Método de Ponto Proximal e Separadores

Paulo José da Silva e Silva

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Curso: **Mestrado em Matemática Aplicada**
Área de Concentração: **Ciência da Computação**
Orientador: **Prof. Dr. Carlos Humes Júnior**

São Paulo, 1997

O aluno recebeu apoio do CNPq e FAPESP.

Método de Ponto Proximal e Separadores

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação apresentada por Paulo José da Silva e Silva, devidamente corrigida e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, fevereiro de 1997.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Carlos Humes Júnior
Prof. Dr. Alfredo Noel Iusem
Prof. Dr. José Mário Martinez

IME - USP
IMPA - CNPq
IMECC - UNICAMP

*A tudo aquilo que
se pode fazer
com prazer*

Resumo

Esta dissertação é centrada em métodos de ponto proximal (MPP), vistos como algoritmos para programação convexa. A importância destes algoritmos para programação matemática está, em parte, associada a sua conexão com métodos de multiplicadores, como Lagrangianos aumentados ou o método exponencial de multiplicadores [11, 4].

O MPP é caracterizado pela solução de uma seqüência de problemas auxiliares, cujas funções objetivo são a soma da função objetivo original com um termo de regularização. Os primeiros trabalhos [17, 20] usavam um múltiplo positivo do quadrado da norma Euclidiana como função de regularização.

Neste texto, apresentam-se resultados de convergência para algoritmos que usam uma generalização da regularização Euclidiana. Basicamente, mostra-se que o MPP converge usando a composição de funções estritamente convexas com normas, sob hipóteses mínimas de diferenciabilidade do termo estritamente convexo. Isto é feito utilizando as idéias de separadores introduzidas por Eaves e Zangwill [9]. Mostra-se ainda que, quando a norma Euclidiana é empregada, a propriedade de Fejér monotonicidade se mantém.

Além destes resultados, que formam a parte central da dissertação, é feita uma revisão de alguns tópicos de convexidade e subdiferenciabilidade e uma breve excursão ao caso em que a regularização é uma distância de Bregman.

Abstract

This work focuses on proximal point methods (PPM), viewed as algorithms for convex programming. The importance of such algorithms to the mathematical programming is related to their connection to multiplier methods such as augmented Lagrangian and the exponential method of multipliers [11, 4].

The PPM framework is characterized by the solution of a sequence of auxiliary problems, whose modified objective function is the sum of the original objective function to a regularization term. The first works [17, 20] used a positive multiple of the square of the Euclidean norm as its regularization function.

In this work we present convergence results for methods that use a generalization of the Euclidean regularization. Basically, we show that the PPM converges using the composition of strictly convex functions and norms, under mild differentiability assumptions on the strictly convex term. This is done with the ideas of separators introduced by Eaves and Zangwill [9]. Moreover, we show that, using the Euclidean norm, the Fejér monotonicity property is maintained.

In addition to these results, that form the core of the work, we also review some topics of convexity and sub-differentiability, and we do a brief excursion on the case where the regularization is a Bregman distance.

Agradecimentos

Esta lista nunca será completa...

A meus pais, sem os quais não chegaria aqui.

Ao Carlos, sua orientação, paciência e atenção e sua lição do que realmente é ser um mestre.

À Silvina, que mesmo longe está presente sempre.

Ao Marcelo, que me acompanha desde do colegial, todas as discussões e conversas que já tivemos.

A todos os meus amigos, que sempre estiveram do meu lado para comer pizza, falar da vida ou ir ao cinema.

Sumário

Notação	vii
Capítulo 1. Introdução	1
Capítulo 2. Revisão de Análise Convexa	4
1. Conjuntos convexos	4
2. Funções convexas	14
3. Derivadas direcionais laterais e subgradientes	21
4. Apêndice	34
Capítulo 3. Resultados Gerais e Separadores	38
1. Definições e Resultados Gerais	38
2. Separadores	42
Capítulo 4. Métodos de Ponto Proximal Baseados em Normas	48
1. Ponto Proximal com Norma	48
2. MPPN e problemas restritos	60
Capítulo 5. Métodos de Ponto Proximal Baseados em Funções de Bregman	62
1. Distâncias de Bregman	62
2. O Método	65
3. Apêndice	71
Capítulo 6. Conclusão	77
Referências Bibliográficas	78

Notação

- Seja x um vetor do $\mathbb{R}^n$ e α um número real não nulo. Para denotar o vetor

$$\frac{1}{\alpha}x,$$

usar-se-á o abuso de notação

$$\frac{x}{\alpha}.$$

- Seja x um vetor do $\mathbb{R}^n$.
 - $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$;
 - $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$;
 - $\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \{|x_i|\}$;
 - x_i é a i -ésima coordenada de x .
- Se A é um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ e x é um vetor, então:
 - $\overline{A}$ denota o fecho de A ;
 - $\overset{\circ}{A}$ denota o interior de A ;
 - ∂A denota a fronteira de A .
 - $B(x, \alpha)$ denota a bola aberta de centro x e raio α , caso não seja especificado a norma utilizada é a Euclidiana.
 - $B[x, \alpha]$ denota a bola fechada de centro x e raio α , mais uma vez a norma padrão é a Euclidiana.
 - Seja $d(\cdot, \cdot)$ uma métrica no $\mathbb{R}^n$. A distância de um ponto x ao conjunto A , induzida por esta métrica, é dada por:

$$d_{PC}(x, A) = \inf_{a \in A} \{d(x, a)\}.$$

- A função indicadora de A , denotada por $\text{ind}(\cdot | A)$, é definida por

$$\text{ind}(x | A) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in A, \\ \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Sejam A e B subconjuntos do $\mathbb{R}^n$:

- A soma dos conjuntos A e B , denotada por $A + B$ é o conjunto

$$\{c \mid c = a + b, a \in A, b \in B\}.$$

- O produto um real α por do conjunto A , denotado por αA é o conjunto

$$\{c \mid c = \alpha a, a \in A\}.$$

Em particular $-A = (-1)A$.

- O conjunto $\{a \mid a \in A, a \notin B\}$ será denotado por $A \sim B$.
- Sejam a, b vetores do $\mathbb{R}^n$, então:
 - $a < b$ se, e só se, cada componente de a é estritamente menor do que a respectiva componente de b .
 - $a \leq b$ se, e só se, cada componente de a é menor do que a respectiva componente de b e há pelo menos uma componente onde a desigualdade é estrita.
 - $a \leqslant b$ se, e só se, cada componente de a é menor do que a respectiva componente de b .
- Seja $f(\cdot)$ uma função definida em um aberto A nos reais. A derivada direcional lateral de $f(\cdot)$ no ponto x na direção h , denotada por $f'(x, h)$ é o limite

$$f'(x, h) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(x + th)}{t}.$$

- Seja V um subconjunto do $\mathbb{R}^n$, e $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. O conjunto dos argumentos que minimizam $f(\cdot)$ em V é o conjunto de todos os pontos de V onde o mínimo de $f(\cdot)$ em V é atingido, isto é:

$$\operatorname{argmin}_{z \in V} \{f(z)\} = \{x \mid x \in V \text{ e } f(x) = \inf_{z \in V} \{f(z)\}\}.$$

Eventualmente este conjunto pode ser vazio.

CAPÍTULO 1

Introdução

“O Problema de programação não-linear aparece em milhares de formas e pode ser encontrado nas ciências naturais, Física, Engenharia, Economia, Matemática, Finanças e problemas de governo. De fato, mesmo implicações filosóficas já foram analisadas.”

Zangwill[24]

Problemas de otimização estão tipicamente associados a operação, ampliação ou projeto de um sistema que deve se comportar de maneira ótima com relação a algum critério. Neste contexto, a programação não-linear (PNL) estuda os casos em que o critério e as restrições de funcionamento do sistema podem ser representadas por um número finito de funções reais de finitas variáveis e o objetivo pode ser visto como único. Por exemplo, suponha que se quer maximizar o lucro de uma fábrica. É comum existirem restrições às decisões (no exemplo poderiam ser disponibilidade de mão de obra, capacidade de produção das máquinas, demanda do mercado, entre outras) que também devem ser tratadas.

O problema clássico de PNL, *problema de minimização* (PM), é a minimização de uma função escalar $f(\cdot)$ dentro de um conjunto V que é chamado de conjunto de pontos viáveis e que, usualmente, é descrito através de desigualdades envolvendo funções.

A invenção e o rápido desenvolvimento do computador digital permitiram a implementação de algoritmos que resolvem casos do PM que possuam algum tipo de estrutura especial, gerando assim um grande crescimento da programação não-linear na segunda metade deste século. Deste modo, apesar de nova quando comparada a outros ramos da Matemática, ela está estabelecida, com um conjunto de resultados, técnicas sofisticadas e aplicações em diversas áreas como Física, Matemática, Engenharia, Economia e Administração.

Claramente é muito difícil, senão impossível, a solução eficiente do problema geral de PNL. Logo a postura dominante é impor restrições

à função objetivo e ao conjunto viável de modo a permitir o desenvolvimento de métodos de solução que explorem a estrutura obtida. Algumas hipóteses usuais são linearidade, diferenciabilidade, convexidade ou concavidade, condições de qualificação como Slater ou reverso-convexa [14], etc.

Um caso particularmente interessante, e muito estudado, é aquele em que a função objetivo, $f(\cdot)$, é convexa e o conjunto viável é um subconjunto não-vazio, fechado e convexo do $\mathbb{R}^n$. O método de ponto proximal (MPP) busca resolver este problema substituindo-o por uma seqüência de problemas mais bem comportados, onde a função objetivo é estritamente convexa. Isto é possível através da soma de funções estritamente convexas à função objetivo original. Existem várias classes de funções que podem ser usadas, por exemplo o quadrado da norma Euclidiana, distâncias de Bregman ou φ -divergências [11, 8, 5, 20, 19].

O MPP é particularmente interessante na resolução de problemas de minimização quando permite a substituição de problemas restritos por uma seqüência de problemas irrestritos. Isto é possível de duas formas: a primeira, indireta, através de métodos de Lagrangianos aumentados, que muitas vezes podem ser entendidos como aplicação de variações do MPP ao problema dual; a segunda, através da aplicação do MPP com funções de regularização que “absorvem a descrição” do conjunto viável (este é o caso de métodos proximais com distâncias de Bregman). A conexão do MPP com métodos de Lagrangianos foi estudada inicialmente em [19]. Outros bons textos nesta área são [11, 23]. Métodos de ponto proximal com funções de regularização especiais que permitem a eliminação da descrição explícita de conjuntos viáveis simples podem ser encontrados em [11, 23, 12, 13].

A contribuição original desta dissertação é uma generalização do método de ponto proximal que usa como função de regularização o quadrado da norma Euclidiana. Mostra-se que basta considerar composições de funções estritamente convexas e continuamente diferenciáveis com normas quaisquer do $\mathbb{R}^n$ (ver capítulo 4). Isto foi possível graças ao uso da ferramenta de separadores apresentada no artigo *Generalized Cutting Plane Algorithms* de Eaves e Zangwill [9].

O texto se divide da seguinte forma:

- No capítulo 2 é feita uma revisão de análise convexa com destaque para alguns conceitos importantes utilizados nesta dissertação, mas que não estão tipicamente presentes em um primeiro curso de programação não-linear, como, por exemplo, subdiferenciabilidade. Este capítulo tem como objetivo introduzir os conceitos teóricos que serão usados para o tratamento de problemas de minimização convexa.

- O capítulo 3 pode ser dividido em duas partes bem distintas. Na primeira são apresentadas as definições básicas e alguns resultados de PNL. Desta maneira, busca-se evitar ambigüidades sobre os problemas que estão sendo tratados. A segunda é uma revisão de alguns resultados do artigo de Eaves e Zangwill que introduz separadores.
- O capítulo 4 apresenta o método geral de ponto proximal e sua regularização original, baseada na norma Euclidiana. Além disto, mostra-se como generalizar esta forma de regularização.
- O capítulo 5 versa sobre métodos de ponto proximal que usam distâncias de Bregman como regularização. Estes métodos são especialmente interessantes por permitirem a substituição de alguns problemas restritos por uma seqüência de problemas irrestritos. Este capítulo, apesar de não conter contribuições, é apresentado para aumentar a abrangência do texto.
- No capítulo 6 são apresentadas as conclusões do trabalho e sugeridas algumas perspectivas de trabalho futuro.

CAPÍTULO 2

Revisão de Análise Convexa

Este capítulo, tem como objetivo apresentar uma revisão de análise convexa, com destaque para resultados e definições que não são comuns durante um curso introdutório de PNL, principalmente subdiferenciabilidade. Porém, assume-se que o leitor possui alguma familiaridade com convexidade (o equivalente aos resultados do Mangasarian[14]). Deste modo, conceitos e resultados básicos serão apresentados sem as demonstrações. Se o leitor já estiver familiarizado com análise convexa, a leitura deste capítulo não é necessária para a compreensão do restante do texto.

1. Conjuntos convexos

DEFINIÇÃO 1. Um subconjunto C do $\mathbb{R}^n$ é dito *convexo* se, para qualquer $\lambda \in [0, 1]$ e quaisquer pontos $x, y \in C$, o ponto definido por $(1 - \lambda)x + \lambda y$ pertence a C . Geometricamente, isto equivale a afirmar que todo segmento de reta com extremos em C está contido em C . ■

São exemplos de conjuntos convexos:

1. $\emptyset$;
2. Um subespaço vetorial (em particular o $\mathbb{R}^n$);
3. Um conjunto composto de um único ponto;
4. Uma reta, uma semi-reta, um segmento de reta, com extremos abertos ou não, semi-espacos e poliedros;
5. Uma bola aberta ou fechada.

1.1. Algumas propriedades conhecidas. Conjuntos convexos gozam de várias propriedades interessantes. Como:

PROPRIEDADE 1. A intersecção de conjuntos convexos é um conjunto convexo.

Antes de apresentar as próximas propriedades é necessário definir um pouco de notação.

DEFINIÇÃO 2. Se A e B são subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ então o conjunto soma de A e B , $A + B$, é definido por:

$$A + B = \{c \mid c = a + b, a \in A, b \in B\}.$$

■

DEFINIÇÃO 3. Se A é um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ e α é um número real, o conjunto produto de α por A , αA é dado por:

$$\alpha A = \{c \mid c = \alpha a, a \in A\}.$$

PROPRIEDADE 2. A soma de conjuntos convexos é um conjunto convexo.

PROPRIEDADE 3. O produto de um real por um conjunto convexo é um conjunto convexo.

PROPRIEDADE 4. O produto cartesiano de conjuntos convexos é um conjunto convexo.

PROPRIEDADE 5. A imagem, por uma transformação linear, de um conjunto convexo é um conjunto convexo.

PROPRIEDADE 6. Se A é um conjunto convexo então o interior de A é convexo.

PROPRIEDADE 7. Se C é um conjunto convexo fechado de interior não vazio então C coincide com o fecho de seu interior.

As propriedades 1 a 5 são todas de simples demonstração e as provas podem ser encontradas, por exemplo, no livro *Programação Linear: Um Primeiro Curso* de Humes e Humes [10].

As propriedades 6 e 7 são um pouco mais sofisticadas e podem ser vistas como corolários do teorema apresentado abaixo. Este teorema apresenta uma importante característica topológica de conjuntos convexos e, por ser não trivial, terá sua demonstração apresentada.

TEOREMA 1. *Seja C um conjunto convexo no $\mathbb{R}^n$. Seja x um ponto do interior de C e y um ponto do fecho C . Então $(1 - \lambda)x + \lambda y$ pertence ao interior de C para todo $\lambda \in [0, 1)$.*

PROVA. A demonstração aqui apresentada está baseada no livro *Convex Analysis* de Rockafellar [18].

Seja B a bola de raio unitário e centro em 0. Deve-se demonstrar que o conjunto $(1 - \lambda)x + \lambda y + \epsilon B$ está contido em C para algum $\epsilon > 0$. Observa-se que

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)x + \lambda y + \epsilon B &\subset (1 - \lambda)x + \lambda(C + \epsilon B) + \epsilon B \\ &= (1 - \lambda)[x + (1 + \lambda)(1 - \lambda)^{-1}\epsilon B] + \lambda C. \end{aligned}$$

Por fim, o último conjunto estará contido em $(1 - \lambda)C + \lambda C = C$ quando ϵ for pequeno o suficiente para que $x + (1 + \lambda)(1 - \lambda)^{-1}\epsilon B$ esteja contido em C . Isto é possível porque $x \in \overset{\circ}{C}$. □

Além disto, para o estudo de conjuntos convexos, um conceito fundamental é o de combinação convexa, que é apresentado abaixo junto a alguns resultados fundamentais a ele relacionados.

DEFINIÇÃO 4. Um ponto $\bar{x}$ é dito uma *combinação convexa* dos pontos $\{x^1, \dots, x^m\}$ se existem reais $\alpha^i \geq 0$ tais que

$$\bar{x} = \alpha^1 x^1 + \dots + \alpha^m x^m \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^m \alpha^i = 1.$$

■

DEFINIÇÃO 5. Dado um conjunto A contido no $\mathbb{R}^n$, chama-se *casco convexo* de A ao conjunto de todas as combinações convexas de elementos de A . Este conjunto será denotado por $[A]$.

■

Um resultado trivial é que o casco convexo de um número finito de pontos é um compacto.

Os próximos lemas são resultados clássicos sobre casco convexo e podem ser encontrados, por exemplo, em [10].

LEMA 1. *Um conjunto C é convexo se, e somente se, qualquer combinação convexa de elementos de A é um elemento de A .*

■

LEMA 2. *O casco convexo de um conjunto A é o menor (no sentido de inclusão) conjunto convexo que contém A .*

■

1.2. Teoremas de separação. Um fato geométrico bastante intuitivo e interessante sobre conjuntos convexos disjuntos é a existência de hiperplanos separadores, isto é, de hiperplanos que dividem o $\mathbb{R}^n$ em dois semi-espacos, cada um contendo um dos conjuntos. Este resultado é fundamental para o desenvolvimento de conceitos como o de subdiferenciabilidade e dualidade em programação não-linear.

Esta seção está baseada no livro *Nonlinear Programming: Analysis and Methods* de Avriel [1].

DEFINIÇÃO 6. Diz-se que um hiperplano H *separa* dois conjuntos A e B se A estiver contido em um dos semi-espacos fechados definidos por H e B estiver contido no semi-espaço fechado oposto (figura 1.b)¹.

■

DEFINIÇÃO 7. Diz-se que um hiperplano H *separa estritamente* dois conjuntos A e B se A estiver contido em um dos semi-espacos abertos definidos por H e B estiver contido no semi-espaço aberto oposto. (figura 1.c).

■

FIGURA 1. Possibilidades de separação para conjuntos disjuntos: (a) Conjuntos que não podem ser separados por um hiperplano. (b) Conjuntos que podem ser separados por hiperplano, mas não estritamente (o retângulo da direita é aberto e o outro é fechado). (c) Conjuntos que podem ser separados estritamente.

Os principais resultados de separação de convexos são:

LEMA 3. *Seja C um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ fechado, convexo, não vazio e que não contém a origem. Então existe um hiperplano que separa estritamente C e a origem.*

¹Qualquer plano pode ser descrito na forma do conjunto de pontos que possuem produto escalar constante com um vetor *não nulo* γ : $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \gamma, x \rangle = \beta\}$, onde β é um real fixado.

FIGURA 2. Hiperplano H separando C e a origem.

PROVA. Seja x^* um ponto de C e $r > \|x^*\|_2$. Defini-se o conjunto K como a intersecção de $B[0, r]$ e C . Ele é, claramente, um compacto não vazio. Logo a função contínua $\|\cdot\|_2$ admite mínimo em um ponto $\bar{x}$ de K .

Como

$$\begin{aligned} \forall x \in K, \quad \|x\|_2 &\geq \|\bar{x}\|_2 \\ \forall x \in C \sim K, \quad \|x\|_2 &\geq r \geq \|\bar{x}\|_2, \end{aligned}$$

Segue

$$\forall x \in C, \quad \|x\|_2 \geq \|\bar{x}\|_2.$$

Considera-se agora um ponto $x \in C$. Da expressão anterior e da convexidade de C , pode-se concluir que, para qualquer $\lambda \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \|(1 - \lambda)\bar{x} + \lambda x\|_2^2 &\geq \|\bar{x}\|_2^2 \Rightarrow \\ \langle \bar{x} - \lambda\bar{x} + \lambda x, \bar{x} - \lambda\bar{x} + \lambda x \rangle &\geq \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \Rightarrow \\ (1) \quad 2\lambda\langle \bar{x}, x - \bar{x} \rangle + \lambda^2\langle x - \bar{x}, x - \bar{x} \rangle &\geq 0. \end{aligned}$$

Supõe-se, por contradição, que $\langle \bar{x}, x - \bar{x} \rangle < 0$. Como na equação 1 o termo linear em λ domina o termo quadrático, tomando λ suficientemente pequeno tem-se uma contradição. Portanto

$$\forall x \in C, \langle \bar{x}, x - \bar{x} \rangle \geq 0 \Rightarrow$$

$$\forall x \in C, \langle \bar{x}, x \rangle \geq \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > 0 \quad [\text{Pois } \bar{x} \in C \text{ e } 0 \notin C].$$

Tomando $\alpha = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle / 2$, tem-se que

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \bar{x}, x \rangle = \alpha\}$$

separa estritamente C e a origem. $\square$

TEOREMA 2. *Sejam C_1 e C_2 dois subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ não vazios, disjuntos, fechados e convexos, C_2 compacto. Então existe um hiperplano que os separa estritamente.*

PROVA. Como C_2 é compacto, o conjunto $C_1 - C_2$ é fechado.² Ainda, como os conjuntos são disjuntos, $C_1 - C_2$ não contém a origem e é convexo.

Usando o lema anterior, tome

$$H_{C_1 - C_2} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \gamma, x \rangle = \alpha\}$$

um hiperplano que separa estritamente a origem e $C_1 - C_2$. Sem perda de generalidade, considera-se que $\alpha > 0$.

Para quaisquer u e v pertencentes a C_1 e C_2 , respectivamente, tem-se

$$\begin{aligned} \langle \gamma, u - v \rangle &> \alpha \Rightarrow \\ \langle \gamma, u \rangle &> \alpha + \langle \gamma, v \rangle \Rightarrow \\ \inf_{u \in C_1} \{\langle \gamma, u \rangle\} &\geq \alpha + \langle \gamma, v \rangle \Rightarrow \\ \inf_{u \in C_1} \{\langle \gamma, u \rangle\} &\geq \sup_{v \in C_2} \{\langle \gamma, v \rangle\} + \alpha. \end{aligned}$$

Como $\alpha > 0$, sabe-se que existe β tal que

$$\inf_{u \in C_1} \{\langle \gamma, u \rangle\} > \beta > \sup_{v \in C_2} \{\langle \gamma, v \rangle\}.$$

Logo o hiperplano

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \gamma, x \rangle = \beta\}$$

separa estritamente C_1 e C_2 . $\square$

²Note que não basta que os conjuntos sejam fechados. Tome, por exemplo, $C_1 = \{n + 1/n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$ e $C_2 = \mathbb{N}$. A diferença $C_1 - C_2$ conterá a sequência $1/n$, mas não conterá o seu limite, o ponto 0. Para uma demonstração que a soma (ou diferença) de um conjunto compacto com um fechado é fechada, veja o livro *Nonlinear Programming* de Mangasarian [14], corolário B.3.3.

