**Controlabilidade
em Sistemas
Hamiltonianos Afins**

Ivan Ruben Aguirre Cipe

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA APLICADA

Área de Concentração: **Matemática Aplicada**
Orientador: **Prof. Dr. Pedro Aladar Tonelli**

*Durante a elaboração deste trabalho,
o autor recebeu apoio financeiro da CAPES*

-São Paulo, novembro de 1996-

Controlabilidade em Sistemas Hamiltonianos Afins

Este exemplar corresponde à redação final
da dissertação devidamente corrigida e
defendida por Ivan Ruben Aguirre Cipe
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 13 de março 1997.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Pedro Aladar Tonelli (Orientador) - IME - USP
- Prof. Dr. Manuel Valentim de Pera Garcia - IME - USP
- Prof. Dr. Paulo Sérgio Pereira da Silva - EP -USP.

doy gracias a Dios

Resumo

Neste trabalho, é abordado o problema da controlabilidade em sistemas Hamiltonianos afins, sob aspecto de fortemente acessível e localmente fracamente observável, para o qual se define um isomorfismo entre a álgebra fortemente acessível e o espaço de observação, que nos dá uma relação entre os critérios, e podemos concluir que um sistema Hamiltoniano afim de controle temos que fortemente acessível se e só se localmente é fracamente observável.

Abstract

In this work, we will study the problem of controllability in affine Hamiltonian system, under the aspect of strongly accessible and locally weakly observable, for which it is defined an isomorphism between the strong accessibility algebra and the observation space and this isomorphism gives us a connection between the criterious; and then we can conclude that an affine Hamiltonian control system is strongly accessible if and only if it is locally weakly observable.

Agradecimentos

Gracias a mis Padres Berta e Ruben.

Este trabalho é parte de um ideal que não teria sido possível realizá-lo sem a ajuda, o incentivo de meus Pais o companheirismo de amigos, colegas e professores. Estendo a todos a minha gratidão.

Sou grato em especial ao meu orientador e amigo Prof. Dr. Pedro Aladar Tonelli, pela sugestão do tema, pelos conselhos, pela nossa amizade, pela paciência *ad infinitum* durante o curso de Mestrado e orientação desta dissertação. Aos meus amigos que me apoiaram sempre Walo, Fily, Ruben e Ivett . Aos meus novos amigos que fiz por estas terras ao Flaco Jose Flores, Carolina, Gaspar e Carlos e a todas aquelas pessoas que deveriam estar aqui..

Pela oportunidade de poder melhorar a minha formação acadêmica e pelas facilidades dispensadas, agradeço à Universidade de São Paulo.

Agradeço a hospitalidade dos Brasileiros.

Agradeço aos meus Pais.

Sumário

Introdução	1
1 Controlabilidade e Observabilidade	3
1.1 Introdução	3
1.2 Sistema de Controle Afim Não-linear	3
1.3 Acessibilidade	5
1.4 Observabilidade	13
2 Geometria Simplética	33
2.1 Introdução	33
2.2 Variedade de Poisson	33
2.3 Variedade Simplética	39
3 Sistema Hamiltoniano de Controle	44
3.1 Introdução	44
3.2 Subvariedade Langrangiana	45
3.3 Sistema Totalmente Hamiltoniano	45
3.4 Sistema Hamiltoniano Afim	46
3.5 Acessibilidade e Observabilidade	51

Introdução

Neste último século a formulação da mecânica clássica tem terminado numa elegante teoria descrita pelos textos [1] e [2], no entanto, a importância desta encontra-se na mecânica analítica, a mecânica analítica inspirou gerações de cientistas, que trouxeram grandes avanços em matemática . O trabalho em sistemas de controle Hamiltoniano foi iniciado por R. Brockett [3], como uma tentativa de apresentar a teoria de controle, desde o ponto de vista de um problema de mecânica analítica, envolvendo forças externas. Os exatos formalismos básicos e primeiros resultados são devido a van der Schaft. O presente trabalho foi inspirado na leitura dos artigos de van der Schaft [24] e [25]. Está dividido em três capítulos .

No capítulo 1, introduzimos os conceitos e teoremas principais de fortemente acessível e localmente fracamente observável em um sistema afim de controle não linear, damos alguns exemplos para ilustrar os teoremas e conceitos de nosso estudo.

No capítulo 2 apresentamos alguns resultados de variedades de Poisson e variedades Simpléticas os quais utilizaremos para definir um sistema Hamiltoniano afim de controle.

No capítulo 3 apresentamos o que entenderemos por um sistema Hamiltoniano afim de controle e mostraremos que neste tipo de sistemas, temos a equivalência entre acessibilidade forte e observabilidade fraca, no sentido que fortemente acessível implica localmente fracamente observável e vice-versa o qual completa este presente trabalho.

Capítulo 1

Controlabilidade e Observabilidade

1.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é definir o que entenderemos por um sistema de controle afim não-linear fortemente acessível, fracamente observável e determinar alguns critérios para que se cumpra estas propriedades.

Os conceitos de controlabilidade e observabilidade em sistemas lineares foram introduzidos na teoria do controle por Kalman [10], [11] (na década de 60). Eles dão uma condição necessária e, em alguns casos, uma condição suficiente para que um problema dado possua solução. Também devemos mencionar a Kreindler e Sarachik [12] os quais desenvolveram independentemente os temas de controlabilidade e observabilidade. As questões similares para sistemas não-lineares não foram tratados efetivamente até 1970. A idéia de usar colchetes de Lie no estudo de acessibilidade pode ser creditada a Chow e também Hermann [8]. Podemos destacar os trabalhos de Brockett [4], Haynes-Hermes [6], trabalhando independentemente Lobry [13], Sussman-Jurdjevic [18] e Krener [13], desenvolveram algo análogo à controlabilidade linear para o caso não-linear em termos da álgebra de Lie de campo vetoriais. Não podemos deixar de mencionar os trabalhos da teoria do controle de Elliot [5], Hermann-Krener [7] e Sussman [19], [20], [22].

1.2 Sistema de Controle Afim Não-linear

Como proposto em [26] e argumentado em [24], [26], um sistema não-linear com entrada e saída pode ser descrito pelos seguintes elementos:

- i) $\mathcal{M}, \mathcal{W}$ variedades suaves.
 - ii) $\mathcal{B}$ é um fibrado vetorial sobre $\mathcal{M}$, com projeção $\pi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{M}$.
 - iii) Uma transformação suave $f : \mathcal{B} \rightarrow T\mathcal{M} \times \mathcal{W}$
- Tal que o diagrama abaixo comuta,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{f} & T\mathcal{M} \times \mathcal{W} \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi_x \\ & \mathcal{M} & \end{array}$$

Onde $\mathcal{W}$ é o espaço de variáveis de saída, $\mathcal{M}$ o espaço de estados e a fibra $\pi^{-1}(x)$ em $\mathcal{B}$, $x \in \mathcal{M}$ representa o espaço de entrada e π_x é a projeção natural de $T\mathcal{M}$ sobre $\mathcal{M}$, isto é, toma um vetor tangente α no ponto $x \in \mathcal{M}$ e associa x . Este conceito formaliza a idéia de que para cada $x \in \mathcal{M}$, temos um conjunto de possíveis velocidades (elementos de $T\mathcal{M}$) e possíveis valores de variáveis de saída (elementos de $\mathcal{W}$) isto é, o espaço

$$f(\pi^{-1}(x)) \subset T_x\mathcal{M} \times \mathcal{W}$$

Em coordenadas locais x para $\mathcal{M}$, u para o fibrado de $\mathcal{B}$, w para $\mathcal{W}$ e $f = (g, h)$ o sistema é dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g(x, u) \\ w &= h(x, u) \end{aligned}$$

Onde $g : \mathcal{B} \rightarrow T\mathcal{M}$ e $h : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{W}$ são transformações suaves. Denotaremos o sistema por $\Sigma(\mathcal{M}, \mathcal{W}, \mathcal{B}, f)$.

Um sistema afim é constituído por uma variedade suave $\mathcal{M}$, junto com uma distribuição diferenciável afim Δ , ou seja, $\Delta(x)$ é um subespaço afim de $T_x\mathcal{M}$ para todo $x \in \mathcal{M}$, e uma transformação $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{W}$ onde $\mathcal{W}$ é a variedade de saída. Em coordenadas locais um sistema de controle afim não-linear é representado por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{j=1}^m g_j(x)u_j \\ y_j &= h_j(x) \quad j = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (1)$$

com $x = (x_1, \dots, x_n)$ coordenadas para $\mathcal{M}$ (espaço estado) e $y = (y_1, \dots, y_p)$ coordenadas para $\mathcal{W}$, $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, compacto é o espaço de controle e $f, g_1, \dots, g_m$ são campos vetoriais suaves definidos em $\mathcal{M}$, tal que $\Delta(x) = f(x) + \text{Span}\{g_1(x), \dots, g_m(x)\}$.

A transformação $h : (h_1, \dots, h_p)^t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^p$ é chamada transformação de saída.

Assumiremos que o sistema (1) é completo, i.e, para todo controle limitado e mensurável $u(t)$ e todo $x_0 \in \mathcal{M}$ existe uma solução da equação (1) satisfazendo a condição $x(t_0) = x_0$ e $x(t) \in \mathcal{M}, \forall t \in \mathbb{R}$, esta condição não é muito restritiva, dado que para sistemas tempo-contínuo, completo é equivalente a V-completo, onde $V \subset \mathcal{U}$ e $\mathcal{U}$ compacto para maiores detalhes veja [17], pagina 96.

1.3 Acessibilidade

Sejam $\mathcal{V}$ uma vizinhança de x_0 e $T > 0$; $\mathcal{R}^{\mathcal{V}}(x_0, T)$ denota o conjunto dos pontos atingíveis desde x_0 num tempo $T > 0$, seguindo uma trajetória à qual permanece para $t \leq T$ na vizinhança $\mathcal{V}$ de x_0 , isto é,

$$\mathcal{R}^{\mathcal{V}}(x_0, T) = \{x \in \mathcal{M} : \text{ existe um controle } u : [0, T] \rightarrow \mathcal{U} \\ \text{ com } x(0) = x_0, x(t) \in \mathcal{V}, 0 \leq t \leq T, x(T) = x\}.$$

Denotaremos por:

$$\mathcal{R}_T^{\mathcal{V}}(x_0) = \bigcup_{\tau \leq T} \mathcal{R}^{\mathcal{V}}(x_0, \tau).$$

Encontrar os pontos atingíveis desde $x_0 \in \mathcal{M}$ em um tempo finito é o que origina o problema de acessibilidade.

Definição 1.3.1 *Seja $\mathcal{V}$ um subconjunto de $\mathcal{M}$, diremos que x_1 é $\mathcal{V}$ -acessível desde x_0 e denotaremos por $x_1 \mathcal{A}_{\mathcal{V}} x_0$, se existe um controle limitado mensurável $u(t) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, tal que a correspondente solução $x(t) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{M}$ da equação diferencial (1) satisfaz*

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1 \quad e \quad x(t) \in \mathcal{V}$$

para todo $t \in [t_0, t_1]$.

Observação 1.3.1 *Em geral, $\mathcal{M}$ -acessível e $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ são referidos simplesmente como acessibilidade e $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}(x_0)$ denotará o conjunto de pontos acessíveis desde x_0 .*

Dado $x_0 \in \mathcal{M}$, o que podemos dizer do conjunto dos pontos que podem ser atingidos desde x_0 em tempo finito para a escolha de um controle u é o problema de controlabilidade.

Definição 1.3.2 *O Sistema (1) é dito controlável em x_0 se $\mathcal{A}(x_0) = \mathcal{M}$ e controlável se $\mathcal{A}(x) = \mathcal{M}$ para todo $x \in \mathcal{M}$.*

Um espaço vetorial V (sobre $\mathbb{R}$) é um álgebra de Lie, se existe uma operação binária $V \times V \longrightarrow V$, denotada $[\cdot, \cdot]$ e satisfaz:

i) Bilinearidad:

$$[\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, v_3] = \alpha_1 [v_1, v_3] + \alpha_2 [v_2, v_3]$$

ii) Antisimétrica:

$$[v_1, v_2] = -[v_2, v_1]$$

iii) Identidade de Jacobi:

$$[v_1, [v_2, v_3]] + [v_2, [v_3, v_1]] + [v_3, [v_1, v_2]] = 0 \quad \forall v_1, v_2, v_3 \in V$$

Uma subálgebra de uma álgebra de Lie $(V, [\cdot, \cdot])$ é um subespaço vetorial $V_1 \subset V$ tal que $[v_1, w_1] \in V_1 \quad \forall v_1, w_1 \in V_1$.

Denotaremos por $V^\infty(\mathcal{M})$ o conjunto dos campos vetoriais suaves em $\mathcal{M}$, que possui uma estrutura de álgebra de Lie mediante a seguinte operação binária $[\cdot, \cdot] : V^\infty(\mathcal{M}) \times V^\infty(\mathcal{M}) \longrightarrow V^\infty(\mathcal{M})$, chamamos $[\cdot, \cdot]$ o colchete de Lie de campos vetoriais.

Definição 1.3.3 : Consideremos o sistema (1). A álgebra acessível $\mathcal{C}$ é a menor subálgebra de $V^\infty(M)$ que contém $f, g_1, \dots, g_m$. A distribuição acessível $\mathcal{C}$ é a distribuição gerada pela álgebra acessível $\mathcal{C}$.

Denotaremos por

$$\mathcal{C}(x) = \text{Span}\{X(x)/X \text{ campo vetorial em } \mathcal{C}\}, \quad x \in \mathcal{M}.$$

Veamos uma caracterização de $\mathcal{C}$ mediante a seguinte proposição.

Proposição 1.3.1 *Todo elemento de $\mathcal{C}$ é uma combinação linear sobre $\mathbb{R}$ de repetidos colchetes de Lie da forma*

$$[X_k, [X_{k-1}, [\dots [X_1, X_0] \dots]]] \quad (*)$$

onde X_i , pertence ao conjunto $\{f, g_1, \dots, g_m\}$, para $0 \leq i \leq k$, $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Seja $\mathcal{L}$ o subespaço vetorial de $V^\infty(M)$ gerado por

$$[X_k, [X_{k-1}, [\dots [X_1, X_0] \dots]]]$$

o comprimento desta expressão é o numero de colchetes de Lie i.e k . Temos que $\mathcal{L} \subset \mathcal{C}$ (pela definição de $\mathcal{C}$). Mostraremos que $\mathcal{L} = \mathcal{C}$. Para isso basta provar que $\mathcal{L}$ é uma subálgebra. De fato, tomemos dois elementos arbitrários de $(*)$

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} &= [Z_j, [Z_{j-1}, [\dots[Z_1, Z_0]\dots]]] \\ \mathcal{Y} &= [Y_l, [Y_{l-1}, [\dots[Y_1, Y_0]\dots]]]\end{aligned}$$

com comprimentos j e l respectivamente. Por indução provemos que $[\mathcal{Z}, \mathcal{Y}] \in \mathcal{L}$, para qualquer j e l . Fixemos l arbitrário e apliquemos indução sobre j . Para $j \leq 1$ isto é verdade. Por hipótese de indução, temos que

$$[\mathcal{Z}, \mathcal{Y}] \in \mathcal{L} \text{ para } j \leq k.$$

Agora tomemos $j = k + 1$, se tomamos

$$\mathcal{Z}^1 = [Z_{j-1}, [\dots[Z_1, Z_0]\dots]]$$

pela identidade de Jacobi

$$[[Z_j, \mathcal{Z}^1], \mathcal{Y}] + [[\mathcal{Z}^1, \mathcal{Y}], Z_j] + [[\mathcal{Y}, Z_j], \mathcal{Z}^1] = 0$$

e como $[[Z_j, \mathcal{Z}^1], \mathcal{Y}] = [\mathcal{Z}, \mathcal{Y}]$, temos

$$\begin{aligned}[\mathcal{Z}, \mathcal{Y}] &= -[[\mathcal{Z}^1, \mathcal{Y}], Z_j] - [[\mathcal{Y}, Z_j], \mathcal{Z}^1] \\ &= [Z_j, [\mathcal{Z}^1, \mathcal{Y}]] + [\mathcal{Z}^1, [\mathcal{Y}, Z_j]] \\ &= [Z_j, [\mathcal{Z}^1, \mathcal{Y}]] - [\mathcal{Z}^1, [Z_j, \mathcal{Y}]]\end{aligned}$$

$\mathcal{Z}^1$ tem comprimento $j - 1 = k$, segue da hipótese de indução que $[\mathcal{Z}^1, \mathcal{Y}] \in \mathcal{L}$ e, portanto, o primeiro termo da direita pertence a $\mathcal{L}$, assim também o segundo termo da direita pertence a $\mathcal{L}$. Logo $[\mathcal{Z}, \mathcal{Y}] \in \mathcal{L}$ e, portanto, $\mathcal{L}$ é uma subálgebra que contém $\{f, g_1, \dots, g_m\}$, logo pela definição

$$\mathcal{L} = \mathcal{C}. \quad \blacksquare$$

Vejamos agora um Teorema que nos será de grande utilidade para justificar algumas propriedades.

Teorema 1.3.1 *Seja o sistema (1). Se $\dim C(x_0) = n$ então para qualquer vizinhança $\mathcal{V}$ de x_0 e $T > 0$, o conjunto $\mathcal{R}_T^{\mathcal{V}}(x_0)$ contém um conjunto aberto não-vazio de $\mathcal{M}$.*

Demonstração: Decorre da hipótese que existe uma vizinhança $V \subset \mathcal{V}$ de x_0 tal que $\dim C(x) = n \ \forall x \in V$. Construiremos uma seqüência de subvariedades $\mathcal{N}_k$ em V com $\dim \mathcal{N}_k = k$, $1 \leq k \leq n$. Seja $\mathcal{F}$ o conjunto de campos vetoriais associados ao sistema (1), isto é $\mathcal{F} = \{ f + \sum_{j=1}^m g_j u_j : (u_1, \dots, u_m) \in \mathcal{U} \}$.

Para $k = 1$ escolhamos $X_1 \in \mathcal{F}$ tal que $X_1(x_0) \neq 0$ então pelo Teorema do Fluxo Tubular para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno temos:

$$\mathcal{N}_1 = \{ X_1^{t_1}(x_0) \mid 0 < t_1 < \epsilon_1 \}$$

é uma subvariedade mergulhada de $\mathcal{M}$ com $\dim \mathcal{N}_1 = 1$ e $\mathcal{N}_1 \subset V$. Agora construiremos $\mathcal{N}_k$ por indução para $k > 1$. Suponhamos agora que $\mathcal{N}_{k-1} \subset V$ é uma subvariedade tal que $\dim \mathcal{N}_{k-1} = k-1$, e definida por:

$$\mathcal{N}_{k-1} = \{ X_{k-1}^{t_{k-1}} \circ X_{k-2}^{t_{k-2}} \circ \dots \circ X_1^{t_1}(x_0) \mid 0 \leq \sigma_i < t_i < \epsilon_i, \ 1 \leq i \leq k-1 \}$$

onde os X_i , $1 \leq i \leq k-1$, são campos vetoriais em $\mathcal{F}$ e $\sum_{i=1}^{k-1} \sigma_i$ é suficientemente pequeno.

