Algoritmos Geométricos Discretos: Complexidade e Aplicações

Luciano Silva

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Curso: Mestrado em Matemática Aplicada
Área de Concentração: Ciência da Computação
Orientador: Prof. Dr. Antonio Elias Fabris

São Paulo, Agosto de 1998

O autor recebeu apoio do CNPq e FAPESP.

Este exemplar corresponde à redação final
da dissertação devidamente corrigida e
defendida por Luciano Silva
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 25 de setembro.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Antonio Elias Fabris (Orientador) - IME - USP
- Prof. Dr. Junior Barrera - IME - USP
- Prof. Dr. Jorge Stolfi - IC - UNICAMP

*Aos meus pais,
pelo apoio durante todos estes anos.*

Agradecimentos

Ao Prof. Antonio Elias, pela inestimável orientação, paciência e amizade demonstrados durante a realização deste trabalho e pela oportunidade ímpar de participar do surgimento do *Computer Graphics and Applied Computational Geometry Project (CGCAP)*, em todos os seus âmbitos;

Aos meus orientadores de iniciação científica, Prof. Yoshiharu Kohayakawa(MAC), Prof. Maria Lucia Sobral Singer(MAT), Prof. Carmem Silvia Cardassi(MAT) e Prof. Lucília Daruiz Borsari(MAT), pela inestimável contribuição adicionada a minha formação matemática;

A Prof. Miriam Aschar, minha professora de matemática do colegial, onde toda a paixão pela matemática começou;

Aos professores e funcionários do IME-USP, pela formação e serviços prestados;

Ao Henrique, pelo encontro numa fase de grandes mudanças;

Enfim, agradecer a todos que, direta ou indiretamente, participaram do momento especial de realização deste trabalho.

Resumo

O predicado de teste interior/exterior (*Point Containment*), que especifica se um ponto é parte de um objeto matematicamente bem-definido, é um problema crucial em computação gráfica. Esta dissertação apresenta técnicas para contrapor uma das maiores desvantagens dos algoritmos baseados em teste interior/exterior: o comportamento quadrático com respeito à resolução. Baseados no teste interior/exterior de Pol e Corthout [CorP92], são apresentados algoritmos eficientes para as operações de preenchimento de regiões e *stroking*, além de uma aplicação em *antialiasing*.

Abstract

The Point Containment predicate which specifies if a point is part of a mathematically well-defined object is a crucial problem in computer graphics. This work presents techniques that counteract the main disadvantage of Point Containment algorithms: their quadratic behaviour with respect to the resolution. Based on Pol-Corthout's Point Containment test [CorP92], efficient algorithms for filling and stroking operations are presented. Moreover, it is also presented an application in antialiasing.

Sumário

Introdução	15
1 Morfologia Discreta	21
1.1 Listas	21
1.2 Métricas discretas e listas conexas	23
1.2.1 Estruturas métricas em $\mathbb{Z}^2$	23
1.2.2 Listas conexas	24
1.3 Operadores de Minkowski	25
2 O Teorema Discreto de Jordan	27
2.1 Números de rotação	27
2.1.1 Teoria de <i>cross weight</i> (CW)	27
2.1.2 Versão analítica	29
2.1.3 Versão geométrica	30
2.1.4 Relação entre a versão analítica e geométrica	32
2.1.5 A translação ϵ	36
2.2 O Teorema de Jordan	38
2.3 Versão discreta do Teorema de Jordan	39
3 Preenchimento de Regiões	41
3.1 Funções de rasterização	41

3.1.1	Extremização	42
3.1.2	Rasterização via funções CW	44
3.1.3	Scan-conversion	45
3.2	Polígonos	47
3.3	Curvas de Bézier Polinomiais	51
3.4	O algoritmo quadrático	59
3.5	Redução da complexidade	60
3.5.1	Coerência	60
3.5.2	Coerência com quadrees	62
3.5.3	Coerência maximal	64
3.6	Comparação das complexidades teóricas	70
3.7	Implementação	71
3.8	Resultados	78
4	<i>Stroking</i>	84
4.1	A operação de <i>stroking</i>	84
4.2	O algoritmo quadrático	85
4.3	Redução da complexidade	87
4.3.1	Coerência com <i>quadrees</i>	88
4.3.2	Π -coerência	91
4.4	Comparação das complexidades teóricas	96
4.5	Implementação	97
4.6	Resultados	101
5	Preenchimento e <i>stroking</i>	106
5.1	O algoritmo quadrático	106
5.2	O algoritmo com quadrees	107
5.3	O algoritmo com coerência maximal e Π -coerência	109

SUMÁRIO

7

5.4	Comparação das complexidades teóricas	111
5.5	Implementação	112
5.6	Resultados	114
6	Aplicações em <i>antialiasing</i>	119
6.1	<i>Antialiasing</i>	119
6.2	A técnica de Fabris e Forrest para <i>antialiasing</i>	120
6.3	Resultados	121
7	Conclusões	129

Lista de Figuras

1	As operações de preenchimento e stroking.	16
1.1	Formas conexas estruturais de $\mathbb{Z}^2$: 4-conexa, 6-conexa e 8-conexa.	23
1.2	Listas 4-conexa, 6-conexa e 8-conexa.	25
2.1	Interpretação geométrica do número de rotação.	29
2.2	Posições relativas de L^1 e L^2 , sem orientação.	34
2.3	Perturbações em pontos.	36
3.1	Elementos do algoritmo de scan-conversion de [Fol96]	45
3.2	Bounding box de um segmento poligonal L	47
3.3	Caso em que $\mathcal{F}(L, P) = 0$	48
3.4	Caso em que $\mathcal{F}(L, P) = s(L_0^y - L_1^y)$	48
3.5	Elementos para cálculo dentro da bounding box.	49
3.6	Partes esquerda e direita de uma curva de Bézier.	52
3.7	Bounding box usando os pontos de controle da curva.	55
3.8	Teste de coerência.	61
3.9	Algumas etapas do algoritmo de preenchimento com quadrees.	63
3.10	Regiões internas não-maximais.	64
3.11	Detecção num ponto P	65
3.12	Propagação de cor a partir de um ponto Q	66
3.13	Escolha do vértice P_2	68

3.14	Panorama básico do sistema de teste interior/exterior.	72
3.15	Ação da implementação do preenchimento de região com quadrees.	75
3.16	Preenchimento de poligonais.	78
3.17	Preenchimento de curvas de Bézier.	79
3.18	Preenchimento do caracter Hon.	79
3.19	Preenchimento do caracter Ni.	80
3.20	Preenchimento do caracter Na.	81
3.21	Caracteres japoneses preenchidos e reduzidos.	81
3.22	Preenchimento de caracteres árabes.	82
3.23	Caracteres árabes preenchidos e reduzidos.	82
3.24	Preenchimento de poligonais com alto grau de coerência no interior e exterior.	83
4.1	Regiões coerentes com respeito a uma região S'	88
4.2	Exemplo de stroking com <i>quadrees</i>	90
4.3	Contribuição da dilatação $T_k \oplus Q_{Box}(B)$ para $\bigcup_{i=0}^{k-1} \{T_i \oplus Q_{Box}(B)\}$	92
4.4	Cobertura com uma brush do tipo diamante.	93
4.5	Refinamento de uma região Π -coerente.	94
4.6	<i>Brushes</i> implementadas e parâmetros de variação de tamanho.	98
4.7	Panorama básico do sistema de teste interior/exterior para <i>stroking</i>	99
4.8	Efeitos da variação do tipo de <i>brush</i>	102
4.9	Curvas do caracter Ni.	103
4.10	Curvas do caracter Hon.	104
4.11	Segmento diagonal na imagem (redução de 30%).	105
5.1	Intersecção entre as regiões de stroking e preenchimento.	106
5.2	Efeitos de preenchimento com <i>stroking</i> simultâneo.	115
5.3	Curvas do caracter Ni.	116
5.4	Curvas do caracter Hon.	117

5.5	Segmentos quase-sobrepostos (redução de 30%).	118
6.1	Efeitos de <i>aliasing</i> e <i>antialiasing</i>	120
6.2	Caso (1) - Curva com porções quase verticais e horizontais.	122
6.3	Caso (3) - Curva com grande raio de curvatura.	122
6.4	Caso (2) - Curva com pequeno raio de curvatura.	123
6.5	Caso (4) - Curva com um cúspide.	123
6.6	Caso (5) - Curva com um pequeno <i>loop</i>	124
6.7	Caso (6) - Curva com dois pontos de inflexão.	124
6.8	Curva utilizada para teste de variação de largura.	125
6.9	Variação de largura das curvas.	126
6.10	Efeitos da variação do filtro.	127
6.11	Curvas fechadas.	128
6.12	Curvas fechadas preenchidas e com <i>antialiasing</i>	128

Lista de Tabelas

3.1	Comparação das complexidades teóricas para preenchimento de região. . .	71
3.2	Comparação do número de testes para o caracter Hon.	80
3.3	Comparação do número de testes para o caracter Ni.	80
3.4	Comparação do número de testes para o caracter Na.	81
3.5	Comparação do número de testes para os caracteres árabes.	82
3.6	Comparação do número de testes para poligonais.	83
4.1	Comparação das complexidades teóricas para <i>stroking</i>	97
4.2	Comparação do número de testes de <i>stroking</i> para o caracter Ni.	103
4.3	Comparação do número de testes de <i>stroking</i> para o caracter Hon.	104
4.4	Efeitos da variação do tamanho da <i>brush</i>	105
5.1	Comparação das complexidades teóricas para preenchimento e <i>stroking</i> si- multâneos.	111
5.2	Comparação do número de testes para o caracter Ni.	116
5.3	Comparação do número de testes para o caracter Hon.	117
5.4	Efeitos da variação do tamanho da <i>brush</i>	118
6.1	Tempos para várias particularidades geométricas de curvas.	121
6.2	Tempos com variação da largura das curvas.	125
6.3	Tempos com variação dos filtros.	128

Lista de Algoritmos

1.1	Scan-conversion de Foley et. al [Fol96].	45
1.2	Cálculo de número de rotação de poligonais.	51
1.3	Cálculo de número de rotação para Curvas de Bézier.	59
1.4	Preenchimento de regiões quadrático.	59
1.5	Preenchimento de regiões com quadrees.	62
1.6	Preenchimento de regiões com coerência maximal.	67
1.7	Stroking quadrático.	87
1.8	Stroking $T \oplus B$ com quadrees.	89
1.9	Stroking com Π -coerência.	94
1.10	Preenchimento de regiões e <i>stroking</i> quadrático.	107
1.11	Preenchimento e <i>stroking</i> com <i>quadrees</i>	108
1.12	Preenchimento e stroking com coerência maximal e Π -coerência.	110

Lista de Procedimentos

1.1	Contribuição de um segmento poligonal.	50
1.2	Contribuição dos segmentos de curva de Bézier.	58
1.3	Propagação na componente interior.	66
1.4	Teste de pertinência $\tau_{T \oplus B}(Origem)$	86
1.5	Cobertura da região de stroking.	92
1.6	Refinamento de uma região Π -coerente.	93
1.7	Modificação da cobertura da região de <i>stroking</i>	109

Lista de Funções

1.1	Detecção de um ponto do interior.	65
-----	---	----

Introdução

Um dos objetivos centrais da computação gráfica é produzir imagens a partir de um modelo, processo denominado *renderização*. Um modelo é descrito como um conjunto de objetos gráficos: um objeto gráfico $\mathcal{O}$ consiste de uma família finita $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_m\}$ de subconjuntos, $U_i \subset \mathbb{R}^n$, de algum espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, e uma função $F : U_1 \cup \dots \cup U_m \rightarrow \mathbb{R}^p$. A família $\mathcal{U}$ é chamada de conjunto de dados geométricos e define a forma (geometria e topologia) do objeto, e f é a função atributo do objeto que define, por exemplo, a cor e textura do objetos. A dimensão da união $U_1 \cup \dots \cup U_m$ define a dimensão do objeto.

Objetos podem ser combinados de várias maneiras para produzir objetos mais complexos:

- usando operações booleanas, como união, intersecção e diferença;
- usando operações morfológicas, como a soma e subtração de Minkowski (veja Capítulo 1).
- uma seqüência de objetos q -dimensionais pode definir um objeto $(q+1)$ -dimensional por limitação. Por exemplo, uma curva fechada simples no plano delimita e define uma região 2-dimensional.

A formação de objetos complexos através de operações booleanas tem grande importância em modelamento geométrico. Com base nas operações morfológicas e na limitação, podem ser derivadas várias outras operações importantes. Utilizando a soma de Minkowski, obtem-se a operação de *stroking*, que consiste numa transformação do tipo caminho-região que modela a forma produzida quando um objeto(chamado *brush*) se move ao longo de uma trajetória, ou comumente, ao longo de um caminho. A partir da operação de limitação, pode-se produzir a operação de preenchimento, cujo função é preencher a região delimitada por alguma seqüência de objetos. As operações de preenchimento e

stroking constituem um suporte para muitas aplicações gráficas importantes, tais como produção de fontes.

A figura abaixo mostra os efeitos destas duas operações:

Figura 1: As operações de preenchimento e stroking.

Uma imagem é uma função $I : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^k$: para cada ponto $p \in \Omega$, $I(p)$ define os atributos de p , como cor e opacidade, por exemplo. Uma classe de imagens muito importante é formada tomando $\Omega = \mathbb{Z}^2$, chamadas de imagens digitais.

No processo de transformação de um modelo em uma imagem notam-se três fases distintas:

Fase de pré-processamento: redução do modelo a uma forma mais simples.

Fase de rasterização: conversão do modelo simplificado em um *bitmap*([Fiu89]).

Fase de pós-processamento: composição dos bitmaps em uma imagem.

Uma taxonomia dos algoritmos de renderização pode ser estabelecida com base no modo em que realizam as três fases anteriores:

Algoritmos baseados no objeto: tratam objeto por objeto do modelo, encontrando os pontos da imagem que são afetados por um determinado objeto. Neste processo,

realizam uma projeção explícita do objeto na imagem. Algoritmos baseados em *scan-conversion* são exemplos clássicos desta classe.

Algoritmos baseados na imagem: para cada ponto da imagem a ser produzida, verificam se os atributos deste ponto são afetados por algum objeto(ou objetos) do modelo. Caso afirmativo, calculam o valor desta contribuição. Um exemplo muito familiar desta classe é o algoritmo de *ray-tracing*.

Para exemplificar melhor esta taxonomia, considere-se as duas operações básicas descritas anteriormente: preenchimento e *stroking*. Para a operação de preenchimento, a maioria dos algoritmos de *scan-conversion* trabalham somente com regiões poligonais simples, i.e. sem auto-interseções, requerem uma prévia linearização e redução da região original em regiões mais simples, por exemplo regiões convexas, trapezoidais ou triangulares. Esta redução pode ser encontrada, por exemplo, na implementação, feita pela Adobe, da linguagem PostScript [AdoB86]. Porém, esta fase de linearização pode levar a problemas numéricos e de robustez dos algoritmos, como os descritos em Forrest [For85] [For88] e Franklin [Fra86]. No caso especial do PostScript da Adobe, alguns exemplos de problemas podem ser encontrados em Perky [Per88] e Pol-Corthout [CorP92].

Para a operação de *stroking*, duas abordagens de *scan-conversion* são geralmente utilizadas. Uma delas consiste em rasterizar o caminho, colocando a *brush* em cada ponto do caminho rasterizado. Whitted [Whi83] e Bleser et al. [BleSM88], por exemplo, realizam este processo com a possibilidade de variação da intensidade, tamanho e forma da *brush* ao longo do caminho. Estes algoritmos foram produzidos para serem conjugados em sistemas de pintura e implementados via tabelas do tipo *look-up*. Strassmann [Str86] descreve outro tipo de algoritmo, com a possibilidade de se controlar vários outros parâmetros. Em [PosF89], Posch apresenta um algoritmo com *brush* circular que somente atualiza os pontos num arco semi-circular, perpendicular à direção do caminho, num ponto corrente do caminho. A segunda abordagem é transformar o problema de *stroking* num problema de preenchimento. Este processo é feito computando-se as equações algébricas do contorno da região de *stroking*. Porém, se a complexidade geométrica dos objetos na operação cresce, as equações tornam-se muito complexas, como descrito em Gosh e Mudur [GhoM84]. Alternativamente, caminhos e *brushes* são usualmente aproximados, em um fase de pré-processamento, por polígonos, como no sistema METAFONT de D.E. Knuth [Knu86], e o resultado da operação pode ser obtido como descrito por Guibas et al. [GuiRS83].

Já os algoritmos baseados na imagem testam a pertinência de um ponto da imagem contra um objeto, sem a necessidade de um pré-processamento prévio. Para isto, existe

a necessidade da especificação de um predicado de pertinência de um ponto a um objeto¹, conhecido como teste interior/exterior (*Point Containment test*). A utilização deste predicado de pertinência para todos os pontos da imagem, implementada em software, é considerada muito lenta para o processo de renderização, como já notado por Newmann e Sproull [New79].

Poucos algoritmos baseados na imagem têm sido publicados. Forrest [For85], Tang [Tan88] e Guibas et al. [GuiRS83] descrevem algoritmos para objetos poligonais, detalhando testes de pertinência de pontos em polígonos. O tratamento de objetos mais complexos, como segmentos de curvas de Bézier polinomiais e racionais, pode ser encontrado na tese de doutoramento de Pol e Corthout [CorP92].

Estes exemplos permitem realçar uma série de vantagens dos algoritmos baseados na imagem sobre os baseados no objetos, tais como:

1. Nenhum pré-processamento do objeto é necessário: os algoritmos baseados na imagem podem lidar diretamente com objetos de alta complexidade geométrica. Como nenhum pré-processamento é realizado, não é necessário memória adicional para armazenar estruturas de dados intermediárias. Os algoritmos baseados no objeto realizam um pré-processamento do objetos, geralmente projeções seguidas de linearizações, cujas estruturas intermediárias são armazenadas em alguma ordem para facilitar a fase de rasterização. Em algumas implementações, os objetos são primeiramente reduzidos a regiões mais fáceis de serem rasterizadas, tais como segmentos poligonais (Klassen [KlaS91]).
2. *Clipping* explícito de objetos contra a imagem ou outros objetos não é necessário: simplesmente para cada ponto da imagem, ou ele é afetado ou não por um objeto (ou objetos) do modelo. Nos algoritmos baseados no objeto, o *clipping* precisa ser realizado ou no espaço do objeto ou no espaço da imagem.
3. Facilidade de adaptação com crescimento da complexidade do modelo: somente o predicado de pertinência, que testa se um ponto é afetado ou não por algum objeto, precisa ser especificado. Já nos algoritmos baseados no objeto, a complexidade do processo cresce drasticamente com o aumento da complexidade do modelo, principalmente nos processos de linearização e *clipping*.
4. Dada sua simplicidade e provada robustez, os algoritmos baseados na imagem podem ser implementados em *hardware* dedicado. Implementações em hardware de

¹Por exemplo, testar se um ponto está na região de preenchimento ou *stroking*.

algoritmos baseados no objeto necessitam de uma quantidade considerável de pré-processamento em *software*, fato que pode limitar o poder de modelamento.

5. Os algoritmos baseados na imagem são altamente indicados para implementações paralelas, uma vez que não existe uma dependência entre as computações das contribuições nos pontos da imagem.

Porém, uma das maiores desvantagens dos algoritmos baseados na imagem é a sua complexidade quadrática com respeito à resolução da imagem. Na abordagem baseada no objeto, os algoritmos de *scan-conversion* têm, usualmente, complexidade linear na resolução da imagem. Assim, o desenvolvimento de métodos que reduzam a complexidade dos algoritmos baseados na imagem é de grande interesse computacional.

A presente dissertação propõe métodos para redução desta complexidade nas operações de preenchimento e *stroking*. Para tal fim, fixou-se o teste interior/exterior desenvolvido por Pol e Corthout [CorP92] como padrão, devido a sua alta robustez frente a casos críticos, precisão numérica (utiliza somente aritmética inteira), e grande potencial de modelamento. Além disto, é apresentada uma aplicação destas duas operações na técnica de *antialiasing* de Fabris e Forrest [Fab95].

A dissertação está organizada em sete capítulos, a saber:

Capítulo 1: descreve os pré-requisitos da Morfologia Matemática Discreta, que serão utilizados nos capítulos subseqüentes, tais como representações matemáticas de curvas discretas, distâncias discretas e conexidade, operações morfológicas básicas.

Capítulo 2: introduz o conceito de função de rasterização e descreve uma forma particular destas funções. Esta forma particular permitirá a construção de um versão discreta do bem conhecido Teorema de Jordan, que formará a base para o teste de pertinência na operação de preenchimento.

Capítulo 3: descreve o teste interior/exterior de Pol e Corthout e sua utilização num algoritmo de complexidade quadrática na resolução da imagem para a operação de preenchimento. Para reduzir esta complexidade, são analisados os algoritmos que utilizam relações de coerência.

Capítulo 4: introduz formalmente o conceito da operação de *stroking*. Após descrito o teste interior/exterior de Pol e Corthout para esta operação, são mostrados dois algoritmos que calculam a região de *stroking*: um, quadrático na resolução, e outro,

de menor complexidade, baseado em coerência com *quadtrees*. No final do capítulo é mostrada uma nova noção de coerência, a Π -coerência, que permite reduzir estas complexidades.

Capítulo 5: trata da execução simultânea das operações de preenchimento e *stroking*, utilizando parte das técnicas desenvolvidas nos Capítulos 3 e 4.

Capítulo 6: trata de uma aplicação dos algoritmos de preenchimento e *stroking* na técnica de *antialiasing* de Fabris e Forrest [Fab95].

Capítulo 7: traça um panorama geral do que foi desenvolvido, indicando aspectos relevantes e trabalhos futuros.

As contribuições desta dissertação concentram-se nos finais dos Capítulos 3, 4 e 5, com a introdução de novos conceitos de coerência, culminando com a redução da complexidade dos algoritmos.

Capítulo 1

Morfologia Discreta

A morfologia discreta é uma teoria matemática importante para desenvolvimento de operações no ambiente discreto, isto é, em $\mathbb{Z}^n$. Utilizando-se algumas ferramentas desta teoria restrita ao caso bidimensional, este capítulo constrói um ambiente para suportar o desenvolvimento de algoritmos robustos e eficientes para duas operações básicas de rasterização –preenchimento de regiões e stroking–, analisadas em detalhes nos capítulos posteriores.

1.1 Listas

Uma lista de pontos será definida como um função de um intervalo de naturais $[0...n]$ em $\mathbb{Z}^2$, ou seja, uma lista de pontos corresponderá a uma seqüência de pontos. Listas serão utilizadas para representar curvas discretas.

Definição 1.1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, o conjunto de funções de $[0...n]$ em $\mathbb{Z}^2$ será denotado por $\Lambda_n = \{L : [0...n] \rightarrow \mathbb{Z}^2\}$. As funções L serão chamadas de listas de comprimento n , denotado por $\#L$.

Ao longo deste capítulo, usar-se-á L_i para denotar a imagem $L(i)$, ou seja, o i -ésimo ponto de L . Chamar-se-á uma lista de *fechada* se e somente se $L_0 = L_{\#L}$. O conjunto de pontos de uma lista L será denotado por $\langle L_i \rangle_{i=0}^n$. Em algumas definições, abusando da linguagem matemática, tal notação também será utilizada para indicar a função L que define uma lista.

Da definição anterior segue que Λ_n é equivalente ao $n + 1$ -produto cartesiano $(\mathbb{Z}^2)^{n+1}$.

Definição 1.2. O conjunto de todas as listas será denotado por Λ , ou seja, $\Lambda = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Lambda_i$.

Neste conjunto podem ser especificados operadores importantes para a formação de novas listas. O primeiro destes operadores será a concatenação:

Definição 1.3. *Sejam L^1 e L^2 duas listas de comprimento n_1 e n_2 , respectivamente. L^1 e L^2 podem ser concatenadas se e somente se $L_{n_1}^1 = L_0^2$. A concatenação de duas listas nestas condições será a lista $L^1 \uplus L^2$, de comprimento $n_1 + n_2$, definida por:*

$$(L^1 \uplus L^2)_i = \begin{cases} L_i^1 & \text{se } 0 \leq i \leq n_1 \\ L_{i-n_1}^2 & \text{se } n_1 \leq i \leq n_1 + n_2 \end{cases}$$

Observa-se facilmente que, se uma das listas tiver comprimento 0, a concatenação reduz-se à operação identidade.

Definição 1.4. *A reversão é um operador unário $\mathcal{R} : \Lambda \rightarrow \Lambda$, definido por:*

$$\mathcal{R}(L) = \langle L_{n-i} \rangle_{i=0}^n.$$

Claramente $\mathcal{R}(\mathcal{R}(L)) = L$. O próximo operador é o bem conhecido operador de diferença .

