$$

Note que

$$y_t M_t = O_t^t M_t = \frac{p_t}{Z_t^\tau} \frac{Z_t^\tau}{Z_0^\tau B_t} = \frac{p_t}{Z_0^\tau B_t};$$

ou seja, $\{(yM)_t\}$ é o processo de preços descontado dividido pela constante Z_0^τ .

Como deveria ser, o processo $\{(yM)_t\}$ é Q martingal então, pelo Corolário 6.1 temos que o preço forward em t de um título para entrega em τ , O_t^t , é P_τ martingal. Portanto, podemos derivar uma nova fórmula para apreçar um título em termos da medida P_τ . A argumentação é a que segue.

Seja $p_\tau \in \mathfrak{F}_\tau$ o preço τ de um título. Mas, o preço forward O_τ^τ do título para entrega em τ é $O_\tau^\tau = p_\tau$. Logo, da observação que O_τ^τ é P_τ -martingal temos,

$$O_t^t = p_t/Z_t^\tau = E_\tau[O_\tau^\tau | \mathfrak{F}_t] = E_\tau[p_\tau | \mathfrak{F}_t]$$

para $t \leq \tau$.

De forma explícita temos,

$$p_t = Z_t^\tau E_\tau[p_\tau | \mathfrak{F}_t]. \quad (6.26)$$

Comparando a equação 6.15 com a equação usual, $p_t = B_t E_\tau[p_\tau/B_\tau | \mathfrak{F}_t]$, temos que a última torna-se mais conveniente quando o processo de taxa de

juros é constante ou determinístico pois, nesse caso B_τ pode ser fatorado para fora da expectativa condicional. E, a única informação que temos de calcular é a distribuição condicional de p_τ sobre a medida de preço do equilíbrio Q .

Por outro lado, considerando o processo de taxa de juros um processo estocástico, B_τ não pode ser fatorado para fora da expectativa e faz-se necessário o cálculo da distribuição conjunta (p_τ, B_τ) sobre Q ; contudo, na prática, essa distribuição conjunta pode ser difícil de obter! Por outro lado, considerando o mesmo processo para a taxa de juros, utilizando a equação 6.26 tudo que temos de calcular é a distribuição condicional de p_t sobre P_τ .

Infelizmente, ao considerarmos modelos sobre o reticulados, o cálculo da medida de probabilidade de preço do equilíbrio forward pode tornar-se bastante complicado. Pois, mesmo que o processo $\{r_t\}$ seja independente do caminho (o valor da taxa de juros no nó é independente do caminho que foi percorrido para atingi-lo), o processo $\{B_t\}$ não é independente do caminho (diferentes caminhos que levam ao mesmo nó implicam em diferentes valores para B).

Em geral, sobre um reticulado binomial, $\{B_t\}$ pode assumir um entre 2^t valores possíveis ao passo que existe somente $t + 1$ nós no instante t . Portanto, a implementação de um desses modelos pode facilmente tornar-se computacionalmente inviável!

6.5 Opções sobre Bonds e Bonds com Cupons

Considere uma opção Européia de compra sobre um zero bond Z^s com maturidade em τ . O valor terminal em τ desse título é dado por

$$d = \max\{(Z_\tau^s - K), 0\}$$

para $0 \leq \tau < s \leq T$.

Nosso objetivo é calcular o preço p_t desse título para $t < \tau$.

Duas equações podem ser utilizada para esse fim,

$$p_t = Z_t^T E_\tau[\max\{(Z_\tau^s - K), 0\} | \mathfrak{F}_t],$$

$$p_t = B_t E_Q[\max\{(Z_\tau^s - K), 0\} / B_t | \mathfrak{F}_t]$$

para $t \leq \tau$.

As circunstâncias determinarão qual será o método mais simples do ponto de vista computacional. Vejamos um exemplo.

Exemplo 6.10 Continuando o exemplo 6.2, para um modelo geral como este, a fórmula envolvendo a medida de probabilidade de preço do equilíbrio forward torna-se melhor.

