Dinâmica de Funções S-Unimodais

Cláudia de Oliveira

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA APLICADA

Area de Concentração: **Sistemas Dinâmicos**
Orientador: **Prof. Dr. Edson Vargas**

*Durante a elaboração deste trabalho,
a autora recebeu apoio financeiro do CNPq*

-São Paulo, março de 1997-

Dinâmica de Funções S -Unimodais

Este exemplar corresponde à redação final
da dissertação devidamente corrigida e
defendida por Cláudia de Oliveira
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 3 de abril de 1997.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Edson Vargas (Orientador) - IME - USP
- Prof. Dr. Edson de Faria - IME - USP
- Prof. Dr. Décio Botura Filho - UFSCar.

Resumo

Neste trabalho estudamos funções S -unimodais $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ sob vários aspectos da teoria de Sistemas Dinâmicos.

Primeiramente, apresentamos a derivada Schwarziana e algumas das suas propriedades. Posteriormente a utilizamos como ferramenta no estudo da dinâmica das funções S -unimodais. Um dos fatos mais relevantes é o Princípio de Köbe, o qual nos dá um controle para a distorção da razão cruzada de intervalos $J \subset T \subset [-1, 1]$ por iteradas de f , e garante também um certo controle para a não-linearidade destas iteradas.

No que se refere a estrutura topológica da dinâmica gerada por uma função S -unimodal, mostramos que existe no máximo um atrator periódico e não existem intervalos errantes. Em seguida desenvolvemos a Teoria de Milnor e Thurston a qual emprega dinâmica simbólica para fazer uma classificação topológica destes sistemas. Provamos que a órbita do ponto crítico de uma função S -unimodal determina a sua dinâmica.

Finalizamos fazendo um estudo dos aspectos métricos relacionados com a dinâmica de funções S -unimodais. Nos interessamos principalmente pela hiperbolicidade e pela medida de Lebesgue de conjuntos invariantes.

Abstract

On this work we study S -unimodal maps $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ under various aspects from Dynamical Systems theory.

Firstly, we present the Schwarzian derivative and its properties. After we employ it as a tool in the dynamical study of S -unimodal maps. One of the most relevant fact is the Kbe Principle, which give us a control for the distortion of the cross-ratio of intervals $J \subset T \subset [-1, 1]$ under iterates of f , and guarantee a certain control for the non-linearity of these iterates.

About the topological structure of the dynamics generated by a S -unimodal map, we show that there exists at most one attracting periodic point and there is no wandering intervals. Later we develop the Milnor and Thurston Theory, which employ symbolical dynamics to get a topological classification of these systems. We prove that the orbit of the turning point determines the dynamics of the S -unimodal map.

At the end we study some metrical aspects related with the dynamics of the S -unimodal maps. We are mainly interested on the hiperbolicity and Lebesgue measure of invariant sets.

Agradecimentos

Reconheço a inestimável orientação que recebi do Prof. Edson para a realização desta dissertação, a ele sou profundamente grata.

Quero expressar também meus agradecimentos aos demais professores do Instituto, que contribuíram de alguma forma para meu amadurecimento matemático. Em especial, ao Prof. Zaqueu Nogueira Coelho Filho pela orientação e incentivo no início do curso do mestrado.

Aos colegas do IME, agradeço pelo auxílio e palavras de estímulo. Em particular, ao amigo Gaspar.

Ao Fabiano, pelo apoio, incentivo, companheirismo e carinho dedicados em todos os momentos.

Sumário

Introdução	1
1 A Derivada Schwarziana	4
1.1 Propriedades básicas	4
1.2 Controle de distorção	7
2 Estrutura das Funções S-Unimodais	16
2.1 Definições básicas	16
2.2 Finitude de atratores periódicos	17
2.3 Dinâmica simbólica de aplicações unimodais	23
2.4 Não-existência de intervalos errantes	29
2.5 Teoria de Milnor e Thurston	34
2.6 Hiperbolicidade de conjuntos invariantes	36
3 Medida de Conjuntos Minimais	39
3.1 Introdução	39
3.2 Conjuntos minimais sem pontos críticos	41
3.3 Aplicações infinitamente renormalizáveis	45
Referências Bibliográficas	50

Introdução

A teoria dos sistemas dinâmicos é uma área da matemática que tem despertado interesse em um grande número de pesquisadores devido à sua aplicabilidade a outras áreas e pela sua própria riqueza e importância.

Algumas questões apresentam-se relevantes no estudo de sistemas dinâmicos tais como: determinar o comportamento assintótico das suas órbitas, determinar se existem atratores periódicos e qual o seu número, determinar quando dois sistemas possuem as mesmas propriedades topológicas, determinar quando um sistema é estruturalmente estável, estudar a medida de Lebesgue de conjuntos invariantes, etc.

Neste trabalho estudamos sistemas dinâmicos unidimensionais. Mais especificamente, consideramos sistemas gerados pelas iterações de funções $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ de classe C^1 que possuem um único ponto crítico c e satisfazem as condições $f(-1) = f(1) = -1$. Estas funções serão denominadas unimodais. Um poderoso instrumento neste estudo é a derivada Schwarziana. A derivada Schwarziana de uma função f num ponto x é definida por

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2.$$

A Schwarziana apareceu originalmente em diversos contextos em análise complexa (veja [Hil76], [MvS93] e outras referências aí contidas). Em dinâmica unidimensional, ela foi considerada pela primeira vez por Singer em 1978, veja [Sin78]. Ele observou que se uma função tem derivada Schwarziana negativa, então todas as suas iteradas também têm esta propriedade (D. J. Allwright observou algo semelhante na mesma

época. veja [All78]). Este importante fato deu origem a outro resultado relacionado com a derivada Schwarziana dentro deste contexto: Em [Sin78], Singer mostrou que funções com derivada Schwarziana negativa que possuem número finito de pontos críticos, possuem número finito de atratores periódicos. A partir deste fato o interesse por funções com Schwarziana negativa cresceu enormemente. Mais tarde, em 1979, Guckenheimer provou que funções unimodais com derivada Schwarziana negativa, aqui denominadas funções S -unimodais, não possuem intervalos errantes ([Guc79]). Este fato conjuntamente com a teoria de Milnor e Thurston permite classificar topologicamente os sistemas dinâmicos gerados por estas funções.

Um outro fato importante envolvendo funções S -unimodais é o Princípio de Köbe (veja [MvS93]). Este princípio nos garante um certo controle para a não-linearidade das iteradas da função, o que nos permite estudar certas propriedades métricas, como a medida de Lebesgue de conjuntos invariantes dentre outras.

No presente trabalho estudamos as funções S -unimodais sob diversos aspectos da teoria de Sistemas Dinâmicos. No capítulo 1, apresentamos a derivada Schwarziana, algumas de suas propriedades e resultados mais importantes relacionados com dinâmica unidimensional. Entre estes resultados provamos o Princípio de Köbe e outros fatos básicos que serão utilizados no desenvolvimento dos capítulos seguintes. No capítulo 2, estudamos alguns aspectos da dinâmica das funções S -unimodais. Provamos que estas funções possuem no máximo um atrator periódico e não possuem intervalos errantes. Dedicamos uma seção para estudo da dinâmica simbólica de aplicações unimodais, a qual será aplicada posteriormente ao desenvolvimento da Teoria de Milnor e Thurston. Esta teoria nos permitirá fazer uma classificação topológica dos sistemas gerados pelas funções S -unimodais. Provamos, ainda, que conjuntos invariantes que não contêm o ponto crítico e nem atrator periódico são hiperbólicos. No capítulo 3, estudamos alguns aspectos métricos relacionados com a dinâmica das funções S -unimodais. Nos interessamos, em especial, pela medida de Lebesgue de conjuntos hiperbólicos e também pela medida de Lebesgue de conjuntos minimais.

Durante os últimos anos, muitas contribuições em dinâmica de funções S -unimodais

que não mencionaremos aqui foram feitas. Gostaríamos de mencionar os livros [Dev89], [CE80] e [MvS93], os quais constituem uma rica fonte de resultados desta área.

Este trabalho foi elaborado baseando-se principalmente nas seguintes referências: [CE80], [Dev89], [Mel89], [MvS93], [BL90], [Guc79] e [Hil76].

Capítulo 1

A Derivada Schwarziana

O objetivo deste capítulo é apresentar o conceito de derivada Schwarziana, suas propriedades e os principais resultados que a envolvem dentro do contexto de dinâmica unidimensional. Estes resultados terão grande importância no desenvolvimento dos capítulos seguintes.

Consideramos neste capítulo funções reais $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ onde I é um intervalo contido em $\mathbb{R}$.

1.1 Propriedades básicas

Definição 1.1.1 *Seja f uma função real de classe C^3 sem pontos críticos. A derivada Schwarziana de f é definida por*

$$Sf(x) = \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2$$

ou equivalentemente,

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2.$$

Se f possui um ponto crítico c definimos $Sf(c) = -\infty$.

Estamos interessados em funções reais f com derivada Schwarziana negativa em todos os pontos, as quais denotamos por $Sf < 0$.

Exemplo 1.1.1 Função quadrática $f_\mu(x) = \mu x(1 - x)$, para $\mu \in \mathbb{R}$.

Temos que $Sf_\mu(x) = -\frac{6}{(1-2x)^2} < 0$, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$. No ponto crítico $x = 1/2$, definimos $Sf_\mu(x) = -\infty$.

Exemplo 1.1.2 Função exponencial $f(x) = \exp(x)$.

Temos que $Sf(x) = -\frac{1}{2} < 0$, para todo x real.

Exemplo 1.1.3 Funções trigonométricas

As derivadas Schwarzianas das funções $f(x) = \sin(x)$ e $f(x) = \cos(x)$ são, respectivamente, $Sf(x) = -1 - \frac{3}{2}\tan^2(x) < 0$ e $Sf(x) = -1 - 3/2\cot^2(x) < 0$, para todo x real.

A proposição seguinte determina condições sob as quais um polinômio tem derivada Schwarziana negativa.

Proposição 1.1.1 Seja P um polinômio de grau maior ou igual a 2 cujos coeficientes são números reais. Se todos os seus pontos críticos são reais e distintos então $SP(x) < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Seja P um polinômio de grau $n + 1$, $n \geq 1$, tal que a sua derivada tem raízes a_i reais e distintas. Então $P'(x) = A \prod_{i=1}^n (x - a_i)$, para algum $A \in \mathbb{R}$.

Calculando a primeira e a segunda derivada de P' , obtemos:

$$P''(x) = \sum_{j=1}^n \frac{P'(x)}{(x - a_j)} = A \sum_{j=1}^n \frac{\prod_{i=1}^n (x - a_i)}{(x - a_j)}$$

$$P'''(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{P'(x)}{(x - a_j)(x - a_k)}, \text{ para } k \neq j.$$

Logo,

$$SP(x) = \sum_{k \neq j} \frac{1}{(x - a_j)(x - a_k)} - \frac{3}{2} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{x - a_j} \right)^2, k = 1, 2, \dots, n.$$

Observamos que:

$$\sum_{k \neq j} \frac{1}{(x - a_j)(x - a_k)} = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{x - a_j} \right)^2 - \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{x - a_j} \right)^2 \right].$$

Portanto,

$$SP(x) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{x - a_j} \right)^2 < 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

O interesse pela derivada Schwarziana em dinâmica unidimensional está no fato deste operador ter boas propriedades em relação a composição de funções, as quais são mostradas nas proposições seguintes.

Proposição 1.1.2 *Sejam f e g funções reais de classe C^3 . Então*

$$S(f \circ g) = (Sf \circ g)(g')^2 + Sg.$$

Demonstração: Aplicando a regra da cadeia, obtemos as seguintes derivadas:

$$(f \circ g)' = f'(g)g',$$

$$(f \circ g)'' = f''(g)(g')^2 + f'(g)g''$$

e

$$(f \circ g)''' = f'''(g)(g')^3 + 3f''(g)g'g'' + f'(g)g'''.$$

Logo:

$$S(f \circ g) = \frac{f'''(g)(g')^2}{f'(g)} + \frac{3f''(g)g''}{f'(g)} + \frac{g'''}{g'} - \frac{3}{2} \left[\frac{f''(g)}{f'(g)}g' + \frac{g''}{g'} \right]^2.$$

Portanto,

$$S(f \circ g) = (Sf \circ g)(g')^2 + Sg. \blacksquare$$

Proposição 1.1.3 *Seja f uma função real de classe C^3 tal que $Sf < 0$. Então $S(f^n) < 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Provemos por indução finita sobre n . O caso $n = 1$ é óbvio. Suponhamos que a afirmação seja válida para $k = n - 1$ e vamos mostrá-la para $k = n$. De fato, $Sf^n(x) = S(f^{n-1} \circ f)(x) = Sf^{n-1}(f(x)) \cdot (f'(x))^2 + Sf(x) < 0$, para todo x real. $\blacksquare$

Proposição 1.1.4 *Seja f uma função real de classe C^3 e sem pontos críticos. A derivada Schwarziana de f é identicamente nula se, e somente se, f é uma transformação de Möbius.*

Demonstração: Suponhamos inicialmente que $Sf \equiv 0$. Consideremos a função $g = \frac{f''}{f'}$. Temos que g satisfaz a equação diferencial $g' = \frac{g^2}{2}$ cuja solução é dada por $g \equiv 0$ ou $g(x) = \frac{-2}{x+c}$, onde c é uma constante real. Logo, se $\frac{f''}{f'} = 0$ obtemos $f(x) = ax + b$ e se $\frac{f''}{f'} = \frac{-2}{x+c}$ obtemos $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$, onde a, b e c são constantes reais.

