**Decaimento exponencial
da função de dois pontos para o
Modelo de Ising
com acoplamentos aleatórios**

José de França Bueno

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA APLICADA

Área de Concentração: **Mecânica Estatística**
Orientador: **Prof^o Dr^o Henrique von Dreifus**

Durante a elaboração deste trabalho, o autor recebeu apoio financeiro da CAPES

**Decaimento exponencial
da função de dois pontos para o
Modelo de Ising com Acoplamentos aleatórios**

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação
apresentada por José de França Bueno ,
devidamente corrigida e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, dezembro de 1996.

Banca examinadora:

Prof.^o Dr.^o Henrique von Dreifus (orientador)

IME-USP

Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo

IME-USP

Prof. Dr. Domingos H. Marchetti

IF-USP

Resumo

Este trabalho dedica-se ao estudo da função de dois pontos no Modelo de Ising no caso em que os acoplamentos entre os sítios são v.a.i.i.d.'s. Neste trabalho apresentamos o decaimento exponencial da função de dois pontos tanto para o caso em que os acoplamentos são de alcance finito quanto ro caso em que tais acoplamentos são de alcance infinito com decaimento exponencial. A partir do decaimento exponencial da função de dois pontos com acoplamentos de alcance infinite e decaimento exponencial obtemos a unicidade da medida de Gibbs para este modelo.

Abstract

This work is dedicated to the study of the two point function in the Ising Model in the case that the interections are i.i.d.r.v.'s. In this work we present the exponential decay of the two point function in the both cases: the interections are finite range and the interections are infinite range with exponential decay. From the exponential decay of the two point function with interections of infinite range and exponential decay we get the unicity of the Gibbs Measure to this Model.

Agradecimentos

Aos **colegas, professores e funcionários**: amigos que muito ajudaram e incentivaram no decorrer do meu mestrado.

Ao orientador **Henrique**: pela dedicação, confiança e infinita paciência demonstrados ao longo deste trabalho.

Conteúdo

1	Introdução	3
1.1	Modelos Ferromagnéticos	3
2	Desigualdades de Correlação e Aspectos Qualitativos	9
2.1	Desigualdades de Correlação	9
2.2	Aspectos qualitativos do Modelo de Ising sem desordem	11
3	Modelos tipo Ising com Acoplamentos de alcance finito	18
3.1	Acoplamentos de alcance finito e não-aleatórios	18
3.2	Argumento de Peierls	21
3.3	Acoplamentos de alcance finito e aleatórios	24
3.4	Singularidades de Griffiths	27
4	Acoplamentos aleatórios de alcance infinito	32
4.1	Decaimento da função de dois pontos	32
4.2	Independência da Magnetização em relação às condições de Fronteira . . .	38
	Apêndice	42
A	Desigualdades de Correlação	42
A.1	Primeira Desigualdade de Griffiths	42

A.2	Segunda Desigualdade de Griffiths	43
A.3	Aplicações de G I e G II	44
A.4	Desigualdade FKG	45
A.5	Teorema de Lieb-Simon	47

Capítulo 1

Introdução

1.1 Modelos Ferromagnéticos

Consideremos modelos que descrevem o comportamento macroscópico de materiais ferromagnéticos a partir das interações entre os constituintes individuais do material (em tais modelos os átomos são distribuídos segundo uma estrutura cristalina apresentando momentos magnéticos não-nulos; Fe e Ni são exemplos de materiais ferromagnéticos). Como temos constituintes individuais da ordem do número de Avogrado, a utilização de equações dinâmicas para o estudo de tais modelos não é adequada. Dessa forma, uma outra abordagem (que não através de equações dinâmicas) se faz necessária.

Para estudarmos o comportamento de um material, deveremos em algum momento realizar medidas em laboratório das variáveis macroscópicas. Estas variáveis macroscópicas também são chamadas de observáveis. Uma questão importante é que o tempo gasto para efetuar uma medida macroscópica é muito grande quando comparado ao tempo (no nível microscópico) gasto pelas partículas para mudarem de configuração . Dessa forma, o valor obtido do observável representa na verdade uma média temporal do observável calculado sobre as configurações.

Antes de prosseguirmos vamos introduzir a seguinte notação: considere o reticulado Z^d (com $d \geq 1$); vamos indicar por Λ um subconjunto finito de Z^d . A cada sítio $x \in Z^d$ associaremos um valor $\sigma_x \in 1, -1$. Denotaremos uma dada configuração por $\sigma = \sigma(x)_{x \in Z^d}$ e por Ω o conjunto de todas as configurações σ .

Desta forma, dada $F : \Omega \rightarrow R$, o problema volta-se para o estudo de médias temporais do tipo:

$$F(\sigma) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t F(\sigma(t)) dt$$

onde $F(\sigma)$ representa o observável calculado na configuração σ e $\sigma(t)$ representa uma dada configuração no instante t

Faz-se agora a hipótese de equilíbrio: existe uma medida de probabilidade μ definida em Ω tal que as médias temporais dos observáveis para tempos suficientemente longos coincida com as médias do observável sobre o espaço de configurações em relação uma medida μ , ou seja:

$$\int_{\Omega} F(\sigma) d\mu(\sigma) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t F(\sigma(t)) dt \quad (1.1)$$

O objetivo passa a ser estudar as propriedades da medida de probabilidade μ .

Dado que para a determinação da medida μ precisa-se conhecer propriedades dinâmicas de um sistema com número de componentes da ordem do número de Avogrado, as considerações acima de caráter heurístico não simplificam o estudo do comportamento macroscópico de materiais ferromagnéticos. Entretanto, tais considerações tornam mais plausível um equacionamento probabilístico para o estudo de tais modelos.

Não é objetivo deste trabalho a caracterização da medida μ pelo limite (1.1). Nós iremos supor que a medida μ corresponde uma medida obtida segundo os Postulados de Gibbs. Para a situação em que o sistema efetua trocas de calor (mas não de partículas) com o meio exterior, temos pelo Postulado de Gibbs que a medida de probabilidade no espaço de configurações é dada por (em volumes finitos):

$$d\mu_{\Lambda}(\sigma) = \frac{e^{-\beta H_{\Lambda}(\sigma)} d\sigma_{\Lambda}}{Z_{\Lambda}}$$

onde:

Λ é um subconjunto finito de Z^d ;

$\Omega_{\Lambda} \subset \Omega$ é o conjunto de configurações $\sigma = \sigma_x, x \in \Lambda$

$H_{\Lambda} : \Omega \rightarrow R$;

$d\sigma_{\Lambda}$ indica a medida produto dada a priori em Ω_{Λ} ;

$\beta = \frac{1}{kT}$ indica a temperatura inversa, onde k é a constante de Boltzmann e $T > 0$ é a temperatura;

e $Z_\Lambda = \int_{\Omega_\Lambda} e^{-\beta H_\Lambda(\sigma)} d\sigma_\Lambda$ definida de modo que $\int d\mu_\Lambda(\sigma)$ seja igual a 1 é a função de partição do sistema.

É importante observarmos que da maneira como foi definida a medida μ_Λ do sistema, a probabilidade de ocorrerem configurações com altos valores de energia é baixa.

Dada a medida μ_Λ definimos a medida μ como sendo o limite fraco

$$\int_{\Omega} F(\sigma) d\mu(\sigma) = \lim_{\Lambda \rightarrow Z^d} \int_{\Omega_\Lambda} F_\Lambda(\sigma) d\mu_\Lambda(\sigma)$$

No caso particular do Modelo de Ising a medida de probabilidade é dada por

$$d\mu_\Lambda(\sigma) = \frac{e^{-\beta H_\Lambda(\sigma)} d\sigma_\Lambda}{Z_\Lambda}$$

onde a função $H_\Lambda(\sigma) : \Omega_\Lambda \rightarrow R$ é definida por:

$$H_\Lambda(\sigma) = - \sum_{\langle x,y \rangle \in \Lambda} \sigma_x J_{xy} \sigma_y - \sum_{x \in \Lambda} h_x \sigma_x + \text{"condições de fronteira"}$$

Neste trabalho estaremos supondo que os acoplamentos J_{xy} são sempre do mesmo sinal. No caso em que $J_{xy} > 0$ para todo $(x, y) \in Z^d \times Z^d$ chamamos de modelo de Ising ferromagnético e no caso em que $J_{xy} < 0$ para todo $(x, y) \in Z^d \times Z^d$ chamamos de modelo de Ising antiferromagnético.

Definimos o conjunto fronteira ($\partial\Lambda$) de um volume Λ como sendo o conjunto de todos os sítios $x \notin \Lambda$. Dizemos que temos fixadas condições de fronteira se, para todo $x \notin \Lambda$, σ_x possuir algum valor fixado. Além disso, as chamadas condições de fronteira livres correspondem a condição de $J_{xy} = 0$ sempre que $x \in \Lambda$ e $y \notin \Lambda$ ou vice-versa.

A partir da função de partição definimos a função Energia Livre:

$$f(\beta, h) = \lim_{\Lambda \rightarrow Z^d} f_\Lambda(\beta, h) = - \lim_{\Lambda \rightarrow Z^d} \frac{\log(Z_\Lambda)}{\beta|\Lambda|} \quad (1.2)$$

(onde chamamos o limite $\Lambda \rightarrow Z^d$ de limite termodinâmico do sistema) e a partir da função Energia Livre definimos a seguintes funções :

a função magnetização (para volumes finitos):

$$m_\Lambda(\beta, h) = \frac{\partial f_\Lambda(\beta, h)}{\partial h} = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_i \langle \sigma_i \rangle \quad (1.3)$$

(onde $\langle \sigma_i \rangle = \frac{1}{\Lambda} \int \sigma d\mu(\sigma)$)

Para o limite termodinâmico temos:

$$m(\beta, h) = \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} \frac{1}{|\Lambda|} m_\Lambda(\beta, h) \quad (1.4)$$

Nos pontos (β, h) em que a função Energia Livre é diferenciável temos $m(\beta, h) = -\frac{\partial f(\beta, h)}{\partial h}$.

Nos pontos (β, h) em que a função Energia Livre é diferenciável definimos ainda:

a função suscetibilidade magnética:

$$\chi(\beta, h) = \frac{\partial M(\beta, h)}{\partial h} = -\frac{\partial^2 f(\beta, h)}{\partial h^2} \quad (1.5)$$

a função calor específico:

$$c_H(\beta, h) = \frac{\partial^2 f(\beta, h)}{\partial \beta^2} \quad (1.6)$$

a função energia interna:

$$U(\beta, h) = \frac{\partial f(\beta, h)}{\partial \beta} \quad (1.7)$$

Um fenômeno que se observa em materiais ferromagnéticos é o fenômeno de **transição de fase**: no caso do modelo de Ising ferromagnético tal fenômeno se caracteriza pela existência de uma temperatura crítica (que denotaremos por T_c) tal que: para $T > T_c$, a função magnetização $m(\beta, h)$ é analítica em h e $m_0(\beta) = \lim_{h \rightarrow 0+} m(\beta, h) = \lim_{h \rightarrow 0-} m(\beta, h) = 0$; no entanto, se pusermos o mesmo material ferromagnético a baixas temperaturas ($T < T_c$), sob a influência de um campo externo h , a função magnetização deixa de ser analítica em h e teremos $\lim_{h \rightarrow 0+} m(\beta, h) = -\lim_{h \rightarrow 0-} m(\beta, h) \neq 0$. (Numa abordagem heurística dizemos que o material ferromagnético tem uma "memória" da direção dada pelo campo externo quando $T < T_c$). Concomitantemente ao fenômeno de transição de fase muitas vezes ocorre o fenômeno de **quebra de simetria**. No caso do Modelo de Ising (para $h = 0$ e sob condições de contorno livres) a medida $\mu_\Lambda(\sigma)$ é invariante sob a transformação $\sigma_x \rightarrow -\sigma_x$. Temos também que a função energia livre não depende das condições de fronteira utilizadas para definir o limite termodinâmico. No entanto para $\beta > \beta_c$ e dimensão ≥ 2 existem pelo menos duas fases puras. Chamamos de fase "+" a fase caracterizada pelo fato de que $m_+(\beta, h) > 0$ e de fase "-" a fase caracterizada pelo fato de que $m_-(\beta, h) < 0$ o que indica que houve uma quebra de simetria (onde $m_+(\beta, h)$ denota a função magnetização com condições de fronteira "+" e $m_-(\beta, h)$ denota a função

magnetização com condições de fronteira “-”. No caso do modelo de Ising em 2 dimensões a transição de fase ocorre na presença da quebra de simetria. No entanto, há casos (por exemplo, na transição líquido-gás) em que a transição de fase ocorre na ausência de quebra de simetria.