LEMA 4. *Seja C um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ convexo, não vazio, que não contém a origem. Então existe um hiperplano que separa C e a origem.*

PROVA. Para cada elemento x de C , defina o conjunto

$$Y(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\|_2 = 1 \text{ e } \langle y, x \rangle \geq 0\}.$$

Este conjunto é compacto e não vazio.

Seja $\{x^1, \dots, x^m\}$ um conjunto finito de pontos de C . Como C é convexo, o casco convexo destes pontos é um compacto que não contém a origem, pois ele está contido em C . Pelo lema 3, existe um $\gamma \neq 0$ tal que

$$\langle \gamma, x^i \rangle > 0 \quad \text{Para } i = 1, \dots, m.$$

Deste modo, tomado o ponto $\gamma / \|\gamma\|_2$, segue que

$$\bigcap_{i=1}^m Y(x^i) \neq \emptyset.$$

Como os conjuntos $Y(x)$ são compactos, segue, da propriedade de intersecção finita de compactos³, que

$$\bigcap_{x \in C} Y(x) \neq \emptyset.$$

Seja γ um elemento qualquer da intersecção anterior, tem-se

$$\langle \gamma, x \rangle \geq 0, \text{ para todo } x \in C.$$

Logo $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \gamma, x \rangle = 0\}$ é um hiperplano que separa C e a origem. $\square$

TEOREMA 3. *Sejam C_1 e C_2 dois subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ não vazios, disjuntos e convexos. Então existe um hiperplano que os separa.*

PROVA. Pelo lema anterior, tome $\gamma \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \gamma, x \rangle = 0\}$$

separa $C_1 - C_2$ e a origem. Conclui-se que para todo $u \in C_1$ e todo $v \in C_2$:

$$\langle \gamma, u - v \rangle \geq 0 \Leftrightarrow \quad [\text{Sem perda de gen.}]$$

$$\langle \gamma, u \rangle \geq \langle \gamma, v \rangle \Leftrightarrow$$

$$\inf_{u \in C_1} \{\langle \gamma, u \rangle\} \geq \sup_{v \in C_2} \{\langle \gamma, v \rangle\} \Rightarrow$$

$$\exists \beta : \inf_{u \in C_1} \{\langle \gamma, u \rangle\} \geq \beta \geq \sup_{v \in C_2} \{\langle \gamma, v \rangle\}.$$

³Ver, por exemplo, Berge [2], capítulo 4, teorema 6.

Logo

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \gamma, x \rangle = \beta\}$$

é um hiperplano que separa C_1 e C_2 . $\square$

1.3. Ilimitação. Intuitivamente, é natural imaginar que um conjunto convexo ilimitado deve possuir pelo menos uma direção de ilimitação, como ocorre com poliedros [10]. No caso de poliedros existe uma caracterização simples destas direções através do conceito de raios extremais do cone associado ao poliedro. Esta subseção se dedica ao estudo da ilimitação de conjuntos convexos, definindo formalmente alguns conceitos envolvidos e procurando demonstrar alguns resultados. Para um tratamento completo deste tema veja a seção 8 do livro de Rockafellar [18]. Inicialmente, formaliza-se o conceito de direção de ilimitação.

Para quaisquer conjuntos é possível definir o que é uma direção de ilimitação em um ponto e uma direção ilimitação. Exemplos podem ser encontrados na figura 3.

DEFINIÇÃO 8. Seja h um vetor não nulo do $\mathbb{R}^n$ e C um subconjunto do $\mathbb{R}^n$. h é uma *direção de ilimitação de C em um ponto $\bar{x} \in C$* , se, para todo real $\alpha > 0$, vale

$$\bar{x} + \alpha h \in C.$$

■

DEFINIÇÃO 9. Um vetor não nulo do $\mathbb{R}^n$, h , é uma *direção de ilimitação de um conjunto C* , se ela for uma direção de ilimitação em todo ponto de C . ■

Para conjuntos convexos fechados, prova-se a afirmação inicial: todo conjunto ilimitado possui pelo menos uma direção de ilimitação. Para tal, mostra-se que, se o conjunto não for limitado, existe uma direção de ilimitação para cada ponto. Em seguida, apresenta-se um resultado bastante interessante que afirma que uma direção de ilimitação em um ponto é uma direção de ilimitação do conjunto.

LEMA 5. *Sejam C um subconjunto convexo e fechado do $\mathbb{R}^n$ e $\bar{x}$ um ponto de C . Um vetor h é uma direção de ilimitação de C em $\bar{x}$ se, e somente se, existirem seqüências $(\alpha^i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+$ e $(h^i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$ tais que*

$$\begin{aligned} \alpha^i &\rightarrow \infty, \\ h^i &\rightarrow h \neq 0, \\ \bar{x} + \alpha^i h^i &\in C, \quad \text{para todo } i. \end{aligned}$$

FIGURA 3. Conjuntos fechados e ilimitados. Em (a) não há direção de ilimitação em nenhum ponto, em (b) existem direções de ilimitação em pontos, mas não no conjunto e (c) possui as mesmas direções de ilimitação em todos os pontos.

PROVA. A necessidade é trivial, basta tomar $h^i = h$ e $\alpha^i = i$. Prova-se a suficiência.

Supondo, por contradição, que a tese não é válida, existe um real $\bar{\alpha} > 0$ tal que

$$\bar{x} + \bar{\alpha}h \notin C.$$

Então, pelo teorema 2. de separação de convexos, existe um hiperplano separando estritamente $\{\bar{x} + \bar{\alpha}h\}$ e C , isto é existe $\gamma \in \mathbb{R}^n$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle \gamma, \bar{x} + \bar{\alpha}h \rangle > \beta \\ \langle \gamma, x \rangle < \beta. \end{array} \text{ para todo } x \in C \right\}$$

Uma vez que $\bar{x} \in C$, da expressão anterior conclui-se que

$$(3) \quad \begin{aligned} \langle \gamma, \bar{x} \rangle + \bar{\alpha} \langle \gamma, h \rangle &> \langle \gamma, \bar{x} \rangle \\ \bar{\alpha} \langle \gamma, h \rangle &> 0. \end{aligned}$$

Por fim, como $\bar{x} + \alpha^i h^i \in C$ para todo i , da equação 2 tem-se

$$\begin{aligned} \langle \gamma, \bar{x} \rangle + \alpha^i \langle \gamma, h^i \rangle &< \beta < \langle \gamma, \bar{x} \rangle + \bar{\alpha} \langle \gamma, h \rangle \Rightarrow \\ \frac{\alpha^i \langle \gamma, h^i \rangle}{\bar{\alpha} \langle \gamma, h \rangle} &< 1. \end{aligned}$$

A última equação segue de (3).

Como h^i converge a h , $\bar{\alpha} > 0$ e $\alpha^i \rightarrow \infty$, é possível obter uma contradição tomando o limite para $i \rightarrow \infty$ na expressão acima. Logo h é uma direção de ilimitação de C em $\bar{x}$. $\square$

COROLÁRIO 1. *Se C é um conjunto convexo fechado e ilimitado, C possui uma direção de ilimitação em cada um de seus pontos.*

PROVA. Seja $\bar{x}$ um ponto do conjunto C e $(x^i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em $C \sim \{\bar{x}\}$ tal que $(\|x^i\|_2)_{i \in \mathbb{N}}$ diverge. Definindo

$$\begin{aligned} h^i &= \frac{\bar{x} - x^i}{\|\bar{x} - x^i\|_2} \\ \alpha^i &= \|\bar{x} - x^i\|_2, \end{aligned}$$

tem-se que a seqüência h^i possui sempre norma 1, logo admite uma subsequência convergente a um versor. Esta subsequência convergente de h^i , junto aos respectivos α^i obedecem às condições do lema anterior. $\square$

LEMA 6. *Seja C é um conjunto convexo e fechado, um vetor h é uma direção de ilimitação de C se, e somente se, h é uma direção ilimitação de C em um ponto $\bar{x}$.*

PROVA. Mais uma vez a suficiência é trivial. Prova-se a necessidade.

Seja x um ponto qualquer de C . Define-se as seqüências:

$$\begin{aligned} h^i &= \frac{\bar{x}}{i} + h - \frac{x}{i}, \\ \alpha^i &= i, \end{aligned}$$

Pode-se concluir facilmente que

$$h^i \rightarrow h,$$

$$\alpha^i \rightarrow \infty.$$

Como h é direção de ilimitação em $\bar{x}$ e

$$\begin{aligned} x + \alpha^i h^i &= x + \bar{x} + ih - x \\ &= \bar{x} + ih, \end{aligned}$$

segue que $x + \alpha^i h^i \in C$, para todo i . Portanto o lema 5 diz que h é uma direção de ilimitação de C em x . $\square$

COROLÁRIO 2. *Todo convexo fechado e ilimitado possui uma direção de ilimitação.*

PROVA. Aplica-se o corolário 1 e o lema anterior. $\square$

2. Funções convexas

Uma primeira dificuldade que se encontra ao estudar funções convexas é a existência de definições que não são totalmente equivalentes. A definição escolhida nesta dissertação está baseada no livro clássico de Rockafellar, *Convex Analysis*, com a diferença que aqui se consideram funções que levam a valores em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, não permitindo o valor $-\infty$. Esta opção pode ser defendida por permitir tratar problemas de minimização restritos como problemas irrestritos⁴, porém sem introduzir as dificuldades técnicas associadas à indeterminações do tipo $\infty + (-\infty)$. Outra razão desta escolha é a ênfase no aspecto geométrico e na relação entre funções e conjuntos convexas.

Como a abordagem escolhida pode levar a cálculos aritméticos envolvendo $+\infty$ ou $-\infty$, apresenta-se uma lista das regras adotadas:

DEFINIÇÃO 10. Regras adotadas para cálculo aritmético envolvendo $+\infty$ e $-\infty$.

$$\begin{aligned} \alpha + \infty &= \infty + \alpha = \infty, & \text{para } -\infty < \alpha \leq \infty, \\ \alpha - \infty &= -\infty + \alpha = -\infty, & \text{para } -\infty \leq \alpha < \infty, \\ \alpha \infty &= \infty \alpha = \infty, \quad \alpha(-\infty) = (-\infty)\alpha = -\infty, & \text{para } 0 < \alpha \leq \infty, \\ \alpha \infty &= \infty \alpha = -\infty, \quad \alpha(-\infty) = (-\infty)\alpha = \infty, & \text{para } -\infty \leq \alpha < 0, \\ 0 \infty &= \infty 0 = 0 = 0(-\infty) = (-\infty) 0, \\ -(-\infty) &= \infty, \\ \inf \emptyset &= \infty, \quad \sup \emptyset = -\infty. \end{aligned}$$

As combinações $\infty + (-\infty)$ e $-\infty + \infty$ não estão definidas e devem ser evitadas. $\blacksquare$

⁴Os conceitos de problema de minimização e a formalização destes comentários se encontra no capítulo 3.

DEFINIÇÃO 11. Seja $f(\cdot)$ uma função cujo domínio é um subconjunto S do $\mathbb{R}^n$ e com imagens em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. O conjunto

$$\{(x, \mu) \in S \times \mathbb{R} \mid \mu \geq f(x)\}$$

é chamado *epígrafe* de $f(\cdot)$ e denotado $\text{epi } f$. Uma função é *convexa* em S se sua epígrafe é um conjunto convexo. Uma função é *côncava* em S se $-f(\cdot)$ é convexa. ■

DEFINIÇÃO 12. O *domínio efetivo* de uma função $f(\cdot)$ definida em um conjunto S é a projeção da epígrafe de $f(\cdot)$ no $\mathbb{R}^n$. Ele será denotado por $\text{epi } f$.

$$\text{dom } f = \{x \mid \exists \mu, (x, \mu) \in \text{epi } f\} = \{x \mid f(x) < \infty\}.$$

Se $f(\cdot)$ é convexa, este conjunto é convexo, por ser a imagem de um conjunto convexo por uma projeção (uma transformação linear).

Outra observação importante é que a convexidade de $f(\cdot)$ é equivalente à convexidade de $f(\cdot)$ restrita a $\text{dom } f$. Vê-se ainda que qualquer função convexa pode ser estendida a todo o $\mathbb{R}^n$, definindo $f(x) = \infty$ para todo ponto não pertencente a S . Logo, pode-se considerar que qualquer função convexa está definida em todo $\mathbb{R}^n$. Esta abordagem facilita algumas passagens técnicas.

Alguns exemplos de funções convexas são:

1. Funções lineares ou afins (que são os únicos exemplos de funções ao mesmo tempo convexas e côncavas).
2. Uma norma qualquer.
3. $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$$f(x) = \begin{cases} \infty, & \text{se } x < -1, \\ 0, & \text{se } x \in [-1, 1], \\ \infty, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Existem várias funções convexas que estão associadas a conjuntos convexas. Um dos exemplos mais simples e mais úteis é a função indicadora.

DEFINIÇÃO 13. Dado um subconjunto C do $\mathbb{R}^n$. A função indicadora de C é definida por:

$$\text{ind}(x \mid C) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in C, \\ \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observa-se que há uma relação um para um entre conjuntos e suas funções indicadoras e também que $\text{ind}(\cdot \mid C)$ é convexa se, e somente se, C é um conjunto convexo. ■

Uma hipótese de regularidade que será assumida muitas vezes é que a função convexa não possui domínio efetivo vazio. Isto é:

DEFINIÇÃO 1.4. Uma função convexa é *própria* se for finita em pelo menos um ponto de seu domínio. ■

O próximo resultado liga a definição de função convexa apresentada com a definição mais usual que se encontra, com pequenas variações, em livros como Mangasarian [14] ou Bertsekas [4].

TEOREMA 4. *Seja $f(\cdot)$ uma função definida em um conjunto convexo C com imagens em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Então $f(\cdot)$ é convexa em C se, e somente se,*

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y), \quad \lambda \in [0, 1],$$

para todo x e y em C .

PROVA. Existem dois casos que devem ser considerados.

- x ou y não pertencem a $\text{dom } f$. Sem perda de generalidade supõe-se que $x \notin \text{dom } f$. Neste caso nada se pode afirmar sobre a convexidade da epígrafe, pois ela não conterá nenhum ponto da forma (x, μ) .

A desigualdade

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y), \quad \lambda \in [0, 1],$$

é sempre válida pois ou o lado direito é ∞ ou, $\lambda = 1$, e vale a igualdade.

- x e y pertencem a $\text{dom } f$.
 - Supõe-se que a desigualdade do enunciado é válida. Dados dois pontos pertencentes a $\text{epi } f$, (x, μ) e (y, ν) e $\lambda \in [0, 1]$, pode-se concluir que

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)\mu + \lambda\nu &\geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \\ &\geq f((1 - \lambda)x + \lambda y). \end{aligned}$$

Logo $(1 - \lambda)(x, \mu) + \lambda(y, \nu) \in \text{epi } f$.

- Supondo que $\text{epi } f$ é convexa. Como $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ pertencem a epígrafe, segue que qualquer combinação convexa destes dois pontos pertence a $\text{epi } f$, isto é:

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y), \quad \lambda \in [0, 1].$$

□

COROLÁRIO 3. (*Desigualdade de Jensen*) Seja $f(\cdot)$ definida em um convexo C com imagens em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Então $f(\cdot)$ é convexa se, e somente se,

$$f(\lambda^1 x^1 + \cdots + \lambda^m x^m) \leq \lambda^1 f(x^1) + \cdots + \lambda^m f(x^m),$$

sempre que $\lambda^1 \geq 0, \dots, \lambda^m \geq 0$ e $\lambda^1 + \cdots + \lambda^m = 1$.

PROVA. Uma aplicação direta do teorema anterior e do lema 1. $\square$

Um outro conceito, é o de função estritamente convexa

DEFINIÇÃO 15. Uma função $f(\cdot)$ de S em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é *estritamente convexa* em S se S é convexo e

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) < (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y), \quad \lambda \in (0, 1),$$

para todo x e y distintos em $\text{dom } f$. $\blacksquare$

Funções convexas possuem várias propriedades úteis para sua manipulação. Segue abaixo uma pequena lista de resultados que podem ser encontrados em qualquer livro de programação não-linear, como [14].

PROPRIEDADE 8. A soma de duas funções convexas é convexa.

PROPRIEDADE 9. O produto de uma função convexa por um escalar positivo é uma função convexa.

PROPRIEDADE 10. A composição de uma função convexa com uma função linear é uma função convexa.

TEOREMA 5. Seja C um convexo e $f : C \mapsto \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ uma função não constante e convexa em C . Então nenhum ponto interior de C é ponto de máximo desta função.

PROVA. Ver Mangasarian [14] teorema 5.2.3. $\square$

LEMA 7. Os conjuntos de nível de uma função convexa $f(\cdot)$

$$C(k) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq k\},$$

são convexos para todo real k .⁵

PROVA. Basta observar que um conjunto de nível é a projeção da intersecção da epígrafe de $f(\cdot)$ com o semi-espço $\{(x, \mu) \mid \mu \leq k\}$. $\square$

⁵Esta propriedade é muito importante em otimização (quasiconvexidade) e está diretamente ligada a funções para as quais todo mínimo local é global.

2.1. Caracterização alternativa de funções convexas diferenciáveis. Outras propriedades, que surgem quando há diferenciabilidade, permitem a obtenção de definições alternativas de funções convexas. Os próximos teoremas são clássicos e podem ser encontrados em vários livros de programação não-linear (como [14]) ou análise convexa.

TEOREMA 6. *Seja $f(\cdot)$ uma função real, diferenciável, definida em um convexo aberto A do $\mathbb{R}^n$. Então $f(\cdot)$ é convexa em A se, e somente se, para quaisquer pontos x e y de A vale*

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle.$$

Isto é, $f(\cdot)$ é convexa em A se, e somente se, a aproximação linear de $f(\cdot)$ dada pelo gradiente está sempre abaixo de $f(\cdot)$. ■

TEOREMA 7. *Seja $f(\cdot)$ uma função real, diferenciável, definida em um convexo aberto A do $\mathbb{R}^n$. $f(\cdot)$ é estritamente convexa em A se, e somente se, para quaisquer pontos distintos, x e y , de A vale*

$$f(x) > f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle.$$

■

TEOREMA 8. *Seja $f(\cdot)$ uma função real, duas vezes diferenciável, definida em um convexo aberto A do $\mathbb{R}^n$. $f(\cdot)$ é convexa em A se, e somente se, a hessiana de $f(\cdot)$ é semi-definida positiva em todo A .* ■

TEOREMA 9. *Seja $f(\cdot)$ uma função real, duas vezes diferenciável, definida em um convexo aberto A do $\mathbb{R}^n$. Se a hessiana de $f(\cdot)$ é definida positiva em A , então $f(\cdot)$ é estritamente convexa em A .* ■

2.2. Continuidade. Funções convexas são muito bem comportadas com relação a continuidade e diferenciabilidade. O restante deste capítulo buscará mostrar alguns resultados importantes que envolvem estes conceitos.

Um primeiro exemplo é a continuidade de uma função convexa $f(\cdot)$ no interior de seu domínio efetivo, mostrando que comportamentos “estranhos” estão restritos a fronteira de $\text{dom } f$.⁶

TEOREMA 10. *Uma função convexa $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é contínua em qualquer subconjunto aberto de seu domínio efetivo.*

PROVA. A prova será omitida e pode ser encontrada em vários livros de programação não-linear ou análise convexa. Veja, por exemplo, o livro de Mangasarian [14]. □

⁶Na verdade valem resultados mais gerais do que os apresentados, envolvendo o interior relativo de conjuntos convexas. Porém, buscou-se evitar a introdução deste conceito para não estender demais este capítulo.

Neste ponto seria natural questionar o quão mal comportada uma função convexa pode ser na fronteira de seu domínio efetivo. Ou ainda, se é possível gerar, a partir de uma função convexa qualquer, uma função que tenha propriedades "razoáveis" na fronteira.

Uma resposta à última questão é dada pelo uso da operação de fecho de uma função, que corresponde à tomar o fecho de sua epígrafe. Através desta operação é possível eliminar parte das descontinuidades na fronteira do domínio efetivo e gerar uma função que coincide com a função original em todos os pontos fora da fronteira do domínio efetivo e que é semi-contínua inferior, como definido abaixo:

DEFINIÇÃO 16. Uma função $f(\cdot)$ de um subconjunto S do $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ é *semi-contínua inferior (s.c.i.)* em um ponto x de S se

$$f(x) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} f(x^i)$$

para toda seqüência $(x^i)_{i \in \mathbb{N}}$ em S que converge a x e que o limite de $(f(x^i))_{i \in \mathbb{N}}$ existe em $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

A função é dita *semi-contínua superior* se valer a desigualdade inversa. ■

Um exemplo de função convexa que não é semi-contínua inferior ou superior é dado a seguir. Considerando a função convexa $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } \|x\|_\infty < 1, \\ 1, & \text{se } \|x\|_\infty = 1 \text{ e } x \in \mathbb{Q}^2, \\ 2, & \text{se } \|x\|_\infty = 1 \text{ e } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2, \\ \infty, & \text{se } \|x\|_\infty > 1. \end{cases}$$

Observa-se que redefinindo os valores de $f(\cdot)$ para 0 na circunferência de raio 1, pode-se eliminar as descontinuidades. Esta operação será formalizada nos próximos dois resultados.

LEMA 8. Seja F um subconjunto convexo do $\mathbb{R}^{n+1}$, então a função $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ definida por

$$f(x) = \inf\{\mu \mid (x, \mu) \in F\}$$

é uma função convexa no $\mathbb{R}^n$, se, em todo ponto x , o ínfimo for maior que $-\infty$.

PROVA. A prova é conseqüência direta da definição de função convexa, uma vez que a epígrafe da função $f(\cdot)$ é, por construção, o conjunto convexo $F + \{(0, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \mu \geq 0\}$. □

TEOREMA 11. Seja $f(\cdot)$ uma função arbitrária do $\mathbb{R}^n$ no $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. As condições abaixo são equivalentes:

1. $f(\cdot)$ é semi-contínua inferior no $\mathbb{R}^n$.
2. $\{x \mid f(x) \leq \alpha\}$ é fechado para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. A epígrafe de $f(\cdot)$ é um conjunto fechado do $\mathbb{R}^{n+1}$.

PROVA. A prova será feita em três partes.

- $1 \Rightarrow 3$ Tome $(x^i, \mu^i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma sequência na epígrafe de $f(\cdot)$ convergente a um ponto $(\bar{x}, \bar{\mu})$.

$$f(x^i) \leq \mu^i, \quad \forall i \Rightarrow$$

$$f(\bar{x}) \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} f(x^i) \leq \bar{\mu} \Rightarrow [f(\cdot) \text{ é semi-cont. inf.}]$$

$$(\bar{x}, \bar{\mu}) \in \text{epi } f$$

Logo a epígrafe é fechada.

