**O Grupo de Renormalização
e Equações de Difusão em Z**

Luciano da Costa Silva

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA APLICADA

Área de Concentração: **Mecânica Estatística**
Orientador: **Prof^o Dr^o Henrique von Dreifus**

Durante a elaboração deste trabalho, o autor recebeu apoio financeiro do CNPq e FAPESP.

São Paulo, novembro de 1996.

O Grupo de Renormalização e Equações de Difusão em Z

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação
apresentada por Luciano da Costa Silva ,
devidamente corrigida e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, fevereiro de 1997.

Banca examinadora:

Prof.^o Dr.^o Henrique von Dreifus (orientador)

IME-USP

Prof. Dr. Antônio Cláudio Reis de Paiva

IME-USP

Prof. Dr. Domingos H. Marchetti

IF-USP

Resumo

Este trabalho constitui-se de um estudo de dois exemplos do uso do método de grupo de renormalização para encontrar e demonstrar o comportamento assintótico de soluções de equações diferenciais parciais. Mais precisamente, aplicaremos o método às equações $\partial_t u = \Delta u$ e $\partial_t u = \Delta u + \lambda u^p$, $p > 3$, tanto em $\mathbb{R}$ quanto em $\mathbb{Z}$, sendo λ uma função de um tipo específico em x .

Abstract

This work is intended to be a study on two examples of the use of the renormalization group method in order to find and demonstrate the asymptotics of solutions of partial differential equations. Specifically, we apply the method to the equations $\partial_t u = \Delta u$ and $\partial_t u = \Delta u + \lambda u^p$, $p > 3$, both in $\mathbb{R}$ and $\mathbb{Z}$, with λ as a function of a certain kind on x .

Conteúdo

1	Introdução	2
2	O Grupo de Renormalização e a Equação do Calor	4
3	A Equação do Calor Não Linear	9
3.1	Existência de Solução para $\partial_t u = \partial_{xx} u + \lambda(x)u^p$	10
3.2	Comportamento assintótico e Extensão da Solução, via Grupo de Renormalização.	14
4	Equações de difusão em $\mathbb{Z}$	19
4.1	A Transformada de Fourier em $\mathbb{Z}$	19
4.2	A Rede $L^{-n}\mathbb{Z}$	21
4.3	A Equação do Calor em $\mathbb{Z}$	23
4.4	O Grupo de Renormalização na Rede.	24
4.5	Caso Não-Linear na Rede - Existência de Solução.	29
4.6	Comportamento Assintótico via Grupo de Renormalização.	31

Capítulo 1

Introdução

Dada uma equação diferencial parcial do tipo

$$\partial_t u = \Delta u + F(u, \Delta u, \Delta^2 u),$$

podem surgir diversas questões, como, por exemplo:

1. Existência de solução em intervalos de tempo finitos.
2. Extensão para tempos infinitos.
3. Comportamento assintótico da solução.

Para o primeiro problema, em geral, métodos perturbativos (com dado inicial ou termo não linear pequeno) funcionam bem. Para resolver os dois últimos problemas, o método de grupo de renormalização, desenvolvido por Goldenfeld, Oono e outros ([6, 7, 8, 9, 5]), tem se mostrado útil.

Tal método consiste em tomar a solução da equação em tempo finito e reescaloná-la por fatores convenientes, de modo a produzir uma nova equação, similar à primeira. Com as iterações sucessivas, esperamos ter uma equação mais simples que a original. Este procedimento é fundamentado pela observação de que uma grande variedade de EDP's comporta-se assintoticamente como

$$u(x, t) \sim t^{-\frac{\alpha}{2}} f^* \left(\frac{x}{t^\beta} \right)$$

com α, β e f^* dependendo dos dados iniciais ou mesmo, em grande medida, da forma da equação. f^* , na verdade, será um ponto fixo do grupo de renormalização.

Em [1], Bricmont e Kupiainen aplicam o método de grupo de renormalização à equação

$$\begin{aligned}\partial_t u &= \Delta u + \lambda u^p \\ u(x, 1) &= f(x)\end{aligned}\tag{1.1}$$

com $\lambda_0 = cte$. E obtêm o seguinte comportamento assintótico:

$$\sqrt{t}u(\sqrt{t}x, t) \rightarrow Af_0^*$$

Em [2] Bricmont e Kupiainen provam este resultado para a equação

$$\partial_t u = \Delta u + F(u, \Delta u, \Delta^2 u)$$

com as seguintes hipóteses:

- (i) F é analítica em uma vizinhança da origem.
- (ii) $d_F = n_1 + 2n_2 + 3n_3 - 3 > 0$, onde n_1, n_2, n_3 são as potências dos monômios da série de Taylor para F que minimizam d_F .

Na terminologia padrão, esse caso é chamado “*irrelevante*”. O caso marginal, $p = 3$, é tratado em [2] e o caso “*relevante*” é tratado em [1].

No segundo capítulo, introduzimos o grupo de renormalização aplicando-o a uma equação diferencial parcial simples, de solução extensamente conhecida: a equação do calor.

No terceiro capítulo, tratamos da equação de difusão (1.1), com a mudança de que λ será uma função de x da forma $\lambda = \lambda_0 + \mu$, sendo μ uma função no espaço de Banach munido da norma

$$\|\mu\| = \sup(1 + |k|^q)(|\hat{\mu}(k)| + |\hat{\mu}'(k)|)$$

Provamos a existência de uma solução com métodos perturbativos e depois a estendemos com o uso do grupo de renormalização, provando também seu comportamento assintótico.

Outra contribuição deste trabalho é fornecida no quarto capítulo, onde desenvolvemos a versão dos resultados anteriores na rede $\mathbb{Z}$. Apesar de todos os resultados referirem-se ao caso unidimensional, a extensão para uma dimensão d qualquer deve ser possível.

Capítulo 2

O Grupo de Renormalização e a Equação do Calor

Para ilustrar o método de grupo de renormalização, consideremos a equação do calor:

$$\begin{aligned}\partial_t u(x, t) &= \Delta u(x, t) \\ u(x, 0) &= f(x)\end{aligned}\tag{2.1}$$

em $\mathbb{R} \times [0, \infty)$. Para $f \in L^1(\mathbb{R})$, a equação (2.1) possui solução conhecida:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int e^{-(x-y)^2/4t} f(y) dy = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t} \right) * f(x) \equiv e^{t\Delta} f(x) \tag{2.2}$$

ou seja, $\partial_t u = \Delta u$, $\forall t > 0$ e $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. O comportamento assintótico dessa solução pode ser demonstrado diretamente:

Proposição 2.1 Se $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\sqrt{t}u(\sqrt{t}\xi, t) \rightarrow \frac{\int f(y)dy}{\sqrt{4\pi}} e^{-\xi^2/4}, \quad \text{quando } t \rightarrow \infty,$$

uniformemente e em $L^1(\mathbb{R})$.

Dem.: (i) (convergência uniforme)

$$\sqrt{t}u(\sqrt{t}\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int e^{-(\sqrt{t}\xi - y)^2/4t} f(y) dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int e^{-(\xi - \frac{y}{\sqrt{t}})^2/4} f(y) dy$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \left| \sqrt{t}u(\sqrt{t}\xi, t) - \frac{\int f(y)dy}{\sqrt{4\pi}} e^{-\xi^2/4} \right| &\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \left| e^{-(\xi - \frac{y}{\sqrt{t}})^2/4} - e^{-\xi^2/4} \right| |f(y)| dy \\
&\leq \int \left| \xi - \frac{y}{\sqrt{t}} \right| \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{-(\xi - \frac{y}{\sqrt{t}})^2/4} |f(y)| dy \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \frac{1}{2\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2} |f(y)| dy = \frac{e^{-1/2}}{4\sqrt{2\pi t}} \|f\|_1 \rightarrow 0
\end{aligned}$$

(ii) (convergência em L^1) Definimos $F_t : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^1(\mathbb{R})$ por

$$F_t f(\xi) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int e^{-(\xi - \frac{y}{\sqrt{t}})^2} f(y) dy$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \|F_t f\|_1 &= \int d\xi \left| \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int e^{-(\xi - \frac{y}{\sqrt{t}})^2/4} f(y) dy \right| \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \left(\int e^{-(\xi - \frac{y}{\sqrt{t}})^2/4} |f(y)| dy \right) d\xi \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \left(\int e^{-(\xi - \frac{y}{\sqrt{t}})^2/4} d\xi \right) |f(y)| dy = \|f\|_1 \\
\Rightarrow \|F_t\| &\leq 1, \quad \forall t \in [1, \infty] \quad \left(F_\infty f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int e^{-\xi^2/4} f(y) dy \right)
\end{aligned}$$

Além disso, para $f_n = \chi_{(-n,n)} f$, temos

$$\begin{aligned}
\|F_t f_n - F_\infty f_n\|_1 &= \int \left| \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-n}^n \left(e^{-(\xi - \frac{y}{\sqrt{t}})^2/4} - e^{-\xi^2/4} \right) f(y) dy \right| d\xi \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \left(\int_{-n}^n \left| e^{-(\xi - \frac{y}{\sqrt{t}})^2/4} - e^{-\xi^2/4} \right| |f(y)| dy \right) d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \left(e^{-\xi^2/4} \int_{-n}^n \left| e^{-\frac{y^2}{4t} + \frac{\xi y}{2\sqrt{t}}} - 1 \right| |f(y)| dy \right) d\xi \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \left(e^{-\xi^2/4} \int_{-n}^n n^2 \frac{(1 + |\xi|)}{2\sqrt{t}} |f(y)| dy \right) d\xi \\
&\leq C \frac{n^2}{\sqrt{t}} \|f\|_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \|F_t f - F_\infty f\|_1 &\leq \|F_t(f - f_n)\|_1 + \|F_t f_n - F_\infty f_n\|_1 + \|F_\infty(f_n - f)\|_1 \\
&\leq 2\|f - f_n\|_1 + C \frac{n^2}{\sqrt{t}} \|f\|_1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|F_t f - F_\infty f\|_1 \leq 2\|f - f_n\|_1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|F_t f - F_\infty f\|_1 = 0 \quad \square$$