A transição de fase é caracterizada do ponto de vista termodinâmico pela existência de singularidades da função de estado Energia Livre. É imediato que para volumes finitos a função Energia Livre é uma função analítica em h . Assim, para caracterizarmos a transição de fase é necessário tomarmos o limite termodinâmico. Um resultado importante no caso de campos externos uniformes é o Teorema de Lee-Yang: no modelo de Ising ferromagnético há uma única fase para $h \neq 0$, ou seja, pontos de não-analiticidade podem ocorrer apenas quando o campo externo h for nulo. Também é possível considerarmos Modelos tipo Ising em que os acoplamentos J_{xy} são variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas (v.a.i.i.d.). Fisicamente, estes acoplamentos aleatórios estariam modelando as impurezas do material. Tais modelos são chamados também de modelos desordenados. Já observamos que no caso do Modelo de Ising com acoplamentos de primeiros vizinhos determinísticos ocorre o fenômeno de transição de fase (para $d \geq 2$). Observamos também que tal fenômeno está associado com a perda de analiticidade da função Energia Livre ($\lim_{h \rightarrow 0^+} m(\beta, h) \neq \lim_{h \rightarrow 0^-} m(\beta, h)$). O que vamos ver no capítulo 3 é que, para o caso do Modelo de Ising com acoplamentos diluídos (ou seja: $J_{ij} = 1$ com probabilidade $p > 0$ ou $J_{ij} = 0$ com probabilidade $1 - p$ se $|i - j| = 1$ e $J_{ij} = 0$ se $|i - j| > 1$) tais singularidades (as quais são chamadas de Singularidades de Griffiths) da função energia livre surgem, mesmo para temperaturas T para as quais $\lim_{h \rightarrow 0^+} m(\beta, h) = \lim_{h \rightarrow 0^-} m(\beta, h)$. Observação: a menos de menção em contrário, a notação $|i - j|$ representa a norma euclidiana.

O objetivo deste trabalho é apresentarmos os seguintes resultados: para o modelo de Ising ferromagnético com acoplamentos v.a.i.i.d.’s de alcance infinito e decaimento exponencial, obtemos o decaimento exponencial da função de dois pontos (este resultado indica o caráter local deste tipo de acoplamentos: sua influência não se faz sentir a grandes distâncias). A partir desta informação obteremos o limite termodinâmico e a unicidade da medida de Gibbs para este modelo (quando $\beta < \beta_c$). Nesta demonstração utilizamos a técnica de duplicação de variáveis.

A estrutura do trabalho é a seguinte: no capítulo 2 fazemos várias considerações de natureza qualitativa do modelo de Ising ferromagnético com acoplamentos de alcance finito; no capítulo 3 apresentamos alguns resultados relacionados com o decaimento da função de dois pontos com acoplamentos de alcance finito (mas de modo que não nos restrinjamos

ao caso de primeiros vizinhos), no caso em que os acoplamentos são aleatórios e no caso em que os acoplamentos não são aleatórios; no capítulo 4 apresentamos a demonstração do decaimento exponencial da função de dois pontos no caso de acoplamentos v.a.i.i.d. com decaimento exponencial com respeito a distância entre os sítios. Neste capítulo também demonstramos a existência do limite termodinâmico no caso de acoplamentos aleatórios com decaimento exponencial. Este capítulo 4 constitui o núcleo do trabalho. Por último, temos um apêndice onde apresentamos a demonstração de várias desigualdades de correlação.

Capítulo 2

Desigualdades de Correlação e Aspectos Qualitativos

Neste capítulo trataremos de desigualdades de correlação, aspectos qualitativos do Modelo de Ising sem desordem para $d \geq 1$ além de uma breve discussão sobre expoentes críticos e relações de escala.

2.1 Desigualdades de Correlação

Desigualdades de correlação são ferramentas importantes para o estudo destes modelos ferromagnéticos. Tais desigualdades envolvem valores esperados de produtos do tipo $\langle \prod_{x \in A} \sigma_x \rangle$ com $x \in A \subset \Lambda \subset \mathbb{Z}^d$. [Georgii] distingue três classes de desigualdades de correlação:

A: Desigualdades relacionadas com a ordem parcial do espaço de configurações.

Esta classe de desigualdades requer uma relação de ordem no espaço de estados e leva em conta a ordem parcial induzida do espaço de configurações Ω_Λ . A principal representante desta classe é a desigualdade FKG (Fortuin, Kasteleyn e Ginibre, 1971)

a qual afirma que se f e g forem funções não-decrescentes definidas em Ω_Λ e μ é uma distribuição de Gibbs então $\langle f(\sigma)g(\sigma) \rangle - \langle f(\sigma) \rangle \langle g(\sigma) \rangle \geq 0$. A demonstração desta desigualdade lança mão de uma indução sobre os sítios da rede (ver Apêndice). Uma referência interessante sobre vários resultados ligados à desigualdade FKG se encontra em [Graham].

B. Desigualdades relacionadas com a simetria do espaço de estados ou do potencial.

São desigualdades baseadas em propriedades de simetria do espaço de estados e do potencial. As hipóteses essenciais para este tipo de desigualdade são os acoplamentos serem ferromagnéticos e a paridade da medida de probabilidade a priori sob a qual estamos trabalhando (como é o caso no modelo de Ising com as medidas de Gibbs). Como exemplo desta classe podemos tomar as desigualdades de Griffiths:

Griffiths I: considere um subconjunto $A \subset \Lambda$ e $\sigma_A \equiv \prod_{x \in A} \sigma_x$. Então:

$$\langle \sigma_A \rangle \geq 0$$

Griffiths II: considere os conjuntos $A \subset \Lambda$ e $B \subset \Lambda$ e $\sigma_A \equiv \prod_{x \in A} \sigma_x$ e $\sigma_B \equiv \prod_{x \in B} \sigma_x$. Então

$$\langle \sigma_A; \sigma_B \rangle = \langle \sigma_A \sigma_B \rangle - \langle \sigma_A \rangle \langle \sigma_B \rangle \geq 0$$

Apesar das hipóteses serem distintas, as desigualdades FKG e G II têm a mesma tese. Um exemplo de aplicação da segunda desigualdade de Griffiths é a demonstração da existência do limite termodinâmico para algumas funções de correlação (ver Apêndice).

C. Desigualdades Geométricas.

Na demonstração dos teoremas das desigualdades desta classe tem papel primordial argumentos geométricos. São consideradas pertencentes a esta classe principalmente as desigualdades derivadas de Representação de funções de Correlação através de expansões em Random Walk. Como exemplos de desigualdades desta classe temos as desigualdades Gaussianas: Se F é um polinômio com coeficientes positivos então

$$\langle \sigma_x F(\sigma) \rangle \leq \sum_y \langle \sigma_x \sigma_y \rangle \langle \frac{\partial F(\sigma)}{\partial \sigma_y} \rangle$$

e a desigualdade de Lieb-Simon (ver Apêndice). Os resultados obtidos a partir deste tipo de desigualdades estão muitas vezes ligados a estimativas de temperatura crítica, expoentes críticos e ao decaimentos exponencial de funções de correlação. Veremos exemplos de

aplicações da desigualdade de Lieb-Simon nos capítulos 3 e 4 onde esta é utilizada para demonstrar o decaimento exponencial do valor esperado da função de dois pontos.

2.2 Aspectos qualitativos do Modelo de Ising sem desordem

Inicialmente vamos comentar os aspectos qualitativos do Modelo de Ising ferromagnéticos com acoplamentos constantes e de primeiros vizinhos. Lembramos que no capítulo anterior foi observado que para estudarmos o Modelo de Ising é importante conhecermos os pontos de não-analiticidade da função Energia Livre. Um resultado importante nesse sentido é dado pelo **Teorema de Lee-Yang**:

Teorema 2.2.1 *Seja $Z_\Lambda(\beta, h)$ a função de Partição do Modelo de Ising ferromagnético. Então, se $\text{Re}(h) \neq 0$, a Energia Livre $f(\beta, h) = \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} f_\Lambda(\beta, h)$ onde $f_\Lambda(\beta, h) = \frac{\ln(Z_\Lambda)}{\beta\Lambda}$ é uma função analítica de h .*

Graficamente:

Portanto, o Teorema de Lee-Yang nos diz que para $h \neq 0$, real, não temos transição de fase e a função energia livre pode apresentar singularidades apenas quando $h = 0$. Se

traçarmos o gráfico da magnetização em função do campo externo h teremos os gráficos seguintes (fig. 2.2, 2.3, 2.4).

$$\beta > \beta_c$$

Nestes gráficos observamos a magnetização como função de h para diversos valores de β . O ponto $(\beta, h) = (\beta_c, 0)$ é chamado de ponto crítico. Observamos que a magnetização é uma função crescente em h , e côncava para $h \geq 0$. Observamos ainda que a magnetização possui variações cada vez menores a medida que h aumenta em valor absoluto. A derivada parcial da magnetização em relação a h constitui a função suscetibilidade magnética: $\chi(\beta, h) = \frac{\partial m(\beta, h)}{\partial h}$. Apresentamos também os gráficos da suscetibilidade magnética para $\beta < \beta_c$, $\beta = \beta_c$ e $\beta > \beta_c$ (fig 2.5) :

Devido ao fato de as funções de correlação fatorizarem na fase pura, é conveniente introduzir-se as **funções de correlação truncadas** (ou valor esperado truncado);

$\langle \sigma_x; \sigma_y \rangle = \langle \sigma_x \sigma_y \rangle - \langle \sigma_x \rangle \langle \sigma_y \rangle$. Para discutirmos aspectos qualitativos deste modelo é importante analisarmos o comportamento do valor esperado $\langle \sigma_x; \sigma_y \rangle$ como função do campo externo h , da temperatura β e da distância $|x - y|$. Se $h \neq 0$ já vimos pelo Teorema de Lee-Yang que a função energia livre é analítica. Nesta região não temos transição de fase e as funções de correlação truncadas decaem exponencialmente. Consideremos o caso $h = 0$. Para $\beta = 0$ (temperatura infinita) $\mu_\Lambda(\beta, 0)$ reduz-se a medida-produto $\prod_{x \in \Lambda} d\mu_0(\sigma_x)$ onde

$\mu_0 = \frac{1}{2}(\delta(\sigma_x - 1) + \delta(\sigma_x + 1))$. O estado de Gibbs correspondente no limite termodinâmico é a medida produto $\mu = \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} \prod_{x \in \Lambda} d\mu_0(\sigma_x)$, com respeito a qual os momentos magnéticos são independentes e portanto não estão correlacionados. Para $\beta < \beta_c$ as correlações tem um decaimento exponencial (a partir de argumentos de expansão em altas temperaturas) com a distância entre os sítios $|x - y|$ e portanto a função energia livre é analítica como função de β . O fato das correlações apresentarem um decaimento exponencial com respeito a distância entre os sítios é expresso da seguinte forma:

$$\langle \sigma_x; \sigma_y \rangle_{\beta, 0} \approx e^{-\frac{|x-y|}{\xi(\beta)}}, \quad \text{para } |x - y| \rightarrow \infty$$

Onde $\xi(\beta, 0) < \infty$ é a função comprimento de correlação (ver Ellis, p. 170). Heurística-mente isto significa que as orientações de momentos magnéticos em sítios distantes entre si estão fracamente correlacionadas. A função $\xi(\beta, 0)$ é crescente em β e as correlações entre os momentos magnéticos se estendem para distâncias cada vez maiores a medida que β cresce. Para $\beta \nearrow \beta_c$ o comprimento de correlação diverge. Paralelamente, a função suscetibilidade magnética também diverge para $\beta \nearrow \beta_c$. O comprimento de correlação infinito está refletido no fato que $\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\beta_c, 0}$ não decai mais exponencialmente mas sim decai como uma potência de $|x - y|^{-1}$:

$$\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\beta_c, 0} \approx |x - y|^{-(d-2+\eta)}, \quad \text{para } |x - y| \rightarrow \infty$$

onde d é a dimensão do modelo e η é uma constante positiva menor que 1 ($\eta = \frac{1}{4}$ no modelo de Ising em $\mathbb{Z}^2$).

Define-se a **magnetização espontânea** por

$$M_0(T) = \lim_{h \searrow 0} M(T, h)$$

onde T é a temperatura e M é a função magnetização definida no capítulo anterior. A magnetização espontânea se anula para $T > T_c$ e é estritamente positiva para $T < T_c$.

Espera-se (e em alguns casos, como no caso do modelo de Ising para $d = 2$ é provado) que $M_0(T)$ seja contínua para $T = T_c$. seu comportamento qualitativo é dado pela figura:

Para $\beta > \beta_c$, entramos na região em que o modelo exibe magnetização espontânea. Consideremos a função de correlação de dois pontos com respeito à medida $\mu(\beta, 0)$. Sabemos que (devido à paridade da medida) $\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\beta, 0, +} = - \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\beta, 0, -} = m_+(\beta, 0) > 0$. Como no caso $\beta < \beta_c$, a função de correlação truncada decai exponencialmente:

$$\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\beta, 0, +} - \langle \sigma_x \rangle_{\beta, 0, +} \langle \sigma_y \rangle_{\beta, 0, +} = \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\beta, 0, +} - m_+(\beta, 0)^2 \approx e^{-\frac{|x-y|}{\xi(\beta, 0)}}$$

para $|x - y| \rightarrow \infty$ onde $0 < \xi(\beta, 0) < \infty$ (para a demonstração da igualdade ver McCoy e Wu; para a demonstração de decaimento exponencial ver Ellis pág. 169). Nesta região ocorre um alinhamento cada vez maior entre os momentos magnéticos.

$$\text{Ainda : } \lim_{\beta \rightarrow \infty} m_+(\beta, 0) = 1 \text{ e } \lim_{\beta \rightarrow \infty} \xi(\beta, 0) = 0.$$

O comportamento da função suscetibilidade magnética está associado ao do comprimento de correlação para $\beta \rightarrow \beta_c$. Temos a seguinte igualdade:

$$\chi(\beta, h) = \beta \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \langle \sigma_0; \sigma_x \rangle_{\beta, h}, \quad \text{para } 0 < \beta \leq \beta_c$$

Para $\beta \neq \beta_c$, $\langle \sigma_0; \sigma_x \rangle_{\beta, 0}$ decai exponencialmente e portanto $\chi(\beta, 0)$ é finita. No entanto, para $\beta = \beta_c$, $\langle \sigma_0; \sigma_x \rangle_{\beta_c, 0}$ tem decaimento polinomial da ordem de $|x|^{-\frac{1}{4}}$ e

$\chi(\beta_c, 0)$ é infinita.

