ESTABILIDADE ASSINTÓTICA
GLOBAL NO PLANO DE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
ORDINÁRIAS

Roberto Ferraz Barreto

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA APLICADA

Area de Concentração: Sistemas Dinâmicos
Orientador: Prof. Dr. Jorge Manuel Sotomayor Tello

– São Paulo, maio de 1995 –

Estabilidade Assintótica Global no Plano de Equações Diferenciais Ordinárias

Este exemplar corresponde à redação final
da dissertação devidamente corrigida e
defendida por Roberto Ferraz Barreto
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 21 de junho de 1995.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Jorge Manuel Sotomayor Tello (Orientador) - IME - USP
- Prof^ª. Dr^ª. Helena Maria Ávila de Castro - IME - USP
- Prof. Dr. Carlos Gutierrez - IMPA

Resumo

Neste trabalho, tendo como base um resultado de Gutierrez, fazemos uma demonstração do seguinte Teorema sobre a estabilidade assintótica global no plano: *seja $X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, um campo vetorial de classe C^1 , com uma singularidade $p \in \mathbb{R}^2$ e, tal que, para todo $q \in \mathbb{R}^2$, os autovalores de $DX(q)$ tem parte real negativa. Então a bacia de atração de p é todo $\mathbb{R}^2$.*

Abstract

In this work, having as base the work of the Gutierrez, we give a proof for the following Theorem about the Bidimensional Global Asymptotic Stability: *Let $X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ be a vector field of class C^1 with a singularity in $p \in \mathbb{R}^2$ and, such that, for all $q \in \mathbb{R}^2$ all the eigenvalues of $DX(q)$ have negative real part. Then the basin of attraction of p is the whole $\mathbb{R}^2$.*

Agradecimentos

À Nelson e Risoleta, meus pais, presentes na construção de minha história.

Ao Prof. Dr. Jorge Manuel Sotomayor Tello pela sugestão do tema de investigação e pela orientação segura na produção desta dissertação.

Ao Prof. Dr. Carlos Gutierrez pelas orientações esclarecedoras.

Às Professoras Dras. Helena Maria Àvila de Castro e Ana Flora Pereira de Castro Humes pelo importante apoio em meus momentos iniciais no IME.

Aos professores e colegas com quem de algum modo compartilhei a produção deste trabalho.

Para Josy e Mariana

Conteúdo

Introdução	1
1 Estabilidade e Injetividade	3
1.1 O Teorema de Olech	3
1.2 Um resultado de Gassul e Sotomayor	4
2 Estabilidade Assintótica Global	10
2.1 Definições preliminares	10
2.2 Um esboço da prova	13
2.3 Prova do Teorema A	16
Bibliografia	66

Introdução

No contexto da Mecânica a palavra estabilidade caracteriza o equilíbrio. Assim, o equilíbrio de um corpo é dito estável se ele retorna à sua posição original depois de ter sido ligeiramente deslocado e instável, se após um ligeiro deslocamento o corpo tende a uma nova posição.

Aqui nos interessará somente a estabilidade de equilíbrios no sentido de Liapunov, a qual num contexto bidimensional admite a seguinte formulação: sejam $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ campo vetorial, $p \in \mathbb{R}^2$ um ponto de equilíbrio de X (ou seja, $X(p) = 0$) e $F(t, q)$ para todo $q \in \mathbb{R}^2$, uma solução de X tal que $F(0, q) = q$, então

- dizemos que p é estável se para cada $\epsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que $|F(t, q) - p| < \epsilon$, para todo $t \geq 0$, se $|q - p| < \eta$,
- dizemos que p é assintoticamente estável se é estável e $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t, q) = p$, para todo q tal que $|q - p| < \eta$,
- dizemos que p é globalmente assintoticamente estável se $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t, q) = p$ para todo $q \in \mathbb{R}^2$.

O conjunto $B = \{q \in \mathbb{R}^2 : \lim_{t \rightarrow \infty} F(t, q) = p\}$ é chamado bacia de atração de p .

Uma questão de fundamental importância para a Teoria da Estabilidade é a estimativa do tamanho da bacia de atração de um equilíbrio, ou seja, estimar o valor de η . Fazendo uma comparação com a Mecânica, isso corresponde a conhecer até onde um corpo pode ser deslocado de maneira que ele retorne à sua posição original. Condições locais que garantem a existência de uma pequena bacia de atração tornaram-se bastante conhecidas, principalmente, através da Teoria de Liapunov[7]

Neste trabalho focalizamos a Estabilidade Assintótica Global e nosso objetivo é demonstrar o seguinte:

- (P) *seja $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 , com uma singularidade em $p \in \mathbb{R}^2$ e para todo $q \in \mathbb{R}^2$, $DX(q)$ tem autovalores com parte real negativa. Então a bacia de atração de p é todo $\mathbb{R}^2$.*

Em relação a (P) há, no entanto, vários resultados parciais com condições adicionais. Entre eles destacamos a importância do trabalho de Olech [14] que afirma o seguinte:

- (O) *se X satisfaz às hipóteses de (P) e além disso, existem constantes $\delta > 0$ e $R > 0$, tais que $|X(x)| > \delta$ se $|x| > R$, então p é globalmente assintoticamente estável.*

Esse resultado tornou-se uma ferramenta importante porque através dele Olech provou que para demonstrar (P), basta provar que a aplicação $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é injetora, quando as hipóteses de (P) são satisfeitas.

Também como resultado importante e mais recente, destacamos o trabalho de Gassul e Sotomayor[5], que fornece uma estimativa para o tamanho da bacia de atração de campos vetoriais dissipativos.

Ainda como resultados sobre a Estabilidade Assintótica Global com condições adicionais podemos destacar os seguintes:

Marcus e Yamabe [11] provaram (P) para o caso em que uma das derivadas parciais de X é identicamente nula em $\mathbb{R}^2$

Hartman [8] provou (P) quando $DX(x) + (DX)^T(x)$ é definida negativa em todo $\mathbb{R}^2$, onde $(DX)^T(x)$ é a matriz transposta de $DX(x)$.

Gassul, Llibre e Sotomayor [6] provaram (P) para funções de Khovansky, que é uma generalização do resultado de Meisters e Olech para o caso em que o campo vetorial X é polinomial.

Gutierrez em [2], garante que se em (P) as hipóteses não forem globais, então, podemos construir um campo que não é globalmente assintoticamente estável.

Este trabalho tem a seguinte estrutura: no **capítulo 1**, faremos uma demonstração de (O) através de um resultado de Gassul e Sotomayor (1989); no **capítulo 2**, tendo como base o trabalho de Gutierrez [3], demonstraremos o seguinte Teorema:

(T) *sejam $\rho \in [0, \infty)$ e $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação C^1 tal que, para todo $q \in \mathbb{R}^2$, o determinante de $DX(q)$ é positivo e além disso, para todo $p \in \mathbb{R}^2$, com $|p| \geq \rho$, o espectro de $DX(p)$ é disjunto do semi-eixo real não-negativo. Então X é injetora.*

Facilmente percebemos que as hipóteses em (P), são um caso particular das hipóteses em (T)

Em resumo, por (T) a aplicação X em (P) é globalmente injetora e por (O) segue a prova de (P).

Capítulo 1

Estabilidade e Injetividade

1.1 O Teorema de Olech

Nesta seção apresentaremos um resultado de Olech [13]. O importante nesse trabalho é que ele associa à Estabilidade Assintótica Global(P) a necessidade de se estudar a injetividade da aplicação $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que satisfaz: $\text{traço}DX(x) < 0$, $x \in \mathbb{R}^2$ e $\det DX(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}^2$.

Problema 1.1.1 *Consideremos um sistema autônomo*

$$(S) \quad \dot{x} = X(x),$$

onde $x = (x_1, x_2)$, $X(x) = (f(x_1, x_2), g(x_1, x_2))$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$. Suponhamos que $x = (0, 0)$ é um ponto singular de (S), e assumamos que a matriz jacobiana $J(x)$ de X tem, em cada ponto de $\mathbb{R}^2$, autovalores com parte real negativa, isto é,

$$(i) \quad \text{traço}J(x) = \partial f(x)/\partial x_1 + \partial g(x)/\partial x_2 < 0 \text{ em } \mathbb{R}^2$$

$$(ii) \quad \det J(x) = (\partial f(x)/\partial x_1)(\partial g(x)/\partial x_2) - (\partial f(x)/\partial x_2)(\partial g(x)/\partial x_1) > 0 \text{ em } \mathbb{R}^2.$$

Então $x = 0 = (0, 0)$ é solução globalmente assintoticamente estável de (S), isto é, cada órbita $F_x(t) = F_x$ de (S) tende a $(0, 0)$ quando $t \rightarrow \infty$?

Problema 1.1.2 *As desigualdades (i) e (ii) implicam que a aplicação $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é globalmente injetora?*

Teorema 1.1.1(Olech) *O Problema 1.1.1 tem resposta afirmativa se, e somente se, a resposta do problema 1.1.2 for afirmativa.*

Através do Teorema 1.1.1, para resolver o Problema 1.1.1, basta estudar a injetividade da aplicação X

Para chegar às conclusões do Teorema 1.1.1 Olech provou em [13] o seguinte teorema, que sem sombra de dúvida, tornou-se um resultado muito importante no estudo da estabilidade assintótica global em sistemas planares.

Teorema 1.1.2 Consideremos o sistema (S) e assumamos que X é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, $x = 0$ é um ponto singular de (S) , (i) e (ii) valem em $\mathbb{R}^2$ e, além disso, existem duas constantes $\rho > 0$ e $r > 0$ tais que

$$(iii) |X(x)| \geq \rho, \text{ para } |x| \geq r.$$

Então a solução $x = 0$ é globalmente assintoticamente estável.

Observação 1.1.1 Por $|x|$ denotamos a norma Euclidiana de x , isto é, $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Não faremos a prova do Teorema 1.1.2, porém, a seguir o mesmo será usado em uma demonstração do Teorema 1.1.1. À frente faremos uma demonstração completa do Teorema 1.1.1 usando um outro teorema que foi provado por Gassul e Sotomayor, que também será demonstrado neste trabalho.

Demonstração (Teorema 1.1.1): Suponhamos que exista uma função vetorial $Y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que satisfaça (i) e (ii), mas que não seja injetora em $\mathbb{R}^2$. Isso significa que existem $y, \bar{y} \in \mathbb{R}^2$, $y \neq \bar{y}$, tais que, $Y(y) = Y(\bar{y}) = a$, $a \in \mathbb{R}^2$. Então o campo vetorial $\bar{Y}(x) = Y(x + y) - a$ satisfaz a todas as hipóteses do Teorema 1.1.1, mas tem duas singularidades. Logo, obviamente, $x = 0$ não é singularidade globalmente assintoticamente estável. Portanto, segue que a resposta afirmativa do Problema 1.1.1 implica a resposta afirmativa do Problema 1.1.2. Por outro lado se X satisfaz (i), (ii), $X(x) = 0$ e a aplicação X é injetora, então a hipótese (iii) também é satisfeita. Logo, Teorema 1.1.2 implica que $x = 0$ é globalmente assintoticamente estável.

Veremos agora uma aplicação do Teorema 1.1.1:

Teorema 1.1.3 Suponhamos que X em (S) é de classe C^1 , que valem (i) e (ii) em $\mathbb{R}^2$ e que $X(0) = 0$. Além disso, assumamos que

$$(I) (\partial f(x)/\partial x_1)(\partial g(x)/\partial x_2) \neq 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^2.$$

ou

$$(II) (\partial f(x)/\partial x_2)(\partial g(x)/\partial x_1) \neq 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^2.$$

Então a solução $x = 0$ é globalmente assintoticamente estável.

Para demonstrar esse teorema basta verificar que a aplicação X é injetora em $\mathbb{R}^2$ e aplicar o Teorema 1.1.1.

1.2 Um resultado de Gassul e Sotomayor

Nesta seção provaremos o Teorema 1.1.1 usando um resultados de Gassul e Sotomayor[5].

Um campo vetorial planar $X = (f, g)$ de classe C^1 será chamado de campo vetorial dissipativo na região $D \subset \mathbb{R}^2$ se $\text{traço}DX(x) \leq 0$ em D e a igualdade é válida somente

em um conjunto com medida de Lebesgue nula. Se a igualdade nunca for válida em D , X será chamado de estritamente dissipativo.

Definição 1.1 *Seja $X = (f, g)$ um campo vetorial planar de classe C^1 , se $B : D \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função positiva tal que BX é dissipativo(estritamente) em $D \subset \mathbb{R}^2$, diremos que B é uma função (estritamente) de Dulac para X em D .*

Definamos agora as seguintes funções associadas ao campo BX .

$$m(r) := \min\{|B(p)X(p)|; |p| = r\}$$

$$M(r) := \max\{|B(p)X(p)|; |p| = r\}$$

Para $0 < R < S \leq \infty$ definamos

$$L_S(R) = \frac{1}{2\pi} \int_R^S m(r) dr.$$

A função $L_S(R)$ é não-crescente se $S < \infty$ ou se $\int_R^\infty m(r) dr < \infty$; caso contrário ela é constante e igual a infinito.

Agora, definamos $T := \sup\{r > 0; L_S(r) - rM(r) \geq 0\}$. Observemos que $T := \infty$ se esse supremo for infinito e que $0 < T \leq S$.

Teorema 1.2.1 *Seja X um campo vetorial planar de classe C^1 com uma singularidade em $x = 0$, e que satisfaça as seguintes propriedades:*

- (a) X tem uma função de Dulac em $D_S = \{p; |p| < S\}$ ($D_\infty = \mathbb{R}^2$).
- (b) cada singularidade do campo X em D_S é localmente assintoticamente estável.

Então a órbita de X através de p , $|p| < T$, tende a $x = 0$ quando $t \rightarrow \infty$ (isto é, $D_T = \{p; |p| < T\}$ está contido na bacia de atração Ω do ponto $x = 0$).

Demonstração: Suponhamos que exista um ponto p , $|p| < T$, tal que $p \notin \Omega$. Consideremos inicialmente o caso $S < \infty$. Como por hipótese B é positiva, a bacia de atração do ponto $(0, 0)$ em relação ao campo BX é a mesma de X . Para simplificar chamaremos de X o campo vetorial BX .

Dados $r, s \in \mathbb{R}^2$, denotemos por γ_r a órbita de X que passa por r e por $\overline{rs}$ o segmento ligando r a s .

Sejam $q \in \partial\Omega \cap \overline{op}$ e γ_q .

Provaremos que a órbita γ_q sai de D_S . De fato, como X é dissipativo em D_S , temos pelo critério de Bendixon-Dulac que X não tem órbita periódica em D_S ; pela hipótese (b) X não tem singularidade em $\partial\Omega \cap D_S$. Pelo fato de $\partial\Omega$ ser invariante, temos que $\gamma_q \subset \partial\Omega$ e, portanto, pelo teorema de Poincaré-Bendixon, γ_q realmente sai de D_S . Por outro lado, (b) implica que existe um ponto $r \in \overline{oq}$ tal que a semi-órbita γ_r^+ está totalmente contida em D_S .

Podemos escolher $s \in \overline{r\bar{q}}$ com $\gamma_s^+ \subset D_S$ satisfazendo as seguintes propriedades: para $s' \in \overline{s\bar{q}}$, $\gamma_{s'}^+ \not\subset D_S$; para $s' \in \overline{os}$, $\gamma_{s'}^+ \subset D_S$; γ_s^+ é tangente a ∂D_S em um ponto u .

Figura 1.1

Consideremos o campo vetorial W ortogonal a X de forma que, em u , W aponte para o interior de D_S .

Denotemos por ψ_u^+ a semi-órbita positiva de W através de u (veja figura 1.2).

Figura 1.2

Mostraremos que $\psi_u^+ \cap \partial D_T \neq \emptyset$. Suponhamos, por absurdo, que $\psi_u^+ \cap \partial D_T = \emptyset$. Desse modo ψ_u^+ está inteiramente contida na região K limitada por ∂D_T e γ_s^+ , porque W é ortogonal a X . Logo, o conjunto ω — limite de ψ_u^+ — ou é uma órbita periódica ou um conjunto que contém uma singularidade de W . Por sabermos que no interior de uma órbita periódica existe pelo menos um ponto singular, podemos garantir que W tem pelo

menos um ponto singular em K . Consequentemente X também tem um ponto singular em K .

Sejam $p_o \in K$ uma singularidade de X e $\Omega(p_o)$ a bacia de atração de p_o para X . Seja $p' \in \overline{p_o u} \cap \partial\Omega(p_o)$. Usando o mesmo argumento do início desta demonstração para provar que γ_q sai de D_S , podemos provar que $\gamma_{p'}$ também sai de D_S .

Como $\gamma_s^+ \cap \gamma_{p'}^+ = \emptyset$, temos que $\gamma_{p'}^+$ deve sair de D_S através de $\overline{os}$ em contradição com a escolha de s , ou seja $\gamma_s^+ \cap \gamma_{p'}^+ \neq \emptyset$.

Seja v a primeira interseção de ψ_u^+ com ∂D_T . Seja $\bar{K}$ a região limitada por $\partial D_T, \psi_u^+$ e γ_s^+ (veja figura 1.3).

Figura 1.3

Chamaremos $\partial\bar{K}$ de γ e γ_1, γ_2 e γ_3 a partição de $\partial\bar{K}$ dada por ψ_u^+, γ_s^+ e ∂D_T respectivamente. Escolhamos em γ_1 e γ_2 a parametrização induzida respectivamente pelas curvas integrais de W e X com sinal negativo, e peguemos em γ_3 uma parametrização angular de ∂D_T em coordenadas polares, também com sinal negativo. Essa orientação em $\partial\bar{K}$ é tal que $\bar{K}$ está positivamente orientada.

