**Passeios e conexidade em grafos mistos:
algoritmos e complexidade computacional**

Orlando Lee

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA APLICADA

Área de Concentração: **Ciência da Computação**
Orientadora: **Profa. Dra. Yoshiko Wakabayashi**

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do CNPq

- São Paulo, novembro de 1994 -

Passeios e conexidade em grafos mistos: algoritmos e complexidade computacional

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e defendida por Orlando Lee
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 16 de janeiro de 1995.

Banca examinadora:

- Prof. Dra. Yoshiko Wakabayashi (orientadora) - IME-USP
- Prof. Dr. Carlos E. Ferreira - IME-USP
- Prof. Dr. Cláudio L. Lucchesi - IMECC-UNICAMP

Resumo

Nesta dissertação estudamos vários problemas relacionados com grafos mistos. Tais grafos generalizam a noção de grafos não-orientados e orientados, no sentido de que podem conter tanto arcos como arestas. Assim, procuramos estudar problemas sobre esses grafos que fossem extensões naturais de problemas conhecidos sobre grafos não-orientados e orientados.

Três problemas bastante conhecidos foram tratados no nosso trabalho: o problema de encontrar uma trilha fechada euleriana, o problema do carteiro chinês e o problema do caminho mínimo. Discutimos a complexidade computacional desses problemas e descrevemos algoritmos polinomiais para alguns (casos particulares) deles.

Problemas de orientação formam outra classe natural de problemas dentro do contexto de grafos mistos. Em particular, estudamos o problema de encontrar orientações fortemente conexas e o problema mais geral de encontrar orientações k -aresta-conexas de grafos mistos.

Por fim, estudamos também o problema de aumentar a aresta-conexidade local de grafos mistos. Mais precisamente, estudamos o problema de encontrar um conjunto mínimo de arestas (arcos) a serem acrescentadas(os) a um grafo misto de modo que no grafo resultante a aresta-conexidade entre cada par (u, v) de vértices distintos seja pelo menos um valor pré-estabelecido $r(u, v)$.

Abstract

In this dissertation we study several problems on mixed graphs. These graphs generalise the notion of undirected and of directed graphs, in the sense that they may contain edges as well as arcs. Most of the problems studied here are natural extensions of known problems for undirected and directed graphs.

Three well-known problems are discussed in this work: the problem of finding a closed eulerian trail, the Chinese postman problem and the shortest path problem. We study these problems from the algorithmic viewpoint showing their computational complexity status or exhibiting polynomial time algorithms for some (special cases) of them.

The so-called orientation problems form another class of problems which arise naturally in the context of mixed graphs. In particular, we study the problem of finding strongly connected orientations and the more general problem of finding k -edge-connected orientations of mixed graphs.

We also consider the problem of augmenting graphs to meet local edge-connectivity requirements. More precisely, we study the problem of finding a minimum number of edges (arcs) to be added to a given mixed graph so that in the resulting graph the edge-connectivity between every pair (u, v) of distinct vertices is at least a prescribed value $r(u, v)$.

Agradecimentos

À Yoshiko pela orientação e pela dedicação que tornaram possível o final desse trabalho.

Ao Mané e à Marie pelo incentivo e pela amizade.

Ao Flávio pelas dicas sobre o LaTeX, o Emacs e outras coisas mais.

Ao Bira e ao Rogério pela amizade.

Ao Carlinhos pelo artigo que mandou da Alemanha e pelas sugestões a respeito da dissertação.

Ao CNPq pelo financiamento dado durante a fase de elaboração deste trabalho.

E finalmente, àqueles que não encontrei um bom motivo para agradecer ou simplesmente esqueci de mencionar.

Introdução

Durante a elaboração deste trabalho, quando indagados sobre o tópico de nossa pesquisa, freqüentemente nos vimos diante de perguntas do tipo “— Grafo misto? O que é isto?”. Outras vezes encontramos pessoas cuja primeira reação era lembrar que o problema do carteiro chinês para grafos mistos é difícil. Tal reação era logo acompanhada de perguntas do tipo “— Há outros problemas interessantes sobre tais grafos? Quais?”.

De fato, o conceito de grafo misto é pouco conhecido e a literatura a respeito relativamente pequena. Assim, ao iniciarmos nossa pesquisa, foi com grata surpresa que descobrimos não apenas diversos problemas interessantes sobre esses grafos mas uma rica diversidade de ferramentas e teorias para atacar esses problemas. Essa descoberta motivou grandemente o presente trabalho que é uma resenha de tópicos selecionados sobre grafos mistos. A escolha dos problemas aqui tratados levou em conta nossas preferências pessoais, conciliadas com nosso propósito de dar uma certa unidade ao trabalho.

Grafos mistos podem ser vistos como uma generalização do conceito de grafo não-orientado ou orientado, no sentido de que podem conter tanto arcos como arestas. Muitos problemas sobre esses grafos são em geral extensões naturais de problemas sobre grafos orientados e podem ser reduzidos *trivialmente* à versão orientada substituindo cada aresta por um par de arcos reversos. Neste trabalho estudamos vários problemas envolvendo esses grafos que não fossem triviais no sentido acima. Nesse estudo analisamos esses problemas sob o ponto de vista algorítmico, estabelecendo a sua complexidade computacional, e exibindo, quando conhecido, um algoritmo polinomial para o problema em questão.

Os resultados aqui apresentados foram coletados da literatura, tendo sido nossa principal contribuição a descrição explícita de cada um dos algoritmos aqui mencionados. Cabe aqui ressaltar que alguns desses algoritmos não foram encontrados como descrevemos, tendo sido nossa tarefa deduzi-los dos resultados que os fornecem implicitamente. Não nos preocupamos porém, em descrever cada algoritmo de maneira detalhada — com especificação de estrutura de dados e cálculo exato da complexidade de tempo —, procurando dar ênfase à existência de um tal algoritmo (polinomial) e à descrição de suas idéias principais.

Podemos distinguir basicamente três tipos de problemas tratados neste trabalho: problemas sobre passeios, problemas de orientação e problemas envolvendo aumento de aresta-conexidade.

No **Capítulo 1** definimos vários conceitos básicos que são utilizados neste trabalho e estabelecemos a notação empregada.

No **Capítulo 2** estudamos o Problema do Carteiro Chinês e mencionamos vários problemas correlatos.

Na Seção 2.1 descrevemos um resultado de Ford e Fulkerson [1973] que caracteriza a existência de uma trilha fechada euleriana em um grafo misto. Esse resultado generaliza dois resultados bem conhecidos sobre a existência de tais trilhas em grafos não-orientados e orientados, e fornece um algoritmo polinomial para encontrar, caso exista, uma trilha euleriana em um grafo misto.

Na Seção 2.2 definimos o Problema do Carteiro Chinês para grafos mistos (PCCM). O problema é bastante conhecido tanto na sua versão não-orientada quanto na orientada e se conhecem algoritmos polinomiais para resolver ambas as versões. O PCCM é provavelmente o problema combinatório sobre grafos mistos mais conhecido e estudado na literatura, motivo pelo qual decidimos inseri-lo neste trabalho.

Na Seção 2.3 demonstramos o resultado de Papadimitriou [1976] que mostra que o PCCM é $\mathcal{NP}$ -difícil. Na Seção 2.4 estudamos a complexidade computacional do problema quando são impostas várias restrições “naturais” às entradas do problema (como planaridade do grafo). Mesmo assim, verificamos que o PCCM continua NP -difícil.

No **Capítulo 3**, o menor deste trabalho, discutimos o problema de encontrar caminhos de custo mínimo. É um fato bem conhecido que existem algoritmos polinomiais para o problema nas versões não-orientadas e orientadas, quando não existem circuitos negativos no grafo, e que o problema se torna difícil na presença desses. Mencionamos dois resultados importantes devidos a Arkin [1986] sobre a complexidade computacional do problema na versão mista, e descrevemos um algoritmo polinomial para o caso bastante particular de grafos acíclicos.

No **Capítulo 4** começamos o estudo de problemas de orientação de grafos. Aqui descrevemos dois problemas relacionados com orientações fortemente conexas e apresentamos algoritmos lineares para ambos.

Na Seção 4.1 estudamos o problema de encontrar uma orientação fortemente conexa de um grafo misto. Descrevemos em detalhe um algoritmo baseado em busca em profundidade devido a Chung, Garey e Tarjan [1985] para encontrar uma tal orientação, caso exista.

Na Seção 4.2 estudamos o problema de encontrar um conjunto mínimo de *arcos* a serem

acrescentados a um grafo misto de modo que o grafo resultante tenha uma orientação fortemente conexa. Mostramos o método de Gusfield [1987] para reduzir o problema a um problema de aumento de grafos orientados estudado por Eswaran e Tarjan [1976].

No **Capítulo 5**, um dos mais longos do trabalho, estudamos problemas de orientação mais gerais que os do Capítulo 4, entre os quais destacamos o problema de encontrar orientações k -aresta-conexas de um grafo misto. Foi em busca de resultados relacionados com tais problemas que nos deparamos com a teoria das funções submodulares.

Na Seção 5.1 e 5.2 introduzimos vários conceitos como submodularidade e conjuntos entrecortados (cruzados), e definimos o problema de Edmonds-Giles. O problema de Edmonds-Giles é um problema de programação linear envolvendo funções submodulares sobre digrafos e inclui várias especializações como interseção de matróides, o problema de Lucchesi-Younger e o problema de encontrar uma orientação k -aresta-conexa de um grafo misto.

Na Seção 5.3 descrevemos um algoritmo polinomial, devido a Frank [1982], para resolver uma versão restrita do problema de Edmonds-Giles. Nas duas seções seguintes analisamos a complexidade do algoritmo e derivamos um teorema de viabilidade do problema. Na Seção 5.6 mostramos como resolver a versão mais geral do problema utilizando o algoritmo da Seção 5.3 e descrevemos um teorema de viabilidade para essa versão.

Na Seção 5.7 mostramos algumas aplicações do problema de Edmonds-Giles em problemas de orientação de grafos. Em particular, apresentamos um algoritmo polinomial para encontrar uma orientação k -aresta-conexa de um grafo misto. Tal algoritmo faz uso de uma rotina que encontra uma orientação k -aresta-conexa de um grafo não-orientado, descrito na Seção 5.8.

No **Capítulo 6** estudamos um problema recentemente resolvido por Bang-Jensen, Frank e Jackson [1993]: encontrar um conjunto mínimo de arestas (arcos) a serem acrescentadas(os) a um grafo misto M de modo que no grafo resultante, para todo par x, y de vértices distintos, a aresta-conexidade local de x a y seja pelo menos um valor pré-estabelecido $r(x, y)$. Mais precisamente, dadas demandas $r(x, y)$, encontrar um supergrafo mínimo de M no qual existam $r(x, y)$ caminhos de x a y disjuntos nas arestas e arcos, para todo par x, y de vértices distintos.

Na Seção 6.1 definimos a versão do problema acima que acrescenta apenas *arestas* e a versão que acrescenta apenas *arcos*, e descrevemos os conceitos e notações utilizados ao longo do capítulo.

Na Seção 6.2 demonstramos o resultado de Bang-Jensen, Frank e Jackson [1993] que fornece um algoritmo polinomial para a versão de aumento com arestas, quando as demandas satisfazem determinadas propriedades. No final da seção demonstramos um difícil teorema sobre aglutinação (*splitting off*) obtido por esses autores e que é funda-

mental para a resolução do problema.

Na Seção 6.3 mencionamos resultados análogos aos da Seção 6.2 para a versão de aumento com arcos. Observamos que esta versão pode ser vista como um problema “puro” sobre grafos orientados, ao contrário dos outros problemas tratados no trabalho. Apesar disso, optamos por inserir esses resultados devido ao fato de serem pouco conhecidos.

Conteúdo

1	Conceitos básicos e notações	1
2	O problema do carteiro chinês	7
2.1	Grafos mistos eulerianos	7
2.2	Definição do problema	10
2.3	Complexidade computacional do problema	11
2.4	Caso especial: grafos planares	15
2.5	Algoritmos e problemas correlatos	18
3	O problema do caminho mínimo	21
3.1	Caminhos mínimos em grafos acíclicos	21
4	Orientações fortemente conexas	31
4.1	Grafos fortemente orientáveis	31
4.2	Aumentações fortemente orientáveis	41
5	Orientações k-aresta-conexas	49
5.1	Preliminares	50
5.2	Famílias entrecortadas	53
5.3	O algoritmo de Frank	56
5.4	Complexidade do algoritmo	62

5.5	Solução viável inicial	63
5.6	Famílias cruzadas	65
5.7	Aplicações em orientações de grafos	68
5.8	Orientações de grafos não-orientados	72
6	Aumentações com demandas de aresta-conexidade	81
6.1	Preliminares	82
6.2	Aumentações com arestas	84
6.3	Aumentações com arcos	105
	Considerações finais	109
	Bibliografia	111
	Índice dos símbolos mais usados	115
	Índice	117

Capítulo 1

Conceitos básicos e notações

Neste capítulo introduzimos vários conceitos e notações que serão utilizados nos próximos capítulos.

Não incluímos neste trabalho nenhuma seção descrevendo formalmente conceitos da Teoria de Complexidade Computacional por serem bastante conhecidos e também pelo fato de que adotaremos aqui a terminologia amplamente aceita de Garey e Johnson [1979].

Também não incluímos nenhuma seção formalizando conceitos bem conhecidos na área de otimização combinatória e programação matemática, como por exemplo fluxos, circulações, soluções viáveis e folgas complementares. Assumiremos neste trabalho que o leitor já tenha alguma familiaridade com esses conceitos (veja por exemplo, Papadimitriou e Steiglitz [1982], Lawler [1976]).

Trataremos aqui apenas dos conceitos básicos da Teoria dos Grafos, procurando estabelecer a terminologia e a notação que serão utilizadas neste trabalho. Ao leitor não muito familiarizado com tais conceitos sugerimos consultar Bondy e Murty [1976], Bollobás [1979] ou Lucchesi [1979].

Grafos mistos podem ser vistos como uma generalização do conceito de grafos não-orientados e grafos orientados. São grafos que possuem tanto arestas não-orientadas quanto arestas orientadas. Vários dos conceitos básicos associados a grafos como circuitos, caminhos e conexidade podem ser facilmente estendidos para grafos mistos. Como grafos mistos formarão basicamente o nosso objeto de trabalho, é conveniente defini-los de maneira mais precisa.

Um **grafo misto** é uma quintupla $M = (V, E, A, \Phi, \Psi)$ onde V é um conjunto finito de elementos chamados **vértices**, E é um conjunto finito de elementos chamados **arestas**, A é um conjunto finito de elementos chamados **arcos**, Φ é uma função que associa cada aresta $e \in E$ a um par não ordenado $\{u, v\}$ de vértices e Ψ é uma função que associa cada

arco $a \in A$ a um par ordenado (u, v) de vértices.

Dizemos que $e = \{u, v\}$ ou $e = uv$ é uma aresta de M se $\Phi(e) = \{u, v\}$ e que $a = (u, v)$ é um arco de M se $\Psi(a) = (u, v)$. Quando não há risco de ambigüidade dizemos simplesmente que uv é uma aresta ou que (u, v) é um arco. Com essa notação podemos supor Φ e Ψ implícitos e denotar um grafo misto simplesmente por $M = (V, E, A)$.

Quando $A = \emptyset$ dizemos que M é um **grafo não-orientado** e o indicamos simplesmente por $M = (V, E)$. Quando $E = \emptyset$ dizemos que M é um **grafo orientado** ou um **digrafo** e o indicamos simplesmente por $M = (V, A)$. Às vezes, utilizamos a palavra *grafo* significando tanto um grafo misto quanto um grafo não-orientado. Neste trabalho reservamos as letras M, G, D para indicar grafos mistos, grafos não-orientados e grafos orientados, respectivamente.

Às vezes, é conveniente interpretar um grafo misto $M = (V, E, A)$ como uma união de um digrafo $D = (V, A)$ e um grafo $G = (V, E)$. Dizemos então que M é **composto** por D e por G , e indicamos isso por $M = D \sqcup G$. Nesse caso, dizemos também que D é a **parte orientada** de M e G é a **parte não-orientada** de M .

Denotamos um elemento genérico de $E \cup A$ por $l = [u, v]$ indicando que l ou é uma aresta $l = uv$ de E ou é um arco $l = (u, v)$ de A . Dado um elemento $l = [u, v]$ de $E \cup A$ dizemos que u e v são os **extremos** de l , e que l **incide** em u (em v). Dizemos que dois vértices u e v são **adjacentes** (em M) se ambos forem extremos de um mesmo elemento de $E \cup A$. Dizemos que um elemento $[v, v]$ de $E \cup A$ é um **laço**. Dado um arco $l = (u, v)$ dizemos que o vértice u é a **cauda** de l e que o vértice v é a **ponta** de l . Dizemos também que o arco l **entra em** v e **sai de** u .

Dois arcos da forma (u, v) e (v, u) são chamados de **arcos reversos**. Se $f = [u, v]$ e $l = [u, v]$ são elementos de $E \cup A$ então dizemos que f e l são **paralelos**. Observe que o conceito de reversão aplica-se apenas a arcos enquanto o paralelismo pode ocorrer entre arcos e arestas.