Se $k-1 < n$, suponhamos que $X(q) \in T_q \mathcal{N}_{k-1}$ para qualquer $X \in \mathcal{F}$ e $q \in \mathcal{N}_{k-1}$, isto implica que $\dim C(q) < n, \forall q \in \mathcal{N}_{k-1} \subset V$, o que contraria a definição de V , logo podemos encontrar $X_k \in \mathcal{F}$ e $q \in \mathcal{N}_{k-1}$ tal que

$$X_k(q) \notin T_q \mathcal{N}_{k-1}$$

Portanto, podemos tomar q arbitrariamente próximo de x_0 tal que a transformação

$$(t_k, \dots, t_1) \mapsto X_k^{t_k} \circ X_{k-1}^{t_{k-1}} \circ \dots \circ X_1^{t_1}(x_0)$$

tem posto igual a k no conjunto $0 \leq \sigma_i < t_i < \epsilon_i$, $1 \leq i \leq k$, pelo Teorema do Posto, a imagem da transformação para ϵ_i , $1 \leq i \leq k$ suficientemente pequeno é uma subvariedade mergulhada $\mathcal{N}_k \subset V$ de dimensão k , e podemos continuar com este procedimento ate que $k = n$ e podemos concluir que $\mathcal{N}_n$ é um conjunto aberto contido em $\mathcal{R}_T^{\mathcal{V}}(x_0)$. ■

Definição 1.3.4 Diremos que o sistema (1) é localmente acessível desde x_0 quando $\mathcal{R}_T^{\mathcal{V}}(x_0)$ contém um conjunto aberto não-vazio de $\mathcal{M}$ para toda vizinhança $\mathcal{V}$ de x_0 e todo $T > 0$. Se isto ocorre para todo $x_0 \in \mathcal{M}$, então o sistema é chamado localmente acessível.

Corolário 1.3.1 Se $\dim C(x) = n$ para todo $x \in \mathcal{M}$, então o sistema (1) é localmente acessível.

Demonstração: É uma consequência do Teorema. ■

A proposição a seguir nos permite encontrar uma subvariedade de $\mathcal{M}$ onde o sistema (1) restrito a essa subvariedade é localmente acessível.

Proposição 1.3.2 *Se $\dim C = k$ numa vizinhança de x_0 , $k < n$. Então podemos encontrar vizinhanças $\mathcal{W}$ de x_0 e coordenadas locais $x_1, \dots, x_n$ tal que a subvariedade*

$$S_{x_0} = \{q \in \mathcal{W} \mid x_i(q) = x_i(x_0) \text{ } i = k+1, \dots, n\}$$

é uma variedade integral de C . Então para qualquer vizinhança $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$ de x_0 e para todo $T > 0$, $\mathcal{R}_T^{\mathcal{V}}(x_0)$ está contida em S_{x_0} . Além disso, $\mathcal{R}_T^{\mathcal{V}}(x_0)$ contém um conjunto aberto não-vazio da variedade integral S_{x_0} o sistema (1) restrito a esta variedade é localmente acessível.

Demonstração: Decorre do Teorema de Frobenius a primeira parte, pois C é involutiva. Temos que $f(x) + \sum_{j=1}^m g_j(x)u_j \in C(x)$ para todo $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathcal{U}$ e $x \in \mathcal{M}$.

O sistema (1) para $x(0) = x_0$ pode ser restrito a S_{x_0} (para t suficientemente pequeno), e temos que $\dim S_{x_0} = \dim C(x_0)$ onde podemos aplicar o Corolário (1.3.1) a este sistema restrito. ■

Mesmo que o sistema seja controlável em x_0 pode ser necessário percorrer uma considerável distância ou um tempo grande para alcançar pontos próximos de x_0 , por isso introduziremos o conceito de controlabilidade local.

Definição 1.3.5 *O sistema (1) é controlável localmente em x_0 se para toda vizinhança $\mathcal{V}$ de x_0 , $A_{\mathcal{V}}(x_0)$ é também uma vizinhança de x_0 . O sistema (1) é controlável localmente se é localmente controlável para todo $x \in \mathcal{M}$.*

A relação de acessibilidade é reflexiva e transitiva para sistemas não-lineares (não é simétrica), é possível definir uma relação fraca que seja de equivalência isto dá origem aos conceitos de $\mathcal{V}$ -acessibilidade fraca, fracamente controlável, para maiores detalhes veja [7].

Exemplo 1.3.1 *Consideremos o seguinte sistema:*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u \\ \dot{y} &= x^2\end{aligned}$$

Para qualquer ponto (x, y) no plano, só a região sobre o plano y é acessível, basta tomar x_1 e x_2 tal que $x_1 < x_2$, para ver que a acessibilidade não é simétrica (figura 1.1).

Figura 1.1:

Definição 1.3.6 Dizemos que o sistema (1) é fortemente acessível desde x_0 se $\mathcal{R}^{\mathcal{M}}(x_0, T)$ tem interior não-vazio para algum T . Se isto ocorre para todo $x_0 \in \mathcal{M}$ temos que o sistema (1) é chamado fortemente acessível.

Em [16] fortemente acessível é definido como localmente acessível, a definição a seguir nos levará a um critério para saber quando um sistema é fortemente acessível.

Definição 1.3.7 Consideremos o sistema (1). A álgebra fortemente acessível $\mathcal{C}_0$ é a menor sub-álgebra a qual contém os campos $g_1, \dots, g_m$ e satisfaz $[f, X] \in \mathcal{C}_0$ para todo $X \in \mathcal{C}_0$. Uma distribuição fortemente acessível $\mathcal{C}_0$ é a distribuição involutiva gerada por $\mathcal{C}_0$, onde

$$\mathcal{C}_0(x) = \text{Span}\{X(x) \mid X \text{ campo vetorial em } \mathcal{C}_0\}$$

Se no sistema (1), temos que f é uma combinação linear de $\{g_1, \dots, g_m\}$ então $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$, significa fisicamente que o f pode ser anulado por uma entrada adequada e o sistema equivale a um sistema sim drift. Temos que $\mathcal{C}_0 + \text{span}\{f\} \subset \mathcal{C}$ e se x é um ponto regular de $\mathcal{C}_0 + \text{span}\{f\}$ então $(\mathcal{C}_0 + \text{span}\{f\})(x) = \mathcal{C}(x)$, veja maiores detalhes em [9] pagina 61.

Vejamos uma caracterização de $\mathcal{C}_0$, mediante a seguinte proposição.

Proposição 1.3.3 *Todo elemento de $\mathcal{C}_0$ é uma combinação linear de repetidos colchetes de Lie da forma*

$$[X_k, [X_{k-1}, [\dots [X_1, g_j] \dots]] \quad 1 \leq j \leq m \quad k = 1, \dots \quad (*)$$

onde cada X_i pertence ao conjunto $\{f, g_1, \dots, g_m\}$, $1 \leq i \leq k$.

Demonstração: Seja $\mathcal{L}_0$ o subespaço linear de $V^\infty(\mathcal{M})$ gerado pelos campos $(*)$, o comprimento desta expressão é o número de colchetes de Lie, i.e k . Decorre da definição de $\mathcal{C}_0$ que $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{C}_0$. Mostremos que $\mathcal{L}_0 = \mathcal{C}_0$. Para isso basta provar que $\mathcal{L}_0$ é um subálgebra. Seja

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= [Z_p, [Z_{p-1}, [\dots [Z_1, g_i] \dots]] \\ \mathcal{Y} &= [Y_l, [Y_{l-1}, [\dots [Y_1, g_n] \dots]] \end{aligned}$$

elementos pertencentes a $(*)$, de comprimento p e l respectivamente. Por indução provemos que $[\mathcal{Z}, \mathcal{Y}] \in \mathcal{L}_0$, para qualquer p e l . Assumamos que $[\mathcal{Z}, \mathcal{Y}] \in \mathcal{L}_0$, para todo $\mathcal{Y}$, l arbitrário e para todo $p \leq k$. Isto é verdade para $k = 1$. Pela hipótese de indução assumamos que é válido $p \leq k$. Provemos que é válido para $p = k + 1$. Tomando-se $\mathcal{Z}^1 = [Z_{p-1}, [Z_{p-2}, [\dots [Z_1, g_i] \dots]]$ pela identidade de Jacobi temos:

$$[[Z_p, \mathcal{Z}^1], \mathcal{Y}] + [[\mathcal{Z}^1, \mathcal{Y}], Z_p] + [[\mathcal{Y}, Z_p], \mathcal{Z}^1] = 0$$

mas, $[[Z_p, \mathcal{Z}^1], \mathcal{Y}] = [\mathcal{Z}, \mathcal{Y}]$ logo,

$$\begin{aligned} [\mathcal{Z}, \mathcal{Y}] &= -[[\mathcal{Z}^1, \mathcal{Y}], Z_p] - [[\mathcal{Y}, Z_p], \mathcal{Z}^1] \\ &= [Z_p, [\mathcal{Z}^1, \mathcal{Y}]] - [\mathcal{Z}^1, [Z_p, \mathcal{Y}]] \end{aligned}$$

$\mathcal{Z}^1$ tem comprimento $j - 1 = k$, segue da hipótese de indução que $[\mathcal{Z}^1, \mathcal{Y}] \in \mathcal{L}_0$ e portanto, o primeiro termo da direita pertence a $\mathcal{L}_0$ e, assim também o segundo termo da direita pertence a $\mathcal{L}_0$. Logo

$$[\mathcal{Z}, \mathcal{Y}] \in \mathcal{L}_0$$

portanto $\mathcal{L}_0$ é uma subálgebra e por definição

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{C}_0. \quad \blacksquare$$

O Teorema a seguir nos dá um critério para que um sistema seja fortemente acessível.

Teorema 1.3.2 *Se $\mathcal{C}_0(x) = T_x \mathcal{M}$ para todo $x \in \mathcal{M}$, então o sistema (1) é fortemente acessível.*

Demonstração: Por hipótese

$$C_0(x_0) = T_{x_0}\mathcal{M},$$

logo

$$\dim C_0(x_0) = \dim \mathcal{M} = n$$

reduziremos a nossa demonstração para poder aplicar o Teorema (1.3.1). Para isso acrescentaremos ao espaço de estado da equação (1) a equação $\dot{t} = 1$. Obtendo assim o sistema

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{j=1}^m g_j(x)u_j$$

$$\dot{t} = 1$$

onde $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \times \mathbb{R}$, espaço de estado $\tilde{x} = (x, t)$ e

$$\tilde{f}(x, t) = f(x) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}, \quad \tilde{g}_j(x, t) = g_j(x) \frac{\partial}{\partial x} \quad j = 1, \dots, m$$

são campos vetoriais definidos em $\tilde{\mathcal{M}}$, podemos concluir que a distribuição acessível $\tilde{C}$ do sistema aumentado satisfaz

$$\tilde{C}_0(x_0, t_0) = C_0(x_0)$$

$$\tilde{C}(x_0, t_0) = \tilde{C}_0(x_0, t_0) + \text{Span}\left\{f(x_0) + \frac{\partial}{\partial t}\right\}$$

Portanto

$$\dim \tilde{C}(x_0, t_0) = \dim C_0(x_0) + 1 \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}$$

em particular, temos

$$\dim \tilde{C}(x_0, 0) = n + 1$$

Pelo Teorema (1.3.1), podemos concluir que, para qualquer $T > 0$ e $\mathcal{V}$ uma vizinhança de x_0 , tal que $\tilde{\mathcal{V}} = \mathcal{V} \times (-\epsilon, T + \epsilon)$, $\epsilon > 0$, o conjunto $\mathcal{R}_T^{\tilde{\mathcal{V}}}(x_0, 0)$ contém um conjunto aberto não-vazio de $\tilde{\mathcal{M}}$, onde $\tilde{\mathcal{V}} \subset \tilde{\mathcal{M}}$ é uma vizinhança de $(x_0, 0)$. Portanto existe $\mathcal{W} \subset \mathcal{M}$ aberto não-vazio e um intervalo (a, b) , com $0 < a < b \leq T$ tal que $\mathcal{W} \times (a, b) \subset \mathcal{R}_T^{\tilde{\mathcal{V}}}((x_0, 0))$.

Por outro lado, seja $\mathcal{T} \in (a, b)$, $\mathcal{W} \times \{\mathcal{T}\} \subset \mathcal{R}_T^{\tilde{\mathcal{V}}}((x_0, 0))$, e podemos dizer que $\mathcal{W} \subset \mathcal{R}^{\mathcal{V}}(x_0, \mathcal{T})$. Portanto, o interior de $\mathcal{R}^{\mathcal{M}}(x_0, T)$ é não-vazio para algum T (pode ser $T = \mathcal{T}$).

Isso demonstra o teorema. ■

Observação 1.3.2 Quando o sistema (1) é analítico (os campos são analíticos), temos que fortemente acessível e a condição $C(x) = T_x\mathcal{M}$, para todo $x \in \mathcal{M}$ são equivalentes, para maiores detalhes veja [18].

Vejamos uma definição local para Fortemente Acessível.

Definição 1.3.8 O sistema (1) é localmente fortemente acessível desde x_0 , se para toda vizinhança $\mathcal{V}$ de x_0 , o conjunto $\mathcal{R}^{\mathcal{V}}(x_0, T)$ contém um subconjunto aberto não-vazio para qualquer $T > 0$ suficientemente pequeno.

Como consequência do Teorema (1.3.2) temos

Teorema 1.3.3 Seja o sistema (1). Se $C_0(x_0) = T_{x_0}\mathcal{M}$, então o sistema é localmente fortemente acessível desde x_0 .

Demonstração: Retomemos a prova do Teorema (1.3.2), definamos a transformação $\Lambda : \mathcal{W} \rightarrow \tilde{\mathcal{W}}$, onde $\tilde{\mathcal{W}} \subset \mathcal{R}^U(x_0, T)$ é aberto e U vizinhança de x_0 , tal que $\Lambda(x) = X^{T-\mathcal{T}}(x)$, $X \in \mathcal{F}$. Escolhendo T suficientemente pequeno, $\tilde{\mathcal{W}} \cap \mathcal{R}^{\mathcal{V}}(x_0, T)$ contém um conjunto aberto não-vazio de $\mathcal{M}$. Portanto o sistema (1) é localmente fortemente acessível. ■

1.4 Observabilidade

Observação 1.4.1 Denotaremos por $y(t, 0, x_0, u) = h(x(t, 0, x_0, u))$ a saída do sistema (1) para um controle u , com estado inicial $x(0) = x_0$.

Definição 1.4.1 Dizemos que dois estados $x_1, x_2 \in \mathcal{M}$ são indistinguíveis (denotado $x_1 \mathcal{I} x_2$) para o sistema (1), se para todo controle admissível u a função de saída $t \rightarrow y(t, 0, x_1, u)$, $t \geq 0$ do sistema para um estado inicial $x(0) = x_1$ e a função de saída $t \rightarrow y(t, 0, x_2, u)$, $t \geq 0$ do sistema para um estado inicial $x(0) = x_2$ são idênticas no seu domínio de definição.

Observação 1.4.2 A indistinguíbilidade é uma relação de equivalência em $\mathcal{M}$.

Exemplo 1.4.1 *Sejam $\mathcal{M} = \mathbb{R}, \mathcal{U} = \mathbb{R}$ e consideremos o sistema:*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u \\ y_1 &= \cos x \\ y_2 &= \sin x\end{aligned}$$

Com $x(0) = x_0$ os estados x_0 e x_k são indistinguíveis, onde $x_k = x_0 + 2k\pi$ para quaisquer x_0 e $k \in \mathbb{Z}$.

Definição 1.4.2 *O sistema (1) é dito observável quando $x_1 \mathcal{I} x_2$ implica que $x_1 = x_2$. Equivalentemente se $\mathcal{I}(x) = \{x_0 \in \mathcal{M} : x_0 \mathcal{I} x\} = \{x\}$ para todo $x \in \mathcal{M}$, onde $\mathcal{I}(x)$ é a classe de equivalência de x .*

A observabilidade é um conceito global podemos percorrer uma considerável distância ou um longo tempo para distinguir entre pontos de $\mathcal{M}$. Portanto introduziremos um conceito local que é mais forte que observabilidade.

Definição 1.4.3 *Seja $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$ um conjunto aberto tal que $x_1, x_2 \in \mathcal{V}$. Diremos que x_1 e x_2 são $\mathcal{V}$ -indistinguíveis denotado por $x_1 \mathcal{I}_{\mathcal{V}} x_2$, se para todo controle admissível $u : [0, T] \rightarrow \mathcal{U}$, $T > 0$ arbitrário, com a propriedade de que as soluções $x(t, 0, x_1, u)$ e $x(t, 0, x_2, u)$ ambas permaneçam em $\mathcal{V}$ para $t \leq T$, as funções de saída $y(t, 0, x_1, u)$ e $y(t, 0, x_2, u)$ são as mesmas para $t \leq T$, no domínio de definição.*

$\mathcal{V}$ -indistinguíbilidade não é, em geral, uma relação de equivalência em $\mathcal{V}$, falha a transitividade, como consequência de que o sistema restrito a $\mathcal{V}$ não necessariamente é completo, como é mostrado em [21]. Entretanto, podemos definir no sistema (1) o que entenderemos por localmente observável.

Definição 1.4.4 *O sistema (1) é localmente observável em x_0 se para toda vizinhança aberta $\mathcal{V}$ de x_0 a relação $x_0 \mathcal{I}_{\mathcal{V}} x_1$ implica $x_0 = x_1$ o que é o mesmo que a classe de x_0 , $\mathcal{I}_{\mathcal{V}}(x_0) = \{x_0\}$. Se o sistema é localmente observável em cada $x_0 \in \mathcal{M}$ então diremos que é localmente observável.*

Em [16] nós encontramos com outra definição de localmente observável, a qual nós definiremos como localmente fracamente observável, seguindo [7]

Na prática nos interessa saber se x_0 é distinguível desde uma certa vizinhança, por isto definamos o que entenderemos por fracamente observável.

Definição 1.4.5 *O sistema (1) é fracamente observável em x_0 se existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ de x_0 tal que $\mathcal{I}(x_0) \cap \mathcal{V} = \{x_0\}$. O sistema é fracamente observável se é fracamente observável em cada $x_0 \in \mathcal{M}$.*

Em [16] Nijmeijer define fracamente observável como localmente observável.