Outro aspecto qualitativo destes modelos está relacionado com os chamados expoentes críticos. Estes expoentes críticos estão relacionados com a função comprimento de correlação ($\xi(\beta, h)$) e com o comportamento das funções termodinâmicas macroscópicas: suscetibilidade magnética ($\chi(\beta, h)$), e do calor específico $C_H(\beta, h)$. Quando nos aproximamos da temperatura crítica ($\beta \rightarrow \beta_c$) com campo externo nulo ($h = 0$) temos:

$$\chi \approx |\beta - \beta_c|^{-\gamma}$$

$$\xi \approx |\beta - \beta_c|^{-\nu}$$

$$C_H \approx |\beta - \beta_c|^{-\alpha}$$

$$m \approx |\beta - \beta_c|^{\tilde{\beta}}$$

Um dos fatos surpreendentes do modelo é que estes expoentes não são independentes entre si. Há uma relação de dependência entre eles a qual define as chamadas Relações de escala. Tais relações tanto podem ser igualdades entre os expoentes críticos, como por exemplo:

$$\alpha + 2\tilde{\beta} + \gamma = 2$$

ou

$$\nu d = 2 - \alpha$$

quanto desigualdades entre expoentes críticos. Como exemplo de uma desigualdade entre expoentes críticos temos a desigualdade de Buckingham-Gunton (1969) (ver Ellis p.175) para modelos tipo Ising com acoplamentos não-aleatórios de alcance finito:

$$2 - \eta \leq d \frac{\delta - 1}{\delta + 1}$$

onde δ é o expoente

$$m \approx \frac{1}{h^\delta}$$

quando $h \rightarrow 0$ e $\beta = \beta_c$

Através de argumentos não rigorosos usando a Teoria de Grupos de Renormalização, acredita-se que estes expoentes críticos não dependam de aspectos locais ou detalhes devidos à particular interação mas sim da dimensão da rede onde o modelo está sendo estudado. Quando temos igualdades e não apenas desigualdades entre os expoentes críticos chamamos tais relações entre os expoentes críticos de Relações Escala ou de Hiperescala.

Capítulo 3

Modelos tipo Ising com Acoplamentos de alcance finito

Neste capítulo veremos alguns exemplos de modelos tipo Ising em que se demonstra o decaimento da função de correlação quando temos variáveis de acoplamento entre os sítios de alcance finito. Veremos o caso tanto de variáveis determinísticas quanto o caso de variáveis aleatórias i.i.d. Nosso intuito com este capítulo é estudar o que ocorre com este tipo de modelos de modo a termos alguma informação adicional quando, no próximo capítulo, estudarmos modelos com alcance infinito.

3.1 Acoplamentos de alcance finito e não-aleatórios

Consideremos o Modelo tipo Ising com interação entre primeiros vizinhos, quando o campo externo h é nulo. Tal modelo é definido pela seguinte Hamiltoniana:

$$H_{\Lambda}(\sigma) = - \sum_{\langle x,y \rangle} J_{xy} \sigma_x \sigma_y$$

com

$$J_{xy} = \begin{cases} J_{xy} = J & , \text{ se } |x - y| = 1 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Temos então o seguinte teorema na versão apresentada por [Dreifus]:

Teorema 3.1.1 : *Seja $\Lambda_L(x)$ um cubo finito em Z^d com lado $L = 2k, (k = 1, 2, 3, \dots)$, e centro em $x \in Z^d$. Se:*

$$\beta J \sum_{\omega \in \partial \Lambda_L(x)} \langle \sigma_x \sigma_\omega \rangle_{\Lambda_L(x)} \leq \delta < 1$$

Então, para $y \in Z^d$ com $|x - y| \geq L$ temos:

$$\langle \sigma_x \sigma_y \rangle \leq C e^{-\frac{|x-y|}{\xi(\beta)}}$$

onde C é uma constante positiva e

$$-\xi(\beta)^{-1} = \frac{1}{L} \log(\delta)$$

Demonstração

A demonstração deste teorema será feita para o caso de primeiros vizinhos apenas por uma questão de simplicidade. O mesmo resultado vale para acoplamentos de alcance finito com as devidas adaptações na demonstração.

Definimos os seguintes conjuntos:

$$\Lambda_L(x) = \{y \in Z^d \text{ tq } |x - y|_\infty \leq L\}$$

$$\text{onde } |x - y|_\infty = \max_{j=1,2,\dots,d} |x_j - y_j|$$

$$\partial \Lambda_L(x) = \{y \in \Lambda^c \text{ tq } |z - y| = 1, z \in \Lambda_L(x)\}$$

$$\partial^* \Lambda_L(x) = \{y \in \Lambda^c : |z - y| = L + 1, z \in \Lambda_L(x)\}$$

Tomando:

$$X = \{(u, v) \in Z^d \times Z^d \text{ tq } \text{ou } \{u \in \Lambda_L(x) \text{ e } v \notin \Lambda_L(x)\} \text{ ou } \{u \notin \Lambda_L(x) \text{ e } v \in \Lambda_L(x)\}\}$$

Definimos $\langle . \rangle_X$ colocando $J_{uv} = 0 \forall u, v \in X$ na definição de $\langle . \rangle_\Lambda$.

Da desigualdade de Lieb-Simon (ver Apêndice), temos:

$$\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_\Lambda - \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_X \leq \sum_{(u,v) \in X} \langle \sigma_x \sigma_u \rangle_X \beta J \langle \sigma_v \sigma_y \rangle_\Lambda$$

Da definição do conjunto X sabemos que $\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_X = 0$. Assim, a desigualdade acima fica

$$\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_\Lambda \leq \sum_{(u,v) \in X} \langle \sigma_x \sigma_u \rangle_X \beta J \langle \sigma_v \sigma_y \rangle_\Lambda$$

Seja $\bar{s} \in \partial^* \Lambda_L(x)$ tal que $\langle \sigma_{\bar{s}} \sigma_y \rangle_\Lambda = \max_{s \in \partial^* \Lambda_L(x)} \{ \langle \sigma_s \sigma_y \rangle_\Lambda \}$ e $\tilde{J} = \max_{(s,t) \in X} J_{st}$.

$$\text{Então, } \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_\Lambda \leq \{ \beta \tilde{J} \sum_{t \in \partial \Lambda_L(x)} \langle \sigma_x \sigma_t \rangle_X \} \langle \sigma_{\bar{s}} \sigma_y \rangle_\Lambda$$

Portanto, se

$$\beta \tilde{J} \sum_{t \in \partial \Lambda_L(x)} \langle \sigma_x \sigma_t \rangle_X \leq \delta < 1$$

teremos: $\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_\Lambda \leq \delta \langle \sigma_{\bar{s}_1} \sigma_y \rangle_\Lambda$ com $\bar{s}_1 \in \partial^* \Lambda_L$.

Repetindo o mesmo argumento para $\langle \sigma_{\bar{s}_1} \sigma_y \rangle$ com o conjunto

$$\Lambda_L(\bar{s}_1) = \{z \in Z^d \text{ tq } |\bar{s}_1 - z|_\infty \leq L\} \text{ obtemos } \langle \sigma_x \sigma_y \rangle \leq \delta \langle \sigma_{s_1} \sigma_y \rangle \leq \delta^2 \langle \sigma_{s_2} \sigma_y \rangle$$

Este argumento pode ser repetido iterativamente desde que $\bar{s}_k \notin \Lambda_L(y)$ e, desta forma obtemos a quota:

$$\langle \sigma_x \sigma_y \rangle \leq \delta^{\frac{|x-y|}{L+1}}$$

$\Rightarrow$

$$\langle \sigma_x \sigma_y \rangle \leq e^{-\frac{|x-y|}{\xi(\beta)}}$$

onde

$$-\xi(\beta)^{-1} = \frac{1}{L+1} \ln(\delta(\beta))$$

■

Um corolário importante desta análise é:

Corolário 3.1.1 Para $\beta = \beta_c$ a função de dois pontos satisfaz:

$$\langle \sigma_x \sigma_y \rangle (\beta_c) \geq c t \epsilon |x|^{-d+2-\eta}$$

com $\eta \leq d$

Demonstração : Inicialmente devemos observar que $\langle \sigma_x \sigma_y \rangle (\beta_c)$ não pode ter decaimento exponencial pois estaria em contradição com a própria definição de $\beta_c = \sup\{\beta : \langle \sigma_x \sigma_y \rangle \leq e^{-\frac{|x-y|}{\xi}} \text{ quando } |x-y| \rightarrow \infty, \text{ para algum } \xi > 0\}$. Também não podemos ter $\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_\Lambda \leq \langle \sigma_x \sigma_y \rangle (\beta_c) \leq C|x|^{-d+2-\eta}$ com $\eta \geq d + \varepsilon$ pois isto implicaria que a hipótese do teorema estaria satisfeita e portanto teríamos decaimento exponencial para $\langle \sigma_x \sigma_y \rangle (\beta_c)$. ■

Observação: Se

$$J_{xy} = \begin{cases} J_{xy} = J, & \text{se } |x-y| \leq N \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

com $N > 1$, teremos o mesmo resultado, com as devidas alterações na demonstração.

3.2 Argumento de Peierls

Na última seção vimos condições para que tivéssemos decaimento exponencial da função de dois pontos. A partir do decaimento exponencial da função de dois pontos podemos demonstrar que não temos transição de fase no sistema (esta demonstração será dada no próximo capítulo). A partir do resultado clássico dado pelo argumento de Peierls (para referência ver Glimm-Jaffe) podemos demonstrar a existência de transição de fase para sistemas em dimensão $d \geq 2$ para o modelo de Ising com acoplamentos positivos não-aleatórios e de primeiros vizinhos quando estamos a uma temperatura positiva. Apenas por questão de maior simplicidade para expormos a idéia do argumento consideraremos o caso $d = 2$ com acoplamentos de primeiros vizinhos. Supomos condições de fronteira " + " (também poderíamos considerar condições de fronteira " - " fazendo as devidas adaptações).

A idéia de Peierls foi associar um conjunto de curvas fechadas chamadas de contornos a cada configuração $\sigma \in \Omega_\Lambda$ e, a partir destas curvas efetuar estimativas de entropia e energia para o sistema. Definimos o bordo $\partial\Lambda$ (ou $\text{bd } \Lambda$) do volume finito $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ como

sendo o conjunto de todos os sítios $j \in \Lambda^c$ os quais estão a distância unitária de Λ . Como as interações J_{xy} são supostas de primeiros vizinhos, o bordo de Λ contém todos os sítios da rede que interagem com os sítios de Λ . A condição externa “+” fixa a cada spin na fronteira de Λ o valor +1. Sem perda de generalidade estaremos fixando a condição de fronteira “+”. Contornos são construídos levando-se em consideração as eventuais trocas de sinal presentes em uma configuração σ . Para cada par $(x, y) \in Z^d, |x - y| = 1$, verificamos os sinais de σ_x e σ_y . Se $\sigma_x \neq \sigma_y$, traçamos um segmento unitário que bisecta o segmento que une x a y . Dada uma configuração σ denotamos por $\Gamma(\sigma)$ o conjunto de segmentos assim construídos. O conjunto de todos os $\Gamma(\cdot)$ é denotado por $\partial\Delta$. A condição externa “+” fixa a cada spin na fronteira de Λ o valor +1 e a condição externa “-” fixa a cada spin na fronteira de Λ o valor -1. Dada uma configuração σ , a hamiltoniana $H_\Lambda(\sigma)$ definida por:

$$H_\Lambda(\sigma) = J \sum_{(x,y) \in \Lambda} \sigma_x \sigma_y - J|\Lambda|$$

satisfaz: $H_\Lambda(\sigma) = 2\beta J|\Gamma(\sigma)|$ onde $|\Gamma(\sigma)|$ é o comprimento do contorno $\Gamma(\sigma)$.

Considerando o caso em que as condições de fronteira são positivas, as componentes γ dos contornos são fechadas e estão isoladas da fronteira $\partial\Lambda$. Dada uma componente simples, γ , definimos o evento $\partial\Delta_\gamma$ como: $\partial\Delta_\gamma = \{\Gamma(\sigma) \supset \gamma\} \subset \partial\Delta$ isto é, o conjunto de todas as configurações que possuem, na sua representação através de contornos, a componente γ .