Dado um conjunto X indicamos por $X + x$ e $X - x$ os conjuntos $X \cup \{x\}$ e $X - \{x\}$. Quando o conjunto de vértices V está claro dentro do contexto e X é um subconjunto de V , escrevemos $\overline{X}$ em vez de $V - X$.

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Dados subconjuntos X, Y de V definimos

$$\begin{aligned} E_G(X, Y) &= \{xy \in E : x \in X, y \in Y\}, \\ E_G(X) &= E_G(X, \overline{X}). \end{aligned}$$

Quando $X = \{u\}$ e $Y = \{v\}$ escrevemos simplesmente $E_G(u, v)$ (resp. $E_G(v)$) em vez de $E_G(\{u\}, \{v\})$ (resp. $E_G(\{v\}, V - v)$).

Usamos a seguinte notação para subconjuntos X, Y de V :

$$\begin{aligned} d_G(X, Y) &= |E_G(X - Y, Y - X)|, \\ d_G(X) &= d_G(X, \overline{X}), \end{aligned}$$

ou seja, $d_G(X, Y)$ é o número de arestas com um extremo em $X - Y$ e outro em $Y - X$. Quando $X = \{u\}$ e $Y = \{v\}$ escrevemos simplesmente $d_G(u, v)$ (resp. $d_G(v)$) em vez de $d_G(\{u\}, \{v\})$ (resp. $d_G(\{v\}, V - v)$). Para cada vértice v de G definimos $d_G(v) + 2|E_G(v, v)|$ como o **grau** do vértice v no grafo não-orientado G , indicando-o por $g_G(v)$. Dizemos que uma aresta e **incide** em um conjunto $X \subset V$ se $e \in E_G(X)$.

Seja $D = (V, A)$ um digrafo. Para $X, Y \subseteq V$ definimos

$$A_D^-(X, Y) = \{(y, x) \in A : x \in X, y \in Y\},$$

e denotamos

$$\begin{aligned} A_D^+(X, Y) &= A_D^-(Y, X), \\ A_D^-(X) &= A_D^-(X, \overline{X}), \\ A_D^+(X) &= A_D^+(X, \overline{X}). \end{aligned}$$

Quando $X = \{u\}$ e $Y = \{v\}$ escrevemos simplesmente $A_D^-(u, v)$ (resp. $A_D^-(v)$) em vez de $A_D^-(\{u\}, \{v\})$ (resp. $A_D^-(\{v\}, V - v)$). Usamos notações análogas para $A_D^+(X, Y)$.

Para $X \subseteq V$ usamos a seguinte notação:

$$\begin{aligned} \rho_D(X) &= |A_D^-(X)|, \\ \delta_D(X) &= |A_D^+(X)|. \end{aligned}$$

Quando $X = \{v\}$ escrevemos simplesmente $\rho_D(v)$ (resp. $\delta_D(v)$) em vez de $\rho_D(\{v\})$ (resp. $\delta_D(\{v\})$). Definimos o **grau de entrada** de um vértice v no digrafo D como o número $\rho_D(v) + |A_D^-(v, v)|$, indicando-o por $g_D^-(v)$. Definimos o **grau de saída** de um vértice v no digrafo D como o número $\delta_D(v) + |A_D^+(v, v)|$, indicando-o por $g_D^+(v)$. Dizemos que um arco a **entra em** (**sai de**) um conjunto $X \subset V$ se $a \in A_D^-(X)$ ($a \in A_D^+(X)$).

Nas definições que se seguem vamos supor que $M = (V, E, A)$ é um grafo misto composto pelo digrafo D e pelo grafo G .

Para $X, Y \subseteq V$ usamos a seguinte notação:

$$\begin{aligned} \rho_M(X) &= \rho_D(X) + d_G(X), \\ \delta_M(X) &= \delta_D(X) + d_G(X), \\ d_M(X, Y) &= d_G(X, Y) + |A_D^-(X - Y, Y - X)| + |A_D^+(X - Y, Y - X)|. \end{aligned}$$

Observe que $d_M(X, Y)$ é o número de arcos e arestas como um extremo em $X - Y$ e outro em $Y - X$. Definimos o **grau** de um vértice v em M como o número $g_D^-(v) + g_D^+(v) + g_G(v)$, indicando-o por $g_M(v)$. Um vértice com grau zero é dito **isolado**. Dizemos que um vértice v é **par** se $g_M(v)$ for par, caso contrário, dizemos que v é **ímpar**. Dizemos que M é **par** se todos os vértices de M forem pares.

Um vértice v é **balanceado** (em M) se $\rho_M(v) = \delta_M(v)$. Um **grafo misto** M é **simétrico** se todos os vértices de M forem balanceados. Dizemos que v é uma **fonte** (em M) se $g_M(v) = \delta_D(v)$ e que v é um **sorvedouro** (em M) se $g_M(v) = \rho_D(v)$.

Para simplificar a notação, sempre que os grafos M, D ou G estiverem claros dentro do contexto estes serão omitidos nas notações em que ocorrem como subscrito. Por exemplo, escreveremos $g(v)$ em lugar de $g_M(v)$.

Um grafo misto $M' = (V', E', A', \Phi', \Psi')$ é um **subgrafo** de $M = (V, E, A, \Phi, \Psi)$ se $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$, $A' \subseteq A$, Φ' é a restrição de Φ a E' e Ψ' é a restrição de Ψ a A' . Dados $F \subseteq E$ e $L \subseteq A$, denotamos por $M - (F \cup L)$ o subgrafo de M que resulta da remoção de $F \cup L$. Mais precisamente,

$$M - (F \cup L) = (V, E - F, A - L).$$

Dado $U \subseteq V$ definimos os seguintes subgrafos de $M = D \sqcup G$:

$$\begin{aligned} M[U] &= (U, E_G(U, U), A_D^-(U, U) \cup A_D^+(U, U)), \\ M - U &= M[\overline{U}], \\ M/U &= (\overline{U} + w, E_G(\overline{U}, \overline{U}) \cup E', A_D^-(\overline{U}, \overline{U}) \cup A_D^+(\overline{U}, \overline{U}) \cup A_1 \cup A_2) \text{ onde} \\ &\quad w \notin V, \\ &\quad E' = \{vw : \text{existe } v \in \overline{U} \text{ e } u \in U \text{ tal que } vu \in E\}, \\ &\quad A_1 = \{(v, w) : v \in \overline{U} \text{ e existe } u \in U \text{ tal que } (v, u) \in A\}, \\ &\quad A_2 = \{(w, v) : v \in \overline{U} \text{ e existe } u \in U \text{ tal que } (u, v) \in A\}. \end{aligned}$$

Dizemos que $M[U]$ é o subgrafo de M **induzido por** U , $M - U$ é o subgrafo de M obtido pela **remoção** de U , e M/U é o grafo obtido a partir de M pela **contração** de U . Quando $U = \{u\}$ indicamos o subgrafo $M - U$ por $M - u$. Se $M' = (U, E', A')$ é um subgrafo de M então também dizemos que M/U é o grafo obtido a partir de M pela **contração** de M' .

Analogamente, dizemos que um grafo misto $M' = (V', E', A', \Phi', \Psi')$ é um **supergrafo** de M se $V \subseteq V'$, $E \subseteq E'$, $A \subseteq A'$, Φ é a restrição de Φ' a E e Ψ é a restrição de Ψ' a A . Se F e L são conjuntos de arestas e arcos, respectivamente, com extremos em V , denotamos por $M + (F \cup L)$ o supergrafo de M que resulta do acréscimo de $F \cup L$. Mais precisamente,

$$M + (F \cup L) = (V, E \cup F, A \cup L).$$

Quando $F = \{e\}$ ou $L = \{a\}$ então usamos notações mais simplificadas como $M - e$, $M + a$ e $M - e + a$, em vez de $M - \{e\}$, $M + \{a\}$ e $M - \{e\} + \{a\}$, respectivamente. Observe que permitimos o uso dessa mesma notação para indicar conjuntos ($X - x$ ou $X + x$), mas sempre que o fizermos o contexto deixará claro a qual desses objetos estaremos nos referindo.

Um **passeio** P (em M) é uma seqüência de vértices e arcos/arestas de M da forma $P = (v_1, l_1, v_2, l_2, \dots, v_{n-1}, l_{n-1}, v_n)$ onde $l_i = [v_i, v_{i+1}]$ ou $l_i = [v_{i+1}, v_i]$ para $1 \leq i \leq n-1$. Convencionamos que v_1 é o **início** do passeio e que v_n é o **final** do passeio. Denotamos por VP, EP, AP , respectivamente, o conjunto dos vértices, o conjunto das arestas e o conjunto dos arcos que aparecem no passeio P . O **comprimento do passeio** P é definido como $n-1$.

Se $P = (v_1, l_1, \dots, v_n)$ e $Q = (v_n = w_1, s_1, \dots, w_m)$ são passeios em M então denotamos por PQ o passeio $(v_1, l_1, \dots, v_n = w_1, s_1, \dots, w_m)$ e dizemos que PQ é a **concatenação** de P e Q . Se $P = P_1 P_2 \dots P_n$ então dizemos que o passeio P_i é uma **seção** de P . Por simplicidade, quando não há ambigüidade, denotamos um passeio apenas por sua seqüência de vértices, isto é, $P = (v_1, v_2, \dots, v_n)$.

Seja $P = (v_1, l_1, v_2, \dots, v_{n-1}, l_{n-1}, v_n)$ um passeio em M . Dizemos que P é um **passeio fechado** em M se o seu início e o seu final coincidem. Dizemos que P é um **passeio viável** em M se $l_i = [v_i, v_{i+1}]$, para $1 \leq i \leq n-1$. Em particular, se P é um passeio viável e $EP = \emptyset$ então dizemos que P é um **passeio orientado** (em M). Observe que podem existir passeios orientados em um grafo misto M .

Dizemos que P **passa por** (em) v (resp. l), se $v \in VP$ (resp. $l \in EP \cup AP$). Se $l_i = [u, v]$, $v_i = u$ e $v_{i+1} = v$ então dizemos que l_i é percorrido no sentido de u a v . Definimos $|\{i : 1 \leq i \leq n-1 \text{ e } l_i = l\}|$ como o número de vezes que o passeio P passa por uma aresta ou por um arco l .

Um **trilha** $T = (v_1, l_1, \dots, l_{n-1}, v_n)$ em M é um passeio em M tal que $l_i \neq l_j$ para $1 \leq i < j \leq n-1$. Dizemos que T é uma **trilha fechada** se $v_1 = v_n$. Um **circuito** $C = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ em M é um passeio fechado em M tal que $v_i \neq v_j$ para $1 \leq i < j \leq n-1$.

Um **caminho** $P = (v_1, l_1, \dots, l_{n-1}, v_n)$ em M é um passeio em M tal que $v_i \neq v_j$ para $1 \leq i < j \leq n$. Dizemos que $v_2, v_3, \dots, v_{n-1}$ são os **vértices internos** do caminho e que v_1 e v_n são os **extremos** do caminho. Dois caminhos P e Q são chamados **disjuntos nas arestas** se $EP \cap EQ = \emptyset$ e $AP \cap AQ = \emptyset$. Note que tais caminhos também são disjuntos nos arcos. Para simplificar, omitimos a menção aos arcos.

Definimos trilhas, caminhos e circuitos **viáveis** (resp. **orientadas(os)**) de modo análogo ao que fizemos em relação a um passeio. Quando M estiver claro dentro do contexto, em vez de dizermos que P é um passeio (trilha, circuito, caminho) em M dizemos simplesmente que P é um passeio (trilha, circuito, caminho).

Dizemos que um grafo misto M é **acíclico** se não existem circuitos viáveis em M . Uma **árvore** é um grafo não-orientado conexo e acíclico. Dizemos que um subgrafo não-orientado T de M é uma **m-árvore** se T é uma árvore e é maximal com esta propriedade. Dizemos que uma m-árvore é **trivial** se não contém nenhuma aresta.

Dada uma aresta $e = uv$ de M , dizemos que $M - e + a$, onde $a = (u, v) \notin A$, é o grafo misto obtido pela orientação de e no sentido de u a v . Neste caso, também dizemos que e foi orientado no sentido de u a v e que $a = (u, v)$ é uma **orientação** de e . Dizemos que e foi orientado se ele foi orientado em um dos dois sentidos. Uma **orientação** de um grafo misto $M = (V, E, A)$ é um grafo orientado $D' = (V, A' \cup A)$ obtido por sucessivas orientações das arestas de M .

O conceito de conexidade pode ser estendido para grafos mistos. Um grafo misto $M = (V, E, A)$ é **conexo** se para todo par de vértices u, v de V existe um caminho de u a v em M . Um **componente** de M é um subgrafo conexo e maximal de M . Uma **aresta de corte** ou **ponte** de M é uma aresta $e \in E$ tal que $M - e$ tem mais componentes do que M .

Um grafo misto $M = (V, E, A)$ é **fortemente conexo (f.c.)** se para todo par de vértices u, v de V existe um caminho viável de u a v em M . Um **componente fortemente conexo** é um subgrafo fortemente conexo e maximal de M .

Dizemos que um conjunto $S \subset V$ **separa** x e y se $|S \cap \{x, y\}| = 1$. Dizemos que tal um conjunto S é um **$x\bar{y}$ -conjunto** se $x \in S$ e $y \notin S$. Para cada par x, y de vértices distintos, a **aresta-conexidade local** de x a y (em M), denotada por $\lambda(x, y; M)$, é definida como o número máximo de caminhos viáveis de x a y disjuntos nas arestas. Pelo Teorema de Menger,

$$\lambda(x, y; M) = \min\{\delta_M(S) : S \subset V \text{ e } S \text{ é um } x\bar{y}\text{-conjunto}\}.$$

Dizemos que M é **k -aresta-conexo** se $\lambda(x, y; M) \geq k$ para todo $x, y \in V$. Observe que 1-aresta-conexidade é equivalente a conexidade forte.

Um **hipergrafo** é um par ordenado $H = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ onde $\mathcal{V}$ é um conjunto finito não vazio e $\mathcal{A}$ é uma coleção de subconjuntos de $\mathcal{V}$. Dizemos que um hipergrafo H é **conexo** se não existe uma partição $\mathcal{A} = \mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ tal que

$$(\cup\{A : A \in \mathcal{E}\}) \cap (\cup\{A : A \in \mathcal{F}\}) = \emptyset.$$

Capítulo 2

O problema do carteiro chinês

O problema de encontrar trilhas eulerianas e o problema do carteiro chinês são bastante conhecidos, tanto no caso não-orientado como no orientado. Neste capítulo definiremos versões desses problemas para grafos mistos e estudaremos a complexidade computacional de cada uma delas.

Na Seção 2.1 demonstramos um resultado de Ford e Fulkerson [1973] que caracteriza a existência de uma trilha fechada euleriana em um grafo misto.

Na Seção 2.2 consideramos o problema do carteiro chinês para grafos mistos (PCCM). Este foi um dos primeiros problemas de otimização combinatória estudados que trata de grafos mistos. Na Seção 2.3 veremos que o PCCM é $\mathcal{NP}$ -difícil.

A seguir estudamos o PCCM restrito a grafos planares. Na Seção 2.4 mostramos que o PCCM é $\mathcal{NP}$ -difícil mesmo quando o grafo de entrada é planar e os custos dos arcos e arestas são iguais a 1.

A Seção 2.5 contém uma miscelânea de resultados e algoritmos relacionados com o PCCM, bem como a descrição de dois problemas correlatos.

2.1 Grafos mistos eulerianos

O conceito de grafos eulerianos é bastante conhecido, tanto na sua versão não-orientada como na orientada. Este conceito pode ser estendido de modo natural para grafos mistos, como veremos neste capítulo.

A origem do conceito de grafos eulerianos está relacionado com o famoso artigo de Leonhard Euler [1736] sobre o problema das 7 pontes de Königsberg. Ainda que nesse

artigo não seja feita nenhuma referência a grafos, traduzindo na linguagem de Teoria dos Grafos, Euler investigou o problema de caracterizar grafos não-orientados que possuem uma trilha fechada que passa exatamente uma vez em cada uma de suas arestas. Com isso, Euler resolveu o problema das 7 pontes de Königsberg, mas não chegou a fazer uma prova rigorosa quanto à suficiência da condição “grafo ser par” para a existência de uma tal trilha. Uma prova rigorosa só foi feita mais tarde por Carl Hierholzer [1873]. Maiores detalhes podem ser encontrados em Biggs, Lloyd e Wilson [1976].

A versão mais geral desse problema é caracterizar grafos mistos que possuem uma trilha fechada viável, passando exatamente uma vez em cada arco e em cada aresta do grafo.

Seja M um grafo misto. Uma **trilha fechada euleriana** em M é uma trilha viável fechada em M que passa exatamente uma vez em cada arco e aresta de M . Dizemos que M é **euleriano** se M possui uma trilha euleriana fechada.

Há muito tempo são conhecidas condições necessárias e suficientes para a existência de trilhas eulerianas em grafos não-orientados e em grafos orientados. Também são conhecidos algoritmos lineares para encontrar tais trilhas, tanto no caso não-orientado como no orientado. O leitor interessado encontrará em Gibbons [1985] detalhes sobre tais algoritmos.