Definição 1.5. *O operador de diferença $\Delta : \Lambda - \Lambda_0 \rightarrow \Lambda$ é definido por:*

$$\Delta(L) = \langle L_{i+1} - L_i \rangle_{i=0}^{n-1}.$$

Como consequência imediata destas definições, tem-se a seguinte relação entre estes três operadores:

Teorema 1.1.

$$\mathcal{R}(L^1 \uplus L^2) = \mathcal{R}(L^2) \uplus \mathcal{R}(L^1)$$

$$\Delta(L^1 \uplus L^2) = \Delta(L^1) \uplus \Delta(L^2)$$

$$\Delta \circ \mathcal{R} = -\mathcal{R} \circ \Delta$$

1.2 Métricas discretas e listas conexas

A noção de conectividade em listas pode ser comparada com uma versão discreta de continuidade. Certas restrições de conectividade em listas permitirão obter um corolário importante do Teorema Discreto de Jordan.

Para se desenvolver uma teoria coerente de conectividade no ambiente discreto bidimensional, $\mathbb{Z}^2$ será dotado de uma estrutura métrica.

1.2.1 Estruturas métricas em $\mathbb{Z}^2$

Para se induzir uma métrica em $\mathbb{Z}^2$, utilizar-se-á a seguinte norma geral:

Definição 1.6. *Seja $V = \{v_i : 0 \leq i \leq n\} \subset \mathbb{Z}^2$ um sistema finito de geradores de $\mathbb{Z}^2$, considerado como um $\mathbb{Z}$ -módulo. Defina:*

$$\begin{aligned} |\cdot|_V : \mathbb{Z}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\mapsto \min\{\sum |a_i| : \sum a_i v_i = P\} \end{aligned}$$

A partir desta norma, pode ser construída uma métrica canônica, definida por:

$$\begin{aligned} d_V : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\mapsto |P - Q|_V \end{aligned}$$

Variando-se o conjunto de geradores V , as métricas correspondentes produzem as bem conhecidas formas conexas estruturais de $\mathbb{Z}^2$:

Figura 1.1: Formas conexas estruturais de $\mathbb{Z}^2$: 4-conexa, 6-conexa e 8-conexa.

As métricas correspondentes a estas formas são induzidas pelas seguintes normas, respectivamente:

- $|\cdot|_{V^4}$, colocando-se $V^4 = \{(1, 0), (0, 1)\}$
- $|\cdot|_{V^6}$, colocando-se $V^6 = \{(1, 0), (1, 1), (0, 1)\}$
- $|\cdot|_{V^8}$, colocando-se $V^8 = \{(1, 0), (1, 1), (0, 1), (-1, 1)\}$

No próximo capítulo, freqüentemente $\mathbb{Z}^2$ será imerso em $\mathbb{R}^2$. Esta imersão será a canônica, a menos que explicitado o contrário. Para manter uma compatibilidade de normas entre estes dois espaços, o seguinte teorema relaciona a norma geral $\mathbb{Z}^2$, definida anteriormente, com qualquer norma adotada em $\mathbb{R}^2$.

Teorema 1.2. *Seja $|\cdot|$ alguma norma em $\mathbb{R}^2$. Definindo $e = \max\{|(1, 0)|_V, |(0, 1)|_V\}$, $v = \max\{|V_i|\}$ e $\rho = \max\{|R^x| + |R^y| : R \in \mathbb{R} \text{ e } |R| = 1\}$, tem-se:*

$$\begin{aligned} e^{-1}\rho|P|_V &\leq |P| \leq v|P|_V \\ v^{-1}|P| &\leq |P|_V \leq e\rho|P| \end{aligned}$$

1.2.2 Listas conexas

A norma geral, definida na seção anterior, pode ser estendida para o domínio das listas, da seguinte maneira:

Definição 1.7. *Seja L uma lista de comprimento n . Define-se a norma de L (com relação a um conjunto de geradores V do $\mathbb{Z}$ -módulo $\mathbb{Z}^2$) por:*

$$|L|_V = \max_{0 \leq i \leq n} \{|L_i|_V\}.$$

A partir desta norma, tem-se a noção de listas conexas:

Definição 1.8. *Uma lista é m -conexa, $m \in \{4, 6, 8\}$, se $|\Delta(L)|_{V^m} \leq 1$.*

A figura 1.2 mostra exemplos destas listas:

Figura 1.2: Listas 4-conexa, 6-conexa e 8-conexa.

Advinda desta definição, tem-se a noção de região conexa:

Definição 1.9. Uma região R (subconjunto finito de $\mathbb{Z}^2$) é dita m -conexa, $m \in \{4, 6, 8\}$, se para todo ponto $P, Q \in R$ existe uma lista m -conexa L , tal que $\{L_i\}_{i=0}^{\#L} \subset R$, $L_0 = P$ e $L_{\#L} = Q$.

1.3 Operadores de Minkowski

Seja $\mathbf{E} = \mathbb{Z}^2$, munido da estrutura usual de grupo abeliano. Define-se em $\mathbf{E}$ dois operadores importantes, chamados *adição* e *subtração de Minkowski*:

Definição 1.10. Sejam X e A subconjuntos de $\mathbf{E}$. Define-se a *adição* $X \oplus A$ e *subtração* $X \ominus A$ de Minkowski de X por A , por:

- $X \oplus A = \{x \in \mathbf{E} : (A^t + x) \cap X \neq \emptyset\}$
- $X \ominus A = \{x \in \mathbf{E} : A_x \subseteq X\}.$

onde A_x representa o conjunto $A_x = \{a + x : a \in A\}$ e, A^t , o conjunto $A^t = \{a \in \mathbf{E} : -a \in A\}$.

Usualmente a adição de Minkowski é chamada de *dilatação* e, a subtração, de *erosão*. O conjunto A recebe a designação de *elemento estruturante*.

Jean Serra [Ser82] caracteriza de modo mais algébrico estas operações, dando as seguintes definições equivalentes.

- $X \oplus A = \bigcup_{a \in A} X_a$
- $X \ominus A = \bigcap_{a \in A} X_{-a}$

Um enfoque mais geométrico para estas operações pode ser encontrado em Guibas et. al. [GuiRS83], que trabalham com dilatação e erosão com figuras geométricas.

Estas operações permitirão formalizar noções de coerência em rasterização, das quais serão derivados algoritmos, de complexidade quasi-linear na resolução, para algumas operações básicas de rasterização (preenchimento de regiões e *stroking*). Nestas noções de coerência, algumas propriedades básicas destas operações serão necessárias, as quais são listadas a seguir.

Propriedade 1.1. *A soma é um operador monotônico, isto é,*

$$A \subset B \Rightarrow (A \oplus C) \subset (B \oplus C).$$

Propriedade 1.2. *A soma distribui sobre uniões, isto é,*

$$(A \cup B) \oplus C = (A \oplus C) \cup (B \oplus C).$$

Propriedade 1.3. *A soma é um operador associativo, isto é,*

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C).$$

Propriedade 1.4. *A soma e a subtração estão relacionadas pela seguinte inclusão*

$$(A \ominus B) \oplus C \subset (A \oplus B) \ominus C.$$

A monotonicidade será utilizada em várias situações de limitação de regiões. A distributividade permitirá construir processos de recursão. A associatividade levará a transformações de elementos estruturantes na operação de *stroking* e, a relação entre as duas operações, para refinamento de testes de coerência.

Capítulo 2

O Teorema Discreto de Jordan

As ferramentas matemáticas necessárias para o enunciado e prova de uma versão discreta do Teorema de Jordan são introduzidas neste capítulo. Esta versão discreta servirá de base para o desenvolvimento de algoritmos eficientes e corretos para testes de pertinência interior/exterior no problema de preenchimento de regiões delimitadas por curvas discretas.

2.1 Números de rotação

A noção de interior e exterior de uma curva (não necessariamente discreta) é baseada no conceito de *número de rotação* (winding number). Existem, essencialmente, dois modos diferentes de se definir o número de rotação: uma versão analítica, que emprega uma integral complexa de linha, e outra, conhecida como versão geométrica, que conta o número de intersecções diretas com um raio.

Usualmente, a definição que melhor se adequa ao contexto de algum problema de pertinência é escolhida. Nas próximas seções será provado que, sob certas restrições, estas duas versões são equivalentes. A ferramenta matemática utilizada para se estabelecer esta equivalência será a *Teoria das Funções-CW*.

2.1.1 Teoria de *cross weight* (CW)

A versão geométrica do número de rotação é baseada na noção de *cross weight* (CW). Informalmente, dadas duas curvas em $\mathbb{R}^2$, o CW destas duas curvas é igual ao número

de cruzamentos com orientação esquerda-para-direita menos o número de cruzamentos com orientação direita-para-esquerda, com as definições usuais da Teoria dos Nós ([BurZ85], [Kau87]).

No âmbito das curvas discretas, será definida a noção de função CW. Esta definição será mais geral do que o necessário, praticamente sem nenhuma relação com a versão analítica do número de rotação. Numa seção posterior, será derivada uma função CW específica para este fim.

Definição 2.1. *Uma função $C : \Lambda \times \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}$ é chamada de função CW se satisfaz às seguintes condições:*

Distribuição sob concatenação:

$$C(L^1 \uplus L^2, L^3) = C(L^1, L^3) + C(L^2, L^3)$$

$$C(L^1, L^2 \uplus L^3) = C(L^1, L^2) + C(L^1, L^3)$$

Inversão de sinal sob reversão:

$$C(\mathcal{R}(L^1), L^2) = C(L^1, \mathcal{R}(L^2)) = -C(L^1, L^2)$$

Nulidade sob triângulos: *Se L^1 e L^2 são listas fechadas de comprimento 3, então:*

$$C(L^1, L^2) = 0.$$

Utilizando-se indução no comprimento das listas e as definições anteriores, pode ser provado o seguinte:

Teorema 2.1. *Sejam L^1 e L^2 duas listas fechadas. Então $C(L^1, L^2) = 0$.*

Na prova do Teorema discreto de Jordan, este teorema representa um papel fundamental.

Observa-se, também, que este teorema induz uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}^2$:

Corolário 2.1. *Dada uma função CW C e uma lista fechada L^1 , a relação $P \equiv Q \Leftrightarrow C(L^1, L^2) = 0$, para toda L^2 com $L^2_0 = P$ e $L^2_{\#L^2} = Q$, é uma equivalência em $\mathbb{Z}^2$.*

2.1.2 Versão analítica

A versão analítica do número de rotação emprega uma integral complexa sobre um caminho γ , e constitui uma ferramenta poderosa na Teoria de Funções Analíticas ([Pal91]) e na Teoria de Intersecção em Topologia Diferencial ([GuiP74]):

Definição 2.2. O número de rotação $w(\gamma, P)$, de um caminho γ , fechado e suave por partes¹, com respeito a P , é dado pela fórmula:

$$w(\gamma, P) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - P},$$

onde está admitido $\mathbb{R}^2$ é imerso em $\mathbb{C}$ para o cálculo da integral complexa.

Esta definição possui uma interpretação geométrica bastante simples. Considere-se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ um caminho, fechado e suave por partes, e um ponto $P \in \mathbb{C} - \{\gamma\}$. Fixe-se um círculo $K = K(P, r)$ centrado em P e defina-se a projeção radial de γ em K por $\beta(t) = P + r \left[\frac{\gamma(t) - P}{|\gamma(t) - P|} \right]$, conforme mostrado na Figura 2.1.

Figura 2.1: Interpretação geométrica do número de rotação.

Denotando-se por $v(t)$ o vetor radial de P até $\beta(t)$, pode-se relacionar o número de

¹Isto significa que, tomando-se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, então é possível subdividir $[a, b]$ em um número finito de partes e a restrição de γ a cada uma destas partes existe e, sua derivada complexa $\gamma'(t)$, é contínua e nunca se anula na parte considerada.

revoluções deste vetor, em torno do ponto P , com a integral que define o número de rotação pelo seguinte resultado:

Teorema 2.2. *O número de rotação $w(\gamma, P)$ conta o número de revoluções completas – o número de revoluções positivas menos o número de revoluções negativas – realizadas por $v(t)$ quando t varia de a para b .*

Com a definição analítica, pode-se provar o seguinte resultado:

Teorema 2.3. *Seja γ um caminho fechado, suave por partes no plano complexo e $U = \mathbb{C} - \gamma$. Então:*

- $w(\gamma, P)$ permanece constante quando P varia sobre toda componente de U
- $w(\gamma, P) = 0$ se P pertence a uma componente ilimitada de U
- Quando γ é simples, i.e. sem auto-intersecções, $w(\gamma, P) = 1$, para todo P na componente limitada de U , ou $w(\gamma, P) = -1$ para tais pontos P .

A partir deste resultado, já se tem uma forma analítica para se testar se um ponto pertence ou não ao interior de alguma região limitada por um caminho nas condições anteriores. Apesar de simples, a implementação computacional deste resultado é impraticável, pois envolve o cálculo de uma integral complexa: mesmo por métodos numéricos, a tarefa não é das mais fáceis.

Para interpor esta dificuldade, tem-se a versão geométrica do número de rotação, cuja principal característica reside na facilidade de implementação.

2.1.3 Versão geométrica

Para definir uma versão mais implementável do número de rotação e estabelecer uma relação com a versão analítica, será desenvolvida uma função CW especial. Para tal fim, fixar-se-á algumas notações:

Definição 2.3. • *O produto vetorial de P e Q será denotado por $P \times Q$, onde a imersão em $\mathbb{R}^3$ está implícita.*

- *A coordenada z de um ponto $P \in \mathbb{R}^3$ será denotada por P^z .*

- Considerar-se-á a função sinal $s : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ como: $s(x) = -1$ se $x < 0$, $s(x) = 0$ se $x = 0$ e $s(x) = 1$, se $x > 0$.
- Utilizar-se-á quatro imersões, definidas por:

– A imersão de pontos por $\varphi_\delta : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por:

$$\varphi_\delta(P) = P + \delta, \delta \in \mathbb{R}^2.$$

- A imersão $\varphi_\delta(L)$ de uma lista $L = \langle L_0, L_1 \rangle$, de comprimento 1, como o segmento de reta parametrizado $l(t) = (1-t)L_0 + tL_1 + \delta \in \mathbb{R}^2$, para $0 \leq t \leq 1$.
- A imersão de $\varphi_\delta(L)$ de listas $L \in \Lambda_n$ de comprimento $n > 1$ como o polígono (não necessariamente fechado):

$$\uplus_{0 \leq i \leq n-1} \varphi_\delta(\langle L_i, L_{i+1} \rangle)$$

onde o operador $\uplus$ denota a concatenação de segmentos de reta imersos na forma paramétrica.

- A imersão canônica, denotada por φ . A imersão canônica da origem será denotada por φ_O .

Com as notações desta definição, constrói-se a seguir, recursivamente, uma função que desempenhará papel fundamental no relacionamento com a versão analítica.

Definição 2.4. Seja $\epsilon \in \mathbb{R}^2$ dado e defina-se uma função parcial $\mathcal{W}_\epsilon : \Lambda \times \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}$ por:

- $\mathcal{W}_\epsilon : \Lambda_0 \times \Lambda \cup \Lambda \times \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ por:

$$\mathcal{W}_\epsilon(L^1, L^2) = 0$$

- $\mathcal{W}_\epsilon : \Lambda_1 \times \Lambda_1 \rightarrow \mathbb{Z}$ por:

$$\begin{cases} \varphi(L^1) \cap \varphi_\epsilon(L^2) = \emptyset \Rightarrow \mathcal{W}_\epsilon(L^1, L^2) = 0 \\ \varphi(L^1) \cap \varphi_\epsilon(L^2) \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{W}_\epsilon(L^1, L^2) = s((\Delta(L^1) \times \Delta(L^2))^z) \end{cases}$$

- $\mathcal{W}_\epsilon : \Lambda_{n_1} \times \Lambda_{n_2} \rightarrow \mathbb{Z}$, com $n_1, n_2 > 1$, por:

$$\mathcal{W}_\epsilon(L^1, L^2) = \sum_{i=0}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{n_2-1} \mathcal{W}_\epsilon(\langle L_i^1, L_{i+1}^1 \rangle, \langle L_j^2, L_{j+1}^2 \rangle).$$

Nota-se que, como somente uma lista é deslocada de ϵ antes de ser checado se os segmentos das listas têm um ponto em comum, uma assimetria é introduzida na função: pode ser que $\mathcal{W}_\epsilon(L^1, L^2) \neq {}^+\mathcal{W}_\epsilon(L^2, L^1)$.

O próximo passo será mostrar que a função parcial definida anteriormente é uma função CW:

Teorema 2.4. *$\mathcal{W}_\epsilon$ distribui sob concatenações e muda de sinal sob reversões.*

A prova deste teorema é simples, pois a distribuição sob concatenações segue diretamente da terceira parte da definição de $\mathcal{W}_\epsilon$. A mudança de sinal sob reversões segue do fato que o sinal do produto vetorial muda de sinal quando a orientação de um dos vetores é alterada.

A próxima tarefa é mostrar que $\mathcal{W}_\epsilon$ se anula sob triângulos. Isto pode ser feito checando-se todas as configurações de dois triângulos. Isto pode acarretar um número grande de testes. Para diminuir esta quantidade, utilizar-se-á o seguinte resultado intermediário:

Proposição 2.1. *$\mathcal{W}_\epsilon$ é invariante sob translações e transformações lineares inteiras² com determinante positivo.*

Utilizando-se este resultado, o número de configurações essencialmente diferentes reduz-se drasticamente.

Ao invés de se provar diretamente a nulidade sob triângulos, será estabelecido um resultado mais geral, que fará, inclusive, a ligação entre as duas versões do número de rotação.

2.1.4 Relação entre a versão analítica e geométrica

O seguinte teorema mostra uma equivalência, sob certas restrições, entre as definições analítica e geométrica do número de rotação:

Teorema 2.5. *Sejam L^1 e L^2 duas listas. Se L^1 é fechada e $\epsilon \notin \varphi(L)$, $\forall L \in \Lambda_1$, então:*

$$\mathcal{W}_\epsilon(L^1, L^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L^1)} \frac{dz}{z - \varphi_\epsilon(L_{n_2}^2)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L^1)} \frac{dz}{z - \varphi_\epsilon(L_{n_2}^0)}$$

²A matriz de transformação é composta somente por inteiros.

$$\mathcal{W}_\epsilon(L^2, L^1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\epsilon(L^1)} \frac{dz}{z - \varphi(L_{n_2}^2)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\epsilon(L^1)} \frac{dz}{z - \varphi_\epsilon(L_{n_2}^0)}$$

Antes de se provar o teorema, uma observação quanto à restrição sobre ϵ . Analisando-se a definição analítica do número de rotação, observa-se que a integral complexa não está definida quando P está no caminho γ . Esta é a razão pela qual o parâmetro de translação ϵ não poder estar na imersão de cada segmento da lista.

Prova. Nota-se, primeiramente, que as versões analíticas utilizadas estão bem definidas, pois os pontos $\varphi_\epsilon(L_i^2)$ nunca estarão no caminho $\varphi(L^1)$, pelo comentário anterior.

A prova utilizará indução no comprimento das listas L^1 e L^2 . Para isto, serão estabelecidos três casos-base:

- $(n_1 = 0 \text{ ou } n_1 = 1), n_2 \text{ qualquer:}$

Como L^1 é fechada, precisa-se ter $L_0^1 = L_1^1$. Pela definição de $\mathcal{W}_\epsilon$, segue diretamente que

$$\mathcal{W}_\epsilon(L^1, L^2) = 0.$$

Por outro lado,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L^1)} \frac{dz}{z - \varphi_\epsilon(L_{n_2}^2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L^1)} \frac{dz}{z - \varphi_\epsilon(L_{n_2}^0)} = 0.$$

- $n_1 = 2, n_2 \text{ qualquer:}$

Como L^1 é fechada, ela precisa ser da forma $L \uplus \mathcal{R}(L)$. Assim:

$$\mathcal{W}_\epsilon(L^1, L^2) = 0.$$

Como a definição analítica também distribui sob concatenações e muda de sinal sob reversões, tem-se:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L^1)} \frac{dz}{z - \varphi_\epsilon(L_{n_2}^2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L^1)} \frac{dz}{z - \varphi_\epsilon(L_{n_2}^0)} = 0.$$

- $n_1 = 3, n_2 = 1$

Este caso será provado enumerando-se todas as possibilidades. Aqui somente casos essencialmente diferentes serão checados, uma vez que $\mathcal{W}_\epsilon$ e $w(\gamma, P)$ são invariantes

sobre translações e transformações inteiras com determinante positivo. Além disto, $\mathcal{W}_\epsilon$ e $w(\gamma, P)$ mudam de sinal sob reflexões: assim, toda transformação linear não-degenerada pode ser usada.

- Se $L_0^2 = L_1^2$, tem-se $\mathcal{W}_\epsilon(L^1, L^2) = 0$ e

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L^1)} \frac{dz}{z - \varphi_\epsilon(L_{n_2}^2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L^1)} \frac{dz}{z - \varphi_\epsilon(L_{n_2}^0)} = 0,$$

ou seja, a primeira asserção do teorema vale neste caso.

- Assuma-se, agora, que $L_0^2 \neq L_1^2$. Nota-se que nenhum vértice do triângulo T gerado por $\varphi(L^1)$ pode estar na linha l através de $\varphi_\epsilon(L^2)$. Quando todos os vértices de T estão de um lado de l precisa-se ter $T \cap l = \emptyset$, implicando $\mathcal{W}_\epsilon(L^1, L^2) = 0$. Por outro lado,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L^1)} \frac{dz}{z - \varphi_\epsilon(L_{n_2}^2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L^1)} \frac{dz}{z - \varphi_\epsilon(L_{n_2}^0)} = 0,$$

que pode ser visto cortando-se o plano complexo com um raio partindo de um extremo de l .

Assim, os casos remanescentes são formados quando um vértice de T está de um lado de l , e os outros dois vértices estão do outro lado. Isto significa que exatamente dois lados de T cruzam l . Novamente, pelas restrições sobre ϵ , estas intersecções não podem coincidir com os extremos de $\varphi_\epsilon(L^2)$.

Quando aplicada uma translação e uma transformação linear não-degenerada, L_0^2 é mapeado na origem $\mathcal{O}$, L_1^2 é mapeado em $(1, 0)$ e os dois outros vértices de T estão sobre o eixo x . Um extremo de L^2 pode estar à esquerda, entre ou à direita dos pontos de intersecção. Assim, tem-se seis casos distintos a considerar (não contando a orientação de T):

Figura 2.2: Posições relativas de L^1 e L^2 , sem orientação.

Em cada um destes casos, para cada orientação de T , o valor resultante da definição de $\mathcal{W}_\epsilon$ é igual à diferença das integrais complexas.

Isto conclui os casos-base.

- Suponha-se o teorema válido para $n_1 = m \geq 3$ e n_2 fixado. Seja L^1 uma lista de comprimento $m + 1$. Assim:

$$\mathcal{W}_\epsilon(L^1, L^2) = \mathcal{W}_\epsilon(\langle L_0^1, \dots, L_{m+1}^1 \rangle \uplus \langle L_{m+1}^1, L_{m-1}^1, L_m^1, L_{m+1}^1 \rangle, L^2) = \mathcal{W}_\epsilon(L^3 \uplus L^4, L^2),$$

onde os comprimentos de L^3 e L^4 são m e 3 , respectivamente. Logo:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\epsilon(L^3 \uplus L^4, L^2) &= \mathcal{W}_\epsilon(L^3, L^2) + \mathcal{W}_\epsilon(L^4, L^2) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L^3} \frac{dz}{z - L_{n_2}^2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{L^3} \frac{dz}{z - L_0^2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L^4} \frac{dz}{z - L_{n_2}^2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{L^4} \frac{dz}{z - L_0^2} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L^3} \frac{dz}{z - L_{n_2}^2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L^4} \frac{dz}{z - L_{n_2}^2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{L^3} \frac{dz}{z - L_0^2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{L^4} \frac{dz}{z - L_0^2} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L^3 \uplus L^4} \frac{dz}{z - L_{n_2}^2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{L^3 \uplus L^4} \frac{dz}{z - L_0^2} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L^1} \frac{dz}{z - L_{n_2}^2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{L^1} \frac{dz}{z - L_0^2} \end{aligned}$$

Isto mostra que a primeira asserção do teorema é válida para $n_1 = m + 1$ e n_2 fixo. Por outro lado, assumindo-se o teorema válido para n_1 fixo e $n_2 = m \geq 3$, tem-se para uma lista L^2 de comprimento $m + 1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\epsilon(L^1, L^2) &= \mathcal{W}_\epsilon(L^1, \langle L_i^2 \rangle_{i=0}^m \uplus \langle L_i^2 \rangle_{i=m}^{m+1}) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L^1} \frac{dz}{z - L_m^2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{L^1} \frac{dz}{z - L_0^2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L^1} \frac{dz}{z - L_{m+1}^2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{L^1} \frac{dz}{z - L_m^2} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L^1} \frac{dz}{z - L_{m+1}^2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{L^1} \frac{dz}{z - L_0^2} \end{aligned}$$

Isto mostra que a primeira asserção do teorema é válida para n_1 fixo e $n_2 = m + 1$.