Reciprocamente, consideremos a transformação de Möbius $\phi(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, com $ad - bc \neq 0$. É fácil verificar que $S\phi(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. $\blacksquare$

Proposição 1.1.5 *Sejam f uma função real de classe C^3 com derivada Schwarziana negativa (resp. positiva) e ϕ uma transformação de Möbius. Então $f \circ \phi$ e $\phi \circ f$ têm derivada Schwarziana negativa (resp. positiva).*

Demonstração: Segue diretamente das Proposições 1.1.2 e 1.1.3. $\blacksquare$

1.2 Controle de distorção

Uma questão essencial em dinâmica é o controle da distorção das iteradas da função original. A distorção é a medida da não-linearidade da função e pode ser

definida como o supremo da razão dos valores absolutos da derivada em dois pontos distintos.

Pode-se ainda medir a distorção de uma função f num intervalo T considerando pares de intervalos adjacentes L, R contidos em T e a razão $R(L, R) = \frac{|L|}{|R|}$. A distorção de f é o número $R(f, L, R) = \frac{R(f(L), f(R))}{R(L, R)}$ e será limitada se, e somente se, existir um limitante para $R(f, L, R)$, que seja independente do par de intervalos adjacentes L, R contido em T . Entretanto, tal limitante para a não-linearidade não existe se a função contiver pontos críticos. Então, em vez de considerarmos dois intervalos adjacentes, consideraremos três intervalos desta forma e procuraremos estudar a distorção da *razão cruzada* (veja definição abaixo) dos intervalos envolvidos.

A derivada Schwarziana exerce um importante papel no controle da distorção de funções diferenciáveis definidas num intervalo da reta. Mostraremos que um difeomorfismo com derivada Schwarziana negativa, quando longe dos seus valores críticos, tem distorção limitada por uma constante positiva (Princípio de Köbe). E ainda, um difeomorfismo com derivada Schwarziana negativa (positiva) expande (contraí) a métrica hiperbólica no intervalo de definição (Lema de Schwarz).

Denotaremos por (J, T) um par de intervalos abertos e limitados da reta tais que $\bar{J} \subset T$, e por L e R as componentes conexas de $T \setminus J$.

Definição 1.2.1 Para cada par de intervalos (J, T) definimos a *razão cruzada dos intervalos* T e J por

$$D(T, J) = \frac{|J||T|}{|L||R|},$$

onde $|I|$ denota o comprimento do intervalo I .

Definição 1.2.2 Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e monótona definimos a *distorção da razão cruzada por f* como

$$B(f, T, J) = \frac{D(f(T), f(J))}{D(T, J)},$$

para cada par de intervalos (J, T) contidos em I .

Se J tem uma extremidade comum com T então tomamos

$$B(f, T, J) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup B(f, T, J_n),$$

onde J_n é uma seqüência de intervalos com $J_n \rightarrow J \in \overline{J_n} \subset T$.

Proposição 1.2.1 *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e monótona. Então, para qualquer par de intervalos (J, T) contidos em I tem-se que $B(f, T, J) = 1$ se, e somente se, f é restrição de uma transformação de Möbius em T .*

Demonstração: Seja $T = [x_1, x_2]$. Primeiramente, vamos mostrar que se f é uma transformação de Möbius então $B(f, T, J) = 1$, para todo par de intervalos (J, T) contido em I . Se f é uma transformação de Möbius podemos escrever

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c} \frac{1}{cx + d},$$

para $c \neq 0$ e $x \in \mathbb{R}$. Seja $J = [x_3, x_4]$. Como f é uma função monótona, temos que

$$\begin{aligned} D(f(T), f(J)) &= \frac{|f(J)||f(T)|}{|f(L)||f(R)|} = \frac{|f(x_3) - f(x_4)||f(x_1) - f(x_2)|}{|f(x_1) - f(x_3)||f(x_4) - f(x_2)|} \\ &= \frac{|x_3 - x_4||x_1 - x_2|}{|x_1 - x_3||x_4 - x_2|} = \frac{|J||T|}{|L||R|} \\ &= D(T, J). \end{aligned}$$

Portanto, $B(f, T, J) = 1$.

Suponhamos, agora, que $B(f, T, J) = 1$ e fixemos um ponto $x_0 \in (x_1, x_2)$. Já que x_1, x_2 e x_0 são distintos, existe uma única transformação de Möbius ϕ que satisfaz

$$\phi(x_0) = f(x_0)$$

$$\phi(x_1) = f(x_1)$$

$$\phi(x_2) = f(x_2).$$

Vamos mostrar que $f(x) = \phi(x)$, para todo $x \in T$. De fato, tomemos $x \in (x_1, x_2)$, $x \neq x_0$ arbitrário e consideremos o intervalo J limitado por x e x_0 . Da hipótese e pelo que provamos anteriormente, temos que

$$B(f, T, J) = B(\phi, T, J) = 1.$$

Ou ainda, $D(f(T), f(J)) = D(\phi(T), \phi(J))$, para todo par de intervalos (J, T) contidos em I . Conseqüentemente, temos

$$\frac{|f(J)|}{|f(R)|} = \frac{|\phi(J)|}{|\phi(R)|}.$$

Já que $\phi(T) = f(T)$ e $\phi(x_0) = f(x_0)$ temos $|f(J)| + |f(R)| = |\phi(J)| + |\phi(R)|$. As últimas equações implicam que $|f(J)| = |\phi(J)|$ e $|f(R)| = |\phi(R)|$. Como x é arbitrário, segue que $\phi(x) = f(x)$, para todo $x \in T$. ■

Proposição 1.2.2 (Princípio do Mínimo) *Sejam $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ e $f : I \rightarrow f(I)$ uma função monótona com derivada Schwarziana negativa e sem pontos críticos. Para todo $x \in (a, b)$ tem-se que*

$$|f'(x)| > \min \{|f'(a)|, |f'(b)|\}.$$

Demonstração: Seja $x_0 \in (a, b)$ um ponto crítico de $f'(x)$. Então $f''(x_0) = 0$ e portanto $Sf(x_0) = \frac{f'''(x_0)}{f'(x_0)} < 0$. Isto significa que $f'''(x_0)$ e $f'(x_0)$ têm sinais opostos. Se x_0 é ponto de mínimo local de f' teremos $f'(x_0) < 0$ e de forma análoga, se x_0 é máximo local teremos $f'(x_0) > 0$. Logo, a função $|f'(x)|$ não tem mínimo local positivo no interior de I .

Portanto,

$$|f'(x)| > \min \{|f'(a)|, |f'(b)|\},$$

para todo $x \in (a, b)$. ■

Definição 1.2.3 *Seja T um intervalo aberto limitado da reta. Definimos a métrica hiperbólica do intervalo T por*

$$\rho_T(x, y) = \frac{1}{2} \log \frac{|L \cup J||J \cup R|}{|L||R|} = \frac{1}{2} \log(1 + D(T, J)),$$

para $x, y \in T$ e J o intervalo limitado por x e y .

Proposição 1.2.3 (Lema de Schwarz) *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona com $Sf < 0$. Então para todo par de intervalos (J, T) contidos em I tem-se que $B(f, T, J) > 1$.*

Demonstração: Sejam $T = [x_0, x_1]$ e $J = [y_0, y_1]$. Seja ϕ transformação de Möbius tal que

$$\phi \circ f(x_0) = x_0$$

$$\phi \circ f(x_1) = x_1$$

$$\phi \circ f(y_0) = y_0$$

Pela Proposição 1.1.5, temos $S(\phi \circ f) < 0$. Afirmamos que $\phi \circ f(y_1) > y_1$. De fato, se $\phi \circ f(y_1) \leq y_1$, pelo Teorema do Valor Médio, existiriam $z_0 \in [x_0, y_0]$, $z_1 \in [y_0, y_1]$ e $z_2 \in [y_1, x_1]$ tais que

$$(\phi \circ f)'(z_0) = \frac{y_0 - x_0}{y_0 - x_0} = 1$$

$$(\phi \circ f)'(z_1) = \frac{\phi(f(y_1)) - y_0}{y_1 - y_0} \leq \frac{y_1 - y_0}{y_1 - y_0} = 1$$

$$(\phi \circ f)'(z_2) = \frac{x_1 - \phi(f(y_1))}{x_1 - y_1} \geq \frac{x_1 - y_1}{x_1 - y_1} = 1$$

Desta maneira, teríamos um ponto de mínimo em $[x_0, x_1]$ e isto contradiz o Princípio do Mínimo. Portanto, $\phi \circ f(y_1) > y_1$.

Agora:

$$B(\phi \circ f, T, J) = \frac{\frac{|\phi \circ f(J)| |\phi \circ f(T)|}{|\phi \circ f(L)| |\phi \circ f(R)|}}{\frac{|J| |T|}{|L| |R|}} = \frac{\frac{|\phi \circ f(J)|}{|J|} \frac{|\phi \circ f(T)|}{|T|}}{\frac{|\phi \circ f(L)|}{|L|} \frac{|\phi \circ f(R)|}{|R|}} > 1.$$

Por outro lado, temos que

$$B(\phi \circ f, T, J) = B(\phi, f(T), f(J)) B(f, T, J).$$

Como $B(\phi, f(T), f(J)) = 1$ (Prop. 1.2.1), temos portanto,

$$B(f, T, J) > 1. \blacksquare$$

Corolário 1.2.1 *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona com derivada Schwarziana negativa (resp. positiva). Se T é um intervalo limitado contido em I então*

$$\rho_{f(T)}(f(x), f(y)) > \rho_T(x, y)$$

(resp. $\rho_{f(T)}(f(x), f(y)) < \rho_T(x, y)$), para $x, y \in T$.

Demonstração: Dados $x, y \in T$, se J é o intervalo limitado por x e y , resulta do Lema de Schwarz que $D(f(T), f(J)) > D(T, J)$. Portanto,

$$\rho_{f(T)}(f(x), f(y)) = \frac{1}{2} \log(1 + D(f(T), f(J))) > \frac{1}{2} \log(1 + D(T, J)) = \rho_T(x, y). \blacksquare$$

Definição 1.2.4 *Seja $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ um difeomorfismo de classe C^1 onde $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Seja $x \in (a, b)$ e denotemos por L_0 e R_0 as componentes de $T - \{x\}$. Para cada par de intervalos (J^*, T^*) contidos em T com $T^* = [a^*, b^*]$, definimos os seguintes operadores:*

$$B_1(f, T^*) = \lim_{J^* \rightarrow T^*} B(f, T^*, J^*) = \frac{|f(T^*)|^2}{|T^*|^2} \frac{1}{|f'(a^*)|} \frac{1}{|f'(b^*)|}$$

e

$$B_2(f, T, x) = \lim_{J \rightarrow x} B(f, T, J) = |f'(x)| \frac{|f(T)|}{|T|} \frac{|L_0|}{|f(L_0)|} \frac{|R_0|}{|f(R_0)|}.$$

Observamos que:

$$B_1(f, L_0) = \lim_{J \rightarrow L_0} B(f, L_0, J) = \frac{|f(L_0)|^2}{|L_0|^2} \frac{1}{|f'(a)|} \frac{1}{|f'(x)|}$$

$$B_1(f, R_0) = \lim_{J \rightarrow R_0} B(f, R_0, J) = \frac{|f(R_0)|^2}{|R_0|^2} \frac{1}{|f'(x)|} \frac{1}{|f'(b)|}.$$

Definição 1.2.5 *Uma δ -vizinhança de um intervalo U é um intervalo V tal que as componentes $V \setminus U$ têm comprimento $\delta \cdot |U|$.*

Proposição 1.2.4 (Princípio de Köbe) *Seja $f : I \rightarrow f(I)$ uma função com derivada Schwarziana negativa. Para cada $0 < \tau < 1/4$ existem $\delta > 0$ e $K < \infty$ dependendo apenas de τ tais que, para qualquer par de intervalos (J, T) com $J \subseteq T \subseteq I$ vale a seguinte propriedade:*

Se f não possui pontos críticos em T e

$$\frac{|f(L)|}{|f(J)|} \geq \tau \quad \text{e} \quad \frac{|f(R)|}{|f(J)|} \geq \tau$$

então

a) $K^{-1} < \frac{|f'(x)|}{|f'(y)|} < K$, para todo $x, y \in J$.

b) (Princípio de Köbe Macroscópico) T contém uma δ -vizinhança de J .

Demonstração:

a) Suponhamos que f é crescente, $T = [a', b']$ e $J = [a^*, b^*]$. Consideremos a transformação linear $\phi : [a^*, b^*] \rightarrow [0, 1]$ definida por $\phi(x) = \frac{x-a^*}{b^*-a^*}$. Então existem $c, d \in \mathbb{R}$ tais que $c < 0 < 1 < d$, $\phi^{-1}(c) = a'$ e $\phi^{-1}(d) = b'$.

Agora, seja ψ a Transformação de Möbius tal que

$$\psi \circ f(a^*) = 0$$

$$\psi \circ f(b^*) = 1$$

$$\psi \circ f(a') = -\tau$$

se $|f(a') - f(a^*)| \leq |f(b^*) - f(b')|$ e

$$\psi \circ f(a^*) = 0$$

$$\psi \circ f(b^*) = 1$$

$$\psi \circ f(b') = 1 + \tau$$

se $|f(b^*) - f(b')| < |f(a') - f(a^*)|$. Vamos definir $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ e considerar $a, b \in [c, d]$ tais que $a < 0 < 1 < b$, $g(a) = -\tau$ e $g(b) = 1 + \tau$.