- $3 \Rightarrow 2$ Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(x^i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma sequência pertencente a $\{x \mid f(x) \leq \alpha\}$ que converge para $\bar{x}$. Então $(x^i, \alpha) \in \text{epi } f$ para todo i , e, como a epígrafe é fechada, tem-se que $(\bar{x}, \alpha) \in \text{epi } f$ e assim

$$f(\bar{x}) \leq \alpha \Rightarrow \bar{x} \in \{x \mid f(x) \leq \alpha\}.$$

- $2 \Rightarrow 1$. Toma-se seqüências $x^i \rightarrow \bar{x}$ e $f(x^i) \rightarrow \bar{f}$. Para todo $\alpha > \bar{f}$ tem-se que $f(x^i) \leq \alpha$ a partir de um certo i . Logo para todo $\alpha > \bar{f}$

$$x \in \overline{\{x \mid f(x) \leq \alpha\}} = \{x \mid f(x) \leq \alpha\} \Rightarrow$$

$$x \in \bigcap_{\alpha > \bar{f}} \{x \mid f(x) \leq \alpha\}$$

$$= \{x \mid f(x) \leq \bar{f}\}.$$

Completando a prova.

□

DEFINIÇÃO 17. Dada uma função $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, chama-se de *fecho de $f(\cdot)$* , denotado por $\text{cl } f(\cdot)$, à função cuja epígrafe é o fecho da epígrafe de $f(\cdot)$. ■

LEMA 9. Seja $f(\cdot)$ uma função convexa definida no $\mathbb{R}^n$ com imagens em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e $\bar{x}$ um ponto do domínio efetivo onde $f(\cdot)$ é contínua em relação a $\text{dom } f$. Então

$$f(\bar{x}) = \text{cl } f(\bar{x}).$$

PROVA. Seja $(\bar{x}, \bar{\mu})$ um ponto do fecho da epígrafe de $f(\cdot)$ e (x^i, μ^i) uma seqüência na epígrafe de $f(\cdot)$ convergente a $(\bar{x}, \bar{\mu})$. Segue que:

$$f(\bar{x}) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x^i) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \mu^i = \bar{\mu}.$$

De onde se conclui que

$$f(\bar{x}) \leq \text{cl } f(\bar{x}) = \inf\{\mu \mid (\bar{x}, \mu) \in \overline{\text{epi } f}\}.$$

Por outro lado, como $(\bar{x}, f(\bar{x})) \in \text{epi } f$, segue a igualdade. $\square$

COROLÁRIO 4. *Uma função convexa coincide com seu fecho no interior de seu domínio efetivo.*

PROVA. Basta lembrar que a função $f(\cdot)$ é contínua no interior de seu domínio efetivo e aplicar o resultado anterior. $\square$

3. Derivadas direcionais laterais e subgradientes

Existem vários resultados sobre funções convexas que envolvem suas derivadas direcionais laterais e extensões do conceito de gradiente. Na presença de convexidade, a aproximação linear dada pelo gradiente sempre é menor do que a função convexa (ver teorema 6). Ainda mais, em muitos pontos onde uma função convexa não admite diferencial é possível construir funções afins com a propriedade de limitarem a função inferiormente. Os vetores que determinam a inclinação destas aproximações são os subgradientes⁷ e, em muitos casos, podem ser usados no lugar do gradiente para o estudo destas funções. Um primeiro passo para a introdução destes conceitos é a investigação das derivadas direcionais laterais de funções convexas. A parte inicial desta seção, até o teorema 14 é baseada no apêndice B do livro de Bertsekas [4].

3.1. Derivadas Direcionais Laterais. Considera-se inicialmente o caso de $f(\cdot)$ ser uma função convexa *definida num intervalo real* $[a, b]$.

LEMA 10. *Seja $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ uma função convexa. Para quaisquer $x, y, z \in [a, b]$ tal que $x < y < z$ vale*

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

PROVA. Lembrando da definição alternativa de função convexa (teorema 4), sabe-se que, como $x < y < z$:

$$f(y) \leq \frac{y - x}{z - x} f(z) + \frac{z - y}{z - x} f(x).$$

⁷Este conceito será definido com precisão na próxima subseção.

As duas desigualdades seguem de uma reorganização de termos da desigualdade acima. Como ilustração far-se-á a prova da primeira desigualdade.

$$\begin{aligned} f(y) &\leq \frac{y-x}{z-x}f(z) + \frac{z-y}{z-x}f(x) \\ (z-x)f(y) &\leq (y-x)f(z) + (z-x+x-y)f(x) \\ (z-x)(f(y)-f(x)) &\leq (y-x)f(z) - (y-x)f(x) \\ \frac{f(y)-f(x)}{y-x} &\leq \frac{f(z)-f(x)}{z-y}. \end{aligned}$$

□

Usando as desigualdades acima é possível estudar as derivadas laterais da função convexa $f(\cdot)$. Para isto, define-se as funções auxiliares.

DEFINIÇÃO 18. Dado $x \in [a, b]$, para todo $t > 0$ tal que $x+t \in [a, b]$, é possível definir a função

$$f^+(x, t) = \frac{f(x+t) - f(x)}{t}.$$

De modo análogo, dado $x \in (a, b]$, para todo $t > 0$ tal que $x-t \in [a, b]$, define-se

$$f^-(x, t) = \frac{f(x) - f(x-t)}{t}$$

■

Claramente $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^+(x, t)$ e $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^-(x, t)$ são, respectivamente, as derivadas à direita e à esquerda de $f(\cdot)$ no ponto x .

Uma afirmação que se pode fazer das funções definidas acima é:

LEMA 11. A função $f^+(x, t)$ é não decrescente como função de t e $f^-(x, t)$ é não crescente.

PROVA. Tome $0 \leq t \leq t'$. Usando a primeira desigualdade do lema 10 com $y = x+t$ e $z = x+t'$, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} &\leq \frac{f(x+t') - f(x)}{t'} \Leftrightarrow \\ f^+(x, t) &\leq f^+(x, t'). \end{aligned}$$

A demonstração para $f^-(x, \cdot)$ é análoga. □

De posse deste simples resultado é possível enunciar um importante corolário.

COROLÁRIO 5. Se $f^+(x)$ e $f^-(x)$ denotam as derivadas à direita e esquerda, respectivamente, de $f(\cdot)$ no ponto x , então vale

$$f^+(x) \in \mathbb{R} \text{ ou } f^+(x) = -\infty, \quad \forall x \in [a, b)$$

$$f^-(x) \in \mathbb{R} \text{ ou } f^-(x) = \infty, \quad \forall x \in (a, b]$$

PROVA. Por definição:

$$f^+(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^+(x, t).$$

Como $f^+(x, t)$ é não decrescente, sabe-se que ou o limite à direita existe ou diverge para $-\infty$.

A demonstração para $f^-(\cdot)$ é análoga. $\square$

Por fim estes resultados nos levam ao teorema:

TEOREMA 12. Seja $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ uma função convexa, então:

1. $f^-(x) \leq f^+(x), \forall x \in (a, b)$.
2. Se x pertence ao interior do intervalo então as derivadas laterais são reais.
3. Se $x, z \in (a, b)$ e $x < z$ então $f^+(x) \leq f^-(z)$.
4. Se x é um real em (a, b) e d é um valor qualquer que satisfaz $f^-(x) \leq d \leq f^+(x)$ então

$$f(z) \geq f(x) + d(z - x), \quad \forall z \in [a, b].$$

PROVA. Divide-se a prova em partes equivalentes aos resultados que se quer demonstrar.

1. Tome $t > 0$ suficientemente pequeno para que $x + t$ e $x - t$ pertençam ao intervalo $[a, b]$. Usando mais uma vez o lema 10 com $x = x - t$, $y = x$ e $z = x + t$:

$$f^-(x, t) \leq f^+(x, t).$$

O limite da expressão acima para $t \rightarrow 0^+$ é o resultado desejado.

2. Tome $t > 0$ suficientemente pequeno para que $x + t$ e $x - t$ pertençam ao intervalo $[a, b]$. Pelo lema 11

$$f^+(x) \leq f^+(x, t) < \infty$$

$$f^-(x) \geq f^-(x, t) > -\infty$$

Do item anterior conclui-se que:

$$-\infty < f^-(x) \leq f^+(x) < \infty.$$

3. Usa-se mais uma vez o lema 10 com $x = x$, $y = (z+x)/2$ e $z = z$, para concluir que

$$f^+(x, (z-x)/2) \leq f^-(z, (z-x)/2)$$

O resultado, então, segue do fato de $f^+(x) \leq f^+(x, (z-x)/2)$ e $f^-(z) \geq f^-(z, (z-x)/2)$.

4. Claramente o resultado é válido para $x = z$. Prova-se este resultado para $x < z$. O caso $x > z$ é similar. Como $f^+(x, t)$ é não decrescente em t , segue que

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \geq f^+(x, t), \quad \forall t \in (0, z - x).$$

Tomando o limite para $t \rightarrow 0^+$

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} &\geq f^+(x) \geq d \Rightarrow \\ f(z) &\geq f(x) + d(z - x). \end{aligned}$$

□

Agora, considera-se o caso onde o domínio de $f(\cdot)$ é um subconjunto do $\mathbb{R}^n$. A definição de derivada direcional lateral de $f(\cdot)$ na direção h é:

$$(4) \quad f'(x, h) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}.$$

Se, para um ponto x e uma direção h , for definida a função convexa

$$(5) \quad f_h(t) = f(x + th),$$

pode-se, então, verificar facilmente que

$$(6) \quad f'(x, h) = f_h'(0).$$

Estes comentários levam ao enunciado do corolário:

COROLÁRIO 6. *Se $f : C \mapsto \mathbb{R}$ é uma função convexa definida em um conjunto C do $\mathbb{R}^n$, e x é um ponto interior de C então $f(\cdot)$ possui derivada direcional lateral em x para qualquer direção h .*

PROVA. Trivial a partir da equação 6 e do teorema 12.

□

3.2. Subgradientes. Quando as funções envolvidas são convexas, o conceito de gradiente pode ser estendido mantendo várias de suas propriedades. Se $f(\cdot)$ é convexa diferenciável, sabe-se, pelo teorema 6, que o hiperplano definido por uma aproximação linear de $f(\cdot)$, dada pelo gradiente, separa o espaço $\mathbb{R}^{n+1}$ em duas partes tal que uma destas contém a epígrafe de $f(\cdot)$ (a superior). Mesmo em pontos onde a função não é diferenciável, pode ser possível a obtenção de aproximações lineares⁸ que são sempre menores que $f(\cdot)$ (ver figura 4). Os vetores que definem essas aproximações serão chamados de subgradientes de $f(\cdot)$. Esta subseção é dedicada ao estudo de subgradientes e suas relações com as idéias e propriedades de diferenciabilidade.

DEFINIÇÃO 19. Seja $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Um vetor γ do $\mathbb{R}^n$ é dito um *subgradiente* de $f(\cdot)$ em um ponto $\bar{x}$ se:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) \geq f(\bar{x}) + \langle \gamma, x - \bar{x} \rangle.$$

isto é, a aproximação linear de $f(\cdot)$ no ponto $\bar{x}$, dada por γ , minora $f(\cdot)$ (figura 4).

Ao mapa ponto conjunto que associa cada ponto $x \in \mathbb{R}^n$ ao conjunto de todos os subgradientes de $f(\cdot)$ em x chama-se *subdiferencial* de $f(\cdot)$ ou *mapa de subgradientes* de $f(\cdot)$. O subdiferencial de $f(\cdot)$ em um ponto $\bar{x}$ será denotado por $\partial f(\bar{x})$. ■

Observa-se que uma função que não é constantemente ∞ não admite subgradiente em nenhum ponto fora do domínio efetivo.

Subdiferenciais possuem várias propriedades, entre elas destacam-se:

PROPRIEDADE 11. O subdiferencial de uma função $f(\cdot)$ em $\bar{x}$ é um conjunto convexo.

PROVA. Sejam $\gamma, \zeta \in \partial f(\bar{x})$ e $\lambda \in [0, 1]$. Então

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda f(x) &\geq \lambda f(\bar{x}) + \lambda \langle \gamma, x - \bar{x} \rangle \\ (1 - \lambda)f(x) &\geq (1 - \lambda)f(\bar{x}) + (1 - \lambda)\langle \zeta, x - \bar{x} \rangle \end{aligned}$$

Somando-se as expressões conclui-se que

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) &\geq f(\bar{x}) + \langle (1 - \lambda)\zeta + \lambda\gamma, x - \bar{x} \rangle \Leftrightarrow \\ (1 - \lambda)\zeta + \lambda\gamma &\in \partial f(\bar{x}). \end{aligned}$$

□

⁸Na verdade, aproximações afins. Porém, por simplicidade, permite-se este abuso de linguagem.

FIGURA 4. Aproximações lineares “por baixo” da função $\|x\|_2$ no ponto 0.

PROPRIEDADE 12. Para funções semi-contínuas inferiores o mapa subdiferencial é fechado, isto é: dadas seqüências $(x^i)_{i \in \mathbb{N}}$ e $(\gamma^i)_{i \in \mathbb{N}}$ tais que $x^i \rightarrow x^\infty$, $\gamma^i \rightarrow \gamma^\infty$ e $\gamma^i \in \partial f(x^i)$ então $\gamma^\infty \in \partial f(x^\infty)$.

PROVA.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) &\geq f(x^i) + \langle \gamma^i, x - x^i \rangle \Rightarrow \\ \forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) &\geq \liminf f(x^i) + \langle \gamma^\infty, x - x^\infty \rangle \Rightarrow \\ \forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) &\geq f(x^\infty) + \langle \gamma^\infty, x - x^\infty \rangle. \end{aligned}$$

□

PROPRIEDADE 13. Seja $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ uma função convexa. Se existe um aberto A contendo um ponto $\bar{x}$ tal que

$$\forall x \in A, f(x) \geq f(\bar{x}) + \langle \gamma, x - \bar{x} \rangle,$$

então γ é um subdiferencial de $f(\cdot)$ em $\bar{x}$, ou seja, a desigualdade acima é válida para todo x do $\mathbb{R}^n$.

PROVA. Supõe-se, por contradição, que existe $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$(7) \quad f(\hat{x}) < f(\bar{x}) + \langle \gamma, \hat{x} - \bar{x} \rangle.$$

Tomando $0 < \lambda < 1$ pequeno o suficiente para que $(1 - \lambda)\bar{x} + \lambda\hat{x}$ esteja em A , pode-se afirmar que:

$$\begin{aligned} f((1 - \lambda)\bar{x} + \lambda\hat{x}) &\leq (1 - \lambda)f(\bar{x}) + \lambda f(\hat{x}) && [f(\cdot) \text{ conv.}] \\ &< (1 - \lambda)f(\bar{x}) + \lambda(f(\bar{x}) + \langle \gamma, \hat{x} - \bar{x} \rangle) && [\text{Eq. 7}] \\ &= f(\bar{x}) + \langle \gamma, (1 - \lambda)\bar{x} + \lambda\hat{x} - \bar{x} \rangle \Rightarrow \\ f((1 - \lambda)\bar{x} + \lambda\hat{x}) &< f(\bar{x}) + \langle \gamma, (1 - \lambda)\bar{x} + \lambda\hat{x} - \bar{x} \rangle. \end{aligned}$$

Contradizendo a hipótese. $\square$

Uma propriedade fundamental de subgradientes é a de monotonicidade, definida abaixo. Esta propriedade está fortemente ligada ao objeto principal de estudo desta dissertação: o método de ponto proximal. Porém, a abordagem escolhida não está baseada na monotonicidade. Para uma discussão mais aprofundada veja o apêndice deste capítulo.

PROPRIEDADE 14. O subdiferencial de uma função convexa $f(\cdot)$ é um mapa monótono, isto é, dados pontos x e y do $\mathbb{R}^n$ e dois vetores $\gamma \in \partial f(x)$ e $\zeta \in \partial f(y)$ então

$$\langle \gamma - \zeta, x - y \rangle \geq 0.$$

PROVA. Sabe-se que

$$\begin{aligned} f(y) &\geq f(x) + \langle \gamma, y - x \rangle \\ f(x) &\geq f(y) + \langle \zeta, x - y \rangle \end{aligned}$$

Somando-se as duas expressões e simplificando, tem-se

$$\langle \gamma, x - y \rangle - \langle \zeta, x - y \rangle \geq 0.$$

$\square$

Um fato especialmente importante sobre subdiferenciais de funções convexas é a sua ligação com as derivadas direcionais laterais. Na subseção anterior, mostrou-se que funções convexas possuem derivadas direcionais laterais no interior de seu domínio efetivo, qualquer que seja a direção considerada. Sabe-se, do cálculo diferencial, que as derivadas direcionais estão intimamente ligadas a existência de gradientes. Mostrar-se-á a conexão entre as derivadas direcionais laterais e os subgradientes.

TEOREMA 13. *Seja $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ uma função convexa. Para todo ponto x do interior do domínio efetivo de $f(\cdot)$ o subdiferencial é não vazio e vale a relação*

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad f'(x, h) = \max_{\gamma \in \partial f(x)} \{\langle \gamma, h \rangle\}.$$

Em particular, se $f(\cdot)$ é diferenciável em x então $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$.

PROVA. Seja $\bar{x}$ um ponto do interior do domínio efetivo de $f(\cdot)$. Inicialmente deve-se destacar que, pelo corolário 6, as derivadas direcionais laterais em $\bar{x}$ existem e são reais.

Da definição de subgradiente pode-se concluir que:

$$\begin{aligned} \gamma \in \partial f(\bar{x}) &\Leftrightarrow f(x) \geq f(\bar{x}) + \langle \gamma, x - \bar{x} \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow f(\bar{x} + \alpha h) \geq f(\bar{x}) + \langle \gamma, \alpha h \rangle, \quad \forall \alpha > 0 \text{ e } h \in \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow \frac{f(\bar{x} + \alpha h) - f(\bar{x})}{\alpha} \geq \langle \gamma, h \rangle, \quad \forall \alpha > 0 \text{ e } h \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Por outro lado, lembrando do lema 11, é possível afirmar que

$$\frac{f(\bar{x} + \alpha h) - f(\bar{x})}{\alpha} \geq f'(\bar{x}, h), \quad \forall \alpha > 0.$$

Portanto, da definição de derivada direcional lateral e das duas últimas expressões conclui-se que

$$(8) \quad \gamma \in \partial f(\bar{x}) \Leftrightarrow f'(\bar{x}, h) \geq \langle \gamma, h \rangle, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Assim $\partial f(\bar{x})$ é a interseção dos semi-espacos fechados

$$\{\gamma \in \mathbb{R}^n \mid \langle \gamma, h \rangle \leq f'(\bar{x}, h)\},$$

definidos para todo $h \in \mathbb{R}^n$.

Da afirmação acima segue que $\partial f(\bar{x})$ é convexo e fechado. Mais ainda ele é limitado, pois, caso contrário, existiria uma direção de ilimitação (corolário 2), o que permitiria fazer o lado direito de (8) tender a infinito.

Prova-se a validade da expressão

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad f'(\bar{x}, h) = \sup_{\gamma \in \partial f(\bar{x})} \{\langle \gamma, h \rangle\}.$$

De (8), pode-se concluir imediatamente que:

$$(9) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n, \quad f'(\bar{x}, h) \geq \sup_{\gamma \in \partial f(\bar{x})} \{\langle \gamma, h \rangle\}.$$

Seja $\bar{h}$ um vetor qualquer do $\mathbb{R}^n$, como $\bar{x}$ é ponto interior do domínio efetivo de $f(\cdot)$, toma-se $B(\bar{x}, r)$ uma bola aberta de centro $\bar{x}$ e raio r contida no domínio efetivo. Definindo os conjuntos convexos

$$C_1 = \{(z, \mu) \in B(\bar{x}, r) \times \mathbb{R} \mid f(z) < \mu\}$$

$$C_2 = \{(z, \mu) \mid z = \bar{x} + \alpha \bar{h}, \mu = f(\bar{x}) + \alpha f'(\bar{x}, \bar{h}), \alpha > 0\}.$$

onde C_1 é convexo por ser o interior da intersecção da epígrafe de $f(\cdot)$ com o convexo $B(\bar{x}, r) \times \mathbb{R}$, e C_2 é convexo por ser imagem do intervalo aberto $(0, \infty)$ por uma transformação linear.

É fácil ver que a desigualdade

$$\forall \alpha > 0, \frac{f(\bar{x} + \alpha \bar{h}) - f(\bar{x})}{\alpha} \geq f'(\bar{x}, \bar{h})$$

implica que $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.

Existe, pelo teorema 3, um hiperplano que separa C_1 e C_2 , isto é existe um vetor, não nulo, $(\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que

$$(10) \quad \langle \zeta, z \rangle + \eta \mu \leq \langle \zeta, \bar{x} + \alpha \bar{h} \rangle + \eta (f(\bar{x}) + \alpha f'(\bar{x}, \bar{h})), \\ \forall (z, \mu) \in C_1, \forall \alpha > 0.$$

Existem três possibilidades para η :

1. $\eta > 0$.

Dividindo (10) por η e tomando o limite para $\alpha \rightarrow 0^+$:

$$\frac{1}{\eta} \langle \zeta, z \rangle + \mu \leq \frac{1}{\eta} \langle \zeta, \bar{x} \rangle + f(\bar{x}), \quad \forall (z, \mu) \in C_1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\eta} \langle \zeta, z \rangle + f(z) \leq \frac{1}{\eta} \langle \zeta, \bar{x} \rangle + f(\bar{x}), \quad \forall z \in B(\bar{x}, r) \quad [\mu \rightarrow f(z)^+].$$

Portanto a função convexa $1/\eta \langle \zeta, \cdot \rangle + f(\cdot)$ atinge máximo no ponto $\bar{x}$ do aberto $B(\bar{x}, r)$. De onde se conclui que ela é constante em $B(\bar{x}, r)$ (teorema 5). Assim existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = k - \frac{1}{\eta} \langle \zeta, x \rangle, \quad \forall x \in B(\bar{x}, r).$$

Como “um subgradiente local é global” (propriedade 13), isto implica que

$$-\frac{\zeta}{\eta} \in \partial f(\bar{x}) \quad \text{e} \quad f'(\bar{x}, \bar{h}) = \langle \nabla f(\bar{x}), \bar{h} \rangle = \langle -\frac{\zeta}{\eta}, \bar{h} \rangle.$$

2. $\eta = 0$.

Neste caso a expressão 10 pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\langle \zeta, z \rangle &\leq \langle \zeta, \bar{x} + \alpha \bar{h} \rangle, \quad \forall z \in B(\bar{x}, r) \text{ e } \alpha > 0 \Rightarrow \\ \langle \zeta, z \rangle &\leq \langle \zeta, \bar{x} \rangle, \quad \forall z \in B(\bar{x}, r) \quad [\text{Lim. para } \alpha \rightarrow 0^+]\end{aligned}$$

Facilmente desta expressão pode-se afirmar que $\zeta = 0$, contrariando a definição do hiperplano separador.