Aplicando o Teorema da Divergência em $\bar{K}$ teremos:

$$(III) \quad \int_{\gamma} f dx_2 - g dx_1 = \int \int_{\bar{K}} \text{div}(f, g) dx_1 dy_2 < 0$$

já que $\bar{K} \subset D_S$ e X é dissipativo em D_S . por outro lado,

$$(IV) \quad \int_{\gamma} f dx_2 - g dx_1 = \sum_{i=1}^3 \int_{\gamma_i} f dx_2 - g dx_1$$

Agora analisemos separadamente cada termo do lado direito da última igualdade.

Já que X é ortogonal a γ_1 , temos:

$$(IV.1) \quad \int_{\gamma_1} f dx_2 - g dx_1 = \int_{w_o}^{w_1} (f^2(w) + g^2(w)) dw$$

$$= \int_{s_0}^{s_1} \left(\sqrt{f^2(s) + g^2(s)} \right) ds \geq \int_T^S m(s) ds = 2\pi L_S(T),$$

onde na expressão acima s é o parâmetro do comprimento de arco de γ_1 . Da definição de T , segue que

$$\int_{\gamma_1} f dx_2 - g dx_1 \geq 2\pi T M(T).$$

Como o campo X é tangente a γ_2 ,

$$(IV.2) \quad \int_{\gamma_2} f dx_2 - g dx_1 = \int_{w_o}^{w_1} \left(f(w)g(w) - f(w)g(w) \right) dw = 0$$

Por fim,

$$(IV.3) \quad \left| \int_{\gamma_3} f dx_2 - g dx_1 \right| = \left| \int_{\theta_o}^{\theta_1} \left((f, g), (-T \cos \theta, -T \sin \theta) \right) d\theta \right| \\ \leq T M(T) \int_{\theta_o}^{\theta_1} d\theta \leq 2\pi T M(T).$$

De (IV.1), (IV.2) e (IV.3) segue que

$$(V) \quad \int_{\gamma} f dx_2 - g dx_1 \geq 0$$

Mas de (III), (IV) e (V) chegamos a uma contradição. Portanto para qualquer p , $|p| < T$ temos que $p \in \Omega$. Logo, se $S < \infty$ o Teorema está provado.

Se $S = \infty$ nós podemos usar os argumentos para qualquer $S > 0$ e concluir que o Teorema vale também neste caso.

Esse Teorema demonstrado por Gassul e Sotomayor [3] é uma prova do resultado de lech (Teorem 1.1.1) e nos dá uma estimativa explicita do tamanho da bacia de atração Ω do ponto $(0, 0)$ para o campo X , que pode ser estimada estudando-se a desigualdade

$$L_S(R) - RM(R) \geq 0$$

Corolário 1.2.1 *Suponhamos que $S = \infty$, que o campo X satisfaz as hipóteses do Teorema 1.2.1 e a seguinte condição:*

$$L_{\infty}(r) = \infty, r \geq 0.$$

Então $x = 0$ é singularidade globalmente assintoticamente estável. Pois, neste caso, $D_{\infty} = \mathbb{R}^2$.

Demonstração: $L_{\infty}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_r^{\infty} m(s) ds = \infty$, se $r \geq 0$. Logo,

$$T := \sup \{ r; L_{\infty}(r) - rM(r) \geq 0 \} = \infty.$$

Demonstração do Teorema 1.1.1:

Foi provado anteriormente que a resposta afirmativa do Problema 1.1.1 implica a resposta afirmativa do Problema 1.1.2 .

Resta provar que a resposta do Problema 1.1.2 implica a resposta afirmativa do Problema 1.1.1. De fato, a injetividade e a hipótese (ii), implicam que se $X(0) = 0$, então existem $\rho > 0$ e $r_1 > 0$ tais que $|X(x)| \geq \rho$ se $|x| \geq r_1$. É fácil ver que a hipótese (i) do Problema 1.1.1 implica (a) do Teorema 1.2.1, onde, neste caso a função de Dulac é $B \equiv 1$; e que por (ii), (b) também é satisfeita. Logo, se $r < r_1$

$$L_\infty(r) = \frac{1}{2\pi} \int_r^\infty m(r) dr = \frac{1}{2\pi} \int_r^{r_1} m(r) dr + \int_{r_1}^\infty m(r) dr \geq \frac{1}{2\pi} \int_r^{r_1} m(r) dr + \rho \int_{r_1}^\infty dr = \infty,$$

se $r \geq r_1$, temos:

$$L_\infty(r) = \frac{1}{2\pi} \int_r^\infty m(r) dr \geq \rho \int_r^\infty dr = \infty$$

Pelo Corolário 1.2.1, como $L_\infty(r) = \infty$, $x = 0$ é uma singularidade globalmente assintoticamente estável.

Capítulo 2

Estabilidade Assintótica Global

Neste capítulo daremos um prova da injetividade da aplicação X do problema 1.1.2. A demonstração que faremos será baseada no trabalho de Carlos Gutierrez [3]. O teorema a ser provado é o seguinte:

Teorema A *Sejam $\rho \in [0, \infty)$ e $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação C^1 tal que, para todo $q \in \mathbb{R}^2$, o determinante de $DX(q)$ é positivo e além disso, para todo $p \in \mathbb{R}^2$, com $|p| \geq \rho$, o espectro de $DX(p)$ é disjunto do semi-eixo real não-negativo. Então X é injetora.*

Observação 1: Facilmente percebe-se que (i) e (ii) do Problema 1.1.1 são um caso particular das hipóteses do Teorema A.

Observação 2: Provaremos o Teorema A por contradição. Consideraremos que $X = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação C^2 , que satisfaz as hipóteses e não é injetora.

2.1 Definições preliminares

Definição 2.1 *Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação suave. Para todo $q \in \mathbb{R}^2$ denotaremos por $\nabla f^\perp(q)$ o campo vetorial que é ortogonal a $\nabla f(q)$, tal que $\{\nabla f(q), \nabla f^\perp(q)\}$ é uma base positiva de $\mathbb{R}^2$.*

Em outras palavras, $\nabla f^\perp$ é o campo Hamiltoniano.

Como consequência imediata das hipóteses do teorema A temos o seguinte:

- (A) para todo $q \in \mathbb{R}^2$, o campo Hamiltoniano $\nabla f^\perp(q)$ é sempre diferente de zero, ou seja, $\nabla f^\perp$ não tem singularidades em $\mathbb{R}^2$;
- (B) para todo $q \in \mathbb{R}^2$ tal que $|q| \geq \rho$, temos que $\nabla f(q) \notin (0, \infty) \times \{0\}$;
- (C) por (A) concluímos que $\nabla f^\perp$ não possui órbita periódica.

Não é difícil perceber que (A) é consequência do fato de que para todo $q \in \mathbb{R}^2$, $\det DX(q) > 0$; (B) vale porque o espectro de $DX(q)$ é disjunto do semi-eixo real não-negativo para todo $q \in \mathbb{R}^2$, tal que $|q| \geq \rho$; (C) segue simplesmente porque a existência de órbita periódica implicaria na existência de uma singularidade em seu interior (da órbita).

Definição 2.2 *Seja $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. $C\ell(\mathbb{R}^2)$ denotará o espaço dado pela união disjunta de $\mathbb{R}^2$ com S^1 e munido de uma topologia construída da seguinte forma: seja $\varphi : [0, 1) \rightarrow [0, \infty)$ um difeomorfismo que é a identidade em uma vizinhança da origem. Seja $G : \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ o difeomorfismo dado por $G(x + iy) = \varphi(x^2 + y^2) \cdot (x, y)$. Identificando $(x + iy)$ com $G(x + iy)$, obtemos uma topologia para $C\ell(\mathbb{R}^2)$ que é a induzida pela topologia do conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ e pela G . Assim $C\ell(\mathbb{R}^2)$ será um espaço compacto.*

O importante nessa definição é que estamos identificando o “infinito” com o S^1 e o conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ com o $\mathbb{R}^2$. Para todo $p \in \mathbb{R}^2$, seja $F_p^+ = F_p^+(t)$ (resp. $F_p^- = F_p^-(t)$) a semi-órbita positiva de $\nabla f^\perp$ que passa por p (resp. a semi-órbita negativa de $\nabla f^\perp$). Se $\mathcal{L}(F_p^\delta)$, $\delta \in \{+, -\}$ representa o conjunto limite de uma órbita F_p^+ de $\nabla f^\perp$, quando $t \rightarrow +\infty$ ou o limite de F_p^- quando $t \rightarrow -\infty$. Pelo Teorema de Poincaré-Bendixon e do fato de que $\nabla f^\perp$ não tem singularidades, o conjunto $\mathcal{L}(F_p^\delta)$, como um subconjunto de $C\ell(\mathbb{R}^2)$, é todo S^1 ou um sub-intervalo de S^1 fechado não vazio.

Definição 2.3 *Definimos um sub-intervalo de S^1 como segue: dados dois reais $\theta_1 \leq \theta_2$ tais que $\theta_2 - \theta_1 < 2\pi$, então*

$$\begin{aligned} [e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}] &= \{e^{i\theta} : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_1\} \\ (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}] &= \{e^{i\theta} : \theta_1 < \theta \leq \theta_1\} \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Definição 2.4 *Seja $\mu : (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação suave com $\mu'(1) = \mu(1) = 0$, $\mu''(1) < 0$, $\mu'(x) \neq 0$, para todo $x \neq 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \mu(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \mu(x) = -\infty$. A folheação em $[0, 2] \times \mathbb{R}$ cujas folhas são $\{0\} \times \mathbb{R}$, $\{2\} \times \mathbb{R}$ e os gráficos das funções $\mu + c$, onde $c \in \mathbb{R}$, é conhecida por componente de Reeb.*

Definição 2.5 *Seja $A \subset \mathbb{R}^2$, diremos que A é uma semi-componente de Reeb de $\nabla f^\perp$, se a folheação em A determinada pelas órbitas de $\nabla f^\perp$ é topologicamente equivalente à componente de Reeb restrita à variedade com fronteira $[0, 2] \times [0, \infty)$ de forma que se*

$$h : [0, 2] \times [0, \infty) \rightarrow A$$

é o homeomorfismo que determina a equivalência topológica e se $p_i = h((i, 0))$, então $[p_0, p_2] = h([0, 2] \times \{0\})$ é um segmento transversal à $\nabla f^\perp$ no complementar de $\{p_1\}$ e, para algum $\delta \in \{-, +\}$, $F_{p_0}^\delta = h(\{0\} \times [0, \infty))$ e $F_{p_2}^{-\delta} = h(\{2\} \times [0, \infty))$. Diremos que $F_{p_2}^{-\delta}$, $F_{p_0}^\delta$ e $[p_0, p_2]$ são respectivamente os lados não compactos e compacto da componente de Reeb A (veja figura 2.1)

Observação 3: A partir daqui chamaremos as semi-componentes Reeb, simplesmente, de componentes de Reeb.

Figura 2.1(componente de Reeb)

Definição 2.6 Sejam D uma sub-variedade de $\mathbb{R}^2$ com fronteira, $\gamma : [a, b] \rightarrow \partial D$ uma curva regular suave. Diremos que γ está à esquerda de D (resp. à direita de D), se para todo $s \in (a, b)$, $\gamma'^\perp(s)$ aponta para o interior de D (resp. $\gamma'^\perp(s)$ aponta para o exterior de D), onde $\gamma'^\perp(s)$ é tal que $\{\gamma'(s), \gamma'^\perp(s)\}$ forma uma base positiva de $\mathbb{R}^2$.

Definição 2.7 Seja X como no Teorema A. Definamos $X_\theta = H_\theta \circ X \circ H_\theta^{-1} = (f_\theta, g_\theta)$, onde $H_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ e $H_\theta^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

É fácil ver que X_θ satisfaz às hipóteses do Teorema A, pois,

$$DX_\theta(x, y) = H_\theta \circ X_{H_\theta(x, y)^{-1}} \circ H_\theta^{-1}$$

e portanto, (A), (B) e (C) também são satisfeitas para $\nabla f_\theta^\perp$.

Definição 2.8 Sejam $a, p, q \in \mathbb{R}^2$ tais que F_a, F_p e F_q são três trajetórias de $\nabla f^\perp$. Diremos que F_a está entre F_p e F_q se essas duas últimas estiverem em diferentes componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus F_a$. Seja $[F_p, F_q]$ o fecho da componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus (F_p \cup F_q)$ cuja fronteira é $F_p \cup F_q$. Uma região transversal de $[F_p, F_q]$ será uma componente conexa do conjunto formado pela união de $F_p \cup F_q$ com todas as trajetórias que estão entre F_p e F_q .

Definição 2.9 Sejam $p, q \in \mathbb{R}^2$ tais que $p \neq q$ e $X(p) = X(q) = 0$. Então F_p e F_q são disjuntas. Denotemos por $\Sigma(X, p, q)$ o conjunto de $\theta \in \mathbb{R}$ tal que as regiões transversais de $[F_p(\theta), F_q(\theta)]$ não se reduzem a uma única trajetória de $\nabla f_\theta^\perp$ (aqui, $F_p(\theta)$ é a órbita de $\nabla f_\theta^\perp$ que passa por $H_\theta(p)$). Seja $\Sigma_1(X, p, q) = \mathbb{R} \setminus \Sigma(X, p, q)$.

Facilmente percebe-se que

$$\Sigma_1(X_\theta, H_\theta(p), H_\theta(q)) = \Sigma_1(X, p, q) - \theta = \{t \in \mathbb{R} : t + \theta \in \Sigma_1(X, p, q)\}.$$

Definição 2.10 *Sejam $L_1, L_2, \dots, L_k$ aplicações suaves de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$ de classe C^1 (mergulhos) tais que cada uma divide o plano em duas componentes conexas. Diremos que $\{L_1, L_2, \dots, L_k\}$ é uma (p, q) -seqüência separante se, para todo $j \in \{1, 2, \dots, k\}$,*

$$\{p\} \cup L_1 \cup \dots \cup L_{j-1} \quad \text{e} \quad L_{j+1} \cup \dots \cup L_k \cup \{q\}$$

estão contidos em diferentes componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus L_j$.

Figura 2.2((p,q)-sequencia separante)

2.2 Um esboço da prova

Nesta seção usaremos resultados e faremos afirmações, que serão provadas na seção seguinte, para dar uma visão preliminar do desenvolvimento da prova do Teorema A.

A idéia principal da demonstração que faremos, consiste em estudar a forma como se relacionam as componentes de Reeb de $\nabla f_\theta^\perp$ (para todo $\theta \in (-\epsilon, \epsilon)$, onde $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno) e curvas suaves regulares em $\mathbb{R}^2$ com respeito a cruzamentos transversais e tangências.

Como estamos assumindo que a aplicação X não é injetora, existem p e q , $p \neq q$, tais que $X(p) = X(q) = 0$

Veremos (na página 15) que sob as hipóteses do Teorema A não existem curvas suaves regulares, ligando p à q , que satisfaçam a situação da Figura 2.3, mas sim, a existência de curvas como na Figura 2.4

Figura 2.3

Figura 2.4

Em outras palavras afirmamos que se ao longo de uma curva suave regular γ existirem componentes de Reeb de $\nabla f^\perp$ e órbitas de $\nabla f^\perp$ transversais a γ , então essas componentes de Reeb não podem estar sucessivamente do mesmo lado. Melhor dizendo, se duas componentes de Reeb de $\nabla f^\perp$ estiverem do mesmo lado de γ , então entre elas existirá uma outra componente de Reeb que estará do lado oposto.

Chamaremos de T_1 a primeira região transversal de $[F_p, F_q]$ e de C_1 a primeira componente de Reeb de $\nabla f^\perp$ associada a γ

Em seguida, para curvas γ como na Figura 2.4, estudaremos a relação entre $H_\theta(\gamma)$ e as componentes de reeb $C(\theta)$ de $\nabla f_\theta^\perp$. Nesse caso veremos (na página 39) que sempre conseguiremos construir uma curva λ_θ , ligando $H_\theta(p)$ à $H_\theta(q)$, a partir de γ , com as seguintes propriedades:

- entre duas componentes de Reeb $C_1(\theta)$ e $C_2(\theta)$ de $\nabla f_\theta^\perp$, que possuem como lados compactos arcos de λ_θ , existe região transversal com mais de uma trajetória de $\nabla f_\theta^\perp$.
- existirá pelo menos uma componente de Reeb cujo lado compacto é um arco de λ_θ .

Figura 2.5

Denotando por $T_0(\theta)$ a primeira região transversal de $[F_p(\theta), F_q(\theta)]$ e por $D_1(\theta)$ a primeira componente de Reeb de $\nabla f_\theta^\perp$ associada a λ_θ , diremos que $B_1(\theta) = T_0(\theta) \cap D_1(\theta)$, onde $\theta \in (-\epsilon, \epsilon)$ e $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno.

Para concluir veremos que $\{H_\theta^{-1}(B_1(\theta)), B_1(0)\}$ ou $\{B_1(0), H^{-1}(B_1(\theta))\}$ formam uma (p,q) -sequência separante conforme C_1 estiver à direita ou à esquerda de γ e $\theta > 0$ ou $\theta < 0$.

Figura 2.6

Conclusão da prova do Teorema A

Consideremos o caso em que C_1 está à direita de γ .

Com os resultados enunciados acima provaremos que para todo $\theta \in [0, \infty)$,

$$\{B_1(0), H_\theta^{-1}(B_1(\theta))\}$$

é uma (p,q) -sequência separante.