Proposição 2.1.1 *Seja G um grafo não-orientado conexo. Então G é euleriano se e somente se G é par.*

Proposição 2.1.2 *Seja D um grafo orientado conexo. Então D é euleriano se e somente se D é simétrico.*

Ford e Fulkerson [1973] caracterizaram a existência de trilhas eulerianas em grafos mistos.

Teorema 2.1.3 (Ford e Fulkerson, 1973) *Seja $M = D \sqcup G$ um grafo misto conexo. Então M é euleriano se e somente se:*

- M é par;
- Para todo $X \subset V : d_G(X) + \delta_D(X) - \rho_D(X) \geq 0$.

Prova: É fácil ver que as duas condições acima são necessárias para a existência de uma trilha euleriana fechada.

Vamos mostrar agora que tais condições são suficientes. Suponha que $M = (V, E, A)$. Considere o digrafo $H = (V, A \cup \hat{A})$ obtido a partir de M substituindo cada aresta $e = xy$ por um par de arcos $e_1 = (x, y)$, $e_2 = (y, x)$.

Para cada arco a de H defina uma capacidade inferior $l(a)$ e uma capacidade superior $u(a)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u(a) &= 1 \text{ para todo } a \in A \cup \hat{A}; \\ l(a) &= \begin{cases} 0 & \text{se } a \in \hat{A}, \\ 1 & \text{se } a \in A. \end{cases} \end{aligned}$$

Com essas definições, é fácil ver que a segunda condição do teorema é equivalente à condição dada pelo seguinte teorema (veja Ford e Fulkerson [1973]) :

(Teorema de Hoffman) *Dados um digrafo $H = (V, A')$ e funções capacidades $l, u : A' \rightarrow \mathbb{R}_+$, existe uma circulação viável em H se e somente se*

$$\sum_{a \in A_H^+(X)} u(a) \geq \sum_{a \in A_H^-(X)} l(a) \text{ para todo } X \subset V.$$

Ainda, se l e u assumem apenas valores inteiros então existe uma circulação viável inteira.

Portanto, existe uma circulação viável em $H = (V, A \cup \hat{A})$. Ainda, como l, u são funções de $A \cup \hat{A}$ em $\{0, 1\}$, segue que existe uma circulação viável 0/1 em H , digamos Φ .

Considere o grafo misto $M' = (V, E', A')$ obtido de M substituindo cada aresta $e = xy$ pelo arco $e_1 = (x, y)$ toda vez que $\Phi(e_1) = 1$ e $\Phi(e_2) = 0$.

Claramente, o subgrafo $D' = (V, \emptyset, A')$ é simétrico e cada um de seus componentes possui uma trilha euleriana fechada. Ainda, o subgrafo $G' = (V, E', \emptyset)$ é par e cada um de seus componentes também possui uma trilha euleriana fechada. Combinando as trilhas obtidas em D' e em G' é possível construir uma trilha fechada euleriana em M . ■

A demonstração do teorema anterior fornece um algoritmo para encontrar uma trilha fechada euleriana em um grafo misto euleriano. Note que tal algoritmo é polinomial já que o problema de encontrar uma circulação viável em um digrafo com capacidades 0/1 pode ser resolvido em tempo $O(m^2)$, onde m é o número de arcos do digrafo (veja Lawler [1976]). Não explicitaremos aqui o algoritmo por este ser facilmente dedutível da demonstração apresentada.

O grafo da Figura 2.1 mostra que não é suficiente considerar subconjuntos da forma $S = \{v\}$ na segunda condição do Teorema 2.1.3. Note que tais conjuntos satisfazem a

segunda condição; no entanto, o conjunto formado pelos vértices em destaque não satisfaz tal condição (existem quatro arcos entrando nele e apenas duas arestas incidentes). Não é difícil ver que o grafo indicado não é euleriano.

Figura 2.1: Grafo não euleriano.

Um exemplo importante de grafos mistos eulerianos são os grafos simétricos e pares. Em particular, nestes grafos o problema de encontrar uma trilha euleriana é consideravelmente mais fácil do que no caso mais geral.

2.2 Definição do problema

Vimos na seção anterior condições necessárias e suficientes para que um grafo misto seja euleriano, ou seja, possua um passeio fechado que passa exatamente uma vez em cada arco e em cada aresta do grafo. Quando o grafo não é euleriano surge naturalmente a questão de encontrar um passeio fechado que passa pelo menos uma vez em cada arco e em cada aresta do grafo e que tenha o menor comprimento possível.

Uma versão mais geral consiste em atribuir custos aos arcos e arestas do grafo e procurar por um tal passeio de custo mínimo. Quando os custos são todos iguais a um temos o problema de encontrar um passeio de comprimento mínimo.

Definição. Dado um grafo misto $M = (V, E, A)$, um **passeio de carteiro (p.c.)** em M é um passeio fechado viável em M que passa por todos os arcos e arestas de M .

Não é difícil ver que existe um passeio de carteiro em M se e somente se M é fortemente conexo. Daqui em diante iremos supor que M satisfaz essa propriedade e não nos preocuparemos com o problema da existência de um tal passeio.

Dado um grafo misto $M = (V, E, A)$ e uma função $c : E \cup A \rightarrow \mathbb{R}_+$ diremos que c é

uma **função custo associada** a M . Pode-se definir de várias maneiras o custo de um passeio de carteiro mas a definição mais usual é a seguinte.

Definição. *Seja $P = (v_1, l_1, v_2, \dots, v_{n-1}, l_{n-1}, v_n)$ um passeio de carteiro de um grafo misto $M = (V, E, A)$ com uma função custo c associada. Definimos o **custo** de P como $c(P) = \sum_{l \in E \cup A} (x(l) - 1)c(l)$ onde $x(l)$ é o número de vezes que P passa por l .*

Uma maneira equivalente de definir o custo de um passeio de carteiro P seria $\bar{c}(P) = \sum_{l \in E \cup A} x(l)c(l)$. Claramente essa definição é equivalente à anterior, no sentido de que em problemas de encontrar passeios de custo mínimo, ambas levam ao mesmo conjunto solução.

Com essas definições podemos definir o problema do carteiro chinês:

Problema do Carteiro Chinês para grafos Mistos (PCCM): *Dado um grafo misto fortemente conexo $M = (V, E, A)$ com função custo associada $c : E \cup A \rightarrow \mathbb{R}$, encontrar um passeio de carteiro em M de custo mínimo.*

É importante observar que o PCCM pode ser visto como o problema de orientar as arestas de M e criar cópias de alguns arcos de M de modo que o grafo orientado resultante seja simétrico e o custo das cópias seja o menor possível.

Vamos indicar por PCCG e PCCD as versões especiais do PCCM quando o grafo é não-orientado e quando é orientado, respectivamente. O PCCG foi proposto por Meiko [1962]. Edmonds [1965] obteve um algoritmo polinomial para resolver o PCCG, e mais tarde Edmonds e Johnson [1973] também obtiveram um algoritmo polinomial para a versão orientada. No caso mais geral, Papadimitriou [1976] demonstrou que o PCCM é NP-difícil, como veremos a seguir.

2.3 Complexidade computacional do problema

Vamos mostrar que a versão de decisão do PCCM, que denotaremos por PCCMd, é $\mathcal{NP}$ -completo. Para isso, mostraremos que o Problema da 3-Satisfatibilidade (3SAT) é polinomialmente redutível ao PCCMd. É um fato bem conhecido que o (3SAT) é $\mathcal{NP}$ -completo (veja Garey e Johnson [1979]).

O 3SAT e a versão do PCCMd podem ser formulados da seguinte maneira.

Problema da 3-Satisfatibilidade (3SAT)

Entrada: Uma fórmula booleana $Z(x_1, \dots, x_n)$ na forma normal conjuntiva, com 3 literais em cada cláusula.

Questão: Existe uma atribuição de valores 0/1 (falso/verdadeiro) às variáveis $x_1, \dots, x_n$ que torna Z verdadeira ?

Problema do Carteiro Chinês para grafos Mistos (PCCMd)

Entrada: Um grafo misto $M = (V, E, A)$, uma função custo $c : E \cup A \rightarrow \mathbb{Z}_+$ associada a M e um inteiro positivo k .

Questão: Existe um passeio de carteiro em M de custo menor ou igual a k ?

O seguinte lema será utilizado na demonstração do Teorema 2.3.2.

Lema 2.3.1 *Para o grafo misto representado na Figura 2.2, um passeio de carteiro ótimo tem custo igual a 2. Além disso, em qualquer passeio de carteiro ótimo ou ambas as arestas v_0v_1, v_0v_3 entram em v_0 e ambas as arestas v_0v_2, v_0v_4 saem de v_0 , ou vice-versa.*

Prova: Não é difícil ver que não existe um passeio de carteiro de custo 1. Um exemplo de um p.c. de custo 2 é dado pela seqüência de vértices $(4, 5, 2, 1, 0, 2, 1, 4, 2, 3, 4, 6, 2, 3, 0, 4)$, onde indicamos cada vértice v_i por i . Assim, para que um p.c. seja ótimo, duas das arestas $v_0v_1, v_0v_2, v_0v_3, v_0v_4$ devem sair de v_0 e as duas restantes devem entrar em v_0 (do contrário, ao menos duas cópias dessas arestas teriam que estar no passeio, resultando em um passeio de custo maior que 2). Logo, existem seis possíveis orientações das arestas. A verificação do lema pode ser feita determinando-se o custo do passeio ótimo de cada um dos 6 digrafos obtidos. Este processo simples mas tedioso é omitido. ■

O grafo misto C da Figura 2.3 (a) será indicado pela representação esquemática da Figura 2.3 (b). Segue diretamente do lema 2.3.1 que, se um grafo misto M contém m cópias do grafo C , ligadas de maneira conveniente, então o custo do passeio ótimo será ao menos $2m$. Este limite pode ser atingido se, em todas as m cópias de C , ou ambas as arestas u_1v_2, u'_1v_4 são usadas entrando em C e ambas as arestas u_2v_1, u'_2v_3 são usadas saindo de C , ou vice-versa, supondo que esse passeio não passa mais de uma vez por qualquer outro arco ou aresta de custo não nulo do grafo.

Para cada $n > 0$ definimos o grafo $F(n)$ como o grafo misto representado na Figura 2.4, onde as arestas indicadas têm custo unitário. É óbvio que se $F(n)$ é parte de um grafo misto M e $F(n)$ contribui com apenas $2(n-1)$ unidades para o custo de um p.c. ótimo de M então a presença das $n-1$ cópias de C irá forçar todas as arestas $s_1t_1, s_2t_2, \dots, s_nt_n$ a *entrarem* em $F(n)$, isto é, serem usadas no sentido de t_i a s_i , ou todas a *sairem* de $F(n)$, isto é, serem usadas no sentido de s_i a t_i . Em cada um desses casos as arestas

Figura 2.2: Grafo do Lema 2.3.1. Os arcos têm custo igual a 1.

$fr_1, fr_2, \dots, fr_n$ serão orientadas todas no sentido de f a r_i ou todas no sentido de r_i a f , respectivamente.

Teorema 2.3.2 (Papadimitriou, 1976) *O PCCMd é $\mathcal{NP}$ -completo.*

Prova: É fácil ver que o PCCMd pertence a $\mathcal{NP}$. Vamos mostrar que ele é $\mathcal{NP}$ -difícil reduzindo o 3SAT ao PCCMd.

Seja Z uma instância do 3SAT com variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ e cláusulas $L_1, L_2, \dots, L_m$. Seja p_j o número total de ocorrências de x_j em Z e q_j o número total de ocorrências de $\neg x_j$ em Z . Seja $g_j = \max(p_j, q_j)$ e $k = 2 \sum_{j=1}^n (g_j - 1)$. Vamos construir um grafo misto M_Z e uma função custo sobre seu conjunto de arcos e arestas, e provar que M_Z possui um passeio de carteiro de custo menor ou igual a k se e somente se Z é satisfazível.

Inicialmente, criamos um vértice v , e para cada cláusula L_i de Z criamos dois vértices u_i e u'_i , os arcos $(v, u_i), (v, u'_i), (u'_i, u_i)$ todos de custo 1 e o arco (u_i, v) de custo 0. Para cada variável x_j de Z , criamos um grafo $F(g_j)$. No grafo $F(g_j)$ fazemos um vértice r_i coincidir com um vértice u_p para cada ocorrência de $\neg x_j$ na cláusula L_p , e um vértice t_i coincidir com u_p para cada ocorrência de x_j em L_p . Os vértices restantes do tipo r_i e t_i que existirem em $F(g_j)$ fazemos coincidir com v . Isto completa a construção do grafo misto M_Z . Um exemplo ilustrativo para a fórmula $Z = (x_1 + \neg x_1 + \neg x_2)(x_1 + x_2 + \neg x_2)$ é dado na Figura 2.5.

Afirmamos que M_Z possui um passeio de carteiro de custo no máximo k se e somente se Z é satisfazível. Suponha que Z é satisfazível para alguma atribuição T de valores 0/1 às

Figura 2.3: Grafo C e sua representação esquemática.

suas variáveis. Se $T(x_j) = 1$ então orientamos as arestas $s_i t_i, i = 1, 2, \dots, g_j$, para sair da cópia de $F(g_j)$ correspondente a x_j ; caso contrário, essas arestas são orientadas para entrar em $F(g_j)$. Como T satisfaz Z , ao menos uma das três arestas incidentes a u_i é orientada para entrar em u_i , para toda cláusula L_i de Z . Portanto, na orientação D resultante todos os vértices u_i têm deficiência não-negativa, isto é, $def_D(u_i) = \rho_D(u_i) - \delta_D(u_i) \geq 0$. Um vértice u_i com deficiência positiva pode ser balanceado criando cópias do arco (u_i, v) sem produzir custo adicional e mantendo v balanceado, pois $\sum_{i=1}^m def_D(u_i) + def_D(v) = 0$. Em consequência disso, o custo de um passeio de carteiro ótimo de M_Z será exatamente o custo causado pelas $k/2$ cópias de C , que é igual a k pelo lema 2.3.1.

Agora suponha que M_Z possui um passeio de carteiro de custo no máximo k . Como M_Z

Figura 2.4: O grafo $F(n)$.

possui $k/2$ cópias de C esse passeio tem custo exatamente k , o que implica que nenhum dos arcos de custo 1 aparecerá mais de uma vez no passeio. Portanto, ao menos uma aresta é orientada de modo a entrar em u_i , para toda cláusula L_i de Z . Se tal aresta corresponde a x_j (respectivamente $\neg x_j$) então atribuindo-se o valor 1 (respectivamente 0) a x_j tem-se uma atribuição de valores 0/1 que torna Z verdadeira. Note que a atribuição acima é consistente já que em relação a cada u_i as arestas x_j e $\neg x_j$ (incidentes a u_i) são usadas em sentidos opostos no passeio de carteiro.

O fato de que a redução acima pode ser feita em tempo polinomial é de fácil verificação e é omitida. ■

Figura 2.5: O grafo M_Z para a fórmula $Z = (x_1 + \neg x_1 + \neg x_2)(x_1 + x_2 + \neg x_2)$.

2.4 Caso especial: grafos planares

Considerando que o PCCM é $\mathcal{NP}$ -difícil, uma pergunta natural que surge é se existem classes especiais de grafos mistos para as quais esse problema seja mais fácil de ser resolvido. Por exemplo, uma classe interessante seria a dos grafos mistos planares. São conhecidas várias aplicações do PCCM em problemas de roteamento de veículos, coleta de lixo e remoção de neve, onde os grafos de entrada são planares com vértices de grau menor ou igual a 4. Veremos que mesmo para grafos mistos com essas restrições o PCCM continua $\mathcal{NP}$ -difícil.

se verificar facilmente que o grafo da Figura 2.7 (b) pode ser usado para substituir tais interseções. Para cada substituição, o valor k deve ser aumentado de 4. Como o número de possíveis interseções de uma imersão, supondo que duas arestas não se interceptem mais de uma vez (uma condição fácil de garantir), é limitada pelo quadrado do número de arestas do grafo, a construção descrita acima pode ser feita em tempo polinomial.

Figura 2.7: Eliminação de interseções.

Agora vamos mostrar que o PCCMd permanece $\mathcal{NP}$ -completo mesmo se o grafo for planar e cada vértice tiver grau máximo igual a 3.

Suponha que um vértice v de um grafo misto planar $M = (V, E, A)$ tenha grau maior que 3. Escolha dois vértices u, w adjacentes a v . Suponha, sem perda de generalidade, que $[u, v], [w, v] \in E \cup A$ e que estão contidos na mesma face de uma imersão planar de M . Criamos um novo vértice v' e removemos $[u, v], [w, v]$ de M colocando em seus lugares $[u, v'], [w, v']$. Ligamos v com v' por uma aresta de custo 0. Nesse novo grafo, o grau de v diminuiu de 1 e não foram criados novos vértices de grau maior que 3. Repetindo esse processo no máximo $\sum_{v \in V} g(v) = 2(|E| + |A|)$ vezes obtemos um grafo com todos os vértices de grau menor ou igual a 3. O custo de um passeio de carteiro mínimo no novo grafo será o mesmo que no grafo original e sua planaridade não é afetada.