Já que ϕ^{-1} e ψ são transformações de Möbius, temos pela Proposição 1.1.5 que $Sg < 0$. Suponhamos que g é crescente.

Para facilitar a notação, consideraremos $T = [a, b]$, $L = [a, 0]$, $J = f(J) = [0, 1]$ e $R = [1, b]$.

Do Lema de Schwarz (Prop. 1.2.3), segue que $B_1(g, J) > 1$, $B_2(g, L \cup J, 0) > 1$ e $B_2(g, J \cup R, 1) > 1$. Desde que $|g(J)| = |J| = 1$, $|L \cup J| = 1 + |a|$, $|g(L \cup J)| = 1 + \tau$, $|g(L)| = \tau$ e $|L| = |a|$, obtemos as seguintes desigualdades:

$$|g'(0)||g'(1)| < 1 \quad (1.1)$$

$$|g'(0)| > \frac{\tau}{1 + \tau} \quad (1.2)$$

$$|g'(1)| > \frac{\tau}{1 + \tau}. \quad (1.3)$$

Combinando (1.1), (1.2) e (1.3) e fazendo $k = \frac{1+\tau}{\tau}$, obtemos pelo Princípio do Mínimo, para $x \in (0, 1)$, que

$$|g'(x)| > k^{-1}. \quad (1.4)$$

Sejam $U = [0, x]$ e $V = [x, 1]$. Já que g é monótona, ou $\frac{|g(U)|}{|U|} \leq \frac{|g(J)|}{|J|} = 1$ ou $\frac{|g(V)|}{|V|} \leq \frac{|g(J)|}{|J|} = 1$. De fato, suponhamos que $\frac{|g(U)|}{|U|} > 1$. Logo, $|g(U)| > |U|$. Isso implica que $1 - |g(V)| > 1 - |V|$ e portanto, $\frac{|g(V)|}{|V|} < 1$. Se $|g(U)| = |U|$ então $|g(V)| = |V|$.

Suponhamos que $\frac{|g(U)|}{|U|} > 1$. Então

$$B_1(g, U) = \lim_{J_0 \rightarrow U} B(g, U, x) = \frac{|g(U)|^2}{|U|^2} \frac{1}{|g'(0)|} \frac{1}{|g'(x)|} > 1.$$

Então, $|g'(0)||g'(x)| < 1$. Conseqüentemente, obtemos

$$|g'(x)| < \frac{1}{|g'(0)|} < k.$$

Portanto,

$$|g'(x)| < k, \text{ para todo } x \in J. \quad (1.5)$$

De forma análoga, supondo que $\frac{|g(V)|}{|V|} > 1$ e considerando que $B_1(g, V) > 1$ chegamos ao mesmo resultado.

Das desigualdades (1.4) e (1.5), temos portanto,

$$\frac{1}{k^2} < \frac{|g'(x)|}{|g'(y)|} < k^2,$$

para todo $x, y \in J$.

Fazendo $K = k^2$ e lembrando que $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$, podemos concluir que

$$K^{-1} < \frac{|f'(x)|}{|f'(y)|} < K,$$

para todo $x, y \in J$.

b) Como $Sf < 0$ temos pelo lema de Schwarz (Prop. 1.2.3) que

$$\frac{|f(J)||f(T)|}{|f(L)||f(R)|} > \frac{|J||T|}{|L||R|}.$$

Supondo que $|L| \leq |R|$, temos

$$\frac{|J|}{|R|} \leq \frac{|J|}{|L|} < \frac{|J||T|}{|L||R|} < \frac{|f(J)||f(T)|}{|f(L)||f(R)|} = \frac{|f(J)|(|f(R)| + |f(J)| + |f(L)|)}{|f(L)||f(R)|}.$$

Se $|f(R)| \leq |f(L)|$, então

$$\frac{|J|}{|R|} \leq \frac{|J|}{|L|} < \frac{|f(J)|}{|f(R)|} \left(\frac{|f(R)|}{|f(L)|} + \frac{|f(J)|}{|f(L)|} + 1 \right) \leq \frac{1}{\tau} \left(1 + \frac{1}{\tau} + 1 \right) = \frac{2\tau + 1}{\tau^2}.$$

Se $|f(L)| \leq |f(R)|$, temos

$$\frac{|J|}{|R|} \leq \frac{|J|}{|L|} < \frac{|f(J)|}{|f(L)|} \left(\frac{|f(L)|}{|f(R)|} + \frac{|f(J)|}{|f(R)|} + 1 \right) \leq \frac{1}{\tau} \left(1 + \frac{1}{\tau} + 1 \right) = \frac{2\tau + 1}{\tau^2}.$$

Definimos então $\delta := \frac{\tau^2}{2\tau+1}$.

A demonstração é análoga se considerarmos $|L| \geq |R|$. ■

Capítulo 2

Estrutura das Funções S-Unimodais

Neste capítulo, faremos um estudo das funções unimodais com derivada Schwarziana negativa sob alguns aspectos da teoria de sistemas dinâmicos: finitude de atratores periódicos, existência de intervalos errantes, classificação topológica e hiperbolicidade. Para isso, veremos a teoria desenvolvida por Milnor e Thurston que estuda a dinâmica de funções contínuas, monótonas por partes, definidas num intervalo. Esta teoria utiliza como instrumento principal a dinâmica simbólica.

2.1 Definições básicas

Definição 2.1.1 *Uma função $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ de classe C^1 é dita unimodal se:*

- i. $f(-1) = f(1) = -1$;*
- ii. f tem um único ponto crítico c em $[-1, 1]$.*

Sem perda de generalidade, podemos considerar $c = 0$. De fato, consideramos um difeomorfismo $h : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ de classe C^∞ tal que $h(-1) = -1$, $h(0) = c$ e

$h(1) = 1$. Definimos então $g = h^{-1} \circ f \circ h$ a qual é unimodal, tem ponto crítico $c = 0$ e é diferenciavelmente conjugada a f .

Definição 2.1.2 Dizemos que uma função $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ é *S-unimodal* se:

- i. f é unimodal;
- ii. f é de classe C^3 ;
- iii. $Sf(x) < 0$, para todo $x \in [-1, 1]$.

Definição 2.1.3 Seja $f : I \rightarrow I$ uma função de classe C^1 . Um ponto $p \in I$ é um ponto periódico de período n de f se $f^n(p) = p$ e $f^i(p) \neq p$ para $0 < i < n$.

Dizemos que um ponto periódico p de período n é um atrator n -periódico de f se a sua bacia de atração, ou seja, o conjunto

$$B_f(p) := \{x : \omega - \text{limite de } x \text{ é igual a órbita positiva de } p\},$$

contém um conjunto aberto.

A bacia imediata de atração de p é a componente conexa da bacia de atração de p que contém p .

2.2 Finitude de atratores periódicos

Determinar o número de atratores periódicos de uma função foi uma questão levantada pela primeira vez por Julia, em 1918. Ele mostrou que certas funções unimodais, analíticas, restritas ao intervalo $[-1, 1]$, possuem, no máximo, um atrator periódico. Sua teoria, em particular, se aplica à função quadrática $f(x) = 1 - \mu x^2$, para μ real. Em 1978, Singer estendeu este resultado para funções com derivada Schwarziana negativa. Singer, em [Sin78], provou que funções *S-unimodais* possuem no máximo um atrator periódico no intervalo $(-1, 1]$. Este importante resultado

despertou o interesse pela derivada Schwarziana motivando então a sua aplicação no estudo de outros aspectos em dinâmica unidimensional. Provaremos, nesta seção, o Teorema de Singer.

Proposição 2.2.1 *Se f é uma função S -unimodal então o número de pontos periódicos de período n de f é finito.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que f tem um número infinito de pontos periódicos de período n e definamos $g = f^n$. Assim, os pontos n -periódicos de f são os pontos fixos de g e portanto, g tem infinitos pontos fixos. Pelo Teorema do Valor Médio, existem infinitos valores para x tais que $g'(x) = 1$. Sejam a, b e c três desses pontos consecutivos. Como g tem derivada Schwarziana negativa, pelo Princípio do Mínimo, $|g'|$ não assume mínimo local positivo no intervalo (a, c) e como $g'(x)$ não é constante igual a 1 neste intervalo, temos que existe um ponto em (a, c) no qual g' se anula. Isso implica que g tem infinitos pontos críticos.

Por outro lado, como f é unimodal, o ponto crítico 0 tem no máximo duas pré-imagens. Indutivamente, temos que a cardinalidade do conjunto $f^{-n}(0) = \{x \in \mathbb{R} / f^n(x) = 0\}$ é menor ou igual a 2^n .

Seja A o conjunto dos pontos críticos de f^n . Para x pertencente a A temos pela regra da cadeia que $(f^n)'(x) = \prod_{i=0}^{n-1} f'(f^i(x)) = 0$. Então $f^i(x) = 0$ para algum i , $0 \leq i \leq n-1$. Portanto, $A = \{x \in \mathbb{R} / f^i(x) = 0, i = 0, 1, 2, \dots, n-1\}$ e este conjunto tem cardinalidade menor ou igual a $2^n - 1$. Como $f^n = g$, isso significa que o conjunto dos pontos críticos de g é finito e chegamos numa contradição.

Portanto, f tem número finito de pontos periódicos de período n . ■

Proposição 2.2.2 *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivada Schwarziana negativa. Um ponto p n -periódico é um atrator se, e somente se, $|(f^n)'(p)| \leq 1$.*

Demonstração: Seja $g = f^{2n}$. Suponhamos que $g'(p) > 1$ e consideremos β tal que $g'(p) \geq \beta > 1$. Desde que g é C^1 , existe uma vizinhança J de p tal que $|g'(x)| \geq \beta$,

para todo $x \in J$. Pelo Teorema do Valor Médio temos que

$$|g(x) - g(p)| = |g(x) - p| \geq \beta|x - p|, \text{ para todo } x \in J \setminus \{p\}.$$

Repetindo este argumento sucessivamente, temos que

$$|g^n(x) - p| \geq \beta^n|x - p| \geq |x - p|.$$

Desta forma, existe $k > 0$ tal que $f^k(x) \notin J$ e, conseqüentemente, a bacia de atração de p não contém um conjunto aberto. Portanto, p não é um atrator n -periódico de f .

Para provar a recíproca, suponhamos então que $g'(p) \leq 1$. No caso em que $g'(p) < 1$ consideramos $\alpha > 0$ tal que $g'(p) \leq \alpha < 1$. Como g é C^1 , existe um intervalo aberto $I = (a, b)$ contendo p tal que $|g'(x)| \leq \alpha$, para todo $x \in I$. Pelo Teorema do Valor Médio, temos que

$$\frac{|g(x) - g(p)|}{|x - p|} \leq \alpha < 1, \text{ para todo } x \in I \setminus \{p\}.$$

Então $|g(x) - p| \leq \alpha|x - p|$ e portanto $g(x) \in I$. Aplicando este fato sucessivamente, obtemos que

$$|g^n(x) - p| \leq \alpha^n|x - p|,$$

para todo $x \in I$ e $n \in \mathbb{N}$ e, desta forma, $g^n(x)$ converge para p quando n converge para infinito, para todo $x \in I$. Então a bacia de atração $B_f(p)$ contém o intervalo I e portanto p é um ponto fixo atrator de f .

Agora, se $g'(p) = 1$ então existem a e b próximos de p tais que $a < p < b$, g não possui pontos fixos em (a, b) e $g(x) > x$ para $x \in (a, p)$ ou $g(x) < x$ para $x \in (p, b)$. Caso contrário, existiriam x_1, x_2 , tais que $x_1 < p < x_2$, g não possui pontos críticos em (x_1, x_2) , $g'(x_1) > 1$ e $g'(x_2) > 1$. Isto contradiz o Princípio do Mínimo. Suponhamos então que $g(x) > x$ para $x \in (a, p)$ e $g(x) < x$ para $x \in (p, b)$. Temos que $|g(x) - p| < |x - p|$. Aplicando este argumento repetidamente provamos que $g^n(x)$ converge para p . Portanto a bacia de atração $B_f(p)$ contém o intervalo (a, p) . Sendo assim, p é um atrator de f . ■

Teorema 2.2.1 (Singer) *Seja $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ uma função S -unimodal e p um atrator n -periódico. Então existe $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tal que a bacia imediata de atração de $f^j(p)$ contém o ponto crítico de f . Em particular, f tem, no máximo, um atrator periódico em $(-1, 1]$.*

Demonstração: Seja $p \in (-1, 1]$ um atrator n -periódico de f . Definindo $g = f^n$ temos que p é um ponto fixo atrator de g . Como $Sg < 0$, temos pela Proposição 2.2.2 que $|g'(p)| \leq 1$.

Se T é a bacia imediata de p temos que $g(T) \subset T$ e $g(\partial T) \subset \partial T$. Vamos mostrar que T contém um ponto crítico de g .

Primeiramente, suponhamos que $|g'(p)| < 1$ e consideremos a bacia imediata de p o intervalo aberto $T = (a, b)$ o qual contém p . Existem três possibilidades:

(i) $g(a) = g(b) = a$ ou $g(a) = g(b) = b$ e então, pelo Teorema de Rolle, g tem um ponto crítico em (a, b) . A Figura 1 ilustra o caso $g(a) = g(b) = a$.

Figura 1

(ii) $g(a) = a$ e $g(b) = b$.