3. $\eta < 0$.

Dividindo a equação 10 por η e tomando o limite para $\alpha \rightarrow 0^+$ e, em seguida para $\mu \rightarrow f(z)^+$:

$$(11) \quad \frac{1}{\eta} \langle \zeta, z \rangle + \mu \geq \frac{1}{\eta} \langle \zeta, \bar{x} + \alpha \bar{h} \rangle + f(\bar{x}) + \alpha f'(\bar{x}, \bar{h}),$$

$$\forall (z, \mu) \in C_1, \quad \alpha > 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\eta} \langle \zeta, z \rangle + \mu &\geq f(\bar{x}) + \frac{1}{\eta} \langle \zeta, \bar{x} \rangle, \quad \forall (z, \mu) \in C_1 \Rightarrow \quad [\alpha \rightarrow 0^+] \\ f(z) &\geq f(\bar{x}) + \frac{1}{\eta} \langle \zeta, \bar{x} - z \rangle, \quad \forall z \in B(\bar{x}, r) \Rightarrow \quad [\mu \rightarrow f(z)^+] \\ -\frac{\zeta}{\eta} &\in \partial f(\bar{x}) \quad [\text{Propriedade 13}].\end{aligned}$$

Tomando $z = \bar{x}$, $\alpha > 0$ em (11) e calculando o limite para $\mu \rightarrow f(\bar{x})^+$, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{1}{\eta} \langle \zeta, \bar{x} \rangle + f(\bar{x}) &\geq \frac{1}{\eta} \langle \zeta, \bar{x} + \alpha \bar{h} \rangle + f(\bar{x}) + \alpha f'(\bar{x}, \bar{h}) \Rightarrow \\ \alpha \langle -\frac{\zeta}{\eta}, \bar{h} \rangle &\geq \alpha f'(\bar{x}, \bar{h}).\end{aligned}$$

Portanto, dos três itens anteriores, pode-se concluir que:

$$\eta \neq 0, \quad -\frac{\zeta}{\eta} \in \partial f(\bar{x}) \quad \text{e} \quad \langle -\frac{\zeta}{\eta}, \bar{h} \rangle \geq f'(\bar{x}, \bar{h}).$$

Assim, como $\bar{h}$ é um vetor qualquer do $\mathbb{R}^n$, a equação 9 implica que:

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad f'(\bar{x}, h) = \sup_{\gamma \in \partial f(\bar{x})} \{\langle \gamma, h \rangle\}.$$

Como $f'(\bar{x}, h)$ é finito para todo h , segue que $\partial f(\bar{x})$ é não vazio e, da compacidade de $\partial f(\bar{x})$, sabe-se que o supremo da expressão acima é atingido.

Por fim, considera-se que $f(\cdot)$ é diferenciável em $\bar{x}$. Qualquer que seja $\gamma \in \partial f(\bar{x})$, da expressão que acaba de ser provada tem-se

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad \langle \nabla f(\bar{x}), h \rangle = f'(\bar{x}, h) \geq \langle \gamma, h \rangle.$$

Seja e^i o i -ésimo vetor da base canônica do $\mathbb{R}^n$. Substituindo h por e^i e $-e^i$ na expressão anterior, tem-se

$$\nabla f(\bar{x})_i \geq \gamma_i \quad \nabla f(\bar{x})_i \leq \gamma_i.$$

De onde se conclui que $\gamma = \nabla f(\bar{x})$. $\square$

Outro resultado sobre subdiferenciabilidade que é bastante útil:

TEOREMA 14. *Seja $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ uma função convexa própria semi-contínua inferior e S um subconjunto não vazio, fechado e limitado do interior do domínio efetivo de $f(\cdot)$. Então o conjunto*

$$\partial f(S) = \bigcup \{ \partial f(x) \mid x \in S \}$$

é não vazio, fechado e limitado.

PROVA. Claramente o conjunto é não vazio, pois os conjuntos $\partial f(x)$ são sempre não vazios no interior do domínio efetivo.

Prova-se que $\partial f(S)$ é fechado. Seja $(\gamma^i)_{i \in \mathbb{N}} \in \partial f(S)$ uma seqüência convergindo a um vetor $\bar{\gamma}$ e $(x^i)_{i \in \mathbb{N}} \in S$, tal que $\gamma^i \in \partial f(x^i)$. Como S é compacto, $(x^i)_{i \in \mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergente. Sem perda de generalidade, supõe-se que $(x^i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge a um ponto $\bar{x} \in S$ (pois S é fechado). Já que o mapa de subgradiantes de uma função convexa semi-contínua inferior é fechado, tem-se que $\bar{\gamma} \in \partial f(\bar{x})$, completando a prova.

Resta provar que $\partial f(S)$ é limitado. Supondo, por contradição que $\partial f(S)$ é ilimitado, então, pelo corolário 2 existe uma direção de ilimitação em $\partial f(S)$, h . Considera-se seqüências $\gamma^i = \bar{\gamma} + ih$, onde $\bar{\gamma}$ é um vetor arbitrário de $\partial f(S)$, e $(x^i)_{i \in \mathbb{N}} \in S$, tal que $\gamma^i \in \partial f(x^i)$. Como S é compacto, a seqüência x^i admite uma subsequência convergente, x^{j_i} , a um vetor $\bar{x}$. Do teorema 13, sabe-se que

$$(12) \quad f'(x^{j_i}, h) \geq \langle \gamma^{j_i}, h \rangle = j_i \|h\|_2^2 + \langle \bar{\gamma}, h \rangle \rightarrow \infty.$$

Por outro lado, dado $\mu > f'(\bar{x}, h)$, existe um $\bar{\alpha}$ tal que

$$\frac{f(\bar{x} + \alpha h) - f(\bar{x})}{\alpha} < \mu, \quad \forall 0 < \alpha < \bar{\alpha}.$$

Como $x^{j_i} \rightarrow \bar{x}$ e $f(\cdot)$ é contínua em S , existe um $K \in \mathbb{N}$, tal que, para todo $j_i > K$ vale

$$\frac{f(x^{j_i} + \alpha h) - f(x^{j_i})}{\alpha} < \mu, \quad \forall 0 < \alpha < \bar{\alpha}.$$

Dessa forma, pelo lema 11,

$$f'(x^{j_i}, h) \leq \frac{f(x^{j_i} + \alpha h) - f(x^{j_i})}{\alpha}.$$

da expressão anterior segue que:

$$\limsup_{j_i \rightarrow \infty} f'(x^{j_i}, h) \leq \mu.$$

Uma contradição com a expressão 12. Portanto o conjunto $\partial f(S)$ é limitado.

□

Para que seja razoável a manipulação dos subdiferenciais de funções convexas, é interessante obter regras de cálculo de subgradientes que permitam a obtenção do subdiferencial de funções “complicadas” a partir dos subgradientes de funções mais simples. Durante o restante desta dissertação encontrar-se-á, em várias oportunidades, funções convexas geradas a partir da soma ou composição de outras funções e seria bastante útil possuir teoremas que permitissem a manipulação destes casos de maneira semelhante ao que é feito em cálculo diferencial. Felizmente tais regras existem e serão apresentadas abaixo. Porém a demonstração de alguns dos próximos teoremas envolvem conceitos de sofisticação superior ao escopo desta dissertação. Por isto, apresentar-se-á um caso particular da regra da soma, que será provado, e serão apresentadas referências para os teoremas gerais.

LEMA 12. *Sejam $f_1(\cdot)$ e $f_2(\cdot)$ duas funções convexas definidas $\mathbb{R}^n$. Então*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \partial(f_1 + f_2)(x) \supset \partial f_1(x) + \partial f_2(x).$$

PROVA. Seja $\bar{x}$ um ponto do $\mathbb{R}^n$, $\gamma \in \partial f_1(\bar{x})$ e $\zeta \in \partial f_2(\bar{x})$. Da definição de subgradiente segue:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f_1(x) \geq f_1(\bar{x}) + \langle \gamma, x - \bar{x} \rangle$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f_2(x) \geq f_2(\bar{x}) + \langle \zeta, x - \bar{x} \rangle$$

Somando as expressões:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^n, (f_1 + f_2)(x) &\geq (f_1 + f_2)(\bar{x}) + \langle \gamma + \zeta, x - \bar{x} \rangle \Leftrightarrow \\ &\gamma + \zeta \in \partial(f_1 + f_2)(\bar{x}). \end{aligned}$$

□

TEOREMA 15. *Sejam $f_1(\cdot)$ e $f_2(\cdot)$ duas funções convexas no $\mathbb{R}^n$ tais que o domínio efetivo de $f_1(\cdot)$ é aberto, $f_1(\cdot)$ é diferenciável em seu domínio efetivo e a intersecção dos domínios efetivos de $f_1(\cdot)$ e*

$f_2(\cdot)$ é não vazia. Então

$$\partial(f_1 + f_2)(x) = \begin{cases} \{\nabla f_1(x)\} + \partial f_2(x), & \text{se } x \in \text{dom } f_1 \cap \text{dom } f_2, \\ \emptyset, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

PROVA. O caso de $x \notin \text{dom } f_1 \cap \text{dom } f_2$ é simples, uma vez que a soma das funções vale $+\infty$ neste ponto. Como a função soma tem valor finito em algum ponto, devido a hipótese de $\text{dom } f_1 \cap \text{dom } f_2 \neq \emptyset$, ela não poderá ser subdiferenciável em nenhum ponto fora do seu domínio efetivo.

Resta, então, provar o resultado no caso de $x \in \text{dom } f_1 \cap \text{dom } f_2$.

Pelo lema anterior, basta provar que o subdiferencial da soma das funções está contido na soma do subdiferencial de f_1 com o subdiferencial de f_2 . Isto é, como $f(\cdot)$ é diferenciável, basta provar que se $\gamma \in \partial(f + g)(\bar{x})$ então $\gamma - \nabla f(\bar{x}) \in \partial g(\bar{x})$. Por hipótese vale:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) + g(x) \geq f(\bar{x}) + g(\bar{x}) + \langle \gamma, x - \bar{x} \rangle$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle + o(\|x - \bar{x}\|_2).$$

onde $o(z)$ converge para 0 se $z \rightarrow 0$. Substituindo a segunda expressão na primeira:

(13)

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad g(x) \geq g(\bar{x}) + \langle \gamma - \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle - o(\|x - \bar{x}\|_2).$$

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, de (13) segue que, para todo $\alpha \in (0, 1)$, vale

$$\begin{aligned} g((1 - \alpha)\bar{x} + \alpha x) &\geq \\ g(\bar{x}) + \alpha \langle \gamma - \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle - o(\alpha \|x - \bar{x}\|_2) &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 - \alpha)g(\bar{x}) + \alpha g(x) &\geq \\ g(\bar{x}) + \alpha \langle \gamma - \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle - o(\alpha \|x - \bar{x}\|_2) &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha g(x) &\geq \\ \alpha g(\bar{x}) + \alpha \langle \gamma - \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle - o(\alpha \|x - \bar{x}\|_2) &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$g(x) \geq g(\bar{x}) + \langle \gamma - \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle - o(\alpha \|x - \bar{x}\|_2) \Rightarrow$$

$$g(x) \geq g(\bar{x}) + \langle \gamma - \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle.$$

A última expressão é obtida tomando-se o limite para $\alpha \rightarrow 0^+$. $\square$

Este último teorema pode ser estendido para:

TEOREMA 16. (*Regra da Soma para subdiferenciais*)

Sejam $f_1(\cdot), \dots, f_m(\cdot)$ funções convexas próprias no $\mathbb{R}^n$. ϵ seja $f(\cdot) = f_1(\cdot) + \dots + f_m(\cdot)$. Então

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \partial f(x) \supset \partial f_1(x) + \dots + \partial f_m(x).$$

Se os interiores dos domínios efetivos das funções $f_i(\cdot)$ têm um ponto em comum então

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \partial f(x) = \partial f_1(x) + \dots + \partial f_m(x).$$

PROVA. Este é um caso particular do teorema 23.8, do livro *Convex Analysis* de Rockafellar [18]. $\square$

Para subdiferenciais, além da regra da soma existem diversas variações da regra da cadeia. Um caso que será usado nesta dissertação é:

TEOREMA 17. (*Regra da Cadeia para Subdiferenciais*)

Seja $f(\cdot) = g \circ h(\cdot)$, onde $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável e $h : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ é localmente Lipschitz. Então

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \partial f(x) = g'(h(x))\partial h(x).$$

PROVA. Este é o corolário 5Q do livro *The Theory of Subgradients and its Applications to Problems of Optimization: Convex e Nonconvex Functions* também de Rockafellar [22]. $\square$

4. Apêndice

Neste apêndice discutir-se-ão as propriedades de monotonicidade do mapa de subgradientes. Para tal deve-se definir o que é um mapa monótono:

DEFINIÇÃO 20. Um mapa ponto conjunto, $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ é monótono se vale:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ e } \forall \gamma \in T(x), \zeta \in T(y), \langle \gamma - \zeta, x - y \rangle \geq 0.$$

■

A propriedade 14 do mapa de subgradientes de uma função convexa mostra que ele é monótono.

Outro conceito essencial é o de maximalidade:

DEFINIÇÃO 21. Um mapa $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ é monótono maximal se

1. $T(\cdot)$ é monótono;
2. Se $T'(\cdot)$ é um mapa monótono tal que $T(x)' \supset T(x)$ para todo x então $T' = T$.

■

É possível mostrar que o subdiferencial de uma função semi-contínua inferior convexa e própria é monótono maximal. Uma referência para este resultado é o artigo *On the maximal monotonicity of subdifferential mappings* de Rockafellar [21]. A demonstração encontrada neste artigo é baseada no uso de funções convexas conjugadas (fugindo ao escopo desta dissertação). Neste apêndice, apresenta-se á uma demonstração elementar da maximalidade do subdiferencial de uma função convexa com imagens reais. Este resultado é baseado no resultado apresentado por Minty em seu artigo [16], com uma demonstração que consideramos mais intuitiva.

Antes de enunciar o teorema, prova-se um lema auxiliar.

LEMA 13. *Seja $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ uma função convexa e semi-contínua inferior. Então não existem mapas monótonos $T(\cdot)$, $T'(\cdot)$ de $[0, 1]$ nas partes de $\mathbb{R}$ e um real γ , tais que, para todo $x \in [0, 1]$:*

$$\partial f(x) \supseteq T(x) \neq \emptyset,$$

$$T'(x) = \begin{cases} T(x), & \text{se } x \neq 0; \\ T(x) \cup \{\gamma\}, & \text{se } x = 0, \text{ onde } f(1) < f(0) + \gamma. \end{cases}$$

PROVA. Seja $(x^i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma seqüência monotonicamente decrescente com $x^1 = 1$, que nunca se anula e converge para 0.

Seja $(\gamma^i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma seqüência qualquer com $\gamma^i \in T(x^i)$ (isso é sempre possível pois $T(\cdot) \neq \emptyset$).

Pela monotonicidade de $T'(\cdot)$ segue que $(\gamma^i)_{i \in \mathbb{N}}$ é limitada inferiormente por γ e monotonicamente não crescente, assim existe $\bar{\gamma}$ tal que:

$$\gamma^i \rightarrow \bar{\gamma} \geq \gamma.$$

Logo

$$\left\{ \begin{array}{l} (x^i) \rightarrow 0 \\ \gamma^i \in \partial f(x^i) \\ \gamma^i \rightarrow \bar{\gamma} \geq \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{\gamma} \geq \gamma \quad \text{e} \quad \bar{\gamma} \in \partial f(0) \text{ [pois } \partial f(\cdot) \text{ é fechado].}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1], \quad f(x) &\geq f(0) + \bar{\gamma}x \Rightarrow & [\bar{\gamma} \in \partial f(0)] \\ f(1) &\geq f(0) + \bar{\gamma} \Rightarrow \\ f(1) &\geq f(0) + \gamma & [\bar{\gamma} \geq \gamma]. \end{aligned}$$

Contrariando a forma do mapa $T'(\cdot)$ ($f(1) < f(0) + \gamma$). $\square$

TEOREMA 18. *Seja $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, uma função convexa. O mapa subdiferencial de $f(\cdot)$ ($\partial f(\cdot)$) é monótono maximal.*

PROVA. O fato de $\partial f(\cdot)$ ser monótono foi provado na propriedade 14, resta provar a maximalidade.

Em primeiro lugar, deve-se destacar que, como $f(\cdot)$ é real em todo $\mathbb{R}^n$, ela é uma função contínua e possui subdiferencial não vazio em todo ponto.

Supõe-se, por contradição, que $\partial f(\cdot)$ não é maximal. Então existe um mapa monótono $T'(\cdot)$ do $\mathbb{R}^n$ nas partes do $\mathbb{R}^n$ tal que:

1. $T'(x) \supseteq \partial f(x) \neq \emptyset$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
2. $\exists(z, \bar{x}, \bar{\gamma}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ onde $\bar{\gamma} \in T'(\bar{x})$ e

$$f(z) < f(\bar{x}) + \langle \bar{\gamma}, z - \bar{x} \rangle.$$

Definindo a função $g : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ por

$$g(\lambda) = f(\bar{x} + \lambda(z - \bar{x})), \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Pode-se concluir que:

- (a). Dado $\tilde{\lambda} \in [0, 1]$ e $\zeta \in \partial f(\bar{x} + \tilde{\lambda}(z - \bar{x}))$

$$\forall \lambda \in [0, 1], g(\lambda) \geq g(\tilde{\lambda}) + \langle \zeta, \bar{x} + \lambda(z - \bar{x}) - \bar{x} - \tilde{\lambda}(z - \bar{x}) \rangle \Leftrightarrow$$

$$\forall \lambda \in [0, 1], g(\lambda) \geq g(\tilde{\lambda}) + \langle \zeta, (z - \bar{x}) \rangle (\lambda - \tilde{\lambda}) \Leftrightarrow$$

$$\langle \zeta, z - \bar{x} \rangle \in \partial g(\tilde{\lambda})$$

- (b). Como

$$f(z) < f(\bar{x}) + \langle \bar{\gamma}, z - \bar{x} \rangle \Rightarrow$$

$$g(1) < g(0) + \langle \bar{\gamma}, z - \bar{x} \rangle.$$

- (c). Dado $\tilde{\lambda} \in (0, 1]$ e $\zeta \in \partial f(\bar{x} + \tilde{\lambda}(z - \bar{x}))$, pode-se concluir que:

$$\langle \bar{\gamma} - \zeta, \bar{x} - \bar{x} - \tilde{\lambda}(z - \bar{x}) \rangle \geq 0 \Leftrightarrow [\text{Pela monot. de } T'(\cdot)]$$

$$\langle \zeta - \bar{\gamma}, \tilde{\lambda}(z - \bar{x}) \rangle \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{\lambda} \langle \zeta, z - \bar{x} \rangle \geq \tilde{\lambda} \langle \bar{\gamma}, z - \bar{x} \rangle \Leftrightarrow$$

$$\langle \zeta, z - \bar{x} \rangle \geq \langle \bar{\gamma}, z - \bar{x} \rangle.$$

Portanto, definindo para $\forall \lambda \in [0, 1]$

$$T(\lambda) = \bigcup_{\zeta \in \partial f(\bar{x} + \lambda(z - \bar{x}))} \{\langle \zeta, z - \bar{x} \rangle\}$$

$$T''(\lambda) = \begin{cases} T(\lambda), & \text{se } \lambda \neq 0; \\ T(\lambda) \cup \{\langle \bar{\gamma}, z - \bar{x} \rangle\}, & \text{se } \lambda = 0. \end{cases}$$

observa-se, de (a) que $\partial g(\cdot) \supseteq T(\cdot)$, da monotonicidade de $\partial g(\cdot)$ que $T(\cdot)$ é monótono e como $f(\cdot)$ é subdiferenciável em todos os pontos que $T(\cdot) \neq \emptyset$; de (b) que $g(1) < g(0) + \langle \bar{\gamma}, z - \bar{x} \rangle$ e de (c) que $T''(\cdot)$ é monótono, contrariando o lema anterior. $\square$

Um fato muito interessante é que o método de ponto proximal pode ser visto como um método de busca de zero de um mapa monótono e maximal. Isto é, se $T(\cdot)$ é um mapa deste tipo, o MPP pode ser usado para encontrar um ponto $\bar{x}$ tal que

$$0 \in T(\bar{x}).$$

Claramente, da definição de subgradientes, quando o mapa considerado é o subdiferencial de uma função $f(\cdot)$, a condição de ser um zero é equivalente a condição do ponto $\bar{x}$ ser um ponto de mínimo da função $f(\cdot)$ no $\mathbb{R}^n$. Assim no caso de funções semi-contínuas inferiores, convexas e próprias o MPP pode ser usado para buscar o mínimo irrestrito da função. Alguns textos importantes nesta linha são [15, 17, 20, 11, 7].

Resultados e Separadores

Este capítulo procura detalhar os problemas que serão tratados durante o restante da seção, bem como apresentar os conceitos e resultados gerais utilizados. Na primeira seção, recordam-se definições fundamentais da área de programação matemática e também serão enunciados resultados ligando-as ao capítulo sobre análise convexa. Na sequência apresentar-se-ão algumas definições e resultados relacionados ao artigo *Generalized cutting plane algorithms*[9] sobre funções convexas e seu uso para a análise de convergência de algoritmos, o que serve de base para a abordagem para o estudo de métodos proximais.

1. Definições e Resultados Gerais

A programação não-linear resolve o problema de minimização de uma função escalar sobre um subconjunto do $\mathbb{R}^n$. Seguindo as definições encontradas em Nannmark[14]:

DEFINIÇÃO 22. *Problema de minimização (PM)*

Seja $f : X^0 \mapsto \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e V um subconjunto de X^0 . Encontre, se existir, um $p \in V$ tal que o mínimo de $f(\cdot)$ no conjunto V seja atingido em

$$(PM) \quad \min_{x \in V} f(x),$$

ou, usando outra notação,

$$\min_{x \in V} f(x).$$

A função $f(\cdot)$ é conhecida como *função objetivo* e V conjunto de pontos *viáveis*.

Geralmente V é dado por

$$V = \{x \mid g(x) \leq 0\}$$

onde $g : X^0 \mapsto \mathbb{R}^m$ é chamada *função de restrição* ou, simplesmente, *restrições*. ■

DEFINIÇÃO 26. O PM será chamado de *problema de programação convexa* quando $f(\cdot)$ for uma função convexa e V for um conjunto convexo. Em particular, se V for dado através de desigualdades basta que $g(\cdot)$ seja tal que $g_i(\cdot)$ é convexa para todo $i = 1, \dots, m$. ■

Como apresentado no capítulo anterior, funções e conjuntos convexos gozam de várias propriedades especiais que se mostrarão interessantes no contexto de programação matemática. Um exemplo disto é o próximo resultado.