Para concluir, podemos remover as arestas de custo 0 de M_Z . Suponha que $M_Z = (V, E, A)$ é um grafo misto e $c : E \cup A \rightarrow \{0, 1\}$ é uma função custo associada. Seja $b = (|E| + |A|)^2$. Definimos uma nova função custo c' como segue: para cada $l \in E \cup A$ temos

$$c'(l) = \begin{cases} 1 & \text{se } c(l) = 0 \\ b & \text{se } c(l) = 1 \end{cases}$$

Afirmamos que M_Z com a função custo c possui um passeio de carteiro P tal que $c(P) \leq k$ se e somente se M_Z com função custo c' possui um passeio de carteiro P' tal que $c'(P') \leq k(b+1) - 1$. Para provar essa afirmação, sem perda de generalidade, suponha que P é um passeio de carteiro que contém menos que b arestas e arcos de custo 0. Logo, para este mesmo passeio temos que $c'(P) \leq k(b+1) - 1$. Reciprocamente, se P' é um passeio de carteiro em M_Z tal que $c'(P') \leq k(b+1) - 1$, então este passeio contém no máximo k arestas e arcos de custo b . Logo, para este mesmo passeio de carteiro temos que $c(P') \leq k$. Além disso, podemos substituir arcos (respectivamente arestas) de custo b em M por b arcos (respectivamente arestas) de custo 1.

As discussões acima justificam o seguinte teorema:

Teorema 2.4.1 (Papadimitriou, 1976) *O PCCMd é $\mathcal{NP}$ -completo mesmo se o grafo de entrada for planar, com todos os vértices de grau menor ou igual a 3 e custos nos arcos e arestas iguais a 1.* ■

2.5 Algoritmos e problemas correlatos

Vimos na seção anterior que o PCCM continua $\mathcal{NP}$ -difícil mesmo impondo várias restrições “naturais” ao problema. Entretanto, existe uma classe de grafos mistos para os quais o PCCM pode ser resolvido em tempo polinomial: os grafos mistos pares. Edmonds [1973] mostrou como reduzir o PCCM restrito a grafos pares a um problema de transporte com capacidades. Entretanto, nesse artigo não é muito claro como obter uma solução do PCCM a partir de uma solução do problema do transporte. Essa questão fica esclarecida tanto no artigo de Frederickson [1979] quanto no livro de Minieka [1978].

Além disso, Frederickson [1979] propôs várias heurísticas para resolver o PCCM. Cada uma das heurísticas possui uma garantia de erro, isto é, para qualquer instância do PCCM a razão entre o custo de uma solução obtida pela heurística e o custo de uma solução ótima é limitada por uma certa constante k . Frederickson descreveu duas heurísticas com $k = 2$ e mostrou que o algoritmo que simplesmente toma o melhor resultado das duas heurísticas tem garantia de erro $k = 5/3$. Além disso, para o caso especial do PCCM com entrada restrita a grafos planares, obteve uma heurística com $k = 3/2$.

Além dessas heurísticas encontramos na literatura dois algoritmos exatos para o PCCM. Christofides, Benavent, Campos, Corberan e Mota [1984] descreveram um algoritmo

branch and bound que utiliza relaxação Lagrangeana e mencionaram alguns resultados computacionais: o algoritmo foi testado numa coleção de 34 instâncias geradas aleatoriamente com custos entre 1 e 20 e resolveu instâncias do problema com até 50 vértices, 66 arcos e 39 arestas no tempo máximo de 500 segundos (de CPU) em uma máquina UNIVAC 1100/60. Nobert, Picard e Samson [1990] descreveram outro algoritmo que utiliza o método *simplex*, cortes de Gomory e *blossom inequalities*, mas não mencionaram resultados computacionais.

Para finalizar este capítulo, vamos mencionar dois problemas que possuem certa semelhança com o PCCM.

Um versão alternativa do PCCM poderia exigir que apenas um subconjunto próprio do conjunto dos arcos e das arestas do grafo fosse percorrido. Em particular, Frederickson, Hecht e Kim [1978] mostraram que o seguinte problema é $\mathcal{NP}$ -difícil.

Problema da empilhadeira: *Dado um grafo misto $M = (V, E, A)$ e uma função custo $c : E \cup A \rightarrow \mathbb{R}_+$, encontrar, caso exista, um passeio fechado orientado de custo mínimo passando por todos os arcos de M .*

Além do PCCM, Papadimitriou [1976] estudou o seguinte problema.

Problema do Grafo Euleriano Mínimo (PGEM): *Dado um grafo misto $M = (V, E, A)$ acrescentar um conjunto mínimo A' de arcos com extremos em V a M de modo que o grafo resultante $M' = (V, E, A \cup A')$ seja euleriano.*

Embora esse problema tenha alguma semelhança com o PCCM com custos unitários, Papadimitriou mostrou que o PGEM pode ser resolvido em tempo polinomial, reduzindo-o a um problema de *b-emparelhamento máximo*.

Entretanto, a versão mais geral do PGEM, onde cada arco acrescentado possui um custo arbitrário, é $\mathcal{NP}$ -difícil.

Problema do Grafo Euleriano de Custo Mínimo (PGECMd)

Entrada: Um grafo misto $M = (V, E, A)$, um grafo orientado completo $K = (V, L)$, uma função custo $c : L \rightarrow \mathbb{R}_+$ e um inteiro positivo k .

Questão: Existe um conjunto A' formado de cópias de arcos de K tal que $M' = (V, E, A \cup A')$ é euleriano e $\sum_{a \in A'} c(a) \leq k$, onde o custo de uma cópia é igual ao custo do arco original.

Teorema 2.5.1 *O PGECD é $\mathcal{NP}$ -completo.*

Prova: É fácil ver que o PGECD pertence a $\mathcal{NP}$.

Vamos provar que o ele é $\mathcal{NP}$ -difícil reduzindo o PCCMd ao PGECD.

Seja $M = (V, E, A), c : E \cup A \rightarrow \mathbb{R}_+$ e k uma instância do PCCMd. Construa o grafo completo $K = (V, L)$ e defina uma função custo $c' : L \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que:

$$c'((u, v)) = \begin{cases} k + 1 & \text{se não existe } l = [u, v] \in E \cup A \\ \min\{c(l) : l = [u, v] \in E \cup A\} & \text{c.c.} \end{cases}$$

Claramente, existe uma solução de custo menor ou igual a k para esta instância do PCCMd se e, somente se, existe uma solução de custo menor ou igual a k para a instância do PGECD. Também é óbvio que a redução acima pode ser feita em tempo polinomial.

Logo, o PGECD é $\mathcal{NP}$ -completo. ■

Capítulo 3

O problema do caminho mínimo

Neste capítulo, sempre que nos referirmos a caminhos e circuitos estes serão viáveis. Algumas vezes, por uma questão de ênfase, mencionaremos isso explicitamente.

O problema de encontrar caminhos de custo mínimo em um grafo é um dos problemas mais conhecidos em otimização combinatória. Ele está relacionado com o problema de detectar circuitos de custo negativo. Por simplicidade, caminhos de custo mínimo serão referenciados como **caminhos mínimos**; e circuitos de custo negativo serão chamados simplesmente de **circuitos negativos**.

Veremos neste capítulo resultados sobre a complexidade computacional dos problemas acima mencionados para grafos mistos. Entretanto, a parte principal deste capítulo consistirá da descrição de um algoritmo polinomial para o problema do caminho mínimo em grafos mistos acíclicos. Convém observar que não encontramos na literatura nenhum trabalho mencionando a existência de tal algoritmo para esse caso particular.

3.1 Caminhos mínimos em grafos acíclicos

É um fato bem conhecido que o problema de encontrar um caminho mínimo de um vértice s a um vértice t se torna difícil na presença de circuitos negativos no grafo (não-orientado ou orientado). Os problemas de detectar circuitos negativos e obter caminhos mínimos de s a t quando não existem tais circuitos podem ser resolvidos em tempo polinomial, tanto no caso de grafos não-orientados como no caso de grafos orientados (veja Arkin [1986]).

Os seguintes resultados de Arkin [1986] são um tanto surpreendentes e bastante interessantes do ponto de vista de complexidade computacional.

Teorema 3.1.1 (Arkin, 1986) *Seja $M = (V, E, A)$ um grafo misto e $c : E \cup A \rightarrow \mathbb{Z}$ uma função custo associada a M . O problema de decidir se existe em M um circuito viável negativo é $\mathcal{NP}$ -completo.* ■

Observe que M pode ter arestas de custo negativo mesmo que não tenha circuitos negativos. Além disso, a redução trivial ao caso orientado não funciona pois se substituírmos uma aresta de custo negativo por dois arcos reversos criamos um circuito orientado negativo.

Teorema 3.1.2 (Arkin, 1986) *Seja $M = (V, E, A)$ um grafo misto e $c : E \cup A \rightarrow \mathbb{Z}$ uma função custo associada a M . Suponha ainda que M não tenha circuitos viáveis negativos. Seja k um inteiro e sejam $s, t \in V$. O problema de decidir se existe em M um caminho viável de s a t de custo menor ou igual a k é $\mathcal{NP}$ -completo.* ■

Esses dois resultados de Arkin mostram que há pouca possibilidade de se encontrar algoritmos polinomiais para o problema de detectar circuitos negativos em grafos mistos e o problema de encontrar um caminho mínimo de um vértice s a um vértice t em um grafo misto sem circuitos negativos.

Uma possível direção de pesquisa é tentar encontrar classes de grafos mistos em que esses problemas podem ser resolvidos em tempo polinomial. Entretanto, não pudemos encontrar na literatura nenhum trabalho nessa linha. Nesta seção faremos uma pequena contribuição para a teoria desse(s) problema(s) desenvolvendo um algoritmo polinomial para encontrar caminhos mínimos em grafos mistos acíclicos. Observe que esse problema pode ser reduzido ao problema de encontrar um caminho orientado mínimo de s a t em um grafo orientado no qual todos os circuitos orientados negativos têm comprimento 2.

Em vez de tratarmos do problema do caminho mínimo de s a t trataremos de um problema um pouco mais geral: dado um grafo misto acíclico M com uma função custo c associada, encontrar para cada vértice v um caminho mínimo deste a um vértice fixo t .

Seja $M = (V, E, A)$ um grafo misto acíclico e $t \in V$. Podemos supor sem perda de generalidade que M é conexo. Observe que $F = (V, E)$ é uma floresta, isto é, um grafo não-orientado acíclico. Convém lembrar que um subgrafo $T = (VT, ET, AT)$ de M é uma **m-árvore** de M se $ET \subseteq E$, $AT = \emptyset$, T é conexo e é maximal com essas propriedades. Além disso, dizemos que uma m-árvore $T = (VT, ET)$ é **trivial** se $ET = \emptyset$.

O seguinte lema descreve uma importante propriedade que será utilizada no algoritmo que iremos descrever. Observe que o número N descrito no lema é o número de vértices do digrafo obtido a partir de M contraindo cada uma de suas m-árvores a um vértice.

Lema 3.1.3 *Seja $M = (V, E, A)$ um grafo misto acíclico e $N = |V| - |E|$. Então existe uma rotulação dos vértices de M , $r : V \rightarrow \{1, \dots, N\}$, tal que para todo $u, v \in V$:*

1. *Se $(u, v) \in A$ então $r(v) < r(u)$.*
2. *u e v pertencem a uma mesma m-árvore de M se e somente se $r(u) = r(v)$.*

Prova: Seja D o digrafo obtido pela contração de cada m-árvore não-trivial a um vértice. Claramente D é acíclico. Seja $v_1, \dots, v_N$ uma ordenação dos vértices de D tal que se $(v_i, v_j) \in AD$ então $i > j$ (ordenação topológica). Se v_i corresponde a uma contração de uma m-árvore não-trivial T , então para cada $v \in VT$ defina $r(v) = i$. Senão, defina $r(v_i) = i$. Claramente, tal rotulação satisfaz as condições do lema. ■

Na Figura 3.1 apresentamos um exemplo de uma rotulação de um grafo misto acíclico, como descrito no lema anterior.

Figura 3.1: (a) Grafo acíclico M com rótulos satisfazendo as propriedades do Lema 3.1.3; (b) Digrafo D obtido pela contração das m-árvores de M .

A prova do Lema 3.1.3 fornece um algoritmo linear para encontrar uma rotulação satisfazendo as condições do lema. A contração das m-árvores pode ser feita em tempo linear e é um fato bem conhecido que uma ordenação topológica pode ser obtida em tempo linear.

Como nosso problema consiste em encontrar caminhos viáveis dos demais vértices ao vértice t , podemos supor sem perda de generalidade que t é um sorvedouro de M (observe que arcos saindo de t podem ser eliminados e arestas da forma $\{w, t\}$ podem ser substituídas por arcos (w, t)). Note que podemos sempre escolher uma rotulação satisfazendo as propriedades do Lema 3.1.3 em que $r(t) = 1$. Basta tomar uma ordenação

topológica dos vértices de D , como descrito na demonstração do Lema 3.1.3 em que $v_1 = t$, o que é sempre possível já que t é um sorvedouro em D .

Para uma dada m -árvore T e vértices distintos x, y de T seja

$$\sigma_T(x, y) := \text{custo do caminho de } x \text{ a } y \text{ em } T \text{ (existe apenas um)}.$$

Além disso, para cada vértice u de M seja

$$\sigma(u) := \sigma_M(u, t) := \text{o custo de um caminho viável mínimo de } u \text{ a } t \text{ em } M.$$

Quando não existir caminho viável de u a t escreveremos $\sigma(u) = +\infty$ (convencionamos que $\min \emptyset = +\infty$).

Os lemas que apresentaremos a seguir são todos relativos a um grafo misto acíclico $M = (V, E, A)$ onde t é um sorvedouro de M .

Lema 3.1.4 *Seja $u \in V - t$ um vértice no qual não incide nenhuma aresta de M . Então*

$$\sigma(u) = \min\{c(a) + \sigma(v) : a = (u, v) \in A\}.$$

Prova: Suponha que exista em M um caminho de u a t ; caso contrário, o resultado é óbvio.

Se $(u, v) \in A$ então qualquer caminho de v a t não passa por u , pois M é acíclico. Então um caminho mínimo de u a t é da forma $C = (u, w)P$ onde $(u, w) \in A$ e P é um caminho mínimo de w a t . O resultado segue. ■

Para cada vértice u de M seja

$$\alpha(u) := \min\{c(a) + \sigma(v) : a = (u, v) \in A\}.$$

Note que $\alpha(u)$ é o custo de um caminho viável mínimo de u a t que começa em um arco. Pelo lema anterior, se u não é extremo de nenhuma aresta de M então $\sigma(u) = \alpha(u)$.

Lema 3.1.5 *Seja u um vértice pertencente a uma m -árvore não trivial T de M . Então*

$$\sigma(u) = \min \begin{cases} \alpha(u) \\ \sigma_T(u, w) + \alpha(w), \quad w \in VT - u. \end{cases}$$

Prova: Se não existe caminho de u a t em M então o resultado é óbvio.

Se $w \in VT$, $v \notin VT$ e $(w, v) \in A$ então qualquer caminho com início em w que passe por (w, v) não tem nenhum vértice interno em VT e não tem final em VT , pois M é acíclico. Então um caminho mínimo C de u a t é da forma $C = PQ$ onde $EP \subseteq ET$, $AP = \emptyset$ e $EQ \cap ET = \emptyset$ (P ou Q podem ser vazios). Seja q o início de Q . Se Q não for vazio então claramente Q é um caminho mínimo de q a t em M . O resultado segue. ■

A seguir descrevemos o algoritmo. Ele recebe um grafo misto acíclico conexo M e um sorvedouro t de M devolvendo para cada vértice v de M o custo de um caminho mínimo de v a t em M . Na descrição do algoritmo vamos omitir o processo de construção dos caminhos mínimos e descrever apenas o cálculo dos custos. É relativamente simples alterar o algoritmo para obter tais caminhos.

Algoritmo CamMin

Entrada: um grafo misto acíclico conexo $M = (V, E, A)$,
uma função custo $c : E \cup A \rightarrow \mathbb{R}$ associada a M e
um sorvedouro t de M .

Saída: um vetor $l : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tal que $l(v) = \sigma(v)$ para todo $v \in V$.

(* Inicialização *)

$N := |V| - |E|$;

Seja $r : V \rightarrow \{1, \dots, N\}$ uma rotulação satisfazendo o Lema 3.1.3 e tal que $r(t) = 1$;

$l(t) := 0$;

Para cada $u \in V - t$ faça

$l(u) := +\infty$;

$L(u) := +\infty$;

$k := 2$;

(* Passo Principal *)

Enquanto $k \leq N$ faça (* Invariante: Se $r(v) < k$ então $l(v) = \sigma(v)$ *)

Para cada $u \in V$ tal que $r(u) = k$ faça

$L(u) := \min\{l(v) + c(a) : a = (u, v) \in A\}$;

Para cada $u \in V$ tal que $r(u) = k$ faça

Se não incide nenhuma aresta de M em u então

$l(u) := L(u)$;

Senão

Seja T a m-árvore não trivial que contém u ;

$l(u) := \min(\{L(u)\} \cup \{\sigma_T(u, w) + L(w) : w \in VT - u\})$;

$k := k + 1$;

Devolva l ;

O algoritmo atua em níveis calculando inicialmente os custos dos caminhos mínimos para os vértices de rótulo igual a 2 e armazenando tais valores no vetor l , depois para os vértices de rótulo igual a 3 e assim sucessivamente para os vértices de rótulo $4, 5, \dots, N-1$ e N . Vamos provar que ao final do algoritmo, $l(v) = \sigma(v)$ para todo $v \in V$.