Uma prova similar pode ser feita para a segunda asserção do teorema. □

Um corolário imediato deste teorema estabelece a nulidade sob triângulos de $\mathcal{W}_\epsilon$.

Corolário 2.2. *Para ϵ satisfazendo à condição do teorema anterior, $\mathcal{W}_\epsilon$ anula-se sob triângulos.*

Isto pode ser provado observando-se que o teorema implica que $\mathcal{W}_\epsilon(L^1, L^2) = 0$ quando L^1 e L^2 são fechadas. Instanciando as listas para triângulos (listas fechadas de comprimento 3), o corolário segue imediatamente.

Uma questão importante sobre o teorema refere-se à existência do parâmetro de translação ϵ . O resultado seguinte contempla sua existência:

Teorema 2.6. *Seja $q \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ e $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dados. Se $\epsilon = (q, r)$ ou $\epsilon = (r, q)$, então $\epsilon \notin \varphi(L)$, $\forall L \in \Lambda_1$.*

2.1.5 A translação ϵ

Técnicas de translação(ou perturbação) de pontos são largamente utilizadas em algoritmos de computação gráfica([Gla95]) e geometria computacional([Ede87]). Problemas fundamentais, como intersecção, freqüentemente utilizam-se destas técnicas para tratamento de casos especiais. As técnicas mais conhecidas, geralmente, utilizam perturbações pequenas ou aleatórias.

No problema específico das listas, a figura abaixo mostra porque a translação ϵ é introduzida e seus efeitos:

Figura 2.3: Perturbações em pontos.

Na esquerda, o ponto P não tem número de rotação definido, pois está sobre um dos segmentos do contorno: isto pode ser contornado transladando P de ϵ , antes de se calcular efetivamente o número de rotação. Caso esta translação não seja efetuada com cuidado, podem aparecer problemas como os mostrados no centro e à direita da figura. No centro, o diagrama mostra que a introdução da translação ϵ poderia também mover pontos do

interior para as bordas, recaindo no caso da esquerda. No caso da direita, a translação foi grande demais, chegando-se a alterar o número de rotação do ponto P .

O principal problema encontrado nestas técnicas é controlar, de maneira efetiva, o tamanho da translação ϵ . Conforme mostra a figura, translações pequenas podem não ser satisfatórias, ou seja, dado $\epsilon \neq \mathcal{O}$, existe uma lista $L \in \Lambda_1$ tal que $\varphi(L) \cap \varphi(\langle \mathcal{O}, \epsilon \rangle) \not\subset \{\mathcal{O}\}$. Em outras palavras, a translação ϵ pode mover os pontos para fora de alguma borda, alterando seus números de rotação.

Para se evitar tal situação, fixar-se-á um grau de liberdade para ϵ . Será deixada sua direção indeterminada, porém seu tamanho será tomado infinitesimal. Isto significa que, para todo segmento de linha com um extremo na origem e outro num ponto de coordenadas inteiras, pode ser determinado (usando somente a direção) em que semi-plano ϵ está contido e, para todo segmento não passando pela origem, ϵ sempre estará do mesmo lado da origem.

Para se provar tal asserção, utilizar-se-á a seguinte definição:

Definição 2.5.

$$\Lambda^n = \{L : |\Delta(L)|_V \leq n\}.$$

Claramente $\Lambda^n \subset \Lambda^{n+1}$ e $\Lambda = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Lambda^n$. A seguinte proposição afirma que, para toda lista L , existe uma translação ϵ que não mapeia P para além de L .

Proposição 2.2. *Seja $q \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ e $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dados. Então para todo $n \in \mathbb{N}$, existe um $\lambda > 0$ tal que, $\forall L \in \Lambda^n, P \in \mathbb{Z}^2, 0 < \mu(q, r) \leq \lambda$, tomando-se $\epsilon = \mu(q, r)$, vale $\varphi(\langle P, P + \epsilon \rangle) \cap \varphi(L) \subset \{P\}$.*

Isto significa afirmar que, para um λ suficientemente pequeno, substituindo-se ϵ por $\mu(q, r)$, com $0 < \mu(q, r) \leq \lambda$, $\mathcal{W}_\epsilon$ não é afetado em $\Lambda^n \times \Lambda^n$. Além disto, pode-se provar que esta invariância de $\mathcal{W}_\epsilon$ em $\Lambda^n \times \Lambda^n$ não depende do tamanho de ϵ , mas somente de sua direção. Isto é contemplado pela seguinte proposição:

Proposição 2.3. *Seja $q \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ e $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dados. Então para todo $n \in \mathbb{N}$, existe um $\lambda > 0$ tal que, $\forall L^1, L^2 \in \Lambda^n, P \in \mathbb{Z}^2, 0 < \mu_1(q, r) \leq \mu_2(q, r) \leq \lambda$, vale que*

$$\mathcal{W}_{\mu_1(q, r)}(L^1, L^2) = \mathcal{W}_{\mu_2(q, r)}(L^1, L^2).$$

Um detalhe extremamente importante neste processo de minimização dos efeitos da translação ϵ é manter a propriedade CW de $\mathcal{W}_\epsilon$. Isto é analisado pelo próximo resultado:

Teorema 2.7. *O limite $\lim_{\lambda \downarrow 0} \mathcal{W}_{\lambda\epsilon}(L^1, L^2)$ existe para toda L^1 e L^2 . Além disto, a função limite:*

$$\mathcal{W}_\rho(L^1, L^2) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \mathcal{W}_{\lambda\epsilon}(L^1, L^2)$$

é uma função CW.

Para uma conveniência de notação do tamanho e direção de ϵ , tomar-se-á a forma polar de ϵ por (r, ρ) . Na sequência, utilizar-se-á a notação $\mathcal{W}_\rho$ para indicar $\mathcal{W}_{(r, \rho)}$ e será tomada a versão analítica correspondente por:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L)} \frac{dz}{z - \varphi_\rho(P)}.$$

Se um ponto P não pertence a um segmento poligonal, a infinitesimalidade de r garante que P nunca será movido para ou além deste segmento, após a translação. Porém, se P pertence a algum segmento poligonal, a irracionalidade da tangente ρ permite garantir que P nunca permanece neste segmento após a translação.

2.2 O Teorema de Jordan

O Teorema da Curva de Jordan é um resultado importante em Topologia de baixa dimensão, estabelecido por Camille Jordan (1838-1892) e provado rigorosamente por Oswald Veblen (1880-1960) em 1905. Este resultado afirma o seguinte:

Teorema 2.8. *Seja γ uma curva homotópica a S^1 , i.e. sem auto-intersecções, imersa em $\mathbb{R}^2$. Então o complemento de γ , com respeito a $\mathbb{R}^2$, tem exatamente duas componentes, cada qual tendo γ como borda. Uma destas componentes (o interior de γ) é um conjunto limitado, e a outra, o exterior de γ , um conjunto ilimitado.*

Apesar de parecer intuitiva, a prova deste teorema requer argumentos sofisticados de topologia algébrica, como homotopia e homologia ([Mas91]).

2.3 Versão discreta do Teorema de Jordan

Esta seção introduz uma versão discreta do Teorema da Curva de Jordan. Esta versão contempla listas arbitrárias, inclusive com auto-intersecção.

Teorema 2.9. *Seja ρ um ângulo com tangente irracional. Dada uma lista fechada L^1 , a função CW $\mathcal{W}_\rho$ divide o plano $\mathbb{Z}^2$ em um número finito de regiões com pontos P de igual número de rotação:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L)} \frac{dz}{z - \varphi_\rho(P)}.$$

Precisamente uma destas regiões é infinita, contendo pontos com número de rotação igual a 0. Além disto, quando para uma lista L^2 de comprimento n_2 valer:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L)} \frac{dz}{z - \varphi_\rho(L_0^2)} \neq \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L)} \frac{dz}{z - \varphi_\rho(L_{n_2}^2)},$$

então necessariamente precisa-se ter:

$$\varphi(L^1) \cap \varphi(L^2) \neq \emptyset.$$

Prova. O corolário 2.1 mostra como construir a partição dada pela função $\mathcal{W}$ e a lista L^1 . O teorema 2.5 mostra que as regiões contém pontos com números de rotação iguais. Para mostrar que precisamente uma das regiões é infinita, basta notar que para todo ponto P com $|P| > |L^1|$ tem-se:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L)} \frac{dz}{z - \varphi_\rho(P)} = 0.$$

Logo, segue-se que somente um número finito de pontos tem número de rotação diferente de zero.

Para provar a última asserção do teorema, observa-se que, por definição de $\mathcal{W}_\epsilon$, tem-se para todo ϵ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L)} \frac{dz}{z - \varphi_\rho(L_0^2)} &\neq \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L)} \frac{dz}{z - \varphi_\rho(L_{n_2}^2)} \Rightarrow \\ \mathcal{W}_\epsilon(L^1, L^2) &\neq 0 \Rightarrow \\ \varphi(L^1) \cap \varphi_\epsilon(L^2) &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

Como os polígonos gerados por φ_ϵ são conjuntos fechados para todo ϵ , no limite $r \downarrow 0$ a intersecção não é vazia também. $\square$

Este teorema afirma que, sob certas condições, as imersões poligonais de duas listas precisam ter um ponto em comum. O teorema a seguir afirma que, sob certas condições de conectividade, elas têm um ponto em comum.

Teorema 2.10. *Seja $(m_1, m_2) \in \{(4, 4), (4, 6), (4, 8), (6, 4), (6, 6), (8, 4)\}$, L^1 e L^2 listas m_1 -conexa e m_2 -conexa, respectivamente, não necessariamente fechadas. Se $\mathcal{W}_p(L^1, L^2) \neq 0$, então $\{L_i^1\} \cap \{L_j^2\} \neq \emptyset$. Este resultado não é válido para $(m_1, m_2) \in \{(6, 8), (8, 6), (8, 8)\}$.*

Estes dois últimos teoremas serão utilizados no próximo capítulo para o desenvolvimento de algoritmos eficientes e corretos para o preenchimento de regiões delimitadas por curvas discretas, representadas por listas.

Capítulo 3

Preenchimento de Regiões

Preenchimento de regiões é uma importante operação gráfica de transformação de um caminho fechado numa região, que encontra aplicações em algoritmos de iluminação e texturização, fontes, dentre outros. Com base na teoria do teste interior/exterior desenvolvida anteriormente, este capítulo deriva algoritmos eficientes e corretos para a implementação desta operação [FabSF97].

3.1 Funções de rasterização

No contexto da operação de preenchimento, considera-se o processo de rasterização do interior(e do exterior) de uma lista L consistindo de dois estágios:

- Construção de uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}^2$, atribuindo a cada região de uma classe de equivalência um único número (por exemplo, o número de rotação com relação a L).
- Atribuição de um valor binário aos pontos da imagem, tal que todos os pontos em uma classe de equivalência tenham um mesmo valor, geralmente não único.

O primeiro estágio requer a especificação de uma função de partição, a ser calculada para cada ponto de uma região de interesse. A funcionalidade requerida pelo segundo estágio pode ser provida por uma função muito simples¹.

¹Por exemplo, classes de equivalência no interior da curva recebem valor 0, e as do exterior, valor 1.

As funções que fazem o particionamento da região de interesse em classes de equivalência são conhecidas como *funções de rasterização*:

Definição 3.1. *Uma função de rasterização $Q(L, P)$ é uma função $Q : \Lambda_c \times \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$, onde Λ_c denota o conjunto das listas fechadas.*

Especificando-se uma função de rasterização $Q(L, P)$, obtém-se a numeração de cada classe de equivalência. Estas classes são, no máximo, enumeráveis. Dada uma lista fechada L e um ponto P na imagem, calcula-se $Q(L, P)$ para se obter a qual classe de equivalência P pertence.

3.1.1 Extremização

Extremização é uma propriedade desejada em funções de rasterização. Isto expressa a propriedade que, quando um conjunto de polígonos simples que se sobrepõem uns aos outros, a rasterização também produz regiões que se sobrepõem umas as outras.

Para se formalizar a noção desta propriedade, precisar-se-á de algumas definições:

Definição 3.2. • *Um polígono $L \in \Lambda_c$ de comprimento 3 é chamado constante se e somente se $\Delta(L)_0 \times \Delta(L)_1 = 0$.*

- *Um polígono $L \in \Lambda_c$ de comprimento 3 é chamado simples se e somente se não é constante.*
- *Um polígono $L \in \Lambda_c$ de comprimento $n > 3$ é chamado simples se e somente se*

$$\forall_{0 \leq i, j \leq n} : \varphi(\langle L_i, L_{i+1} \rangle) \cap \varphi(\langle L_j, L_{j+1} \rangle) \neq \emptyset \Rightarrow (|i - j| + 1) \bmod n \leq 2.$$

- *O interior de um polígono simples é definido como o conjunto dos pontos que não tem número de rotação 0 com respeito ao polígono. Pontos do polígono não fazem parte do interior.*
- *A orientação de um polígono simples é dita definida positiva quando os pontos do interior têm número de rotação +1 e, definida negativa, quando têm número de rotação -1.*

Os polígonos simples são objetos topológicos homotópicos ao círculo unitário S^1 e têm o interior como um conjunto simplesmente conexo. Assim, a orientação de um polígono simples é bem definida.

Definição 3.3. *Um conjunto de polígonos é chamado um conjunto de extremidades se e somente se*

- *todos os polígonos são simples e com orientação definida positiva*
- *todos os polígonos podem ser agrupados por rotação dos índices de pontos, concatenação e remoção de extremidades, em um polígono simples.*

Utilizando-se estas ferramentas, pode-se formalizar a noção de extremização:

Definição 3.4. *Uma função de rasterização $\mathcal{Q}(L, P)$ é dita ter a propriedade de extremização se e somente se:*

- $\mathcal{Q}$ é invariante sob rotação de índices

Se $L^1 \uplus L^2$ é fechada, então $\mathcal{Q}(L^1 \uplus L^2, P) = \mathcal{Q}(L^2 \uplus L^1, P)$.

- $\mathcal{Q}$ anula-se sobre concatenações da forma $L^1 \uplus \mathcal{R}(L^1)$

$\mathcal{Q}(L^1 \uplus \mathcal{R}(L^1), P) = 0$.

- $\mathcal{Q}$ distribui sob concatenações

Se L^1 e L^2 são listas concatenáveis, então $\mathcal{Q}(L^1 \uplus L^2, P) = \mathcal{Q}(L^1, P) + \mathcal{Q}(L^2, P)$.

- $\mathcal{Q}$ é simples

Se L é simples, então para todo P tem-se $\mathcal{Q}(L, P) \in \{0, 1\}$ se L tem orientação definida positiva, e $\mathcal{Q}(L, P) \in \{-1, 0\}$ se L tem orientação definida negativa.

Esta definição permite obter um resultado importante sobre funções de rasterização:

Teorema 3.1. *As regiões produzidas por uma função de rasterização (com a propriedade de extremização), aplicada a um conjunto de extremidades, têm intersecção duas-a-duas vazia. Além disto, a união destas regiões é igual ao conjunto das regiões produzidas pela aplicação da função de rasterização ao polígono simples resultante do agrupamento das extremidades.*

3.1.2 Rasterização via funções CW

A função CW $\mathcal{W}_\rho$, estabelecida no capítulo anterior, pode ser usada para construir uma função de rasterização. Para listas fechadas, o valor do número de rotação relacionado

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L)} \frac{dz}{z - \varphi_\rho(P)}$$

será utilizado como a função de enumeração de classes de equivalência.

Definição 3.5. *Defina-se a função de rasterização $\mathcal{F}_\rho : \Lambda \times \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ por:*

$$\mathcal{F}_\rho(L, P) = \lim_{Q \rightarrow \infty} \mathcal{W}_\rho(L, \langle Q, P \rangle)$$

Nota-se que o domínio de $\mathcal{F}$ é maior que o requerido pela definição de função de rasterização. Este levantamento de domínio é utilizado para gerar resultados fundamentais sobre a função. Um destes resultados é mostrado a seguir:

Proposição 3.1. *Se L é uma lista fechada, então:*

$$\mathcal{F}_\rho(L, P) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L)} \frac{dz}{z - \varphi_\rho(P)}.$$

Utilizando-se este resultado, pode-se provar que a função de rasterização definida anteriormente, com o auxílio de $\mathcal{W}_\rho$, possui a propriedade de extremização:

Teorema 3.2. *$\mathcal{F}_\rho$ é uma função de rasterização com a propriedade de extremização.*

Alguns outros resultados adicionais acerca de $\mathcal{F}_\rho$ são listados a seguir.

Proposição 3.2. • $\mathcal{F}_\rho$ anula-se sobre triângulos constantes

Se L é um triângulo constante, então $\mathcal{F}_\rho(L, P) = 0$.

• $\mathcal{F}_\rho$ distribui sobre concatenações gerais

Se L^1 e L^2 são listas concatenáveis, não necessariamente fechadas, então $\mathcal{F}_\rho(L^1 \uplus L^2, P) = \mathcal{F}_\rho(L^1, P) + \mathcal{F}_\rho(L^2, P)$.

• $\mathcal{F}_\rho$ é invariante sobre mudanças de escala

$\forall_{a \in \mathbb{Z} - \{0\}} : \mathcal{F}_\rho(aL, aP) = \mathcal{F}_\rho(L, P)$.

Estes resultados adicionais serão utilizadas para provas de corretudes de algoritmos para a operação de preenchimento de região. Antes de se passar aos algoritmos que implementam a função de rasterização $\mathcal{F}_\rho$, far-se-á uma consideração sobre uma técnica de rasterização largamente difundida em computação gráfica, chamada *scan-conversion*.

3.1.3 Scan-conversion

Grande parte dos algoritmos freqüentemente usados em computação gráfica, para preenchimento rasterizado de polígonos, utiliza alguma variante da bem conhecida técnica de *scan-conversion*. Por exemplo, Foley et. al. [Fol96] descrevem o seguinte algoritmo para preenchimento do interior de polígonos:

Figura 3.1: Elementos do algoritmo de scan-conversion de [Fol96]

Algoritmo 1.1 Scan-conversion de Foley et. al [Fol96].

- 1: Encontrar as intersecções de uma scan-line com todas as arestas do polígono
 - 2: Ordenar, crescentemente, as intersecções em relação à coordenada x
 - 3: Preencher todos os pontos entre pares de intersecções que pertencem ao interior, usando a regra de paridade ímpar.
-

Para polígonos não-simples, i.e. com auto-intersecções, o algoritmo de *scan-conversion* determina se um ponto $P \in \mathbb{Z}^2$ está no interior, ou não, avaliando a paridade do número de rotação: **ímpar**, P está no interior; **par**, P está no exterior.

Este modo de rasterização pode ser formalizado em termos da teoria anterior pelo seguinte teorema:

Teorema 3.3. *A função de rasterização, gerada pelo algoritmo de scan-conversion de [Fol96], é dada por:*

$$\lim_{\rho \downarrow 0} \mathcal{F}_\rho(L, P) \bmod 2.$$

Prova. Em primeiro lugar, observa-se que o limite está bem definido. Os ângulos para os quais $\mathcal{F}_\rho$ é definida são aqueles que têm tangente irracional, cujo conjunto será denotado por Φ . Como Φ é denso em $\mathbb{R}$, seqüências de ângulos em Φ podem ser construídas convergindo para 0.

O segundo passo é observar que o limite existe. Como na Proposição 2.2, reduzir-se-á o conjunto de listas a Λ^n , contendo um número finito de direções. $\mathcal{F}_\rho$ em $\Lambda^n \times \mathbb{Z}^2$ não depende de ρ , para $\rho > 0$ suficientemente pequeno. Isto significa que, para $L \in \Lambda^n$, o limite existe. Como $\Lambda = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Lambda^n$, o limite existe para todas as listas $L \in \Lambda$.

Finalmente, mostrar-se-á que o algoritmo efetivamente calcula a função apresentada. Por definição, a função $\mathcal{F}_\rho(L, P)$ pode ser calculada como o limite

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \mathcal{W}_\rho(L, \langle Q, P \rangle).$$

Se no limite, Q é mantido na linha horizontal através de P , mas movendo-se para a esquerda, vê-se que $\mathcal{F}_\rho(L, P)$ soma o número de intersecções diretas com um raio originando de $\varphi_\rho(P)$. Para cada *scan-line*, o algoritmo calcula os pontos mais à esquerda dos intervalos maximais que não contém intersecção com L . Quando o algoritmo começa a pintar os intervalos, um intervalo é pintado de acordo com a cor do ponto mais a esquerda no intervalo. Combinando isto com a intersecção com o raio, contada módulo 2, nota-se que, se o algoritmo de *scan-conversion* e a rasterização convergem nos pontos mais à esquerda, então eles convergem em todos os pontos. Assim, considere um ponto P mais à esquerda. Da descrição do algoritmo, quando um cruzamento de uma *scan-line* com um segmento em L é encontrado, contribuindo para a cor de P , pode ser que P esteja sobre ou à direita do segmento, e existe um ponto no segmento mais à esquerda de P . Assim, pode-se provar que estes casos são precisamente aqueles onde o raio, originando de $\varphi_\rho(P)$, intersecta o segmento, onde o limite $\rho \downarrow 0$ foi tomado. $\square$

Corolário 3.1. *A função de rasterização scan-conversion tem a propriedade de extremização.*

Apesar de simples a idéia da técnica de scan-conversion, sua implementação requer

cuidados especiais, especialmente para casos críticos, como duplos vértices, vértices que interceptam arestas, dentre outros, para não se produzir resultados incorretos.

3.2 Polígonos

Em qualquer implementação da função de rasterização $\mathcal{F}_\rho$ definida anteriormente, um limite para ρ precisa ser escolhido. Algumas escolhas deste limite são mais fáceis de se implementar, tais como $\rho \uparrow 0$ ou valores limites de $\frac{1}{2}k\pi$. Nesta seção, será construída uma implementação eficiente de $\lim_{\rho \uparrow 0} \mathcal{F}_\rho$.

Definição 3.6. *Defina-se a função de rasterização $\mathcal{F}$ como:*

$$\mathcal{F} = \lim_{\rho \uparrow 0} \mathcal{F}_\rho.$$

Como $\mathcal{F}$ distribui sob concatenações, o primeiro passo da implementação de $\mathcal{F}$ será uma soma das contribuições dos lados poligonais da lista. Nesta implementação, existem vários casos nos quais a contribuição de um segmento poligonal $L = \langle L_0, L_1 \rangle$ é 0 ou de cálculo imediato, podendo ser detectados facilmente.

A seguir, serão enumerados alguns casos suficientes para a implementação do limite. Os dois primeiros casos mostram como calcular a função de rasterização $\mathcal{F}(L, P)$, em relação a uma região retangular limitante de L , chamada *bounding box*.

Figura 3.2: Bounding box de um segmento poligonal L .

O primeiro caso consiste em verificar se o ponto P está na seguinte região:

Figura 3.3: Caso em que $\mathcal{F}(L, P) = 0$.

Proposição 3.3. Se $P^y > \max\{L_i^y\}$ ou $P^y \leq \min\{L_i^y\}$ ou $P^x < \min\{L_i^x\}$, então $\mathcal{F}(L, P) = 0$.

Prova. Para todo par (r, ρ) , com r e ρ pequenos, e um $x < 0$ com $|x|$ grande o suficiente, o segmento poligonal $\varphi(L)$ e $\varphi_{(r, \rho)}(\langle P, (x, P^y) \rangle)$ não se intersectam. $\square$

O segundo caso verifica se P está na seguinte região:

Figura 3.4: Caso em que $\mathcal{F}(L, P) = s(L_0^y - L_1^y)$.

Proposição 3.4. Se $P^y \leq \max\{L_i^y\}$ e $P^y > \min\{L_i^y\}$ e $P^x \geq \max\{L_i^x\}$, então $\mathcal{F}(L, P) = s(L_0^y - L_1^y)$.

Prova. Para todo par (r, ρ) , com r e ρ pequenos, e um $x < 0$ com $|x|$ grande o suficiente, o segmento poligonal $\varphi(L)$ e $\varphi_{(r, \rho)}(\langle (x, P^y), P \rangle)$ se intersectam.