Uma vez mais pode ser necessário percorrer uma considerável distância de $\mathcal{V}$ para distinguir pontos de $\mathcal{V}$, vejamos um conceito local.

Definição 1.4.6 *O sistema (1) é localmente fracamente observável em x_0 , se existe uma vizinhança aberta $\mathcal{W}$ de x_0 tal que para toda vizinhança aberta $\mathcal{V}$ de x_0 , $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$, $\mathcal{I}_{\mathcal{V}}(x_0) = \{x_0\}$. Diremos que o sistema é localmente fracamente observável se a igualdade estiver satisfeita para todo $x_0 \in \mathcal{M}$.*

Observação 1.4.3 *Intuitivamente o sistema (1) é localmente fracamente observável se podemos instantaneamente distinguir cada ponto desde suas vizinhanças. A vantagem desta definição é que pode ser conferida com um simples teste algébrico.*

Dado o sistema (1) é fácil ver que temos as seguintes implicações:

$$\begin{array}{ccc} (1)\text{localmente observável} & \implies & (1)\text{observável} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (1)\text{localmente fracamente observável} & \implies & (1)\text{fracamente observável} \end{array}$$

As seguintes definições nos fornecem um teste simple para saber quando o sistema (1) é localmente fracamente observável.

Definição 1.4.7 *O espaço de observação $\mathcal{O}$ do sistema (1) é o espaço vetorial (sobre $\mathbb{R}$) das funções reais em $\mathcal{M}$ que contém $h_1, \dots, h_p$ e todas as repetidas derivadas de Lie:*

$$\mathcal{L}_{X_1} \mathcal{L}_{X_2} \dots \mathcal{L}_{X_k} h_j \quad 1 \leq j \leq p, \quad k = 1, 2, \dots$$

com X_i no conjunto $\{f, g_1, \dots, g_m\}$, $1 \leq i \leq k$

Vejamos uma caracterização equivalente de $\mathcal{O}$ que é dada em [7], mediante a seguinte proposição.

Proposição 1.4.1 *O espaço de observação $\mathcal{O}$ é dado pelo espaço vetorial das funções em $\mathcal{M}$ geradas por $h_1, \dots, h_p$ e todas as iteradas derivadas de Lie.*

$$\mathcal{L}_{Z_1} \mathcal{L}_{Z_2} \dots \mathcal{L}_{Z_k} h_j, \quad 1 \leq j \leq p, \quad k = 1, 2, \dots$$

onde Z_i , $1 \leq i \leq k$ é da forma

$$Z_i(x) = f(x) + \sum_{j=1}^m g_j(x)u_j^i$$

para algum $u^i = (u_1^i, \dots, u_m^i) \in \mathcal{U}$, $Z_i \in \mathcal{F}$

Demonstração: Usaremos a seguintes propriedades:

$$\mathcal{L}_{(X_1+X_2)}H = \mathcal{L}_{X_1}H + \mathcal{L}_{X_2}H$$

$$\mathcal{L}_X(H_1 + H_2) = \mathcal{L}_X H_1 + \mathcal{L}_X H_2$$

onde X, X_1, X_2 são campos vetoriais e H, H_1, H_2 funções definidas em $\mathcal{M}$. A prova é por indução sobre k

seja $k = 1$ temos que $Z_1 = f(x) + \sum_{j=1}^m g_j(x)u_j^1$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Z_1}h_j &= \mathcal{L}\left(f(x) + \sum_{j=1}^m g_j(x)u_j^1\right) h_j \\ &= \mathcal{L}_{f(x)}h_j + \mathcal{L}\left(\sum_{j=1}^m g_j(x)u_j^1\right) h_j \end{aligned}$$

esta soma está contida em $\mathcal{O}$. Portanto $\mathcal{L}_{Z_1}h_j$ está contida em $\mathcal{O}$. Agora provaremos que $\mathcal{L}_{Z_1}\mathcal{L}_{Z_2}\dots\mathcal{L}_{Z_k}h_j$ está em $\mathcal{O}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Z_1}\mathcal{L}_{Z_2}\dots\mathcal{L}_{Z_k}h_j &= \mathcal{L}_{Z_1}\mathcal{L}_{Z_2}\dots\mathcal{L}_{Z_{k-1}}\mathcal{L}\left(f(x) + \sum_{j=1}^m g_j(x)u_j^k\right) h_j \\ &= \mathcal{L}_{Z_1}\mathcal{L}_{Z_2}\dots\mathcal{L}_{Z_{k-1}}(\mathcal{L}_{f(x)}h_j + \mathcal{L}\left(\sum_{j=1}^m g_j(x)u_j^k\right) h_j) \\ &= \mathcal{L}_{Z_1}\mathcal{L}_{Z_2}\dots\mathcal{L}_{Z_{k-1}}(\mathcal{L}_{f(x)}h_j) + \mathcal{L}_{Z_1}\mathcal{L}_{Z_2}\dots\mathcal{L}_{Z_{k-1}}(\mathcal{L}\left(\sum_{j=1}^m g_j(x)u_j^k\right) h_j) \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução temos que esta soma pertence a $\mathcal{O}$. Portanto temos que

$$\mathcal{L}_{Z_1}\dots\mathcal{L}_{Z_k}h_j \quad \text{está em } \mathcal{O}.$$

Por outro lado, fazendo $f = Z_i$ para $u^i = 0$ e $g_j = \frac{1}{2}(f + g_j) - \frac{1}{2}(f - g_j)$ todo campo vetorial $f, g_1, \dots, g_m$ definido em $\mathcal{M}$ é uma combinação linear dos Z_i . Isto demonstra a proposição. ■

Podemos concluir que o espaço de observação $\mathcal{O}$ contém as funções de saída e todas as derivadas da função de saída ao longo de sistema de trajetórias.

Proposição 1.4.2 *O espaço de observação $\mathcal{O}$ não muda se trocamos os campos vectoriais X_i , $1 \leq i \leq k$ em $\mathcal{L}_{X_1}\mathcal{L}_{X_2}\dots\mathcal{L}_{X_k}h_j$ $1 \leq j \leq p$ $k = 1, 2, \dots$ por elementos da álgebra acessível $\mathcal{C}$.*

Demonstração: Um elemento da álgebra acessível $\mathcal{C}$ de comprimento k é

$$[X_k, [X_{k-1}, [\dots, [X_1, X_0] \dots]]]$$

Apliquemos indução ao comprimento. Tomemos um elemento de comprimento $k = 1$. Pela definição de colchete de Lie

$$\mathcal{L}_{[X_1, X_0]}h_i = \mathcal{L}_{X_1}(\mathcal{L}_{X_0}h_i) - \mathcal{L}_{X_0}(\mathcal{L}_{X_1}h_i),$$

onde $X_0, X_1 \in \{f, g_1, \dots, g_m\}$, decorre da Definição (1.4.7), que esta diferença pertence a $\mathcal{O}$, portanto

$$\mathcal{L}_{[X_1, X_0]}h_i \in \mathcal{O}, \quad 1 \leq i \leq p.$$

Suponhamos que é válido para $k - 1$, ou seja

$$\mathcal{L}_{[X_{k-1}, [X_{k-2}, \dots, [X_0, X_1] \dots]]} h_i \in \mathcal{O}$$

Onde $X_j \in \{f, g_1, \dots, g_m\}$, $0 \leq j \leq k - 1$, $1 \leq i \leq p$.

Demonstremos que é válido para k . Temos que

$$\mathcal{L}_{[X_k, [X_{k-1}, \dots, [X_1, X_0] \dots]]}h_i = \mathcal{L}_{X_k}(\mathcal{L}_{[X_{k-1}, [X_{k-2}, \dots, [X_1, X_0] \dots]]}h_i) - \mathcal{L}_{[X_{k-1}, [X_{k-2}, \dots, [X_1, X_0] \dots]]}(\mathcal{L}_{X_k}h_i)$$

segue da hipótese de indução e da Definição (1.4.7), que

$$\mathcal{L}_{[X_k, [X_{k-1}, \dots, [X_1, X_0] \dots]]}h_i \in \mathcal{O}$$

O qual demonstra a proposição. ■

Observação 1.4.4 *E da mesma forma, se h_i é substituída por qualquer função $\mathcal{L}_{X_1}\mathcal{L}_{X_2}\dots\mathcal{L}_{X_k}h_j$, $1 \leq j \leq p$, $k = 1, 2, \dots$ $X_i \in \{f, g_1, \dots, g_m\}$.*

A partir do espaço de observação $\mathcal{O}$ podemos definir a codistribuição de observabilidade denotada por $d\mathcal{O}$, isto é

$$d\mathcal{O}(q) = \text{Span}\{dH(q) \mid H \in \mathcal{O}\}, \quad q \in \mathcal{M}$$

Temos que $d\mathcal{O}$ é gerado por 1-formas exatas.

A derivada de Lie é definida por:

$$\mathcal{L}_{X_1}(Y_1)(x) = \left(\frac{\partial Y_1^t}{\partial x}(x)X_1(x)\right)^t - Y_1(x)\frac{\partial X_1}{\partial x}$$

onde $Y_1 \in d\mathcal{O}$, X_1 campo vetorial.

Temos a fórmula de Leibnitz:

$$\mathcal{L}_{X_1}\langle Y, X_2 \rangle = \langle \mathcal{L}_{X_1}Y, X_2 \rangle + \langle Y, [X_1, X_2] \rangle$$

Se $Y = dH$ então $\mathcal{L}_X$ e d comutam, isto é

$$\mathcal{L}_X(dH) = d(\mathcal{L}_X(H))$$

Logo, segue que a codistribuição $d\mathcal{O}$ é involutiva. Os elementos de $d\mathcal{O}$ são combinações lineares finitas de 1-formas da forma:

$$d(\mathcal{L}_{Z_1}(\dots(\mathcal{L}_{Z_k}h_i)\dots)) = \mathcal{L}_{Z_1}(\dots(\mathcal{L}_{Z_k}dh_i)\dots)$$

Onde Z_i é definido como na Proposição (1.4.1).

Vejamos agora um teorema que nos ajudará a saber quando um sistema é localmente fracamente observável.

Teorema 1.4.1 *Seja o sistema (1) tal que $\dim \mathcal{M} = n$. Se $d\mathcal{O}(x_0) = T_{x_0}^*\mathcal{M}$, ou seja, $\dim d\mathcal{O}(x_0) = n$ então o sistema é localmente fracamente observável em x_0 .*

Demonstração: Se $\dim d\mathcal{O}(x_0) = n$ então existem n funções $H_1, \dots, H_n \in \mathcal{O}$ tal que $\{dH_1(x_0), \dots, dH_n(x_0)\}$ são linearmente independentes. Definamos uma transformação $\phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\phi(x) = (H_1(x), \dots, H_n(x))^t,$$

Sendo o Jacobiano de ϕ em x_0 não-singular, segue que ϕ restrita a uma vizinhança aberta $\mathcal{W}$ de x_0 é injetora. Se $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$ é uma vizinhança aberta de x_0 e $x_0 \mathcal{I}_{\mathcal{V}} x_1$ para algum $x_1 \in \mathcal{V}$ então para qualquer $1 \leq i \leq p$ e $k \geq 0$ e para $t_1, \dots, t_k$ pequenos temos que:

$$h_i(\gamma_k^{t_k} \circ \gamma_{k-1}^{t_{k-1}} \circ \dots \circ \gamma_1^{t_1}(x_0)) = h_i(\gamma_k^{t_k} \circ \gamma_{k-1}^{t_{k-1}} \circ \dots \circ \gamma_1^{t_1}(x_1))$$

onde $\gamma_i^{t_i}(x)$ denota o fluxo de $Z_i(x) = f(x) + \sum_{j=1}^m g_j(x)u_j^i$ $1 \leq i \leq k$. Diferenciando em ambos os lados com relação a $t_k, \dots, t_1$ (nesta ordem) e fazendo $t_k = t_{k-1} = \dots = t_1 = 0$, temos,

$$\mathcal{L}_{Z_1}(\mathcal{L}_{Z_2}(\dots \mathcal{L}_{Z_k} h_i(x_0) \dots)) = \mathcal{L}_{Z_1}(\mathcal{L}_{Z_2}(\dots \mathcal{L}_{Z_k} h_i(x_1) \dots))$$

Pela Proposição(1.4.1) segue que $H(x_0) = H(x_1)$ para todo $H \in \mathcal{O}$. Em particular, $H_i(x_0) = H_i(x_1)$ $1 \leq i \leq n$ e sendo ϕ injetora em $\mathcal{W}$, temos que $x_0 = x_1$. Resumindo temos que para toda vizinhança aberta $\mathcal{V}$ de x_0 , $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$ se $x_0 \mathcal{I}_{\mathcal{V}} x_1$ implica que $x_0 = x_1$, isto é, o sistema é localmente fracamente observável. ■

Exemplo 1.4.2 Consideremos uma 2-articulação rígida de um robô manipulador ou pêndulo duplo, onde os torques u_1, u_2 aplicados nas juntas representam o controle.

Figura 1.2:

A dinâmica do braço-robô, pode ser obtida via a equação de Euler-Lagrange. Consideremos $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ e $\dot{\theta} = (\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$, a função de Lagrange é dada por:

$$L(\theta, \dot{\theta}) = T(\theta, \dot{\theta}) - V(\theta)$$

Onde $T(\theta, \dot{\theta})$ é a energia cinética e $V(\theta)$ a energia potencial. A energia cinética, é

$$T(\theta, \dot{\theta}) = T_1(\dot{\theta}) + T_2(\theta, \dot{\theta})$$

Onde $T_1(\dot{\theta})$ e $T_2(\theta, \dot{\theta})$ são a energia cinética das massas m_1 e m_2 respectivamente, i.e,

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 \text{ e } T_2 = \frac{1}{2}m_2 v_2^2.$$

Consideremos um deslocamento infinitesimal do pêndulo duplo, caracterizado pelos incrementos $d\theta_1$ e $d(\theta_2 + \theta_1)$ nas coordenadas generalizadas (figura 1.3). A massa m_1 move-se de A para A' e sofre um deslocamento $ds_1 = l_1 d\theta$. Portanto

$$v_1^2 = \left(\frac{ds_1}{dt} \right)^2 = \left(l_1 \frac{d\theta_1}{dt} \right)^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

Figura 1.3:

A massa m_2 move-se de B para B'' e este deslocamento $ds_2 = BB''$. O pêndulo inferior é ainda movimentado em um ângulo $d(\theta_1 + \theta_2)$ fazendo que o ponto B' mova-se até B'' , com $B'B'' = l_2 d(\theta_1 + \theta_2)$. O deslocamento total BB'' de m_2 é

$$\begin{aligned} (BB'')^2 &= (BB')^2 + (B'B'')^2 - 2(BB')(B'B'') \cos(\pi - \theta_2) \\ &= (BB')^2 + (B'B'')^2 + 2(BB')(B'B'') \cos \theta_2 \\ &= (l_1 d\theta_1)^2 + (l_2 d(\theta_1 + \theta_2))^2 + 2(l_1 d\theta_1)(l_2 d(\theta_1 + \theta_2)) \cos \theta_2 \end{aligned}$$

daí segue que

$$v_2^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_2$$

Portanto temos que

$$\begin{aligned} T_1(\dot{\theta}) &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \\ T_2(\theta, \dot{\theta}) &= \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 (l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)), \end{aligned}$$

e finalmente,

$$\begin{aligned} T(\theta, \dot{\theta}) &= T_1(\dot{\theta}) + T_2(\theta, \dot{\theta}) \\ &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)) \end{aligned}$$

Similarmente a energia potencial $V(\theta)$ é a soma da energia potencial $V_1(\theta)$ e $V_2(\theta)$ das duas massas.

$$\begin{aligned} V_1(\theta) &= m_1 g y_1 = -m_1 g l_1 \cos \theta_1 \\ V_2(\theta) &= m_2 g y_2 = -m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)), \end{aligned}$$

isto é

$$V(\theta) = V_1(\theta) + V_2(\theta) = -m_1 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2))$$

Portanto a função Lagrangeana é representada por

$$\begin{aligned} L(\theta, \dot{\theta}) &= T(\theta, \dot{\theta}) - V(\theta) \\ &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2 l_1 l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)) \\ &\quad + m_1 g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)). \end{aligned}$$

Agora, calculemos a equação de Euler-Lagrange dada por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = u_i, \quad i = 1, 2.$$

Temos que:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 (2 \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + m_2 l_2^2 (\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2).$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1.$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= \ddot{\theta}_1 (m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2 m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2) + \ddot{\theta}_2 (m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2) \\ &\quad - 2 m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2. \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = \ddot{\theta}_1 (m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2) + \ddot{\theta}_2 m_2 l_2^2 - m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m_1 g l_1 \sin \theta_1 - m_2 g l_1 \sin \theta_1 - m_2 g l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2).$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) - m_2 g l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2).$$

Substituindo temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= \ddot{\theta}_1 (m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2 m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2) + \ddot{\theta}_2 (m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2) \\ &\quad - 2 m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + m_1 g l_1 \sin \theta_1 + m_2 g l_1 \sin \theta_1 \\ &\quad + m_2 g l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= \ddot{\theta}_1 (m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2) + \ddot{\theta}_2 m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 \\ &\quad + m_2 g l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2). \end{aligned}$$

Escrevendo em forma vetorial temos:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 & m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 \\ m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 & m_2 l_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} \\
 & + \begin{pmatrix} -2m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 \\ m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 \end{pmatrix} \\
 & + \begin{pmatrix} m_1 g l_1 \sin \theta_1 + m_2 g l_1 \sin \theta_1 + m_2 g l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) \\ m_2 g l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Isto é

$$A(\theta) \ddot{\theta} + B(\theta, \dot{\theta}) + C(\theta) = u$$

onde $\ddot{\theta} = (\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2)$ $u = (u_1, u_2)$ e

$$\begin{aligned}
 A(\theta) &= \begin{pmatrix} m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 & m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 \\ m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 & m_2 l_2^2 \end{pmatrix} \\
 B(\theta, \dot{\theta}) &= \begin{pmatrix} -m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 \end{pmatrix} \\
 C(\theta) &= \begin{pmatrix} m_1 g l_1 \sin \theta_1 + m_2 g l_1 \sin \theta_1 + m_2 g l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) \\ m_2 g l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

Onde $C(\theta)$ representa a força gravitacional e $B(\theta, \dot{\theta})$ é a força centrípeta. Temos que

$$\begin{aligned}
 \text{Det} A(\theta) &= \begin{vmatrix} m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 & m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 \\ m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 & m_2 l_2^2 \end{vmatrix} \\
 &= m_1 m_2 l_1^2 l_2^2 + m_2^2 l_1^2 l_2^2 - m_2^2 l_1^2 l_2^2 \cos^2 \theta_2 \\
 &= m_1 m_2 l_1^2 l_2^2 + m_2^2 l_1^2 l_2^2 (1 - \cos^2 \theta_2) \\
 &= m_1 m_2 l_1^2 l_2^2 + m_2^2 l_1^2 l_2^2 \sin^2 \theta_2
 \end{aligned}$$

Portanto $\text{det} A(\theta) > 0$ para todo θ o que implica que $A(\theta)$ é invertível. Portanto:

$$\begin{aligned}
A(\theta) \ddot{\theta} + B(\theta, \dot{\theta}) + C(\theta) &= u \\
A(\theta) \ddot{\theta} &= -B(\theta, \dot{\theta}) - C(\theta) + u \\
\ddot{\theta} &= -A^{-1}(\theta) B(\theta, \dot{\theta}) - A^{-1}(\theta) C(\theta) + A^{-1}(\theta) u
\end{aligned}$$

esta equação descreve a dinâmica de uma 2-articulação do braço-robô, a qual é um sistema de controle não-linear com espaço de estado

$$(\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2) \in S^1 \times \mathbb{R} \times S^1 \times \mathbb{R} \cong TS^1 \times TS^1.$$

Uma função de saída poderia ser as coordenadas cartesianas do ponto final, é preferível aos ângulos θ_1 e θ_2 entre as conexões (figura 1.4).