Na Figura 3.2 ilustramos a aplicação do algoritmo acima sobre um grafo acíclico.

Os lemas seguintes mostram que o algoritmo CamMin está correto.

Lema 3.1.6 *Para todo $v \in V$ tal que $r(v) = 1$ temos $l(v) = \sigma(v)$.*

Prova: Segue imediatamente pois t é o único vértice que possui rótulo igual a 1. ■

No próximo lema fica clara a importância da rotulação do Lema 3.1.3 no funcionamento do algoritmo.

Lema 3.1.7 *No início de cada iteração k (≥ 2) do Passo Principal vale o seguinte invariante: para todo $v \in V$ tal que $r(v) < k$ temos $l(v) = \sigma(v)$.*

Prova: Na primeira iteração do Passo Principal temos $k = 2$ e o invariante vale pelo lema anterior.

Suponha que o invariante vale no início de uma iteração qualquer para $2 \leq k \leq N$ e vamos provar que continuará valendo no início da próxima iteração.

Seja $u \in V$ tal que $r(u) = k$. Se existe $v \in V$ tal que $(u, v) \in A$ então $r(v) < k$ pela escolha da rotulação r (veja Lema 3.1.3), e portanto, temos $l(v) = \sigma(v)$ pela hipótese assumida. Logo, $L(u) = \alpha(u)$. Então pelo Lema 3.1.4 (se u não é extremo de nenhuma aresta de M) ou pelo Lema 3.1.5 (se u pertence a uma m -árvore não trivial) temos que $l(u) = \sigma(u)$ no final da iteração. ■

Teorema 3.1.8 *O algoritmo CamMin está correto e possui complexidade $O(|V|^2)$.*

Prova: Os lemas anteriores mostram que o algoritmo está correto.

Vamos analisar sua complexidade de tempo. Como já mencionamos, a rotulação pode ser obtida em tempo $O(|V| + |E \cup A|)$.

O cálculo de $\sigma_T(u, v)$ pode ser feito em tempo $O(|VT|^2)$ para uma m -árvore T . No total, gasta-se tempo $O(|V|^2)$.

● vértices com rótulo igual a k ,

(a,b) indica respectivamente $L(u)$ e $l(u)$
para cada vértice u .

Figura 3.2: (a) Um grafo misto acíclico onde estão indicados os rótulos e os custos dos arcos e das arestas. (b) Final da iteração $k = 2$. (c) Final da iteração $k = 3$. (d) Final da iteração $k = 4$.

Agora vamos calcular o número de comparações realizadas no Passo Principal durante toda a execução do algoritmo. Cada arco de M é examinado exatamente uma vez durante todo o algoritmo, totalizando um total de $|A|$ comparações para calcular os $L(u)$. Em uma m -árvore T , para se determinar $l(u)$ para cada u em T , cada par de vértices de T é examinado duas vezes, totalizando $O(|VT|^2)$ comparações em cada iteração do Passo Principal. Assim, durante todo o algoritmo são feitas $O(|A| + |V|^2)$ comparações para calcular os $l(v)$.

Logo, o algoritmo CamMin tem complexidade $O(|V|^2)$. ■

Não é difícil ver que o algoritmo CamMin pode ser modificado para calcular o custo dos caminhos mínimos em M começando em cada vértice v . Ainda, como a função custo c é arbitrária pode-se resolver problemas de caminhos de custo máximo. Em particular, pode-se resolver o problema do caminho viável Hamiltoniano em grafos mistos acíclicos.

Cabe aqui observar que o algoritmo que descrevemos também pode ser utilizado para outra classe de grafos mistos. Trata-se do caso em que $M = (V, E, A)$ é um grafo misto em que nenhum arco pertence a um circuito viável de M . Chamaremos um tal grafo de grafo **arco-acíclico**.

Nesse caso, os componentes de $G = (V, E)$ podem conter circuitos mas o digrafo D obtido a partir de M pela contração dos componentes de G é acíclico. Para descobrir se M possui um circuito negativo basta saber se um dos componentes de G possui um circuito negativo, o que pode ser feito em tempo polinomial, como mencionamos no início do capítulo.

Para obtermos os caminhos mínimos, basta observar que vale o seguinte resultado.

Lema 3.1.9 *Seja $M = (V, E, A)$ um grafo misto arco-acíclico e N o número de vértices do digrafo obtido a partir de M contraindo cada componente de $G = (V, E)$ a um vértice. Então existe uma rotulação dos vértices de M , $r : V \rightarrow \{1, \dots, N\}$, tal que para todo $u, v \in V$:*

1. *Se $(u, v) \in A$ então $r(v) < r(u)$,*
2. *u e v pertencem a uma mesma componente de G se e somente se $r(u) = r(v)$.*

Utilizando esse lema, não é difícil modificar o algoritmo descrito para calcular $\sigma(v)$ para cada $v \in V$. A única dificuldade adicional é o cálculo de um caminho mínimo dentro de um componente de $G = (V, E)$ (no caso de grafos acíclicos as componentes são m -árvores). Mas como mencionamos no início do capítulo, tais caminhos podem ser encontrados em

tempo polinomial. Por não apresentar nenhuma dificuldade especial, omitimos aqui a descrição do algoritmo e a deixamos a cargo do leitor.

Também é fácil ver que o problema de detectar um circuito negativo em um grafo misto e o problema do caminho mínimo em um grafo misto sem circuitos negativos pode ser reduzido trivialmente ao caso orientado (substituindo cada aresta por um par de arcos reversos de mesmo custo) quando o grafo não possui arestas de custo negativo.

Seria interessante descobrir se para outras classes de grafos mistos, além das que mencionamos acima, o problema do circuito negativo e o problema do caminho viável mínimo de s a t são fáceis ou continuam $\mathcal{NP}$ -difíceis. Em particular, estão em aberto o problema do circuito negativo e o problema do caminho viável mínimo em grafos mistos planares.

Capítulo 4

Orientações fortemente conexas

Problemas de orientação formam uma classe de problemas bastante interessantes dentro do contexto de grafos mistos. Um problema deste tipo consiste em orientar, se possível, as arestas de um dado grafo de modo que o digrafo resultante satisfaça determinadas condições (como por exemplo, uma certa conexidade, restrições de grau, etc).

Na Seção 4.1 estudaremos o problema de encontrar uma orientação fortemente conexa de um grafo misto. Descreveremos em detalhe um algoritmo linear que encontra uma tal orientação, caso ela exista.

Na Seção 4.2 tratamos de uma generalização do problema anterior, que consiste em encontrar um conjunto mínimo de arcos a serem acrescentados a um grafo misto de modo que o grafo resultante tenha uma orientação fortemente conexa.

4.1 Grafos fortemente orientáveis

Considere o seguinte problema: *quando é possível atribuir direções a todas as ruas de uma cidade de modo que seja possível ir de um ponto qualquer da cidade a outro utilizando suas ruas nas direções estabelecidas?* Formalmente, dado um grafo misto M quando é possível orientar suas arestas de modo que o digrafo resultante seja fortemente conexo? Quando isso é possível, dizemos que M é **fortemente orientável**, ou simplesmente **orientável**; e neste caso, o digrafo fortemente conexo resultante é chamado uma **orientação fortemente conexa** de M . Note que esse problema só faz sentido quando o grafo M é conexo. Nesta seção vamos supor que os grafos em consideração são conexos, mesmo que isso não seja mencionado explicitamente.

Robbins [1939] resolveu o problema acima no caso particular em que M é um grafo

não-orientado provando que *um grafo não-orientado é orientável se e somente se não contém pontes*. Mais tarde, Boesch e Tindell [1980] resolveram o problema no caso geral, obtendo a seguinte generalização do resultado de Robbins.

Teorema 4.1.1 (Boesch e Tindell, 1980) *Um grafo misto M é orientável se e somente se é fortemente conexo e não contém pontes.* ■

Um corolário imediato deste teorema é outra caracterização para grafos mistos orientáveis.

Corolário 4.1.2 *Um grafo misto M é orientável se e somente se todo arco e toda aresta de M pertence a algum circuito viável de M .*

Note que para testar se um grafo misto M possui um caminho viável entre um dado par de vértices, basta substituir cada aresta de M por um par de arcos reversos e testar se o digrafo resultante possui um tal caminho. Logo, podemos testar se um grafo misto é fortemente conexo, ou mesmo se é orientável (é fácil testar se M tem pontes), em tempo polinomial. A questão que nos interessa aqui não é apenas a de *decidir* se um grafo misto M é orientável, mas encontrar, caso exista, uma orientação fortemente conexa de M . Para isso, vamos considerar o seguinte problema.

Problema da Orientação Fortemente Conexa (POFC): *Dado um grafo misto $M = (V, E, A)$ encontrar, se existir, uma orientação das suas arestas de modo que o digrafo resultante seja fortemente conexo.*

Chung, Garey e Tarjan [1985] descreveram um algoritmo linear que resolve o POFC. O algoritmo é baseado em busca em profundidade, e é basicamente uma variação do algoritmo de Tarjan para obter os componentes fortemente conexos de um digrafo.

Começaremos a descrição desse algoritmo de orientação mencionando dois lemas bastante elementares mas que serão fundamentais para demonstrar que ele está correto.

Lema 4.1.3 *Seja M um grafo misto orientável. Suponha que C é um circuito viável de M e que vw é uma aresta de C percorrida no sentido de v a w . Então o grafo misto obtido de M pela orientação de vw no sentido de v a w é orientável.*

Prova: Sejam M e C como no enunciado do lema e D uma orientação fortemente conexa de M . Chame de D' o digrafo obtido de D reorientando, se necessário, cada aresta de C

no sentido em que é percorrida em C . Chame de C' o circuito orientado correspondente a C em D' . Note que se xy é uma aresta de C então existe em D' um caminho orientado de x a y e outro de y a x (que concatenadas formam C').

Vamos provar que D' é fortemente conexo. Sejam s e t dois vértices quaisquer de M . Seja P um caminho orientado de s a t em D , e seja P' o caminho correspondente a P em D' . Se P' não é um caminho orientado então podemos substituir cada arco (x, y) de P' que é percorrido no sentido de y a x pela seção apropriada de C' (que vai de y a x), obtendo dessa forma um passeio orientado de s a t em D' . Portanto, existe um caminho orientado de s a t em D' . Logo, D' é fortemente conexo e o resultado segue. ■

Lema 4.1.4 *Seja M um grafo misto orientável. Suponha que X é um subconjunto de vértices de M , vw é a única aresta de M tal que $v \in X, w \in \overline{X}$ e não existe nenhum arco saindo de X . Então o grafo misto obtido de M orientando-se vw de v a w é orientável.*

Prova: Imediato pois a outra escolha produziria um grafo misto não-orientável. ■

Suponha que $M = (V, E, A)$ é o grafo misto de entrada do POFC. O algoritmo de orientação consiste de duas etapas principais. A primeira etapa realiza uma busca em profundidade a partir de um vértice s e tenta orientar as arestas de M . Se a primeira etapa falhar então conclui-se que M não é orientável e a segunda etapa não é executada. A segunda etapa consiste em verificar se a orientação D obtida na primeira etapa é fortemente conexa. Se este não for o caso então pode-se concluir que M não é orientável.

O algoritmo pode ser descrito mais formalmente como segue. A etapa de inicialização será explicada a seguir.

Algoritmo OFC

Entrada: um grafo misto $M = (V, E, A)$ e
um vértice $s \in V$.

Saída uma orientação fortemente conexa D de M , ou
a resposta “ M não é orientável”.

(* Inicialização *)

Para cada $v \in V$ faça

$r(v) := 0$; $low(v) := 0$; $\pi(v) := \text{NIL}$;

$T := \emptyset$; $M' := M$;

$r(s) := 1$; $low(s) := 1$; $t := 2$;

(* Primeira Etapa — tenta orientar as arestas de M *)

BP(s); (* realiza a busca em profundidade *)

Se a busca foi interrompida ou não atinge todos os vértices de M então

Devolva “ M não é orientável” e pare;

Senão

$D := M'$; (* M' é a orientação obtida na Primeira Etapa *)

(* Segunda Etapa — verifica se D é fortemente conexo *)

Para cada $v \in V - s$ faça

Se não existe caminho orientado de s a v em D então

Devolva “ M não é orientável” e pare;

(* Caso existam tais caminhos então D é fortemente conexo *)

(* A suficiência deste teste é garantida pelo Lema 4.1.8 *)

Devolva D e pare;

Vamos descrever agora em que consiste a primeira etapa. Suponha que $|V| = n$ e $|E \cup A| = m$. Na descrição acima, a primeira etapa é executada pelo procedimento BP. Esse procedimento executa uma busca em profundidade em M a partir de um vértice qualquer, digamos s . Chamamos s de **vértice inicial**. Durante a busca permite-se percorrer uma aresta em qualquer sentido e um arco apenas no sentido consistente com sua orientação. À medida que os vértices vão sendo atingidos na busca, esses vão sendo rotulados de 1 a n . Indicaremos o rótulo de um vértice v por $r(v)$.

Além dos rótulos, durante a busca o algoritmo mantém:

- um grafo misto M' que corresponde a uma orientação parcial de M ,
- um subconjunto T de arcos e arestas de M que constituem uma árvore (ignorando-se as orientações dos arcos), e
- um número $low(v)$ para cada vértice $v \in V$.

Note que inicialmente temos $r(s) = low(s) = 1$, $M' = M$, $T = \emptyset$ e $low(v) = 0$ para todo $v \in V - s$. À medida que a busca avança, M' , T , low e r são atualizados convenientemente.

O objetivo da primeira etapa é encontrar uma orientação D de M tal que em D existe um caminho orientado de v a s para todo $v \in V - s$. Se uma tal orientação for encontrada então pode-se mostrar (faremos isso mais adiante) que D é fortemente conexo se e somente se M é orientável. Isso justifica os testes da segunda etapa do algoritmo OFC.

A seguir apresentamos a descrição formal do procedimento BP que realiza a busca e tenta orientar as arestas de M . Observamos que o procedimento utiliza um contador t , uma *variável global* inicializada com 2, que será o rótulo do próximo vértice que for atingido.

Além disso, o procedimento utiliza uma função $\pi : V \rightarrow V \cup \{\text{NIL}\}$, inicialmente definida com $\pi(v) = \text{NIL}$ para todo $v \in V$. Durante a busca, para cada vértice w (diferente de s) da árvore T , $\pi(w)$ indicará o pai de w em T . A função π é usada para evitar que uma aresta seja examinada mais de uma vez durante a busca.

Embora o procedimento BP tenha uma descrição simples e precisa, em um primeiro exame essa descrição não oferece uma visão clara das idéias escondidas por trás dos passos do algoritmo. Para familiarizar-se com o procedimento BP, sugerimos ao leitor que acompanhe a execução desse procedimento sobre o grafo dado nas Figuras 4.1 e 4.2. Como veremos, o procedimento BP orienta as arestas de M através de sucessivas aplicações dos Lemas 4.1.3 e 4.1.4.

Procedimento BP(v)

Entrada: um vértice rotulado $v \in V$.

Saída: M', T, r, low, π atualizados.

(* t é uma variável global *)

(* M', T, r, low e π são definidos no algoritmo OFC que chama BP *)

Para cada $f = [v, w] \in E \cup A$ faça:

Se $r(w) = 0$ então

$r(w) := t;$

$low(w) := t;$

$t := t + 1;$

$\pi(w) := v;$

$T := T + f;$

BP(w);

Se $\pi(v) \neq w$ ou $f \notin T$ então

Se $f \notin T$ ou $low(w) < r(w)$ então (* Caso 1: $f \notin T$ ou $low(w) < r(w)$ *)

$low(v) := \min\{low(v), low(w)\};$

Se $f \in E$ então

$M' := M' - f + (v, w);$ (* Oriente f de v a w *)

Senão (* Caso 2: $f \in T$ e $low(w) = r(w)$ *)

Se $f \in A$ então

Interrompa a busca; (* M não é orientável *)

Senão

$M' := M' - f + (w, v);$ (* Oriente f de w a v *)

$low(w) := low(v);$

(* Aqui a busca retorna para v ao longo de $[v, w]$ *)

Dizemos que a busca **atinge** o vértice v quando é atribuído um rótulo não nulo a v . É fácil ver que cada vértice é atingido no máximo uma vez, e durante a execução da busca, vértices distintos já rotulados têm rótulos distintos.

Figura 4.1: De (a) a (c) o procedimento rotula os vértices a, b e c; de (d) a (h) são feitas atualizações de *low* e orientações de arestas conforme ocorra o Caso 1 ou o Caso 2 descrito no procedimento BP.

Figura 4.2: De (i) a (k) o procedimento rotula os vértices d,e e f; de (l) a (p) são feitas atualizações de *low* e orientações de arestas; em (p) aparece a orientação final obtida pelo procedimento BP.

O procedimento BP recebe como entrada o vértice v mais recentemente atingido. A seguir, verifica para cada arco e aresta de M da forma $[v, w]$ se w não foi atingido. Se w não foi atingido ($r(w) = 0$) então $[v, w]$ é acrescentado a T e continua-se a busca a partir de w com a chamada recursiva BP(w). Após verificar se w foi atingido e concluir BP(w) (se $r(w) = 0$), diremos que neste momento a busca **retorna para v ao longo de $[v, w]$** .