Então a probabilidade do evento $\partial\Delta_\gamma$ é denotada por:

$$Pr(\gamma) = \frac{\sum_{\Gamma \in \partial\Delta_\gamma} e^{-\beta H(\Gamma)}}{\sum_{\Gamma \in \partial\Delta} e^{-\beta H(\Gamma)}}$$

Teorema 3.2.1

$$Pr(\gamma) \leq e^{-2\beta J|\gamma|}$$

onde $|\gamma|$ representa o comprimento do contorno γ .

Demonstração: Vamos representar por Γ_γ^* a configuração obtida de Γ_γ trocando-se o sinal dos sítios no interior de contorno γ (dessa maneira estaremos removendo a componente γ do conjunto Γ_γ). Então:

$$\frac{e^{-\beta H(\Gamma_\gamma)}}{e^{-\beta H(\Gamma_\gamma^*)}} = e^{-2\beta J|\gamma|}$$

Existe uma correspondência biunívoca entre os contornos Γ_γ que contém a componente γ e os contornos que não contém γ obtida através da troca de sinal dos momentos magnéticos dos sítios no interior de γ . Utilizando esta correspondência vemos que:

$$Pr(\gamma) = \frac{\sum_{\Gamma_\gamma} e^{-\beta H(\Gamma_\gamma)}}{\sum_{\Gamma} e^{-\beta H(\Gamma)}} \leq \frac{\sum_{\Gamma_\gamma} e^{-\beta H(\Gamma_\gamma)}}{\sum_{\Gamma_\gamma^*} e^{-\beta H(\Gamma_\gamma^*)}} = e^{-2\beta J|\gamma|}$$

Sendo que a desigualdade segue do fato de termos diminuído o valor da soma no denominador da primeira fração e assim passamos a ter a seguinte desigualdade: $\sum_{\Gamma} e^{-\beta H(\Gamma)} \geq \sum_{\Gamma_\gamma^*} e^{-\beta H(\Gamma_\gamma^*)}$.

■

Teorema 3.2.2 Para β suficientemente grande e $d \geq 2$ temos que:

$$0 \leq 1 - \langle \sigma_x \rangle_{\Lambda,+} \leq e^{-\beta J}$$

Demonstração: Temos que $1 - \langle \sigma_x \rangle_{\Lambda,+} = \langle 1 - \sigma_x \rangle_{\Lambda,+}$ sendo que apenas configurações com $\sigma_x = -1$ contribuem para este valor esperado. Para estas configurações existe necessariamente uma componente γ que possui x no seu interior (dada a condição de fronteira positiva em Λ). Dada uma destas componentes, denotamos por $\partial\Delta_\gamma$ o conjunto de todos os contornos Γ para os quais a menor componente que contém x em seu interior seja γ .

Então:

$$1 - \langle \sigma_x \rangle_{\Lambda,+} = 2 \frac{\sum_{\gamma} \sum_{\Gamma \in \partial\Delta_\gamma} e^{-\beta H(\Gamma)}}{\sum_{\Gamma \in \partial\Delta} e^{-\beta H(\Gamma)}}$$

$$1 - \langle \sigma_x \rangle_{\Lambda,+} \leq 2 \sum_{\gamma} Pr(\gamma) \leq 2 \sum_{\gamma} e^{-2\beta J|\gamma|}$$

Seja agora $N(|\gamma|)$ o número de possíveis γ 's de comprimento $|\gamma|$ tais que x está no interior de γ . Este número pode ser estimado a partir dos seguintes fatos:

- 1 - γ está contido em uma região de volume $|\gamma|^d$ centrada em x .
- 2 - começando de qualquer elemento γ existem $c = 2d - 1$ possibilidades de adicionar um próximo elemento.

Desta forma $N(|\gamma|) \leq |\gamma|^d c^{|\gamma|}$, o que implica na seguinte estimativa:

$$1 - \langle \sigma_x \rangle_{\Lambda,+} \leq 2 \sum_{l=4}^{\infty} l^d c^l \epsilon^{-2\beta J l}$$

Tomando βJ grande segue que:

$$0 \leq 1 - \langle \sigma_x \rangle_{\Lambda,+} \leq \epsilon^{-\beta J}$$

■

3.3 Acoplamentos de alcance finito e aleatórios

Consideremos o Modelo tipo Ising com interação aleatória entre primeiros vizinhos e com campo externo nulo. Este modelo é definido pela seguinte Hamiltoniana:

$$H_{\Lambda}(\sigma) = - \sum_{\langle x,y \rangle} J_{xy} \sigma_x \sigma_y$$

onde

$$J_{xy} = \begin{cases} J_{xy}, & \text{se } |x - y| \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e J_{xy} são v.a.i.i.d.'s.

Teorema 3.3.1 *Seja $\Lambda_L(x)$ um cubo finito de lado $L = 2k$; ($k = 1, 2, 3, \dots$), e centro em $x \in \mathbb{Z}^d$. Se*

$$\beta^2 n(d) (L+4)^{d-1} \overline{J^2} \sum_{w \in \partial \Lambda_L(x)} \overline{\langle \sigma_x \sigma_w \rangle}_{\Lambda_L(x)} \leq \delta < 1$$

onde $n(d)$ denota o número de hiperfaces do cubo de dimensão d .

Então, para $|x - y| \gg L$,

$$\overline{\langle \sigma_x \sigma_y \rangle} \leq C e^{-\frac{|x-y|}{\xi(\beta)}}$$

onde C é uma constante positiva e

$$-\xi(\beta)^{-1} = \frac{1}{L} \ln(\delta(\beta))$$

$$\text{com } \delta(\beta) = (L+4)^{d-1} n(d) \beta^2 \bar{J}^2 \sum_{u \in \partial \Lambda_L(x)} \overline{\langle \sigma_x \sigma_y \rangle}_{\partial \Lambda_L(x)}$$

Demonstração

Definimos os seguintes conjuntos:

$$\Lambda_L(x) = \{z \in Z^d \text{ tq } |x - z|_\infty \leq L\}$$

$$\partial \Lambda_L(x) = \{z \in \Lambda^c \text{ tq } |x - z| = 1\}$$

$$X = \{(u, v) \in Z^d \times Z^d \text{ tq ou } \{u \in \Lambda_L(x) \text{ e } v \notin \Lambda_L(x)\} \text{ ou } \{u \notin \Lambda_L(x) \text{ e } v \in \Lambda_L(x)\}\}$$

Da desigualdade de Lieb-Simon (ver Apêndice) temos, para $|x - y| \gg L$

$$\langle \sigma_x \sigma_y \rangle \leq \sum_{(t,s) \in \partial \Lambda_L(x)} \langle \sigma_x \sigma_t \rangle_{\Lambda_L(x)} \beta J_{ts} \langle \sigma_s \sigma_y \rangle$$

Aplicando a desigualdade de Lieb-Simon para $\langle \sigma_s \sigma_y \rangle$ com conjunto $\Lambda_{L+1}(x)$, temos:

$$\langle \sigma_s \sigma_y \rangle \leq \sum_{(u,v) \in \partial \Lambda_{L+1}(x)} \langle \sigma_s \sigma_u \rangle \beta J_{uv} \langle \sigma_v \sigma_y \rangle_{\Lambda_{L+1}(x)}$$

Usando a limitação dos spins ($|\sigma_z| \leq 1, \forall z \in Z^d$ no caso do modelo de Ising) temos $|\langle \sigma_s \sigma_u \rangle| \leq 1$.

Portanto:

$$\langle \sigma_x \sigma_y \rangle \leq \sum_{(t,s) \in \partial \Lambda_L(x)} \sum_{(u,v) \in \partial \Lambda_{L+1}(x)} \beta^2 J_{ts} J_{uv} \langle \sigma_x \sigma_t \rangle_{\Lambda_L(x)} \langle \sigma_v \sigma_y \rangle_{\Lambda_{L+1}^c(x)}$$

Notamos agora que, do lado direito da desigualdade acima, $\langle \sigma_x \sigma_t \rangle_X(J)$ é uma função dos valores J_{qr} com $q, r \in \Lambda_L(x)$ e que $\langle \sigma_v \sigma_y \rangle_X(J)$ é uma função dos valores J_{qr} com $q, r \notin \Lambda_{L+2}(x)$ temos que a média sobre as configurações J é fatorizada:

$$\overline{\langle \sigma_x \sigma_y \rangle} \leq \beta^2 \bar{J}^2 \sum_{t \in \partial \Lambda_L(x)} \sum_{v \in \partial \Lambda_{L+1}(x)} \overline{\langle \sigma_x \sigma_t \rangle_{\Lambda_L(x)}} \overline{\langle \sigma_v \sigma_y \rangle_{\Lambda_{L+1}^c(x)}}$$

Tomando $w_o \in \Lambda_{L+2}(x)$ tal que

$$\overline{\langle \sigma_{w_o} \sigma_y \rangle}_{\Lambda_{L+1}(x)} = \max_{s \in \Lambda_{L+2}(x)} \overline{\langle \sigma_s \sigma_y \rangle}_{\Lambda_{L+1}(x)}$$

e usando a hipótese do teorema teremos:

$$\overline{\langle \sigma_x \sigma_y \rangle} \leq \beta^2 \bar{J}^2 n(d)(L+2)^{d-1} \sum_{u \in \partial \Lambda_L(x)} \overline{\langle \sigma_x \sigma_u \rangle} \overline{\langle \sigma_{w_o} \sigma_y \rangle} \leq \delta(\beta) \overline{\langle \sigma_{w_o} \sigma_y \rangle}$$

$$\text{onde } \delta(\beta) = \beta^2 \bar{J}^2 n(d)(L+2)^{d-1} \sum_{u \in \partial \Lambda_L(x)} \overline{\langle \sigma_x \sigma_u \rangle}_{\partial \Lambda_L(x)}$$

Podemos repetir o mesmo procedimento pelo menos $\frac{|x-y|}{L+2}$ vezes e assim concluímos que:

$$\overline{\langle \sigma_x \sigma_y \rangle} \leq \delta^{\frac{|x-y|}{L+2}}$$

e portanto

$$\overline{\langle \sigma_x \sigma_y \rangle} \leq e^{-\frac{|x-y|}{\xi(\beta)}}$$

com

$$-\xi(\beta)^{-1} = \frac{1}{L+2} \ln(\delta(\beta))$$

■

Corolário 3.3.1 Para $\beta = \beta_c$, a função de dois pontos satisfaz:

$$\overline{\langle \sigma_x \sigma_y \rangle}(\beta_c) \geq cte |x|^{-d+2-\eta}$$

com $\eta \leq d$

Demonstração: a demonstração é análoga ao caso não-aleatório.

■

Observação: Se no lugar de acoplamentos de primeiros vizinhos, tivessemos acoplamentos de alcance finito entre os N primeiros vizinhos, teríamos o mesmo resultado apenas com algumas modificações na demonstração do teorema e nas constantes.

3.4 Singularidades de Griffiths

Modelos cuja hamiltoniana para um volume finito $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ é dada por

$$H_\Lambda(\sigma, J) = - \sum_{(x,y) \in \Lambda} J_{xy} \sigma_x \sigma_y + h \sum_{x \in \Lambda} \sigma_x$$

onde $J = \{J_{xy}, (x, y) \in \mathbb{Z}^d\}$ é uma família de variáveis aleatórias i.i.d. satisfazendo $J_{xy} \geq 0$ (com $|x - y| = 1$) são ditos modelos diluídos. Se J_{xy} são da forma:

$$J_{xy} = \begin{cases} 1 & , \text{ com probabilidade } p > 0, \text{ se } |x - y| = 1 \\ 0 & , \text{ com probabilidade } 1 - p, \text{ se } |x - y| = 1 \\ 0 & , \text{ se } |x - y| > 1 \end{cases}$$

dizemos que temos 'diluição nos acoplamentos' enquanto que se J_{xy} forem da forma:

$$J_{xy} = \begin{cases} J \tau_i \tau_j & , \text{ para } |i - j| = 1 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

com $\tau_i = 1$ com probabilidade p e $\tau_i = 0$ com probabilidade $1 - p$ dizemos que temos diluição nos sítios.

Em um artigo de 1969 [Griffiths] mostrou que para modelos com diluição nos sítios a função magnetização deixa de ser uma função analítica em h para $h = 0$ para valores de temperatura abaixo daquela onde ocorre a transição de fase (do caso sem diluição nos sítios).

Os argumentos dados por Griffiths são baseados no teorema de Lee-Yang [ver Ruelle]. Ele estudou o comportamento da magnetização em função de $z = e^{\beta h}$ e observou que ela é analítica para $|z| < 1$ e não pode ser estendida analiticamente através do círculo unitário. Podemos melhor compreender este fenômeno se considerarmos a seguinte situação. Consideremos o modelo com sítios diluídos e suponhamos $p < p_c(d)$, onde $p_c(d)$ é o valor crítico para a probabilidade de ocupação de um sítio no problema de percolação por sítios em $\mathbb{Z}^d$. Temos, com probabilidade um, nesta situação, apenas "clusters" finitos de sítios acoplados aos seus vizinhos mais próximos de tal maneira que o sistema se decompõe em uma coleção de subsistemas independentes finitos. Neste caso, podemos concluir que com

probabilidade um, não há nem magnetização nem long-range order para todos os valores da temperatura. Entretanto, como consequência da lei dos grandes números, também com probabilidade um, existem caixas arbitrariamente grandes dentro das quais todos os sítios estão acoplados. Agora, se $\beta J > \beta_c(d)$ (onde $\beta_c(d)$ é o valor crítico para um sistema homogêneo d-dimensional com acoplamentos $J_{xy} = J \forall \langle x, y \rangle \in Z^d$) teremos caixas arbitrariamente grandes (mas finitas) dentro das quais o sistema está fortemente correlacionado. A situação acima sugere o mecanismo geral para o fenômeno.

