BIFURCAÇÕES HOMOCLÍNICAS
PARA SELAS EM $\mathbb{R}^3$
COM RESSONÂNCIA
NAS DIREÇÕES PRINCIPAIS

Mauro Montezlegre

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU
DE
DOUTOR EM MATEMÁTICA APLICADA

Área de Concentração: Matemática Aplicada
Orientador: Prof. Dr. Jorge Manuel Sotomayor Tello

– São Paulo, julho de 1996 –

BIFURCAÇÕES HOMOCLÍNICAS COM
ESTRADA NÃO PRINCIPAL PARA SELAS EM $\mathbb{R}^3$
COM RESSONÂNCIA NAS DIREÇÕES PRINCIPAIS

Mauro Montealegre

Este exemplar corresponde à redação final
da tese apresentada por Mauro Montealegre
Cardenas, devidamente corrigida e aprovada
pela Comissão Julgadora.

São Paulo, 29 de julho de 1996

Comissão Julgadora

- Prof. Dr. Jorge Manuel Sotomayor Tello - IME-USP
- Profa. Dra. Elvia Mureb Sallum - IME-USP
- Prof. Dr. Marco Antônio Teixeira - IMECC-UNICAMP
- Prof. Dr. Carlos Gutierrez Villadon - IMPA
- Prof. Dr. Ronaldo A. Garcia - UFG

RESUMO

Neste trabalho provamos que o desdobramento de um laço genérico com entrada não principal num ponto de sela em $\mathbb{R}^3$ com única ressonância nas direções principais, produz duplicação de período ou instabilidade de órbitas de período um. Obtemos uma bifurcação de codimensão tres cujo diagrama de bifurcação é apresentado na figura 7a) e 7b). Pequenas perturbações nos dois parâmetros referentes aos invariantes ao longo do laço fazem que a dinâmica fique de tipo “twist” ou não-”twist” como em Sandstede [Sa1, 1993] e os efeitos dinâmicos da ressonância podem ser estudados num anel em torno ao laço como em Roussarie-Rousseau [R.R., 1996]. A prova de nosso resultado é feita usando o método de blow-up para famílias de campos de vetores devido Roussarie [R3, 1995] e Dumortier-Roussarie [D.R., 1994]. Para este fim , primeiro descrevemos o diagrama de bifurcação de codimensão dois correspondente ao laço com entrada não principal numa sela sem ressonâncias . Depois colocamos no mesmo problema uma única condição de ressonância correspondente as direções principais da sela, conseguendo tambem neste caso o diagrama de bifurcação objeto de nosso resultado principal.

ABSTRACT

In this work we show that non principal generic loop at the saddle point in $\mathbb{R}^3$ with only one resonance in principal eigenvalues bifurcates to a in doubling periodic orbit or one-periodic instable orbit. We achieve a codimension three bifurcation. Small perturbations on two global parameters along the loop give rise to twist or non twist dynamic as Sandstede [Sa1, 1993]. And the dynamic effects of resonance are studied inside an annulus around the loop that in Roussarie-Rousseau [R.R., 1996]. The proof uses the blow-up methods for of family vector fields due to Roussarie [R., 1995]and Dumortier-Roussarie [D.R., 1994]. First we describe the codimension two bifurcation diagram for non principal loops without resonance, then the same situation is studied with a resonance on the saddle principal directions. The bifurcation diagram leading to our main result is obtained here.

*À minha família na
Colômbia, pela constante ajuda.*

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, quero expressar meu agradecimento ao Professor Jorge Sotomayor Tello por ter-me colocado a conjectura provada neste tese e por ter-me orientado constantemente no estudo da teoria das bifurcações.

Agradeço aos colegas e professores do Departamento de Matemática Aplicada do IME-USP, com quem compartilhei o trabalho de pesquisa, particularmente à Professora Élvia Mureb Sallum, assim como ao Professor Ronaldo A. Garcia da UFG.

Agradeço à CAPES e à Universidade Surcolombiana, entidades que facilitaram a culminação desta tarefa.

Agradeço à minha família na Colômbia, que sempre ofereceu-me ajuda.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Teorema principal	9
1.2	Definição de parâmetros	10
1.3	Figuras	11
2	Primeiro blow-up: ponto de codimensão dois não ressonante	19
2.1	Método de Blow-Up para famílias de campos de vetores	19
2.2	Conjunto de bifurcação na vizinhança cônica do eixo $O\rho$, $\rho < 0$	21
2.2.1	Reescalamento na direção da família	22
2.2.2	Reescalamento na direção dos retratos de fases	27
2.3	Figuras	35
3	Comportamento do campo X_λ ao redor do eixo $O\alpha$	38
3.1	Segundo blow-up	38
3.2	Caso $\bar{\alpha} = 1$	40
3.3	Caso $\bar{\alpha} = -1$	49
3.4	Caso $\bar{\alpha} = 0$	54
3.5	Direções para futuras pesquisas	55
3.6	Figuras	57
	Bibliografia	60

Capítulo 1

Introdução

Seja X_λ uma família de campos de vetores em $\mathbb{R}^3$ com λ numa vizinhança da origem em $\mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, tal que em $\lambda = 0$ existe um laço Γ numa sela P . O estudo do comportamento dinâmico numa vizinhança de Γ depende ao menos de um parametro λ , isto é corresponde a um fenômeno pelo menos genérico de codimensão 1. Os diversos retratos de fases que podem aparecer perto de Γ ao perturbar λ são analisados via estudo qualitativo dos pontos fixos da aplicação do primeiro retorno de Poincaré P_λ e eles refletem relações geométricas de contato entre as variedades invariantes associadas à singularidade P e relações algébricas entre os valores absolutos das partes reais dos valores próprios do linearizado do sistema em P . Isto caracteriza a “variedade central” associada ao Laço Γ , $W_{hom}^c(\Gamma)$. Ver [Sa1] ou [H1] para um estudo deste conjunto.

Se P é uma sela com dois valores próprios negativos diferentes e um valor próprio real positivo, em [Si2] prova-se que tal sistema pode gerar no máximo uma órbita periódica se não existem outras condições de degenerescência no sistema, além da existência do laço. Neste caso se $-\lambda^{ss}(0)$, $-\lambda^s(0)$ e $\lambda^u(0)$ são os valores próprios do linearizado do sistema em P , e se

$$-\lambda^{ss}(0) < -\lambda^s(0) < 0 < \lambda^u(0)$$

dizemos que os vetores próprios associados aos valores próprios $-\lambda^s(0)$ e $\lambda^u(0)$ corres-

pondem as direções principais. No caso em que

$$\lambda^s(0) \neq \lambda^u(0),$$

dizemos que temos condições de não-ressonância. Nestas hipóteses existem as seguintes variedades invariantes: $W^{s,ss}$ que é a variedade bi-dimensional estável, $W^{u,s}$ que é variedade bidimensional estendida cujo espaço tangente na origem é o espaço gerado pelos vetores próprios correspondentes aos valores próprios $-\lambda^s$ e λ^u e W^{ss} , a variedade unidimensional estável forte. Em [Yan] temos as condições genéricas para a existência de laços de codimensão dois se uma das condições seguintes ocorre:

- i) $\lambda^s(0) = \lambda^u(0)$ como única condição de ressonância. Se um laço Γ satisfaz esta condição de degenerescência o chama-se laço de tipo 1;
- ii) Se a interseção entre as variedades $W^{s,ss}$ e $W^{u,s}$ ao longo de Γ não é transversal mais é interseção do tipo quadrático. Um laço com esta condição chama-se de Laço Γ tipo 2;
- iii) Se a entrada do laço não é pela direção principal estável, isto é, se $\Gamma \cap W^{ss} \neq \emptyset$. Dizemos que satisfaz a condição de Laço Γ tipo 3.

No que segue chamamos X_0 o campo com única singularidade do tipo sela na origem 0 com Laço Γ e escrevemos X_λ para denotar a família de campos de vetores que desdobram $(X_0, 0, \Gamma)$.

Em $\mathbb{R}^2$ já aparecem laços para selas do tipo 1 [A.L.]. Em [So] prova-se que os campos com Laços genéricos formam uma subvariedade da variedade de Banach $\mathcal{X}(M^2)$, onde $\mathcal{X}(M^2)$ são os campos de classe C^r em uma variedade compacta M^2 , e se estuda Laços de tipo “twist”. Também em [R1] se faz um estudo de laços de alta codimensão, segundo que um dos invariantes locais da sela 0:

$$\alpha_1(0), \alpha_2(0), \dots, \alpha_k(0), \dots \quad (1.1)$$

seja não nula, aqui $\alpha_1(0) = \text{traço}(X_0, 0) = \lambda^u(0) - \lambda^s(0)$; ou um dos invariantes ao longo de Γ :

$$\beta_0(0), \beta_1(0), \dots, \beta_e(0), \quad (1.2)$$

seja não nula. Aqui $\beta_1(0)$ é o expoente de Poincaré do Laço Γ . De fato, [R1] prova que: “se X_μ , em $\mu \in R^p$, é uma família de classe C^∞ em $\mathbb{R}^2$, na qual X_0 tem um laço Γ para uma sela O tal que $V_0(x) = P_0(x) - x$ é não C^∞ -flat, então para μ pequeno, X_μ tem quantidade uniforme de ciclos limites perto de Γ . Mais especificamente, se $P_0(x) - x \sim \beta_k(0)x^k$ com $\beta_k \neq 0$, tem no máximo $2k$ ciclos; se $P_\mu(x) - x \sim \alpha_{K+1}x^{K+1} \ln x$ tem no máximo $2k + 1$ ciclos perto de Γ ”.

Definição 1.1 *Não flat significa que numa expansão assintótica*

$$P_0(x) - x = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\beta_i(u)x^i + a_{i+1}x^{i+1} \ln x \right] \quad (1.3)$$

é tal que algum $\beta_i \neq 0$ ou $a_{i+1} \neq 0$.

Na prova do teorema acima em [R1] primeiro se consegue uma forma normal ressonante com o seguinte $(2N + 1)$ -Jato:

$$J^{2N+1}X_\lambda(s_K) \underset{C^\infty}{\sim} x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} + \left[\sum_{i=0}^{K(N)} \alpha_{i+1}(u)(xy)^i \right] y \frac{\partial}{\partial y},$$

onde α_i são funções definidas em $W_i = \{\mu \mid \alpha_1(\mu) \mid \leq \delta_i\}$ para uma sequência decrescente de números reais positivos $(\delta_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Aqui $\alpha_1(\mu) = 1 - \lambda^s(\mu)$ é chamado fator de hiperbolicidade, onde fixamos $\lambda^u(\mu) \equiv 1$.

Da forma normal obtemos o seguinte sistema polinomial de variáveis separadas (x, u) , onde u é o monômio ressonante xy :

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{u} = \sum_{i=1}^N \alpha_i(\mu) u^i \end{cases} \quad (1.4)$$

A solução da componente u , $u(t, u_0)$, tem a seguinte expressão analítica

$$u(t, u_0) = \sum_{i=1}^k g_i(t) u_0^i + \psi_k(t, u_0),$$

ψ_k de classe C^k . Pois $u(t, u_0)$ é analítica em t para u_0 perto de 0, e

$$\begin{aligned} \dot{g}_1 &= \alpha_1 g_1, & g_1(0) &= 1 \\ \dot{g}_2 &= \alpha_1 g_2 + \alpha_2 g_1^2, & g_2(0) &= 0 \\ \dot{g}_3 &= \alpha_1 g_3 + 2\alpha_2 g_1 g_2 + \alpha_3 g_1^3, & g_3(0) &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

onde as g_i dependem da função

$$\Omega(\alpha_1, t) = \begin{cases} \frac{e^{-\alpha_1 t} - 1}{\alpha_1} & \text{se } \alpha_1 \neq 0 \\ t & \text{se } \alpha_1 = 0 \end{cases}, \quad (1.5)$$

pois $g_k(t) = e^{\alpha_1 t} Q_k(t)$ com $Q_k(t) = \alpha_k \Omega + \overline{Q}_k(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \Omega)$ donde $\overline{Q}_k$ tem coeficientes em $\mathcal{P}(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}) \cap \mathcal{P}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \subset \mathbb{Z}[\alpha_1, \dots, \alpha_k]$, $\mathcal{P}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ é o ideal gerado por $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$.

Em [C.H.D.F.] estuda-se dois casos genéricos de laços de tipo 1 de codimensão 2 em $\mathbb{R}^3$: caso não-Twist, obtiveram o diagrama de bifurcação da figura 2b), onde a curva de bifurcação F corresponde a órbitas de período 1 de tipo dobra, a qual satisfaz a condição assintótica seguinte com respeito aos parâmetros genéricos $\mu = (\mu_1, \mu_2)$:

$$\lim_{\mu_1 \searrow 0} F(\mu_1) \cdot \frac{a_0^{\frac{1}{\mu_1}}}{\mu_1} > 0$$

para algum $a_0 = a(0) > 0$. Para o caso “twist”, obtiveram o diagrama de bifurcação da figura 2a).

Em [R.R.] prova-se a existência de um anel $\mathcal{A}(\mu)$ 2-dimensional anel contendo o laço. Geometricamente $\mathcal{A}(\mu)$ é um cilindro ou uma faixa de Möebius e $\mathcal{A}(\mu)$ contém o conjunto ω -limite das trajetórias que começam numa vizinhança do laço. Caso “twist” o anel $\mathcal{A}(\mu)$ é topologicamente uma faixa de Möebius.

A aplicação de Poincaré P_μ e a aplicação deslocamento $V_\mu = P_\mu - Id$ são definidas pelas aplicações R_μ e D_μ definidas a seguir:

Seja Σ_1 é uma seção transversal ao Γ que intercepta a variedade $W^{s,ss}$ perto da sela, e Σ_2 seção transversal a Γ e W^u ; definimos a aplicação regular R_μ como a aplicação de transição de Σ_1 até Σ_2 ao longo da parte regular do laço Γ para o fluxo de $-X_\mu$, R_μ preserva a orientação e tem a expressão seguinte:

$$R_\mu(x, z) = \left(R_1(x), R_2(x, z) \right) = \left(A_0 + \sum_{i+j>0} A_{ij} x^i z^j, B_0 + \sum_{i+j>0} B_{ij} x^i z^j \right) \quad (1.6)$$

com $A_0(0) = 0 = B_0(0)$, e $D = \begin{vmatrix} A_{10} & A_{01} \\ B_{10} & B_{01} \end{vmatrix} \neq 0$, da interseção transversal entre as variedades $W^{ss,s}$ e $W^{\mu,s}$ temos que $B_{01} \neq 0$. Figura 0.

No caso $D/B_{01} > 0$ é o caso não-Twist, e o caso $D/B_{01} < 0$ é o caso Twist.

A função D_μ , que é a transição perto da singularidade, é obtida da forma normal dada pelo seguinte teorema [ILY.YAK.]:

“Se $\lambda^s(O) = \lambda^u(O)$ é a única ressonância de X_0 na sela O , então dado qualquer $N \in \mathbb{N}$ existe um polinômio $g_N(u)$, $u = xy$, tal que

$$X_\mu \stackrel{C^N}{\sim} \text{diagonal } (x, y, z) g_N(u),$$

os coeficientes dependem suavemente de μ , μ numa vizinhança de 0 que depende de N .

Isto é, via a C^N -mudança de coordenadas temos:

$$X_\mu \equiv \begin{cases} \dot{x} = x \left(1 + \sum_{i=1}^k a_i u^i \right) \\ \dot{y} = -\lambda_s y + y \sum_{i=1}^k b_i u^i \\ \dot{z} = -\lambda_{ss} z + z \sum_{i=1}^k c_i u^i \end{cases} \quad (1.7)$$

Então, dividindo o segundo membro do sistema por $1 + \sum_{i=1}^k a_i u^i$ e aplicando de novo o mesmo teorema de [Ily.Yak], obtemos o sistema em coordenados (x, u, z) :

$$X_\mu \equiv \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{u} = \alpha_1 u + \sum_{i=2}^{k+1} \alpha_i u^i \\ \dot{z} = -\lambda_{ss} z + z \sum_{i=1}^k \beta_i u^i \end{cases}, \quad (1.8)$$

onde $\alpha_1 = 1 - \lambda_s$.

Se $D_\mu = (D_\mu^1, D_\mu^2)$ então da forma normal se obtém

$$D_\mu^1(x, z) = x + \sum_{i=1}^k \alpha_i [x^i w + \dots] + \psi_k(x, \alpha) \quad (1.9)$$

onde os termos em $+\dots$ são de $\mathcal{O}(x^i w)$, e $\omega = \Omega(\alpha_1, -\ln x)$; e

$$D_\mu^2(x, z) = z \cdot e^{\lambda_{ss} \ln x \left(1 + \sum_{1 \leq k \leq i} c_{ik} x^i w^k \right)} = z \cdot x^{\lambda_{ss}} (1 + K(x)) \quad (1.10)$$

os coeficientes c_{ik} são polinômios em α_i e K é uma função tal que $K(0) = 0$. Neste trabalho também chamamos à função D_λ a função de Dulac [D].

As componentes da aplicação de Dulac D_μ são funções da classe de Mourtada [Mo].

