**SOBRE FATORES
E EMPACOTAMENTOS
EM GRAFOS**

Estela Maris Rodrigues

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA APLICADA

Área de Concentração: Ciência da Computação
Orientadora: **Profa. Dra. Maria Angela Melo de Campos Gurgel**

SOBRE FATORES
E EMPACOTAMENTOS
EM GRAFOS

Estela Maris Rodrigues

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação apresentada por
Estela Maris Rodrigues, devidamente
corrigida e aprovada pela Comissão
Julgadora.

São Paulo, 24 de fevereiro de 1997.

Comissão Julgadora:

- Profa. Dra. Maria Angela Melo de Campos Gurgel – DCC-IME-USP;
- Prof. Dr. José Coelho de Pina Jr. – DCC-IME-USP;
- Profa. Dra. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo – DCC-IM-UFRJ.

Para meus pais.

Resumo

Uma generalização de emparelhamentos em grafos pode ser obtida com base na idéia de encontrarmos, em um grafo $H = (V(H), A(H))$, um subgrafo G tal que os componentes de G sejam isomorfos a membros de uma família fixa $\mathcal{F}$ de grafos conexos. Ao grafo G chamamos $\mathcal{F}$ -empacotamento de H , e se $V(G) = V(H)$, então G é denominado um $\mathcal{F}$ -fator de H .

Um de nossos objetivos é o estudo da complexidade dos problemas da forma “dado um grafo H , decidir se H admite um $\mathcal{F}$ -fator”. Chamamos este problema de *problema de fatoração definido por $\mathcal{F}$* .

Os problemas de fatoração definidos por famílias unitárias foram os primeiros a serem estudados. Dentre esses, o problema do emparelhamento perfeito é o único, em essência, que não é $\mathcal{NP}$ -completo. Dentre os problemas definidos por famílias não unitárias, são conhecidas algumas classes de problemas polinomiais. Exemplos são os problemas de fatoração por famílias de cliques que contenham o grafo K_2 , e alguns problemas definidos por famílias de estrelas. Todos esses problemas são considerados neste trabalho. Também apresentamos exemplos de problemas $\mathcal{NP}$ -completos definidos por famílias não unitárias de grafos, por exemplo o problema do $\{K_3, K_4, \dots\}$ -fator e alguns problemas definidos por famílias de grafos bipartidos completos.

Atualmente, a maior questão acerca dos problemas de fatoração é a *conjectura de Lovász e Poljak*, que propõe uma caracterização das famílias de grafos conexos que definem problemas de fatoração polinomiais em termos de matróides. Essa conjectura foi respondida de forma afirmativa para famílias da forma $\{K_2, F\}$ em que F é um grafo conexo. O caso geral permanece em aberto desde que foi proposto em 1988.

Abstract

A generalization of matchings can be obtained from the idea of finding in a graph $H = (V(H), A(H))$, a subgraph G whose components are isomorphic to graphs from a given connected graph family $\mathcal{F}$. We call G an $\mathcal{F}$ -*packing* of H , and if $V(G) = V(H)$, then G is said to be an $\mathcal{F}$ -*factor* of H .

Our main goal is the study of the complexity of problems defined as:

Instance: A graph H .

Question: Does H admit an $\mathcal{F}$ -factor?

This is the *factor problem defined by $\mathcal{F}$* .

Factor problems defined by unitary families were the first to be studied. For these, only the perfect matching problem and the K_1 -factor problem are not $\mathcal{NP}$ -complete. Among problems defined by several element families we know some classes of problems which can be solved by polynomial time bounded algorithms, for instance factor problems defined by clique families which contain K_2 , and some star family factor problems. All these are surveyed in this work. We also present some $\mathcal{NP}$ -complete problems defined by non-unitary families, like the $\{K_3, K_4, K_5, \dots\}$ -factor problem and some problems defined by complete bipartite graph families.

Nowadays the main question on factor problems is the Loebbl-Poljak conjecture, which states a characterization of graph families which define polynomial time solvable factor problems in terms of matroids. For two-element connected graph families which contain K_2 the conjecture is known to be true. The general statement remains unsolved since it was proposed in 1988.

Sumário

Apresentação	iii
Agradecimentos	v
1 Princípios básicos	1
1.1 Preliminares	1
1.2 Grafos	2
1.3 Tópicos sobre emparelhamentos	5
1.4 Matróides	11
1.5 Problemas de fatoração	12
2 Fatoração uniforme	16
2.1 O problema do emparelhamento multidimensional	16
2.2 Módulos e coerência	17
2.3 Prova da $\mathcal{NP}$ -completude	21
3 Fatoração por arestas e grafos hipoemparelháveis	24
3.1 Empacotamentos por arestas e triângulos	25
3.2 Resultados clássicos para $\{K_2, K_3\}$ -fatoração	32
3.3 A propriedade de Balas-Uhry	45
3.4 O caso geral	48

3.4.1	Irredutibilidade em famílias de grafos	48
3.4.2	Prova da polinomialidade	49
3.4.3	Exemplos	56
3.5	Resultados negativos	57
3.5.1	Módulos e coerência para famílias de grafos	57
3.5.2	Uma condição suficiente para a $\mathcal{NP}$ -completude	59
3.5.3	Exemplos	65
4	Fatoração por famílias de grafos bipartidos completos	67
4.1	Famílias seqüenciais de estrelas	67
4.2	Famílias não seqüenciais de estrelas	80
4.3	Demais famílias de grafos bipartidos completos	83
4.3.1	Se a subfamília de estrelas não é seqüencial	84
4.3.2	Se a subfamília de estrelas é seqüencial infinita	84
4.3.3	Se a subfamília de estrelas é seqüencial finita	84
4.3.4	Famílias da forma $\{K_{2,2}, K_{t,t}\}$, $t \geq 3$, t ímpar	99
5	Uma conexão com matróides	101
5.1	Famílias boas de grafos	102
5.1.1	Definição	103
5.1.2	Grafos críticos e a propriedade de Balas-Uhry	105
5.1.3	Um algoritmo polinomial para a fatoração por famílias boas	112
5.1.4	A propriedade matroidal	116
5.2	Famílias da forma $\{K_2, F\}$, com F conexo	119
5.2.1	Caracterização das famílias matroidais	120
5.2.2	Complexidade dos problemas de fatoração	125

Apresentação

Emparelhamentos estão com certeza entre os entes mais bem estudados em teoria dos grafos. De fato, a pesquisa sobre emparelhamentos remonta ao trabalho de König na década de 30, e à própria origem da teoria dos grafos como uma disciplina à parte de outros ramos da matemática discreta. Resultados como os de König, Berge e Tutte, e técnicas empregando a noção de caminho alternante, caracterizam o que chamamos de teoria clássica dos emparelhamentos, bem conhecida dos pesquisadores na área [3, 12, 24]. Mais recente, o trabalho de Edmonds na década de 60 mostrando a polinomialidade do problema do emparelhamento perfeito [8] e relacionando emparelhamentos e matróides transversais [10], também tem lugar entre os trabalhos de destaque sobre emparelhamentos.

Tal riqueza de conhecimentos tem levado diversos pesquisadores a indagar se não seria possível encontrar generalizações de emparelhamentos que preservassem estes resultados. A resposta — em termos da diversidade de problemas apresentados — é largamente afirmativa.

Este trabalho trata de uma particular generalização do problema do emparelhamento perfeito — ou seja, dos problemas da forma “dado um grafo H , encontrar um subgrafo de H cujos componentes sejam isomorfos a grafos de uma família $\mathcal{F}$ fixa”. Chamamos tais problemas de *problemas de fatoração*.

Problemas de fatoração, conforme definimos acima, têm sido estudados desde o final da década de 70. Em 1978, Hell e Kirkpatrick [13] apresentaram uma caracterização da complexidade do problema para famílias $\mathcal{F}$ unitárias, mostrando que em essência o problema do emparelhamento perfeito é o único dentre tais problemas que não é $\mathcal{NP}$ -completo. Posteriormente, com base na técnica desenvolvida nesse trabalho, diversos problemas de fatoração foram caracterizados como sendo $\mathcal{NP}$ -completos [14, 15, 16]. Ao mesmo tempo, outros problemas foram caracterizados como polinomialmente solúveis, como por exemplo os problemas de fatoração por famílias sequenciais de estrelas [16] e os problemas de fatoração por famílias de grafos completos contendo o grafo K_2 [15]. Do estudo desses problemas surgiu uma fascinante generalização da teoria clássica dos emparelhamentos e de suas técnicas.

Outra interessante conexão com a teoria tradicional dos emparelhamentos desenvolveu-se de maneira paralela ao trabalho de Hell e Kirkpatrick. Ainda no final da década

de 70, Uhry [28] (ver também Balas [1]) e Mühlbacher [25] obtiveram de forma independente um resultado que relaciona emparelhamentos máximos inteiros e emparelhamentos fracionários possuindo um número mínimo de circuitos ímpares. Esse resultado, hoje em dia conhecido na literatura com o nome de *propriedade de Balas-Uhry*, estimulou o estudo das propriedades dos emparelhamentos fracionários na primeira metade da década de 80 [6, 7, 26, 27]. Ao mesmo tempo, foram apresentadas generalizações desses resultados relativas ao problema de fatoração por K_2 mais uma família finita de grafos hipoemparelháveis [5, 4]. Esses últimos resultados reproduzem a parte positiva do trabalho de Hell e Kirkpatrick em [15].

Na segunda metade da década de 80 a pesquisa sobre $\mathcal{F}$ -fatores tomou um novo impulso, quando se passou a aplicar a teoria dos matróides ao estudo dos problemas de fatoração. Em 1988 Loeb e Poljak [21] apresentaram uma nova classe de famílias de grafos — as *famílias matroidais* — que inclui todas as famílias para as quais se sabia na época que o respectivo problema de fatoração é polinomial. Usando essa nova classe de famílias, Loeb e Poljak caracterizaram a complexidade dos problemas de $\{K_2, F\}$ -fatoração [23] (F conexo) e apresentaram uma nova subclasse das famílias matroidais para os quais o problema de fatoração é polinomial: as *famílias boas* [22, 23]. Baseados nesses resultados, Loeb e Poljak conjecturaram que um problema de fatoração definido por uma família finita de grafos é polinomial se e somente se a família que o define é matroidal [23]. Sabe-se que para problemas de fatoração por $\{K_2, F\}$, F conexo, essa conjectura é válida [21, 23], mas o caso geral permanece em aberto desde 1988.

No primeiro capítulo, expomos os conceitos sobre grafos, emparelhamentos e matróides que serão usados neste trabalho. Também definimos precisamente empacotamentos, fatores e problemas de fatoração, apresentando a respectiva nomenclatura.

O segundo capítulo apresenta os problemas de fatoração definidos por famílias unitárias. A técnica empregada nas provas de $\mathcal{NP}$ -completude é fundamental para as demais provas deste tipo presentes na dissertação.

O Capítulo 3 desenvolve os resultados sobre fatoração por arestas e grafos hipoemparelháveis de modo diverso, tanto de Hell e Kirkpatrick [15] quanto de Cornuejols, Hartvigsen e Pulleyblank [5, 4]. Em [5] foi proposto um algoritmo polinomial, que resolve problemas dessa classe. A observação chave para nossa apresentação é que, sob certas condições, o número de componentes não isomorfos a K_2 em um empacotamento é estritamente crescente durante a execução deste algoritmo. Desenvolver os resultados em [15, 5, 4] a partir desse fato nos permitiu uma compreensão profunda desta classe de problemas. O Capítulo 4 trata de problemas de fatoração por grafos bipartidos completos seguindo a mesma abordagem.

O Capítulo 5 cobre o trabalho de Loeb e Poljak. Para concluir os resultados, necessitamos apresentar uma extensão da propriedade de Balas-Uhry que é satisfeita pelas famílias boas de grafos, já que estas famílias em geral *não* possuem a propriedade original. Este resultado nos permitiu justificar, de maneira completa, que os problemas de fatoração por famílias boas podem ser resolvidos em tempo polinomial.

Agradecimentos

À Maria Angela, minha orientadora, pelas pequenas gentilezas e grandes alegrias que me proporcionou nestes dois anos e meio;

Ao Carlinhos, Coelho, Yoshi, José Augusto, Carlos Humes e à Yoshiko, pelo ombro, pelas referências e dicas a respeito deste trabalho, e também pelas piadinhas, algumas até que com certa graça... :)

À Nami pela amizade, e ao Setzer, pela compreensão;

Aos colegas Jorge, Paulo, “Coca”, Flávio, Orlando, Fabiana e Milkes, agradeço por terem tido uma paciência infinita comigo “naquelas horas”;

À Celina e ao Coelho (de novo) por terem composto uma banca examinadora tão instigante;

Finalmente, ao CNPq, pelo auxílio que me concedeu, fundamental para que este trabalho viesse a ser concretizado.

Capítulo 1

Princípios básicos

Neste capítulo introduzimos os pré-requisitos mínimos e a notação necessária para a leitura desta dissertação. Esse ferramental pertence em essência a dois ramos da combinatória: a teoria dos grafos e a teoria dos matróides.

A primeira seção exibe algumas observações gerais sobre a notação que será usada neste trabalho.

A Seção 1.2 trata de conceitos básicos sobre grafos, que empregamos ao longo de todo o trabalho. Na Seção 1.3 discorremos sobre emparelhamentos em grafos. Citamos ali diversos resultados clássicos, que terão largo uso em particular nos Capítulos 3 e 4.

A Seção 1.4 apresenta definições sobre matróides e mostra alguns resultados a respeito de problemas de partição em matróides. Essa teoria é empregada no Capítulo 5, que apresenta alguns aspectos da relação entre empacotamentos e matróides.

A classe dos problemas de fatoração é definida na Seção 1.5.

Conceitos específicos, cujo uso na dissertação apresentar caráter local, serão dados ao longo do trabalho, à medida que forem sendo necessários.

1.1 Preliminares

Vamos, antes de partir para as definições, listar algumas notas gerais a respeito da simbologia que vamos empregar.

- Usaremos a notação 2^S para indicar o conjunto dos subconjuntos de um conjunto finito S .

Figura 1.1: Exemplos de “laços” e “arestas múltiplas”.

- Para a relação de igualdade, vamos empregar dois símbolos: o usual $=$ e um adicional, $:=$, este último com o sentido de atribuição, quando estivermos definindo uma notação ou um ente.
- Vamos nos utilizar dos termos **classe**, **coleção** e **família** com o mesmo significado do usual *conjunto*.
- Eventualmente, nas expressões mais longas, vamos substituir os símbolos $\cup$ e $\setminus$ (união e diferença usuais de conjuntos) por $+$ e $-$, respectivamente.
- O símbolo usado para denotar a diferença simétrica usual entre conjuntos será o $\oplus$.

1.2 Grafos

Os conceitos e a simbologia apresentados a seguir são em grande parte herdados de textos clássicos sobre grafos, como por exemplo Bondy e Murty ([3]) e Harary ([12]). Entretanto, ao longo do trabalho, permitimos com frequência que o contexto complete o significado da notação.

Um **grafo** H é um par ordenado $(V(H), A(H))$, em que $V(H)$ é um conjunto finito (possivelmente vazio) de elementos que chamamos de **vértices** e $A(H)$ é um conjunto de pares não ordenados $\{\{u, v\} : u, v \in V(H)\}$, aos quais chamaremos **arestas**.

É freqüente encontrarmos na literatura introdutória sobre grafos as noções de “arestas múltiplas” e “laços”, exemplificados na Figura 1.1. Destacamos que, uma vez que conjuntos não admitem elementos ocorrendo mais de uma vez, a definição que adotamos para grafo exclui a ocorrência tanto de laços quanto de arestas múltiplas.

A **ordem** de um grafo é o número de vértices do mesmo. Em particular, grafos de ordem 1 são chamados **triviais**.

Se u, v são vértices de um grafo H , e $a := \{u, v\}$ é uma aresta de H , então:

- os vértices u e v são chamados **extremos** da aresta a ;
- a aresta a **incide** em u e v ;
- os vértices u e v são **adjacentes** em H ;
- indicamos a aresta a também pelas notações uv e vu .

Duas arestas com um extremo em comum são ditas **adjacentes**.

Se u é um vértice de um grafo H , então o conjunto dos vértices adjacentes a u em H é indicado pela notação $\text{Adj}_H(u)$. Já o conjunto das arestas de H incidentes em u é denotado por $\delta_H(u)$. O número $|\delta_H(u)|$ é o **grau** do vértice u no grafo H , e é indicado por $d_H(u)$. Vértices de grau zero em H são ditos **isolados** em H .

Seja S um conjunto não vazio de vértices de H . Os conjuntos

$$\bigcup_{u \in S} \text{Adj}_H(u),$$

e

$$\{uv \in A(H) : u \in S, v \notin S\}$$

são expressos respectivamente por $\text{Adj}_H(S)$ e por $\delta_H(S)$. Observe que, de acordo com a nossa definição, pode ocorrer $\text{Adj}_H(S) \cap S \neq \emptyset$; não fazemos objeção a isto.

Se H e H' são dois grafos então dizemos que H' é um **subgrafo** de H se $V(H') \subseteq V(H)$ e $A(H') \subseteq A(H)$. Um subgrafo de H diferente de H é um subgrafo **próprio** de H . Se S é um conjunto de vértices de H , então o subgrafo H' de H tal que $V(H') = S$ e $A(H') = \{uv \in A(H) : u \in S, v \in S\}$ é indicado por $H[S]$. Esse grafo é chamado o subgrafo de H **induzido** por S . De maneira análoga, vamos mencionar diversas vezes subgrafos induzidos por conjuntos de arestas. Assim, se T é um conjunto de arestas de H , então o subgrafo H'' de H **induzido** por T , indicado por $H[T]$, é o subgrafo minimal de H tal que $A(H'') = T$.

Um subgrafo **induzido** de H ou é um subgrafo da forma $H[S]$ para algum $S \subseteq V(H)$, ou um subgrafo da forma $H[T]$ para algum $T \subseteq A(H)$.

Dois grafos, H e H' , são **isomorfos** se existe um mapeamento um-a-um entre $V(H)$ e $V(H')$ que preserva a adjacência entre os vértices. Se dois grafos, H e H' , são isomorfos, então escrevemos $H' \cong H$.

Se H é um grafo, v é um vértice de H , S é um conjunto de vértices de H e T é um conjunto de arestas de H , então:

- se $v \in S$ dizemos que S **cobre** v ;
- se v é extremo de alguma aresta pertencente a T , então T **cobre** v ;
- se H' é um grafo tal que $V(H')$ cobre v , então H' **cobre** v ;
- se H' cobre todos os elementos de S , então H' **cobre** S .

Em um grafo H , uma seqüência de vértices da forma

$$(v_0, v_1, v_2, \dots, v_p), \quad p \geq 0, p \in \mathbb{Z}$$

é um **caminho** em H se $v_i v_{i+1} \in A(H)$, $0 \leq i < p$, e se $v_i \neq v_j$, $0 \leq i < j \leq p$. Nesse caso o vértice v_0 é o vértice **inicial** e v_p é o vértice **final** do caminho. Também chamamos v_0 e v_p de **extremos**. O inteiro p é o **comprimento** do caminho. Um caminho pode ser **par** ou **ímpar**, dependendo da paridade de p .

Se, em uma seqüência $(v_0, \dots, v_p)$ de vértices de H , a subsequência $(v_0, \dots, v_{p-1})$ é um caminho de comprimento positivo, o vértice v_p é adjacente a v_{p-1} e $v_p = v_0$, então $(v_0, \dots, v_{p-1})$ é um **circuito** em H . O número p é o **comprimento** do circuito. Um circuito é **par** ou **ímpar** dependendo da paridade do comprimento.

Em H , podemos definir uma relação de equivalência entre os vértices através da existência de caminhos entre eles. Os subgrafos de H induzidos pelas classes de equivalência dessa relação são os **componentes** de H . Se H tem um único componente, então H é um grafo **conexo**, caso contrário H é um grafo **não conexo**.

A **distância** entre dois vértices de um grafo H é o comprimento de um caminho de comprimento mínimo entre os vértices. Se os dois vértices não pertencem a um mesmo componente de H , então por convenção a distância entre eles é $+\infty$.

Um grafo H é uma **floresta** se H não possui circuitos, e uma **árvore** se for uma floresta conexa. Uma **floresta** de H é um subgrafo de H que é uma floresta.

Um grafo H é **completo** se todo par não ordenado de vértices de H é uma aresta de H . Um subgrafo H' de H é um **clique** de H se H' é um subgrafo completo de H . Um conjunto S de vértices de H é **independente** ou **estável** em H se os vértices de S são dois a dois não adjacentes em H .

A menos de isomorfismos, existe apenas um grafo completo com n vértices para cada inteiro positivo n . Esse grafo será simbolizado pela notação K_n .

Se um grafo H pode ter o seu conjunto de vértices particionado em dois subconjuntos disjuntos não vazios R e S , tais que $\delta_H(R) = \delta_H(S) = A(H)$, então H é um grafo **bipartido**, e R e S são as **partes** de H . Se todo par não ordenado $\{u, v\}$ de vértices de H com $u \in R$ e $v \in S$ é uma aresta de H , então H é um **grafo bipartido completo**.

A menos de isomorfismos, existe apenas um grafo bipartido completo com partes de cardinalidades m e n respectivamente, para cada par de inteiros positivos m, n . A esse

grafo vamos denotar $K_{m,n}$. Em particular, o grafo $K_{1,i}$, $i \geq 1$, será denotado por S_i . Grafos da forma S_i para algum $i \geq 1$ serão chamados **estrelas**.

Se H é um grafo e v é um vértice de H , então a operação de **remoção** do vértice v do grafo H tem como resultado o grafo $H[V(H) \setminus \{v\}]$. Esse grafo é expresso pela notação $H - v$. A remoção de um conjunto S de vértices de H resulta no grafo $H[V(H) \setminus S]$, indicado pela notação $H - S$.

Um grafo é **k -conexo** ($k \geq 1$) se a remoção de qualquer conjunto S de vértices de H com $|S| < k$ resulta em um grafo conexo não trivial. Por convenção, grafos não conexos ou triviais são 0-conexos. Um vértice de H cuja remoção tem como resultado um grafo com mais componentes do que H é um **vértice de corte** de H . Um **bloco** de H é um subgrafo 2-conexo maximal de H .

Se H é um grafo e a é uma aresta de H , então a operação de **remoção** da aresta a do grafo H resulta no grafo $(V(H), A(H) \setminus \{a\})$, o qual denotaremos por $H - a$. A **remoção** de um conjunto T de arestas de H tem como resultado o grafo $(V(H), A(H) \setminus T)$, indicado pela notação $H - T$.

Todas as operações de remoção que definimos acima também serão chamadas de **eliminações e deleções**.

Se S é um conjunto de vértices não vazio de H , então a operação de **contração** do conjunto S em H origina o grafo H' definido por:

$$\begin{aligned} V(H') &:= V(H - S) \cup \{w\}, & \text{onde } w \notin V(H); \\ A(H') &:= A(H - S) \cup \{uw : u \in V(H) \setminus S, uv \in A(H) \text{ para algum } v \in S\}. \end{aligned}$$

Esse grafo é expresso pela notação H/S .

Por convenção, o grafo $H/\emptyset$ é o próprio H .

Textos introdutórios (por exemplo, Bondy e Murty [3]) sobre teoria dos grafos admitem que grafos resultantes de contrações possuam arestas múltiplas e laços. A definição acima, no entanto, exclui essa possibilidade. A Figura 1.2 apresenta um exemplo de contração, que esclarece este ponto.

1.3 Tópicos sobre emparelhamentos

Dada a importância que terá a teoria dos emparelhamentos neste trabalho, apresentamos as preliminares a respeito em uma seção à parte da anterior, que tratou de teoria dos grafos em geral. Além das referências [3] e [12] já citadas, sugerimos ainda Lovász e Plummer ([24]).

Figura 1.2: Um exemplo de contração.

Um **emparelhamento** em um grafo H é um conjunto E de arestas de H duas a duas não adjacentes. Se em cada vértice de H incide uma aresta de E , então E é um **emparelhamento perfeito** em H , e H é um grafo **perfeitamente emparelhável**. Um vértice de H que não seja coberto por E é um vértice **livre** de E . Se dois vértices u e v de H são extremos de uma mesma aresta de E , então E **emparelha** u e v .

O **tamanho** de um emparelhamento é a cardinalidade do mesmo. Se H é um grafo, então o tamanho de um emparelhamento máximo em H é expresso pela notação $\mathbf{emp}(H)$ e o número de vértices de H que não são cobertos por um emparelhamento máximo é indicado por $\mathbf{def}(H)$. A esse último número, chamamos **deficiência** do grafo H .

A teoria dos emparelhamentos em grafos versa em grande parte sobre **emparelhamentos máximos**, ou seja, sobre emparelhamentos que tenham tamanho máximo dentre os emparelhamentos de um dado grafo. Adiante vamos citar uma série de resultados conhecidos acerca desses emparelhamentos e de sua estrutura.

O primeiro desses resultados é uma condição necessária e suficiente para que um emparelhamento em um grafo seja máximo. Essa condição é declarada em termos das idéias de caminho alternante e de caminho aumentador.

Se H é um grafo e E é um emparelhamento de H , então um caminho

$$C := (c_0, c_1, \dots, c_p)$$

é um **caminho E -alternante** se, para todo i , $0 \leq i < p-1$ temos $c_i c_{i+1} \in E$ se e somente se $c_{i+1} c_{i+2} \notin E$. Se, além disso, C tem comprimento $p > 0$ e os vértices c_0 e c_p não são cobertos por E , então o subgrafo C' de H induzido por $\{c_0 c_1, c_1 c_2, \dots, c_{p-1} c_p\}$ é chamado **caminho aumentador de E em H** , ou ainda **caminho E -aumentador em H** . Eventualmente, vamos abusar da nomenclatura, e dizer que C' é o caminho aumentador induzido por C .

Com isso, enunciamos o resultado em questão.

Teorema 1.3.1 (Condição de Berge, 1957) *Seja H um grafo e E um emparelhamento em H . Então E é um emparelhamento máximo se e somente se não existem caminhos aumentadores de E em H .*

A demonstração do Teorema 1.3.1 ilustra uma técnica muito freqüente no trabalho com emparelhamentos, que é o uso da noção de diferença simétrica entre conjuntos.

Seja H um grafo, E um emparelhamento em H e $C := (c_0, c_1, \dots, c_p)$ um caminho E -alternante que induz um caminho aumentador C' de E em H . O emparelhamento $E \Delta C'$ obtido através da **aumentação** de E por C' é o emparelhamento $E \oplus \{c_0c_1, c_1c_2, \dots, c_{p-1}c_p\}$. Observe o uso do símbolo Δ como operador de aumentação e do símbolo $\oplus$ como operador de diferença simétrica¹.

O segundo resultado mostra uma condição necessária e suficiente para que um grafo seja perfeitamente emparelhável.

Teorema 1.3.2 (Condição de Tutte, 1947) *Um grafo H admite um emparelhamento perfeito se e somente se temos $c_I(H - S) \leq |S|$ para todo conjunto de vértices S , onde $c_I(H - S)$ é o número de componentes do grafo $H - S$ com número ímpar de vértices.*

Para enunciarmos os próximos resultados necessitamos de mais algumas definições.

Se H é um grafo bipartido com partes R e S , então o S -excedente de H , também chamado **excedente de H visto de S** , é o número

$$\min\{|Adj_H(A)| - |A| : A \subseteq S, A \neq \emptyset\}.$$

Simbolizamos esse número pela notação $excs(H)$.

Um grafo H é **hipoemparelhável** se não admite um emparelhamento perfeito e se para todo $v \in V(H)$, o grafo $H - v$ admite um emparelhamento perfeito. Por convenção, o grafo K_1 é hipoemparelhável.

Com isso, apresentamos os demais resultados sobre emparelhamentos que nos interessam. A Figura 1.3 traz alguns esquemas úteis.

Teorema 1.3.3 (Fórmula de Berge, 1958) *Seja H um grafo. Então*

$$def(H) = \max\{c_I(H - S) - |S| : S \subseteq V(H)\}.$$

¹Para emparelhamentos, aumentações correspondem a operações de diferença simétrica entre conjuntos de arestas. Entretanto, para alguns problemas de fatoração, ainda que valham resultados análogos ao Teorema 1.3.1, isto não é verdade. No Capítulo 3 veremos exemplos de problemas assim.

Teorema 1.3.4 (Teorema da Estrutura de Gallai-Edmonds, 1965)

Seja H um grafo. Sejam D , C e A os subconjuntos de $V(H)$ definidos como segue:

- D é o conjunto dos vértices de H que não são cobertos por algum emparelhamento máximo de H ;
- A é o conjunto dos vértices em $V(H) \setminus D$ que são adjacentes a algum vértice de D ;
- C é o conjunto $V(H) \setminus (A \cup D)$.

Se A , C e D são como na definição acima, então:

- i) os componentes de $H[D]$ são hipoemparelháveis;
- ii) o grafo $H[C]$ tem um emparelhamento perfeito;
- iii) o grafo bipartido $\bar{H}$ obtido de H pela deleção de C e das arestas de $H[A]$ e pela contração dos conjuntos de vértices dos componentes de $H[D]$, possui excedente positivo visto de A ;
- iv) E é um emparelhamento máximo em H se e somente se
 - E induz em cada componente $\tilde{D}$ de $H[D]$ um emparelhamento cobrindo $|V(\tilde{D})| - 1$ vértices de $\tilde{D}$;
 - E induz em cada componente de $H[C]$ um emparelhamento perfeito;
 - cada vértice de A está emparelhado por E com um vértice em um componente distinto de $H[D]$.

Os conjuntos D , C e A definidos pelo teorema acima compõem uma partição especial do conjunto de vértices do grafo H . Para cada grafo H , a partição (D, A, C) do conjunto de vértices de H vamos denominar **decomposição de Gallai-Edmonds** de H . A Figura 1.3 mostra um exemplo e um esquema da decomposição de Gallai-Edmonds.

A decomposição de Gallai-Edmonds apresenta interesse, na medida em que nos dá diversas informações sobre os emparelhamentos de um grafo. De fato, o Teorema 1.3.4 será muitas e muitas vezes invocado neste trabalho.

É pertinente indagarmos se, e como, podemos construir a decomposição de Gallai-Edmonds. Em 1965, Edmonds respondeu a essa questão apresentando um algoritmo polinomial para construir emparelhamentos máximos, que também constrói a decomposição de Gallai-Edmonds do grafo dado como entrada. Este algoritmo e algumas das idéias nele empregadas, como por exemplo florestas alternantes e contração de circuitos ímpares, terão largo emprego no Capítulo 3. Por esse motivo, fazemos aqui uma breve descrição do algoritmo e definimos alguns conceitos de que vamos fazer uso oportunamente. Mais detalhes sobre o algoritmo, justificativas do funcionamento e da polinomialidade

Figura 1.3: A figura mostra um grafo (em cima) desenhado de modo a ressaltar a decomposição de Gallai-Edmonds. No centro temos um esquema da decomposição, com os conjuntos de vértices D , A e C destacados. Embaixo, mostramos o grafo $\bar{H}$.

do mesmo, não damos aqui; entretanto, [24] discorre sobre estes assuntos de maneira profunda.

O algoritmo recebe como entradas um grafo H e um emparelhamento E em H . Se E é um emparelhamento perfeito em H , então o algoritmo pára devolvendo E . Caso contrário, considere R o conjunto dos vértices de H que são livres de E . Construa uma floresta F em H tal que

- cada árvore de F cubra exatamente um vértice de R , e
- para cada vértice v de H coberto por uma árvore F' de F , o caminho em F' com extremos em v e no único vértice de R coberto por F' , é um caminho E -alternante.

Vamos chamar uma tal floresta de **E -alternante**, e seus componentes de **árvores E -alternantes**.

Vamos denominar os vértices de F que têm distância par a R de **externos**, e de **internos** aqueles que têm distância ímpar. Repare que vértices internos sempre têm grau 2 em F , a menos que E não seja um emparelhamento máximo. Os vértices de R são considerados externos, e eventualmente são chamados de **raízes**.

Se considerarmos como são os vértices adjacentes a vértices externos de F , temos quatro possibilidades.

Caso dois vértices externos em árvores diferentes sejam adjacentes, obtemos uma configuração aumentadora C de E em H . Assim, recomeçamos tudo com $E \triangle C$ no lugar de E .

Se dois vértices externos x e y em uma mesma árvore F' forem adjacentes, então seja C o circuito formado pela aresta xy mais um caminho de x a y em F . Recomeçamos tudo com $H/V(C)$ em lugar de H e $E \setminus A(C)$ em lugar de E .

Se um vértice externo x é adjacente a um vértice y de H não coberto por F , então F pode ser substituída por uma floresta E -alternante que cubra mais vértices de H .

Finalmente, se todo vértice externo de F é adjacente apenas a vértices internos, então E é um emparelhamento máximo em H . Neste caso, o algoritmo pára devolvendo E .

Vamos nos referir a este algoritmo no texto como o **Algoritmo de Edmonds**. Decidimos utilizar este nome, ainda que não seja este o único algoritmo de autoria de Edmonds que empregaremos, dada a quantidade de vezes que o mesmo será invocado.

1.4 Matróides

Como referência para esta seção, empregamos Welsh ([30]) para a parte das definições, e Edmonds ([9]) e Edmonds e Fulkerson ([10]) para partição em matróides. A respeito desse tópico, observamos que seu uso neste trabalho restringe-se à justificativa de certos aspectos algorítmicos dos problemas de fatoração que veremos no Capítulo 5. Assim, é dispensável a leitura desta seção para aqueles que, num primeiro momento, não tenham interesse específico nesse assunto.

A seguinte definição de matróide será usada nas demonstrações do Capítulo 5.

Um **matróide** M é um par ordenado $(S, \mathcal{I})$, em que S é um conjunto finito e $\mathcal{I}$ é uma coleção de subconjuntos de S (chamados conjuntos **independentes** em M) que satisfaz o seguinte grupo de axiomas:

- (1) $\emptyset \in \mathcal{I}$.
- (2) Se $X \in \mathcal{I}$ e $Y \subseteq X$, então $Y \in \mathcal{I}$.
- (3) Se $T \subseteq S$ então todos os conjuntos independentes maximais contidos em T têm a mesma cardinalidade.

Dado um matróide $M := (S, \mathcal{I})$, dizemos que uma função $r_M: 2^S \rightarrow \mathbb{Z}$ é a função **posto** de M se

$$r_M(T) = \max\{|X|: X \subseteq T, X \in \mathcal{I}\}, \quad \text{para todo } T \subseteq S.$$

Estamos interessados no seguinte problema:

Dado um conjunto finito S , um inteiro positivo k e uma coleção de k matróides M_i , $1 \leq i \leq k$ sobre S , encontrar uma partição do conjunto S em k conjuntos, cada um dos quais independente em cada um dos k matróides.

A esse problema denomina-se **problema da partição em matróides**.

Edmonds propôs em 1968 um algoritmo para este problema, o qual executa um número polinomial de testes do tipo “determinar se o conjunto $I \cup \{e\}$ é independente no matróide M , dado que $e \in S$ e I é independente em M ”. Desse modo, o problema de partição é polinomial para famílias de matróides nos quais o reconhecimento de conjuntos independentes também o é.

Dispomos ainda, de uma condição necessária e suficiente para a existência de uma partição, dada pelo resultado que segue.

Teorema 1.4.1 (Edmonds, 1968) *Seja $\{M_i\}_{i=1}^k$ uma família indexada de matróides sobre um dado conjunto finito S , com $M_i = (S, \mathcal{I}_i)$. Seja r_i a função posto do matróide M_i . Então existe uma partição de S , $\{I_i\}_{i=1}^k$, com $I_i \in \mathcal{I}_i$ para $1 \leq i \leq k$, se e somente se $|T| \leq \sum_i r_i(T)$, para todo $T \subseteq S$.*

Considere uma família indexada de matróides $\{M_i\}_{i=1}^k$ sobre S , com $M_i = (S, \mathcal{I}_i)$. Suponhamos que $\mathcal{I}_k$ é a família dos subconjuntos de S com cardinalidade no máximo d para algum $d \geq 0$ fixo. Observando que S pode ser particionado em uma família de conjuntos onde cada conjunto é independente em um dos matróides M_i se e somente se pelo menos $|S| - d$ elementos de S podem ser particionados entre conjuntos independentes de M_i , $1 \leq i < k$, e usando o teorema acima, temos o resultado que nos interessa.