Vejamos como este resultado pode ser alcançado com o método de grupo de renormalização. Observamos que a equação (2.1) é invariante sob a transformação

$$R_L u(x, t) = Lu(Lx, L^2 t) = u_L(x, t)$$

ou seja, u_L satisfaz

$$\begin{aligned} \partial_t u_L(x, t) &= \Delta u_L(x, t) \\ u_L(x, 0) &= Lf(Lx) \end{aligned}$$

Mudando o tempo inicial de 0 para 1, temos

$$\begin{aligned} \partial_t u_L(x, t) &= \Delta u_L(x, t) \\ u_L(x, 1) &= Rf(x) \end{aligned}$$

onde $Rf(x) = Lu(Lx, L^2)$. R é, portanto, uma transformação de $L^1(\mathbb{R})$ em $L^1(\mathbb{R})$. Podemos repetir a aplicação, de modo que, no n -ésimo passo, resolvemos a EDP

$$\begin{aligned} \partial_t u_n(x, t) &= \Delta u_n(x, t) \\ u_n(x, 1) &= R^n f(x) = L^n u(L^n x, L^{2n}) \end{aligned}$$

A convergência de $R^n f$ nos dará, portanto, o comportamento assintótico de $L^n u(L^n x, L^{2n})$.

Observe-se que

$$\begin{aligned} u(x, t) &= e^{(t-1)\Delta} f(x) \Rightarrow \hat{u}(k, t) = e^{-(t-1)k^2} \hat{f}(k) \\ \Rightarrow \widehat{R^n f}(k) &= \hat{u}\left(\frac{k}{L^n}, L^{2n}\right) = e^{-(1-L^{-2n})k^2} \hat{f}(k/L), \end{aligned}$$

que converge pontualmente para $e^{-k^2} \hat{f}(0)$. Veremos que este é o caso para $R^n f$, desde que f pertença a uma classe apropriada de funções.

Note-se que $\hat{f}_0^* = e^{-k^2}$ e seus múltiplos são pontos fixos de R e que $R^n f \rightarrow \hat{f}(0)f_0^*$ significa que f está na “*bacia de atração*”, $bsn(X, R) = \{f \in E \mid \exists x \in X, \text{ com } R^n f \rightarrow x\}$, da reta $Af_0^* = \{Af_0^*, A \in \mathbb{R}\}$.

Definimos o espaço de Banach $\mathcal{B}$ das funções $f \in L^1(\mathbb{R})$, com $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R})$, munido da norma

$$\|f\| = \sup_k (1 + |k|^q) (|\hat{f}(k)| + |\hat{f}'(k)|)$$

O fator $1 + |k|^q$, $q > 1$ fornece integrabilidade para $\hat{f}$ e $\hat{f}'$. Para nossos propósitos, consideraremos $q < 2$.

Note-se que a convergência em $\mathcal{B}$ implica a convergência em $L^1(\mathbb{R})$ e $L^\infty(\mathbb{R})$, pois

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &\leq \left\| \frac{1}{1+|x|} \right\|_2 \|(1+|x|)f\|_2 \\ &\leq C(\|f\|_2 + \|xf\|_2) \\ &= C(\|\hat{f}\|_2 + \|\hat{f}'\|_2) \leq C'\|f\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e } \|f\|_\infty &= \left\| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{f}(k) e^{ikx} dk \right\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int |\hat{f}(k)| dk \leq \|f\| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{1}{1+|k|^q} dk \end{aligned}$$

Para provar a convergência de $R^n f$ para $f_0^* = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-x^2/4}$, será útil a seguinte proposição:

Proposição 2.2 *Se $g \in \mathcal{B}$ e $\hat{g}(0) = 0$, então existe uma constante C_R , independente de $L \in [L_0, \infty)$, tal que $\|Rg\| \leq C_R L^{-1} \|g\|$.*

Dem.: Temos

$$|\hat{g}(k/L)| = \left| \int_0^{k/L} \hat{g}'(y) dy \right| \leq \frac{|k|}{L} \sup_k |\hat{g}'(k)| \leq \frac{|k|}{L} \|g\|.$$

$$\Rightarrow |\widehat{Rg}(k)| = e^{-(1-L^{-2})k^2} |\hat{g}(k/L)| \leq |k| e^{-\delta k^2} L^{-1} \|g\| \quad (\delta = 1 - L_0^{-2}).$$

$$\begin{aligned} \text{e } |(\widehat{Rg})'(k)| &\leq 2|k|(1-L^{-2})e^{-(1-L^{-2})k^2} |\hat{g}(k/L)| + e^{-(1-L^{-2})k^2} L^{-1} |\hat{g}'(k/L)| \\ &\leq 2k^2 e^{-\delta k^2} L^{-1} \|g\| + e^{-\delta k^2} L^{-1} \|g\| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|Rg\| \leq C_R L^{-1} \|g\|, \text{ com } C_R = \sup_k (1 + |k|^q)(1 + |k| + 2k^2) e^{-\delta k^2} \quad \square$$

O que implica:

Corolário 2.3 $R^n f \rightarrow \hat{f}(0)f_0^*, \forall f \in \mathcal{B}$.

Dem.: Definimos $g_n(x) = R^n f - \hat{f}(0)f_0^* = R^n (f - \hat{f}(0)f_0^*) \in \mathcal{B}$.

Como $\widehat{g_n}(k) = e^{-(1-L^{-2n})k^2} (\hat{f}(k/L) - \hat{f}(0)\widehat{f_0^*}(k)) \Rightarrow \widehat{g_n}(0) = 0$, então:

$$\|g_n\| = \|Rg_{n-1}\| \leq (C_R/L) \|g_{n-1}\| \leq \dots \leq (C_R/L)^n \|f - \hat{f}(0)f_0^*\| \rightarrow 0,$$

para $C_R L^{-1} < 1$ $\square$

É claro que, sendo

$$\|L^n u(L^n x, L^{2n}) - \hat{f}(0)f_0^*\| \leq \left(\frac{C_R}{L}\right)^n \|f - \hat{f}(0)f_0^*\|$$

podemos, $\forall t > C_R$, escolher L e n tais que $L^n = \sqrt{t}$, de modo que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\sqrt{t}u(\sqrt{t}x, t) - \hat{f}(0)f_0^*\| = 0.$$

Capítulo 3

A Equação do Calor Não Linear

Neste capítulo, seguindo as idéias apresentadas em [1], demonstraremos a existência de uma solução para

$$\begin{aligned}\partial_t u &= \Delta u + \lambda u^p \\ u(x, 1) &= f(x),\end{aligned}\tag{3.1}$$

com $\lambda = \text{const} + \mu$, onde $\mu \in \mathcal{B}$, $\forall p \in \mathbb{N}$. Na segunda seção, consideramos o problema de extensão e comportamento assintótico dessa solução para o caso $p > 3$.

Notemos que (3.1) não é invariante sob a transformação $R_L u(x, t) = Lu(Lx, L^2 t) = u_L(x, t)$ e que, em vez disso, u_L satisfaz

$$\begin{aligned}\partial_t u_L &= \Delta u_L + \lambda L^{3-p} u_L^p \\ u_L(x, 1) &= Rf(x) = Lu(Lx, L^2)\end{aligned}\tag{3.2}$$

e, sucessivamente, $u_n = R_L^n u$ satisfaz:

$$\begin{aligned}\partial_t u_n &= \Delta u_n + \lambda_n u_n^p \\ u_n(x, 1) &= R^n f(x) = L^n u(L^n x, L^{2n})\end{aligned}$$

onde $\lambda_n(x) = L^{(3-p)n} \lambda(L^n x)$.

Ou seja, o termo não linear torna-se cada vez menor a cada iteração e é de se esperar que o comportamento de $R^n f$ não se modifique muito em relação ao caso linear. De fato, provaremos que existe um $A \in \mathbb{R}$ tal que

$$L^n u(L^n x, L^{2n}) \rightarrow Af_0^*.$$

Antes, desejamos mostrar a existência de uma solução.

3.1 Existência de Solução para $\partial_t u = \partial_{xx} u + \lambda(x)u^p$.

Será útil escrevermos a equação (3.1) na sua forma integral:

Lema 3.1 *Se uma função $u(x, t)$ satisfaz a equação*

$$u(x, t) = e^{(t-1)\Delta} f(x) + \int_0^{t-1} e^{s\Delta} (\lambda u^p)(x, t-s) ds, \quad (3.3)$$

em um aberto $U = \mathbb{R} \times (a, b)$, então u satisfaz (3.1) em U .