Suponhamos que g não tem ponto crítico em (a, b) . Pelo Teorema do Valor Médio, existem u e v tais que $a < u < p < v < b$ e $g'(u) = g'(v) = 1$. Como g é monótona

crescente em (a, b) temos que $g'(x) > 0$, para todo $x \in (a, b)$. Pelo Teorema de Rolle, g' tem um ponto crítico em (u, v) e pelo Princípio do Mínimo este ponto só pode ser um máximo local. Isso implica que $g'(p) \geq 1$. Chegamos, então, a uma contradição já que p é um atrator de g . Este argumento implica que o gráfico ilustrado na Figura 2 não pode ocorrer.

Figura 2

(iii) $g(a) = b$ e $g(b) = a$.

Definindo $h = g^2$ temos que $h(a) = a$ e $h(b) = b$. Usando (ii) mostramos que g tem um ponto crítico em (a, b) .

Assumamos agora que $|g'(p)| = 1$. Considerando g^2 em vez de g se necessário, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $g'(p) = 1$.

Pela Proposição 2.2.1, o número de pontos periódicos de período n de f é finito, então o número de pontos fixos de g também é finito e, portanto, existe uma vizinhança (r, s) de p que não contém outro ponto fixo de g .

Afirmamos que $g(x) > x$, para todo $x \in (r, p)$ ou $g(x) < x$, para todo $x \in (p, s)$. De fato, suponhamos, por absurdo, que existem $x_1 \in (r, p)$ e $x_2 \in (p, s)$ tais que $g(x_1) < x_1$ e $g(x_2) > x_2$. Isso implica que $g'(x) > 1$ tem solução em (r, s) em ambos os lados de p e, neste caso, g' tem mínimo local positivo, o que contradiz o Princípio do Mínimo.

Suponhamos $g(x) > x$ para $x \in (r, p)$. Então a bacia imediata de p pode ser um intervalo aberto (a, b) contendo p ou um intervalo semi-aberto $(a, p]$. Se $T = (a, b)$, existem as possibilidades (i), (ii) e (iii) e através dos mesmos argumentos usados anteriormente, mostramos que T contém um ponto crítico de g . Se $T = (a, p]$ então $g(a) = a$ ou $g(a) = p$, pela continuidade de g . Se $g(a) = a$, pelo Teorema do Valor Médio, existe um ponto crítico de g em $(a, p]$. Se $g(a) = p$, o resultado segue do Teorema de Rolle. *Princípio do Mínimo*

No caso em que $g(x) < x$, para $x \in (p, s)$, a demonstração é análoga.

Mostramos que g tem um ponto crítico c em T que é atraído por p . Como $f^n = g$ então $(f^n)'(c) = 0$. Aplicando a regra da cadeia temos que, para algum $0 \leq j \leq n-1$, $f^j(c)$ é ponto crítico de f . Como f^j aplica a bacia imediata de p monotonamente sobre a bacia imediata de $f^j(p)$ o teorema segue.

Desde que f tem um único ponto crítico existe, no máximo, um atrator periódico em $(-1, 1]$. ■

Corolário 2.2.1 *Existe função S -unimodal que não contém atrator periódico.*

Demonstração: Para isso, uma condição suficiente é que a órbita do ponto crítico da função seja $\{0, 1, -1, -1, \dots\}$ e que o ponto -1 não seja um atrator.

Por exemplo, a função $f(x) = -2x^2 + 1$ tem derivada Schwarziana negativa e a órbita do ponto crítico é $\{0, 1, -1, -1, \dots\}$. Pelo Teorema de Singer, se existe atrator periódico, este atrai o ponto crítico. Mas, $|f'(-1)| = 4 > 1$ e, portanto, -1 não é atrator. ■

Observação 2.2.1 *Existem vários outros exemplos na família quadrática como o citado acima, com ponto crítico pré-periódico. Na seção 2.5, empregando a dinâmica simbólica, daremos um critério para decidir se uma função S -unimodal possui ou não atrator periódico.*

2.3 Dinâmica simbólica de aplicações unimodais

Consideremos o conjunto de símbolos $S = \{L, C, R\}$ e o conjunto de seqüências $S^{\mathbb{N}} = \{\underline{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots), x_n \in S \text{ e } n \in \mathbb{N}\}$.

Dadas duas seqüências $\underline{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$ e $\underline{y} = (y_0, y_1, \dots, y_n, \dots)$ em $S^{\mathbb{N}}$, definimos a distância entre $\underline{x}$ e $\underline{y}$ pela métrica

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} d(x_j, y_j)$$

onde

$$d(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_j \neq y_j \\ 0 & \text{se } x_j = y_j. \end{cases}$$

Com esta métrica, $S^{\mathbb{N}}$ é um espaço métrico compacto, perfeito e totalmente desconexo.

Proposição 2.3.1 *Sejam $\underline{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$ e $\underline{y} = (y_0, y_1, \dots, y_n, \dots)$ seqüências em $S^{\mathbb{N}}$. Então:*

a) *se $x_i = y_i$ para $i \leq n$ então $d(\underline{x}, \underline{y}) \leq \frac{1}{2^n}$;*

b) *se $d(\underline{x}, \underline{y}) < \frac{1}{2^n}$ então $x_i = y_i$ para $i \leq n$.*

Demonstração:

a) Se $x_i = y_i$ para $i \leq n$ então

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^i} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}.$$

b) Se $x_j \neq y_j$ para algum $j \leq n$ então

$$d(\underline{x}, \underline{y}) \geq \frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^n}.$$

Portanto, se $d(\underline{x}, \underline{y}) < \frac{1}{2^n}$ então $x_i = y_i$ para $i \leq n$. ■

Definição 2.3.1 Definimos a aplicação $\sigma : S^N \rightarrow S^N$ por

$$\sigma(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots),$$

a qual será chamada de *shift*.

Proposição 2.3.2 O shift $\sigma : S^N \rightarrow S^N$ possui as seguintes propriedades:

- a) σ é contínuo em S^N .
- b) O conjunto dos pontos periódicos de σ é denso em S^N .
- c) σ é topologicamente transitivo em S^N (existe uma seqüência cuja órbita por σ é densa em S^N).
- d) σ é expansivo em S^N (existe $\varepsilon > 0$ tal que se $\underline{x}, \underline{y} \in S^N$ e $d(\sigma^n(\underline{x}), \sigma^n(\underline{y})) < \varepsilon$ para todo $n > 0$ então $\underline{x} = \underline{y}$).

Demonstração:

a) Sejam $\varepsilon > 0$ e $\underline{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \in S^N$. Escolhamos n tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ e consideremos $\delta = \frac{1}{2^{n+1}}$. Para qualquer seqüência $\underline{y} = (y_0, y_1, \dots, y_n, \dots) \in S^N$ tal que $d(\underline{x}, \underline{y}) < \delta$, temos pela Proposição 2.3.1.b) que $x_i = y_i$ para $i \leq n+1$. Logo, as seqüências $\sigma(\underline{x})$ e $\sigma(\underline{y})$ coincidem para $i \leq n$. Pela Proposição 2.3.1.a) temos que

$$d(\sigma(\underline{x}), \sigma(\underline{y})) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

b) Seja $\underline{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \in S^N$. Consideremos a seqüência $(n+1)$ -periódica $\tau_n = (x_0, x_1, \dots, x_n, x_0, x_1, \dots, x_n, x_0, x_1, \dots, x_n, x_0, x_1, \dots)$. Pela Proposição 2.3.2.a), temos que $d(\tau_n, \underline{x}) \leq \frac{1}{2^n}$. Portanto, podemos concluir que τ_n converge para $\underline{x}$ quando n tende a infinito.

c) Consideremos a seqüência

$$\underline{y} = (L \ C \ R | LL \ LC \ LR \ CC \ CL \ CR \ RL \ RC \ RR | LLL \ LLC \ LLR \ \dots).$$

Esta seqüência é construída por uma sucessão de blocos das possíveis combinações de L 's, C 's e R 's. Dada uma seqüência $\underline{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \in S^N$, para todo $n \geq 0$, existe $m \geq 0$ tal que $d(\underline{x}, \sigma^m(\underline{y})) \leq \frac{1}{2^n}$. Portanto, a órbita de $\underline{y}$ por σ é densa em S^N .

d) Sejam $\underline{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$ e $\underline{y} = (y_0, y_1, \dots, y_n, \dots)$ em S^N . Se $\underline{x} \neq \underline{y}$ então existe $n \geq 0$ tal que $x_i = y_i$, para $i < n$ e $x_n \neq y_n$. Seja $\varepsilon = 1$. Temos que, $d(x_n, y_n) = 1$ e portanto,

$$d(\sigma^n(\underline{x}), \sigma^n(\underline{y})) \geq 1 = \varepsilon. \blacksquare$$

Em S , estabelecemos a seguinte relação de ordem: $L < C < R$. Definimos abaixo uma relação de ordem em S^N .

Definição 2.3.2 Sejam $\underline{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$ e $\underline{y} = (y_0, y_1, \dots, y_n, \dots)$ em S^N . Dizemos que $\underline{x} \prec \underline{y}$ se existe $n > 0$ tal que $x_i = y_i$ para $i < n$, $x_n \neq y_n$ e

i. $\#\{i < n : x_i = R\}$ é par e $x_n < y_n$ ou

ii. $\#\{i < n : x_i = R\}$ é ímpar e $y_n < x_n$.

Definição 2.3.3 Sejam f uma função unimodal e $x \in [-1, 1]$. O itinerário de x por f é a seqüência $i(x) := (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$, onde

$$x_i = \begin{cases} L & \text{se } f^i(x) \in [-1, 0) \\ C & \text{se } f^i(x) = 0 \\ R & \text{se } f^i(x) \in (0, 1]. \end{cases}$$

A seqüência de kneading de f é o itinerário do valor crítico $f(0)$ o qual denotaremos por k_f .

Definição 2.3.4 Dada uma função unimodal f , dizemos que uma seqüência $\underline{x} \in S^N$ é admissível para f quando:

i. se $x_j = C$ então $\sigma^{j+1}(\underline{x}) = k_f$;

ii. $\sigma^n(\underline{x}) \preceq k_f$, para todo $n \geq 0$.

Denotaremos o conjunto dos itinerários admissíveis para f por Σ_f . Vê-se facilmente que Σ_f é invariante por σ .

Definição 2.3.5 Duas funções $f : I \rightarrow I$ e $g : I \rightarrow I$ são topologicamente conjugadas se existe um homeomorfismo $h : I \rightarrow I$ tal que $h \circ f = g \circ h$. Se h não é injetora então h é dita uma semi-conjugação entre f e g .

Dada uma função unimodal f , temos que $\sigma \circ i(x) = i \circ f(x)$, ou seja, a aplicação $i : I \rightarrow \Sigma_f$ aplica órbitas de f em órbitas de σ e portanto relaciona a dinâmica da função f com a dinâmica do *shift* $\sigma : \Sigma_f \rightarrow \Sigma_f$. Isto no entanto não significa um grande avanço uma vez que o conjunto Σ_f pode ser bastante complexo. No entanto poderemos usar esta aplicação itinerário para classificar a dinâmica das aplicações unimodais topologicamente. Para isto se faz necessário estudar o comportamento e a possível não-injetividade da aplicação $i : I \rightarrow \Sigma_f$.

Proposição 2.3.3 Sejam f uma função unimodal e $x, y \in [-1, 1]$. Então:

a) se $x < y$ então $i(x) \preceq i(y)$;

b) se $i(x) \prec i(y)$ então $x < y$.

Demonstração:

a) Sejam $i(x) = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$ e $i(y) = (y_0, y_1, \dots, y_n, \dots)$.

Suponhamos que $i(x) \neq i(y)$. Seja $n > 0$ tal que $x_i = y_i$ para $i < n$ e $x_n \neq y_n$. Isso significa que os intervalos $(f^i(x), f^i(y))$, para $i < n$ não contêm o ponto crítico mas $[f^n(x), f^n(y)]$ o contém e, portanto, f^n é monótona em (x, y) . Se $\#\{i < n : x_i = R\}$ é par então temos que f^n é crescente em (x, y) implicando que $x_n < y_n$ e, portanto,

$i(x) \prec i(y)$. Se $\#\{i < n : x_i = R\}$ é ímpar então f^n é decrescente em (x, y) e implica que $y_n < x_n$ e, portanto, $i(x) \prec i(y)$.

b) Se $i(x) \prec i(y)$ então ou $\#\{i < n : x_i = R\}$ é par e $x_n < y_n$, ou $\#\{i < n : x_i = R\}$ é ímpar e $y_n < x_n$. Se ocorre a primeira possibilidade, então $f^n(x) < f^n(y)$ desde que $x_n < y_n$. Como f^n é monótona no intervalo limitado por x e y e $\#\{i < n : x_i = R\}$ é par temos que $x < y$. Se ocorre a segunda possibilidade, a condição $y_n < x_n$ implica que $f^n(y) < f^n(x)$. Como $\#\{i < n : x_i = R\}$ é ímpar e f^n é monótona no intervalo limitado por x e y , segue o resultado. ■

Proposição 2.3.4 *Dada uma função unimodal f , a aplicação $i : [-1, 1] \rightarrow \Sigma$ é contínua exceto nos pontos pertencentes a órbita negativa do ponto crítico. Entretanto, os limites laterais $i(x+) = \lim_{y \rightarrow x+} i(y)$ e $i(x-) = \lim_{y \rightarrow x-} i(y)$ existem.*

Demonstração: Primeiramente, consideremos um ponto x não pertencente a órbita negativa do ponto crítico 0. Para $\varepsilon > 0$, seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ e tomemos $\delta > 0$ tal que se $y \in (x - \delta, x + \delta)$ então $y_i = x_i$, para $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Pela Proposição 2.3.1.a), temos $d(i(x), i(y)) = \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Portanto, $i(x)$ é contínua em x .