Figura 1.4:

Se denotamos as coordenadas cartesianas do ponto final como y_1, y_2 , temos que a transformação de saída vem dada por

$$\begin{aligned}
y_1 &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) \\
y_2 &= l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2)
\end{aligned}$$

Isto é chamado direção cinemática do braço-robô. Na prática é importante conhecer os ângulos θ_1, θ_2 quando a posição final (y_1, y_2) é dada, vejamos como vem dada a expressão. Calculemos o Jacobiano da transformação de saída

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(y(\theta_1, \theta_2)) &= \begin{pmatrix} l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \\
\text{Det } \mathcal{J}(\theta_1, \theta_2) &= \begin{vmatrix} l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{vmatrix} \\
&= -l_1 l_2 \cos \theta_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_1 l_2 \sin \theta_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\
&= -l_1 l_2 \sin \theta_1.
\end{aligned}$$

Sabemos que $\sin \theta_2 = 0$ se $\theta_2 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Portanto posto $\mathcal{J}(y(\theta_1, \theta_2)) = 2$ para $\theta_2 \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Aplicando o Teorema da Função Inversa encontraremos θ_1, θ_2 em função (y_1, y_2) , o qual garante que podemos encontrar os valores de θ_1, θ_2 dado o ponto final (y_1, y_2) .

Para simplificar os cálculos assumimos que $m_1 = m_2 = 1, l_1 = l_2 = 1$. Portanto temos

$$\begin{aligned}
A(\theta) &= \begin{pmatrix} 3 + 2 \cos \theta_2 & 1 + \cos \theta_2 \\ 1 + \cos \theta_2 & 1 \end{pmatrix}, \\
\text{Det}(A(\theta)) &= 1 + \sin^2 \theta_2, \\
A^{-1}(\theta) &= \frac{1}{1 + \sin^2 \theta_2} \begin{pmatrix} 1 & -(1 + \cos \theta_2) \\ -(1 + \cos \theta_2) & (3 + 2 \cos \theta_2) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta} &= -A^{-1}(\theta) B(\theta, \dot{\theta}) - A^{-1}(\theta) C(\theta) + A^{-1}(\theta) u \\
&= \frac{-1}{1 + \sin^2 \theta_2} \begin{pmatrix} -\sin \theta_2 \dot{\theta}_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - (1 + \cos \theta_2) \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 \\ + 2g \sin \theta_1 - g \cos \theta_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + \sin \theta_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ + \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 (3 + 2 \sin \theta_2) - 2g \sin \theta_1 (1 + \cos \theta_2) \\ + g \sin(\theta_1 + \theta_2) (2 + \cos \theta_2) \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 1 & -(1 + \cos \theta_2) \\ -(1 + \cos \theta_2) & (3 + 2 \cos \theta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Temos como estado o vetor $x = (\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) \in T(S^1 \times S^1)$, tal que θ_1, θ_2 são os ângulos definidos no círculo unitário S^1 . O sistema é dado.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \frac{-1}{1+\sin^2 \theta_2} (-\sin \theta_2 \dot{\theta}_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - (1 + \cos \theta_2) \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 + 2g \sin \theta_1 - g \cos \theta_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)) \\ \frac{-1}{1+\sin^2 \theta_2} (\sin \theta_2 \dot{\theta}_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + \sin \theta_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 (3 + 2 \cos \theta_2) - 2g \sin \theta_1 (1 + \cos \theta_2) + g \sin(\theta_1 + \theta_2) (2 + \cos \theta_2)) \end{pmatrix} + \frac{1}{1+\sin^2 \theta_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -(1 + \cos \theta_2) \\ -(1 + \cos \theta_2) & (3 + 2 \cos \theta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

De onde temos os seguintes campos vetoriais que :

$$\begin{aligned} f(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) &= \dot{\theta}_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \dot{\theta}_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} - \frac{1}{1+\sin^2 \theta_2} [-\sin \theta_2 \dot{\theta}_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ &\quad - (1 + \cos \theta_2) \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 + 2g \sin \theta_1 - g \cos \theta_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)] \frac{\partial}{\partial \theta_1} \\ &\quad - \frac{1}{1+\sin^2 \theta_2} [\sin \theta_2 \dot{\theta}_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + \sin \theta_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ &\quad + \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 (3 + 2 \cos \theta_2) - 2g \sin \theta_1 (1 + \cos \theta_2) \\ &\quad + g \sin(\theta_1 + \theta_2) (2 + \cos \theta_2)] \frac{\partial}{\partial \theta_2} \\ g_1(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) &= 0 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + 0 \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \frac{1}{1+\sin^2 \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_1} - \frac{(1+\cos \theta_2)}{1+\cos^2 \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \\ g_2(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) &= 0 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + 0 \frac{\partial}{\partial \theta_2} - \frac{(1+\cos \theta_2)}{1+\sin^2 \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{(3+2 \cos \theta_2)}{1+\sin^2 \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \end{aligned}$$

Encontremos à álgebra fortemente acessível C_0 , temos que

$$[f, g_1] = \begin{pmatrix} \frac{-1}{1+\sin^2 \theta_2} \\ \frac{1+\cos \theta_2}{1+\sin^2 \theta_2} \\ 0 \\ \frac{\sin \theta_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)(2-\cos^2 \theta_2)}{(1+\sin^2 \theta_2)^2} \end{pmatrix}$$

$$[f, g_2] = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos \theta_2}{1+\sin^2 \theta_2} \\ \frac{-(3+2 \cos \theta_2)}{1+\sin^2 \theta_2} \\ \frac{\sin \theta_2 (\cos^2 \theta_2 - 2)(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)}{(1+\sin^2 \theta_2)^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Portanto $C_0 = \{ g_1, g_2, [f, g_1], [f, g_2] \}$ e

$$\dim(g_1 \ g_2 \ [f, g_1] \ [f, g_2]) = 4$$

Portanto $\dim C_0(x) = 4$ e como $C_0(x) \subset T_x(T(S^1 \times S^1))$

$$C_0(x) = T_x(T(S^1 \times S^1))$$

Portanto por Teorema (1.3.2) temos que o sistema é fortemente acessível

Exemplo 1.4.3 As equações que descrevem a atitude de um satélite, são basicamente de rotação de um corpo rígido com termos extras descrevendo os efeitos dos torques de controle. Portanto pode-se separar as equações em equações da Cinemática relacionadas à posição angular com a velocidade angular e as equações da Dinâmica descrevendo a evolução da velocidade angular ou equivalentemente, o momento angular.

1) Equações da Cinemática.

Representaremos as equações Cinemática em dois sentidos um global e outro local. Se precisarmos uma descrição global do problema, descreveremos a posição angular mediante a matriz de rotação R , R transforma um conjunto inercialmente fixo de eixos ortonormais e_1, e_2, e_3 em um conjunto ortonormal de eixos r_1, r_2, r_3 (com a

mesma orientação que e_1, e_2, e_3), os quais são fixados na aeronave e tem como origem o centro de massa da aeronave (figura 1.5).

$$Re_i = r_i \quad i = 1, 2, 3.$$

Figura 1.5:

Podemos descrever a posição de um corpo rígido em relação a um conjunto inercial de eixos $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ pela matriz,

$$R = \begin{pmatrix} r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \\ r_3 & s_3 & t_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{SO}(3)$$

Onde o vetor unitário $r = (r_1, r_2, r_3)^t$ denota a direção dos primeiros eixos do corpo rígido, r_1 é a componente na direção e_1 , r_2 é a componente na direção e_2 e r_3 é a componente na direção e_3 . Similarmente, o vetor unitário $s = (s_1, s_2, s_3)^t$ e $t = (t_1, t_2, t_3)^t$ darão a direção do segundo e terceiro eixos do corpo rígido. A evolução de R pode agora ser expressa como:

$$\dot{R}(t) = S(w(t))R(t)$$

Onde $w(t)$ é a velocidade angular da aeronave em tempo t (com relação aos eixos na aeronave). $S(w)$ é uma matriz 3×3 antisimétrica definida por:

$$S(w) = \begin{pmatrix} 0 & w_3 & -w_2 \\ -w_3 & 0 & w_1 \\ w_2 & -w_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Forma Local:

A posição angular pode ser descrita localmente por 3 ângulos ϕ, θ, ψ , os quais representam consecutivamente no sentido horário as rotações ao redor dos eixos r_1, r_2, r_3

respectivamente. Tomando r_i como o i -ésimo vetor da base em $\mathbb{R}^3$ obtemos a equação cinemática

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

Reunindo os termos e invertendo obtemos:

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

Mesmo que os ângulos não coincidem com a usual definição de ângulos de Euler, eles originam um conjunto conveniente de equações, ou seja uma carta de $SO(3)$. De fato esta descrição é só válida localmente na região, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, mas serve para mostrar que a equação $\dot{R} = S(w)R$, surge em uma variedade tridimensional a qual é o grupo de Lie $SO(3)$, de matrizes reais ortogonais de 3×3 com determinante 1.

2) Equação da Dinâmica:

A equação da Dinâmica: A aciona um propulsor.

Derivamos a equação Dinâmica por considerar um momento de balanço ao redor do centro de massa.

$$J\dot{w} = Rh$$

Onde J é a matriz de inércia da astronave, h o momento angular da astro-nave relativo aos eixos inerciais e_1, e_2, e_3 e b_i são os eixos ao redor dos quais, o correspondente torque de controle de magnitude $\|b_i\| u_i$ $i = 1, \dots, m$ é aplicado por médio a posição do par de propulsores, $\|\cdot\|$ denota a norma euclidiana em $\mathbb{R}^3$, $\|a\| = \sqrt{|a^t a|}$, e m designa o número de torques de controle. Obtemos a equação da Dinâmica que descreve o problema de controle de atitude.

$$\dot{R} = S(w)R \quad R \in SO(3) \quad (4)$$

$$J\dot{w} = S(w)Jw + \sum_{i=1}^m b_i u_i \quad w \in \mathbb{R}^3$$

Onde J é uma matriz 3×3 , simétrica definida positiva, J é chamada matriz inercial ou operador inercial, os autovetores de J são chamados eixos principais, por simplicidade assumamos que os eixos r, s, t são já os eixos principais portanto:

$$J = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \quad a_i > 0 \quad i = 1, 2, 3$$

Onde $b_i = (b_i^1, b_i^2, b_i^3)^t \in \mathbb{R}^3 \quad i = 1, \dots, m$ e temos os seguintes campos vetoriais:

$$\begin{aligned} f(R, w) &= \begin{pmatrix} S(w)R \\ J^{-1}S(w)Jw \end{pmatrix} \\ g_i(R, w) &= \begin{pmatrix} 0 \\ J^{-1}b_i \end{pmatrix} \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Vejamos uma condição necessária e suficiente para acessibilidade Analizaremos 3 casos:

Caso I:

Para $m = 3$ e b_1, b_2, b_3 são linearmente independentes. Temos que:

$$\begin{aligned} [f, g_i] &= \left[\begin{pmatrix} S(w)R \\ J^{-1}S(w)Jw \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ J^{-1}b_i \end{pmatrix} \right] \\ &= - \begin{pmatrix} S(J^{-1}b_i)R \\ J^{-1}S(J^{-1}b_i)Jw + J^{-1}S(w)b_i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dado que b_1, b_2, b_3 são linearmente independentes, o vetor $S(J^{-1}b_i)R \quad i = 1, 2, 3$ gera o espaço tangente $T_R SO(3)$ e, portanto, $\{g_1, g_2, g_3, [f, g_1], [f, g_2], [f, g_3]\}$ geram $T_{(R, w)}(SO(3) \times \mathbb{R}^3)$ e concluímos que $C_0(R, w) = T_{(R, w)}(SO(3) \times \mathbb{R}^3)$ e pelo Teorema (1.3.2) o sistema é fortemente acessível.

Caso II

Tomemos $m = 2$ Calculemos:

$$\begin{aligned} [f, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2] &= \left[\begin{pmatrix} S(w)R \\ J^{-1}S(w)Jw \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 J^{-1}b_1 + \alpha_2 J^{-1}b_2 \end{pmatrix} \right] \\ &= - \begin{pmatrix} S(\alpha_1 J^{-1}b_1 + \alpha_2 J^{-1}b_2)R \\ J^{-1}S(\alpha_1 J^{-1}b_1 + \alpha_2 J^{-1}b_2)Jw + J^{-1}S(w)(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &= [[f, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2], \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2] \\
&= - \left[\begin{pmatrix} S(\alpha_1 J^{-1} b_1 + \alpha_2 J^{-1} b_2) R \\ J^{-1} S(\alpha_1 J^{-1} b_1 + \alpha_2 J^{-1} b_2) J w \\ + J^{-1} S(w)(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 J^{-1} b_1 + \alpha_2 J^{-1} b_2 \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 2J^{-1} S(\alpha_1 J^{-1} b_1 + \alpha_2 J^{-1} b_2) J(\alpha_1 J^{-1} b_1 + \alpha_2 J^{-1} b_2) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
[f, G] &= \left[\begin{pmatrix} S(w) R \\ J^{-1} S(w) J w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2J^{-1} S(\alpha_1 J^{-1} b_1 + \alpha_2 J^{-1} b_2) J(\alpha_1 J^{-1} b_1 + \alpha_2 J^{-1} b_2) \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} S(2J^{-1} S(\alpha_1 J^{-1} b_1 + \alpha_2 J^{-1} b_2) J(\alpha_1 J^{-1} b_1 + \alpha_2 J^{-1} b_2)) R \\ J^{-1} S(2J^{-1} S(\alpha_1 J^{-1} b_1 + \alpha_2 J^{-1} b_2) J(\alpha_1 J^{-1} b_1 + \alpha_2 J^{-1} b_2)) J w \\ + J^{-1} S(w) J(2J^{-1} S(\alpha_1 J^{-1} b_1 + \alpha_2 J^{-1} b_2) J(\alpha_1 J^{-1} b_1 + \alpha_2 J^{-1} b_2)) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Seja $B = \langle b_1, b_2 \rangle$ o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por b_1, b_2 e consideremos a condição:

$$\mathbb{R}^3 = \text{Span}\{b_1, b_2, S(w)J^{-1}w : w \in B = \text{Span}\{b_1, b_2\}\} \quad (5)$$

Esta condição é equivalente a:

$$\mathbb{R}^3 = \text{Span}\{J^{-1}b_1, J^{-1}b_2, J^{-1}S(w)J^{-1}w : w \in B\}.$$

Se a condição (5) é satisfeita, temos que $\{g_1, g_2, \{G(\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}, [f, g_1], [f, g_2], \{[f, G(\alpha_1, \alpha_2)] : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}\}$ geram $T_x(SO(3) \times \mathbb{R}^3)$ para todo $x = (R, w) \in SO(3) \times \mathbb{R}^3$, e $C_0(x) = T_x(SO(3) \times \mathbb{R}^3)$ e, pelo Teorema (1.3.2) o sistema é fortemente acessível, assim a condição (5) é uma condição suficiente para que o sistema seja fortemente acessível.

Mostraremos agora, que a condição (5) é também necessária, tomemos a seguinte mudança de variável. $Jw = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 S(b_2)b_1$ e substituindo na equação

$$J\dot{w} = S(w)Jw + b_1 u_1 + b_2 u_2.$$

obtemos o sistema:

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}_1 &= f_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + u_1 \\
\dot{\alpha}_2 &= f_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + u_2 \\
\dot{\alpha}_3 &= \alpha_3 f_3(\alpha_1, \alpha_2) + \frac{f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{\|S(b_2)b_1\|^2}
\end{aligned} \quad (6)$$

E $f_4(\alpha_1, \alpha_2) = b_1^t S(b_2) S(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2) J^{-1}(\alpha_1 b_1 + \alpha_2)$. Temos que $f_4 \neq 0$ se, e só se, a condição (5) é satisfeita.

Agora se $f_4 = 0$, o sistema (6) o sistema não é acessível, dado que temos as seguintes variedades integrais maximais $\mathbb{R}^3 \cap \{\alpha : \alpha_3 = 0\}$, $\mathbb{R}^3 \cap \{\alpha : \alpha_3 < 0\}$, $\mathbb{R}^3 \cap \{\alpha : \alpha_3 > 0\}$ o mais simplesmente, se o sistema (6) está em um estado onde $\alpha_3 = 0$, então α_3 permanecerá zero, isto é, permanece constante. Assim, podemos concluir que se o sistema (6) é não-acessível então o sistema (4) não é acessível. Portanto concluímos que a condição (5) é necessária e suficiente para a acessibilidade.