Dem.: Primeiro definimos o operador $e^{t\Delta}$ em $L^1(\mathbb{R})$:

$$e^{t\Delta} f(x) = \left(e^{-tk^2} \right)^\vee * f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int e^{-(x-y)^2/4t} f(y) dy$$

Como esta expressão é solução da equação do calor em $\mathbb{R}$, temos que,

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}), e^{t\Delta} f \in C^1(t \in (0, \infty)) \cap C^2(x \in \mathbb{R}) \text{ e } \partial_t e^{t\Delta} f = \Delta e^{t\Delta} f$$

Daí:

$$\begin{aligned} \partial_t u(x, t) &= \partial_t e^{t\Delta} f(x) + \partial_t \int_0^{t-1} e^{s\Delta} (\lambda u^p)(x, t-s) ds \\ &= \Delta e^{t\Delta} f(x) + \partial_t \int_1^t e^{(t-s)\Delta} (\lambda u^p)(x, s) ds \\ &= \Delta e^{t\Delta} f(x) + \lambda u^p(x, t) + \int_1^t \partial_t e^{(t-s)\Delta} (\lambda u^p)(x, s) ds \\ &= \Delta e^{t\Delta} f(x) + \lambda u^p(x, t) + \Delta \int_1^t e^{(t-s)\Delta} (\lambda u^p)(x, s) ds \\ &= \Delta u(x, t) + \lambda u^p(x, t) \quad \square \end{aligned}$$

Introduzimos o espaço $\mathcal{B}_L$, no qual trabalharemos, das funções definidas em $\mathcal{B} \times [1, L^2]$, munido da norma

$$\|u\|_L = \sup_{t \in [1, L^2]} \|u(\cdot, t)\|$$

Teorema 3.1 $\exists \varepsilon = \varepsilon(L, \lambda, p)$ tal que, se $\|f\| \leq \varepsilon$, a equação (3.1) possui uma única solução, definida em $\mathbb{R} \times [1, L^2]$, satisfazendo $\|u - e^{(t-1)\Delta} f\|_L \leq \|f\|$.

Dem.: Escrevemos (3.3) como $u = T(u) = u_f + V(u)$, onde

$$u_f = e^{(t-1)\Delta} f \text{ e } V(u) = \int_0^{t-1} ds e^{s\Delta} (\lambda u^p)(x, t-s).$$

Então uma solução de (3.3) é um ponto fixo de T . Para provar que T possui um ponto fixo, usaremos o princípio de contração na bola $B_f = \{u : \|u - u_f\|_L \leq \|f\|\}$.

PRINCÍPIO DE CONTRAÇÃO: Sejam (X, d) um espaço métrico completo e $F : X \rightarrow X$ uma contração, isto é, $d(F(x), F(y)) \leq k \cdot d(x, y)$, $0 \leq k < 1$. Existe um único ponto fixo $p = F(p)$, dado por $p = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(p_0)$, $\forall p_0 \in X$.

Dividiremos a demonstração em duas partes:

(i) $T(B_f) \subset B_f$.

Os seguintes lemas serão úteis:

Lema 3.2 $f, g \in \mathcal{B} \Rightarrow fg \in \mathcal{B}$, com $\|fg\| \leq c \|f\| \|g\|$.

Dem.: Para $i = 0, 1$:

$$\begin{aligned} \left| \widehat{fg}^{(i)}(k) \right| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \hat{f}^{(i)} * \hat{g}(k) \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \left| \hat{f}^{(i)}(k-y) \right| |\hat{g}(y)| dy \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\| \|g\| \int \frac{1}{1+|k-y|^q} \cdot \frac{1}{1+|y|^q} dy \\ &\leq \|f\| \|g\| c (1+|k|^q)^{-1} \end{aligned}$$

A última passagem justifica-se da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+|k-y|^q} \cdot \frac{1}{1+|y|^q} dy &= \int \frac{1}{1+|k/2-y|^q} \cdot \frac{1}{1+|y+k/2|^q} dy \quad (y \mapsto y - k/2) \\ &= 2 \int_0^\infty \frac{1}{1+|k/2-y|^q} \frac{1}{1+|y+k/2|^q} dy \quad (\text{integrando par}) \\ &= 2 \int_{k/2}^\infty \frac{1}{1+|k-y|^q} \cdot \frac{1}{1+|y|^q} dy \quad (y \mapsto y + k/2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{2}{1 + (|k|/2)^q} \int_{k/2}^{\infty} \frac{1}{1 + |k - y|^q} dy \\
&\leq \frac{2^{q+1}}{2^q + |k|^q} \int \frac{1}{1 + |k - y|^q} dy \\
&\leq C (1 + |k|^q)^{-1} \quad \square
\end{aligned}$$

Corolário 3.3 Dadas funções $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{B}$, então o produto $f_1 \cdots f_n \in \mathcal{B}$ e

$$\|f_1 \cdots f_n\| \leq c^{n-1} \|f_1\| \cdots \|f_n\|$$

Note-se que c depende de q , variando em $(4\sqrt{2\pi}, \infty)$.

Lema 3.4 Se $v \in \mathcal{B}_L$, então $\left\| \int_0^{t-1} e^{s\Delta} v(x, s) ds \right\|_L \leq L^4 \|v\|_L$.

Dem.: Seja $N(x) = \int_0^{t-1} e^{s\Delta} v(x, s) ds$.

$$|\widehat{N}(k)| = \left| \int_0^{t-1} e^{-sk^2} \widehat{v}(k, s) ds \right| \leq \|v\|_L (1 + |k|^q)^{-1} (L^2 - 1)$$

$$\begin{aligned}
|\widehat{N}'(k)| &= \left| \int_0^{t-1} (-2sk) e^{-sk^2} \widehat{v}(k, s) ds + \int_0^{t-1} e^{-sk^2} \widehat{v}'(k, s) ds \right| \\
&\leq \int_0^{t-1} 2s|k| e^{-sk^2} |\widehat{v}(k, s)| ds + \int_0^{t-1} |\widehat{v}'(k, s)| ds \\
&\leq \int_0^{t-1} \sqrt{2} s^{1/2} e^{-1/2} |\widehat{v}(k, s)| ds + \|v\|_L (1 + |k|^q)^{-1} (L^2 - 1) \\
&\leq (L^2 - 1)^2 (1 + |k|^q)^{-1} \|v\|_L + \|v\|_L (1 + |k|^q)^{-1} (L^2 - 1)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|N\|_L \leq (L^2 - 1) \|v\|_L + (L^2 - 1)^2 \|v\|_L + \|v\|_L (L^2 - 1) \leq L^4 \|v\|_L \quad \square$$

Então, se $\|\lambda\| = |\lambda_0| + \|\mu\|$:

$$\Rightarrow \|T(u) - u_f\|_L = \|V(u)\|_L = \left\| \int_0^{t-1} e^{s\Delta} (\lambda u^p)(\cdot, t-s) ds \right\|_L \leq L^4 \|\lambda u^p\|_L \leq L^4 c^p \|\lambda\| \|u\|_L^p$$

e, como $\|u\|_L \leq \|u - u_f\|_L + \|u_f\|_L \leq m\|f\|$, então

$$\begin{aligned} \|T(u) - u_f\|_L &\leq L^4 c^p \|\lambda\| m^p \|f\|^p \\ \Rightarrow \|T(u) - u_f\|_L &\leq \|f\|, \text{ se } \|f\| \leq C^*{}^{-\frac{1}{p-1}}, \text{ com } C^* = L^4 c^p \|\lambda\| m^p. \end{aligned}$$

e, como $p > 3 \Rightarrow 1/(p-1) < 1/2$, é suficiente termos

$$\|f\| \leq \frac{1}{\sqrt{C^*}} := \varepsilon_1(L, \lambda, p)$$

para L suficientemente grande, de modo que $C^* > 1$.

(ii) $T : B_f \rightarrow B_f$ é uma contração, ou seja,

$$\|T(u_1) - T(u_2)\|_L \leq \alpha \|u_1 - u_2\|_L, \text{ para algum } 0 < \alpha < 1 \text{ e } \forall u_1, u_2 \in B_f.$$

Temos então, usando o corolário (3.3):

$$\begin{aligned} \|u_1^p - u_2^p\|_L &= \left\| \sum_{i=1}^p u_1^{p-i} \cdot u_2^{i-1} (u_1 - u_2) \right\|_L \\ &\leq \sum_{i=1}^p c^{p-1} \|u_1\|_L^{p-i} \|u_2\|_L^{i-1} \|u_1 - u_2\|_L \\ &\leq \sum_{i=1}^p c^{p-1} m^{p-i} \|f\|^{p-i} m^{i-1} \|f\|^{i-1} \|u_1 - u_2\|_L \\ &\leq p(cm\|f\|)^{p-1} \|u_1 - u_2\|_L \\ \Rightarrow \|T(u_1) - T(u_2)\|_L &= \|V(u_1) - V(u_2)\|_L = \left\| \int_0^{t-1} e^{s\Delta} \lambda(u_1^p - u_2^p)(x, t-s) ds \right\|_L \leq \\ &\leq L^4 c \|\lambda\| \|u_1^p - u_2^p\|_L \leq L^4 \|\lambda\| p c^p m^p \|f\|^{p-1} \|u_1 - u_2\|_L = pC^* \|f\|^{p-1} \end{aligned}$$

Devemos ter, então:

$$\|f\| < p^{\frac{1}{1-p}} C^*{}^{\frac{1}{1-p}}$$

e, como $p^{\frac{1}{1-p}} \geq 3^{-\frac{1}{2}}$ (função crescente para $p > 3$), basta termos

$$\|f\| \leq \frac{1}{\sqrt{3C^*}} := \varepsilon_2(L, \lambda, p).$$

A existência está garantida para $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon_2$ $\square$

Agora, aplicamos o método de RG:

3.2 Comportamento assintótico e Extensão da Solução, via Grupo de Renormalização.

Teorema: $\exists \varepsilon > 0$, tal que, para $\|f\| \leq \varepsilon$, a solução de (3.1), com $p > 3$, satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\sqrt{t}u(\sqrt{t}\cdot, t) - Af_0^*(\cdot)\| = 0.$$

Dem.: Temos ainda o problema de estender a solução do teorema (3.1) para $[1, \infty)$. Esta extensão será feita passo a passo, junto com a aplicação da transformação de renormalização. No primeiro passo, consideramos a equação

$$\begin{aligned} \partial_t u_1(x, t) &= \Delta u_1(x, t) + L^{(3-p)}\lambda(Lx)u_1^p(x, t) \\ u_1(x, 1) &= Rf(x) = Lu(Lx, L^2) \equiv f_1(x) \end{aligned} \quad (3.4)$$

É claro que a existência de uma solução para (3.4) em $\mathbb{R} \times [1, L^2]$ implica uma solução para (3.1) em $\mathbb{R} \times [L^2, L^4]$, dada por $u(x, t) = L^{-1}u_1(L^{-1}x, L^{-2}t)$.