Teorema 1.4.2 (Edmonds, 1968) *Seja $\{M_i\}_{i=1}^k$ uma família indexada de matróides sobre um conjunto finito S , com $M_i = (S, \mathcal{I}_i)$. Seja r_i a função posto do matróide M_i . Então ao menos $|S| - d$ elementos de S podem ser particionados entre k conjuntos independentes I_i , com $I_i \in \mathcal{I}_i$, $1 \leq i \leq k$, se e somente se $|T| \leq d + \sum_i r_i(T)$ para todo $T \subseteq S$.*

1.5 Problemas de fatoração

O conceito de emparelhamento em grafos foi apresentado na Seção 1.3, junto com uma amostra do que, daqui por diante, passaremos a chamar de teoria clássica dos emparelhamentos.

Um dos propósitos deste trabalho é apresentar uma extensão de emparelhamentos que preserve os resultados da Seção 1.3. Um dentre vários caminhos tentados para se atingir este objetivo emprega a seguinte idéia.

Um emparelhamento em um grafo H pode ser interpretado como um conjunto de subgrafos de H disjuntos nos vértices e isomorfos a K_2 . Com a troca de K_2 por um grafo F qualquer, considerando-se todas as possíveis escolhas de F , obtemos uma nova família de entes que contém os emparelhamentos.

Deste modo, definimos **F -empacotamento** de um grafo H como sendo um conjunto G de subgrafos de H , isomorfos a F e dois a dois disjuntos nos vértices. Um F -empacotamento G cuja união dos conjuntos de vértices dos elementos cubra $V(H)$ é um **F -fator** de H . Se H admite um F -fator, então dizemos que H é um grafo **F -fatorável**. Vértices de H que não são cobertos por elementos de G são chamados **livres** de G .

O **tamanho** de um F -empacotamento de um grafo H é o número de vértices de H que os elementos do mesmo cobrem. O tamanho de um F -empacotamento máximo em

H é indicado pelo símbolo $\text{emp}_F(H)$. A **deficiência** de H , denotada por $\text{def}_F(H)$, é o número de vértices de H que são livres de um F -empacotamento máximo de H .²

Chamamos a atenção para a diferença entre os tamanhos de empacotamentos e emparelhamentos: um K_2 -empacotamento e um emparelhamento em um mesmo grafo, cobrindo os mesmos vértices, têm tamanhos diferentes, de acordo com as respectivas definições.

Estamos, naturalmente, interessados em como encontrar F -empacotamentos que cubram um número máximo de vértices dentre todos os F -empacotamentos de um dado grafo — ou seja, em construir F -empacotamentos **máximos**. Assim, vamos estudar a complexidade de diversos problemas da forma:

Instância: Um grafo H .

Questão: O grafo H admite um F -fator?

Daqui por diante, vamos nos referir a esse problema por uma série de nomes: **problema do F -fator**, **problema de fatoração (definido) por F** , ou ainda através da notação $\text{FATOR}(F)$. Em virtude de todos os membros de um F -empacotamento serem isomorfos a um único grafo, chamamos os problemas na forma acima de **problemas de fatoração uniforme**.

Se levarmos adiante a sugestão inicial para obtermos generalizações satisfatórias da teoria clássica dos emparelhamentos — qual seja, permitir a cobertura de grafos por outros subgrafos que não apenas o K_2 — podemos admitir em lugar de K_2 qualquer grafo que pertença a uma família fixa $\mathcal{F}$ de grafos. Com isso, temos uma classe maior de problemas, a dos **problemas de fatoração não uniforme**.

Instância: Um grafo H .

Questão: O grafo H admite um $\mathcal{F}$ -fator?

Todos os entes e notações (F -empacotamento, F -fator, grafo F -fatorável, vértice livre, etc.) que definimos acima ao mencionar problemas de fatoração uniforme, admitem similares para problemas de fatoração não uniforme. A propósito, acabamos de empregar um, que foi o termo “ $\mathcal{F}$ -fator”. Ao longo do trabalho adotaremos esta nomenclatura e mais a expressão **problema de fatoração (definido) por $F_1, F_2, \dots, F_k$** para designar o problema $\text{FATOR}(\{F_1, F_2, \dots, F_k\})$.

Ainda duas palavras a respeito de fatores.

A partir do Capítulo 3 trataremos apenas de problemas de fatoração não uniforme definidos por famílias de grafos conexos. Assim, tendo em conta simplificar a notação

²Em nenhuma ocasião omitimos o subscrito F quando este for pertinente. Entretanto, quando usarmos apenas o termo “deficiência”, o contexto indicará se se trata de def ou de def_F para algum F .

Figura 1.4: Diferenças entre emparelhamentos maximais, empacotamentos maximais e empacotamentos máximos. No grafo da direita, temos um emparelhamento maximal. Observe que este emparelhamento não é K_2 -empacotamento maximal, pois o conjunto de vértices coberto não é maximal. O grafo da esquerda mostra um K_2 -empacotamento (maximal) que cobre esse conjunto de vértices e possui tamanho maior.

e a linguagem empregadas, vamos admitir que $\mathcal{F}$ -empacotamentos sejam referidos como *grafos* com componentes isomorfos a membros de $\mathcal{F}$. A definição de empacotamento que demos, como sendo um conjunto de subgrafos, foi adotada apenas para admitir, no Capítulo 2, problemas de fatoração uniforme definidos por grafos não necessariamente conexos.

Ao termo “empacotamento maximal” também vamos dar um significado diferente do usual oriundo da teoria dos emparelhamentos. Lembramos que, tradicionalmente, emparelhamento maximal é aquele que não é um subconjunto próprio de nenhum outro emparelhamento. Para fatores, entretanto, usamos a palavra “maximal” com o seguinte significado:

Se H é um grafo e G é um $\mathcal{F}$ -empacotamento de H , então G é um $\mathcal{F}$ -empacotamento **maximal** de H se $V(G)$ é um conjunto maximal de vértices de H cobertos por um $\mathcal{F}$ -empacotamento de H .

As Figuras 1.4 e 1.5 trazem exemplos que ilustram as diferenças entre emparelhamento maximal, empacotamento maximal e empacotamento máximo.

Figura 1.5: Diferenças entre emparelhamentos maximais, empacotamentos maximais e empacotamentos máximos. A figura mostra dois $\{K_2, S_4\}$ -empacotamentos maximais, mas apenas o da direita é máximo.

Capítulo 2

Fatoração uniforme

Os primeiros resultados sobre problemas de fatoração, de acordo com a nossa definição, versavam sobre fatoração uniforme, ou seja, sobre fatoração por famílias de grafos unitárias. Como exemplos mencionamos os problemas do K_3 -fator (Schaeffer, 1974, citado em [20]), e do S_2 -fator (Johnson, 1977, citado em [14]).

Uma caracterização completa da complexidade dos problemas de fatoração uniforme foi apresentada por Hell e Kirkpatrick em [13] e em [14]. O trabalho desses autores mostra que, essencialmente, o problema do K_2 -fator (equivalente ao problema do emparelhamento perfeito) é o único dentre esses problemas que não é $\mathcal{NP}$ -completo. Este resultado mostra que não podemos esperar conseguir generalizar a teoria tradicional dos emparelhamentos, preservando os resultados vistos no Capítulo 1, através desta família de problemas.

O propósito central deste capítulo é mostrar essa caracterização, bem como a técnica de demonstração empregada nesses trabalhos. Essa técnica é interessante por si só, já que é empregada em uma série de outros problemas de fatoração, conforme teremos oportunidade de mostrar.

2.1 O problema do emparelhamento multidimensional

Nas demonstrações de $\mathcal{NP}$ -completude, transformaremos o problema do emparelhamento k -dimensional, definido como segue, no problema do F -fator.

Problema do emparelhamento k -dimensional.

Instância: Um inteiro $p \geq 1$ e um conjunto $V \subseteq \{1, 2, \dots, p\}^k$.

Questão: Existe um subconjunto $W \subseteq V$, $|W| = p$, tal que os elementos de W são dois a dois disjuntos coordenada a coordenada?

Daqui por diante, denotaremos este problema pela notação k -DM.

É conhecido o fato de que o problema do emparelhamento k -dimensional é $\mathcal{NP}$ -completo para $k \geq 3$. Em particular, o problema 3-DM faz parte da lista de problemas $\mathcal{NP}$ -completos publicada em [19] por Karp. Já o problema do emparelhamento 2-dimensional está em $\mathcal{P}$, pois equivale ao problema do emparelhamento perfeito em grafos bipartidos.

Nosso objetivo a seguir é, entre outras coisas, provar os dois lemas abaixo:

Teorema 2.1.1 *Se F é um grafo conexo com $|V(F)| \geq 1$, então*

$$|V(F)|\text{-DM} \leq_{\mathcal{P}} \text{FATOR}(F).$$

Teorema 2.1.2 *Seja F um grafo qualquer e considere F' um componente de F com número máximo de arestas. Então $\text{FATOR}(F') \leq_{\mathcal{P}} \text{FATOR}(F)$.*

Note o uso do símbolo $\leq_{\mathcal{P}}$ para indicar transformações polinomiais. Se Π e Π' são dois problemas de decisão tais que existe uma transformação polinomial [11] de Π para Π' , indicamos isto por $\Pi \leq_{\mathcal{P}} \Pi'$.

Esses dois lemas nos permitirão caracterizar a classe de complexidade para todos os problemas de F -fatoração. Em primeiro lugar, trataremos do caso em que o problema é definido por um grafo conexo. Em seguida vamos transformar este problema no problema de fatoração uniforme geral.

2.2 Módulos e coerência

Esta seção descreve as estruturas empregadas na prova do Teorema 2.1.1. Vamos considerar F conexo.

Um **módulo** é um grafo M com um conjunto não vazio $C(M)$ de vértices diferenciados. Os elementos de $C(M)$ (respect. de $V(M) \setminus C(M)$) são ditos vértices **conectores** (respect. vértices **interiores**) de M . Um F -**módulo** é um módulo que admite um F -empacotamento cobrindo todos os seus vértices interiores.

Uma **extensão modular** de um módulo M é qualquer grafo M' que contém M como um subgrafo induzido, e tal que apenas os vértices conectores de M são adjacentes a vértices fora de M . Seja $G := \{G_1, G_2, \dots, G_d\}$ um F -empacotamento de uma dada extensão modular M' de M . Dizemos que um vértice v de M está **restrito** a M por G , se $v \in V(G_i) \Rightarrow V(G_i) \subseteq V(M)$. Um F -módulo M é **internamente F -coerente** se

¹Garey e Johnson [11] utilizam o símbolo α em lugar de $\leq_{\mathcal{P}}$.

Figura 2.1:

cada F -fator de cada extensão modular de M restringe a M todos os vértices interiores do mesmo.

O exemplo mais simples de um F -módulo internamente F -coerente é o próprio grafo F com todos os vértices sendo conectores.

Módulos diamante

Seja v um vértice de F .

Chamamos de F -**diamante**, e denotamos por $D[F, v]$, o F -módulo obtido de F dividindo-se o vértice v em dois vértices v_a e v_b , não adjacentes, e cada um dos quais adjacentes a todos os vizinhos de v . Os conectores de $D[F, v]$ são os vértices v_a e v_b .

$$\begin{aligned} V(D[F, v]) &:= (V(F) \setminus \{v\}) \cup \{v_a, v_b\}, & v_a, v_b &\notin V(F); \\ A(D[F, v]) &:= (A(F) \setminus \delta(v)) \cup \{uv_a: uv \in A(F)\} \cup \{uv_b: uv \in A(F)\}. \end{aligned}$$

A Figura 2.1 mostra um exemplo e um esquema de um F -diamante.

Se tomarmos v_a e v_b como vértices conectores, então $D[F, v]$ é um F -módulo. A coerência interna, no entanto, depende da escolha do vértice v . De fato, sempre existe uma escolha que implica coerência interna do módulo $D[F, v]$.

Seja $\bar{v}$ um vértice de F que não seja vértice de corte de F e pertença a um bloco de F que possua no máximo um vértice de corte de F . Pode-se garantir que qualquer grafo contém pelo menos um tal vértice. Se F é 2-conexo, então qualquer vértice de F

pode ser escolhido. Se F não é 2-conexo, então F possui um bloco com as propriedades acima. (Citado em [12], pág. 37).

Lema 2.2.1 *O módulo $D[F, \bar{v}]$ com $\bar{v}_a$ e $\bar{v}_b$ como conectores é internamente F -coerente.*

Prova. Seja M uma extensão modular de $D[F, \bar{v}]$, e G um F -fator de M . Chamamos de π a partição de $V(M) \setminus C(M)$ induzida por G . Como $D[F, \bar{v}]$ tem exatamente dois conectores e os subgrafos em G são conexos e dois a dois disjuntos nos vértices, π pode ter no máximo dois subconjuntos de vértices.

Suponhamos que π contém exatamente dois subconjuntos, π_1 e π_2 . Digamos sem perda de generalidade que π_1 seja induzido por G_1 e π_2 seja induzido por G_2 , onde $G_1, G_2 \in G$. Como G_1 e G_2 são conexos e isomorfos a F , então $\bar{v}_a$ e $\bar{v}_b$ são cobertos por G_1 e G_2 .

Suponhamos que $\bar{v}_a$ e $\bar{v}_b$ são ambos cobertos por G_1 . Neste caso, como G_2 é conexo e $\bar{v}_a$ e $\bar{v}_b$ são os únicos conectores de $D[F, \bar{v}]$, então G_2 contém no máximo $|V(F)| - 2$ vértices, um absurdo. Então $\bar{v}_a$ e $\bar{v}_b$ não são cobertos por apenas um dentre G_1 e G_2 . Suponhamos sem perda de generalidade que G_1 cobre $\bar{v}_a$ e G_2 cobre $\bar{v}_b$.

Neste caso, G_1 e G_2 contêm cada um pelo menos um vértice interior de $D[F, \bar{v}]$. Além disso, G_1 e G_2 contêm cada um um vértice pertencente a M mas não a $D[F, \bar{v}]$. Seja F' o bloco de $D[F, \bar{v}]$ que contém os vértices $\bar{v}_a$ e $\bar{v}_b$. Se G_1 possui um vértice coberto por $D[F, \bar{v}] - V(F')$, então temos contradição com a escolha de $\bar{v}$. Caso contrário, G_2 possui um tal vértice e novamente caímos em contradição com a escolha de $\bar{v}$. $\square$

Módulos estrela

Vamos construir a partir de $D[F, v]$ um novo módulo, que será chamado **F -estrela**, e denotado pela notação **$S[F, v]$** .

Considere uma cópia de F , a qual chamamos de **núcleo** da F -estrela, e denotamos por N . Tome $|V(F)|$ cópias de $D[F, v]$ e identifique o conector v_a de cada cópia com um vértice distinto de N . Designe os conectores v_b das $|V(F)|$ cópias de $D[F, v]$ para serem os conectores da F -estrela. Não é difícil perceber que $S[F, v]$ é um F -módulo.

Na Figura 2.2 temos um exemplo de uma F -estrela.

Note que $S[F, v]$ pode ser visto como uma extensão modular de cada uma das $|V(F)|$ cópias de $D[F, v]$. Devido a isto, é de se esperar que a coerência interna de $D[F, v]$ implique na coerência interna de $S[F, v]$, e de fato é o que ocorre, como mostraremos mais adiante. Veremos que $S[F, v]$ possui propriedades ainda mais fortes do que esta.

Dizemos que um F -módulo M é **F -coerente** se M obedece a 1, 2 e 3 abaixo:

Figura 2.2: Um exemplo de F -estrela. As setas indicam os conectores.

- 1) M é internamente F -coerente;
- 2) Qualquer F -fator de qualquer extensão modular de M restringe a M ou todos os seus conectores ou nenhum deles;
- 3) Tanto M quanto $M - C(M)$ admitem F -fatores.

Lema 2.2.2 *Seja $\bar{v}$ um vértice de F escolhido como no Lema 2.2.1. Então $S[F, \bar{v}]$ é F -coerente.*

Prova. Seja M uma extensão modular de $S[F, \bar{v}]$ e seja G um F -fator de M . Então M também é extensão modular de cada uma das $|V(F)|$ cópias de $D[F, \bar{v}]$ usadas na construção da F -estrela. Como $D[F, \bar{v}]$ é internamente F -coerente, segue que todos os vértices interiores da F -estrela que forem também interiores a uma das cópias de $D[F, \bar{v}]$ estão restritos a $S[F, \bar{v}]$ por G . Já que nenhum dos vértices interiores restantes (ou seja, os vértices do núcleo de $S[F, \bar{v}]$) é adjacente aos conectores de $S[F, \bar{v}]$, segue que G restringe à mesma todos os vértices interiores.

Provaremos em seguida que vale 2).

Seja r o número de vértices de $S[F, \bar{v}]$ restritos por G . Claramente, r é múltiplo de $|V(F)|$, ou seja, $r = q|V(F)|$ para algum inteiro não negativo q . Como $S[F, \bar{v}]$ é internamente F -coerente, então $q \geq |V(F)|$. Temos ainda $q \leq |V(F)| + 1$, já que o número de vértices de $S[F, \bar{v}]$ não permite cobrir este grafo com mais do que $|V(F)| + 1$ cópias de F . Finalmente, como q é inteiro, temos $q = |V(F)|$ ou $q = |V(F)| + 1$.

Por outro lado, $r = |V(F)|^2 + c$, onde $|V(F)|^2$ é a quantidade de vértices interiores restritos por G a $S[F, \bar{v}]$ (lembrando que vale 1)) e c é a quantidade de vértices conectores restritos por G a $S[F, \bar{v}]$.

Logo:

$$\left. \begin{array}{l} |V(F)|q = |V(F)|^2 + c \\ q = |V(F)| \text{ ou } q = |V(F)| + 1 \end{array} \right\} \implies c = 0 \text{ ou } c = |V(F)|.$$

O item 3) é imediato. □

2.3 Prova da $\mathcal{NP}$ -completude

Nesta seção chegamos à demonstração dos Teoremas 2.1.1 e 2.1.2. Em seguida, caracterizamos a classe de complexidade para todos os problemas de fatoração considerados neste capítulo.

Teorema 2.1.1 *Se F é um grafo conexo, então $|V(F)|\text{-DM} \leq_P \text{FATOR}(F)$.*

Prova. Seja $k := |V(F)|$. Seja p um inteiro positivo e $V \subseteq \{1, 2, \dots, p\}^k$. Queremos uma transformação R , computável em tempo polinomial, que leve V ao grafo $R(V)$, tal que

V admite um emparelhamento k -dimensional se e somente se $R(V)$ admite um F -fator.

Construímos $R(V)$ da seguinte maneira. Tomamos kp vértices dois a dois não adjacentes. Cada vértice será rotulado por um par (i, j) , com $1 \leq i \leq k$ e $1 \leq j \leq p$. Para cada elemento $(v_1, v_2, \dots, v_k) \in V$, $R(V)$ conterá uma cópia de $S[F, \bar{v}]$, cujos k conectores serão identificados com os k vértices $(1, v_1), \dots, (k, v_k)$. O grafo resultante é $R(V)$. Note que $\bar{v}$ deverá ser escolhido como no Lema 2.2.1.

Suponhamos que V admite um emparelhamento k -dimensional E . Já vimos que tanto $S[F, \bar{v}]$ quanto este mesmo grafo sem os conectores admitem F -fatores. Com isto, construímos o seguinte F -fator em $R(V)$:

Para cada elemento de V que pertença a E , associamos o F -fator que restringe todos os conectores da cópia de $S[F, \bar{v}]$ correspondente. Para os demais elementos de V , associamos o F -fator que restringe apenas os vértices interiores das respectivas cópias de $S[F, \bar{v}]$. Como, pela definição de emparelhamento k -dimensional, E possui cardinalidade p , segue que a união disjunta dos F -fatores utilizados é um F -fator em $R(V)$.

Suponhamos agora que $R(V)$ possua um F -fator G . Como $S[F, \bar{v}]$ é F -coerente, então a restrição de G a cada cópia de $S[F, \bar{v}]$ restringe a ele ou todos ou nenhum dos seus conectores. Além disso, há exatamente p dessas cópias cujos conectores estão restritos. (Se houver menos que p , então G não estará cobrindo todos os vértices de $R(V)$). Se

houver mais, então os elementos de G não estão disjuntos nos vértices). Assim, podemos construir um emparelhamento k -dimensional E em V associando, a cada cópia de $S[F, \bar{v}]$ com os conectores $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ restritos, a k -upla $(v_1, v_2, \dots, v_k)$. Claramente, E é um emparelhamento k -dimensional em V . $\square$

O teorema a seguir caracteriza a complexidade do problema $FATOR(F)$, para F conexo.

Teorema 2.3.1 *Seja F um grafo conexo. Se $|V(F)| \leq 2$ então $FATOR(F) \in \mathcal{P}$, caso contrário $FATOR(F)$ é $\mathcal{NP}$ -completo.*

Prova. Se $F \cong K_1$, o problema é trivial, pois qualquer grafo possui um K_1 -fator. Se $F \cong K_2$, sabemos que existem algoritmos polinomiais para resolver o problema ([8, 24]). Suponhamos, pois, que $|V(F)| \geq 3$.

É imediato que $FATOR(F) \in \mathcal{NP}$. Do Teorema 2.1.1 e da observação de que k -DM é $\mathcal{NP}$ -completo para $k \geq 3$, temos que $FATOR(F)$ também é $\mathcal{NP}$ -completo. $\square$

Resta estudar o caso em que o grafo F não é conexo.

Teorema 2.1.2 *Seja F um grafo qualquer e considere F' um componente de F com número máximo de arestas. Então $FATOR(F') \leq_{\mathcal{P}} FATOR(F)$.*

Prova. Queremos encontrar uma transformação, computável em tempo polinomial, que leve instâncias H' de $FATOR(F')$ a instâncias H de $FATOR(F)$, de tal modo que

H' admite um F' -fator se e somente se H admite um F -fator.

Segue da álgebra elementar que existem c e d inteiros não negativos, únicos, tais que $|V(H')| = d|V(F')| + c$ e $0 \leq c < |V(F')|$. Seja H o grafo construído a partir de H' acrescentando-se a este d cópias do grafo $F - F'$. Há dois casos a estudar.

Se $c > 0$, então é imediato que H' não admite nenhum F' -fator. Por outro lado, como

$$\begin{aligned} |V(H)| &= |V(H')| + d(|V(F)| - |V(F')|) \\ &= |V(H')| - d|V(F')| + d|V(F)| \\ &= d|V(F)| + c. \end{aligned}$$

então H também não admite nenhum F -fator.

Consideremos agora o caso em que $c = 0$. Trivialmente, se H' possui um F' -fator então H possui um F -fator. Suponhamos então que H possui um F -fator, digamos G . Seja r o número de componentes de G isomorfos a F' . Como $|V(H)| = d|V(F)|$, então H deve conter exatamente dr cópias de F' . Como F' possui número máximo de arestas dentre todos os componentes de F , então o grafo $H - H'$ contém no máximo $d(r - 1)$ cópias de F , e as cópias restantes estão contidas em H' . Assim, há pelo menos d cópias de F' na restrição de G a H' . Por outro lado, como $|V(H')| = d|V(F')|$, temos que essa restrição é dada por exatamente essas d cópias, sendo portanto um F' -fator sobre H' . $\square$

Este lema será usado para provar o seguinte:

Teorema 2.3.2 *Se F é um grafo cujos componentes têm no máximo dois vértices então $FATOR(F) \in \mathcal{P}$, caso contrário $FATOR(F)$ é $\mathcal{NP}$ -completo.*

Prova. Suponhamos que os componentes de F sejam todos isomorfos a K_1 ou a K_2 . Seja α_i o número de componentes isomorfos a K_i , $i \in \{1, 2\}$. Observe que uma instância qualquer H possui um F -fator se e só se $|V(H)|$ é múltiplo de $|V(F)|$ e H admite um emparelhamento com pelo menos $\alpha_2|V(H)|/|V(F)|$ arestas. Note que $\alpha_1|V(H)|/|V(F)|$ é exatamente o número de vértices que um tal emparelhamento deixa de cobrir em H . Assim, $FATOR(F)$ pode ser resolvido em tempo polinomial por meio de qualquer algoritmo polinomial que encontre emparelhamentos máximos.

Suponhamos agora que F possua ao menos um componente com pelo menos três vértices. É imediato que $FATOR(F) \in \mathcal{NP}$. Pelo Teorema 2.1.2,

$$FATOR(F') \leq_{\mathcal{P}} FATOR(F),$$

com F' sendo um componente de F com número máximo de arestas. Do Teorema 2.3.1 temos que $FATOR(F')$ é $\mathcal{NP}$ -completo, pois $|V(F')| \geq 3$. Isso conclui a prova. $\square$

Os resultados acima classificam completamente a complexidade dos problemas de fatoração uniforme. A grande maioria deles é $\mathcal{NP}$ -completa. Os poucos casos que não o são podem ser transformados no problema do emparelhamento máximo de modo trivial e portanto pertencem a $\mathcal{P}$.

Um caminho possível para se continuar desenvolvendo uma teoria generalizada de emparelhamentos, que vá além dos resultados mostrados neste capítulo, passa pelo estudo dos *problemas de fatoração não uniforme*. É do que trataremos nos capítulos seguintes.

Capítulo 3

Fatoração por arestas e grafos hipoemparelháveis

Ao estudarmos problemas de fatoração uniforme no capítulo anterior, vimos que os problemas de fatoração definidos por grafos possuindo ao menos um componente com mais do que dois vértices são todos $\mathcal{NP}$ -completos. Neste capítulo veremos algumas famílias $\mathcal{F}$ de grafos que definem problemas de fatoração polinomiais. Apresentaremos um algoritmo polinomial para encontrar empacotamentos máximos por arestas e triângulos¹. O mesmo algoritmo, com pequenas alterações, também constrói $\mathcal{F}$ -empacotamentos máximos nos casos em que $\mathcal{F}$ é composta por K_2 , mais uma família finita $\{F_1, \dots, F_k\}$ de grafos hipoemparelháveis e mais quaisquer grafos $\{K_2, F_1, \dots, F_k\}$ -fatoráveis. Também apresentamos este segundo algoritmo.

Uma consequência desses resultados é que $FATOR(\mathcal{K}) \in \mathcal{P}$, onde $\mathcal{K}$ é uma família (não necessariamente finita) de grafos completos tal que $K_1 \in \mathcal{K}$ ou $K_2 \in \mathcal{K}$. Outro exemplo de problema de fatoração cuja polinomialidade podemos provar por meio desse resultado é $FATOR(\{K_2\} \cup \mathcal{C})$, sendo $\mathcal{C}$ uma família finita de circuitos ímpares.

Um problema estreitamente relacionado a $FATOR(\mathcal{F})$ é o **problema do emparelhamento fracionário perfeito**. Um **emparelhamento fracionário** (ou **2-emparelhamento**) em um grafo H é o conjunto E dos componentes do subgrafo de H induzido pelo suporte de uma solução básica $x: A(H) \rightarrow \mathbb{R}$ do seguinte programa linear:

$$\begin{cases} \max & 1x \\ \text{sujeito a} & \begin{cases} x(\delta(v)) \leq 1, & \forall v \in V(H) \\ x \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

¹Chamamos **triângulo** a todo grafo isomorfo a K_3 .

É bem conhecido o fato de que os componentes de emparelhamentos fracionários são ou arestas isoladas ou circuitos de comprimento ímpar ([2]). Assim, o problema do emparelhamento fracionário perfeito e o problema de fatoração por $\{K_2\} \cup \{C_i; i \geq 1\}$ são equivalentes.

O problema do emparelhamento fracionário perfeito, conforme a definição acima, foi estudado por diversos autores. Grande parte dos resultados mostrados nas Seções 3.1 a 3.3 foram apresentados pela primeira vez em versões para esse problema [25, 28, 1, 6, 7, 26, 27] e, posteriormente, generalizados para problemas definidos por K_2 mais uma família finita de grafos hipoemparelháveis [5, 4].

Também mostraremos os primeiros exemplos de problemas de fatoração não uniforme que são $\mathcal{NP}$ -completos, entre os quais estão $FATOR(\mathcal{F})$, onde $\mathcal{F} \subseteq \{K_i; i \geq 3\}$ e $\mathcal{F}$ é finita, e $FATOR(\mathcal{F})$, sendo $\mathcal{F} \subseteq \{C_i; i \geq 3\}$ e $\mathcal{F}$ finita.

3.1 Empacotamentos por arestas e triângulos

Vamos começar o estudo dos problemas de fatoração não uniforme, examinando em detalhe aquele que pode ser considerado como o mais simples dentre todos: o problema de fatoração por $\{K_2, K_3\}$.

Seja H um grafo qualquer, e G um $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento de H . Os componentes de G isomorfos a K_2 serão chamados de G -arestas e os isomorfos a K_3 de G -triângulos. As G -arestas também serão chamadas **arestas livres** de G . Para um grafo H qualquer, usaremos a notação $\mathbf{T}(H)$ para denotar o conjunto dos subgrafos de H isomorfos a K_3 .

Um caminho G -alternante é um caminho em H cujas arestas são alternadamente arestas de G e arestas de H que não são arestas de G .

Uma **configuração aumentadora** C de G em H é um subgrafo de H tal que os componentes de $G[V(C)]$ sejam como mostrados em linhas duplas nas Figuras 3.1, 3.2 e 3.3; ou seja, C é um caminho, uma cauda ou uma pipa aumentadora. Nestas figuras, n é qualquer inteiro não negativo par e k é qualquer inteiro positivo ímpar. Os vértices marcados com um círculo são livres de G .

As configurações mostradas nas Figuras 3.4, 3.5 e 3.6, nas quais $n = 0$ ou $k = 1$, são chamadas de **configurações aumentadoras degeneradas**.

É fácil ver que se G admite uma configuração aumentadora em H , então G não é um $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento máximo. As Figuras 3.7, 3.8 e 3.9 mostram, para cada tipo de configuração aumentadora, o resultado da respectiva aumentação.

Se C é uma configuração aumentadora de um $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento G em um grafo H , então a **aumentação** de G por C resulta no $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento $G \Delta C$.

Figura 3.1: Caminho aumentador.

Figura 3.2: Cauda aumentadora.

Figura 3.3: Pipa aumentadora.

Figura 3.4: Caminho degenerado.

Figura 3.5: Cauda degenerada.

Figura 3.6: Pipas degeneradas.

Figura 3.7: Caminho aumentado.

Figura 3.8: Cauda aumentada.

Figura 3.9: Pipa aumentada.

cujos componentes assinalados em linhas duplas nas Figuras 3.1 a 3.3 são substituídos por aqueles componentes assinalados em linhas duplas nas Figuras 3.7 a 3.9.

De fato, configurações aumentadoras assumem um papel similar àquele desempenhado pelos caminhos aumentadores para emparelhamentos, que foram mostrados no Capítulo 1. O resultado seguinte esclarece como.

Teorema 3.1.1 *Um $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento G de um grafo H possui tamanho máximo se e só se não existem configurações aumentadoras de G em H .*

Prova. Basta provar que se G não possui configuração aumentadora então G é máximo.

Suponhamos que H seja um grafo, com número mínimo de vértices, possuindo um $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento G sem configurações aumentadoras e um segundo $\{K_2, K_3\}$ -

Figura 3.10: Esquema - Teorema 3.1.1.

empacotamento, G' , de tamanho maior que o de G . Seja v um vértice coberto por G' e livre de G , e G'' o componente de G' que cobre v . Note que G'' pode ser uma G' -aresta ou um G' -triângulo.

Como G não admite configurações aumentadoras, os vértices de $V(G'') \setminus \{v\}$ devem estar cobertos por G -arestas, com uma G -aresta distinta para cada vértice. (Se um desses vértices estiver livre de G temos um caminho aumentador degenerado; se um desses vértices estiver coberto por um G -triângulo temos uma cauda aumentadora degenerada; e se G'' for um G' -triângulo e os dois vértices de $V(G'') \setminus \{v\}$ estiverem cobertos pela mesma G -aresta, temos uma pipa aumentadora degenerada.)

Seja W o conjunto dos vértices dessas G -arestas. Lembramos que $W \setminus V(G'') \neq \emptyset$. Acompanhe a demonstração pela Figura 3.10.

Sejam $\bar{H} := H - V(G'')$, $\bar{G}' := G' - V(G'')$ e $\bar{G} := G - W$. Como $|W| \geq |V(G'')|$ (se G'' é G' -aresta temos $|W| = 2$ e $|V(G'')| = 2$; se G'' é G' -triângulo temos $|W| = 4$ e $|V(G'')| = 3$), então

$$|V(\bar{G}')| = |V(G')| - |V(G'')| > |V(G)| - |W| = |V(\bar{G})|.$$

Como $|V(\bar{G}')| > |V(\bar{G})|$, pela minimalidade de H segue que $\bar{G}$ admite uma configuração aumentadora C em $\bar{H}$.

Se C é disjunto de $W \setminus V(G'')$ então C é uma configuração aumentadora de G em H , uma contradição. Se C não é disjunto de $W \setminus V(G'')$, então C começa em um vértice de $W \setminus V(G'')$. Neste caso:

- se C não termina em $W \setminus V(G'')$, obtemos uma configuração aumentadora de G em H concatenando-se a C duas arestas do subgrafo de H induzido por $W \cup V(G'')$, contradição; e

- se C termina em $W \setminus V(G'')$, então obtemos uma pipa aumentadora degenerada com início em v ; contradição novamente. $\square$

O resultado a seguir mostrará como extrair do Teorema 3.1.1 um algoritmo polinomial que construa um $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento máximo num grafo H . Para isto, é necessário introduzir alguma notação.

Dado um conjunto τ de triângulos do grafo H , um τ -**emparelhamento** de H é um $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento G de H tal que $T(G) = \tau$.

Como consequência da definição acima, no tamanho de um τ -emparelhamento contam-se os vértices cobertos por τ , mais os vértices cobertos pelas arestas livres do τ -emparelhamento.

Lema 3.1.2 *Seja G um $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento de H . Então G possui tamanho máximo se e somente se*

- (a) *nenhum $T(G)$ -emparelhamento de H cobre mais vértices do que G ;*
- (b) *nenhum $T(G) \setminus \{F\}$ -emparelhamento de H cobre mais vértices do que G , para qualquer G -triângulo F ;*
- (c) *nenhum $T(G) \cup \{F\}$ -emparelhamento de H cobre mais vértices do que G , para qualquer triângulo F de H que não seja G -triângulo.*

Prova. É imediato que se G possui tamanho máximo então valem (a), (b) e (c). Resta provar a recíproca.

Suponhamos que G não possui tamanho máximo. Então pelo Teorema 3.1.1 existe uma configuração aumentadora C de G em H . Alternando G sobre o subgrafo de H induzido por $V(C)$, conseguimos um $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento G' de tamanho maior que G , com $|T(G')| = |T(G)|$ (se C for um caminho), $|T(G')| = |T(G)| + 1$ (se C for uma pipa) ou $|T(G')| = |T(G)| - 1$ (se C for uma cauda). Portanto (a), (b) ou (c) falha. $\square$

Na Figura 3.11 mostramos um algoritmo baseado no Lema 3.1.2 para encontrar um $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento máximo num grafo H qualquer.

Claramente, o número total de operações relativas aos passos (1), (9) e (15) é dominante no cômputo da complexidade do Algoritmo Um.

Os passos (1), (9) e (15) podem ser feitos em tempo polinomial usando-se algoritmos clássicos para encontrar emparelhamentos. Resta deduzir quantas vezes esses passos são executados.

Entrada: Um grafo H qualquer;

Saída: Um $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento G em H de tamanho máximo.