Além disto,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathcal{W}_{(r,\rho)}(L, \langle (x, P^y), P \rangle) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} s(\Delta(L) \times (P^x - x, 0)) = \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} s(-(L_1^y - L_0^y)(P^x - x)) &= s(L_0^y - L_1^y). \end{aligned}$$

□

O próximo resultado mostra como calcular a função de rasterização dentro da bounding box:

Figura 3.5: Elementos para cálculo dentro da bounding box.

Proposição 3.5. *Sejam $\min\{L_i^y\} < P^y \leq \max\{L_i^y\}$, $\min\{L_i^x\} < P^x \leq \max\{L_i^x\}$ e l a linha passando através do segmento poligonal de interesse L .*

- Se l é paralela ao eixo x , então $\mathcal{F}(L, P) = 0$.
- Se l não é paralela ao eixo x , então $\Delta(L)^y \neq 0$. Seja v o vetor perpendicular a l , tal que $v^x > 0$ e $v = \begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} (\Delta(L)^y, -\Delta(L)^x)$. Assim, l pode ser descrita como $(x, y) \cdot v = c$ e vale :

$$P \cdot v \geq c \Rightarrow \mathcal{F}(L, P) = s(L_0^y - L_1^y)$$

$$P \cdot v < c \Rightarrow \mathcal{F}(L, P) = 0.$$

Prova. Quando l é paralela ao eixo x , segue diretamente da definição que $\mathcal{F}(L, P) = 0$. Caso contrário, divide-se o plano em três regiões: pontos à esquerda, sobre e à direita de

l . Como se está interessado em calcular $\lim_{\rho \uparrow 0} \mathcal{F}_\rho$, pontos P que estão à esquerda de l não contribuem para função de rasterização, mas para pontos P sobre ou à direita de l os segmentos $\varphi(L)$ e $\varphi_\rho(\langle(x, P^y), P\rangle)$ se intersectam. Nestes casos, um argumento idêntico ao usado na proposição anterior estabelece a segunda asserção. $\square$

Estes casos cobrem todas as possibilidades de posicionamento do ponto P em relação ao segmento poligonal L . Assim, o primeiro passo da implementação será detectar todos estes casos:

Procedimento 1.1 Contribuição de um segmento poligonal.

Contribuição (Ponto L0,Ponto L1)

Entrada: Segmento poligonal de extremos L0 e L1.

Saída: Contribuição do segmento para a função de rasterização.

```

1: minx=Mínimox(L0,L1){Determinação da Bounding Box}
2: miny=Mínimoy(L0,L1)
3: maxx=Máximox(L0,L1)
4: maxy=Máximoy(L0,L1)
5: se minx>0 ou miny≤0 ou maxy<0 então
6:   Devolva (0)
7: fim se
8: s=sinal(L0.y-L1.y)
9: se maxx≤0 então
10:   Devolva (s)
11: fim se
12: norma.x=L0.y-L1.y
13: norma.y=L1.x-L0.x
14: se norma.x=0 então
15:   Devolva (0)
16: fim se
17: se norma.x<0 então
18:   norma.x=-norma.x
19:   norma.y=-norma.y
20: fim se
21: se Se ProdutoInterno(L0,norma)>0 então
22:   Devolva(0)
23: fim se
24: Devolva (s)

```

Tendo-se a contribuição para cada um dos segmentos poligonais da lista, utiliza-se a propriedade de distribuição sob concatenação para se calcular o valor da função de rasterização para um ponto P :

Algoritmo 1.2 Cálculo de número de rotação de poligonais.

NúmeroDeRotaçãoPoligonal(Lista L , Ponto P)

Entrada: L - pontos da lista

P - ponto de interesse.

Saída: Valor de $\mathcal{F}(L, P)$.

1: $wn \leftarrow 0$

2: **para** $i=0$ **até** Comprimento(L)-1 **faça**

3: $wn \leftarrow wn + \text{Contribuição}(L[i]-P, L[i+1]-P)$

4: **fim para**

5: Devolva(wn)

O translação do passo 3 do algoritmo é uma otimização para acelerar o processo de cálculo. Esta otimização é conhecida como *normalização* do ponto P .

3.3 Curvas de Bézier Polinomiais

O algoritmo apresentado na seção anterior refere-se exclusivamente a polígonos. Porém, em muitas aplicações, tais como fontes, ocorrem elementos gráficos importantes, como curvas. Esta seção analisa uma extensão do algoritmo anterior para curvas de Bézier discretas.

Curvas de Bézier podem ser incorporadas ao algoritmo anterior convertendo-as para listas poligonais e calculando a função de rasterização nestas listas. O algoritmo a ser exibido utiliza um método híbrido para estes passos, combinando conversão e cálculo, produzindo significantes otimizações. Um ponto importante reside no fato que a conversão preservará a propriedade de extremização.

Em primeiro lugar, formalizar-se-á a noção de curva de Bézier, com pontos de controle numa lista.

Definição 3.7. *Seja L uma lista de comprimento n . Para $t \in [0, 1]$ defina-se $\mathcal{B}_L(t)$, a*

curva de Bézier de L , por:

$$\mathcal{B}_L(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} L_i.$$

Desta definição também surge uma nova maneira de se interpretar listas: uma lista também pode definir uma curva de Bézier, onde o comprimento de lista, usualmente, determina o grau da curva.

Uma operação essencial que pode ser definida em curvas de Bézier é a *subdivisão*. Subdivisões de curvas de Bézier resultam em duas curvas de Bézier, chamadas de *parte esquerda* e *parte direita*.

Figura 3.6: Partes esquerda e direita de uma curva de Bézier.

Definição 3.8. Seja L uma lista de comprimento n . Define-se a parte esquerda $\mathcal{E}$ de $\mathcal{B}_L$ por:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} : \Lambda &\rightarrow \Lambda \\ \mathcal{E}(L)_i &= 2^{-i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} L_j \end{aligned}$$

e a parte direita $\mathcal{D}$ por:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} : \Lambda &\rightarrow \Lambda \\ \mathcal{D}(L)_i &= 2^{i-n} \sum_{j=i}^n \binom{n-i}{j-i} L_j. \end{aligned}$$

Um dos aspectos essenciais do teste interior/exterior de Pol e Corthout [CorP92] é o uso exclusivo de aritmética inteira. Assim, da definição, a divisão por uma potência de 2 precisa produzir um resultado exato. Para implementar uma subdivisão em um algoritmo que manipula somente inteiros, precisa-se mapear as coordenadas produzidas pela subdivisão no conjunto dos inteiros. Para isto, serão introduzidas as *funções aproximadoras*:

Definição 3.9. *Uma função não-decrescente $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ é chamada uma função aproximadora se e somente se $\forall_{x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{Z}}, d(y) = y$ e se $x \in [y, y + 1]$, então $d(x) = y$ ou $d(x) = y + 1$.*

As funções de truncamento e arredondamento são exemplos familiares desta classe de funções. Neste contexto, serão redefinidas as noções de *parte esquerda* e *parte direita* de uma curva de Bézier, no ambiente discreto:

Definição 3.10. *Seja L uma lista de comprimento n . Define-se a parte esquerda discreta $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{B}_L$ por:*

$$\begin{aligned}\mathcal{E}' : \Lambda &\rightarrow \Lambda \\ \mathcal{E}'(L)_i &\mapsto d(\mathcal{E}(L)_i)\end{aligned}$$

e parte direita discreta $\mathcal{D}'$ por:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}' : \Lambda &\rightarrow \Lambda \\ \mathcal{D}'(L)_i &\mapsto d(\mathcal{D}(L)_i).\end{aligned}$$

Estes operadores de subdivisão discreta formarão a base para a conversão curva-lista poligonal. Esta conversão será construída sobre o paradigma de divisão-e-conquista, cujo critério de parada será a distância entre dois argumentos da lista.

Definição 3.11. *Seja L uma lista de comprimento n . Seja $e_{d_8}(L)$ o diâmetro 8-conexo de L , ou seja, $e_{d_8}(L) = \max_{i,j} \{|L_j - L_i|_{V^8}\}$.*

Define-se o operador conversão curva-polígono $\mathcal{V}$ por:

$$\begin{aligned}e_{d_8}(L) \leq 1 &\Rightarrow \mathcal{V}(L) = \langle L_0, L_n \rangle \\ e_{d_8}(L) > 1 &\Rightarrow \mathcal{V}(L) = \mathcal{V}(\mathcal{E}'(L)) \uplus \mathcal{V}(\mathcal{D}'(L)).\end{aligned}$$

Neste processo de conversão dois fatos precisam ser verificados:

- o critério de parada é sempre atingido após um número finito de subdivisões

- $\mathcal{V}(\mathcal{E}'(L))$ e $\mathcal{V}(\mathcal{D}'(L))$ sempre podem ser concatenadas

Para o primeiro fato, como todas as definições e cálculos são invariantes sob translações, pode-se assumir, sem perda de generalidade, que o espaço que contém os pontos de controle de uma curva de Bézier de grau n , representada por uma lista L , seja $[-m \dots m] \times [-m \dots m]$, onde m é alguma constante pré-definida.

Assim, pode ser provado o seguinte limitante superior:

Teorema 3.4. *Após $k = \lceil \log_2 m \rceil + n$ subdivisões, a curva de Bézier resultante $\mathcal{E}'^k$ satisfaz o critério de parada.*

Um resultado semelhante pode ser provado para $\mathcal{D}'^k$.

Para o segundo fato, precisar-se-á da seguinte proposição:

Proposição 3.6. *Seja L uma lista de comprimento n e p o comprimento de $\mathcal{V}(L)$. Então $\mathcal{V}(L)_0 = L_0$ e $\mathcal{V}(L)_p = L_n$.*

Prova. Por indução no número de subdivisões. No caso base, tem-se $p = 1$ e o resultado segue diretamente da definição do operador. No passo de indução, é claro que as partes podem ser concatenadas e o resultado satisfaz a proposição. $\square$

Verificado que o processo de conversão é válido, discutir-se-á um detalhe sutil: o processo produz uma lista 8-conexa.

Proposição 3.7. *Para toda lista L , $\mathcal{V}(L)$ é uma lista 8-conexa.*

A prova desta proposição é feita diretamente por indução no número de subdivisões. A utilidade deste detalhe está estritamente relacionada com uma simplificação no algoritmo para computar $\mathcal{F}(\mathcal{V}(L), P)$: somente listas 8-conexas precisarão ser suportadas.

Os modelos que o algoritmo irá tratar serão formados de listas de listas representativas de curvas de Bézier. Seja L uma destas listas de listas, com L_j^i representando o j -ésimo ponto de controle da i -ésima lista. Para formar um contorno fechado a ser preenchido, estas curvas de Bézier precisam estar conectadas, ou seja, $L_{\#L^i}^i = L_0^{i+1}$ e $L_{\#L\#L}^{\#L} = L_0^0$. A operação de preenchimento é feita pelo cálculo de $\mathcal{F}(\uplus_i \mathcal{V}(L^i), P)$: como $\mathcal{F}$ distribui sob concatenações, isto pode ser reescrito como $\sum_i \mathcal{F}(\mathcal{V}(L^i), P)$.

Um ponto importante sobre a conversão curva-polígono refere-se à preservação da propriedade de extremização. Para provar isto, utilizar-se-á a seguinte proposição:

Proposição 3.8. *O operador reversão comuta com o operador de conversão curva-polígono, ou seja,*

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{V} = \mathcal{V} \circ \mathcal{R}.$$

A prova desta proposição vem imediatamente das definições.

Teorema 3.5. *O processo de rasterização $\sum_i \mathcal{F}(\mathcal{V}(L^i), P)$, de uma seqüência fechada de curvas representada por uma lista de listas, possui a propriedade de extremização.*

Prova. Invariância sob rotação de índices, distribuição sob concatenações e simplicidade não são afetadas por conversão curva-polígono. Nulidade sob extremidades é provada pela proposição anterior. $\square$

Para um cálculo eficiente de $\sum_i \mathcal{F}(\mathcal{V}(L^i), P)$, mecanismos de limitação por *bounding boxes* serão utilizados, analogamente ao caso dos polígonos. Curvas de Bézier contínuas possuem uma propriedade chamada *casco convexo*: os pontos de uma curva sempre podem ser escritos como combinações lineares convexas dos pontos de controle da curva. Esta propriedade terá analogias no caso discreto, utilizando-se *bounding boxes*, como mostrado pela seguinte proposição:

Figura 3.7: Bounding box usando os pontos de controle da curva.

Proposição 3.9. *Seja L uma lista de comprimento n e $\mathcal{V}(L)$ uma lista de comprimento m . Então:*

$$\min\{L_i^x\} \leq \min\{\mathcal{V}(L)_j^x\} \leq \max\{\mathcal{V}(L)_j^x\} \leq \max\{L_i^x\}$$

$$\min\{L_i^y\} \leq \min\{\mathcal{V}(L)_j^y\} \leq \max\{\mathcal{V}(L)_j^y\} \leq \max\{L_i^y\}$$

Prova. Por indução no número de subdivisões. É claro que a proposição vale no caso-base. Para provar que vale no passo indutivo, é suficiente mostrar que para toda lista L tem-se:

$$\min\{L_i^x\} \leq \min\{\mathcal{E}'(L)_j^x\} \leq \max\{\mathcal{E}'(L)_j^x\} \leq \max\{L_i^x\}.$$

Usando o fato que d é não-decrescente, tem-se:

$$\mathcal{E}'(L)_j^x = d\left(2^{-j} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} L_k^x\right) = d\left(2^{-j} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \min\{L_i^x\}\right) = d(\min\{L_i^x\}) = \min\{L_i^x\}$$

A prova para os outros limitantes é análoga. $\square$

Para se estabelecer os casos de computação imediata de $\mathcal{F}(L, P)$, o primeiro passo será estender as proposições 3.3 e 3.4, para listas de qualquer comprimento:

Proposição 3.10. *Seja L uma lista de comprimento n . Assim, tem-se:*

- Se $P^x > \min\{L_i^x\}$ ou $P^y > \min\{L_i^y\}$ ou $P^y < \min\{L_i^y\}$, então $\mathcal{F}(L, P) = 0$
- Se $P^x \geq \max\{L_i^x\}$ então $\mathcal{F}(L, P) = \frac{1}{2} \left(s \left((L_0 - P)^y + \frac{1}{2} \right) - s \left((L_n - P)^y + \frac{1}{2} \right) \right).$

Prova. A primeira asserção segue diretamente do fato que nenhum dos segmentos em L intercepta $\varphi_{(r,\rho)}(\langle(x, P^y), P\rangle)$. Para mostrar a segunda asserção, escolher-se-á os argumentos de $\mathcal{W}_{(r,\rho)}$ como se segue. L é fechada por concatenação de $\langle L_n, L_0 \rangle$, enquanto que $\langle(x, P^y), P\rangle$ é fechada por concatenação de $\langle P, (P^x, y), (x, y), (x, P^y) \rangle$. Para x e y , suficientemente grandes e r , suficientemente pequeno, $\varphi_{(r,\rho)}(\langle P, (P^x, y), (x, y), (x, P^y) \rangle)$ não intercepta $\varphi(L \uplus \langle L_n, L_0 \rangle)$. Assim, tem-se:

$$\mathcal{W}_{(r,\rho)}(L, \langle(x, P^y), P\rangle) = \mathcal{W}_{(r,\rho)}(L \uplus \langle L_n, L_0, L_n \rangle, \langle(x, P^y), P\rangle) =$$

$$\mathcal{W}_{(r,\rho)}(L \uplus \langle L_n, L_0 \rangle \uplus \langle L_0, L_n \rangle, \langle(x, P^y), P\rangle) =$$

$$\mathcal{W}_{(r,\rho)}(L \uplus \langle L_n, L_0 \rangle, \langle(x, P^y), P\rangle) + \mathcal{W}_{(r,\rho)}(L \uplus \langle L_0, L_n \rangle, \langle(x, P^y), P\rangle) =$$

$$\mathcal{W}_{(r,\rho)}(L \uplus \langle L_n, L_0 \rangle, \langle P, (P^x, y), (x, y), (x, P^y), P \rangle) + \mathcal{W}_{(r,\rho)}(L \uplus \langle L_0, L_n \rangle, \langle(x, P^y), P\rangle).$$

O primeiro termo da expressão final é 0, pois ambas as listas são fechadas. Assim, se $P^x \geq \max\{L_i^x\}$ e $P^y > \max\{L_0^y, L_n^y\}$ ou $P^y \leq \min\{L_0^y, L_n^y\}$, então:

$$\mathcal{F}(L, P) = 0 = \frac{1}{2} \left(s \left((L_0 - P)^y + \frac{1}{2} \right) - s \left((L_n - P)^y + \frac{1}{2} \right) \right)$$

e também, se $P^x \geq \max\{L_i^x\}$ e $P^y \leq \max\{L_0^y, L_n^y\}$ ou $P^y > \min\{L_0^y, L_n^y\}$, então:

$$\mathcal{F}(L, P) = s(L_0^y - L_n^y) = \frac{1}{2} \left(s \left((L_0 - P)^y + \frac{1}{2} \right) - s \left((L_n - P)^y + \frac{1}{2} \right) \right)$$

□

O seguinte resultado permite obter dois resultados imediatos de cálculo da função de rasterização, para a conversão curva-polígono:

Proposição 3.11. *Seja L uma lista de comprimento n . Assim, tem-se:*

- Se $P^y \leq \max\{L_i^y\}$ e $P^y > \min\{L_i^y\}$ e $P^x \geq \max\{L_i^x\}$, então $\mathcal{F}(\mathcal{V}(L), P) = 0$
- Se $P^y > \min\{L_i^x\}$ ou $P^y > \min\{L_i^y\}$ ou $P^y < \min\{L_i^y\}$, então $\mathcal{F}(\mathcal{V}(L), P) = \frac{1}{2} \left(s \left((L_0 - P)^y + \frac{1}{2} \right) - s \left((L_n - P)^y + \frac{1}{2} \right) \right)$.

Prova. O proposição 3.9 mostra que se P não está contido na *bounding box* de L , então não estará contido na *bounding box* de $\mathcal{V}(L)$. Combinando isto com o proposição anterior, a primeira asserção segue. O proposição 3.6 mostra que $\mathcal{V}$ não altera os extremos da lista. Combinando isto com o proposição anterior, a segunda asserção é provada. □

A expressão $\frac{1}{2} \left(s \left((L_0 - P)^y + \frac{1}{2} \right) - s \left((L_n - P)^y + \frac{1}{2} \right) \right)$ não parece muito implementável com o uso de aritmética inteira. Para contrapor esta dificuldade, será definida uma função sinal, no âmbito dos inteiros, e provada uma expressão equivalente:

Definição 3.12. *Define-se a função sinal inteiro $s' : \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$ por:*

$$s'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Com esta definição, pode ser provado o seguinte resultado de equivalência entre as funções-sinal:

Teorema 3.6. $\frac{1}{2} \left(s \left((L_0 - P)^y + \frac{1}{2} \right) - s \left((L_n - P)^y + \frac{1}{2} \right) \right) = s'((L_n - P)^y) - s'((L_0 - P)^y)$.

Estes resultados são suficientes para se construir uma extensão no algoritmo de rasterização de polígonos para curvas de Bézier discretas.

O primeiro passo é obter a contribuição de cada segmento de curva para a função de rasterização, descrito pelo procedimento a seguir:

Procedimento 1.2 Contribuição dos segmentos de curva de Bézier.

ContribuiçãoBézier (Lista L)

Entrada: L -Lista contendo os pontos de controle de uma curva de Bézier discreta.

Saída: Contribuição da lista para a função de rasterização.

```

1: n=Comprimento(L)
2: minx=Mínimox(L)
3: maxx=Máximox(L)
4: miny=Máximoy(L)
5: maxy=Máximoy(L)
6: se minx>0 ou miny≥0 ou maxy<0 então
7:   Devolva (0)
8: fim se
9: s=SinalInteiro(L[n].y)-SinalInteiro(L[0].y)
10: se maxx<0 então
11:   Devolva (s)
12: fim se
13: se (maxx-minx)≤ 1 e (maxy-miny)≤1 então
14:   se L[0].x=0 e L[0].y=0 e L[n].y<0 então
15:     Devolva (1)
16:   fim se
17:   se L[n].x=0 e L[n].y=0 e L[n].y<0 então
18:     Devolva (-1)
19:   senão
20:     Devolva (0)
21:   fim se
22: fim se
23: esquerda=Parte_Esquerda(L)
24: direita=Parte_Direita(L)
25: Devolva ( ContribuiçãoBézier(esquerda)+ContribuiçãoBézier(direita))

```

Como $\mathcal{F}$ distribui sob concatenação, o algoritmo para calcular a contribuição de uma lista de listas, para um ponto P , é simplesmente uma soma de contribuições de listas normalizadas.²

²Novamente, a normalização de listas é utilizada para acelerar a computação.

Algoritmo 1.3 Cálculo de número de rotação para Curvas de Bézier.

NúmeroDeRotaçãoBezier(Lista de listas L , Ponto P)

Entrada: L - lista L de listas contendo pontos de controle de curvas de Bézier discretas
 P - Ponto de interesse.

Saída: Valor de $\mathcal{F}(L, P)$.

```
1:  $wn \leftarrow 0$ 
2: para  $i \leftarrow 0$  até Comprimento( $L$ )-1 faça
3:    $wn \leftarrow wn + \text{ContribuiçãoBézier}(L[i]-P)$ 
4: fim para
5: Devolva( $wn$ )
```

Pol e Corthout [CorP92] também descrevem as curvas de Bézier racionais no espaço discreto, cujo cálculo das funções de rasterização recai no caso anterior por transformações via projeções.

3.4 O algoritmo quadrático

Estabelecido um método de teste interior/exterior, o algoritmo para realizar a operação de preenchimento aparece de maneira natural: simplesmente para cada ponto P da imagem a ser produzida, verifica-se se P está no interior ou exterior.

Algoritmo 1.4 Preenchimento de regiões quadrático.

Filling(Lista L)

Entrada: L - Lista poligonal ou lista de listas (curvas de Bézier)

Saída: Interior de L .

```
1: para cada ponto  $P$  da imagem faça
2:   se  $L$  é poligonal então
3:     teste  $\leftarrow$  NúmeroDeRotação( $L, P$ )
4:   senão
5:     teste  $\leftarrow$  NúmeroDeRotaçãoBezier( $L, P$ )
6:   fim se
7:   se teste  $\neq 0$  então
8:     Pintar ponto  $P$ 
9:   fim se
10: fim para
```

Indicando por $\text{custo}_{\text{jordan}}$ a complexidade do teste interior/exterior³ e a resolução da imagem por r , tem-se a seguinte complexidade para o algoritmo:

$$O(r^2)\text{custo}_{\text{jordan}},$$

pois, para cada ponto, é realizado um teste interior/exterior.

Apesar de polinomial na resolução, este algoritmo é considerado lento na maioria das aplicações práticas (vide-se Seção 3.8, com resultados práticos). A próxima seção aborda alguns métodos para reduzir esta complexidade, utilizando-se a noção de *coerência*.

3.5 Redução da complexidade

A utilização do teste interior/exterior de Pol e Corthout [CorP92], no algoritmo trivial para preenchimento, tem comportamento quadrático com respeito à resolução. Algumas técnicas alternativas têm comportamento linear na resolução: *scan-conversion*, por exemplo, passa duas vezes sobre uma *scan-line*. Em primeira instância, pode parecer que a utilização do teste de Pol e Corhout não seja interessante, devido à discrepância de complexidade: contudo, existem mecanismos para reduzir a complexidade de utilização do teste à patamares quasi-linear e sub-linear na resolução. Estes mecanismos são conhecidos como *testes de coerência*.

3.5.1 Coerência

Para o estabelecimento efetivo dos testes de coerência, é necessária a formalização do conceito de coerência na operação de preenchimento.

Definição 3.13. *Seja L uma lista fechada e $\mathcal{F}$ uma função de rasterização. Uma região R é chamada coerente, com respeito a L , se e somente se R é um subconjunto de uma classe de equivalência simples, induzida em $\mathbb{Z}^2$ por $\mathcal{F}$.*

Isto é equivalente a dizer que uma região R é coerente, com respeito a L , se e somente se R ou está totalmente contida no interior de L ou em seu exterior. Embora a definição seja matematicamente precisa, ela é pouco operacional. O próximo resultado traduz a relação de coerência entre uma região e uma curva em termos mais implementáveis:

³Observa-se que esta complexidade é linear no número de pontos da curva discreta.

Figura 3.8: Teste de coerência.