Veremos aqui a demonstração destas observações. Esta demonstração está em [Fröhlich].

Antes de demonstrarmos o teorema de Griffiths faremos o cálculo da magnetização. Vamos trabalhar com o modelo de sítios diluídos mas o modelo com diluição nos acoplamentos também pode ser tratado. Diremos que um sítio j está ocupado se e só se $\tau_j = 1$, caso contrário j será dito vazio. Denotemos por C uma configuração arbitrária de sítios ocupados em Λ (i.e. uma família de aglomerados conexos e disjuntos de sítios ocupados. Além disso, $|C|$ = número de sítios pertencentes a C ,

$P_{C,\Lambda}$ = probabilidade de ocorrer C ,

M_Λ = magnetização média por sítio em Λ

M_C = magnetização média por sítio em C .

Então

$$M_\Lambda = |\Lambda|^{-1} \sum_{C \subset \Lambda} |C| P_{C,\Lambda} M_C \quad (3.1)$$

Seja $z = e^{-2\beta h}$ e denotemos por f_C a energia livre por sítio do sistema restrito a C , i.e.

$$\beta f_C = -|C|^{-1} \log Z_C \quad (3.2)$$

onde Z_C é a função de partição. Então $M_C = \frac{\partial f_C}{\partial h} = \frac{\partial z}{\partial h} \cdot \frac{\partial f_C}{\partial z} = -2\beta z \frac{\partial f_C}{\partial z}$

Escrevendo $e^{-\beta h \sigma_i} = e^{\beta h} e^{-\beta h(\sigma_i+1)}$ e somando sobre todos os valores de σ_i , $i \in C$, vemos que $e^{-\beta h|C|} Z_C$ é um polinômio em z de grau $|C|$. Donde

$$Z_C = cte z^{-|C|/2} \prod_{\alpha=1}^{|C|} (z - \zeta_\alpha(C)), \quad (3.3)$$

onde $\zeta_\alpha(C)$ é o α -ésimo zero de Z_C . O Teorema de Lee-Yang diz-nos que

$$|\zeta_\alpha(C)| = 1,$$

para todo α . Por 3.2 e 3.3

$$M_C = 2\beta z \left| \frac{1}{\beta} \left(-\frac{1}{2z} + \frac{1}{|C|} \sum_{\alpha=1}^{|C|} \frac{1}{z - \zeta_\alpha(C)} \right) \right|. \quad (3.4)$$

Substituindo 3.4 em 3.1 em temos que

$$M_\Lambda = -|\Lambda|^{-1} \sum_{C \subseteq \Lambda} |C| P_{C,\Lambda} (1 - 2z|C|^{-1} \sum_{\alpha=1}^{|C|} (z - \zeta_\alpha(C))^{-1}) = -p + 2z \sum_{a=1}^{N_\Lambda} \eta_a(\Lambda) (z - \zeta_a)^{-1}, \quad (3.5)$$

onde p é como definimos para acoplamentos com diluição nos sítios, N_Λ é um inteiro finito e

$$\eta_a(\Lambda) = |\Lambda|^{-1} \left(\sum_{C: \zeta_\alpha(C) = \zeta_a \text{ para algum } \alpha} m_a(C) P_{C,\Lambda} \right) > 0, \quad (3.6)$$

onde $m_a(C)$ é o número de vezes que ζ_a ocorre em $\{\zeta_\alpha(C)\}_{\alpha=1}^{|C|}$. Segue então que

$$\sum_{a=1}^{N_\Lambda} \eta_a(\Lambda) = |\Lambda|^{-1} \sum_{C \subseteq \Lambda} \left(\sum_{\alpha=1}^{|C|} P_{C,\Lambda} \right) = \sum_{C \subseteq \Lambda} |\Lambda|^{-1} |C| P_{C,\Lambda} = p. \quad (3.7)$$

Cálculo da magnetização: de 3.5 e 3.7 concluimos que, para $|z| \neq 1$, $M_\Lambda(z)$ é limitada uniformemente em Λ . Mais ainda, para $z \neq 1$ positivo, $M_\Lambda(z)$ converge para um limite, quando $\Lambda \rightarrow Z^\nu$, devido à existência do limite termodinâmico da energia livre 'quenched', $f_\Lambda(z)$, com condições de contorno periódicas, para z positivo, e $M_\Lambda(z) = -2\beta z \frac{\partial f_\Lambda}{\partial z}$, para $z \neq 1$, positivo.

Então, pelo teorema de Vitali,

$$M_\Lambda(z) \rightarrow M(z),$$

para $\Lambda \rightarrow Z^\nu$, para todo z , com $|z| \neq 1$.

onde M é a magnetização no limite termodinâmico, e $f_\Lambda(z)$ converge, quando $\Lambda \rightarrow Z^\nu$, para todo z , com $|z| \neq 0, 1$. Seja $\beta_0 = \beta_0$, ($p = 1$) a temperatura crítica do model de Ising ν dimensional.

Teorema 3.4.1 Para $\beta > \beta_0$, $M(z)$ não pode ser estendida analiticamente de $\{z : |z| > 1\}$ para $\{z : |z| < 1\}$, ou inversamente, de $\{z : |z| < 1\}$ para $\{z : |z| > 1\}$.

Demonstração: Suponha o contrário. Então existe algum número real $x > 1$ e um $\rho > 0$, com $x - \rho < 1$, tal que a série de Taylor de $M(z)$ em torno de $z = x$ tem raio de convergência ρ , e o disco de convergência desta série contém um arco A , $A = \{z = e^{i\phi} : |\phi| < \delta\}$, para algum $\delta > 0$. Dado $\beta > \beta_0$ e $\delta > 0$, podemos escolher Λ grande o bastante de modo a conter algumas singularidades ζ_a de $M_\Lambda(z)$ (pois para todo $\epsilon > 0$ existe um cluster conexo, $\mathcal{C}$, não contornando Λ , com a propriedade que $M_{\mathcal{C}}(z)$ tenha uma singularidade em algum ponto ζ , com $|\zeta - 1| < \epsilon$). O resíduo, η_a , do pólo em ζ_a , é dado por 3.6 2.29. Seja $\mathcal{C}_a$ algum aglomerado conexo de sítios em Λ não envolvendo Λ e tal que $M_{\mathcal{C}_a}(z)$ tenha uma singularidade em ζ_a , i.e., ζ_a é um zero de $Z_{\mathcal{C}_a}$. Seja Ω o menor cubo contendo propriamente $\mathcal{C}_a$, e suponhamos que Λ é a união de n disjuntos transladados, $\Omega(x)(x \in \Lambda)$, de Ω . Então

$$\eta_a(\Lambda) \geq |\Lambda|^{-1} \sum_{x_1, \dots, x_k; k=1, \dots, n} \sum'_{C: C \cap \Omega(x_i) \supseteq \mathcal{C}_a(x_i); i=1, \dots, k} k P_{C, \Lambda}$$

onde $\mathcal{C}_a(x)$ é obtido transladando-se $\mathcal{C}_a$ de x . Agora

$$\sum' P_{C, \Lambda} = P_{\mathcal{C}_a}^k (1 - P_{\mathcal{C}_a})^{n-k},$$

onde $\sum'$ é feita sobre todas configurações C , tais que

$$C \cap \Omega(x_i) \supseteq \mathcal{C}_a(x_i), \text{ para } i = 1, \dots, k$$

$$C \cap \Omega(x) \not\supseteq \mathcal{C}_a(x), \text{ para } x \notin x_1, \dots, x_k$$

e $x_1, \dots, x_k$ são dados, e

$$P_{\mathcal{C}_a} = p^{|\mathcal{C}_a|} (1 - p)^{|\partial \mathcal{C}_a|},$$

onde $\partial \mathcal{C}_a$ é o conjunto de sítios em Ω a distância unitária de $\mathcal{C}_a$ e não contidos em $\mathcal{C}_a$. A teoria do modelo de Ising em $\beta = 0$ mostra-nos que

$$\eta_a(\Lambda) \geq \frac{n}{|\Lambda|} P_{\zeta_a} = |\Omega|^{-1} P_{\zeta_a} = P_a > 0. \quad (3.8)$$

uniformemente em Λ .

Lema 1

$$|M_\Lambda(r\zeta_a)| \geq 2 \frac{\eta_a(\Lambda)}{r-1} \geq 2 \frac{P_a}{r-1},$$

para $r > 1$ uniformemente em Λ .

Demonstração: Seja $\zeta_a = e^{i\phi_a}$ e observemos a figura seguinte. Façamos $r_{ab}e^{i\phi_{ab}} = r\zeta_a - \zeta_b$. Pela convexidade do disco unitário,

$$|\phi_{ab} - \phi_a| < \frac{\pi}{2}, \quad \text{para } r > 1. \quad (3.9)$$

Assim, desde que $|u| \geq \Re(ue^{i\psi})$, para $u \in \mathbb{C}$ arbitrário e $\psi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |M_\Lambda(r\zeta_a)| &\geq 2r \Re((2r\zeta_a)^{-1} M_\Lambda(r\zeta_a) e^{i\phi_a}) \\ &= 2r \left(\frac{\eta_a(\Lambda)}{r-1} + \sum_{b \neq a} \frac{\eta_b(\Lambda)}{r_{ab}} \cos(\phi_a - \phi_{ab}) \right) \geq 2r \frac{\eta_a(\Lambda)}{r-1} \end{aligned}$$

Por 3.6 e 3.9

E, por 3.8,

$$2 \frac{P_a}{r-1}$$

Daí $M(r\zeta_a)$ diverge para $r \rightarrow 1$. Isto contradiz nossa hipótese de que $M(z)$ é holomorfa em alguma vizinhança do arco A introduzido no início da demonstração do teorema. Pela simetria ($h \rightarrow -h$) $\Leftrightarrow z \rightarrow -z^{-1}$ do modelo, $M(z^{-1}) = -M(z)$, e portanto $M(z)$ não tem extensão analítica de $\{z : |z| < 1\}$ para $\{z : |z| > 1\}$. Isto completa a demonstração do teorema. ■

Capítulo 4

Acoplamentos aleatórios de alcance infinito

Neste capítulo veremos condições para as quais, no modelo de Ising com acoplamentos sendo v.a.i.i.d's de alcance infinito e decaimento exponencial, temos decaimento exponencial da função de dois pontos. A partir desta informação obteremos o limite termodinâmico e a unicidade da medida de Gibbs para este modelo. Neste capítulo se encontram as principais contribuições deste trabalho.

4.1 Decaimento da função de dois pontos

Para modelos tipo Ising com acoplamentos não-aleatórios de alcance infinito temos o seguinte resultado [Ellis]:

Teorema 4.1.1 *Suponha que existam constantes positivas c_1 e c_2 tais que $J(k) \leq c_1 e^{-c_2|k|}$, $\forall k \in \mathbb{Z}^d$. Seja $\mathcal{J}_0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} J(k)$. Então:*

(a) $\langle \sigma_0 \sigma_k \rangle(\beta, 0)$ decai exponencialmente pelo menos para $0 < \beta < \mathcal{J}_0^{-1}$

(b) $\forall \beta > 0$ e $h \neq 0$, $\langle \sigma_0; \sigma_k \rangle(\beta, h)$ decai exponencialmente.

A partir do resultado acima para modelos não-aleatórios é razoável nos perguntarmos se não valeria o mesmo resultado para o caso aleatório. Neste capítulo vamos demonstrar um resultado análogo para acoplamentos aleatórios de alcance infinito.

Consideremos o modelo de Ising com interações aleatórias de alcance infinito dadas pela Hamiltoniana:

$$H_{\Lambda}(\sigma) = - \sum_{\langle x,y \rangle} J_{xy} \sigma_x \sigma_y$$

$$\text{com } \tilde{J}_{xy} = J_{xy} e^{-\gamma|x-y|}$$

onde: J_{xy} são variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas (v.a.i.i.d.'s) positivas e com média $\bar{J} = \int J_{xy} d\rho(J_{xy})$ positiva.

γ é uma constante real positiva

$|x - y|$ indica a distância entre os sítios x e y

Definições:

$$\delta_{\beta} = C\beta L^d e^{\gamma L \frac{1}{d}(\frac{L}{2} + 1)^d}$$

$$\delta_1(\beta) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{-\gamma|x|}$$

$\mathcal{E}(J_{k_0} \dots J_{k_n})$ denota a média sobre todos os J 's.