Assim, teremos uma contradição, pois $H_{2\pi}$ é a aplicação identidade e

$$\{B_1(0), H_{2\pi}^{-1}(B_1(2\pi))\}$$

não é uma (p,q) -sequência separante.

Figura 2.7

2.3 Prova do Teorema A

Nesta seção provaremos as proposições 2.3.1, 2.3.2 e 2.3.3, que serão usadas para provar os lemas 2.3.15 e 2.3.16. No final usaremos esses dois lemas para construirmos uma contradição.

Proposição 2.3.1

Sob as hipóteses do Teorema A não existe uma curva regular suave $\gamma : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que as seguintes propriedades sejam satisfeitas (veja Figura 2.3):

- (a) *para s, t tais que $1 < s \leq t < 2$, γ é transversal à $\nabla f^\perp$ em todos os pontos de $[0, 1] \cup [s, t] \cup [2, 3]$;*
- (b) *$\gamma([1, s])$ e $\gamma([t, 2])$ são lados compactos de duas componentes de Reeb de $\nabla f^\perp$ que estão do mesmo lado de γ , ou seja, ambas estão à esquerda ou à direita de γ .*

Para provarmos a Proposição 2.3.1 usaremos os Lemas 2.3.1 – 2.3.5 a seguir.

Lema 2.3.1

- (a) *Para todo $p \in \mathbb{R}^2$, a função*

$$\varphi(\theta) = \det(H_\theta(\nabla f^\perp(p)), \nabla f_\theta^\perp(H_\theta(p)))$$

satisfaz $\varphi(0) = 0$ e $\varphi'(0) = -\det(DX(P))$, onde $(H_\theta(\nabla f^\perp(p)))$ e $\nabla f_\theta^\perp(H_\theta(p))$ são o primeiro e o segundo vetores coluna da matriz considerada. Em outras palavras, para $\theta > 0$ pequeno, o vetor velocidade $H_\theta(\nabla f^\perp(p))$ da curva $t \rightarrow H_\theta(F_p^+(t))$, no ponto $H_\theta(p)$ e $\nabla f_\theta^\perp(H_\theta(p))$ formam uma base negativa.

- (b) *Sejam $p \in \mathbb{R}^2$ e $0 < \theta < \pi$ fixados arbitrariamente. As curvas de níveis de f_θ são transversais à $H_\theta(F_p)$.*

Demonstração: (a) Dados $v = (v_1, v_2)$, $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$, denotaremos por

$$(v, w) = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}.$$

Lembrando também que $v^\perp = (-v_2, v_1)$, temos o que segue.

$$\begin{pmatrix} v^\perp \\ w^\perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

$$\begin{pmatrix} -v \\ -w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^\perp \\ w^\perp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2 & v_1 \\ -w_2 & w_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$$\begin{pmatrix} -w \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Observemos que

$$\frac{d}{d\theta}H_\theta|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{d}{d\theta}H_\theta^{-1}|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}(H_\theta(\nabla f^\perp(x_1, x_2)))|_{\theta=0} &= \left(\frac{d}{d\theta}H_\theta|_{\theta=0}\right)(\nabla f^\perp(x)) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla f^\perp(x) \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \\ \end{pmatrix} \\ &= -\nabla f(x) \end{aligned}$$

onde $x = (x_1, x_2)$. Portanto temos que

$$\frac{d}{d\theta}(H_\theta(\nabla f^\perp(x)))|_{\theta=0} = -\nabla f(x). \quad (2.5)$$

Além disso, a expressão

$$DX_\theta(x) = H_\theta \circ DX_{H_\theta^{-1}(x)} \circ H_\theta^{-1}$$

pode ser escrita, para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, como

$$\begin{pmatrix} \nabla f_\theta(x) \\ \nabla g_\theta(x) \end{pmatrix} = H_\theta \circ \begin{pmatrix} \nabla f(H_\theta^{-1}(x)) \\ \nabla g(H_\theta^{-1}(x)) \end{pmatrix} \circ H_\theta^{-1} \quad (2.6)$$

que implica que, para todo $(x) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} \nabla f_\theta(H_\theta(x)) \\ \nabla g_\theta(H_\theta(x)) \end{pmatrix} = H_\theta \circ \begin{pmatrix} \nabla f((x)) \\ \nabla g((x)) \end{pmatrix} \circ H_\theta^{-1}$$

e desse modo (por (2.2)) que, para todo $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} \nabla f_\theta^\perp(H_\theta(x)) \\ \nabla g_\theta^\perp(H_\theta(x)) \end{pmatrix} = H_\theta \circ \begin{pmatrix} \nabla f(x) \\ \nabla g(x) \end{pmatrix} \circ H_\theta^{-1} \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, por (2.4),

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \begin{pmatrix} \nabla f_\theta^\perp(H_\theta(x)) \\ \nabla g_\theta^\perp(H_\theta(x)) \end{pmatrix} \Big|_{\theta=0} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla f(x) \\ \nabla g(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla f(x) \\ \nabla g(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla f^\perp(x) \\ \nabla g^\perp(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla f^\perp(x) \\ \nabla g^\perp(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} -\nabla g^\perp(x) \\ \nabla f^\perp(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\nabla f^\perp(x) \\ -\nabla g^\perp(x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\nabla g^\perp(x) - \nabla f^\perp(x) \\ \nabla f^\perp(x) - \nabla g^\perp(x) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\frac{d}{d\theta}(\nabla f_\theta^\perp(H_\theta(x)))\big|_{\theta=0} = -\nabla g^\perp(x) - \nabla f(x). \quad (2.7)$$

Portanto, usando (2.5),

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\theta} \left(\det(H_\theta(\nabla f^\perp(x)), \nabla f_\theta^\perp(H_\theta(x))) \right)\big|_{\theta=0} \\
&= \det \left(H_\theta(\nabla f^\perp(x))\big|_{\theta=0}, \frac{d}{d\theta}(\nabla f_\theta^\perp(H_\theta(x)))\big|_{\theta=0} \right) \\
&\quad + \det \left(\frac{d}{d\theta}(H_\theta(\nabla f^\perp(x)))\big|_{\theta=0}, \nabla f_\theta^\perp(H_\theta(x))\big|_{\theta=0} \right) \\
&= \det(\nabla f^\perp(x), -\nabla f(x) - \nabla g^\perp(x)) + \det(\nabla f^\perp(x), \nabla f(x)) \\
&= (\nabla f^\perp(x), -\nabla g^\perp(x)) \\
&= -\det \left[\begin{pmatrix} \nabla f^\perp(x) \\ \nabla g^\perp(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= -\det \begin{pmatrix} \nabla f(x) \\ \nabla g(x) \end{pmatrix} = -\det(DX(x)) < 0.
\end{aligned}$$

Como $\varphi'(0) = -\det(DX(x)) < 0$, segue que para $\varepsilon > 0$ pequeno, se $\theta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, então $\varphi'(\theta) < 0$ (por continuidade). Em outras palavras, φ é uma função estritamente decrescente, como função de θ . Além disso, como $\varphi(0) = 0$ temos que $\varphi(\theta) < 0$, se $\theta \in (0, \varepsilon)$ e $\varphi(\theta) > 0$ se $\theta \in (-\varepsilon, 0)$, isto é, $H_\theta(\nabla f(p))$ e $\nabla f_\theta^\perp(H_\theta(p))$ formam uma base negativa de $\mathbb{R}^2$ (resp. formam base positiva de $\mathbb{R}^2$) se $\theta \in (0, \varepsilon)$ (resp. $\theta \in (-\varepsilon, 0)$).

(b) Sejam $p \in \mathbb{R}^2$ e $\theta \in (0, \pi)$ fixados arbitrariamente. Seja $\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow F_p$ uma parametrização global de F_p . Como f é uma curva integral de $\nabla f^\perp$, implica que $f(\lambda(t)) = f(p)$; isto é,

$$\text{para todo } t \in \mathbb{R}, \text{ a primeira coordenada de } DX(\lambda(t)).(\lambda(t)) \text{ é nula, ou seja,} \quad (2.8)$$

$df(\lambda(t)).(\lambda(t))$ é zero. Além disso, como para todo $q \in \mathbb{R}^2$, $DX(q)$ é inversível,

$$\text{para todo } t \in \mathbb{R}, dg(\lambda(t)).(\lambda(t)) \text{ é diferente de zero.} \quad (2.9)$$

Como $\begin{pmatrix} f_\theta \\ g_\theta \end{pmatrix} = X_\theta = H_\theta \circ X \circ H_\theta^{-1}$, segue que

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} f_\theta(H_\theta(\lambda(t))) \\ g_\theta(H_\theta(\lambda(t))) \end{pmatrix} &= X_\theta \circ H_\theta(\gamma(t)) = H_\theta \circ X(\lambda(t)) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(\lambda(t)) \\ g(\lambda(t)) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \theta f(\lambda(t)) - \sin \theta g(\lambda(t)) \\ \sin \theta f(\lambda(t)) + \cos \theta g(\lambda(t)) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

daí, concluímos que

$$\begin{aligned} f_\theta(H_\theta(\lambda(t))) &= \cos \theta f(\lambda(t)) - \sin \theta g(\lambda(t)) \quad \text{e} \\ \frac{d}{dt}[f_\theta(H_\theta(\lambda(t)))] &= \cos \theta [f(\lambda(t))]' - \sin \theta [g(\lambda(t))]' = -\sin \theta [g(\lambda(t))]' . \end{aligned}$$

Então, usando (2.8) e (2.9), concluímos que

$$\frac{d}{dt}[f_\theta(H_\theta(\lambda(t)))] \neq 0, \text{ para } p \in \mathbb{R}^2 \text{ e } \theta \in (0, \pi) \text{ fixados.} \quad (2.10)$$

(2.10) implica na transversalidade entre f_θ e $H_\theta(F_p)$ (veja figura 2.8).

Figura 2.8

Lema 2.3.2 *Seja C uma curva simples fechada e formada por um arco de trajetória $[p, q]_f$ (arco fechado) de $\nabla f^\perp$ e um segmento $[p, q]$ que se encontram transversalmente em $\{p, q\}$. Seja $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\pi_1(x_1, x_2) = x_1$. Suponhamos que C está contida no complementar da bola de raio $\rho + 1$ centrada na origem. Se ∇f aponta para o interior (resp. para o exterior) do conjunto limitado por C , ao longo de $(p, q)_f$ (arco aberto), então $\inf(\pi_1([p, q]_f)) = \xi_2 \geq \xi_1 = \inf(\pi_1([p, q]))$ (resp. $\sup(\pi_1([p, q]_f)) = \bar{\xi}_2 \leq \bar{\xi}_1 = \sup(\pi_1([p, q]))$).*

Demonstração: Consideremos somente o caso em que ∇f aponta para o interior de C ao longo de $(p, q)_f$. Assumamos por contradição que $\inf(\pi_1([p, q]_f)) = \xi_2 < \xi_1$ e seja $(\xi_2, y_2) \in [p, q]_f$.

Figura 2.9

Podemos pegar uma vizinhança V de $[p, q]$, de forma que $(\xi_2, y_2) \notin V$. Por outro lado, o plano $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < \xi_2\}$ é disjunto de C e como ∇f aponta para o interior de C em (ξ_2, y_2) , segue que $\nabla f(\xi_2, y_2) \in (0, \infty) \times \{0\}$. Isso é uma contradição por (B).

Lema 2.3.3 *Suponhamos que $F_{p_1}^+$, $F_{p_3}^-$ e $[p_1, p_3]$ são lados de uma componente de Reeb C . Suponhamos que C está contida no complementar da bola compacta de raio $\rho + 1$ centrada na origem. Se ∇f aponta para o interior de C (resp. para fora de C) ao longo de $F_{p_1}^+ \cup F_{p_3}^-$, então*

- (a) $C \subset \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq \xi_1 = \inf(\pi_1([p_1, p_3]))\}$ (resp. $C \subset \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq \bar{\xi}_1 = \sup(\pi_1([p_1, p_3]))\}$).

Em particular,

- (b) $[\theta_1^-, \theta_1^+] \cup [\theta_3^-, \theta_3^+] \subset [-\pi/2, \pi/2]$
(resp. $[\theta_1^-, \theta_1^+] \cup [\theta_3^-, \theta_3^+] \subset [\pi/2, 3\pi/2]$) onde

$$\mathcal{L}(F_{p_1}^+) = [e^{i\theta_1^-}, e^{i\theta_1^+}] \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(F_{p_3}^-) = [e^{i\theta_3^-}, e^{i\theta_3^+}] .$$

Além disso,

- (3) $\theta_1^+ \geq \theta_3^+$ e $\theta_1^- \geq \theta_3^-$.
(resp. $\theta_1^+ \leq \theta_3^+$ e $\theta_1^- \leq \theta_3^-$).

Demonstração: Consideremos unicamente o caso em que ∇f invade C ao longo de $F_{p_1}^+ \cup F_{p_3}^- \setminus \{p_1, p_3\}$. Seja $\gamma : [1, 3] \rightarrow [p_1, p_3]$ uma parametrização tal que $\gamma(s) = p_s$, para $s \in \{1, 3\}$.

Sejam $1 < s < t < 3$ tais que $\gamma(s)$ e $\gamma(t)$ são pontos extremos de um arco de trajetória de $\nabla f^\perp$ que está contida em C .

Apliquemos o Lema 2.3.2 para a curva simples fechada $[\gamma(s), \gamma(t)]_f \cup \gamma([s, t])$.

Figura 2.10

Concluimos, então que $\inf(\pi_1([\gamma(s), \gamma(t)]_f)) \geq \inf(\pi_1(\gamma([s, t])))$. Pela arbitrariedade de s e t , seguem (a) e (b).

Afirmção: $F_{p_1}^+$ encontrará $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = \xi_1\}$ no máximo em p_1 .

De fato, suponhamos que existe $q = (\xi_1, y_1) \in F_{p_1}^+ \setminus \{p_1\}$, então, por (a) e (b) deste lema, $\nabla f^\perp(q)$ é tangente ao conjunto $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = \xi_1\}$. Mas, pela propriedade (B) $\nabla f^\perp(q) \in \{0\} \times (-\infty, 0)$. Pelo fato de C estar à direita de $F_{p_1}^+$, existem pontos de C no plano $\{(x_1, x_2), x_1 < \xi_1\}$. Isso é uma contradição com (a) e (b). Logo, a afirmação acima é verdadeira (veja Figura 2.11).

Figura 2.11

(a') não pode ocorrer por (B) e (b') não pode ocorrer por (a) e (b), isto é, poque existiriam pontos de C pertencentes ao conjunto $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < \xi_1\}$. Assim, a única situação possível é o da Figura 2.12.

Figura 2.12

onde (ξ_1, y_1) pode ser igual a p_1 .

A figura 2.12 divide o plano em três componentes conexas abertas e disjuntas Δ_1 , Δ_2 e Δ_3 , onde

$$\begin{aligned} \partial\Delta_1 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = \xi_1 \text{ e } x_2 \leq y_1\} \cup [p_1 \cup p'_1] \cup F_{p_1}^+ \\ \partial\Delta_2 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = \xi_1 \text{ e } x_2 \geq y_1\} \cup [p_1, p'_1] \cup F_{p_1}^+ \\ \partial\Delta_3 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = \xi_1\} . \end{aligned}$$

Portanto, temos que a componente de Reeb C está inteiramente contida em $\Delta_1 \cup \partial\Delta_1$ e isso garante que (c) é verdadeira porque F_{p_1} e F_{p_3} são disjuntas.

Lema 2.3.4 *Seja $\gamma : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva tal que $(f \circ \gamma)'(s)$ se anula exatamente em $s = 2$ e $(f \circ \gamma)''(2) = c \neq 0$. Se $\gamma([1, 3])$ é a margem compacta de uma componente Reeb*

C de $\nabla f^\perp$ então, para algum $\varepsilon > 0$, existem funções monótonas contínuas

$$L, R, \tau : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow [0, 4]$$

tais que $L(0) = 1$, $\tau(0) = 2$, $R(0) = 3$ e

- (a) $\frac{d}{ds}(f_\theta \circ H_\theta \circ \gamma(s))$ se anula exatamente em $s = \tau(\theta)$ e, para todo $\theta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\frac{d^2}{ds^2}(f_\theta \circ H_\theta \circ \gamma(\tau(\theta))) \neq 0$;
- (b) $H_\theta \circ \gamma([L(\theta), R(\theta)])$ é a margem compacta de uma componente de Reeb $C(\theta)$ de $\nabla f_\theta^\perp$;
- (c) cada uma das seguintes propriedades possíveis não dependem de θ ;
 - (c1) $C(\theta)$ está à esquerda de $H_\theta \circ \gamma$;
 - (c2) $C(\theta)$ está à direita de $H_\theta \circ \gamma$;
 - (c3) ∇f_θ aponta para o interior de $C(\theta)$;
 - (c4) ∇f_θ aponta para fora de $C(\theta)$;
- (d) se C estiver à esquerda (resp. à direita) de γ , então $L(\theta)$, $\tau(\theta)$, $R(\theta)$ são estritamente decrescentes (resp. estritamente crescentes);
- (e) se F_r^+ e $F_{\bar{r}}^-$, com $r, \bar{r} \in \{p_1, p_3\}$, são respectivamente trajetórias positivas e negativas que são margens de C , então $\{e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\frac{3\pi}{2}}\}$ é disjunto de $\mathcal{L}(F_r^+) \cup (F_{\bar{r}}^-)$.