Definição 1.2 $f \in C^\infty([0, x] \times U_k)$ é da classe de Mourtada se, e somente se, $\varphi_j(x, \mu) = x^j \frac{\partial^j f}{\partial x^j} \in C^0$ em $]0, x] \times U_k$, e $\varphi_j(x, \mu) \rightarrow 0$ se $x \rightarrow 0$ uniformemente em $\mu \in U_k$.

As soluções 1-periódicas, ou seja aquelas que circulam ao longo do laço uma única vez, são os zeros da função

$$V_\mu(x) = \delta_0 + \sum_{\substack{0 \leq i+j \leq k \\ 0 \leq i \leq i}} \delta_{ijl} x^{i+j\lambda^{ss}} w^l + \phi_k(x), \quad (1.11)$$

obtida da seguinte forma: de $D_\mu^2 = z \cdot x^{\lambda^{ss}} \left(1 + \sum_{1 \leq j \leq i} c_{ij} x^j w^j \right) = B_0 + \sum_{i+j \geq 0} B_{ij} x^i w^j = R_2$ resolvemos para z , obtemos:

$$z = \sum_{\substack{1 \leq i+j \leq k \\ 0 \leq i \leq i}} d_{ijl} x^{i+j\lambda^{ss}} w^l + \psi_k(x); \quad (1.12)$$

em particular no caso $\lambda^{ss} < k$, a função z é:

$$z = \sum_{i=1}^{[\lambda^{ss}]} d_i x^i + \mathcal{O}(x^{[\lambda^{ss}]})$$

Então, colocando z em $D_\mu^1 = R_1$, obtém-se $V_\mu(x) = D_\mu^1(x, z(x)) - R_1(x, z(x))$.

Usa-se a seguinte ordem nos monômios: $\{1, x^{i+j}\lambda_{ss}w^l/j \geq 0, 1 \leq i+j \leq k, 0 \leq l \leq i\}$:

$$x^{i+j}\lambda_{ss}w^l < x^{i'+j'}\lambda_{ss} \Leftrightarrow \begin{cases} i+j\lambda^{ss} < i'+j'\lambda^{ss} & , \text{ ou} \\ i+j\lambda^{ss} = i'+j'\lambda^{ss} & \text{ e } l > l', \end{cases} \quad (1.13)$$

para provar que se $k < 2[\lambda^{ss}] + 1$, então para todo $0 \leq i \leq k$ existe uma perturbação de X_0 a qual tem exatamente i soluções periódicas numa vizinhança do Laço (usa-se aqui o método de derivação - divisão, o que generaliza do teorema de Rolle).

Para Laços de tipo 2 os desdobramentos genéricos dependem da posição relativa entre $D_\mu(\Sigma_1) = D_\mu$ e $R_\mu(\Sigma_1) = C_\mu$, e de relações combinatórias dos valores próprios, por exemplo se:

- i) $\lambda^u < \lambda^s < 2\lambda^u$ [K.K.O-1] provam a existência de curvas no espaço de parâmetros que correspondem a órbitas periódicas instáveis e também provam a existência de uma curva que corresponde ao fenômeno de duplicação de período, ver figura 3.
- ii) Outras relações da ordem entre os valores próprios podem produzir “horseshoes”, fenômeno de cascata homoclínica e dinâmica não hiperbólica [N].

Se Γ é um Laço em $\mathbb{R}^3$ numa singularidade não hiperbólica, isto é um dos valores próprios é zero, Γ chama-se de laço do tipo sela-nó. Em [CH.H.SA] estudam-se desdobramentos sem a condição de transversalidade correspondente ao laço de tipo 2 para um ponto de sela e sem condições de ressonância. Os diagramas de bifurcação obtidos para laços sela-nó são análogos aos correspondentes a laços para selas do tipo 2.

Para Laços de tipo 3, [Sa1] provou o seguinte resultado:

Teorema 1.1 *Seja X_λ uma família genérica a dois parâmetros de campos de vetores em $\mathbb{R}^3$ a qual tem um laço de tipo 3 em $\lambda = 0$. Então se tem:*

- (1) Se $1 < \frac{\lambda_s}{\lambda_\mu} = v_1$, a bifurcação de duplicação de período não acontece.
- (2) Se $\frac{1}{2} < \frac{\lambda_s}{\lambda_\mu} < 1$ e $\mu = \frac{\lambda_{ss}}{\lambda_\mu} > 1$, a bifurcação de duplicação de período acontece.

Mais precisamente, existe uma mudança local de parâmetros $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ tais que

em uma curva $\lambda_2 = C_{2H}(\lambda_1)$ para $\lambda_1 \geq 0$ se tem órbitas homoclínicas duplas,

em uma curva $\lambda_2 = C_{DP}(\lambda_1)$ para $\lambda_1 \geq 0$ aparecem órbitas periódicas de período 2,

e na curva $\lambda_2 = C_{SN}(\lambda_1)$ aparecem órbitas periódicas de tipo sela-nó. Ainda mais,

$$\begin{cases} C_{2H}(\lambda_1) \approx \lambda_1^{\frac{1}{1-\nu_1}} \\ K_{DP}(\lambda_1) \approx c\lambda_1^{\frac{1}{1-\nu_1}} \\ K_{SN}(\lambda_1) \approx c'|\lambda_1|^{\frac{1}{1-\nu_1}} \end{cases}, \text{ para algum } 0 < c < 1, \\ \text{ , para algum } 0 < c' < 1.$$

Ver figura 1 para a descrição da aplicação de Poincaré e figura 4 para a descrição do diagrama de bifurcação.

Nesta tese estudamos o desdobramento de um sistema X_0 em $\mathbb{R}^3$ que tem um laço Γ com entrada não principal numa sela com única condição de ressonância entre los valores próprios das direções principais do linearizado perto da origem e descrevemos o conjunto de bifurcação da família de campos de vetores X_λ que genericamente desdobra (X_0, O, Γ) . O fluxo de X_λ será estudado pelo método do BLOW-UP GLOBAL, método devido a F. Dumortier e R. Roussarie, o qual tem sido usado na análise de diversos problemas de bifurcação, ver por exemplo: [D.R], [Du], [D.I.] , entre outros trabalhos. Os fundamentos deste método serão estudados no início do capítulo 2. Ver figura 6.

Se ρ o parâmetro singular que descreve a ressonância e se $\rho \neq 0$, então em nosso problema encontramos nos parâmetros de translação, α e σ , relações de mudança do tipo $\sigma = k\alpha^2$; isto é estudado num primeiro blow-up. Num segundo nível, quando $\rho = 0$, um novo blow-up se estabelece para estudar a relação genérica entre ρ e a separação σ da órbita Γ_μ (Γ_μ é a continuação de Γ no campo X_μ) à variedade bidimensional estável associada à origem. Finalmente, com nosso estudo conhecemos completamente o desdobramento no caso de um laço com entrada não principal e com a ressonância $\lambda^\mu(0) = \lambda^s(0)$.

Nossa contribuição consiste em :

- (1) Fazer uma prova do teorema 1.1 de Sandstede usando o método de “blow-up” Global para famílias de campos de vetores, o qual é feito na seção 2.2;
- (2) Pelo mesmo método provar o teorema principal enunciado a seguir, isto inclui uma prova completa do resultado de [CH.D.F]; a prova aparece no Capítulo 3.

1.1 Teorema principal

Seja X_0 um campo C^∞ em $\mathbb{R}^3$, 0 uma singularidade de tipo sela tal que os valores próprios $-\lambda_{ss}, -\lambda_s, \lambda_u$ de $DX_0(0)$ satisfazem as relações

$$\begin{aligned} H1) \quad & 1) \quad -\lambda_{ss} < -\lambda_s < 0 < \lambda_u \quad \text{e} \\ & 2) \quad \lambda_s = \lambda_u. \end{aligned}$$

Supomos que X_0 possui uma órbita homoclínica Γ para a origem 0 , isto é, Γ corresponde a uma solução $q(t)$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} q(t) = 0,$$

Γ satisfaz a seguinte condição de degenerescência:

$$H2) \quad W_0^{ss}(0) \cap \Gamma \neq \emptyset.$$

Então, sob as condições genéricas

$$\begin{aligned} G1) \quad & W_0^{s,ss}(0) \cap \Gamma \cap W_0^{u,s}(0), \\ G2) \quad & \frac{\lambda_{ss}}{\lambda_s} \notin \mathbb{Q}; \end{aligned}$$

temos que $(X_0, 0, \Gamma)$ se desdobra numa família de campos de vetores X_λ que tem o diagrama de bifurcação descrito na figura 7a), a interseção do mesmo com uma esfera pequena é descrito na figura 7b). Os parâmetros estão definidos na seção 1.2.

1.2 Definição de parâmetros

Seja $x \frac{\partial}{\partial x} - \lambda_s y \frac{\partial}{\partial y} - \lambda_{ss} z \frac{\partial}{\partial z}$ é a parte linear de X_0 em uma vizinhança da origem 0; seja Σ_1 (respectivamente Σ_2) uma seção transversal à órbita homoclínica Γ em $z = 1$ definida para $x \geq 0$ e pequena (respectivamente em $x = 1$ definida para y e z pequenos); seja S_λ o difeomorfismo definido na parte regular de Γ entre Σ_2 e Σ_1 pelo fluxo de X_λ , então definimos os parâmetros $\sigma(\lambda)$ e $\alpha(\lambda)$ como:

$$\begin{cases} \sigma(\lambda) := & \text{separação entre } W^{s,ss} \text{ e } \Gamma_\mu, \\ \alpha(\lambda) := & \text{separação entre } W^{ss} \text{ e a projeção de } \Gamma_\mu \text{ em } W^{s,ss}; \end{cases}$$

onde Γ_μ é a variedade inestável da sela P de X_λ . Em particular temos:

$$(\sigma(\lambda), \alpha(\lambda)) = S_\lambda(0, 0),$$

o que se ilustra na Figura 5. S_λ preserva a orientação e o determinante de S_λ é sempre positivo.

Também temos do primeiro coeficiente da segunda componente do campo de (1.7) que $-\lambda_s = -1 + \alpha_1$, onde $\alpha_1(\lambda)$ é o fator de hiperbolicidade. Nestas condições definimos o parâmetro ρ como

$$\rho := -\alpha_1.$$

1.3 Figuras

Figura 0

Figura 1 : a) Aplicação de Poincaré, $P_\lambda = R_\lambda^{-1} \circ D_\lambda$; b) aplicação de deslocamento $V_{2,\lambda} = R_\lambda^{-1} \circ D_\lambda - D_\lambda^{-1} \circ R_\lambda$

a) Twist

b) Não twist

Figura 2 : Laço Γ de tipo 1, $\lambda^s(0) = \lambda^\mu(0)$.

Figura 3 : Degenerescência de tipo 2 para Γ .

Figura 4 : Degenerescência de tipo 3 para Γ .

Parâmetros de deslocamento: (σ, α)

Figura 5 : Significado dos parâmetros

Figura 7a : Diagrama de bifurcação no caso $B_{01} > 0$.

Figura 7b : Diagrama de bifurcação no caso $B_{01} > 0$.

u

a) Blow-up nos parâmetros

b) Blow-up nas variáveis

Figura 6 : Blow-up global

Capítulo 2

Primeiro blow-up: ponto de codimensão dois não ressonante

Neste capítulo na seção 2.1) estudamos os fundamentos do método de Blow-Up para família de campos de vetores e na seção 2.2) fazemos a prova do desdobramento no caso de não ressonância, no qual usamos o fato de que a parte linear de (1.7),

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -\lambda_s(\lambda) \\ \dot{z} = -\lambda_{ss}z \end{cases} \quad (2.1)$$

é C^k -uniformemente equivalente à família de campos de vetores X_λ que desdobra uma laço de tipo 3, para $k \geq 2$. Ver [Bo].

2.1 Método de Blow-Up para famílias de campos de vetores

Construímos os blow-up global para uma família de campos de vetores X_λ pelo seguinte procedimento:

Seja uma aplicação analítica e sobrejetora $\pi_0 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^3$, $p \geq 3$, definida como $\pi_0(x, y, z, \rho, \sigma, \alpha) = (\rho, \sigma, \alpha)$, π_0 projeção não trivial.

Sejam $\pi_0(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^p) = \Lambda$ e $M_0 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^p$; então procuramos uma dessingularização do sistema $(X_0, 0, \Gamma)$ numa seqüência de campos vetoriais localmente foliados $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{E}_i = (M_i, \pi_i, \Lambda, X^0)$, onde $X^0 = X_{\mu, \mathcal{E}}$ é a família e $d\pi_0(x)[X(x)] = 0$, $\forall x \in M_0$. Para isso

vamos estender a foliação das folhas regulares F_λ (Variedades 3-dimensionais difeomorfas a $\mathbb{R}^3$) para uma única foliação $\mathcal{P}$, exceto para o conjunto singular σ_1 de $\mathcal{P}$. Isto vai-se conseguir num novo campo vetorial localmente foliado $\mathcal{E}_1$,

$$\zeta_1 = (M_1, \pi_1, \wedge, X^1), \quad (2.2)$$

definido por um blow-up ϕ_1 :

$$\begin{cases} \phi_1 = \phi_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\rho}, \bar{\sigma}, \bar{\alpha}, \bar{\Lambda}^c) = (x, y, z, \rho, \sigma, \alpha, \Lambda^c) \in \mathbb{R}^6 \oplus \mathbb{R}^{\Lambda^c} \\ \phi_1 = (\phi_v, \phi_p, Id_{\Lambda^c}) : M_1 \rightarrow M_0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Obtemos: $\pi_1 = \pi_0 \circ \phi_1$, $d\pi_1(m)[X^1(m)] = 0$ e $T_1 = S^5 \times [0, R_0]$. $\phi_1 : T \rightarrow \mathbb{R}^6$ é tal que $\phi_1(\bar{X}, \bar{\lambda}) = (rX, r\bar{\lambda})$.

O espaço M_1 é igual à identificação: $M_1 = (T_1 \times M_0 \setminus \{0\}) / m \sim \phi_1(m)$; X^1 é definido como X^0 em M^0 é como igual ao dessingularizado por ϕ_1 em T_1 ; $\bar{X}_1$ é definido por $(\phi_1) * (r \cdot \bar{X}_1) = X^0$. Definimos o locus crítico de ϕ_1 o qual notamos Σ_1 , como $\Sigma_1 = S^5 \times \{0\}$; $\hat{F}_0 = \phi_0^{-1}(0)$ é a folha singular. Então a fronteira comum σ_1 , é $\sigma_1 = \pi_1^{-1}(0) = \Sigma_1 \cap \hat{F}_0 = \{(\bar{X}, \bar{\lambda}, r) \in T_1 / \bar{\lambda} = r = 0\}$ é uma 2-esfera em T_1 . Temos que σ_1 representa o conjunto singular da foliação $\mathcal{P}$ correspondente à fibração π_1 .

Sejam S^n a esfera n-dimensional no espaço das variáveis ou no espaço de parâmetros, V vizinhança da origem nos parâmetros e $\bar{A}$ vizinhança aberta limitada de $W_{\text{hom}}^c(\Gamma)$; então colocamos em Σ_1 um sistema de cartas: $(S^2 \times V, \bar{\varphi}_1)$ e $(\bar{A} \times S^2, \bar{\varphi}_2)$ onde, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in S^3$ e V é uma vizinhança aberta de $\mathbb{R}^p$, $\varphi_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\phi}, \bar{\sigma}, \bar{\alpha}) = k(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\phi}, \bar{\sigma}, \bar{\alpha})$ com $k = (1 + \bar{\rho}^2 + \bar{\sigma}^2 + \bar{\alpha}^2)^{-1/2}$, analogamente $\bar{\varphi}_2$.

Na carta $(S^2 \times V, \bar{\varphi})$ estudamos o assim chamado por [D.R.] “reescalamento na direção do retrato de fases”, e em $(\bar{A} \times S^2, \bar{\varphi})$ o “reescalamento na direção da família”. As transições $\bar{\varphi}_1 \circ \bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_2 \circ \bar{\varphi}_1$ definidas em $(\bar{A} \times S^2) \cap (S^2 \times V)$ serão usadas para estudar as conseqüências dos comportamentos quando o diâmetro de $\bar{A}$ se aproxima de zero e os parâmetros se aproximam da origem, ou o estudo das dinâmicas que aparecem nas proximidades das folhas singulares da fibração π_1 .

Como os domínios das cartas estão contidos em $\mathbb{R}^3 \times S^2$, podemos fazer uso de novos reescalamentos direcionais em S^2 . Ver figura 10.

2.2 Conjunto de bifurcação na vizinhança cônica do eixo $O\rho$, $\rho < 0$

Sejam as fórmulas seguintes:

$$\phi_0 \equiv \begin{cases} x = r\bar{x} \\ y = r\bar{y} \\ z = r\bar{z} \\ \sigma = r^2\bar{\sigma} \\ \alpha = r\bar{\alpha}, \end{cases} \quad (2.4)$$

que definem o blow-up definido como $\phi_0 : S^4 \times]0, R_0[\rightarrow \mathbb{R}^6 : (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\sigma}, \bar{\alpha}) \rightarrow (x, y, z, \sigma, \alpha)$ com $R_0 > 0$. Escrevemos $\phi_0 = (\phi_v, \phi_p)$, onde ϕ_v é o blow-up das variáveis e ϕ_p o blow-up dos parâmetros. Provaremos a seguir o desdobramento no caso $\lambda_s < 1$ e correspondente à entrada não principal do laço Γ , produz o conjunto de bifurcação indicado no ponto B do diagrama de bifurcação das figuras 7a e 7b. Também estudamos o caso $\lambda_s > 1$ que resulta ser mais simples.