Caso III

Quando $m = 1$, consideremos os seguintes campos vetoriais g_1 e

$$[f, g_1] = \begin{pmatrix} S(J^{-1}b_1)R \\ J^{-1}S(J^{-1}b_1)Jw + J^{-1}S(w)b_1 \end{pmatrix}$$

E o campo vetorial

$$\begin{aligned} G_2 &= [[f, g_1], g_1] = \left[- \begin{pmatrix} S(J^{-1}b_1)R \\ J^{-1}S(J^{-1}b_1)Jw + J^{-1}S(w)b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ J^{-1}b_1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2J^{-1}S(J^{-1}b_1)b_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [f, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 G_2] &= \left[\begin{pmatrix} S(w)R \\ J^{-1}S(w)Jw \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 J^{-1}b_1 + 2\alpha_2 J^{-1}S(J^{-1}b_1)b_1 \end{pmatrix} \right] \\ &= - \begin{pmatrix} S(\alpha_1 J^{-1}b_1 + 2\alpha_2 J^{-1}S(J^{-1}b_1)b_1)R \\ J^{-1}S(\alpha_1 J^{-1}b_1 + 2\alpha_2 J^{-1}S(J^{-1}b_1)b_1)Jw \\ + J^{-1}S(w)J(\alpha_1 J^{-1}b_1 + 2\alpha_2 J^{-1}S(J^{-1}b_1)b_1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Calculemos também

$$\begin{aligned} G_3(\alpha_1, \alpha_2) &= [[f, (\alpha_1 g_1 + \alpha_2 G_2)], (\alpha_1 g_1 + \alpha_2 G_2)] \\ &= - \begin{pmatrix} 0 \\ J^{-1}S(\alpha_1 J^{-1}b_1 + 2\alpha_2 J^{-1}S(J^{-1}b_1)b_1)(\alpha_1 b_1 + 2\alpha_2 S(J^{-1}b_1)b_1) \\ + J^{-1}S(\alpha_1 J^{-1}b_1 + 2\alpha_2 J^{-1}S(J^{-1}b_1)b_1)(\alpha_1 b_1 + 2\alpha_2 S(J^{-1}b_1)b_1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e finalmente

$$[f, G_3] = \begin{pmatrix} S(2J^{-1}S(\alpha_1 J^{-1}b_1 + 2\alpha_2 J^{-1}S(J^{-1}b_1)b_1)(\alpha_1 b_1 + 2\alpha_2 S(J^{-1}b_1)b_1))R \\ J^{-1}S(2J^{-1}S(\alpha_1 J^{-1}b_1 + 2\alpha_2 J^{-1}S(J^{-1}b_1)b_1)(\alpha_1 b_1 + 2\alpha_2 S(J^{-1}b_1)b_1)) \\ + J^{-1}S(w)J(2J^{-1}S(\alpha_1 J^{-1}b_1 + 2\alpha_2 J^{-1}S(J^{-1}b_1)b_1)(\alpha_1 b_1 + 2\alpha_2 S(J^{-1}b_1)b_1)) \end{pmatrix}$$

Se Consideramos a condição

$$\mathbb{R}^3 = \text{Span}\{b_1, S(b_1)J^{-1}b_1, S(w)J^{-1}w : w \in \text{Span}\{b_1, S(b_1)J^{-1}b_1\}\} \quad (7)$$

A qual é equivalente a:

$$\mathbb{R}^3 = \text{Span} \{ J^{-1}b_1, 2J^{-1}S(J^{-1}b_1)b_1, 2J^{-1}S(\alpha_1 J^{-1}b_1 + 2\alpha_2 J^{-1}S(J^{-1}b_1)b_1) \\ J(\alpha_1 J^{-1}b_1 + 2\alpha_2 J^{-1}S(J^{-1}b_1)b_1) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^3 \}$$

Se a condição (7) é satisfeita, temos que $\{g_1, g_2, \{G_3(\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^3\}, [f, g_1], [f, G_2], \{[f, G_3(\alpha_1, \alpha_2)] : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}\}$ geram $T_x(SO(3) \times \mathbb{R}^3)$ para todo $x = (R, w) \in SO(3) \times \mathbb{R}^3$, e por o Teorema (1.3.2) o sistema é fortemente acessível, assim a condição (7) é suficiente para a acessibilidade. Agora vejamos que também, é necessária. Consideremos a seguinte substituição de variáveis:

$$Jw = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 S(b_1)J^{-1}b_1 + \alpha_3 S(b_1)S(b_1)J^{-1}b_1,$$

na equação :

$$J\dot{w} = S(w)Jw + b_1 u_1.$$

Obtendo assim o sistema

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 &= f_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + u_1 \\ \dot{\alpha}_2 &= f_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\ \dot{\alpha}_3 &= \alpha_3 f_3(\alpha_1, \alpha_2) + \frac{f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{\|S(b_1)S(b_1)J^{-1}b_1\|^2} \end{aligned} \quad (8)$$

Onde

$$f_4(\alpha_1, \alpha_2) = -b_1^t J^{-1}S(b_1)S(b_1)S(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 S(b_1)J^{-1}b_1)J^{-1}(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 S(b_1)J^{-1}b_1)$$

Temos que $f_4 \neq 0$ se, e só se, é satisfeita a condição (7), se $f_4 = 0$, o sistema (8) não pode ser acessível, dado que se $\alpha_3 = 0$, permanece constante o qual implica o mesmo para o sistema (4). Assim a condição (7) é necessária e suficiente para a acessibilidade.

Capítulo 2

Geometria Simplética

2.1 Introdução

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados sobre variedades de Poisson e variedades simpléticas, que utilizaremos no estudo de um sistema Hamiltoniano afim de controle. Definiremos uma lei de composição chamada o colchete de Lie no espaço das funções diferenciáveis definidas numa variedade, que torna este espaço numa álgebra de Lie; pensaremos no colchete de Poisson como um elemento essencial de uma estrutura simplética. A variedade de Poisson aparece como uma generalização da variedade simplética, para maiores detalhes veja [1], [2], [14].

2.2 Variedade de Poisson

Definição 2.2.1 *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade. Uma estrutura de Poisson em $\mathcal{M}$ é determinada por uma transformação bilinear $\{\cdot, \cdot\}: C^\infty(\mathcal{M}) \times C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$, chamada o colchete de Poisson, satisfazendo as seguintes propriedades:*

i) *Anti-simétrica:*

$$\{F, G\} = -\{G, F\}$$

ii) *Identidade de Jacobi:*

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0$$

iii) *Regra de Leibnitz:*

$$\{F, GH\} = \{F, G\}H + G\{F, H\}$$

onde F, G e $H \in C^\infty(\mathcal{M})$.

Observação 2.2.1 A variedade $\mathcal{M}$ com a estrutura de Poisson é chamada de variedade de Poisson.

Observação 2.2.2 O conjunto $C^\infty(\mathcal{M})$ com o colchete de Poisson é uma Álgebra de Lie.

Observação 2.2.3 A operação colchete $\{\cdot, \cdot\}$ é uma derivação em cada argumento.

Para cada $F \in C^\infty(\mathcal{M})$ e arbitrário $x \in \mathcal{M}$ definamos a transformação $\mathcal{X}_F(x) : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{X}_F(x) G = \{F, G\}(x).$$

Pela regra de Leibnitz temos

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_F(x) (GH) &= \{F, GH\}(x) = \{F, G\}(x) H(x) + G(x) \{F, H\}(x) \\ &= \mathcal{X}_F G(x) H(x) + G(x) \mathcal{X}_F H(x) \end{aligned}$$

Logo, concluímos que $\mathcal{X}_F(x) \in T_x \mathcal{M}$ para qualquer $x \in \mathcal{M}$. Assim para cada $F \in C^\infty(\mathcal{M})$ existe um campo vetorial $\mathcal{X}_F$ em $\mathcal{M}$ tal que

$$\mathcal{X}_F(G) = \{F, G\}$$

$\mathcal{X}_F$ é chamado campo vetorial Hamiltoniano com função de energia ou função Hamiltoniana F . Recordemos que $V^\infty(\mathcal{M})$ denota o espaço vetorial dos campos vetoriais suaves definidos em $\mathcal{M}$, e que também é uma álgebra de Lie. A transformação $F \rightarrow \mathcal{X}_F$ é um morfismo de álgebras de Lie, que faz a passagem de $C^\infty(\mathcal{M})$ com o colchete de Poisson para $V(\mathcal{M})$ com o colchete de Lie usual.

Vejamus isso mediante a seguinte proposição.

Proposição 2.2.1 Sejam $F, G \in C^\infty(\mathcal{M})$. Temos que

$$\mathcal{X}_{\{F, G\}} = [\mathcal{X}_F, \mathcal{X}_G]$$

Demonstração: Seja $H \in C^\infty(\mathcal{M})$, segue da definição de campo vetorial Hamiltoniano e da identidade de Jacobi que:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{\{F, G\}}(H) &= \{\{F, G\}, H\} \\ &= \{F, \{G, H\}\} - \{G, \{F, H\}\} \\ &= \mathcal{X}_F(\mathcal{X}_G(H)) - \mathcal{X}_G(\mathcal{X}_F(H)) \\ &= [\mathcal{X}_F, \mathcal{X}_G](H) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Assumamos que F é fixo

$$\{F, G\}(x) = \mathcal{X}_F(x)(G)(x) = dG(x)(\mathcal{X}_F)(x)$$

Portanto quando G varia $\{F, G\}(x)$ só depende de $dG(x)$, similarmente quando G é fixo

$$\{F, G\}(x) = -\{G, F\} = -\mathcal{X}_G(F)(x) = -dF(\mathcal{X}_G)(x)$$

Ou seja quando F varia $\{F, G\}$ só depende de $dF(x)$, temos que a transformação $F \rightarrow dF(x)$, que vai de $C^\infty(\mathcal{M})$ em $T_x^*\mathcal{M}$, é sobrejetora e como a transformação $(F, G) \rightarrow \{F, G\}$ é bilinear e antisimétrica, portanto para todo $x \in \mathcal{M}$ existe uma forma bilinear e antisimétrica $W(x)$ no espaço tangente $T_x^*\mathcal{M}$, tal que para todo $F, G \in C^\infty(\mathcal{M})$

$$\{F, G\}(x) = W(x)(dF(x), dG(x))$$

onde W é chamado o tensor de Poisson. Em coordenadas locais $x_1, \dots, x_r$ uma estrutura de Poisson é determinada pelas funções localmente suaves w_{ij} $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq r$, tal que o colchete de Poisson é dado por:

$$\{F, G\}(x) = \sum_{i,j=1}^r w_{ij}(x) \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} \frac{\partial G(x)}{\partial x_j}$$

Onde w_{ij} é determinada por

$$w_{ij}(x) = \{x_i, x_j\} \quad 1 \leq i \leq r, \quad 1 \leq j \leq r.$$

Da antisimetria e a identidade de Jacobi temos que as funções w_{ij} devem satisfazer as seguintes relações:

$$w_{ij} = -w_{ji} \quad (*)$$

$$\sum_{l=1}^r (w_{lj} \frac{\partial w_{ik}}{\partial x_l} + w_{li} \frac{\partial w_{kj}}{\partial x_l} + w_{lk} \frac{\partial w_{jl}}{\partial x_l}) = 0. \quad (**)$$

Localmente qualquer colchete de Poisson é determinado pela matriz antisimétrica

$$W(x) = (w_{ij}(x)) \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, r \\ j = 1, \dots, r \end{matrix}$$

Onde $w_{ij}(x)$ satisfaz (*) e (**), se temos $w_{ij}(x)$ tal que satisfazem (*) e (**) elas definem um colchete de Poisson onde, $W(x)$ é chamada matriz estrutura. O posto do colchete de Poisson em $x \in \mathcal{M}$ é definido como o posto de $W(x)$. Dado que $W(x)$ é anti-simétrica o posto é par. Dizemos que o colchete de Poisson é não-degenerado se o posto $W(x) = \dim \mathcal{M}$ para todo $x \in \mathcal{M}$.

Um automorfismo de Poisson é definido como um difeomorfismo $J : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$, onde $\mathcal{M}$ é uma variedade de Poisson tal que

$$\{F \circ J, G \circ J\} = \{F, G\} \circ J \quad \text{para todo } F, G \in C^\infty(\mathcal{M})$$

Dizemos que um campo vetorial $\mathcal{X}$ em $\mathcal{M}$ é um automorfismo de Poisson infinitesimal se o fluxo ou grupo a um parâmetro $\mathcal{X}^t$ de $\mathcal{X}$ são automorfismos de Poisson para todo t para o qual $\mathcal{X}^t$ esta definida, ou seja

$$\{F \circ \mathcal{X}^t, G \circ \mathcal{X}^t\} = \{F, G\} \circ \mathcal{X}^t$$

Proposição 2.2.2 *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade de Poisson. Um campo vetorial $\mathcal{X}$ definido em $\mathcal{M}$ é um automorfismo de Poisson infinitesimal se e só se*

$$\mathcal{X}(\{F, G\}) = \{\mathcal{X}(F), G\} + \{F, \mathcal{X}(G)\} \quad \text{para todo } F, G \in C^\infty(\mathcal{M})$$

Demonstração: Nossa demonstração esta baseada na seguinte igualdade

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{F \circ \mathcal{X}^t, G \circ \mathcal{X}^t\} \circ \mathcal{X}^{-t} \Big|_{t=t_0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{F \circ \mathcal{X}^{t+h}, G \circ \mathcal{X}^{t+h}\} \circ \mathcal{X}^{-t-h} - \{F \circ \mathcal{X}^t, G \circ \mathcal{X}^t\} \circ \mathcal{X}^{-t}}{h} \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{F \circ \mathcal{X}^{t+h}, G \circ \mathcal{X}^{t+h}\} \circ \mathcal{X}^{-t}(\mathcal{X}^{-h})}{-\{F \circ \mathcal{X}^{t+h}, G \circ \mathcal{X}^{t+h}\} \circ \mathcal{X}^{-t}} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{F \circ \mathcal{X}^{t+h}, G \circ \mathcal{X}^{t+h}\} \circ \mathcal{X}^{-t}}{h} \\ &\quad - \frac{\{F \circ \mathcal{X}^t, G \circ \mathcal{X}^t\} \circ \mathcal{X}^{-t}}{h} \\ &= -(\mathcal{X}(\{F \circ \mathcal{X}^t, G \circ \mathcal{X}^t\})) \circ \mathcal{X}^{-t} \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{F \circ \mathcal{X}^t(\mathcal{X}^h) - F \circ \mathcal{X}^t, G \circ \mathcal{X}^{t+h}\} \circ \mathcal{X}^{-t}}{h} \\ &\quad + \frac{\{F \circ \mathcal{X}^t, G \circ \mathcal{X}^{t+h}\} \circ \mathcal{X}^{-t} - \{F \circ \mathcal{X}^t, G \circ \mathcal{X}^t\} \circ \mathcal{X}^{-t}}{h} \\ &= -(\mathcal{X}(\{F \circ \mathcal{X}^t, G \circ \mathcal{X}^t\})) \circ \mathcal{X}^{-t} \\ &\quad + \{\mathcal{X}(F \circ \mathcal{X}^t), G \circ \mathcal{X}^t\} \circ \mathcal{X}^{-t} \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{F \circ \mathcal{X}^t, G \circ \mathcal{X}^t(\mathcal{X}^h) - G \circ \mathcal{X}^t\} \circ \mathcal{X}^{-t}}{h} \\ &= -(\mathcal{X}(\{F \circ \mathcal{X}^t, G \circ \mathcal{X}^t\})) \circ \mathcal{X}^{-t} \\ &\quad + \{\mathcal{X}(F \circ \mathcal{X}^t), G \circ \mathcal{X}^t\} \circ \mathcal{X}^{-t} \\ &\quad + \{F \circ \mathcal{X}^t, \mathcal{X}(G \circ \mathcal{X}^t)\} \circ \mathcal{X}^{-t} \end{aligned}$$

Portanto temos que:

$$\frac{d}{dt} \{f \circ \mathcal{X}^t, g \circ \mathcal{X}^t\} \circ \mathcal{X}^{-t} \Big|_{t=t_0} = -(\mathcal{X}(\{F \circ \mathcal{X}^{t_0}, G \circ \mathcal{X}^{t_0}\})) \circ \mathcal{X}^{-t_0} + \{\mathcal{X}(F \circ \mathcal{X}^{t_0}), G \circ \mathcal{X}^{t_0}\} \circ \mathcal{X}^{-t_0} + \{F \circ \mathcal{X}^{t_0}, \mathcal{X}(G \circ \mathcal{X}^{t_0})\} \circ \mathcal{X}^{-t_0}$$

Se X é um automorfismo de Poisson, ou seja $\{F \circ \mathcal{X}^t, G \circ \mathcal{X}^t\} \circ \mathcal{X}^{-t} = \{F, G\}$, a expressão da direita não depende de t , se anula, e tomando $t_0 = 0$, temos que

$$\mathcal{X}(\{F, G\}) = \{\mathcal{X}(F), G\} + \{F, \mathcal{X}(G)\}$$

Agora se $\mathcal{X}(\{F, G\}) = \{\mathcal{X}(F), G\} + \{F, \mathcal{X}(G)\}$, portanto

$$\frac{d}{dt}\{F \circ \mathcal{X}^t, G \circ \mathcal{X}^t\} \circ \mathcal{X}^{-t} = 0 \quad \forall t$$

isto é

$$\{F \circ \mathcal{X}^t, G \circ \mathcal{X}^t\} \circ \mathcal{X}^{-t} = \{F, G\} \quad \forall t$$

Aplicando $\mathcal{X}^t$ a ambos lados

$$\{F \circ \mathcal{X}^t, G \circ \mathcal{X}^t\} = \{F, G\} \circ \mathcal{X}^t$$

isto completa nossa demonstração. ■

Da Proposição (2.2.2) e da identidade de Jacobi temos que qualquer campo vetorial Hamiltoniano é um automorfismo de Poisson infinitesimal.

Si $\mathcal{M}$ for de dimensão par, diremos que $(q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ são coordenadas canônicas se e só se $\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$, $\{q_i, q_j\} = 0$, $\{p_i, p_j\} = 0$ $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$.

Teorema 2.2.1 *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade tal que $\dim \mathcal{M} = 2n$, com colchete de Poisson não-degenerado então localmente numa vizinhança $x_0 \in \mathcal{M}$, podemos encontrar coordenadas canônicas $(q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ tal que*

$$\{F, G\}(q, p) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right)(q, p)$$

Demonstração: Veja a prova em [16] pagina 359.