Demonstração: Como

$$\begin{pmatrix} f_\theta \\ g_\theta \end{pmatrix} = X_\theta \doteq H_\theta \circ X \circ H_\theta^{-1}$$

temos que

$$\begin{aligned} f_\theta(H_\theta(\gamma(s))) &= \cos \theta \cdot f(\gamma(s)) - \sin \theta g(\gamma(s)) \\ \text{e } DX_\theta(H_\theta(\gamma(s))) &= H_\theta \circ DX(\gamma(s)) \circ H_\theta^{-1} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \begin{pmatrix} f_\theta(H_\theta(\gamma(s))) \\ g_\theta(H_\theta(\gamma(s))) \end{pmatrix} &= \frac{d}{ds}(X_\theta \circ H_\theta(\gamma(s))) \\ &= DX_\theta(H_\theta(\gamma(s))) \frac{d}{ds}(H_\theta \circ \gamma(s)) . \end{aligned}$$

De (2.11),

$$\begin{aligned} &= H_\theta \circ DX(\gamma(s)) \circ H_\theta^{-1} \cdot H_\theta \cdot \gamma'(s) = H_\theta \circ DX(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) \\ &= H_\theta \left(\frac{d}{ds}(X \circ \gamma(s)) \right) = H_\theta \begin{pmatrix} (f \circ \gamma)'(s) \\ (g \circ \gamma)'(s) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta (f \circ \gamma)'(s) - \sin \theta (g \circ \gamma)'(s) \\ \sin \theta (f \circ \gamma)'(s) + \cos \theta (g \circ \gamma)'(s) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\Delta(\theta, s) &= \frac{d}{ds}(f_\theta(H_\theta(\gamma(s)))) \\ &= \cos \theta (f \circ \gamma)'(s) - \sin \theta (g \circ \gamma)'(s)\end{aligned}\quad (2.12)$$

Como $\Delta(0, 2) = \cos(0)(f \circ \gamma)'(2) - 0 \cdot (g \circ \gamma)'(2) = 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\Delta(\theta, s) &= \frac{\partial}{\partial s}[\cos \theta (f \circ \gamma)'(s) - \sin \theta (g \circ \gamma)'(s)] \\ &= \cos \theta (f \circ \gamma)''(s) - \sin \theta (g \circ \gamma)''(s)\end{aligned}$$

e $\frac{\partial}{\partial s}\Delta(0, 2) = (f \circ \gamma)''(2) = c \neq 0$, segue, do teorema da função implícita, que existe uma função C^1 $\tau : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow [0, 4]$ tal que $\Delta(\theta, \tau(\theta)) \equiv 0$, onde $\Delta(0, 2) = 0$ e $\tau(0) = 2$. Segue que

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \theta}(0, 2) + \frac{\partial \Delta}{\partial s}(0, 2)\tau'(0) = -(g \circ \gamma)'(2) + (f \circ \gamma)''(2)\tau'(0) = 0$$

e, portanto,

$$\tau'(0) = \frac{(g \circ \gamma)'(2)}{(f \circ \gamma)''(2)} \quad (2.13)$$

Agora, afirmamos que

$$\text{se } C \text{ estiver à esquerda de } \gamma, \text{ então } \tau'(0) < 0. \quad (2.14)$$

De fato, supondo inicialmente que ∇f aponta para o interior de C , como $(f \circ \gamma)'(s) = \nabla f(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) > 0$, para todo s tal que $\gamma(s) \in (p_1, p_2)_\gamma$ e $(f \circ \gamma)'(s) = \nabla f(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) < 0$, para todo s tal que $\gamma(s) \in (p_2, p_3)_\gamma$, então $f \circ \gamma$ tem um máximo em $s = 2$ e, portanto, $(f \circ \gamma)''(2) < 0$. Além disso, como $\{\nabla f(\gamma(2)), \gamma'(2)\}$ forma uma base positiva de $\mathbb{R}^2$ e pela hipótese $\det(DX(P)) > 0$, para todo $p \in \mathbb{R}^2$, $\{\nabla f(\gamma(2)), \nabla g(\gamma(2))\}$ também forma uma base positiva de $\mathbb{R}^2$; temos que $(g \circ \gamma)'(2) > 0$. Logo, por (2.13), $\tau'(0) < 0$.

Supondo que ∇f aponta para fora de C , similarmente, como acima, veremos que $(f \circ \gamma)''(2) > 0$ e $(g \circ \gamma)'(2) < 0$ e, desse modo, veremos que $(f \circ \gamma)''(2) > 0$ e $(g \circ \gamma)'(2) < 0$. Veja Figura 2.13.

Desta forma temos: (1^o) $\frac{d}{ds}(f_\theta(H_\theta(\gamma(s)))) = \Delta(\theta, s)$ é identicamente nula (2.15) se $\tau(\theta) = s$, pois $0 \equiv \Delta(\theta, \tau(\theta)) = \frac{d}{ds}(f_\theta(H_\theta(\gamma(\tau(\theta))))$; (2^o) se C estiver à esquerda de γ (resp. à direita de γ), $\tau(\theta)$ é uma função estritamente decrescente (resp. estritamente crescente) como função de $\theta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ bastante pequeno; (3^o) como $(f \circ \gamma)''(s)|_{s=2} = \frac{d^2}{ds^2}(f_\theta(H_\theta(\gamma(s))))|_{\substack{\theta=0 \\ s=\tau(0)}} \neq 0$ então,

por continuidade, para $\theta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, implica que $\frac{d^2}{ds^2}(f_\theta(H_\theta(\gamma(s)))) \neq 0$, para $s = \tau(\theta)$. (2.16)

Figura 2.13

Assim, (a) segue de (2.15) e (2.16).

Para provarmos (b) consideremos unicamente o caso em que C está à esquerda de γ e ∇f aponta para o interior de C . (2.17)

Seja $0 < \delta < 1$ dado. Pelas hipóteses deste lema, $f \circ \gamma(1 - \delta) \notin f \circ \gamma([1, 3])$.

Além disso, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\text{para todo } \theta \in [-\varepsilon, \varepsilon], f_\theta(H_\theta \circ \gamma(1 - s)) \notin f_\theta(H_\theta \circ \gamma([1, 3])). \quad (2.18)$$

Observemos que (2.18) segue porque $f_\theta(H_\theta \circ \gamma(s))$ depende de θ diferenciavelmente.

Como $\nabla f_\theta^\perp$ depende diferenciavelmente de θ e do comportamento das trajetórias de $\nabla f^\perp$ em C , se $\varepsilon > 0$ é bastante pequeno, para cada $\theta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ existe uma componente de Reeb associada à $\nabla f_\theta^\perp$ que depende de C . Em outras palavras, próximo a uma componente de Reeb C de $\nabla f^\perp$ existe uma componente Reeb de $\nabla f_\theta^\perp$ (veja Figura 2.14). (2.19)

A figura 2.14 é uma consequência da parte (a) deste lema, do Lema 2.3.1(b) e de (2.19).

Figura 2.14

Do exposto, segue que para $\theta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, bastante pequeno, existe uma aplicação contínua que inverte orientação $T_\theta : (L(\theta), \tau(\theta)) \rightarrow [\tau(\theta), 4]$ tal que

$$T_\theta(\tau(\theta)) = \tau(\theta) \text{ e, para todo } s \in (L(\theta), \tau(\theta)), \text{ existe um arco de trajetória } M_s^\theta \text{ de } \nabla f_\theta^\perp \text{ partindo de } H_\theta(\gamma(s)) \text{ e terminando em } H_\theta(\gamma(T_\theta(s))). \quad (2.20)$$

Como f_θ é constante ao longo de cada arco M_s^θ de $\nabla f_\theta^\perp$, temos por (2.18) que $1 - \delta \leq L(\theta)$.

Como $\tau(0) = 2$ e τ é estritamente decrescente, implica que se $\theta \in (0, \varepsilon)$, então $\tau(\theta) < 2$ e pelo Lema 2.3.1 segue que, também, podemos pegar $L(\theta) < 1$.

Figura 2.15

Disso segue que $\lim_{s \rightarrow L(\theta)} T_\theta(s) = R(\theta) < 3$. Além disso, se $L(\theta)$ é determinada de modo que $(L(\theta), \tau(\theta)]$ é o intervalo maximal onde T está definida, portanto, satisfazendo (b), teremos que:

$$\text{se } \theta \in (0, \varepsilon), \quad 1 - \delta \leq L(\theta) < 1. \quad (2.21)$$

Do mesmo modo, podemos usar o Lema 2.3.1(b) para provar que:

$$\text{Se } \varepsilon > 0 \text{ é bastante pequeno e } \theta \in (-\varepsilon, 0), \text{ então } 1 < L(\theta) < 1 + \delta. \quad (2.22)$$

É importante observar que no Lema 2.3.1(b) se $\theta \in (-\varepsilon, 0)$, então $H_\theta(\nabla f^\perp(p))$ e $\nabla f_\theta^\perp(H_\theta(p))$ formam uma base positiva de $\mathbb{R}^2$ em $H_\theta(p)$.

Figura 2.16

Isso prova que $\theta \rightarrow L(\theta)$ é contínua e estritamente decrescente.

De maneira análoga, podemos provar que $R(\theta)$ é contínua e decrescente.

Seja $B(0, \rho + 1)$ a bola compacta de raio $\rho + 1$ centrado na origem. Para provar (e), observe que C contém uma componente de Reeb $\tilde{C} \subset \mathbb{R}^2 \setminus B(0, \rho + 1)$ tal que os lados de $\tilde{C}$, que são semi-trajetórias, estão contidas em $F_r^+ \cup F_r^-$. Como as conclusões em (e) referem-se somente ao conjunto limite $\mathcal{L}(F_r^+)$ e $\mathcal{L}(F_r^-)$, podemos supor que C é disjunta de $B(0, \rho + 1)$.

Para provar (e), consideremos o caso em que ∇f aponta para o interior de C ao longo de $\partial C \setminus [p_1, p_2]_\gamma$ e C está à esquerda de γ . Essa hipótese implica que

$$p_1 = p_r \quad (2.23)$$

Como a requerida conclusão de (e) está relacionada à $F_{p_1}^+$ e $F_{p_3}^-$, podemos assumir, por meio de uma pequena perturbação de γ que, quando $\varepsilon > 0$ é bastante pequeno, para $\theta \in [0, \varepsilon)$, $\nabla f_\theta^\perp$ e a folheação vertical (isto é, a construída pelas linhas $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 = c\}$, encontram transversalmente H_θ o γ nos pontos $H_\theta \circ \gamma(0)$ e $H_\theta \circ \gamma(4)$. Portanto existe um ponto $m_\theta = \inf(\pi_1 \circ \gamma([0, 4]))$ e se $m_\theta \notin \{H_\theta \circ \gamma(0), H_\theta \circ \gamma(4)\}$, então $H_\theta \circ \gamma$ tem contato quadrático com $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_1(\theta)\}$ em $(x_1(\theta), x_2(\theta)) = m_\theta$. (2.24)

Figura 2.17

Agora,

$$\text{fixado } \theta \in (0, \varepsilon) . \quad (2.25)$$

Assumamos, por contradição, que

$$e^{i\pi/2} \in \mathcal{L}(F_{p_1}^+) . \quad (2.26)$$

Afirmamos que se $\varepsilon > 0$ é bastante pequeno

$$H_\theta(F_{p_1}^+) \text{ cruza } \{(x_1, x_2) : x_1 = x_1(\theta)\} \text{ em um ponto } n_\theta = (x_1(\theta), z_\theta) \text{ com } z_\theta > x_2(\theta) \text{ (veja Figura 2.37).} \quad (2.27)$$

De fato, primeiro observemos que se $p_1 = m_0 = (x_1(0), x_2(0))$, então, pela propriedade (B), $\nabla f^\perp(p_1)$ tem primeira coordenada positiva e além disso, se $\varepsilon > 0$ é pequeno e, portanto, $(x_1(\theta), x_2(\theta))$ está muito próximo à $H_\theta(x_1(0), x_2(0))$, então $H_\theta(F_{p_1}^+ \setminus \{p_1\})$ não pode encontrar o segmento de $H_\theta \circ \gamma$ com extremos $H_\theta(x_1(0), x_2(0))$ e $(x_1(\theta), x_2(\theta)) = m_\theta$ (Figura 2.18).

Figura 2.18

Se $p_1 \neq m_0$, então $\varepsilon > 0$ pode ser pego bastante pequeno de forma que $(x_1(\theta), x_2(\theta))$, $(x_1(0), x_2(0))$ e $H_\theta(x_1(0), x_2(0))$ sejam muito próximos e, portanto, $H_\theta(F_{p_1}^+)$ não pode encontrar o subsegmento de $H_\theta \circ \gamma$ com pontos extremos $H_\theta(x_1(0), x_2(0))$ e m_θ (ver Figura 2.19).

Figura 2.19

Como pelo Lema 2.3.2 e (2.24), $H_\theta(F_{p_1}^+) \subset H_\theta\{(x_1, x_2) : x_1 \geq x_1(0)\}$ devemos ter que $H_\theta(F_{p_1}^+)$ não encontra o conjunto $\{(x, y) : x = x_1(0) \text{ e } y \leq x_2(0)\}$. Além disso, por (2.26), $e^{i(\frac{\pi}{2} + \theta)} \in \mathcal{L}(H_\theta(F_{p_1}^+))$. Isto mostra que (2.27) é verdadeira.

Agora, consideremos o disco D limitado pelo segmento em linha reta $[m_\theta, n_\theta]$, o subarco $[H_\theta(p_1), n_\theta]$ de $H_\theta(F_{p_1}^+)$ e o segmento $[H_\theta(p_1), m_\theta]_{H_\theta \circ \gamma}$ de $H_\theta \circ \gamma$. Se $[H_\theta(p_1), n_\theta]$ tem uma orientação induzida pela orientação de $H_\theta(F_{p_1}^+)$, então como $[m_\theta, n_\theta]$ está à esquerda de $[H_\theta(p_1), n_\theta]$,

$$D \text{ está à esquerda de } [H_\theta(p_1), n_\theta]. \quad (2.28)$$

Segue do Lema 2.3.1 que o arco orientado M_s^θ introduzido em (2.20), encontra $[H_\theta(p_1), n_\theta]$ exatamente uma vez e transversalmente e, quando isto ocorre, é no sentido da esquerda de $[H_\theta(p_1), n_\theta]$ para a direita de $[H_\theta(p_1), n_\theta]$. Seja K_s^θ o subarco de M_s^θ partindo de $H_\theta(\gamma(s))$ e terminando em $M_s^\theta \cap [H_\theta(p_1), n_\theta]$. Sob essas circunstâncias, segue de (2.28) que, para $s < 1$, muito próximo a 1, $K_s^\theta \subset D$. Vejamos a Figura 2.20.

Figura 2.20

Afirmamos que

$$S^* := \inf\{s : K_s^\theta \subset D\} = L(\theta) \quad (2.29)$$

Assumamos, por contradição, que $L(\theta) < s^*$. Então $K_{s^*}^\theta$ é disjunto de $[m_\theta, n_\theta]$, porque de outro modo um arco K_s^θ , com $s < s^*$ próximo à s^* , encontrará $\{(x, y) : x < x_\theta\}$ contrariando o Lema 2.3.3. Também $K_{s^*}^\theta$ é disjunto de $[H_\theta(p_1), m_\theta]_{H_\theta \circ \gamma}$, porque de outro jeito $K_{s^*}^\theta \cap [H_\theta(p_1), m_\theta] = H_\theta(\gamma(\tau(\theta)))$. Portanto, por (a), $f_\theta(H_\theta(\gamma(\tau(\theta)))) \neq f_\theta(K_{s^*}^\theta)$. Isso implica na existência de $s < s^*$ tal que M_s^θ encontra $[H_\theta(p_1), n_\theta]$, que é uma contradição com o fato de s^* ser ínfimo, pois, existe $K_s^\theta \subset D$ com $s < s^*$.

Segue da estrutura das trajetórias de $\nabla f^\perp|_C$ e do Lema 2.3.1 que o arco de trajetória de $\nabla f_\theta^\perp$ partindo em um ponto de $[H_\theta(p_1), n_\theta]$ deve encontrar $H \circ \gamma$. Isso e (2.29) implicam que existe um arco $M_{L(\theta)}^\theta$ de $\nabla f_\theta^\perp$ que contradiz a propriedade assumida por $L(\theta)$ em (b). Logo, (e) está provada (veja Figura 2.21).

Figura 2.21

Lema 2.3.5 *Seja $\gamma : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva tal que γ restrita a $[0, 1]$ é transversal à $\nabla f^\perp$*

e $\gamma([1, 3])$ é a margem compacta de uma componente de Reeb C de $\nabla f^\perp$.

(a) Se C está à esquerda (resp. à direita) de γ e suas margens não compactas são $F_{\gamma(1)}^+$ e $F_{\gamma(3)}^-$ então

$$\mathcal{L}(F_{\gamma(0)}^+) \subset (e^{-i\pi/2}, e^{i\pi/2}]$$

(resp. $\mathcal{L}(F_{\gamma(0)}^+) \subset [e^{i\pi/2}, e^{3i\pi/2})$.)

(b) Se C está à esquerda (resp. à direita) de γ e suas margens não compactas são $F_{\gamma(1)}^-$ e $F_{\gamma(3)}^+$ então

$$\mathcal{L}(F_{\gamma(0)}^-) \subset (e^{i\pi/2}, e^{3i\pi/2}]$$

(resp. $\mathcal{L}(F_{\gamma(0)}^-) \subset [e^{-i\pi/2}, e^{i\pi/2})$).