LEMA 15. *Para programação convexa, todo mínimo local é global.*

PROVA. Assuma que $\bar{x}$ é um mínimo local para alguma bola aberta $B(\bar{x}, \epsilon)$. Seja x um ponto qualquer de V . Tem-se que

$$x_\lambda = \lambda x + (1 - \lambda)\bar{x} \in V, \text{ para todo } \lambda \in [0, 1],$$

pois V é convexo. Tomando $\lambda > 0$ pequeno o suficiente para que $x_\lambda \in B(\bar{x}, \epsilon)$ temos

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &\leq f(\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x}) && [\text{Pois } \bar{x} \text{ solve PML}] \\ &\leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(\bar{x}) \Rightarrow && [f(\cdot) \text{ é convexa}] \\ f(\bar{x}) &\leq f(x) && [\lambda > 0] \end{aligned}$$

□

Ou seja, no caso convexo, os problemas de minimização local e global são equivalentes, o que, naturalmente, não vale para qualquer PM. Em programação não-linear observa-se que a estrutura de convexidade é muito forte, permitindo a obtenção de bons resultados teóricos que geram algoritmos considerados eficientes para a solução do problema.

Outros resultados que usam bem a estrutura de convexidade são:

LEMA 16. *Considere um problema de programação convexa com função objetivo estritamente convexa. Se existir uma solução do problema, ela é única.*

PROVA. Supõe-se, por contradição, que existem duas soluções x_1^* e x_2^* . Claramente, da convexidade do conjunto viável, $z = 0.5x_1^* + 0.5x_2^*$ é viável e

$$\begin{aligned} f(z) &< 0.5f(x_1^*) + 0.5f(x_2^*) && [f(\cdot) \text{ é estrit. conv.}] \\ &= f(x_1^*). && [f(x_1^*) = f(x_2^*)] \end{aligned}$$

Contradição com a otimalidade de x_1^* . □

LEMA 17. *Seja $f(\cdot)$ uma função convexa. O ponto $\bar{x}$ é uma solução do problema de minimização irrestrita de $f(\cdot)$ se, e somente se,*

$$0 \in \partial f(\bar{x}).$$

PROVA. Segue, trivialmente, da definição de subgradiente. $\square$

COROLÁRIO 7. *O conjunto de soluções da minimização irrestrita de uma função convexa semi-contínua inferior é fechado.*

PROVA. Basta usar o lema acima e o fato do mapa de subdiferenciais, neste caso, ser fechado. $\square$

COROLÁRIO 8. *Se a função objetivo $f(\cdot)$ for convexa e o conjunto viável V for um convexo aberto tal que $V \cap \text{dom } f \neq \emptyset$ então $\bar{x}$ é uma solução do problema de minimização se, e somente se,*

$$0 \in \partial f(\bar{x}) \quad \text{e} \quad \bar{x} \in V.$$

PROVA. Considere o problema irrestrito equivalente

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x) + \text{ind}(x \mid V)\}$$

Pelo teorema anterior $\bar{x}$ é mínimo do problema irrestrito se, e somente se,

$$0 \in \partial(f(\cdot) + \text{ind}(\cdot \mid V))(\bar{x}).$$

Nas condições do corolário, a função $\text{ind}(\cdot \mid V)$ é diferenciável em V , com gradiente nulo, logo, vale a regra da soma de subgradientes dada no teorema 15. Deste modo, a expressão anterior é equivalente a:

$$0 \in \partial f(\bar{x}) \quad \text{e} \quad \bar{x} \in V.$$

Esta última relação é verdadeira porque $\text{ind}(\cdot \mid V)$ não é subdiferenciável fora de V e tem derivada nula neste conjunto, uma vez que V é aberto e $\text{ind}(\cdot \mid V)$ é constante em V . $\square$

Para a solução de problemas de minimização é comum o uso de métodos que geram seqüências que convergem a uma solução. Uma propriedade interessante no estudo de convergência é a de Fejér monotonicidade. Ela será usada na análise de métodos de ponto proximal baseados na norma Euclidiana.

DEFINIÇÃO 27. Dada uma seqüência $(x^i)_{i \in \mathbb{N}}$ e $G \subset \mathbb{R}^n$, ela é *Fejér monótona em relação a G* se, para alguma norma $\|\cdot\|$ do $\mathbb{R}^n$:

$$\|x^{i+1} - g\| \leq \|x^i - g\|, \quad \forall g \in G.$$

■

Deve-se destacar que a propriedade acima é mais forte do que a idéia da seqüência não se afastar do conjunto G , pois a seqüência não se afasta de *cada* ponto de G . O principal teorema ligado a esta propriedade é:

TEOREMA 19. *Seja $G \neq \emptyset$ um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ e $(x^i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma seqüência Fejér Monótona em relação a G . Então*

1. $(x^i)_{i \in \mathbb{N}}$ é limitada.
2. Se existe subseqüência $(x^{j_i})_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $x^{j_i} \rightarrow g \in G$ então $x^i \rightarrow g$.

PROVA. A notação $\|\cdot\|$ será usada para a norma considerada.

O item 1 é trivial, pois toda seqüência estará contida na bola $B(g, x^1)$, para qualquer $g \in G$.

Supondo que existe uma subseqüência x^{j_i} convergente a um ponto $g \in G$, dado $\epsilon > 0$, tome x^{j_N} um ponto da subseqüência em $B(g, \epsilon)$. Então, da definição de Fejér monotonicidade, segue que

$$\forall i > j_N, \|x^i - g\| \leq \|x^{j_N} - g\| < \epsilon.$$

Provando, então, que $x^i \rightarrow g$. □

Esses são os principais conceitos gerais que serão utilizados no decorrer da dissertação. A seguir, introduz-se a idéia de separadores que servirá de base para o estudo de métodos de ponto proximal feito no capítulo 4, onde estão os principais resultados deste trabalho.

2. Separadores

Em seu artigo “Generalized Cutting Plane Algorithms”[9], Eaves e Zangwill abordam o problema de minimização através da resolução de uma seqüência de problemas mais simples, cujas soluções se aproximam das soluções do PM em algum sentido. Para isto os autores fazem uso de métodos de planos de corte, unificando e estendendo a teoria destes algoritmos.

Com o objetivo de dar um tratamento coeso à teoria dos métodos de planos de corte, é introduzido o conceito de separador:

DEFINIÇÃO 28. Sejam X e G dois subconjuntos fechados em um espaço métrico, tal que $X \supset G$. Uma função $\delta(\cdot)$, de $X \sim G$ nos reais estendidos, é uma *função separadora* (ou um *separador* em $X \sim G$) se:

1. $\delta(\cdot)$ é não negativa;
2. $(x^i)_{i \in \mathbb{N}} \in X \sim G$, $x^i \rightarrow x^\infty$ e $\delta(x^i) \rightarrow 0 \Rightarrow x^\infty \in G$.

O conjunto G será conhecido como *conjunto alvo*. ■

Um exemplo óbvio de separador é a distância entre um ponto $x \in X$ e o conjunto G ($\delta(x) = d_{PG}(x, G)$), definida da maneira usual a partir da métrica dada. Também é claro que o mínimo de uma coleção finita de separadores é um separador, qualquer múltiplo positivo de um separador é um separador e, se $\delta(\cdot)$ é um separador e $\delta(\cdot) \leq \delta'(\cdot)$ então $\delta'(\cdot)$ é um separador.

Uma definição alternativa de separadores é dada no próximo lema.

LEMA 18. *Sejam X e G dois subconjuntos fechados em um espaço métrico, tal que $X \supset G$. Uma função $\delta : X \sim G \mapsto \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ é um separador se, e somente se, tiver limite inferior positivo em cada subconjunto compacto não vazio de $X \sim G$.*

PROVA. A prova está dividida em duas partes.

- Seja K um compacto não vazio de $X \sim G$. Como $\delta(\cdot) \geq 0$ Claramente vale

$$\inf_{x \in K} \{\delta(x)\} \geq 0.$$

Supondo, por contradição, que vale a igualdade, então existe uma seqüência $(x^i)_{i \in \mathbb{N}} \subset K$ tal que $\delta(x^i) \rightarrow 0$.

Seja x^j uma subseqüência convergente a um ponto x^∞ então, pela definição de separador, segue que $x^\infty \in G$.

Por outro lado $x^\infty \in K$, pois K é fechado, contrariando o fato de $K \subset X \sim G$. Isto prova a suficiência.

- Considera-se que $\delta(\cdot)$ tem limite inferior positivo em todo compacto de $X \sim G$.

Claramente $\delta(x) \geq 0$ para todo $x \in X \sim G$ pois um conjunto com um único ponto é compacto.

Supondo que existem seqüências $x^i \rightarrow x^\infty$ e $\delta(x^i) \rightarrow 0$, com $(x^i)_{i \in \mathbb{N}} \subset X \sim G$. Como X é fechado segue que $x^\infty \in X$.

Supondo, por contradição, que $x^\infty \notin G$, então existe uma bola fechada de centro x^∞ , B , que não intercepta G . Defina $K = B \cap X$. Claramente K é um subconjunto compacto (interseção de um compacto com um fechado) de $X \sim G$ e o fato de $\delta(x^i) \rightarrow 0$ contraria a hipótese de $\delta(\cdot)$ ter limite inferior positivo, concluindo a demonstração.

□

A partir do conceito de separador, é apresentado em [9] um algoritmo abstrato que serve de base para diversos métodos de plano de corte, bem como para a análise de convergência através de separadores.

“Algoritmo Mestre de Planos de Corte” – AMPC *Seja $\delta(\cdot)$ um separador em $X \sim G$.*

1. *Inicialização:* Tome x^1 qualquer em X .

2. *Iteração:* Se $x^i \in G$ pare;

Senão calcule $x^{i+1} \in X$ tal que

$$x^{i+1} \notin B(x^j, \delta(x^j)), \quad j = 1, \dots, i.$$

FIGURA 1. Contradição com a convergência de $(x^{j_i})_{i \in \mathbb{N}}$.

Observando-se o algoritmo acima, pode-se constatar a importância da escolha de separadores $\delta(\cdot) \leq d_{PC}(\cdot, G)$. Pois, caso contrário, seria possível “jogar fora” partes do conjunto alvo ao executá-lo. Assim, eventualmente, o algoritmo poderia não ser capaz de gerar o próximo ponto.

Um resultado obtido imediatamente é:

TEOREMA 20. *Sejam X e G dois subconjuntos fechados em um espaço métrico, tal que $X \supset G$ e $(x^i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma seqüência gerada pelo AMPC. Então todo ponto de acumulação desta seqüência pertence a G .*

PROVA. Considere uma subsequência $(x^{j_i})_{i \in \mathbb{N}}$, $x^{j_i} \rightarrow x^\infty$. Busca-se provar que $\delta(x^{j_i}) \rightarrow 0$.

Para isto supõe-se, por contradição, que o resultado não é válido. Então $\exists \epsilon > 0$, tal que, para todo $K \in \mathbb{N}$ existe $N > K$ (e consequentemente $j_N > j_K$) onde $\delta(x^{j_N}) > \epsilon$.

Tome a bola aberta $B(x^\infty, \epsilon)$ e um índice N tal que $\delta(x^{j_N}) > \epsilon$ e $x^{j_N} \in B(x^\infty, \epsilon)$. Defina $\tilde{\epsilon} = \delta(x^{j_N}) - d(x^{j_N}, x^\infty) > 0$. Pela definição do AMPC, $\forall j_i > j_N$, $x^{j_i} \notin B(x^{j_N}, \delta(x^{j_N})) \supset B(x^\infty, \tilde{\epsilon})$ (ver figura 1), contrariando a convergência de x^{j_i} . Conclui-se que

$$\delta(x^{j_i}) \rightarrow 0.$$

E assim $x^\infty \in G$, pela definição de separador. $\square$

Tem-se como objetivo utilizar estes resultados na solução de problemas de minimização. Um passo natural é buscar relacionar separadores e funções objetivo. Um modo de fazê-lo, que será usado ao longo deste texto, é:

LEMA 19. *Sejam X e G dois subconjuntos fechados em um espaço métrico, tal que $X \supset G$ e X é compacto. $\delta(\cdot)$ um separador em $X \sim G$ e $f(\cdot)$ uma função contínua em X . Então $\delta'(\cdot)$ definida em $X \sim G$ por*

$$\delta'(x) = \inf_{z \in X} \{d(z, x) \mid f(z) \leq f(x) - \delta(x)\}$$

é um separador.

PROVA. Como $\delta(\cdot) > 0$ em $X \sim G$ e $f(\cdot)$ é contínua, $\delta'(\cdot) > 0$ em $X \sim G$. Portanto, basta analisar as seqüências

$$x^i \rightarrow x^\infty \text{ e } \delta'(x^i) \rightarrow 0.$$

Claramente existe um N tal que, para todo $i > N$, $\delta'(x^i) < \infty$; como X é compacto e $f(\cdot)$ contínua, existe $\bar{x}^i \in X$ que realiza o ínfimo da definição de $\delta'(\cdot)$, ou seja

$$\delta'(x^i) = d(\bar{x}^i, x^i) \text{ e } f(\bar{x}^i) \leq f(x^i) - \delta(x^i).$$

Logo, para todo $i > N$,

$$\begin{aligned} \delta'(x^i) = d(\bar{x}^i, x^i) \rightarrow 0 &\Rightarrow \bar{x}^i \rightarrow x^\infty \\ f(\bar{x}^i) \leq f(x^i) - \delta(x^i) &\Leftrightarrow \delta(x^i) \leq f(x^i) - f(\bar{x}^i). \end{aligned}$$

Como $f(\cdot)$ é contínua, os dois fatos acima implicam que $\delta(x^i) \rightarrow 0$.

Assim, uma vez que $\delta(\cdot)$ é um separador, segue que $x^\infty \in G$. $\square$

O resultado acima permite afirmar:

LEMA 20. *Sejam X e G dois subconjuntos fechados em um espaço métrico, tal que $X \supset G$, $\delta(\cdot)$ um separador em $X \sim G$ e $f(\cdot)$ uma função contínua em X . Se uma seqüência é gerada em $X \sim G$ com a propriedade*

$$f(x^{i+1}) \leq f(x^i) - \delta(x^i)$$

então todo ponto de acumulação desta seqüência pertence a G .

PROVA. Tome $(x^{j_i})_{i \in \mathbb{N}}$ uma subsequência convergente a x^∞ . Basta observar que

$$\begin{aligned} f(x^{j_i+1}) &\leq f(x^{j_i+1}) \leq f(x^{j_i}) - \delta(x^{j_i}) \Rightarrow \\ \delta(x^{j_i}) &\leq f(x^{j_i}) - f(x^{j_i+1}) \rightarrow 0 \quad [f(\cdot) \text{ é contínua}] \end{aligned}$$

E, como $\delta(\cdot)$ é um separador, obtém-se $x^\infty \in G$. $\square$

O lema anterior sugere que um separador também pode ser visto como a medida de quanto deve cair a função objetivo para se ter a certeza de que todo ponto de acumulação da seqüência gerada está no conjunto alvo. Pode-se notar que a procura deste tipo de propriedade é comum em análise de convergência, como em [4], p. 32, onde o autor

afirma que uma das principais idéias para a análise de convergência é garantir que a melhora entre as interações é “grande” próximo a pontos não-estacionários. Este resultado sugere um método para soluções de problemas de otimização.

Método de Otimização Baseado em Separadores - MOBS

Dado um problema de minimização; sejam G o conjunto de soluções do PM e X um conjunto contendo G . Se G e X são fechados e $\delta(\cdot)$ é um separador em $X \sim G$:

1. *Inicialização: Tome $x^1 \in X$ qualquer;*
2. *Iteração: Se $x^i \in G$ pare;*
Senão calcule $x^{i+1} \in X$ tal que

$$f(x^{i+1}) \leq f(x^i) - \delta(x^i).$$

■

É importante destacar que o MOBS não está bem definido para todo separador. Isto é, dependendo da escolha do separador, pode não ser possível a obtenção de um próximo ponto que obedeça à condição do passo iterativo¹.

TEOREMA 21. *Se $f(\cdot)$ for uma função contínua e a seqüência gerada pelo MOBS admitir algum ponto de acumulação então ele estará em G .*

PROVA. O teorema segue do lema 20. □

Outra maneira de entender a prova acima é observar que o MOBS reproduz o AMPC para o separador $\delta'(\cdot)$ dado pelo lema 19.

No artigo *Generalized cutting plane algorithms* este método não foi explicitamente formulado, uma vez que, no contexto apresentado, ele não era de maior relevância. Em seu trabalho, Eaves e Zangwill discutiram algoritmos de plano de corte, provando que muitos dos algoritmos conhecidos até 1971 eram casos particulares do AMPC. O objetivo do artigo era apresentar critérios para que parte dos cortes obtidos em etapas intermediárias pudessem ser eliminados. Isto é muito importante, pois nos algoritmos tradicionais o poliedro que aproximava o conjunto alvo aumentava de complexidade, ganhando um novo hiperplano a cada iteração. As estratégias desenvolvidas para a eliminação de alguns cortes se baseavam em parte na queda da função objetivo, da maneira como é exigida no MOBS. Assim o MOBS, dentro do contexto de algoritmos de planos de corte pode ser visto como um algoritmo forte,

¹Um exemplo óbvio é tomar um separador constante, por exemplo, $\delta(x) = 1$.

onde a cada iteração é suficiente considerar, implicitamente, apenas o corte associado ao último ponto computado.

CAPÍTULO 4

Métodos de Ponto Proximal Baseados em Normas

Neste capítulo será estudada uma classe de métodos proximais para a solução de problemas convexos. A origem destes algoritmos nos remete aos trabalhos de Minty[15, 16] e, dentro do contexto de programação matemática, aos artigos de Moreau[17] e Rockafellar [20, 19]. Estes trabalhos chamaram a atenção da comunidade de otimização para os métodos de ponto proximal, com destaque para sua ligação com métodos de Lagrangianos aumentados¹.

1. Ponto Proximal com Norma

De uma maneira geral os métodos de programação convexa conhecidos como métodos de ponto proximal se encaixam no modelo abaixo:

Método de Ponto Proximal (MPP) *Dada uma função objetivo convexa $f(\cdot)$ e um conjunto convexo de pontos viáveis V , o MPP será definido por:*

1. *Inicialização: Tome qualquer $x^1 \in V$;*
2. *Iteração: Calcule x^{i+1} por*

$$x^{i+1} \in \operatorname{argmin}_{x \in V} \{f_i(x) = f(x) + \lambda_i r(x, x^i)\}.$$

onde $r(\cdot, \cdot)$ é chamada de função de regularização e $(\lambda_i)_{i \in \mathbf{N}}$ é uma seqüência dada de reais positivos. ■

O método proposto por Rockafellar em [20] usava como função de regularização

$$r(x, x^i) = \|x - x^i\|_2^2.$$

Nesse artigo é provada a convergência da seqüência gerada a uma solução de um problema de minimização irrestrita com função objetivo convexa, própria e semi-contínua inferior. Esta regularização será referenciada como regularização Euclidiana.

Nesta seção apresentar-se-ão os resultados centrais desta dissertação. Será proposta uma nova classe de métodos de ponto proximal

¹Métodos de Lagrangianos aumentados são muito importantes em programação matemática, permitindo que problemas restritos possam ser resolvidos através da solução de uma seqüência de problemas irrestritos. Ver, por exemplo, [3, 4].

que estende o método baseado na regularização Euclidiana, porém, que tem convergência provada para uma família um pouco mais restrita de problemas. Isto é possível graças ao uso da idéia de separadores apresentada no capítulo 3.

Primeiramente, deve-se destacar que a função objetivo leva a valores nos reais estendidos. Isto é especialmente interessante por permitir a manipulação de problemas restritos, através de sua conversão a um problema irrestrito.

Os problemas que serão tratados obedecem a algumas hipóteses técnicas que são comuns em otimização. Inicialmente, serão considerados problemas irrestritos. Isto não reduz muito o tipo de problema estudado, como foi destacado no parágrafo anterior. A função objetivo é semi-contínua inferior. Esta hipótese está ligada à propriedade do mapa de subgradientes de funções convexas s.c.i. ser fechado, como foi visto no capítulo 2. Supõe-se ainda que a função é contínua no domínio efetivo, pois procurar-se-á mostrar que o método proposto pode ser visto como caso particular do método de otimização baseado em separadores (MOBS), apresentado no final do capítulo 3. Por fim considera-se que o problema de otimização não é ilimitado (isto é, o valor ótimo não é menos infinito).

HIPÓTESE 1. A função objetivo, $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, é convexa, própria, semi-contínua inferior, contínua no domínio efetivo e limitada inferiormente. O conjunto viável é o $\mathbb{R}^n$, ou seja o problema é do tipo irrestrito.

Para solução de problemas convexos que obedecem a hipótese acima provar-se-á que é possível utilizar uma família de métodos de ponto proximal baseados em normas, que é descrita de maneira geral por:

Método de Ponto Proximal com norma (MPPN) *Seja $\|\cdot\|$ uma norma qualquer, o MPPN será definido por:*

1. *Inicialização:* Tome qualquer $x^1 \in \text{dom } f$;
2. *Passo iterativo:* Calcule x^{i+1} por

$$x^{i+1} \in \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{argmin}} \{f_i(x) = f(x) + \lambda_i r(x, x^i)\}.$$

onde $r(x, x^i) = \phi(\|x - x^i\|)$ e $\phi(\cdot)$ é uma função tal que:

- $\phi : A \mapsto \mathbb{R}$, onde A é um aberto contendo o $\mathbb{R}_+$, é continuamente diferenciável;
- $\phi'(0) = 0$;
- $\phi'(\cdot)$ é estritamente crescente em A^2 .

e $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência estritamente positiva e limitada superiormente por $\tilde{\lambda}$. ■

Constantemente usar-se-á o fato das funções $f_i(\cdot)$, que são minimizadas a cada iteração, serem somas de funções que obedecem às condições dos teoremas 16 e 17, logo seus *subgradientes podem ser calculados através da regra da soma e da cadeia dadas por esses teoremas. Ainda, se a norma escolhida for diferenciável basta usar o caso particular da regra da soma provado no teorema 15 e a regra da cadeia para funções diferenciáveis.*

Deve ser notado que a classe de funções de regularização proposta generaliza a regularização Euclidiana em dois sentidos. Primeiro, pode-se usar qualquer norma do $\mathbb{R}^n$, e, segundo, pode-se usar uma função estritamente convexa e diferenciável qualquer para a composição, com o cuidado que sua derivada no zero seja zero.

Algumas funções estritamente convexas no $\mathbb{R}_+$ que podem ser usadas na composição com normas são:

- $\phi(x) = x^\alpha$, $\alpha > 1$;
- $\phi(x) = x \ln(x + 1)$;
- $\phi(x) = \cosh(x)$ (cosseno hiperbólico de x);
- Seja $g(\cdot)$ uma função estritamente-convexa continuamente diferenciável, definida em um aberto contendo o $\mathbb{R}_+$. Tome $\phi(x) = g(x) - g'(0)x$.

Neste ponto, é conveniente discutir brevemente sobre as hipóteses impostas sobre $\phi(\cdot)$.