Como a equação (3.4) é análoga à equação (3.1), podemos garantir tal solução, sujeita à condição $\|f_1\| \leq \varepsilon_1$. Como $\varepsilon \propto \|\lambda\|^{-\frac{1}{2}}$ e $\|\lambda_1\| \geq L^{1-p}\|\lambda\|$, temos que $\varepsilon_1 = \frac{\|\lambda_1\|^{-\frac{1}{2}}}{\|\lambda\|^{-\frac{1}{2}}}\varepsilon \geq L\varepsilon$. É suficiente garantirmos, portanto, que $\|Rf\| = \|f_1\| \leq L\varepsilon$.

Vejamos então: escrevendo

$$f = A_0 f_0^* + g_0$$

$$f_1 = A_1 f_0^* + g_1$$

com $\widehat{g_0}(0) = \widehat{g_1}(0) = 0$, temos

$$|A_0| = |\widehat{f}(0)| \leq \|f\|$$

e

$$\|g_0\| \leq (1 + \|f_0^*\|)\|f\|$$

Agora,

$$\begin{aligned}
f_1(x) = Rf(x) &= Lu(Lx, L^2) \\
&= Le^{(L^2-1)\Delta} f(Lx) + L \int_0^{L^2-1} e^{s\Delta} (\lambda u^p)(x, Lx) ds \\
&= R_0 f + Lv(Lx)
\end{aligned}$$

onde R_0 é o grupo de renormalização para o caso linear.

Dai:

$$A_1 = \widehat{f_1}(0) = \widehat{R_0 f}(0) + \widehat{v}(0) = A_0 + \widehat{v}(0)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\|v\| &= \left\| \int_0^{L^2-1} e^{s\Delta} (\lambda u^p)(x, t-s) ds \right\| \\
&\leq L^4 \|\lambda u^p\| \quad (\text{Lema 3.4}) \\
&\leq L^4 c^p \|\lambda\| \|u\|^p \quad (\text{Lema 3.2, } \|\lambda\| \equiv |\lambda_0| + \|\mu\|) \\
&\leq C^* \|f\|^p
\end{aligned}$$

com $C^* = L^4 m^p c^p \|\lambda\|$, $m = 1 + \|e^{(t-1)\Delta}\|_L$.

Então:

$$|A_1| \leq |A_0| + \|v\| \leq 2\|f\|$$

$$\begin{aligned}
g_1 &= f_1 - A_1 f_0^* = R_0 f + Lv(Lx) - A_1 f_0^* \\
&= R_0 f + Lv(Lx) - A_0 f_0^* - \widehat{v}(0) f_0^* \\
\Rightarrow g_1 &= R_0 g_0 + Lv(Lx) - \widehat{v}(0) f_0^*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \|g_1\| &\leq C_R L^{-1} \|g_0\| + L^q C^* \|f\|^p + \|f_0^*\| C^* \|f\|^p \\
&\leq C_R L^{-1} (1 + \|f_0^*\|) \|f\| + (L^q + \|f_0^*\|) C^* \|f\|^p \\
\Rightarrow \|g_1\| &\leq L^{-(1-\delta)} \|f\|,
\end{aligned}$$

$$\text{se } \|f\| \leq \left(\frac{L^\delta - C_R(1 + \|f_0^*\|)}{L(L^q + \|f_0^*\|)} \right)^{\frac{1}{p-1}} C^{* \frac{1}{1-p}} \equiv \varepsilon$$

Portanto,

$$\|f_1\| \leq 2\|f_0^*\| \|f\| + L^{-(1-\delta)}\|f\| \leq L\varepsilon = \varepsilon_1,$$

para L suficientemente grande.

O mesmo procedimento pode ser aplicado, de modo a obtermos a extensão da solução em $[L^{2n}, L^{2n+2}]$. Ou seja, podemos provar, por indução, que a equação

$$\begin{aligned}\partial_t u_n &= \Delta u_n + \lambda_n u_n^p \\ u_n(x, 1) &= R^n f(x) = f_n(x),\end{aligned}$$

onde $\lambda_n(x) = L^{(3-p)n}\lambda(L^n x)$, possui solução em $[1, L^2]$ e que, se

$$f_n = A_n f_0^* + g_n,$$

com

$$\widehat{g_n}(0) = 0,$$

então

$$|A_n| \leq \left(2 + \frac{L^{-\delta} - L^{-\delta n}}{1 - L^{-\delta}}\right) \|f\|$$

$$\|g_n\| \leq L^{-(1-\delta)n} \|f\|.$$

De fato, temos

$$\begin{aligned}f_n &= R_0 f_{n-1} + L \int_0^{L^2-1} e^{s\Delta} (\lambda_{n-1} u_{n-1}^p)(x, L \cdot) ds \\ &= R_0 f_{n-1} + L v_{n-1}(L \cdot) \\ \Rightarrow A_{n+1} &= \widehat{f_{n+1}}(0) = \widehat{R_0 f_n} + \widehat{v_n}(0) = A_n + \widehat{v_n}(0) \\ \Rightarrow |A_{n+1}| &\leq \left(2 + \frac{L^{-\delta} - L^{-\delta n}}{1 - L^{-\delta}}\right) \|f\| + \|v_n\|\end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned}\|v_n\| &= \left\| \int_0^{L^2-1} e^{s\Delta} (\lambda_n u_n^p)(x, L \cdot) ds \right\| \\ &\leq L^4 c^p \|\lambda_n\| \|u_n\|_L^p \quad (\text{Lema 3.4}) \\ &\leq L^4 c^p L^{(3-p)n} \|\lambda(L^n \cdot)\| \|u_n\|_L^p \quad (\text{Lema 3.2})\end{aligned}$$

Para qualquer função h em $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}\|h(L^n \cdot)\| &= \sup_k (1 + |k|^q) \left(\frac{1}{L^n} \left| \hat{h} \left(\frac{\cdot}{L^n} \right) \right| + \frac{1}{L^{2n}} \left| \hat{h}' \left(\frac{\cdot}{L^n} \right) \right| \right) \\ &\leq L^{-n} \sup (1 + L^{nq} |k|^q) (|\hat{h}(k)| + |\hat{h}'(k)|) \leq L^{(q-1)n} \|h\|\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\|v_n\| &\leq L^4 c^p L^{(2+q-p)n} \|\lambda\| m^p \|f_n\|^p \\ &\leq L^{(q-2)n} C^* \|f_n\|^p \\ \Rightarrow \|v_n\| &\leq L^{(q-2)n} C^* C^p \|f\|^p, \\ \text{pois } \|f_n\| &\leq \left(2\|f_0^*\| + \frac{L^{-\delta} - L^{-\delta n}}{1 - L^{-\delta}} \|f_0^*\| + L^{-(1-\delta)n} \right) \|f\| \leq C \|f\|\end{aligned}$$

E:

$$\begin{aligned}g_{n+1} &= f_{n+1} - A_{n+1} f_0^* \\ &= R_0 f_n + L v_n(L \cdot) - A_{n+1} f_0^* \\ &= R_0 (f_n - A_n f_0^*) + L v_n(L \cdot) - \widehat{v}_n(0) f_0^* \\ &= R_0 g_n + L v_n(L \cdot) - \widehat{v}_n(0) f_0^* \\ \Rightarrow \|g_{n+1}\| &\leq C_R L^{-1} L^{-(1-\delta)n} \|f\| + (L^q + \|f_0^*\|) L^{-n} C^* C^p \|f\|^p \\ &\leq L^{-(1-\delta)(n+1)} \|f\|,\end{aligned}$$

se

$$\|f\| \leq \left(\frac{L^\delta - C_R}{L(L^q + \|f_0^*\|)} \frac{C^{*-1}}{C^p} \right)^{\frac{1}{p-1}}$$

O que implica $C^p C^* \|f\|^{p-1} \leq 1$ e $\|v_n\| \leq L^{-\delta n} \|f\|$.

Daí:

$$\begin{aligned}|A_{n+1}| &\leq \left(2 + \frac{L^{-\delta} - L^{-\delta n}}{1 - L^{-\delta}} \right) \|f\| + L^{-\delta n} \|f\| \\ &= \left(2 + \frac{L^{-\delta} - L^{-\delta(n+1)}}{1 - L^{-\delta}} \right) \|f\|\end{aligned}$$

e é claro que a equação para $n + 1$, com $u_{n+1}(x, 1) = f_{n+1}(x)$ possui uma solução, pois $\|f_{n+1}\| \leq C\|f\| \leq L\varepsilon$.