Para qualquer colchete de Poisson o campo vetorial Hamiltoniano é um automorfismo de Poisson, a recíproca so é verdade localmente se o colchete é não-degenerado, vejamos isso em a seguinte proposição

Proposição 2.2.3 *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade de Poisson com colchete de Poisson não-degenerado. Se o campo vetorial $\mathcal{X}$ em $\mathcal{M}$ é um automorfismo de Poisson infinitesimal então localmente em torno de $x_0 \in \mathcal{M}$ existe $H \in C^\infty(\mathcal{M})$ tal que $\mathcal{X} = \mathcal{X}_H$*

Demonstração: Pelo Teorema (2.2.1) podemos encontrar coordenadas canônicas $(q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ ao redor de $x_0 \in \mathcal{M}$. O campo vetorial $\mathcal{X}$ nas coordenadas canônicas é dado por $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_1^q, \dots, \mathcal{X}_n^q, \mathcal{X}_1^p, \dots, \mathcal{X}_n^p)^t$. Dado que $\mathcal{X}$ é um automorfismo de Poisson infinitesimal temos

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{X}(\delta_{ij}) = \mathcal{X}(\{p_i, q_j\}) = \{\mathcal{X}(p_i), q_j\} + \{p_i, \mathcal{X}(q_j)\} \\ &= \{\mathcal{X}_i^p, q_j\} + \{p_i, \mathcal{X}_j^q\} = \frac{\partial \mathcal{X}_i^p}{\partial p_j} + \frac{\partial \mathcal{X}_j^q}{\partial q_i} \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{X}(\{q_i, q_j\}) &= \{\mathcal{X}_i^q, q_j\} + \{q_i, \mathcal{X}_j^q\} = \frac{\partial \mathcal{X}_i^q}{\partial p_j} - \frac{\partial \mathcal{X}_j^q}{\partial p_i} \\ 0 = \mathcal{X}(\{p_i, p_j\}) &= \{\mathcal{X}_i^p, p_j\} + \{p_i, \mathcal{X}_j^p\} = -\frac{\partial \mathcal{X}_i^p}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{X}_j^p}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

O vetor linha $(-\mathcal{X}_1^p, \dots, -\mathcal{X}_n^p, \mathcal{X}_1^q, \dots, \mathcal{X}_n^q)$ representa uma 1-forma fechada. De fato, seja

$$\alpha = \sum_{i=1}^n (-\mathcal{X}_i^p dq_i + \mathcal{X}_i^q dp_i),$$

logo, temos que

$$d\alpha = \sum_{i < j} \left(-\frac{\partial \mathcal{X}_i^p}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{X}_j^p}{\partial q_i} \right) dq_j \wedge dq_i - \sum_{i, j} \left(\frac{\partial \mathcal{X}_i^p}{\partial p_j} + \frac{\partial \mathcal{X}_j^q}{\partial q_i} \right) dp_j \wedge dq_i + \sum_{i < j} \left(\frac{\partial \mathcal{X}_i^q}{\partial p_j} - \frac{\partial \mathcal{X}_j^q}{\partial p_i} \right) dp_j \wedge dp_i.$$

Do anterior temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{X}_i^p}{\partial p_j} + \frac{\partial \mathcal{X}_j^q}{\partial q_i} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{X}_i^q}{\partial p_j} - \frac{\partial \mathcal{X}_j^q}{\partial p_i} &= 0 \\ -\frac{\partial \mathcal{X}_i^p}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{X}_j^p}{\partial q_i} &= 0 \end{aligned}$$

Portanto $d\alpha = 0$, ou seja α é fechada pelo o lema de Poincaré temos que existe $H : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, $H(q, p)$ tal que:

$$-\mathcal{X}_i^p = \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \mathcal{X}_i^q = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad 1 \leq i \leq n$$

o qual demonstra a Proposição. ■

2.3 Variedade Simplética

Seja $\{\cdot, \cdot\}$ um colchete de Poisson não-degenerado em $\mathcal{M}$, localmente é dado pela matriz estrutura anti-simétrica $W(x)$. Definamos a transformação bilinear

$$w_x : T_x \mathcal{M} \times T_x \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Dada por

$$w_x(\mathcal{X}_F(x), \mathcal{X}_G(x)) = \{F, G\}(x)$$

A transformação bilinear w_x é definida, em princípio, para vetores tangentes da forma $\mathcal{X}_F(x) \in T_x \mathcal{M}$, generalizemos nossa definição. Podemos escolher $2n$ funções $F_1, \dots, F_{2n} \in C^\infty(\mathcal{M})$ tal que $\mathcal{X}_{F_1}(x), \dots, \mathcal{X}_{F_{2n}}(x)$ são independentes e constituem uma base de $T_x \mathcal{M}$. Sejam $G_1, G_2 \in T_x \mathcal{M}$ quaisquer, eles são uma combinação linear dos campos vetoriais $\mathcal{X}_{F_1}(x), \dots, \mathcal{X}_{F_{2n}}(x)$, ou seja,

$$G_1 = \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i \mathcal{X}_{F_i}(x) \quad G_2 = \sum_{j=1}^{2n} \beta_j \mathcal{X}_{F_j}(x)$$

Pela linearidade da aplicação w_x , temos

$$\begin{aligned} w_x(G_1, G_2) &= w_x \left(\sum_{i=1}^{2n} \alpha_i \mathcal{X}_{F_i}(x), \sum_{j=1}^{2n} \beta_j \mathcal{X}_{F_j}(x) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{2n} \beta_j w_x(\mathcal{X}_{F_i}(x), \mathcal{X}_{F_j}(x)) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{2n} \beta_j \{F_i, F_j\}(x) \right). \end{aligned}$$

Portanto w_x está bem definida como uma transformação bilinear.

Em coordenadas locais o vetor coluna $\mathcal{X}_H(x)$ é dado por $(dH(x) w_x)^t$, $dH(x)$ é um vetor linha, por outro lado, temos que w_x tem a matriz de representação:

$$[w_x] = -(W(x))^{-1}$$

Assim, temos uma 2-forma diferenciável, que será denominada de uma forma simplética em $\mathcal{M}$. Em coordenadas canônicas (q, p) podemos escrever

$$w_x = W(x) = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que $\{F, G\} = -\{G, F\} = -\mathcal{X}_G(F) = -dF(\mathcal{X}_G)$, o campo vetorial Hamiltoniano $\mathcal{X}_H$ é determinado pela relação

$$w_x(\mathcal{X}_H(x), \mathcal{Y}) = -dH(x)(\mathcal{Y}) \text{ para qualquer } \mathcal{Y} \in T_x\mathcal{M}, \quad x \in \mathcal{M}$$

Formalizemos o que entenderemos por uma estrutura simplética.

Definição 2.3.1 *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade diferenciável. Uma estrutura simplética em $\mathcal{M}$ é uma 2-forma w que satisfaz:*

i) w é não-degenerada, ou seja, para todo $0 \neq \mathcal{X} \in T_x\mathcal{M}$ existe $\mathcal{Y} \in T_x\mathcal{M}$ tal que $w_x(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \neq 0$.

ii) w é uma 2-forma fechada isto é $dw = 0$.

De (i) segue que $\mathcal{M}$ é de dimensão par. De (i) e (ii) pode ser deduzido que existem coordenadas locais $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ para $\mathcal{M}$ tal que:

$$w = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$$

Isto é mais conhecido como o Teorema de Darboux's, para a demonstração do teorema veja [2] pagina 230.

Definição 2.3.2 *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade diferenciável e ω uma estrutura simplética definida em $\mathcal{M}$, $(\mathcal{M}, \omega)$ é chamada uma variedade simplética.*

Daremos agora algumas propriedades que usaremos posteriormente

Propriedade 1: Seja $\mathcal{Q}$ uma variedade de dimensão n , o fibrado cotangente $T^*\mathcal{Q} = \mathcal{M}$, tem uma estrutura simplética canônica.

Prova: : Podemos definir uma 1-forma Θ em $T^*\mathcal{Q}$ como segue. Seja $\alpha \in T^*\mathcal{Q}$, $\mathcal{X} \in T_\alpha(T^*\mathcal{Q})$ um vetor tangente ao fibrado cotangente no ponto $\alpha \in T^*\mathcal{Q}$. π denota a projeção de $T^*\mathcal{Q}$ em $\mathcal{Q}$ ($\pi : T^*\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$) e π_* a derivada de π , $\pi_* : T(T^*\mathcal{Q}) \rightarrow T\mathcal{Q}$. Definamos a 1-forma Θ em $T^*\mathcal{Q}$ pela relação:

$$\Theta_\alpha(\mathcal{X}) = \alpha(\pi_*(\mathcal{X})).$$

Em coordenadas locais temos que

$$\Theta = \sum_{i=1}^n p_i dq_i,$$

onde q_i são coordenadas locais para $\mathcal{Q}$ e p_i são coordenadas do fibrado $T^*\mathcal{Q}$, Θ é chamado a 1-forma canônica ou de Liouville em $T^*\mathcal{Q}$. Temos que $w = -d\Theta$ é uma forma simplética em $T^*\mathcal{Q}$, em coordenadas locais.

$$\omega = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i \quad \blacksquare$$

Propriedade 2: Se $(\mathcal{M}, w)$ uma variedade simplética então podemos construir uma forma simplética em $T\mathcal{M}$, que denotaremos por $\dot{w}$.

Prova: Definamos $\bar{w}, \bar{w} : T\mathcal{M} \longrightarrow T^*\mathcal{M}$ tal que :

$$\bar{w}(\mathcal{X}) = w(\mathcal{X}, -) \quad \mathcal{X} \in T\mathcal{M}$$

temos que

$$\begin{aligned} \bar{w}(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) &= w(\mathcal{X} + \mathcal{Y}, -) \\ &= w(\mathcal{X}, -) + w(\mathcal{Y}, -) \\ &= \bar{w}(\mathcal{X}) + \bar{w}(\mathcal{Y}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{w}(\lambda\mathcal{X}) &= w(\lambda\mathcal{X}, -) \\ &= \lambda w(\mathcal{X}, -) \\ &= \lambda \bar{w}(\mathcal{X}) \end{aligned}$$

Portanto $\bar{w}$ é linear e dado que w é não degenerada, podemos dizer que $\bar{w}$, define um isomorfismo de fibrados.

$T^*\mathcal{M}$ é um fibrado cotangente, portanto possui uma 1-forma Θ definida como na Propriedade anterior. Temos que $\bar{w}^*\Theta$ é uma 1-forma em $T\mathcal{M}$ e $d\bar{w}^*\Theta$ é uma 2-forma simplética em $T\mathcal{M}$ a qual denotaremos por $\dot{w}$. ■

Calculemos $\dot{w}$ em coordenadas locais. Tomemos coordenadas locais $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ para $\mathcal{M}$ tal que $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$. Definindo coordenadas para $T\mathcal{M}$. Seja $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ e definamos $\dot{f} : T\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\dot{f}(V_p) = df_p(V_p)$$

Onde $V_p \in T\mathcal{M}$ ($\pi(V_p) = p$, $\pi : T\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$, projeção).

Temos que $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ formam um sistema de coordenadas para $T\mathcal{M}$, $\dot{w}$ definida neste sistema de coordenadas tem a forma:

$$\dot{w} = \sum_i^n d\dot{p}_i \wedge dq_i + dp_i \wedge d\dot{q}_i.$$

Proposição 2.3.1 *Seja $(\mathcal{M}, w)$ uma variedade simplética. Um campo vetorial $\mathcal{X} : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$ é localmente um campo vetorial Hamiltoniano se e só se $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}w = 0$.*

Demonstração: Temos que $\mathcal{X}$ é localmente um campo vetorial Hamiltoniano isto é existe $H : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_H$$

e $w(\mathcal{X}_H, -) = dH$ tal que $\iota_{\mathcal{X}}w = \iota_{\mathcal{X}_H}w = dH$ onde $\iota_{\mathcal{X}}w(\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_n) = w(\mathcal{X}, \mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_n)$ portanto

$$d\iota_{\mathcal{X}}w = 0 \quad (*)$$

$\mathcal{L}_{\mathcal{X}}w$ é a derivada de Lie de w com respeito a $\mathcal{X}$, que é dada por:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{X}}w = \iota_{\mathcal{X}}dw + d\iota_{\mathcal{X}}w$$

com $\iota_{\mathcal{X}}\alpha(\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_n) = \alpha(\mathcal{X}, \mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_n)$. Dado que w é fechado e por $(*)$ segue que

$$\mathcal{L}_{\mathcal{X}}w = 0$$

Por outro lado, assuma que $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}w = 0$, segue do fato que w é fechada que é equivalente a $d\iota_{\mathcal{X}}w = 0$ ou seja $\iota_{\mathcal{X}}w$ é fechada, pelo Lema de Poincaré (veja [2]) segue-se que localmente existe uma função $H : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\iota_{\mathcal{X}}w = dH$$

Isto é $w(\mathcal{X}, -) = dH$, portanto $\mathcal{X} = \mathcal{X}_H$, ou seja $\mathcal{X}$ é localmente Hamiltoniano. ■

Consideremos o seguinte sistema $\Sigma(\mathcal{M}, \mathcal{W}, \mathcal{B}, f)$

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{f} & T\mathcal{M} \times \mathcal{W} & \xrightarrow{\pi_2} & \mathcal{W} \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi_{\mathcal{M}} & & \searrow \pi_1 \\ & \mathcal{M} & & & T\mathcal{M} \end{array}$$

Onde:

- i) $(\mathcal{M}, \omega)$ é uma variedade simplética.
- ii) $(\mathcal{W}, \omega^e)$ é uma variedade simplética.

Por a Propriedade 2 dado que $(\mathcal{M}, \omega)$ é uma variedade simplética, podemos construir em $T\mathcal{M}$ uma forma simplética $\dot{\omega}$. Agora $T\mathcal{M} \times \mathcal{W}$ é uma variedade simplética definindo a forma $\Omega = \pi_1^*\dot{\omega} - \pi_2^*\omega^e$ em $T\mathcal{M} \times \mathcal{W}$. Isto é o que chamaremos um sistema Hamiltoniano de controle, no capítulo seguinte formalizaremos a definição.

Exemplo 2.3.1 *Se consideramos o sistema (4) definido no Exemplo (1.4.3). Definamos o Lagrangiano L em $T(SO(3)) = SO(3) \times \mathbb{R}^3$ por $L(R, w) = \frac{1}{2} w^t J w$. Podemos considerar Jw como um elemento de $\mathfrak{so}^* = \mathbb{R}^3$ e (4) define um sistema Hamiltoniano com espaço estado $T^*(SO(3)) \times \mathbb{R}^3$ e função Hamiltoniana L .*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{f} & T\mathcal{M} \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi \\ & \mathcal{M} & \end{array}$$

Com $\mathcal{M} = T^*(SO(3))$ e $\mathcal{B} = T^*(SO(3)) \times \mathbb{R}^3$.

Capítulo 3

Sistema Hamiltoniano de Controle

3.1 Introdução

O objetivo de este capítulo é definir o que entenderemos por um sistema Hamiltoniano afim de controle e demonstrar que neste tipo de sistemas temos que a propriedade de ser fortemente acessível é equivalente a fracamente observável.

Para começar veremos com um exemplo o que entenderemos por um sistema Hamiltoniano afim de controle.

Consideremos um sistema mecânico simple, o qual consiste de uma massa suspensa por uma mola a qual está sujeita a uma força externa aplicada na extremidade. A equação do movimento é dada por

$$m\ddot{x} = mg - k(x - h)^3 + F$$

Onde m, g, k e h são constantes e x é o deslocamento da massa. Se fizermos $u = F + mg$, $q = x - h$ e $p = m\dot{x}$ reescrevemos o sistema como:

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -kq^3 + u\end{aligned}$$

Se tomamos $H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^4}{4}$, $H_1 = q$ e $y = q$ obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{\partial H_0}{\partial p} - u \frac{\partial H_1}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H_0}{\partial q} + u \frac{\partial H_1}{\partial q} \\ y &= H_1\end{aligned}$$

onde u é o controle, y é a saída, este é um exemplo do que chamaremos sistema Hamiltoniano.

3.2 Subvariedade Langrangiana

Definição 3.2.1 *Uma subvariedade $\mathcal{N}$ de uma variedade simplética $(\mathcal{M}, \omega)$ é chamada Lagrangiana se:*

- i) $\omega(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$ para todo $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in T\mathcal{N}$.
- ii) $\mathcal{N}$ tem dimensão maximal.

Observação 3.2.1 *De i) podemos deduzir que a dimensão máxima é a metade da dimensão de $\mathcal{M}$.*

Exemplo 3.2.1 *Seja $\mathcal{M} = T^*X$, α uma 1-forma em $\mathcal{M}$ e $w = d\alpha$, uma 2-forma simplética. Uma 1-forma em uma variedade associa um ponto da variedade, um covetor no ponto. Chamaremos gráfico de uma 1-forma fechada em X a totalidade de esses covetores. O gráfico de uma 1-forma fechada em X , é uma subvariedade Lagrangiana de $\mathcal{M}$, na verdade a restrição da forma simplética $w = d(p dq)$ ao gráfico da 1-forma $\zeta : q \rightarrow p(q)$ é igual a $d(p(q)dq) = d\zeta = 0$, se ζ é fechado.*

3.3 Sistema Totalmente Hamiltoniano

A definição a seguir, nos permitirá posteriormente caracterizar um sistema Hamiltoniano afim de controle.

Definição 3.3.1 *Seja $(\mathcal{M}, w)$, $(\mathcal{W}, w^e)$ variedades simpléticas denotando o espaço de estado e saída respectivamente. Um sistema $\Sigma(\mathcal{M}, \mathcal{W}, \mathcal{B}, f)$ é chamado totalmente Hamiltoniano se $f(\mathcal{B}) \subset T\mathcal{M} \times \mathcal{W}$ é uma subvariedade Lagrangiana da variedade simplética $(T\mathcal{M} \times \mathcal{W}, \pi_1^*w - \pi_2^*w^e)$ onde $\pi_1 : T\mathcal{M} \times \mathcal{W} \rightarrow T\mathcal{M}$, $\pi_2 : T\mathcal{M} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ são as respectivas projeções.*

A seguinte Proposição nos permite descrever um sistema totalmente Hamiltoniano em forma local.

Proposição 3.3.1 *Seja $\Sigma(\mathcal{M}, \mathcal{W}, \mathcal{B}, f)$ um sistema totalmente Hamiltoniano então existem coordenadas $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ para $\mathcal{M}$ e $(w_1, \dots, w_{2m})$ para $\mathcal{W}$ e uma função local $H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, w_1, \dots, w_m)$ tal que o sistema é descrito por*

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i = 1, \dots, n \\ w_{m+j} &= c_j \frac{\partial H}{\partial w_j} \quad j = 1, \dots, m \quad \text{com } c_j = \pm 1 \end{aligned}$$

Demonstração: Temos que existem coordenadas locais para $T\mathcal{M}$.