Teorema 2.1 *Nas condições do teorema principal, exceto na hipótese H1) na parte 2 onde fazemos $\lambda_s < 1$ e dada uma vizinhança compacta $\bar{A}$ de $W_{\text{hom}}^c(\Gamma)$, então existem um valor $R(K) > 0$ e uma vizinhança aberta V da origem para $\lambda = (\bar{\sigma}, \bar{\alpha})$ tal que em $\bar{C}(K) = [0, R(K)] \times V \subseteq \mathbb{R}^3$, e em coordenadas $(r, (\bar{\sigma}, \bar{\alpha}))$, o conjunto de bifurcação de $\bar{X}_{r, (\bar{\sigma}, \bar{\alpha})}|_{\bar{A}}$ pode ser descrito da seguinte forma, salvo difeomorfismos em $\bar{C}(K)$ que sejam a identidade em $r = 0$,*

i) *Bifurcações de codimensão 1:*

$S_K =]0, R(K)[\times (F \setminus \{B\})$ *corresponde a uma superfície F de órbitas periódicas de tipo dobra em $\mathbb{R}^3$;*

$S_{H_{NT}} =]0, R(K)[\times (H_{NT} \setminus \{B\})$ *corresponde a uma superfície H_{NT} de órbitas 1-homoclínicas de tipo não-twist em $\mathbb{R}^3$;*

$S_{HT} =]0, R(K)[\times (H_T \setminus \{B\})$ corresponde a uma superfície H_T de órbitas homoclínicas de tipo twist em $\mathbb{R}^3$;

$S_{DP}^a =]0, R(K)[\times (DP^a \setminus \{B\})$ corresponde a uma família contínua de superfícies DP de órbitas periódicas H de período duplo, com parâmetro a , $a \in (0, 1)$;

$S_{2H} =]0, R(K)[\times (2H \setminus \{B\})$ corresponde a uma superfície de órbitas homoclínicas de período 2, 2-homoclínicas.

ii) Bifurcações de codimensão 2:

$]0, R(K)[\times \{B\}$ é uma curva de órbitas homoclínicas de tipo 3 em $\mathbb{R}^3$.

Fora deste conjunto de bifurcação o tipo topológico de $\overline{X}_{r,(\overline{\sigma},\overline{\alpha})}|_{\overline{A}}$ é constante.

A prova é feita nas seções 2.2.1 e 2.2.2. Ver figura 8, onde T é o período da órbita, e figura 9a, onde $\rho = \lambda_s - 1$.

2.2.1 Reescalonamento na direção da família

Considerando X_λ como família com $\lambda = (\overline{\sigma}, \overline{\alpha})$ tal que $|\lambda| = 1$. Primeiro estabelecemos a aplicação regular R_λ ao longo do laço Γ para o fluxo do campo $-X_\lambda$, definida pelas seguintes fórmulas:

$$R_\lambda(x, y) = \begin{cases} y_1 = A_0(\lambda) + A_{10}(\lambda)x + A_{01}(\lambda)y + O(\|(x, y)\|), \\ z_1 = B_0(\lambda) + B_{10}(\lambda)x + B_{01}(\lambda)y + O(\|(x, y)\|), \end{cases} \quad (2.5)$$

onde $A_0(0) = B_0(0) = 0$; $B_{01}(0) > 0$ pela condição genérica G1).

Procuramos definir a função $V_{1,\lambda}$ cujos zeros correspondem às órbitas periódicas de período um, $V_{1,\lambda} : \tilde{\Sigma}_1 \subset \Sigma_1 \rightarrow R_\lambda(\Sigma_1)$, pelos valores da aplicação $P_\lambda - Id : R_\lambda(\Sigma_1) \rightarrow R_\lambda(\Sigma_1)$. Onde P_λ é a aplicação de Poincaré $P_\lambda = D_\lambda \circ R_\lambda^{-1}$, e onde D_λ corresponde à transição perto da singularidade $S(\lambda)$ obtida do fluxo (2.4):

$$D_\lambda(x, y) = (y_1, z_1) = (yx^{\lambda_s}, x^{\lambda_{ss}}), \quad (2.6)$$

igualamos as segundas componentes de R_λ e D_λ respectivamente,

$$x^{\lambda_{ss}} = \alpha + B_{10}(\lambda)x + B_{01}(\lambda)y + O(\|(x, y)\|) \quad (2.7)$$

e da condição genérica G1) temos que $B_{01} \neq 0$. (2.7) é equivalente à expressão seguinte:

$$x^{\lambda_{ss}} = y - \alpha, \quad (2.8)$$

jogamos esta identidade em $x^{\lambda_s}y = x - \sigma$ e obtemos a expressão

$$x^{\lambda_s}(\alpha + x^{\lambda_{ss}}) = x - \sigma. \quad (2.9)$$

De (2.9) obtemos a equação das órbitas de período 1, $V_{1,\lambda}$, seguinte:

$$V_{1,\lambda}(x) = x^{\lambda_s + \lambda_{ss}} - \alpha x^{\lambda_s} + x - \sigma. \quad (2.10)$$

As derivadas de (2.10) são:

$$\begin{cases} V_{1,\lambda}^{(1)}(x) = (\lambda_s + \lambda_{ss})x^{\lambda_s + \lambda_{ss} - 1} - \lambda_s \alpha x^{\lambda_s - 1} + 1 \\ V_{1,\lambda}^{(2)}(x) = (\lambda_s + \lambda_{ss})(\lambda_s + \lambda_{ss} - 1)x^{\lambda_s + \lambda_{ss} - 2} - \lambda_s \alpha (\lambda_s - 1)x^{\lambda_s - 2} \end{cases} \quad \text{e} \quad (2.11)$$

De (2.11) temos que $V_{1,\lambda}'(0) = 1 \neq 0$ e também de $V'(x) = 0$ temos:

$$[1 + (\lambda_s + \lambda_{ss})x^{\lambda_s(\lambda_{ss}-1)}]x^{1-\lambda_s} = \alpha \lambda_s, \quad (2.12)$$

da expressão (2.12) obtemos:

$$V_{1,\lambda}^{(1)}(x) = x^{1-\lambda_s} + (\lambda_s + \lambda_{ss})x^{\lambda_{ss}} - \alpha \lambda_s. \quad (2.13)$$

A derivada de (2.13) é então

$$V_{1,\lambda}^{(2)}(x) = (1 - \lambda_s)x^{-\lambda_s} + \lambda_{ss}(\lambda_s + \lambda_{ss})x^{\lambda_{ss}-1}; \quad (2.14)$$

então $V_{1,\lambda}^{(2)}(x) \rightarrow -\infty$ quando $\lambda_s < 1$ e $V_{1,\lambda}^{(2)}(x) \neq 0$ o que implica que $V_{1,\lambda}$ tem duas raízes no máximo no caso $\lambda_s < 1$.

Agora eliminamos x no sistema

$$\begin{cases} V_{1,\lambda}(x) = 0 \\ V_{1,\lambda}^{(1)}(x) = 0 \end{cases}, \quad (2.15)$$

(2.15) equivale ao seguinte sistema

$$\begin{cases} x^{\lambda_s}(x^{\lambda_{ss}} + \alpha) = x - \sigma \\ x^{1-\lambda_s} + (\lambda_s + \lambda_{ss})x^{\lambda_{ss}} = \alpha\lambda_s; \end{cases} \quad (2.16)$$

de (2.16) obtemos que:

$$\alpha = \frac{x^{1-\lambda_s}}{\lambda_s} + \left(\frac{\lambda_s + \lambda_{ss}}{\lambda_s} \right) x^{\lambda_{ss}}. \quad (2.17)$$

Colocamos na primeira equação de (2.16) e obtemos:

$$\sigma = x^{\lambda_s} \left(\frac{x^{1-\lambda_s}}{\lambda_s} + \frac{(2\lambda_s + \lambda_{ss})}{\lambda_s} x^{\lambda_{ss}} \right) - x, \quad (2.18)$$

ou seja,

$$\sigma = \frac{1}{\lambda_s} x - \frac{(2\lambda_s + \lambda_{ss})}{\lambda_s} x^{\lambda_s + \lambda_{ss}} - x. \quad (2.19)$$

Observamos que (2.19) equivale a ter a seguinte expressão para σ :

$$\sigma = \left(1 + \frac{1}{\lambda_s} \right) x + \frac{(2\lambda_s + \lambda_{ss})}{\lambda_s} x^{\lambda_s + \lambda_{ss}}, \quad (2.20)$$

de (2.17) e (2.20) obtemos a seguinte relação:

$$\alpha \approx \frac{1}{\lambda_{ss}} \left(\frac{\sigma}{-1 + 1/\lambda_s} \right)^{1-\lambda_s}. \quad (2.21)$$

A seguir, obtemos uma expressão para o segundo retorno $V_{2,\lambda}$:

$$\begin{cases} R_\lambda(x, y, 1) = (1, x - \sigma, y - \alpha) \\ R_\lambda^{-1}(1, y, z) = (y + \sigma, z + \alpha, 1) \\ D_\lambda(x, y, 1) = (1, x^{\lambda_s}y, x^{\lambda_{ss}}) \\ D_\lambda^{-1}(1, y, z) = (z^{1/\lambda_{ss}}, yz^{-\lambda_s/\lambda_{ss}}, 1), \end{cases} \quad (2.22)$$

então,

$$\begin{cases} R_\lambda^{-1} \circ D_\lambda(x, y, 1) = (x^{\lambda_s}y + \sigma, x^{\lambda_{ss}} + \alpha) = (x, y) \\ D_\lambda^{-1} \circ R_\lambda(x, y, 1) = ((y - \alpha)^{1/\lambda_{ss}}, (x - \sigma)(y - \alpha)^{-\lambda_s/\lambda_{ss}}) = (x, y); \end{cases} \quad (2.23)$$

de (2.23) obtemos:

$$\begin{cases} x^{\lambda_s} y + \sigma = (y - \alpha)^{1/\lambda_{ss}}, \\ x^{\lambda_{ss}} + \alpha = (x - \sigma)(y - \alpha)^{-\lambda_s/\lambda_{ss}} \end{cases} \quad (2.24)$$

Em (2.24) fazemos as seguintes simplificações:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^{\lambda_{ss}} + \alpha}{x - \sigma} \right)^{-\frac{\lambda_{ss}}{\lambda_s}} &= y - \alpha, \\ x^{\lambda_s} \left[\alpha + \left(\frac{x^{\lambda_{ss}} + \alpha}{x - \sigma} \right)^{-\lambda_{ss}/\lambda_s} \right] + \sigma &= \left[\frac{x^{\lambda_{ss}} + \alpha}{x - \sigma} \right]^{-1/\lambda_s}, \\ x^{\lambda_s} \left[\alpha + \left(\frac{x - \sigma}{x^{\lambda_{ss}} + \alpha} \right)^{\frac{\lambda_{ss}}{\lambda_s}} \right] + \sigma &= \left(\frac{x - \sigma}{x^{\lambda_{ss}} + \alpha} \right)^{1/\lambda_s}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

finalmente de (2.25) obtemos a expressão:

$$x^{\lambda_s}(x - \sigma)^{\lambda_{ss}/\lambda_s} + (x^{\lambda_{ss}} + \alpha)^{\lambda_{ss}/\lambda_s}(\sigma + \alpha x^{\lambda_s}) = (x - \sigma)^{1/\lambda_s}(x^{\lambda_{ss}} + \alpha)^{\frac{\lambda_{ss}-1}{\lambda_s}},$$

ou seja,

$$V_{2,\lambda}(x) = x^{\lambda_s}(x - \sigma)^{\frac{\lambda_{ss}}{\lambda_s}} + (x^{\lambda_{ss}} + \alpha)^{\lambda_{ss}/\lambda_s}(\sigma + \alpha x^{\lambda_s}) - (x - \sigma)^{1/\lambda_s}(x^{\lambda_{ss}} + \alpha)^{\frac{\lambda_{ss}-1}{\lambda_s}}. \quad (2.26)$$

A seguir obtemos uma expressão implícita de $y(x)$ em $V_{2,\lambda}$ pelo método de aproximações sucessivas. Para isto fazemos:

$$\begin{cases} m = \lambda_{ss}, \quad l = \lambda_s, \quad y_0 = 0 \quad \text{e} \\ (x^l y_{n-1} + \sigma)^m = y_n - \alpha; \end{cases} \quad (2.27)$$

então $y_1 = \alpha + \sigma^{\lambda_{ss}}$, ou seja, a primeira aproximação é linear.

A segunda aproximação é:

$$y_2 - \alpha = [x^l(\alpha + \sigma^m) + \sigma]^m. \quad (2.28)$$

Colocamos (2.27) na segunda equação de (2.24) e obtemos

$$x^m + \alpha = (x - \sigma)[x^l(\alpha + \sigma^m) + \sigma]^{-l}, \quad (2.29)$$

e disto

$$x - \sigma = (x^m + \alpha)[x^l(\alpha + \sigma^m) + \sigma]^l. \quad (2.30)$$

Derivamos (2.29) com respeito a x e obtemos

$$1 = mx^{m-1}[x^l(\alpha + \sigma^m) + \sigma]^l + x^m[l(x^l(\alpha + \sigma^m) + \sigma)^{l-1}(lx^{l-1}(\alpha + \sigma^m))] \quad (2.31)$$

em (2.30) fazemos $\sigma^m \approx 0$;

Podemos escrever (2.30) da seguinte forma:

$$mx^m[x^l(\alpha + \sigma^m) + \sigma] + l^2[\alpha + \sigma^m]x^{m-l-1} + \alpha l^2(\alpha + \sigma^m)^{l-1}x^{l-1} = [x^l(\sigma + \alpha) + \sigma]^{l-1} \quad (2.32)$$

Dividimos (2.31) por x^{l-1} , derivamos novamente e obtemos

$$\begin{aligned} & m(m-l)x^{m-l-1}[x^l(\alpha + \sigma^m) + \sigma]x^{m-l}(x + \sigma^m)x^{l-1} + ml^2(\alpha + \sigma^2)x^{l-1} \\ & = (1-l)x^l[(\alpha + \sigma^2) + \alpha]^{-l}x^{1-l}l(\alpha + \sigma^m) + [x^l(\sigma^m + \alpha) + \sigma](1-l)x^{-l} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Continuando com este processo obtemos uma seqüência $y_n(x)$ que resolve implicitamente a equação $V_{2,\lambda}$ primeiro no caso $\sigma \neq 0$. Também no caso $\sigma = 0$, onde o processo iterativo inicia com as identidades

$$\begin{cases} x^l y = y^{1/m} \\ x^m + \alpha = x(y - \alpha)^{-l/m}, \end{cases} \quad (2.34)$$

de (2.33) obtemos

$$V_{2,\lambda}(x) = (x - \sigma)^{1/\lambda_{ss}}(x^{\lambda_{ss}} + \alpha)^{\frac{\lambda_{ss}+1}{\lambda_s}} \quad (2.35)$$

derivamos (2.34) e conseguimos isolar α da seguinte forma:

$$\alpha + x^{m/l}(x^m + \alpha)^{-m/l} = x^{\frac{1}{l}-1}(x^m + \alpha)^{1/l}. \quad (2.36)$$

Derivamos novamente e conseguimos em $x = 0$:

$$\left(\frac{1-l}{l}\right)\alpha^{\frac{m+l+1}{l}} \neq 0 \quad \text{no caso } \alpha \neq 0. \quad (2.37)$$

Em (2.36), no caso $l < 1$ diz-se que $y(x)$ pode ter no máximo duas soluções periódicas.

No processo desenvolvido nesta seção supusemos que a seqüência: $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\dots$, $y_k(x)$, $\dots$ converge uniformemente e então existe a função implícita $y(x)$.

Não podemos tirar informação completa se $\lambda = (\sigma, \alpha)$ é considerado no S^1 , por isto precisamos do estudo do desdobramento no reescalonamento na direção dos retratos de fases.

2.2.2 Reescalonamento na direção dos retratos de fases

De (2.1) temos que o campo desingularizado pelo blow-up ϕ_0 é o campo $\overline{X}_{(\overline{\sigma}, \overline{\alpha})}$ seguinte:

$$\overline{X}_{(\overline{\sigma}, \overline{\alpha})} = \begin{cases} \dot{r}\overline{x} + r\dot{\overline{x}} = r\overline{x} \\ \dot{r}\overline{y} + r\dot{\overline{y}} = -\lambda_s r\overline{y} \\ \dot{r}\overline{z} + r\dot{\overline{z}} = -\lambda_{ss} r\overline{z} \\ \frac{\dot{\overline{\sigma}}}{2\overline{\sigma}} = \frac{\dot{\overline{\alpha}}}{\overline{\alpha}} = -\frac{\dot{r}}{r} \end{cases} \quad (2.38)$$

onde $(\overline{\sigma}, \overline{\alpha})$ pertence a uma vizinhança aberta de $(0,0)$ no espaço dos parâmetros.