Teorema 3.7. *Seja $(m_1, m_2) \in \{(4, 4), (4, 6), (4, 8), (6, 4), (6, 6), (8, 4)\}$. Se L é uma lista fechada, m_1 -conexa, e R uma região m_2 -conexa, então se $P \notin \{L_i\} \oplus R$, tem-se que $P - R$ é coerente com respeito a L , onde $\oplus$ denota a soma de Minkowski usual.*

Prova. A prova utiliza propriedades elementares da soma de Minkowski:

$$\begin{aligned}
 P \notin \{L_i\} \oplus R &\Leftrightarrow \{P\} \cap (\{L_i\} \oplus R) = \emptyset \Leftrightarrow \\
 (\{P\} \oplus -R) \cap \{L_i\} &= \emptyset \Leftrightarrow (P - R) \cap \{L_i\} = \emptyset \Leftrightarrow \\
 \forall P_1 \in P - R, P_2 \in P - R \quad \exists L' : \\
 L'_0 = P_1 \wedge L'_{\#L'} &= P_2 \wedge |\Delta(L')'|_{V^{m_2}} = 1 \wedge \{L_i\} \cap \{L'\} = \emptyset \Rightarrow \\
 \forall P_1 \in P - R, P_2 \in P - R \quad \exists L' : \\
 L'_0 = P_1 \wedge L'_{\#L'} &= P_2 \wedge \mathcal{W}_\rho(L, L') = 0 \Leftrightarrow \\
 \forall P_1 \in P - R, P_2 \in P - R \\
 \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L)} \frac{dz}{z - \varphi_\rho(P_1)} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L)} \frac{dz}{z - \varphi_\rho(P_2)}
 \end{aligned}$$

Isto conclui que $P - R$ é coerente com respeito a L . □

Este resultado estabelece que a coerência de uma região $P - R$ é implicada quando um simples teste interior/exterior com uma região dilatada ($L \oplus R$) retorna negativo. A

Figura 3.8 mostra alguns exemplos de testes, onde tem-se as regiões indexadas por $P1$ e $P2$ coerentes e, a indexada por $P3$, não-coerente.

A recíproca do resultado anterior não é verdadeira. Para isto, basta considerar uma lista da forma $L = L_1 \uplus \mathcal{R}(L_1)$: como o interior de L não contém pontos, existe uma região $P - R$ coerente, com $P \in \{L_i\} \oplus R$.

3.5.2 Coerência com quadtrees

O teste anterior pode ser implementado, de maneira eficiente, utilizando a bem conhecida estrutura de dados *quadtrees*. O algoritmo é baseado no artigo original de Hunter e Steiglitz [HunS79], que aborda *quadtrees* no contexto de representações em modelagem geométrica. No algoritmo a seguir, foi modificada apenas a questão de classificação com base no teste acima:

Algoritmo 1.5 Preenchimento de regiões com quadtrees.

FillingComQuadrees(Região R, Lista L)

Entrada: R - região de ineteresse para preenchimento

L - Lista poligonal ou lista de listas (curvas de Bézier)

Saída: Interior de L.

1: se R é coerente com respeito a L **então**

2: Escolher um representante P de R

3: Fazer $w \leftarrow \text{NúmeroDeRotaçãoPoligonal}(\text{Lista } L, \text{Ponto } P)$ ou
 $w \leftarrow \text{NúmeroDeRotaçãoBezier}(\text{Lista } L, \text{Ponto } P)$ de acordo com o tipo de lista

4: se $w \neq 0$ **então**

5: Pintar P

6: **senão**

7: Subdividir R em quatro partes R1,R2,R3,R4

8: FillingComQuadrees(R1,L)

9: FillingComQuadrees(R2,L)

10: FillingComQuadrees(R3,L)

11: FillingComQuadrees(R4,L)

12: **fim se**

13: **fim se**

3.5.3 Coerência maximal

A técnica com *quadtrees* reduz significativamente a complexidade de utilização dos testes interior/exterior a um limite quasi-linear na resolução. Porém, o tamanho da região coerente encontrada em cada folha não é ideal, como mostra o seguinte exemplo:

Figura 3.10: Regiões internas não-maximais.

As folhas contendo regiões coerentes internas poderiam ser agrupadas numa única região, coerente com L . Isto provém do fato que o teste com *quadtrees* encontra regiões coerentes retangulares, não necessariamente maximais com relação à coerência.

Porém, a definição operacional de coerência do Teorema 3.7 pode ser refinada para a produção de um algoritmo que encontra as regiões maximais, com número de testes interior/exterior independente da resolução.

Este resultado é fortemente baseado no Teorema Discreto de Jordan, que afirma que pontos dentro de uma mesma componente conexa, resultante da excisão da lista de $\mathbb{Z}^2$, têm o mesmo número de rotação.

O algoritmo é formado de dois passos:

- detecção de um representante de uma componente conexa do interior
- propagação da cor nesta componente

Primeiramente, serão mostrados o algoritmos e procedimentos auxiliares. Em seguida, serão analisadas a corretude e complexidade dos procedimentos e do algoritmo.

A fase de detecção tenta encontrar um ponto no interior da lista, fazendo uma busca pela vizinhança 8-conexa de um ponto da lista:

Function 1.1 Detecção de um ponto do interior.

Detecção(Ponto P, Lista L, Ponto Q): Booleano

Entrada: P - ponto da lista

L - Lista poligonal

Saída: TRUE - P tem vizinho interior, devolvido em Q

FALSE - P não tem vizinho interior.

- 1: **para cada** vizinho V de P, com cor diferente de COR_INTERIOR **faça**
 - 2: **se** V está no interior de L **então**
 - 3: $Q \leftarrow V$
 - 4: Devolva (TRUE)
 - 5: **fim se**
 - 6: **fim para**
 - 7: Devolva (FALSE)
-

A Figura 3.11 mostra um exemplo de tal busca, onde o círculo indica a vizinhança pesquisada:

Figura 3.11: Detecção num ponto P

Como as curvas são conexas, observa-se facilmente que o número de testes interior/exterior é menor ou igual a 6: os dois vizinhos do ponto P que estão na curva não precisam ser testados. Assim, esta função tem complexidade $O(1)_{custo_{jordan}}$.

Dado um ponto Q pertencente ao interior de uma lista L , o procedimento Propagação, mostrado a seguir, assinala COR_INTERIOR a todos os pontos da região coerente que contém Q .

Procedimento 1.3 Propagação na componente interior.

Propagação(Ponto Q)

Entrada: Q - ponto do interior de uma lista

Saída: A todos os pontos da componente conexa que contém Q
é atribuída a cor COR_INTERIOR

- 1: Fila.criaFila()
 - 2: Fila.insere(Q)
 - 3: $Cor(Q) \leftarrow COR_INTERIOR$
 - 4: **enquanto** Fila.Vazia() $\neq$ TRUE **faça**
 - 5: $P \leftarrow$ Fila.retira()
 - 6: **para cada** vizinho T de P tal que $cor(T) \neq COR_INTERIOR$ **faça**
 - 7: $cor(T) \leftarrow COR_INTERIOR$
 - 8: Fila.insere(T)
 - 9: **fim para**
 - 10: **fim enquanto**
-

O tipo de propagação utilizado é baseado em busca em largura no grafo definido pela estrutura conexa de $\mathbb{Z}^2$. A Figura 3.12 mostra a um exemplo da ação deste algoritmo.

Figura 3.12: Propagação de cor a partir de um ponto Q .

Observa-se facilmente que este procedimento não faz nenhum teste interior/exterior. Porém, faz um outro tipo de operação básica: uma atribuição de cor ao pontos que estão

no interior. Como o interior pode ocupar quase toda a imagem, esta operação faz $O(r^2)$ atribuições de cor na imagem toda, onde r representa a resolução da imagem.

Especificados a função de detecção de um ponto de uma componente interior e um procedimento para preenchimento desta componente, um algoritmo para preenchimento de todas as componentes interiores pode ser contruído:

Algoritmo 1.6 Preenchimento de regiões com coerência maximal.

FillingCoerênciaMaximal(Regiao R, Lista L)

Entrada: L - lista descritora da curva discreta

R - região onde L está imersa

Saída: Interior de L

```

1: para cada ponto  $P \in R$  faça
2:    $cor(P) \leftarrow COR\_EXTERIOR$ 
3: fim para
4: se L é uma lista de pontos de controle então
5:    $L \leftarrow Conversão\_Poligonal(L)$ 
6: fim se
7: para cada ponto  $P \in L$  faça
8:   se  $Detecção(P, L, Q) = TRUE$  então
9:     Propagação(Q)
10:  fim se
11: fim para

```

Observa-se que, para cada ponto P da curva, é realizada uma chamada à função $Detecção(P, L, Q)$. Somente neste ponto é realizado algum teste interior/exterior. Logo, este algoritmo tem complexidade $O(p)$ em relação ao número de testes interior/exterior, onde p representa o perímetro da curva. A conversão poligonal, no caso das curvas de Bézier, pode ser efetuada com complexidade $O(p)$ e a propagação, no máximo, faz $O(n^2)$ atribuições de cor aos pontos da imagem.

Para assegurar o funcionamento correto da função $Detecção$, do procedimento $Propagação$ e do algoritmo $FillingCoerênciaMaximal$, precisar-se-á das seguintes definições:

Definição 3.14. Define-se o interior de uma lista fechada L , $int(L)$, por:

$$int(L) = \{P \in \mathbb{Z}^2 : \mathcal{F}(L, P) \neq 0\}.$$

Assim, o interior de uma lista L corresponde aos pontos P , cujo número de rotação com respeito a L é diferente de 0. Estes pontos são chamados de *pontos interiores*.

Definição 3.15. Um caminho (ou um $\mathbb{Z}^2$ -caminho) entre dois pontos P_1 e P_2 , chamados extremos, é uma sequência $\{V_1 = P_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n = P_2\}$, onde $d(V_i, V_{i+1}) = 1$, para $i = 1, \dots, n-1$. Os pontos V_i , $i \neq 1, n$, são chamados internos.

Nota-se que esta definição é análoga à definição de lista: porém, caminhos não permitem a repetição de pontos consecutivos.

Uma consequência imediata desta definição é que, se W é uma região m -conexa, então sempre existe um caminho ligando P_1 e P_2 , para todo $P_1, P_2 \in W$.

Proposição 3.12. Seja L uma lista fechada e $P_1 \in \text{int}(L)$. Então existe um caminho, com extremos P_1 e P_2 , com $P_2 \in L$, cujos pontos internos estão contidos em $\text{int}(L)$.

Prova. Se $\text{int}(L) = \emptyset$, então resultado obviamente vale. Se $\text{int}(L) \neq \emptyset$, de acordo com o Teorema Discreto de Jordan, $P_1 \in W \subset \text{int}(L)$, W m -conexa. W é limitada por uma sublista L^1 não-vazia de L : ainda mais, $\forall T \in L^1$, existe $S \in W$ tal que $d(T, S) = 1$. Claramente $W \cup L^1$ é m -conexa. Assim, existe um caminho $\{V_1 = P_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n = P_3\}$, com $P_3 \in L^1$. Se $n = 2$, então não existem vértices internos e a proposição vale. Se $n > 2$, considere-se o conjunto

$$I = \{V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n\} \cap \text{int}(L).$$

É claro que pode ser escolhido de I um subconjunto $I' = \{V_{i_1}, \dots, V_{i_k}\}$, tal que $V_{i_1} = P_1$, $d(V_{i_j}, V_{i_{j+1}}) = 1$, para $j = 1, \dots, k-1$ e, conseqüentemente, existe um ponto $P_2 \in L$, tal que $d(P_2, V_{i_k}) = 1$.

Figura 3.13: Escolha do vértice P_2 .

Assim, o caminho da proposição, para $n > 2$ poderia ser $\{V_{i_1} = P_1, \dots, V_{i_k}, P_2\}$. $\square$

A proposição anterior afirma que todo ponto do interior de uma lista L pode ser alcançado a partir de algum ponto desta lista.

Definição 3.16. *Seja W uma região e L uma lista fechada. W é chamada coerente conexa maximal se W é m -conexa, $\mathcal{F}(L, P) = \mathcal{F}(L, Q)$ para todo $P, Q \in W$ e se $V \subset \mathbb{Z}^2$ satisfaz:*

- $W \subseteq V$
- V m -conexa
- $\exists T \in V, \exists S \in W$, tal que $\mathcal{F}(L, T) = \mathcal{F}(L, S)$

então $V = W$.

Exemplos triviais de regiões coerentes conexas maximais são as regiões interiores do Teorema Discreto de Jordan.

Proposição 3.13. *Se um ponto Q é encontrado pela função $\text{Detecção}(P, L, Q)$, então o procedimento $\text{Propagação}(Q)$ atribui cor COR_INTERIOR a todos os pontos $P \in W$, onde W é uma região coerente conexa maximal que contém Q .*

Prova. Suponha que a função em $\text{Detecção}(P, L, Q)$ encontrou um ponto Q . De acordo com o Teorema Discreto de Jordan, $Q \in W \subset \text{int}(L)$, W m -conexa. W é coerente conexa maximal, pelo comentário anterior. Resta provar que o procedimento $\text{Propagação}(Q)$ cobre exatamente todos os pontos de W . Como W é m -conexa, existe um caminho ligando Q a P para todo $P \in W$, $P \neq Q$. Assim P é enfileirado uma única vez. Assim, conclui-se que o procedimento cobre W . A região W é limitada por uma sublista fechada L^1 de L e $L^1 \cup W$ é uma região m -conexa. Observa-se que todos os pontos $P \in L^1$ possuem cor COR_INTERIOR . Logo, estes pontos não são enfileirados e o procedimento não consegue atingir o exterior de W . $\square$

O teorema a seguir mostra que o algoritmo $\text{FillingCoerênciaMaximal}(R, L)$ encontra as regiões coerentes conexas maximais de L :

Teorema 3.8. *Seja L uma lista fechada. Então, o algoritmo $\text{FillingCoerênciaMaximal}(R, L)$ encontra as regiões coerentes conexas maximais de L .*

Prova. Se $\text{int}(L) = \emptyset$, então não existem pontos no interior de L : assim, a função $\text{Detecção}(P, L, Q)$ sempre retorna FALSE. Logo, o procedimento $\text{Propagação}(Q)$ nunca é chamado.

Se $\text{int}(L) \neq \emptyset$, então existem $W_1, W_2, \dots, W_n \subset \text{int}(L)$, tais que $\text{int}(L) = \cup_{i=1}^n W_i$ e $W_i \neq \emptyset$. Usando o Teorema Discreto de Jordan, tem-se $W_i \cap W_j = \emptyset$, para $i \neq j$. Suponha, por absurdo, que exista W_i não detectada pelo algoritmo. Observa-se que a única maneira de se detectar um ponto de W_i é usando a sublista L^1 que limita W_i . Assim, $\text{Detecção}(P, L^1, Q)$ sempre retorna FALSE. De acordo com a proposição 3.12 tal região não existe. Aplicando a proposição 3.13 para cada Q_i retornado por $\text{Detecção}(P, L, Q_i)$, o resultado é estabelecido. $\square$

Estabelecidas as provas de funcionamento dos algoritmos, a próxima seção compara suas complexidades.

3.6 Comparação das complexidades teóricas

Os três algoritmos apresentados anteriormente praticamente são formados de duas operações básicas:

- **teste**, que decide se um ponto está dentro ou fora da região de preenchimento;
- **atribuição**, que atribui cores (preto ou branco)⁴ aos pontos testados.

Assim, a comparação teórica das complexidades destes algoritmos será feita com base nestas operações.

A complexidade da fase de teste já foi estabelecida para os três algoritmos ao longo deste capítulo, sumarizada na Tabela 3.1. Os algoritmos quadrático e com *quadtrees* fazem somente uma atribuição a cada ponto da imagem a ser gerada: assim, fazem $O(r^2)$ atribuições, onde r representa a resolução da imagem. O algoritmo de coerência maximal faz, no máximo, duas atribuições de cor a um mesmo ponto da imagem: uma para atribuição da cor COR_EXTERIOR e desenho da curva, e outra, para os pontos do interior. Logo, este algoritmo faz também $O(r^2)$ atribuições.

⁴Ou, alternativamente, cor do interior e exterior.

A tabela abaixo compara a complexidade destas duas operações básicas para os três algoritmos:

Algoritmo	Número de Testes	Número de Atribuições
Quadrático	$O(r^2)$	$O(r^2)$
Coerência com quadress	$O(r + p)$	$O(r^2)$
Coerência maximal	$O(p)$	$O(r^2)$

Tabela 3.1: Comparação das complexidades teóricas para preenchimento de região.

O passo mais custoso num algoritmo de preenchimento de região é justamente computar quem está dentro ou fora da região de interesse (fase de teste). A simples observação da Tabela 3.1 evidencia que o algoritmo com coerência maximal reduz significativamente a complexidade teórica da fase de teste, comparada com os outros dois algoritmos. Porém, esta redução pode parecer estar mascarada pela notação assintótica da complexidade: assim, foram implementados os três algoritmos, para poligonais e curvas de Bézier, a fim de evidenciar a redução da complexidade. Alguns detalhes de implementação e vários resultados práticos dos algoritmos são analisados nas duas próximas seções.

3.7 Implementação

Todos os algoritmos foram implementados em Object Pascal, com interface gráfica suportada pelo aplicativo Delphi, versão 3.0 Cliente-Servidor. O sistema fornece funcionalidades para criação, alteração, armazenamento e recuperação de curvas poligonais e de Bézier, além da implementação do algoritmos de preenchimento.

A estrutura de dados para representar uma curva discreta foi feita através de um vetor, para acesso em tempo constante aos seus pontos. O seguinte trecho da implementação mostra esta estrutura, evidenciando os métodos para preenchimento de região:

```
const MAXLIST=5000;      {Número máximo de pontos de uma curva discreta}
      MAXCPOINTS=500;    {Número máximo de pontos de controle da curva}

type Point=record        {Ponto da curva discreta}
    x: integer; {Coordenada X do ponto}
    y: integer; {Coordenada Y do ponto}
end;
```

```

type PCurve= object      {Classe das curvas discretas}
    List: array[1..MAXLIST] of Point;  { Lista de pontos }
    ControlPoints: array[1..MAXCPOINTS,1..4] of Point; { lista
                                                de pontos de controle }
    length: integer;      {Comprimento da curva}

    function WindingNumber(P:Point):integer;
    procedure QFilling; { Preenchimento quadrático }
    function Coherent(t,l,b,r:integer):Boolean;
    procedure CFilling(t0,l0,b0,r0:integer); { Preenchimento com quadrees}
    procedure Propagation(x,y:integer);
    procedure Detection(P:Point;var R:Point;var find:Boolean);
    procedure OFilling; { Preenchimento com coerência maximal }
end;

```

A Figura 3.14 mostra um pequeno panorama do sistema, mostrando as funcionalidades de acesso à estrutura de dados para curvas.

Figura 3.14: Panorama básico do sistema de teste interior/exterior.

A seguir, são mostrados alguns trechos da implementação dos três algoritmos para preenchimento de regiões.

O primeiro trecho refere-se ao algoritmo de complexidade quadrática na resolução:

```
procedure PCurve.QFilling;

var P:Point; { Ponto de teste }
begin
  for P.x:=0 to principal.width do    { Percorre todos os pontos da imagem }
    for P.y:=0 to principal.height do
      if WindingNumber(P)<> 0          { Se ponto está no interior ... }
        then principal.Canvas.Pixels[P.x,P.y]:=ClBlack; { recebe cor do interior}
    end;
end;
```

O segundo trecho mostra a implementação do preenchimento com *quadtrees*. Esta implementação utiliza uma estrutura de pilha para simular o processo de chamada recursiva de coerência para as regiões.

```
procedure PCurve.CFilling(t0,l0,b0,r0:integer);
{ Preenchimento com quadtrees
  (t0,l0): Coordenadas do canto superior esquerdo da região de interesse
  (b0,r0): Coordenadas do canto inferior direito da região de interesse}

var P:Point;          { Ponto a ser testado }
    i,j,              { Contadores para preenchimento de região coerente }
    t,l,b,r:integer; { Coordenadas de uma região a ser testada }
    QStack:Stack;     { Pilha para simulação de processo recursivo }
begin
  QStack.Init;        { Inicialização da pilha }
  QStack.Push(t0,l0,b0,r0); { Empilhamento da primeira região}
  while(QStack.IsEmpty=false) do { Verifica término do processo recursivo }
    begin
      QStack.Pop(t,l,b,r); { Desempilhamento da região a ser testada }
      if (t=b) and (l=r)   { Região se reduziu a um ponto ? }
        then begin
          P.x:=t;
          P.y:=l;
          if WindingNumber(P)<>0 { Testa se região-ponto está no interior}
            then principal.canvas.pixels[t,l]:=ClBlack;
          end
        else if Coherent(t,l,b,r)=true { Região é coerente ? }
          then
```

```
then begin
  P.x:=trunc((t+b)/2);
  P.y:=trunc((l+r)/2);
  if WindingNumber(P)<>0 { Se região é coerente interior ... }
  then begin          { pinta todos os pontos da região... }
    for i:=t to b do
      begin
        for j:=l to r do
          principal.canvas.pixels[i,j]:=ClBlack;
        end;
      end;
    end;
  end
else begin { Se região não é coerente... }
  { subdivide a região em quatro parte e empilha
    coordenadas para continuar processo recursivo }
  QStack.Push(t,l,trunc((t+b)/2),trunc((l+r)/2));
  QStack.Push(t,trunc((l+r)/2),trunc((t+b)/2),r);
  QStack.Push(trunc((t+b)/2),l,b,trunc((l+r)/2));
  QStack.Push(trunc((t+b)/2),trunc((l+r)/2),b,r);
  end;
end;
end;
```

A Figura 3.15, mostrada a seguir, exemplifica de ação desta implementação, onde foram destacadas as regiões coerentes.

Figura 3.15: Ação da implementação do preenchimento de região com quadrees.

A última implementação refere-se ao algoritmo de coerência maximal, mostrando os procedimentos de detecção e propagação de cor numa componente do interior:

```

procedure PCurve.Detection(P:Point;var R:Point;var find:Boolean);
{ Verificação de um ponto interior R, a partir de um ponto P da borda.
  Se encontrou um ponto R, então find:=true.}

begin
  { Busca nos 8-vizinhos }
  R:=Translate(P,1,0);
  if (principal.canvas.pixels[R.x,R.y]<>clBlack)
    and (WindingNumber(R)<>0)
  then find:=true
  else begin
    R:=Translate(P,-1,0);
    if (principal.canvas.pixels[R.x,R.y]<>clBlack)
      and (WindingNumber(R)<>0)
    then find:=true
    else begin
      R:=Translate(P,0,-1);
      if (principal.canvas.pixels[R.x,R.y]<>clBlack)
        and (WindingNumber(R)<>0)
      then find:=true
    end
  end
end

```



```

else begin
    R:=Translate(P,0,1);
    if (principal.canvas.pixels[R.x,R.y]<>ClBlack)
        and (WindingNumber(R)<>0)
    then find:=true
    else begin
        R:=Translate(P,1,1);
        if (principal.canvas.pixels[R.x,R.y]<>ClBlack)
            and (WindingNumber(R)<>0)
        then find:=true
        else begin
            R:=Translate(P,-1,1);
            if (principal.canvas.pixels[R.x,R.y]
                <>ClBlack)
                and (WindingNumber(R)<>0)
            then find:=true
            else begin
                R:=Translate(P,1,-1);
                if (principal.canvas.pixels[R.x,R.y]
                    <>ClBlack)
                    and (WindingNumber(R)<>0)
                then find:=true
                else begin
                    R:=Translate(P,-1,-1);
                    if (principal.canvas.pixels[R.x,R.y]
                        <>ClBlack)
                        and (WindingNumber(R)<>0)
                    then find:=true
                    else find:=false;
                end;
            end;
        end;
    end;
end;
end;
end;
end;
end;

procedure PCurve.Propagation(x,y:integer);
{ Propagação de cor numa componente do interior, a partir de um ponto de
  coordenadas (x,y) representante da região }

Var Q:Queue; { Fila para busca em largura na componente }

```

```

begin
  Q.Init;           { Inicialização da fila }
  Q.enqueue(x,y); { Enfileiramento do primeiro elemento }
  principal.canvas.Pixels[x,y]:=ClBlack; { Atribui cor ao ponto representante }
  while Q.empty=False do { Verificação de propagação em todos os pontos }
    begin
      Q.dequeue(x,y); { Toma um ponto e propaga a cor numa 4-vizinhança }
      if principal.Canvas.pixels[x+1,y]<>Clblack
        then begin
          principal.canvas.Pixels[x+1,y]:=ClBlack;
          Q.enqueue(x+1,y);
        end;
      if principal.Canvas.pixels[x-1,y]<>Clblack
        then begin
          principal.canvas.Pixels[x-1,y]:=ClBlack;
          Q.enqueue(x-1,y);
        end;
      if principal.Canvas.pixels[x,y+1]<>Clblack
        then begin
          principal.canvas.Pixels[x,y+1]:=ClBlack;
          Q.enqueue(x,y+1);
        end;
      if principal.Canvas.pixels[x,y-1]<>Clblack
        then begin
          principal.canvas.Pixels[x,y-1]:=ClBlack;
          Q.enqueue(x,y-1);
        end;
    end;
  end;

procedure PCurve.OFilling;
{ Preenchimento com coerência maximal.}
var i:integer; { Contador para percorrer os índices dos pontos da lista }
    P:Point;   { Ponto do interior }
    find:boolean; { Indicador de sucesso na busca por representante do
                  interior}

begin
  for i:=1 to length do { Para cada ponto da curva... }
    begin
      detection(list[i],P,find); { verifica se existe um ponto do interior a
                                partir do ponto atual da borda.}
      if find=true { Se encontrou o ponto...}
        then propagation(P.x,P.y); { pinta a componente interior encontrada.}
    end;
  end;
end;

```

```
end;  
end;
```

3.8 Resultados

A partir dos algoritmos anteriores, foram efetuados vários testes para averiguar o comportamento da implementação e comparar resultados em situações práticas. Mediu-se apenas a quantidade de testes interior/exterior feitos pelos algoritmos, uma vez que a atribuição de cor aos pontos é, essencialmente, a mesma.