Sejam $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_n)$ e $(\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_m, \tilde{w}_{m+1}, \dots, \tilde{w}_{2m})$ para $\mathcal{W}$ nestas coordenadas temos

$$\Omega = \sum_i d\dot{q}_i \wedge dp_i - d\dot{p}_i \wedge dq_i - \sum_j d\tilde{w}_j \wedge d\tilde{w}_{m+j}$$

$\mathcal{B}$ é um fibrado sobre $\mathcal{M}$, $f(\mathcal{B})$ pode ser parametrizado por $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ e m das coordenadas $\tilde{w}_i$ $i = 1, \dots, 2m$ de $\mathcal{W}$, não necessariamente as m -primeiras coordenadas, por isso denotemos as por $w_1, \dots, w_m$ e o resto as denotaremos por $w_{m+1}, \dots, w_{2m}$ tal que se $w_j = w_k$ para $j \leq m$ então $w_{m+j} = \tilde{w}_{m+k}$ ou $\tilde{w}_{k-m}$ dependendo se $k \leq m$ ou $k > m$. Temos que $d\Omega = 0$ em $T(f(\mathcal{B}))$, pelo lema de Poincaré podemos dizer que existe localmente 1-forma α tal que $\Omega = d\alpha$, como $f(\mathcal{B})$ é uma variedade Lagrangiana, portanto $\Omega = d\alpha$ restrito a $f(\mathcal{B})$ é zero. Pelo lema de Poincaré, existe uma função $H : f(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $dH = \alpha$ em $f(\mathcal{B})$. Assumamos que $\Omega = \sum_i d\dot{q}_i \wedge dp_i - d\dot{p}_i \wedge dq_i - \sum_j dw_j \wedge dw_{m+j}$ portanto α pode ser escrito por $\alpha = \sum_i \dot{p}_i dq_i + \dot{q}_i dp_i + \sum_j w_j dw_{j+m}$ e $f(\mathcal{B})$ pode ser parametrizado por $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, w_1, \dots, w_m$, temos que H é uma função desde $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, w_1, \dots, w_m)$ a $\mathbb{R}$ portanto $f(\mathcal{B})$ é descrito localmente por

$$f(\mathcal{B}) = \left\{ \begin{array}{l} (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, w_1, \dots, w_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_n, w_{m+1}, \dots, w_{2m}) \setminus \\ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad i = 1, \dots, m \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ w_{m+j} = c_j \frac{\partial H}{\partial w_j} \quad j = 1, \dots, m \end{array} \right\}$$

O qual demonstra a Proposição. ■

3.4 Sistema Hamiltoniano Afim

Se considerarmos um sistema mecânico com n graus de liberdade, localmente representado por coordenadas $q = (q_1, \dots, q_n)$. Temos a seguinte equação de movimento

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = F_i \quad 0 \leq i \leq n \quad (2)$$

Onde $T(q, \dot{q})$ é a energia cinética, $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ a velocidade generalizada, F_i são as forças do sistema

$$F_i = -\frac{\partial V(q)}{\partial q_i} + F_i^e \quad 1 \leq i \leq n$$

Onde F_i^e denota as forças externas dissipativas e generalizadas e o outros termos denotam as forças conservativas, isto, é as forças que vem da energia potencial, $V(q)$ denota a função de energia potencial. A função Lagrangiana vem dada por

$$L_0(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q)$$

substituindo em (2) temos a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L_0}{\partial q_i} = F_i^e \quad 1 \leq i \leq n$$

se não consideramos as forças dissipativas e as forças externas representam o controle u_i , obtemos o sistema de controle

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L_0}{\partial q_i} &= \begin{cases} u_i & i = 1, \dots, m \\ 0 & i = m+1, \dots, n \end{cases} \\ y_j &= q_j \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3)$$

Para um Lagrangiano $L(q, \dot{q}, u)$ dependendo de u e em ausência de outras forças externas, temos a seguinte equação de movimento.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, u) \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}(q, \dot{q}, u) &= 0 \quad 1 \leq i \leq n \\ y_i &= q_i \end{aligned} \quad (4)$$

Chamado sistema de controle Lagrangiano.

Se definimos o momento generalizado

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, u) \quad 1 \leq i \leq n \quad (5)$$

Definimos a função Hamiltoniana $H(q, p, u)$ como a transformada de Legendre de $L(q, \dot{q}, u)$ ou seja

$$\begin{aligned} H(q, p, u) &= \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, u) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial L(q, \dot{q}, u)}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, u) \end{aligned}$$

Derivando em relação a p_i e substituindo a relação (5) em (4), obtemos a equação Hamiltoniana de movimento

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}(q, p, u) & 1 \leq i \leq n \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}(q, p, u) + u_i & i = 1, \dots, m \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}(q, p, u) & i = m+1, \dots, n \\ y_j &= q_j & j = 1, \dots, m\end{aligned}$$

O qual chamaremos um sistema Hamiltoniano de controle, onde H representa a energia do sistema, uma natural saída é definida por

$$y_j = -\frac{\partial H}{\partial u_j}(q, p, u)$$

Definição 3.4.1 *Um sistema Hamiltoniano afim de controle é um sistema Hamiltoniano de controle com uma função Hamiltoniana da forma*

$$H(q, p, u) = H_0(q, p) - \sum_{j=1}^m H_j(q, p)u_j$$

isto é

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H_0}{\partial p_i}(q, p) - \sum_{j=1}^m \frac{\partial H_j}{\partial p_i}(q, p)u_j & 1 \leq i \leq n \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H_0}{\partial q_i}(q, p) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial H_j}{\partial q_i}(q, p)u_j \\ y_j &= H_j(q, p) & 1 \leq j \leq m.\end{aligned}$$

As equações acima constituem uma generalização das equações de Euler-Lagrange.

Se tomarmos

$$L(q, \dot{q}, u) = L_0(q, \dot{q}) + \sum_{j=1}^m q_j u_j$$

O sistema (3) pode ser visto como um caso especial da definição (3.4.1) e segue que

$$H(q, p, u) = H_0(q, p) - \sum_{j=1}^m q_j u_j$$

Onde $H_0(q, p)$ é a transformada de Legendre de $L_0(q, \dot{q})$ e temos que $\frac{\partial H_1}{\partial u_j} = -q_j$ isto é $y_j = -q_j$. O que nos dá uma dualidade entre a saída e a entrada, se $u_1, \dots, u_m$ são as forças externas generalizadas então $y_1, \dots, y_m$ são as coordenadas generalizadas de configuração. Agora, vejamos uma definição mais global.

Definição 3.4.2 *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade com colchete de Poisson não-degenerado, $H_0, H_1, \dots, H_m \in C^\infty(\mathcal{M})$ então*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= X_{H_0}(x) - \sum_{j=1}^m X_{H_j}(x)u_j & x \in \mathcal{M} \\ y_j &= H_j(x) & 1 \leq j \leq m\end{aligned}$$

é um sistema Hamiltoniano afim de controle.

Vejamos a equivalência com a outra definição. Temos pelo Teorema (2.2.1) que em torno de qualquer $x \in \mathcal{M}$, existem coordenadas canônicas $x = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ de $\mathcal{M}$ tal que:

$$\begin{aligned}X_{H_0}(q_i) &= \{H_0, q_i\} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i} \\ X_{H_j}(q_i) &= \{H_j, q_i\} = \frac{\partial H_j}{\partial p_i} \\ X_{H_0}(p_i) &= \{H_0, p_i\} = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i} \\ X_{H_j}(p_i) &= \{H_j, p_i\} = -\frac{\partial H_j}{\partial q_i}.\end{aligned}$$

Substituindo o sistema da definição (3.4.2) obtemos

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H_0}{\partial p_i} - \sum_{j=1}^m \frac{\partial H_j}{\partial p_i} u_j & 1 \leq i \leq n \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H_0}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial H_j}{\partial q_i} u_j \\ y_j &= H_j(q, p) & 1 \leq j \leq m\end{aligned}$$

que é o sistema definido em (3.4.1).

Agora Vejamos outra definição de sistema Hamiltoniano afim de controle.

Definição 3.4.3 *Um sistema afim em uma variedade simplética $(\mathcal{M}, w)$ é chamado de sistema Hamiltoniano afim de controle se em coordenadas locais pode ser representado por*

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x)$$

$$y_i = h_i(x) \quad 1 \leq i \leq m$$

Onde f é localmente um campo vetorial Hamiltoniano ou seja $\mathcal{L}_f w = 0$ e com g_i campo vetorial Hamiltoniano tal que $w(g_i, -) = dh_i$.

Temos que f e g_i são campos Hamiltonianos ou seja existem $H_0, H_i \in C^\infty(\mathcal{M})$ tal que $f = X_{H_0}$ e $g_i = X_{H_i}$, por outro lado $w(g_i, -) = w(X_{H_i}, -) = dH_i = dh_i \quad i = 1, \dots, m$, portanto

$$\dot{x} = X_{H_0} + \sum_{i=1}^m u_i X_{H_i}$$

$$y_i = H_i(x) \quad 1 \leq i \leq m$$

que é nosso sistema da definição (3.4.3).

Este tipo de sistemas Hamiltonianos forma uma subclasse natural da classe de sistemas dados na Definição (3.3.1), que está fundamentado pelo seguinte Teorema.

Teorema 3.4.1 *Seja $\Sigma(\mathcal{M}, \mathcal{W}, \mathcal{B}, f)$ um sistema totalmente Hamiltoniano. Denotemos $f = (g, h)$ com $g : \mathcal{B} \rightarrow T\mathcal{M}$ e $h : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{W}$. Suponhamos que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{W}$ são fibrados vetoriais, tal que $\mathcal{W} = T^*\mathcal{Y}$ com $\mathcal{Y}$ a variedade de saída. $(T^*\mathcal{Y}, w^e)$ é uma variedade simplética. Suponhamos também que $h : \mathcal{B} \rightarrow T^*\mathcal{Y}$ é um morfismo de fibrados e que h é linear e bijetora. Então podemos encontrar campos vetoriais A e $B_i \quad i = 1, \dots, m$ ($\dim \mathcal{B} = m$) e uma transformação $C : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{Y}$ tal que o sistema é escrito localmente por:*

$$\dot{x} = A(x) + \sum_{i=1}^m u_i B_i(x)$$

$$y_i = C_i(x) \quad i = 1, \dots, m$$

com $(y_1, \dots, y_m)$ coordenadas para $\mathcal{Y}$ e $C = (C_1, \dots, C_m)$ tal que $\mathcal{L}_A w = 0$ e $w(B_i, -) = dC_i$ isto é um sistema Hamiltoniano afim de controle.

Demonstração: Em coordenadas locais x para $\mathcal{M}$, u para o fibrado de $\mathcal{B}$, w para $\mathcal{W}$ e $f = (g, h)$ o sistema é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= g(x, u) & (*) \\ w &= h(x, u),\end{aligned}$$

onde $g : \mathcal{B} \rightarrow T\mathcal{M}$ e $h : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{W}$ são transformações suaves. Dado $\Delta(x)$ um subespaço afim de $T_x\mathcal{M}$ para todo x e uma transformação $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{Y}$ onde $\mathcal{Y}$ é uma variedade de saída. Em coordenadas locais um sistema afim de controle não linear é representado por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + \sum_{j=1}^m g_j(x)u_j & (*) \\ y_j &= h_j(x) & j = 1, \dots, p\end{aligned}$$

Com $x = (x_1, \dots, x_n)$ coordenadas para $\mathcal{M}$ e $y = (y_1, \dots, y_p)$ coordenadas para $\mathcal{Y}$, $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathcal{U}$, $f, g_1, \dots, g_m$ são campos vetoriais suaves definidos em $\mathcal{M}$ tal que $\Delta(x) = f(x) + \text{Span}\{g_1(x), \dots, g_m(x)\}$. Da Proposição (3.3.1), para cada u fixado $f(x, u)$ é um campo vetorial Hamiltoniano e em cada $x_0 \in \mathcal{M}$ existe uma vizinhança V de x_0 tal que em V , podemos escrever $(*)$ na forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mathcal{X}_{H_u}(x) \\ y &= \frac{\partial H^t}{\partial u}(x, u)\end{aligned}$$

Onde $x \in V \subset \mathcal{M}$, $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^m$. Isto é, em V para cada u fixado $\mathcal{X}_{H_u}$ é um campo vetorial Hamiltoniano, com função Hamiltoniana $x \rightarrow H_u(x) = H(x, u)$, e $w(\mathcal{X}_{H_u}, \mathcal{Z}) = dH_u(\mathcal{Z})$ para todo campo vetorial $\mathcal{Z}$ em V . Se o sistema é do tipo $(*)(*)$, podemos escrever este sistema da forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= g_0 - \sum_{i=1}^m u_i \mathcal{X}_{H_i}(x) & x \in \mathcal{M} \\ y_i &= H_i(x) & 1 \leq i \leq m \quad y \in \mathbb{R}^m\end{aligned}$$

Onde $\mathcal{X}_{H_i}$ são os campos vetoriais Hamiltonianos globais com função Hamiltoniana H_i , e g_0 é um campo vetorial Hamiltoniano local, com uma função Hamiltoniana definida localmente H_0 , e $w(\mathcal{X}_{H_i}, -) = dH_i$. Tomando $A = g_0$ e dado que g_0 é um campo vetorial Hamiltoniano local, temos que $\mathcal{X}_{H_i} = B_i$, sendo $C_i = H_i$ e além disso, $w(B_i, -) = w(\mathcal{X}_{H_i}, -) = dH_i = dC_i$. O qual demonstra o Teorema. ■

3.5 Acessibilidade e Observabilidade

A seguir veremos uma definição equivalente à dada no Capítulo 1 relativa ao conceito de fortemente acessível.

Definição 3.5.1 *Seja o sistema (1). $\Gamma_0 = \langle g_1, \dots, g_m \rangle$ denota o subespaço vetorial de $V^\infty(\mathcal{M})$ gerado por $\{g_1, \dots, g_m\}$ e $\Gamma = f + \langle g_1, \dots, g_m \rangle$ (um subespaço afim de $V^\infty(\mathcal{M})$). Definamos $\Gamma_k = [\Gamma, \Gamma_{k-1}] + \Gamma_{k-1}$ $k \geq 1$. Seja $K = \bigcup_{k \geq 0} \Gamma_k$. O sistema é chamado fortemente acessível se $K(x) = T_x \mathcal{M}$ para todo $x \in \mathcal{M}$, onde $K(x)$ é o subespaço vetorial de $T_x \mathcal{M}$ gerado por os campos vetoriais em K .*

Para demonstrar a equivalencia com o Teorema (1.3.2), nos basta demonstrar que $K(x) = C_0(x)$ para todo $x \in \mathcal{M}$. Da Definição (1.3.7) e Proposição (1.3.3), concluímos que $K \subset C_0$. Se demonstramos que K é um subálgebra de Lie, por definição de C_0 teremos que $K = C_0$. Por isso, basta demonstrar que K é uma álgebra de Lie.

Temos que,

$$\begin{aligned} [\Gamma_0, \Gamma_n] &= [f + \Gamma_0 - f, \Gamma_n] \\ &= [f + \Gamma_0, \Gamma_n] + [f, -\Gamma_n] \\ &= [\Gamma, \Gamma_n] + [f, -\Gamma_n] \\ &= [\Gamma, \Gamma_n] + \Gamma_{n+1} \\ &= \Gamma_{n+2} \quad \forall n \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} [\Gamma, \Gamma_n] &= [\Gamma, \Gamma_n] + \Gamma_n \quad \text{onde o ultimo } \Gamma_n = 0 \\ &= \Gamma_{n+1} \quad \forall n. \end{aligned}$$

Demonstremos que $[\Gamma_p, \Gamma_n] \in K$, para isso aplicaremos indução sobre p . Do anterior temos que $[\Gamma_0, \Gamma_n] \in K$. Vejamos se é válido para $p = 1$

$$\begin{aligned} [\Gamma_1, \Gamma_n] &= [[\Gamma, \Gamma_0] + \Gamma_0, \Gamma_n] \\ &= [[\Gamma, \Gamma_0], \Gamma_n] + [\Gamma_0, \Gamma_n] \\ &= -[[\Gamma_0, \Gamma_n], \Gamma] - [[\Gamma_n, \Gamma], \Gamma_0] + [\Gamma_0, \Gamma_n] \quad \text{pela identidade de Jacobi} \\ &= [\Gamma, \Gamma_{n+2}] + \Gamma_{n+3} + \Gamma_{n+2} \\ &= [\Gamma, \Gamma_{n+2}] + \Gamma_{n+3} \\ &= \Gamma_{n+4} \end{aligned}$$

Portanto $[\Gamma_1, \Gamma_n] \in K$ para todo n . Suponhamos que é válido para $p = k$ e para todo n , Vou demonstrar que é válido para $p = k + 1$.

$$\begin{aligned} [\Gamma_{k+1}, \Gamma_n] &= [[\Gamma, \Gamma_k] + \Gamma_k, \Gamma_n] \\ &= [[\Gamma, \Gamma_k], \Gamma_n] + [\Gamma_k, \Gamma_n] \\ &= -[[\Gamma_k, \Gamma_n], \Gamma] - [[\Gamma_n, \Gamma], \Gamma_k] + [\Gamma_k, \Gamma_n] \quad \text{pela identidade de Jacobi} \\ &= -[\Gamma_{k+n+2}, \Gamma] - [\Gamma_{n+1}, \Gamma_k] + [\Gamma_k, \Gamma_n] \\ &= [\Gamma, \Gamma_{k+n+2}] + [\Gamma_k, \Gamma_{n+1}] + [\Gamma_k, \Gamma_n]. \end{aligned}$$

Temos que os três termos do lado direito pertencem a K , e a soma também pertence a K . Portanto

$$[\Gamma_{k+1}, \Gamma_n] \in K$$

e, portanto,

$$[\Gamma_p, \Gamma_n] \in K.$$

Isso mostra a equivalencia com o Teorema (1.3.2).

Agora damos uma definição equivalente á dada no Capítulo 1 de localmente fracamente observável.

Definição 3.5.2 *Seja o sistema (1) e definamos $F_k = \mathcal{L}_\Gamma F_{k-1} + F_{k-1}$ $k \geq 1$, Γ como a definição anterior e $F_0 = \langle h_1, \dots, h_m \rangle$. Então o sistema é localmente fracamente observável se $G = \bigcup_{k \geq 0} F_k$ satisfaz $dG(x) = T_x^* \mathcal{M}$ para todo $x \in \mathcal{M}$, onde $dG(x)$ é o subespaço vetorial de $T_x^* \mathcal{M}$ gerado por $dh(x)$ com $h \in G$.*

Da Proposição(1.4.1) temos que $G = \bigcup_{k \geq 0} F_k$ é equivalente à definição do espaço de observação $\mathcal{O}$, e nosso critério é equivalente ao Teorema(1.4.1). Vejamos que sucede se nosso sistema é um sistema Hamiltoniano afim de controle, lembremos que neste tipo de sistemas temos que se $\mathcal{L}_f w = 0$, existe $H \in C(\mathcal{M})$ tal que $f = \mathcal{X}_H$ e se g_i é campo vetorial Hamiltoniano, existe $H_i \in C(\mathcal{M})$ tal que $g_i = \mathcal{X}_{H_i}$ e $w(g_i, -) = dh_i$ temos que $H_i = h_i$ a menos de uma constante. Temos, então, a seguinte Proposição.