- (1) Encontre um emparelhamento máximo E em H ;
 - (2) $\text{máxG} := E$;
 - (3) $\text{tmáxG} :=$ número de vértices de H cobertos por E ;
 - (4) $\text{máximo} := \text{falso}$;
 - (5) Enquanto não máximo
 - (6) $\text{máximo} := \text{verdadeiro}$;
 - (7) $G := \text{máxG}$;
 - (8) Para cada G -triângulo T faça
 - (9) Encontre um $T(G) \setminus \{T\}$ -emparelhamento máximo E_1 em H ;
 - (10) Se $|V(E_1)| > \text{tmáxG}$

então

 - (11) $\text{máxG} := E_1$;
 - (12) $\text{tmáxG} := |V(E_1)|$;
 - (13) $\text{máximo} := \text{falso}$;
 - (14) fimPara
 - (15) Para cada triângulo T de H que não é G -triângulo faça
 - (16) Encontre um $T(G) \cup \{T\}$ -emparelhamento máximo E_2 em H ;
 - (17) Se $|V(E_2)| > \text{tmáxG}$

então

 - (18) $\text{máxG} := E_2$;
 - (19) $\text{tmáxG} := |V(E_2)|$;
 - (20) $\text{máximo} := \text{falso}$;
 - (21) fimPara
 - (22) fimEnquanto
 - (23) Devolva G .
-

Figura 3.11: Algoritmo Um.

Entrada: Um grafo H qualquer;

Saída: Um $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento G em H de tamanho máximo.

-
- (1) Encontre um emparelhamento máximo E em H ;
 - (2) $G := E$;
 - (3) máximo := falso;
 - (4) Enquanto não máximo
 - (5) máximo := verdadeiro;
 - (6) Tente encontrar uma configuração aumentadora O de G em H .
 - (7) Se encontrou
 - então
 - (8) $G := G \triangle O$;
 - (9) máximo := falso;
 - fimEnquanto
 - (10) Devolva G .
-

Figura 3.12: Método Alternativo para encontrar um $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento máximo.

A cada iteração os passos (9) e (15) são executados respectivamente $|T(G)|$ e $|T(H)| - |T(G)|$ vezes. Levando em conta que o tamanho de G sempre aumenta de uma iteração para a iteração seguinte, então o laço que se inicia em (5) é executado no máximo $|V(H)|$ vezes. Assim, (9) e (15) são executados no máximo $|V(H)| \times |T(H)| = |V(H)| \times O(|V(H)|^3) = O(|V(H)|^4)$ vezes.

Concluimos com isto que o algoritmo é polinomial.

3.2 Resultados clássicos para $\{K_2, K_3\}$ -fatoração

Vamos agora explorar os resultados obtidos na Seção 3.1. Provaremos que para $\{K_2, K_3\}$ -empacotamentos valem resultados análogos aos de Berge, Tutte e Gallai-Edmonds (Seção 1.3).

Para cumprir estes objetivos, vamos desenvolver uma versão do Algoritmo Um baseada apenas no Teorema 3.1.1.

Antes de seguir em direção aos resultados, faremos alguns comentários a respeito do passo (6) do método descrito na Figura 3.12. Embora seja possível implementar este passo usando caminhos alternantes à moda do Algoritmo de Edmonds para emparelhamentos máximos, não faremos isso aqui. Como pretendemos usar o método apenas para demonstrar os resultados acima citados, entendemos que tal detalhamento seria desnecessário. Ao invés disso, vamos supor um oráculo que recebe H e G e responde “sim” (ou

“não”) caso exista (ou não) uma configuração aumentadora de G em H , além de devolver a configuração no caso de a resposta ser “sim”. A prova do Teorema 3.1.1 garante que podemos invocar um tal oráculo.

Tipicamente, o método constrói uma seqüência $(G_1, \dots, G_t)$ de $\{K_2, K_3\}$ -empacotamentos, em que G_i é o valor de G no começo da iteração i , $1 \leq i \leq t$. Vejamos o que ocorre com o número de triângulos em G_i ao longo desta seqüência.

Uma observação trivial é que, caso G_1 não seja um $\mathcal{F}$ -empacotamento máximo, esse número de triângulos é estritamente positivo a partir da segunda iteração. Isto ocorre porque o tamanho de G aumenta estritamente ao longo das sucessivas iterações e G_1 é um emparelhamento máximo. Não tão trivial é o fato de que o número de triângulos é *estritamente crescente* ao longo da seqüência.

Uma consequência imediata dessa afirmação é que não existem em G_i , e portanto não serão encontrados pelo Método Alternativo, nem caudas aumentadoras nem caminhos aumentadores. Isso simplificaria o trabalho de criar um algoritmo que implementasse o oráculo do passo (6), já que não seria necessário preocupar-nos em buscar mais do que um tipo de configuração aumentadora.

Lema 3.2.1 *Seja G^s o primeiro $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento da seqüência $(G_1, \dots, G_t)$ que possui exatamente s triângulos, $s \geq 0$. Então G^s é um $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento de tamanho máximo dentre todos os $\{K_2, K_3\}$ -empacotamentos de H que possuem s triângulos.*

Prova. Provaremos este lema por indução em s .

Base: $s = 0$.

É trivial, pois $G^0 = E$ no passo (2) e E é um emparelhamento máximo.

Passo: $s > 0$.

Suponhamos que a proposição vale para $0 \leq j < s$. Seja F um $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento com exatamente s triângulos e de tamanho maior que G^s , e considere F' um $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento obtido de F trocando-se um de seus triângulos por uma aresta. Temos

$$\begin{aligned} |V(F')| &= |V(F)| - 1. \\ |V(G^s)| &< |V(F)|. \\ |V(F')| &\stackrel{HI}{\leq} |V(G^{s-1})| < |V(G^s)|. \end{aligned}$$

A desigualdade $|V(G^{s-1})| < |V(G^s)|$ na terceira expressão acima vale pelo seguinte motivo. Como o número de triângulos em G_i e em G_{i+1} difere no máximo de 1, se

partimos de 0 triângulos em G^0 e chegamos a ter s triângulos em G^s , então G^{s-1} é construído pelo Método Alternativo antes de G^s , sendo, portanto, menor.

As expressões acima implicam que $|V(F')| \leq |V(G^s)| - 1 < |V(F)| - 1 = |V(F')|$, contradição. $\square$

Lema 3.2.2 *Considere a seqüência $(G_1, \dots, G_t)$ de $\{K_2, K_3\}$ -empacotamentos em que G_i denota o valor de G no começo da iteração i do Método Alternativo. Então G_i contém exatamente $i - 1$ triângulos.*

Prova. Provaremos este lema por indução em i .

Base: $i = 1$.

É imediato.

Passo: $i > 1$.

Suponhamos por hipótese de indução que G_{i-1} contenha $i - 2$ triângulos. Há três possibilidades.

$|T(G_i)| = |T(G_{i-1})|$. Impossível. Se G_{i-1} possui $i - 2$ triângulos então $G_{i-1} = G^{i-2}$, pois temos apenas $i - 2$ passos. Pelo Lema 3.2.1, G^{i-2} é máximo com esse número de triângulos, o que é contrariado pela hipótese acima.

$|T(G_i)| = |T(G_{i-1})| - 1$. Também impossível. Se G_{i-1} possui $i - 2$ triângulos, então G_i não pode ser o primeiro grafo da seqüência $(G_1, \dots, G_t)$ com $i - 3$ triângulos. Aplicando o Lema 3.2.1, chegamos novamente a uma contradição.

$|T(G_i)| = |T(G_{i-1})| + 1$. É a única alternativa possível. Neste caso, G_i possui exatamente $i - 1$ triângulos, como queríamos. $\square$

Uma conseqüência do Lema 3.2.2 é o resultado abaixo, que permite restringir a busca por configurações aumentadoras às pipas aumentadoras.

Lema 3.2.3 *Em cada iteração i do Método Alternativo, $1 \leq i < t$, existe uma pipa aumentadora P_i , tal que $G_{i+1} = G_i \triangle P_i$.*

Prova. Considere uma iteração $i \geq 1$. Vemos no passo (6) do Método Alternativo que $G_{i+1} := G_i \triangle O_i$, onde O_i é o valor de O na iteração i . Se O_i fosse um caminho ou uma cauda aumentadores, teríamos $|T(G_{i+1})| \leq |T(G_i)|$. Mas pelo Lema 3.2.2, devemos ter $|T(G_{i+1})| = i$ e $|T(G_i)| = i - 1$, portanto caímos em uma contradição. $\square$

Entrada: Um grafo H qualquer;

Saída: Um $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento G em H de tamanho máximo.

- (1) Encontre um emparelhamento máximo E em H pelo Algoritmo de Edmonds;
- (2) Construa a decomposição de Gallai-Edmonds (D, A, C) de H ;
- (3) $G := E$;
- (4) máximo := falso;
- (5) Enquanto não máximo
- (6) máximo := verdadeiro;
- (7) Tente encontrar uma pipa aumentadora P de G em H .
- (8) Se encontrou
- então
- (9) $G := G \triangle P$;
- (10) $\bar{D} :=$ componente de $H[D]$ que contém a cabeça de P ;
- (11) $D := D \setminus V(\bar{D})$;
- (12) $C := C \cup V(\bar{D})$;
- (13) máximo := falso;
- fimEnquanto
- (14) Devolva G .

Figura 3.13: Método Dois.

Vamos agora reescrever o nosso Método Alternativo aproveitando os lemas acima e utilizando um resultado clássico da teoria dos emparelhamentos, o Teorema da Estrutura de Gallai-Edmonds (Teorema 1.3.4). Veja a Figura 3.13.

A construção dos conjuntos citados no passo (2) pode ser feita usando-se a floresta alternante da última iteração do Algoritmo de Edmonds, que é aplicado no passo anterior. No passo (10) fazemos uso de um resultado que será demonstrado em seguida. Os passos (11) e (12) atualizam os conjuntos D e C fazendo com que o componente de $H[D]$ que contém a cabeça de P seja integrado ao grafo $H[C]$.

Teorema 3.2.4 *Considere uma iteração i do Método Dois, $i \geq 1$. Sejam C_i , D_i e $\bar{D}_i$ os valores respectivamente de C , D e $\bar{D}$ no início da iteração i , e P_i o valor de P no passo (9) da mesma iteração. Seja $\bar{H}_i$ o grafo bipartido obtido de H retirando-se deste o conjunto C_i , as arestas de $H[A]$ e contraindo-se cada componente de $H[D_i]$. Então temos:*

- i) P_i começa em um componente de $H[D_i]$, percorre arestas dos grafos $\bar{H}_i$ e $H[D_i]$ e possui sua cabeça em um segundo componente de $H[D_i]$;
- ii) os componentes de $H[D_i]$ são hipoemparelháveis;

Figura 3.14: P_1 .

Figura 3.15: Esquema da primeira iteração do Método Dois.

- iii) os componentes de $H[C_i]$ são $\{K_2, K_3\}$ -fatoráveis;
- iv) G_i induz em cada componente $\tilde{D}$ de $H[D_i]$ um emparelhamento que cobre $|V(\tilde{D})| - 1$ vértices de $\tilde{D}$;
- v) G_i induz um $\{K_2, K_3\}$ -fator em cada componente de $H[C_i]$;
- vi) cada vértice de A está emparelhado por G_i com um vértice em um componente distinto de $H[D_i]$.

Prova. Faremos a prova deste lema por indução em i .

Base: $i = 1$.

Os itens ii) a vi) valem devido ao Teorema da Estrutura de Gallai-Edmonds. Para facilitar a demonstração do item i), considere os esquemas das Figuras 3.14 e 3.15.

O vértice v_0 é livre de G_1 , por isso deve estar contido em D_1 . O (v_0, v_n) -caminho G_1 -alternante indicado no esquema de P_1 deve estar contido em $\tilde{H}_1 + H[D_1]$ por causa dos itens iv) a vi), e como o caminho é par, v_n certamente está contido em algum componente $\tilde{D}_1$ de $H[D_1]$. Mais ainda, o item vi) garante que este componente é diferente daquele que contém v_0 . Resta provar que os vértices $v_{n+1}, \dots, v_{n+k+1}$ também estão contidos em $\tilde{D}_1$.

Suponhamos sem perda de generalidade que v_{n+1} não pertença a $\tilde{D}_1$. Então temos $v_{n+1} \in A$. Considere o (v_{n+1}, v_{n+k+1}) -caminho indicado no esquema de P_1 . Como este caminho é G_1 -alternante e ímpar, ele está contido em $\tilde{H}_1 + H[D_1]$. Assim v_{n+k+1} está contido em algum componente de $H[D_1]$. Entretanto este componente não pode ser $\tilde{D}_1$ por causa de vi), e isto contradiz a adjacência entre v_n e v_{n+k+1} .

Passo: $i > 1$.

Suponhamos por hipótese de indução que valham i) a vi) na iteração $i - 1$.

Temos $G_i = G_{i-1} \triangle P_{i-1}$. Note que $G_i[\tilde{D}_{i-1}]$ é um $\{K_2, K_3\}$ -fator em $H[\tilde{D}_{i-1}]$. Lembrando que vale v) na iteração $i - 1$ e que $C_i = C_{i-1} \cup V(\tilde{D}_{i-1})$, temos v) válida na iteração i . Lembrando que $D_i = D_{i-1} \setminus V(\tilde{D}_{i-1})$ e que vale iv) na iteração $i - 1$, temos iv) válida na iteração i . Os enunciados ii), iii) e vi) da mesma forma são conseqüências imediatas da hipótese de indução.

Quanto ao enunciado i), os mesmos argumentos usados para demonstrar a base da indução funcionam aqui, pois temos ii) a vi) válidas na iteração i . $\square$

No início da última iteração, digamos t , G_t é um $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento máximo em H pelo Teorema 3.1.1 e pelo Lema 3.2.3. Considere o conjunto $\bar{A}$ definido como segue.

Se G_t é um $\{K_2, K_3\}$ -fator, então $\bar{A} := \emptyset$. Caso contrário, observe que o subgrafo de G_t induzido por $V(\bar{H}_t) \cap V(G_t)$ é um K_2 -empacotamento em $\bar{H}_t$. Assim, vamos considerar uma floresta $G_t[V(\bar{H}_t) \cap V(G_t)]$ -alternante maximal F no grafo $\bar{H}_t$. Seja $\bar{A}$ o conjunto dos vértices internos desta floresta. Não é difícil perceber que $\bar{A} \subseteq A$.

Seguem abaixo alguns resultados obtidos como conseqüências do Teorema 3.2.4. Nesses resultados aparece uma nova classe de grafos: a classe dos botões. Definimos um **botão** como sendo um subgrafo induzido B de um grafo H , tal que

- i) B é hipoemparelhável, e
- ii) $B - T$ não tem emparelhamento perfeito, para todo triângulo T de B .

Note que K_1 é um botão, pela definição.

Devido ao Lema 3.2.3 a definição de botão equivale a:

- i) B é hipoemparelhável, e
- ii) B não tem nenhum $\{K_2, K_3\}$ -fator.

A classe dos botões definida por Hell e Kirkpatrick em [15] é, na verdade, maior do que a que acabamos de definir. Naquele artigo, o item i) da definição acima é substituído por

- i') B tem um emparelhamento que cobre $|V(B)| - 1$ vértices.

Com esta definição, simplifica-se notavelmente a classe de botões definida no paper original, uma vez que os botões aqui definidos satisfazem as propriedades:

- i) Se B é um botão então B é conexo.
- ii) Se B é um botão então B não possui vértices de grau menor ou igual a um, a menos que $|V(B)| = 1$.

A definição de botão adotada aqui é a mesma empregada por Cornuejols e Hartvigsen em [4].

Um exemplo de família de botões são os circuitos ímpares com mais que 3 vértices. Na verdade, podemos dizer que estes são “os menores botões”, no sentido de que se fixarmos o número n de vértices de um botão B , então B deve ter pelo menos n arestas. E a única maneira de se conseguir que B tenha exatamente n arestas é fazer $B := C_n$.

O primeiro resultado que provamos é uma caracterização dos grafos que admitem $\{K_2, K_3\}$ -fatores. Este é um similar da Condição de Tutte para emparelhamentos perfeitos.

Teorema 3.2.5 *Seja H um grafo qualquer. Então H tem um $\{K_2, K_3\}$ -fator se e somente se $b(A) \leq |A|$ para todo conjunto $A \subseteq V(H)$, onde $b(A)$ é o número de componentes do grafo $H - A$ que são botões.*

Prova. Se existir um conjunto A tal que $b(A) > |A|$, então é claro que H não é $\{K_2, K_3\}$ -fatorável.

Suponhamos que H não é $\{K_2, K_3\}$ -fatorável. Então na última iteração do Método Dois devemos ter que

$$G_t \text{ não é um } \{K_2, K_3\}\text{-fator.}$$

Considere o conjunto $\bar{A}$ descrito na página 38. Temos que todos os vértices externos da floresta F correspondem aos componentes de $H[D_t]$ que são botões, pois se não fosse assim existiria uma pipa aumentadora de G_t . Temos ainda que o número de vértices externos de F é estritamente maior que $|\bar{A}|$. Portanto vale $b(\bar{A}) > |\bar{A}|$. $\square$

O resultado seguinte generaliza a fórmula de Berge (Teorema 1.3.3).

Teorema 3.2.6 *Seja H um grafo qualquer. Então*

$$\text{def}_{\{K_2, K_3\}}(H) = \max\{b(A) - |A| : A \subseteq V(H)\}.$$

Prova. Vamos provar que $\max\{b(A) - |A| : A \subseteq V(H)\} \leq \text{def}_{\{K_2, K_3\}}(H)$.

Seja $A \subseteq V(H)$ e considere $B_1, \dots, B_d$ os componentes de $H - A$ que são botões. Suponha que $B_1, \dots, B_i$ não tenham vértices livres de um dado $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento máximo G . Então $\text{def}_{\{K_2, K_3\}}(H) \geq d - i \geq d - |A| = b(A) - |A|$, portanto

$$\text{def}_{\{K_2, K_3\}}(H) \geq \max\{b(A) - |A| : A \subseteq V(H)\}.$$

Se conseguirmos exibir um conjunto $A \subseteq V(H)$ tal que valha $\text{def}_{\{K_2, K_3\}}(H) \leq b(A) - |A|$, então a prova estará completa. Um tal conjunto é $\bar{A}$, pois cada vértice de $\bar{H}_t$ livre de G_t corresponde exatamente a um vértice de H livre de G_t , e o número desses vértices é justamente $b(\bar{A}) - |\bar{A}|$. Portanto vale que

$$\text{def}_{\{K_2, K_3\}}(H) \leq b(\bar{A}) - |\bar{A}| \leq \max\{b(A) - |A| : A \subseteq V(H)\}.$$

$\square$

Uma consequência imediata desse resultado é o teorema minimax que segue, o qual envolve de modo explícito o tamanho de um $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento máximo.

Teorema 3.2.7 *Seja H um grafo qualquer. Então*

$$\text{emp}_{\{K_2, K_3\}}(H) = \min\{|V(H)| + |A| - b(A) : A \subseteq V(H)\}.$$

Prova.

$$\begin{aligned} \text{emp}_{\{K_2, K_3\}}(H) &= |V(H)| - \text{def}_{\{K_2, K_3\}}(H) \\ &= |V(H)| - \max\{b(A) - |A| : A \subseteq V(H)\} \\ &= |V(H)| + \min\{|A| - b(A) : A \subseteq V(H)\} \\ &= \min\{|V(H)| + |A| - b(A) : A \subseteq V(H)\} \end{aligned}$$

□

Vamos finalizar esta seção com um resultado que é uma versão do Teorema da Estrutura de Gallai-Edmonds (Teorema 1.3.4) para $\{K_2, K_3\}$ -empacotamentos. As Figuras 3.16 a 3.18 acompanham esta discussão.

É interessante observar que os conjuntos D_t , A e C_t construídos pelo Método Dois não formam uma decomposição que generaliza a decomposição canônica dada pelo Teorema 1.3.4, pois o item iii) daquele teorema não continua válido. Observe no esquema da Figura 3.17 que o grafo $\bar{H}_t$ pode ter excedente nulo visto de A , enquanto que, numa generalização aceitável, este excedente deveria ser sempre positivo. Para fazer a generalização, construímos a partição adequada a partir de D_t , A e C_t usando florestas alternantes, de modo a eliminar esse problema.

Teorema 3.2.8 *Seja H um grafo qualquer. Sejam D , A e C os subconjuntos de $V(H)$ definidos como segue:*

- D é o conjunto dos vértices de H que não são cobertos por algum $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento máximo de H ;
- A é o conjunto dos vértices em $V(H) \setminus D$ que são adjacentes a algum vértice de D ;
- C é o conjunto $V(H) \setminus (A \cup D)$.

Se D , C e A são como na definição acima, então:

- i) os componentes de $H[D]$ são botões:*

ii) o grafo $H[C]$ é $\{K_2, K_3\}$ -fatorável;

iii) G é um $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento máximo em H se e somente se

- G induz em cada componente $\hat{D}$ de $H[D]$ um $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento de tamanho $|V(\hat{D})| - 1$;
- G induz em cada componente de $H[C]$ um $\{K_2, K_3\}$ -fator;
- cada vértice de A está emparelhado por G com um vértice em um componente distinto de $H[D]$.

Para não haver confusão com os conjuntos A , C e D definidos pelo Teorema 1.3.4, na demonstração vamos usar $\hat{D}$, $\hat{A}$ e $\hat{C}$ para os conjuntos D , A e C definidos acima.

Prova. A prova desse resultado é fácil para o caso em que F é $\{K_2, K_3\}$ -fatorável. Fazendo $\hat{D} := \hat{A} := \emptyset$ e $\hat{C} := |V(H)|$, temos os itens i) a iii) satisfeitos.

Vamos analisar o caso em que H não é $\{K_2, K_3\}$ -fatorável. Seja t a última iteração do Método Dois, sendo este método executado com H como entrada. Se H não é $\{K_2, K_3\}$ -fatorável, então $D_t \neq \emptyset$ e há um vértice livre de G_t em cada componente do grafo $H[D_t]$, pelo item iv) do Teorema 3.2.4.

Considere a floresta alternante F definida na página 38; ou seja, F é uma floresta $G_t[V(\bar{H}_t) \cap V(G_t)]$ -alternante maximal em $\bar{H}_t$ cujas raízes são os vértices de $\bar{H}_t$ que correspondem a componentes de $H[D_t]$ contendo vértices livres de G_t . Seja $\bar{D}$ o conjunto dos vértices dos componentes de $H[D_t]$ que correspondem aos vértices externos de F , $\bar{A}$ o conjunto dos vértices de A correspondendo aos vértices internos de F , e $\bar{C}$ o conjunto $V(H) \setminus (\bar{D} \cup \bar{A})$. Veja as Figuras 3.16, 3.17 e 3.18.

Vamos provar que $\bar{D}$ é exatamente o conjunto $\hat{D}$.

Seja v um vértice em H , e $\bar{G}$ um $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento máximo em H que não cobre v (ou seja, $v \in \hat{D}$). Considere P um caminho G_t -alternante, $\bar{G}$ -alternante com vértices não extremos tendo grau 1 em $\bar{G}$, maximal com relação a essas características, e com um extremo em v . Seja w o outro extremo de P . Há quatro casos a estudar. Acompanhe a Figura 3.19.

Se P tem comprimento ímpar e w é um vértice livre de $\bar{G}$ (Figura 3.19. (1)), então P é um caminho aumentador de $\bar{G}$, um absurdo.

Se P tem comprimento ímpar e w é um vértice coberto por um $\bar{G}$ -triângulo (Figura 3.19. (2)), então esse $\bar{G}$ -triângulo não possui outros vértices em comum com P já que os vértices não extremos de P têm grau 1 em $\bar{G}$. Nesse caso, temos uma cauda aumentadora de $\bar{G}$, também absurdo.

Figura 3.16: Esquema do início da última iteração do Método Dois. Os componentes de $H - A$ indicados com círculos são componentes de $H[D_{t-1}]$, e componentes indicados com retângulos são componentes de $H[C_{t-1}]$.

Figura 3.17: O grafo $\bar{H}_t$. Os vértices da floresta alternante F estão indicados pelas setas. O conjunto $\{x, y\}$ mostra que o excedente de $\bar{H}_t$ visto de A é nulo.

Figura 3.18: Os conjuntos $\bar{D}$ e $\bar{A}$.

Se P tem comprimento par e w é livre de G_t (Figura 3.19, (3)), então w pertence a um componente de $H[D_t]$ que corresponde a um vértice externo da floresta alternante F . Assim sendo, todas as arestas de G_t percorridas por P são, na verdade, G_t -arestas. Nestas condições, não é difícil ver que v é um vértice contido em um componente de $H[D_t]$ que corresponde a um vértice externo de F ; os argumentos aqui são os mesmos usados para provar o item i) do Teorema 3.2.4. Portanto $v \in \bar{D}$.

Resta o caso em que P tem comprimento par e w é coberto por um G_t -triângulo (Figura 3.19, (4)). Em tal situação, esse G_t -triângulo tem os outros dois vértices, além de w , em comum com P ; caso contrário, P não seria maximal. Mas nesse caso, encontramos uma pipa aumentadora de $\bar{G}$, absurdo novamente.

Com isso mostramos que $\hat{D} \subseteq \bar{D}$. A outra inclusão é justificada pelo fato de que os componentes de $H[\bar{D}]$ são hipoemparelháveis. Assim, dado um vértice $v \in \bar{D}$, o $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento G_t é facilmente modificado de modo a não cobrir v , mantendo-se o seu tamanho.

Tendo que $\hat{D} = \bar{D}$, claramente valem $\hat{A} = \bar{A}$ e $\hat{C} = \bar{C}$. Vamos agora aplicar o Teorema 3.2.4 para concluir a prova do presente resultado.

Item i. O Teorema 3.2.4 garante que os componentes de $H[\bar{D}] = H[\hat{D}]$ são hipoemparelháveis. Se não fossem botões, então F conteria uma pipa aumentadora de G_t , um

Figura 3.19: Nesta figura, as arestas simples são arestas de G_t , e as arestas duplas são arestas de $\bar{G}$.

absurdo.

Item ii. Os componentes do grafo $H[\hat{C}] = H[\bar{C}]$ são $\{K_2, K_3\}$ -fatoráveis, pois $\hat{C} = \bar{C} = C_t \cup (D_t \setminus \bar{D}) \cup (A \setminus \bar{A})$. O grafo $H[C_t]$ é $\{K_2, K_3\}$ -fatorável pelo Teorema 3.2.4, e o grafo $H[(D_t \setminus \bar{D}) \cup (A \setminus \bar{A})]$ possui um $\{K_2, K_3\}$ -fator que é um subgrafo de G_t .

Item iii. Seja $\bar{G}$ um $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento que satisfaz as condições relatadas no item iii) do teorema. Não é difícil mostrar que $\bar{G}$ tem o mesmo tamanho que G_t . De fato, o tamanho de $\bar{G}$ é dado por

$$\begin{aligned}
 |V(H)| - (\text{no. de componentes de } H[\hat{D}]) + |\hat{A}| &= \\
 |V(H)| - (\text{no. de componentes de } H[\bar{D}]) + |\bar{A}| &= \\
 |V(H)| - (\text{no. de componentes de } H[\bar{D}]) + |\bar{A}| + \\
 + |A \setminus \bar{A}| - (\text{no. de componentes de } H[D_t \setminus \bar{D}]) &= \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{iguais pelo Teorema 3.2.4 e pela definição de } F} &= \\
 |V(H)| - (\text{no. de componentes de } H[D_t]) + |A| &= \\
 \text{tamanho de } G_t. &
 \end{aligned}$$

Por outro lado, supondo que $\tilde{G}$ seja um $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento máximo, temos que todos os vértices livres de $\tilde{G}$ estão em $\hat{D} = \bar{D}$.

Se $\tilde{G}$ não emparelha os vértices de $\hat{A} = \bar{A}$ com vértices em componentes distintos de $H[\hat{D}] = H[\bar{D}]$, então $\tilde{G}$ tem tamanho menor que o de G_t . Isso ocorre pois o número de tais componentes emparelhados por $\tilde{G}$ passa a ser menor que o de G_t e esses componentes não possuem $\{K_2, K_3\}$ -fatores.

Como $\text{Adj}(\hat{C}) \subseteq \hat{C} \cup \hat{A}$, então $H[\hat{C}]$ é $\{K_2, K_3\}$ -fatorável. Pelo fato de $\tilde{G}$ ser máximo, $\tilde{G}$ induz um $\{K_2, K_3\}$ -fator em cada um daqueles componentes. Mais ainda, como os componentes de $H[\bar{D}]$ são botões, então $\tilde{G}$ induz em cada um desses componentes um $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento deixando exatamente um vértice livre.

Com isso, concluímos a prova do teorema. □

3.3 A propriedade de Balas-Uhry

Esta seção apresenta uma propriedade adicional dos empacotamentos por arestas e grafos hipoemparelháveis: a propriedade de Balas-Uhry. O desenvolvimento de resultados do tipo que vamos mostrar aqui acompanhou a evolução da teoria dos problemas de fatoração em geral.

A primeira versão do que hoje conhecemos por propriedade de Balas-Uhry foi provada por Uhry em 1975 para emparelhamentos fracionários [28].

Teorema 3.3.1 *Seja E um emparelhamento fracionário máximo em um grafo H com número mínimo de circuitos ímpares. Sejam $C_1, C_2, \dots, C_d$ os componentes de E que são circuitos ímpares, e $\bar{E}$ o conjunto das E -arestas. Para $i = 1, \dots, d$, seja E_i um emparelhamento máximo em C_i . Então $E^* := \bar{E} \cup E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_d$ é um emparelhamento máximo em H .*

Esse resultado foi redescoberto posteriormente por Balas como corolário de uma caracterização de grafos que possuem emparelhamentos fracionários máximos sem circuitos ímpares [1].

Posteriormente, foi apresentada uma generalização para famílias de grafos constituídas de K_2 mais uma quantidade finita de grafos hipoemparelháveis. Vamos demonstrar a seguir a versão para a família $\{K_2, K_3\}$.

Teorema 3.3.2 *Seja G um $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento máximo com número mínimo de G -triângulos em um grafo H . Então o emparelhamento obtido da união das G -arestas com emparelhamentos máximos nos G -triângulos de G é um emparelhamento máximo em H .*

A propriedade que é atribuída à família $\{K_2, K_3\}$ no Teorema 3.3.2 ficou conhecida mais tarde como a **propriedade de Balas-Uhry**. Assim, dada uma família qualquer $\mathcal{F}$ de grafos, dizemos que $\mathcal{F}$ possui a propriedade de Balas-Uhry se, para todo $\mathcal{F}$ -empacotamento máximo G de todo grafo H com um mínimo de componentes não isomorfos a K_2 , um emparelhamento máximo em G é um emparelhamento máximo em H .

Prova. Seja G um $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento máximo em H com $|T(G)|$ mínimo. Considere a decomposição de Gallai-Edmonds (D, A, C) de G e os conjuntos D_t e C_t e o $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento G_t construídos pelo Método Dois. Seja E um emparelhamento máximo em G . Não é difícil perceber que E é obtido de G mantendo-se as G -arestas e tomando-se em cada G -triângulo um emparelhamento que deixa exatamente um vértice livre.

Do Teorema 3.2.8 e do fato de que $|T(G)|$ é mínimo, temos que G induz em cada componente de $H[\hat{D}]$ um emparelhamento que deixa um vértice livre. Temos ainda que os vértices de $\hat{A}$ estão emparelhados por G -arestas com vértices de $H[\hat{D}]$. Então, os vértices de $\hat{D} \cup \hat{A}$ estão cobertos apenas por G -arestas.

O conjunto $\hat{C}$ é $C \cup (A \setminus \hat{A}) \cup (D \setminus \hat{D})$, portanto o número de G -triângulos cobrindo vértices de $\hat{C}$ é pelo menos o número de componentes de $H[D \setminus \hat{D}]$ menos $|A \setminus \hat{A}|$. Se esse número for maior, então $|T(G)| > |T(G_t)|$, contradição.

Assim, o número de vértices de H livres de E é exatamente o número de componentes de $H[\hat{D}]$ menos $|\hat{A}|$ mais o número de componentes de $H[D \setminus \hat{D}]$ menos $|A \setminus \hat{A}|$. Ou seja, E tem exatamente o tamanho de um emparelhamento máximo dado pelo Teorema da Estrutura de Gallai-Edmonds. $\square$

Uma consequência interessante do Teorema 3.3.2 é que todo $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento máximo possuindo número mínimo de triângulos pode ser construído pelo Método Dois, desde que se escolha um emparelhamento adequado para fazer o papel de G_1 . A propriedade de Balas-Uhry garante a existência desse emparelhamento. Entretanto, não se garante que, uma vez que o Método Dois seja iniciado com um emparelhamento apropriado no lugar de G_1 , chegue-se a um particular $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento, já que a cada iteração pode haver mais de uma configuração aumentadora possível. Veja um exemplo na Figura 3.20.

Certamente os resultados que exibimos aqui não gozam da mesma tradição que aqueles que vimos na seção anterior, tradição esta herdada das respectivas versões para emparelhamentos. Ainda assim, é difícil superestimar a importância de tais resultados. Para famílias maiores de problemas de fatoração, como a de que vamos tratar no Capítulo 5, versões da propriedade de Balas-Uhry facilitam a obtenção de uma série de teoremas, sem que seja necessário caracterizar configurações aumentadoras, como vimos fazendo ao longo deste capítulo. A propósito, o nome “propriedade de Balas-Uhry” foi empregado

Figura 3.20: No grafo mostrado no alto da figura, há dois fatores possíveis, e ambos podem ser construídos pelo Método Dois. Aqui indicamos as configurações aumentadoras.

pela primeira vez exatamente por Kano e Poljak em seu artigo [18], em que é dada uma caracterização parcial das famílias de grafos que a possuem.

3.4 O caso geral

Veremos agora como generalizar, para o caso em que $\mathcal{F}$ é composta de K_2 mais uma família finita $\{F_1, \dots, F_k\}$ de grafos hipoemparelháveis e mais uma segunda família $\mathcal{I}$ (possivelmente infinita) de grafos $\{K_2, F_1, \dots, F_k\}$ -fatoráveis, os resultados vistos na Seção 3.1.

3.4.1 Irredutibilidade em famílias de grafos

Esta seção trata de uma simplificação que, daqui em diante, faremos com frequência: assumir que $\mathcal{I} = \emptyset$. Isso nos será permitido pelos dois lemas seguintes.

Lema 3.4.1 *Seja $\mathcal{F} = \mathcal{I} \cup \mathcal{J}$, onde $\mathcal{J}$ é uma família finita de grafos quaisquer e $\mathcal{I}$ é uma família (possivelmente infinita) de grafos $\mathcal{J}$ -fatoráveis. Considere H um grafo qualquer. Então*

$$H \text{ tem um } \mathcal{F}\text{-fator} \iff H \text{ tem um } \mathcal{J}\text{-fator}.$$

Prova. Podemos considerar $\mathcal{I} \neq \emptyset$. Assim, suponhamos que H tem um $\mathcal{F}$ -fator, digamos G . Claramente os componentes de G que são isomorfos a algum membro I de $\mathcal{I}$ têm um $\mathcal{J}$ -fator. Portanto o grafo G' obtido de G substituindo-se cada componente do tipo acima pelo respectivo $\mathcal{J}$ -fator, é um $\mathcal{J}$ -fator em H .

A outra implicação é imediata. □

Lema 3.4.2 *Se G é um $\mathcal{J}$ -empacotamento máximo em um grafo H , então G é um $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ -empacotamento máximo em H , onde $\mathcal{J}$ é uma família finita de grafos quaisquer e $\mathcal{I}$ é uma família possivelmente infinita de grafos $\mathcal{J}$ -fatoráveis.*

Prova. Suponhamos por absurdo que haja um $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ -empacotamento G' de tamanho maior que G em H . Considere o grafo G'' obtido de G' trocando-se cada componente deste isomorfo a algum membro de $\mathcal{I}$ pelo respectivo $\mathcal{J}$ -fator. É fácil ver que $|V(G'')| > |V(G)|$, o que contradiz a maximalidade de G . □

Os dois lemas que acabamos de demonstrar sugerem o conceito de irredutibilidade. Dizemos que uma família de grafos qualquer $\mathcal{F}$ é uma **família irredutível** se

$$\mathcal{F} = \emptyset$$

ou se para toda partição $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ de $\mathcal{F}$.

se $\mathcal{I}$ é uma família de grafos $\mathcal{J}$ -fatoráveis então temos $\mathcal{I} = \emptyset$.