O ambiente dos testes foi um computador IBM Pentium 200 MHz. A resolução das imagens é sempre 512×512 , a menos que explicitado o contrário. As imagens geradas foram armazenadas no formato *bitmap*, escaladas a 40%, convertidas para PostScript e incluídas nesta dissertação através do pacote **graphicx**, disponível para $\text{\LaTeX}$. A impressão foi efetuada numa impressora HPLaserJet 5Si a 600 dpi.

Os dois primeiros resultados mostram a habilidade do algoritmo com coerência maximal, juntamente com o teste interior/exterior de Pol e Corthout [CorP92], em detectar pequenos detalhes, conforme mostra o exemplo das poligonais, e tratar várias sobreposições de curvas, como mostra o exemplo das curvas de Bézier.

(a) Poligonais

(b) Poligonais preenchidas

Figura 3.16: Preenchimento de poligonais.

Figura 3.17: Preenchimento de curvas de Bézier.

Um ponto importante refere-se à distribuição das curvas na imagem a ser produzida, pois ela é fator determinante na quantidade de regiões coerentes para as *quadrees*. Assim, foram gerados exemplos desta distribuição e comparados os resultados.

O primeiro exemplo mostra o caracter japonês Hon, formado por 28 segmentos de curvas de Bézier, que se distribuiu por grande parte da imagem.

Figura 3.18: Preenchimento do caracter Hon.

A tabela 3.2, mostrada a seguir, compara o número de testes efetuados por cada um dos algoritmos.

Algoritmo	Número de Testes
Quadrático	262.144
Coerência com quadrees	5.329
Coerência maximal	4.200

Tabela 3.2: Comparação do número de testes para o caracter Hon.

O segundo exemplo foi construído com outro caracter japonês, Ni, concentrado no eixo vertical médio da imagem. Este caracter foi formado por 14 segmentos de curvas de Bézier.

Figura 3.19: Preenchimento do caracter Ni.

A Tabela 3.3, mostrada a seguir, traz o número de comparações para este exemplo.

Algoritmo	Número de Testes
Quadrático	262.144
Coerência com quadrees	5.206
Coerência maximal	4.347

Tabela 3.3: Comparação do número de testes para o caracter Ni.

O terceiro exemplo concentrou o caracter japonês Na, formado por 22 segmentos de curvas de Bézier, na parte superior esquerda da imagem.

Figura 3.20: Preenchimento do caracter Na.

A Tabela 3.4 mostra o resultado do número de comparações:

Algoritmo	Número de Testes
Quadrático	262.144
Coerência com quadrees	3.799
Coerência maximal	2.828

Tabela 3.4: Comparação do número de testes para o caracter Na.

Antes de se passar aos próximos testes, reduziu-se os tamanhos dos caracteres Ni e Hon a patamares próximos de um texto de tamanho normal, cujo efeito é mostrado na figura abaixo.

Figura 3.21: Caracteres japoneses preenchidos e reduzidos.

Exemplos adicionais foram construídos com caracteres de outras línguas, como os caracteres da língua árabe, mostrados a seguir:

Figura 3.22: Preenchimento de caracteres árabes.

O caracter Daal é formado por 7 segmentos de curvas de Bézier e, o caracter Taa, por 10 segmentos. A Tabela 3.5 compara o número de testes:

Algoritmo	Número de Testes	
	Daal	Taa
Quadrático	262.144	262.144
Coerência com quadtrees	1.894	3.520
Coerência maximal	1.369	2.600

Tabela 3.5: Comparação do número de testes para os caracteres árabes.

Assim como para os caracteres japoneses, foram gerados caracteres em tamanho compatíveis com um texto normal.

Figura 3.23: Caracteres árabes preenchidos e reduzidos.

Se o interior ou exterior de uma curva discreta for muito coerente com respeito à divisão efetuada pelas *quadtrees*, o número de folhas nestas árvores fica próximo do perímetro da curva. Assim, o número de testes efetuados pelo algoritmo com coerência maximal pode superar o algoritmo com *quadtrees*, conforme mostra o exemplo a seguir:

Figura 3.24: Preenchimento de poligonais com alto grau de coerência no interior e exterior.

A Tabela 3.6 compara o número de testes neste exemplo:

Algoritmo	Número de Testes
Quadrático	262.144
Coerência com <i>quadtrees</i>	2.500
Coerência maximal	2.947

Tabela 3.6: Comparação do número de testes para poligonais.

Foram também gerados vários testes mantendo-se uma determinada curva e variando-se o tamanho da imagem a ser gerada. O método com *quadtrees* não sofreu muita grandes variações nestes testes. O método com coerência maximal não sofreu variações na fase de testes, uma vez que tal fase independe do tamanho da imagem.

Capítulo 4

Stroking

A operação de *stroking* destina-se a modelar a forma produzida quando uma caneta ou, formalmente, uma *brush* é movida sobre um papel(ou *canvas*), ao longo de uma trajetória. Esta operação tem importantes aplicações, principalmente na produção de fontes. Este capítulo descreve formas de implementação desta operação via o paradigma de teste interior/exterior [FabSF98].

4.1 A operação de *stroking*

Dadas duas regiões, chamadas *brush* e *caminho*, o resultado da operação de *stroking* utilizando estes elementos é definida como o conjunto de pontos formado pela união de imagens transladadas da *brush*, de tal modo que a origem da *brush* seja mapeada em algum ponto do caminho.

Esta operação pode ser formalizada em termos da soma de Minkowski:

Definição 4.1. *Sejam T e B duas regiões em $\mathbb{Z}^2$. Define-se a região de stroking do caminho T e brush B como o conjunto $T \oplus B$, com predicado de pertinência $\tau_{T \oplus B}(P)$.*

O predicado de pertinência $\tau_{T \oplus B}(P)$ decide se um ponto P pertence ou não à região $T \oplus B$.

Pol e Corthout [CorP92] descrevem uma implementação desta operação para curvas de Bézier discretas 8-conexas, descrito na próxima seção. Nota-se que a conectividade citada não representa uma restrição no espaço das curvas aceitas pelo algoritmo: curvas 4 e 6-conexas podem ser facilmente incorporadas ao algoritmo.

4.2 O algoritmo quadrático

Na implementação da operação se *stroking*, desenvolvida por Pol e Corthout [CorP92], primeiramente houve a especificação do predicado de pertinência $\tau_{T \oplus B}(P)$. Esta implementação requer dois itens associados com a *brush*:

- uma *bounding box* para a *brush*
- um predicado de pertinência para a *brush* $\tau_B : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \rightarrow \text{Boolean}$.

A *bounding box* serve para acelerar os casos de rejeição na implementação do predicado de pertinência $\tau_{T \oplus B}$ e não necessita ser a menor *box* que contenha a *brush*. Porém, a performance do algoritmo será tanto maior quanto mais ajustada for a *bounding box*. O predicado de pertinência $\tau_B(Q, P)$ determina se um ponto P é coberto pela *brush* B transladada de Q . Por exemplo, uma *brush* circular de raio r pode delimitada por uma *bounding box* de lado $2r$ e especificado um predicado de pertinência pelo teste $\tau_B(Q, P) : (x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 \leq r^2$.

O primeiro passo do algoritmo será detectar se um ponto P não está na região $T \oplus B$. Para um teste de rejeição rápida, basta verificar se P não está contido em $B_{\text{box}}(T) \oplus B_{\text{box}}(B)$, onde $B_{\text{box}}(T)$ e $B_{\text{box}}(B)$ representam *bounding boxes* do caminho e da *brush*, respectivamente. A corretude deste teste advém imediatamente da monotonicidade da soma de Minkowski (Propriedade 1.1, Capítulo 1). Caso o ponto P não satisfaça este teste de rejeição, o segundo passo do algoritmo será detectar se P é coberto pela *brush* colocada nos pontos extremos da curva: caso afirmativo, o algoritmo pára; caso negativo, a curva é dividida em duas partes e o processo continua recursivamente, num processo tipo divisão-e-conquista. A fase de divisão justifica-se pela distributividade da união em relação à soma de Minkowski (Propriedade 1.2, Capítulo 1).

O Procedimento 1.4, mostrado na próxima página, contém a especificação do teste de pertinência para a origem.

Procedimento 1.4 Teste de pertinência $\tau_{T \oplus B}(\textit{Origem})$.

TesteStroking(Lista T, Brush B)

Entrada: T - Lista contendo os pontos de controle de uma curva de Bézier discreta.
 B - Brush.

Saída: TRUE - origem está contida em $T \oplus B$.
 FALSE - caso contrário.

```

1: se  $\#T = 0$  então
2:   Devolva(FALSE)
3: fim se
4: se  $\textit{Origem} \notin B_{\textit{box}}(T) \oplus B_{\textit{box}}(B)$  então
5:   Devolva(FALSE)
6: fim se
7: se  $\textit{Origem} \tau_B(T_0, \textit{Origem}) = \text{TRUE}$  ou  $\tau_B(T_{\#T}, \textit{Origem}) = \text{TRUE}$  então
8:   Devolva(TRUE)
9: fim se
10: se TesteStroking(Parte_Esquerda(T), B) = TRUE então
11:   Devolva(TRUE)
12: senão
13:   se TesteStroking(Parte_Direita(T), B) = TRUE então
14:     Devolva(TRUE)
15:   fim se
16: fim se
17: Devolva(FALSE)
```

A recursividade gerada por este procedimento tem caráter finito, pois o processo de subdivisão das curvas de Bézier discretas, $\textit{Parte_Esquerda}(T)$ e $\textit{Parte_Direita}(T)$, é finito, conforme explicitado na definição do operador de conversão curva-polígono (Definição 3.11, Capítulo 3).

O procedimento anterior pode ser utilizado para testar quaisquer outros pontos P : basta transladar a lista T de $-P$ antes de efetuar o teste. Observa-se que o procedimento utiliza, no máximo, $O(p)$ chamadas ao predicado de pertinência da *brush*, onde p representa o perímetro da curva representada pela lista T . Na maioria dos casos, a computação do predicado de pertinência para a *brush* pode ser computado com complexidade $O(1)$: tome-se como exemplo as *brushes* quadradas e circulares, usuais em aplicações práticas.

Utilizando-se este procedimento, existe um algoritmo natural para se calcular a região $T \oplus B$: para cada ponto P da imagem a ser gerada, verifica-se se $P \in T \oplus B$. Isto pode ser especificado em termos do procedimento anterior pelo algoritmo 1.7, mostrado a seguir.

Algoritmo 1.7 Stroking quadrático.

Stroking(Lista T, Brush B)

Entrada: T - Lista contendo os pontos de controle de uma curva de Bézier discreta.
B - Brush.

Saída: $T \oplus B$.

```
1: para todo  $P \in Imagem$  faça
2:   se SeTesteStroking(T-P,B)=TRUE então
3:     Pintar P na imagem
4:   fim se
5: fim para
```

Para se calcular a complexidade deste algoritmo, primeiramente observa-se que são efetuados r^2 testes de pertinência contra a região $T \oplus B$, onde r indica a resolução da imagem a ser gerada. Assim, este número de testes tem complexidade quadrática com respeito à resolução.

Apesar de polinomial na resolução, este algoritmo é considerado lento na maioria das aplicações práticas, como *antialiasing* [Fab95] [FabF97]. A próxima seção aborda alguns métodos para redução desta complexidade, baseada em noções de *coerência*.

4.3 Redução da complexidade

A utilização do predicado de pertinência de Pol e Corthout [CorP92], no algoritmo trivial para calcular a região de *stroking* $T \oplus B$, tem comportamento quadrático com respeito à resolução. Para se reduzir esta complexidade, serão utilizados dois mecanismos de localização rápida de pontos pertencentes à região de *stroking*: *testes de coerência com quadrees* e *testes baseados em Π -coerência*.

4.3.1 Coerência com *quadtrees*

O objetivo da coerência com quadtrees é localizar regiões, na imagem a ser gerada, que contenham exclusivamente pontos da região de *stroking* ou pontos fora dela. Para estabelecimento efetivo dos testes de coerência com quadtrees, é necessário a formalização do conceito de região coerente com respeito à região de *stroking* S .

Definição 4.2. *Seja S uma região produzida pela operação de *stroking*. Uma região R é chamada coerente, com respeito a S , se e somente se $R \cap S = R$ ou $R \cap S = \emptyset$.*

Esta definição equivale a dizer que uma região R é coerente, com respeito a S , se e somente se R está contida em S ou no seu complemento.

A seguinte proposição é usada para detectar se uma região R é coerente com respeito a uma região S :

Proposição 4.1. *Sejam R e S' regiões. Então valem as seguintes asserções:*

$$(P - R) \cap S' = \emptyset \Leftrightarrow P \notin S' \oplus R$$

$$(P - R) \subset S' \Leftrightarrow P \in S' \ominus R.$$

A figura 4.1 mostra duas regiões coerentes detectadas pelo teste da proposição anterior:

Figura 4.1: Regiões coerentes com respeito a uma região S' .

Como a região S' pode ser a soma de Minkowski de um caminho T e uma *brush* B , a Proposição 4.1 afirma que testar se $P - R$ é coerente com respeito a $T \oplus B$ é equivalente a checar se $P \in (T \oplus B) \oplus R$ ou $P \in (T \oplus B) \ominus R$. O teste $P \in (T \oplus B) \oplus R$ pode se colocado

na forma $P \in T \oplus (B \oplus R)$, usando a propriedade associativa da soma de Minkowski (Propriedade 1.3, Capítulo 1). O teste $P \in (T \oplus B) \ominus R$ pode ser refinado testando se $P \in T \oplus (B \ominus R)$, uma vez que $T \oplus (B \ominus R) \subset (T \oplus B) \ominus R$, pela Propriedade 1.4 do Capítulo 1.

Como a região de *stroking* cobre, usualmente, somente uma pequena porção da imagem, é mais eficiente começar a detecção pela coerência no complemento da região. Para isto, utiliza-se o teste da primeira asserção da proposição 4.1, com a modificação do teste $P \in (T \oplus B) \oplus R$ mencionada anteriormente. Se o teste pela coerência no exterior falha, utiliza-se o teste no interior, utilizando-se a segunda asserção da Proposição 4.1, com o refinamento do teste $P \in (T \oplus B) \ominus R$ do parágrafo anterior. Seguindo-se esse método, pode ser derivado um algoritmo para calcular o *stroking* de curvas discretas com coerência. Quando uma imagem é para ser gerada, primeiro se detecta se a imagem inteira é coerente. Caso afirmativo, determina-se qual a cor de seus pontos. Caso negativo, a imagem é subdividida em quatro quadrantes, e o aplica-se recursivamente o algoritmo, criando uma estrutura de *quadtree*. Isto pode ser especificado pelo seguinte algoritmo:

Algoritmo 1.8 Stroking $T \oplus B$ com quadrees.

StrokingComQuadrees(Região R,Lista T,Brush B)

Entrada: R - região de interesse para preenchimento

T - Lista contendo os pontos de controle de uma curva de Bézier discreta.

B - Brush.

Saída: $T \oplus B$.

1: se R é coerente com respeito ao exterior de $T \oplus B$ então

2: Retornar da chamada recursiva

3: senão

4: se R é coerente com respeito ao interior de $T \oplus B$ então

5: Pintar todos os pontos de R

6: senão

7: Subdividir R em quatro partes R1,R2,R3,R4

8: StrokingComQuadrees(R1,T,B)

9: StrokingComQuadrees(R2,T,B)

10: StrokingComQuadrees(R3,T,B)

11: StrokingComQuadrees(R4,T,B)

12: fim se

13: fim se

A figura 4.2 mostra um exemplo de aplicação deste algoritmo, onde considerou-se um caminho como um segmento e curva de Bézier e a *brush*, um círculo de raio 10.

Figura 4.2: Exemplo de stroking com *quadtrees*.

Nota-se que este algoritmo sempre termina, pois em última instância de recursão tem-se um ponto: um ponto é sempre coerente com respeito a uma região de *stroking*.

A estrutura recursiva do Algoritmo 1.8 cria uma *quadtree*. Hunter [HunS79] e Samet [Sam90] mostram que o número de nós em uma *quadtree* é de ordem $O(r + p)$, onde p é o perímetro da curva discreta representada pela lista e r o nível máximo de subdivisão. Este nível pode atingir a resolução da imagem a ser gerada: assim, r pode ser entendido como a resolução da imagem. Para cada uma das regiões R candidatas à coerência, existe um ponto P associado. Para cada um destes pontos, precisa ser verificado se $P \in T \oplus (B \oplus R)$ e, em alguns casos, se $P \in T \oplus (B \ominus R)$. Para cada um destes pontos, são necessários $O(p)$ testes para efetiva computação do resultado. Assim, o algoritmo com *quadtrees* tem complexidade de testes $O((r + p)p)$.

4.3.2 Π -coerência

O método com *quadtrees* envolve muitos testes com as dilatações $B \oplus R$ e erosões $B \ominus R$, pois muitas regiões R podem ser geradas no processo recursivo para formar a *quadtree*. Para reduzir o número de tais dilatações, será proposto um novo método baseado num tipo diferente de coerência: a Π -coerência.

Definição 4.3. *Uma região R é Π -coerente com respeito a $T \oplus B$ se e somente se $T \oplus B \subseteq R$.*

Um exemplo simples de região Π -coerente é $T \oplus Q_{Box}(B)$, onde $Q_{Box}(B)$ denota uma *bounding box* quadrada da *brush* B . Isto pode ser provado facilmente utilizando-se o fato que $Q_{Box}(B) \subseteq R$ e aplicando-se a monotonicidade da soma de Minkowski. A escolha da *bounding box* quadrada não foi uma escolha aleatória: como o ambiente de trabalho é 8-conexo, esta *brush* permitirá uma computação eficiente de uma região Π -coerente.

O método para *stroking* utilizando o conceito de Π -coerência utiliza dois procedimentos auxiliares:

- *Cobertura*, que tem a finalidade de calcular uma região Π -coerente;
- *Refinamento*, cuja finalidade é extrair a região $T \oplus B$ da região Π -coerente calculada pelo procedimento Cobertura, utilizando a implementação do predicado de pertinência $\tau_{T \oplus B}$ desenvolvido por Pol e Corthout [CorP92].

O Procedimento Cobertura calcula a seguinte região Π -coerente:

$$\bigcup_{i=0}^{\#T} \{T_i \oplus Q_{Box}(B)\},$$

isto é, limita a região de stroking $T \oplus B$ pela cobertura $T \oplus Q_{Box}(B)$.

O cálculo de $T_i \oplus Q_{Box}(B)$ tem alto custo computacional para a lista toda. Usualmente, $\{T_i \oplus Q_{Box}(B)\} \cap \{T_{i+1} \oplus Q_{Box}(B)\} \neq \emptyset$: assim, evitar a computação dos pontos desta intersecção diminui o custo de cálculo da região Π -coerente descrita acima.

Tendo-se calculado a dilatação para uma parte da lista, isto é, $\bigcup_{i=0}^{k-1} \{T_i \oplus Q_{Box}(B)\}$, para $1 \leq k < \#T$, pode-se computar facilmente a contribuição da dilatação $T_k \oplus Q_{Box}(B)$ pelos casos mostrados na Figura 4.3:

Figura 4.3: Contribuição da dilatação $T_k \oplus Q_{Box}(B)$ para $\bigcup_{i=0}^{k-1} \{T_i \oplus Q_{Box}(B)\}$.

Na implementação dos casos mostrados na figura, as regiões escuras representam linhas e colunas de pontos. Se $T_k = T_{k-1}$, então a computação da contribuição não é necessária. Observa-se que a computação de tal contribuição funciona porque está-se trabalhando num ambiente 8-conexo e pela escolha da *bounding box* quadrada. Utilizando-se esta forma de computar a contribuição, tem-se a seguinte especificação do procedimento Cobertura:

Procedimento 1.5 Cobertura da região de stroking.

Cobertura(Lista T, Brush B)

Entrada: T - Caminho (Curva Discreta)
B - Brush.

Saída: $\bigcup_{i=0}^{\#T} \{T_i \oplus Q_{Box}(B)\}$

- 1: $U \leftarrow T_0 \oplus B$
 - 2: **para todo** $T_i, i = 1, \dots, \#T$ **faça**
 - 3: $U \leftarrow U \cup \text{Contribuição de } T_i \oplus B$
 - 4: **fim para**
 - 5: Devolva (U)
-

A variável U do Procedimento 1.5 representa a estrutura de dados que irá armazenar a imagem final.

A figura 4.4 mostra os primeiros passos deste procedimento usando uma *brush* do tipo diamante:

Figura 4.4: Cobertura com uma brush do tipo diamante.

Dada uma região Π -coerente U , com respeito à região de stroking $T \oplus B$, o procedimento Refinamento calcula a intersecção $U \cap (T \oplus B)$, usando o algoritmo de stroking básico (Algoritmo 1.7).

Procedimento 1.6 Refinamento de uma região Π -coerente.

Refinamento(Lista T, Brush B, Region U)

Entrada: T - Pontos de controle da curva

B - Brush

U - Região Π -coerente

Saída: $T \oplus B$

- 1: para todo $P \in U$ faça
 - 2: se $\text{Stroking}(T, B, P) = \text{FALSE}$ então
 - 3: Retire P de U
 - 4: fim se
 - 5: fim para
 - 6: Devolva(U)
-

A Figura 4.5 mostra um exemplo de ação deste procedimento, usando uma *brush* do tipo diamante:

Figura 4.5: Refinamento de uma região Π -coerente.

Especificados os procedimentos anteriores, pode-se derivar o seguinte algoritmo para a operação de *stroking* usando Π -coerência:

Algoritmo 1.9 Stoking com Π -coerência.

StokingComPiCoerencia(Lista T, Brush B)

Entrada: T - Lista contendo os pontos de controle de uma curva de Bézier discreta.
B - Brush.

Saída: U - Região de stroking $T \oplus B$

- 1: $L \leftarrow$ Curva de Bézier Discreta com pontos de controle de T
 - 2: $U \leftarrow$ Cobertura(L, B)
 - 3: $U \leftarrow$ Refinamento(T, B, U)
 - 4: Devolva (U)
-

Para assegurar o correto funcionamento do Algoritmo 1.9, precisa-se provar que os procedimentos Cobertura(T, B) e Refinamento(T, B, U) cumprem suas funções. O primeiro resultado estabelece que a o procedimento Cobertura(T, B) consegue computar uma região Π -coerente com respeito a $T \oplus B$.

Teorema 4.1. *O procedimento Cobertura(T, B) calcula uma região coerente U com respeito à região de stroking $T \oplus B$.*

Prova. A prova será feita por indução em $\#T$. Se $\#T = 0$, então tem-se

$$U = T_0 \oplus Q_{Box}(B),$$

usando-se o passo 1 do procedimento. Usando a monotonicidade da soma de Minkowski, tem-se $T_0 \oplus B \subseteq T_0 \oplus Q_{Box}(B)$ e o resultado vale.

No passo indutivo, considere-se $\#T = k > 0$. Usando-se o passo 3 do procedimento, tem-se:

$$\begin{aligned} U &= \left\{ \bigcup_{i=0}^{k-1} (T_i \oplus Q_{Box}(B)) \right\} \cup \text{Contribuição da dilatação } T_k \oplus Q_{Box}(B) \\ &= \{ \langle T_0, \dots, T_{k-1} \rangle \oplus Q_{Box}(B) \} \cup \{ T_k \oplus Q_{Box}(B) \} \\ &= T \oplus Q_{Box}(B) \end{aligned}$$

Usando novamente a monotonicidade da soma de Minkowski, tem-se $T \oplus B \subseteq T \oplus Q_{Box}(B)$ e o resultado segue. $\square$

Calculada uma região U Π -coerente com respeito a $T \oplus B$, o próximo resultado prova que o procedimento $\text{Refinamento}(T, B, U)$ consegue extrair a região $T \oplus B$ de U .