Demonstração: Consideremos somente o caso em que $F_{\gamma(1)}^+$ é um lado de C e C está à direita de γ .

No que segue, $B(0, \tilde{\rho})$ denotará a bola compacta de raio $\tilde{\rho}$ centrada na origem. Como as conclusões em (e) referem-se somente ao conjunto limite $\mathcal{L}(F_r^+)$, $\mathcal{L}(F_r^-)$ e $\mathcal{L}(F_{\gamma(0)}^+)$, pelos mesmos argumentos usados na prova do Lema 2.3.4(e), podemos supor que $C \cup F_{\gamma(0)}^+$ é disjunto de $B(0, \rho + 3)$.

Observemos que $\gamma([0, 1])$ pode ou não encontrar $B(0, \rho)$.

Seja (ξ_1, ξ_2) ponto de $\gamma([0, 3])$ tal que $\xi_1 = \inf(\pi_1(\gamma([0, 3])))$ e $\{(\xi_1, x_2) : x_2 > \xi_2\}$ é disjunto de $\gamma([0, 1])$, onde $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é a projeção na primeira coordenada.

Suponhamos por contradição que

$$\mathcal{L}(F_{\gamma(0)}^+) \text{ não está contida em } (e^{-i\pi/2}, e^{i\pi/2}]. \quad (2.30)$$

Pelos mesmos argumentos da prova de (e) do Lema 2.3.4, $F_{\gamma(0)}^+$ deve cruzar transversalmente $\{x_1 = \xi_1\}$ em algum (ξ_1, ξ'_2) com $\xi'_2 > \xi_2$. Isso implica que existe $p \in F_{\gamma(0)}^+$ próximo à (ξ_1, ξ'_2) tal que

$$\begin{aligned} \xi_1 = \inf(\pi_1(\gamma([0, 3]))) > \pi_1(p), \nabla f^\perp(p) \text{ tem primeira coordenada negativa e,} \\ \text{para algum } \varepsilon > 0 \text{ e para todo } \xi_0 \in [\pi_1(p) - \varepsilon_1(p) + \varepsilon], \text{ o arco de trajetória} \\ [\gamma(0), p]_f \text{ de } \nabla f^\perp \text{ encontra } \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = \xi_0\} \text{ exatamente uma vez e} \\ \text{transversalmente em um ponto pertencente à } \mathbb{R} \setminus B(0, \rho + 2). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Como pelos Lemas 2.3.2, 2.3.3 e 2.3.4(e), $\mathcal{L}(F_{\gamma(1)}^+) \subset (e^{-i\pi/2}, e^{i\pi/2})$ e $F_{\gamma(1)}^+ \subset \{(x_1, x_2) : x_1 \geq \xi_1\}$, podemos usar argumento similares aos feitos em (2.31) acima, para garantir a existência de $q \in F_{\gamma(1)}^+$ tal que

$$\begin{aligned} \sup(\pi_1(\gamma([0, 3]))) < \pi_1(q), \nabla f^\perp(q) \text{ tem primeira coordenada positiva e para} \\ \text{algum } \varepsilon > 0 \text{ e para todo } \xi_0 \in [\pi_1(q) - \varepsilon_1(q) + \varepsilon], \text{ o arco de trajetória} \\ [\gamma(0), q]_f \text{ de } \nabla f^\perp \text{ encontra } \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = \xi_0\} \text{ exatamente uma vez e} \\ \text{transversalmente em um ponto pertencente à } \mathbb{R} \setminus B(0, \rho + 2). \end{aligned} \quad (2.32)$$

(a)

(b)

Figura 2.22

Figura 2.23

Figura 2.24

Figura 2.25

Podemos aproximar a curva diferenciável por partes $[\gamma(0), p]_f \cup [\gamma(0), \gamma(1)]_\gamma \cup [\gamma(1), q]_f$ por um mergulho $\lambda : [0, 1] \rightarrow [\pi_1(p), \pi_1(q)] \times \mathbb{R}$ que conecta $p = \lambda(0)$ com $q = \lambda(3)$ transversalmente à $\nabla f^\perp$, e de forma que $\nabla f^\perp$ satisfaz a seguinte condição em λ : para todo $s \in [0, 3]$, o conjunto $\{\gamma'(s), \nabla f(\lambda(s))\}$ é uma base negativa, e para todo $\xi_0 \in [\pi_1(p) - \varepsilon, \pi_1(p) + \varepsilon] \cup [\pi_1(q) - \varepsilon, \pi_1(q) + \varepsilon]$ (com $\varepsilon > 0$ como em (2.31) e (2.32) acima), λ encontra $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = \xi_0\}$ uma única vez e transversalmente.

A curva $\nabla f^\perp \circ \lambda : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ conecta $\nabla f^\perp(p)$ (tendo primeira coordenada negativa) com $\nabla f^\perp(q)$ (tendo primeira coordenada positiva).

Seja o difeomorfismo $t \rightarrow G_t$, $t \in [0, 1]$, do $\mathbb{R}^2$, tal que

G_0 é a aplicação identidade. Para todo $t \in [0, 1]$, G_t restrita ao complementar de $(\pi_1(p) + \varepsilon, \pi_1(q) - \varepsilon) \times \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$ é a aplicação identidade. A imagem de $G_1 \circ \lambda$ é o gráfico de uma função $[\pi_1(p), \pi_1(q)] \rightarrow \mathbb{R}$. (2.33)

Figura 2.26

Isso implica que se $Y(t) = (DG_1)_{\lambda(t)} \cdot \nabla f(\lambda(t))$, então $Y(t)$ satisfaz a seguinte condição: para todo $t \in [0, 3]$ o conjunto $\{G_1 \circ \lambda'(t), Y(t)\}$ forma uma base negativa e, por (2.33), $Y(t)$ não encontra o conjunto $\{(0, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 < 0\}$; onde essa última afirmação segue pelo fato de $G_1 \circ \lambda$ ser gráfico.

Existe uma vizinhança $V(p, q)$ de $\{p, q\}$ tal que λ é homotópica, com $V(p, q)$ fixada, à uma curva suave (mergulho)

$$\mu : [0, 3] \rightarrow ([\pi_1(p), \pi_1(q)] \times \mathbb{R}) \setminus B(0, \rho + 1),$$

de forma que, para todo $\xi_0 \in [\pi_1(p), \pi_1(p) + \varepsilon] \cup [\pi_1(q) - \varepsilon, \pi_1(q)]$ (com $\varepsilon > 0$ como em (2.31) e (2.32) acima). μ encontra o conjunto $\{(x_1, x_2) : x_1 = \xi_0\}$ exatamente uma vez e transversalmente (veja Figura 2.27).

Figura 2.27

A curva $\nabla f^\perp \circ \mu : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ conecta $\nabla f^\perp(p)$ (tendo primeira coordenada negativa) com $\nabla f^\perp(q)$ (tendo primeira coordenada positiva) e, por (B), a imagem de $\nabla f^\perp \circ \mu$ não encontra o conjunto $\{(0, y) : y > 0\}$. Isso gera uma contradição porque Y e $\nabla f^\perp \circ \mu$ não podem ser homotópicos em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Final da prova da Proposição 2.3.1

Suponhamos, por contradição, que existe uma curva regular suave como na Figura 2.3. Impondo alguma orientação para as trajetórias de $\nabla f^\perp$ (veja Figura 2.28) temos

Figura 2.28

A Figura 2.28 é uma contradição com os Lemas 2.3.3, 2.3.4 e 2.3.5. De fato, pelo Lema 2.5.5 $\mathcal{L}(F_{\gamma(s)}^+) \subset (e^{-i\pi/2}, e^{i\pi/2}]$, mas pelos Lemas 2.3.3 e 2.3.4, $\mathcal{L}(F_{\gamma(s)}^+) \subset (e^{i\pi/2}, e^{i3\pi/2}]$.

Proposição 2.3.2 *Sejam $p, q \in \mathbb{R}^2$ tal que $X(p) = X(q) = 0$. Entre todas as curvas que conectam p a q , a curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow [F_p, F_q]$, com $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$ tem o mínimo possível de pontos que tangenciam $\nabla f^\perp$ se, e somente se, existem números*

$$t_0 = 0 \leq \ell_1 < r_1 \leq \ell_2 < r_2 \leq \cdots \leq \ell_n < r_n \leq 1 = \ell_{n+1}$$

com $n \geq 1$, satisfazendo (a) e (b) abaixo.

- (a) Para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\gamma([\ell_i, \gamma_i])$ é o lado compacto de uma componente de Reeb C_i .
- (b) Dado $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, a união T_i de todas as trajetórias $F_{\gamma(s)}$, com $s \in [r_i, \ell_{i+1}]$, é uma região transversal de $[F_p, F_q]$. Também, para todo $s \in [r_i, \ell_{i+1}]$, $F_{\gamma(s)} \cap \gamma([0, 1]) = \{\gamma(s)\}$.

Além disso,

- (c) sejam $\gamma, \gamma^* : [0, 1] \rightarrow [F_p, F_q]$ curvas que conectam $\gamma(0) = \gamma^*(0) = p$ com $\gamma(1) = \gamma^*(1) = q$ e que possuem um mínimo possível de pontos que tangenciam $\nabla f^\perp$. Sejam C_i e T_i (resp. C_i^* e T_i^*), respectivamente, as componentes de Reeb e regiões transversais associadas a $([F_p, F_q], \gamma)$ (resp. $([F_p, F_q], \gamma^*)$) e indexadas ordenadamente como em (a) e (b) acima. Então $T_i = T_i^*$ e a interseção de C_i e C_i^* contém uma componente de Reeb cujos lados não compactos estão contidos nos lados não compactos de C_i e C_i^* .

Para provar essa proposição usaremos os três lemas abaixo.

Nosso objetivo é garantir a existência de curvas como a da Figura 2.29.

Figura 2.29

Lema 2.3.6 *Existe uma curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow [F_p, F_q]$ com $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ e existem reais*

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < 1$$

tal que

Figura 2.30

- (a) $(f \circ \gamma)'(s) = 0$ se e somente se $s \in \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$. Além disso, para todo $s \in \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, $(f \circ \gamma)''(s) \neq 0$; e
- (b) uma trajetória de $\nabla f^\perp$ encontra γ no máximo em dois pontos e, se isto ocorrer, nesses dois pontos, o encontro com γ é transversal.

Demonstração: Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow [F_p, F_q]$ uma curva conectando $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$. Por uma pequena perturbação (se necessário) podemos assumir que γ satisfaz (a).

Para provar (b) podemos agir da seguinte forma: como as trajetórias de $\nabla f^\perp$ se acumulam no infinito, por uma pequena perturbação de γ , podemos assumir que:

- (1) Uma trajetória pode encontrar tangencialmente γ no máximo em um ponto.

Levando em consideração (1) veremos abaixo que poderemos construir uma nova curva (que continuará denotada por γ), porém, com um número menor de pontos que tangenciam $\nabla f^\perp$ do que a curva inicial.

Consideraremos primeiro a seguinte situação:

- (2) Suponhamos que existe uma trajetória F_a de $\nabla f^\perp$ que encontra γ transversalmente em a e tangencialmente em algum ponto b , e

$$\gamma \cap [a, b]_f = [a, b]_\gamma \cap [a, b]_f = \{a, b\}.$$

Neste caso podemos aplicar o Teorema do Fluxo Tubular e garantir a existência de uma caixa de fluxo B centrada em $[a, b]_f$.

Peguemos dois pontos $\bar{a}, \bar{b} \in B \cap \gamma$ tal que $(\bar{a}, \bar{b})_\gamma$ contenha $[a, b]_\gamma$. Façamos a substituição de $[a, b]_\gamma$ por um novo segmento contido em B e transversal a $\nabla f^\perp$ (como na Figura 2.30) em seus extremos.

Observemos que $\nabla f^\perp$ tinha pelo menos dois pontos que tangenciavam $[a, b]_\gamma$: um em b e outro em algum lugar $c \in (a, b)_\gamma$. Como $[F_p, F_q]$ é simplesmente conexo, a nova curva construída nestas condições está contida em $[F_p, F_q]$ e tem menos pontos tangenciando $\nabla f^\perp$ do que a anterior, ou seja, no mínimo um a menos.

Repetindo, se necessário, o procedimento acima, podemos assumir que:

- (3) uma trajetória de $\nabla f^\perp$ que encontra γ mais de uma vez deve fazer isto transversalmente.

Considerando (3), podemos diminuir o número de pontos tangentes usando os procedimentos nos itens (4) – (6) abaixo.

- (4) Suponhamos que existem três pontos consecutivos a_1 , a_2 e a_3 da parte positiva de uma trajetória de $\nabla f^\perp$ tal que

$$\gamma \cap [a_1, a_3]_f = [a_1, a_3]_\gamma \cap [a_1, a_3]_f = \{a_1, a_2, a_3\}.$$

Neste caso podemos considerar uma pequena caixa de fluxo centrada em $[a_2, a_3]_f$ e considerar o segmento transversal a $\nabla f^\perp$ em seus extremos, contido em B e que une a_1 a a_4 (como na Figura 2.31).

Figura 2.31

Agora podemos colocar este novo segmento no lugar da original $[a_1, a_4]_\gamma$. A nova curva resultante tem no mínimo dois pontos de tangência com $\nabla f^\perp$ a menos do que a γ original.

- (5) Suponhamos que existam três pontos a_1 , a_2 e a_3 de uma trajetória positiva de $\nabla f^\perp$ tal que

$$\gamma \cap [a_1, a_3]_f = [a_1, a_2]_\gamma \cap [a_1, a_3]_f = \{a_1, a_2, a_3\},$$

como na Figura 2.32.

Figura 2.32

Neste caso, como $F_{a_3}^+$ está entrando através de a_3 no disco limitado por $[a_1, a_3]_f \cup [a_1, a_3]_\gamma$ deve sair deste disco em algum ponto $a_4 \in (a_1, a_3)_\gamma$. É fácil ver que $\nabla f^\perp$ deve encontrar tangencialmente em algum ponto os segmentos $(a_1, a_4)_\gamma$, $(a_4, a_3)_\gamma$ e $(a_3, a_2)_\gamma$.

Assim, se considerarmos uma pequena caixa de fluxo B centrada em $[a_1, a_2]_f$ e substituindo o original $[a_1, a_2]_\gamma$ por um novo segmento contido em B , e tendo exatamente um ponto (a'_2) tangenciando $\nabla f^\perp$ muito próximo a a_2 , como na figura acima, obtemos uma nova curva que contém um número maior de pontos que tangenciam $\nabla f^\perp$ do que a curva γ original.

- (6) Suponhamos que existam três pontos consecutivos a_1, a_2 e a_3 da parte positiva de uma trajetória de $\nabla f^\perp$ tal que

$$\gamma \cap [a_1, a_3]_f = [a_3, a_2]_\gamma \cap [a_1, a_3]_f = \{a_1, a_2, a_3\},$$

como na Figura 2.33.

Figura 2.33

Neste caso, como $F_{a_1}^+$ está saindo da região limitada por $[a_2, a_3]_f \cup [a_3, a_2]_\gamma$ deve entrar neste disco em algum ponto $a_4 \in (a_3, a_1)_\gamma$. É fácil ver que procedendo como no caso anterior é possível conseguir uma nova curva com menos pontos tangenciando $\nabla f^\perp$ que a curva anterior.

Após um número finito de passos acharemos uma curva γ como requerida no Lema.

Lema 2.3.7 *Seja γ como no Lema 2.3.6 ou tendo o mínimo possível de pontos que tangenciam $\nabla f^\perp$, então existem números*

$$r_0 = 0 \leq \ell_1 < r_1 \leq \ell_2 < r_2 \leq \cdots \leq \ell_n < r_n \leq 1 = \ell_{n+1}$$

satisfazendo (a) e (b) da Proposição 2.3.2.

Demonstração: Sejam $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < 1$ todos os números reais em que γ é tangente a $\nabla f^\perp$. Pelas hipóteses sobre γ , dado i , existe $r_i > t_i$ e uma família contínua

$\{L_s^i : s \in (t_i, r_i)\}$ de arcos de trajetórias determinadas pelo encontro de seus extremos com γ e que tem $\gamma(t_i)$ como limite quando $s \rightarrow t_i$. Se r_i é pego o maior possível, então existe ℓ_i tal que $\gamma([\ell_i, r_i])$ é o lado compacto de uma componente de Reeb.

Observemos que pelo Lema 2.3.6 cada trajetória de $\nabla f^\perp$ encontra γ no máximo duas vezes e que, se encontra mais de uma vez, esse encontro se dá de forma transversal. Do exposto acima e pela Proposição 2.3.1 seguem todas as conclusões de lema e a Figura 2.34.

Figura 2.34

Lema 2.3.8 *Seja γ como no Lema 2.3.6. Então uma curva não suave conectando p e q pode ter menos pontos de tangência com $\nabla f^\perp$ do que γ . Além disso, se $\gamma^* : [0, 1] \rightarrow [F_p, F_q]$ é outra curva tendo as mesmas propriedades de γ , então o par (γ, γ^*) satisfaz (c) da Proposição 2.3.2.*

Demonstração: Como (a) e (b) da Proposição 2.3.1 foram anteriormente provadas, existem números γ_i^* , t_i^* e ℓ_i^* como nos lemas precedentes. Seja $s \in \{\ell_1, r_1, \ell_2, r_2, \dots, r_n, \ell_n\} \setminus \{0, 1\}$. Como p e q estão em diferentes componentes de $\mathbb{R}^2 \setminus F_\gamma(s)$, a curva γ^* obrigatoriamente encontra $F_{\gamma(s)}$. Sejam $\tilde{\ell}_i$ e $\tilde{r}_i$ os pontos de $[0, 1]$ tal que $\gamma^*(\tilde{\ell}_i) \in F_{\gamma(\ell_i)}$ e $\gamma^*(\tilde{r}_i) \in F_{\gamma(r_i)}$.