Por simplicidade, às vezes trataremos T como um subgrafo de M com conjunto de vértices VT . É fácil ver que durante a busca T é uma árvore, para todo $v \in VT$ existe um caminho viável de s a v em T , e VT corresponde ao conjunto dos vértices atingidos.

Dizemos que x é **ancestral** de y (ou y é **descendente** de x) em T se existe um caminho viável $C = (x = v_1, v_2, \dots, v_k = y)$ de x a y em T tal que $r(v_i) < r(v_{i+1})$ para todo $i : 1 \leq i < k$. É fácil ver que o vértice inicial s é ancestral de todos os outros vértices de T (vamos convencionar que um vértice v de T é ancestral (descendente) de si mesmo).

Quando a busca retorna ao longo de $f = [v, w]$ o algoritmo tenta orientar f em M' , caso f seja uma aresta. Se w for o pai de v na árvore atual T então nada é feito. Caso contrário, M' e low são atualizados de acordo com um dos seguintes casos:

Caso 1 $f \notin T$ ou $low(w) < r(w)$: faça $low(v) := \min\{low(v), low(w)\}$, e se $f = [v, w]$ não for um arco então oriente f de v a w .

Caso 2 $f \in T$ e $low(w) = r(w)$: se $f = [v, w]$ for um arco então interrompa a busca, senão oriente f de w a v e faça $low(w) := low(v)$.

A busca pára em um dos dois casos: quando não consegue mais aumentar T ou quando é interrompida no Caso 2. Se a busca atingir todos os vértices e não for interrompida, então após a execução da busca M' torna-se uma orientação de M , que chamaremos de D .

Os próximos lemas descrevem os principais invariantes do algoritmo de orientação.

Lema 4.1.5 *Para todo $v \in VT - s$ temos $low(v) \leq r(v)$ e existe um caminho viável C em M' de v a um vértice u tal que $VC \subseteq VT$ e $r(u) = low(v)$. Para cada $w \in V - s$, imediatamente após a busca concluir BP(w) e retornar a $v = \pi(w)$ ao longo de $[v, w]$, temos $low(w) < r(w)$.*

Prova: Todas as afirmações, exceto a última, seguem por indução no número de vezes que a busca retorna ao longo de um arco ou uma aresta. Para verificar a última afirmação, basta observar que se após a busca concluir BP(w), $low(w) = r(w)$, então ocorre o Caso 2 e é feita a atribuição $low(w) := low(v)$ ($\leq r(v) < r(w)$). ■

Corolário 4.1.6 *Se a busca atingir todos os vértices e não for interrompida então no digrafo final D existem caminhos orientados de v a s , para todo $v \in V - s$.*

O seguinte lema descreve uma importante propriedade dos números low .

Lema 4.1.7 *Imediatamente após a busca concluir uma chamada $BP(w)$, $low(w) < r(w)$ se e somente se existe um arco (ou aresta) $[x, y]$ de M tal que $x, y \in VT$, x é descendente de w e y não é descendente de w em T .*

Prova: Suponha inicialmente que exista um tal arco (x, y) nas condições do lema. O caso em que existe uma aresta xy é totalmente análogo. Então temos que $r(y) < r(w) \leq r(x)$. Após (x, y) ser examinado temos $low(x) \leq r(y)$. Claramente, após os vértices do caminho de w a x em T serem pesquisados teremos $low(w) \leq low(x) \leq r(y) < r(w)$.

Suponha agora que $low(w) < r(w)$. Pelo Lema 4.1.5, existe um caminho viável C em M' de w a um vértice u em M' tal que $VC \subseteq VT$ e $r(u) = low(w)$. Como u não é descendente de w então tal caminho tem que conter um arco (ou aresta) $[x, y]$ de M' tal que x é descendente de w e y não é descendente de w em T . ■

O próximo lema será fundamental para mostrar que o algoritmo de orientação está correto.

Lema 4.1.8 *Se nem todos os vértices de M são atingidos pela busca ou se ela foi interrompida então M não é orientável. Se M é orientável então a orientação D obtida após a execução da busca é fortemente conexa.*

Prova: Se nem todos os vértices de M são atingidos pela busca então claramente M não é orientável.

Suponha que a busca foi interrompida no Caso 2, após a busca retornar ao longo de $f = [v, w]$. Então $low(w) = r(w)$. Seja X o conjunto dos descendentes de w em T e $\overline{X} = V - X$. Pelo Lema 4.1.7, não existe $[x, y] \in E \cup A$ tal que $x \in X$ e $y \in \overline{X}$, ou seja, $\delta(X) = 0$, o que mostra que M não é orientável. Isto demonstra a primeira afirmação do lema.

Suponha agora que M é orientável. Então a busca não é interrompida e atinge todos os vértices. Vamos provar que se M' é orientável em alguma estágio do algoritmo então logo após a orientação de alguma aresta o grafo misto resultante continua orientável. Com isto ficará demonstrada a segunda afirmação do lema pois inicialmente $M' = M$.

Considere uma aresta vw imediatamente após a busca retornar ao longo desta. Se ocorrer o Caso 2 então o Lema 4.1.4 e um argumento análogo ao que foi usado acima mostram que orientar vw de w a v mantém a orientabilidade de M' . Suponha então que ocorre o Caso 1.

Se $vw \notin T$ então claramente w é ancestral de v , e portanto existe um circuito viável em M' contendo vw . Se $vw \in T$ então temos que $\text{low}(w) < r(w)$. Seja $y \in T$ tal que $r(y) = \text{low}(w)$. Pelo Lema 4.1.5 existe um caminho viável em M' de y a s que não passa por vw . Combinando-o com o caminho em T que vai de s a w e o caminho que vai de w a y , obtemos um passeio fechado viável em M' contendo vw . É fácil ver que tal passeio contém um circuito viável contendo vw .

Portanto, em qualquer dos dois casos existe um circuito viável em M' contendo vw . Pelo Lema 4.1.3, orientar vw de v a w mantém a orientabilidade de M' . Isto completa a demonstração do lema. ■

No algoritmo OFC, se a busca não foi interrompida e se todos os vértices foram atingidos, então pelo Corolário 4.1.6, para todo $v \in V - s$ existe um caminho orientado em D de v a s , onde D é a orientação de M obtida no final da busca. A segunda etapa do algoritmo consiste simplesmente em verificar se no digrafo D obtido existe um caminho orientado de s a v , para todo $v \in V - s$. Se isso ocorrer então D é fortemente conexo.

Teorema 4.1.9 *O algoritmo OFC está correto e tem complexidade de tempo $O(n + m)$.*

Prova: Se M for orientável então pelo Lema 4.1.8 o algoritmo devolve uma orientação fortemente conexa de M .

Suponha que M não é orientável. Se nem todos os vértices são atingidos pela busca, ou se esta é interrompida então o Lema 4.1.8 mostra que o algoritmo OFC devolve a resposta correta. Se nenhum desses casos ocorre então o Corolário 4.1.6 mostra que na segunda etapa o algoritmo encontra um vértice de D tal que não existe caminho orientado de s a v em M' .

A complexidade de tempo da primeira etapa é $O(n + m)$. Como a segunda etapa pode ser executada em tempo $O(n + m)$, o resultado segue. ■

No artigo de Chung, Garey e Tarjan [1985], a descrição do algoritmo de orientação não é tão precisa quanto a que apresentamos aqui. Nesse artigo, os autores supõem a existência dos rótulos e não fazem uma descrição completa do procedimento de busca, limitando-se a descrever os Casos 1 e 2.

A demonstração do Teorema 4.1.9, devida a esses autores, independe da demonstração original de Boesch e Tindell [1980] do Teorema 4.1.1. O algoritmo de Chung, Garey e Tarjan também fornece uma demonstração alternativa desse resultado.

Uma variante do POFC é encontrar uma orientação fortemente conexa que minimiza o diâmetro (ou o raio) do digrafo D resultante. A **distância** de um vértice v a um vértice

w , denotada por $\text{dist}(v, w)$, é o comprimento do caminho viável mais curto de v a w , se um tal caminho existe; caso contrário, dizemos que $\text{dist}(v, w) = +\infty$. O **diâmetro** de um grafo misto fortemente conexo M é o menor inteiro d tal que $\text{dist}(v, w) \leq d$ para todo par v, w de vértices distintos de M . O **raio** de um grafo misto fortemente conexo M é o menor inteiro r para o qual existe um vértice u , chamado **centro**, tal que $\text{dist}(u, w) \leq r$ e $\text{dist}(w, u) \leq r$ para todo vértice w de M . Se M não for fortemente conexo então o diâmetro (raio) é infinito.

Chung, Garey e Tarjan [1985] também mostraram que:

Teorema 4.1.10 *Se um grafo misto M de raio r é orientável então ele possui uma orientação de raio menor ou igual a $4r^2 + 4r$.*

A demonstração desse fato é construtiva e fornece um algoritmo polinomial para obter tal orientação. O leitor interessado poderá encontrar essa demonstração (um tanto complicada) na referência acima citada.

Por outro lado, Chvátal e Thomassen [1978] mostraram que decidir se um grafo não-orientado possui uma orientação de diâmetro (raio) menor ou igual a 2 é um problema $\mathcal{NP}$ -completo. Portanto, encontrar uma orientação fortemente conexa de diâmetro (raio) mínimo de um grafo misto M é $\mathcal{NP}$ -difícil.

Veremos no Capítulo 5 deste trabalho uma versão mais geral do POFC: *dado um grafo misto $M = (V, E, A)$ onde a cada $uv \in E$ associamos custos $c(u, v)$ e $c(v, u)$, e capacidades $p, q : V \rightarrow \mathbb{Z}$, encontrar, se existir, uma orientação fortemente conexa D de M tal que $p(v) \leq \rho(v) \leq q(v)$ e a soma dos custos das orientações das arestas seja mínimo.*

Mostraremos também que esse problema mais geral pode ser resolvido em tempo polinomial.

4.2 Aumentações fortemente orientáveis

Descreveremos aqui um problema considerado por Gusfield [1987] que generaliza e unifica os seguintes problemas estudados por Eswaran e Tarjan. Esse problema tem aplicações em comunicação de redes e em problemas de segurança de dados.

Problema 1. Dado um grafo conexo não-orientado G , acrescentar o menor número de arestas a G de modo que o grafo resultante não contenha pontes.

Problema 2. Dado um digrafo conexo D , acrescentar o menor número de arcos a D de modo que o digrafo resultante seja fortemente conexo.

O Problema 1 é equivalente a acrescentar o menor número de arestas a G de modo que toda aresta esteja em algum circuito no grafo resultante e o Problema 2 é equivalente a acrescentar o menor número de arcos a D de modo que todo arco esteja em algum circuito orientado no digrafo resultante. Eswaran e Tarjan [1976] mostraram que esses problemas podem ser resolvidos em tempo linear.

Gusfield [1987] considerou o seguinte problema: *acrescentar o menor número de arcos a um grafo misto de modo que todo arco e toda aresta estejam em algum circuito viável no grafo misto resultante.*

Como um grafo conexo não-orientado não contém pontes se e somente se possui uma orientação fortemente conexa, o Problema 1 é equivalente a acrescentar o menor número de arcos a G de modo que o grafo misto resultante seja orientável (tenha uma orientação fortemente conexa). Como já mencionamos (veja Corolário 4.1.2), um grafo misto é orientável se e somente se todo arco e toda aresta estão em algum circuito viável do grafo. Visto dessa forma, o problema considerado por Gusfield generaliza e unifica os dois problemas mencionados acima.

As considerações acima também mostram que o problema estudado por Gusfield é equivalente ao seguinte problema:

Problema da Aumentação de Grafos Mistos (PAGM): *Dado um grafo misto $M = (V, E, A)$ e um digrafo completo $K = (V, L)$ tal que $A \subseteq L$, encontrar um subconjunto A' de arcos de L tal que $M' = (V, E, A \cup A')$ seja orientável e $|A'|$ seja o menor possível.*

Um subconjunto $A' \subseteq L$ que torna M orientável será chamado de **aumentação**. Diremos que uma aumentação A' é **ótima** se $|A'|$ for mínima.

Cabe aqui observar que a versão do PAGM na qual há pesos associados aos arcos de L e deseja-se encontrar uma aumentação de custo mínimo é $\mathcal{NP}$ -difícil. De fato, Eswaran e Tarjan [1976] mostraram que o seguinte problema é $\mathcal{NP}$ -difícil: *Dado um digrafo $D = (V, A)$, um digrafo completo $K = (V, L)$ tal que $A \subseteq L$ e uma função peso $p : L \rightarrow \{1, 2\}$, encontrar um subconjunto de arcos A' de L tal que $M' = (V, A \cup A')$ seja fortemente conexo e $\sum_{a \in A'} p(a)$ seja o menor possível.*

Descreveremos agora o algoritmo linear desenvolvido por Gusfield para resolver o PAGM. O método consiste em reduzir em tempo linear o PAGM ao Problema 2, que pode ser resolvido em tempo linear. Assim como no artigo de Gusfield, não descreveremos aqui o algoritmo de Eswaran e Tarjan que resolve o Problema 2. Vamos supor que temos disponível um algoritmo para esse problema e utilizá-lo como uma subrotina.

Para descrever a redução vamos mencionar um resultado básico usado por Eswaran e Tarjan para resolver o Problema 2.

Seja $\gamma(M)$ a cardinalidade de uma solução para o PAGM (observe que o problema sempre tem solução). Seja D um digrafo e $\widehat{D}$ o digrafo acíclico obtido a partir de D contraindo seus componentes fortemente conexos. É fácil ver que $\gamma(D) = \gamma(\widehat{D})$ e além disso, toda solução para $\widehat{D}$ corresponde a uma solução para D . Assim, para resolver o Problema 2 para D basta resolvê-lo para $\widehat{D}$.

As observações acima juntamente com o seguinte teorema de Eswaran e Tarjan [1976] nos fornecem um método para resolver o PAGM.

Teorema 4.2.1 (Eswaran e Tarjan, 1976) *Seja $\widehat{D}$ um digrafo acíclico com s fontes, t sorvedouros e q vértices isolados. Então $\gamma(\widehat{D}) = \max\{s, t\} + q$.* ■

Para facilitar a descrição do algoritmo para o PAGM, suponha que M é conexo. Vamos denotar por $I(M)$, respectivamente $O(M)$, o número de sorvedouros, respectivamente fontes, de um grafo misto M .

Então o PAGM pode ser reduzido ao problema de orientar M , formando um digrafo D , de modo a minimizar $\max\{I(\widehat{D}), O(\widehat{D})\}$. Um dos inconvenientes deste método é que não parece haver um modo óbvio de encontrar tal orientação sem termos de fazer repetidas contrações. Uma idéia melhor é obter a partir de M um grafo misto acíclico $\widehat{M}$ tal que $\gamma(M) = \gamma(\widehat{M})$, e encontrar uma orientação $\widehat{D}$ de $\widehat{M}$ que minimize $\max\{I(\widehat{D}), O(\widehat{D})\}$.

Descrevemos a seguir a construção do grafo misto acíclico $\widehat{M}$. Um exemplo ilustrativo dessa construção é dado na Figura 4.3.

Construção de $\widehat{M}$

1. Encontre os componentes fortemente conexos de M e chame de F o conjunto dos arcos que não pertencem a nenhum componente (claramente, toda aresta de M pertence a algum componente fortemente conexo).
2. Considere cada componente em separado como um grafo. Seja B o conjunto das pontes destes componentes (claramente, todo arco dentro de um componente pertence a um circuito).
3. Seja $H = M - (F \cup B)$ e seja $\mathcal{U} = \{H_1, H_2, \dots, H_r\}$ a coleção dos componentes de H . Então $\widehat{M} = (\mathcal{U}, E\widehat{M}, A\widehat{M})$ onde:

$$E\widehat{M} = \{H_i H_j : 1 \leq i < j \leq r, \text{ existe } uv \in E \text{ tal que } u \in V H_i \text{ e } v \in V H_j\}$$

$$A\widehat{M} = \{(H_i, H_j) : 1 \leq i < j \leq r, \text{ existe } (u, v) \in A \text{ tal que } u \in V H_i \text{ e } v \in V H_j\}.$$

Não é difícil ver que cada H_i é orientável, $\gamma(M) = \gamma(\widehat{M})$ e toda aumentação ótima de $\widehat{M}$ é uma aumentação ótima de M .

Figura 4.3: (a) Grafo misto M . (b) Componentes fortemente conexos de M e o conjunto F . (c) O conjunto B das pontes dentro dos componentes. (d) Grafo misto H . (e) Grafo acíclico $\hat{M}$.

A grande vantagem desta transformação é que $\widehat{M}$ é acíclico e, portanto, para encontrar uma solução do PAGM basta encontrar uma orientação $\widehat{D}$ de $\widehat{M}$ que minimize $\max\{I(\widehat{D}), O(\widehat{D})\}$, sem a necessidade de fazer contrações.

Agora vamos descrever como obter uma tal orientação de $\widehat{M}$. Observe que o subgrafo de $\widehat{M}$ induzido pelas suas arestas é uma floresta. Cada uma das componentes dessa floresta é uma m-árvore de $\widehat{M}$. Seja T uma m-árvore de $\widehat{M}$. Uma folha de T na qual não incide nenhum arco de $\widehat{M}$ é chamada de **folha isolada** de T . Observe que as folhas isoladas de T se tornarão sorvedouros ou fontes em qualquer orientação de $\widehat{M}$.