Teorema 4.1.2 *No modelo de Ising definido pela Hamiltoniana acima, com $\gamma > 0$, se $\forall k_0, \dots, k_n, \exists C$ independente de n tal que $\mathcal{E}(J_{k_0} \dots J_{k_n}) < C^{n+1}$ então existe $C_1 > 0$ e β_c tal que $\delta_1(\beta) < 1$ para $\beta < \beta_c$ e a seguinte desigualdade:*

$$\overline{\langle \sigma_x \sigma_y \rangle} \leq C_1 e^{-\gamma|x-y|}$$

é satisfeita.

É importante ressaltarmos que neste enunciado β_c **não** significa a temperatura crítica de transição de fase mas apenas um valor de temperatura abaixo do qual $\delta_{\beta} < 1$. Para demonstrarmos este teorema faremos uso dos quatro lemas que vem a seguir. A estrutura é a seguinte: enunciamos e demonstramos os lemas 1 e 2. Em seguida apresentamos o enunciado do lema 3 e enunciamos e demonstramos o lema 4. A partir do lema 4

demonstramos o lema 3. Neste ponto estamos prontos para apresentar a demonstração do Teorema principal.

Lema 1 *Sejam $x, y \in Z^d$ com $|x - y| \geq L$. Sejam $\Lambda_L(x) = \{u \in Z^d : |x - u|_\infty \leq L\}$ e $\Lambda_L(y) = \{u \in Z^d : |y - u|_\infty \leq L\}$. Então:*

$$\langle \sigma_x \sigma_y \rangle \leq \sum_{s \in \Lambda_L(x), t \in \Lambda_L(y), (s,t) \in X} \beta J_{st} e^{-\gamma|s-t|} + \sum_{s \in \Lambda_L(x), t \notin \Lambda_L(y), (s,t) \in X} \beta J_{st} e^{-\gamma|s-t|} \langle \sigma_t \sigma_y \rangle$$

onde X é definido por:

$$X = \{(u, v) \in Z^d \times Z^d \text{ tais que } \text{ou } u \in \Lambda_L(x) \text{ e } v \notin \Lambda_L(x) \text{ ou } u \notin \Lambda_L(x) \text{ e } v \in \Lambda_L(x)\}.$$

Demonstração:

Do teorema de Lieb-Simon (ver Apêndice) sabemos que

$$\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_\Lambda - \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_X \leq \sum_{(t,s) \in X} \langle \sigma_x \sigma_s \rangle_X \beta J_{st} \langle \sigma_t \sigma_y \rangle_\Lambda$$

(Como $x \in \Lambda_L(x)$ e $y \notin \Lambda_L(x)$, pela definição do conjunto X temos $\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_X = 0$).

Assim:

$$\langle \sigma_x \sigma_y \rangle \leq \sum_{(t,s) \in X} \langle \sigma_x \sigma_s \rangle_X \beta J_{st} e^{-\gamma|s-t|} \langle \sigma_t \sigma_y \rangle_\Lambda \quad (4.1)$$

Podemos reescrever a desigualdade 4.1 como:

$$\langle \sigma_x \sigma_y \rangle \leq \sum_{s \in \Lambda_L(x), t \in \Lambda_L(y), (s,t) \in X} \langle \sigma_x \sigma_s \rangle_X \beta J_{st} e^{-\gamma|s-t|} \langle \sigma_t \sigma_y \rangle_\Lambda + \quad (4.2)$$

$$\sum_{s \in \Lambda_L(x), t \notin \Lambda_L(y), (s,t) \in X} \langle \sigma_x \sigma_s \rangle_X \beta J_{st} e^{-\gamma|s-t|} \langle \sigma_t \sigma_y \rangle_\Lambda \quad (4.3)$$

Utilizando as limitações triviais $\langle \sigma_x \sigma_s \rangle_X \leq 1$ e $\langle \sigma_t \sigma_y \rangle_\Lambda \leq 1$ na desigualdade anterior, obtemos:

$$\langle \sigma_x \sigma_y \rangle \leq \sum_{s \in \Lambda_L(x), t \in \Lambda_L(y), (s,t) \in X} \beta J_{st} e^{-\gamma|s-t|} + \sum_{s \in \Lambda_L(x), t \notin \Lambda_L(y), (s,t) \in X} \beta J_{st} e^{-\gamma|s-t|} \langle \sigma_t \sigma_y \rangle \quad (4.4)$$

E concluímos a demonstração do lema.

Enunciaremos e demonstraremos agora um lema indutivo:

Lema 2 *Suponha que:*

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle \leq & \sum_{s_0 \in \Lambda_L(x), t_0 \in \Lambda_L(y)} \beta J_{s_0 t_0} e^{-\gamma|s_0 - t_0|} + \\ & \sum_{s_0 \in \Lambda_L(x), t_0 \notin \Lambda_L(y)} \sum_{s_1 \in \Lambda_L(t_0), t_1 \in \Lambda_L(y)} \beta J_{s_0 t_0} e^{-\gamma|s_0 - t_0|} \beta J_{s_1 t_1} e^{-\gamma|s_1 - t_1|} + \dots + \\ & \sum_{s_0 \in \Lambda_L(x), t_0 \notin \Lambda_L(y)} \sum_{s_1 \in \Lambda_L(t_0), t_1 \notin \Lambda_L(y)} \dots \sum_{s_n \in \Lambda_L(t_{n-1}), t_n \in \Lambda_L(y)} \beta J_{s_0 t_0} e^{-\gamma|s_0 - t_0|} \dots \beta J_{s_n t_n} e^{-\gamma|s_n - t_n|} .1 + \\ & \sum_{s_0 \in \Lambda_L(x), t_0 \notin \Lambda_L(y)} \sum_{s_1 \in \Lambda_L(t_0), t_1 \notin \Lambda_L(y)} \dots \sum_{s_n \in \Lambda_L(t_{n-1}), t_n \notin \Lambda_L(y)} \beta J_{s_0 t_0} e^{-\gamma|s_0 - t_0|} \dots \beta J_{s_n t_n} e^{-\gamma|s_n - t_n|} \langle \sigma_{t_n} \sigma_y \rangle \end{aligned}$$

onde $|s_j - t_j| \leq \frac{L}{2}, \forall 1 \leq j \leq n$

então:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle \leq & \sum_{s_0 \in \Lambda_L(x), t_0 \in \Lambda_L(y)} \beta J_{s_0 t_0} e^{-\gamma|s_0 - t_0|} + \\ & \sum_{s_0 \in \Lambda_L(x), t_0 \notin \Lambda_L(y)} \sum_{s_1 \in \Lambda_L(t_0), t_1 \in \Lambda_L(y)} \beta J_{s_0 t_0} e^{-\gamma|s_0 - t_0|} \beta J_{s_1 t_1} e^{-\gamma|s_1 - t_1|} + \dots + \\ & \sum_{s_0 \in \Lambda_L(x), t_0 \notin \Lambda_L(y)} \dots \sum_{s_{n+1} \in \Lambda_L(t_n), t_{n+1} \in \Lambda_L(y)} \beta J_{s_0 t_0} e^{-\gamma|s_0 - t_0|} \dots \beta J_{s_{n+1} t_{n+1}} e^{-\gamma|s_{n+1} - t_{n+1}|} .1 + \\ & \sum_{s_0 \in \Lambda_L(x), t_0 \notin \Lambda_L(y)} \dots \sum_{s_{n+1} \in \Lambda_L(t_n), t_{n+1} \notin \Lambda_L(y)} \beta J_{s_0 t_0} e^{-\gamma|s_0 - t_0|} \dots \beta J_{s_{n+1} t_{n+1}} e^{-\gamma|s_{n+1} - t_{n+1}|} \langle \sigma_{t_{n+1}} \sigma_y \rangle \end{aligned}$$

onde $|s_j - t_j| \leq \frac{L}{2}, \forall 1 \leq j \leq n+1$

Demonstração:

A prova consiste em aplicarmos o lema 1 em $\langle \sigma_{t_n} \sigma_y \rangle$ e desenvolvermos o produto.

Lema 3 Se $\forall k_0, k_1, \dots, k_n, \exists C$ independente de n tal que $\mathcal{E}(J_{k_0} \dots J_{k_n}) < C^{n+1}$

onde $\mathcal{E}(J_{k_0} \dots J_{k_n})$ denota a média sobre todos J 's, então:

$$\frac{\sum_{s_0 \in \Lambda_L(x), t_0 \notin \Lambda_L(y)} \dots \sum_{s_n \in \Lambda_L(t_{n-1}), t_n \in \Lambda_L(y)} \beta_{J_{s_0 t_0}} e^{-\gamma|s_0 - t_0|} \beta_{J_{s_1 t_1}} e^{-\gamma|s_1 - t_1|} \dots \beta_{J_{s_n t_n}} e^{-\gamma|s_n - t_n|}}{(C \beta L^d e^{\gamma L [\frac{1}{d}(\frac{L}{2} + 1)^d]})^{n+1} e^{-\gamma|x-y|}} \leq$$

Na demonstração deste lema faremos uso da seguinte desigualdade:

Lema 4 Sejam $\gamma > 0$ número real, $d \in \mathbb{Z}$, com $d \geq 1$. Seja Z^d a rede de dimensão d , $|x - y| = n$ a distância entre dois sítios na rede, e $\Lambda_L(y) = \{u \in Z^d : |u - y|_\infty \leq L\}$. Então:

$$\sum_{u_1 \in Z^d} \sum_{u_2 \in Z^d} \dots \sum_{u_{k-1} \in Z^d} e^{-\gamma(|x-u_1| + |u_1-u_2| + |u_2-u_3| + \dots + |u_{k-1}-y|)} \leq [\frac{1}{d}(\frac{L}{2} + 1)^d]^k e^{-\gamma|x-y|}$$

$$\text{com } |x - u_1| \leq \frac{L}{2}, |u_{k-1} - u_k| \leq \frac{L}{2}, \forall k \geq 1, |u_{k-1} - y| \leq \frac{L}{2}.$$

Demonstração:

Defina $a_1 = |x - u_1|$, $a_2 = |u_1 - u_2|$, ..., $a_k = |u_{k-1} - y|$. Sabemos que $a_i \leq \frac{L}{2} \forall 1 \leq i \leq k-1$ e também $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_k \geq |x - y|$

Na somatória $\sum_{u_1 \in Z^d} \sum_{u_2 \in Z^d} \sum_{u_{k-1} \in Z^d} e^{-\gamma|x-u_1| - \gamma|u_1-u_2| - \dots - \gamma|u_{k-1}-y|}$ (com $|x-u_1| \leq \frac{L}{2}, |u_{k-1}-u_k| \leq \frac{L}{2}, \forall k \geq 0, |u_{k-1} - y| \leq \frac{L}{2}$) considere a soma sobre todas as possibilidades de u_1 tal que $|x - u_1| = a_1$. Isto significa que teremos a_1^{d-1} possibilidades de u_1 nestas condições. Se fixarmos agora u_1 e somarmos sobre todas as possibilidades de u_2 tais que $|u_1 - u_2| = a_2$ teremos a_2^{d-1} possibilidades de u_2 para somarmos. Repetindo este argumento para $u_3, u_4, \dots, u_k$ teremos a desigualdade:

$$\sum_{u_1 \in Z^d} \dots \sum_{u_{k-1} \in Z^d} e^{-\gamma|x-u_1| - \gamma|u_1-u_2| - \dots - \gamma|u_{k-1}-y|} \leq \sum_{a_1, a_2, \dots, a_k: a_1 + \dots + a_k \geq |x-y|} a_1^{d-1} e^{-\gamma a_1} a_2^{d-1} e^{-\gamma a_2} \dots a_k^{d-1} e^{-\gamma a_k}$$

$$\text{onde } a_i \leq \frac{L}{2} \forall i, 1 \leq i \leq k-1$$

A soma anterior é majorada pela soma seguinte:

$$e^{-\gamma|x-y|} \left(\sum_{0 \leq a \leq \frac{L}{2}} a^{d-1} \right)^k \leq e^{-\gamma|x-y|} \left(\int_0^{\frac{L}{2}+1} x^{d-1} dx \right)^k = [\frac{1}{d}(\frac{L}{2} + 1)^d]^k e^{-\gamma|x-y|}$$

E concluímos a demonstração do lema.

Agora temos a demonstração do lema 3:

Demonstração:

Pelo fato de $\mathcal{E}(J_{k_0} \dots J_{k_n}) < C^{n+1}$ temos a seguinte desigualdade:

$$\overline{\sum_{s_0 \in \Lambda_L(x), t_0 \in \Lambda_L(t_1)} \dots \sum_{s_n \in \Lambda_L(t_{n-1}), t_n \in \Lambda_L(y)} \beta J_{s_0 t_0} e^{-\gamma|s_0 - t_0|} \dots \beta J_{s_n t_n} e^{-\gamma|s_n - t_n|}} \leq \quad (4.5)$$

$$\leq (C\beta)^{n+1} \sum_{s_0 \in \Lambda_L(x), t_0 \in \Lambda_L(t_1)} \dots \sum_{s_n \in \Lambda_L(t_{n-1}), t_n \in \Lambda_L(y)} e^{-\gamma|s_0 - t_0|} \dots e^{-\gamma|s_n - t_n|} \quad (4.6)$$

Como $s_0 \in \Lambda_L(x)$, temos que $|s_0 - t_0| \geq |x - t_0| - L$ e portanto $e^{-\gamma|s_0 - t_0|} \leq e^{-\gamma|x - t_0| + \gamma L}$.