Estas noções serão particularmente importantes no próximo capítulo, quando estudaremos uma nova classe de problemas de fatoração que engloba tanto problemas polinomiais quanto problemas $\mathcal{NP}$ -completos.

3.4.2 Prova da polinomialidade

Até o fim desta seção, salvo menção em contrário, vamos considerar $\mathcal{F} = \{K_2, F_1, \dots, F_k\}$ com F_i hipoemparelhável, $1 \leq i \leq k$.

Para generalizar a teoria desenvolvida na Seção 3.1, precisamos estender algumas das notações definidas lá.

Seja G um $\mathcal{F}$ -empacotamento de um grafo H qualquer. A definição de G -aresta (ou aresta livre) é análoga à usada até aqui. Usaremos a notação $T(H)$ para denotar o conjunto dos subgrafos de H isomorfos a algum elemento de $\mathcal{F}$ distinto de K_2 . Chamamos a atenção para os seguintes fatos:

- Devido à irredutibilidade de $\mathcal{F}$, $T(G)$ coincide com o conjunto dos componentes do $\mathcal{F}$ -empacotamento G que não são G -arestas.
- Os membros de $T(H)$ não são necessariamente subgrafos induzidos de H .

Seguimos agora generalizando a definição de τ -emparelhamento. Se $T(G) = \tau$ para algum conjunto τ , então G é um τ -**emparelhamento**. E, finalmente, definimos **caminho G -alternante** como sendo todo caminho C em H tal que as arestas de C sejam alternadamente arestas de G e arestas de H que não são arestas de G .

Resta descrever as **configurações aumentadoras** de G .

- **Caminho aumentador**: um caminho G -alternante ímpar com vértices não extremos tendo grau 1 em G , começando e terminando em vértices livres de G .
- **Cauda aumentadora**: um caminho G -alternante ímpar começando em um vértice livre de G e terminando em um membro de $T(G)$ e com vértices não extremos tendo grau 1 em G .

Figura 3.21: Um exemplo de pipa aumentadora para empacotamentos por K_2 e K_5 .

- **Pipa aumentadora:** um caminho G -alternante par com vértices não extremos tendo grau 1 em G , começando em um vértice livre de G e terminando em um vértice v de uma cópia F qualquer de algum $F_i \in \mathcal{F}$, junto com $(|V(F)| - 1)/2$ caminhos G -alternantes ímpares disjuntos nos vértices, começando e terminando cada um em um vértice de $F - v$ e com uma G -aresta.

Chamamos **cabeça** à parte desta configuração composta pela cópia de F_i mais os $(|V(F)| - 1)/2$ caminhos G -alternantes.

Na Figura 3.21 temos um exemplo de pipa aumentadora. No exemplo, F é uma cópia de K_5 e há dois caminhos G -alternantes ímpares, de comprimentos 1 e 3.

Um fato interessante a respeito das configurações aumentadoras que descrevemos é que em uma operação de aumento de um $\mathcal{F}$ -empacotamento G , o número de elementos de $T(G)$ ou não aumenta (caso seja usado um caminho aumentador), ou aumenta em 1 (pipa aumentadora) ou diminui em 1 (cauda aumentadora). Essa observação, mais o próximo teorema, nos permitem estender o Algoritmo Um para que ele encontre $\mathcal{F}$ -empacotamentos.

Teorema 3.4.3 *Seja $\mathcal{F} := \{K_2, F_1, \dots, F_k\}$ com F_i hipoemparelhável, $1 \leq i \leq k$. Então um $\mathcal{F}$ -empacotamento G de um grafo H possui tamanho máximo se e só se G não possui configuração aumentadora.*

Prova. É imediato que se H possui configuração aumentadora de G , então G não é um $\mathcal{F}$ -empacotamento de tamanho máximo em H . Resta provar a recíproca.

Seja H um grafo que admite um $\mathcal{F}$ -empacotamento não máximo sem configurações aumentadoras. Seja G um tal $\mathcal{F}$ -empacotamento com $|T(G)|$ mínimo. Seja G' um $\mathcal{F}$ -empacotamento máximo (e portanto sem configurações aumentadoras) e com $|T(G')|$ mínimo dentre todos os $\mathcal{F}$ -empacotamentos de mesmo tamanho.

Observe o uso que fazemos, no parágrafo acima, do fato óbvio de que a condição de maximalidade dada pelo enunciado é necessária.

Figura 3.22: Esquema - Teorema 3.4.3.

Figura 3.23: Esquema - Teorema 3.4.3.

Figura 3.24: Esquema - Teorema 3.4.3.

Figura 3.25: Esquema - Teorema 3.4.3.

Figura 3.26: Esquema - Teorema 3.4.3.

Figura 3.27: Considerando diversos emparelhamentos máximos em F , há várias configurações aumentadoras no grafo acima.

As Figuras 3.22 a 3.27 referem-se a esta prova. Nessas ilustrações, as arestas de G são representadas por arestas duplas, e as de G' , por arestas simples.

Definimos **caminho $\{G, G'\}$ -alternante** como sendo um caminho C em H cujas arestas são alternadamente G -arestas e G' -arestas. Os caminhos $\{G, G'\}$ -alternantes que têm seus extremos cobertos por uma mesma cópia de algum F_i pertencente a G ou G' são chamados de **pontes**. Na Figura 3.25 temos um exemplo de ponte.

Afirmamos que, pela escolha de G e G' , todos os caminhos $\{G, G'\}$ -alternantes maximais que não são pontes são pares. A prova segue abaixo:

Seja C um caminho $\{G, G'\}$ -alternante maximal ímpar começando e terminando com G -arestas. Se pelo menos um dos extremos de C é livre de G' , pela maximalidade e paridade de C , o outro extremo ou é livre de G' (Figura 3.22) ou é coberto por um elemento de $T(G')$ (Figura 3.23). Temos então ou um caminho ou uma cauda aumentadores de G' , uma contradição. Se ambos os extremos de C são cobertos por G' , então eles são cobertos por elementos de $T(G')$. Se esses elementos forem distintos (Figura 3.24), entramos em contradição com a minimalidade de $|T(G')|$. Assim, os extremos de C só podem ser cobertos por um mesmo elemento de $T(G')$; ou seja, C é uma ponte.

Argumentando de modo similar, provamos a afirmação para caminhos $\{G, G'\}$ -alternantes maximais ímpares que começam e terminam com G' -arestas.

A seguir afirmamos que existe um $\mathcal{F}$ -empacotamento G'' de H de mesmo tamanho que G e com $|T(G)| = |T(G'')|$, e um vértice livre de G'' e coberto por algum elemento de $T(G')$. A prova:

Como G' tem tamanho maior que G , existe pelo menos um vértice em H coberto por G' e livre de G .

Suponhamos que todos os vértices nessa situação estejam cobertos por G' -arestas. Nesse caso, cada um desses vértices é extremo de um caminho $\{G, G'\}$ -alternante maximal par. Naturalmente, tais caminhos são todos disjuntos nos vértices. Se todos esses caminhos $\{G, G'\}$ -alternantes tiverem o outro extremo livre de G' , estaremos concluindo que G' tem pelo menos tantos vértices livres quanto G , um absurdo.

Assim, pelo menos um desses caminhos $\{G, G'\}$ -alternantes maximais pares tem um extremo livre de G e o outro coberto por algum elemento F de $T(G')$. Seja C um tal caminho. Não é difícil ver que $G'' := G \triangle C$ é um $\mathcal{F}$ -empacotamento do tipo que procuramos.

Por outro lado, se algum vértice em H coberto por G' e livre de G estiver coberto por um elemento de $T(G')$, então o próprio G pode fazer o papel de G'' .

Desse modo, podemos supor, sem perda de generalidade, que existe um vértice v livre de G e coberto por algum elemento F de $T(G')$. (O fato de que $|T(G'')| = |T(G)|$ tem importância fundamental para que possamos supor isso sem comprometer a demonstração, devido à suposição inicial de que $|T(G)|$ é mínimo.)

É imediato que todo caminho $\{G, G'\}$ -alternante maximal que possui pelo menos um extremo em $F - v$ começa com G -aresta e ou é ponte ou é par. Se todos os vértices de $F - v$ são extremos de alguma ponte (Figura 3.26), então G admite uma pipa aumentadora, uma contradição. Caso contrário, há pelo menos dois vértices de $F - v$ que ou são livres de G ou estão contidos em caminhos $\{G, G'\}$ -alternantes maximais pares. Seja E um emparelhamento perfeito no grafo $F - v$. Considerando as arestas de E e mais todos os caminhos maximais pares e pontes com extremos em F , podemos construir ou uma cauda ou um caminho aumentador de G em H (Figura 3.27), contrariando a escolha de G . □

Para completar, observe a similaridade com o caso $\mathcal{F} = \{K_2, K_3\}$. Como naquela situação, podemos concluir que um $\mathcal{F}$ -empacotamento não é ótimo se e só se a remoção ou o acréscimo de uma única cópia de algum $F_i \in \mathcal{F}$ permite-nos construir um $\mathcal{F}$ -empacotamento de tamanho maior.

Lema 3.4.4 *Seja $\mathcal{F} := \{K_2, F_1, \dots, F_k\}$, com F_i hipoemparelhável, $1 \leq i \leq k$. Seja G um $\mathcal{F}$ -empacotamento em um grafo H . Então G é um $\mathcal{F}$ -empacotamento máximo se e somente se*

- (a) *nenhum $T(G)$ -emparelhamento de H cobre mais vértices do que G ;*
- (b) *nenhum $T(G) \setminus \{F\}$ -emparelhamento de H cobre mais vértices que G , para qualquer elemento F de $T(G)$;*
- (c) *nenhum $T(G) \cup \{F\}$ -emparelhamento de H cobre mais vértices do que G , para qualquer elemento F de $T(H)$ que não pertença a $T(G)$.* □

Com base nesse lema, podemos adaptar o Algoritmo Um para o caso geral, como está mostrado na Figura 3.28.

Como no Algoritmo Um, os passos (1), (9) e (15) em que se tem que construir emparelhamentos máximos determinam a complexidade de tempo do algoritmo.

Os passos (1), (9) e (15) são executados em tempo polinomial com o auxílio de algoritmos clássicos para encontrar emparelhamentos. Vamos estudar o número de vezes que os passos (9) e (15) são executados.

Levando em conta que a cada iteração do loop iniciado em (5) o $\mathcal{F}$ -empacotamento contido em G aumenta de tamanho, (9) e (15) são executados no máximo $|V(H)| \times |T(H)|$ vezes.

Entrada: Um grafo H qualquer;

Saída: Um $\mathcal{F}$ -empacotamento G em H de tamanho máximo.

- (1) Encontre um emparelhamento máximo E em H ;
- (2) $\text{máxG} := E$;
- (3) $\text{tmáxG} :=$ número de vértices cobertos por E ;
- (4) $\text{máximo} := \text{falso}$;
- (5) Enquanto não máximo
 - (6) $\text{máximo} := \text{verdadeiro}$;
 - (7) $G := \text{máxG}$;
 - (8) Para cada elemento T do conjunto $T(G)$ faça
 - (9) Encontre um $T(G) \setminus \{T\}$ -emparelhamento máximo E_1 em H ;
 - (10) Se $|V(E_1)| > \text{tmáxG}$
 - então
 - (11) $\text{máxG} := E_1$;
 - (12) $\text{tmáxG} := |V(E_1)|$;
 - (13) $\text{máximo} := \text{falso}$;
 - (14) fimPara
 - (15) Para cada elemento T do conjunto $T(H) \setminus T(G)$ faça
 - (16) Encontre um $T(G) \cup \{T\}$ -emparelhamento máximo E_2 em H ;
 - (17) Se $|V(E_2)| > \text{tmáxG}$
 - então
 - (18) $\text{máxG} := E_2$;
 - (19) $\text{tmáxG} := |V(E_2)|$;
 - (20) $\text{máximo} := \text{falso}$;
 - (21) fimPara
 - (22) fimEnquanto
 - (23) Devolva G .

Figura 3.28: Algoritmo para o caso $\mathcal{F} = \{K_2, F_1, \dots, F_k\}$.

A questão é como construir o conjunto $T(H)$ e qual a cardinalidade deste conjunto. O cálculo abaixo mostra que podemos limitar $|T(H)|$ por um fator que é polinomial na ordem de H .

Seja $n := |V(H)|$. Supondo que $T(H)$ seja construído de modo exaustivo, temos

$$|T(H)| \leq \sum_{F \in \mathcal{F}} \binom{n}{|V(F)|}.$$

Seja $I := \{i : \exists F \in \mathcal{F} \text{ com } |V(F)| = i\}$. Temos

$$\begin{aligned} |T(H)| &\leq |\mathcal{F}| \sum_{i \in I} \binom{n}{i} \\ &= \begin{cases} O(2^n) & \text{se } |I| = \Omega(n); \\ O(p(n)) & \text{se } |I| = o(n) \text{ para algum polinômio } p; \end{cases} \\ &= \begin{cases} O(2^n) & \text{se } n = O(|I|) = O(|\mathcal{F}|); \\ O(p(n)) & \text{se } n = \omega(|I|); \end{cases} \end{aligned}$$

Como $|\mathcal{F}|$ é finito, então não podemos ter $n = O(|\mathcal{F}|)$ para todo n . Assim, temos que $|T(H)| = O(p'(n))$ para algum polinômio p' . Portanto o algoritmo da Figura 3.28 é polinomial.

Com isso podemos enunciar o seguinte resultado.

Teorema 3.4.5 *Seja $\mathcal{F} := \{K_2, F_1, \dots, F_k\}$ com F_i hipoemparelhável, $1 \leq i \leq k$. Então existe um algoritmo polinomial que encontra um $\mathcal{F}$ -empacotamento máximo em um grafo arbitrário H .* $\square$

3.4.3 Exemplos

Vamos agora aplicar o Teorema 3.4.5 para provar a polinomialidade dos problemas

- $FATOR(\mathcal{K})$, para $\mathcal{K} \subseteq \{K_t : t \geq 1\}$, K_2 ou K_1 pertencendo a $\mathcal{K}$, e
- $FATOR(\{K_2\} \cup \mathcal{C})$, sendo $\mathcal{C}$ uma família finita de circuitos ímpares.

que citamos no início deste capítulo.

Teorema 3.4.6 *Seja $\mathcal{K}$ uma família (não necessariamente finita) de grafos completos. Se $K_1 \in \mathcal{K}$ ou $K_2 \in \mathcal{K}$ então existe um algoritmo polinomial que encontra um $\mathcal{K}$ -empacotamento máximo em um grafo arbitrário H .*

Prova. Se $K_1 \in \mathcal{K}$, é imediato que H possui um $\mathcal{K}$ -fator. Caso contrário, temos que $K_2 \in \mathcal{K}$. Se $\mathcal{K}$ só possui grafos completos com número par de vértices, pelo Lema 3.4.2 basta encontrar um emparelhamento máximo em H , tarefa para a qual conhecemos algoritmos polinomiais. Se, ao contrário, $\mathcal{K}$ possui pelo menos um grafo completo com número ímpar de vértices, então seja K_s um tal grafo completo com número mínimo de vértices. É fácil perceber que todos os demais grafos completos em $\mathcal{K}$ são $\{K_2, K_s\}$ -fatoráveis. Assim, aplicando o Lema 3.4.2 e o Teorema 3.4.5, garantimos a existência de um algoritmo polinomial também para este caso. $\square$

Teorema 3.4.7 *Seja $\mathcal{C}$ uma família finita de circuitos ímpares. Então existe um algoritmo polinomial que constrói um $\{K_2\} \cup \mathcal{C}$ -empacotamento máximo em um grafo arbitrário H .*

Prova. Todos os grafos em $\mathcal{C}$ são hipoemparelháveis. Portanto o resultado decorre diretamente do Teorema 3.4.5. $\square$

3.5 Resultados negativos

Havíamos mencionado, na introdução neste capítulo, a existência de problemas de fatoração não uniforme $\mathcal{NP}$ -completos. Demos como exemplos os problemas de fatoração definidos por famílias de grafos completos não isomorfos a K_1 ou K_2 , e por famílias finitas de circuitos ímpares.

Nesta seção vamos apresentar um resultado mais geral, provado por Hell e Kirkpatrick em [15], do qual podemos concluir a $\mathcal{NP}$ -completude dos problemas citado no parágrafo acima. A prova desse resultado segue a técnica desenvolvida no Capítulo 2. Assim, será necessário estender a notação e as definições daquele capítulo para famílias de grafos.

3.5.1 Módulos e coerência para famílias de grafos

As definições de módulo, vértices conectores e vértices interiores são as mesmas do Capítulo 2, as quais reproduzimos a seguir.

Um **módulo** é um grafo M com um conjunto não vazio $C(M)$ de vértices diferenciados. Os elementos de $C(M)$ (respect. de $V(M) \setminus C(M)$) são ditos vértices **conectores** (respect. vértices **interiores**) de M . Um F -**módulo** é um módulo que admite um F -empacotamento cobrindo todos os seus vértices interiores.

As definições de extensão modular, vértice restrito, coerência interna e coerência geral são estendidas de modo natural, considerando-se que $\mathcal{F}$ é uma família de grafos conexos.

Uma **extensão modular** de um módulo M é qualquer grafo M' que contém M como um subgrafo induzido, e tal que apenas os vértices conectores de M são adjacentes a vértices fora de M . Seja $G := \{G_1, G_2, \dots, G_d\}$ um F -empacotamento de uma dada extensão modular M' de M . Dizemos que um vértice v de M está **restrito** a M por G , se $v \in V(G_i) \Rightarrow V(G_i) \subseteq V(M)$. Um F -módulo M é **internamente F -coerente** se cada F -fator de cada extensão modular de M restringe a M todos os vértices interiores do mesmo.

Dizemos que um F -módulo M é **F -coerente** se M obedece a 1, 2 e 3 abaixo:

- 1) M é internamente F -coerente;
 - 2) Qualquer F -fator de qualquer extensão modular de M restringe a M ou todos os seus conectores ou nenhum deles;
 - 3) Tanto M quanto $M - C(M)$ admitem F -fatores.
-

Do Capítulo 2, vamos utilizar ainda o conceito de módulo diamante.

Chamamos de **F -diamante**, e denotamos por $D[F, v]$, o F -módulo obtido de F dividindo-se o vértice v em dois vértices v_a e v_b , não adjacentes, e cada um dos quais adjacentes a todos os vizinhos de v . Os conectores de $D[F, v]$ são os vértices v_a e v_b .

Citamos aqui as principais características do grafo $D[F, v]$. Essas propriedades foram demonstradas na Subseção 2.2.

- Para cada grafo F existe um vértice $v \in V(F)$ tal que $D[F, v]$ é internamente F -coerente.
- Todo $\mathcal{F}$ -fator de uma extensão modular de $D[F, v]$ restringe a este grafo exatamente um dos conectores.
- Tanto $D[F, v] - \{v_a\}$ quanto $D[F, v] - \{v_b\}$ são $\mathcal{F}$ -fatoráveis.

3.5.2 Uma condição suficiente para a $\mathcal{NP}$ -completude

A técnica de prova da $\mathcal{NP}$ -completude de problemas de fatoração uniforme baseia-se na obtenção de F -módulos F -coerentes. De fato, a prova do Teorema 2.1.1 demonstra implicitamente o seguinte

Fato: *Se existe um F -módulo F -coerente com $|V(F)| \geq 1$ conectores, então*

$$|V(F)|\text{-DM} \leq_{\mathcal{P}} \text{FATOR}(F).$$

Parte considerável do Capítulo 2 é ocupada pela construção de um módulo com essas características: a F -estrela. Já que o problema do emparelhamento k -dimensional é $\mathcal{NP}$ -completo para $k \geq 3$, conclui-se que $\text{FATOR}(F)$ é $\mathcal{NP}$ -completo para qualquer grafo F conexo com pelo menos três vértices.

O nosso objetivo é aplicar essas ferramentas para problemas de fatoração não uniforme. Para isso precisamos obter um $\mathcal{F}$ -módulo $\mathcal{F}$ -coerente com uma quantidade suficiente de conectores (pelo menos três).

A F -estrela, definida na Seção 2.2, à primeira vista é um candidato natural a ocupar o lugar do módulo procurado. No entanto, ela em geral não é $\mathcal{F}$ -coerente. As Figuras 3.29 e 3.30 apresentam contra-exemplos para famílias de grafos bastante simples.

Embora F -estrelas sejam inadequadas, é razoável que se tente aproveitar algo de sua estrutura, enquanto se procura por um novo módulo. A Figura 3.29 mostra que um dos motivos pelos quais a F -estrela não nos satisfaz é que os F -diamantes não são internamente $\mathcal{F}$ -coerentes. Vamos, então, substituí-los por um novo módulo que apresente essa característica.

Considere $k \geq 1$ cópias do grafo $D[F, v]$, identificadas pelos rótulos $D_1, D_2, \dots, D_k$, tais que, para $i = 1, 2, \dots, k-1$, o vértice v_b de D_i coincide com o vértice v_a de D_{i+1} . Tome os conectores v_a de D_1 e v_b de D_k como sendo os conectores do grafo resultante. Esses conectores serão identificados respectivamente por v_A e v_B .

Vamos identificar o módulo que acabamos de definir por $C[F, v, k]$. Na Figura 3.31 temos um exemplo.

Figura 3.29: Não é internamente $\mathcal{F}$ -coerente ($\mathcal{F} = \{C_3, C_5 + \text{uma corda}, C_7\}$, $F = C_5 + \text{uma corda}$).

Figura 3.30: É internamente $\mathcal{F}$ -coerente mas não é $\mathcal{F}$ -coerente ($\mathcal{F} = \{C_3, K_5\}$, $F = K_5$).

Figura 3.31: O módulo $C[F, v, m]$.

Seja $m := \max\{|V(F')| : F' \in \mathcal{F}\}$. O lema a seguir mostra que o módulo $C[F, v, m]$ possui as propriedades que desejamos.

Lema 3.5.1 *Seja $\mathcal{F}$ uma família de grafos ou 2-conexos ou isomorfos a K_2 . Então*

- i) *o módulo $C[F, v, m]$ é um $\mathcal{F}$ -módulo internamente $\mathcal{F}$ -coerente;*
- ii) *se $D[F, v]$ e $D[F, v] - \{v_a, v_b\}$ não são $\mathcal{F}$ -fatoráveis, então todo $\mathcal{F}$ -fator de uma extensão modular de $C[F, v, m]$ restringe a este grafo exatamente um de seus conectores;*
- iii) *os grafos $C[F, v, m] - \{v_A\}$ e $C[F, v, m] - \{v_B\}$ admitem $\mathcal{F}$ -fatores.*

Prova.

Item i. Claramente, $C[F, v, m]$ é um $\mathcal{F}$ -módulo.

Suponhamos que $C[F, v, m]$ não seja internamente $\mathcal{F}$ -coerente. Então existem uma extensão modular M de $C[F, v, m]$ e um $\mathcal{F}$ -fator G de M , que cobre com um mesmo componente um vértice interno u de $C[F, v, m]$ e um vértice w de $M - V(C[F, v, m])$.

Se todos os caminhos de u a w em G passam por um único conector de $C[F, v, m]$ então o componente de G que contém esses caminhos possui um vértice de corte, o que contradiz as hipóteses a respeito da família $\mathcal{F}$. Por outro lado, se há caminhos de u a w passando tanto por v_A quanto por v_B , então o componente de G que contém esses caminhos possui pelo menos $m + 1$ vértices; contradição novamente.

Item ii. Para provar esse item vamos em primeiro lugar mostrar que todo $\mathcal{F}$ -fator de uma extensão modular de $C[F, v, m]$ restringe a cada D_i seus próprios vértices interiores.

Suponha por absurdo que isso não ocorre. Então existe uma extensão modular M de $C[F, v, m]$ e um $\mathcal{F}$ -fator G de M que cobre com um mesmo componente G' um vértice u de um D_i e um vértice w de D_{i+1} , para algum i , $1 \leq i < m$. Pela coerência interna de $C[F, v, m]$, G' é um subgrafo de $C[F, v, m]$, e em consequência disso certamente possui um vértice de corte, o que é absurdo.

O passo seguinte é provar que nem $C[F, v, m]$ nem $C[F, v, m] - \{v_A, v_B\}$ são $\mathcal{F}$ -fatoráveis.

Suponhamos que $C[F, v, m]$ admita um $\mathcal{F}$ -fator.

O grafo $C[F, v, m]$ tem $m + 1$ vértices que não são interiores a nenhum D_i , $1 \leq i \leq m$. Pelo que acabamos de provar, todo $\mathcal{F}$ -fator de extensão modular de $C[F, v, m]$ restringe dois desses vértices ao mesmo D_i , e esses vértices naturalmente são os conectores v_a e v_b de D_i . Isso contradiz a hipótese de que $D[F, v]$ não é $\mathcal{F}$ -fatorável.

Já o grafo $C[F, v, m] - \{v_A, v_B\}$ tem $m - 1$ vértices não interiores a nenhum D_i , $1 \leq i \leq m$. Se $C[F, v, m] - \{v_A, v_B\}$ admite um $\mathcal{F}$ -fator, G , então algum D_i não possui nenhum de seus conectores, v_a e v_b , restritos por G . Como G restringe a D_i os vértices interiores do mesmo, entramos em contradição com o fato de que $D[F, v] - \{v_a, v_b\}$ não é $\mathcal{F}$ -fatorável.

Item iii. Ambos os grafos são facilmente cobertos por $\mathcal{F}$ -fatores constituídos de m cópias de $D[F, v]$, posicionadas de modo adequado. $\square$

Nas Figuras 3.29 e 3.30 demos dois exemplos ilustrando porque o módulo estrela não é adequado para fazer-se a transformação do problema do emparelhamento multidimensional em $FATOR(\mathcal{F})$. O problema ilustrado no primeiro exemplo, a ausência de $\mathcal{F}$ -coerência interna em $D[F, v]$, é solucionado se substituirmos os módulos diamante por $C[F, v, m]$.

O segundo problema é que não conseguimos garantir o mínimo de três conectores não restritos por um $\mathcal{F}$ -fator de uma extensão modular. A seguinte construção elimina o problema.

Seja $F \in \mathcal{F}$ e $v \in V(F)$. Considere um $\mathcal{F} \setminus \{F\}$ -empacotamento máximo em uma cópia N de F . Os vértices livres são rotulados $a_1, a_2, \dots, a_k$. Para cada i , $1 \leq i \leq k$, há uma cópia distinta de $C[F, v, m]$ cujo conector v_A coincide com a_i . O módulo resultante, com os k vértices v_B das cópias de $C[F, v, m]$ como conectores, será denotado por $S[F, v, m]$. Sejam $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ esses k vértices.

Na Figura 3.32 mostramos um esquema deste módulo.

Lema 3.5.2 *Seja $\mathcal{F}$ uma família de grafos ou 2-conexos ou isomorfos a K_2 . Seja $F \in \mathcal{F}$ tal que nem $D[F, v]$ nem $D[F, v] - \{v_a, v_b\}$ são $\mathcal{F}$ -fatoráveis. Então o módulo $S[F, v, m]$ é um $\mathcal{F}$ -módulo $\mathcal{F}$ -coerente.*

Prova. Seja M uma extensão modular de $S[F, v, m]$, e G um $\mathcal{F}$ -fator de M .

Figura 3.32: Esquema do módulo $S[F, v, m]$.

Nenhum subgrafo conexo de M isomorfo a um elemento de $\mathcal{F}$ pode cobrir um vértice em $M - S[F, v, m]$ e um vértice de $S[F, v, m]$ que não pertença a uma das k cópias de $C[F, v, m]$, já que um tal subgrafo teria que possuir pelo menos $m + 1$ vértices. Essa observação, mais o item i) do Lema 3.5.1, implicam a $\mathcal{F}$ -coerência interna de $S[F, v, m]$.

O próximo passo é mostrar que um $\mathcal{F}$ -fator G de M restringe a M ou todos os conectores ou nenhum.

Suponhamos que G restrinja c conectores de $S[F, v, m]$. Pelo item ii) do Lema 3.5.1, a cada um desses c conectores corresponde um conector a_i que não é restrito por G à sua respectiva cópia de $C[F, v, m]$. Devido à coerência interna de $C[F, v, m]$, os vértices de $N - \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ficam restritos a N por G . Se $0 < c < k$, então temos entre $|V(N)| - k + 1$ e $|V(N)| - 1$ vértices de N restritos a N por G . Isso contraria o fato de que $|V(N)| - k$ é o tamanho de um $\mathcal{F} \setminus \{F\}$ -empacotamento máximo em N .

Resta mostrar que tanto $S[F, v, m]$ quanto $S[F, v, m] - \{b_1, \dots, b_k\}$ são $\mathcal{F}$ -fatoráveis.

Um $\mathcal{F}$ -fator de $S[F, v, m]$ pode ser obtido tomando-se uma cópia de F e, para cada i , $1 \leq i \leq k$, o $\mathcal{F}$ -fator de $C[F, v, m]$ que deixa de restringir o respectivo conector v_A . Já um $\mathcal{F}$ -fator de $S[F, v, m] - \{b_1, \dots, b_k\}$ pode ser composto de um $\mathcal{F} \setminus \{F\}$ -empacotamento máximo adequado em N mais k $\mathcal{F}$ -fatores de $C[F, v, m]$ que restringem os respectivos conectores v_A . Isso completa a prova do lema. $\square$

Para obtermos a condição suficiente de que necessitamos resta apenas generalizar o fato mencionado na página 59.

Teorema 3.5.3 *Seja $\mathcal{F}$ uma família finita de grafos conexos. Se existe um $\mathcal{F}$ -módulo $\mathcal{F}$ -coerente com pelo menos três conectores, então o problema de $\mathcal{F}$ -fatoração é $\mathcal{NP}$ -completo.*

Prova. Vamos transformar o problema do emparelhamento k -dimensional no problema $FATOR(\mathcal{F})$, sendo k o número de conectores de um $\mathcal{F}$ -módulo $\mathcal{F}$ -coerente M com pelo menos três conectores. Como o primeiro problema é $\mathcal{NP}$ -completo, da transformação seguirá a tese.

Considere uma instância do problema k -DM, dada por um inteiro $p \geq 1$ e por um conjunto de tuplas $V \subseteq \{1, 2, \dots, p\}^k$. A partir de V , vamos construir uma instância $R'(V)$ do problema $FATOR(\mathcal{F})$.

Tomemos kp vértices distintos e dois a dois não adjacentes, cada um dos quais rotulado como (i, j) , $1 \leq i \leq k$ e $1 \leq j \leq p$. Para cada tupla $(v_1, v_2, \dots, v_k) \in V$, o grafo $R'(V)$ contém uma cópia do módulo M , cujos k conectores são idênticos aos vértices $(1, v_1), (2, v_2), \dots, (k, v_k)$. Isto completa a construção. Note que R' é, claramente, uma transformação polinomial.

Os mesmos argumentos usados na prova do Teorema 2.1.1 do Capítulo 2 mostram que V admite um emparelhamento k -dimensional se e somente se $R'(V)$ admite um $\mathcal{F}$ -fator. $\square$

Podemos agora, considerando todas as hipóteses feitas sobre a família $\mathcal{F}$, enunciar a seguinte condição suficiente para a $\mathcal{NP}$ -completude de $FATOR(\mathcal{F})$.

Teorema 3.5.4 *Seja $\mathcal{F}$ uma família finita de grafos ou 2-conexos ou isomorfos a K_2 . Se algum grafo $F \in \mathcal{F}$ satisfaz as afirmações*

- 1) *para algum $v \in V(F)$, o grafo $D[F, v]$ não admite um $\mathcal{F}$ -fator; e*
- 2) *todo $\mathcal{F} \setminus \{F\}$ -empacotamento de $\mathcal{F}$ deixa pelo menos três vértices livres;*

então o problema $FATOR(\mathcal{F})$ é $\mathcal{NP}$ -completo.

Prova. O enunciado fornece quase todas as hipóteses necessárias para aplicarmos o Lema 3.5.2, exceto a condição de que $D[F, v] - \{v_a, v_b\}$ não é $\mathcal{F}$ -fatorável. No entanto, essa condição é uma consequência da sentença 2) acima. Assim, o módulo $S[F, v, m]$ é um $\mathcal{F}$ -módulo $\mathcal{F}$ -coerente. Observando a construção de $S[F, v, m]$, notamos que o número de conectores deste módulo é exatamente a deficiência do grafo F , a qual é pelo menos três pela condição 2). Do Teorema 3.5.3 segue a tese. $\square$

3.5.3 Exemplos

De posse do Teorema 3.5.4, podemos caracterizar a complexidade dos problemas de fatoração definidos por famílias dos seguintes tipos:

- famílias de grafos completos;
- famílias finitas de circuitos ímpares mais, possivelmente, o grafo K_2 .

Obtemos, ainda, um resultado parcial para

- famílias da forma $\{K_2, F\}$, com F conexo.

O último resultado dessa lista foi apresentado em [15]. Famílias de grafos da forma acima serão estudadas no último capítulo, quando veremos uma caracterização completa da complexidade dos respectivos problemas de fatoração.

Teorema 3.5.5 *Seja $\mathcal{F}$ uma família de grafos completos. Se $K_1 \in \mathcal{F}$ ou $K_2 \in \mathcal{F}$, então*

$$FATOR(\mathcal{F}) \in \mathcal{P},$$

caso contrário

$$FATOR(\mathcal{F}) \text{ é } \mathcal{NP}\text{-completo}.$$

Prova. Se $K_1 \in \mathcal{F}$ ou $K_2 \in \mathcal{F}$, o Teorema 3.4.6 garante que $FATOR(\mathcal{F}) \in \mathcal{P}$.

Se $K_1 \notin \mathcal{F}$ e $K_2 \notin \mathcal{F}$, então considere o grafo completo de menor ordem em $\mathcal{F}$, K_s . Para cada classe de congruência módulo s , tome o grafo completo de $\mathcal{F}$ cuja ordem seja mínima e pertença à classe de congruência em questão. A família $\mathcal{F}'$ composta pelos grafos completos selecionados é irredutível maximal em $\mathcal{F}$ e é também finita.

Podemos, assim, aplicar o Teorema 3.5.4 e concluir que $FATOR(\mathcal{F}')$ — e portanto $FATOR(\mathcal{F})$ — é $\mathcal{NP}$ -completo. $\square$

Teorema 3.5.6 *Seja $\mathcal{F}$ uma família finita, $\mathcal{F} \subseteq \{K_2\} \cup \{C_i; i \geq 3\}$. Se $K_2 \in \mathcal{F}$ então $FATOR(\mathcal{F}) \in \mathcal{P}$, caso contrário $FATOR(\mathcal{F})$ é $\mathcal{NP}$ -completo.*

Prova. Se $K_2 \in \mathcal{F}$ basta aplicar o Teorema 3.4.7. Caso contrário, a $\mathcal{NP}$ -completude decorre do Teorema 3.5.4, sendo F o circuito de maior ordem de $\mathcal{F}$. $\square$

Teorema 3.5.7 *Seja $\mathcal{F} = \{K_2, F\}$, com F 2-conexo.*

Figura 3.33: Um grafo 2-conexo não bipartido com 4 vértices livres de um emparelhamento máximo. O emparelhamento máximo está indicado pelas linhas espessas e os vértices livres pelas setas. A poligonal pontilhada indica um circuito ímpar no grafo.

- 1) Se F admite um emparelhamento perfeito ou F é hipoemparelhável então $FATOR(\mathcal{F}) \in \mathcal{P}$.
- 2) Se um emparelhamento máximo de F deixa pelo menos três vértices em F livres, então $FATOR(\mathcal{F})$ é $\mathcal{NP}$ -completo.