Isto conclui a demonstração, pois

$$|A_{n+1} - A_n| \leq \|v_n\| \leq L^{(q-2)n}\|f\| \rightarrow 0$$

e

$$\|g_n\| \leq L^{-(1-\delta)n}\|f\| \rightarrow 0$$

O que implica $A_n \rightarrow A$, pela completude de $\mathbb{R}$ e, portanto, $f_n \rightarrow Af_0^*$, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L^n u(L^n \cdot, L^{2n}) - Af_0^*\| = 0 \quad \square$$

Capítulo 4

Equações de difusão em $\mathbb{Z}$

4.1 A Transformada de Fourier em $\mathbb{Z}$.

Dada $f \in l_1(\mathbb{Z})$, define-se a transformada inversa de Fourier de f , $\check{f} : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, por

$$\mathcal{F}^{-1}f(k) = \check{f}(k) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} f(x)e^{ikx}$$

E a transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}g(x) = \hat{g}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(k)e^{-ikx} dk$$

Introduzimos o subespaço $\mathcal{B}_0$ de $l_1(\mathbb{Z})$ das funções com $\check{f} \in C_{per}^1[-\pi, \pi]$. Em $\mathcal{B}_0$, definimos a norma

$$\|f\| = \sup_{k \in [-\pi, \pi]} (|\check{f}(k)| + |\check{f}'(k)|)$$

Desse modo, $\mathcal{F}^{-1}$ é uma bijeção linear contínua entre $\mathcal{B}_0$ e $C_{per}^1[-\pi, \pi]$, pois, segundo um conhecido resultado:

Teorema: Se $g \in C_{per}^1[-\pi, \pi]$, então:

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}} (\mathcal{F}g)(x)e^{ikx} = g(k)$$

Ou seja, $\mathcal{F}^{-1} \cdot \mathcal{F} = I$ em $C_{per}^1[-\pi, \pi]$. Por outro lado, a somabilidade de f garante a convergência uniforme da série $\sum_{x \in \mathbb{Z}} f(x)e^{ikx}$, daí:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{y \in \mathbb{Z}} f(y) e^{iky} \right) e^{-ikx} dk \\
&= \sum_{y \in \mathbb{Z}} f(y) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(y-x)} dk = \sum_{y \in \mathbb{Z}} f(y) \delta(y-x) = f(x) \\
&\Rightarrow \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = I \quad \text{em } \mathcal{B}_0
\end{aligned}$$

Isto garante que $\mathcal{B}_0$ seja completo, pois sua norma é induzida por um isomorfismo com o espaço completo $C_{per}^1[-\pi, \pi]$.

Algumas propriedades úteis de $\mathcal{F}^{-1}$:

Proposição 4.1 $\forall f \in \mathcal{B}_0$:

- (i) $\check{f}' = i(xf)^\vee$;
- (ii) $\mathcal{F}^{-1}\tau_y = e^{iky}\mathcal{F}^{-1}$, onde τ_y é o operador de translação: $(\tau_y f)(x) = f(x-y)$.

Dem.:

$$\begin{aligned}
(i) \quad (\check{f}')^\wedge(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \check{f}'(k) e^{-ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \check{f}(k) e^{-ikx} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \check{f}(k) (-ik) e^{-ikx} dk = ix f(x) \\
(ii) \quad \mathcal{F}^{-1}(\tau_y f)(k) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m-y) e^{imk} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) e^{imx} e^{iky} \quad \square
\end{aligned}$$

Introduzimos em $\mathcal{B}_0$ a convolução $*$: $\mathcal{B}_0^2 \rightarrow \mathcal{B}_0$, por

$$(f * g)(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}} f(y) g(x-y)$$

O que implica que $f * g \in \mathcal{B}_0$, pois

$$\begin{aligned}
\sum_{y \in \mathbb{Z}} f(y) g(x-y) &= \sum_{y \in \mathbb{Z}} f(y) (\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\tau_y g)(x) = \mathcal{F} \left(\sum_{y \in \mathbb{Z}} f(y) e^{iky} \check{g}(k) \right) = \mathcal{F}(\check{f}\check{g})(x) \\
&\Rightarrow (f * g)^\vee = \check{f}\check{g}
\end{aligned}$$

(Note que $\mathcal{F}$ comuta com $\sum_{y \in \mathbb{Z}}$, pela somabilidade de f)

$$\Rightarrow \|f * g\| = \sup (|\check{f}||\check{g}| + |\check{f}'||\check{g}| + |\check{f}||\check{g}'|) \leq \sup (|\check{f}| + |\check{f}'|) (|\check{g}| + |\check{g}'|)$$

$$\leq \sup (|\check{f}| + |\check{f}'|) \cdot \sup (|\check{g}| + |\check{g}'|) \Rightarrow \|f * g\| \leq \|f\| \|g\|$$

Ou seja, $(\mathcal{B}_0, *)$ é uma álgebra de Banach. Na verdade, $\mathcal{F}^{-1}$ é um isomorfismo algébrico entre $(\mathcal{B}_0, *)$ e $(C_{per}^1([\pi, \pi], \cdot))$.

A partir da relação $f * g = (\check{f}\check{g})^\wedge$, deduz-se facilmente:

Proposição 4.2

- (i) $(f * g) * h = f * (g * h)$;
- (ii) $f * g = g * f$;
- (iii) $(f + g) * h = f * h + g * h$;
- (iv) $(\alpha f) * g = \alpha(f * g) = f * (\alpha g)$.

Passemos agora às funções definidas na rede

$$L^{-n}\mathbb{Z} = \left\{ \frac{x}{L^n}, x \in \mathbb{Z} \right\}$$

4.2 A Rede $L^{-n}\mathbb{Z}$.

Definimos, em $l_1(L^{-n}\mathbb{Z})$, o operador

$$\mathcal{F}_n^{-1}f(k) = L^{-n} \sum_{\xi \in L^{-n}\mathbb{Z}} f(\xi) e^{ik\xi} = L^{-n} \sum_{y \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{y}{L^n}\right) e^{iky/L^n}, \quad k \in [-\pi L^n, \pi L^n]$$

ou seja,

$$\mathcal{F}_n^{-1} = L^{-n} \omega^n \mathcal{F}^{-1} \omega^n$$

onde ω é o operador definido por $(\omega f)(x) = f\left(\frac{x}{L}\right)$ e $(\omega^n f)(x) = f\left(\frac{x}{L^n}\right)$.

Definimos $\mathcal{B}_n$ como o subconjunto de $l_1(L^{-n}\mathbb{Z})$ com $\mathcal{F}_n^{-1}f \in C_{per}^1([-\pi L^n, \pi L^n])$, munido da norma

$$\|f\|_n = \sup_{k \in [-\pi L^n, \pi L^n]} (1 + |k|^q) \left(|\mathcal{F}_n^{-1}f(k)| + |(\mathcal{F}_n^{-1}f)'(k)| \right)$$

Dessa forma, $\mathcal{F}_n^{-1}$ é um homeomorfismo entre $\mathcal{B}_n$ e $C_{per}^1([-\pi L^n, \pi L^n])$, com inversa

$$\mathcal{F}_n f(x) = L^n \left(\omega^{-n} \mathcal{F} \omega^{-n} f \right) (x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi L^n}^{\pi L^n} f(k) e^{-ikx} dk$$

(onde $\omega^{-n} = (\omega^{-1})^n$).

Proposição 4.3 $\forall f \in \mathcal{B}_n$:

- (i) $(\omega^n f)' = L^{-n} \omega^n f'$.
- (ii) $(\mathcal{F}_n^{-1} f)' = i \mathcal{F}_n^{-1} (\xi f)$.
- (iii) $\omega^n \tau_{L^{-n}} = \tau \omega^n$.
- (iv) $\mathcal{F}_n^{-1} \tau_{L^{-n}} = e^{ik/L^n} \mathcal{F}_n^{-1}$.
- (v) $(fg)^\vee = (f)^\vee * g$.

Dem.:

- (i) $(\omega^n f)'(k) = f\left(\frac{k}{L^n}\right)' = L^{-n} f'\left(\frac{k}{L^n}\right) = L^{-n} \omega^n f'(k)$;
- (ii) $(\mathcal{F}_n^{-1} f)' = L^{-n} (\omega^n \mathcal{F}^{-1} \omega^n f)'$
 $= L^{-2n} \omega^n (\mathcal{F}^{-1} \omega^n f)'$
 $= L^{-2n} i \omega^n \mathcal{F}^{-1} (x \omega^n f)$
 $= L^{-2n} i \omega^n \mathcal{F}^{-1} \omega^n (L^n \xi f)$
 $= i L^{-n} \omega^n \mathcal{F}^{-1} \omega^n (\xi f) = i \mathcal{F}_n^{-1} (\xi f)$.
- (iii) $\omega^n \tau_{L^{-n}} f(x) = \omega^n f(x - L^{-n}) = \left(\frac{x}{L^n} - L^{-n}\right) = f\left(\frac{x-1}{L^n}\right) = \tau \omega^n f(x)$.
- (iv) $\mathcal{F}_n^{-1} \tau_{L^{-n}} f(k) = L^{-n} \omega^n \mathcal{F}^{-1} \omega^n \tau_{L^{-n}} f$
 $= L^{-n} \omega^n \mathcal{F}^{-1} \tau \omega^n f = L^{-n} \omega^n e^{ik/L^n} \mathcal{F}^{-1} \omega^n f$
 $= L^{-n} e^{ik/L^n} \omega^n \mathcal{F}^{-1} \omega^n f = e^{ik/L^n} \mathcal{F}_n^{-1} f$
- (v) $(fg)^\vee = i (xfg)^\vee = i (xf)^\vee * (g)^\vee = (f)^\vee * (g)^\vee \quad \square$

Introduzimos também a convolução em $\mathcal{B}_n$:

$$\begin{aligned} (f * g)(\xi) &= L^{-n} \sum_{\eta \in L^{-n}} f(\eta) g(\xi - \eta) \\ &= L^{-n} \sum_{y \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{y}{L^n}\right) g\left(\xi - \frac{y}{L^n}\right) = L^{-n} \sum_{y \in \mathbb{Z}} (\omega^n f)(y) (\omega^n g)(L^n \xi - y) \\ &\Rightarrow f * g = L^{-n} \omega^{-n} (\omega^n f * \omega^n g) \end{aligned}$$

Daí:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_n^{-1}(f * g) &= L^{-n} \omega^n \mathcal{F}^{-1} \omega^n (f * g) = L^{-2n} \omega^n \mathcal{F}^{-1} (\omega^n f * \omega^n g) \\ &= L^{-2n} \omega^n (\mathcal{F}^{-1} \omega^n f) (\mathcal{F}^{-1} \omega^n g) = L^{-2n} (\omega^n \mathcal{F}^{-1} \omega^n f) (\omega^n \mathcal{F}^{-1} \omega^n g) \\ &= (\mathcal{F}_n^{-1} f) \cdot (\mathcal{F}_n^{-1} g) \Rightarrow f * g = \mathcal{F}_n^{-1} (\mathcal{F}_n^{-1} f \cdot \mathcal{F}_n^{-1} g)\end{aligned}$$

O que implica todas as propriedades da Proposição (4.2) e que $\mathcal{F}_n^{-1}$ é um isomorfismo algébrico entre $(\mathcal{B}_n, *)$ e $(C_{per}^1([- \pi L^n, \pi L^n]), \cdot)$.