Consideremos agora x pertencente a órbita negativa do ponto crítico. Sejam $\delta > 0$ e $\{x_m\} \subset (x, x + \delta)$ uma seqüência decrescente convergindo para x . Pela Proposição 2.3.3.a) temos que $i(x_m)$ é uma seqüência decrescente, limitada inferiormente por $i(x+)$. Portanto, existe $i(x+) = \lim_{y \rightarrow x+} i(y)$. Analogamente mostramos que existe $i(x-) = \lim_{y \rightarrow x-} i(y)$. ■

Definição 2.3.6 *Um intervalo aberto $J \subset [-1, 1]$ é dito errante para uma função $f : [-1, 1] \rightarrow \Sigma$ se:*

- i. os intervalos $f^n(J)$, para todo $n \geq 0$, são disjuntos dois a dois;
- ii. J não está contido em bacias de atratores periódicos de f .

Proposição 2.3.5 *Sejam $f : [-1, 1] \leftarrow$ uma função S -unimodal e $x, y \in [-1, 1]$ distintos. Se $i(x) = i(y)$ então o intervalo (x, y) está contido na bacia de um atrator periódico ou é um intervalo errante.*

Demonstração: Sejam $x \in [-1, 1]$ e $I(x) = \{y \in [-1, 1] : i(y) = i(x)\}$. A Proposição 2.3.3 implica que $I(x)$ é um intervalo. De fato, se $y \in I(x)$ e $y < z < x$ então $i(y) \preceq i(z) \preceq i(x)$ implicando em $i(z) = i(x)$, e portanto $z \in I(x)$. Se $I(x)$ é não-degenerado então $f^n : I(x) \rightarrow [-1, 1]$ é monótona para todo $n \geq 0$ e $f^n(I(x))$ é conexo.

Suponhamos que existam $m \geq 0, l > 0$ tais que $f^m(I(x)) \cap f^{m+l}(I(x)) \neq \emptyset$. Então $J = \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{m+kl}(I(x))$ é um intervalo invariante por f^l . Temos que $f^l|_J : J \rightarrow J$ não possui pontos críticos e portanto é monótona. Sendo assim, para todo x em J , o seu ω -limite por f^l é um ponto periódico. Concluimos então que $I(x)$ está contido na bacia de um atrator periódico de f . ■

Proposição 2.3.6 *Sejam f uma função unimodal e $\underline{\alpha} \in \Sigma_f$. Então existe um ponto $x \in [-1, 1]$ tal que $i(x) = \underline{\alpha}$.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que não existe $x \in [-1, 1]$ tal que $i(x) = \underline{\alpha}$. Sejam $A := \{x \in [-1, 1] / i(x) \prec \underline{\alpha}\}$ e $B := \{x \in [-1, 1] / \underline{\alpha} \prec i(x)\}$. A e B assim definidos são intervalos não vazios, disjuntos tais que $A \cup B = [-1, 1]$. De fato, $-1 \in A$ e $1 \in B$. Agora, dados $x, y \in A$ tais que $x < y$, se u é tal que $x < u < y$, pela Proposição 2.3.3.a) temos $i(x) \prec i(u) \prec i(y) \prec \underline{\alpha}$, e portanto u pertence a A . Desta maneira mostramos que A é um intervalo não vazio e, de forma análoga temos que B é também um intervalo.

Sejam $a = \sup A$ e $b = \inf B$. Mostraremos que a não pertence a A e b não pertence a B e chegaremos numa contradição desde que $A \cup B = [-1, 1]$ é conexo.

Consideremos $i(a) = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ e $\underline{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots)$.

Suponhamos que $a \in A$. Então

$$i(a) \prec \underline{\alpha} \text{ e } \underline{\alpha} \preceq i(a+) = \lim_{x \rightarrow a^+} i(x). \quad (2.1)$$

Seja $n \geq 0$ tal que $a_j = \alpha_j$ para $j < n$ e $a_n \neq \alpha_n$. Para $j < n$ temos $a_j \neq c$ pois senão teríamos $\sigma^{j+1}(\underline{\alpha}) = \sigma^{j+1}(\underline{a}) = k_f$ e então $\underline{\alpha} = \underline{a}$. Temos também que $a_n = C$ pois, senão, teríamos $a_n = L$ ou $a_n = R$ e então existiriam vizinhanças abertas V de a tais que $a_j \supset f^j(V)$ para $j \leq n$. Assim, para $y \in V$ teríamos $i(y) \prec \underline{\alpha}$, ou seja, $V \subset A$ e isso não é possível desde que $a = \sup A$.

Temos, portanto,

$$i(a) = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, C, k_f) \prec (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n, \dots) = \underline{\alpha}.$$

Desde que $\alpha_n \neq a_n$, temos que $\alpha_n = R$ e $\#\{i < n : \alpha_i = R\}$ é par ou $\alpha_n = L$ e $\#\{i < n : \alpha_i = R\}$ é ímpar. Suponhamos que $\alpha_n = R$, então

$$i(c+) \prec \sigma^n(\underline{\alpha}).$$

Como $\#\{i < n : \alpha_i = R\}$ é par segue que $\underline{\alpha} \succ i(a+)$ contradizendo (2.1). O caso $\alpha_n = L$ é análogo. Portanto, $a \notin A$.

De maneira análoga mostramos que $b \notin B$ e concluímos a prova. ■

2.4 Não-existência de intervalos errantes

Mostraremos nesta seção que funções S -unimodais não possuem intervalos errantes. Este fato foi provado em 1979 por Guckenheimer ([Guc79]).

Lema 2.4.1 *Seja $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ uma função unimodal. Se f tem um intervalo errante J então o conjunto ω -limite de J contém o ponto crítico de f .*

Demonstração: Passando a um iterado de f se necessário, podemos supor que a órbita positiva de J não passa pelo ponto crítico. Seja $U \subset [-1, 1]$ uma vizinhança do ponto crítico 0 de forma que $U \cap J = \emptyset$.

Afirmamos que existe $m > 0$ tal que $f^m(J) \subset U$. De fato, suponhamos por absurdo que para todo $m > 0$ tem-se $\overline{f^m(J)} \cap ([-1, 1] \setminus U) \neq \emptyset$. Definimos J_n como o intervalo errante maximal que contém $f^n(J)$.

Os intervalos J_n assim definidos são dois a dois disjuntos. De fato, suponhamos, por absurdo, que existem inteiros $l < m$ tais que $J_l \cap J_m \neq \emptyset$. Temos que $f^{m-l}(J_l)$ é um intervalo errante e portanto

$$J_m \supset f^{m-l}(J_l) \supset f^m(J_0).$$

Isso implica que $f^{m-l}(J_m \cap J_l) \subset J_m$ e portanto $f^{m-l}(J_m) \cap J_m \neq \emptyset$. Isto é absurdo pois J_m é errante. Portanto, os intervalos J_n são dois a dois disjuntos e então existe n_0 tal que, para todo $n > n_0$, $J_n \cap \bar{U} = \emptyset$ e, em particular, f^k é um difeomorfismo em J_n para todo $n \geq n_0$ e $k > 0$.

Tomando $n_1 \geq n_0$ suficientemente grande, podemos assumir que

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} |J_n| \leq \frac{1}{2 \exp(C)}, \quad (2.2)$$

onde C é a constante de Lipschitz da função $\log |f'(x)|$, para $x \in [-1, 1] \setminus U$.

Seja I um intervalo contendo J_{n_1} e tal que $|J_{n_1}| < |I| < 2|J_{n_1}|$. Pela maximalidade de J_{n_1} temos que I é não-errante.

Afirmamos que $\sum_{j=0}^n |f^j(I)| \leq 1$ para todo $n \geq 0$. E portanto, $\sum_{j=0}^{\infty} |f^j(I)| \leq 1$. De fato, provemos esta afirmação por indução finita sobre n . O caso $n = 0$ é trivial. Suponhamos que a afirmação seja válida para $n \leq k-1$. Então para todo $x, y \in I$ temos

$$\frac{|(f^k)'(x)|}{|(f^k)'(y)|} = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{|f'(f^j(x))|}{|f'(f^j(y))|}.$$

Logo,

$$\log \frac{|(f^k)'(x)|}{|(f^k)'(y)|} = \sum_{j=0}^{k-1} \log \frac{|f'(f^j(x))|}{|f'(f^j(y))|} = \sum_{j=0}^{k-1} (\log |f'(f^j(x))| - \log |f'(f^j(y))|).$$

Como a função $\log |f'(x)|$ é C -Lipschitziana em cada componente de $[-1, 1] \setminus U$, temos que

$$\log \frac{|(f^k)'(x)|}{|(f^k)'(y)|} \leq C \sum_{j=0}^{k-1} |f^j(x) - f^j(y)| \leq C \sum_{j=0}^{k-1} |f^j(I)| \leq C.$$

Portanto, para todo $x, y \in I$ temos

$$\frac{|(f^k)'(x)|}{|(f^k)'(y)|} \leq \exp(C). \quad (2.3)$$

Agora, vamos considerar $n = k$.

Como f^k restrita aos intervalos J_{n_1} e I é monótona, pelo Teorema do Valor Médio, existem pontos $y_k \in J_{n_1}$ e $x_k \in I$ tais que

$$|(f^k)'(x_k)| = \frac{|f^k(I)|}{|I|} \text{ e } |(f^k)'(y_k)| = \frac{|f^k(J_{n_1})|}{|J_{n_1}|}. \quad (2.4)$$

De (2.3) e (2.4) segue que

$$|f^k(I)| \leq \exp(C) |f^k(J_{n_1})| \frac{|I|}{|J_{n_1}|} \leq 2 \exp(C) |f^k(J_{n_1})|.$$

Usando (2.2) obtemos

$$\sum_{j=0}^k |f^j(I)| \leq 2 \exp(C) \sum_{j=0}^k |f^j(J_{n_1})| \leq 2 \exp(C) \sum_{j=0}^{\infty} |f^j(J_{n_1})| \leq 1. \quad (2.5)$$

Portanto, $|f^j(I)|$ tende a zero quando j tende a infinito. Por outro lado, já que I é não errante, existem $m, n > 0$ tais que $f^m(I) \cap f^{m+n}(I) \neq \emptyset$. Considerando $T = \bigcup_{j=0}^{\infty} f^{m+jn}(I)$, temos que T é um intervalo invariante por f^n e $f^n|_T : T \rightarrow T$ é monótona. Logo, existem duas possibilidades:

- i. se f^n não tem ponto fixo repulsor em T ;

Então f^n possui um único ponto fixo atrator p em T e portanto o conjunto ω -limite de J_{n_1} por f^n é $\{p\}$. Absurdo, pois J_{n_1} é errante e portanto não está contido na bacia de um atrator periódico.

- ii. se f^n tem um ponto fixo repulsor q em T ;

Então $q \in f^{m+j_0n}(I)$, para algum j_0 . Isso implica que o comprimento dos intervalos $f^{m+(j_0+i)n}(I)$ não converge para zero quando $i \rightarrow \infty$, contradizendo (2.5).

Assim, concluímos que, dado um intervalo aberto U contendo o ponto crítico 0, existe m tal que $f^m(J) \subset U$. Em particular, se $U_n := (-1/n, 1/n)$, existe m_n tal que $f^{m_n}(J) \subset U_n$. Portanto, $\{f^{m_n}(J)\}$ tende ao ponto crítico 0 quando n tende a infinito, ou seja, o conjunto ω -limite de J por f contém o ponto crítico. ■

Teorema 2.4.1 (Guckenheimer) *Se f é uma função S -unimodal então f não possui intervalos errantes.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que f possui um intervalo errante $J \subset [-1, 1]$.

Se f tem um atrator periódico p e $B_o(p)$ é a sua bacia imediata de atração então, pelo Teorema de Singer, $B_o(p)$ contém o ponto crítico 0. Pela definição de intervalo errante, $B_o(p)$ não contém $f^n(J)$, para todo $n \geq 0$. Isso contradiz o Lema 2.4.1. Portanto, f não tem intervalo errante neste caso.

Desta forma, suponhamos que f não possui atrator periódico. Consideremos o intervalo errante J de forma que nenhuma iterada de J contenha o ponto crítico de f . Isso implica que $(f^n)'(y) \neq 0$, para todo $y \in J$ e todo $n > 0$.

Pelo Lema 2.4.1, existe uma seqüência de inteiros n_k convergindo para infinito tal que $f^{n_k}(J)$ converge para 0. Assim, podemos considerar a seqüência de “últimas aproximações” que converge para o ponto crítico definida indutivamente da seguinte maneira:

$$n_1 = 0$$

$$n_{k+1} = \min\{j > n_k / f^j(J) \subset (f^{n_k}(J), \tau(f^{n_k}(J)))\}$$

onde $\tau(x)$ é o único ponto tal que $f(\tau(x)) = f(x)$ e $(f^{n_k}(J), \tau(f^{n_k}(J)))$ denota o intervalo entre os intervalos $f^{n_k}(J)$ e $\tau(f^{n_k}(J))$. Em outras palavras, n_{k+1} é o menor inteiro $j > n_k$ tal que $f^{j+1}(J)$ está mais próximo do valor crítico $f(0)$ que $f(f^{n_k})(J)$.