Prova.

- 1) Se F é perfeitamente emparelhável, então $FATOR(\mathcal{F})$ equivale ao problema do emparelhamento perfeito. Se F é hipoemparelhável, o Teorema 3.4.5 se aplica.
- 2) Nesse caso, o Teorema 3.5.4 garante a $\mathcal{NP}$ -completude do problema. A condição 1) do Teorema 3.5.4 é garantida pela sentença 2) acima. $\square$

Para finalizar, mostramos um exemplo de grafo 2-conexo não bipartido com deficiência maior ou igual a três na Figura 3.33.

Capítulo 4

Fatoração por famílias de grafos bipartidos completos

Até aqui estudamos duas grandes classes de problemas de fatoração que podem ser resolvidos em tempo polinomial:

- $FATOR(F)$, onde F é um grafo cujos componentes são isomorfos a K_1 ou K_2 , e
- $FATOR(\mathcal{F})$, onde $\mathcal{F}$ é composta por uma família finita $\mathcal{J}$ de grafos hipoemparelháveis, por K_2 e por uma família qualquer de grafos $\{K_2\} \cup \mathcal{J}$ -fatoráveis.

Neste capítulo estudaremos problemas de fatoração por famílias de grafos bipartidos completos. Veremos uma terceira classe de problemas de fatoração polinomiais: a classe dos problemas $FATOR(\mathcal{S})$ em que $\mathcal{S}$ é composto por uma família seqüencial de estrelas $\mathcal{J}$ e por uma família de grafos $\mathcal{J}$ -fatoráveis. Finalmente, provaremos que os demais problemas de fatoração por grafos bipartidos completos são todos $\mathcal{NP}$ -difíceis.

4.1 Famílias seqüenciais de estrelas

Chamamos **estrela** a todo grafo isomorfo a $K_{1,i}$ para algum $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$, e denotamos um tal grafo por S_i . Entendemos por **conjunto (família) seqüencial de estrelas** um conjunto ou igual a $\emptyset$, ou da forma $\{S_i : 1 \leq i \leq k\}$ para algum $k \geq 1$, ou igual a $\{S_i : i \geq 1\}$. Como consequência dessa definição, $\{S_i : i \geq 1\}$ é o único conjunto seqüencial de estrelas infinito. Todos os demais conjuntos seqüenciais de estrelas são finitos.

Sejam $\mathcal{J}$ uma família seqüencial de estrelas não vazia e $\mathcal{I}$ uma família qualquer de grafos $\mathcal{J}$ -fatoráveis. Vamos estudar o problema $FATOR(\mathcal{S})$, onde $\mathcal{S} = \mathcal{I} \cup \mathcal{J}$. Sem perda

Entrada: Um grafo H sem vértices isolados;

Saída: Um $\{S_i : i \geq 1\}$ -fator G de H .

- (1) $G := H$;
 - (2) Enquanto G possui arestas cujos extremos são de grau maior que 1 em G
 - (3) Seja a uma tal aresta;
 - (4) $G := (V(G), A(G) \setminus \{a\})$;
 - fimEnquanto
 - (5) Devolva G .
-

Figura 4.1: Algoritmo para o caso $\mathcal{S} = \{S_i : i \geq 1\}$.

de generalidade, podemos nos concentrar nos casos em que $\mathcal{I} = \emptyset$ devido aos Lemas 3.4.1 e 3.4.2.

O caso em que $\mathcal{S}$ é seqüencial infinito é de fácil solução. O teorema a seguir fornece um algoritmo polinomial para resolvermos este problema.

Teorema 4.1.1 *Um grafo H tem um $\{S_i : i \geq 1\}$ -fator se e somente se não tem vértices isolados.*

Prova. Se H tem um $\{S_i : i \geq 1\}$ -fator, é imediato que H não possui vértices isolados.

Suponhamos que H não tenha vértices isolados. Aplique a H o algoritmo da Figura 4.1.

O fato de G ser um $\{S_i : i \geq 1\}$ -fator ao término do algoritmo decorre da não existência em H de vértices com grau menor que 1 e da condição de parada do loop que começa no passo (2). Isso completa a prova do teorema. $\square$

Antes de prosseguir, duas palavras acerca desse algoritmo.

A primeira diz respeito à complexidade. De fato, o algoritmo acima possui complexidade $O(|A(H)|)$, e portanto é polinomial.

Observamos também que, se aplicado a um grafo arbitrário, este algoritmo encontra um $\{S_i : i \geq 1\}$ -empacotamento máximo. Isto se dá pelo seguinte motivo: se submetermos um grafo arbitrário H ao algoritmo da Figura 4.1, vamos obter um $\{S_i : i \geq 1\}$ -empacotamento que cobre todos os vértices de H exceto os isolados. Mas tais vértices não podem ser cobertos por nenhum $\{S_i : i \geq 1\}$ -empacotamento.

Vamos examinar agora o caso em que $\mathcal{S}$ é um conjunto seqüencial de estrelas finito. Seja k a cardinalidade de $\mathcal{S}$. Este é mais um exemplo do emprego de configurações

aumentadoras, de maneira similar ao que fizemos quando estudamos empacotamentos por arestas e grafos hipoemparelháveis.

Assim, precisamos descrever as configurações aumentadoras relacionadas com o problema em questão. Nas definições usaremos o conceito de caminho alternante, visto no Capítulo 3.

Seja H um grafo qualquer, e G um $\mathcal{S}$ -empacotamento em H . Seja $C := (c_0, \dots, c_p)$ um caminho G -alternante em H , de comprimento p . Dizemos que $H[V(C)]$ é uma **configuração aumentadora** de G em H se as seguintes condições forem satisfeitas:

- i) o vértice c_0 é livre de G ;
- ii) o vértice c_i tem grau 1 em G para todo i par, $0 < i < p$;
- iii) o vértice c_i tem grau k em G para todo i ímpar, $0 < i < p$;
- iv) o vértice c_p tem grau menor que k em G e p é ímpar.

Levando em conta o grau de c_p e o valor de k , podemos distinguir dois tipos de configurações aumentadoras.

Dizemos que $H[V(C)]$ é uma **configuração aumentadora de tipo 1** de G em H se, além de satisfazer i) a iv), $H[V(C)]$ satisfaz também a

- v) ou o vértice c_p tem grau diferente de 1 em G , ou o componente de G que contém c_p é isomorfo a S_1 .

Se $H[V(C)]$ obedece às condições i) a iv) mas não a v), então C é uma **configuração aumentadora de tipo 2**. Observe que a existência de uma tal configuração implica $k > 1$.

A Figura 4.2 ilustra as configurações de tipos 1 e 2. O caminho C está indicado pelas linhas espessas. Linhas duplas indicam pertinência a G .

Exemplos notáveis de configurações aumentadoras de tipo 1 são aquelas em que c_p tem grau zero em G . Em particular, estas são as únicas configurações aumentadoras no caso em que $k = 1$, ou seja, no problema do emparelhamento perfeito.

Aqui cabe um comentário a respeito da definição das configurações aumentadoras. Hell e Kirkpatrick ([16]) definem três tipos de configurações distintas: os dois mostrados na Figura 4.2 e um adicional, por eles indicado como *configuração iii*, e que pode ser visto na Figura 4.3. No entanto, esse terceiro tipo de configuração pode ser encarado como um caso particular de configuração de tipo 2 em que o componente de G que contém c_p

Figura 4.2: Configurações aumentadoras.

contém também c_{p-1} . Essas duas configurações são aumentadas ambas do mesmo modo, veja a Figura 4.4.

Nossa definição de configuração aumentadora de tipo 2 aplica-se não só à configuração iii de Hell e Kirkpatrick, mas também a casos em que o componente de G que contém c_p contém também algum outro vértice c_i , $0 < i < p$. Em [16] essa possibilidade é afastada considerando-se apenas configurações aumentadoras minimais. Não encontramos motivo para excluir tais casos neste trabalho, e assim não o fazemos.

É um fato — cuja demonstração veremos — que a não existência de configurações aumentadoras é condição necessária e suficiente para que um $\mathcal{S}$ -empacotamento seja

Figura 4.3: Configuração iii de Hell e Kirkpatrick.

Figura 4.4: Configurações aumentadas.

máximo. No entanto a prova disso vai ser adiada por enquanto. Ao contrário do que fizemos no capítulo anterior, vamos em primeiro lugar demonstrar alguns resultados tradicionais de caráter combinatório sobre $\mathcal{S}$ -empacotamentos e em seguida daremos a descrição de um algoritmo polinomial que encontre tais empacotamentos.

O primeiro resultado que veremos é uma versão da fórmula de Berge (Teorema 1.3.1), para o nosso problema.

Teorema 4.1.2 *Seja H um grafo qualquer. Seja $\mathcal{S}$ uma família seqüencial de estrelas finita, com $|\mathcal{S}| \geq 2$. Seja $k := |\mathcal{S}|$. Então*

$$def_{\mathcal{S}}(H) = \max\{i(T) - k|T| : T \subseteq V(H)\}$$

onde $i(T)$ é o número de vértices isolados no grafo $H - T$.

Prova. Seja $k := |\mathcal{S}|$. Claramente, $def_{\mathcal{S}}(H) \geq i(T) - k|T|$ para todo subconjunto T de $V(H)$, já que cada vértice contido em um tal subconjunto possui grau máximo igual a k em um $\mathcal{S}$ -empacotamento.

Para provar que vale a igualdade, vamos exibir um conjunto $T \subseteq V(H)$ tal que $def_{\mathcal{S}}(H) \leq i(T) - k|T|$.

Seja G um $\mathcal{S}$ -empacotamento máximo em H . Considere os seguintes subconjuntos de $V(H)$:

U é o conjunto dos vértices de H que são livres de G ;

T é o conjunto dos vértices t de $H - U$ tais que para algum $u \in U$ existe um caminho G -alternante de comprimento ímpar em H , com extremos u e t ;

W é o conjunto dos vértices w de $H - U$ tais que para algum $u \in U$ existe um caminho G -alternante de comprimento par positivo em H , com extremos u e w .

É importante notar que

- i) $W \cap T = \emptyset$. De fato, se existisse um vértice v em T e em W , então existiria um caminho G -alternante ímpar começando em U e terminando em um vértice de grau menor que k em G . Um tal caminho seria uma configuração aumentadora de G em H , uma contradição.

O mesmo argumento mostra que

- ii) não há vértices em T com grau menor que k em G .

Dos itens acima, podemos concluir que

- iii) $|W| \geq k|T|$. Vejamos os motivos.

Considere $t \in T$ e $w \in Adj_G(t)$. Então existe um caminho G -alternante par de U a w , o que implica que $w \in W$. Como t tem grau k em G e $W \cap T = \emptyset$, temos a desigualdade $|W| \geq k|T|$.

Com isso, conseguimos provar que $i(T) - k|T| \geq i(T) - |W|$. Resta apenas provar que os vértices de U e W estão isolados em $H - T$.

Suponhamos que não estejam. Considere dois vértices adjacentes, $w_1 \in W \cup U$ e $w_2 \in W$. Sejam C_1 e C_2 caminhos G -alternantes pares chegando respectivamente a w_1 e w_2 e partindo de U . (Eventualmente, C_1 pode ter comprimento zero.) Como w_1 e w_2 são ambos adjacentes em G a vértices pertencentes a T e os vértices de T têm grau k em G , então w_1 e w_2 têm grau 1 em G . Mas neste caso temos um caminho G -alternante ímpar terminando em um vértice de grau 1. Se $k \geq 2$, esse caminho é uma configuração aumentadora de G , contradição.

Por outro lado, dois vértices de U não podem ser adjacentes, pois neste caso seria possível acrescentar um componente isomorfo a S_1 em G .

Com isso conseguimos

$$\text{def}_S(H) = |U| \leq i(T) - |W| \leq i(T) - k|T|.$$

□

Note o uso do fato (que é imediato) de que a não existência de configurações aumentadoras é condição necessária para a maximalidade de um S -empacotamento. A suficiência será mostrada a seguir.

Teorema 4.1.3 *Seja S uma família seqüencial de estrelas finita. Um S -empacotamento G em um grafo H é máximo se e somente se G não admite configurações aumentadoras em H .*

Prova. Basta apenas provar que se G não admite configurações aumentadoras, então G é máximo.

Se $|S| = 1$, é bem conhecido o fato de que o enunciado é válido. Suponhamos que $|S| \geq 2$. Se G não admite configurações aumentadoras, então pelos argumentos da prova do Teorema 4.1.2, podemos concluir que existe um conjunto $T \subseteq V(H)$ tal que G deixa $i(T) - k|T|$ vértices livres, e portanto G é um empacotamento máximo. □

Uma outra consequência do Teorema 4.1.2 é o seguinte:

Teorema 4.1.4 *Seja S uma família seqüencial de estrelas finita com $|S| \geq 2$. Seja $k := |S|$. Um grafo H admite um S -fator se e somente se $i(T) \leq k|T|$ para todo conjunto $T \subseteq V(H)$, onde $i(T)$ é o número de vértices isolados em $H - T$.*

Prova. É imediato que a condição $i(T) \leq k|T|$ para todo $T \subseteq V(H)$ é necessária para a existência de um S -fator em H . A suficiência, por sua vez, decorre do Teorema 4.1.2, pois temos $\text{def}_S(H) = \max\{i(T) - k|T| : T \subseteq V(H)\} = i(\emptyset) - k|\emptyset| = 0$. □

Figura 4.5: Um contra-exemplo: $H := C_9$ e T com 4 vértices. Os vértices indicados com $\circ$ ficam isolados em $H - T$ e os vértices indicados com x pertencem a T .

Ainda uma observação sobre os Teoremas 4.1.2 e 4.1.4. Nenhum dos dois é válido quando $\mathcal{S} = \{S_1\}$. Por exemplo, considere $H := C_n$, n ímpar. Neste caso temos $\max\{i(T) - |T| : T \subseteq V(H)\} = 0$ enquanto que $\text{def}_{\mathcal{S}}(H) = 1$. De fato, nunca é possível isolar mais do que $i - 1$ vértices retirando-se i vértices de H , com $i \geq 1$, de modo que o máximo da expressão $i(T) - |T|$ só é atingido quando $T = \emptyset$. Assim, $\max\{i(T) - k|T| : T \subseteq V(H)\} = 0$ e $\text{def}_{\{S_1\}} = 1$. Na Figura 4.5 temos um exemplo.

Observe que na prova do Teorema 4.1.2 não podemos garantir que os vértices do conjunto W estão isolados em $H - T$ se $k = 1$. A razão disso é que C_1 e C_2 podem possuir o mesmo extremo em U . Se, entretanto, H for bipartido, o teorema vale para $k \geq 1$.

Na Figura 4.6 mostramos um algoritmo baseado nos resultados 4.1.2 a 4.1.4.

Considere uma iteração i do Algoritmo Três, $i \geq 1$. Sejam W_i , T_i e G_i os valores das variáveis W , T e G no início da iteração i .

Em primeiro lugar, vamos demonstrar o teorema que segue. De posse desse resultado discutiremos a complexidade e a corretude do algoritmo, justificando entre outras coisas a existência de configurações *de tipo 1* no passo (10).

Teorema 4.1.5 *Para cada iteração i do Algoritmo Três, $i \geq 1$, valem*

- i) se $k \geq 2$ então $\text{Adj}_H(W_i) \cap W_i = \emptyset$;
- ii) $|V(G_i)| = |V(H)| - |W_i| + k|T_i|$;

Entrada: Um grafo H qualquer;

Saída: Um $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ -empacotamento G de H de tamanho máximo. ($k \geq 1$).

- (1) Encontre um emparelhamento máximo E em H ;
 - (2) $G := E$;
 - (3) $T := \emptyset$;
 - (4) $W := \{\text{vértices de } H \text{ livres de } G\}$;
 - (5) Enquanto $W \neq \emptyset$ ou $Adj_H(W) \not\subseteq W \cup T$
 - (6) Seja wt uma aresta de H com $w \in W$ e $t \notin W \cup T$;
 - (7) Se t tem grau k em G

então

 - (8) $T := T \cup \{t\}$;
 - (9) $W := W \cup Adj_G(t)$;

senão
 - (10) Seja C uma configuração aumentadora de tipo 1 de G em H que termine em t ;
 - (11) $G := G \triangle C$;
 - (12) $T := \emptyset$;
 - (13) $W := \{\text{vértices de } H \text{ livres de } G\}$;

fimEnquanto
 - (14) Devolva G .
-

Figura 4.6: Algoritmo Três.

- iii) os elementos de W_i são extremos de algum caminho G_{i-1} -alternante de comprimento par em $H[W_i \cup T_i]$ satisfazendo as condições i), ii) e iii) da definição de configuração aumentadora;
- iv) os elementos de T_i são extremos de algum caminho G_{i-1} -alternante de comprimento ímpar em $H[W_i \cup T_i]$ satisfazendo as condições i) a iii) da definição de configuração aumentadora;
- v) G_i não admite configurações aumentadoras de tipo 2;
- vi) se $T_i \neq \emptyset$ então $W_{i-1} \subseteq W_i$ e $T_{i-1} \subseteq T_i$.

Prova. Faremos a prova por indução em i .

Base: $i = 1$.

Do algoritmo temos que $W_1 = \{\text{vértices de } H \text{ livres de } G_1\}$, o que implica de imediato a propriedade iii). Além disso, se tivéssemos $\text{Adj}_H(W_1) \cap W_1 \neq \emptyset$, então E não seria um emparelhamento máximo em H . Portanto também vale i).

Já iv) e vi) são conseqüências do fato de que $T_1 = \emptyset$.

Quanto a ii), temos que $|V(H)| - |W_1| + k|T_1| = |V(H)| - |W_1| + 0 = |V(G_1)|$.

Finalmente, v) vale pois todos os componentes de G_1 são isomorfos a S_1 .

Passo: $i > 1$.

Sejam $\bar{t}$ e $\bar{w}$ respectivamente os valores das variáveis t e w na iteração $i - 1$.

Vamos distinguir dois casos: no primeiro, $\bar{t}$ tem grau menor que k em G_{i-1} e no segundo, $\bar{t}$ tem grau k em G_{i-1} . O que seria o terceiro caso, quando t tivesse grau maior que k , nunca acontece pois G_{i-1} é um $\mathcal{S}$ -empacotamento.

No primeiro caso, temos

$$\begin{aligned} G_i &= G_{i-1} \triangle C_{i-1}, \\ T_i &= \emptyset, \\ W_i &= \{\text{vértices de } H \text{ livres de } G_i\}, \end{aligned}$$

onde C_{i-1} é o valor de C na iteração $i - 1$.

As propriedades i) a iv) e vi) seguem trivialmente.

Quanto a v), suponhamos por absurdo que G_i admita uma configuração aumentadora de tipo 2, $\bar{C}$. Podemos ver na Figura 4.2 que uma das características dessas configurações é aumentar o número de componentes de um empacotamento.

O $\mathcal{S}$ -empacotamento $G_i \triangle \bar{C}$ possui então um componente a mais que G_i . Observe ainda que não existe G_j , $i \leq j < i$, com número de componentes menor do que o de G_1 , já que nenhuma configuração aumentadora diminui o número de componentes.

Assim, $G_i \triangle \bar{C}$ tem com certeza mais componentes do que E .

Substituindo cada componente de $G_i \triangle \bar{C}$ por uma cópia de S_1 , obtemos um emparelhamento em H maior que E . Mas E é um emparelhamento máximo em H , contradição.

Vamos agora analisar o segundo caso. Temos

$$G_i = G_{i-1}, \quad (4.1)$$

$$T_i = T_{i-1} \cup \{\bar{t}\}, \quad (4.2)$$

$$W_i = W_{i-1} \cup \text{Adj}_{G_{i-1}}(\bar{t}). \quad (4.3)$$

Vamos provar que vale iv). Como $\bar{w} \in W_{i-1}$ e vale iii) para a iteração $i-1$ por hipótese de indução, então existe um caminho G_{i-1} -alternante P de comprimento par em $H[W_{i-1} \cup T_{i-1}]$ satisfazendo as condições i), ii) e iii) da definição de configuração aumentadora, e com um extremo em $\bar{w}$. Como $\bar{t} \notin W_{i-1} \cup T_{i-1}$ e $\bar{t}$ é adjacente a $\bar{w}$, concatenando P à aresta $\bar{w}\bar{t}$ obtemos um caminho G_{i-1} -alternante ímpar com um extremo em $\bar{t}$, obedecendo as restrições i) a iii) da definição de configuração aumentadora. Note que a aresta $\bar{w}\bar{t}$ não é usada por G_{i-1} . Isso resolve o problema para o vértice $\bar{t}$. Quanto aos demais vértices de T_i , por 4.2 todos eles pertencem a T_{i-1} . Assim, a propriedade, para tais vértices, decorre da hipótese de indução.

A afirmativa vi) segue direto de 4.2 e 4.3.

Vamos agora provar iii). Pela hipótese de indução, a propriedade iii) se aplica a todos os elementos de W_{i-1} . É suficiente, portanto, provar para os elementos de $\text{Adj}_{G_{i-1}}(\bar{t})$.

Seja $v \in \text{Adj}_{G_{i-1}}(\bar{t})$. Pela propriedade iv), existe um caminho G_{i-1} -alternante ímpar P' em $H[W_i \cup T_i]$ que atende às condições i) a iii) da definição de configuração aumentadora e tem um extremo em $\bar{t}$. Concatenando a P' a aresta $\bar{t}v$, conseguimos o caminho de que precisamos para provar o item iii).

Antes, porém, precisamos provar que $v \notin W_{i-1} \cup T_{i-1}$, para afastar a possibilidade de v ser coberto por P' .

Suponhamos por absurdo que v seja um elemento do conjunto $\text{Adj}_{G_{i-1}}(\bar{t}) \cap (W_{i-1} \cup T_{i-1})$. Seja $\bar{j} := \max\{j: 1 \leq j < i, T_j = \emptyset\}$.

Se $\bar{j} = i-1$ então temos $T_{i-1} = \emptyset$ e $W_{i-1} = \{\text{vértices em } H \text{ livres de } G_{i-1}\}$. Os vértices de $W_{i-1} \cup T_{i-1}$ são, portanto, livres de G_{i-1} , e isso contradiz a suposição de que v pertence a esse conjunto.

Se $\bar{j} < i-1$, então existe um $\bar{i}$, $\bar{j} < \bar{i} < i$, tal que $v \notin W_{\bar{i}-1} \cup T_{\bar{i}-1}$ e $v \in W_{\bar{i}} \cup T_{\bar{i}}$. Além disso, em todas as iterações entre $\bar{j}$ e i executam-se os passos (8) e (9) do Algoritmo Três

por causa da definição de $\bar{j}$. Então temos $T_{\bar{i}} = T_{i-1} \cup \{\bar{t}\}$ e $W_{\bar{i}} = W_{i-1} \cup \text{Adj}_{G_{i-1}}(\bar{t})$ para algum vértice $\bar{t}$ de H coberto por G_{i-1} (Observe: $G_{i-1} = G_{\bar{i}-1}$).

Se $v \in \text{Adj}_{G_{i-1}}(\bar{t})$ e $\bar{t}$ tem grau k em G_{i-1} , então v tem grau 1 nesse $\mathcal{S}$ -empacotamento. Isto implica que $v \in \text{Adj}_{G_{\bar{i}-1}}(\bar{t})$, o que por sua vez mostra que $\bar{t}$ tem grau k em $G_{\bar{i}-1}$. Mas o único vértice de grau k em G_{i-1} (que é igual a $G_{\bar{i}-1}$) que é adjacente a v é $\bar{t}$, o qual não pode pertencer a $W_{\bar{i}} \cup T_{\bar{i}}$ pois $W_{\bar{i}} \cup T_{\bar{i}} \subseteq W_{i-1} \cup T_{i-1}$ e $\bar{t} \notin W_{i-1} \cup T_{i-1}$. Temos, portanto, uma contradição.

Com isso, podemos concatenar P' e a aresta $\bar{t}v$ e obter o caminho com extremo em v de que precisamos.

Vamos provar que vale i).

Suponhamos por absurdo que $\text{Adj}_H(W_i) \cap W_i \neq \emptyset$. Isso é o mesmo que afirmar que há em W_i pelo menos dois vértices adjacentes, w_1 e w_2 .

Se $k \geq 2$, podemos aplicar a afirmação iii) para concluir que existe uma configuração aumentadora de tipo 2 de G_{i-1} em H , o que contraria v).

Vamos agora demonstrar ii):

$$\begin{aligned}
 |V(G_i)| &= |V(G_{i-1})| \\
 &= |V(H)| - |W_{i-1}| + k|T_{i-1}| \\
 &= |V(H)| - |W_i \setminus \text{Adj}_{G_{i-1}}(\bar{t})| + k|T_i \setminus \{\bar{t}\}| \\
 &= |V(H)| - |W_i| + |\text{Adj}_{G_{i-1}}(\bar{t})| + k|T_i| - k|\{\bar{t}\}| \\
 &= |V(H)| - |W_i| + k|T_i|.
 \end{aligned}$$

Finalmente, a afirmação v) é imediata, já que vale a hipótese de indução para G_{i-1} e $G_{i-1} = G_i$. $\square$

Com o auxílio do Teorema 4.1.5, vamos analisar o Algoritmo Três. Vamos considerar em primeiro lugar que $k \geq 2$. Voltaremos ao caso em que $k = 1$ mais adiante.

A cada iteração (5), se o Algoritmo Três não pára, então ou as instruções (8) e (9), ou as instruções (10) a (13) são executadas. Estas aumentam G , enquanto que as primeiras aumentam $|W \cup T|$. Como tanto $|V(G)|$ quanto $|W \cup T|$ são limitados, então o algoritmo pára em no máximo $O(|V(H)|^2)$ iterações.

Seja s a última iteração do Algoritmo Três. Pelo Teorema 4.1.5, temos $|V(G_s)| = |V(H)| - |W_s| + k|T_s|$. Como $\text{Adj}_H(W_s) \subseteq W_s \cup T_s$ e W_s é um conjunto independente em H , então temos $i(T_s) \geq |W_s|$. Portanto G_s é um $\mathcal{S}$ -empacotamento de H que deixa no máximo $i(T_s) - k|T(s)|$ vértices livres. Pelo Teorema 4.1.2, G_s é um $\mathcal{S}$ -empacotamento máximo em H .

Entrada: Um grafo H qualquer;

Saída: Um $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ -empacotamento G de H de tamanho máximo. ($k \geq 1$).

- (1) Encontre um emparelhamento máximo E em H ;
- (2) $G := E$;
- (3) $T := \emptyset$;
- (4) $W := \{\text{vértices de } H \text{ livres de } G\}$;
- (5) Para todo v em $V(H)$ faça
 - (6) $p_v := v$;
 - (7) Enquanto $W \neq \emptyset$ ou $\text{Adj}_H(W) \not\subseteq W \cup T$
 - (8) Seja wt uma aresta em $\delta_H(W)$, com $w \in W$ e $t \notin W \cup T$;
 - (9) Se t tem grau k em G
 - então
 - (10) $T := T \cup \{t\}$;
 - (11) $W := W \cup \text{Adj}_G(t)$;
 - (12) $p_t := w$;
 - (13) Para todo v em $\text{Adj}_G(t)$ faça
 - (14) $p_v := t$;
 - senão
 - (15) Seja C uma configuração aumentadora de tipo 1 de G em H que termine em t ;
 - (16) $G := G \triangle C$;
 - (17) $T := \emptyset$;
 - (18) $W := \{\text{vértices livres de } G\}$;
 - (19) Para todo v em $V(H)$ faça
 - (20) $p_v := v$;
 - (21) Devolva G .

Figura 4.7: Algoritmo Quatro.

Se $k = 1$, os mesmos argumentos acima mostram que o Algoritmo Três pára, embora com um número de iterações (5) de complexidade $O(|V(H)|)$. Isto pois as instruções (10) a (13) nunca são executadas.

Quanto à maneira de construir uma configuração aumentadora de tipo 1, podemos utilizar um vetor $p: V(H) \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada vértice v o seu vértice antecessor, para guardar caminhos alternantes que obedecem às condições i) a iii) da definição de configuração aumentadora. Na Figura 4.7 mostramos o Algoritmo Três com as modificações necessárias.

É fácil ver que C leva tempo $O(|V(H)|)$ para ser construído, dado p .

Finalmente, discutiremos a complexidade do algoritmo. Acompanhe pela Figura 4.7.

O passo (1) pode ser feito em tempo polinomial usando-se algum algoritmo para encontrar emparelhamentos máximos. O teste em (7) e a seleção da aresta wt em (8) podem ser feitos em tempo $O(|V(H)|^2)$, desde que devemos verificar os vértices adjacentes a cada membro de $W \cup T$.

Já vimos que o Algoritmo Três executa $O(|V(H)|^2)$ iterações se $k \geq 2$ e $O(|V(H)|)$ se $k = 1$. Finalmente, o cálculo da configuração C em (15) e do empacotamento $G \triangle C$ em (16), além da localização dos vértices livres em (18), podem ser feitas em tempo $O(|V(H)|)$.

Assim, o Algoritmo Quatro termina em tempo polinomial.

4.2 Famílias não seqüenciais de estrelas

Nessa seção estudamos a classe de problemas

$$\{FATOR(\mathcal{S}) : \mathcal{S} \subseteq \{S_i : i \geq 1\}, \mathcal{S} \text{ é não seqüencial}\}.$$

Nesta classe, há vários problemas para os quais não podemos provar pertinência em $\mathcal{NP}$. Isto ocorre pois decidir se, dado um conjunto G de subgrafos de um grafo H , G é um $\mathcal{S}$ -empacotamento de H , equivale a resolver o problema da pertinência [17] para o conjunto $\{i : S_i \in \mathcal{S}\}$. É conhecido o fato de que existem problemas de pertinência que são indecidíveis.

Assim sendo, vamos concentrar esforços em provar que os problemas de fatoração por conjuntos não seqüenciais de estrelas são $\mathcal{NP}$ -difíceis. Nos casos em que a pertinência a $\mathcal{NP}$ puder ser demonstrada, teremos resultados positivos quanto à $\mathcal{NP}$ -completude.

Teorema 4.2.1 *Seja $\mathcal{S}$ um conjunto não necessariamente finito de estrelas. Se $\mathcal{S}$ não é seqüencial então o problema do $\mathcal{S}$ -fator é $\mathcal{NP}$ -difícil.*

Prova. Se $\mathcal{S}$ não é seqüencial e $\sup\{i : S_i \in \mathcal{S}\} < 3$, temos $\mathcal{S} = \{S_2\}$. Mas o problema do $\{S_2\}$ -fator é $\mathcal{NP}$ -completo, devido aos resultados demonstrados no Capítulo 2.

Suponhamos $\sup\{i : S_i \in \mathcal{S}\} \geq 3$. Como $\mathcal{S}$ não é seqüencial, existe h , $h \geq 1$, tal que $S_h \notin \mathcal{S}$ e $S_{h+1} \in \mathcal{S}$, e $k > h$, $k \geq 3$, tal que $S_k \in \mathcal{S}$.

Para demonstrar este resultado, vamos transformar o problema k -DM (emparelhamento k -dimensional) em $FATOR(\mathcal{S})$. Já nos utilizamos antes deste problema no capítulo sobre empacotamentos uniformes, e apenas reproduzimos aqui sua definição:

Problema do emparelhamento k -dimensional.

Instância: Um inteiro $p \geq 1$ e um conjunto $V \subseteq \{1, 2, \dots, p\}^k$.

Questão: Existe um subconjunto $W \subseteq V$, $|W| = p$, tal que os elementos de W são dois a dois disjuntos coordenada a coordenada?

Assim, dados $p \geq 1$ e $T \subseteq \{1, 2, \dots, p\}^k$, vamos construir um grafo $R(T)$ tal que T admite um emparelhamento k -dimensional se e somente se $R(T)$ admite um $\mathcal{S}$ -fator.

Seja $t := |T|$. Considere $T := \{(v_1, v_2, \dots, v_k)_l : 1 \leq l \leq t\}$.

O conjunto de vértices de $R(T)$ é composto pelos conjuntos A, B, C, D definidos abaixo, todos disjuntos entre si.

$$\begin{aligned} A &:= \{a_{s,r} : 1 \leq s \leq t-p, 1 \leq r \leq h\} \\ B &:= \{b_s : 1 \leq s \leq t-p\} \\ C &:= \{c_l : 1 \leq l \leq t\} \\ D &:= \{d_{j,i} : 1 \leq j \leq p, 1 \leq i \leq k\}. \end{aligned}$$

O conjunto das arestas de $R(T)$ é

$$\begin{aligned} A(R(T)) &:= \{\{c_l, d_{v_l,i}\} : 1 \leq l \leq t, 1 \leq i \leq k, (v_1, v_2, \dots, v_k)_l \in T\} \\ &\cup \{\{b_s, c_l\} : 1 \leq s \leq t-p, 1 \leq l \leq t\} \\ &\cup \{\{a_{s,r}, b_s\} : 1 \leq s \leq t-p, 1 \leq r \leq h\}. \end{aligned}$$

Na Figura 4.8 temos um esquema do grafo $R(T)$.

Suponhamos que $R(T)$ possua um $\mathcal{S}$ -fator G . Para cada s , $1 \leq s \leq t-p$, os vértices $a_{s,1}, a_{s,2}, \dots, a_{s,h}$ devem estar cobertos por uma cópia de S_u , com $u \geq h+1$ já que $S_h \notin \mathcal{S}$. Cada uma dessas cópias cobre pelo menos um vértice de C ; assim, restam no máximo $t - (t-p) = p$ dentre esses vértices a serem cobertos.

Todos os kp vértices de D devem ser adjacentes em G aos vértices restantes de C . Como cada vértice de C é adjacente em H a exatamente k vértices de D , então restam exatamente p vértices a cobrir em C . Pelas mesmas razões, nenhum vértice de C pode possuir grau menor que k em G .

Figura 4.8: O grafo $R(T)$.

Tais condições somente são satisfeitas se G possuir p componentes isomorfos a S_k , além dos outros $t - p$ componentes isomorfos a S_u . Esses t componentes induzem um emparelhamento k -dimensional em T .

Suponhamos agora que T admita um emparelhamento k -dimensional W . Podemos construir um $\mathcal{S}$ -fator G em $R(T)$ tomando, para compor G , $|W|$ cópias de S_k e $t - |W|$ cópias de S_{h+1} . As $|W|$ cópias de S_k cobrem os vértices de D e $|W|$ vértices de C , enquanto que as $t - |W|$ cópias de S_{h+1} cobrem os demais vértices.

Assim, concluímos que $k\text{-DM} \leq_P \text{FATOR}(\mathcal{S})$, com $S_k \in \mathcal{S}$. Como $k\text{-DM}$ é $\mathcal{NP}$ -completo para $k \geq 3$ ([19]), segue o enunciado. $\square$

4.3 Demais famílias de grafos bipartidos completos

O restante do capítulo discute os demais problemas da classe de problemas $\{\text{FATOR}(\mathcal{B})\}$, na qual $\mathcal{B}$ é composto por uma família qualquer $\mathcal{J}$ de grafos bipartidos completos e mais quaisquer grafos $\mathcal{J}$ -fatoráveis.

No capítulo anterior, introduzimos a noção de família irredutível. Recorrendo a este conceito e aos Lemas 3.4.2 e 3.4.1 daquele capítulo, vamos sem perda de generalidade nos restringir aos casos em que $\mathcal{B}$ é irredutível. Também podemos supor que $\mathcal{B} \setminus \{S_i : i \geq 1\} \neq \emptyset$; os demais casos já foram estudados nas seções prévias.

Denotaremos o conjunto $\mathcal{B} \cap \{S_i : i \geq 1\}$ por $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$, o conjunto das estrelas de $\mathcal{B}$. Vamos distinguir quatro casos:

- 1) o primeiro em que $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ é não seqüencial,
- 2) o segundo em que $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ é seqüencial infinita,
- 3) o terceiro em que $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ é seqüencial finita e $\mathcal{B}$ não é da forma $\{K_{2,2}, K_{t,t}\}$, $t \geq 3$, t ímpar, e
- 4) o quarto em que $\mathcal{B}$ é da forma $\{K_{2,2}, K_{t,t}\}$, $t \geq 3$, t ímpar.