Podemos supor sem perda de generalidade que cada folha de T ou é isolada, ou tem pelo menos um arco entrando e um arco saindo. De fato, se v é uma folha não isolada de uma m-árvore T na qual apenas entram arcos de $\widehat{M}$ então podemos orientar a aresta vw de v a w onde w é o vértice adjacente a v em T . Isto não afeta a solução, pois se na orientação ótima a aresta vw é orientada de w a v podemos inverter tal orientação sem aumentar o número de fontes e de sorvedouros. É fácil ver que podemos continuar orientando as demais arestas de T até obtermos uma orientação de T ou uma m-árvore de T na qual cada folha é isolada ou tem pelo menos um arco entrando e um saindo. O mesmo argumento vale para o caso em que v é uma folha não isolada na qual apenas saem arcos.

O seguinte lema nos fornece indicações de como orientar as m-árvores de $\widehat{M}$ de modo a obter uma orientação ótima de $\widehat{M}$.

Lema 4.2.2 *Seja T uma m-árvore de $\widehat{M}$ com n folhas isoladas e sejam x, y inteiros tais que $x + y = n$, $x \geq 1$ e $y \geq 1$. Então existe uma orientação de T com exatamente x sorvedouros e y fontes (na orientação de T). Ainda, a restrição $x \geq 1$ ($y \geq 1$) pode ser trocada por $x \geq 0$ ($y \geq 0$) se e somente se existe um arco de $\widehat{M}$ saindo de (entrando em) um vértice u de T .*

Prova: Sejam $v, f_1, \dots, f_y$ folhas isoladas de T . Seja T' a subárvore de T cujas folhas são exatamente esses vértices.

Seja D' uma orientação de T' na qual existe um caminho orientado de f_i a v , para $1 \leq i \leq y$. Então v é um sorvedouro de D' , $f_1, \dots, f_y$ são fontes em D' e os demais vértices, que chamaremos de internos, têm pelo menos um arco entrando e um arco saindo. As arestas de T que não foram orientadas induzem algumas subárvores. Em cada uma dessas subárvores existe uma única folha u que é um vértice interno de D' . É fácil ver então que orientando cada subárvore de modo que exista um caminho orientado de u a cada uma de suas folhas, obtemos uma orientação de T com x sorvedouros e y fontes.

Quando há um arco saindo de um vértice u de T , então existe uma orientação de T na qual existe um caminho orientado de u a cada folha de T . Esse é o caso no qual $x = 0$

e $y = n$. O caso no qual há um arco entrando em u é análogo. É fácil ver que sem a existência de um tal vértice u , a condição $x \geq 1$ ($y \geq 1$) é necessária. ■

Para cada m -árvore j de $\widehat{M}$ chame de $n(j)$ o número de folhas isoladas de j e de $x(j)$ e $y(j)$ variáveis associadas à m -árvore j que satisfazem a restrição $x(j) + y(j) = n(j)$, onde $x(j)$, $y(j)$ são não-negativos ou estritamente positivos, como descrito no lema anterior. Com isso o problema de orientar $\widehat{M}$ é reduzido ao problema de minimizar $\max\{I(\widehat{M}) + \sum_j x(j), O(\widehat{M}) + \sum_j y(j)\}$, onde as variáveis $x(j)$, $y(j)$ satisfazem as restrições associadas à m -árvore j .

Para facilitar a descrição do método de cálculo das variáveis acima suponha, sem perda de generalidade, que $I(\widehat{M}) \leq O(\widehat{M})$ e defina $d = O(\widehat{M}) - I(\widehat{M})$. Um número k é chamado **diferença viável** para a m -árvore j se e somente se $x(j) - y(j) = k$ e $x(j)$, $y(j)$ satisfazem as restrições associadas à m -árvore j . Obviamente, as diferenças viáveis determinam de modo único o valor das variáveis $x(j)$ e $y(j)$. Portanto, o problema da orientação consiste em escolher diferenças viáveis $d(j)$ para cada m -árvore j que tornem o valor de $\sum_j d(j)$ o mais próximo possível de d . O próximo corolário é consequência do Lema 4.2.2 e será usado para encontrar os valores ótimos de $d(j)$.

Corolário 4.2.3 *Se $n(j)$ é ímpar então 1 e -1 são diferenças viáveis para $d(j)$; se $n(j)$ é par então 0 é diferença viável para $d(j)$. Se $n(j)$ é par (ímpar) então $d(j)$ pode assumir qualquer um dos valores pares (ímpares) entre seu possível mínimo e seu possível máximo. Ainda, se $n(j)$ é par (ímpar) então $d(j)$ pode assumir apenas valores pares (ímpares).*

Chamaremos uma variável $d(j)$ de uma variável par (ímpar) se $n(j)$ for par (ímpar). Para cada m -árvore j em $\widehat{M}$, seja $d(j)^*$ o valor máximo que $d(j)$ pode assumir. Pelo Lema 4.2.2, $d(j)^*$ ou é $n(j)$ ou é $n(j) - 2$.

Se $\sum_j d(j)^* \leq d$ então uma solução ótima pode ser encontrada trivialmente: basta tomar $d(j) = d(j)^*$ para cada j . Se esse não for o caso então temos o seguinte teorema cuja demonstração indica como escolher as diferenças viáveis.

Teorema 4.2.4 *Suponha que $\sum_j d(j)^* > d$. Se $\sum_j d(j)^*$ e d têm a mesma paridade então podemos escolher diferenças viáveis $d(j)$ de modo que $\sum_j d(j)^* = d$; e se tiverem paridade distinta então podemos escolher diferenças viáveis $d(j)$ de modo que $\sum_j d(j)^*$ seja igual a $d - 1$ ou $d + 1$, e esta é uma solução ótima.*

Prova: Vamos supor inicialmente que d e $\sum_j d(j)^*$ são pares. Os demais casos serão reduzidos a este.

Considere uma ordenação qualquer das variáveis na qual as variáveis pares apareçam antes de todas as variáveis ímpares. Sem perda de generalidade, podemos supor que esta ordenação corresponde à ordenação natural $d(1), d(2), \dots, d(n)$. Seja k o menor inteiro tal que $\sum_{j=1}^{k-1} d(j)^* < d \leq \sum_{j=1}^k d(j)^*$ e seja I o conjunto das $k - 1$ primeiras variáveis. Tome $d(j) = d(j)^*$ para as variáveis em I . Os valores das demais variáveis são escolhidos de acordo como os casos descritos abaixo, sendo que o Corolário 4.2.3 justifica a viabilidade desses valores.

Se $d(k)^*$ é uma variável par então tome $d(k) = d - \sum_{j=1}^{k-1} d(j)^*$. Para as outras variáveis pares tome $d(j) = 0$ e para as variáveis ímpares tome metade delas como 1 e metade como -1 . Como $\sum_j d(j)^*$ é par, há um número par de variáveis ímpares e, portanto, $\sum_j d(j)^* = d$.

Se $d(k)^*$ é ímpar e $\sum_{j=1}^{k-1} d(j)^*$ é ímpar então tome $d(k) = d - \sum_{j=1}^{k-1} d(j)^*$. Como $\sum_{j=1}^{k-1} d(j)^*$ é ímpar, I contém um número ímpar de variáveis ímpares e há um número par de variáveis ímpares não inicializadas. Tome metade delas como 1 e metade como -1 . Novamente, $\sum_j d(j)^* = d$.

Se $d(k)^*$ é ímpar e $\sum_{j=1}^{k-1} d(j)^*$ é par então I contém um número par de variáveis ímpares. Tome $d(k) = d - \sum_{j=1}^{k-1} d(j)^* + 1$ e $d(k+1) = -1$. Há um número par de variáveis ímpares não inicializadas. Tome metade delas como 1 e metade como -1 . Assim, $\sum_j d(j)^* = d$.

Portanto, quando d e $\sum_j d(j)^*$ são pares, diferenças viáveis $d(j)$ podem ser encontradas de modo a somarem exatamente d e esta é uma solução ótima. Agora vamos reduzir os demais casos a este.

Quando d é ímpar e $\sum_j d(j)^*$ é par, podemos encontrar diferenças viáveis que somem $d - 1$, pois $d - 1$ é par.

Quando d é par e $\sum_j d(j)^*$ é ímpar, considere o problema sem uma das variáveis ímpares, digamos $d(t)$. Neste novo problema, d é par e $\sum_j d(j)^* - d(t)^*$ é par e podemos achar uma solução de soma d^* (igual a d ou $\sum_j d(j)^* - d(t)$). Tome $d(t) = d - d^* + 1$.

Quando d e $\sum_j d(j)^*$ são ímpares, considere o problema com uma variável ímpar $d(t)$ a menos e com valor objetivo $d - 1$. Neste problema, $d - 1$ e $\sum_j d(j)^* - d(t)^*$ são pares e podemos achar uma solução de soma d^* (igual a $d - 1$ ou $\sum_j d(j)^* - d(t)$). Tome $d(t) = d - d^*$.

Portanto, quando d e $\sum_j d(j)^*$ têm a mesma paridade, as variáveis somam exatamente d e quando têm paridade distinta, as variáveis somam $d - 1$ ou $d + 1$ o que é o melhor possível pelo Corolário 4.2.3. ■

Em resumo, os passos do algoritmo são os seguintes:

1. A partir de M construa o grafo acíclico $\widehat{M}$.
2. Encontre uma orientação ótima das m-árvores de $\widehat{M}$, obtendo o digrafo $\widehat{D}$.
3. Encontre uma augmentação ótima de $\widehat{D}$ usando o algoritmo linear de Eswaran e Tarjan.

Não é difícil ver que os dois primeiros passos do algoritmo podem ser executados em tempo linear. Como o último passo utiliza um algoritmo linear, o PAGM pode ser resolvido em tempo linear.

Finalmente, cabe aqui observar que se A' for uma solução do PAGM então podemos encontrar uma orientação fortemente conexa de $M + A'$ em tempo linear utilizando o algoritmo de Chung, Garey e Tarjan descrito na seção anterior.

Capítulo 5

Orientações k -aresta-conexas

Edmonds e Giles [1977] demonstraram uma relação mini-max sobre um problema de programação linear envolvendo funções submodulares sobre digrafos. Tal resultado inclui especializações tais como o teorema da circulação de Hoffman, o teorema de interseção de matróides de Edmonds e o teorema de Lucchesi-Younger (veja Grötschel, Lovász e Schrijver [1980]). Frank [1982] mostrou que esse resultado inclui outra aplicação: orientações k -aresta-conexas de grafos mistos, generalizando um teorema de Nash-Williams [1960].

Grötschel, Lovász e Schrijver [1980] desenvolveram um algoritmo polinomial, baseado no método dos elipsóides, para minimizar funções submodulares. Este parece ser o único algoritmo polinomial conhecido para minimizar funções submodulares arbitrárias. Este mesmo algoritmo pode ser utilizado para resolver o problema de Edmonds-Giles.

Neste capítulo veremos um algoritmo polinomial e combinatório devido a Frank [1982] para resolver o problema de Edmonds-Giles. O algoritmo usa o método primal-dual além de métodos combinatórios clássicos como caminhos aumentadores, busca em largura, rotulação, etc. Deve ser salientado que o algoritmo supõe a existência de um oráculo para minimizar funções submodulares. Entretanto, nas aplicações que veremos, esse oráculo está disponível através de um algoritmo combinatório.

Algumas consequências teóricas do algoritmo de Frank são: uma demonstração construtiva do resultado de Edmonds-Giles e um teorema de características combinatórias sobre as condições de viabilidade do problema.

A seguir, utilizando os resultados obtidos no estudo do problema de Edmonds-Giles, mostraremos vários resultados sobre problemas de orientação em grafos (mistos). Em particular, descreveremos um algoritmo polinomial para encontrar uma orientação k -aresta-conexa de um grafo misto.

5.1 Preliminares

Seja $D = (V, A)$ um digrafo sem laços, onde $|V| = n$ e $|A| = m$. No que segue, o conjunto V dos vértices de D será o conjunto base, no sentido de que as famílias e as funções que definiremos serão sempre relativos aos subconjuntos de V . Dois conjuntos $X, Y \subseteq V$ são **co-disjuntos** se $\overline{X} \cap \overline{Y} = \emptyset$ (ou $X \cup Y = V$). Dizemos que $X, Y \subseteq V$ são **entrecortados** (se entrecortam) se nenhum dos conjuntos $X \cap Y, X - Y$ e $Y - X$ é vazio. Se X e Y são entrecortados e além disso $X \cup Y \neq V$ então dizemos que X e Y são **cruzados** (se cruzam).

Dizemos que uma **família** $\mathcal{F}$ de subconjuntos de V é **entrecortada** (resp. **cruzada**) se $X \cap Y, X \cup Y \in \mathcal{F}$ para todos os membros entrecortados (resp. cruzados) X, Y de $\mathcal{F}$. Podemos supor sem perda de generalidade que $\emptyset \notin \mathcal{F}$ (resp. $\emptyset, V \notin \mathcal{F}$) sempre que $\mathcal{F}$ for uma família entrecortada (resp. cruzada). Observe que toda família entrecortada é uma família cruzada.

Vejam os alguns exemplos de famílias entrecortadas e famílias cruzadas. As seguintes famílias são entrecortadas:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= 2^V - \{\emptyset\}, \\ \mathcal{F} &= \{X \subset V : r \notin X \text{ e } X \neq \emptyset\} \text{ onde } r \in V;\end{aligned}$$

e as seguintes famílias são cruzadas mas não são entrecortadas:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= 2^V - \{\emptyset, V\}, \\ \mathcal{F} &= \{X \subseteq V : \rho_D(X) = 0 \text{ e } \emptyset \neq X \neq V\}.\end{aligned}$$

Uma função b definida sobre subconjuntos de V é **submodular** sobre $X, Y \subseteq V$ se $b(X) + b(Y) \geq b(X \cap Y) + b(X \cup Y)$. Se vale a igualdade então dizemos que b é **modular** sobre X, Y ; e se vale a desigualdade contrária então dizemos que b é **supermodular** sobre X, Y . Observe que b é submodular sobre X, Y se e somente se $-b$ é supermodular sobre X, Y .

Como exemplos óbvios de funções submodulares temos as funções constantes e a função $|X|$ (que é modular). No caso de digrafos $D = (V, A)$, um exemplo muito importante de função submodular sobre subconjuntos de V é a função $\rho_D(X)$ (ou $\delta_D(X)$). De fato, vale a seguinte proposição.

Proposição 5.1.1 *Seja D um digrafo. Então para todo par X, Y de subconjuntos de vértices de D temos que:*

$$\rho_D(X) + \rho_D(Y) = \rho_D(X \cap Y) + \rho_D(X \cup Y) + d_D(X, Y).$$

Convém lembrar aqui que num digrafo $D = (V, A)$ um conjunto $X \subset V$ é um $u\bar{v}$ -conjunto se $u \in X$ e $v \notin X$.

Dados $B \subseteq V$ e $x \in \mathbb{R}^A$ sejam

$$\begin{aligned}\rho_x(B) &= \sum (x(a) : a = (u, v), B \text{ é um } v\bar{u}\text{-conjunto}), \\ \delta_x(B) &= \rho_x(\bar{B}) \text{ e} \\ \lambda_x(B) &= \rho_x(B) - \delta_x(B).\end{aligned}$$

Por um simples argumento de contagem pode-se verificar que λ_x é modular sobre quaisquer subconjuntos X, Y de V . Note que se $x(a) = 0$ para todo $a \in A_D^+(B)$, e $x(a) = 1$ para todo $a \in A_D^-(B)$ então $\lambda_x(B) = \rho_D(B)$.

Seja $\mathcal{F}'$ uma família cruzada de subconjuntos de V . Definimos a **matriz de incidência de D em relação a $\mathcal{F}'$** como a matriz $N = (N_{ij})$, com linhas indexadas por membros de $\mathcal{F}'$ e colunas indexadas por arcos de A , tal que:

$$N_{B,a} = \begin{cases} +1 & \text{se } a \text{ entra em } B, \\ -1 & \text{se } a \text{ sai de } B, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja b' uma função submodular inteira sobre pares cruzados de $\mathcal{F}'$. Seja $c \in \mathbb{R}_+^A$ uma função custo não-negativa sobre os arcos de D .

Teorema 5.1.2 (Edmonds e Giles, 1977) *Considere D , N , $\mathcal{F}'$, b' e c como definidos anteriormente. Então o problema de programação linear*

$$\begin{aligned}(\text{PEG}) \quad & \max cx \\ & \text{s.a. } Nx \leq b' \quad (\text{ou } \lambda_x(B) \leq b'(B), \text{ para todo } B \in \mathcal{F}') \\ & 0 \leq x \leq 1\end{aligned}$$

tem uma solução ótima inteira se tiver uma solução viável. Além disso, se c for inteiro então existe uma solução ótima inteira do problema dual.