Teorema 4.2. *O procedimento $\text{Refinamento}(T, B, U)$ calcula a região $T \oplus B$ de uma região Π -coerente U .*

Prova. Observa-se que o passo 2 do procedimento é executado para todos os pontos $P \in U$. Usando-se o fato que U é Π -coerente com respeito a $T \oplus B$, os pontos $P \in T \oplus B$ são também testados pelo procedimento. Com base na corretude do algoritmo básico de *stroking* (Algoritmo 1.7), tem-se:

- Se $P \in T \oplus B$, então a região U permanece inalterada.
- Se $P \notin T \oplus B$, então P é retirado da região U .

Após efetuados testes para todos os pontos $P \in U$, só restarão os pontos pertencentes à região $T \oplus B$. $\square$

Para se computar o número de testes efetuados pelo Algoritmo 1.9 na região $T \oplus B$, é necessário estimar a cardinalidade da região $\bigcup_{i=0}^{\#T} \{T_i \oplus Q_{Box}(B)\}$, retornada pelo procedimento Cobertura. Para isto, considere-se c o número de pontos numa linha (ou

coluna) da região $Q_{Box}(B)$. No pior caso, quando o caminho é uma diagonal, tem-se no máximo $c^2 + 2c(p - 1)$ pontos na região de teste para refinamento, onde p representa o perímetro do caminho: c^2 provém da cardinalidade de $T_0 \oplus Q_{Box}(B)$ e $2c(p - 1)$ da quantidade das contribuições dos pontos T_i , $i = 1, \dots, \#T$. Assim, tem-se $O((c + p)c)$ testes na região $T \oplus B$. Para se comparar esta complexidade com a obtida no algoritmo que usa *quadtrees*, $O((r + p)p)$ são necessárias algumas considerações. Usualmente, o tamanho da *brush* B é muito menor que a imagem a ser gerada na operação de *stroking*. Deste fato, tem-se $c < r$. Além disto, também é usual o tamanho da *brush* ser menor que o tamanho do caminho T : nestes casos, tem-se $c < p$. Estas afirmações permitem concluir que, se o tamanho da *brush* for bem menor que os tamanhos da imagem a ser gerada e do caminho, o algoritmo com Π -coerência reduz a complexidade do número de testes necessários para se produzir o resultado da operação de *stroking*. Esta dependência do tamanho da *brush* será melhor reafirmada nos testes resultantes da implementação, mostrados na seção 4.6.

A próxima seção compara de maneira mais efetiva os três algoritmos apresentados.

4.4 Comparação das complexidades teóricas

Os três algoritmos apresentados anteriormente praticamente são formados de duas operações básicas:

- **teste**, que decide se um ponto está dentro ou fora da região $T \oplus B$;
- **atribuição**, que atribui cores (preto ou branco)¹ aos pontos testados.

Assim, como na operação de preenchimento, a comparação teórica das complexidades destes algoritmos será feita com base nestas operações.

A complexidade da fase de teste já foi estabelecida para os três algoritmos ao longo deste capítulo, sumarizada na Tabela 4.1. Os algoritmos quadrático e com *quadtrees* fazem somente uma atribuição a cada ponto da imagem a ser gerada: assim, fazem $O(r^2)$ atribuições, onde r representa a resolução da imagem. O algoritmo de Π -coerência faz, no máximo, três atribuições de cor a um mesmo ponto da imagem: a primeira, que coloca todos os pontos da imagem com a cor do exterior da região $T \oplus B$; a segunda, resultante do processo de cobertura; a terceira, resultante do processo de refinamento. Logo, este algoritmo também faz $O(r^2)$ atribuições.

¹Ou, alternativamente, cor do interior e exterior.

A tabela abaixo compara a complexidade destas duas operações básicas para os três algoritmos:

Algoritmo	Operação de teste	Operação de atribuição
Quadrático	$O(r^2)$	$O(r^2)$
Coerência com quadrees	$O((r + p)p)$	$O(r^2)$
Π -Coerência	$O((c + p)c)$	$O(r^2)$

Tabela 4.1: Comparação das complexidades teóricas para *stroking*.

O passo mais custoso num algoritmo de *stroking* é justamente computar quem está dentro ou fora da região de interesse (fase de teste). A simples observação da Tabela 4.1 não evidencia diretamente uma redução da complexidade do algoritmo de Π -coerência em relação ao algoritmo com *quadrees*, em virtude da dependência do tamanho da *brush*. Para se verificar situações práticas em que há redução do número de testes, foram implementados os três algoritmos curvas de Bézier. Alguns detalhes de implementação e vários resultados práticos dos algoritmos são analisados nas duas próximas seções.

4.5 Implementação

Todos os algoritmos foram implementados em Object Pascal, com interface gráfica suportada pelo aplicativo Delphi, versão 3.0 Cliente-Servidor. O sistema fornece funcionalidades para criação, alteração, armazenamento e recuperação de curvas poligonais e de Bézier, alteração do tamanho de *brushes*, além da implementação do algoritmos de *stroking*.

A estrutura de dados para representar um caminho T foi idêntica à utilizada na operação de preenchimento. O seguinte trecho da implementação mostra novamente esta estrutura, evidenciando os métodos para *stroking*:

```

type PCurve= object      {Classe das curvas discretas}
    List: array[1..MAXLIST] of Point;    { Lista de pontos }
    ControlPoints: array[1..MAXPOINTS,1..4] of Point; { lista
                                                de ponto de controle }
    length: integer;      {Comprimento da curva}
    { Predicados de pertinência para as brushes }
    function CircleTest(P:Point;inic,fim,raio:integer):Boolean;
    function SquareTest(P:Point;inic,fim:integer):Boolean;

```

```

function DiamondTest(P:Point;inic,fim:integer):Boolean;
{ Seleção das brushes }
function InStroking(P:Point;inic,fim:integer):Boolean;
{ Stroking quadrático }
procedure QStroking;
{ Stroking com quadrees }
function SCoherent(t,l,b,r:integer);
{ Stroking com quadrees }
procedure CStroking(t0,l0,b0,r0:integer);
{ Stroking com Pi-coerência }
procedure Bounding(preenchimento:integer);
procedure Refinement(x,y:integer);
procedure OStroking;

```

Foram implementados três tipos de *brushes*—circular, quadrada e diamante—, centradas na origem e cujos parâmetros de variação de tamanho são mostrados, pelas setas, na figura abaixo:

Figura 4.6: *Brushes* implementadas e parâmetros de variação de tamanho.

A Figura 4.6 mostra um pequeno panorama do sistema, mostrando as funcionalidades de acesso à estrutura de dados para curvas.

Figura 4.7: Panorama básico do sistema de teste interior/exterior para *stroking*.

A seguir, são mostrados alguns trechos da implementação dos três algoritmos para *stroking*.

O primeiro trecho refere-se ao algoritmo de complexidade quadrática na resolução:

```
procedure PCurve.QStroking;
{ Stroking quadrático }
var P:Point;
begin
  for P.x:=0 to principal.width do    { Percorre todos os pontos da imagem }
    for p.yy:=0 to principal.height do
      if InStroking(P,1,length)=True  { Se ponto está na região de stroking... }
        then principal.Canvas.Pixels[x,y]:=ClBlack; { pinta o ponto }
    end;
end;
```


O segundo trecho mostra a implementação do preenchimento com *quadtrees*. Esta implementação utiliza uma estrutura de pilha para simular o processo de chamada recursiva de coerência para as regiões.

```

procedure PCurve.CStroking(t0,l0,b0,r0:integer);
{ Stroking com quadtrees
(t0,l0): Coordenadas do canto superior esquerdo da região de interesse
(b0,r0): Coordenadas do canto inferior direito da região de interesse}

var P:Point;           { Ponto a ser testado }
    i,j,               { Contadores para preenchimento de região coerente }
    t,l,b,r:integer; { Coordenadas de uma região a ser testada }

begin

    QStack.Init;
    QStack.Push(t0,l0,b0,r0); { Empilha as coordenadas da região que conterá
                                a imagem }
    while(Qstack.IsEmpty=false) do
        begin
            QStack.Pop(t,l,b,r); { Retira região a ser testada }
            if(b=t) and (r=l) then { Se região se reduz a um ponto ... }
                begin
                    P.x:=t;
                    P.y:=l;
                    COMP:=COMP+1;
                    if InStroking(P,1,length)=True { verifica se ponto está na região
                                                        de stroking }
                        then principal.canvas.pixels[t,l]:=ClBlack
                    end
                else { Se região não se reduziu a um ponto ... }
                    if OutStrokingRegion(t,l,b,r)=False { Verifica se a região não é
                                                            coerente com o exterior... }
                        then if InStrokingRegion(t,l,b,r)=true { Verifica se ela é coerente com
                                                                    o interior da região de stroking }
                            then for i:=t to b do
                                    for j:=l to r do
                                        principal.canvas.pixels[i,j]:=ClBlack
                            else { Se a região não for coerente ... }
                                then begin { Passa à divisão em
                                                quadrantes }
                                    QStack.Push(t,l,trunc((t+b)/2),trunc((l+r)/2));
                                    QStack.Push(t,trunc((l+r)/2),trunc((t+b)/2),r);

```

```

        QStack.Push(trunc((t+b)/2),l,b,trunc((l+r)/2));
        QStack.Push(trunc((t+b)/2),trunc((l+r)/2),b,r);
    end;

    end;
end;

```

A última implementação refere-se ao algoritmo de coerência maximal:

```

procedure PCurve.0Stroking;
{ Stroking com Pi-Coerência }

begin
    Bounding(0); { Fase de Cobertura }
    Refinement(List[1].x,List[1].y); { Fase de Refinamento, com base no
                                     primeiro ponto da curva }
end;

```

4.6 Resultados

A partir dos algoritmos anteriores, foram efetuados vários testes para averiguar o comportamento da implementação e comparar resultados em situações práticas. Mediu-se apenas a quantidade de testes interior/exterior feitos pelos algoritmos, uma vez que as atribuição de cor aos pontos é, essencialmente, a mesma.

O ambiente dos testes foi um computador IBM Pentium 200 MHz. A resolução das imagens é sempre 512×512 , a menos que explicitado o contrário. As imagens geradas foram armazenadas no formato *bitmap*, escaladas a 50%, convertidas para PostScript e incluídas nesta dissertação através do pacote **graphicx**, disponível para $\text{\LaTeX}$. A impressão foi efetuada numa impressora HPLaserJet 5Si a 600 dpi.

Os primeiros resultados apenas mostram o efeito das três *brushes* implementadas num segmento de curva de Bézier como caminho. Nestes exemplos, usou-se um tamanho de *brush* igual a 10.

(a) Caminho

(b) Brush circular

(c) Brush quadrada

(d) Brush diamante

Figura 4.8: Efeitos da variação do tipo de *brush*.

As *brushes* do tipo circular e quadrada são largamente utilizadas na maioria dos sistemas de pintura.

O próximo resultado utilizou o caracter japonês Ni, com uma brush de tamanho baixo (4):

Figura 4.9: Curvas do caracter Ni.

Algoritmo	Número de Testes		
	Brush circular	Brush quadrada	Brush diamante
Quadrático	262.144	262.144	262.144
Quadtrees	146.167	147.101	157.104
Π -coerência	18.104	18.104	18.104

Tabela 4.2: Comparação do número de testes de *stroking* para o caracter Ni.

Os resultados da Tabela 4.2 reforçam a tese que, quanto menor o tamanho da *brush*, mais eficiente será o método de Π -coerência. Além disto, nota-se uma variação do número de testes quando ocorre uma mudança de *brush* no algoritmo com *quadtrees*. Isto não ocorre com o mecanismo de *Pi*-coerência: mantendo-se o tamanho constante, não ocorre mudança na *bounding box* quadrada da *brush*.

O próximo exemplo mostra uma situação em que a *brush* tem tamanho grande (30). Neste exemplo, foi utilizado o caracter japonês Hon, distribuído por grande parte da imagem.

Figura 4.10: Curvas do caracter Hon.

Algoritmo	Número de Testes		
	Brush circular	Brush quadrada	Brush diamante
Quadrático	262.144	262.144	262.144
Quadtrees	94.728	88.645	98.215
Π -coerência	109.755	109.755	109.755

Tabela 4.3: Comparação do número de testes de *stroking* para o caracter Hon.

Neste exemplo, além de uma grande distribuição das curvas pela imagem, o tamanho da *brush*, relativamente grande, contribuiu para a queda da performance do algoritmo de Π -coerência, conforme explicitado na Tabela 4.3. Isto já era esperado na comparação teórica das complexidades.

Para reforçar a dependência do tamanho da *brush* no desempenho do algoritmo de Π -coerência, foi gerado um exemplo de pior caso para entrada do algoritmo (segmento diagonal).

Figura 4.11: Segmento diagonal na imagem (redução de 30%).

Variando-se o tamanho da *brush* circular, obteve-se a seguinte tabela:

Tamanho	Quadrático	Quadtrees	Π -coerência
4	262.144	69.206	5.262
6	262.144	72.755	8.176
8	262.144	74.266	10.869
10	262.144	76.617	13.379
20	262.144	80.063	26.478
30	262.144	83.174	38.925
40	262.144	86.187	50.975
60	262.144	86.054	73.812
80	262.144	82.138	95.391
100	262.144	77.984	114.976

Tabela 4.4: Efeitos da variação do tamanho da *brush*.

A dependência do tamanho da *brush* é notória pelos resultados da Tabela 4.4. Além disto, ocorre um efeito interessante com o algoritmo de *quadtrees*: o número de testes cresce até um certo ponto, quando passo a cair. O mesmo não acontece com o algoritmo de Π -coerência, que tem comportamento crescente com o aumento do tamanho da *brush*.

Capítulo 5

Preenchimento e *stroking*

Os algoritmos desenvolvidos nos dois capítulos anteriores podem ser combinados de forma a realizar o preenchimento de regiões e *stroking* de maneira simultânea. Este capítulo descreve os mecanismos desta ligação, derivando três algoritmos de complexidade decrescente [FabSF98].

5.1 O algoritmo quadrático

Considere-se T uma lista e B uma *brush*. Se T é fechada, então ela pode ser preenchida com os métodos do Capítulo 3. Usualmente, a região de preenchimento é bem maior que a região de *stroking*. Além disto, geralmente as duas regiões possuem intersecções que não precisam ser computadas duas vezes, como mostra a Figura 5.1.

Figura 5.1: Intersecção entre as regiões de stroking e preenchimento.

Usualmente, a região de preenchimento é bem maior que a região de *stroking*. Assim,

a idéia de um algoritmo combinado é bem simples: para cada ponto P da imagem a ser gerada, testa-se se P está no interior de T ; se a resposta for negativa, testa-se P contra a região de *stroking* $T \oplus B$.

Algoritmo 1.10 Preenchimento de regiões e *stroking* quadrático.

FillingStroking(Lista L , Brush B)

Entrada: T - Lista contendo os pontos de controle de uma curva de Bézier discreta.

B - Brush

Saída: $Int(T) \cup (T \oplus B)$.

```
1: para cada ponto  $P$  da imagem faça
2:   se  $P$  está no interior de  $T$  então
3:     Pintar  $P$ 
4:   senão
5:     se  $P$  está na região  $T \oplus B$  então
6:       Pintar  $P$ 
7:   fim se
8: fim se
9: fim para
```

Observa-se facilmente que o pior caso deste algoritmo ocorre quando o interior da lista T é vazio. Seguindo a mesma notação de complexidade utilizada nos capítulos anteriores, este algoritmo tem complexidade $O(r^2)$ na fase de testes interior/exterior, ou seja, o algoritmo é quadrático com respeito à resolução da imagem. Utilizando as noções de coerência derivadas para a operação de preenchimento e *stroking*, esta complexidade pode ser reduzida.

5.2 O algoritmo com quadtrees

As noções de coerência com *quadtrees* utilizadas nos capítulos 3 e 4 podem ser combinadas na produção de um algoritmo combinado para preenchimento e *stroking*. Dada uma região R , o primeiro passo é detectar se R é coerente com respeito ao interior de T . Caso o teste resulte negativo, passa-se ao teste de coerência com *stroking*: na ocorrência de um resultado negativo, continua-se o processo recursivo.

A especificação deste processo é mostrada pelo Algoritmo 1.11, mostrado na próxima página.

Algoritmo 1.11 Preenchimento e *stroking* com *quadrees*.

FillingStrokingComQuadrees(Região R, Lista T, Brush B)
Entrada: R - região de interesse para preenchimento

T - Lista

B - Brush.

Saída: $Int(T) \cup (T \oplus B)$.

```

1: se R é coerente com respeito ao interior de T então
2:   Pintar todos os pontos de R
3: senão
4:   se R é coerente com respeito ao interior de  $T \oplus B$  então
5:     Pintar todos os pontos de R
6:   senão
7:     Subdividir R em quatro partes R1,R2,R3,R4
8:     StrokingComQuadrees(R1,T,B)
9:     StrokingComQuadrees(R2,T,B)
10:    StrokingComQuadrees(R3,T,B)
11:    StrokingComQuadrees(R4,T,B)
12:   fim se
13: fim se

```

Conforme já observado nos dois capítulos anteriores, Hunter e Steiglitz [HunS79], Samet [Sam90], mostram que o número de nós em uma *quadtree* é de ordem $O(r + p)$, onde p é o perímetro da lista e r o nível máximo de subdivisão. Foi estabelecido, também, que o número de testes interior/exterior para as operações de preenchimento e *stroking* dependem diretamente desta quantidade de nós.

Para fins de análise de complexidade deste algoritmo, podem ser construídos exemplos de pior caso, em que se tenha que testar todas as coerências – de preenchimento e *stroking* – até se chegar num ponto. Um exemplo trivial é uma lista T da forma $T \uplus \mathcal{R}(T)$, ou seja, uma lista com interior vazio, ocupando a diagonal da imagem a ser gerada. Para a operação de preenchimento, o Capítulo 3 mostrou que a complexidade de testes era $O(r + p)$. Já o capítulo 4, mostrou que o número de testes para *stroking* era de $O((r + p)p)$. Assim, tem-se uma complexidade final do número de testes $O((r + p)(1 + p))$.

Esta complexidade pode ser reduzida, combinando-se os algoritmos de coerência maximal e Π -coerência.

5.3 O algoritmo com coerência maximal e Π -coerência

A complexidade do algoritmo com quadrees pode ser reduzida calculando-se a região do interior de T com coerência maximal e, fazendo-se uma pequena modificação no Procedimento Cobertura, realizar a operação de *stroking*. A modificação no procedimento tem o objetivo de evitar a inclusão, na cobertura da região de *stroking*, da intersecção entre a região do interior e a região Π -coerente.

Procedimento 1.7 Modificação da cobertura da região de *stroking*.

MCobertura(Lista T, Brush B)

Entrada: T - Lista

B - Brush.

F - Interior de T

Saída: $\bigcup_{i=0}^n \{(T_i \oplus Q_{Box}(B)) - ((T_i \oplus Q_{Box}(B)) \cap F)\}$

1: $U \leftarrow (T_0 \oplus B) - ((T_0 \oplus B) \cap F)$

2: **para todo** T_i , $i = 1, \dots, \#T$ **faça**

3: $U \leftarrow U \cup \{(contribuição\ de\ T_i \oplus B) - ((contribuição\ de\ T_i \oplus B) \cap F)\}$

4: **fim para**

5: Devolva (U)

A diferença entre conjuntos, utilizada nos passos 1 e 3 do procedimento anterior, pode ser facilmente computada utilizando-se um *canvas* para representar o conjunto U : quando se detecta um ponto P na contribuição de $T_i \oplus B$, pode-se testar em tempo constante se $P \in F$.

Obtendo-se a cobertura U , basta percorrer todos os seus pontos para decidir quais estão na região de *stroking*. Isto é especificado pelo Algoritmo 1.12, mostrado na próxima página.

Algoritmo 1.12 Preenchimento e stroking com coerência maximal e Π -coerência.**FillingStrokingComPiCoerencia**(Lista T, Brush B)**Entrada:** T - Lista.

B - Brush.

Saída: $Int(T) \cup (T \oplus B)$ 1: Imagem $\leftarrow$ FillingCoerênciaMaximal(Imagem, T)2: U $\leftarrow$ MCobertura(L, B, Imagem)3: **para cada** $P \in U$ **faça**4: **se** $P \in T \oplus B$ **então**

5: Pintar P na Imagem

6: **fim se**7: **fim para**

8: Devolva (U)

O próximo resultado analisa os passos do algoritmo anterior, mostrando que ele computa corretamente a união entre as regiões de preenchimento e *stroking*:

Teorema 5.1. *Seja T uma lista fechada e B uma brush. O algoritmo FillingStroking-ComPiCoerencia computa a união $int(T) \cup (T \oplus B)$.*

Prova. O passo 1 do algoritmo computa a região de preenchimento, conforme provado no Capítulo 3. O passo 2 detecta uma cobertura para a região de *stroking* que está fora da região de preenchimento. Observa-se que, neste passo, os pontos pertencentes a ambas as regiões – preenchimento e *stroking* – não são computadas duas vezes, uma vez que o procedimento de cobertura foi alterado. O conjunto de pontos resultante desta cobertura não é necessariamente uma região Π -coerente: assim, o procedimento de Refinamento não pode ser usado diretamente. Os passos de 3 a 8 são uma pequena modificação do procedimento Refinamento, para aceitar os pontos que estão fora da região de preenchimento, mas dentro da região de *stroking*. Usando um argumento similar ao Teorema 4.2, do Capítulo 4, o resultado segue. $\square$

Este algoritmo combinado tem duas fases distintas: preenchimento e *stroking*. O passo 1 pode ser efetuado com complexidade de testes $O(p)$, conforme mostrado no Capítulo 3. O quantidade de pontos calculados pelo procedimento MCobertura é menor ou igual à quantidade calculada pelo procedimento Cobertura, especificado no Capítulo 4. Assim, a quantidade de testes de *stroking* realizados no passo 4 é limitada também por esta

quantidade, ou seja, são realizados $O(c^2 + cp)$ testes, conforme mostrado no Capítulo 4. Assim, o número total de testes interior/exterior tem complexidade $O((c+p)p)$. Fazendo-se uma análise semelhante ao Capítulo 4, verifica-se que a redução do número de testes, em relação ao algoritmo com *quadtrees*, está novamente vinculada ao tamanho da *brush* utilizada. A seção 5.6 reforça esta dependência, com casos práticos.

A próxima seção compara as complexidades dos três algoritmos propostos.

5.4 Comparação das complexidades teóricas

Os três algoritmos apresentados anteriormente praticamente são formados de duas operações básicas:

- **teste**, que decide se um ponto está dentro ou fora das regiões e preenchimento e *stroking*;
- **atribuição**, que atribui cores (preto ou branco)¹ aos pontos testados.

Assim, como nos capítulos anteriores, a comparação teórica das complexidades destes algoritmos será feita com base nestas operações. A complexidade da fase de teste já foi estabelecida para os três algoritmos ao longo deste capítulo, sumarizada na Tabela 5.1. Os algoritmos quadrático e com *quadtrees* fazem somente uma atribuição a cada ponto da imagem a ser gerada: assim, fazem $O(r^2)$ atribuições, onde r representa a resolução da imagem. Não é difícil ver que o algoritmo de coerência maximal e Π -coerência faz também, no máximo, $O(r^2)$ atribuições de cor aos pontos.

A tabela abaixo compara a complexidade destas duas operações básicas para os três algoritmos:

Algoritmo	Testes	Atribuição
Quadrático	$O(r^2)$	$O(r^2)$
Quadtrees	$O((r+p)(1+p))$	$O(r^2)$
Maximal e Π -coerência	$O((c+p)p)$	$O(r^2)$

Tabela 5.1: Comparação das complexidades teóricas para preenchimento e stroking simultâneos.

¹Ou, alternativamente, cor do interior e exterior.

Alguns detalhes de implementação e vários resultados práticos dos algoritmos são analisados nas duas próximas seções.

5.5 Implementação

Todos os algoritmos foram implementados em Object Pascal, com interface gráfica suportada pelo aplicativo Delphi, versão 3.0 Cliente-Servidor, com as mesmas funcionalidades descritas nos capítulos anteriores.