4.3 A Equação do Calor em $\mathbb{Z}$.

Como análogo para a derivada espacial em $\mathbb{Z}$, temos as opções:

$$\partial u(x) = u(x+1) - u(x)$$

$$\partial^* u(x) = u(x) - u(x-1)$$

Definimos a derivada segunda, Δ (ou ∂^2), como:

$$\partial \partial^* u = \partial^* \partial u = u(x+1) - 2u(x) + u(x-1)$$

ou seja,

$$\Delta = \tau^{-1} - 2 + \tau$$

Desse modo, definimos a equação do calor na rede por

$$\begin{aligned}\partial_t u(x, t) &= \Delta u(x, t) \\ u(x, 0) &= f(x)\end{aligned}\tag{4.1}$$

Como no caso contínuo, procuramos uma solução de (4.1) por meio de manipulações formais com a transformada de Fourier. Note que

$$\mathcal{F}^{-1} \Delta = \mathcal{F}^{-1} (\tau + \tau^{-1} - 2) = (e^{ik} + e^{-ik} - 2) \mathcal{F}^{-1} = 2(\cos k - 1) \mathcal{F}^{-1}$$

Daí, supondo as condições necessárias às manipulações formais:

$$\partial_t (u)^\vee(k, t) = 2(\cos k - 1)(u)^\vee(k, t) \Rightarrow (u)^\vee(k, t) = e^{2t(\cos k - 1)} \check{f}(k)$$

$$u(\cdot, t) = K_t * f$$

onde

$$K_t(x) = K(x, t) = \mathcal{F} \left(e^{2t(\cos k - 1)} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2t(\cos k - 1)} \cos kx \, dk$$

Mostrar que esta é, de fato, uma solução de (4.1) é mais simples que no caso contínuo. Verifica-se que $K(x, 0) = \delta(x)$ e, portanto, $u(\cdot, 0) = \delta * f = f$. Por outro lado, verifica-se que, $\forall f, g \in \mathcal{B}_0$, temos $\Delta(f * g) = (\Delta f) * g = f * (\Delta g)$. Portanto, para mostrar que $\partial_t u = \Delta u$, basta mostrar que $\partial_t K = \Delta K$.

De fato, como o integrando é contínuo no compacto $[\pi, \pi]$ e continuamente derivável em relação a t , podemos inverter a ordem de integração e derivação:

$$\frac{\partial K}{\partial t}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2(\cos k - 1) e^{2t(\cos k - 1)} \cos kx \, dk$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \Delta \cos kx &= \operatorname{Re} \left(\Delta e^{ikx} \right) = \operatorname{Re} \left(\tau + \tau^{-1} - 2 \right) e^{ikx} = \\ &= \operatorname{Re} 2(\cos k - 1) e^{ikx} = 2(\cos k - 1) \cos kx \end{aligned}$$

Daí

$$\Delta K(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2t(\cos k - 1)} 2(\cos k - 1) \cos kx \, dk = \frac{\partial K}{\partial t}(x, t).$$

4.4 O Grupo de Renormalização na Rede.

Como no caso contínuo, dada uma função $f \in \mathcal{B}_0$, definimos

$$Rf(x) = Lu(Lx, L^2)$$

onde u satisfaz $\partial_t u = \Delta u$, $u(x, 1) = f(x)$.

Temos, então, $Rf = L\omega^{-1}u(\cdot, L^2)$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathcal{F}_1^{-1} Rf &= \omega(u)^\vee(\cdot, L^2) \Rightarrow \mathcal{F}_1^{-1} Rf(k) = (u)^\vee\left(\frac{k}{L}, L^2\right) \\ \Rightarrow \mathcal{F}_1^{-1} Rf(k) &= e^{2(L^2-1)(\cos \frac{k}{L}-1)} \tilde{f}\left(\frac{k}{L}\right).\end{aligned}$$

Uma vez que aplicaremos R sucessivamente a uma mesma f , devemos definir R não apenas em $\mathcal{B}_0$, mas em $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n$. Para isto, note que a função $u_n(x, t) = L^n u(L^n x, L^{2n} t)$ satisfaz

$$\partial_t u_n = \Delta_n u_n$$

onde $\Delta_n u_n(x) = L^{2n} [u(x + L^{-n}) - 2u(x) + u(x - L^{-n})]$, ou seja

$$\Delta_n = L^{2n} (\tau_{L^{-n}} + \tau_{L^{-n}}^{-1} - 2)$$

de modo que

$$\mathcal{F}_n^{-1} \Delta_n = L^{2n} (e^{-ik/L^n} + e^{ik/L^n} - 2) \mathcal{F}^{-1} = 2L^{2n} \left(\cos \frac{k}{L^n} - 1 \right) \mathcal{F}^{-1}$$

Assim, a solução para $\partial_t u_n = \Delta_n u_n$, $u_n(x, 1) = f$, será:

$$\begin{aligned}\partial_t \mathcal{F}_n^{-1} u_n &= 2L^{2n} \left(\cos \frac{k}{L^n} - 1 \right) \mathcal{F}_n^{-1} u_n \Rightarrow \mathcal{F}_n^{-1} u_n(k) = e^{2L^{2n}(t-1)(\cos \frac{k}{L^n}-1)} \mathcal{F}_n^{-1} f \\ \Rightarrow u_n &= K_n(\cdot, t-1) * f, \text{ com } K_n = \mathcal{F}_n^{-1} \left(e^{2L^{2n}t(\cos \frac{k}{L^n}-1)} \right)\end{aligned}$$

Ou seja,

$$K_n(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi L^n}^{\pi L^n} e^{2L^{2n}t(\cos \frac{k}{L^n}-1)} \cos kx \, dk = L^n K(L^n x, L^{2n} t)$$

Assim, dado $f \in \mathcal{B}_n$, definimos $Rf \in \mathcal{B}_{n+1}$ por

$$Rf(x) = Lu_n(Lx, L^2) \equiv L \left(e^{(L^2-1)\Delta_n} \right) (Lx).$$

O que implica

$$\mathcal{F}_{n+1}^{-1} Rf(k) = \mathcal{F}_n^{-1} u_n \left(\frac{k}{L}, L^2 \right) = e^{2L^{2n}(L^2-1)(\cos \frac{k}{L^{n+1}}-1)} \mathcal{F}_n^{-1} f(k/L)$$

$$\text{e se } f \in \mathcal{B}_0, \text{ então } \mathcal{F}_n^{-1} R^n f(k) = e^{2(L^2-1)(\cos \frac{k}{L^n}-1)} (f)^\vee(k/L^n)$$

Podemos então mostrar o análogo da proposição 2.2:

Proposição 4.4 *Seja $g \in \mathcal{B}_n$, com $\mathcal{F}_n^{-1} g_n = 0$, então*

$$\|Rg\|_{n+1} \leq C_R L^{-1} \|g\|_n.$$

Dem.:

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{F}_{n+1}^{-1} Rg(k) \right| &\leq e^{2L^{2n}(L^2-1)(\cos \frac{k}{L^{n+1}}-1)} \frac{|k|}{L} \sup_k \left| \left(\mathcal{F}_n^{-1} g \right)'(k) \right| \\ &\leq e^{2L^{2n}(L^2-1)(\cos \frac{k}{L^{n+1}}-1)} \frac{|k|}{L} \|g\|_n \leq |k| e^{-\delta k^2/3} \frac{\|g\|_n}{L} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \left(\mathcal{F}_{n+1}^{-1} Rg \right)'(k) \right| &\leq e^{2(L^{2n+2}-L^{2n})(\cos \frac{k}{L^{n+1}}-1)} L^{-1} \left| \left(\mathcal{F}_n^{-1} g \right)' \left(\frac{k}{L} \right) \right| \\ &\quad + 2L^{2(n+1)} \frac{1}{L^{n+1}} \left| \text{sen} \frac{k}{L^{n+1}} \right| e^{2L^{2(n+1)}(1-L^{-2})(\cos \frac{k}{L^{n+1}}-1)} \frac{|k|}{L} \|g\|_n \\ &\leq e^{-\delta k^2/3} L^{-1} \|g\|_n + 2k^2 e^{-\delta k^2/3} L^{-1} \|g\|_n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|Rg\|_{n+1} \leq C_R L^{-1} \|g\|_n$$

Com $C_R = \sup_{k \in \mathbb{R}} (1 + |k|^q)(1 + |k| + 2k^2)e^{-\delta k^2/3}$ $\square$

Corolário 4.5 $\|R^n f - \check{f}(0)f_n^*\|_n \rightarrow 0, \forall f \in \mathcal{B}_0, \text{ onde}$

$$f_n^* = \mathcal{F}_n \left(e^{-k^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi L^n}^{\pi L^n} e^{-k^2} \cos kx \, dk, \, n = 1, 2, \dots$$

Dem.: Sejam

$$f_0 = \mathcal{F}e^{-k^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-k^2} \cos kx \, dk$$

e

$$g_n = R^n f - \check{f}(0) R^n f_0 = R^n (f - \check{f}(0) f_0).$$

Mostraremos que $\|g_n\|_n \rightarrow 0$ e $\|R^n f_0 - f_n^*\|_n \rightarrow 0$, o que implica

$$\|R^n f - \check{f}(0) f_n^*\|_n \leq \|g_n\|_n + |\check{f}(0)| \|R^n f_0 - f_n^*\|_n \rightarrow 0.$$

de fato,

$$\|g_n\|_n = \|RR^{n-1}g_0\|_n \leq (C_R/L) \|R^{n-1}g_0\|_{n-1} \leq \dots \leq (C_R/L)^n \|g_0\| \rightarrow 0 \quad \square$$

Proposição 4.6 $\|R^n f_0 - f_n^*\|_n \rightarrow 0$.