A hipótese que $\phi(\cdot)$ é continuamente diferenciável e estritamente convexa pode ser defendida pelo argumento que os problemas que devem ser resolvidos a cada iteração devem ser mais simples do que o problema original. Aqui a convexidade estrita desempenha papel de regularização do problema, eliminando comportamentos indesejados como a existência de múltiplas soluções ou de hessianas semi-definidas.

A condição $\phi'(0) = 0$ tem sua utilidade destacada no lema 23, que mostra que o algoritmo tem como pontos fixos as soluções do problema original.

1.1. Análise de convergência do MPPN. A afirmação mais importante que pode ser feita sobre um algoritmo de otimização é sobre a convergência, em algum sentido, da seqüência gerada a uma solução do problema considerado. O restante desta seção dedicar-se-á a esta questão. Para isto, retoma-se o MOBS, descrito no final do capítulo 3. É possível provar que a família de métodos proximais proposta é um caso particular do MOBS.

²A função $\phi(\cdot)$, sob estas condições, é claramente estritamente convexa em $\mathbb{R}_+$ e atinge mínimo no 0.

Antes de estudar a convergência do MPPN, apresentar-se-á um resultado simples, mas que será várias vezes usado nas manipulações seguintes.

LEMA 21. *Sejam $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ duas funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, tais que*

$$f(x) = g(x - a)$$

então

$$\gamma \in \partial f(\bar{x}) \Leftrightarrow \gamma \in \partial g(\bar{x} - a).$$

PROVA.

$$\begin{aligned} \gamma \in \partial f(\bar{x}) &\Leftrightarrow \\ \forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) &\geq f(\bar{x}) + \langle \gamma, x - \bar{x} \rangle \Leftrightarrow \\ \forall x \in \mathbb{R}^n, g(x - a) &\geq g(\bar{x} - a) + \langle \gamma, x - \bar{x} \rangle \Leftrightarrow \\ \forall y \in \mathbb{R}^n, g(y) &\geq g(\bar{x} - a) + \langle \gamma, y + a - \bar{x} \rangle. \end{aligned}$$

□

Após este lema técnico passa-se a análise de convergência do MPPN. Primeiramente deve-se mostrar que o método está bem definido, isto é, que dado o ponto x^i , o iterado x^{i+1} existe e é único.

LEMA 22. *O método MPPN está bem definido.*

PROVA. A prova está dividida em 3 partes. As duas primeiras garantem a existência de x^{i+1} , a seguinte sua unicidade.

- os conjuntos de nível de $r(\cdot, x^i) = \phi(\|\cdot - x^i\|)$ são compactos. Obviamente os conjuntos de nível

$$C(k) = \{x \mid r(x, x^i) \leq k\}$$

são fechados, pois a função $r(\cdot, x^i)$ é contínua. Portanto, para provar a compacidade dos conjuntos de nível, basta mostrar que eles são limitados.

Observa-se, pelo teorema fundamental do cálculo, que:

$$r(x, x^i) - r(x^i, x^i) = \phi(\|x - x^i\|) - \phi(0) = \int_0^{\|x - x^i\|} \phi'(t) dt$$

Se $\|x - x^i\| \geq 1$, vale:

$$\begin{aligned}
 r(x, x^i) &= \int_0^{\|x-x^i\|} \phi'(t)dt + \phi(0) \\
 &= \int_1^{\|x-x^i\|} \phi'(t)dt + \int_0^1 \phi'(t)dt + \phi(0) \\
 &\geq \phi'(1)(\|x - x^i\| - 1) + \int_0^1 \phi'(t)dt + \phi(0) \\
 &= \phi'(1) \|x - x^i\| - \phi'(1) + \phi(1) \\
 &\geq \phi'(1) \|x\| - \phi'(1) \|x^i\| - \phi'(1) + \phi(1) \\
 &= \phi'(1) \|x\| - \phi'(1)(\|x^i\| + 1) + \phi(1) \\
 &= \phi'(1) \|x\| + K^i,
 \end{aligned}$$

onde K^i , para um dado x^i , é uma constante. A primeira desigualdade segue do fato de $\phi'(\cdot)$ ser crescente e a segunda vem da desigualdade triangular.

Assim, dada uma constante k :

$$r(x, x^i) \leq k \Rightarrow \|x - x^i\| \leq 1 \text{ ou } \|x\| \leq \frac{k - K^i}{\phi'(1)}$$

e se conclui que, qualquer que seja k , o conjunto de nível $C(k)$ é limitado.

- $f_i(\cdot)$ admite mínimo, isto é $\operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \{f_i(x)\} \neq \emptyset$.

Como, pela hipótese 1, $f(\cdot)$ é limitada inferiormente, seja l um limitante inferior de $f(\cdot)$. Observa-se que:

$$f_i(x) = f(x) + \lambda_i r(x, x^i) \geq l + \lambda_i r(x, x^i).$$

Logo $f_i(\cdot)$ possui conjuntos de nível limitados (uma vez que $r(\cdot, x^i)$ é assim pelo primeiro item). Como $f_i(\cdot)$ é semi-continua inferior, seus conjuntos de nível são fechados e desta forma a minimização do passo iterativo pode ser restrita a um compacto. Conclui-se a existência de mínimo.

- $r(\cdot, x^i)$ é estritamente convexa.

Seja $\lambda \in (0, 1)$ e $x \neq y$,

$$\begin{aligned}
 r(\lambda x + (1 - \lambda)y, x^i) &= \phi(\|\lambda(x - x^i) + (1 - \lambda)(y - x^i)\|) \\
 &\leq \phi(\lambda \|x - x^i\| + (1 - \lambda) \|y - x^i\|) \\
 &< \lambda \phi(\|x - x^i\|) + (1 - \lambda) \phi(\|y - x^i\|).
 \end{aligned}$$

A primeira desigualdade segue do fato de $\phi(\cdot)$ ser crescente no $\mathbb{R}_+$ (tem derivada não-negativa) e a segunda do fato de $\phi(\cdot)$ ser estritamente convexa.

- $f_i(\cdot)$ admite mínimo único.

Como $f_i(\cdot)$ é soma de uma função convexa com uma função estritamente convexa, $f_i(\cdot)$ é estritamente convexa e segue a unicidade do mínimo.

□

Deve-se destacar neste ponto que o lema anterior diz que, dado λ_i , o iterado x^{i+1} é função do iterado anterior. Isto será usado na definição do separador associado ao MPPN. Para chamar a atenção a este fato passar-se-á a usar, como abuso de notação

$$x^{i+1} = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \{f_i(x) = f(x) + \lambda_i r(x, x^i)\}.$$

O próximo fato mostra o que acontece quando o método para em “tempo” finito. Isto é, quando $x^{i+1} = x^i$.

LEMA 23. *O método MPPN para no ponto x^i se, e só se, x^i é solução da minimização de $f(\cdot)$.*

PROVA.

$$\begin{aligned} \text{O método para} &\Leftrightarrow x^i = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x) + \lambda_i r(x, x^i)\} \\ &\Leftrightarrow \exists \gamma_f^i \in \partial f(x^i), \gamma_r^i \in \partial r(x^i, x^i)^3 : \gamma_f^i + \lambda_i \gamma_r^i = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists \gamma_f^i \in \partial f(x^i) : \gamma_f^i = 0 \\ &[\partial r(x^i, x^i) = \phi'(\|0\|)\partial(\|\cdot\|)(0) = \{0\}] \\ &\Leftrightarrow x^i \text{ é solução da minimização de } f(\cdot). \end{aligned}$$

□

De posse do resultado acima, é razoável questionar se o MPPN pode convergir em tempo finito ou não. Sabe-se, do artigo de Rockafellar [20], que o algoritmo baseado no quadrado da norma Euclidiana converge em um número finito de passos para uma classe especial de problemas, que engloba problemas de minimização irrestrita gerados a partir da transformação de um problema linear. Porém, no caso da função $f(\cdot)$ ser diferenciável em todo o $\mathbb{R}^n$ (logo finita em todo espaço),

³Se γ é um subgradiente da função $r(\cdot, x^i)$ calculado no ponto $\bar{x}$, a notação mais precisa seria: $\gamma \in \partial(r(\cdot, x^i))(\bar{x})$. Porém, prefere-se a notação $\gamma \in \partial r(\bar{x}, x^i)$, que é mais limpa.

uma pequena manipulação mostra que o método para em tempo finito se, e só se, o primeiro ponto for uma solução.

$$x^{i+1} = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x) + \lambda_i \phi(\|x - x^i\|)\} \Leftrightarrow$$

$$\nabla f(x^{i+1}) + \lambda_i \phi'(\|x^{i+1} - x^i\|) \partial(\|\cdot\|)(x^{i+1} - x^i) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\nabla f(x^{i+1}) = \lambda_i \phi'(\|x^{i+1} - x^i\|) \partial(\|\cdot\|)(x^{i+1} - x^i).$$

O lema anterior diz que, se x^i não é uma solução, então $x^{i+1} \neq x^i$. Deste modo conclui-se que o iterado gerado a partir de um ponto que não é solução terá gradiente não nulo e, conseqüentemente, não será uma solução da minimização irrestrita de $f(\cdot)$.

Busca-se mostrar que o MPPN é um caso particular do MOBS, isto é, que a cada passo a função objetivo cai pelo menos o valor dado por um separador. Portanto, deve-se tentar avaliar de quanto cai a função objetivo a cada passo. Para que isto seja possível, usar-se-á fortemente as hipóteses de convexidade.

Em primeiro lugar, como $f(\cdot)$ é convexa, sabe-se que

$$(14) \quad f(x^i) \geq f(x^{i+1}) + \langle \gamma_f, x^i - x^{i+1} \rangle, \quad \forall \gamma_f \in \partial f(x^{i+1}).$$

Logo, qualquer medida do valor do produto interno que aparece na expressão acima pode servir para avaliar a queda da função objetivo.

Para tal, usar-se o fato de $f_i(\cdot)$ obedecer às hipóteses dos teoremas de regra da cadeia e regra da soma para subdiferenciais. Mais ainda, utiliza-se que $f_i(\cdot)$ é minimizada a cada iteração e que $r(\cdot, x^i)$ e $\phi(\|\cdot\|)$ obedecem às condições do lema 21. Assim pode-se afirmar que:

$$0 \in \partial f_i(x^{i+1}) \Leftrightarrow \quad [\text{Pelo lema 17}]$$

$$\exists \gamma_f \in \partial f(x^{i+1}) \text{ e } \gamma_r \in \partial r(x^{i+1}, x^i) : \quad \gamma_f + \lambda_i \gamma_r = 0 \Leftrightarrow$$

$$\exists \gamma_f \in \partial f(x^{i+1}) \text{ e } \gamma_N \in \partial(\|\cdot\|)(x^{i+1} - x^i) :$$

$$\gamma_f + \lambda_i \phi'(\|x^{i+1} - x^i\|) \gamma_N = 0.$$

Estas últimas expressões apresentam boas alternativas para a avaliação do valor do produto interno presente na equação 14. Isto pode ser confirmado pelas manipulações abaixo. Substituindo este resultado na expressão 14, tem-se

$$\exists \gamma_N \in \partial(\|\cdot\|)(x^{i+1} - x^i) :$$

$$f(x^i) \geq f(x^{i+1}) + \lambda_i \phi'(\|x^{i+1} - x^i\|) \langle \gamma_N, x^{i+1} - x^i \rangle$$

$$\geq f(x^{i+1}) + \lambda_i \phi'(\|x^{i+1} - x^i\|) \|x^{i+1} - x^i\|.$$

A última desigualdade segue do fato de γ_N ser um subgradiente da norma em $x^{i+1} - x^i$.

Deste modo, é possível considerar como um candidato a separador a função:

$$(15) \quad \lambda_i \phi'(\|x^{i+1} - x^i\|) \|x^{i+1} - x^i\|.$$

Mais uma vez destaca-se que o lema 22 (que afirma que o método está bem definido) mostra que o iterado x^{i+1} é função de x^i e λ_i . Assim, infelizmente, a expressão acima ainda não é uma função apenas de x^i . Para contornar este fato utiliza-se o limitante superior da sequência $(\lambda_i)_{i \in \mathbf{N}}$ dado na definição do método, $\tilde{\lambda}$.

LEMA 24. *Seja $\tilde{\lambda}$ o limitante superior de $(\lambda^i)_{i \in \mathbf{N}}$ dado na definição do MPPN. Definindo $\delta : \mathbb{R}^n \sim G \mapsto \mathbb{R}$ por:*

$$\delta(x) = \tilde{\lambda} \phi'(\|\tilde{x} - x\|) \|\tilde{x} - x\|,$$

onde

$$\tilde{x} = \operatorname{argmin}_{z \in \mathbb{R}^n} \{f(z) + \tilde{\lambda} r(z, x)\}.$$

tem-se que $\delta(\cdot)$ é um separador em relação ao conjunto

$$G = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x)\},$$

que é fechado pelo corolário 7.

PROVA. Primeiramente, nota-se que, pelo lema 22, $\tilde{x}$ está bem definido. Também, pelas hipóteses válidas para $\phi(\cdot)$, $\delta(x) > 0$, para todo $x \notin G$.

Para provar que $\delta(\cdot)$ é um separador, consideram-se seqüências $x^i \rightarrow x^\infty$ e $\delta(x^i) \rightarrow 0$. Para esta análise é preciso retomar as manipulações que motivaram a definição de $\delta(\cdot)$:

$$\tilde{x} = \operatorname{argmin}_{z \in \mathbb{R}^n} \{f(z) + \tilde{\lambda} r(z, x)\} \Leftrightarrow$$

$$(16) \quad \exists \gamma_f \in \partial f(\tilde{x}), \gamma_r \in \partial r(\tilde{x}, x) : \gamma_f + \tilde{\lambda} \gamma_r = 0 \Leftrightarrow$$

$$(17) \quad \exists \gamma_f \in \partial f(\tilde{x}), \gamma_N \in \partial(\|\cdot\|)(\tilde{x} - x) : \gamma_f + \tilde{\lambda} \phi'(\|\tilde{x} - x\|) \gamma_N = 0.$$

A prova será apresentada em três partes:

- A seqüência $(\tilde{x}^i)_{i \in \mathbf{N}} \rightarrow x^\infty$.

Supõe-se, por contradição, que a afirmação não é válida. Então existe um $\epsilon > 0$ e uma subseqüência de índices j_i tais que:

$$\|\tilde{x}^{j_i} - x^{j_i}\| > \epsilon \Rightarrow$$

$$\delta(x^{j_i}) = \tilde{\lambda} \phi'(\|\tilde{x}^{j_i} - x^{j_i}\|) \|\tilde{x}^{j_i} - x^{j_i}\| > \tilde{\lambda} \phi'(\epsilon) \epsilon > 0.$$

contrariando a convergência de $\delta(\cdot)$.

- Sejam seqüências $(\gamma_f^i)_{i \in \mathbf{N}}$ e $(\gamma_r^i)_{i \in \mathbf{N}}$ associadas a $(x^i)_{i \in \mathbf{N}}$ que obedecem a relação da equação 16. Então $\gamma_f^i = -\tilde{\lambda}\gamma_r^i \rightarrow 0$.

Sabemos, pelo item anterior que

$$\tilde{x}^i - x^i \rightarrow 0.$$

Logo, como $\gamma_r^i \in \partial\phi(\|\cdot\|)(\tilde{x}^i - x^i)$, sabemos, pelo teorema 14 que a seqüência é limitada.

Seja γ^∞ um ponto de acumulação de $(\gamma_f^i)_{i \in \mathbf{N}}$. Então

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}^{j_i} - x^{j_i} \rightarrow 0 \\ \gamma_r^{j_i} \rightarrow -\frac{\gamma^\infty}{\tilde{\lambda}} \\ \gamma_r^{j_i} \in \partial\phi(\|\cdot\|)(\tilde{x}^{j_i} - x^{j_i}) \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{\gamma^\infty}{\tilde{\lambda}} \in \phi'(\|0\|)\partial(\|\cdot\|)(0) \Rightarrow \gamma^\infty = 0.$$

Onde a primeira implicação é consequência do fato do mapa subdiferencial de uma função contínua ser fechado (lema 12).

- $\delta(\cdot)$ é um separador.

Usando as definições e fatos provados nos itens anteriores:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^i \rightarrow x^\infty \\ \delta(x^i) \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}^i \rightarrow x^\infty \\ \gamma_f^i \rightarrow 0 \\ \gamma_f^i \in \partial f(\tilde{x}^i) \end{array} \right\} \Rightarrow 0 \in \partial f(x^\infty).$$

uma vez que o mapa subdiferencial de $f(\cdot)$ é fechado. Por fim, a última relação vale se, e só se, $x^\infty \in G$.

□

Para se poder usar os resultados de convergência do MOBS ao MPPN, é preciso provar que a cada iteração a função objetivo cai pelo menos o valor dado pelo separador do lema 24. Observando a dedução que levou a definição do separador, nota-se que há apenas uma dificuldade técnica a ser superada: a substituição de λ_i por $\tilde{\lambda}$ (feita para que o separador não dependesse de i). Lembrando que $\tilde{\lambda} \geq \lambda_i$, pode-se dizer intuitivamente que o ponto $\tilde{x}$ calculado no separador é uma aproximação pessimista de x^{i+1} , uma vez que o peso dado à regularização foi maior, penalizando o afastamento de x^i . Esta observação é formalizada por:

LEMA 25. *A seqüência gerada pelo MPPN tem a propriedade*

$$f(x^{i+1}) \leq f(x^i) - \delta(x^i).$$

onde $\delta(\cdot)$ é o separador definido no lema 24.

PROVA. A prova divide-se em duas partes:

- $f(\tilde{x}^i) \leq f(x^i) - \delta(x^i)$.

Mais uma vez, sejam seqüências $(\gamma_f^i)_{i \in \mathbf{N}}$ e $(\gamma_r^i)_{i \in \mathbf{N}}$ associadas a $(x^i)_{i \in \mathbf{N}}$ que obedecem a relação da equação 16. Observe que:

$$\begin{aligned}
 f(x^i) &\geq f(\tilde{x}^i) + \langle \gamma_f^i, x^i - \tilde{x}^i \rangle && [\text{Convex. da } f(\cdot)] \\
 &= f(\tilde{x}^i) + \tilde{\lambda} \langle \gamma_r^i, \tilde{x}^i - x^i \rangle && [\text{Equação 16}] \\
 &= f(\tilde{x}^i) + \tilde{\lambda} \phi'(\|\tilde{x}^i - x^i\|) \langle \gamma_N^i, \tilde{x}^i - x^i \rangle && [\text{Equação 17}] \\
 &\geq f(\tilde{x}^i) + \tilde{\lambda} \phi'(\|\tilde{x}^i - x^i\|) \|\tilde{x}^i - x^i\| && [\gamma_N^i \in \partial(\|\cdot\|)(\tilde{x}^i - x^i)] \\
 &= f(\tilde{x}^i) + \delta(x^i) && [\text{Def. de } \delta(\cdot)].
 \end{aligned}$$

- $f(x^{i+1}) \leq f(\tilde{x}^i)$. Claramente, pelas definições de x^{i+1} e $\tilde{x}^i$, há necessidade de tratar apenas o caso $\tilde{\lambda} > \lambda_i$.

Sabe-se que

$$\begin{aligned}
 f(\tilde{x}^i) + \tilde{\lambda} r(\tilde{x}^i, x^i) &\leq f(x^{i+1}) + \tilde{\lambda} r(x^{i+1}, x^i) && [\text{Def. de } \tilde{x}^i] \\
 -f(\tilde{x}^i) - \lambda_i r(\tilde{x}^i, x^i) &\leq -f(x^{i+1}) - \lambda_i r(x^{i+1}, x^i) && [\text{Def. de } x^{i+1}]
 \end{aligned}$$

Somando as duas expressões imediatamente acima tem-se

$$\begin{aligned}
 (\tilde{\lambda} - \lambda_i) r(\tilde{x}^i, x^i) &\leq (\tilde{\lambda} - \lambda_i) r(x^{i+1}, x^i) \Rightarrow \\
 r(\tilde{x}^i, x^i) &\leq r(x^{i+1}, x^i), && [\tilde{\lambda} > \lambda_i]
 \end{aligned}$$

Assim, pode-se escrever a relação

$$\begin{aligned}
 -\lambda_i r(x^{i+1}, x^i) &\leq -\lambda_i r(\tilde{x}^i, x^i) \\
 f(x^{i+1}) + \lambda_i r(x^{i+1}, x^i) &\leq f(\tilde{x}^i) + \lambda_i r(\tilde{x}^i, x^i) && [\text{Def. de } x^{i+1}]
 \end{aligned}$$

que somadas dão a relação desejada.

O resultado segue da união dos dois ítems. $\square$

Os últimos dois lemas mostram que o MPPN é um caso particular do MOBS. Graças a isto é possível apresentar o resultado central deste capítulo: o teorema de convergência do MPPN, baseado no teorema de convergência do MOBS.

TEOREMA 22. *Todo ponto de acumulação da seqüência gerada pelo MPPN é uma solução da minimização irrestrita de $f(\cdot)$.*

PROVA. Segue do teorema de convergência do MOBS, lembrando da hipótese de que $f(\cdot)$ é contínua em seu domínio efetivo. $\square$

O resultado acima é típico da análise de convergência de algoritmos em programação não-linear. Porém não está garantida a existência de pontos de acumulação da seqüência gerada e, deste modo, não está garantida a obtenção de soluções. Isto leva diretamente a uma outra questão: quais são as hipóteses necessárias para que a seqüência gerada pelo MPPN seja limitada, garantindo assim a existência de pontos de acumulação? Uma solução possível, e usual em programação matemática, é supor que os conjuntos de nível da função objetivo, $f(\cdot)$, são limitados. Como a seqüência gerada não aumenta a função objetivo, teríamos a limitação. Mostrar-se-á que outra solução é a adoção de uma norma conveniente que permita provar a limitação da seqüência gerada pelo MPPN.

1.2. Norma Euclidiana. Uma solução encontrada para a limitação da seqüência gerada pelo MPP baseado na regularização Euclidiana usa o fato da seqüência gerada por ele ser Fejér monótona em relação ao conjunto de soluções da minimização de $f(\cdot)$. Esta propriedade é mantida quando compomos a norma Euclidiana com outras funções estritamente convexas.

Fazendo uma manipulação simples, semelhante à manipulação feita logo após o lema 22, observa-se que

$$\begin{aligned}
 x^{i+1} &= \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x) + \lambda_i \phi(\|x - x^i\|_2)\} \Leftrightarrow \\
 \exists \gamma_f^i \in \partial f(x^{i+1}) : \gamma_f^i + \lambda_i \phi'(\|x^{i+1} - x^i\|_2) \nabla \|x^{i+1} - x^i\|_2 &= 0 \Leftrightarrow \\
 (18) \quad \gamma_f^i &= \underbrace{\lambda_i \frac{\phi'(\|x^{i+1} - x^i\|_2)}{\|x^{i+1} - x^i\|_2}}_{>0} (x^i - x^{i+1}).
 \end{aligned}$$

Portanto, uma explicação geométrica para a Fejér monotonicidade é obtida da expressão acima quando se considera o subespaço gerado por $\{x^i, x^{i+1}, g\}$, veja figura 1. Neste subespaço traça-se o plano H perpendicular ao subgradiente γ_f^i de $f(\cdot)$ no ponto x^{i+1} e passando por x^{i+1} . Como o subgradiente de $f(\cdot)$ considerado é um múltiplo positivo de $x^i - x^{i+1}$ (expressão 18), é possível provar, pela convexidade de $f(\cdot)$, que g está do lado oposto ao de x^i . Dessa forma o ângulo $\alpha = \widehat{x^i x^{i+1} g}$ deve ser maior do que o ângulo entre $x^i - x^{i+1}$ e H , que é de 90° . Portanto o lado oposto ao ângulo α deve ser o maior do triângulo dado por x^i, x^{i+1}, g .