Temos ainda que (para $j > 1$): $s_j \in \Lambda_L(t_{j-1}) \Rightarrow |s_j - t_j| \geq |t_{j-1} - t_j| - L$. E portanto $e^{-\gamma|s_j - t_j|} \leq e^{-\gamma|t_{j-1} - t_j| + \gamma L}$.

E como $\sum_{s_j \in \Lambda_L(t_{j-1})} 1 = L^d$, podemos majorar 4.6 por:

$$(C\beta L^d e^{\gamma L})^{n+1} \sum_{t_0 \in Z^d} \sum_{t_1 \in Z^d} \dots \sum_{t_n \in Z^d} e^{-\gamma|x - t_0| - \gamma|t_0 - t_1| - \dots - \gamma|t_n - y|} \quad (4.7)$$

onde $|x - t_0| \leq \frac{L}{2}$, $|t_n - t_{n+1}| \leq \frac{L}{2}$, $\forall n \geq 0$, $|t_n - y| \leq \frac{L}{2}$.

Aplicando o lema 4 à desigualdade anterior, podemos majorá-la por:

$$(C\beta L^d e^{\gamma L} [\frac{1}{d}(\frac{L}{2} + 1)^d])^{n+1} e^{-\gamma|x - y|}$$

e concluímos o lema.

Neste ponto estamos prontos para demonstrar o Teorema principal:

Demonstração:

Do Lema 2 e do Lema 3 temos que:

$$\overline{\langle \sigma_x \sigma_y \rangle} \leq \sum_{j=1}^{n-1} \delta_\beta^j e^{\gamma|x-y|} + \delta_\beta^n \sum_{t_0 \notin \Lambda_L(y)} \dots \sum_{t_n \notin \Lambda_L(y)} e^{-\gamma|x-t_0| - \dots - \gamma|t_{n-1} - t_n|} \cdot 1$$

Onde, na última somatória da segunda parcela da desigualdade anterior, fixado t_{n-1} , somamos sobre todos os valores de t_n , obtendo assim:

$$\overline{\langle \sigma_x \sigma_y \rangle} \leq \sum_{j=1}^{n-1} \delta_\beta^j e^{-\gamma|x-y|} + \delta_\beta^n \sum_{t_0 \notin \Lambda_L(y)} \dots \sum_{t_{n-1} \notin \Lambda_L(y)} e^{-\gamma|x-t_0| - \dots - \gamma|t_{n-2} - t_{n-1}|} \cdot C$$

$$\text{Como } \sum_{t_n \notin \Lambda_L(y)} e^{-\gamma|t_{n-1}-t_n|} \leq \sum_{t \in \mathbb{Z}^d} e^{-\gamma|t|} \equiv C$$

Repetindo este mesmo argumento sucessivamente (fixando t_{n-2} e somando sobre t_{n-1} e assim por diante) obtemos a desigualdade:

$$\overline{\langle \sigma_x \sigma_y \rangle} \leq \sum_{j=1}^{n-1} \delta_\beta^j e^{-\gamma|x-y|} + (\delta_\beta C)^n$$

Seja $\delta_1(\beta) = \delta_\beta C$.

Escolhemos β tal que $\delta_1(\beta) < 1$.

E então:

$$\overline{\langle \sigma_x \sigma_y \rangle} \leq C_2 e^{-\gamma|x-y|} + (\delta_1(\beta))^n$$

$$\text{com } C_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_\beta^j = \frac{\delta_\beta}{1-\delta_\beta}$$

Como n é arbitrário, escolhemos n tal que $n \ln(\delta_1(\beta)) = -\gamma|x-y|$ e portanto:

$$\overline{\langle \sigma_x \sigma_y \rangle} \leq \left(\frac{\delta_\beta}{1-\delta_\beta} + 1 \right) e^{-\gamma|x-y|} = \frac{1}{1-\delta_\beta} e^{-\gamma|x-y|} = C_1 e^{-\gamma|x-y|}$$

onde C_1 é uma constante positiva.

Donde concluímos a demonstração

4.2 Independência da Magnetização em relação às condições de Fronteira

A importância do teorema anterior está em que podemos utilizá-lo para demonstrar o limite termodinâmico quando tomamos caixas arbitrariamente grandes (tendendo ao espaço todo), sem que haja dependência das condições de fronteira. Ou seja, que temos um único estado de Gibbs para altas temperaturas. A técnica que será utilizada para a demonstração deste fato é a de duplicação de variáveis.

Teorema 4.2.1 *Nas mesmas hipóteses do teorema anterior, existe β_c tal que $\forall 0 < \beta < \beta_c$ existem constantes $0 < C(\beta) < \infty$ tal que, para quaisquer condições de contorno χ_Λ temos:*

$$(a) \overline{\langle \sigma_x; \sigma_y \rangle}_{\chi_\Lambda} \leq C e^{-\gamma|x-y|}$$

(b) *existe o limite termodinâmico e é independente das condições de fronteira χ_Λ dadas para cada volume Λ finito :*

$$\overline{\langle \sigma_x \rangle} = \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} \overline{\langle \sigma_x \rangle}_\Lambda^{\lambda_\Lambda}$$

Demonstração: (a) Usando o truque de duplicação de variáveis consideremos dois conjuntos de variáveis dos sítios:

$$\sigma^1 : \Lambda \rightarrow R \quad \sigma^2 : \Lambda \rightarrow R$$

com Hamiltoniana $\tilde{H}_\Lambda$ dada por

$$\tilde{H}_\Lambda(\sigma^1, \sigma^2) = H_\Lambda(\sigma^1) + H_\Lambda(\sigma^2)$$

e as funções dois spins $\tilde{F}$ e $\tilde{G}$ dadas por

$$\tilde{F}_\Lambda(\sigma^1, \sigma^2) = F_\Lambda(\sigma^1) + F_\Lambda(\sigma^2)$$

e

$$\tilde{G}_\Lambda(\sigma^1, \sigma^2) = G_\Lambda(\sigma^1) + G_\Lambda(\sigma^2)$$

com valores esperados dos spins dados por:

$$\langle \langle \tilde{F} \rangle \rangle_\Lambda^{\lambda_\Lambda} = \frac{\int \int \tilde{F}_\Lambda(\sigma^1, \sigma^2) e^{-\beta \tilde{H}_\Lambda(\sigma^1, \sigma^2)} \prod_{x \in \Lambda} d\mu_0(\sigma_x^1) d\mu_0(\sigma_x^2)}{\tilde{Z}_\Lambda^{\lambda_\Lambda}}$$

onde $\tilde{Z}_\Lambda^{\lambda_\Lambda}$ é a função de partição do sistema duplicado:

$$\tilde{Z}_\Lambda^{\lambda_\Lambda} = \int e^{-\beta \tilde{H}_\Lambda(\sigma^1, \sigma^2)} \prod_{x \in \Lambda} d\mu_0(\sigma_x^1) d\mu_0(\sigma_x^2)$$

Observando que com as novas variáveis

$$\begin{aligned} \eta_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x^1 + \sigma_x^2) \\ \zeta_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x^1 - \sigma_x^2) \end{aligned}$$

a medida $d\mu_0(\eta, \zeta) = d\mu_0(\frac{\eta+\zeta}{\sqrt{2}})d\mu_0(\frac{\eta-\zeta}{\sqrt{2}})$ é invariante em relação às transformações :

$$(\eta, \zeta) \rightarrow (-\eta, \zeta)$$

$$(\eta, \zeta) \rightarrow (-\eta, -\zeta)$$

e que (com acoplamentos positivos) $\tilde{H}_\Lambda(\sigma^1, \sigma^2) = H_\Lambda(\eta, \zeta)$ teremos:

$$\langle \sigma_x; \sigma_y \rangle_{\Lambda}^{\chi_{\Lambda}} = \langle \langle \zeta_x \zeta_y \rangle \rangle_{\Lambda}^{\chi_{\Lambda}} = \langle \zeta_x \zeta_y \rangle_{\Lambda}^{\chi_{\Lambda}}$$

Então:

$$\overline{\langle \sigma_x; \sigma_y \rangle_{\Lambda}^{\chi_{\Lambda}}} = \overline{\langle \zeta_x \zeta_y \rangle_{\Lambda}^{\chi_{\Lambda}}} \leq C' e^{-\gamma|x-y|}.$$

Sendo que a última desigualdade sai do teorema anterior. O que conclui a parte (a) do teorema.

Definição: dizemos que fixamos uma condição de fronteira χ_{Λ} se $\forall y \in \partial\Lambda$ temos $\{\sigma_y\} = \chi_{\Lambda}$.

Para a parte (b) temos, do teorema fundamental do Cálculo que:

$$\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda}^{\chi_{\Lambda}} - \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda} = \int_0^1 ds \frac{d}{ds} \langle \sigma_0 \rangle^{s\chi_{\Lambda}}$$

E, efetuando a derivação na equação anterior obtemos:

$$\int_0^1 ds \frac{d}{ds} \langle \sigma_0 \rangle^{s\chi_{\Lambda}} = \sum_{x \in \Lambda, y \in \Lambda^c} \tilde{J}_{xy} \langle \sigma_0; \sigma_x \sigma_y \rangle^{\chi_{\Lambda}}$$

Onde σ_y é fixado a partir da condição de fronteira χ_{Λ} .

A desigualdade anterior é majorada por:

$$\sum_{x \in \Lambda, y \in \Lambda^c} \tilde{J}_{xy} \langle \sigma_0; \sigma_x \rangle^{\chi_{\Lambda}}$$

Pois esta majoração vale tanto para $\sigma_y = +1$ quanto para $\sigma_y = -1$.

Aplicando a técnica de duplicação de variáveis, temos a igualdade:

$$\sum_{x \in \Lambda, y \in \Lambda^c} \tilde{J}_{xy} \langle \sigma_0; \sigma_x \rangle^{\chi_{\Lambda}} = \sum_{x \in \Lambda, y \in \Lambda^c} \tilde{J}_{xy} \langle \langle \zeta_0 \zeta_x \rangle \rangle$$

Usando agora que $\tilde{J}_{xy} \leq J_{xy} e^{-\gamma|x-y|}$ e que $\langle \langle \zeta_0 \zeta_x \rangle \rangle \leq e^{-\gamma|x|}$, a igualdade anterior é majorada por:

$$C \sum_{x \in \Lambda, y \in \Lambda^c} e^{-\gamma|x-y|} e^{-\gamma|x|}$$

Aplicando o lema 4 deste capítulo obtemos:

$$C \sum_{x \in \Lambda, y \in \Lambda^c} e^{-\gamma|x-y|} e^{-\gamma|x|} \leq C \Lambda^d \sum_{y \in \Lambda^c} e^{-\gamma|y|}$$

Portanto:

$$|\overline{\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda}^{\lambda_{\Lambda}}} - \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda}| \leq C \Lambda^d \sum_{y \in \Lambda^c} \epsilon^{-\gamma|y|} \rightarrow 0$$

O que implica que $\lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda}^{\lambda_{\Lambda}} = \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda}$

Este limite implica que não há dependência em relação às condições de fronteira, quando estamos em regime de altas temperaturas. Ou seja, temos a existência do limite termodinâmico e há um único estado de Gibbs.

■

Apêndice A

Desigualdades de Correlação

A.1 Primeira Desigualdade de Griffiths

Teorema A.1.1 *Consideremos um subconjunto $A \subset \Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ e $\sigma_A \equiv \prod_{x \in A} \sigma_x$. Então:*

$$\langle \sigma_A \rangle \geq 0$$

Demonstração: Temos que $\langle \sigma_A \rangle = \frac{1}{Z_\Lambda} \int \sigma_A e^{-H_\Lambda(\{\sigma\})} = \frac{1}{Z_\Lambda} \int \sigma_A e^{\sum_{xy \in \Lambda} J_{xy} \sigma_x \sigma_y} \prod_{x \in \Lambda} d\mu_o(\sigma_x)$.

Expandindo $e^{\sum_{xy \in \Lambda} J_{xy} \sigma_x \sigma_y}$ em série de Taylor e trocando a ordem da soma com a ordem de integração ficamos com:

$$\langle \sigma_A \rangle = \frac{1}{Z_\Lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int \left(\sum_{xy \in \Lambda} J_{xy} \sigma_x \sigma_y \right)^k \sigma_A \prod_{x \in \Lambda} d\mu_o(\sigma_x).$$

Para demonstrarmos o teorema basta mostrarmos que $\int \left(\sum_{xy \in \Lambda} J_{xy} \sigma_x \sigma_y \right)^k \sigma_A \prod_{x \in \Lambda} d\mu_o(\sigma_x) \geq 0, \forall k \geq 0$ pois Z_Λ é sempre maior ou igual a zero.

A partir do desenvolvimento de $\left(\sum_{xy \in \Lambda} J_{xy} \sigma_x \sigma_y \right)^k$ obtemos termos do tipo $\prod_{x \in B} \sigma_x \prod_{x \in A} \sigma_x$. Portanto, devemos mostrar que $\int \prod_{x \in C} \sigma_x \prod_{x \in \Lambda} d\mu_o(\sigma_x) \geq 0$.