Para o campo (2.38) a órbita $\hat{\gamma}$ de $\overline{X}_0$ corresponde ao laço Γ está no conjunto $\{\sigma = 0\}$; em termos de blow-up, $\hat{\gamma}$ está em $\{r^2\overline{\sigma} = 0\}$.

Sejam Σ_1 e Σ_2 seções transversais a $\hat{\gamma}$ colocadas para $\overline{\sigma}_0 \neq 0$ pequeno em $r = 0$; e Σ'_1 e Σ'_2 seções transversais a $\hat{\gamma}$ colocadas para $r_0 \neq 0$ pequeno em $\overline{\sigma} = 0$; usamos estas seções transversais para descrever a aplicação de Poincaré $P_{r,\overline{\lambda}}$ e estudar seu comportamento quando $r \rightarrow 0$. Ver figura 10.

A expressão da transição singular D_λ é obtida da forma normal (2.7) no reescalonamento tem a seguinte forma:

$$\begin{cases} r\dot{\overline{x}} = r\overline{x} \\ r\dot{\overline{y}} = -\lambda_s r\overline{y} + r\overline{y} \left(\sum_{i=1}^k d_i r^2 \overline{x}\overline{y} \right) \\ r\dot{\overline{z}} = -\lambda_{ss} r\overline{z} + r\overline{z} \left(\sum_{i=1}^k e_i r^2 \overline{y} \right) \end{cases} \quad (2.39)$$

O campo (2.39) no caso $r = 0$ é então

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}} = \overline{x} \\ \dot{\overline{y}} = -\lambda_s \overline{y} \\ \dot{\overline{z}} = -\lambda_{ss} \overline{z} \end{cases} \quad (2.40)$$

Do qual obtemos a expressão para D_λ em coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$, $D_\lambda(\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{x}^{\lambda_s} \overline{y}, \overline{x}^{\lambda_{ss}})$, onde $\overline{x}^{\lambda_{ss}}$ é de ordem $\overline{x}^{\lambda_s}$, isto é, $D_\lambda(\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{x}^{\lambda_s} \overline{y}, O(\overline{x}^{\lambda_s}))$.

De outro lado, como $\overline{X}_{(\overline{\sigma}, \overline{\alpha})}$ dado em (2.38) é definido em $S^2 \times V \times [0, R_0[$, onde

$$S^2 = \{(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \in \mathbb{R}^3 \mid \overline{x}^2 + \overline{y}^2 + \overline{z}^2 = 1\}$$

e V é uma vizinhança da origem $(0,0)$ de $(\overline{\sigma}, \overline{\alpha})$, o campo $\overline{X}_{(\overline{\sigma}, \overline{\alpha})}$ pode ser colocado em $S^2 \times \mathbb{R}^2$, então estudamos seu desdobramento em cartas direcionais $\overline{z} = 1$ (ou $\overline{y} = 1$, $\overline{x} = 1$); isto é, em cada carta o campo desingularizado fica planar nas variáveis. Mas, dadas as hipóteses do teorema 2.1, na direção $\overline{z} = 1$ temos a melhor informação do deslocamento

Desdobramento na direção $\overline{z} = 1$

Proposição 2.1 *Nas condições do teorema (2.1) as órbitas periódicas de período um são os zeros de uma função $V(\overline{x}, r, \overline{\alpha}, \overline{\sigma}) = V_{1,r,\overline{\lambda}}(\overline{x})$, onde*

$$V_{1,r,\overline{\lambda}}(x) = \overline{x}^{\lambda_s}(-1 + \overline{x}^{\lambda_{ss}}) + \overline{\sigma} - \overline{x} + O(r^2) .$$

Prova: De (2.8) e de ϕ_0 temos que pelo teorema da função implícita

$$\overline{y}_{\overline{\lambda}}(\overline{x}) = \overline{y}(\overline{x}, r, \overline{\alpha}, \overline{\sigma}), \quad (2.41)$$

e pelo procedimento a seguir conseguimos a expressão de $V_{1,\overline{\lambda}}(\overline{x})$.

A expressão de $\overline{X}_{(\overline{\alpha}, \overline{\sigma})}^z$ na carta $\overline{z} = 1$ é dada pelo seguinte campo:

$$\overline{X}_{(\overline{\alpha}, \overline{\sigma})}^z \equiv \begin{cases} \dot{\theta} = -(1 + \lambda_s)\frac{1}{2}\sin 2\theta \\ \dot{r} = -\lambda_{ss}r \\ \dot{\overline{\sigma}} = 2\lambda_{ss}\overline{\sigma} \end{cases} \quad (2.42)$$

onde temos colocado $\overline{x} = \sin\theta$ e $\overline{y} = \cos\theta = 1 - \theta$, em $\overline{X}_{(\overline{\alpha}, \overline{\sigma})}^z$ temos duas novas singularidades em $r \neq 0$, uma atratora e uma repulsora, e a transição T perto da primeira destas singularidades para o campo $-\overline{X}_{(-\alpha, \overline{\sigma})}^z$ é

$$T(\theta) = \Omega = \theta \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{1+\lambda_s}{\lambda_{ss}}} . \quad (2.43)$$

A transição na parte regular $\overline{R}_{(\overline{\alpha}, \overline{\sigma})}$ perto de $\hat{\gamma}$ entre Σ'_1 e Σ'_2 para o fluxo de $-\overline{X}_{(-\alpha, \overline{\sigma})}^z$ se construiu da seguinte forma:

Em $\overline{R}_{(\overline{\alpha}, \overline{\sigma})}$ fazemos $\overline{x} = \sin \theta$ e $\overline{y} = \cos \theta$, para θ pequeno aproximamos $\sin \theta$ por θ , e temos

$$R_{(\overline{\alpha}, \overline{\sigma})} = (-r^2 \overline{\sigma} + r\theta + O(r^2), -r\overline{\alpha} + r(1 - \theta) + O(r^2)) = (R\Omega, R), \quad (2.44)$$

obtemos a seguinte expressão para Ω :

$$\Omega = \frac{-r^2 \overline{\sigma} + r\theta + O(r^2)}{R}, \quad \text{onde} \quad (2.45)$$

$$R = -r\overline{\alpha} + r(1 - \theta) + O(r^2). \quad (2.46)$$

Devido à quarta componente do campo dado em (2.38) que $r\alpha_0 = R\alpha = C$, com C constante não nula, temos que $R \neq 0$; por isto substituímos (2.45) em (2.44) para obter:

$$\Omega = \frac{-r^2 \overline{\sigma} + r\theta + O(r^2)}{-r\overline{\alpha} + r(1 - \theta) + O(r^2)}. \quad (2.47)$$

Caso $r > 0$ e $\overline{\alpha} < 0$, onde podemos assumir $\overline{\alpha} = -1$, em (2.47) obtemos:

$$\Omega = \frac{-r\overline{\sigma} + r\theta + O(r^2)}{r + r(1 - \theta) + O(r^2)}, \quad (2.48)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{-r\overline{\sigma} + \theta + O(r^2)}{2 - \theta + O(r^2)} \\ \Omega &= (-r\overline{\sigma} + \theta + O(r^2)) \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\theta}{2} + O(\theta) \right), \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\overline{R}_{(\overline{\alpha}, \overline{\sigma})}(\theta) = \Omega \cong -r\overline{\sigma} + \theta + O(r^2). \quad (2.50)$$

Fazendo a composta de (2.43) com (2.50), obtemos que

$$R_{\overline{\alpha}, \overline{\sigma}}(\theta, r) = (T^{-1} \circ \overline{R}_{\overline{\alpha}, \overline{\sigma}} \circ T)(\theta, r)$$

podemos assumir T igual à identidade, pois $r \approx r_0$ e $0 < \frac{1+\lambda_s}{\lambda_{ss}} < 2$, e então $R_{(\overline{\alpha}, \overline{\sigma})}$ tem a seguinte expressão:

$$R_{(\overline{\alpha}, \overline{\sigma})}(\theta, r) = -\overline{\sigma} + \theta + O(r^2). \quad (2.51)$$

De outro lado, nas variáveis $(\bar{x}, \bar{y})$ de (2.40), $r \neq 0$ obtemos que

$$D_{(\bar{\alpha}, \bar{\sigma})}(\theta) = \theta^{\lambda_s}(\alpha + \theta^{\lambda_{ss}}). \quad (2.52)$$

A expressão para obter as órbitas de período 1 neste desdobramento $V_{1,\lambda}$ é a seguinte:

$$V_{1,\bar{\lambda}}(\theta) = D_{(\bar{\alpha}, \bar{\sigma})}(\theta) - R_{(\bar{\alpha}, \bar{\sigma})}(\theta) = \theta^{\lambda_s}(-1 - \theta^{\lambda_{ss}}) + \bar{\sigma} - \theta + O(r^2). \quad (2.53)$$

Seja

$$\xi_\lambda(\theta) = \theta^{\lambda_s}(-1 + \theta^{\lambda_{ss}}) - \theta + O(r^2).$$

As derivadas são

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1,\lambda}(\theta) &= \frac{\partial V_{1,\lambda}}{\partial \theta} = -\lambda_s \theta^{\lambda_s-1} + (\lambda_s + \lambda_{ss}) \theta^{\lambda_s+\lambda_{ss}-1} - 1 + O(r) \\ \ddot{V}_{1,\lambda}(\theta) &= -(\lambda_s - 1) \lambda_s \theta^{\lambda_s-2} + (\lambda_s + \lambda_{ss})(\lambda_s + \lambda_{ss} - 1) \theta^{\lambda_s+\lambda_{ss}-2}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Então se $\bar{\sigma} > 0$, $\alpha < 0$ e $\lambda_s < 1$, temos que $\dot{\xi}_\lambda$ é crescente e existe um valor de bifurcação $\theta_{\bar{\sigma}}$ para a equação $-\sigma = \xi_\lambda(\theta_{\bar{\sigma}})$ que define uma curva $-a_0 = \Gamma(\bar{\sigma}, -1)$ no espaço de parâmetros.

No caso $\bar{\alpha} = 0$ vale (2.46) e de (2.52) obtemos de forma análoga que não existe nenhuma solução para $V_{1,\lambda}$.

Caso $\bar{\alpha} = 1$, como não se pode usar (2.47), fazemos $\bar{y} = \sin \theta$ e $\bar{x} = \cos \theta$, temos que se Σ'_1 e Σ'_2 seções transversais a $\hat{\gamma}$ em $r = r_0$ parametrizadas por θ , então a transição regular $\bar{R}_{\bar{\sigma}}$ para o campo $-\bar{X}_{\bar{\sigma}}$ ao longo de $\hat{\gamma}$ é dada pelo seguinte sistema:

$$\bar{R}_{(\bar{\alpha}, \bar{\sigma})} \equiv \begin{cases} R(1 - \Omega) = -r^2 \bar{\sigma} + r(1 - \theta) + O(r^2)O(\theta^2), \\ R = -r\bar{\alpha} + r\theta + O(r^2)O(\theta^2). \end{cases} \quad (2.55)$$

E da quarta componente de (2.38) $r\alpha_0 = R\alpha = \text{constante}$, então temos:

$$\begin{aligned} 1 - \Omega &= \frac{-r^2 \bar{\sigma} + r(1 - \theta) + O(r^2)O(\theta^2)}{-r + r\theta + O(r^2)O(\theta)} = \frac{-r\bar{\sigma} + 1 - \theta + O(r)}{-1 + \theta + O(r)} \\ &= (r\bar{\sigma} - 1 + \theta)(1 + \theta) + O(r^2)O(\theta^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (r\bar{\sigma} - 1 + \theta + r\theta\bar{\sigma} - \theta + \theta^2) + O(r^2), \\
\Omega &= 2 - r\bar{\sigma}\theta - r\bar{\sigma} + O(r^2)O(\theta^2),
\end{aligned}$$

$$R_{(\alpha,\sigma)}(\theta) = 2 - r\bar{\sigma}\theta - r\bar{\sigma} + O(r^2)O(\theta^2),$$

o que implica

$$V_{1,\bar{\sigma}}(\theta) = \theta^{\lambda_s}(\alpha + \theta^{\lambda_{ss}}) - (2 - r\bar{\sigma}) - \bar{\sigma}\cdot\theta + O(r^2). \quad (2.56)$$

Em $V_{1,\bar{\sigma}}$ fazemos

$$\begin{aligned}
a_0 &= -2 + r\bar{\sigma} \\
\xi_{\bar{\sigma}}(\theta) &= \alpha\theta^{\lambda_s}(\alpha + \theta^{\lambda_{ss}} + o(\theta)) + \bar{\sigma}\theta;
\end{aligned}$$

a primeira derivada de ξ_{λ} com respeito a θ é:

$$\dot{\xi}_{\lambda}(\theta) = \alpha\lambda_s\theta^{\lambda_s-1}(1 + O(1)) + \bar{\sigma} + O(\theta), \quad (2.57)$$

e então para cada $\bar{\sigma} < 0$ não podemos concluir que existe um único θ tal que $\xi_{\sigma}(\theta) = -a_0$.

Estudamos agora órbitas de período 2. Como temos uma aplicação do primeiro retorno unidimensional, usamos um procedimento análogo ao de [J.M.].

Proposição 2.2 *As soluções periódicas de período dois são dadas pelos zeros de uma função $V_2(\bar{y}_1(\bar{y}_{\lambda}(\bar{y}))) = V_{2,\bar{\lambda}}(\bar{y})$ onde $\bar{y}_{\bar{\lambda}}(\bar{y})$ vem da proposição 2.1,*

$$V_{2,r,\bar{\lambda}}(\bar{y}) = 2 + 2(1 - \theta)^{-\lambda_s}\theta - 2\bar{\sigma} - (2 - (\bar{\sigma}\theta + \bar{\sigma}) + O(\sigma^2))^{\frac{1}{\lambda_{ss}}}.$$

Prova Da proposição 2.1 pelo teorema da função implícita obtemos $\bar{y}_1$ como $\bar{y}_{\bar{\lambda}}(\bar{x})$. A expressão de $V_{2,\bar{\lambda}}(\bar{x})$ se obtém pelo procedimento decrito a seguir.

A transição regular $\bar{R}_{\bar{\sigma}}^{-1}$ para o campo $\bar{X}_{\bar{\sigma}}$ ao longo do $\hat{\gamma}$ é:

$$\bar{R}_{\bar{\sigma}}^{-1} \equiv \begin{cases} r(1 - \theta) = R^2\bar{\sigma} + R(1 - \Omega) + O(R^2)O(\Omega^2), \\ r\theta = R\bar{\alpha} + R + O(R^2), \end{cases}$$

então

$$\overline{R}_{\overline{\sigma}}^{-1}(\Omega) = 2 + 2\Omega - 2R\overline{\sigma} + O(R^2)O(\Omega^2), \quad (2.58)$$

pois

$$\frac{\theta}{1-\theta} = \theta(1 + O(\theta)) = \frac{2}{1-\Omega + R\overline{\sigma}} \quad \text{e} \quad |\Omega - R\overline{\sigma}| < 1.$$

O campo $\overline{X}_{\overline{\sigma}}^z$ é suavemente uniformemente equivalente ao seguinte campo:

$$\overline{X}_{\overline{\sigma}}^z \equiv \begin{cases} \dot{\theta} = -\frac{1}{2}(1 + \lambda_s)\text{sen}2\theta, \\ \dot{r} = -\lambda_{ss}r, \\ \dot{\overline{\sigma}} = 2\lambda_{ss}\overline{\sigma}; \end{cases} \quad (2.59)$$

Onde temos colocado $\overline{x} = \cos \theta$ e $\overline{y} = \text{sen} \theta$, isto implica que aparecem duas singularidades de tipo sela em $\{r^2\overline{\sigma} = 0\}$ nos pontos $A = (0, 0, 0)$ $B = (\pi/2, 0, 0)$, a primeira é repulsora na direção de θ e a segunda atratora nessa mesma direção.