Estes argumentos podem ser formalizados algebricamente.

FIGURA 1. Féjer monotonicidade da seqüência gerada pelo MPP2.

LEMA 26. *Se a norma utilizada é a Euclidiana então seqüência gerada pelo MPPN é Féjer monótona em relação ao conjunto $G = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x)\}$.*

PROVA. Supõe-se que $x^i \neq x^{i+1}$. Dado um ponto qualquer $g \in G$, pode-se ver, da equação 18, da monotonicidade de $\partial f(\cdot)$ e do fato de $0 \in \partial f(g)$, que

$$(19) \quad \langle x^i - x^{i+1}, x^{i+1} - g \rangle = cte \langle \gamma_f^i, x^{i+1} - g \rangle \geq 0.$$

Note que a equação 19 confirma os argumentos geométricos sobre os ângulos, bastando lembrar da relação do produto interno com a função cosseno.

Assim, tem-se

$$\begin{aligned} \|x^i - g\|_2^2 &= \langle x^i - x^{i+1} + x^{i+1} - g, x^i - x^{i+1} + x^{i+1} - g \rangle \\ &= \|x^i - x^{i+1}\|_2^2 + \|x^{i+1} - g\|_2^2 + 2\langle x^i - x^{i+1}, x^{i+1} - g \rangle \\ &\geq \|x^{i+1} - g\|_2^2 \quad [\text{Equação 19}] \end{aligned}$$

□

De posse deste resultado, pode-se enunciar um teorema de convergência (não apenas no sentido de pontos de acumulação como o teorema 22) para métodos de ponto proximal que usam a norma Euclidiana.

TEOREMA 23. *Se o conjunto de soluções da minimização irrestrita de $f(\cdot)$ for não vazio, então o MPPN usando a norma Euclidiana converge a uma solução.*

PROVA. Sabe-se, pelo teorema de convergência do MPPN, teorema 22, que todo ponto de acumulação da seqüência é ponto de G . Do lema 26, sabe-se que a seqüência é Fejér monótona em relação ao conjunto de soluções G . Como $G \neq \emptyset$, conclui-se que a seqüência é limitada, possuindo pontos de acumulação. Como todo limite de subseqüência estará em G , mais uma vez da Fejér monotonicidade, existirá um único ponto de acumulação. $\square$

2. MPPN e problemas restritos

Nas seções anteriores mostrou-se que o MPPN pode ser utilizado no tratamento da minimização irrestrita de uma função convexa. Porém o MPPN também se aplica a minimizações restritas. Considerar-se-á problemas que obedecem a hipóteses análogas às hipóteses assumidas no caso irrestrito.

HIPÓTESE 2. A função objetivo $f(\cdot)$ é convexa, própria e semi-contínua inferior, contínua no domínio efetivo e limitada inferiormente. O conjunto viável, V , é convexo e fechado⁴. Por fim, a intersecção do domínio efetivo de $f(\cdot)$ e do conjunto viável é não vazia.

Isto é necessário para que o problema irrestrito equivalente, dado pelo lema 14, obedeça as condições para a convergência do MPPN.

Método de Ponto Proximal com norma para problemas restritos (MPPNR) *Seja $\|\cdot\|$ uma norma qualquer, o MPPNR será definido por:*

1. *Inicialização: Tome qualquer $x^1 \in V$;*
2. *Passo iterativo: Calcule x^{i+1} por*

$$x^{i+1} = \operatorname{argmin}_{x \in V} \{f_i(x) = f(x) + \lambda_i r(x, x^i)\}.$$

onde $r(x, x^i) = \phi(\|x - x^i\|)$ e $\phi(\cdot)$ obedece às condições descritas no MPPN. $(\lambda_i)_{i \in \mathbf{N}}$ é uma seqüência estritamente positiva e limitada superiormente por $\tilde{\lambda}$. $\blacksquare$

Pode-se provar, facilmente, que este método é convergente no mesmo sentido do MPPN.

TEOREMA 24. *Todo ponto de acumulação da seqüência gerada pelo MPPNR é uma solução do problema de minimizar $f(\cdot)$ sujeito ao conjunto viável V .*

⁴Desta forma a função indicadora de V é convexa e semi-contínua inferior

PROVA. O problema proposto é, pelo lema 14, equivalente ao problema de minimização irrestrita de $f(\cdot) + \text{ind}(\cdot \mid V)$. Este último pode ser resolvido pelo MPPN. O passo do MPPN é

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{argmin}} \{f_i(x) = f(x) + \text{ind}(x \mid V) + \lambda_i r(x, x^i)\}.$$

Que é equivalente a

$$\underset{x \in V}{\text{argmin}} \{f_i(x) = f(x) + \lambda_i r(x, x^i)\},$$

pois

$$f(x) + \text{ind}(x \mid V) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in \text{dom } f \cap V \neq \emptyset, \\ \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

□

Ainda, usando a norma Euclidiana, pode-se obter um teorema mais forte de convergência:

TEOREMA 25. *Se a norma utilizada no MPPNR for a Euclidiana então o MPPNR converge a uma solução do problema de minimização de $f(\cdot)$ no conjunto viável V , caso o conjunto de soluções seja não vazio.*

PROVA. Basta lembrar que o MPPNR é um caso particular do MPPN e aplicar o teorema 23. □

Por fim, pode-se destacar o que acontece se o MPPNR para em um número finito de passos.

LEMA 27. *O método MPPNR para no ponto x^i se, e só se, x^i é uma solução da minimização de $f(\cdot)$ no conjunto viável V .*

PROVA. Como o MPPNR é um caso particular do MPPN, aplica-se o lema 23. □

CAPÍTULO 5

Métodos de Ponto Proximal Baseados em Funções de Bregman

Neste capítulo serão discutidos métodos de ponto proximal que usam como regularização funções com propriedades semelhantes a distâncias, mas que não surgem a partir de normas como acontecia no MPPN. Um fato muito importante é que, caso funções de regularização adequadas sejam encontradas, pode-se substituir um problema restrito por uma seqüência de problemas irrestritos, tornando o uso do método muito atraente. A classe de funções de regularização que será estudada neste capítulo são as distâncias de Bregman, introduzidas em [5] e posteriormente utilizadas no MPP.¹ Deve-se destacar que existe uma outra classe de funções, que não será apresentada nesta dissertação, mas que é utilizada como regularização no método de ponto proximal: as φ -divergências. Este tipo de função é empregado quando o conjunto viável é o ortante positivo ($\mathbb{R}_+^n$).²

1. Distâncias de Bregman

Outro tipo de funções de regularização que leva à convergência da seqüência gerada pelo MPP são as distâncias de Bregman. Elas foram introduzidas originalmente no trabalho [5] e sua conexão com o método de ponto proximal foi estudada em [11, 8, 12].

Durante o este do capítulo busca-se resolver problemas de minimização onde o conjunto viável é o fecho de um subconjunto aberto e convexo S do $\mathbb{R}^n$. Para isto utilizar-se-ão as distâncias de Bregman:

DEFINIÇÃO 29. Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um convexo aberto, $h(\cdot)$ uma função real definida no fecho de S e $D_h : \bar{S} \times S \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$D_h(x, y) = h(x) - h(y) - \langle \nabla h(y), x - y \rangle \quad (> 0 \text{ para } x \neq y)$$

$h(\cdot)$ é dita uma *função de Bregman* e $D_h(\cdot, \cdot)$ a *distância de Bregman* induzida por $h(\cdot)$ se valem

¹Este capítulo está baseado na monografia *Métodos de Ponto Proximal em Otimização* de Iusem [11].

²Bons textos de consulta sobre φ -divergências são [11, 23, 12, 13], onde é possível notar uma forte relação com distancias de Bregman.

- B1. (*Diferenciabilidade*) $h(\cdot)$ é continuamente diferenciável em S .
 B2. (*Convexidade estrita*) $h(\cdot)$ é estritamente convexa e contínua em $\bar{S}$.
 B3. (*Conjuntos de nível limitados*) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ os conjuntos de nível $\Gamma_1(y, \alpha) = \{x \in \bar{S} \mid D_h(x, y) \leq \alpha\}$ e $\Gamma_2(x, \alpha) = \{y \in S \mid D_h(x, y) \leq \alpha\}$ são limitados para todo $y \in S$ e $x \in \bar{S}$.
 B4. (*Convergência da distância*) Se $(y^i)_{i \in \mathbb{N}} \in S$ e $y^i \rightarrow y^\infty \in \bar{S}$ então $D_h(y^\infty, y^i) \rightarrow 0$.
 B5. (*Convergência de seqüência*) Se $(x^i)_{i \in \mathbb{N}} \in \bar{S}$ e $(y^i)_{i \in \mathbb{N}} \in S$ são seqüências tais que $(x^i)_{i \in \mathbb{N}}$ é limitada, $y^i \rightarrow y^\infty$ e $D_h(x^i, y^i) \rightarrow 0$ então $x^i \rightarrow y^\infty$.

O conjunto S é chamado de *zona* de $h(\cdot)$ ■

Para efeito de referência as propriedades de funções de Bregman serão identificadas com os nomes entre parênteses colocados imediatamente antes de suas definições. Tais nomes não devem ser considerados descrições precisas das propriedades mas, sim, termos mnemônicos para facilitar a leitura do texto.

Para que este tipo de função seja usada como regularização no MPP, é necessário que ela guarde implicitamente a informação sobre o conjunto $\bar{S}$, que será identificado com o conjunto viável. Ver-se-á que isto é possível se $h(\cdot)$ obedecer também a condição:

DEFINIÇÃO 30. a função de Bregman $h(\cdot)$ é *coerciva na fronteira* se vale

- B6. Se $(y^i)_{i \in \mathbb{N}} \in S$ e $y^i \rightarrow y^\infty \in \partial \bar{S}$ (fronteira de $\bar{S}$) então para todo $x \in S$ vale

$$\langle \nabla h(y^i), x - y^i \rangle \rightarrow -\infty.$$

Note que isto implica que $D_h(x, y^i) \rightarrow \infty$, pois $h(\cdot)$ é contínua em $\bar{S}$. ■

Basicamente esta propriedade diz que a distância de Bregman, entre um ponto da zona e uma seqüência que converge para a fronteira, tende a infinito, como se a seqüência estivesse divergindo.

Alguns exemplos de funções de Bregman com zona bastante simples, e com a propriedade de serem coercivas na fronteira, são:

- A zona $S = \mathbb{R}^n$.

Um exemplo de função de Bregman interessante é

$$h(x) = \|x\|_2^2,$$

cuja distância de Bregman associada é:

$$\begin{aligned} D_h(x, y) &= \|x\|_2^2 - \|y\|_2^2 - \langle 2y, x - y \rangle \\ &= \|x\|_2^2 - 2\langle y, x \rangle + \|y\|_2^2 \\ &= \|x - y\|_2^2. \end{aligned}$$

Claramente estas funções obedecem a todas as condições que caracterizam uma função de Bregman.

Este caso merece destaque, pois pode-se considerar que o método de pontos proximais obtido a partir de distâncias de Bregman (que será apresentado abaixo) estende o método de pontos proximais baseado na regularização Euclidiana.

- A zona S é o interior de $\mathbb{R}_+^n$.

Neste caso, um exemplo de função de Bregman é $h(x) = \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i$, convencionando-se que $0 \ln 0 = 0$. A distância de Bregman associada é:

$$\begin{aligned} D_h(x, y) &= \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i - \sum_{i=1}^n y_i \ln y_i - \sum_{i=1}^n ((\ln y_i + 1)(x_i - y_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i \ln x_i - x_i \ln y_i - x_i + y_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(x_i \ln \frac{x_i}{y_i} - x_i + y_i \right). \end{aligned}$$

A prova que estas funções obedecem as propriedades B1 a B6 é um pouco longa, e pouco elucidativa e, por isso, é apresentada no apêndice deste capítulo.

- A zona S é o interior de uma caixa do $\mathbb{R}^n$, isto é:

$$S = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n),$$

onde $a_i < b_i$ para $1 \leq i \leq n$.

Um exemplo de função de Bregman é:

$$h(x) = \sum_{i=1}^n ((x_i - a_i) \ln(x_i - a_i) + (b_i - x_i) \ln(b_i - x_i)).$$

E a distância de Bregman associada fica:

$$D_h(x, y) = \sum_{i=1}^n \left((x_i - a_i) \ln \frac{x_i - a_i}{y_i - a_i} + (b_i - x_i) \ln \frac{b_i - x_i}{b_i - y_i} \right).$$

Mais uma vez a prova que estas funções obedecem as condições de Bregman se encontra no apêndice.

Outros exemplos de funções de Bregman, inclusive para os casos da zona ser o interior de uma bola ou de um poliedro, podem ser encontrados no artigo [7].

Neste ponto, é conveniente provar que funções de Bregman obedecem a algumas propriedades que serão úteis para sua manipulação no restante do capítulo. Três resultados básicos estão reunidos abaixo.

PROPOSIÇÃO 1. *Se $h(\cdot)$ é uma função de Bregman com zona S então*

1. $D_h(x, y) - D_h(x, z) - D_h(z, y) = \langle \nabla h(y) - \nabla h(z), z - x \rangle$, para todo $x \in \bar{S}$ e $y, z \in S$.
2. $\nabla_x D_h(x, y) = \nabla h(x) - \nabla h(y)$, $\forall x, y \in S$.
3. $D_h(\cdot, y)$ é estritamente convexa para todo $y \in S$.

□

PROVA. A prova está separada em três partes, correspondentes às partes da proposição.

1.

$$\begin{aligned}
 & D_h(x, y) - D_h(x, z) - D_h(z, y) = \\
 & = h(x) - h(y) - \langle \nabla h(y), x - y \rangle - h(x) + h(z) + \langle \nabla h(z), x - z \rangle \\
 & \quad - h(z) + h(y) + \langle \nabla h(y), z - y \rangle \\
 & = \langle \nabla h(y), z - x \rangle - \langle \nabla h(z), z - x \rangle
 \end{aligned}$$

2. Trivial, basta aplicar regras de diferenciação, lembrando que y está fixo.

3. Segue imediatamente da convexidade estrita de $h(\cdot)$.

□

2. O Método

Apresenta-se, no contexto de programação convexa, um método de solução para problemas que obedecem a seguinte hipótese:

HIPÓTESE 3. O conjunto viável V é igual ao fecho de um conjunto convexo, aberto e não vazio, denotado por S . A função objetivo $f(\cdot)$, definida em $\bar{S}$ e com imagens reais, é convexa e contínua. Por fim $f(\cdot)$

é limitada inferiormente em $V = \bar{S}$. Um problema que obedece a estas condições será chamado de *PS*:

$$(PS) \quad \begin{array}{ll} \min f(x) \\ \text{s.a. } x \in \bar{S}. \end{array}$$

Neste caso, sempre que for possível encontrar uma função de Bregman com zona S e coerciva na fronteira, pode-se utilizar uma variação do método de ponto proximal para a solução do problema. *O método é particularmente interessante porque as minimizações que são feitas no passo iterativo podem ser resolvidas por algoritmos tradicionais de minimização irrestrita, como feito em métodos de barreira [4].* A descrição geral do método é dada por:

Método de Ponto Proximal com distância de Bregman (MPPB)

Dada uma função de Bregman $h(\cdot)$, com zona S e coerciva na fronteira:

1. *Inicialização: Tome qualquer $x^1 \in S$;*
2. *Iteração: Calcule x^{i+1} por*

$$x^{i+1} = \operatorname{argmin}_{x \in \bar{S}} \{f_i(x) = f(x) + \lambda_i D_h(x, x^i)\}.$$

onde $(\lambda_i)_{i \in \mathbf{N}}$ é uma seqüência de números reais positivos e limitados superiormente por $\tilde{\lambda}$. ■

Note que a propriedade de coercividade faz com que a distância de Bregman desempenhe um papel semelhante ao de uma função barreira, impedindo que os iterados “saíam” do interior do conjunto viável. Este comentário é formalizado no lema abaixo:

LEMA 28. *O MPPB está bem definido, isto é, dado um ponto $x^i \in S$, os iterados são univocamente definidos e pertencem ao interior do conjunto viável, isto é, pertencem a S .*

PROVA. Seja l um limitante inferior de $f(\cdot)$ em $\bar{S}$. Segue imediatamente que a função minimizada à cada interação obedece à

$$f_i(x) \geq l + \lambda_i D_h(x, x^i)$$

Pela condição de limitação dos conjuntos de nível de funções de Bregman e pela continuidade de $D_h(\cdot, x^i)$, tem-se que os conjuntos de nível de $f_i(x)$ estão contidos em conjuntos fechados e limitados. Portanto, a cada interação, a minimização irrestrita é equivalente a uma minimização em um compacto. Por fim, $f_i(\cdot)$ é estritamente convexa, pois $f(\cdot)$ é convexa e a distância de Bregman é estritamente convexa na primeira variável (proposição 1). Deste modo, o mínimo calculado a cada interação existe e é único.

Assim, sabe-se que x^{i+1} é o único ponto de $\bar{S}$ tal que

$$\forall y \in \bar{S}. \quad f(y) + \lambda_i D_h(y, x^i) \geq f(x^{i+1}) + \lambda_i D_h(x^{i+1}, x^i) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \forall y \in \bar{S}, \quad f(y) + \lambda_i (h(y) - h(x^i) - \langle \nabla h(x^i), y - x^i \rangle) &\geq \\ f(x^{i+1}) + \lambda_i (h(x^{i+1}) - h(x^i) - \langle \nabla h(x^i), x^{i+1} - x^i \rangle) &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall y \in \bar{S}, \quad f(y) + \lambda_i h(y) &\geq \\ f(x^{i+1}) + \lambda_i h(x^{i+1}) + \langle \lambda_i \nabla h(x^i), y - x^{i+1} \rangle &\Leftrightarrow \\ \lambda_i \nabla h(x^i) &\in \partial(f + \lambda_i h)(x^{i+1}) \end{aligned}$$

Deste modo, para concluir a prova basta mostrar que $\partial(f + \lambda_i h)(x)$ é vazio para todo ponto x na fronteira de S .

Supondo, por contradição, que existe um ponto x na fronteira de S tal que $(f + \lambda_i h)(\cdot)$ possua um subgradiente γ em x . Seja z um elemento qualquer de S e defina

$$\alpha^j = \frac{1}{j+1} \quad \text{e} \quad y^j = (1 - \alpha^j)x + \alpha^j z$$

Usando estas definições, tem-se que

$$(20) \quad \forall j, \quad y^j \in S \quad \text{e} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} y^j = x \in \partial \bar{S}$$

Pode-se concluir, então, que

$$\begin{aligned} \alpha^j \langle \gamma, z - x \rangle &= \langle \gamma, y^j - x \rangle && [\text{Def. } y^j] \\ &\leq f(y^j) - f(x) + \lambda_i (h(y^j) - h(x)) && [\text{Def. } \gamma] \\ &\leq f(y^j) - f(x) + \lambda_i \langle \nabla h(y^j), y^j - x \rangle && [\text{Convex. } h(\cdot)] \\ &\leq \alpha^j (f(z) - f(x)) + \lambda_i \langle \nabla h(y^j), y^j - x \rangle && [\text{Convex. } f(\cdot)] \\ &= \alpha^j (f(z) - f(x)) + \lambda_i \langle \nabla h(y^j), \frac{\alpha^j}{1 - \alpha^j} (z - y^j) \rangle && [\text{Def. } y^j] \end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{1 - \alpha^j}{\lambda_i} (\langle \gamma, z - x \rangle + f(x) - f(z)) \leq \langle \nabla h(y^j), z - y^j \rangle.$$

Tomando o limite para $j \rightarrow \infty$ e lembrando da coercividade na fronteira de $h(\cdot)$:

$$\frac{1}{\lambda_i} (\langle \gamma, z - x \rangle + f(x) - f(z)) \leq -\infty$$

Uma contradição. Logo segue que, para todo $x \in \partial \bar{S}$,

$$\partial(f + \lambda_i h)(x) = \emptyset.$$

completando a prova que x^{i+1} está em S . □

Nota-se que aqui é possível obter um candidato a separador³:

$$\begin{aligned} \tilde{x}^i &= \operatorname{argmin}_{x \in \bar{S}} \{f(x) + D_h(x, x^i)\} \Leftrightarrow \\ \exists \gamma_f^i \in \partial f(\tilde{x}^i) : \quad &\gamma_f^i + \nabla h(\tilde{x}^i) - \nabla h(x^i) = 0 \Rightarrow \\ f(x^i) &\geq f(\tilde{x}^i) + \langle \nabla h(x^i) - \nabla h(\tilde{x}^i), x^i - \tilde{x}^i \rangle. \end{aligned}$$

Na últimas expressões foi usado o fato das seqüências de interesse estarem inteiramente contidas no aberto S (lema anterior). Usando, então, a proposição 1 item 1, com $x = y = \tilde{x}^i$ e $z = x^i$, obtém-se:

$$f(x^i) \geq f(\tilde{x}^i) + D_h(\tilde{x}^i, x^i) + D_h(x^i, \tilde{x}^i),$$

sugerindo que $D_h(\tilde{x}^i, x^i) + D_h(x^i, \tilde{x}^i)$ é um separador. Infelizmente não foi possível provar isto. A dificuldade está no fato das propriedades exigidas sobre funções de Bregman não permitirem uma análise simples do que acontece com a diferença $D_h(\bar{x}, x^i) - D_h(\bar{x}, y^i)$, onde $\bar{x}$ é um ponto de $\bar{S}$, mesmo quando $(x^i)_{i \in \mathbf{N}}$ e $(y^i)_{i \in \mathbf{N}}$ possuem o mesmo limite. Assim, apesar de ser possível afirmar que $(\tilde{x}^i)_{i \in \mathbf{N}}$ e $(x^i)_{i \in \mathbf{N}}$ convergem para o mesmo ponto, não foi possível provar que a seqüência gerada converge para uma solução.

2.1. Prova de convergência do MPPB. Uma vez que se sabe que o método está bem definido, busca-se agora provar a convergência do MPPB.

Inicialmente, mostra-se que o método possui uma propriedade semelhante a Féjer monotonicidade. Este resultado será usado na demonstração do teorema de convergência.