Um dos lados de C_i , com sua orientação original, cruza γ^* do lado esquerdo para o lado direito, enquanto o outro lado cruza γ^* em direção oposta. Isso implica que $\gamma^*([\tilde{\ell}_i, \tilde{r}_i])$ tangencia $\nabla f^\perp$ em algum ponto.

Além disso, γ^* tem o mesmo número de pontos tangenciando $\nabla f^\perp$ que γ .

$\gamma^*([\tilde{r}_i, \tilde{\ell}_{i+1}])$ está contido em T_i . De fato, de outro modo $\gamma^*([\tilde{r}_i, \tilde{\ell}_{i+1}])$ cruzaria alguma trajetória F_m que não pertence ao fecho de T_i e dessa forma $F_m \notin \{F_{\gamma(\tilde{r}_i)}, F_{\gamma(\tilde{\ell}_{i+1})}\}$. Como F_m separa o plano, pois, $F_m \in T_i^*$, $\gamma^*([\tilde{r}_i, \tilde{\ell}_{i+1}])$ encontraria F_m no mínimo em dois pontos e portanto T_i^* possuiria um ponto tangente a $\nabla f^\perp$. Isto contradiz a propriedade minimizante de γ^* . Logo, $\gamma^*([\tilde{r}_i, \tilde{\ell}_{i+1}])$ está contida em T_i , ou seja, $r_i^* = \tilde{r}_i$, $\ell_{i+1} = \tilde{\ell}_{i+1}$ e

portanto $T_i^* = T_i$ (veja figura abaixo). Do exposto acima segue o lema (veja Figura 2.35).

Figura 2.35

Seja $\gamma[0, 1] \rightarrow [F_p, F_q]$ como na Proposição 2.3.2 e sejam

$$r_0 = 0 \leq \ell_1 < r_1 \leq \ell_2 < r_2 \leq \dots \leq \ell_n < r_n \leq 1 = \ell_{n+1}$$

T_i e C_i , respectivamente, números reais, regiões transversais e componentes de Reeb associadas à $([F_p, F_q], \gamma)$. Diremos que a seqüência

$$\beta = (T_i, C_{i+1}, C_{i+2}, \dots, C_{i+k}, T_{i+k})$$

com $k \geq 1$, é um bloco de $([F_p, F_q], \gamma)$ se:

- (i) cada $T_{i+1}, T_{i+2}, \dots, T_{i+k-1}$ é formada por uma única trajetória de $\nabla f^\perp$;
- (ii) T_i e T_{i+1} são formadas por mais de uma trajetória de $\nabla f^\perp$ (neste caso β será chamado de tipo $(T, C, \dots, C, T)$) ou se $T_i = T_0 = F_p$ e T_{i+k} é formada por mais de uma trajetória (neste caso β será chamado de tipo $[C, \dots, C, T)$), ou se $T_n = T_{i+k} = F_q$ e T_i não é formado por uma única trajetória (neste caso β será chamado de tipo $(T, C, \dots, C]$). Veja na figura 2.36 uma ilustração para β , supondo que, $k > 1$; que a primeira componente de Reeb do bloco está à esquerda de γ e a última está à direita de γ .

Figura 2.36

A notação dos blocos β até agora não deixa claro se as componentes de Reeb estão à direita ou à esquerda de γ . Por isso: se C estiver à esquerda de γ , será denotada por $\cap$ e se C estiver à direita de γ , será denotada por $\cup$. Assim, um bloco do tipo $(T, C, \dots, C, T)$ terá quatro possibilidades

$$(T, \cup, \dots, \cap, T), (T, \cup, \dots, \cup, T), (T, \cap, \dots, \cup, T) \text{ e } (T, \cap, \dots, \cap, T);$$

o bloco do tipo $[C, \dots, T)$ terá as quatro possibilidades seguintes

$$[\cup, \dots, \cap, T), [\cup, \dots, \cup, T), [\cap, \dots, \cup, T) \text{ e } [\cap, \dots, \cap, T);$$

o bloco do tipo $(T, C, \dots, C]$ terá as quatro possibilidades seguintes

$$(T, \cup, \dots, \cap], (T, \cup, \dots, \cup], (T, \cap, \dots, \cup] \text{ e } (T, \cap, \dots, \cap];$$

logo, pelo visto acima, concluímos que são doze as possibilidades para os blocos β .

Proposição 2.3.3 *Suponhamos que $0 \in \Sigma_1(X, p, q)$ e seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow [F_p, F_q]$ como na Proposição 2.3.2. Estenda γ , transversalmente a $\nabla f^\perp$, ao intervalo $[-\varepsilon_1, 1 + \varepsilon_1]$, $\varepsilon_1 > 0$. Existem $\varepsilon > 0$ e funções contínuas*

$$L_i, R_i : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow [-\varepsilon_1, 1 + \varepsilon_1]$$

com $L_i(0) = \ell_i$, $R_i(0) = r_i$, tais que se

$$\beta = (T_i, C_{i+1}, \dots, C_{i+k}, T_{i+k})$$

é um bloco de $([F_p, F_q], \gamma)$, então, para $\theta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, pode ser construída uma curva $\lambda_\theta : [0, 1] \rightarrow [F_p(\theta), F_q(\theta)]$, com $\lambda_0 = \gamma$, que conecta $H_\theta(p)$ com $H_\theta(q)$ e tendo o mínimo possível de pontos que tangenciam $\nabla f_\theta^\perp$.

A prova da Proposição 2.3.3 segue imediatamente dos Lemas 2.3.9 – 2.3.14.

Lema 2.3.9 *Se $\varepsilon > 0$ é bastante pequeno, existem funções monótonas contínuas*

$$L_i, R_i : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow [-\varepsilon_1, 1 + \varepsilon_1]$$

tal que, para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $H_\theta \circ \gamma([L_i(\theta), R_i(\theta)])$ é o lado compacto de uma componente de Reeb $C_i(\theta)$ de $\nabla f_\theta^\perp$, associada a $H_\theta \circ \gamma$, no sentido do Lema 2.3.4.

Figura 2.37

Demonstração: É uma consequência imediata do Lema 2.3.4, pois, para todo $s \in \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, como na Proposição 2.3.2, $(f \circ \gamma)'(s) = 0$ e $(f \circ \gamma)''(s) \neq 0$. Além disso, existem $0 = r_0 \leq \ell_1 < r_1 \leq \ell_2 < r_2 \leq \dots \leq \ell_n < r_n \leq 1 = \ell_{n+1}$ tal que $\gamma([\ell_i, r_i])$, $i = 1, \dots, n$ é o lado compacto de uma componente de Reeb C_i , $F_{\gamma(r_i)}$ e $F_{\gamma(\ell_i)}$ contém os lados não compactos de C_i .

Lema 2.3.10 Dado $\varepsilon > 0$ pequeno, para todo $\theta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $[F_p(\theta), F_q(\theta)]$ contém no mínimo duas regiões transversais que são formadas por mais de uma trajetória de $\nabla f_\theta^\perp$.

Demonstração: Consideremos primeiro $[F_p, F_q]$. Assumamos que $[F_p, F_p]$ não tem região transversal e que C_1 está à esquerda de γ . Isto implica pela Proposição 2.3.1, que se i é um número ímpar (resp. número par), C_i está à esquerda (resp. à direita de γ). Suponhamos ainda que ∇f invade C_1 ao longo de suas margens não compactas que são $F_{\gamma(\ell_1)}^+$ e $F_{\gamma(r_1)}^-$. Como $\det(DX) > 0$ em $\mathbb{R}^2$, g é estritamente crescente ao longo das trajetórias do campo vetorial $\nabla f^\perp$, ou seja, $g(\gamma(\ell_1)) < g(\gamma(r_1))$. Do mesmo modo, $g(\gamma(r_1)) = g(\gamma(\ell_2))$. Desta forma concluímos que $g(p) < g(q)$, que é uma contradição, pois por hipótese $g(p) = g(q) = 0$. Usando o mesmo argumento em todas as outras possibilidades, concluiremos que $[F_p, F_q]$ tem no mínimo uma região transversal.

Assumamos agora que $[F_p, F_q]$ tem exatamente uma região transversal. Nesse caso, $f(p) \neq f(q)$ que é uma contradição. De fato, pela Figura 2.37 $f(\tilde{p}) = f(\tilde{q})$ estão em um nível próximo ao nível zero de f , pois $f(q) = 0$. O nível em p seria diferente do nível em q , pois entre $\tilde{p}$ e p os níveis estão crescendo. Mas por hipótese $f(p) = f(q) = 0$.

O argumento usado para provar que $[F_p(\theta), F_q(\theta)]$, $\theta \neq 0$, tem no mínimo duas regiões transversais é o mesmo usado acima, pois, a argumentação não dependeu do particular θ , mas sim do fato de $X(p) = X(q) = 0$. Como $X_\theta(H_\theta(p)) = X_\theta(H_\theta(q)) = 0$, segue a prova deste lema.

Lema 2.3.11 Seja $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ tal que $r_i < \ell_{i+1}$. Se $\varepsilon > 0$ é bastante pequeno, então, para todo $\theta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $H_\theta \circ \gamma([R_i(\theta), L_{i+1}(\theta)])$ está contido em uma região transversal de $[F_p(\theta), F_q(\theta)]$.

Figura 2.38

Demonstração: Fixado $\theta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Assumamos por contradição que existe um arco de trajetória $[a_1, a_2]_{f_\theta}$ (de $\nabla f_\theta^\perp$) que encontra $H_\theta \circ \gamma$ exatamente em seus extremos com $a_1 \in H_\theta \circ \gamma([R_i(\theta), L_{i+1}(\theta)])$. Isso implicaria na existência de uma componente de Reeb associada a $H_\theta \circ \gamma$ (no contexto dos Lemas 2.3.4 e 2.3.9) e contendo $[a_1, a_2]_{f_\theta}$ (veja Figura 2.38). Isto contardiz o Lema 2.3.9.

Lema 2.3.12 *Seja $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Suponhamos que $\ell_i < r_i = \ell_{i+1} < r_{i+1}$ e que $\varepsilon > 0$ é muito pequeno.*

- (a) *Se a componente de Reeb C_i (tendo $\gamma([\ell_i, r_i])$ como sua margem compacta) estiver à esquerda de γ , então, para todo $\theta \in (0, \varepsilon)$, $H_\theta \circ \gamma([R_i(\theta), L_{i+1}(\theta)])$ está contido em uma região transversal de $[F_p(\theta), F_q(\theta)]$ e para $\theta \in (-\varepsilon, 0)$, $H_\theta \circ \gamma([L_i(\theta), R_{i+1}(\theta)])$ está contido em uma região transversal de $[F_p(\theta), F_q(\theta)]$.*
- (b) *Se a componente de Reeb C_i (tendo $\gamma([\ell_i, r_i])$ como sua margem compacta) estiver à direita de γ , então, para todo $\theta \in (-\varepsilon, 0)$, $H_\theta \circ \gamma([R_i(\theta), L_{i+1}(\theta)])$ está contido em uma região transversal de $[F_p(\theta), F_q(\theta)]$ e para $\theta \in (0, \varepsilon)$, $H_\theta \circ \gamma([L_i(\theta), R_{i+1}(\theta)])$ está contido em uma região transversal de $[F_p(\theta), F_q(\theta)]$.*

Demonstração: Provaremos primeiro o item (a) quando $\theta \in (-\varepsilon, 0)$. Neste caso $L_{i+1}(\theta) < R_i(\theta)$ e podemos construir uma curva λ_θ como sugerida na Figura 2.39.

Figura 2.39

contida em $[F_p(\theta), F_q(\theta)]$, que coincide com $H_\theta \circ \gamma$ no complementar de $[L_i(\theta), R_{i+1}(\theta)]$ e que, quando restrita a $[L_i(\theta), R_{i+1}(\theta)]$, é transversal a $\nabla f_\theta^\perp$. Assumamos, por contradição,

que existe um arco de trajetória $[a_1, a_2]_{f_\theta}$ (de $\nabla f_\theta^\perp$) que encontra λ_θ exatamente em seus extremos com $a_1 \in \lambda_\theta([L_i(\theta), R_{i+1}(\theta)])$. Como λ_θ tem contato transversal com $\nabla f_\theta^\perp$ em $[L_i(\theta), R_{i+1}(\theta)]$, a_2 não pertence a $\lambda_\theta \circ \gamma([L_i(\theta), R_{i+1}(\theta)])$. Logo, em particular, a_2 pertence a $H_\theta \circ \gamma([0, 1]) \setminus [L_i(\theta), R_{i+1}(\theta)]$. Pela estrutura das órbitas de $\nabla f_\theta^\perp$, existe um arco de trajetória de $\nabla f_\theta^\perp$ da forma $[b_1, a_2]_{f_\theta}$ que encontra $H_\theta \circ \gamma$ exatamente em seus extremos com $b_1 \in H_\theta \circ \gamma([L_i(\theta), R_{i+1}(\theta)])$. Isto implica que existe uma componente de Reeb associada a $H_\theta \circ \gamma$ (no contexto dos Lemas 2.3.4 e 2.3.9) e contendo $[b_1, a_2]_{f_\theta}$. Isso contradiz o Lema 2.3.9 (veja Figura 2.40).

Figura 2.40

Agora provaremos o item (a) para $\theta \in (0, \varepsilon)$. Neste caso $L_{i+1} > R_i(\theta)$. Suponhamos que existe um arco de trajetória $(a_1, a_2)_{f_\theta}$ (de $\nabla f_\theta^\perp$) cujos extremos encontram $H_\theta \circ \gamma$ exatamente em seus extremos com $a_1 \in H_\theta \circ \gamma([R_i(\theta), L_{i+1}(\theta)])$. Então pelo mesmo argumento usado acima chegamos a uma contradição com o Lema 2.3.9 (veja Figura 2.41).

Figura 2.41

Com argumento similar ao usado acima podemos provar (b).

Lema 2.3.13 *Suponhamos que $r_0 = \ell_1$ e que $\varepsilon > 0$ é muito pequena.*

(a) *Se a componente de Reeb C_1 (tendo $\gamma([l_i, r_i])$ como sua margem compacta) está à*

Figura 2.42

esquerda de γ , então existe uma função contínua $\sigma : [0, \varepsilon] \rightarrow [0, r_1]$ tal que $\sigma(0) = r_1$, $0 < \sigma(\theta) \leq R_1(\theta)$ e $H_\theta(p)$ e $H_\theta \circ \gamma(\sigma(\theta))$ são pontos extremos de um arco de $F_p(\theta)$ que está à esquerda de γ e que encontra $H_\theta \circ \gamma$ exatamente em seus extremos. Também $H_\theta \circ \gamma([\sigma(\theta), R_1(\theta)])$ está contido em uma região transversal de $[F_p(\theta), F_q(\theta)]$. Além disso, para $\theta \in (-\varepsilon, 0)$, $H_\theta \circ \gamma([0, L_1(\theta)])$ está contida em uma região transversal de $[F_p(\theta), F_q(\theta)]$.

- (b) Se a componente de Reeb C_1 (tendo $\gamma([\ell_i, r_i])$ como sua margem compacta) está à direita de γ , então existe uma função contínua $\sigma : [-\varepsilon, 0] \rightarrow [0, r_1]$ tal que $\sigma(0) = r_1$, $0 < \sigma(\theta) \leq R_1(\theta)$ e $H_\theta(p)$ e $H_\theta \circ \gamma(\sigma(\theta))$ são pontos extremos do subarco de $F_p(\theta)$ que está à direita e que encontra $H_\theta \circ \gamma$ exatamente em seus extremos. Também $\gamma([\sigma(\theta), R_1(\theta)])$ está contido em uma região transversal de $[F_p(\theta), F_q(\theta)]$. Além disso, para $\theta \in (0, \varepsilon)$, $H_\theta \circ \gamma([0, L_1(\theta)])$ está contida em uma região transversal de $[F_p(\theta), F_q(\theta)]$.

Demonstração: Provaremos o item (a) quando $\theta \in (0, \varepsilon)$. Neste caso, $L_1(\theta) < 0$ (veja Figura 2.42).

Portanto, pelo Lema 2.3.1 e Lema 2.3.4(d) existe uma função σ como requerida.

Para provarmos a afirmação (a) podemos construir uma curva $\lambda_\theta : [0, 1] \rightarrow [F_p(\theta), F_q(\theta)]$, como a linha pontilhada da Figura 2.42, que coincide com $H_\theta \circ \gamma([0, 1])$ no complementar de $[0, R_1(\theta)]$ e, quando restrito a $[0, R_1(\theta)]$, é transversal a $\nabla f_\theta^\perp$. Afirmamos que as trajetórias de $\nabla f_\theta^\perp$ encontram $\lambda_\theta([0, R_1(\theta)])$ no máximo uma vez. De fato, como λ_θ tem contato transversal com $\nabla f_\theta^\perp$ em $[0, R_1(\theta)]$, então pela estrutura das órbitas de $\nabla f_\theta^\perp$ e pelo Lema 2.3.1, uma trajetória de $\nabla f_\theta^\perp$ transversal a $\lambda_\theta([0, R_1(\theta)])$ deve encontrar $H_\theta \circ \gamma([0, R_1(\theta)])$. Para esta mesma trajetória encontrar λ_θ novamente só poderia fazer de duas maneiras: uma maneira seria cruzar $\lambda_\theta([0, R_1(\theta)])$ novamente, e a outra seria cruzar $H_\theta \circ \gamma([0, 1]) \setminus H_\theta \circ \gamma([R_1(\theta), 1])$. Em ambos os casos seria uma contradição com o Lema

2.3.9 (veja Figura 2.43).