Para cada k , definimos

$$V_k = \{y / f^j(y) \notin [y, \tau(y)], \text{ para } 0 < j < k \text{ e } f^k(y) \in [y, \tau(y)]\}.$$

Seja T uma componente conexa de V_k . Afirmamos que:

- a) $(f^k)'(y) \neq 0$, para $y \in T$. Isto significa que f^k é monótona nas componentes de V_k .
- b) Para cada $y \in \partial T$, $f^k(y) \in \{y, \tau(y)\}$.

De fato, para provar a) observamos que se $y \in T$ então $y \neq 0$ e $f^j(y) \notin [y, \tau(y)]$ para $0 < j < k$ e portanto $f^j(y) \neq 0$, para todo $j < k$. Logo,

$$(f^k)'(y) = f'(f^{k-1}(y))f'(f^{k-2}(y)) \dots f'(y) \neq 0, \text{ para todo } y \in T.$$

Para provar b) observamos que segue da definição de V_k que, se $y \in \partial T$ então $f^j(y) \in \{y, \tau(y)\}$ para algum j com $0 \leq j \leq k$. Se $j = k$ a propriedade b) está provada. Seja $0 \leq j < k$ o menor inteiro positivo tal que $f^j(y) \in \{y, \tau(y)\}$ e tal que

$$f^l(y) \notin [y, \tau(y)], \text{ para todo } 0 < l \leq j-1. \quad (2.6)$$

Sejam $m, p \in \mathbb{N}$ tais que $k = mj + p$ com $0 \leq p < j$. Então $f^k(y) = f^{mj+p}(y) = f^p(f^{mj}(y))$. Desde que $f^j(y) \in \{y, \tau(y)\}$ e $f(y) = f(\tau(y))$ temos

$$f^k(y) = f^p(f^{mj}(y)) \in \{f^p(y), f^p(\tau(y))\}.$$

Se $0 < p < j$ então $f^k(y) = f^p(y)$. Mas $f^k(y) \in [y, \tau(y)]$ e portanto temos uma contradição com (2.6). Então $p = 0$ e portanto $f^k(y) \in \{y, \tau(y)\}$. Isto conclui a prova da afirmação b).

Continuemos a prova no caso em que f é simétrica em relação ao ponto crítico 0. Neste caso $|f'(x)| = |f'(\tau(x))|$.

Provemos que $|(f^k)'(x)| > 1$, para todo $x \in T$. Se $y \in \partial T$ então $f^k(y) \in \{y, \tau(y)\}$ (por b)) e portanto $f^k(y)$ é um ponto fixo de f^k . De fato,

$$f^k(f^{k-1}(f(y))) = f^{k-1}(f^k(f(y))) = f^{k-1}(f(y)) = f^k(y).$$

Como $S'f^k < 0$ e f não tem atrator periódico, pela Proposição 2.2.2 temos

$$|(f^k)'(f^k(y))| > 1.$$

Pela simetria de f resulta então que $|(f^k)'(y)| > 1$, para $y \in \partial T$. Conseqüentemente temos que $|(f^k)'(x)| > 1$ para todo $x \in T$, como queríamos.

Das definições de V_k e da seqüência de “últimas aproximações” n_k podemos observar que $f^{n_k}(J) \subset V_{n_{k+1}-n_k}$. Se T_k é a componente conexa de $V_{n_{k+1}-n_k}$ que contém $f^{n_k}(J)$ então, como provamos acima, temos que $|(f^{n_{k+1}-n_k})'(x)| > 1$, para todo $x \in T_k$.

Isso implica que,

$$|f^{n_{k+1}}(J)| = |f^{n_{k+1}-n_k}(f^{n_k}(J))| > |f^{n_k}(J)|,$$

ou seja, $|f^{n_k}(J)|$ não converge a zero. Isto é absurdo, pois os intervalos $f^{n_k}(J)$ são disjuntos dois a dois. Portanto, concluímos que não existem intervalos errantes.

A prova no caso em que f é não-simétrica é mais técnica e a omitiremos. ■

2.5 Teoria de Milnor e Thurston

Em sistemas dinâmicos é interessante saber quando dois sistemas possuem as mesmas propriedades dinâmicas, ou seja, quando eles são topologicamente conjugados. A teoria desenvolvida por Milnor e Thurston para funções contínuas, monótonas por partes definidas num intervalo é o nosso principal instrumento para abordar esta questão. Esta teoria baseia-se em dinâmica simbólica. Veremos que, no caso das funções S -unimodais, o itinerário do valor crítico determina toda a dinâmica da função.

Teorema 2.5.1 *Sejam f e g funções S -unimodais. Suponhamos que f e g não têm atrator periódico. Então $k_f = k_g$ se, e somente se, f e g são topologicamente conjugadas.*

Demonstração: Consideremos as aplicações itinerário $i_f : [-1, 1] \rightarrow \Sigma_f$ e $i_g : [-1, 1] \rightarrow \Sigma_g$, associadas às funções f e g , respectivamente. Desde que as funções f e g têm derivada Schwarziana negativa e não têm atrator periódico, as aplicações i_f e i_g são bijetoras.

Sendo $k_f = k_g$ resulta que $\Sigma_f = \Sigma_g$. Então definimos $h : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ por $h = i_g^{-1} \circ i_f$. Para $x \in [-1, 1]$ temos

$$h \circ f(x) = h(f(x)) = i_g^{-1} \circ i_f(f(x)) = i_g^{-1}(\sigma \circ i_f(x)) = g \circ i_g^{-1} \circ i_f(x) = g \circ h(x).$$

E ainda, $h^{-1} = (i_g^{-1} \circ i_f)^{-1} = i_f^{-1} \circ i_g$. Como h e h^{-1} são estritamente monótonas e sobrejetoras, também são contínuas. Então h é um homeomorfismo que conjuga f e g .

Reciprocamente, se h conjuga f e g então $h(0) = 0$, $h(L) = L$ e $h(R) = R$. Portanto, $k_f = k_g$. ■

Teorema 2.5.2 *Uma função f S -unimodal possui atrator periódico se, e somente se, o itinerário do valor crítico k_f é periódico.*

Demonstração: Temos pelo Teorema de Singer que, se existe um atrator n -periódico p , então existe $0 \leq j \leq n-1$ tal que a bacia imediata de $f^j(p)$ contém o ponto crítico. Então $i(f^{j+1}(p)) = k_f$ e portanto k_f é periódico.

Reciprocamente, se k_f é periódico com período n , então f^k é monótona no intervalo $[f^{n+1}(0), f(0)]$, para todo $k > 0$, desde que as extremidades deste intervalo têm o mesmo itinerário. Se $f^{n+1}(0) = f(0)$ então $f^n(0) = 0$ e portanto o ponto crítico é um atrator n -periódico de f . Se $f^{n+1}(0) < f(0)$, segue da Proposição 2.3.5 que o intervalo $(f^{n+1}(0), f(0))$ pertence a bacia de atrator periódico, já que não existem intervalos errantes. ■

Teorema 2.5.3 *Seja f uma função S -unimodal. Então existe uma função quadrática $Q_\mu : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, $Q_\mu(x) = -\mu x^2 + \mu - 1$, $\mu \in [\frac{1}{2}, 2]$ tal que f e Q_μ são topologicamente conjugadas.*

Demonstração: Veja [Mel89]. ■

2.6 Hiperbolicidade de conjuntos invariantes

Provaremos nesta seção que se um conjunto é invariante, não contém atrator periódico e nem ponto crítico, então ele é hiperbólico. No Capítulo 3 veremos que estes conjuntos têm medida de Lebesgue zero.

Definição 2.6.1 *Seja $f : I \rightarrow I$ uma função de classe C^1 . Um conjunto compacto, invariante Λ (ou seja, $f(\Lambda) \subset \Lambda$) contido em I é dito hiperbólico para f se existe um inteiro n tal que $|(f^n)'(x)| > 1$, para todo $x \in \Lambda$.*

Teorema 2.6.1 *Sejam f uma função S -unimodal que não contém atrator periódico e U uma vizinhança do ponto crítico 0 . Então existe inteiro $n \geq 1$ tal que se $f^i(x) \notin U$ para todo $i \leq n$ então $|(f^n)'(x)| > 1$.*

Demonstração: Sejam $U \subset [-1, 1]$ intervalo aberto contendo 0 e $V \subset U$ intervalo fechado cujo interior contém 0 . Suponhamos, por absurdo, que para todo $n \geq 1$ existe um ponto $x_n \in [-1, 1]$ tal que $|(f^n)'(x_n)| \leq 1$ e $f^j(x_n) \notin U$ para todo $0 \leq j \leq n$. Seja J_n o maior intervalo aberto contendo x_n tal que $f^j(J_n) \subset [-1, 1] \setminus V$ para $j = 0, 1, 2, \dots, n$. Desde que f^n é monótona em J_n e $Sf^n < 0$ segue do Princípio do Mínimo que $|(f^n)'|$ não tem mínimo local positivo em J_n e, portanto, existe uma componente L_n de $J_n - \{x_n\}$ tal que $|(f^n)'(x)| \leq 1$, para todo $x \in L_n$. Seja y_n a outra extremidade de L_n . Como J_n é máximo e $y_n \notin J_n$, existe um inteiro $0 \leq k_n < n$ tal que $f^{k_n}(y_n) \in \partial V$. Seja $\beta > 0$ tal que as componentes de $U \setminus V$ tenham comprimento maior ou igual a β . Desde que $f^{k_n}(x_n) \notin U$ temos $|f^{k_n}(L_n)| \geq \beta$.

Por outro lado, para todo $x \in L_n$ temos $0 < |(f^n)'(x)| \leq 1$ e portanto $\frac{|f^n(L_n)|}{|L_n|} \leq 1$. Logo,

$$|f^n(L_n)| \leq |L_n|. \quad (2.7)$$

Vamos mostrar que $|L_n|$ tende a zero quando n tende a infinito. Suponhamos que não seja verdade. Então podemos escolher uma subsequência de intervalos L_{n_i} convergindo para um intervalo L de comprimento positivo.

Se J é um intervalo cujo fecho está contido no interior de L , então existe um inteiro k tal que $L_{n_i} \supset J$ para todo $n_i > k$. Desde que $L_n \subset J_n$ e $f^i(J_n) \cap V = \emptyset$, para todo $0 \leq i \leq n$ temos que $f^n(J) \subset [-1, 1] \setminus V$, para todo $n \geq 0$.

Como J é não-errante, existem inteiros $m, l > 0$ tais que $f^m(J) \cap f^{m+l}(J) \neq \emptyset$.

Seja $I = \bigcup_{i=0}^{\infty} f^{m+il}(J)$. Observemos que I é um intervalo e $f^l(I) \subset I$ e, desde que $f^l : I \rightarrow I$ é monótona e $Sf^l < 0$ então f^l possui um ponto fixo atrator p em I . Isto é absurdo pois f não contém atrator periódico.

Portanto $|L_n|$ tende a zero quando n tende a infinito. Consequentemente, por (2.7) $|f^n(L_n)|$ tende a 0 quando n tende a infinito. Logo,

$$|f^{n-k_n}(f^{k_n}(L_n))| \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (2.8)$$

Por outro lado, como $|f^{k_n}(L_n)| \geq \beta$, podemos tomar uma subsequência ilimitada $n_1 < n_2 < \dots$ tal que os intervalos $f^{k_{n_i}}(L_{n_i})$ convergem para um intervalo S com $|S| \geq \beta$.

Segue deste resultado e de (2.8) que $n - k_n$ é ilimitada. De fato, se $0 < n - k_n$ é limitado então temos que $|f^{n-k_n}(f^{k_n}(L_n))| \geq |f^{n-k_n}(S)| \geq \alpha > 0$. Absurdo por (2.8).

Se K é um intervalo cujo fecho está contido no interior de S , então $f^{k_{n_i}}(L_{n_i}) \supset K$, para i suficientemente grande. Logo, $f^j(K) \subset [-1, 1] \setminus V$, para todo $j \geq 0$. Desde que K é não-errante, existem inteiros $l < m$ tais que $f^m(K) \cap f^{m+l}(K) \neq \emptyset$. Se $I = \bigcup_{i=0}^{\infty} f^{m+il}(K)$ então $f^l(I) \subset I$ e I contém um ponto periódico atrator de f^l . Absurdo, pois f não possui atrator periódico.

Desta forma, concluímos a prova do teorema. ■

Corolário 2.6.1 *Seja f uma função S -unimodal. Se $\Lambda \subset [-1, 1]$ é compacto, invariante, não contém o ponto crítico de f nem atrator periódico então Λ é hiperbólico.*

Demonstração: Se f não tem atrator periódico, consideremos U uma vizinhança do ponto crítico 0 tal que $U \cap \Lambda = \emptyset$. Se f tem atrator n -periódico p , então existe $0 \leq j < n$ tal que a bacia imediata de atração de $f^j(p)$ é um de intervalo aberto ou semi-aberto que contém o ponto crítico no seu interior (Teorema de Singer). Neste caso, tomamos U como sendo a bacia imediata de $f^j(p)$ e Λ estará contido no complementar da bacia de p . O resultado segue diretamente do Teorema 2.6.1. ■

Corolário 2.6.2 *Sejam f uma função S -unimodal e p um atrator periódico de f . Então o complementar da bacia de atração de p é um conjunto hiperbólico.*

Capítulo 3

Medida de Conjuntos Minimais

Um aspecto importante em dinâmica é o estudo de conjuntos minimais. Estes conjuntos despertam interesse pelo fato de todo ponto ter órbita densa. Estaremos interessados neste capítulo, em especial, no estudo da medida de Lebesgue dos conjuntos minimais das funções S -unimodais.