Esta lista de casos é adaptada de Hell e Kirkpatrick [16]. À lista original, que continha apenas os três primeiros casos, acrescentamos o Caso 4), por considerarmos que este caso não era coberto pelas demonstrações desenvolvidas em [16] para os demais. A Seção 4.3.3 discute em detalhe este assunto.

4.3.1 Se a subfamília de estrelas não é seqüencial

Quando $\mathcal{S}_B$ não é seqüencial, podemos usar os argumentos da prova do Teorema 4.2.1 para concluir que $FATOR(\mathcal{B})$ é $\mathcal{NP}$ -difícil.

O ponto mais crítico a ser adaptado da demonstração do Teorema 4.2.1 é a afirmação:

Tais condições somente são satisfeitas se G possuir p componentes isomorfos a S_k , além dos outros $t - p$ componentes isomorfos a S_u .

Na presente situação, a priori pode haver outros modos de cobrirmos os vértices de D mais os vértices restantes de C , usando outros grafos que não as estrelas.

Uma observação que elimina esta possibilidade, é que dois vértices em C não podem fazer parte do mesmo componente de G . Se tal ocorresse, teríamos dois vértices em C com menos do que k vértices adjacentes em G , o que justificaria a existência de um terceiro vértice em C com mais do que k vértices de D adjacentes em G , de modo a que seja possível cobrir os kp vértices de D mais os p vértices de C . Mas pela construção de $R(T)$, não existe um tal vértice.

Com isso, mostramos que C e D só podem ser cobertos por estrelas. Desse ponto em diante, a demonstração pode ser aproveitada sem maiores alterações.

4.3.2 Se a subfamília de estrelas é seqüencial infinita

O caso em que $\mathcal{S}_B$ é seqüencial infinita já foi tratado na Seção 4.1. Não é difícil deduzir do Teorema 4.1.1 que neste caso um $\mathcal{S}_B$ -empacotamento máximo é também um $\mathcal{B}$ -empacotamento máximo.

Na verdade, se levarmos em conta que estamos supondo que $\mathcal{B}$ é irredutível e contém pelo menos um grafo que não é uma estrela, então $\mathcal{S}_B$ não pode ser seqüencial infinita. O próprio Teorema 4.1.1 garante que qualquer grafo bipartido completo que não seja estrela é $\mathcal{S}_B$ -fatorável se $\mathcal{S}_B$ for seqüencial infinita.

4.3.3 Se a subfamília de estrelas é seqüencial finita

Se $\mathcal{S}_B$ é seqüencial finita (vazia ou não), não é possível usar o argumento do Teorema 4.2.1 para provar que $FATOR(\mathcal{B})$ é $\mathcal{NP}$ -difícil. Por outro lado, também não é possível resolver o problema $FATOR(\mathcal{B})$ com os algoritmos apresentados na Seção 4.1. Ao invés disso, aplicaremos a noção de módulo introduzida por Hell e Kirkpatrick em [13] e [14].

No Capítulo 2 introduzimos os conceitos de módulo, vértices conectores e interiores, extensão modular, vértices restritos e coerência interna, os quais reproduzimos a seguir.

Um **módulo** é um grafo M com um conjunto não vazio $C(M)$ de vértices diferenciados. Os elementos de $C(M)$ (respect. de $V(M) \setminus C(M)$) são ditos vértices **conectores** (respect. vértices **interiores**) de M . Um **F -módulo** é um módulo que admite um F -empacotamento cobrindo todos os seus vértices interiores.

Uma **extensão modular** de um módulo M é qualquer grafo M' que contém M como um subgrafo induzido, e tal que apenas os vértices conectores de M são adjacentes a vértices fora de M . Seja $G := \{G_1, G_2, \dots, G_d\}$ um F -empacotamento de uma dada extensão modular M' de M . Dizemos que um vértice v de M está **restrito** a M por G , se $v \in V(G_i) \Rightarrow V(G_i) \subseteq V(M)$. Um F -módulo M é **internamente F -coerente** se cada F -fator de cada extensão modular de M restringe a M todos os vértices interiores do mesmo.

A prova de que $FATOR(\mathcal{B})$ é $\mathcal{NP}$ -difícil será feita transformando-se o problema k -DM em $FATOR(\mathcal{B})$, para algum k conveniente. Vamos definir os elementos básicos a serem usados nesta transformação.

Um **s, t -tridente** é um grafo bipartido completo $K_{s+1, t}$ em que três vértices da parte de tamanho $s + 1$ são designados como conectores. Uma **s, t -cruz** é um grafo bipartido completo $K_{s+2, t}$ com quatro vértices da parte de cardinalidade $s + 2$ sendo conectores.

O lema seguinte estabelece a coerência interna dos s, t -tridentes.

Lema 4.3.1 *Se M é um s, t -tridente então M é internamente $K_{s, t}$ -coerente.*

Prova. Suponhamos que M não seja internamente $K_{s, t}$ -coerente. Então existe uma extensão modular H de M e um $K_{s, t}$ -fator G de H que não restringe algum vértice interior v de M . Veja a Figura 4.9.

Seja G_v o componente de G que cobre v , e v' um vértice de $H - V(M)$ também coberto por G_v . Temos que G_v cobre no máximo $s + t - 1$ vértices de M , deixando de cobrir, portanto, dois.

Se esses dois vértices forem ambos conectores, então G_v tem um vértice de corte.

Caso contrário, se pelo menos um deles for um vértice interior, então vamos denotar

Figura 4.9: Esquema de um s, t -tridente.

tal vértice por w , e por G_w o componente de G que o contém. É imediato que existe um vértice w' em $H - V(M)$ coberto por G_w .

Como G_v e G_w são disjuntos nos vértices, nenhum caminho em G_v com extremos em v e v' intercepta caminhos em G_w com extremos em w e w' . Essa observação, aliada ao fato de que M possui apenas três conectores, mostra que (sem perda de generalidade) todos os caminhos em G_v com extremos em v e v' cobrem um determinado conector c de M . Ou seja, G_v possui um vértice de corte, c .

Assim, chegamos a uma contradição, pois $t \geq s \geq 2$ implica que $K_{s+1,t}$ é 2-conexo, e portanto não pode conter nenhum vértice de corte. $\square$

Como já foi mencionado, pretendemos utilizar s, t -tridentes e s, t -cruzes na construção de um grafo que será empregado na prova de que $FATOR(\mathcal{B})$ é $\mathcal{NP}$ -difícil. Para tal, seria conveniente que as s, t -cruzes fossem internamente $K_{s,t}$ -coerentes como o são os s, t -tridentes. No entanto, ao contrário do que afirmam Hell e Kirkpatrick em [16], isto não ocorre. Veja a Figura 4.10.

Se $s \geq 3$, temos que $K_{s,t}$ é 3-conexo; ou seja, a remoção de quaisquer dois vértices de $K_{s,t}$ não resulta em um grafo não conexo ou trivial. Portanto *neste caso* é verdade que as s, t -cruzes são internamente $K_{s,t}$ -coerentes. No entanto se $s = 2$, $K_{s,t}$ não é 3-conexo, e assim podemos ter a situação mostrada na Ilustração 4.10. Esta situação impede que uma argumentação como a da prova do Lema 4.3.1 leve a um absurdo. Na Figura 4.11 damos um exemplo em que não vale a coerência interna para s, t -cruzes. O $K_{2,3}$ -fator está indicado pelas linhas grossas.

Apesar disso, o grafo M que vamos definir em seguida é constituído de forma tal que todo $K_{s,t}$ -fator restrinja vértices interiores das s, t -cruzes às mesmas. Oportunamente voltaremos a discutir esse assunto.

Considere d s, t -tridentes rotulados $M_{1,j}$, $1 \leq j \leq d$, e $(c-1)d$ s, t -cruzes rotuladas

Figura 4.10: Esquema de uma s, t -cruz. Figura 4.11: Extensão modular de uma 2,3-cruz que não é internamente $K_{2,3}$ -coerente, com um $K_{2,3}$ -fator indicado em linhas grossas.

$M_{i,j}$, $2 \leq i \leq c$, $1 \leq j \leq d$. Esses cd grafos, que vamos chamar de **elementos** de M , não são necessariamente 2 a 2 disjuntos nos vértices, obedecendo as seguintes regras.

- Para cada j , $2 \leq j \leq d$,

$$\begin{aligned} |C(M_{1,j}) \cap C(M_{1,j-1})| &= 1, \\ |C(M_{1,j}) \cap C(M_{1,h})| &= 0 \quad \forall h, 1 \leq h < j-1; \end{aligned}$$

- para cada i , $2 \leq i \leq c$,

$$\begin{aligned} |C(M_{i,1}) \cap C(M_{i-1,1})| &= 1, \\ |C(M_{i,1}) \cap C(M_{l,1})| &= 0 \quad \forall l, 1 \leq l < i-1; \end{aligned}$$

- para cada $M_{i,j}$, $2 \leq i \leq c$, $2 \leq j \leq d$,

$$\begin{aligned} |C(M_{i,j}) \cap C(M_{i-1,j-1})| &= 0, \\ |C(M_{i,j}) \cap C(M_{i-1,j})| &= 1, \\ |C(M_{i,j}) \cap C(M_{i,j-1})| &= 1, \\ |C(M_{i,j}) \cap C(M_{l,h})| &= 0 \quad \forall l, h, 1 \leq l < i-1, 1 \leq h < j-1; \end{aligned}$$

- os conjuntos de vértices interiores de elementos distintos são disjuntos.

O grafo M que acabamos de definir será chamado *s, t-matriz* c por d . Para cada módulo $M_{c,j}$, $1 \leq j \leq d$, vamos rotular um dos conectores remanescentes de $M_{c,j}$, de x_j . Ainda, para cada módulo $M_{i,d}$, $1 \leq i \leq c$, vamos rotular um de seus conectores remanescentes de y_i , de tal maneira que $y_c \neq x_d$. Finalmente, para cada módulo $M_{i,1}$, $1 \leq i \leq c$, vamos rotular um de seus conectores remanescentes de z_i , de tal maneira que $z_c \neq x_1$.

Nas Figuras 4.12 e 4.13 mostramos um exemplo de *s, t-matriz* e uma representação esquemática deste exemplo. Note o $K_{s,t}$ -fator em linhas grossas.

O resultado seguinte resume as características relevantes das *s, t-matrizes*.

Lema 4.3.2 *Seja M uma s, t -matriz c por d . Então*

- M é internamente $K_{s,t}$ -coerente.*
- Qualquer $K_{s,t}$ -fator de qualquer extensão modular de M restringe a M exatamente $d + c$ conectores.*
- Considere um conjunto C de conectores de M , $|C| = c$. Se $|C \cap \{y_i, z_i\}| \leq 1$ para todo i , $1 \leq i \leq c$, então existe um $K_{s,t}$ -fator em $M - C$.*

Figura 4.12: Uma 2,3-matriz 2 por 3.

Figura 4.13: Esquema da 2,3-matriz mostrada na Figura 4.12.

Prova. Na argumentação que segue, considere G um $K_{s,t}$ -fator de uma extensão modular de M . Vamos provar o lema por indução em $c + d$.

Base: $c + d = 2$ (isto é, $c = 1$ e $d = 1$).

Item a. É trivial pelo Lema 4.3.1, já que $M_{1,1}$ é um s, t -tridente.

Item b. Imediato, já que $K_{s,t}$ restringe a $M_{1,1}$ exatamente dois conectores.

Item c. Trivial, já que $M - x_1$ é isomorfo a $K_{s,t}$.

Passo: $c + d > 2$ (ou seja, $c > 1$ ou $d > 1$).

Caso 1: $d = 1$.

Temos $c > 1$. Seja M' a s, t -matriz $c - 1$ por 1 formada pelos elementos $M_{1,1}, \dots, M_{c-1,1}$. Seja M'' o elemento $M_{c,1}$. Seja H uma extensão modular de M . Então H pode ser visto como uma extensão modular tanto de M' quanto de M'' . Notamos também que os vértices interiores de M ou são vértices interiores de M' ou pertencem a $V(M'')$, mas a nenhum vértice ocorrem ambas as possibilidades. Veja a Figura 4.14.

Seja v o conector comum a M' e a M'' .

Item a. Pela hipótese de indução podemos inferir que todos os vértices interiores de M' estão restritos a M' , e portanto também estão restritos a M .

Seja w um vértice interior de M e pertencente a $V(M'')$.

Suponhamos que w não esteja restrito a M' . Se w também não estiver restrito a M'' , então como v tem seus vizinhos em $M_{c-1,1}$ restritos a M' , pelos mesmos argumentos usados na prova do Lema 4.3.1, concluímos que $K_{s,t}$ possui um vértice de corte, um absurdo.

Com isto, mostramos que w está restrito a M' ou a M'' . Ou seja, está restrito a M .

Item b. Por hipótese de indução, qualquer $K_{s,t}$ -fator de qualquer extensão modular H de M (e portanto de M') restringe a M' (e portanto a M) exatamente $1 + (c - 1) = c$ conectores de M' .

Se v for um dos c conectores de M' restritos a M' , então, pelo mesmo argumento do item anterior, estão restritos a M'' (e portanto a M) todos os vértices interiores de M'' mais exatamente dois vértices conectores de M'' . Portanto temos $(c - 1) + 2 = c + 1$ conectores de M restritos a M . Veja a Figura 4.15.

Se v não for um dos conectores de M' restritos a M' , então como todos os vizinhos de v em M' estão restritos a M' , temos v e mais um outro conector de M'' restritos a

Figura 4.14: Demonstração do Lema 4.3.2 - esquema 1.

Figura 4.15: Demonstração do Lema 4.3.2 - esquema 2.

Figura 4.16: Demonstração do Lema 4.3.2 - esquema 3.

M'' (e portanto a M) por H . Assim temos $c + 1$ conectores de M restritos a M . Veja a Figura 4.16.

Item c. Seja $N = M - C$ e considere N' o grafo obtido de N retirando-se o elemento $M_{c,1}$ (inclusive o vértice v) se $|C \cap C(M'')| = 2$, ou o elemento $M_{c,1}$ (deixando o vértice v) se $|C \cap C(M'')| = 1$. Seja N'' o grafo $N - V(N')$.

Não é difícil ver que tanto N' quanto N'' são $K_{s,t}$ -fatoráveis. De fato, N'' o é por construção e N' por hipótese de indução. Assim, N também é fatorável.

Caso 2: $d > 1$.

Seja M' a s, t -matriz c por $d - 1$ formada pelos elementos $M_{i,j}$ tais que $j < d$. Seja M'' a s, t -matriz c por 1 formada pelos elementos $M_{1,d}, \dots, M_{c,d}$. Então uma extensão modular H de M pode ser encarada como uma extensão modular tanto de M' quanto de M'' .

Item a. Pela hipótese de indução, M' é internamente $K_{s,t}$ -coerente, portanto todos os vértices internos de M que são vértices internos de M' estão restritos a M . Pelo mesmo argumento, os vértices internos de M que são internos de M'' também estão restritos a M .

Restam c vértices interiores a M que não se enquadram no argumento acima: os conectores comuns aos elementos $M_{i,d-1}$ e $M_{i,d}$, $1 \leq i \leq c$ (chame cada um destes vértices de v_i , $1 \leq i \leq c$). Não é difícil ver, contudo, que v_i , $1 \leq i \leq c$ também está restrito a M , pois v_i não é adjacente a nenhum vértice de M que não seja interior e comprovadamente

restrito a M .

Item b. Pela hipótese de indução, temos que exatamente $(d - 1) + c$ conectores de M' estão restritos a M' , e portanto a M . Da mesma forma, G restringe $c + 1$ conectores de M'' a M . Quanto aos vértices v_i , $1 \leq i \leq c$, temos que cada v_i está restrito a M' ou a M'' , mas nunca a ambos. Portanto há $(d - 1 + c) + (c + 1) - c = d + c$ conectores de M restritos a M .

Item c. Seja $N = M - C$, e considere N' o grafo obtido de N retirando-se, para cada i , o elemento $M_{i,d}$ (deixando v_i ficar) se $y_i \notin C$, caso contrário retirando-se $M_{i,d}$ (inclusive v_i) se $y_i \in C$. Seja N'' o grafo $N - V(N')$.

Observamos que $v_i \in V(N')$ se $z_i \in C$ e $v_i \in V(N'')$ se $y_i \in C$. Portanto N' e N'' satisfazem as condições da hipótese de indução e portanto são $K_{s,t}$ -fatoráveis. Concluimos assim que N também é $K_{s,t}$ -fatorável. $\square$

Uma consequência do Lema 4.3.2 é o seguinte

Lema 4.3.3 *Seja M uma s, t -matriz c por d , com $c \leq d$. Considere H uma extensão modular de M tal que M está conectado a H exclusivamente através dos conectores x_i , $1 \leq i \leq d$. Seja G um $K_{s,t}$ -fator de H . Então*

- (a) *G restringe a M todos os vértices interiores mais exatamente $d + c$ vértices conectores, dentre os quais todos os conectores y e z .*
- (b) *$M - C$, com $C \subseteq \{x_i : 1 \leq i \leq d\}$ e $|C| = c$, admite um $K_{s,t}$ -fator.*

Prova. A prova segue diretamente do Lema 4.3.2, o qual é válido em particular para G e H . $\square$

Vamos agora definir um grafo, denotado por $H(s, t, V)$, usando s, t -matrizes.

Seja p um inteiro positivo e considere $V \subseteq \{1, 2, \dots, p\}^t$, $|V| = l$. Tome pt vértices independentes rotulados (i, j) , $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq t$. Considere uma s, t -matriz sp por sl com os conectores x rotulados $x_1^1, x_2^1, \dots, x_s^1, \dots, x_1^l, x_2^l, \dots, x_s^l$. Para cada $(v_1^i, v_2^i, \dots, v_t^i) \in V$, $1 \leq i \leq l$, faça (v_j^i, j) adjacente aos conectores x_k^i , $1 \leq j \leq t$, $1 \leq k \leq s$. Seja $D := \{(i, j) : 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq t\}$, e M a s, t -matriz invocada.

Na Figura 4.17 temos um esquema de $H(s, t, V)$. Observe que as partes de $H(s, t, V)$ têm cardinalidades $s^3pl + sp$ e $ts^2pl + tp$.

Hell e Kirkpatrick, em seu artigo [16], usam o grafo $H(s, t, V)$ para transformar o problema t -DM em $FATOR(\mathcal{B})$. O sucesso da técnica depende, naturalmente, da escolha

Figura 4.17: O grafo $H(s, t, V)$.

do grafo $K_{s,t}$. Uma condição que deveria ser satisfeita pelo grafo escolhido é que t seja no mínimo três, já que t -DM é $\mathcal{NP}$ -completo para $k \geq 3$ e polinomial para $k = 2$.

Hell e Kirkpatrick propuseram um critério de escolha do grafo $K_{s,t}$ e mostraram que, se $\mathcal{B}$ é uma família irreduzível de grafos bipartidos completos, $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ é seqüencial finita e $\mathcal{B}$ contém pelo menos um grafo que não é uma estrela, então $\mathcal{B}$ possui um grafo bipartido completo que satisfaz o critério.

O critério de Hell e Kirkpatrick apresenta, entretanto, um inconveniente. O grafo $K_{2,2}$ pode ser, para algumas famílias de grafos, a única escolha possível de acordo com o critério, o que não nos permite qualificar a complexidade dos respectivos problemas de fatoração. No que segue, daremos condições adicionais, que vão garantir a $\mathcal{NP}$ -completude de todos os problemas tratados nesta subseção.

Se $\mathcal{F}$ é uma família não vazia de grafos, e $F \in \mathcal{F}$, então denotamos por $\partial_{\mathcal{F}}(F)$ o conjunto dos grafos contidos em $\mathcal{F}$ que são isomorfos a subgrafos próprios de F .

O lema a seguir estabelece uma importante propriedade do grafo $H(s, t, V)$, enunciada em termos de $\partial_{\mathcal{F}}$.

Lema 4.3.4 *Seja $K_{s,t} \in \mathcal{B}$. Se para cada elemento $K_{a,b}$ de $\partial_{\mathcal{B}}(K_{s,t})$ temos $b/a < t/s$, então todo $\mathcal{B}$ -fator de $H(s, t, V)$ é um $K_{s,t}$ -fator.*

Prova. Seja G um $\mathcal{B}$ -fator de $H(s, t, V)$. Vamos provar que sob as condições acima, G é, na verdade, um $K_{s,t}$ -fator.

Suponha por absurdo que G não é um $K_{s,t}$ -fator. Então algum componente de G , digamos G' , é isomorfo a algum grafo bipartido completo $K_{a,b}$ não isomorfo a $K_{s,t}$.

Suponha sem perda de generalidade que a parte de tamanho a de $K_{a,b}$ esteja contida na parte de tamanho $s^3pl + sp$ de $H(s, t, V)$. Há quatro casos a considerar. Veremos a que contradições chegamos em cada caso.

Caso 1. Se $a \leq s$ e $b \leq t$, então $K_{a,b} \in \partial_{\mathcal{B}}(K_{s,t})$. Então vale $b/a < t/s$. Como consequência, o quociente α entre as cardinalidades das partes restantes de $H(s, t, V)$ é maior que t/s , conforme vemos abaixo:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{ts^2pl + tp - b}{s^3pl + sp - a} \\ &= \frac{t(s^2pl + p - b/t)}{s(s^2pl + p - a/s)} \\ &\stackrel{b/a < t/s}{>} \frac{t(s^2pl + p - a/s)}{s(s^2pl + p - a/s)} \end{aligned}$$

$$= \frac{t}{s}.$$

Como consequência, G possui um segundo componente, digamos G'' , isomorfo a algum $K_{c,d}$ com $d/c > t/s$ e com a parte de tamanho d contida na parte de tamanho $ts^2pl + tp$ de $H(s, t, V)$. Se $d \leq t$, então temos $c < s$, o que implica que $K_{c,d} \in \partial_B(K_{s,t})$, absurdo. Então vale $d > t$.

Vejamos em detalhes o motivo pelo qual existe G'' . Se não existisse um tal componente, o quociente α acima não poderia ser maior que t/s .

Considere $(K_{c_1, d_1}, K_{c_2, d_2}, \dots, K_{c_r, d_r})$ uma seqüência formada por grafos bipartidos completos isomorfos a cada um dos componentes de $G - V(G')$, de modo que cada um desses componentes seja representado exatamente uma vez na seqüência. Supondo que para todo K_{c_i, d_i} a parte de tamanho d_i pertença à parte de tamanho $ts^2pl + tp$ de $H(s, t, V)$, e que valha $d_i/c_i \leq t/s$, então

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\sum_i d_i}{\sum_i c_i} \\ &\leq \frac{\sum_i c_i t/s}{\sum_i c_i} \\ &= \frac{t}{s}. \end{aligned}$$

Isso justifica a existência de G'' .

O fato de que G possui um componente como G'' , por sua vez, também é absurdo. Isso pois nenhum subconjunto de vértices da parte de tamanho $s^3pl + sp$ de $H(s, t, V)$ com até s elementos possui mais do que t vizinhos comuns na outra parte de $H(s, t, V)$.

Observe que é fundamental que valha $b/a < t/s$ para que se prove a existência de G'' . No quarto caso viremos a cair novamente na contradição que acabamos de mostrar, embora por outros motivos.

Caso 2. Se $a \leq s$ e $b > t$ entramos em contradição novamente com o fato de que qualquer subconjunto com até s vértices da parte de $H(s, t, V)$ de tamanho $s^3pl + sp$ tem no máximo t vizinhos comuns na parte de tamanho $ts^2pl + tp$.

Caso 3. Se $a > s$ e $b > t$ há contradição pelo mesmo motivo mencionado no Caso 2.

Caso 4. Se $a > s$ e $b \leq t$, então $b/a \leq t/a < t/s$, justamente o necessário para aplicar o argumento do primeiro caso. $\square$

Lema 4.3.5 *O grafo $H(s, t, V)$ admite um $K_{s,t}$ -fator se e somente se V admite um emparelhamento t -dimensional.*

Prova. Se V admite um emparelhamento t -dimensional, digamos W , construímos o seguinte $K_{s,t}$ -fator em $H(s, t, V)$:

Considere $|W|$ cópias de $K_{s,t}$, cada uma das quais cobrindo uma seqüência

$$(v_1^i, 1), \dots, (v_t^i, t)$$

de vértices, em que $(v_1^i, \dots, v_t^i) \in W$. Como W é um emparelhamento t -dimensional, então é possível cobrir todos os vértices (i, j) , $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq t$ com essas $|W|$ cópias de $K_{s,t}$. Além disso, $s|W| = sp$ conectores x de M também são cobertos por essas cópias. O Lema 4.3.3 garante que os demais vértices de M podem ser todos cobertos por cópias adicionais de $K_{s,t}$.

Considere agora um $K_{s,t}$ -fator de $H(s, t, V)$, digamos G . O Lema 4.3.3 garante que G deixa de restringir a M exatamente sp conectores x de M . As p cópias de $K_{s,t}$ que cobrem esses sp vértices mais os tp vértices (i, j) , $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq t$ induzem um emparelhamento t -dimensional em V . $\square$

De posse dos Lemas 4.3.4 e 4.3.5, resta apenas mostrar como escolher um grafo $K_{s,t}$ com $t \geq 3$, que satisfaça as hipóteses do Lema 4.3.4 para a família $\mathcal{B}$.

Neste ponto divergimos de Hell e Kirkpatrick [16], adotando um critério próprio para a escolha. Nosso critério compõe-se de duas condições, e pelo menos uma delas deve ser satisfeita pelo grafo escolhido.

Primeira condição: Dada a família $\mathcal{B}$, escolhamos $K_{s,t} \in \mathcal{B}$ tal que $2 \leq s \leq t$, $t \geq 3$ e $\partial_{\mathcal{B}}(K_{s,t}) \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{B}}$.

Esse é o critério adotado em [16], a menos da restrição $t \geq 3$.

Não é difícil ver que, se $K_{s,t}$ satisfaz a primeira condição, então também satisfaz as condições do Lema 4.3.4. Obtemos isso como consequência da irredutibilidade de $\mathcal{B}$ e do fato de que $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ é seqüencial finita. De fato, se algum $S_b = K_{a,b} \in \partial_{\mathcal{B}}(K_{s,t})$ fosse tal que $b/a \geq t/s$, então $K_{s,t}$ seria $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ -fatorável, um absurdo.

Contudo há um problema com a primeira condição: se $K_{2,2} \in \mathcal{B}$, então $K_{2,2}$ é o único grafo de $\mathcal{B}$ que satisfaz $2 \leq s \leq t$ e $\partial_{\mathcal{B}}(K_{s,t}) \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{B}}^1$. É certo que o grafo $K_{2,2}$ também satisfaz as condições do Lema 4.3.4, mas tal escolha não é aceitável pois levaria à transformação do 2-DM no problema $FATOR(\mathcal{B})$. Dessa transformação não há nada a ser concluído quanto à complexidade de $FATOR(\mathcal{B})$.

Isso nos motivou a utilizar uma condição adicional, além da de Hell e Kirkpatrick. Essa segunda condição pode ser aplicada também a algumas famílias que não contenham o grafo $K_{2,2}$, em lugar da primeira condição.

¹Neste caso, $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ é vazio por causa da irredutibilidade de $\mathcal{B}$.

Figura 4.18: Relação entre os problemas $FATOR(\mathcal{B})$ e a primeira e segunda condições.

Segunda condição: Dada a família $\mathcal{B}$, escolhemos $K_{s,t} \in \mathcal{B}$ tal que $2 \leq s < t$ e $\partial_{\mathcal{B}}(K_{s,t}) \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{B}} \cup \{K_{i,i} : i \geq 2\}$.

Vamos mostrar que, se $K_{s,t}$ satisfaz a segunda condição, então $K_{s,t}$ satisfaz as hipóteses do Lema 4.3.4. Se algum $K_{a,b} \in \partial_{\mathcal{B}}(K_{s,t})$ fosse tal que $b/a \geq t/s$, então ou $K_{a,b} \in \mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ ou $a = b \geq 2$. Já vimos que a primeira possibilidade conduz a um absurdo. A segunda também, pois se $s < t$ não podemos ter $b/a = 1 \geq t/s$.

É preciso que fique claro quais problemas $FATOR(\mathcal{B})$ têm sua complexidade definida por quais condições. Um resumo disto está no diagrama 4.18. A seguir vamos justificar este diagrama.

Lema 4.3.6 *Seja $\mathcal{B}$ uma família irreduzível de grafos bipartidos completos, tal que $\mathcal{B} \setminus \mathcal{S}_{\mathcal{B}} \neq \emptyset$. Então $\mathcal{B}$ satisfaz a primeira condição se e somente se $K_{2,2} \notin \mathcal{B}$.*

Prova. Vamos provar que $\mathcal{B}$ possui um elemento $K_{s,t}$ com $2 \leq s \leq t$ e $\partial_{\mathcal{B}}(K_{s,t}) \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{B}}$. A prova será feita por indução em $\mathcal{B} \setminus \mathcal{S}_{\mathcal{B}}$.

Base: $|\mathcal{B} \setminus \mathcal{S}_{\mathcal{B}}| = 1$.

É imediato.

Passo: $|\mathcal{B} \setminus \mathcal{S}_{\mathcal{B}}| > 1$.

Seja $K_{c,d}$ um elemento de $\mathcal{B}$ com $2 \leq c \leq d$. Considere a subfamília $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{B}$ dada por $\mathcal{B}' := \mathcal{B} \setminus \{K_{c,d}\}$. Por hipótese de indução $\mathcal{B}'$ possui um elemento $K_{c',d'}$ com $2 \leq c' \leq d'$ e $\partial_{\mathcal{B}'}(K_{c',d'}) \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{B}}$. Se $c' \leq c$ e $d' \leq d$ então fazemos $K_{s,t} := K_{c',d'}$, caso contrário fazemos $K_{s,t} := K_{c,d}$.

Agora vamos usar esse fato para provar o lema. Suponhamos que $K_{2,2} \in \mathcal{B}$. Nesse caso $\mathcal{B}$ não satisfaz a primeira condição pois o único grafo com chance de satisfazê-la é exatamente $K_{2,2}$, de acordo com a demonstração do fato acima. Por outro lado, se $K_{2,2} \notin \mathcal{B}$ então basta tomarmos qualquer elemento $K_{s,t}$ de $\mathcal{B}$ que satisfaça $2 \leq s \leq t$ e $\partial_{\mathcal{B}}(K_{s,t}) \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{B}}$; temos necessariamente $t \geq 3$. $\square$

Lema 4.3.7 *Seja $\mathcal{B}$ uma família irredutível de grafos bipartidos completos tal que $\mathcal{B} \setminus \mathcal{S}_{\mathcal{B}} \neq \emptyset$. Então $\mathcal{B}$ satisfaz a segunda condição se e somente se existe $K_{s,t} \in \mathcal{B}$ com $2 \leq s < t$.*

Prova. Considere a família $\mathcal{B}' := \mathcal{B} \setminus \{K_{i,i} : i \geq 2\}$. Claramente, $\mathcal{B}'$ satisfaz a primeira condição se e somente se $\mathcal{B}$ satisfaz a segunda condição.

Vamos utilizar esse fato para demonstrar o lema. Suponhamos que $\mathcal{B}'$ satisfaz a primeira condição. Então $\mathcal{B}'$ contém pelo menos um grafo $K_{s,t}$ com $2 \leq s \leq t$. Como $\mathcal{B}' \cap \{K_{i,i} : i \geq 2\} = \emptyset$, então $s < t$.

Suponhamos agora que existe $K_{s,t} \in \mathcal{B}$ com $2 \leq s < t$. Como $\mathcal{B}' \cap \{K_{i,i} : i \geq 2\} = \emptyset$, então $K_{2,2} \notin \mathcal{B}'$. Aplicando o Lema 4.3.6, temos que $\mathcal{B}'$ satisfaz a primeira condição. Consequentemente, $\mathcal{B}$ satisfaz a segunda. $\square$

Como consequência dos Lemas 4.3.6 e 4.3.7, e levando em conta as hipóteses que estamos fazendo a respeito de $\mathcal{B}$ (irredutibilidade, $\mathcal{B} \setminus \mathcal{S}_{\mathcal{B}} \neq \emptyset$ e $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ seqüencial finita), temos o diagrama 4.18 justificado.

Note que as duas condições que enunciamos ainda não permitem caracterizar a complexidade de todos os problemas de fatoração não abrangidos pelas seções anteriores. A caracterização desses problemas restantes não ficará em aberto, apesar disso. A seção seguinte conclui o capítulo provando que tais problemas são $\mathcal{NP}$ -completos.

4.3.4 Famílias da forma $\{K_{2,2}, K_{t,t}\}$, $t \geq 3$, t ímpar

Se a família $\mathcal{B}$ é da forma $\{K_{2,2}, K_{t,t}\}$, $t \geq 3$, t ímpar, então nenhuma das técnicas vistas neste capítulo caracterizam a complexidade de $FATOR(\mathcal{B})$. A condição suficiente para $\mathcal{NP}$ -completude usada no Capítulo 3, no entanto, permitirá mostrar que $FATOR(\mathcal{B})$ é $\mathcal{NP}$ -completo.

A família $\mathcal{B}$ satisfaz a todas as hipóteses do Teorema 3.5.4 na página 64 (Hell, Kirkpatrick [15]), se fizermos $F := K_{2,2}$ e $v :=$ qualquer vértice de $K_{2,2}$. Na Figura 4.19 mostramos o grafo $D[K_{2,2}, v]$. O teorema em questão prova a $\mathcal{NP}$ -completude fazendo uma transformação a partir do k -DM para um dado $k \geq 3$. No caso de $FATOR(\{K_{2,2}, K_{t,t}\})$, temos $k = 4$.

Figura 4.19: O grafo $D[K_{2,2}, v]$.

Uma outra maneira de provar a $\mathcal{NP}$ -completude de $FATOR(\mathcal{B})$ seria construir um módulo $\mathcal{B}$ -coerente da maneira feita no capítulo sobre empacotamentos uniformes e transformar dessa maneira o 4-DM em $FATOR(\mathcal{B})$.

Capítulo 5

Uma conexão com matróides

Três classes de problemas de fatoração polinomiais foram abordadas até o momento neste trabalho:

- (a) problemas de fatoração por um grafo cujos componentes não contêm mais do que dois vértices cada um;
- (b) problemas de fatoração por arestas e por uma quantidade finita de grafos hipoemparelháveis;
- (c) problemas de fatoração por famílias seqüenciais de estrelas.

Um dado comum a todos esses problemas é que as famílias $\mathcal{F}$ que os definem possuem a característica destacada a seguir.

Dado um grafo H , os conjuntos de vértices de H que são cobertos por algum $\mathcal{F}$ -empacotamento são os conjuntos independentes de um matróide sobre $V(H)$.

Daqui por diante, vamos nos referir a essa propriedade como **propriedade matroidal**.

Essa propriedade foi demonstrada em separado para os problemas a) em [10], b) em [4] e c) em [29], sendo que o artigo mais recente desta lista data de 1986.

Até então os problemas de fatoração polinomiais vinham sendo abordados segundo o paradigma ilustrado nos capítulos anteriores. Em primeiro lugar, estudava-se as configurações aumentadoras para o problema em questão. A partir disto obtinham-se condições necessárias e suficientes para a maximalidade dos empacotamentos. Tais condições eram então aproveitadas para a construção de algoritmos polinomiais e teoremas minimax, em

geral de feitiço semelhante ao Algoritmo de Edmonds e à fórmula de Berge. Finalmente, provava-se a propriedade matroidal para a família de grafos que definia o problema em estudo.

Em 1988, Loebl e Poljak propuseram uma abordagem diversa, que procura caracterizar os problemas de fatoração polinomiais através da propriedade matroidal. A partir de então, muito do que havia a respeito dos problemas de fatoração polinomiais foi generalizado, em particular o conceito de botão (pág. 38) e a propriedade de Balas-Uhry (Subseção 3.3). Em uma série de artigos ([21, 18, 22, 23]), Loebl e Poljak abordam duas novas classes de famílias de grafos: as famílias matroidais e as famílias boas de grafos. Estas últimas generalizam as famílias citadas nos itens a), b) e c), enquanto que as primeiras são as famílias que possuem a propriedade matroidal.