Seja $K = 0.95$, $t = 0$, $\tau = 2$ e, $s = 3$ então, a primeira fórmula fica

$$\begin{aligned} p_0 &= 0.8905 E_\tau[\max\{(Z_2^3 - 0.95), 0\}] \\ &= 0.8905\{0.1666 \times 0.0024 + 0.1714 \times 0.0115 + 0.1714 \times 0.0304\} \\ &= 0.0068. \end{aligned}$$

Utilizando a outra fórmula temos,

$$\begin{aligned} p_0 &= E_Q[\max\{(Z_2^3 - 0.95), 0\}/B_2] \\ &= 0.1667 \times 0.0024/1.1236 + 0.1667 \times 0.0115/1.0918 + \\ &\quad + 0.1667 \times 0.0304/1.0918 \\ &= 0.0068. \end{aligned}$$

Bonds com cupons podem ser construídos como uma combinação linear de zero bonds. Vejamos como isso ocorre.

Suponha que um bond pague u_n unidades financeira no instante t_n para $n = 1, 2, \dots, N$, onde $t < t_1 < \dots < t_N$. O preço no instante t de um título que paga u_n em t_n é precisamente $Z_t^{t_n} u_n$ (seu valor descontado). Por sua vez, o preço do fluxo de caixa será dado pela soma de seus componentes. Denote β_t esse preço, logo,

$$\beta_t = \sum_{n=1}^N Z_t^{t_n} u_n.$$

Em palavras, o preço de um bond com cupom é igual ao seu valor esperado segundo a medida de preço do equilíbrio dos pagamentos descontados.

Exemplo 6.11 Suponha a seguinte estrutura de pagamentos, $u_1 = 7$, $t_1 = 2$, $u_2 = 107$ e, $t_2 = 3$. Então,

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 7Z_0^2 + 107Z_0^3. \\ \beta_1(\omega) &= 7Z_1^2 + 107Z_1^3 = \begin{cases} 96.302 & \text{para } \omega = \omega_1, \omega_2, \\ 101.834 & \text{para } \omega = \omega_3, \omega_4, \\ 107.376 & \text{para } \omega = \omega_5, \omega_6. \end{cases} \end{aligned}$$

Agora, considere uma opção Européia de compra de um bond com cupom. Na maturidade τ desse título $t < \tau < t_1$ seu valor será $d = \max\{(\beta_\tau - K), 0\}$. E, o preço no instante t será dado por

$$p_t = Z_t^\tau E_\tau[\max\{(\beta_\tau - K), 0\} | \mathfrak{F}_t],$$

ou na outra forma,

$$p_t = B_t E_Q[\max\{(\beta_\tau - K), 0\} / B_t | \mathfrak{F}_t].$$

Exemplo 6.12 Considere uma opção Européia de compra sobre o bond com cupom do exemplo anterior. Seja $K = 100$ o preço de exercício e $\tau = 1$ a maturidade. Utilizando a equação acima na forma da expectativa segundo Q temos.

$$\begin{aligned} p_0 &= (101.834 - 100)/1.06 \times (0.1517 + 0.1483) + \\ &\quad + (107.376 - 100)/1.06 \times (0.2582 + 0.1418) \\ &= 3.3025 \end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

- [1] Ash, R.B. [1972]. *Measure, Integration, and Functional Analysis*. Academic
- [2] Black F. and Scholes M. [1973]. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 3:637-654.
- [3] Chung, K.L. [1974]. *A Course in Probability Theory*, 2nd edition. Academic Press.
- [4] Dothan, M.U. [1990]. *Prices in Financial Markets*. Oxford University Press, New York.
- [5] Duffie, D. [1988]. *Security Markets Stochastic Models*. Academic Press.
- [6] Øksendal, B. [1985]. *Stochastic Differential Equations*. Springer, New York. Press, New York.
- [7] Pliska, S.R. [1997]. *Introduction to Mathematical Finance*. Blackwell Publishers Inc.
- [8] Rabbat, M. [1994]. *Preços de Ativos Financeiros e Comportamento de Agentes*. Tese de Mestrado, São Paulo.
- [9] Rebonato, R. [1997]. *Interest-Rate Option Models*. John Wiley & Sons, New York.
- [10] Willmott, P. [1995]. *The Mathematics of Financial Derivatives*. Cambridge University Press, New York.