3.1 Introdução

Dizemos que um conjunto fechado e invariante Λ é *minimal* se a órbita positiva de cada ponto pertencente a Λ é densa em Λ . Provaremos que a medida de Lebesgue de um conjunto minimal de certas funções S -unimodais é zero. Os casos mais interessantes são aqueles em que o conjunto minimal é um conjunto de Cantor. A idéia básica para esta prova consiste em buscar coberturas dinamicamente definidas para estes conjuntos e, posteriormente, usando propriedades dinâmicas, mostrar que estas coberturas têm medida decrescendo a zero.

Abaixo relacionamos algumas definições e proposições necessárias para o desenvolvimento deste capítulo.

Definição 3.1.1 *Dada uma função unimodal f , um intervalo $J \subset [-1, 1]$ é dito*

simétrico para f se $J = (x, \tau(x))$. Relembramos que $\tau(x)$ é o único ponto tal que $f(x) = f(\tau(x))$.

Dizemos que um intervalo $I = (x, \tau(x))$ é um intervalo bom se $f^n(x) \notin I$, para todo $n \geq 0$. Os extremos x e $\tau(x)$ são chamados pontos bons.

Lema 3.1.1 *Se f é uma função S -unimodal que não possui atrator periódico então o conjunto dos pontos pré-periódicos*

$$P := \{x \in [-1, 1] : f^n(x) \text{ é periódico para algum } n \geq 0\}$$

se acumula no ponto crítico.

Demonstração: Seja V uma vizinhança do ponto crítico 0 e $K \subset V$ um intervalo que não contém o ponto crítico. Já que f não possui atrator periódico e K é não errante, existem inteiros $l, m > 0$ tais que $f^l(K) \cap f^{l+m}(K) \neq \emptyset$. Seja $J = \bigcup_{i=0}^{\infty} f^{l+im}(K)$. Temos que J é um intervalo invariante por f^m e portanto f^m contém um ponto fixo $p \in J$. Então $p \in f^{l+i_0m}(K)$, para algum i_0 . Portanto, existe $x \in K$ tal que $f^{l+i_0m}(x) = p$. Definindo $n = l + i_0m$, temos que $f^n(x)$ é periódico. Tomando vizinhanças do ponto crítico arbitrariamente pequenas, concluímos que o conjunto P se acumula no ponto crítico. ■

Corolário 3.1.1 *Se f é uma função S -unimodal que não possui atrator periódico então existem intervalos bons arbitrariamente pequenos que contêm o ponto crítico.*

Demonstração: Pelo Lema 3.1.1, existe uma seqüência de pontos pré-periódicos de f convergindo para o ponto crítico 0. Para cada ponto p pré-periódico desta seqüência, seja a o ponto da órbita positiva de p tal que o intervalo $(a, \tau(a))$ não contenha pontos desta órbita. Desta forma, o intervalo $(a, \tau(a))$ é um intervalo bom. Portanto, podemos conseguir intervalos bons arbitrariamente pequenos contendo o ponto crítico. ■

Lema 3.1.2 *Sejam f uma função S -unimodal e $\Lambda \subset [-1, 1]$ um conjunto fechado, invariante e minimal. Então Λ é uma órbita periódica ou um conjunto de Cantor.*

Demonstração: Suponhamos que Λ não é uma órbita periódica e vamos mostrar que Λ é um conjunto de Cantor. Iniciamos provando que Λ não contém intervalos. Suponhamos por absurdo que existe um intervalo $I \subset \Lambda$. Pelo Teorema 2.4.1, o intervalo I é não-errante e portanto existem naturais m, n tais que $f^m(I) \cap f^{m+n}(I) \neq \emptyset$. Seja $T = \bigcup_{i=0}^{\infty} f^{m+in}(I)$. Observemos que T é um intervalo e $f^n(T) \subset T$ e portanto f^n possui um ponto fixo $q \in T$. Então $q \in f^{m+i_0n}(I) \subset \Lambda$, para algum i_0 . Isto contradiz o fato de Λ ser minimal e portanto Λ tem interior vazio. Agora, como Λ é minimal, se $x \in \Lambda$ então x pertence ao ω -limite de y , para todo $y \in \Lambda$, o que implica que Λ é perfeito. Como Λ é fechado concluímos que Λ é um conjunto de Cantor. ■

3.2 Conjuntos minimais sem pontos críticos

Consideraremos, nesta seção, conjuntos invariantes de funções S -unimodais que não possuem pontos críticos. Mais precisamente, provaremos que conjuntos invariantes que não contém o ponto crítico e nem atrator periódico, associados a funções S -unimodais, têm medida de Lebesgue zero.

Lema 3.2.1 *Seja f uma função S -unimodal e U um intervalo bom cujo bordo contém um ponto periódico. Para $n \geq 1$, consideremos o conjunto*

$$E_n = \{x / f^j(x) \notin U \text{ para } j = 0, 1, \dots, n-1\}.$$

Então existem $N \in \mathbb{N}$ e $0 < \lambda < 1$ tais que

$$|E_{n+N}| \leq \lambda |E_n|, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Seja $U = (a, \tau(a))$ um intervalo bom onde a é t -periódico. Dada uma componente conexa $K = (u, v)$ de E_n afirmamos que existe N , independente de n , tal que $f^{n+N}(K) \supset U$. De fato, existem $l, m < n$ tais que $f^l(u), f^m(v) \in \partial U$. Portanto, $\partial(f^n(K)) \subset \{-1, a, \dots, f^{t-1}(a)\}$. Além disso temos que f^n é monótona em K . Deste modo concluímos que existe $\varepsilon > 0$, independente de n , tal que $|f^n(K)| \geq \varepsilon$.

Por outro lado sabemos, pelo Teorema 2.6.1, que existe m_0 tal que para todo $x \in E_{m_0}$ tem-se $|(f^{m_0})'(x)| > 1$. Pela compacidade de E_{m_0} , existe $\alpha > 1$ tal que $|(f^{m_0})'(x)| \geq \alpha$, para todo $x \in E_{m_0}$. Seja k_0 o maior possível tal que $U \cap f^i(f^n(K)) = \emptyset$, para todo $i \in \{0, \dots, k_0 m_0\}$. Temos que $|f^{k_0 m_0}(f^n(K))| \geq \alpha^{k_0} |f^n(K)| \geq \alpha^{k_0} \varepsilon$. Como $f^{k_0 m_0}(f^n(K)) \subset [-1, 1]$ temos que $k_0 \leq \frac{\log 2 - \log \varepsilon}{\log \alpha}$. Então existe N como desejamos e a afirmação está provada.

Seja K uma componente de E_n tal que $f^{n+m}|_K$ é monótona e $f^{n+m}(K) \supset U$. De acordo com a afirmação provada acima temos que $m \leq N$. Passaremos agora a estimar $|E_n \setminus E_{n+N}|$. Para isso, precisamos provar que $f^{n+m}|_K$ tem distorção uniformemente limitada.

Primeiramente, observemos que a função $\log |f'|$ é *C-Lipschitziana* em $[-1, 1] \setminus U$. De fato,

$$|(\log |f'(x)|)'| = \frac{|f''(x)|}{|f'(x)|},$$

que é contínua e limitada em $[-1, 1] \setminus U$.

Então, para $x, y \in K \subset E_n$, temos:

$$\log \frac{|(f^{n+m})'(x)|}{|(f^{n+m})'(y)|} \leq \sum_{i=0}^{n+m-1} (\log |f'(f^i(x))| - \log |f'(f^i(y))|).$$

Logo,

$$\log \frac{|(f^{n+m})'(x)|}{|(f^{n+m})'(y)|} \leq C \sum_{i=0}^{n+m-1} |f^i(x) - f^i(y)| \leq C \sum_{i=0}^{n+m-1} |f^i(K)|. \quad (3.1)$$

Seja $n + m - 1 = jm_0 + r$ para $0 \leq r < m_0$. Então

$$\sum_{i=0}^{n+m-1} |f^i(K)| \leq \sum_{i=0}^{m_0-1} \sum_{s=0}^j |f^{sm_0}(f^i(K))|.$$

Desde que $|(f^{m_0})'(x)| \geq \alpha$, para todo $x \in E_{m_0}$, resulta que

$$\sum_{i=0}^{n+m-1} |f^i(K)| \leq \frac{m_0 \alpha}{\alpha - 1}.$$

Segue então que

$$\frac{|(f^{n+m})'(x)|}{|(f^{n+m})'(y)|} \leq M,$$

onde $M := \exp\left(\frac{C_{m_0\alpha}}{\alpha-1}\right)$ e $x, y \in K$.

Tomemos agora $\tilde{U} \subset K$ como sendo o intervalo tal que $f^{n+m}(\tilde{U}) = U$. Então resulta que:

$$\frac{|\tilde{U}|}{|K \setminus \tilde{U}|} \geq \frac{|(f^{n+m})'(x)|}{|(f^{n+m})'(y)|} \frac{|f^{n+m}(\tilde{U})|}{|f^{n+m}(K \setminus \tilde{U})|}, \text{ onde } x, y \in K.$$

Portanto,

$$\frac{|\tilde{U}|}{|K \setminus \tilde{U}|} \geq M^{-1} \frac{|U|}{|f^{n+m}(K \setminus \tilde{U})|}.$$

Como $\partial(f^{n+m}(K)) \subset \{-1, a, \dots, f^{t-1}(a)\}$, lembremos que $a \in \partial U$ é um ponto t -periódico. Isto implica que $|f^{n+m}(K \setminus \tilde{U})| \leq \delta|U|$, para algum $\delta > 0$. Consequentemente existe $\gamma > 0$ tal que $|\tilde{U}| \geq \gamma|K \setminus \tilde{U}|$.

Passemos agora a estimar $|E_n \setminus E_{n+N}|$. Para cada componente conexa K de E_n consideramos o intervalo $\tilde{U} \subset K$ definido acima. Observemos que $\tilde{U} \cap E_{n+N} = \emptyset$ e, consequentemente,

$$|E_n| \geq (1 + \gamma)|E_{n+N}|.$$

Fazendo $\lambda = (1 + \gamma)^{-1}$, temos portanto,

$$|E_{n+N}| \leq \lambda|E_n|, 0 < \lambda < 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \blacksquare$$

Teorema 3.2.1 *Sejam f uma função S -unimodal e Λ um conjunto fechado, invariante que não contém o ponto crítico e nem atrator periódico, caso exista. Então Λ tem medida de Lebesgue zero.*

Demonstração: Seja $U = (a, \tau(a)) \subset [-1, 1]$ um intervalo bom tal que a é t -periódico e $\Lambda \cap U = \emptyset$. O Corolário 3.1.1 implica que tal intervalo U existe.

Se f possui um atrator periódico tomamos U como sendo a bacia imediata de um ponto na órbita positiva deste atrator, a qual contém o ponto crítico, veja Teorema 2.2.1.

Para cada inteiro $n > 0$, definimos o conjunto

$$E_n = \{x/f^j(x) \notin U \text{ para } j = 0, 1, \dots, n-1\}.$$

Observamos que $E_n \supset E_{n+1}$ e $\Lambda \subset E_n$. Pelo Lema 3.2.1, existem $N \in \mathbb{N}$ e $0 < \lambda < 1$ tais que

$$|E_{n+N}| \leq \lambda |E_n|, \text{ para todo } n \geq 0,$$

o que implica que $|E_n|$ converge para zero quando n tende para infinito, e portanto, $|\Lambda| = 0$. ■

Corolário 3.2.1 *Seja f uma função S -unimodal que possui um atrator periódico p . Então a bacia de atração de p tem medida de Lebesgue total.*

Demonstração: Para algum i , a bacia imediata $B_o(f^i(p))$ de $f^i(p)$ é um intervalo bom que contém o ponto crítico. Então tomamos $U := B_o(f^i(p))$ na prova do Teorema 3.2.1 e o corolário segue-se imediatamente. ■

Corolário 3.2.2 *Seja f uma função S -unimodal que não possui atrator periódico. Então o ω -limite de x contém o ponto crítico 0 de f , para x em um conjunto de medida de Lebesgue total em $[-1, 1]$.*

Demonstração: Consideremos a seguinte família de conjuntos compactos invariantes

$$K_n = \{x : |(f^k(x), 0)| \geq \frac{1}{n}, k \geq 0\}, \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

Pelo Teorema 3.2.1, $|K_n| = 0$ e portanto $|\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n| = 0$ o que implica que $[-1, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ tem medida total. Por outro lado, se $x \in [-1, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, então para todo $n > 0$, existe $k_n > 0$ tal que $f^{k_n}(x) \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Portanto, o ω -limite de x contém o ponto crítico 0, e o corolário está provado. ■

3.3 Aplicações infinitamente renormalizáveis

Sabe-se em geral que, se Λ é um conjunto minimal de uma função S -unimodal f , então Λ tem medida de Lebesgue zero, veja [Guc87], [Mar92], [BL87] e [WMS88]. Concluiremos este trabalho com esta seção na qual provaremos este fato para uma classe bastante relevante de funções S -unimodais.