Em [21] foi proposta a seguinte conjectura:

Conjectura (Loebl-Poljak, 1988) *As seguintes afirmações a respeito de uma família finita $\mathcal{F}$ de grafos são equivalentes:*

- $\mathcal{F}$ é matroidal;
- $FATOR(\mathcal{F}) \in \mathcal{P}$.

Para famílias da forma $\{K_2, F\}$, sendo F um grafo conexo, provou-se que essa conjectura é válida ([21, 22, 23]), mas o caso geral permanece em aberto. Neste caso particular, Loebl e Poljak obtiveram os seguintes resultados:

Teorema 5.1 (Loebl, Poljak, 1992/1993) *Seja $\mathcal{F}$ uma família de grafos da forma $\{K_2, F\}$, com F conexo. Se $\mathcal{F}$ é boa ou redutível então $FATOR(\mathcal{F}) \in \mathcal{P}$, caso contrário $FATOR(\mathcal{F})$ é $\mathcal{NP}$ -completo.*

Teorema 5.2 (Loebl-Poljak, 1988/1993) *Seja $\mathcal{F}$ uma família de grafos da forma $\{K_2, F\}$, com F conexo. Então $\mathcal{F}$ é matroidal se e somente se $\mathcal{F}$ é boa ou redutível.*

5.1 Famílias boas de grafos

As famílias boas foram propostas em [21] como uma classe de famílias de grafos que engloba tanto as famílias sequenciais de estrelas quanto as famílias constituídas por arestas e por um número finito de grafos hipoemparelháveis. Nesta seção vamos mostrar que

famílias boas de grafos possuem a propriedade matroidal e definem problemas de fatoração polinomiais.

5.1.1 Definição

Antes de definirmos família boa de grafos, vamos conceituar um novo tipo de grafo, que deve fazer parte dessas famílias: a hélice.

Diz-se que um grafo conexo F é uma k -hélice ($k \geq 0$) se F possui um vértice c , chamado de **centro** de F , tal que o grafo $F - c$ consiste de $k + 1$ componentes hipoemparelháveis, e pelo menos um deles é isomorfo a K_1 . O vértice de que este componente se constitui é denominado **raiz** de F . A única aresta que incide nesse componente e em c é chamada **haste** de F . Os demais k componentes são denominados **h-componentes** de F , e $Hc(F)$ é o conjunto dos h-componentes de F . Uma k -hélice será referida genericamente por **hélice**.

Chamamos a atenção para o fato de que, pela definição acima, o grafo K_2 é uma hélice — em particular, uma 0-hélice. Permitir que K_2 seja uma hélice possui o inconveniente de que este grafo possui mais de um vértice satisfazendo a nossa definição de centro. Ou seja, o centro de K_2 não está bem definido. No entanto, a definição acima facilita a apresentação do algoritmo na Seção 5.1.3, motivo pelo qual optamos por conviver com essa definição.

Quando invocarmos o “centro de K_2 ”, estaremos nos referindo a qualquer dos seus dois vértices, o mesmo se dando com a “raiz de K_2 ”. A única restrição que fazemos é que, quando um dos vértices for considerado centro, o outro será tido como raiz. Quanto ao conjunto de h-componentes de K_2 , convencionamos que a única aresta de K_2 é a haste do mesmo, e que $Hc(K_2) = \emptyset$.

Se F e F' são duas hélices cujos centros e hastes coincidem, e tais que $Hc(F') \subseteq Hc(F)$, então F' é uma **sub-hélice** de F .

As hélices integram as famílias boas de grafos, compondo subfamílias que vamos chamar de fechadas. A notação definida a seguir será empregada para enunciar, de modo sucinto, o conceito de uma família fechada de hélices.

Considere a família $Hc(H)$ dos h-componentes de uma hélice H . Dizemos que um h-componente D' de uma hélice H' **tem uma imagem** em H se o número de h-componentes de H isomorfos a D' é maior ou igual ao de H' . Vamos indicar essa relação usando o símbolo $\leq$, da seguinte forma: $H' \stackrel{D'}{\leq} H$.

Se todo h-componente D' de H' é tal que $H' \stackrel{D'}{\leq} H$, então dizemos que H' **tem uma imagem** em H e indicamos essa relação de modo similar ao que usamos acima: $H' \leq H$.

Não é difícil perceber que $H' \leq H$ se e somente se H' é isomorfo a uma sub-hélice de H . Em particular, $K_2 \leq H$ para qualquer hélice H , pois $Hc(K_2) = \emptyset$.

Diz-se que uma família não vazia $\mathcal{P}$ de hélices é **fechada** se $\mathcal{P}$ satisfaz às seguintes

Figura 5.1: Os oito grafos na figura acima constituem uma família fechada de hélices. Se uma família fechada de hélices possui os dois grafos no quadro à esquerda, então também possui os cinco grafos à direita, devido à hereditariedade e à troca de h-componentes. Observe que o grafo S_3 (na parte inferior da figura) *não precisa* pertencer à família para que esta seja fechada.

propriedades:

- **Hereditariedade:** Se $F \in \mathcal{P}$ e F' é uma sub-hélice de F , então existe uma hélice em $\mathcal{P}$ isomorfa a F' .
- **Troca de h-componentes:** Se $F, F' \in \mathcal{P}$ e $F' \not\leq F$, então para todo $D \in Hc(F)$ tal que $F \stackrel{D}{\not\leq} F'$ existe um $D' \in Hc(F')$ tal que $F' \stackrel{D'}{\not\leq} F$, para o qual há em $\mathcal{P}$ uma hélice isomorfa à hélice F'' com $Hc(F'') = Hc(F) \setminus \{D\} \cup \{D'\}$.

Na Figura 5.1 damos um exemplo de família fechada de hélices.

Assim, dizemos que uma família $\mathcal{F}$ de grafos é **boa** se $\mathcal{F}$ compõe-se de duas sub-famílias de grafos disjuntas, $\mathcal{H}$ e $\mathcal{P}$, sendo $\mathcal{H}$ uma família qualquer de grafos hipoemparelháveis e $\mathcal{P}$ uma família fechada não vazia de hélices.

Uma consequência dessa definição é que toda família boa de grafos contém o grafo K_2 . De fato, sendo $\mathcal{P}$ uma família fechada não vazia de hélices, então, levando em conta a hereditariedade, temos $K_2 \in \mathcal{P}$.

5.1.2 Grafos críticos e a propriedade de Balas-Uhry

Esta seção apresenta algumas caracterizações de grafos críticos. Estes, conforme dissemos na introdução deste capítulo, são uma generalização dos botões, os quais estudamos no Capítulo 3. Veremos que os grafos críticos desempenham um papel análogo ao dos botões na questão da polinomialidade computacional. A propriedade de Balas-Uhry possui uma ligação estreita com grafos críticos, por isso também será abordada nesta seção.

Dizemos que um grafo H qualquer é $\mathcal{F}$ -crítico se H não admite um $\mathcal{F}$ -fator e se para qualquer $v \in V(H)$ o grafo $H - v$ admite um $\mathcal{F}$ -fator. Se $\mathcal{F} = \{F\}$, usaremos o termo **grafo F -crítico**.

Um exemplo de classe de grafos críticos são os grafos hipoemparelháveis. De acordo com a definição acima, esses grafos são K_2 -críticos. Um fato que vamos demonstrar nesta seção é que todos os grafos $\mathcal{F}$ -críticos são K_2 -críticos quando $\mathcal{F}$ é uma família boa de grafos.

Seja G um $\mathcal{F}$ -empacotamento de um grafo H qualquer. O conjunto dos componentes de G isomorfos a K_2 mais as hastes de todas as k -hélices, $k \geq 1$, presentes em G será denotado por $Hst(G)$. O conjunto dos componentes de G que são hipoemparelháveis mais os h-componentes de todas as hélices presentes em G será denotado por $T(G)$.

Observe que usamos uma notação semelhante a esta no Capítulo 3. Em particular, na Seção 3.1, usamos a notação $T(G)$ para indicar o conjunto dos G -triângulos de um $\{K_2, K_3\}$ -empacotamento.

Os resultados a seguir enunciam diversas propriedades relacionadas com grafos $\mathcal{F}$ -críticos. Estes resultados serão a base para diversos teoremas que serão provados nesta seção e nas seguintes.

Lema 5.1.1 *Seja $\mathcal{F}$ uma família boa de grafos e G um $\mathcal{F}$ -empacotamento em H . Seja C um caminho G -alternante em H , $C := (c_0, \dots, c_p)$, de comprimento p , tal que:*

- i) o vértice c_0 é livre de G ;
- ii) o vértice c_i é centro de uma hélice em G para todo i ímpar, $0 < i < p$;
- iii) a aresta $c_{i-1}c_i$ é uma haste de uma hélice para todo i par, $0 < i < p$;
- iv) p é ímpar.

Se G é maximal então c_p é centro de uma hélice em G .

Prova. Suponhamos que c_p não seja centro de uma hélice em G . Considerando as demais hipóteses aplicáveis a c_p , há três casos a estudar:

- 1) c_p é livre de G ;
- 2) c_p é raiz de alguma k -hélice de G , $k \geq 1$;
- 3) c_p é coberto por algum elemento de $T(G)$.

No primeiro caso, o $\mathcal{F}$ -empacotamento dado por $G \triangle C$ cobre um vértice além dos que são cobertos por G .

No segundo caso, seja F a hélice de G que cobre c_p , e c o centro de F . Seja D um h-componente de F , x um vértice de D adjacente a c distinto de c_p , e E um emparelhamento perfeito em $D - x$. Seja F' a hélice obtida de F trocando-se a haste $c_p c$ pela aresta cx e fazendo-se $Hc(F') := Hc(F) \setminus \{D\}$. Pela hereditariedade, há um elemento em $\mathcal{P}$ isomorfo a F' . O $\mathcal{F}$ -empacotamento $(G \triangle C) + E - F + F'$ cobre um vértice além dos que são cobertos por G .

No último caso, em que c_p for coberto por um elemento de $T(G)$, procedemos de modo similar ao usado no Capítulo 3 para as caudas aumentadoras. A Figura 5.2 mostra um exemplo. □

O próximo teorema contém uma série de propriedades de $\mathcal{F}$ -empacotamentos obedecendo uma condição adicional, expressa em termos de deficiências. Daqui por diante, usamos o termo deficiência em referência ao número de vértices livres de um *emparelhamento* máximo.

Teorema 5.1.2 *Seja $\mathcal{F}$ uma família boa de grafos.*

- (a) *Se H é um grafo qualquer e G é um $\mathcal{F}$ -empacotamento maximal de H tal que a deficiência de G é mínima, então um emparelhamento máximo em G é um emparelhamento máximo em H .*
- (b) *Se H é um grafo qualquer e G é um $\mathcal{F}$ -empacotamento máximo de H tal que um emparelhamento máximo de G é um emparelhamento máximo de H , então a deficiência de G é mínima.*
- (c) *Se H é um grafo qualquer e G é um $\mathcal{F}$ -empacotamento máximo de H , então existe um $\mathcal{F}$ -empacotamento G' de H com deficiência mínima tal que $V(G') = V(G)$.*

Figura 5.2: Prova do Lema 5.1.1. No quadro em cima, temos a família $\mathcal{F}$. Embaixo, um exemplo de augmentação em que c_p é coberto por um membro de $T(G)$.

Prova.

Item a. Seja G um $\mathcal{F}$ -empacotamento maximal de H com deficiência mínima, e E um emparelhamento máximo de G . É fácil perceber que E induz um emparelhamento máximo em cada componente de G . Isso, no caso das hélices, significa que uma aresta de E é incidente em cada centro. Vamos supor que, nesses casos, tal aresta é precisamente a haste da respectiva hélice.

Vamos provar, por indução no comprimento, que todo caminho E -alternante $C := (c_0, \dots, c_p)$ ímpar, com o extremo c_0 livre de G , é G -alternante e atende às condições ii) e iii) do Lema 5.1.1.

Se C tem comprimento $p = 1$, então é imediato que C é G -alternante e satisfaz às condições ii) e iii) do Lema 5.1.1. Caso contrário, seja C' o caminho E -alternante $(c_0, \dots, c_{p-2})$. Por hipótese de indução, C' atende a ii) e iii) do Lema 5.1.1 e é G -alternante. Como G é maximal, então o vértice c_{p-2} é centro de uma hélice de G pelo Lema 5.1.1. Isso implica que a aresta $c_{p-2}c_{p-1}$ é a haste dessa mesma hélice, e que a aresta $c_{p-1}c_p$ não pertence a G . Portanto C satisfaz todas as condições do Lema 5.1.1 e é G -alternante.

Suponhamos por absurdo que E não seja um emparelhamento máximo de H . Então existe um caminho E -alternante em H com extremos livres de E . Seja C um caminho E -alternante, $C = (c_0, \dots, c_p)$, de comprimento $p \geq 1$, tal que c_0 e c_p são livres de E .

É fácil ver que c_0 e c_p são cobertos por elementos de $T(G)$. Isto ocorre, pois os vértices de H livres de E ou são livres de G ou são cobertos por elementos de $T(G)$. Se c_0 ou c_p fossem livres de G , teríamos uma contradição pelo fato acima, mais o Lema 5.1.1.

Sejam B_0 e B_p os elementos de $T(G)$ que cobrem respectivamente c_0 e c_p . Como a cada elemento de $T(G)$ corresponde exatamente um vértice livre de E , então B_0 e B_p são distintos. Sejam G_0 e G_p respectivamente os componentes de G que contêm B_0 e B_p . (Eventualmente, pode ocorrer que G_0 e G_p coincidam.)

É um fato que, dado um grafo hipoemparelhável B , um vértice v de B e um emparelhamento perfeito M em $B - v$, então existe um caminho M -alternante par de u a v para qualquer vértice u de B . Esse fato é uma consequência da demonstração de um conhecido resultado de Lovász sobre “ear decompositions” [24].

Todo grafo hipoemparelhável H pode ser representado como $C_0 + C_1 + \dots + C_r$, sendo $C_0, C_1, \dots, C_r$ caminhos tais que

- $C_0 = (v)$ para algum $v \in V(H)$;
- para cada i , $1 \leq i \leq r$, C_i ou é um caminho ímpar tendo em comum com $C_0, \dots, C_r$ apenas seus extremos, ou C_i é um circuito ímpar com exatamente um ponto em comum com $C_0, \dots, C_r$.

Além disso, H admite um emparelhamento máximo E tal que os caminhos $C_1, \dots, C_r$ são E -alternantes e começam com arestas não pertencentes a E .

Tal observação nos permite afirmar que existe um caminho E -alternante $C^* = (c_0^*, \dots, c_p^*)$, de comprimento p , com os extremos livres de E , sem vértices em comum com outros elementos de $T(G)$ que não B_0 e B_p , e que existe um único par de inteiros i, j , $0 \leq i < j \leq p$, tal que c_i^* é coberto por B_0 , c_j^* é coberto por B_p e as arestas $c_{l-1}^* c_l^*$ com l par, $i < l < j$, são arestas de $Hst(G)$. (Essas arestas pertencem a E .)

Se G_0 é uma k -hélice, com $k \geq 1$, então seja G'_0 a sub-hélice de G_0 com $Hc(G'_0) = Hc(G_0) \setminus B_0$. Defina analogamente G'_p , caso G_p seja uma k -hélice, $k \geq 1$. Seja E_0 um emparelhamento perfeito em $B_0 - c_i^*$, e E_p um emparelhamento perfeito em $B_p - c_j^*$.

Não é difícil ver que o $\mathcal{F}$ -empacotamento

$$G - (G_0 + G_p) + (G'_0 + G'_p) + (E_0 + E_p) + E \triangle ((c_i, \dots, c_j))$$

cobre os mesmos vértices que G e possui deficiência menor, um absurdo.

Empacotamentos similares podem ser obtidos caso G_0 ou G_p não sejam hélices. Vamos dar um exemplo. Se G_0 não for uma hélice, então G_0 é um componente hipoemparelhável de G . Suponhamos que G_p seja uma k -hélice, $k \geq 1$. Então

$$G - (G_0 + G_p) + G'_p + (E_0 + E_p) + E \triangle ((c_i, \dots, c_j))$$

cobre os mesmos vértices que G e tem deficiência menor.

Item b. É imediata. De fato, se G não tivesse deficiência mínima, então qualquer emparelhamento máximo de um $\mathcal{F}$ -empacotamento máximo que minimizasse a deficiência seria maior do que um emparelhamento máximo de G .

Item c. Seja E um emparelhamento máximo de G tal que, para cada k -hélice de G , $k \geq 1$, a respectiva haste pertence a E . Pelo item b), se G não tem deficiência mínima, então E não é um emparelhamento máximo em H . Pelos argumentos dados no item a), podemos obter um $\mathcal{F}$ -empacotamento G' com deficiência menor do que G e que cubra os mesmos vértices. □

Várias observações podem ser feitas a respeito dos resultados que acabamos de provar.

O Lema 5.1.1 aglutina diversas características das configurações aumentadoras que discutimos nos Capítulos 3 e 4. Cabe observar, no entanto, que este lema não caracteriza totalmente as configurações aumentadoras para famílias boas. Uma caracterização completa deveria impor condições sobre o grau em G dos centros dos componentes isomorfos a hélices e dar mais detalhes sobre os casos em que C tem comprimento par. Desse modo poderíamos generalizar as pipas aumentadoras e as configurações aumentadoras de tipo 1, as quais não se encaixam nas condições do Lema 5.1.1.

Figura 5.3: Na figura, na parte superior, temos a família de grafos $\mathcal{F}$. Embaixo, mostramos dois $\mathcal{F}$ -fatores diferentes do mesmo grafo H , ambos com o mesmo número de componentes não isomorfos a K_2 . Observe que um emparelhamento máximo no empacotamento da esquerda deixa dois vértices livres a mais do que no empacotamento da direita.

Não é o objetivo desse capítulo, no entanto, enquadrar os problemas de fatoração oriundos de famílias boas no método de análise empregado nos capítulos anteriores. Para o que nos propomos fazer — caracterizar a propriedade matroidal para famílias boas e mostrar um algoritmo polinomial para os respectivos problemas de fatoração — o Lema 5.1.1 é suficiente.

O item a) do Teorema 5.1.2 pode ser entendido como uma generalização, para famílias boas, da propriedade de Balas-Uhry. Em primeiro lugar, os Teoremas 3.3.1 e 3.3.2, que enunciam a propriedade de Balas-Uhry para o problema do emparelhamento fracionário perfeito e para o problema do $\{K_2, K_3\}$ -fator, incluem-se no item mencionado. E em segundo lugar, famílias boas em geral não possuem a propriedade, como se vê no exemplo da Figura 5.3. Para famílias boas de cardinalidade 2, entretanto, vale a propriedade de Balas-Uhry, já que todo componente não isomorfo a K_2 de um empacotamento por uma família desse tipo tem deficiência 1.

Como consequência do Teorema 5.1.2 temos uma primeira caracterização de grafos $\mathcal{F}$ -críticos, dada pelo teorema abaixo.

Teorema 5.1.3 *Seja $\mathcal{F}$ uma família boa de grafos e H um grafo qualquer. Então H*

é $\mathcal{F}$ -crítico se e somente se H é hipoemparelhável e não admite um $\mathcal{F}$ -fator que utilize exatamente um componente não isomorfo a K_2 .

Prova. Suponhamos que H é hipoemparelhável e não admite um $\mathcal{F}$ -fator com exatamente um componente não isomorfo a K_2 . Se H admitir um $\mathcal{F}$ -fator G , suponha sem perda de generalidade que a deficiência de G é mínima. Então o Teorema 5.1.2, item a), garante que um emparelhamento máximo em G é um emparelhamento máximo em H . Como H é hipoemparelhável, então esse emparelhamento máximo cobre $|V(H)| - 1 = |V(G)| - 1$ vértices e portanto a deficiência de G é exatamente 1. Isso significa que G possui exatamente um componente não isomorfo a K_2 , um absurdo. Portanto, H não admite um $\mathcal{F}$ -fator. Como H é hipoemparelhável então $H - v$ é $\mathcal{F}$ -fatorável para todo $v \in V(H)$; ou seja, H é $\mathcal{F}$ -crítico.

Vamos provar a outra implicação.

Se H é $\mathcal{F}$ -crítico, então é imediato que H não possui $\mathcal{F}$ -fatores com exatamente um componente não isomorfo a K_2 . Resta apenas provar que H é hipoemparelhável.

Seja $v \in V(H)$, e G um $\mathcal{F}$ -fator em $H - v$. Pelo item c) do Lema 5.1.2, podemos assumir que a deficiência de G é mínima.

Seja E um emparelhamento máximo em G . Novamente pelo item a) do Teorema 5.1.2, concluímos que E é um emparelhamento máximo em H , o qual por sua vez omite o vértice v . Como podemos obter um emparelhamento com essas características para todo $v \in V(H)$, então $H = H[D]$, sendo D um dos blocos da decomposição de Gallai-Edmonds (D, A, C) de H . Pelo Teorema da Estrutura de Gallai-Edmonds, $H[D] = H$ é hipoemparelhável. □

Uma outra consequência interessante do Lema 5.1.2 é o resultado abaixo.

Teorema 5.1.4 *Seja $\mathcal{F}$ uma família boa de grafos e H um grafo qualquer. Então os componentes de H são $\mathcal{F}$ -críticos se e somente se todo $v \in V(H)$ é livre de algum $\mathcal{F}$ -empacotamento maximal de H .*

Prova. Suponhamos que cada componente de H é $\mathcal{F}$ -crítico. Seja $v \in V(H)$, e G um $\mathcal{F}$ -empacotamento máximo de $H - v$. Seja H_0 o componente de H que contém v . Claramente, G induz um $\mathcal{F}$ -empacotamento máximo em todos os componentes de H que não contêm v . Como H_0 é $\mathcal{F}$ -crítico, o $\mathcal{F}$ -empacotamento máximo induzido por G em $H_0 - v$ é um $\mathcal{F}$ -empacotamento máximo em H_0 . Portanto G é um $\mathcal{F}$ -empacotamento máximo de H que deixa v livre. Como todo $\mathcal{F}$ -empacotamento máximo é maximal, temos a primeira implicação demonstrada.

Suponhamos agora que todo $v \in V(H)$ é livre de algum $\mathcal{F}$ -empacotamento maximal de H . Pelo mesmo argumento empregado na prova do Teorema 5.1.3, concluímos que

esses componentes são hipoemparelháveis. Por outro lado, a suposição garante que os componentes de H não são $\mathcal{F}$ -fatoráveis. Isso conclui a prova do teorema. $\square$

5.1.3 Um algoritmo polinomial para a fatoração por famílias boas

Nesta seção vamos mostrar um algoritmo polinomial para o problema da fatoração por famílias boas finitas de grafos. Este algoritmo foi proposto por Loebl e Poljak em [22]. Em [23] há uma versão mais detalhada do mesmo algoritmo, proposta pelos mesmos autores, para famílias boas de cardinalidade 2.

O algoritmo aceita como entradas uma instância H do problema do $\mathcal{F}$ -fator e um inteiro $d \geq 0$, e constrói ou um $\mathcal{F}$ -empacotamento em H que deixa no máximo d vértices livres, ou um certificado de que não existe um tal $\mathcal{F}$ -empacotamento. Esse certificado consiste de um conjunto S de vértices de H e de um conjunto de componentes do grafo $H - S$, satisfazendo uma condição expressa em termos de uma medida que vamos chamar de capacidade.

Dados um conjunto S de vértices de H e um conjunto R de componentes do grafo $H - S$, chamamos de **capacidade** de um vértice $x \in S$ com relação a R , ao maior k , $k \geq 1$, para o qual existe uma $(k - 1)$ -hélice F que satisfaça:

- F é um subgrafo de H cujo centro coincide com x ;
- a raiz e cada h -componente T de F são subgrafos de componentes distintos $\tilde{R}$ de R ;
- os grafos $\tilde{R} - V(T)$ admitem emparelhamentos perfeitos.

Usaremos a notação **cap**(x, R) para denotar a capacidade de x com relação a R .

Com isso, apresentamos o algoritmo na Figura 5.4.

O passo (1) do algoritmo não demanda maiores explicações; empregando o Algoritmo de Edmonds, podemos construir a decomposição de Gallai-Edmonds em tempo polinomial.

O passo (2) também pode ser efetuado em tempo polinomial de acordo com o Teorema 5.1.3. O argumento empregado aqui é semelhante ao que foi usado no Capítulo 3 para mostrar que problemas de fatoração por arestas e grafos hipoemparelháveis são polinomiais.

Sabemos pelo Teorema da Estrutura de Gallai-Edmonds que os componentes de D são hipoemparelháveis. O Teorema 5.1.3 garante que, para caracterizarmos quais desses componentes são $\mathcal{F}$ -críticos, basta testar quais admitem um $\mathcal{F}$ -fator com exatamente um

Entrada: Um grafo H qualquer e um inteiro $d \geq 0$;

Saída: Um $\mathcal{F}$ -empacotamento G de H que deixe no máximo d vértices de H livres, ou um conjunto $A \subseteq V(H)$ e uma coleção R de componentes $\mathcal{F}$ -críticos de $H - A$ tais que $|R| > \sum_{x \in A} \text{cap}(x, R) + d$.

- (1) Construa a decomposição de Gallai-Edmonds (D, A, C) de H ;
- (2) $Y :=$ conjunto dos componentes $\mathcal{F}$ -críticos de D ;
- (3) Para cada elemento x de A faça
 $I_x := \{\tilde{Y} \subseteq Y : \text{cap}(x, \tilde{Y}) = |\tilde{Y}|\}$;
 fimPara;
- (4) $I^* := \{\tilde{Y} \subseteq Y : |\tilde{Y}| \leq d\}$;
- (5) Resolva o problema da partição em matróides para a família de matróides $\{(Y, I_x) : x \in A\} \cup \{(Y, I^*)\}$;
- (6) Se existe $R \subseteq Y$ tal que $|R| > \sum_{x \in A} \text{cap}(x, R) + d$
 então
 (7) Devolva A e R e pare.
 senão
- (8) Seja $\{Y_x \in I_x : x \in A\}$ uma coleção de conjuntos independentes disjuntos que cobre pelo menos $|Y| - d$ membros de Y ;
- (9) Para cada $x \in A$ tal que $Y_x \neq \emptyset$, seja F_x uma $(|Y_x| - 1)$ -hélice dada de acordo com a definição de capacidade;
- (10) Seja E o emparelhamento constituído pelas hastes das hélices F_x , $x \in A$, mais um emparelhamento perfeito em cada componente $\tilde{D}$ de Y tal que $\tilde{D} \in Y_x$ para algum x ;
- (11) Para cada $x \in A$ tal que $Y_x = \emptyset$ faça
- (12) $C :=$ caminho E -alternante maximal ímpar começando em x e terminando em algum componente $\tilde{D}$ de D ;
- (13) $E := E \triangle C$;
- (14) Para cada $y \in A$ tal que $y \in C$ faça
- (15) Atualize Y_y , F_y e Y ;
 fimPara;
- (16) Seja G o $\mathcal{F}$ -empacotamento constituído de
 - um emparelhamento perfeito em $H[C]$,
 - um $\mathcal{F}$ -fator em cada componente de $H[D - Y]$,
 - o grafo F_x para cada $x \in A$,
 - um emparelhamento máximo em cada componente de $H[Y - \bigcup_{x \in A} Y_x]$,
 - um emparelhamento perfeito em $H[Y_x - V(F_x)]$ para cada $x \in A$;
- (17) Devolva G e pare.

Figura 5.4: Algoritmo Cinco.

componente não isomorfo a K_2 . Dado que a família $\mathcal{F}$ é fixa e que seu tamanho é finito, isto pode ser feito em tempo polinomial na ordem do grafo H e no tamanho da família $\mathcal{F}$.

Os passos (3) e (4) definem uma instância do problema da partição em matróides, a qual deve ser resolvida no passo (5). Dadas as propriedades da hereditariedade e da troca de h -componentes, que definem as famílias fechadas de hélices, não é difícil perceber que cada conjunto I_x contém os conjuntos independentes de um matróide sobre Y , com função posto r_x dada precisamente por

$$r_x(\tilde{Y}) := \text{cap}(x, \tilde{Y}) \quad \text{para todo } \tilde{Y} \subseteq Y.$$

Um algoritmo polinomial que resolve o problema da partição em matróides foi descrito por Edmonds em [9]. Esse algoritmo ou devolve uma partição como a que é invocada no passo (8), ou então devolve a coleção R de componentes de Y citada no passo (6). Do Teorema 1.4.2, inferimos que essas duas alternativas são mutuamente disjuntas.

Portanto, se o passo (7) for invocado, não é possível cobrir $|Y| - d$ componentes de Y com um $\mathcal{F}$ -empacotamento de H , o que certamente implica que qualquer $\mathcal{F}$ -empacotamento de H deixa mais do que d vértices livres já que os componentes de Y são $\mathcal{F}$ -críticos.

Caso seja executado o passo (8), então dispomos de um $\mathcal{F}$ -empacotamento, formado pelas hélices F_x tais que $x \in A$, $Y_x \neq \emptyset$, o qual cobre ao menos $|Y| - d$ componentes de Y e mais os vértices x de A para os quais $Y_x \neq \emptyset$. Os passos (10) a (15) modificam esse $\mathcal{F}$ -empacotamento de modo que ele passe a cobrir todos os vértices de A e não deixe de cobrir nenhum vértice em $\bigcup_{x \in A} Y_x$. Ao final desse processo, o novo $\mathcal{F}$ -empacotamento continua cobrindo pelo menos $|Y| - d$ componentes de Y .

No passo (16) estendemos esse $\mathcal{F}$ -empacotamento a um $\mathcal{F}$ -empacotamento de H que deixa no máximo d vértices de H livres, o qual finalmente é devolvido pelo algoritmo no passo (17).

É interessante observar a configuração peculiar dos $\mathcal{F}$ -empacotamentos construídos pelo Algoritmo Cinco. Se considerarmos um emparelhamento máximo E em um tal $\mathcal{F}$ -empacotamento G , sendo G máximo em H , então E atende a todas as condições de maximalidade dadas pelo Teorema da Estrutura de Gallai-Edmonds. O próximo resultado expressa esta observação de forma clara.

Lema 5.1.5 *Seja $\mathcal{F}$ uma família boa finita de grafos, H um grafo qualquer e G um $\mathcal{F}$ -empacotamento máximo em H construído pelo Algoritmo Cinco. Então um emparelhamento máximo em G é um emparelhamento máximo em H .* $\square$

Levando em conta o item b) do Teorema 5.1.2, temos a seguinte consequência do lema acima.

Lema 5.1.6 *Seja $\mathcal{F}$ uma família boa finita de grafos e G um $\mathcal{F}$ -empacotamento máximo em H construído pelo Algoritmo Cinco. Então a deficiência de G é mínima.* $\square$

Vamos finalizar essa seção com um resultado que fornece alguma informação a respeito da configuração típica dos $\mathcal{F}$ -empacotamentos máximos com deficiência mínima.

Teorema 5.1.7 *Seja $\mathcal{F}$ uma família boa de grafos, H um grafo qualquer e G um $\mathcal{F}$ -empacotamento máximo em H com deficiência mínima. Considere a decomposição de Gallai-Edmonds (D, A, C) de H . Então:*

- i) todos os h -componentes, componentes hipoemparelháveis e raízes de k -hélices de G , $k \geq 1$, são subgrafos de $H[D]$;*
- ii) todos os centros de k -hélices de G , $k \geq 1$, pertencem a A ;*
- iii) todos os vértices $x \in A$ são centros de hélices de G , cujas raízes e h -componentes são subgrafos de $H[D]$;*
- iv) cada componente de D contém no máximo um elemento de $T(G)$ ou uma raiz de uma hélice de G .*

Prova.

Item i. Seja v um vértice de algum h -componente ou componente hipoemparelhável, ou ainda raiz de alguma k -hélice de G , com $k \geq 1$. Não é difícil ver que existe um emparelhamento máximo E de G que deixa v livre. Pelo Teorema 5.1.2 item a), E é um emparelhamento máximo em H . Do Teorema da Estrutura de Gallai-Edmonds, temos $v \in D$.

Item ii. Seja $x \in V(G)$ tal que x é o centro de uma k -hélice de G , $k \geq 1$. Vamos provar que $x \in A$.

Suponhamos que exista um emparelhamento máximo E_1 de H que não cubra x . Seja E_2 um emparelhamento máximo de G tal que, em cada hélice de G , a aresta de E_2 que incide no centro é a haste da hélice. Claramente, E_2 cobre x ; além disso, E_2 também é um emparelhamento máximo em H , pelo Teorema 5.1.2 item a). Portanto, tomando a diferença simétrica entre E_1 e E_2 , temos que um componente dessa diferença é um caminho P cujas arestas pertencem alternadamente a E_1 e E_2 , de comprimento par, com um extremo em x . Seja y o outro extremo de P . Como y é livre de E_2 , então y ou é livre de G , ou então pertence a um elemento de $T(G)$. Temos portanto que y é extremo de um caminho E_2 -alternante ímpar que atinge a raiz de uma hélice. Aplicando o Lema 5.1.1, concluímos que ou G não tem deficiência mínima ou G não é maximal, contradições.

Item iii. Seja $x \in A$. Pelo item i), se x não satisfaz o enunciado do item iii), então x é coberto por uma aresta livre de G , possuindo o outro extremo em $C \cup A$. Mas uma tal aresta pertence a qualquer emparelhamento máximo de G , que por conseqüência é um emparelhamento máximo de H que não satisfaz as condições do Teorema da Estrutura de Gallai-Edmonds para maximalidade, uma contradição.

Item iv. Suponhamos que houvesse dois elementos de $T(G)$ pertencentes a um mesmo componente de D . Considerando um emparelhamento máximo de G que, para cada k -hélice, $k \geq 1$, empregasse a respectiva haste, teríamos um emparelhamento máximo de H (pelo Teorema 5.1.2 item a)) deixando dois vértices em um componente de D livres, o que contraria o Teorema da Estrutura de Gallai-Edmonds.

Caso haja duas raízes pertencentes ao mesmo componente de D , empregando o mesmo tipo de emparelhamento usado no parágrafo anterior, temos um emparelhamento máximo em H com duas arestas incidindo em A e no mesmo componente de D — novamente contrariando as condições do Teorema da Estrutura de Gallai-Edmonds.

Finalmente, se uma raiz e um elemento de $T(G)$ pertencerem ao mesmo componente de D , temos um emparelhamento máximo em H com uma aresta incidindo num componente de D e em A , e um vértice livre neste mesmo componente de D ; absurdo novamente. $\square$

5.1.4 A propriedade matroidal

Vamos apresentar nesta seção a prova de que famílias boas de grafos são matroidais.

Teorema 5.1.8 *Seja $\mathcal{F} = \mathcal{H} \cup \mathcal{P}$, em que $\mathcal{H}$ é uma família qualquer de grafos hipoemparelháveis e $\mathcal{P}$ uma família fechada não vazia de hélices. Então $\mathcal{F}$ é matroidal.*

Prova. Seja H um grafo qualquer. Seja $M_{\mathcal{F}}(H)$ o conjunto

$$\{S \subseteq V(H): \text{existe um } \mathcal{F}\text{-empacotamento de } H \text{ que cobre } S\}.$$

Vamos provar que $(V(H), M_{\mathcal{F}}(H))$ é um matróide.

Seja $A \subseteq V(H)$. Considere dois $\mathcal{F}$ -empacotamentos G e G' tais que os conjuntos independentes $V(G)$ e $V(G')$ satisfaçam:

- 1) $V(G) \subseteq A$ e $V(G') \subseteq A$;
- 2) $V(G')$ é um conjunto independente máximo em A ;
- 3) $V(G) \not\subseteq V(G')$;

- 4) $\text{dist}(G, G')$ é mínima dentre todos os pares de $\mathcal{F}$ -empacotamentos que satisfazem a 1), 2), e 3), sendo

$$\text{dist}(G, G') := |Hst(G) \setminus A(G')| + |Hst(G') \setminus A(G)| + |V(H)| \times |Hc(G) \oplus Hc(G')|.$$

Vamos provar que, se $V(G)$ é um conjunto independente maximal, então G e G' têm o mesmo tamanho.