A seguir, são mostrados alguns trechos da implementação dos três algoritmos. O primeiro trecho refere-se ao algoritmo de complexidade quadrática na resolução:

```
procedure PCurve.QuadraticFillingstroking;

var P:Point;
begin
  principal.Canvas.Pen.Color:=ClBlack;
  for P.x:=0 to principal.width do
    for P.y:=0 to principal.height do
      if WindingNumber(P)<> 0
        then principal.Canvas.Pixels[x,y]:=ClBlack
      else if InStroking(P,1,length)=True
        then principal.Canvas.Pixels[x,y]:=ClBlack;
end;
```

O segundo trecho mostra a implementação do preenchimento com *quadtrees*. Esta implementação utiliza uma estrutura de pilha para simular o processo de chamada recursiva de coerência para as regiões.

```
procedure PCurve.QuadtreeFillingStroking(t0,l0,b0,r0:integer);
var P:Point;
    i,j,t,l,b,r:integer;
    QStack:Stack;

begin
  QStack.Init;
  QStack.Push(t0,l0,b0,r0); { Empilha as coordenadas da imagem }
  while(Qstack.IsEmpty=false) do
```

```

begin
  QStack.Pop(t,l,b,r);      { Desempilha região candidata a coerente }
  if (t=b) and (l=r)        { Trata região que se reduziu a um ponto }
  then begin
    P.x:=t;
    P.y:=l;
    if WindingNumber(P)<>0
    then principal.canvas.pixels[t,l]:=ClBlack
    else if InStroking(P,1,length)=true
    then principal.canvas.pixels[t,l]:=ClBlack;
  end
  else if Coherent(t,l,b,r)=true { Verifica se é coerente com respeito
                                ao preenchimento }
  then begin
    P.x:=trunc((t+b)/2);
    P.y:=trunc((l+r)/2);
    if WindingNumber(P)<>0
    then begin
      if (b<=t) and (r<=l)
      then principal.canvas.pixels[t,l]:=ClBlack
      else begin
        for i:=t+1 to b do
        begin
          for j:=l+1 to r do
            principal.canvas.pixels[i,j]:=ClBlack;
          end;
        end;
      end
    end
    else if InStrokingRegion(t,l,b,r)=true { Verifica se é
      coerente com respeito ao interior do
      stroking }
    then for i:=t to b do
      for j:=l to r do
        principal.canvas.pixels[i,j]:=ClBlack
      else if OutStrokingRegion(t,l,b,r)=False { Verifica
        se é coerente com respeito ao exterior do
        stroking }
      then begin { Continua processo recursivo...}

        QStack.Push(t,l,trunc((t+b)/2),trunc((l+r)/2));
        QStack.Push(t,trunc((l+r)/2),trunc((t+b)/2),r);
        QStack.Push(trunc((t+b)/2),l,b,trunc((l+r)/2));
        QStack.Push(trunc((t+b)/2),trunc((l+r)/2),b,r);

```

```
end;
```

```
end;  
end;
```

A última implementação refere-se ao algoritmo de coerência maximal e Π -coerência:

```
procedure PCurve.0FillingStroking;  
var i:integer;  
    P:Point;  
    find:boolean;  
begin  
  for i:=1 to length do { Varre todos os pontos da lista }  
  begin  
    detection(list[i],P,find); { Se detectou algum ponto do interior ... }  
    if find=true  
      then propagation(P.x,P.y); { propaga a cor na componente. }  
    end;  
    MBounding(1); { Cobertura modificada na região de stroking }  
    MRefinement(List[1].x,List[1].y); { Refinamento modificado da cobertura. }  
  end;  
end;
```

5.6 Resultados

A partir dos algoritmos anteriores, foram efetuados vários testes para averiguar o comportamento da implementação e comparar resultados em situações práticas. Mediu-se apenas a quantidade de testes interior/exterior feitos pelos algoritmos, uma vez que a atribuição de cor aos pontos é, essencialmente, a mesma.

O ambiente dos testes foi um computador IBM Pentium 200 MHz. A resolução das imagens é sempre 512×512 , a menos que explicitado o contrário. As imagens geradas foram armazenadas no formato *bitmap*, escaladas a 40%, convertidas para PostScript e incluídas nesta dissertação através do pacote **graphicx**, disponível para $\text{\LaTeX}$. A impressão foi efetuada numa impressora HPLaserJet 5Si a 600 dpi.

Os primeiros resultados apenas mostram o efeito do preenchimento com *stroking*, usando-se as três *brushes* implementadas com tamanho 10.

(a) Caminho

(b) Brush circular

(c) Brush quadrada

(d) Brush diamante

Figura 5.2: Efeitos de preenchimento com *stroking* simultâneo.

Todas as imagens com preenchimento e *stroking* foram geradas pelo algoritmo com *Pi*-coerência e coerência maximal.

O próximo resultado utilizou o caracter japonês Ni, com uma brush de tamanho baixo (10):

Figura 5.3: Curvas do caracter Ni.

Algoritmo	Número de Testes		
	Brush circular	Brush quadrada	Brush diamante
Quadrático	262.144	262.144	262.144
Quadtrees	145.751	143.726	160.530
Π -coerência	27.381	27.381	27.381

Tabela 5.2: Comparação do número de testes para o caracter Ni.

Os resultado da Tabela 4.2 reforçam a tese que, quanto menor o tamanho da *brush*, mais eficiente será o método de preenchimento e *stroking* com Π -coerência e coerência maximal. Como na operação de *stroking*, variando-se o tipo da brush, com tamanho fixo, ocorrem mudanças na quantidade de testes. A mudança de *brush*, com tamanho fixo, não altera o desempenho do método com Π -coerência e coerência maximal.

O próximo exemplo mostra uma situação em que a *brush* tem tamanho grande (60). Neste exemplo, foi utilizado o caracter japonês Hon, distribuído por grande parte da imagem. O resultado da operação ocupou quase metade da imagem.

Figura 5.4: Curvas do caracter Hon.

Algoritmo	Número de Testes		
	Brush circular	Brush quadrada	Brush diamante
Quadrático	262.144	262.144	262.144
Quadtrees	86.089	75.246	96.741
Π -coerência	127.382	127.382	127.382

Tabela 5.3: Comparação do número de testes para o caracter Hon.

Neste exemplo, além de uma grande distribuição da curvas pela imagem, o tamanho da *brush*, relativamente grande, contribuiu para a queda da performance do algoritmo de Π -coerência e coerência maximal, conforme explicitado na Tabela 5.3 e reafirmando as asserções da análise teórica.

Para reforçar a dependência do tamanho da *brush* no desempenho do algoritmo de Π -coerência e coerência maximal, foi gerado um exemplo de dois segmentos diagonais, formando uma figura fechada, quase-sobrepostos. Claramente a região interior a estes segmentos é quase nula: isto impõe, ao algoritmo com *quadtrees*, fazer os dois testes – de coerência com o preenchimento e com *stroking* – quase sempre.

Figura 5.5: Segmentos quase-sobrepostos (redução de 30%).

Variando-se o tamanho da *brush* circular, obteve-se a seguinte tabela:

Tamanho	Quadrático	Quadtrees	Π -coerência
4	262.144	71.514	6.601
6	262.144	75.945	9.478
8	262.144	78.269	12.204
10	262.144	79.623	14.694
20	262.144	83.132	27.765
30	262.144	86.017	40.178
40	262.144	89.049	52.197
80	262.144	84.805	96.526
100	262.144	80.523	116.077

Tabela 5.4: Efeitos da variação do tamanho da *brush*.

A dependência do tamanho da *brush* é facilmente verificada pelos resultados da Tabela 5.4. O número de testes da técnica com Π -coerência e coerência maximal é crescente com o tamanho da *brush*, enquanto que a técnica com *quadtrees* exibe um comportamento crescente até um certo patamar, passando a decrescente depois.

Capítulo 6

Aplicações em *antialiasing*

Os algoritmos de preenchimento e *stroking* podem ser utilizados em várias aplicações importantes. Este capítulo mostra uma aplicação destes algoritmos para uma técnica de *antialiasing*.

6.1 *Antialiasing*

Sistemas gráficos de exibição matricial são dispositivos discretos: em tais sistemas, uma imagem é gerada atribuindo-se uma intensidade para cada pixel pertencente a uma matriz bidimensional finita de *pixels*. Essa natureza discreta acarreta um dos principais problemas dos sistemas de exibição matricial: a inabilidade de se obter contornos contínuos e de se exibir os detalhes finos de uma cena. Um exemplo familiar é o aspecto serrilhado das imagens de retas e contornos num dispositivo de saída do tipo CRT (*Cathode Ray Tube*). Outro exemplo é a cintilação devida a pequenos objetos em movimento, que aparecem e desaparecem numa exibição dinâmica. Tais defeitos ocorrem quando uma função de variáveis contínuas que contém abrupta alteração de intensidade é aproximada por amostras discretas. O erro desse processo de discretização foi originariamente chamado *aliasing* em Teoria do Processamento de Sinais e esta terminologia tem sido usada em Computação Gráfica.

O conjunto de técnicas para atenuar os efeitos de *aliasing* é conhecido comumente como *antialiasing*.

Para exemplificar estes mecanismos, a Figura 6.1 mostra duas versões de uma mesma curva discreta:

Figura 6.1: Efeitos de *aliasing* e *antialiasing*.

Na versão mostrada em (a), não foi efetuado nenhum tratamento para *aliasing*, onde são notórios os efeitos do tipo serrilhado. Em (b) foi aplicada uma técnica de *antialiasing*, cujo aspecto é visivelmente mais confortável.

6.2 A técnica de Fabris e Forrest para *antialiasing*

Pré-filtragem é geralmente considerada a abordagem ideal para antialiasing, mas tem sido difícil de ser implementada com exatidão para geometrias complexas, tais como curvas ou para uma escolha arbitrária de filtros.

Em [Fab95, FabF97, FabF97b], Fabris e Forrest desenvolveram uma técnica para antialiasing de curvas bidimensionais contínuas baseada em pré-filtragem que, não só evita os problemas geométricos e numéricos encontrados em técnicas anteriores, mas também permite o uso de uma classe genérica de filtros, o que a torna aplicável a diferentes dispositivos de saída.

O processo de rasterização utilizado em [Fab95, FabF97, FabF97b] consiste no teste interior/exterior, descrito nos capítulos anteriores. Neste processo, não houve uma preocupação especial no que diz respeito à eficiência. O uso de um teste interior/exterior com sua complexidade original - quadrática com relação à resolução - torna a implementação consideravelmente lenta. Utilizando-se o mecanismo de Π -coerência, a implementação da técnica tornou-se bastante rápida, como mostram os resultados da próxima seção.

6.3 Resultados

Utilizando-se a implementação da técnica de Fabris e Forrest, com o mecanismo de *Π*-coerência, foram gerados vários exemplos para se verificar o comportamento da técnica frente ao novo mecanismo de teste e medidas de tempo. A medida de tempo foi tomada em minutos e segundos, ao invés da contagem do número de operações, com o intuito de se ter uma noção de tempo de execução numa aplicação prática. Os testes foram efetuados num equipamento IBM Pentium 200 MHz. A resolução das imagens é sempre 512×512 . Para melhor definição dos resultados, utilizou-se uma resolução de sub-pixel $2^6 \times 2^6$. As imagens geradas foram armazenadas no formato *bitmap*, escaladas, convertidas para PostScript e incluídas através do pacote **graphicx**, disponível para $\text{\LaTeX}$. A impressão foi efetuada numa impressora HPLaserJet 5Si a 600 dpi. Como o objetivo primordial era introduzir velocidade na técnica de *antialiasing*, não foi efetuado nenhum tratamento de *gamma correction*¹, fato que pode, eventualmente, refletir negativamente na imagem final. Entretanto, isto não produz nenhuma alteração significativa de desempenho na técnica de *stroking* incorporada, uma vez que se trata de uma etapa de pós-processamento.

Os primeiros resultados, mostrados nos casos (1) a (6) nas próximas páginas, ressaltam o comportamento da técnica frente a várias particularidades geométricas das curvas. As curvas geradas têm largura 1 e foi utilizado um filtro do tipo Bartlett. As imagens finais estão em tamanho natural. A Tabela 6.1 sumariza os tempos necessários para a computação de cada uma das imagens com *antialiasing*:

Caso	Tempo (segundos)
1	12
2	12
3	19
4	10
5	15
6	16

Tabela 6.1: Tempos para várias particularidades geométricas de curvas.

¹Tipicamente, deseja-se que a resposta do monitor de vídeo seja linear com um sinal de entrada. Porém, na prática, observa-se um comportamento não-linear entre a intensidade emitida pelo monitor e a voltagem do sinal de entrada. A compensação desta não-linearidade é conhecida como *gamma correction*, podendo ser efetuada diretamente por *hardware* por alguns sistemas ou por tabelas de compensação, via *software*.

Figura 6.2: Caso (1) - Curva com porções quase verticais e horizontais.

Figura 6.3: Caso (3) - Curva com grande raio de curvatura.

Figura 6.4: Caso (2) - Curva com pequeno raio de curvatura.

Figura 6.5: Caso (4) - Curva com um cúspide.

Figura 6.6: Caso (5) - Curva com um pequeno *loop*.

Figura 6.7: Caso (6) - Curva com dois pontos de inflexão.

Os próximos resultados, mostrados nas páginas seguintes, evidenciam o efeito da variação da largura da curva no desempenho da implementação. Ressalta-se que, quanto maior a largura da curva, maior a região de teste interior/exterior. As imagens estão em tamanho natural e as medidas de largura estão em unidade de *pixel*.

A Tabela 6.2 compara os tempos necessários para a produção de cada uma destas imagens.

Largura	Tempo (segundos)
0.5	7
1.0	15
1.5	17
2.0	26
2.5	27
3.0	37

Tabela 6.2: Tempos com variação da largura das curvas.

Figura 6.8: Curva utilizada para teste de variação de largura.

Figura 6.9: Variação de largura das curvas.

A variação do filtro, utilizado na técnica, interfere no tamanho da região de teste interior/exterior, evidenciada pela alteração de suporte do filtro. Quanto maior o suporte do filtro, maior será a área de testes e, conseqüentemente, maior o tempo necessário para *antialiasing*. Para reforçar esta afirmação, foram gerados testes com tamanho crescente do suporte dos filtros. As imagens correspondentes aos testes encontram-se na próxima página.

(a) Curva Teste

(b) Box

(c) Bartlett

(d) Bell

Figura 6.10: Efeitos da variação do filtro.

A Tabela 6.3 mostra o efeito temporal desta variação:

Filtro	Suporte	Tempo (minutos:segundos)
Box	$[-0.5, 0.5]$	11
Bartlett	$[-1.0, 1.0]$	12
Bell	$[-1.5, 1.5]$	20

Tabela 6.3: Tempos com variação dos filtros.

Finalmente, se a curva for fechada, pode-se preenchê-la e aplicar a técnica de *antialiasing* na bordas, como mostra a seqüência do exemplo a seguir:

Figura 6.11: Curvas fechadas.

Figura 6.12: Curvas fechadas preenchidas e com *antialiasing*.

Nestes exemplos, ambos tratamento de *aliasing* e preenchimento foram feitos em alta resolução, utilizando-se um filtro simples (*box filtering*).

Capítulo 7

Conclusões

Métodos para redução da complexidade do número de testes interior/exterior, em duas operações básicas de rasterização (preenchimento e *stroking*), foram introduzidos nesta dissertação. Tais métodos primam pela simplicidade das estruturas de dados utilizadas, requisição de aritmética somente inteira e altamente adaptáveis para implementações paralelas. Além disto, esses métodos foram utilizados como suporte para operações mais complexas, como *antialiasing*.

Uma continuidade natural deste trabalho seria uma especificação robusta de um teste interior/exterior para dimensões mais altas. Por exemplo, no teste interior/exterior para preenchimento existem cálculos parciais que dependem somente de informações locais das curvas: assim, seria de grande interesse computacional a extensão para objetos com propriedades locais semelhantes, como as variedades. Outro ponto, nesta mesma linha, refere-se à dependência com a orientação da curva. Assim, na extensão para dimensões mais altas, um estudo para objetos não orientáveis, como a *Faixa de Moëbius* e a Garrafa de Klein, poderia ser efetuado.

A extensão para dimensões mais altas, só pelo cunho teórico, já seria auto-justificável. Porém, existem várias situações práticas que demandam de tais testes, como modelagem topológica de objetos, geometria computacional, visualização científica, dentre outros.

Um trabalho futuro deverá abordar a possibilidade de tal extensão, com a preocupação de desenvolvimento de algoritmos robustos e eficientes.

Índice Remissivo

Símbolos

$\mathcal{R}(L)$, reverso de L	21
$\Delta(L)$, diferença de ordem 1 de L	21
$\mathcal{F}_\rho(L, P)$, função de rasterização	43
$L^1 \uplus L^2$, concatenação de L^1 e L^2	21
L_i , i -ésimo ponto de L	20
$\#L$, comprimento de L	20
Λ , conjunto de todas as listas	20
Λ^n , listas-diferença	36
Λ_n , listas de comprimento n	20
ϵ , translação	31
$\langle L_i \rangle_{i=0}^n$, pontos de uma lista L	20
$\mathcal{B}_L(t)$, curva de Bézier	51
$\mathcal{D}'(L)$, parte direita discreta de uma curva de Bézier	52
$\mathcal{D}(L)$, parte direita de uma curva de Bézier	51
$\mathcal{E}'(L)$, parte esquerda discreta de uma curva de Bézier	52
$\mathcal{E}(L)$, parte esquerda de uma curva de Bézier	51
$\mathcal{F}$, função de rasterização	46
$\mathcal{Q}(L, P)$, função de rasterização	41
$\mathcal{V}$, operador de conversão curva-polígono	52
$\mathcal{W}_\epsilon$, função CW	30
$\mathcal{W}_\rho$, função CW irracional	37
$\ominus$, subtração de Minkowski	24
$\oplus$, soma de Minkowski	24
ρ , ângulo com tangente irracional	37
φ , imersão canônica em $\mathbb{R}^2$	30
$\varphi_\delta(L)$, imersão com translação	30
$\varphi_\mathcal{O}$, imersão canônica da origem	30
$\text{int}(L)$, interior de uma lista L	66
$s(x)$, função sinal	30
$w(\gamma, P)$, número de rotação	28

A

aliasing	118
antialiasing	118

B

bounding box	54, 84, 90, 91
brush	83
predicado de pertinência	84

C

caminho	67, 83
vértices internos	67
coerência	59
Π -coerência	90
maximal	62
quadtrees	61, 87
stroking	86, 87
concatenação	21
conectividade	22
m -conexa	23
região conexa	24
Conversão curva-polígono	52
cross-weight	26

- funções CW 27
- Curvas de Bézier 50
- bounding box 54
- partes direita e esquerda 51
- rasterização 50
- subdivisão 51
- D**
- dilatação 24
- E**
- elemento estruturante 24
- erosão 24
- estrutura métrica 22
- norma geral 22
- extremização 41
- F**
- formas conexas estruturais 22
- funções de rasterização 41
- funções aproximadoras 52
- I**
- imagem 15, 58
- imersão
- canônica 30
- listas 30
- interior 66
- L**
- listas 20
- m*-conexa 23
- concatenação 21
- fechadas 20
- imersão 30
- interior 66
- operador de diferença 21
- reversão 21
- M**
- modelo 14
- N**
- número de rotação 26
- equivalências 31
- interpretação geométrica 28
- paridade par-ímpar 44
- versão analítica 28
- versão geométrica 29
- O**
- objetos gráficos 14
- operador conversão curva-polígono 52
- operador de diferença 21
- operadores de Minkowski 24
- relação entre soma e subtração ... 25
- soma 24
- subtração 24
- P**
- perturbação 35
- polígonos 41, 46
- rasterização 46
- simples 41
- predicado de pertinência 83
- Q**
- quadtrees 61, 87
- R**
- região coerente
- operação de preenchimento 59
- reversão 21
- S**
- scan-conversion 44
- soma de Minkowski
- aplicações em coerência 60

soma de Minkowski

associatividade 25

distributividade sob uniões 25

monotonicidade 25, 84

T

Teorema de Jordan 37

Curvas 37

versão discreta bidimensional 38

Referências Bibliográficas

- [AdoB86] Adobe Systems Incorporated, *PostScript Language Reference Manual*. Addison–Wesley Publishing Company, Reading, 1986.
- [BleSM88] Bleser, T.W., Silbert, J.L., McGee, J.P. Charcoal sketching: returning control to the artist. *ACM Transactions on Graphics*, **7**(1), 76–81, Janeiro 1988.
- [BurZ85] Burde, G., Zieschang, H. *Knots*. Walter de Gruyter, Berlin, 1985.
- [CorP92] Corthout, M.E.A., Pol, E.J.D. *Point Containment and the Pharos Chip*. Tese de Doutorado, Leiden University, the Netherlands, 1992.
- [Ede87] Edelsbruner, H. *Algorithms in Combinatorial Geometry*. Springer–Verlag, Heidelberg, 1987.
- [Fiu89] Fiume, E.L. *The Mathematical Structure of Raster Graphics*. Academic Press, 1989.
- [Fab95] Fabris, A.E. *Robust Antialiasing of Curves*. PhD thesis, University of East Anglia, Norwich, Novembro 1995.
- [FabF97] Fabris, A.E., Forrest, A.R. Anti-aliasing of curves by discrete pre-filtering. *Computer Graphics (SIGGRAPH'97 Proceedings)*, **31**, 317–326, Agosto 1997.
- [FabF97b] Fabris, A.E., Forrest, A.R. High quality rendering of two-dimensional continuous curves. *SIBGRAP'97 Conference Proceedings*, IEEE Computer Society Press, 10–17, Outubro 1997.
- [FabSF97] Fabris, A.E., Silva, L., Forrest, A.R. An efficient filling algorithm for non-simple closed curves using the Point Containment paradigm. *SIBGRAP'97 Conference Proceedings*, IEEE Computer Society Press, 2–9, Outubro 1997.

- [FabSF98] Fabris, A.E., Silva, L., Forrest, A.R. Stroking Discrete Polynomial Bézier Curves via Point Containment Paradigm. Artigo aceito no *SIBGRAPI'98*, Outubro 1998.
- [Fol96] Foley, J.D. et al. *Computer Graphics: Principles and Practice (second edition in C)*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1996.
- [For85] Forrest, A.R. Computational geometry in practice. *Fundamental Algorithms for Computer Graphics*, Ed. R.A.Earnshaw, Springer-Verlag, 707-724, 1985.
- [For88] Forrest, A.R. Geometric computing environments: some tentative thoughts. *Theoretical Foundations of Computer Graphics and CAD*, Springer-Verlag, 185-197, 1988.
- [Fra86] Franklin, W.R. Problems with raster graphics algorithms. *Data Structures for Raster Graphics*, Eds. L.R.A. Kessener, F.J. Peters, M.L.P. van Lierop, Springer-Verlag, 1-7, 1986.
- [Gla95] Glassner, A.S. *Principles of Digital Image Synthesis (First volume)*. Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, California, 1995.
- [GhoM84] Ghosh, P.K., Mudur, S.P. The brush-trajectory approach to figure specification: some algebraic solutions. *ACM Transactions on Graphics*, 3(2), 1-24, Abril 1984.
- [GuiRS83] Guibas, L.J., Ramshaw, L.H., Stolfi, J. A kinetic framework for computational geometry. *Proceedings of 24th IEEE Symposium on the Foundations of Computer Science*, 100-111, 1983.
- [GuiP74] Guillemin, V., Pollack, A. *Differential Topology*. Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1974.
- [HunS79] Hunter, G.M., Steiglitz, K. Operations on images using quadrees. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 145-153, 1979.
- [Kau87] Kauffam, L.H. *On Knots*. Princeton University Press, Princeton, 1987.
- [KlaS91] Klassen, R.V. Drawing antialiased cubic spline curves. *ACM Transactions on Graphics*, 10(1), 92-108, Janeiro 1991.
- [Knu86] Knuth, D.E. *The METAFONT book*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1986.
- [Mas91] Massey, W.S. *A Basic Course in Algebraic Topology*. Springer-Verlag, New York, 1991.

- [New79] Newman, W., Sproull, R. *Principles of Interactive Computer Graphics*, 2ª edição, MacGraw-Hill, New York, 1979.
- [Pal91] Palka, B.P. *An Introduction to Complex Function Theory*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [Per88] Perky, T.S. PostScript prints anything: a case history. *IEEE Spectrum*, 42-46, Maio 1988.
- [PosF89] Posch, K.C., Fellner, W.D. The circle-brush algorithm. *ACM Transactions on Graphics*, 8(1), 1-24, Janeiro 1989.
- [Sam90] H. Samet. *The Design and Analysis of Spatial Data Structures*. Addison-Wesley, 1990.
- [Ser82] Serra, J. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, 1982.
- [Str86] Strassmann, S. Hairy brushes. *Computer Graphics (SIGGRAPH'86 Proceedings)*, **20**, 225-232, Agosto 1986.
- [Tan88] Tang, G.Y. Region filling with the use of the discrete Green Theorem. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, **42**, 297-305, 1988.
- [Whi83] Whitted, T. Anti-aliased line drawing using brush extrusion. *Computer Graphics (SIGGRAPH'83 Proceedings)*, **17**, 151-156, Julho 1983.