Sejam Σ_1 e Σ_2 seções transversais em $\overline{\sigma} = 0$ ao nível de $\overline{\sigma} = \overline{\sigma}_0$ parametrizados por $(\theta, r^2\overline{\sigma})$ é tal que a transição pela sela original $S(\overline{\sigma}, 1)$ de (2.40) se $\overline{x} = \cos \theta$ e $\overline{y} = \text{sen} \theta$, tem-se $D_{\overline{\sigma}}(\theta) = (1 - \theta)^{\lambda_{ss}}\theta$. Então $R_{\overline{\sigma}}$ na parte regular de $\hat{\gamma}$ pelo fluxo $-\overline{X}_{\overline{\sigma}}$ é a seguinte:

$$\begin{aligned} R_{\overline{\sigma}}(\theta) &= (T^{-1} \circ \overline{R}_{\overline{\sigma}} \circ T)(\theta) = (T^{-1} \circ \overline{R}_{\overline{\sigma}}) \left(\theta \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{1+\lambda_{ss}}{\lambda_s}} \right), \\ R_{\overline{\sigma}}(\theta) &= 2 - (\overline{\sigma}\theta + \overline{\sigma}) \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{1+\lambda_{ss}}{\lambda_s}} + O(\theta^2) \\ &= 2 - r(\overline{\sigma}\theta + \overline{\sigma}) + O(\sigma^2)O(\theta^2); \end{aligned} \quad (2.60)$$

onde temos assumido que T é a identidade, e por isto de (2.58) temos

$$R_{\overline{\sigma}}^{-1}(\Omega) = (T^{-1} \circ \overline{R}_{\overline{\sigma}}^{-1} \circ T)(\theta) = 2 + 2\Omega - 2R\overline{\sigma} + O(\sigma^2)O(\theta^2). \quad (2.61)$$

De (2.22), (2.60) e (2.61), obtemos a equação $V_{2,\overline{\sigma}}$ das órbitas periódicas de período 2 é a seguinte:

$$V_{2,\overline{\sigma}}(\theta) = (R_{\overline{\sigma}}^{-1} \circ D_{\overline{\sigma}} - D_{\overline{\sigma}}^{-1} \circ R_{\overline{\sigma}})(\theta) : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1,$$

$$V_{2,\overline{\sigma}}(\theta) = (R_{\overline{\sigma}}^{-1} \circ D_{\overline{\sigma}})(\theta) - (D_{\overline{\sigma}}^{-1} \circ R_{\overline{\sigma}})(\theta)$$

$$\begin{aligned}
&= R_{\bar{\sigma}}^{-1}((1-\theta)^{\lambda_s}\theta) - D_{\bar{\sigma}}^{-1}\left(2 - r(\bar{\sigma}\theta + \bar{\sigma}) + O(\sigma^2)O(\theta^2)\right) \\
&= 2 + 2(1-\theta)^{\lambda_s}\theta - 2\bar{\sigma} - \left(2 - (\bar{\sigma}\theta + \bar{\sigma}) + O(\sigma^2)\right)^{\frac{1}{\lambda_{ss}}}.
\end{aligned}$$

Fazemos

$$\begin{aligned}
a_0 &= 2(1 - r\bar{\sigma}), \\
\xi_{2,\bar{\sigma}}(\theta) &= 2(1 - \theta)^{\lambda_s}\theta - (2 - (\bar{\sigma}\theta + \bar{\sigma}) + O(\sigma^2))^{\frac{1}{\lambda_{ss}}} + O(\theta^2),
\end{aligned} \tag{2.62}$$

e chamamos $\tilde{\sigma}$ como

$$\tilde{\sigma} = 2 - r\bar{\sigma}.$$

Agora estudamos os zeros de $V_{2,\bar{\sigma}}$ pela equação $-a_0 = \xi_{2,\bar{\sigma}}$.

A derivada de $\xi_{2,\bar{\sigma}}$ com respeito a θ é igual a:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_{2,\bar{\sigma}}(\theta) &= -\lambda_s(1-\theta)^{\lambda_s-1}\theta + (1-\theta)^{\lambda_s} - \left(\frac{1}{\lambda_{ss}}\right)(-\bar{\sigma})((2 - \bar{\sigma}(\theta + 1) \\
&\quad + O(\sigma^2))^{\frac{1}{\lambda_{ss}}-1} + O(\theta^2),
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Caso $\bar{\sigma} < 0$ e $\lambda_s < 1$, $\xi_{2,\bar{\sigma}}(\theta)$ é decrescente quando $\theta \rightarrow 0$ e $\bar{\sigma} \rightarrow 0$, $\sigma \in [\tilde{\sigma}_0, 2[$, isto é o sistema tem um contínuo de órbitas de período 2.

Se $\bar{\sigma} = 0$, $V_{2,\tilde{\sigma}}(0) = 0$ corresponde a uma órbita 2-homoclínica

Então o estudo das curvas que aparecem no espaço de bifurcação as quais interceptam o círculo $\sigma^2 + \alpha^2 = \varepsilon^2$, ε pequeno, é completado ao considerar o desdobramento encontrado no reescalonamento na direção da família com o desdobramento encontrado no reescalonamento na direção dos retratos de fases e o Teorema 2.1 fica provado (Figura 9a).

Nas variáveis (x, y, z) temos:

Corolário 2.1 *Sejam X_λ o desdobramento de $(X, 0, \Gamma)$ nas condições do teorema 2.1.*

$A_{R_0} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in W_{\text{hom}}^c(r), x = r\bar{x}, y = r\bar{y}, z = r\bar{z} \text{ com } \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = 1 \text{ e } 0 \leq r < R_0\}$ e $V_{\tilde{\sigma}_0} = \{(\sigma, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma = r^2\bar{\sigma}, \alpha = r\bar{\alpha} \text{ em } |\bar{\alpha}| = 1 \text{ e } \bar{\sigma} \in [-\bar{\sigma}_0, \bar{\sigma}_0]\}$

vizinhanças de $W_{\text{hom}}^c(r)$ e $\lambda = (\sigma, \alpha)$ respectivamente. Então para cada $\sigma_0 > 0$ existem $R_0 > 0$ e uma aplicação $\psi : S^2 \times V_{\sigma_0} \rightarrow A_{R_0}$ contínua tais que se $E_\lambda = \psi_\lambda(S^2)$ a dinâmica de $X_\lambda|_{E_\lambda}$ é como no teorema 2.1.

Nas outras direções não se acrescenta nenhuma informação ao desdobramento.

2.3 Figuras

Figura 8: Desdobramento de codimensão dois sem ressonancia, caso $\lambda_s < 1$

a) diagrama de bifurcação em uma vizinhança cônica de $O\rho$, $\rho < 0$.

b) Comportamento de X_λ ao redor do eixo $O\alpha$.

Figura 9: Curvas de codimensão dois

Figura 10: Conjunto dos ciclos limites.

Capítulo 3

Comportamento do campo X_λ ao redor do eixo O_α

Neste capítulo provamos o teorema principal, isto é, estudamos o desdobramento genérico de $(X, 0, \Gamma)$ perto de $(\sigma, \rho, \alpha) = (0, 0, 0)$. Em particular no diagrama de bifurcação das figuras 7a) e 7b) encontramos as superfícies que se interceptam nos pontos A e C , respectivamente.

3.1 Segundo blow-up

Sejam B tal que ∂B seja vizinhança de $W_{\text{hom}}^c(\Gamma) \times \{0\}$ em $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^p$, $p \geq 3$; seja a fórmula do blow-up ϕ_1 :

$$\phi_1 := \left\{ \phi_V := \begin{cases} x = r\bar{x} \\ y = r\bar{y} \\ z = r\bar{z} \end{cases}, \quad \phi_p := \begin{cases} \lambda_s = 1 + rv \cos \varphi, \\ \rho = rv\bar{\rho} \cos \varphi, \\ \sigma = r^2 v^2 \sin \varphi, \\ \alpha = r\bar{\alpha} \end{cases}; \right. \quad (3.1)$$

$\bar{\alpha} \in \mathbb{R}$, $\varphi \in S^1$ e $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 + v^2 = 1$; ϕ_1 define a seguinte aplicação:

$$\phi_1 : S^3 \times]0, R[\times S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^6, \quad \phi_1((\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, v), r, \varphi, \bar{\alpha}) \mapsto (x, y, z, \lambda_s, \sigma, \alpha), \quad (3.2)$$

para algum $R > 0$ pequeno.

ϕ_1 é obtida como $(\phi_{V_0}^* \psi, \phi_p^* \psi)((\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), (\bar{\rho}, \bar{\sigma}, \bar{\alpha})) = (\phi_V^*(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, V), \phi_p^*(\bar{\lambda}, \bar{\alpha}))$ para alguns $\bar{\lambda}_0 = (\bar{\rho}, \bar{\sigma}, \bar{\alpha})$ em $S^1 \times \mathbb{R}$ e aplicações $\phi^* = (\phi_V^*, \phi_p^*)$ e ψ .

A relação entre os parâmetros ρ e σ que é usada neste desdobramento é mostrada na figura 11.

Identificamos $X_\lambda = X$ como um campo definido em $\mathbb{R}^{3+p}$, $p \geq 3$; da forma normal (2.1), temos que $X_\lambda(0) = 0$ e disto podemos definir um campo $\widehat{X}$ em $S^3 \times]0, R[\times S^1 \times \mathbb{R}$ tal que $\phi_{1*}(\widehat{X}) = X$, ou seja, $D\phi_1(\widehat{X}(q)) = X(\phi_1(q))$; o desingularizado pelo blow-up ϕ_1 é então o campo $\overline{X} = \frac{\widehat{X}}{r}$; o locus crítico é $S^3 \times S^1 \times \{0\} \times \mathbb{R}$.

Fazemos

$$\partial B \cong (\overline{A} \times \partial V) \cup (\partial \overline{A} \times V), \quad (3.3)$$

onde $\overline{A}$ é uma vizinhança limitada de $W_{\text{hom}}^c(\Gamma)$ e V é uma vizinhança aberta de $\overline{\rho} = \overline{\sigma} = \overline{\alpha} = 0$. Então, para $(\varphi, \overline{\alpha}) \in S^1 \times \mathbb{R}$ fixo, $\overline{X}$ induz o campo 4-dimensional $\overline{X}_{(\varphi, \overline{\alpha})}$ definido em ∂V da seguinte forma:

$$\overline{X}_{(\varphi, \overline{\alpha})} := \begin{cases} \dot{\overline{x}}r + \overline{x}.\dot{r} = r\overline{x} + O(r^2), \\ \dot{\overline{y}}r + \overline{y}.\dot{r} = -r\overline{y}(1 + v \cos \varphi) + O(r^2), \\ \dot{\overline{z}}r + \overline{z}.\dot{r} = -r\overline{z}\lambda_{ss} + O(r^2), \\ \dot{r}v\overline{\rho} + r\dot{v}\overline{\rho} = 0, \\ 2r\dot{r}v^2\overline{\sigma} + 2r^2v\dot{v}\overline{\sigma} = 0, \\ \dot{r}\overline{\alpha} + r\dot{\overline{\alpha}} = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

O campo $\overline{X}_{(\varphi, \overline{\alpha})}$ vem da forma normal ressonante (1.16).

Observamos que o conjunto $\{v = 0\}$ é invariante pelo fluxo de $\overline{X}_{(\varphi, \overline{\alpha})}$ e também as folhas $\{rv = C\}$, com C constante, obtidas da fibração $\pi(x, y, z, \lambda_s, \sigma, \alpha) = (\lambda_s, \sigma, \alpha)$ são invariantes pelo fluxo do campo $\overline{X}_{(\varphi, \overline{\alpha})}$. No caso $r.v \neq 0$, $rv = C$ é uma variedade 3-dimensional regular; e no caso $r = 0$ temos a prolongação natural de $((1 + rv\overline{\rho}, r^2v^2\overline{\sigma}, r\overline{\alpha}) = \text{constante}$, de fato, se trata do blow-up do ponto no infinito. Na folha singular $\{rv = 0, r\overline{\alpha} = 0\}$, poderemos descrever o conjunto dos ciclos limites $\widehat{\gamma}$, pela condição $\overline{\sigma} = 0$, e então o estudo da dinâmica é feito pelas folhas regulares próximas F_λ , quando $rv \rightarrow 0$. A transição é como na figura 10 colocando v no lugar de $\overline{\sigma}$. Assim, teremos um conhecimento completo do desdobramento X_λ de $(X_0, 0, \Gamma)$ numa vizinhança $\overline{A} \times [0, R]$, independente de $\lambda = (\lambda_s, \sigma, \alpha)$, com λ próximo de $(1, 0, 0)$ no espaço de parâmetros; equivalentemente

(ρ, σ, α) próximo de $(0, 0, 0)$. Neste capítulo fazemos $\bar{\lambda}_0 = (\bar{\rho}, \bar{\sigma}, \bar{\alpha})$ e $u = r.v = C =$ constante pela quarta componente do campo (3.4).

3.2 Caso $\bar{\alpha} = 1$

Teorema 3.1 *Nas hipóteses do teorema principal, se $\rho \leq 0$, $\sigma < 0$ e $\alpha > 0$ temos o desdobramento no ponto C dos diagramas de bifurcação das figuras 7a e 7b.*

A prova do teorema 3.1 é feita como consequência das seguintes proposições. Ver figura 9b e figura 12.

Proposição 3.1 *Se $\bar{\alpha} = 1$ corresponde ao caso twist e seja uma vizinhança fixa $\bar{A}$ de $W_{\text{hom}}^c(\Gamma)$. Então existe $R_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que se $0 \leq r \leq R_0$, $\bar{\alpha} > 0$, $\bar{\rho} \leq 0$ e $\bar{\sigma} \leq 0$ o conjunto não errante de $X_{\bar{\lambda}_0, r}|_{\bar{A}}$ é formado por órbitas 1-homoclínicas, caso $\bar{\sigma} = 0$; ou órbitas periódicas de período 1, caso $\bar{\sigma} < 0$.*

Proposição 3.2 *No semiplano $\bar{\sigma} \leq 0$ existem um subconjunto compacto $\bar{V}_1$ difeomorfo a um disco que tem ordem de contacto 1 com o eixo $O\bar{\alpha}$ em $(0, 0)$ tal que em $\partial\bar{A} \times \bar{V}_1 \times]0, R[$, o campo $\bar{X}_{(\varphi, \bar{\alpha})}$ tem uma região contínua aberta de superfícies correspondentes a órbitas periódicas de período 2 limitada numa de suas fronteiras por uma superfície de órbitas 2-homoclínicas.*

Como uma consequência desta proposição temos a seguinte proposição:

Proposição 3.3 *Para cada (φ, α) em $S^1 \times \mathbb{R}$ existem $v_0 > 0$ e $R > 0$ tais que toda solução de $\bar{X}_{(\varphi, \bar{\alpha})}$ com condições iniciais em $W_{v_0} = \partial\bar{A} \times \bar{V}_1 \times]0, R[$ abandonam W_{v_0} em tempo finito.*

Prova da proposição 3.3: $v_0 > 0$ e $R > 0$ são os da proposição 3.2, onde foi estudado o comportamento de $\bar{X}_{(\varphi, \bar{\alpha})}$ em W_{v_0} , e da proposição 3.1, temos que toda solução de $\bar{X}_{(\varphi, \bar{\alpha})}$

em W_{V_0} intercepta $\partial\bar{A} \times \partial V_1 \times]0, R[$, e como consequência o fluxo de $\bar{X}_{(\varphi, \bar{\alpha})}$ se estende à carta definida por $\bar{A}$ em (3.3).

O diagrama da bifurcação para X_λ com λ ao redor do eixo $O\alpha$ fica completamente esclarecido no caso $\alpha > 0$. $\square$

A prova da seguinte proposição é uma adaptação em nossas coordenadas da proposição 5.1 de [R.R, 1996].

Prova da proposição 3.1: Seja

$$\omega(\bar{x}) = \begin{cases} \frac{\bar{x}^\rho - 1}{-\rho} & , \text{ se } \rho \neq 0, \\ -\ln \bar{x} & , \text{ se } \rho = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Da forma normal (1.7) temos, segundo a expressão das aplicações (1.9) e (1.10), D_λ e (1.6) temos R_λ . A equação das órbitas de período 1, $V_{1,\lambda}$ é dada por

$$V_{1,\lambda}(x) = \bar{\sigma} - \bar{\rho}\bar{x}\omega - \beta_1\bar{x} + O(\bar{x}); \quad (3.6)$$

então sua derivada com respeito a $\bar{x}$ é dada por:

$$\dot{V}_{1,\lambda} = \bar{x}^{\bar{\rho}}(\bar{\rho} + 1) - 1 - \beta_1. \quad (3.7)$$

Temos que $\dot{V}_{1,\lambda}(\bar{x}) \rightarrow +\infty$ quando $\bar{x} \rightarrow 0$ se $\bar{\rho} < 0$. $V_{1,\lambda}(0) = 0$ corresponde à órbita 1-homoclínica. Então existe uma única solução de (3.5) no caso $\bar{\rho} < 0$ e $\bar{\sigma} < 0$.

Prova da proposição 3.2: A órbita $\hat{\gamma}$ na folha $\{rv = 0\}$ é a união de dois extratos: $\hat{F}_0 = \{v = 0\}$ topologicamente equivalente a $S^2 \times \mathbb{R}^+$ e corresponde ao blow-up da fibra $\{\lambda_s, \sigma\}$, e $D_{\varphi, \bar{\alpha}} = \{r = 0\}$ corresponde ao blow-up no locus crítico Σ_1 , onde $\Sigma_1 = S^3 \times \{0\}$.

Seja $\bar{\alpha} > 0$ e seja $\bar{V}_1 = \{(\bar{\rho}, \bar{\sigma})/\bar{\sigma} = v^2\bar{\sigma}, \bar{\rho} = v\bar{\rho} \text{ com } v \in [0, v_0] \text{ e } \bar{\rho}^2 + \bar{\sigma}^2 = 1, \bar{\sigma} < 0\}$, então para cada $\bar{\lambda}_0 \in \bar{V}_1$ definimos $\bar{D}_{\bar{\lambda}_0} = \{(\bar{x}, \bar{\lambda}_0)/\bar{\lambda}_0 \in \bar{V}_1\}$.