LEMA 29. *Seja x^* uma solução qualquer do PS. A seqüência gerada pelo MPPB tem a propriedade*

$$D_h(x^*, x^{i+1}) \leq D_h(x^*, x^i) - D_h(x^{i+1}, x^i).$$

PROVA. Usando a proposição 1, item 1, com $x = x^*$, $y = x^i$ e $z = x^{i+1}$, tem-se

$$(21) \quad \begin{aligned} D_h(x^*, x^i) - D_h(x^*, x^{i+1}) - D_h(x^{i+1}, x^i) = \\ \langle \nabla h(x^i) - \nabla h(x^{i+1}), x^{i+1} - x^* \rangle. \end{aligned}$$

³Por simplicidade considerou-se que a seqüência de pesos λ_i vale sempre 1.

Da definição de x^{i+1} e como, pelo lema anterior, $x^{i+1} \in S$ que é aberto

$$\begin{aligned} 0 \in \partial(f + \lambda_i D_h(\cdot, x^i))(x^{i+1}) & \quad [\text{Corolário 8}] \Leftrightarrow \\ \exists \gamma_f \in \partial f(x^{i+1}) : \gamma_f + \lambda_i(\nabla h(x^{i+1}) - \nabla h(x^i)) = 0 & \Leftrightarrow \\ \gamma_f = \lambda_i(\nabla h(x^i) - \nabla h(x^{i+1})) \in \partial f(x^{i+1}). \end{aligned}$$

A segunda linha é consequência da proposição 1 e da regra da soma para subgradientes, no caso de uma das funções diferenciáveis (teorema 15).

De (21) conclui-se

$$\begin{aligned} D_h(x^*, x^i) - D_h(x^*, x^{i+1}) - D_h(x^{i+1}, x^i) &= \frac{1}{\lambda_i} \langle \gamma_f, x^{i+1} - x^* \rangle \\ (22) \qquad \qquad \qquad &\geq \frac{1}{\lambda_i} (f(x^{i+1}) - f(x^*)) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade é consequência da definição de subgradiente e a segunda do fato de x^* ser uma solução da minimização de $f(\cdot)$ em $\bar{S}$. $\square$

Mais uma vez é importante destacar o fato desta propriedade é análoga a Fejér monotonicidade, porém usando a “métrica” $D_h(\cdot, \cdot)$.

Um corolário importante é:

COROLÁRIO 9. *Seja x^* uma solução qualquer do PS e $(x^i)_{i \in \mathbf{N}}$ uma seqüência gerada pelo MPPB. Então a seqüência $D_h(x^*, x^i)$ converge para algum valor real.*

PROVA. Do lema anterior, conclui-se que a seqüência $D_h(x^*, x^i)$ é não crescente e, como é limitada inferiormente por 0, a seqüência é convergente. $\square$

Por fim, já é possível enunciar e provar o teorema de convergência do método.

TEOREMA 26. *Se o problema PS tem solução então a seqüência $(x^i)_{i \in \mathbf{N}}$ gerada pelo Método de Ponto Proximal com distâncias de Bregman converge a uma solução.*

PROVA. A prova será dividida em três partes.

1. A seqüência é limitada e, se uma subsequência x^{j_i} é convergente a um ponto $\bar{x}$ então a seqüência x^{j_i+1} também converge para $\bar{x}$.

Seja x^* uma solução qualquer do PS, que existe por hipótese. O lema 29 implica que a seqüência $D_h(x^*, x^i)$ é não crescente, portanto $D_h(x^*, x^i) \leq D_h(x^*, x^1)$ e a propriedade de conjuntos de nível limitados das funções de Bregman diz que $(x^i)_{i \in \mathbf{N}}$ é limitada.

Mais ainda, lembrando que o corolário 9 afirma que $D_h(x^*, x^i)$ é convergente, temos, pelo lema 29:

$$(23) \quad 0 \leq D_h(x^{i+1}, x^i) \leq \underbrace{D_h(x^*, x^i) - D_h(x^*, x^{i+1})}_{\rightarrow 0} \Rightarrow D_h(x^{i+1}, x^i) \rightarrow 0.$$

Portanto, qualquer que seja a subsequência convergente x^{j_i} com limite $\bar{x}$, da expressão anterior e da propriedade de funções de Bregman chamada de convergência de seqüências, conclui-se que $x^{j_i+1} \rightarrow \bar{x}$.

2. Todos os pontos de acumulação de $(x^i)_{i \in \mathbf{N}}$ são soluções do PS.

Seja x^* uma solução do PS, $\tilde{\lambda}$ um limitante superior da seqüência $(\lambda^i)_{i \in \mathbf{N}}$ (que existe por hipótese na definição do método) e $x^{j_i} \rightarrow \bar{x}$ uma subsequência convergente.

Reescrevendo a equação 22, da demonstração do lema 29

$$\begin{aligned} D_h(x^*, x^{j_i}) - D_h(x^*, x^{j_i+1}) - D_h(x^{j_i+1}, x^{j_i}) &\geq \frac{1}{\lambda_i} (f(x^{j_i+1}) - f(x^*)) \\ &\geq \frac{1}{\tilde{\lambda}} (f(x^{j_i+1}) - f(x^*)) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

A primeira expressão converge para 0, pois $D_h(x^{j_i+1}, x^{j_i}) \rightarrow 0$ por (23) e $D_h(x^*, x^i)$ converge (corolário 9).

Segue que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f(x^{j_i+1}) = f(x^*).$$

E assim, da continuidade de $f(\cdot)$ e do fato de $\lim_{i \rightarrow \infty} f(x^{j_i}) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x^{j_i+1})$, provado no item anterior, conclui-se que

$$(24) \quad f(\bar{x}) = f(x^*).$$

Por fim, como $(x^i)_{i \in \mathbf{N}} \in S$, tem-se que $\bar{x} \in \overline{S}$. Portanto $\bar{x}$ é viável e, lembrando de (24), uma solução.

3. $(x^i)_{i \in \mathbf{N}}$ possui um único ponto de acumulação.

Seja $\bar{x}$ um ponto de acumulação, que existe pelo item 1, e x^{j_i} uma subsequência convergente a $\bar{x}$.

Sabe-se que

$$D_h(\bar{x}, x^{j_i}) \rightarrow 0 \quad [\text{Pela Prop. Conv. de Distâncias}]$$

$$\bar{x} \text{ resolve o PS} \quad [\text{Pelo ítem anterior}]$$

Como $D_h(\bar{x}, x^i)$ é não crescente com uma subsequência convergindo para 0 (como está destacado acima), a sequência converge para 0.

Seja $x^{k_i} \rightarrow \tilde{x}$ uma subsequência convergente qualquer.

Defina as seqüências

$$\begin{aligned} y^i &= \bar{x} && \in \bar{S} \\ z^i &= x^{k_i} \rightarrow \tilde{x} && \in S \end{aligned}$$

Segue imediatamente que y^i é limitada e que o limite de $D_h(y^i, z^i)$ é 0. A propriedade de convergência de seqüências garante que

$$\bar{x} = \lim_{i \rightarrow \infty} y^i = \lim_{i \rightarrow \infty} z^i = \tilde{x}$$

O teorema segue da junção dos três últimos ítems. $\square$

Existem outros resultados sobre métodos proximais baseados no uso de distâncias de Bregman que não serão tratados nesta dissertação. Por isto, apresenta-se uma pequena bibliografia que pode ser utilizada como ponto de partida para pesquisa. Textos gerais são [11, 8]. Em [11] faz-se a análise da taxa de convergência destes algoritmos. Em [6, 11] estuda-se sua utilidade para a solução de problemas de desigualdade variacional. Um exemplo do uso de funções de Bregman em algoritmos de pontos interiores diferentes do MPP é [7].

3. Apêndice

Neste apêndice demonstra-se que os exemplos de funções de Bregman que foram apresentados na seção 1 obedecem às condições da definição (B1 a B6).

3.1. A zona é o interior do ortante positivo ($\mathbb{R}_{++}^n$). O exemplo de função de Bregman apresentado foi:

$$h(x) = \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i, \text{ onde } 0 \ln 0 = 0.$$

E a respectiva distância de Bregman é dada por:

$$D_h(x, y) = \sum_{i=1}^n \left(x_i \ln \frac{x_i}{y_i} - x_i + y_i \right).$$

Note que a estrutura de separabilidade presente nestas funções, permitirá que manipulações feitas apenas nos reais sejam facilmente generalizadas para o $\mathbb{R}^n$.

B1. $h(\cdot)$ é continuamente diferenciável em S .

PROVA. Trivial. □

B2. $h(\cdot)$ é estritamente convexa e contínua em $\bar{S}$.

PROVA. Chamemos de $f(\cdot)$ a restrição de $h(\cdot)$ a uma dimensão. Isto é $f(x) = x \ln x$. Prova-se primeiro que $f(\cdot)$ é estritamente convexa em $\mathbb{R}_+$.

Calcula-se:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln x + 1, \\ f''(x) &= \frac{1}{x} > 0, \text{ se } x > 0. \end{aligned}$$

Logo segue a estrita convexidade de $f(\cdot)$ em $\mathbb{R}_{++}$. Resta provar que $f(\cdot)$ é estritamente convexa no 0. Considere a um ponto qualquer de $\mathbb{R}_{++}$ e $\lambda \in (0, 1)$, tem-se

$$\begin{aligned} f((1 - \lambda)0 + \lambda a) &= \lambda a \ln \lambda a \\ &< \lambda a \ln a && [\ln(\cdot) \text{ é crescente}] \\ &= (1 - \lambda)f(0) + \lambda f(a). \end{aligned}$$

Assim, tomando a e b pontos distintos do $\mathbb{R}_+^n$ e $\lambda \in (0, 1)$ tem-se

$$\begin{aligned} h((1 - \lambda)a + \lambda b) &= \sum_{i=1}^n ((1 - \lambda)a_i + \lambda b_i) \ln ((1 - \lambda)a_i + \lambda b_i) \\ &< \sum_{i=1}^n ((1 - \lambda)a_i \ln a_i + \lambda b_i \ln b_i) \\ &= (1 - \lambda)h(a) + \lambda h(b). \end{aligned}$$

Agora prova-se a continuidade em $\mathbb{R}_+^n$. Observe que é suficiente provar a continuidade de $f(\cdot)$, que é claramente contínua

em $\mathbb{R}_{++}$. Toma-se

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x &= - \lim_{x \rightarrow 0^+} -x \ln x \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} \quad [\text{L'Hôpital}] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto a convenção $0 \ln 0 = 0$ garante a continuidade. $\square$

- B3. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ os conjuntos de nível $\Gamma_1(y, \alpha) = \{x \in \bar{S} \mid D_h(x, y) \leq \alpha\}$ e $\Gamma_2(x, \alpha) = \{y \in S \mid D_h(x, y) \leq \alpha\}$ são limitados para todo $y \in S$ e $x \in \bar{S}$.

PROVA. Considere primeiro o conjunto de nível $\Gamma_1(y, \alpha) = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid D_h(x, y) \leq \alpha\}$, com $y \in \mathbb{R}_{++}$. Mais uma vez, basta considerar o caso unidimensional, limitando assim cada componente. Como x é positivo, falta apenas obter um limitante superior.

$$\begin{aligned}D_h(x, y) &\leq \alpha \Leftrightarrow \\ x \ln \frac{x}{y} - x + y &\leq \alpha \Leftrightarrow \\ x \ln x - x \ln y - x + y &\leq \alpha \Leftrightarrow \\ (25) \quad x(\ln x - \ln y - 1) &\leq \alpha - y\end{aligned}$$

Supõe-se, por contradição que x não é limitado superiormente. Tomando o limite, para $x \rightarrow \infty$, na expressão 25, tem-se uma contradição.

Resta analisar o conjunto de nível $\Gamma_2(x, \alpha) = \{y \in \mathbb{R}_{++} \mid D_h(x, y) \leq \alpha\}$, onde $x \in \mathbb{R}_+$. Como acima, pode-se considerar apenas o caso unidimensional e buscar a limitação superior.

$$\begin{aligned}D_h(x, y) &\leq \alpha \Leftrightarrow \\ x \ln \frac{x}{y} - x + y &\leq \alpha \Leftrightarrow \\ y - x \ln y &\leq \alpha - x \ln x + x\end{aligned}$$

E mais uma vez a técnica de tomar o limite na expressão anterior garante que y é limitado. $\square$

- B4. Se $(y^i)_{i \in \mathbb{N}} \in S$ e $y^i \rightarrow y^\infty \in \bar{S}$ então $D_h(y^\infty, y^i) \rightarrow 0$

PROVA. Basta provar que cada termo de $D_h(y^\infty, y^i)$ converge para 0, o que é equivalente a considerar o caso unidimensional. Assim, existem duas possibilidades.

- $y^\infty = 0$. Neste caso

$$D_h(y^\infty, y^i) = 0 \ln \frac{0}{y^i} - 0 + y^i = y^i \rightarrow 0.$$

- $y^\infty > 0$, o que implica

$$\begin{aligned} D_h(y^\infty, y^i) &= y^\infty \ln \frac{y^\infty}{y^i} - y^\infty + y^i \\ &\rightarrow y^\infty \ln 1 - y^\infty + y^\infty \quad [\text{Por continuidade}] \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

B5. Se $(x^i)_{i \in \mathbb{N}} \in \overline{S}$ e $(y^i)_{i \in \mathbb{N}} \in S$ são seqüências tais que $(x^i)_{i \in \mathbb{N}}$ é limitada, $y^i \rightarrow y^\infty$ e $D_h(x^i, y^i) \rightarrow 0$ então $x^i \rightarrow y^\infty$.

PROVA. Primeiro observe que, como a distância de Bregman é soma de termos positivos, cada termo da soma converge para zero. Portanto é possível tratar a convergência de cada componente isolada. O que, mais uma vez, equivale a tratar o caso unidimensional. Tome uma subsequência convergente de $(x^i)_{i \in \mathbb{N}}$ a um ponto x^∞ . Deve-se provar que $x^\infty = y^\infty$. Sem perda de generalidade, considera-se que a seqüência converge. Lembrando que

$$(26) \quad D_h(x^i, y^i) = x^i \ln \frac{x^i}{y^i} - x^i + y^i,$$

Há dois casos para analisar:

- $y^\infty \neq 0$. Tomando o limite na expressão 26, tem-se

$$\begin{aligned} 0 &= x^\infty \ln \frac{x^\infty}{y^\infty} - x^\infty + y^\infty \\ &= x^\infty \ln x^\infty - y^\infty \ln y^\infty - (\ln y^\infty + 1)(x^\infty - y^\infty). \end{aligned}$$

A última expressão implica que $x^\infty = y^\infty$, pois $x \ln x$ é estritamente convexa em $\mathbb{R}_+$ e diferenciável em $y^\infty \neq 0$.

- $y^\infty = 0$. Supondo, por contradição, que $x^\infty \neq 0$, então

$$\frac{x^i}{y^i} \rightarrow \infty.$$

Uma vez que $x^i \rightarrow x^\infty > 0$ e $y^i \rightarrow 0$. Isto, pela equação 26, contraria a convergência de $D_h(x^i, y^i)$ a 0.

□

B6. Se $(y^i)_{i \in \mathbb{N}} \in S$ e $y^i \rightarrow y^\infty \in \partial S$ então para todo $x \in S$ vale

$$\langle \nabla h(y^i), x - y^i \rangle \rightarrow -\infty.$$

PROVA. Lembrando que uma seqüência $(y^i)_{i \in \mathbb{N}}$ de pontos se aproxima da fronteira de $\mathbb{R}_{++}^n$ se pelo menos uma coordenada se aproxima de zero, pode-se notar que, para

$$\langle \nabla h(y^i), x - y^i \rangle \rightarrow -\infty,$$

basta que isto ocorra para cada coordenada que se aproxima de 0. Deste modo pode-se considerar o caso unidimensional. Tem-se

$$y^i \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad x > 0 \Rightarrow \\ (\ln y^i - 1)(x - y^i) \rightarrow -\infty.$$

□

Completando a prova de que a função proposta é realmente uma função de Bregman coerciva na fronteira de $\mathbb{R}_{++}$.

3.2. A zona é o interior de uma caixa.

$$\bar{S} = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n),$$

onde $a_i < b_i$ para $1 \leq i \leq n$.

O exemplo de função de Bregman introduzido foi:

$$h(x) = \sum_{i=1}^n ((x_i - a_i) \ln(x_i - a_i) + (b_i - x_i) \ln(b_i - x_i)).$$

Cuja distância de Bregman associada é:

$$D_h(x, y) = \sum_{i=1}^n \left((x_i - a_i) \ln \frac{x_i - a_i}{y_i - a_i} + (b_i - x_i) \ln \frac{b_i - x_i}{b_i - y_i} \right).$$

Note a semelhança entre este caso e o anterior (ortante positivo). Mais uma vez as funções envolvidas possuem importante estrutura de separabilidade, permitindo que as manipulações nos reais sejam facilmente estendidas. Também fica claro que as provas de validade das propriedades de funções de Bregman são análogas às provas da subseção 3.1. Por isso apresentar-se-á apenas um esboço das demonstrações, correlacionando-as com as anteriores e apontando as diferenças existentes.

B1. $h(\cdot)$ é continuamente diferenciável em S .

PROVA. Trivial.

□

B2. $h(\cdot)$ é estritamente convexa e contínua em $\bar{S}$.

PROVA. A prova é parecida com o exemplo anterior. Porém, aqui deve-se mostrar separadamente a convexidade estrita de duas funções: $(x - a) \ln(x - a)$ em $[a, \infty)$ e $(b - x) \ln(b - x)$ em $(-\infty, b]$. Segue convexidade estrita de $h(\cdot)$ na intersecção dos intervalos, ou seja $[a, b]$.

A prova de continuidade é basicamente a mesma. $\square$

B3. Os conjuntos de nível são limitados.

Esta é a única prova realmente mais simples, se lembrarmos que a zona considerada é limitada. Como os conjuntos de nível estão contidos na zona o resultado é trivial.

B4. Se $(y^i)_{i \in \mathbf{N}} \in S$ e $y^i \rightarrow y^\infty \in \bar{S}$ então $D_h(y^\infty, y^i) \rightarrow 0$

PROVA. Totalmente análoga ao mesmo item na subseção anterior. $\square$

B5. Se $(x^i)_{i \in \mathbf{N}} \in \bar{S}$ e $(y^i)_{i \in \mathbf{N}} \in S$ são seqüências tais que $(x^i)_{i \in \mathbf{N}}$ é limitada, $y^i \rightarrow y^\infty$ e $D_h(x^i, y^i) \rightarrow 0$ então $x^i \rightarrow y^\infty$.

PROVA. Semelhante à prova anterior, com o cuidado de se considerar a função $(x - a) \ln((x - a)/(y - a))$, para o caso de $y^\infty = a$ e a função $(b - x) \ln((b - x)/(b - a))$ quando $y^\infty = b$. $\square$

B6. $h(\cdot)$ é coerciva na fronteira.

PROVA. Semelhante à prova da subseção 3.1, tomando o cuidado de considerar, como no item anterior, a função correta para os casos de $y^i \rightarrow a$ ou b . $\square$

CAPÍTULO 6

Conclusão

Esta dissertação é orientada para o estudo de métodos de ponto proximal, apresentando duas de suas formas mais importantes: com regularização Euclidiana e com regularizações baseadas em distâncias de Bregman. Além disto, procurando fazer o texto razoavelmente autocontido, foi feita uma revisão de análise convexa.

O ponto fundamental, que deve ser enfatizado, é o uso de separadores como possível abordagem para o estudo do MPP. Este enfoque mostrou ser válido ao permitir uma generalização do MPP com regularização Euclidiana.

A partir desta contribuição aos métodos de ponto proximal, abre-se naturalmente algumas linhas de pesquisa:

1. Extensão dos resultados, seguindo o mesmo enfoque, para funções que não envolvam normas, em particular, para funções de Bregman e φ -divergências[11].
2. Busca de novos métodos de Lagrangianos baseados nos métodos de ponto proximal propostos.
3. Extensão dos resultados para operadores monótonos e solução de problemas de desigualdade variacional.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Avriel. *Nonlinear Programming: Analysis and Methods*. Prentice-Hall, 1976.
- [2] C. Berge. *Espaces Topologiques*. Dunod, 2 edition, 1966.
- [3] D. Bertsekas. *Constrained Optimization and Lagrange Multipliers*. Academic Press, New York, 1982.
- [4] D. Bertsekas. *Nonlinear Programming*. Athena Scientific, 1995.
- [5] L. Bregman. The relaxation method of finding the common points of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 7:200–217, 1967.
- [6] R. S. Burachik. *Generalized Proximal Point Methods for the Variational Inequality Problem*. PhD thesis, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Impa, 1995.
- [7] Y. Censor, A. Iusem, and S. Zenios. An interior point method with Bregman functions for the variational inequality problem with paramonotone operators. *Preprint*, 1996. Será Publicado na Mathematical Programming.
- [8] Y. Censor and J. Zenios. The proximal minimization algorithms with D-functions. *Journal of Optimization: Theory and Applications*, 73:451–464, 1992.
- [9] B. C. Eaves and W. I. Zangwill. Generalized cutting plane algorithms. *SIAM Journal on Control*, 9:529–542, novembro 1971.
- [10] A. F. P. de C. Humes and C. Humes. *Programação Linear: Um Primeiro Curso*. SBMAC, 1986. Livro de minicurso do IX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional.
- [11] A. Iusem. *Métodos de Ponto Proximal em Otimização*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - CNPq, 1995. Livro do 20º Colóquio Brasileiro de Matemática.
- [12] A. Iusem and M. Teboulle. On the convergence rate of entropic proximal minimization algorithms. *Computational and Applied Mathematics*, 12:153–168, 1993.
- [13] A. Iusem, M. Teboulle, and B. Svaiter. Entropy-like proximal methods in convex programming. *Mathematics of Operations Research*, 19(4):790–814. Novembro 1994.
- [14] O. L. Mangasarian. *Nonlinear Programming*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1969.
- [15] George J. Minty. Monotone (nonlinear) operators in Hilbert spaces. *Duke Mathematical Journal*, 29:341–346, 1962.
- [16] George J. Minty. On the monotonicity of the gradient of a convex function. *Pacific Journal of Mathematics*, 14:243–247, 1964.
- [17] J. Moreau. Proximité et dualité dans un espace hilbertien. *Bull. Soc. Math. France*, 93:273–299, 1965.

- [18] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton University Press, 1970.
- [19] R. T. Rockafellar. Augmented lagrangians and applications of the proximal point algorithm in convex programming. *Mathematics of Operations Research*, 1:97–116, 1976.
- [20] R. T. Rockafellar. Monotone operators and the proximal point algorithm. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 14:887–898, Agosto 1976.
- [21] R. T. Rockafellar. On the maximal monotonicity of subdifferential mappings. *Pacific Journal of Mathematics*, 33:209–216, 1976.
- [22] R. T. Rockafellar. *The Theory of Subgradients and its Applications to Problems of Optimization: Convex e Nonconvex Functions*. Heldermann Verlag Berlin, 1979.
- [23] M. Teboulle. Entropic proximal methods with applications to nonlinear programming. *Mathematics of Operations Research*, 17:670–690, 1992.
- [24] W. I. Zangwill. *Nonlinear Programming: An Unified Approach*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1969.