Figura 2.43

Portanto, segue a afirmação (a) para $\theta \in (0, \varepsilon)$.

Prova da afirmação (a) para $\theta \in (-\varepsilon, 0)$.

Para $\theta \in (-\varepsilon, 0)$, $L_1(\theta) > 0$ (veja Figura 2.44). Portanto pelo Lema 2.3.9 temos a seguinte situação.

Figura 2.44

Suponhamos que existe um arco de trajetória $(a_1, a_2)_{f_\theta}$ que encontra $H_\theta \circ \gamma$ exatamente em seus extremos com $a_1 \in H_\theta \gamma([0, L_1(\theta)])$ (veja Figura 2.44). Isto é uma contradição com o Lema 2.3.9. Logo, $H_\theta \circ \gamma([0, L_1(\theta)])$ está contido em uma região transversal de $[F_p(\theta), F_q(\theta)]$.

(b) Nesse caso daremos apenas uma idéia da prova através de gráficos.

Como C_1 está à direita de γ , segue que para $\theta \in (-\varepsilon, 0)$, $L_1(\theta) < 0 = \ell_1$, pois $L_1(\theta)$ é estritamente crescente.

Figura 2.45

$\theta \in (-\varepsilon, 0)$ e $L_1(\theta) < \ell_1$.

Observemos que quanto mais próximo a $-\varepsilon$, θ estiver, então maior é a distância entre $H_\theta(\gamma(L_1(\theta)))$ e $H_\theta(p)$; e quanto mais próximo a 0, θ estiver, então menor é a distância entre $H_\theta(\gamma(L_1(\theta)))$ e $H_\theta(p)$.

θ próximo à $-\varepsilon$

θ próximo à 0

Portanto, $\sigma : [0, \varepsilon) \rightarrow [0, r_1]$,
 $\sigma(0) = r_1$ e $0 < \sigma(\theta) \leq R_1(\theta)$.

Figura 2.46

Para concluir, basta repetir o raciocínio feito para provar (a).

Lema 2.3.14 *Suponhamos que $r_n = \ell_{n+1}$ e que $\varepsilon > 0$ é muito pequeno.*

- (a) *Se a componente de Reeb C_n (tendo $\gamma([\ell_n, r_n])$ como sua margem compacta) está à direita de γ , então existe uma função contínua $\sigma : [0, \varepsilon] \rightarrow [\ell_n, 1]$ tal que $\sigma(0) = \ell_n$, $1 > \sigma(\theta) \geq L_n(\theta)$ e $H_\theta(q)$ e $H_\theta \circ \gamma(\sigma(\theta))$ são pontos extremos do subarco de $F_q(\theta)$ que está à direita de γ e que encontra $H_\theta \circ \gamma$ exatamente em seus pontos extremos. Também, $H_\theta \circ \gamma([L_n(\theta), \sigma(\theta)])$ está contida em uma região transversal de $[F_p(\theta), F_q(\theta)]$. Além disso, para $\theta \in (-\varepsilon, 0)$, $H_\theta \circ \gamma([R_n(\theta), 1])$ está contida em uma região transversal de $[F_p(\theta), F_q(\theta)]$.*
- (b) *Se a componente de Reeb R_n (tendo $\gamma([\ell_n, r_n])$ como sua margem compacta) está à esquerda de γ , então existe uma função contínua $\sigma : [-\varepsilon, 0] \rightarrow [\ell_n, 1]$ tal que $\sigma(0) = \ell_n$, $1 > \sigma(\theta) \geq \ell_n(\theta)$ e $H_\theta(p)$ e $H_\theta \circ \gamma(\sigma(\theta))$ são pontos extremos do subarco de $F_q(\theta)$ que está à esquerda de γ e que encontra $H_\theta \circ \gamma$ exatamente em seus pontos extremos. Também, $\gamma([L_n(\theta), \sigma(\theta)])$ está contida em uma região transversal de $[F_p(\theta), F_q(\theta)]$. Além disso, para $\theta \in (0, \varepsilon)$, $H_\theta \circ \gamma([R_n(\theta), 1])$ está contida em uma região transversal de $[F_p(\theta), F_q(\theta)]$.*

Demonstração: Também, nesse caso, faremos apenas alguns comentários, pois, a idéia da prova é a mesma usada para provar o Lema 2.3.13 (veja Figura 2.47).

Figura 2.47

$\sigma : (-\varepsilon, 0] \rightarrow [\ell_n, 1]$, $\sigma(0) = \ell_n$ e $1 > \sigma(\theta) \geq L_n(\theta)$ e $H_\theta(q)$ e $H_\theta \circ \gamma(\sigma(\theta))$ são pontos extremos do arco de $F_1(\theta)$.

Veja nas quatro figuras abaixo, como ficaria λ_θ nas quatro possíveis possibilidades para $\beta = (T, C, \dots, C, T)$ em γ , para $\theta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ bastante pequeno.

Tipo $(T, \cap, \dots, \cup, T)$

Figura 2.48

Tipo $(T, \cup, \dots, \cap, T)$

Figura 2.49

Tipo $(T, \cap, \dots, \cap, T)$

Figura 2.50

Tipo $(T, \cup, \dots, \cup, T)$

Figura 2.51

A seguir veja como ficam as outras possibilidades para o bloco β , ou seja, como deve ser $([F_p(\theta), F_q(\theta)], \lambda_\theta)$, se $([F_p, F_q], \gamma)$ contiver um bloco β do tipo $[C, \dots, C, T)$ ou $(T, C, \dots, C]$.

Vejamos para o tipo $[\cap, \dots, \cup, T)$.

Neste caso podemos aplicar os Lemas 2.3.12 e 2.3.13 para ficarmos com a situação da figura 2.52

Figura 2.52

Tipo $[\cup, \dots, \cap, T)$.

Figura 2.53

Tipo $[\cap, \dots, \cap, T)$.

Figura 2.54

Tipo $[\cup, \dots, \cup, T)$.

Figura 2.55

Tipo $(T, \cap, \dots, \cup]$.

Figura 2.56

Tipo $(T, \cup, \dots, \cap]$.

Figura 2.57

Tipo $(T, \cap, \dots, \cap]$.

Figura 2.58

Tipo $(T, \cup, \dots, \cup]$.

Figura 2.59

Observação 4: No que segue, decomposição canônica é a decomposição da proposição 2.3.2 (veja Figura 2.29).

Uma consequência imediata do que vimos até agora sobre a Proposição 2.3.3 é que o conjunto $\Sigma_1(X, p, q)$ é um conjunto de pontos isolados, ou seja, se $\theta_0 \in \Sigma_1(X, p, q)$, existe uma vizinhança V de θ_0 tal que, se $\theta_1 \in V - \{\theta_0\}$, então $\theta_1 \in \Sigma$. Isso fica claro se analisarmos o que foi feito para construir λ_θ acima. Vimos que se $0 \in \Sigma_1$, então para todo $\theta \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$, $\varepsilon > 0$ pequeno, implica que $\theta \in \Sigma$, pois a decomposição canônica $([F_p(\theta), F_q(\theta)], \lambda_\theta)$ não possui região transversal com uma única trajetória.

Por outro lado, se $\theta \in \Sigma$, existe uma vizinhança V de θ , tal que se $\theta_1 \in V$, então $\theta_1 \in \Sigma$, ou seja, a decomposição canônica $([F_p(\theta), F_q(\theta)], \lambda_{\theta_1})$ terá o mesmo número de componentes de Reeb e regiões transversais que tem $([F_p(\theta), F_q(\theta)], \lambda_\theta)$.

Por isso segue o seguinte corolário:

Corolário 2.1 (a) $\Sigma_1(X, p, q)$, módulo 2π , é um conjunto finito de pontos;

(b) se θ_1 e θ_2 pertencem à mesma componente conexa de $\mathbb{R} \setminus \Sigma_1(X, p, q)$, então a decomposição canônica de $([F_p(\theta_1), F_q(\theta_1)], \lambda_{\theta_1})$ e $([F_p(\theta_2), F_q(\theta_2)], \lambda_{\theta_2})$, como na Proposição 2.3.2 é essencialmente a mesma;

(b₁) elas têm o mesmo número de regiões transversais e componentes de Reeb;

(b₂) cada região transversal não se reduz a uma única órbita e

(b₃) as componentes de Reeb são ordenadas como na Proposição 2.3.2 e estão simultaneamente à esquerda ou à direita de λ_{θ_i} , $i = 1, 2$.

Em (a), $\Sigma_1(X, p, q)$, módulo 2π , é o conjunto de números de $\Sigma_1(X, p, q)$, cuja diferença entre eles é menor ou igual a 2π . Como já observamos anteriormente que $\Sigma_1(X, p, q)$ é um conjunto de pontos isolados, segue que $\Sigma_1(X, p, q)$, módulo 2π , é finito. (b) segue da observação acima.

Sejam $r_0 = 0 \leq \ell_1 < r_1 \leq \ell_2 < r_2 \leq \dots \leq \ell_n < r_n \leq 1 = \ell_{n+1}$ e

$$(T_0, C_1, T_1, C_1, T_2, \dots, C_n, T_n),$$

respectivamente, seqüência de números, regiões transversais e componentes de Reeb associadas à decomposição canônica de $([F_p, F_q], \gamma)$.

Dado $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (aqui, $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ é tal que se $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, então $\theta = \theta' + 2\pi k$, onde $\theta' \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$) escolha uma curva $\lambda_\theta : [0, 1] \rightarrow [F_p(\theta), F_q(\theta)]$ que conecta $\lambda_\theta(0) = H_\theta(p)$ com $\lambda_\theta(1) = H_\theta(q)$, como na Proposição 2.3.3. Sejam $T_0(\theta)$ e $D_1(\theta)$, respectivamente, a primeira região transversal e primeira componente Reeb associadas à decomposição canônica de $([F_p(\theta), F_q(\theta)], \lambda_\theta)$. Em particular, $T_0(0) = T_0$ e $D_1(0) = C_1$. $B_1(\theta)$ denotará a trajetória de $\nabla f_\theta^\perp$ que contém $T_0(\theta) \cap D_1(\theta)$.

Substituindo X por X_θ , se necessário, podemos supor que T_0 possui mais de uma trajetória de $\nabla f^\perp$.

Figura 2.60

Lema 2.3.15

- (a) Suponhamos que C_1 está à direita de γ (resp. à esquerda de γ). Se $\varepsilon > 0$ é bastante pequeno e $0 < \theta < \varepsilon$ (resp. $-\varepsilon < \theta < 0$), então $\{B_1(0), H_\theta^{-1}(B_1(\theta))\}$ é uma (p, q) -seqüência separante c , além disso, $D_1(\theta)$ está à direita de λ_θ (resp. à esquerda de λ_θ).
- (b) Suponhamos que C_1 está à direita de γ (resp. à esquerda de γ). Se $\varepsilon > 0$ é bastante pequeno e $-\varepsilon < \theta < 0$ (resp. $0 < \theta < \varepsilon$), então $\{H_\theta^{-1}(B_1(\theta)), B_1(0)\}$ é uma (p, q) -seqüência separante c , além disso, $D_1(\theta)$ está à direita de λ_θ (resp. à esquerda de λ_θ).

Demonstração. Consideremos somente o caso em que $C_1 = \cup_1$ está à direita de γ .

Suponhamos primeiro que $0 \in \Sigma(X, p, q)$. Isso implica que todos os blocos de $[F_p, F_q]$ são do tipo $(T, C, \dots, C, T)$ e tem extensão 1. Isso quer dizer que cada um dos blocos são da forma $(T, \cup, T)$ ou $(T, \cap, T)$. Portanto, para θ pequeno, λ_θ pode ser pego igual a

$H_\theta \circ \gamma$. Seja $\varepsilon > 0$, $L_i(\theta)$ e $R_i(\theta)$ como na Proposição 2.3.3. Segue do Lema 2.3.4 que $L_i(\theta)$ e $R_i(\theta)$ são estritamente crescentes em θ (com $L_1(0) = \ell_1$, $R_1(0) = r_1$), que $D_1(\theta)$ está à direita de λ e tem $H_\theta \circ \gamma([L_1(\theta), R_1(\theta)])$ como sua margem compacta e também que a trajetória de $\nabla f_\theta^\perp$ passando por $H_\theta \circ \gamma(L_1(\theta))$ é precisamente $B_1(\theta)$.

Dado $\theta \in (0, \varepsilon)$, denotemos por $F_{\gamma(\ell_1)}(\theta)$ a trajetória de $\nabla f_\theta^\perp$ passando através de $H_\theta(\gamma(\ell_1))$.

Figura 2.61

A Figura 2.61 é uma decorrência do fato de $L_1(\theta)$ ser estritamente crescente, ou seja, $H_\theta(\gamma(\ell_1)) \notin H_\theta(\gamma([L_1(\theta), R_1(\theta)]))$, pois $L_1(\theta) > L_1(0)$.

Segue do Lema 2.3.1 que

- (1) $H_\theta(B_1(0))$ é transversal a $\nabla f_\theta^\perp$ e $F_{\gamma(\ell_1)}(\theta)$ encontra $H_\theta(\gamma([0, 1]))$ exatamente em $H_\theta(\gamma(\ell_1))$.

Portanto, como a componente conexa de $F_{\gamma(\ell_1)}(\theta) \setminus \{H_\theta(\gamma(\ell_1))\}$, contida no lado esquerdo de $H_\theta \circ \gamma$, é disjunta de $B_1(\theta)$, temos também que a componente conexa de $H_\theta(B_1(0)) \setminus \{H_\theta(\gamma(\ell_1))\}$ contida no lado esquerdo de $H_\theta \circ \gamma$ é disjunta de $B_1(\theta)$. Além disso, como $B_1(\theta)$ contém o lado de $D_1(\theta)$ (que está à direita de $H_\theta \circ \gamma$) devemos ter que não só $H_\theta(B_1(0))$ é disjunto de $B_1(\theta)$, mas também que $\{H_\theta(B_1(0)), B_1(\theta)\}$ é uma $(H_\theta(p), H_\theta(q))$ -seqüência separante. Isso implica que $\{B_1(0), H_\theta^{-1}(B_1(\theta))\}$ é uma (p, q) -seqüência separante. Neste caso o lema segue imediatamente.

No que segue, omitiremos a prova de toda afirmação na qual (implicitamente) estabelecemos que $\{B_1(0), H_\theta^{-1}(B_1(\theta))\}$ é uma (p, q) -seqüência separante. A razão é que a requerida argumentação é muito similar à dada acima (para o caso à direita). Suponhamos que $0 \in \Sigma_1(X, p, q)$. Sejam $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\ell$, os blocos de $([F_p, F_q], \gamma)$ ordenados de forma natural, com $T_0 \in \beta_1$.

Segue da Proposição 2.3.3 que β_1 é um dos seguintes subtipos $(T, \cup, \dots, \cup, T)$,

$(T, \cup, \dots, \cap, T)$, $(T, \cup, \dots, \cap]$ e $(T, \cup, \dots, \cup]$. Pelo Lema 2.3.10, β_1 não é do tipo

$$(T, C, \dots, C]$$

. Se β_1 é do tipo $(T, \cup, \dots, \cup, T)$ então (pela Proposição 2.3.3, veja Figura 2.51 e pelo Lema 2.3.4) veremos que este lema é verdadeiro, basta proceder como em (1). Se β_1 é do tipo $(T, \cup, \dots, \cap, T)$, então, pela Proposição 2.3.1 (veja Figura 2.49), o segundo bloco β_2 deve ser do tipo $(T, \cup, \dots, C, T)$ ou do tipo $(T, \cup, \dots, C]$, onde $C \in \{\cap, \cup\}$.

Afirmamos que β_2 não pode ser do tipo $(T, \cup, \dots, \cup]$. De outro modo, se denotarmos por $\beta_i(\theta)$, com $i \in \{1, 2\}$ e $\beta_i(0) = \beta_i$, o bloco de $([F_p(\theta), F_q(\theta), \lambda_\theta])$ emergindo de β_i . Como θ varia no sentido das afirmações da Proposição 2.3.3, teremos que, para $\theta > 0$ pequeno, $\beta_1(\theta) = (T, T, T)$ e $\beta_2(\theta) = (T, T]$ são ambas parte de regiões transversais de $[F_p(\theta), F_q(\theta)]$. Pelo tipo de β_2 , os únicos blocos de $([F_p, F_q], \gamma)$ possíveis são β_1 e β_2 e portanto $\beta_1(\theta)$ e $\beta_2(\theta)$, para θ pequeno, representam os blocos de $(F_p(\theta), F_q(\theta), \lambda_\theta)$. Isso implica que $(F_p(\theta), F_q(\theta), \lambda_\theta)$ tem somente uma região transversal. Isso contradiz o Lema 2.3.10. Logo, segue a afirmação.

De maneira análoga, pela Proposição 2.3.3 (veja Figura 2.55), β_2 não é do tipo $(T, \cup, \dots, \cap]$ e portanto β_2 é do tipo $(T, \cup, \dots, \cup, T)$, então o lema é verdadeiro. Se β_2 é do tipo $(T, \cup, \dots, \cap, T)$, devemos proceder estudando o terceiro bloco e assim por diante. Como existe uma quantidade finita de blocos, pelo mesmo argumento usado acima para mostrar que β_2 não pode ser do tipo $(T, \cup, \dots, \cup]$, concluímos que todo bloco β_i não pode ser do tipo $(T, \cup, \dots, \cap, T)$. Portanto, descobrimos uma seqüência de blocos $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ do tipo $(T, \cup, \dots, \cap, T)$ tal que β_{m+1} é do tipo $(T, \cup, \dots, \cup, T)$. Sob essas condições e por um argumento similar ao caso $0 \in \Sigma(X, p, q)$ acima, segue (veja Figura 2.62) a tese deste lema.