Dem.: : Para os cálculos que seguem, necessitaremos das seguintes desigualdades, válidas para $k \in [-\pi, \pi]$:

$$|\operatorname{sen} k| \leq |k|$$

$$-k^2 \leq 2(\cos k - 1) \leq -\frac{1}{3}k^2$$

$$|k - \operatorname{sen} k| \leq \frac{|k|^3}{6}$$

$$0 \leq 2(\cos k - 1) + k^2 \leq \frac{k^4}{24}$$

Todas as desigualdades decorrem da integração de $-k \leq \operatorname{sen} k \leq k$, com exceção da segunda desigualdade na segunda inequação, que decorre de uma análise da função $\frac{2(\cos k - 1)}{k^2}$ em $[-\pi, \pi]$, verificando que seu máximo ocorre nos extremos. Daí:

$$\Rightarrow 2(\cos k - 1) = \frac{2(\cos k - 1)}{k^2} \cdot k^2 \leq \frac{2(\cos \pi - 1)}{\pi^2} \cdot k^2 = -\frac{4}{\pi^2} k^2 \leq -\frac{1}{3} k^2$$

Seja

$$w_n(k) = \mathcal{F}_n^{-1} (R^n f_0 - f_n^*) = e^{2(L^{2n}-1)(\cos \frac{k}{L^n}-1)} f_0 - \mathcal{F}_n^{-1} f_n^* = e^{2(L^{2n}-1)(\cos \frac{k}{L^n}-1)-\frac{k^2}{L^{2n}}} - e^{-k^2}$$

$\forall k \in [-\pi L^n, \pi L^n]$:

$$|w_n(k)| = e^{-k^2} \left| e^{L^{2n} \left(2 \left(\cos \frac{k}{L^n} - 1 \right) + \frac{k^2}{L^{2n}} \right) - \frac{k^2}{L^{2n}} - 2 \left(\cos \frac{k}{L^n} - 1 \right)} - 1 \right| \leq e^{-k^2} \left| e^{\frac{k^4}{24L^{2n}}} - 1 \right|$$

$$= e^{-k^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{k^{2m}}{L^{2nm}} \frac{k^{2m}}{24^{2m}} \leq e^{-k^2} \frac{k^2}{L^{2n}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{\pi k}{24} \right)^{2m} \leq e^{-k^2} \frac{k^2}{L^{2n}} e^{\frac{\pi^2}{24} k^2} \leq \frac{k^2}{L^{2n}} e^{-k^2/2}$$

$$\begin{aligned} |w'_n(k)| &= \left| \left(-2 \frac{L^{2n}-1}{L^n} \operatorname{sen} \frac{k}{L^n} - 2 \frac{k}{L^n} \right) e^{2(L^{2n}-1)(\cos \frac{k}{L^n}-1)-\frac{k^2}{L^{2n}}} + 2k e^{-k^2} \right| \\ &\leq 2 \left| \frac{L^{2n}-1}{L^n} \operatorname{sen} \frac{k}{L^n} - \frac{k}{L^{2n}} \right| |w_n(k)| + \left| k - \frac{k}{L^{2n}} - \frac{L^{2n}-1}{L^n} \operatorname{sen} \frac{k}{L^n} \right| e^{-k^2} \\ &\leq \left(\frac{|k|^3}{3L^{6n}} + 2|k| \right) |w_n(k)| + 2 \frac{L^{2n}-1}{L^n} \frac{|k|^3}{L^{3n}} e^{-k^2} \\ &\leq (1+2|k|) \frac{k^2}{L^{2n}} e^{-k^2/2} + \frac{2|k|^3 e^{-k^2}}{L^{2n}} \leq \frac{C}{L^{2n}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|R^n f_0 - f_n^*\|_n = \sup_{|k| \leq \pi L^n} (1+|k|^q) (|w_n(k)| + |w'_n(k)|) \leq \frac{C'}{L^{2n}}$$

Corolário 4.7 (i) $R^n f \rightarrow f_0^*$ na norma $\|f\|_1 = \sum_{x \in \mathbb{Z}} |f(x)|$ e

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \|L^n u(x, L^n) - \frac{(f)^\vee(0)}{\sqrt{2}} e^{-x^2/4L^{2n}}\|_\infty = 0.$$

Dem.: (i) Notemos que $\|f_n\|_n \rightarrow 0 \Rightarrow \|f_n\|_1 \rightarrow 0$ (capítulo 2), ou seja, $\|R^n f - f_n^*\|_1 \rightarrow 0$ (corolário 4.5). Por outro lado, $\|f_n^* - f_0^*\|_1 \rightarrow 0$ (ver última desigualdade no segundo item).

(ii) $\|\omega^n f_n\|_\infty \rightarrow 0$:

$$|\omega^n f_n(x)| = \left| f_n \left(\frac{x}{L^n} \right) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi L^n}^{\pi L^n} |\mathcal{F}_n^{-1} f_n(k)| dk \leq \frac{\|f_n\|_n}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+|k|^q} dk$$

O que implica que $\|L^n u(\cdot, L^{2n}) - \omega^n f_n^*\|_\infty \rightarrow 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left| f_n^* \left(\frac{x}{L^n} \right) - f_0^* \left(\frac{x}{L^n} \right) \right| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi L^n}^{\pi L^n} e^{-k^2} \cos \frac{kx}{L^n} dk - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2} \cos \frac{kx}{L^n} dk \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{\pi L^n}^{+\infty} e^{-k^2} dk \rightarrow 0 \quad \square \end{aligned}$$

Tratemos agora do caso não-linear:

4.5 Caso Não-Linear na Rede - Existência de Solução.

Analogamente ao caso contínuo, provaremos a existência e assintoticidade da equação

$$\partial_t u = \Delta u + \lambda(x)u^p \quad (4.2)$$

$$u(x, 1) = f(x),$$

com $f \in \mathcal{B}_0$ e $\lambda = \lambda_0 + \mu$, $\mu \in \mathcal{B}_0$.

O espaço que usaremos para provar a existência da solução será o espaço $\mathcal{B}_{L,\mathbb{Z}}$ munido da norma

$$\|u\|_L = \sup_{t \in [1, L^2]} \|u(\cdot, t)\|$$

Teorema 4.1 $\exists \varepsilon = \varepsilon(L, \lambda, p)$, tal que, se $\|f\| \leq \varepsilon$, a equação (4.2) possui uma única solução, definida em $\mathbb{R} \times [1, L^2]$, satisfazendo $\|u - u_f\|_L \leq \|f\|$.

Os lemas análogos aos lemas 3.2 e 3.4 são:

Lema 4.8 $f, g \in \mathcal{B}_0 \Rightarrow fg \in \mathcal{B}_0$, com $\|fg\| \leq 2\|f\|\|g\|$.

Dem.: Para $i = 0, 1$:

$$|(fg)^{(i)}(k)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}^{(i)}(k-y)| |\tilde{g}(y)| dy \leq \|f\| \|g\| \quad \square$$

Lema 4.9 Se $v \in \mathcal{B}_{L,\mathbb{Z}}$, então $\left\| \int_0^{t-1} e^{s\Delta} v(x, s) ds \right\|_L \leq L^4 \|v\|_L$.

Dem.: Seja $N(x) = \int_0^{t-1} e^{s\Delta} v(x, s) ds$.

$$|\tilde{N}(k)| = \left| \int_0^{t-1} e^{s2(\cos k-1)} \tilde{v}(k, s) ds \right| \leq \|v\|_L (1 + |k|^q)^{-1} (L^2 - 1)$$

$$\begin{aligned} |\tilde{N}'(k)| &= \left| \int_0^{t-1} (-2s \sin k) e^{s2(\cos k-1)} \tilde{v}(k, s) ds + \int_0^{t-1} e^{s2(\cos k-1)} \tilde{v}'(k, s) ds \right| \\ &\leq \|v\|_L (1 + |k|^q)^{-1} \int_0^{t-1} 2s |k| e^{-sk^2/3} ds + \|v\|_L (1 + |k|^q)^{-1} \int_0^{t-1} e^{-sk^2/3} ds \\ &\leq \|v\|_L (1 + |k|^q)^{-1} \int_0^{t-1} \sqrt{6} s^{1/2} e^{-1/2} ds + \|v\|_L (1 + |k|^q)^{-1} (L^2 - 1) \\ &\leq (L^2 - 1)^2 (1 + |k|^q)^{-1} \|v\|_L + \|v\|_L (1 + |k|^q)^{-1} (L^2 - 1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|N\|_L \leq (L^2 - 1)\|v\|_L + (L^2 - 1)^2\|v\|_L + \|v\|_L(L^2 - 1) \leq L^4\|v\|_L \quad \square$$

Dem. do Teorema 4.1: Usaremos mais uma vez o Princípio de contração em $B_f = \{u \in \mathcal{B}_L; \|u - u_f\| \leq \|f\|\}$, para provar que $T(u) = u_f + V(u)$ possui um ponto fixo. Então, se $\|\lambda\| = |\lambda_0| + \|\mu\|$:

$$\Rightarrow \|T(u) - u_f\|_L = \|V(u)\|_L = \left\| \int_0^{t-1} e^{s\Delta} (\lambda u^p)(\cdot, t-s) ds \right\|_L \leq L^4 \|\lambda u^p\|_L \leq L^4 2^p \|\lambda\| \|u\|_L^p$$

e, como $\|u\| \leq \|u - u_f\|_L + \|u_f\|_L \leq m\|f\|$, então

$$\|T(u) - u_f\|_L \leq L^4 2^p \|\lambda\| m^p \|f\|^p$$

$$\Rightarrow \|T(u) - u_f\|_L \leq \|f\|, \text{ se } \|f\| \leq C^{*- \frac{1}{p-1}}, \text{ com } C^* = L^4 c^p \|\lambda\| m^p.$$

e, como $p > 3 \Rightarrow 1/(p-1) < 1/2$, é suficiente termos

$$\|f\| \leq \frac{1}{\sqrt{C^*}} := \varepsilon_1(L, \lambda, p).$$

para L suficientemente grande, de modo que $C^* > 1$.