Perto de $\overline{D}_{\lambda_0}$ o campo desingularizado $\overline{X}_{\lambda_0}$ por ϕ_1 tem a seguinte forma:

$$\overline{X}_{\lambda_0} \equiv \begin{cases} \dot{r}\overline{x} + r\dot{\overline{x}} = r\overline{x} \\ \dot{r}\overline{y} + r\dot{\overline{y}} = -(1 + rv\overline{\rho})r\overline{y} \\ \dot{r}\overline{z} + r\dot{\overline{z}} = -\lambda_{ss}r\overline{z} \\ \dot{r}v + r\dot{v} = 0 \\ \dot{\overline{\alpha}}r + r\dot{\overline{\alpha}} = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Na direção $\overline{z} = 1$ temos então campo $\overline{X}_{(\varphi, \overline{\alpha})}^z$:

$$\overline{X}_{(\varphi, \overline{\alpha})}^z = \begin{cases} \dot{\overline{x}} = \overline{x}(1 + \lambda_{ss}) + O(r), \\ \dot{\overline{y}} = -\overline{y}(1 + rv \cos \varphi - \lambda_{ss}) + O(r^2), \\ \dot{r} = -\lambda_{ss}r + O(r^2), \\ \dot{r}v + r\dot{v} = 0, \\ 2r\dot{r}v^2 + 2r^2v\dot{v} = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Então a conclusão da proposição 3.2 segue da prova da seguinte proposição:

Proposição 3.4 *As órbitas periódicas de período um (respectivamente, as órbitas periódicas de período 2) são dadas pelos zeros de uma aplicação*

$$V_{1,(\overline{\rho}, \overline{\sigma}, \overline{\alpha})}(\overline{x}, r, v) = V_{1,\overline{\lambda}}(\overline{x}), \quad (3.10)$$

onde $V_{1,\overline{\lambda}}(\overline{x})$ é dada em (3.36),

$$\begin{aligned} V_{1,\overline{\lambda}_0}(\theta) &= D_{\overline{\lambda}_0}(\theta) - R_{\overline{\lambda}_0}(\theta) \\ &= \theta - u\overline{\rho}[\theta\omega + \dots] + \tilde{\alpha}_2u[\theta^2\omega^2 + \dots] + \tilde{\alpha}_3u[\theta^2\omega + \dots] + \dots \\ &\quad + \psi_k + rv^2\overline{\sigma} - \theta - rv^2\frac{\theta}{2}\overline{\sigma} + r\frac{\theta^2}{2} + \theta(r^2), \text{ para } k \geq 3; \end{aligned}$$

respectivamente, $V_{2,(\overline{\rho}, \overline{\sigma}, \overline{\alpha})}(\overline{y}, r, v) = V_{2,\overline{\lambda}}(\overline{y})$, onde $V_{2,\overline{\lambda}}(\overline{y})$ é dada em (3.27),

$$\begin{aligned} V_{2,\overline{\lambda}_0}(\theta) &= (2 - v^2\overline{\sigma}) + 2\theta - 2u\overline{\rho}[\theta\omega + \dots] + \psi_k + O(u^2) - 2 - v^2\overline{\sigma} + \theta v^2\overline{\sigma} \\ &\quad - \frac{u\overline{\rho}}{(1 + u\overline{\rho})} \left[(2 - v^2\overline{\sigma} + \theta v^2\overline{\sigma}) \left(\frac{\{(2 + v^2\overline{\sigma}(1 - \theta))\}^{\frac{-u\overline{\rho}}{1+u\overline{\rho}}} - 1}{u\overline{\rho}/(1 + u\overline{\rho}) +} \right) \dots \right] + \tilde{\psi}_k \\ &= -2v^2\overline{\sigma} - 2u\overline{\rho}[\theta\omega + \dots] + 2\theta + \psi_3 - \frac{u\overline{\rho}}{(1 + u\overline{\rho})} \\ &\quad \left[(2 - v^2\overline{\sigma}(1 - \theta)) \left\{ \frac{(2 - v^2\overline{\sigma}(1 - \theta))^{\frac{-u\overline{\rho}}{1+u\overline{\rho}}} - 1}{u\overline{\rho}/(1 + u\overline{\rho})} \right\} + \dots \right] + \tilde{\psi}_k. \end{aligned}$$

Prova: É como nas proposições 2.1 e 2.2 do capítulo II.

A construção das aplicações de retorno podemos assumir que dependem de unicamente de $\bar{x}$ no caso $\alpha < 0$ (respectivamente, de $\bar{y}$ no caso $\alpha > 0$)

Podemos fazer $\bar{x} = \cos \theta$ e $\bar{y} = \sin \theta$, dado que estamos usando coordenadas cilíndricas com $z = r$ e $(\bar{x}, \bar{y}) \in S^1$, onde consideramos que θ é suficientemente pequeno, então $\sin \theta = \theta(1 + O(\theta))$; temos que $\bar{X}_{(\varphi, \bar{\alpha})}^z$ é o seguinte sistema:

$$\bar{X}_{(\varphi, \bar{\alpha})}^z = \begin{cases} \dot{\theta} = -\frac{1}{2}(1 + rv \cos \varphi) \sin 2\theta + O(r^2)O(v^2), \\ \dot{r} = -\lambda_{ss}r + O(r^2), \\ \dot{v} = \lambda_{ss}v + O(r)O(v^2), \\ \dot{\bar{\alpha}} = \lambda_{ss}\bar{\alpha}, \\ \bar{\rho}^2 + \bar{\sigma}^2 = 1 \quad \text{e} \quad \varphi \in S^1 \text{ fixo.} \end{cases} \quad (3.11)$$

$\bar{X}_{(\varphi, \bar{\alpha})}^z$ tem duas singularidades hiperbólicas, $P_1 = (0, 0, 0)$ e $P_2 = (\pi/2, 0, 0)$; P_2 atratora e P_1 repulsora. Podemos linearizar perto destas singularidades $(0, 0, 0)$ ou $(\pi/2, 0, 0)$ fazendo a mudança de variáveis tal que θ corresponda às separatrizes na direção tangencial, nos dois casos, e obtemos o sistema C^1 -uniformemente equivalente seguinte:

$$\bar{X}_{L(\varphi, \bar{\alpha})}^z = \begin{cases} \dot{\theta} = -(1 + rv \cos \varphi)\theta + O(r^2)O(v^2)O(\theta^2), \\ \dot{r} = -\lambda_{ss}r, \\ \dot{v} = \lambda_{ss}v, \\ \dot{\bar{\alpha}} = \lambda_{ss}\bar{\alpha}, \\ \bar{\rho}^2 + \bar{\sigma}^2 = 1 \quad \text{e} \quad \varphi \in S^1 \text{ fixo.} \end{cases} \quad (3.12)$$

Da definição do blow-up ϕ_1 observamos que $(\bar{x}, \bar{y}, r, v, t) \rightarrow (-\bar{x}, -\bar{y}, -r, -v, -t)$, logo a carta $\bar{z} = -1$ está incluída em $\bar{z} = 1$.

Pelo comportamento local da dinâmica de (1.7) nas variedades invariantes $W^{ss,s}$ e $W^{s,\mu}$ temos que a direção $\bar{z} = 1$ é a que descreve melhor o desdobramento aqui estudado; por isto neste capítulo só estudamos o que acontece nesta carta. Observamos que o campo $\bar{X}_{\bar{\lambda}_0}$ no reescalonamento da família quando $\{r = 0\}$ e, $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = 1$ $v > 0$, em particular quando $v = 1$, tem a seguinte forma:

$$\bar{X}_{D(\varphi, \bar{\alpha})} \equiv \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{x}, \\ \dot{\bar{y}} = -\bar{y}, \\ \dot{\bar{z}} = -\lambda_{ss}\bar{z}. \end{cases} \quad (3.13)$$

A compactificação de $\overline{X}_{D(\varphi, \overline{\alpha})}$ pode ser considerada em $\overline{D}_{\overline{\lambda}_0}$ como um o círculo no infinito correspondente ao $\overline{\rho} = \overline{\sigma} = r = 0$.

O conjunto dos ciclos limites $\hat{\gamma}$ de $\overline{X}_{(\varphi, \overline{\alpha})}$ já conhecemos corresponde ao caso $\overline{\sigma} = 0$ e estão em $\{rv = 0\} = \hat{F}_0 \cup D_{\overline{\lambda}_0}$; $\hat{\gamma}$ em $\hat{F}_0$ é a continuação da trajetória homoclínica original Γ , ligando a singularidade P_1 à singularidade P_2 ; $\hat{\gamma}$ em $D_{\sigma, \overline{\alpha}}$ consta de uma trajetória ligando P_1 à sela ressonante $S(\varphi, \overline{\alpha})$, onde $S(\varphi, \overline{\alpha})$ continuação da sela original, e uma trajetória ligando $S(\varphi, \overline{\alpha})$ com P_2 .

No que sigue estudamos a forma assintótica das aplicações $V_{1, \overline{\lambda}_0}$ e $V_{2, \overline{\lambda}_0}$ quando $rv \rightarrow 0$.

Sejam Σ_1 e Σ_2 secções transversais a $\hat{\gamma}$ em $v = v_0$, perto da singularidade P_1 e P_2 ; Σ'_1 e Σ'_2 secções transversais a $\hat{\gamma}$ em $r = r_0$ perto das mesmas singularidades. Parametrizamos estas secções Σ_i^j , $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{0, 1\}$, pelas coordenadas (θ, u) onde $u = rv$. Assim, temos $V_{1, \overline{\lambda}_0}$ definida em Σ_1 a aplicação das órbitas de período é dada por

$$V_{1, \overline{\lambda}_0}(\theta) = D_{1, \overline{\lambda}_0}(\theta) - R_{1, \overline{\lambda}_0}(\theta), \quad (3.14)$$

onde $D_{1, \overline{\lambda}_0}$ é a transição perto da singularidade $S(\overline{\lambda}_0)$ seguindo o fluxo do campo $\overline{X}_{\overline{\lambda}_0}$, e $R_{1, \overline{\lambda}_0}$ é a transição regular ao longo de $\hat{\gamma}$ para o campo $-X_{\overline{\lambda}_0}$. A aplicação $V_{1, \overline{\lambda}_0}$ estabelece a separação $(P_{\overline{\lambda}_0} - I)(\Omega, U)$ em termos de $R_{1, \overline{\lambda}_0}^{-1}(\Omega, U) = (\theta, u)$, onde $u = rv$. Analogamente, temos $V_{2, \overline{\lambda}_0}$ definida em Σ_1 da seguinte forma:

$$\Delta_{2, \overline{\lambda}_0} = R_{\overline{\lambda}_0}^{-1} \circ D_{\overline{\lambda}_0} - D_{\overline{\lambda}_0}^{-1} \circ R_{\overline{\lambda}_0}.$$

Na direção de $\overline{z} = 1$ temos:

$V_{i, \overline{\lambda}_0}$, onde $i \in \{1, 2\}$ é obtido da seguinte forma: a transição regular $R_{\overline{\lambda}_0}$ se consegue pela seguinte composição de funções:

$$R_{\overline{\lambda}_0} = T^{-1} \circ \overline{R}_{\overline{\lambda}_0} \circ T,$$

$\overline{R}_{\overline{\lambda}_0}$ é a transição regular pelo fluxo de $-\overline{X}_{\overline{\lambda}_0}$ entre Σ'_1 e Σ'_2 , T é a transição entre Σ_1 e Σ'_1

perto da singularidade P_1 . $\bar{R}_{\bar{\lambda}_0}$ é então:

$$\begin{aligned}\bar{R}_{\bar{\lambda}_0}(r_0, \theta) &= (R\bar{y}_1, r) = (-r^2v^2\bar{\sigma} + A_{10}(\bar{\lambda}_0)r\bar{x} + A_{01}(\bar{\lambda}_0)r\bar{y} + O(r^2), \\ &\quad -r\bar{\alpha} + B_{10}(\bar{\lambda}_0)r\bar{x} + B_{01}(\bar{\lambda}_0)r\bar{y} + O(r^2));\end{aligned}$$

expressão na qual podemos fazer as seguintes mudanças:

$$\begin{aligned}A_{10}(\bar{\lambda}_0) &= B_{01}(\bar{\lambda}_0) = 1, \\ B_{10}(\bar{\lambda}_0) &= B_{01}(\bar{\lambda}_0) = 0, \\ \bar{x} &= 1 - \theta, \quad \bar{y} = \theta, \quad \bar{y}_1 = 1 - \Omega,\end{aligned}\tag{3.15}$$

e se identificarmos r com r_0 , temos que $\bar{R}_{\bar{\lambda}_0}(r, \theta)$ é:

$$\bar{R}_{\bar{\lambda}_0}(r, \theta) \equiv \begin{cases} R(1 - \Omega) = -r^2v^2\bar{\sigma} + r(1 - \theta) + O(r^2); \\ R = -r\bar{\alpha} + r\theta + O(r^2). \end{cases}$$

No caso $\bar{\alpha} = 1$, dado que $rv = RV = C$, C é uma constante não nula, da expressão anterior obtemos:

$$\begin{aligned}1 - \Omega &= \frac{rv^2\bar{\sigma} - (1 - \theta) + O(r)}{1 - \theta} \\ &= (rv^2\bar{\sigma} - 1 + \theta)(1 + \theta + O(\theta^2)) + O(r^2) \\ &= rv^2\bar{\sigma} - 1 + \theta + rv^2\theta\bar{\sigma} - \theta + \theta^2 + O(r^2) \\ &= rv^2\bar{\sigma} - 1 + rv^2\theta\bar{\sigma} + O(r^2), \\ \Omega &= 2 - rv^2\bar{\sigma} - \theta rv^2\bar{\sigma} + O(r^2);\end{aligned}$$

ou seja,

$$\bar{R}_{\bar{\lambda}_0}(\theta) = \Omega = 2 - rv^2\bar{\sigma} - \theta rv^2\bar{\sigma} + O(r^2).\tag{3.16}$$

Também, de (3.9) na vizinhança de P_1 , temos que $T(\theta) = \left(\frac{u}{u_0}\right)^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{ss}}} \theta$, onde $\lambda_{ss} > \lambda_s > 1$, então podemos assumir que $R_{\bar{\lambda}_0}$ é igual à aplicação $\bar{R}_{\bar{\lambda}_0}$.

A continuação obtemos a aplicação regular $R_{\bar{\lambda}_0}^{-1}$ entre Σ'_2 e Σ'_1 ao longo de $\hat{\gamma}$ para o campo $\bar{X}_{\bar{\lambda}_0}$. De fato,

$$\begin{aligned} R_{\bar{\lambda}_0}^{-1}(R, \Omega) &= (r(1 - \theta), r\theta) = (R^2 V^2 \bar{\sigma} + \bar{A}_{10}(\bar{\lambda}_0)R(1 - \Omega) + \bar{A}_{01}(\bar{\lambda}_0)R + O(R^2), \\ &\quad R\bar{\alpha} + \bar{B}_{10}(\bar{\lambda}_0)R(1 - \Omega) + \bar{B}_{01}(\bar{\lambda}_0)R + O(R^2)). \end{aligned}$$

Nesta expressão substituímos: $\bar{A}_{10}(\bar{\lambda}_0) = \bar{B}_{01}(\bar{\lambda}_0) = 1$, $\bar{A}_{01}(\bar{\lambda}_0) = \bar{B}_{10}(\bar{\lambda}_0) = 0$, para $\bar{\lambda}_0$ numa curva em $(\varphi, \bar{\alpha})$ passando pela origem, e obtemos então a seguinte expressão de $R_{\bar{\lambda}_0}^{-1}$:

$$R_{\bar{\lambda}_0}^{-1}(R, \Omega) \equiv \begin{cases} r(1 - \theta) = R^2 V^2 \bar{\sigma} + R(1 - \Omega) + O(R^2), \\ r\theta = R\bar{\alpha} + R + O(R^2). \end{cases}$$

De (3.9) temos que $rv = RV = C$, C constante não zero, o que implica $r \neq 0$, e então na expressão anterior obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{1 - \theta} &= \frac{2 + O(R)}{1 - (\Omega - RV^2 \bar{\sigma})}, \\ \theta &= 2(1 + \Omega - RV^2 \bar{\sigma}) + O(R^2), \end{aligned}$$

pois $|\Omega - RV^2 \bar{\sigma}| < 1$.

Temos que

$$\bar{R}_{\bar{\lambda}_0}^{-1}(\Omega) = \theta = 2 + 2\Omega - RV^2 \bar{\sigma} + O(R^2), \quad (3.17)$$

Observamos que no caso $\bar{\alpha} = -1$ não tem sentido a expressão da aplicação $R_{\bar{\lambda}_0}^{-1}$. Isto significa que no caso $\bar{\alpha} < 0$ não existe um segundo retorno perto de $\hat{\gamma}$.