Definição 3.3.1 *Seja $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ uma função unimodal. Um intervalo $J \subset [-1, 1]$ é dito n -periódico se:*

- i. os intervalos $J, f(J), \dots, f^{n-1}(J)$ têm interiores dois a dois disjuntos;*
- ii. $f^n(J) \subset J$;*
- iii. $f^n(\partial J) \subset \partial J$.*

Definição 3.3.2 *Uma função unimodal f é dita renormalizável se existe um intervalo n -periódico J tal que $f^n|_J : J \rightarrow J$ é unimodal. f é dita infinitamente renormalizável se existem intervalos q_n -periódicos $J_0 \supset J_1 \supset \dots \supset J_n \supset \dots$ tais que $f^{q_n} : J_n \rightarrow J_n$ é unimodal.*

Exemplo 3.3.1 *Função de Feigenbaum*

Um exemplo de função S -unimodal infinitamente renormalizável é o polinômio quadrático $P_\mu(x) = \mu - 1 - \mu x^2$, cujo parâmetro μ (o qual existe pelo Teorema 2.5.3) é tal que a seqüência de kneading é

$$k_\mu = (RL \ RR \ RLRL \ RLRRRLRR \dots).$$

P_μ , escolhido deste modo, possui intervalos periódicos I_n de período 2^n , para todo $n \geq 0$.

A seqüência $k_\mu = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots)$ é definida indutivamente da seguinte maneira:

$$\alpha_1 = R$$

$$\alpha_2 = L$$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_{2^n-1}) = (\alpha_{2^n+1}, \dots, \alpha_{2^{n+1}-1}) \text{ e } \alpha_{2^n} \neq \alpha_{2^n+1}.$$

As figuras a seguir ilustram os intervalos I_n e os gráficos de $f^{2^n}|_{I_n} : I_n \rightarrow I_n$ para $n = 1, 2$.

Proposição 3.3.1 *Seja f uma função S -unimodal infinitamente renormalizável e $J_0 \supset J_1 \supset \dots \supset J_n \supset \dots$ uma sequência de intervalos q_n -periódicos como na Definição 3.3.2. Então o conjunto $S = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=0}^{q_n-1} f^i(J_n)$ é um conjunto minimal que contém o ponto crítico.*

Demonstração: Observemos que $J_n, f(J_n), \dots, f^{q_n-1}(J_n)$ têm interiores disjuntos dois a dois. Também temos que $q_{n+1} \geq 2q_n$ e portanto $\{q_n\}$ é uma sequência crescente e ilimitada. Afirmamos que para qualquer sequência $\{i_n\}$ com $0 \leq i_n \leq q_n$ tem-se que $|f^{i_n}(J_n)|$ converge a zero quando n tende a infinito. De fato, caso contrário existiria um intervalo J e uma subsequência n_k tal que $J \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} f^{i_{n_k}}(J_{n_k})$. Então teríamos que $J, f(J), \dots, f^{q_{n_k}-1}(J)$ são dois a dois disjuntos para todo $k \geq 0$ e portanto, como q_{n_k} é ilimitado, J seria um intervalo errante o que contradiz o Teorema 2.4.1. Decorre então que o conjunto $S = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=0}^{q_n-1} f^i(J_n)$ tem interior vazio. Verifiquemos que S é minimal. De fato, dados x, y em S , vamos provar que y pertence ao ω -limite de x . Escolhemos $l_n, j_n \geq 0$ de modo que $x \in f^{l_n}(J_n)$ e $y \in f^{l_n+j_n}(J_n)$. Resulta então que $f^{j_n}(x) \in f^{l_n+j_n}(J_n)$ e como $f^{l_n+j_n}(J_n) \subset f^{i_n}(J_n)$ para $0 \leq i_n \leq q_n$ temos que $|f^{l_n+j_n}(J_n)|$ tende a zero com n e concluímos que y pertence ao ω -limite de x como queríamos. ■

Se f é uma função infinitamente renormalizável então o fecho da órbita positiva do ponto crítico é o conjunto de Cantor S definido na Proposição 3.3.1. Este conjunto é chamado *solenóide*. Mostraremos então que a medida de Lebesgue de um solenóide associado a uma função S -unimodal infinitamente renormalizável é zero. O Princípio de Köbe provado no Capítulo 1 é o principal instrumento utilizado nesta prova.

Lema 3.3.1 *Seja J um intervalo q -periódico de uma função S -unimodal f . Então:*

- a) $f^q|_J : J \rightarrow J$ é da forma $\phi \circ f$ onde ϕ é um difeomorfismo com distorção limitada por uma constante que depende apenas de f ;
- b) existem δ -vizinhanças G_i de $f^i(J)$ tais que $(G_i \setminus f^i(J)) \cap (\bigcup_{j=0}^{q-1} f^j(J)) = \emptyset$, para $i = 0, 1, \dots, q-1$, onde δ depende apenas de f .

Demonstração: Como f é de classe C^3 , existe constante $C > 0$ tal que $|f'(x)| \leq C$, para todo $x \in [-1, 1]$. Assim temos que

$$|f^3(J)| \leq C^2|f(J)| \quad \text{e} \quad |f^3(J)| \leq C|f^2(J)|.$$

Seja $f^m(J)$ o menor intervalo do conjunto $\{f(J), f^2(J), \dots, f^q(J)\}$. Vamos considerar $k = 3$ se $m = 1, 2$ e $k = m$ se $3 \leq m \leq q$. Então ambas as componentes de $[-1, 1] \setminus f^k(J)$ contêm um intervalo dentre $f(J), f^2(J), \dots, f^q(J)$. Conseqüentemente, existe uma $\frac{1}{2C^2}$ -vizinhança M de $f^k(J)$ tal que as componentes $M \setminus f^k(J)$ não contêm nenhum dos intervalos $f(J), f^2(J), \dots, f^q(J)$.

Agora, seja $T^k \supset f(J)$ o intervalo máximo tal que f^{k-1} é monótona em T^k . Afirmamos que $f^{k-1}(T^k)$ contém M . De fato, desde que T^k é máximo segue que $\partial T^k \subset \{1\} \cup \bigcup_{i=0}^{k-2} f^{-i}(0)$. Consideremos uma das componentes conexas de $T^k \setminus f(J)$, digamos T_l^k . Uma das extremidades de T_l^k coincide com uma das extremidade de $f(J)$ e a outra pertence a $\{1\} \cup \bigcup_{i=0}^{k-2} f^{-i}(0)$. Se uma das extremidades de T_l^k é 1 então $\partial f^j(T_l^k) \ni -1$, para todo $j \geq 1$ e portanto $f^{k-1}(T_l^k)$ contém $f^2(J)$. Se uma das extremidades de T_l^k pertence a $\bigcup_{i=0}^{k-2} f^{-i}(0)$ então, para algum $0 \leq i \leq k-2$, $\partial f^i(T_l^k)$ contém o ponto crítico 0 e assim $f^{i+1}(T_l^k) \supset f(J)$. Conseqüentemente, $f^{k-1}(T_l^k) \supset f^{k-(i+1)}(J)$. Já que $k - (i + 1) < q$ temos que ambas as componentes de $f^{k-1}(T^k) \setminus f^k(J)$ contêm intervalos do conjunto $\{f(J), f^2(J), \dots, f^q(J)\}$ e portanto $f^{k-1}(T^k) \supset M$. Definimos então $T \subset T^k$ como sendo o intervalo tal que $f(J) \subset T$ e $f^{k-1}(T) = M$.

Como $f|_T$ é monótona e tem derivada Schwarziana negativa e, sendo M uma $\frac{1}{2C^2}$ -vizinhança de $f^k(J)$, pelo Princípio de Kőbe Macroscópico temos que T é uma δ_1 -vizinhança de $f(J)$, onde $\delta_1 > 0$ depende apenas de f . Também temos que cada componente de $T \setminus f(J)$ não contém intervalos do conjunto $\{f(J), f^2(J), \dots, f^q(J)\}$.

Definindo $I = f^{-1}(T)$ temos que I é uma δ_2 -vizinhança de J e $I \setminus J$ não contém intervalos do conjunto $\{f(J), f^2(J), \dots, f^q(J)\}$.

Seja K o intervalo máximo tal que $f(J) \subset K$ e $f^{q-1}|_K$ é monótona. Observemos que $I \subset f^{q-1}(K)$. Seja $\tilde{K} \subset K$ de modo que $f^{q-1}(\tilde{K}) = I$. Novamente pelo Princípio

de Köbe Macroscópico, $\tilde{K}$ é uma δ_3 -vizinhança de $f(J)$. E ainda, as componentes $\tilde{K} \setminus f(J)$ não contém intervalos do conjunto $\{f(J), f^2(J), \dots, f^q(J)\}$.

Definindo $\tilde{K} = f^{-1}(\tilde{K})$ segue que $\tilde{K}$ é uma δ_4 -vizinhança de J . Afirmamos que $\tilde{K} \subset I$ e $\tilde{K} \cap f^i(J) = \emptyset$, para todo $0 < i < q$. Suponhamos por absurdo que $\tilde{K} \cap f^i(J) \neq \emptyset$, para algum $0 < i < q$. Seja $L \subset \tilde{K}$ o intervalo entre J e $f^i(J)$. Então existe $0 < j < q$ tal que $0 \in f^j(L)$ e portanto $f(J) \subset f^{j+1}(L) \subset f^{j+1}(\tilde{K})$ e conseqüentemente $f^{q-(j+1)}(f(J)) \subset f^q(\tilde{K}) \subset I$ o que é uma contradição uma vez que I não contém nenhum dos intervalos $f(J), \dots, f^{q-1}(J)$.

Desta forma temos que $f^q|_J = f^{q-1}|_{f(J)} \circ f|_J$. Definimos então $\phi := f^{q-1}|_{f(J)}$, a qual é um difeomorfismo com distorção uniformemente limitada, de fato: I é uma δ_2 -vizinhança de J , $\tilde{K}$ é uma δ_3 -vizinhança de $f(J)$ e $f^{q-1}|_{\tilde{K}} : \tilde{K} \rightarrow I$ é um difeomorfismo. Então pelo Princípio de Köbe concluímos o que queremos. Isto termina a prova da parte *a*.

Para provarmos a parte *b*) definimos G_i como sendo o intervalo máximo tal que $f^i(J) \subset G_i$ e $f^{q-i}(G_i) = \tilde{K}$. Como $\tilde{K}$ é uma δ_4 -vizinhança de $J \supset f^q(J)$ e $f^{q-i}|_{G_i}$ é um difeomorfismo, resulta pelo Princípio de Köbe Macroscópico que G_i é uma δ -vizinhança de $f^i(J)$.

Temos que $\tilde{K} \cap f^i(J) = \emptyset$, para $0 < i < q$. Logo, $(G_i \setminus f^i(J))$ não intercepta nenhum dos intervalos $f(J), f^2(J), \dots, f^q(J)$. Portanto, G_i é uma δ -vizinhança de $f^i(J)$ tal que $(G_i \setminus f^i(J)) \cap (\bigcup_{j=0}^{q-1} f^j(J)) = \emptyset$. ■

Teorema 3.3.1 *Todo solenóide associado a uma função S -unimodal tem medida de Lebesgue zero.*

Demonstração: Sejam J_n intervalos q_n -periódicos de f como na Definição 3.3.2 e definamos $F_n = J_n \cup f(J_n) \cup \dots \cup f^{q_n-1}(J_n)$. Basta mostrar que existe constante $0 < \alpha < 1$ tal que $|F_{n+1}| \leq (1 - \alpha)|F_n|$ e portanto $S = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n$ tem medida de Lebesgue zero.

O fato de que $|F_{n+1}| \leq (1 - \alpha)|F_n|$ é conseqüência imediata do Lema 3.3.1.b). ■

Referências Bibliográficas

- [All78] D. J. Allwright. Hipergraphic functions and bifurcations in recurrence relations. *SIAM J. App. Math.*, 34:687–691, 1978.
- [BL87] M. Blokh and Yu Lyubich. Measure of solenoidal attractors of unimodal maps of the interval. *Math. Notes*, 1987.
- [BL90] A. M. Blokh and M. Y. Lyubich. Measurable dynamics of S -unimodals maps of the interval. Stony Brook. Preprint, 1990.
- [CE80] P. Collet and J. P. Eckmann. *Iterated maps on the interval as dynamical systems*. Birkhäuser, Boston, 1980.
- [Dev89] R. L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley, New York, 2 edition, 1989.
- [Guc79] J. Guckenheimer. Sensitive dependence to initial conditions for one dimensional maps. *Commun. Math. Phys.*, 70:133–160, 1979.
- [Guc87] J. Guckenheimer. Limit sets of S -unimodal maps with zero entropy. *Commun. Math. Phys.*, 110:655–659, 1987.
- [Hil76] E. Hille. *Ordinary Differential Equations in the Complex Domain*. John Wiley and Sons, New York, 1976.
- [Mar92] M. Martens. Distortion results and invariant Cantor sets of unimodal maps. *Stony Brook. Preprint*, 1992.

- [Mel89] W. Melo. *Lectures on one-dimensional dynamics*. IMPA, Rio de Janeiro, 1989. 17 Colóquio Brasileiro de Matemática.
- [MvS93] W. Melo and S. J. van Strien. *One-Dimensional Dynamics*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [Sin78] D. Singer. Stable orbits and bifurcations of maps of the interval. *SIAM J-Appl. Math.*, 35:260–267, 1978.
- [WMS88] M. Martens W. Melo, S. J. van Strien and D. Sullivan. Bounded geometry and measure of the attracting Cantor set of quadratic-like maps. Preprint, 1988.