Figura 2.62

Lema 2.3.16

- (a) Suponhamos que para algum $\theta \in (-\varepsilon, 0)$ (resp. $\theta \in (0, \varepsilon)$) $D_1(\theta)$ está à direita de λ_θ (resp. $D_1(\theta)$ está à esquerda de λ_θ). Se $\varepsilon > 0$ é bastante pequeno, para todo $\theta \in (-\varepsilon, 0]$ (resp. $\theta \in [0, \varepsilon)$) $D_1(\theta)$ está à direita de λ_θ (resp. $D_1(\theta)$ está à esquerda de λ_θ) e para $\theta \in (-\varepsilon, 0]$ (resp. $0 \leq \theta < \varepsilon$) implica que $\{H_\theta^{-1}(B_1(\theta)), B_1(0)\}$ é uma (p, q) -seqüência separante.
- (b) Suponhamos que para algum $\theta \in (0, \varepsilon)$ (resp. $\theta \in (-\varepsilon, 0)$) $D_1(\theta)$ está à direita de λ_θ (resp. $D_1(\theta)$ está à esquerda de λ_θ). Se $\varepsilon > 0$ é bastante pequeno, para todo $\theta \in [0, \varepsilon)$ (resp. $\theta \in (-\varepsilon, 0]$) $D_1(\theta)$ está à direita de λ_θ (resp. $D_1(\theta)$ está à esquerda de λ_θ) e para $0 \in (0, \varepsilon)$ (resp. $0 \in (-\varepsilon, 0]$) implica que $\{B_1(0), H^{-1}(B_1(\theta))\}$ é uma (p, q) -seqüência separante.

Demonstração: Analisaremos o caso em que, para algum $\theta \in (-\varepsilon, 0)$, $D_1(\theta)$ está à direita de λ_θ .

Se $0 \in \Sigma(X, p, q)$, então para $\varepsilon > 0$ pequeno, pelo Corolário 2.1, se $\theta \in (-\varepsilon, 0]$ implica que $\theta \in \Sigma(X, p, q)$ e que, portanto, $D_1(\theta)$ está à direita de λ_θ .

(*) Neste caso os blocos de $([F_p, F_q], \gamma)$ e $([F_p(\theta), F_q(\theta)], \lambda_\theta)$ são como aqueles do início da prova do Lema 2.3.15, ou seja, são estáveis. Como C_1 está à direita de γ , implica que $L_1(\theta)$ e $R_1(\theta)$ são estritamente crescentes em θ e que $H_\theta \circ \gamma([L_1(\theta), R_1(\theta)])$ é a margem compacta de $C_1(\theta)$. Além disso, $B_1(\theta)$ é $H \circ \gamma((L_1(\theta)))$.

$L_1(\theta) < L_1(0) = \ell_1$ se $\theta \in (-\varepsilon, 0)$ pois $L_1(\theta)$ é crescente.

Figura 2.63

Como a componente conexa $F_{\gamma(\ell_1)}(\theta) \setminus \{H_\theta(\gamma(\ell_1))\}$, contida no lado esquerdo de $H_\theta \circ \gamma$ é disjunta de $B_1(\theta)$, devemos ter que a componente conexa de $H_\theta(B_1(0)) \setminus H_\theta(\gamma(\ell_1))$ contida no lado esquerdo de $H_\theta \circ \gamma$ é disjunta de $B_1(\theta)$. Além disso, como $B_1(\theta)$ contém o lado

de $D_1(\theta)$ (que está à direita de $H_\theta \circ \gamma$) teremos não somente que $H_\theta(B_1(\theta))$ é disjunta de $B_1(\theta)$ mas que $\{B_1(\theta), H_\theta(B_1(0))\}$ é $(H_\theta(p), H_\theta(q))$ -seqüência separante. Isto implica que $\{H_\theta^{-1}(B_1(\theta), B_1(0))\}$ é uma (p, q) -seqüência separante (veja Figura 2.63).

Suponhamos que $0 \in \Sigma_1(X, p, q)$. Se $\varepsilon > 0$ é bastante pequeno, segue do Corolário 2.1 que, para todo $\theta \in (-\varepsilon, 0)$, $\theta \in \Sigma(X, p, q)$. Também pelo

- (1) Corolário 2.1., para todo $\theta \in (-\varepsilon, 0)$, $D_1(\theta)$ está à direita de λ_θ , pois, para algum $\theta_0 \in (-\varepsilon, 0)$, $D_1(\theta)$ está à direita de λ_{θ_0} por hipótese.

Sejam $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\ell$ os blocos de $([F_p, F_q], \gamma)$ ordenados de forma natural, com $T_0 \in \beta_1$. Peguemos $\varepsilon > 0$ pequeno de modo que todas as afirmações da Proposição 2.3.3 sejam verdadeiras quando forem aplicadas aos blocos β_k . Segue da Proposição 2.3.3 que se a componente de Reeb C_i de $([F_p, F_q], \gamma)$ persiste quando $\theta \in (-\varepsilon, 0]$ varia, então

- (2.1) λ_θ restrita a $[L_i(\theta), R_i(\theta)]$ coincide com $H \circ \gamma$ e, persistindo, a componente de Reeb $C_i(\theta)$ de $([F_p(\theta), F_q(\theta)], \lambda_\theta)$ é precisamente como em uma das figuras 2.48 – 2.51 ou uma das figuras 2.52 – 2.59, que são conseqüências da Proposição 2.3.3.
- (2.2) Cada componente de Reeb de $([F_p(\theta), F_q(\theta)])$ é da forma $C_i(\theta)$ como descrita em (2.1).

Portanto, existe $1 \leq j \leq n$ tal que, para todo $\theta \in (-\varepsilon, 0]$, $C_j(\theta) = D_1(\theta)$.

- (3) C_j está à direita de γ e pertence a um bloco β_i , onde β_i deve ser um dos seguintes blocos: $(T, \cup, \dots, \cup, T)$, $(T, \cup, \dots, \cap, T)$, $(T, \cup, \dots, \cap]$ e $(T, \cup, \dots, \cup]$. Denote por $\beta_i(\theta)$, com $\beta_i(0) = \beta_i$, o bloco de $([F_p(\theta), F_q(\theta)], \lambda_\theta)$ emergindo de β_i quando θ varia no sentido da Proposição 2.3.3 e suas conseqüências com relação aos blocos β (por exemplo, se $\beta_i = (T, \cap, \dots, \cup, T)$ é como na Figura 2.48, então, para todo $\theta < 0$, $\beta_i(\theta) = (T, T, T)$ e, para $\theta > 0$, $\beta_i(\theta) = (T \cap T \cup T)$). Afirmamos que $i = 1$. Se assumirmos por contradição que $i > 1$, então por (2.1) e (2.2), teremos que $\beta_{i-1}(\theta)$, com $\theta \in (-\varepsilon, 0)$, deve ser formado por regiões transversais. Portanto, analisando as afirmações, conseqüentes da Proposição 2.3.3, vemos que β_{i-1} pode ser, somente, do tipo $(T \cap, \dots, \cup T)$, $[\cap, \dots, \cup, T)$ e $[\cup, \dots, \cup, T)$. No entanto, se colocamos β_{i-1} e β_i juntos, obteremos uma contradição com a Proposição 2.3.1. Isto prova que $\beta_i = \beta_1$.

Sob estas codições, concluímos por (3) que

- (4) β_1 é do tipo $(T, \cup, \dots, \cup, T)$ ou $(T, \cup, \dots, \cap, T)$ ou $(T, \cup, \dots, \cap]$ ou do tipo $(T, \cup, \dots, \cup]$.

Em todos os quatro casos acima, pelas figuras 2.49, 2.51, 2.57 e 2.59, conseqüentes da Proposição 2.1.3, segue que não somente $C_j = C_1$, mas também que o argumento usado em (*) pode ser repetido para concluir a prova deste lema.

Fim da prova do teorema A

Consideremos o caso em que C_1 está à direita de γ . Seja $[0, \varphi)$ o intervalo maximal de $\mathbb{R}$ tal que, se $0 < \theta < \varphi$, então $\{B_1(0), H_\theta^{-1}(B_1(\theta))\}$ é uma (p, q) -seqüência separante. Provaremos que $\varphi = \infty$.

De fato, pelo Lema 2.3.15(a), para $\varepsilon > 0$ bastante pequeno, temos que se $\theta \in (0, \varepsilon)$, então $\{B_1(0), H_\theta^{-1}(B_1(\theta))\}$ é uma (p, q) -seqüência separante e $D_1(\theta)$ está à direita de λ_θ . Seja $\theta_1 \in (0, \varepsilon)$. Podemos aplicar o Lema 2.3.15(a) para $C_1 = D_1(\theta_1)$ e $\gamma = \lambda_{\theta_1}$ e, então veremos que para $\theta' \in [\theta_1, \theta_1 + \varepsilon)$, implica que $\{B_1(\theta_1), H_{\theta' - \theta_1}^{-1}(B_1(\theta' - \theta_1))\}$ é uma $(H_{\theta_1}(p), H_{\theta_1}(q))$ -seqüência separante (veja Figura 2.64).

Figura 2.64

Tomando $\varepsilon > 0$ convenientemente pequeno, podemos assumir, pelo Lema 2.16(b), que $B_1(\theta' - \theta_1) = B_1(\theta')$ e portanto, $\{B_1(\theta), H_{\theta' - \theta_1}^{-1}(B_1(\theta'))\}$ é uma $(H_{\theta_1}(p), H_{\theta_1}(q))$ -seqüência separante. Isso implica que $\{B_1(0), H_{\theta}^{-1}(B_1(\theta)), H_{\theta'}^{-1}(B_1(\theta'))\}$ é uma (p, q) -seqüência separante.

Esse mesmo processo pode ser repetido para $\theta'' \in (\theta', \theta' + \varepsilon)$ e, então teremos que

$$\{B_1(0), H_{\theta_1}^{-1}(B_1(\theta_1)), H_{\theta'}^{-1}(B_1(\theta')), H_{\theta''}^{-1}(B_1(\theta''))\} \quad (*)$$

é uma (p, q) -seqüência separante. Como o intervalo $[0, b]$ é conexo e compacto, repetindo finitas vezes o processo acima, construiremos uma seqüência

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{l-1} < \theta_l = b$$

tal que se $i \in \{1, \dots, l-1\}$, então

$$\{B_1(\theta_i), H_{\theta_{i+1} - \theta_i}^{-1}(B_1(\theta_{i+1}))\} \quad (**)$$

é uma $(H_{\theta_i}(p), H_{\theta_i}(q))$ -seqüência separante.

Figura 2.65

Consideremos o caso $i \in \{0, 1\}$, implica por (*) que

$$\{B_1(0), H_{\theta_1}^{-1}(B_1(\theta_1)), H_{\theta_2}^{-1}(B_1(\theta_2))\}$$

é uma (p, q) -seqüência separante.

Suponhamos que

$$\{B_1(0), H_{\theta_1}^{-1}(B_1(\theta_1)), H_{\theta_2}^{-1}(B_1(\theta_2)), \dots, H_{\theta_{l-1}}^{-1}(B_1(\theta_{l-1}))\}$$

é uma (p, q) -seqüência separante. Então, por (**), como $\{B(\theta_{l-1}), (H_{\theta_l - \theta_{l-1}})^{-1}(B_1(\theta_l))\}$ é uma $(H_{\theta_{l-1}}(p), H_{\theta_{l-1}}(q))$ -seqüência separante, temos por indução que

$$\{B_1(0), H_{\theta_1}^{-1}(B_1(\theta_1)), H_{\theta_2}^{-1}(B_1(\theta_2)), \dots, H_{\theta_l}^{-1}(B_1(\theta_l))\}$$

é uma (p, q) -seqüência separante.

Em particular, $\{B_1(0), H_{\theta_l}^{-1}(B_1(\theta_l))\}$ é uma (p, q) -seqüência separante. Isso prova que $\varphi = \infty$.

Portanto, temos uma contradição, pois $H_{2\pi}$ é a aplicação identidade, logo, $H_{2\pi}(p) = p$ e $H_{2\pi}(q) = q$. Isso implica que $D_1(2\pi) = C_1$ e que, portanto, $B_1(0) = B_1(2\pi)$ e $\{B_1(0), H_{2\pi}^{-1}(B_1(2\pi)) = B_1(0)\}$ não é uma seqüência separante, porque

$$B_1(0) = H_{2\pi}^{-1}(B_1(2\pi))$$

Figura 2.66

$B_1(2\pi)$ não está contida em uma componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)$.

Conclusão

Como foi dito no início deste capítulo, provamos o Teorema A para aplicações $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^2 .

Afirmamos que, também, se X for de C^1 segue o Teorema. De fato, suponhamos que existem $\rho \in [0, \infty)$ e $Y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação de classe C^1 tal que, para todo $q \in \mathbb{R}^2$, o determinante de $DY(q)$ é positivo, além disso, para todo $p \in \mathbb{R}^2$, com $|p| \geq \rho$ o espectro de $DY(p)$ é disjunto do semi-eixo real não-negativo e Y não é injetora. Nesse caso a condição $\det(DY(x)) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^2$, implica que Y só pode ser aproximada por funções não injetoras.

Entretanto, na topologia Whitney Y pode ser aproximada por funções que tem as mesmas hipóteses, em relação ao determinante e autovalores de DY , e de classe C^2 , portanto injetoras. Isso é uma contradição.

Já utilizando o teorema A, Gutierrez e Teixeira [4] provaram o seguinte Teorema:
Sejam $\rho > 0$ e $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial satisfazendo as seguintes condições:

(B-i) X tem uma singularidade S ;

(B-ii) $\det(DX(p)) > 0$, para todo $p \in \mathbb{R}^2$;

(B-iii) para todo $p \in \mathbb{R}^2$, com $\|p\| \geq \rho$, $\text{traço}(D(X(p))) < 0$.

Se $\int_{\mathbb{R}} \text{traço}(DX)$ é menor que zero (resp. maior ou igual a zero), então “ ∞ ” é um repulsor (resp. um atrator) de X . Em particular se X não tem órbita periódica, então ou a variedade estável, $W^s(s)$, de s é todo $\mathbb{R}^2$ ou a variedade instável, $W^u(s)$ de s é todo $\mathbb{R}^2$.

Bibliografia

- [1] Aizerman, M. A. *On a problem concerning the stability in the large of dynamical systems*, *Uspehi Mat. Nauk. N S.*, 4(4), pp187-188.
- [2] Gutierrez, C. *Dissipative vector fields on the plane with infinitely many attracting hyperbolic singularities*, (1992), *Bol. Soc. Bras. Mat.*, 22, No 2, pp 179-190.
- [3] Gutierrez, C. *A solution to the bidimensional global asymptotic stability conjecture*, to appear in *Annales of I.H.P.-Analyse non lineaire*, 1995
- [4] Gutierrez, C e Teixeira, Marco Antonio. *Stability at infinity of planar fields*, *Inf. de Mat. IMPA*, julho, 1994, a ser publicado *Bol. Soc. Bras. Mat.*
- [5] Gassul, A. and Sotomayor, J. *On the basin of attraction of dissipative planar vector fields*, *Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag. Procc. Coll. Periodic Orbits and Bifurcations. Luminy*, 455, 1990
- [6] Gassul, A., Llibre, J. and Sotomayor, J. *Global Asymptotic stability of differential equations in the plane*, *J. Diff. Eq.* 91, 2, 1991
- [7] Hahn, Wolfgang. *Stability of Motion*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1967.
- [8] Hartman, P. (1961) *On stability in the large for systems of ordinary differential equations*, *Can. J Math.*, 13, pp 480-492.
- [9] Hartman, P., (1982) *Ordinary differential equations*, Sec. Ed. Birkhauser.
- [10] Krasovskii, N. N. (1959) *Some problems of the stability theory of motion.*, in russian, Gosudartv, Izdat. Fiz. Mat. Lit.. Moscow (1959). English Translation, Stanford University Press, (1963)
- [11] Makus, L. and Yamabe, H., (1960), *Global Stability Criteria for differential systems*, *Osaka zmath. J.*, 12, pp. 305-317.
- [12] Meisters, G. and Olch, O., (1988), *Solution of the global asymptotic stability Jacobian conjecture for the polynomial case*, *Analyse Mathematique et applications. Contributions en l'honneur de J.L Lions.*, Gauthier-Villars, Paris, pp. 373-381.

- [13] Olech, C., (1963), *On the global stability of an autonomous on the plane*, *Cont. Diff. Eq. 1*, pp. 389-400.
- [14] Meisters, G. and Olech, O., *Global stability injectivity and the Jacobian Conjecture*, *Procc. of the First World Congress on nonlinear Analysis held at Tampa, Florida. August. 1992. W. Gruyter e Co, Berlin 1994.*
- [15] Camacho, Cesar e Lins Neto, Alcides, *Teoria Geométrica das Folheações*, *Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro.*
- [16] Sotomayor, Jorge, *Lições de equações Diferenciais Ordinárias*, *Projeto Euclides, IMPA-CNPq, 1979.*
- [17] Palis, Jacob Jr. e Melo, Welington. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*, *Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro.*