(ii) $T : B_f \rightarrow B_f$ é uma contração, ou seja,

$$\|T(u_1) - T(u_2)\|_L \leq \alpha \|u_1 - u_2\|_L, \text{ para algum } 0 < \alpha < 1 \text{ e } \forall u_1, u_2 \in B_f.$$

Como no caso contínuo:

$$\|u_1^p - u_2^p\|_L \leq p(2m\|f\|)^{p-1} \|u_1 - u_2\|_L$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|T(u_1) - T(u_2)\|_L &= \|V(u_1) - V(u_2)\|_L = \left\| \int_0^{t-1} e^{s\Delta} \lambda (u_1^p - u_2^p)(x, t-s) ds \right\|_L \leq \\ &\leq 2L^4 \|\lambda\| \|u_1^p - u_2^p\|_L \leq L^4 \|\lambda\| p 2^p m^p \|f\|^{p-1} \|u_1 - u_2\|_L = p C^* \|f\|^{p-1}. \end{aligned}$$

Devemos ter, então:

$$\|f\| < p^{\frac{1}{1-p}} C^{* \frac{1}{1-p}}$$

e, como $p^{\frac{1}{1-p}} > 3^{-\frac{1}{2}}$ (função crescente para $p > 3$), basta termos

$$\|f\| \leq \frac{1}{\sqrt{3C^*}} := \varepsilon_2(L, \lambda, p).$$

A existência está garantida para $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon_2 \quad \square$

4.6 Comportamento Assintótico via Grupo de Renormalização.

Teorema 4.2 $\exists \varepsilon > 0$. tal que, para $\|f\| \leq \varepsilon$, a solução de (4.2) satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\sqrt{t}u(\sqrt{t}\cdot, t) - Af_0^*(\cdot)\|_n = 0.$$

Dem.: Como no caso contínuo, devemos mostrar por indução a existência de solução para

$$\partial_t u_n = \Delta u_n + \lambda_n u_n^p$$

$$u_n(x, 1) = R^n f(x) = f_n(x),$$

onde $\lambda_n(x) = L^{(3-p)n} \lambda(L^n x)$. E, se $f_n = Lu_{n-1}(L\cdot, L^2) = A_n f_n^* + g_n$, com $(g_n)^\vee(0) = 0$, então

$$|A_n| \leq \left(2 + C^p \frac{L^{-\delta} - L^{-\delta n}}{1 - L^{-\delta}}\right) \|f\|$$

$$\|g_n\|_n \leq L^{-(1-\delta)n} \|f\|.$$

De fato, temos

$$\begin{aligned} f_n &= R_0 f_{n-1} + L \int_0^{L^2-1} e^{s\Delta} (\lambda_{n-1} u_{n-1}^p)(x, L\cdot) ds \\ &= R_0 f_{n-1} + L v_{n-1}(L\cdot) \\ \Rightarrow A_{n+1} &= (f_{n+1})^\vee(0) = (R_0 f_n)^\vee + (v_n)^\vee(0) = A_n + (v_n)^\vee(0) \\ \Rightarrow |A_{n+1}| &\leq \left(2 + \frac{L^{-1} - L^{-n}}{1 - L^{-1}}\right) \|f\| + \|v_n\|_n \\ \|v_n\|_n &= \left\| \int_0^{L^2-1} e^{\lambda_n u_n^p \Delta} (\lambda u^p)(x, L\cdot) ds \right\|_n \\ &\leq L^4 2^p \|\lambda_n\| \|u_n\|_L^p \\ &\leq L^4 2^p L^{(3-p)n} \|\lambda(L^n \cdot)\| \|u_n\|_L^p \\ &\leq L^4 2^p L^{(2+q-p)n} \|\lambda\| m^p \|f_n\|^p \\ &\leq L^{(q-2)n} C^* \|f_n\|^p \\ \Rightarrow \|v_n\|_n &\leq L^{(q-2)n} C^* C^p \|f\|^p \leq L^{-\delta n} C^p \|f\|, \end{aligned}$$

$$\text{pois } \|f_n\| \leq \left(2\|f_0^*\| + \frac{L^{-1} - L^{-n}}{1 - L^{-1}} \|f_0^*\| + L^{-(1-\delta)n}\right) \|f\| \leq C\|f\|$$

E:

$$\begin{aligned}
g_{n+1} &= f_{n+1} - A_{n+1}f_n^* \\
&= R_0f_n + Lv_n(L\cdot) - A_{n+1}f_0^* \\
&= R_0(f_n - A_nf_0^*) + Lv_n(L\cdot) - (v_n)^\vee(0)f_0^* + A_n(R_0f_n^* - f_{n+1}^*) \\
&= R_0g_n + Lv_n(L\cdot) - (v_n)^\vee(0)f_0^* + A_n(R_0f_n^* - f_{n+1}^*) \\
\Rightarrow \|g_{n+1}\|_{n+1} &\leq C_R L^{-1} L^{-(1-\delta)n} \|f\| + (L^q + \|f_0^*\|) L^{-n} C^* C^p \|f\|^p + C L^{-2n} \|f\| \\
&\leq L^{(1-\delta)(n+1)} \|f\|,
\end{aligned}$$

se

$$\|f\| \leq \left(\frac{L^\delta - C_R - C L^{-2} C^{*-1}}{L(L^q + \|f_0^*\|)} \frac{C^{*-1}}{C^p} \right)^{\frac{1}{p-1}}$$

O que implica $C^p C^{*-1} \|f\|^{p-1} \leq 1$ e $\|v_n\|_n \leq L^{-n} \|f\|$.

Daí:

$$\begin{aligned}
|A_{n+1}| &\leq \left(2 + \frac{L^{-1} - L^{-n}}{1 - L^{-1}} \right) \|f\| + L^{-n} \|f\| \\
&= \left(2 + \frac{L^{-1} - L^{-(n+1)}}{1 - L^{-1}} \right) \|f\|
\end{aligned}$$

e é claro que a equação para $n+1$, com $u_{n+1}(x, 1) = f_{n+1}(x)$ possui uma solução, pois $\|f_{n+1}\|_{n+1} \leq C \|f\| \leq L^{\frac{(p-3)}{p-1}n} \varepsilon$.

Isto conclui a demonstração, pois

$$|A_{n+1} - A_n| \leq \|v_n\|_n \leq L^{(q-2)n} \|f\| \rightarrow 0$$

e

$$\|g_n\|_n \leq L^{-(1-\delta)n} \rightarrow 0$$

O que implica $A_n \rightarrow A$, pela completude de $\mathbb{R}$ e, portanto, $f_n \rightarrow Af_0^*$, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L^n u(L^n \cdot, L^{2n}) - Af_0^*\|_n = 0 \quad \square$$

O que implica, como antes (Corolário 4.7):

Corolário 4.10 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sqrt{t}u(\sqrt{t}\cdot, t) - Af_0^* \right\|_{\infty} = 0 \quad \square$

Bibliografia

- [1] Bricmont, J., Kupiainen, K., Renormalizing Partial Differential Equations, Preprint.
- [2] Bricmont, J., Kupiainen, K., Renormalization Group and Asymptotics of Solutions of Nonlinear Parabolic Equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 47, 893-922 (1994).
- [3] Bricmont, J., Kupiainen, K., Renormalization Group for Diffusion in a Random Medium, *Phys. Rev. Lett.*, 66, 1689-1692 (1991).
- [4] Bricmont, J., Kupiainen, K., Rigorous Renormalization Group and Disordered Systems, *Physica A* 165, 31-37 (1990).
- [5] Chen, L-Y., Goldenfeld, N., Oono, Y., Renormalization group theory for global asymptotics analysis, *Phys. Rev. Lett.* 73, 1311-1315 (1994).
- [6] Goldenfeld, N., Martin, O., Oono, Y., Lin, F., Intermediate asymptotics and renormalization group theory, *J. Sci. Com.* 4, 355-372 (1989).
- [7] Goldenfeld, N., Martin, O., Oono, Y., Lin, F., Anomalous dimensions and the renormalisation group in a nonlinear diffusion process, *Phys. Rev. Lett.*, 64, 1361-1364 (1990).
- [8] Goldenfeld, N., Martin, O., Oono, Y., Asymptotics of partial differential equations and the renormalisation group, to appear in the *Proc. of the NATO ARW on Asymptotics beyond all orders*, edited by S.Tanveer (Plenum Press).
- [9] Goldenfeld, N., *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group*, Addison-Wesley, Reading (1992).
- [10] Glimm, J., Jaffe, A., *Quantum Physics*. Springer-Verlag, 1981.
- [11] Íório, R., Íório, V., *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução*. Projeto Euclides, 1988.

- [12] Reed, M., Simon, B., *Methods of Modern Mathematical Physics*, Academic Press, 1972.