Proposição 3.5.1 *Seja $F = H + \langle h_1, \dots, h_m \rangle$. Então os F_k definidos anteriormente satisfazem $F_k = \{F, F_{k-1}\} + F_{k-1}$ com $\{\cdot, \cdot\}$ o colchete do Poisson.*

Demonstração: Da definição(1.4.7) temos que os F_k são soma de funções da forma

$$\mathcal{L}_{\mathcal{X}_1} \mathcal{L}_{\mathcal{X}_2} \dots \mathcal{L}_{\mathcal{X}_k} h_j$$

com $\mathcal{X}_i = f$ ou $\mathcal{X}_i = g_l = \mathcal{X}_{H_l}$ para $l = 1, \dots, m$. O colchete de Poisson é definido por

$$\{A, B\} = w(\mathcal{X}_B, \mathcal{X}_A) = \mathcal{X}_A(B)$$

temos que $\mathcal{L}_{\mathcal{X}_i} h_j = \{H, h_j\}$ se $\mathcal{X}_i = f$ e $\mathcal{L}_{\mathcal{X}_i} h_j = \{h_l, h_j\}$ se $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_{H_l}$, generalizando obtemos

$$\mathcal{L}_{\mathcal{X}_1} \mathcal{L}_{\mathcal{X}_2} \dots \mathcal{L}_{\mathcal{X}_k} h_j = \{c_1, \{c_2, \{c_3, \dots \{c_k, h_j\} \dots\}\}\}$$

Com $c_i = H$ ou $c_i = h_l$, $l = 1, \dots, m$ com isto fica provada nossa proposição. ■

Vejamos se G , definido em um sistema Hamiltoniano afim de controle é uma álgebra de Lie.

Temos que

$$\begin{aligned}\{F_0, F_n\} &= \{H + F_0 - H, F_n\} \\ &= \{H + F_0, F_n\} + \{H, -F_n\} \\ &= \{F, F_n\} + F_{n+1} \\ &= F_{n+2} \quad \forall n.\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}\{F, F_n\} &= \{F, F_n\} + F_n \quad \text{onde o ultimo } F_n = 0 \\ &= F_{n+1} \quad \forall n.\end{aligned}$$

demonstremos que $\{F_p, F_n\} \in G$, para isso aplicaremos indução sobre p . Do anterior temos que $\{F_0, F_n\} \in G$.

Vejamos se é válido para $p = 1$.

$$\begin{aligned}\{F_1, F_n\} &= \{\{F, F_0\} + F_0, F_n\} \\ &= \{\{F, F_0\}, F_n\} + \{F_0, F_n\} \\ &= -\{\{F_0, F_n\}, F\} - \{\{F_n, F\}, F_0\} + F_{n+2} \quad (\text{pela identidade de Jacobi}) \\ &= \{F, \{F_0, F_n\}\} + \{F_0, -\{F, F_n\}\} + F_{n+2} \\ &= \{F, F_{n+2}\} + \{F_0, F_{n+1}\} + F_{n+2} \\ &= \{F, F_{n+2}\} + F_{n+3} + F_{n+2} \\ &= \{F, F_{n+2}\} + F_{n+3} \\ &= F_{n+4}\end{aligned}$$

Portanto $\{F_1, F_n\} \in G$ para todo n . Suponhamos que é válido para $p = k$ e para todo n , vou a demonstrar que é válido para $p = k + 1$.

$$\begin{aligned}\{F_{k+1}, F_n\} &= \{\{F, F_k\} + F_k, F_n\} \\ &= \{\{F, F_k, F_n\} + \{F_k, F_n\}\} \\ &= -\{\{F_k, F_n\}, F\} - \{\{F_n, F\}, F_k\} + \{F_k, F_p\} \\ &= \{F, \{F_k, F_p\}\} + \{F_k, \{F_n, F\}\} + \{F_k, F_p\} \\ &= \{F, F_{k+p+2}\} + \{F_k, F_{n+1}\} + \{F_k, F_{n+1}\} + \{F_k, F_p\}\end{aligned}$$

Temos que os três termos do lado direito pertencem a G e a soma também pertence a G . Portanto

$$\{F_{k+1}, F_n\} \in G$$

e

$$\{F_p, F_n\} \in G$$

Isso mostra que G é uma álgebra de Lie.

Relacionemos os F_k e Γ_k através de un isomorfismo, através do seguinte Teorema.

Teorema 3.5.1 *Dado um sistema Hamiltoniano afim de controle. Seja Γ_k e F_k da forma definidos anteriormente. Então Γ_k e F_k são relacionados pela transformação*

$$N \xrightarrow{\alpha} \mathcal{X}_N$$

(definido por $w(\mathcal{X}_N, -) = dN$) é um isomorfismo entre as álgebras de Lie G e K .

Demonstração: Temos que a transformação α associa funções constantes ao campo vetorial nulo. Para a demonstração usaremos indução sobre k .

Provaremos que a afirmação é válida para $k = 0$.

$$F_0 = \langle h_1, \dots, h_m \rangle \text{ e } \Gamma_0 = \langle g_1, \dots, g_m \rangle, \text{ seja } N = \sum_{i=1}^m \beta_i h_i \in F_0, \quad \beta_i \in \mathbb{R}$$

$$\alpha(N) = \alpha\left(\sum_{i=1}^m \beta_i h_i\right) = \mathcal{X}_{\sum_{i=1}^m \beta_i h_i} = \sum_{i=1}^m \beta_i \mathcal{X}_{h_i} = \sum_{i=1}^m \beta_i g_i \in \Gamma_0.$$

Portanto F_0 é associado a Γ_0 .

Vejamos agora se é válido para $k = 1$. Temos $F_1 = \{F, F_0\} + F_0$

$$\begin{aligned} \alpha(F_1) &= \alpha(\{F, F_0\}) + \alpha(F_0) \\ &= \alpha(\{H + F_0, F_0\}) + \Gamma_0 \\ &= \alpha(\{H, F_0\} + \{F_0, F_0\}) + \Gamma_0 \\ &= \alpha(\{H, F_0\}) + \alpha(\{F_0, F_0\}) + \Gamma_0 \\ &= [\mathcal{X}_H, \mathcal{X}_{F_0}] + [\mathcal{X}_{F_0}, \mathcal{X}_{F_0}] + \Gamma_0 \\ &= [f, \alpha(F_0)] + [\alpha(F_0), \alpha(F_0)] + \Gamma_0 \\ &= [f, \Gamma_0] + [\Gamma_0, \Gamma_0] + \Gamma_0 \\ &= [f + \Gamma_0, \Gamma_0] + \Gamma_0 \\ &= [\Gamma, \Gamma_0] + \Gamma_0 \\ &= \Gamma_1 \end{aligned}$$

Portanto é válido para $k = 1$. Suponhamos que é válida para $k - 1$ e provemos que é válida para k Temos

$$F_k = \{F, F_{k-1}\} + F_{k-1}$$

Por hipótese de indução temos que $\alpha(F_{k-1}) = \Gamma_{k-1}$, calculemos $\alpha(\{F, F_{k-1}\})$.

$$\begin{aligned} \alpha(\{F, F_{k-1}\}) &= \alpha(\{H + F_0, F_{k-1}\}) \\ &= \alpha(\{H, F_{k-1}\} + \{F_0, F_{k-1}\}) \\ &= \alpha(\{H, F_{k-1}\}) + \alpha(\{F_0, F_{k-1}\}) \\ &= [X_H, X_{F_{k-1}}] + [X_{F_0}, X_{F_{k-1}}] \\ &= [f, \alpha(F_{k-1})] + [\alpha(F_0), \alpha(F_{k-1})] \\ &= [f, \Gamma_{k-1}] + [\Gamma_0, \Gamma_{k-1}] \\ &= [f + \Gamma_0, \Gamma_{k-1}] \\ &= [\Gamma, \Gamma_{k-1}] \end{aligned}$$

Portanto

$$\alpha(\{F, F_{k-1}\}) = [\Gamma, \Gamma_{k-1}]$$

Do anterior temos que

$$\begin{aligned} \alpha(F_k) &= \alpha(\{F, F_{k-1}\} + F_{k-1}) \\ &= \alpha(\{F, F_{k-1}\}) + \alpha(F_{k-1}) \\ &= [\Gamma, \Gamma_{k-1}] + \Gamma_{k-1} \\ &= \Gamma_k \end{aligned}$$

Portanto temos que é válido para k . O qual demonstra nosso Teorema. ■

Corolário 3.5.1 *Um sistema Hamiltoniano afim de controle é localmente fracamente observável se e só se é fortemente acessível.*

Demonstração: Do Teorema anterior temos que $G = \bigcup_{k \geq 0} F_k$ é transformado por α isomorficamente em $K = \bigcup_{k \geq 0} \Gamma_k$ isto é:

$$\begin{aligned}
\alpha(G) &= \alpha(\cup_{k \geq 0} F_k) \\
&= \cup_{k \geq 0} \alpha(F_k) \\
&= \cup_{k \geq 0} \Gamma_k \\
&= K
\end{aligned}$$

Portanto $dG(x) = T_x^* \mathcal{M}$ se, e só se, $K(x) = T_x \mathcal{M}$. ■

O qual demonstra que um sistema Hamiltoniano afim de controle é controlável se, e só se, é observável, no sentido que fortemente acessível implica localmente fracamente observável e vice-versa.

Exemplo 3.5.1 Voltando ao Exemplo 1.2.1. denotemos $\theta_1 = q_1$ $\theta_2 = q_2$. A energia cinética vem dada por

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^t A(q) \dot{q}$$

Se tomamos $l_1 = l_2 = 1, m_1 = m_2 = 1$

$$A(q) = \begin{pmatrix} 3 + 2 \cos q_2 & 1 + \cos q_2 \\ 1 + \cos q_2 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
T(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} (\dot{q}_1 \dot{q}_2) \begin{pmatrix} 3 + 2 \cos q_2 & 1 + \cos q_2 \\ 1 + \cos q_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} [(3 + 2 \cos q_2) \dot{q}_1^2 + 2(1 + \cos q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2]
\end{aligned}$$

O momento generalizado é

$$\begin{aligned}
p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, u) \\
&= \frac{\partial (T(q, \dot{q}) - V(q) + \sum_{j=1}^2 q_j u_j)}{\partial \dot{q}} \\
&= \frac{\partial T(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i}
\end{aligned}$$

Temos que

$$p_1 = (3 + 2 \cos q_2) \dot{q}_1 + (1 + \cos q_2) \dot{q}_2$$

$$p_2 = (1 + \cos q_2) \dot{q}_1 + \dot{q}_2$$

O Hamiltoniano é dado por

$$H(q, p, u) = H_0(q, p) - \sum_{j=1}^2 q_j u_j$$

Mas

$$\begin{aligned} H_0(q, p) &= \frac{1}{2} p^t A^{-1}(q) p + V(q) \\ &= \frac{1}{2} (p_1 p_2) \frac{1}{1 + \sin^2 q_2} \begin{pmatrix} 1 & -(1 + \cos q_2) \\ -(1 + \cos q_2) & 3 + 2 \cos q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \\ &\quad - g \cos q_1 - g(\cos q_1 + \cos(q_1 + q_2)) \\ &= \frac{1}{2(1 + \sin^2 q_2)} [p_1^2 - 2p_1 p_2(1 + \cos q_2) + p_2^2(3 + 2 \cos q_2)] \\ &\quad - g(2 \cos q_1 + \cos(q_1 + q_2)) \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} H(q, p, u) &= \frac{1}{2(1 + \sin^2 q_2)} [p_1^2 - 2p_1 p_2(1 + \cos q_2) + p_2^2(3 + 2 \cos q_2)] \\ &\quad - g(2 \cos q_1 + \cos(q_1 + q_2)) - q_1 u_1 - q_2 u_2 \end{aligned}$$

Do qual temos

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{p_1 - p_2(1 + \cos q_2)}{1 + \sin^2 q_2} \\ \dot{q}_2 &= \frac{[-p_1(1 + \cos q_2) + p_2(3 + \cos q_2)]}{(1 + \sin^2 q_2)} \\ \dot{p}_1 &= g(-2 \sin q_1 - \sin(q_1 + q_2)) + u_1 \\ \dot{p}_2 &= \frac{\sin q_2 \cos q_2 [p_1^2 - 2p_1 p_2(1 + \cos q_2) + p_2^2(3 + 2 \cos q_2)]}{(1 + \sin^2 q_2)^2} \\ &\quad + \frac{[-p_1 p_2 \sin q_2 + p_2^2 \sin q_2]}{(1 + \sin^2 q_2)} - g \sin(q_1 + q_2) + u_2 \end{aligned}$$

Temos o seguinte sistema:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\sin^2 q_2} [-p_1 - p_2(1 + \cos q_2)] \\ \frac{1}{1+\sin^2 q_2} [-p_1(1 + \cos q_2) + p_2(3 + \cos q_2)] \\ g(-2 \sin q_1 - \sin(q_1 + q_2)) \\ \frac{\sin q_2 \cos q_2}{(1+\sin^2 q_2)^2} [p_1^2 - 2p_1 p_2(1 + \cos q_2) + p_2^2(3 + 2 \cos q_2)] \\ + \frac{1}{1+\sin^2 q_2} [-p_1 p_2 \sin q_2 + p_2^2 \sin q_2] - g \sin(q_1 + q_2) \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = q_1 = h_1$$

$$y_2 = q_2 = h_2$$

Por outro lado temos que:

$$\mathcal{L}_f h_1 = \frac{-p_1 - p_2(1 + \cos q_2)}{1 + \sin^2 q_2}$$

$$\mathcal{L}_f h_2 = \frac{-p_1(1 + \cos q_2) + p_2(3 + \cos q_2)}{1 + \sin^2 q_2}$$

$$\mathcal{L}_{g_1} h_1 = \mathcal{L}_{g_2} h_1 = \mathcal{L}_{g_1} h_2 = \mathcal{L}_{g_2} h_2 = 0.$$

Estes são elementos do espaço de observação e a codistribuição de observabilidade está definida por:

$$d\mathcal{O}(x) = \text{Span}\{dh(x) \setminus h \in \mathcal{O} \text{ onde } x \in \mathcal{M}\}$$

Portanto temos que:

$$dh_1 = dq_1$$

$$dh_2 = dq_2$$

$$d(\mathcal{L}_f)h_1 = \frac{1}{1+\sin^2 q_2} \left(\frac{2\sin q_2 \cos q_2}{1+\sin^2 q_2} (p_1 + p_2(1 + \cos q_2)) + p_2 \sin q_2 \right) dq_2 - dp_1 + (1 + \cos q_2) dp_2$$

$$d(\mathcal{L}_f)h_2 = \frac{1}{1+\sin^2 q_2} \left(\left(\frac{-2\sin q_2 \cos q_2}{1+\sin^2 q_2} (-p_1(1 + \cos q_2) + p_2(3 + \cos q_2)) \right) + (p_1 - p_2) \sin q_2 \right) dq_2 - (1 + \cos q_2) dp_1 + (3 + \cos q_2) dp_2$$

portanto podemos concluir que

$$\dim d\mathcal{O}(q, p) = 4 \quad \text{para todo } (q, p)$$

que pelo Teorema (1.4.1) o sistema é localmente fracamente observável e pelo Corolário (3.5.1) é fortemente acessível.

Referências Bibliográficas

- [1] Abraham, R and Marsden, J.E, "Foundation of Mechanics", Benjamin / Cummings, 1978.
- [2] Arnold, V.I, "Mathematical methods of classical mechanics", New York, Springer, 1989.
- [3] Brockett, R.W, "Control Theory and Analytical Mechanics" in Geometric Theory, edited by C. Martin and R. Hermann, Vol. VII of Lie Groups: History, Frontiers and Applications (Math. Sci. Press, Brookline, MA, 1977), pp 1-46.
- [4] Brockett, R.W , "System theory on group manifold and coset spaces", SIAM J. Contr, Vol 10 , pp 265-284, 1972.
- [5] Elliot, D.L " A consequence of controllability", J. Diff. Eqns, Vol 10, pp 364-370, 1970.
- [6] Haynes, G.W and Hermes, H "Non-linear Controllability via Lie theory", SIAM J. Contr, Vol 8, pp 450-460, 1970.
- [7] Hermann, R and Krener, A.J "Nonlinear controllability and observability", IEEE Trans. Aut. Contr, Vol AC-22, pp 728-740, 1970.
- [8] Hermann, R " On the accessibility problem in control Theory", in Int. Symp. on Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics, New York: Academic Press, pp 325-332, 1963.
- [9] Isidori, A "Nonlinear control Systems" 3rd ed. Springer-Verlag London 1995.
- [10] Kalman, R.E " On the general theory of control system", in Proceedings of the First International Congress of the International Federation of Automatic Control, Vol 1, Butterworths, London, pp 481-492, 1960.

- [11] Kalman R.E "Contributions to the theory of optimal control", Sociedad Matematica Mexicana, Boletin. Segunda Serie, Vol 5 N 1, pp 102-119, 1960.
- [12] Kreindler, E and Sarachick, P.E " On the concepts of controllability and observability of linear systems", IEEE Trans. Aut. Contr, pp 129-136, April 1964.
- [13] Krener, A.J " A generalization of Chows theorem and the bang-bang theorem to nonlinear control systems", SIAM J. Contr. Vol 12, pp 43-52, 1974.
- [14] Libermann, P and Marle, C.M "Symplectic geometry and analytical mechanics, Dordrecht Reidel, 1987.
- [15] Lobry, C "Controllabilité des systèmes non linéaires", SIAM J. Contr, Vol 8, pp 573-605, 1970.
- [16] Nijmeijer, H and Van der Schaft, A.J, "Nonlinear Dynamical Control Systems", Springer-Verlag, New York, 1990.
- [17] Sontag, E.D, "Mathematical control theory: deterministic finite dimensional systems, New York, Springer, 1990.
- [18] Sussmann, H.J and Jurdjevic, V.J "Controllability of nonlinear systems", J. Diff. Eqns, Vol 12, pp 95-116, 1972.
- [19] Sussmann, H.J " Orbits of families of vector-fields and integrability of distributions", Trans. American Math. Soc., Vol 180, pp 171-188, 1973.
- [20] Sussmann, H.J "Existence and uniqueness of minimal realizations of nonlinear systems", Math. Syst. Theory 10, pp 263-284, 1977.
- [21] Sussmann, H.J "A generalization of the closed subgroup theorem to quotients of arbitrary manifold", J. Diff. Geometry, Vol 10, pp 151-166, 1975.
- [22] Sussmann, H.J "Lie brackets, real analyticity and geometric control", in Differential Geometric control Theory (Eds. R.W Brockett, R.S Millman, H.J Sussmann), pp 1-116. Birkhäuser, Boston, 1983.
- [23] Van der Schaft, A.J "Observability and Controllability for smooth nonlinear systems", SIAM J Control and Optimization, Vol 20 N^o 3, pp 338-354, 1982.
- [24] Van der Schaft, A.J "Hamiltonian dynamics with external forces and observations", Math. Syst. Theory, Vol 15, pp 145-168, 1982.

- [25] Van der Schaft, A.J "Controllability and observability for affine nonlinear Hamiltonian systems", IEEE Trns. Automat. Contr., Vol AC-27 N^o 2, pp 490-492, 1982.
- [26] Willems, J.C "System theoretic models for the analysis of physical systems", Ricerche di Automatica, Special Issue on Systems Theory and Physich, Vol 10, pp 71-106, Dec. 1979.