De outro lado, a transição perto da singularidade $S(\bar{\lambda}_0, u)$ é obtida do sistema $\bar{X}_{D(\bar{\lambda}_0)}$ dado em (3.13)

Então pela invariança do plano $(\bar{x}, \bar{y})$ em (1.7) podemos parametrizar a secção transversal Σ_1 pela variável $\bar{y}$ a qual chamamos no caso $\bar{\alpha} > 0$ de θ , podemos fazer que

$\text{sen}\theta = \theta(1 + O(\theta))$ para θ pequeno. De (1.17) obtemos que a transição singular $D_{\bar{\lambda}_0}^{\bar{\bar{}}}(\theta)$ perto de $S(\bar{\lambda}_0, u)$ é a seguinte aplicação:

$$D_{\bar{\lambda}_0}^{\bar{\bar{}}}(\theta) = \theta - u\bar{\bar{\rho}}[\theta\omega + \dots] + \alpha_2(\bar{\lambda}_0)u[\theta^2\omega^2 + \dots] + \alpha_3(\lambda_0)u\alpha_3(\bar{\lambda}_3)[\theta^2\omega + \dots] + \psi(\theta, u; \bar{\bar{\rho}}), \quad (3.18)$$

onde ψ_k e C^k em $(\theta, u; \bar{\bar{\rho}})$ é k -flat em θ uniforme em $(u; \bar{\bar{\rho}})$ para $k > 2$; a função ω é definida como:

$$\omega(\theta, u\bar{\bar{\rho}}) = \begin{cases} \frac{\theta^{u\bar{\bar{\rho}}} - 1}{-u\bar{\bar{\rho}}} & \text{se } u\bar{\bar{\rho}} \neq 0, \\ -\log \theta & \text{se } u\bar{\bar{\rho}} = 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

Se α_1 o fator de hiperbolicidade para o campo $\bar{X}_{\bar{\lambda}_0}^{\bar{\bar{}}}$ na sela $S(\bar{\lambda}_0)$. Então, para o campo $-\bar{X}_{\bar{\lambda}_0}^{\bar{\bar{}}}$,

$$-\bar{X}_{\bar{\lambda}_0}^{\bar{\bar{}}} \equiv \begin{cases} \dot{\bar{x}} = (-1 + \bar{\alpha}_1)\bar{x}, \\ \dot{\bar{y}} = \bar{y}, \\ \dot{\bar{z}} = \lambda_{ss}\bar{z}, \end{cases} \quad (3.20)$$

em $rv \rightarrow 0$, o fator de hiperbolicidade $\bar{\alpha}_1$ da sela $S(\bar{\lambda}_0)$ tem a seguinte expressão:

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{u\bar{\bar{\rho}}}{1 + u\bar{\bar{\rho}}}, \quad (3.21)$$

pois

$$\frac{1}{\lambda_s} = \frac{1}{1 - \alpha_1} = 1 - \bar{\alpha}_1 = 1 - \frac{-\alpha_1}{1 - \alpha_1} = 1 - \frac{u\bar{\bar{\rho}}}{1 + u\bar{\bar{\rho}}}.$$

Definimos a função $\bar{\omega}(\theta, \bar{\alpha}_1)$ como:

$$\bar{\omega}(\theta, \bar{\alpha}_1) \equiv \begin{cases} \frac{\theta^{-\bar{\alpha}_1} - 1}{\bar{\alpha}_1} & \text{se } \bar{\alpha}_1 \neq 0, \\ -\ln \theta & \text{se } \bar{\alpha}_1 = 0, \end{cases} \quad (3.22)$$

e temos que a transição singular $D_{\bar{\lambda}_0}^{\bar{\bar{}}-1}$ para o campo $-\bar{X}_{\bar{\lambda}_0}^{\bar{\bar{}}}$ tem a seguinte expressão:

$$D_{\bar{\lambda}_0}^{\bar{\bar{}}-1}(\theta, u; \bar{\lambda}_0) = \theta + \bar{\alpha}_1(u; \bar{\lambda}_0)[\theta\bar{\omega} + \dots] + \bar{\alpha}_2[\theta^2\bar{\omega} + \dots] + \psi_3(\theta, \nu, \bar{\lambda}_0), \quad (3.23)$$

ψ_k de classe C^k e k -flat em $\theta = 0$ uniforme em $(u, \bar{\lambda}_0)$ para $k \geq 2$.

Agora estudamos as raízes de $V_{2, \bar{\lambda}_0}$ quando $u \rightarrow 0$ na carta $\bar{z} = 1$:

Das aplicações obtidas em (3.18), (3.16), (3.23) e (3.17), temos:

$$\begin{aligned} V_{2,\bar{\lambda}_0}^-(\theta) &= [R_{\bar{\lambda}_0}^{-1} \circ D_{\bar{\lambda}_0}^- - D_{\bar{\lambda}_0}^{-1} \circ R_{\bar{\lambda}_0}^-](\theta) = R_{\bar{\lambda}_0}^{-1}(\theta - u\bar{\rho}[\theta\omega + \dots] + \psi_k) \\ &\quad - D_{\bar{\lambda}_0}^{-1}(2 - v^2\bar{\sigma} - \theta v^2\bar{\sigma} + O(u^2)O(v^3)), \end{aligned} \quad (3.24)$$

temos:

$$\begin{aligned} V_{2,\bar{\lambda}_0}^-(\theta) &= 2 + 2\theta - 2u\bar{\rho}[\theta\omega + \dots] + \psi_k + O(u^2) - 2 + v^2\bar{\sigma} - \theta v^2\bar{\sigma} \\ &\quad - \frac{u\bar{\rho}}{(1 + u\bar{\rho})} \left[(2 - v^2\bar{\sigma} + \theta v^2\bar{\sigma}) \left(\frac{\{(2 + v^2\bar{\sigma}(1 - \theta))^{-\frac{u\bar{\rho}}{1+u\bar{\rho}}} - 1\}}{u\bar{\rho}/(1 + u\bar{\rho}) +} \right) \dots \right] + \tilde{\psi}_k \\ &= -2v^2\bar{\sigma} - 2u\bar{\rho}[\theta\omega + \dots] + 2\theta + \psi_k - \frac{u\bar{\rho}}{(1 + u\bar{\rho})} \\ &\quad \left[(2 - v^2\bar{\sigma}(1 - \theta)) \left\{ \frac{(2 - v^2\bar{\sigma}(1 - \theta))^{-\frac{u\bar{\rho}}{1+u\bar{\rho}}} - 1}{u\bar{\rho}/(1 + u\bar{\rho})} \right\} + \dots \right] + \tilde{\psi}_k \end{aligned} \quad (3.25)$$

Fazemos

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0 &= 2v^2\bar{\sigma} + O(u^2), \\ \tilde{a}_1 &= -2u\bar{\rho} + O(u^2), \\ \tilde{a}_2 &= 2 + v^2\bar{\sigma} + O(u^2), \\ \tilde{a}_3 &= -\frac{u\bar{\rho}}{(1 + u\bar{\rho})} + O(u^2), \\ \tilde{\sigma} &= 2 - v^2\bar{\sigma}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

e então $V_{2,\bar{\lambda}_0}^-$ tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} V_{2,\bar{\lambda}_0}^-(\theta) &= \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1[\theta\omega + \dots] + \tilde{a}_2\theta \\ &\quad + \tilde{a}_3 \left[(\tilde{\sigma} - v^2\bar{\sigma}\theta) \left(\frac{(\tilde{\sigma} - v^2\bar{\sigma}\theta)^{-\frac{u\bar{\rho}}{1+u\bar{\rho}}} - 1}{u\bar{\rho}/(1 + u\bar{\rho})} \right) \right] + O(\theta^2). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Podemos descrever os zeros de $V_{2,\bar{\lambda}_0}^-$ em termos de $-a_0$ e a_1 ; para isto definimos a função ξ_λ seguinte:

$$\xi_{\bar{\lambda}_0}^-(\theta) = a_1[\theta\omega + \dots] + a_2\theta + a_3[(\tilde{\sigma} - v^2\bar{\sigma}\theta) \left(\frac{(\tilde{\sigma} - v^2\bar{\sigma}\theta)^{-\bar{\alpha}_1} - 1}{\bar{\alpha}_1} \right)] + O(\theta^2), \quad (3.28)$$

onde $\bar{\alpha}_1 = \frac{u\bar{\rho}}{1+u\bar{\rho}}$.

Então, $V_{2,\bar{\lambda}_0}(\theta) = 0$ se e somente se $\xi_{\bar{\lambda}_0} = -\tilde{a}_0$.

Nas derivadas da função $\xi_{\bar{\lambda}_0}$ usamos as fórmulas seguintes:

$$\begin{aligned}\theta^{-\alpha} &= 1 + \alpha\omega, \\ \dot{\omega} &= -\theta^{-1-\alpha}, \\ \frac{\dot{\omega}}{\theta\omega} &= (1 - \alpha)\omega - 1, \\ \frac{\dot{\theta^i\omega^j}}{\theta^i\omega^j} &= O(1), \quad \text{se } i \geq 2, j \geq 0;\end{aligned}$$

e temos

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_{\bar{\lambda}_0}(\theta) &= \frac{\partial \xi_{\bar{\lambda}_0}(\theta)}{\partial \theta} = \tilde{a}_1[(1 - a_1)\omega - 1] + \tilde{a}_2 \\ &\quad + \tilde{a}_3 \left[-v^2\bar{\sigma} \left(\frac{(\tilde{\sigma} - v^2\bar{\sigma}\theta)^{-\alpha_1} - 1}{\alpha_1} \right) \right] \\ &\quad + \tilde{a}_3 \left[(\tilde{\sigma} - v^2\bar{\sigma}\theta)(-v^2\bar{\sigma}) \frac{(\tilde{\sigma} - v^2\bar{\sigma}\theta)^{-\bar{\alpha}_1-1}}{\bar{\alpha}_1} \right].\end{aligned}\tag{3.29}$$

No caso $r > 0$, $\bar{\rho} < 0$ e $\bar{\sigma} < 0$, temos que $-\tilde{a}_0 > 0$, $\tilde{a}_1 > 0$, $\tilde{a}_1[(1 - \tilde{a}_1)\omega - 1] \geq 0$, $\tilde{\sigma} - v^2\bar{\sigma}\theta = O(1)$ e também $\tilde{\sigma} - v^2\bar{\sigma}\theta = O(1)$; logo existem $\theta_0 > 0$, $V_0 > 0$ e $R_0 > 0$ tais que se $v \in]0, V_0]$, $r \in]0, R_0[$ e $\theta \in]0, \theta_0]$, então $\xi_{\bar{\lambda}} \rightarrow +\infty$ quando $\theta \rightarrow 0$. O que implica que para cada $\tilde{\sigma} \in]2 - \varepsilon_0, 2]$ para $\varepsilon_0 > 0$ existe um único $\theta_{\tilde{\sigma}}$ tal que $\xi_{\bar{\lambda}_0}(\theta_{\tilde{\sigma}}) = -\tilde{a}_0$. Estes pontos fixos correspondem a órbitas de período 2. E então existe uma região parametrizada de superfícies S_v no espaço de parâmetros, da relação $\tilde{\sigma} = 2 - v^2\bar{\sigma}$. Caso $V_{2,\bar{\lambda}_0}(0) = 0$, $v = 0$ corresponde a órbitas 2-homoclínicas. Ver figura 12. $\square$

3.3 Caso $\bar{\alpha} = -1$

Teorema 3.2 *Nas condições do Teorema Principal, se $\rho \leq 0$, $\sigma > 0$ e $\alpha < 0$, temos desdobramento no ponto A dos diagramas de bifurcação da figura 7a) e 7b)*

A prova é feita nas proposições seguintes. Ver figura 9b e figura 13.

Proposição 3.5 *Seja a região no espaço de parâmetros $\bar{\sigma} = 0$ e $\bar{\rho} \leq 0$, então existem $R_0 > 0$ e um subconjunto compacto $\bar{V}_2$ difeomorfo a um disco que tem ordem de contato 1 com o eixo $O\bar{\alpha}$ em $(0, 0)$, tal que em $\partial\bar{A} \times \bar{V}_2 \times]0, R_0[$, $R_0 > 0$, o campo $\bar{X}_{(\varphi, \bar{\alpha})}$ tem uma curva F no espaço de parâmetros correspondente a uma órbita periódica de período 1 e de tipo dobra.*

Proposição 3.6 *Para cada $(\varphi, \bar{\alpha})$ em $S^1 \times \mathbb{R}$, existem $v_0 > 0$ e $R_0 > 0$ tais que a projeção de toda solução de $W_{v_0} = \partial\bar{A} \times \bar{V}_2 \times]0, R_0[$ abandonam W_{v_0} em tempo finito.*

Prova da Proposição 3.6: Os $v_0 > 0$ e $R_0 > 0$ são os da Proposição 3.4, onde se estuda a dinâmica de $\bar{X}_{(\varphi, \bar{\alpha})}$ em W_{v_0} , exceto para $\partial\bar{A} \times \partial\bar{V}_2 \times]0, R_0[$, especificamente quando $\bar{\sigma} = 0$ onde o campo $\bar{X}(\varphi, \bar{\alpha})$ na carta definida por $\bar{A}$ tem órbita homoclínica de período 1.

Então o diagrama de bifurcação de X_λ para $\bar{\lambda}$ ao redor do eixo $O\bar{\alpha}$ fica completamente estudado no caso $\alpha < 0$.

Prova da Proposição 3.5: Do blow-up ϕ_1 dado que $rv \rightarrow 0$, para $\bar{\alpha} < 0$, temos que existem $R_0 > 0$ e $v_0 > 0$ tais que $\bar{V}_2$ é o seguinte conjunto:

$$V_2 = \{(\bar{\rho}, \bar{\sigma}) | \bar{\rho} = rv\bar{\rho}, \bar{\sigma} = r^2v^2\bar{\sigma}, \bar{\sigma} > 0, \text{ com } r \in]0, R_0[, v \in]0, v_0[\text{ e } \bar{\rho}^2 + \bar{\sigma}^2 = 1\}$$

e $\bar{A} \times]0, R_0[$ é uma vizinhança limitada de $W_{\text{hom}}^c(\Gamma)$. Descrevemos a dinâmica de $\bar{X}_{(\varphi, \bar{\alpha})}$ em W_{v_0} pelo procedimento descrito a seguir.

Na carta $\bar{z} = 1$ temos:

Como em (3.13) para o campo $\bar{X}_{(\varphi, \bar{\alpha})}$ quando $v = 1$ na direção do reescalonamento da família podemos reparametrizar as secções transversais as separatrizes da sela, $S(\bar{\lambda}_0)$, de tal maneira que localmente temos que o campo $\bar{X}_{(\bar{\lambda}_0, u)}^{\bar{z}}$ de (3.12) é C^k -equivalente ao seguinte campo

$$\partial\bar{x} \frac{\partial}{\partial\bar{x}} - \bar{y} \frac{\partial}{\partial\bar{y}} \left(\sum_{i=0}^{N(k)} \alpha_{i+1}(\bar{\lambda}_0, u) \cdot (\bar{x}, \bar{y})^i \right) \frac{\partial}{\partial\bar{y}}. \quad (3.30)$$

renomeando as novas coordenadas do plano ressonante $(\bar{x}, \bar{y})$ como

$$\begin{cases} \bar{x} = \sin \theta = \theta(1 + O(\theta)) \\ \bar{y} = \cos \theta \end{cases},$$

então a transição perto da sela $S(\bar{\lambda}_0, U)$ para o campo $\bar{X}_{D(\bar{\lambda}_0, u)}^z$ é dada por

$$\begin{aligned} D_{\bar{\lambda}_0}^{\bar{z}}(\theta) = & \theta - u\bar{\rho}[\theta\omega + \dots] + \alpha_2(\bar{\lambda}_0)u[\theta^2\omega^2 + \dots] \\ & + \alpha_3(\bar{\lambda}_0)u[\theta^2\omega + \dots] + \dots + \alpha_k(\bar{\lambda}_0)u[\theta\omega + \dots] + \phi_k(\theta, u\bar{\lambda})_0, \end{aligned} \quad (3.31)$$

ϕ_k é C^k e k -flat em θ , e os colchetes dependem de $O(\theta^i\omega^j)$, para $0 \leq j \leq i \leq k$.

A função $\omega(\theta, u\bar{\rho})$ é definida como

$$\omega(\theta, u\bar{\rho}) = \begin{cases} \frac{\theta^{u\bar{\rho}} - 1}{-u\bar{\rho}} & , \text{ se } u\bar{\rho} \neq 0, \\ -\ln \theta & , \text{ se } u\bar{\rho} = 0. \end{cases} \quad (3.32)$$

Na expressão de $D_{\bar{\lambda}_0}^{\bar{z}}$ temos usado o fato de que no conjunto $\{u = 0\}$ o sistema (3.30) é tal que $\alpha_i(\bar{\lambda}_0, 0) = 0$, e por isto temos que:

$$\alpha_i(\bar{\lambda}_0, u) = u\bar{\alpha}_i(\bar{\lambda}_0, u) \quad \text{com} \quad \bar{\alpha}_i(\bar{\lambda}_0, 0) \neq 0$$

para $i \geq 0$.