Seja $x \in V(G) \setminus V(G')$. Vamos em primeiro lugar supor que x é coberto por algum elemento de $T(G)$. Se x é coberto por um componente hipoemparelhável, então definimos o subgrafo W como sendo o referido componente. Se x é coberto por um h-componente D de uma hélice F , então W é a sub-hélice de F com $Hc(W) = \{D\}$. Neste último caso, seja c o centro de W .

Vamos analisar a seguinte lista de casos:

- 1) $|V(W)| = 1$;
- 2) $|V(W)| > 1$ e todos os vértices de W , com exceção de x , estão cobertos por arestas livres de G' com ambas as pontas em W ;
- 3) $|V(W)| > 1$ e há pelo menos dois vértices distintos z e z' de W , ambos distintos de x , que não são cobertos por arestas livres de G' com ambas as pontas em W . Suponhamos sem perda de generalidade que $z \neq c$. Então podem ocorrer os seguintes subcasos:
 - 3.1) z é livre de G' ;
 - 3.2) z é coberto por um elemento pertencente a $T(G')$;
 - 3.3) z é o centro de uma hélice de G' cuja raiz pertence a $V(W)$;
 - 3.4) z é o centro de uma hélice de G' cuja raiz não pertence a $V(W)$;
 - 3.5) z é coberto por uma aresta livre de G' cuja outra ponta não pertence a $V(W)$;
 - 3.6) z é a raiz de uma hélice de G' cujo centro não pertence a $V(W)$;
 - 3.7) z é a raiz de uma hélice de G' cujo centro pertence a $V(W)$ e é distinto de c (sem perda de generalidade, z' é esse centro);
 - 3.8) z é a raiz de uma hélice de G' cujo centro pertence a $V(W)$ e coincide com c .

Caso 1. Temos $K_1 \in \mathcal{F}$. Como $V(G')$ é máximo em A , temos $V(G) \subseteq V(G')$, absurdo.

Caso 2. O $\mathcal{F}$ -empacotamento G'' obtido de G' trocando-se as arestas livres citadas por W atesta que $V(G')$ não é maximal em A .

Caso 3. Como $z \neq c$, então $W - z$ admite um emparelhamento perfeito. Seja E um tal emparelhamento. Considere C um caminho G' -alternante maximal com um extremo em x e possuindo alternadamente arestas de E e $Hst(G')$, e satisfazendo as hipóteses do Lema 5.1.1. Levando em conta o Lema 5.1.1, obtemos que C tem comprimento par. Então C termina com uma aresta de $Hst(G')$. Seja u o outro extremo de C .

Figura 5.5: Esquema do Caso 3.8 da prova do Teorema 5.1.8.

Se $u \in W$, então devido à maximalidade de C temos $u = z$ em todos os oito subcasos. Nos seis primeiros o fato de C terminar em z leva a um absurdo, portanto concluímos que $u \notin W$. No Caso 3.7, considerando o vértice z' , recaímos no Caso 3.3, o que também leva à conclusão de que $u \notin W$. Já o Caso 3.8 não pode ser reduzido a nenhuma das situações analisadas até aqui, e será tratado mais adiante.

Vimos que nos subcasos 3.1 a 3.7 temos $u \notin W$. Considere o $\mathcal{F}$ -empacotamento $G'' := G' \triangle C$. Para G'' valem:

- $V(G'') \subseteq A$;
- $V(G'')$ é um conjunto independente máximo em A , pois tem o mesmo tamanho de G' ;
- $\text{dist}(G, G'') < \text{dist}(G, G')$ pois $u \notin W$.

Logo, $V(G) \subseteq V(G'')$.

Vamos analisar agora o Caso 3.8. Supondo que não seja possível reduzi-lo a um dos outros sete casos, temos obrigatoriamente a seguinte situação: todos os vértices de W exceto x , z e z' estão cobertos por arestas livres de G' com ambas as pontas em W . Veja um esquema na Figura 5.5.

Seja F a hélice de G da qual tomamos W como sub-hélice. Considere os conjuntos $Hc(F)$ e $Hc(F')$ dos h-componentes de F e F' , respectivamente.

Se existe um h-componente D' em $Hc(F')$ isomorfo a D e não pertencente a $Hc(F)$, então seja F'' a hélice com $Hc(F'') := (Hc(F') \setminus \{D'\}) \cup \{D\}$. Considere o $\mathcal{F}$ -empacotamento G'' obtido de G trocando-se F' por F'' e reemparelhando-se adequadamente

os vértices de D' . Temos $\text{dist}(G, G'') < \text{dist}(G, G')$, $V(G'') \subseteq A$ e $|V(G'')| = |V(G')|$. Logo $V(G) \subseteq V(G'')$.

Se todo h-componente isomorfo a D em $Hc(F')$ pertence a $Hc(F)$ e F' é isomorfo a uma sub-hélice de F , então pela hereditariedade G' pode ser aumentado. Como o $\mathcal{F}$ -empacotamento resultante da aumentação ainda está contido em A , temos uma contradição.

Finalmente, se todo h-componente em $Hc(F')$ isomorfo a D pertence a $Hc(F)$ mas F' não é isomorfo a uma sub-hélice de F , então temos $F \not\stackrel{D}{\subseteq} F'$. Aplicando a troca de h-componentes, conseguimos obter a partir de G' um $\mathcal{F}$ -empacotamento G'' com $V(G) \subseteq V(G'')$ e $V(G'')$ independente máximo em A . Isso completa o exame do Caso 3.8.

Resta ainda o caso em que x é coberto por alguma aresta xy de $Hst(G)$. Como G' é máximo em A , então pelo Lema 5.1.1 y é centro de uma hélice de G' com raiz z . Seja C o caminho (x, y, z) . O $\mathcal{F}$ -empacotamento $G'' := G' \triangle C$ satisfaz as condições para concluirmos que $V(G) \subseteq V(G'')$.

Concluimos, pois, a análise de todos os casos possíveis. Portanto mostramos que, para qualquer G com $V(G) \subseteq A$, existe um $\mathcal{F}$ -empacotamento G'' com $V(G'')$ máximo em A , contendo $V(G)$. Se G for maximal em A , temos a igualdade entre $|V(G)|$ e $|V(G'')|$. Desse modo, G e G' têm o mesmo tamanho.

Isso completa a prova do teorema. □

5.2 Famílias da forma $\{K_2, F\}$, com F conexo

Na seção anterior desenvolvemos as provas de que:

- famílias boas de grafos possuem a propriedade matroidal, e
- famílias boas finitas de grafos definem problemas de fatoração polinomiais.

Aqui mostraremos o que existe na literatura acerca de possíveis *recíprocas* desses resultados para famílias finitas de grafos. De fato, os teoremas que vimos até o momento nos dão apenas condições *suficientes*, seja para que uma família finita de grafos possua a propriedade matroidal, seja para que os respectivos problemas de fatoração admitam algoritmos polinomiais. Entendemos por recíproca um resultado que nos dê alguma condição *necessária* acerca dessas características.

Neste sentido, dispomos de recíprocas dos resultados da seção anterior apenas para famílias de grafos da forma $\{K_2, F\}$, com F conexo. Loebl e Poljak apresentaram tais

resultados em [21, 23]. Com isso, essa classe de famílias de grafos tornou-se a primeira (e, por enquanto, a única conhecida) para a qual vale a conjectura de Loebl e Poljak.

5.2.1 Caracterização das famílias matroidais

Nas duas próximas seções, veremos que as seguintes classes de famílias de grafos da forma $\{K_2, F\}$, F conexo:

- famílias boas ou redutíveis (pág. 48), e
- famílias matroidais

são equivalentes. Além disso, mostraremos que, se assumimos que $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, então

- um problema de fatoração é polinomial se e somente se a família que o define é matroidal.

Abaixo definimos a notação que será necessária às provas destes resultados.

Considere F um grafo conexo não isomorfo a K_2 . Denotamos por $r(F)$ o conjunto dos vértices de F que têm grau 1, e por $c(F)$ o conjunto $Adj(r(F))$.

Seja x um vértice de F . A partir de F e de x , definimos um novo grafo, chamado F_x , o qual consiste em um cópia de F à qual acrescenta-se um vértice, y , e mais a aresta xy . Considere dois conjuntos maximais de vértices de F_x , B_1^x e B_2^x , ambos cobertos por $\{K_2, F\}$ -empacotamentos de F_x , sendo que B_1^x contém $V(F)$, B_2^x contém os vértices x e y e, para cada $u \in c(F_x)$, existe um $v \in r(F_x)$ tal que u é adjacente a v em F_x e $u, v \in B_2^x$.

Vamos em primeiro lugar caracterizar quais famílias de grafos conexos contendo K_2 e mais um segundo grafo F são matroidais. Para isso, empregaremos o seguinte lema:

Lema 5.2.1 *Seja F um grafo conexo não isomorfo nem a K_1 nem a K_2 , e x um vértice de F não pertencente a $c(F)$. Seja G um $\{K_2, F\}$ -empacotamento em F_x com $V(G) = B_2^x$. Então G não admite componentes isomorfos a F .*

Prova. Suponhamos por absurdo que algum componente $\bar{G}$ de G é isomorfo a F . Então, $|B_2^x| \geq |V(F)|$. Como F_x tem $|V(F)| + 1$ vértices, então ou $|B_2^x| = |V(F)|$ ou $|B_2^x| = |V(F)| + 1$.

Se $|B_2^x| = |V(F)|$, temos $B_2^x = V(\bar{G})$ já que vale $B_2^x \supseteq V(\bar{G})$. Mas nesse caso, temos $|c(\bar{G})| = |c(F)|$ pois $\bar{G}$ é isomorfo a F , e $|c(\bar{G})| = |c(G)| \geq |c(F)| + 1$, já que $B_2^x = V(\bar{G}) = V(G)$. Portanto, chegamos a uma contradição.

Por outro lado, se $|B_2^x| = |V(F)| + 1$, então G é um $\{K_2, F\}$ -fator de F_x . Nesse caso, um dos componentes de G (isomorfo a F) cobre $|V(F)|$ vértices, restando apenas um vértice para ser coberto pelos demais componentes de G . Claramente, isto só é possível se $F = K_1$. $\square$

Teorema 5.2.2 *Seja $\mathcal{F}$ uma família de grafos da forma $\{K_2, F\}$, com F conexo. Se $\mathcal{F}$ é matroidal então $\mathcal{F}$ é boa ou $\mathcal{F}$ é redutível.*

O enunciado acima dá uma condição necessária para que a família $\{K_2, F\}$ seja matroidal, em termos de F : a de que F ou seja o grafo K_1 , ou seja K_2 -fatorável, ou hipoemparelhável, ou uma 1-hélice.

Prova. Vamos supor que $\mathcal{F} = \{K_2, F\}$, com F conexo, não é nem boa nem redutível. A prova será dividida em diversos casos, sendo que em cada caso vamos exibir um grafo que admita dois conjuntos de vértices cobertos por $\mathcal{F}$ -empacotamentos maximais de tamanhos diferentes.

Caso 1. Suponhamos que F possui um vértice x não pertencente a $c(F)$, tal que $\text{emp}_{K_2}(F - x) \leq |V(F)| - 3$. Então o grafo F_x e os conjuntos de vértices B_1^x e B_2^x exibem as características que mencionamos no parágrafo acima. De fato,

$$|B_2^x| = \text{emp}_{K_2}(F_x) \leq \max\{\text{emp}_{K_2}(F), \text{emp}_{K_2}(F - x) + 2\} < |V(F)| \leq |B_1^x|.$$

A primeira igualdade é consequência do Lema 5.2.1. Na segunda comparação, temos $\text{emp}_{K_2}(F_x) \leq \text{emp}_{K_2}(F)$ se um emparelhamento máximo em F_x não emprega a aresta xy , e $\text{emp}_{K_2}(F_x) \leq \text{emp}_{K_2}(F - x) + 2$ caso contrário. A terceira comparação é consequência do fato de que F não é K_2 -fatorável.

Caso 2. Suponhamos agora que, para todo vértice x de F não pertencente a $c(F)$, tenhamos $\text{emp}_{K_2}(F - x) \geq |V(F)| - 2$. Vejamos como é o grafo F de acordo com essa condição.

Considere a decomposição de Gallai-Edmonds (D, A, C) de F . Sendo F um grafo que não admite um K_2 -fator, então temos $D \neq \emptyset$.

Seja $x \in D$. Claramente, $x \notin c(F)$; caso contrário ou A conteria um vértice de grau 1, ou então algum componente de $F[D]$ não isomorfo a K_1 conteria um vértice de grau 1. Ambas as situações contradizem o Teorema da Estrutura de Gallai-Edmonds.

Sendo x um vértice contido em D e não pertencente a $c(F)$, temos $\text{emp}_{K_2}(F) = \text{emp}_{K_2}(F - x) \geq |V(F)| - 2$. Como F não é K_2 -fatorável, podem ocorrer dois casos: ou $\text{emp}_{K_2}(F) = |V(F)| - 2$ ou $\text{emp}_{K_2}(F) = |V(F)| - 1$.

$$\text{emp}_{K_2}(F) = |V(F)| - 2$$

$$\text{emp}_{K_2}(F) = |V(F)| - 1$$

Figura 5.6: Esquemas do grafo F .

Como F não é hipoemparelhável, então $A \cup C \neq \emptyset$. Mais ainda, $A \cup C \subseteq c(F)$, pois caso contrário teríamos $\text{emp}_{K_2}(F) - 2 = \text{emp}_{K_2}(F - y) \geq |V(F)| - 2$ para todo $y \in A \cup C \setminus c(F)$. Levando em conta que $D \cap c(F) = \emptyset$, temos $A \cup C = c(F)$.

Finalmente, temos que $C = \emptyset$, pois qualquer vértice pertencente a C também está em $c(F)$, sendo portanto adjacente a um vértice que pertence a $r(F)$, e portanto a D . Assim encontraríamos um vértice em C adjacente a um vértice em D ; contradição.

A Figura 5.6 mostra esquemas do grafo F segundo o que acabamos de discutir. O esquema superior ilustra o caso em que $\text{emp}_{K_2}(F) = |V(F)| - 2$, e o outro esquema mostra F com $\text{emp}_{K_2}(F) = |V(F)| - 1$.

Subcaso 2.1. Suponhamos que $\text{emp}_{K_2}(F) = |V(F)| - 2$. Seja H o grafo composto por duas cópias de F , F_1 e F_2 , de tal modo que um vértice de $r(F_2)$ coincida com um vértice de $c(F_1)$. (Naturalmente, tanto $r(F_2)$ quanto $c(F_1)$ são não vazios.) Seja x o vértice em comum entre F_1 e F_2 , e x_1 um vértice de F_1 de grau 1 adjacente a x_2 .

Um esquema de H é exibido na Figura 5.7.

Figura 5.7: À esquerda mostramos um esquema do grafo H . À direita, vemos o mesmo grafo com mais detalhes.

Vamos construir dois conjuntos maximais de vértices de H , S_1 e S_2 , de cardinalidades diferentes, que sejam cobertos por $\mathcal{F}$ -empacotamentos de H .

Não é difícil ver que existe um conjunto de vértices de cardinalidade $|V(H)| - 1$, contendo $V(F_1)$. A este vamos denominar de S_1 . Podemos ver que S_1 é maximal, já que, dado que $|V(F)|$ é par e $|V(H)|$ ímpar, então H não admite $\mathcal{F}$ -fator.

Vamos agora caracterizar S_2 . O conjunto $V(F_2)$ é, naturalmente, passível de ser coberto por um $\mathcal{F}$ -empacotamento de H . Assim, tomemos S_2 como sendo o conjunto de vértices maximal que contém $V(F_2)$ e pode ser coberto por um $\mathcal{F}$ -empacotamento. Considere G um tal $\mathcal{F}$ -empacotamento.

Se G cobre o conjunto $I_2 := V(F_2) \setminus \{x_2\}$ apenas com arestas livres, então levando em conta o esquema da Figura 5.6, não é possível cobrir todos os vértices de I_2 . Logo G possui um componente $\bar{G}$ isomorfo a F , com $V(\bar{G}) \cap I_2 \neq \emptyset$.

Seja t o maior inteiro positivo para o qual F_2 pode ser decomposto em t conjuntos $N_1, N_2, \dots, N_t$, tais que $|N_i|$ é par positivo, $1 \leq i \leq t$, e $|N_t|$ é ímpar. Seja $\bar{G}_1$ o subgrafo de $\bar{G}$ induzido por $V(\bar{G}) \cap V(F_1)$, e $\bar{G}_2$ o subgrafo de $\bar{G}$ induzido por $V(\bar{G}) \cap I_2$. Acompanhe pelo esquema da Figura 5.7. Naturalmente, a decomposição acima induz uma decomposição com as mesmas características sobre F , já que F_2 é uma cópia de F .

Temos que $x_2 \in V(\bar{G})$. Se $x_2 \in c(\bar{G})$, como $|V(\bar{G}_2)|$ é ímpar, então $|V(\bar{G}_1)|$ também é ímpar. Seja w o vértice de grau 1 de $\bar{G}$ adjacente a x_2 . Temos que $|V(\bar{G}_1) \setminus \{w\}|$ é par positivo, e assim $V(\bar{G}_1) \setminus \{w\}$, $V(\bar{G}_2) \cap N_1$, $V(\bar{G}_2) \cap N_2$, $\dots$, $V(\bar{G}_2) \cap N_t$ é uma decomposição de $\bar{G}$ (que é isomorfo a F) em $t + 1$ partes, um absurdo.

Figura 5.8:

Por outro lado, se $x_2 \notin c(\bar{G})$, então $x_1 \notin S_2$. Uma primeira consequência disso é que $I_1 \setminus V(\bar{G}_1)$ admite um K_2 -fator.

Se $V(\bar{G}_1) \setminus \{x_2\} = \emptyset$, isso claramente leva a um absurdo, já que $F_1 - \{x_1, x_2\}$ não admite um K_2 -fator. Se $V(\bar{G}_1) \setminus \{x_2\} \neq \emptyset$, então esse conjunto não é K_2 -fatorável (caso contrário, F_1 também seria). Ou seja, $\text{emp}_{K_2}(\bar{G}_1 - \{x_2\}) \leq |V(\bar{G}_1)| - 3$. Notando que $\bar{G} - \{x_2\}$ não é conexo, temos $\text{emp}_{K_2}(\bar{G} - \{x_2\}) \leq \text{emp}_{K_2}(\bar{G}_1 - \{x_2\}) \leq |V(\bar{G}_1)| - 3 \leq |V(\bar{G})| - 3$, absurdo.

Subcaso 2.2. Supondo, finalmente, que $\text{emp}_{K_2}(F) = |V(F)| - 1$, temos o grafo F como no esquema da Figura 5.6 (embaixo). Se $|c(F)| = 1$, então F é uma 1-hélice, absurdo. Portanto, $|c(F)| \geq 2$.

Seja H o grafo composto por três cópias de F , F_1 , F_2 e F_3 , arranjadas segundo a Figura 5.8 (direita).

Seja S_1 um conjunto maximal de vértices de H , que seja coberto por um $\mathcal{F}$ -empacotamento de H , de tal maneira que S_1 contenha $I_1 \cup I_3 \cup \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Não é difícil perceber que S_1 deve ter cardinalidade mínima $|V(H)| - 1$.

Um segundo conjunto maximal, S_2 , coberto por um $\mathcal{F}$ -empacotamento, contendo $I_2 \cup \{x_2, x_3\}$, deve, portanto, ter cardinalidade no mínimo $|V(H)| - 1$. Como $|Adj_H(I_2 \cup \{x_2, x_3\})| \geq 1$, então esse conjunto não pode ser coberto apenas por arestas livres.

Assim, seja $\bar{G}$ um componente de um $\mathcal{F}$ -empacotamento G de H tal que $|V(\bar{G})| = |S_2|$. Já vimos que $S_2 \cap V(\bar{G}) \neq \emptyset$. Se $S_2 = V(\bar{G})$, então os demais vértices de H só podem ser cobertos por arestas livres, o que não permite cobrir mais do que $|V(H)| - 2$ vértices, contradição. Ao contrário, caso $S_2 \neq V(\bar{G})$, então $\bar{G}$ contém um vértice de corte x tal que o número de componentes de $\bar{G} - x$ é pelo menos três, absurdo novamente.

Isto completa a prova do teorema. □

5.2.2 Complexidade dos problemas de fatoração

A seção anterior estabeleceu quais famílias de grafos conexos da forma $\{K_2, F\}$ são matroidais e quais não são. A presente seção trata da complexidade dos respectivos problemas de fatoração. A Seção 5.1.3, que estabelece que famílias boas finitas de grafos definem problemas de fatoração polinomiais, resolve em parte a questão:

- se $\mathcal{F} = \{K_2, F\}$ é boa, então $FATOR(\mathcal{F}) \in \mathcal{P}$.

Loebl e Poljak [23] provaram que

Teorema 5.2.3 *Se $\mathcal{F} = \{K_2, F\}$ não é boa, então $FATOR(\mathcal{F})$ é $\mathcal{NP}$ -completo.*

Isto permite confirmar a conjectura de Loebl e Poljak para famílias de grafos conexos da forma $\{K_2, F\}$, desde que seja assumido que $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.

A demonstração do Teorema 5.2.3 é longa e, em parte, emprega técnicas baseadas em coerência, já largamente ilustradas neste trabalho. Por esse motivo vamos omitir os detalhes e apenas expor brevemente como a demonstração foi feita.

Se $\mathcal{F} = \{K_2, F\}$ não é boa, então $\mathcal{F}$ não é nem o grafo K_1 , nem é perfeitamente emparelhável, nem hipoemparelhável, nem uma 1-hélice. Loebl e Poljak estabelecem que, nessa situação, vale pelo menos uma das quatro afirmações abaixo:

Caso 1. Seja (D, A, C) a decomposição de Gallai-Edmonds de F . Seja $\bar{F}$ o grafo obtido de F pela deleção das arestas de $F[A]$ e pela contração de cada componente de $F[D \cup C]$. Então $\bar{F}$ possui pelo menos um componente não isomorfo nem a uma estrela nem a uma multiestrela. Por **multiestrela** entendemos uma árvore T com um vértice c tal que os componentes de $T - c$ são estrelas isomorfas entre si.

Caso 2. Para algum vértice x de F , o grafo $F - x$ tem pelo menos três componentes e pelo menos dois deles não admitem um emparelhamento perfeito.

Caso 3. Seja $\hat{F}$ o grafo obtido de F pela deleção das arestas de $F[A]$. Não ocorrem os Casos 1 e 2. Além disso, se F' é um componente de $\hat{F}$, então $F'[C] = \emptyset$. Mais ainda, há um componente K de $F'[D]$ que é adjacente a cada vértice de A , e cada um dos demais componentes de $F'[D]$ é adjacente apenas a um vértice de A .

Caso 4. Não ocorrem os Casos 1 e 2. Além disso, para algum vértice x de F , $def(F - x) \geq 2$ e F não possui vértices de grau 1.

A Figura 5.9 traz um exemplo de multiestrela, e exemplos de grafos que se encaixam nos Casos 3 e 4.

Figura 5.9: Da esquerda para a direita, uma multiestrela, um exemplo de grafo que se encaixa no Caso 3, e um exemplo de grafo para o Caso 4.

Os problemas de fatoração que se encaixam no Caso 1 tiveram a sua complexidade estabelecida através da transformação do *problema do F -empacotamento com coloração* em $FATOR(\mathcal{F})$. Uma **coloração** de um grafo H é uma função $\varphi_H: V(H) \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $\varphi_H(u) \neq \varphi_H(v)$ sempre que os vértices u e v de H são adjacentes. Estamos interessados em colorações de grafos bipartidos em que uma das partes recebe a cor zero. Todas as colorações referidas daqui por diante são desse tipo.

Seja $\bar{F}$ o grafo definido no Caso 1. Considere $\varphi_{\bar{F}}$ uma coloração de $\bar{F}$ em que os vértices de A recebem a cor zero. Definimos o **problema do $\bar{F}$ -empacotamento com coloração** $\varphi_{\bar{F}}$ como segue.

Instância: Um grafo bipartido $\bar{H}$ e uma coloração $\varphi_{\bar{H}}$ de $\bar{H}$.

Questão: $\bar{H}$ admite um $\bar{F}$ -fator G tal que $\varphi_{\bar{G}} = \varphi_{\bar{F}}$ para todo membro $\bar{G}$ de G^1 isomorfo a $\bar{F}$ e $\varphi_G(v) = \varphi_{\bar{H}}(v)$ para todo $v \in V(\bar{H})$?

Loebl e Poljak [23] afirmam que este problema é polinomial se $\bar{F}$ é ou uma estrela ou uma multiestrela, e $\mathcal{NP}$ -completo caso contrário, e citam Las Vergnas [29] como referência a respeito. Assim, fazendo-se a transformação nos problemas de $\{K_2, F\}$ -fatoração que se encaixam no Caso 1, mostramos que estes problemas são $\mathcal{NP}$ -completos. Os demais problemas são tratados em separado.

Para os problemas do Caso 3, é possível usarmos problemas do Caso 1 nas transformações. Os problemas do Caso 4 são tratados fazendo-se a transformação a partir do problema da satisfatibilidade. Finalmente, para o Caso 2 usa-se o problema do emparelhamento k -dimensional, sendo k igual ao número de componentes do grafo $F - x$. Com isso, conclui-se a prova do Teorema 5.2.3.

¹ G é um conjunto de subgrafos de H isomorfos a F (Seção 1.5).

Referências Bibliográficas

- [1] E. Balas. Integer and fractional matching. In P. Hansen, editor, *Annals of Discrete Mathematics*, volume 11, Studies on Graphs and Discrete Programming, pages 1–13. North-Holland Pub. Comp., Amsterdam, 1981.
- [2] M. L. Balinski. Integer programming: Methods, uses and computation. *Management Sciences*, 12:253–313, 1965.
- [3] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory with Applications*. Elsevier Sound Publishers, New York, 1976.
- [4] G. Cornuejols and D. Hartvigsen. An extension of matching theory. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 40:285–296, 1986.
- [5] G. Cornuejols, D. Hartvigsen, and W. Pulleyblank. Packing subgraphs in a graph. *Operations Research Letters*, 1:139–143, 1982.
- [6] G. Cornuejols and W. R. Pulleyblank. A matching problem with side conditions. *Discrete Mathematics*, 29:135–159, 1980.
- [7] G. Cornuejols and W. R. Pulleyblank. Critical graphs, matchings and tours or a hierarchy of relaxations for the travelling salesman problem. *Combinatorica*, 3:35–52, 1983.
- [8] J. Edmonds. Paths, trees and flowers. *Canadian Journal of Mathematics*, 17:449–467, 1965.
- [9] J. Edmonds. Matroid partition. In G. B. Dantzig and A. F. Veinott, editors, *Lectures in Applied Mathematics*, volume 11, Mathematics of the Decision Sciences, pages 335–345. American Mathematical Society, Providence, RI, 1968.
- [10] J. Edmonds and D. R. Fulkerson. Transversals and matroid partition. *J. Res. Nat. Bur. Standards, Series B*, 69:147–153, 1965.
- [11] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability*. W. H. Freeman, São Francisco, 1979.
- [12] F. Harary. *Graph Theory*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1968.

- [13] P. Hell and D. G. Kirkpatrick. On the completeness of a generalized matching problem. In *Proceedings of the Tenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 240–245, San Diego, CA, 1978.
- [14] P. Hell and D. G. Kirkpatrick. On the complexity of general graph factor problems. *SIAM Journal on Computing*, 12:601–609, 1983.
- [15] P. Hell and D. G. Kirkpatrick. Packing by cliques and by finite families of graphs. *Discrete Mathematics*, 49:45–59, 1984.
- [16] P. Hell and D. G. Kirkpatrick. Packing by complete bipartite graphs. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 7:199–209, 1986.
- [17] J. E. Hopcroft and J. D. Ullmann. *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1976.
- [18] M. Kano and S. Poljak. Graphs with the Balas-Uhry property. *Journal of Graph Theory*, 14:623–628, 1990.
- [19] R. Karp. Reducibility among combinatorial problems. In *Complexity of Computer Computations*, pages 85–103. Plenum Press, Nova York, 1972.
- [20] R. Karp. On the complexity of combinatorial problems. *Networks*, 5:45–68, 1975.
- [21] M. Loebl and S. Poljak. On matroids induced by packing subgraphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 44:338–354, 1988.
- [22] M. Loebl and S. Poljak. Good family packing. In J. Năsătril and M. Fiedler, editors, *Fourth Czechoslovakian Symposium on Combinatorics, Graphs and Complexity*, pages 181–186. Elsevier Sound Publishers, Amsterdam, 1992.
- [23] M. Loebl and S. Poljak. Efficient subgraph packing. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 59:106–121, 1993.
- [24] L. Lovász and M. D. Plummer. *Matching Theory*. North-Holland Pub. Comp., Amsterdam, 1986.
- [25] J. Mühlbacher. F-factors of graphs: a generalized matching problem. *Information Processing Letters*, 8:207–214, 1979.
- [26] J. Mühlbacher, F. V. Steinpatz, and G. Tinhofer. On certain classes of fractional matchings. *Discrete Applied Mathematics*, 9:235–244, 1984.
- [27] W. R. Pulleyblank. Fractional matchings and the Edmonds-Gallai theorem. *Discrete Applied Mathematics*, 16:51–58, 1987.
- [28] J. P. Uhry. Sur le problème du couplage maximal. *RAIRO*, 3:13–20, 1975.
- [29] M. Las Vergnas. An extension of Tutte’s 1-factor problem. *Discrete Mathematics*, 23:241–255, 1978.
- [30] D. J. A. Welsh. *Matroid Theory*. Academic Press, 1976.

Índice

- $+$, 2
- $-$, 2
- 2^S , 1
- $:=$, 2
- $=$, 2
- $A(H)$, 2
- $C(M)$, 17, 58, 85
- $D[F, v]$, 18, 58
- $H - S$, 5
- $H - T$, 5
- $H - a$, 5
- $H - v$, 5
- H/S , 5
- $H[S]$, 3
- $H[T]$, 3
- K_n , 4
- $K_{m,n}$, 5
- $S[F, v]$, 19
- S_i , 5, 67
- $T(G)$, 105
- $T(H)$, 25, 49
- $V(H)$, 2
- $\delta_H(S)$, 3
- $\delta_H(u)$, 3
- $\leq$, 103
- $\triangle$, 7
- $\oplus$, 2
- $Adj_H(S)$, 3
- $Adj_H(u)$, 3
- $FATOR(F)$, 13
- $Hc(F)$, 103
- $Hst(G)$, 105
- $b(A)$, 39
- $cap(x, R)$, 112
- $def(H)$, 6
- $def_F(H)$, 13
- $d_H(u)$, 3
- $emp(H)$, 6
- $emp_F(H)$, 13
- $exc_S(H)$, 7
- $i(T)$, 72
- k -DM, 17
- $\mathcal{S}_B$, 83
- $\leq_P$, 17
- $c(F)$, 120
- $r(F)$, 120
- adjacência
 - entre arestas, 3
 - entre vértices, 3
- algoritmo de Edmonds, 10
- aresta, 2
 - extremo de, 3
 - livre, 25
- G -aresta, 25
- árvore, 4
 - E -alternante, 10
- aumentação, 7, 25
- bloco, 5
- botão, 38
- cabeça, 50
- caminho, 4
 - E -alternante, 6
 - G -alternante, 49
 - $\{G, G'\}$ -alternante, 53
 - aumentador, 49
 - de um emparelhamento, 6
 - comprimento de, 4
 - ímpar, 4
 - par, 4
- capacidade, 112
- cauda aumentadora, 49
- centro de uma hélice, 103

- circuito, 4
 - comprimento de, 4
 - ímpar, 4
 - par, 4
- classe, 2
- clique, 4
- cobertura, 4
- F -coerência, 19, 58
 - interna, 17, 58, 85
- coleção, 2
- coloração de um grafo, 126
- componente de um grafo, 4
- comprimento
 - de um caminho, 4
 - de um circuito, 4
- configuração aumentadora, 25, 49, 69
 - de tipo 1, 69
 - de tipo 2, 69
 - degenerada, 25
- conjunto estável de vértices, 4
- conjunto independente
 - de vértices, 4
 - em um matróide, 11
- contração, 5
- s, t -cruz, 85
- decomposição de Gallai-Edmonds, 8
- deficiência, 6, 13
- deleção, *veja* remoção
- F -diamante, 18, 58
- distância entre dois vértices, 4
- elemento de uma s, t -matriz, 88
- eliminação, *veja* remoção
- F -empacotamento, 12
 - máximo, 13
 - maximal, 14
- emparelhamento, 6
 - fracionário, 24
 - máximo, 6
 - perfeito, 6
 - tamanho de, 6
 - vértice livre de, 6
- τ -emparelhamento, 30, 49
- 2-emparelhamento, 24
- estrela, 5, 67
- F -estrela, 19
 - núcleo de, 19
- S -excedente, 7
- excedente de H visto de S , *veja* S -excedente
- extensão modular, 17, 58, 85
- extremo
 - de um caminho, 4
 - de uma aresta, 3
- família, 2
 - boa de grafos, 104
 - fechada de hélices, 103
 - irredutível, 48
 - seqüencial de estrelas, 67
- F -fator, 12
- floresta, 4
 - E -alternante, 10
- grafo, 2
 - bipartido, 4
 - completo, 4
 - partes de, 4
 - coloração de, 126
 - completo, 4
 - componentes de, 4
 - conexo, 4
 - k -conexo, 5
 - $\mathcal{F}$ -crítico, 105
 - família boa de, 104
 - F -fatorável, 12
 - hipoemparelhável, 7
 - não conexo, 4
 - ordem de, 3
 - perfeitamente emparelhável, 6
- grau de um vértice, 3
- h -componente, 103
- hélice, 103
 - centro de, 103
 - família fechada de, 103
 - haste de, 103
 - raiz de, 103
- k -hélice, 103
- haste de uma hélice, 103
- hereditariedade, 104
- imagem

- de um h -componente, 103
- de uma hélice, 103
- isomorfismo entre grafos, 3
- matróide, 11
 - conjunto independente em, 11
 - posto de, 11
 - problema da partição em, 11
- s, t -matriz, 88
 - elemento de, 88
- F -módulo, 17, 58, 85
- módulo, 17, 58, 85
- multiestrela, 125
- núcleo de uma F -estrela, 19
- ordem de um grafo, 3
- partes de um grafo bipartido, 4
- pipa aumentadora, 50
- ponte, 53
- posto de um matróide, 11
- problema
 - da partição em matróides, 11
 - de fatoração
 - não uniforme, 13
 - por $F_1, F_2, \dots, F_k$, 13
 - por um grafo, 13
 - uniforme, 13
 - do emparelhamento
 - fracionário perfeito, 24
 - do F -empacotamento com coloração, 126
 - do F -fator, 13
 - do emparelhamento
 - k -dimensional, 16, 81
- propriedade
 - matroidal, 101
- propriedade de Balas-Uhry, 46
- raiz de uma árvore alternante, 10
- raiz de uma hélice, 103
- remoção, 5
- sub-hélice, 103
- subgrafo, 3
 - próprio, 3
- tamanho
 - de um F -empacotamento, 12
 - de um emparelhamento, 6
- triângulo, 24
- G -triângulo, 25
- s, t -tridente, 85
- troca de h -componentes, 104
- vértice, 2
 - conector, 17, 58, 85
 - de corte, 5
 - externo, 10
 - final de um caminho, 4
 - grau de, 3
 - incidente em aresta, 3
 - inicial de um caminho, 4
 - interior, 17, 58, 85
 - interno, 10
 - isolado, 3
 - livre
 - de um F -empacotamento, 12
 - de um emparelhamento, 6
 - restrito, 17, 58, 85