■

A.2 Segunda Desigualdade de Griffiths

Teorema A.2.1 *Consideremos os subconjuntos $A \subset \Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ e $B \subset \Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ e $\sigma_A \equiv \prod_{x \in A}$ e $\sigma_B \equiv \prod_{x \in B}$. Então:*

$$\langle \sigma_A \sigma_B \rangle = \langle \sigma_A \sigma_B \rangle - \langle \sigma_A \rangle \langle \sigma_B \rangle \geq 0$$

Demonstração: para demonstrar esta desigualdade utilizamos a técnica de *Duplicação do Modelo*. Consideremos duas famílias de funções :

$$\sigma : \Lambda \rightarrow R$$

$$\sigma : \Lambda \rightarrow R$$

uma função Energia dada por:

$$\tilde{H}(\sigma, \sigma') = H(\sigma) + H(\sigma')$$

e valores esperados definidos por :

$$\langle \langle F(\sigma, \sigma') \rangle \rangle \equiv \int \int F(\sigma, \sigma') e^{-\beta \tilde{H}(\sigma, \sigma')} \prod_{x \in \Lambda} d\mu_o(\sigma_x) d\mu_o(\sigma'_x)$$

Definindo as variáveis :

$$\eta_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma'_x)$$

$$\zeta_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x - \sigma'_x)$$

■

A.3 Aplicações de G I e G II

Como exemplo de aplicação das desigualdades de Griffiths veremos a demonstração da existência do limite termodinâmico para o modelo de Ising. Consideremos o modelo de Ising com hamiltoniana dada por

$$H_{\Lambda}(\sigma) = - \sum_{(x,y) \in \Lambda, |x-y|=1} \sigma_x J_{xy} \sigma_y$$

onde

$$J_{xy} = \begin{cases} J_{yx} = J > 0 & \text{se } |x-y| = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e $\sigma_x \in -1, 1$ para $x \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^d$.

E condições de contorno livres. Consideremos ainda Λ' uma outra caixa contida em $\mathbb{Z}^d$ tal que $\Lambda' \supset \Lambda$. Temos então o seguinte

Teorema A.3.1 *Se F é um polinômio com coeficientes positivos e temos acoplamentos como os definidos anteriormente. Então:*

$$\Lambda \subset \Lambda' \rightarrow \langle F \rangle_{\Lambda} \leq \langle F \rangle_{\Lambda'}$$

Demonstração: Definamos a seguinte função

$$\langle F \rangle_t = \frac{\int F g(\sigma_x^2) \prod_{y \in \Lambda' \setminus \Lambda} g(\sigma_y^2) e^{-t_y \sigma_y^2} \prod_{x \in \Lambda} e^{-\frac{1}{2} \beta H_{\Lambda}(\sigma)} d\sigma_x}{\int e^{-\frac{1}{2} \beta H_{\Lambda}(\sigma)} \prod_{x \in \Lambda} g(\sigma_x^2) e^{-t_y \sigma_y^2} d\sigma_x}$$

Assim temos: $\langle F \rangle_{t=0} = \langle F \rangle_{\Lambda'}$ e $\langle F \rangle_{t=\infty} = \langle F \rangle_{\Lambda}$. Portanto basta provarmos que $\frac{\partial(\langle F \rangle_t)}{\partial t_y} \leq 0, \forall y \in \Lambda' \setminus \Lambda$

Fazendo a derivada obtemos:

$$\frac{\partial(\langle F \rangle_t)}{\partial t_y} = - \langle F \sigma_y^2 \rangle + \langle F \rangle \langle \sigma_y^2 \rangle \leq 0 \quad (\text{pela segunda desigualdade de Griffiths}).$$

Esta última desigualdade implica na monotonicidade dos valores esperados quando o volume decresce. A partir da limitação uniforme nos valores esperados temos a existência do limite termodinâmico ($\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d$):

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} \langle F \rangle_{\Lambda} = \langle F \rangle_{\mathbb{Z}^d}$$

■

A.4 Desigualdade FKG

A desigualdade FKG tem a mesma tese que a Segunda desigualdade de Griffiths, só que sob hipóteses diferentes. É importante ainda frisarmos que esta desigualdade também é válida sob medidas mais gerais que a medida de Gibbs. Neste sentido, por exemplo, consultar [Ellis].

Definimos uma *ordem* em R^n através da relação :

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \leq \chi = (\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n) \iff \xi_i \leq \chi_i, \forall i.$$

Uma função $F(\xi)$ é chamada monótona se é monótona com respeito a esta ordem.

Teorema A.4.1 *Sejam F e G funções monótonas crescentes em χ e seja a esperança definida $\langle \cdot \rangle$ definida por : $\langle F(\chi) \rangle = \int F e^{\frac{1}{2}\beta H(\xi)} \prod_{i \in \Lambda} d\mu_i$*

$$\text{onde } H(\xi) = - \sum_{i,j \in \Lambda} (\xi_i - \xi_j)^2 \text{ e } d\mu_i = \frac{e^{-P(\xi_i)} d\xi_i}{\int e^{-P} d\xi_i}$$

$$\text{Então } \langle FG \rangle \geq \langle F \rangle \langle G \rangle$$

Demonstração

Com as variáveis duplicadas ξ e χ , devemos mostrar que

$$0 \leq \langle [F(\xi) - F(\chi)][G(\xi) - G(\chi)] \rangle. \quad (*)$$

Seja $n = |\Lambda|$ o número de sítios em Λ . Para $n = 1$, $F(\xi) - F(\chi)$ e $G(\xi) - G(\chi)$ têm o mesmo sinal pela monotonicidade, e temos a tese neste caso.

Suponhamos agora que o teorema tenha sido provado para $n - 1$ sítios e escrevamos $\xi = (\xi, \xi_n)$, onde $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$ e analogamente para χ .

Escrevendo $(*)$ como uma integral iterada, mostremos que a integral em $d\xi d\chi$ é não negativa para cada valor de χ_n , ξ_n .

Explicitamente,

$$Z(\alpha) = \langle \delta(\xi_n - \alpha) \rangle = \int \prod_{j \neq n} d\xi_j \int d\xi_n F(\xi) e^{-\beta H(\xi)} e^{-P(\xi)} \quad (**)$$

$$= \int \prod_{j \neq n} d\xi_j P'(\xi) |_{\xi_n=\alpha} e^{-\beta H(\xi)} |_{\xi_n=\alpha} \prod_j e^{-P(\xi_j)} e^{-P(\alpha)}$$

e

$$\langle F \rangle_{\xi_n=\alpha} = Z(\alpha)^{-1} \langle \delta(\xi_n - \alpha) F(\xi) \rangle = \frac{\sum_{\xi: \xi_n=\alpha} F(\xi) e^{-\frac{1}{2}\beta H(\xi)}}{\sum_{\xi: \xi_n=\alpha} e^{-\frac{1}{2}\beta H(\xi)}}$$

Vamos denotar a esperança do sistema com variáveis duplicadas da seguinte maneira

$$\langle \cdot \rangle_{\xi_n=\alpha, \chi_n=\gamma} \equiv \langle \cdot \rangle_{\alpha, \gamma}$$

Temos a identidade :

$$\begin{aligned} \langle [F(\xi) - F(\chi)][G(\xi) - G(\chi)] \rangle_{\alpha, \gamma} &= \langle FG \rangle_{\alpha} + \langle FG \rangle_{\gamma} - \langle F \rangle_{\alpha} \langle G \rangle_{\gamma} - \langle F \rangle_{\gamma} \langle G \rangle_{\alpha} \\ &= [\langle FG \rangle_{\alpha} - \langle F \rangle_{\alpha} \langle G \rangle_{\alpha}] + [\langle FG \rangle_{\gamma} - \langle F \rangle_{\gamma} \langle G \rangle_{\gamma}] + [\langle F \rangle_{\alpha} - \langle G \rangle_{\gamma}][\langle G \rangle_{\alpha} - \langle G \rangle_{\gamma}] \end{aligned} \quad (***)$$

Devemos mostrar que esta última identidade é não-negativa. Os dois primeiros termos são não-negativos pela hipótese de indução e assim, para a demonstração do teorema estará completa se mostrarmos que os fatores do terceiro termo tem o mesmo sinal. Faremos isto usando a dependência de Z em α dada por (**) e a definição do valor esperado $\langle F \rangle_{\alpha}$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \langle F \rangle_{\alpha} &= \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\sum_{\xi: \xi_n=\alpha} F(\xi) e^{-\frac{1}{2}\beta H(\xi)}}{\sum_{\xi: \xi_n=\alpha} e^{-\frac{1}{2}\beta H(\xi)}} \right) \\ &= \left\langle \frac{dF}{d\xi_n} \right\rangle_{\alpha} + \beta \sum_l \{ \langle (\xi_l - \alpha) F(\xi) \rangle_{\alpha} - \langle \xi_l - \alpha \rangle_{\alpha} \langle F \rangle_{\alpha} \} \end{aligned}$$

onde a soma em l se estende sobre os sítios que são vizinhos próximos do n -ésimo sítio. Observe que os termos proporcionais a $P'(\xi_n)$ se cancelam. Como a função $\xi \rightarrow \alpha - \xi_l$ é monótona, a hipótese de indução se aplica novamente e disto segue que $\langle F \rangle_{\alpha}$ é monotona crescente em α . O mesmo é válido para $\langle G \rangle_{\alpha}$ e assim o terceiro termo de (***) é não-negativo. ■

A.5 Teorema de Lieb-Simon

Teorema A.5.1 *Consideremos um conjunto X de pares (u,v) de pontos da rede Λ , onde os pares (u,v) e (v,u) são considerados distintos e X é um conjunto tal que se $(u,v) \in X$ então $(v,u) \in X$. Definimos $\langle . \rangle$ colocando $J_{uv} = 0$ para todo $uv \in X$ na definição de $\langle . \rangle_\Lambda$. Então para todo $x, y \in \Lambda$, temos que:*

$$0 \leq \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_\Lambda - \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_X \leq \sum_{uv \in X} \langle \sigma_x \sigma_u \rangle_X J_{uv} \langle \sigma_v \sigma_y \rangle_\Lambda$$

■

Este teorema foi utilizado em diversos pontos deste trabalho. Para a demonstração dele, usaremos o teorema das desigualdades gaussianas:

Teorema A.5.2 *Se F é um polinômio com coeficientes positivos, então:*

$$\langle \sigma_x F(\sigma) \rangle \leq \sum_y \langle \sigma_x \sigma_y \rangle \langle \frac{\partial F(\sigma)}{\partial \sigma} \rangle$$

Demonstração:

Da definição de $\langle . \rangle_X$ temos que:

$$\langle \sigma_x \sigma_y \rangle = \frac{\langle \sigma_x \sigma_y I \rangle_X}{\langle I \rangle_X}$$

onde

$$I = \sum_{uv \in X} \sigma_u \sigma_v$$

I é o limite de polinômios com coeficientes positivos e este limite pode ser trocado com as integrações de forma a podermos aplicar os resultados do Teorema das Desigualdades Gaussianas para $\langle . \rangle_X$ com $F(\sigma) = \sigma_y I$ e obter:

$$\langle \sigma_x \sigma_y I \rangle_X \leq \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_X \langle I \rangle_X + \langle \sigma_x \sigma_u \rangle_X J_{uv} \langle \sigma_v \sigma_y I \rangle_X$$

Dividindo por $\langle I \rangle_X$ obtemos:

$$\langle \sigma_x \sigma_y \rangle \leq \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_X + \sum_{uv \in X} \langle \sigma_x \sigma_w \rangle_X J_{wz} \langle \sigma_z \sigma_y \rangle$$

■

Bibliografia

- [1] D. Brydges.
Field Theories and Symanzik's Polymer Representation
Brasov Lectures, 1981.
- [2] H. von Dreifus.
Annales Inst. Henri Poincaré
vol. 55, no. 2, 1991, p. 657.
- [3] H. von Dreifus.
Mecânica Estatística de Modelos Ferromagnéticos
19o. Colóquio Brasileiro de Matemática (IMPA), 1993
- [4] Ellis, R.
Entropy, Large Deviations and Statistical Mechanics
Springer-Verlag
- [5] Fortuin, Kasteleyn e Ginibre
Correlation inequalities on some partially ordered sets
Commun. Math. Phys. 22, p. 89-113.
- [6] J. Fröhlich.
Mathematical Aspects of the physics of disordered systems
Les Houches, Session XLIII, 1984, p. 725.
- [7] Georgii, H.O.
Gibbs Measures and Phase Transitions
Walter de Gruyter, 1988.

- [8] J. Glimm, A. Jaffe.
Quantum Physics
Springer-Verlag, 1981.
- [9] Graham
Applications of the FKG inequality and its relatives
in: Mathematical Programming - Bonn 1982, p. 116-131. Springer - NY
Edited by A. Bachem, M. Grotschel, B. Korte.
- [10] McCoy e Wu.
The Two-dimensional Ising Model
Harvard University Press - Cambridge.
- [11] Robert B. Griffiths.
*Nonanalytic behavior above the critical point in a random ising
ferromagnet*
Physical Review Letters, vol. 23, no. 1, Julho/1969.
- [12] Thompson, Colin
Mathematical Statistical Mechanics
Princeton University Press.