A transição regular $\bar{R}_{\bar{\lambda}_0}^{\bar{z}}$ é obtida de (2.48), isto é,

$$\bar{R}_{\bar{\lambda}_0}^{\bar{z}}(\theta) = -rv^2\bar{\sigma} + \theta - rv^2\frac{\theta}{2}\bar{\sigma} + r\frac{\theta^2}{2} + O(r^2)O(\theta).$$

A transição T pelo fluxo $-\bar{X}_{\bar{\lambda}_0}^{\bar{z}}$,

$$-\bar{X}_{\bar{\lambda}_0}^{\bar{z}} \equiv \begin{cases} \dot{\theta} = (1 + \lambda_s)\frac{1}{2}\sin 2\theta \\ \dot{r} = \lambda_{ss}r + O(r^2) \\ \dot{v} = -\lambda_{sv}v + O(v^2) \end{cases},$$

entre as seções transversais Σ_1 e Σ'_1 e dado pela aplicação T ,

$$T(\theta) = \theta \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\left(\frac{1+\lambda_{ss}}{\lambda_s}\right)}.$$

Então $R_{\bar{\lambda}_0}$ entre Σ_1 e Σ_2 para o fluxo $-\bar{X}_{\bar{\lambda}_0}^z$ é a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned}
R_{\bar{\lambda}_0}(\theta) &= (T^{-1} \circ \bar{R}_{\bar{\lambda}_0} \circ T)(\theta) \\
&= \left(\frac{u}{u_0}\right)^{-\left(\frac{1+\lambda_s}{\lambda_{ss}}\right)} v^2 \bar{\sigma} - \theta + 2\theta + O(u^2) \\
&= \left(\frac{u}{u_0}\right)^{-\left(\frac{1+\lambda_s}{\lambda_{ss}}\right)} v^2 \bar{\sigma} (1 - \theta) + 2\theta + O(u^2).
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Como T é aproximadamente a identidade podemos fazer $R_{\bar{\lambda}_0} = \bar{R}_{\bar{\lambda}_0}$, para θ e u pequenos. De (3.33) e (3.31) temos que a equação $V_{1,\bar{\lambda}_0}$ das órbitas de 1-períodicas tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
V_{1,\bar{\lambda}_0}(\theta) &= D_{\bar{\lambda}_0}(\theta) - R_{\bar{\lambda}_0}(\theta) \\
&= \theta - u\bar{\rho}[\theta\omega + \dots] + \tilde{\alpha}_2 u[\theta^2\omega^2 + \dots] + \tilde{\alpha}_3 u[\theta^2\omega + \dots] + \dots \\
&\quad + \psi_k + rv^2\bar{\sigma} - \theta + rv^2\frac{\theta}{2}\bar{\sigma} - r\frac{\theta^2}{2} + \theta(r^2), \text{ para } k \geq 3;
\end{aligned} \tag{3.34}$$

nesta equação faremos

$$\begin{aligned}
a_0 &= rv^2\bar{\sigma} + O(u^2) \\
a_1 &= -u\bar{\rho} + O(u^2) \\
a_2 &= -1 + \frac{rv^2}{2} \\
a_3 &= \tilde{\alpha}_2 u + O(u^2) \\
u &= C = \text{constante},
\end{aligned}$$

e a equação $V_{1,\bar{\lambda}_0}(\theta)$ fica reordenada assim:

$$V_{1,\bar{\lambda}_0}(\theta) = a_0 + a_1[\theta\omega + \dots] + a_2\theta + a_3[\theta^2\omega^2 + \dots] + O(\theta^2). \tag{3.35}$$

Nas derivadas de ξ_λ usamos as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
\theta^{-\alpha} &= 1 + \alpha\omega \\
\dot{\omega} &= -\theta^{-1-\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\overline{\theta\omega}} &= (1 - \alpha)\omega - 1 \\
\dot{\overline{\theta^2\omega^2}} &= (2 - 2\alpha)\theta\omega^2 - 2\theta\omega \\
\dot{\overline{\theta^2\omega}} &= (2 - \alpha)\theta\omega - \theta \\
\dot{\overline{\theta\omega^2}} &= (1 - 2\alpha)\omega^2 - 2\omega.
\end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi_{\bar{\lambda}_0}(\theta)}{\partial \theta} &= \xi_{\bar{\lambda}_0}^{(1)}(\theta) = a_1[(1 + u\bar{\rho})\omega - 1] + a_2[(2 + 2u\bar{\rho})\theta\omega^2 - 2\theta\omega] \\
&\quad + a_2 + a_3[(2 + u\bar{\rho})\theta\omega - \theta] + \dot{\psi},
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Caso $\bar{\rho} < 0$ e $\bar{\sigma} < 0$ foi estudado na proposição 3.1; no caso $\bar{\rho} < 0$ e $\bar{\sigma} > 0$ precisamos fazer uma segunda derivada $\xi_{\bar{\lambda}_0}^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
\xi_{\bar{\lambda}_0}^{(2)} &= a_1[(1 + u\bar{\rho})\theta^{-1+u\bar{\rho}}] + a_2[(2 + 2u\bar{\rho})(1 - 2\alpha)\omega^2 - 2\omega - 1] \\
&\quad + a_3[(2 + u\bar{\rho})(1 - \alpha)\omega - 2] + \ddot{\psi},
\end{aligned} \tag{3.37}$$

esta última equação pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\xi_{\bar{\lambda}_0}^{(2)}(\theta) &= a_1[(1 - a_1)\theta^{-1+u\bar{\rho}}] + \omega^2 O(1), \text{ onde } -a_1 < 0, \\
\frac{1}{\omega^2} \xi_{\bar{\rho}_0}^{(2)}(\theta) &= \frac{a_1(1 - a_1)}{\omega^2 \theta^{1+u\bar{\rho}}} + O(1),
\end{aligned} \tag{3.38}$$

então,

$$\frac{1}{\omega^2} \xi_{\bar{\lambda}_0}^{(2)}(\theta) \geq \frac{|a_1|[(1 - a_1)]}{(\ln \theta)^2 \theta^{1-\delta/2}} + O(1) \geq \frac{|a_1|}{\theta^{1-\delta}} + O(1)$$

para algum δ tal que $-\delta/2 \leq -a_1 < 0$, equivalentemente existem $R_0 > 0$ e $V_0 > 0$ tais que $r \in]0, R_0[$ e $v \in]0, v_0]$.

Tomamos $M > 0$ e $\theta_0 > 0$ tais que $O(1) > -M$, em $[0, \theta_0] \times [-\delta, 0]$, obtemos que $\frac{1}{\omega^2} \xi^{(2)} \geq M \Leftrightarrow \theta \leq \left(\frac{|\alpha_1|}{2M}\right)^{1/1-\delta}$. Fazemos $c = \frac{|\alpha_1|}{2M}$ e $\mu = \frac{1}{1-\delta}$.

Como $\xi_{\bar{\lambda}_0}^{(1)}(\theta) = -(u\bar{\rho})((1 + u\bar{\rho})\omega) + 2 + u\bar{\rho} + O(1)$ e $-(u\bar{\rho})\omega = \theta^{u\bar{\rho}} - 1$ é estritamente crescente e negativa, então se $\theta \in [c|u\bar{\rho}|^\mu, \theta_0]$ temos

$$\xi_{\bar{\rho}_0}^{(1)}(\theta) = (1 + u\bar{\rho})O(|u\bar{\rho}| \ln(c|u\bar{\rho}|^\mu)) + 2 + u\bar{\rho} + O(1), \tag{3.39}$$

se $|O(1)| \leq 2/3$ e $u\bar{\rho}$ suficientemente pequeno tal que

$$|u\bar{\rho} + (1 + u\bar{\rho})O(|u\bar{\rho}| \ln(c|u\bar{\rho}|^\mu))| \leq 2/3, \quad (3.40)$$

temos que

$$\xi_{\bar{\lambda}_0}^{(1)}(\theta) \geq \frac{1}{3} \quad \text{em} \quad [c|u\bar{\rho}|^\mu, \theta_0], \quad (3.41)$$

além disso, como $\xi^{(2)} > M > 0$, então tem que existir um $\theta_{\bar{\rho}}$ valor de bifurcação tal que

$$\xi_\lambda(\theta_{\bar{\rho}}) = -a_0. \quad (3.42)$$

A bifurcação que acontece em $-\alpha_0 = \Gamma(u\bar{\rho}, \bar{\lambda}_0)$. Ver gráfico 13. $\square$

Com isto fica completo o diagrama de bifurcação no caso $\bar{\alpha} = -1$.

3.4 Caso $\bar{\alpha} = 0$

Teorema 3.3 *Nas hipóteses do teorema principal, se $\bar{\alpha} = 0$ temos o desdobramento na origem de coordenadas $(\rho, \sigma, \alpha) = (0, 0, 0)$ dos diagramas de bifurcação das figuras 7a e 7b.*

De (2.48) temos que $\bar{R}_{\bar{\lambda}}$ tem a seguinte expressão:

$$\bar{R}_{\bar{\lambda}}(\theta) = -rv^2\bar{\sigma} + \theta - rv^2\theta\bar{\sigma} + \theta^2 + O(\theta^2),$$

de (3.31) temos que

$$V_{1, \bar{\lambda}_0}(\theta) = -u\bar{\rho}[\theta\omega + \dots] + rv^2\bar{\sigma} + rv^2\theta\bar{\sigma} + O(\theta^2)O(r^2). \quad (3.43)$$

Em (3.45) fazemos

$$\begin{cases} a_0 = rv^2\bar{\sigma} \\ \xi_{\bar{\lambda}_0}(\theta) = -u\bar{\rho}[\theta\omega + \dots] + rv^2\theta\bar{\sigma} + O(\theta^2)O(r^2), \end{cases}$$

temos que

$$\dot{\xi}_\lambda(\theta) = \frac{\partial \xi_\lambda(\theta)}{\partial \theta} = -C\bar{\rho}[(1 - u\bar{\rho})\omega - 1] + rv^2\bar{\sigma} + O(\theta), \quad (3.44)$$

onde colocamos $u = C$ da quarta componente do sistema (3.4). Se

$$a_0 = \xi_{\bar{\lambda}_0}^-(\theta) \quad (3.45)$$

temos que se $\bar{\rho} < 0$, $\dot{\xi}_\lambda(\theta) \rightarrow +\infty$ e por isto (3.45) não tem solução no caso $\bar{\sigma} > 0$; se $\bar{\rho} > 0$, $\dot{\xi}_\lambda(\theta) \rightarrow C\bar{\rho}$ com $C\bar{\rho} > 0$, e então (3.45) tem solução só no caso $\bar{\sigma} < 0$.

Logo, o teorema principal fica provado como consequência dos teoremas 3.1, 3.2 e 3.3.

Nas coordenadas originais (x, y, z) temos a seguinte conclusão que escrevemos como corolário:

Corolário 3.1 *Seja X_λ a família que desdobra $(X_0, 0, \Gamma)$ segundo as hipóteses do teorema principal. Seja $A_{R_0} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in W_{\text{hom}}^c(r), x = r\bar{x}, y = r\bar{y}, z = r\bar{z}, \text{ com } \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = 1 \text{ e } 0 \leq r < R_0\}$ e $V_\delta = \{(\rho, \sigma, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \tau = r\bar{\tau} \text{ tal que } \rho = \tau\bar{\rho}, \sigma = \tau^2\bar{\sigma}, \alpha = \theta\bar{\alpha} \text{ com } \bar{\rho}^2 + \bar{\sigma}^2 = 1, \bar{\alpha} \in [-1, 1] \text{ e } 0 \leq \tau < \delta\}$ vizinhança de $W_{\text{hom}}^c(r)$ e de $\lambda = (\rho, \sigma, \alpha) = 0$, respectivamente. Seja S^2 uma esfera nas variáveis $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Então para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, existe $R_0 > 0$ e uma aplicação contínua*

$$\psi_\delta : S^2 \times \bar{V}_\delta \rightarrow A_{R_0}$$

tal que para cada $\lambda \in \bar{V}_\delta$ a aplicação

$$\psi_\lambda : S^2 \rightarrow A_{R_0}$$

é um homeomorfismo; verificando que $\psi_\lambda(S^2) = E_\lambda$ é um entorno de $W_{\text{hom}}^c(r)$ tal que $X_\lambda|_{E_\lambda}$ tem a dinâmica descrita nos teoremas 3.1, 3.2 y 3.3 nas variáveis de A_{R_0} .

3.5 Direções para futuras pesquisas

Este estudo de ressonância nas direções principais de laço para sela com entrada não principal é o primeiro na direção de conhecer o desdobramento das “órbitas homoclínicas ressonantes”. No caso em que a relação entre os valores próprios seja

$$-\lambda_{ss}(0) < -\lambda_s(0) < 0 < \lambda_u(0),$$

espero por meio de uma seqüência de blow-up para famílias de campos de vetores com parâmetro singular descrever o desdobramento de laços em um ponto de sela com ressonância $\lambda_{ss}(0) = \lambda_u(0)$. Mais especificamente:

- i) Encontrar uma curva no espaço de parâmetros correspondente a órbitas periódicas instáveis de tipo cúspide. Esta conjectura é motivada pela prova de existência de superfícies de tipo dobra para órbitas periódicas nos dois lados da ressonância, isto é, se $\lambda_u < \lambda_{ss}$ e $\lambda_{ss} < \lambda_u$, feita no trabalho de [Sa].
- ii) Explicar o desaparecimento das órbitas 3-homoclínicas perto da transição das 2-homoclínicas que aparecem em ambos os lados da transição. E em consequência, o desaparecimento da seqüência de superfícies das órbitas N -homoclínicas.

3.6 Figuras

Figura 11: relação entre ρ e σ

Figura 12: diagrama de bifurcação – caso $\bar{\alpha} = 1$

Figura 13: diagrama de bifurcação – caso $\bar{\alpha} = -1$

Bibliografia

- [A.L] Andronov, A.A.; Leontovich, E.A.; Gordon, I.I., and Mier, A.G. (1971). Theory of bifurcations of dynamical systems on a plane. Israel program of scientific translations, Jerusalem.
- [Bo] P. Bonckaert. On the continuous dependence of the smooth change of coordinates in parametrized normal form theorems. *Journal of Differential Equations*, 106 (1993), 107–120.
- [CH.D.F.] S.N. Chow, B. Deng and F. Fiedler. Homoclinic Bifurcation at resonant eigenvalues. *Journal Dynamics and Differential Equations* 2, 1990, 177-244
- [CH.H.Sa] Alan R. Champneys, Jörg Härterich and Björn Sandstede; A non-transverse homoclinic orbit to a saddle-node equilibrium. preprint 1994.
- [D] H. Dulac; Sur les Cycles limites, *Bull. Soc. Math. France*, 51 (1923) 105+188.
- [DU] F. Dumortier. Techniques in the theory of local bifurcations, Blow-up, Normal forms, Nilpotent bifurcations, Singular bifurcations. Notes written by B. Smits. 1993
- [D.I.] F Dumortier and S. Ibañez. Nilpotent singularities in Generic 4-parameter, Families of 3-dimensional, Vector Field.
- [D.R] F. Dumortier and R. Roussarie. Canard Cycles and Center Manifolds, preprint Dijon 1994.
- [H1] A.J. Homburg, Some Global aspect of homoclinic bifurcations of Vector fields, Thesis Rijkuniversiteit Groningen, 1993.
- [H.K.K.] A.J. Homburg, H. Kokubu, M. Krupa. The Horseshoe and its bifurcations in the unfolding of a inclination-flip homoclinic orbit, *Journal Ergodic and differential equations*. volume 14, p.p. 667-694.

- [H.P.S] M. Hirsh, T. Pugh and M. Shub. Invariant Manifolds. Springer Verlag Lectures Notes in Math 583, 1977.
- [ILY.YAK] Y. Il'yashenko and S. Yakovenko. Finetely smooth normal forms of local families of diffeomorphisms and vector fields. Russia Math Surv. (1991), 1-43.
- [J.M.] M.A. Jebrane et A. Mourlada. Cyclicité Finie des Lacets Doubles Non Triviaux. Preprint Université de Bourgogne, 1993.
- [K.N] H. Kokubu and V. Naudot. Existence of infinitely many homoclinic doubling bifurcations from some codimension three homoclinic orbits. Preprint 1995.
- [K.K.O-1] M. Kisaka, H. Kokubu and H. Oka. Bifurcation to N-homoclinic orbits and N-periodic orbits in vector Fields. Journal Dynamical and differential Equations, vol. 5 n° 2, 1993.
- [K.K.O-2] H. Kokubu, M. Komuro and H. Oka. Multiple homoclinic bifurcations from orbit-flip. Preprint, 1995.
- [N] V. Naudot. Bifurcation Homoclines en Dimension trois. Tesis, Dijon 1996.
- [No] A. Mourlada, Cyclicité des polycycles hyperboliques des champs de Vecteurs du plan: Mise sous forme normale, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1455, p.p. 272-314. Springer-Verlag. 1990.
- [R1] R. Roussarie, On the number limit cycles which appear by perturbation of separatrix loop of planar vector fields, Bol Soc Bras Mat vol. 17 N 2 (1986), 67-101.
- [R.R] R. Roussarie etc. Rousseau. Almost planar homoclinic loops in $\mathbb{R}^3$, Journal of Differential Equations 126, 1-47 (1996).
- [R3] R. Roussarie. Bifurcations of planar vector fields and hilbert's 16 th. problem. 20 Coloquio Brasileiro de Matemática, IMPA 1995.
- [Sa1] B. Sandstede, Verzweigungstheorie homokliner verdopplungen. Thesis University of Stuttgart, 1993.
- [Sa2] B. Sandstede, Center Manifolds for Homoclinic Solutions, preprint 1995.
- [Si1] L.P. Shil'nikov, A case of the existence of a denumerable set of periodic orbit, Soviet Math. Dokl 8 (1995), 163-166.

- [Si2] L.P. Shil'nikov. On the generation of a periodic motion from trajectories doubly asymptotic to an equilibrium of state of saddle type. Math. NSSR Sbornik (1986).
- [So] J. Sotomayor, Generic one parameter families of vector fields on Two-dimensional Manifolds, pub. Math IHes 43 (1974) , 5-46.
- [Yan] E. Yanagida. Branching of double pulse solutions from single pulse solutions in nerve axon equations. J. Diff. Eq 66 (1987), 243-161.