O problema de programação linear acima é conhecido como Problema de Edmonds-Giles (PEG). Em alguns textos uma solução viável x do (PEG) é denominada de *fluxo submodular* e o problema acima é descrito como o *problema do fluxo submodular*. Na verdade, Edmonds e Giles demonstraram uma versão mais geral do Teorema 5.1.2, com a restrição $f \leq x \leq g$, em lugar de $0 \leq x \leq 1$, onde f, g são capacidades arbitrárias, e com a função c podendo assumir valores negativos. Entretanto, a formulação acima já engloba resultados como o teorema de interseção de matróides, o teorema de Lucchesi-Younger e

como veremos, resultados sobre orientações em grafos mistos. Se $c \not\equiv 0$, o algoritmo que veremos pode ser modificado para resolver este caso.

Exemplo. Antes de continuarmos o estudo desse problema, vamos mostrar um exemplo interessante de um problema que pode ser formulado como um Problema de Edmonds-Giles.

Seja $D = (V, A)$ um digrafo. Dizemos que um conjunto $S \subset A$ é um **corte** se existe $B \subset V$ tal que $\rho_D(B) = 0$ e $S = A_D^+(B)$. Dizemos que $F \subseteq A$ é uma **cobertura** (de cortes) se $F \cap S \neq \emptyset$ para todo corte S . Estamos interessados no problema de encontrar uma cobertura mínima de D .

Seja $\mathcal{F}' = \{B \subseteq V : \rho_D(B) = 0 \text{ e } \emptyset \neq B \neq V\}$ e defina $b'(B) = -1$ para todo $B \in \mathcal{F}'$. Então $\mathcal{F}'$ é uma família cruzada e b' é submodular sobre membros cruzados de $\mathcal{F}'$. Se definirmos $c = -1$ então podemos modelar o problema da cobertura mínima como um (PEG):

$$\begin{aligned} \max \quad & -\mathbf{1}x \\ \text{s.a.} \quad & -\delta_x(B) \leq -1, \quad \text{para todo } B \in \mathcal{F}' \\ & 0 \leq x(a) \leq 1, \text{ para todo } a \in A. \end{aligned}$$

Se x for uma solução viável (0-1) do problema acima então o conjunto F dos arcos tais que $x(a) = 1$ é uma cobertura. Se x for uma solução ótima então F é uma cobertura mínima. Aplicando o Teorema 5.1.2 temos o seguinte resultado.

Teorema 5.1.3 (Lucchesi e Younger, 1978) *Seja D um digrafo. Então a cardinalidade de uma cobertura mínima é igual ao número máximo de cortes disjuntos.*

Pode-se provar uma versão mais geral do problema acima associando-se custos (não necessariamente unitários) aos arcos. Deixamos isso a cargo do leitor.

Ainda com relação ao problema da cobertura mínima (ou de custo mínimo), cabe observar que se F é uma cobertura de um digrafo *conexo* D então se acrescentarmos a D um arco reverso a cada arco de F , o digrafo resultante se torna fortemente conexo.

Descreveremos a seguir o algoritmo de Frank [1982] que resolve a versão restrita do Problema de Edmonds-Giles, descrito no Teorema 5.1.2. Esse algoritmo fornecerá uma prova construtiva desse teorema.

Inicialmente vamos tratar do caso particular em que $\mathcal{F}'$ é entrecortada e b' é uma função submodular inteira sobre pares entrecortados de $\mathcal{F}'$. Vamos denotar esta versão restrita por (PEGr).

5.2 Famílias entrecortadas

Para evitar qualquer confusão posterior, ao estudarmos este caso particular, em vez de $\mathcal{F}'$, vamos denotar por $\mathcal{F}$ uma família entrecortada de subconjuntos de V e em vez de b' , vamos denotar por b uma função submodular inteira sobre pares entrecortados de $\mathcal{F}$. Podemos supor sem perda de generalidade que $V \in \mathcal{F}$ e que $b(V) = 0$, pois $\lambda_x(V) = 0$ para qualquer solução viável x do (PEG).

Considere o (PEGr) e seu dual:

$$\begin{aligned}
 \text{(PEGr)} \quad & \max \quad cx \\
 & \text{s.a.} \quad Nx \leq b \\
 & \quad \quad 0 \leq x \leq 1, \\
 \\
 \text{(Dual)} \quad & \min \quad yb + z1 \\
 & \text{s.a.} \quad (y, z) \begin{bmatrix} N \\ I \end{bmatrix} \geq c \\
 & \quad \quad (y, z) \geq 0.
 \end{aligned}$$

No problema dual os componentes de y (resp. z) correspondem aos membros de $\mathcal{F}$ (resp. elementos de A) e I denota a matriz identidade de dimensão apropriada.

Denotando por N_a o vetor coluna de N correspondente ao arco a , para o par de problemas acima temos as seguintes condições de folgas complementares:

$$\begin{aligned}
 x(a) > 0 & \Rightarrow yN_a + z(a) = c(a) & \forall a \in A \\
 x(a) < 1 & \Rightarrow z(a) = 0 & \forall a \in A \\
 y(B) > 0 & \Rightarrow \lambda_x(B) = b(B) & \forall B \in \mathcal{F}.
 \end{aligned}$$

Não é difícil ver que se x for uma solução viável de (PEGr) e o par (y, z) é uma solução viável do dual, satisfazendo as condições de folgas complementares, então $z(a) = c(a) - yN_a$, se $c(a) - yN_a > 0$; e $z(a) = 0$, caso contrário. Assim, x e y determinam de modo único o vetor z .

Então as condições de otimalidade podem ser descritas apenas em função de x e y da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & yN_a > c(a) \Rightarrow x(a) = 0 & \forall a \in A \\
 \text{(b)} \quad & yN_a < c(a) \Rightarrow x(a) = 1 & \forall a \in A \\
 \text{(c)} \quad & y(B) > 0 \Rightarrow \lambda_x(B) = b(B) & \forall B \in \mathcal{F}.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Note que para obtermos um algoritmo polinomial baseado no método primal-dual temos que encontrar outra forma de descrever as condições de otimalidade, uma vez que o vetor y pode ter um número muito grande de componentes. Isso será feito com o uso de potenciais, que são vetores de $\mathbb{R}^V$, em lugar do vetor y .

Seja x uma solução viável de (PEGr). A viabilidade de x implica que $\lambda_x(B) \leq b(B)$ para todo $B \in \mathcal{F}$. Um membro B de $\mathcal{F}$ é chamado **b-justo** (em relação a x), ou simplesmente **justo** (quando não houver ambigüidade), se $\lambda_x(B) = b(B)$. Conjuntos justos serão importantes na descrição do algoritmo. O conjunto V sempre é justo pois $\lambda_x(V) = b(V) = 0$.

Lema 5.2.1 *Se K e L são membros entrecortados justos de $\mathcal{F}$ então $K \cap L$ e $K \cup L$ também são justos (em relação a uma solução viável x).*

Prova: $b(K) + b(L) = \lambda_x(K) + \lambda_x(L) = \lambda_x(K \cap L) + \lambda_x(K \cup L) \leq b(K \cap L) + b(K \cup L) \leq b(K) + b(L)$. Logo, $\lambda_x(K \cap L) = b(K \cap L)$ e $\lambda_x(K \cup L) = b(K \cup L)$.

Vamos denotar por $J_x(v)$ a interseção de todos os conjuntos b -justos de $\mathcal{F}$ contendo um vértice v de D . Observe que $J_x(v)$ depende de x e está bem definida pois V é justo.

Lema 5.2.2 *Em relação a qualquer solução viável x de (PEGr) temos que*

1. $J_x(v)$ é justo para todo vértice $v \in V$;
2. Se uma família de conjuntos justos forma um hipergrafo conexo então a união dos conjuntos da família é um conjunto justo.

Prova: Segue do lema anterior.

Suponha agora que juntamente com x tenhamos um vetor $\Pi \in \mathbb{R}^V$ chamado **potencial** tal que:

$$\begin{aligned} (a) \quad & \Pi(v) - \Pi(u) > c(a) \Rightarrow x(a) = 0 \quad \forall a = (u, v) \in A \\ (b) \quad & \Pi(v) - \Pi(u) < c(a) \Rightarrow x(a) = 1 \quad \forall a = (u, v) \in A \\ (c) \quad & u \in J_x(v) \Rightarrow \Pi(u) \geq \Pi(v) \quad \forall u, v \in V. \end{aligned} \tag{5.2}$$

A partir do vetor Π construiremos uma solução viável y tal que x e y satisfazem as condições (5.1). Como mencionamos antes, o vetor x e um tal vetor y determinam uma solução viável (y, z) do dual de (PEGr), satisfazendo (juntamente com x) as condições de folgas complementares.

Note que se Π satisfaz (5.2) então o vetor que resulta de Π adicionando-se uma constante satisfaz (5.2). Logo, podemos supor que o menor componente de Π é 0. Sejam $0 = \Pi_0 < \Pi_1 < \dots < \Pi_r$ os diferentes valores que ocorrem no vetor potencial Π . Por exemplo, se $\Pi = (3, 5, 0, 3, 2)$ então $\Pi_0 = 0$, $\Pi_1 = 2$, $\Pi_2 = 3$ e $\Pi_3 = 5$. Se $r > 0$ então defina os conjuntos $V_i = \{u \in V : \Pi(u) \geq \Pi_i\}$, $i = 1, 2, \dots, r$.

Lema 5.2.3 *A condição (5.2c) é equivalente ao fato de que cada V_i pode ser particionado em conjuntos justos.*

Prova: Para $v \in V_i$, (5.2c) implica que $J_x(v) \subseteq V_i$ e portanto os componentes do hipergrafo $\{J_x(v) : v \in V_i\}$ particionam V_i . Pelo Lema 5.2.2 esses componentes são justos. A implicação inversa é óbvia. ■

Denote por $K_x(V_i)$ a coleção dos componentes do hipergrafo $\{J_x(v) : v \in V_i\}$. Para cada $B \in \mathcal{F}$, defina $y(B) = \sum_i (\Pi_i - \Pi_{i-1})$, onde a soma é feita sobre os i tais que $B \in K_x(V_i)$ (convencionamos a soma vazia como zero).

Lema 5.2.4 *Para cada arco $a = (u, v)$, temos que $\Pi(v) - \Pi(u) = yN_a$.*

Prova: Seja $a = (u, v) \in A$. Denote por t_i (resp. s_i) o número de conjuntos de $K_x(V_i)$ nos quais a entra (resp. sai). Obviamente, t_i e s_i são 0 ou 1. Agora temos que :

$$\begin{aligned}
 yN_a &= \sum_B (y(B) : a \in A_D^-(B)) - \sum_B (y(B) : a \in A_D^+(B)) \\
 &= \sum_B \left(\sum_i (\Pi_i - \Pi_{i-1} : B \in K_x(V_i)) : a \in A_D^-(B) \right) \\
 &\quad - \sum_B \left(\sum_i (\Pi_i - \Pi_{i-1} : B \in K_x(V_i)) : a \in A_D^+(B) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^r t_i (\Pi_i - \Pi_{i-1}) - \sum_{i=1}^r s_i (\Pi_i - \Pi_{i-1}) \\
 &= \sum_i (\Pi_i - \Pi_{i-1} : a \in A_D^-(V_i)) - \sum_i (\Pi_i - \Pi_{i-1} : a \in A_D^+(V_i)) \\
 &= \begin{cases} \Pi(v) - \Pi(u) & \text{se } \Pi(v) > \Pi(u), \\ 0 & \text{se } \Pi(v) = \Pi(u), \\ -(\Pi(u) - \Pi(v)) & \text{se } \Pi(v) < \Pi(u). \end{cases}
 \end{aligned}$$

Aqui foi usado o fato de que $t_i = s_i$ sempre que $u, v \in V_i$ ou $u, v \notin V_i$. Além disso, se $\Pi(v) > \Pi(u)$ então a segunda soma é vazia, enquanto que se $\Pi(u) > \Pi(v)$ então a primeira soma é vazia. ■

Dado Π satisfazendo (5.2), é fácil ver que se x é uma solução viável de (PEGr) e y é tal que $yN_a = \Pi(v) - \Pi(u)$ para todo arco $a = (u, v) \in A$, então x e y satisfazem as condições (5.1). Portanto, esses lemas mostram que para encontrar uma solução ótima (0-1) de (PEGr) basta encontrar um vetor viável (0-1) x e um potencial Π satisfazendo (5.2).

5.3 O algoritmo de Frank

Descreveremos aqui o algoritmo de Frank [1982] para resolver o (PEGr). O algoritmo usa o método primal-dual: durante o processo mantém uma solução viável (0-1) x e um potencial Π satisfazendo (5.2a) e (5.2c), e a cada passo diminui o número de arcos violando (5.2b). Quando demonstrarmos que o algoritmo está correto, teremos uma demonstração da primeira parte do Teorema 5.1.2.

Suponha que temos disponível o seguinte procedimento:

Algoritmo Interno

Entrada: uma solução viável (0-1) x de (PEGr),
 um vetor potencial $\Pi \in \mathbb{R}^A$,
 um arco $e = (s, t)$ de $D = (V, A)$,
 tais que x e Π satisfazem (5.2ac) e o arco e viola (5.2b).

Saída:

uma solução viável (0-1) x' de (PEGr),
 um vetor potencial $\Pi' \in \mathbb{R}^A$,
 tais que x' e Π' satisfazem (5.2ac), o arco e não viola (5.2b) e
 um arco pode violar (5.2b) em relação a x' e Π' somente se
 viola (5.2b) em relação a x e Π .

Um par x', Π' satisfazendo os requisitos mencionados na saída do Algoritmo Interno será chamado **admissível**. Claramente, qualquer solução viável (0-1) x de (PEGr) e o potencial $\Pi = 0$ podem ser usados como entrada do Algoritmo Interno. Então aplicando o Algoritmo Interno no máximo m vezes obtemos vetores x e Π satisfazendo (5.2abc).

Vamos descrever agora em que consiste o Algoritmo Interno.

Sejam x, Π e $e = (s, t)$ as entradas do algoritmo.

Passo 1 Para cada arco $a = (u, v) \in A$ seja $\bar{c}(a) = c(a) - \Pi(v) + \Pi(u)$. Defina um digrafo auxiliar $H_x = (V, A')$ onde $A' = A_a \cup A_b \cup A_v$, sendo:

$$\begin{aligned} A_a &= \{a' = (v, u) : a = (u, v) \in A, x(a) = 1, \bar{c}(a) \leq 0\}, \\ A_b &= \{a' = (u, v) : a = (u, v) \in A, x(a) = 0, \bar{c}(a) \geq 0\} \text{ e} \\ A_v &= \{a' = (u, v) : v \in J_x(u) \text{ e } \Pi(u) = \Pi(v)\}. \end{aligned}$$

A definição acima permite que H_x tenha arcos múltiplos. Vamos nos referir aos arcos de A_a, A_b e A_v como arcos **azuis**, **brancos** e **vermelhos**, respectivamente.

Da definição de H_x segue que:

1. e é um arco branco.
2. Nenhum arco vermelho sai de um conjunto justo.
3. Nenhum arco vermelho entra em (sai de) um conjunto V_i .
4. O conjunto A_v é exatamente o conjunto dos arcos (u, v) tais que $\Pi(u) = \Pi(v)$ e não existe $u\bar{v}$ -conjunto justo em $\mathcal{F}$.

Passo 2 Procure um caminho orientado de t a s em H_x . Se não existir tal caminho então vá para o Passo 4.

Passo 3 (Caso 1) Existe um caminho orientado de t a s em H_x .

Seja P um caminho mais curto de t a s em H_x (na verdade, basta tomar um caminho sem cordas vermelhas, isto é, se $P = (v_0, v_1, \dots, v_{l-1}, v_l)$ e $0 \leq i < j - 1 \leq l$ então (v_i, v_j) não é um arco vermelho). Como (s, t) é um arco branco de H_x , então a concatenação de P com (s, t) forma um circuito orientado em H_x . Este circuito pode conter arcos azuis, brancos e vermelhos. Seja AB o conjunto dos arcos de D correspondentes aos arcos azuis e brancos de P . Defina um novo vetor x' da seguinte forma:

$$x'(a) = \begin{cases} 1 - x(a) & \text{se } a \in AB + e, \\ x(a) & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

ou seja, invertemos os valores das variáveis $x(a)$ nos arcos em $AB + e$.

Devolva x' e Π' , sendo $\Pi' = \Pi$.

Passo 4 (Caso 2) Não existe caminho orientado de t a s em H_x . Seja

$$T = \{v \in V : \text{existe um caminho orientado de } t \text{ a } v \text{ em } H_x\}.$$

Atualize o potencial da seguinte forma:

$$\Pi'(v) = \begin{cases} \Pi(v) + \alpha & \text{se } v \in T, \\ \Pi(v) & \text{se } v \notin T, \end{cases}$$

onde $\alpha = \min(\alpha_e, \alpha_a, \alpha_b, \alpha_v)$ e

$$\begin{aligned} \alpha_e &= \bar{c}(e), \\ \alpha_a &= \min\{\bar{c}(a) : a \text{ é um arco de } D \text{ entrando em } T \text{ tal que } x(a) = 1\}, \\ \alpha_b &= \min\{-\bar{c}(a) : a \text{ é um arco de } D \text{ saindo de } T \text{ tal que } x(a) = 0\}, \\ \alpha_v &= \min\{\Pi(v) - \Pi(u) : u \in T, v \in J_x(u) - T\}. \end{aligned}$$

Convencionamos aqui que $\min \emptyset = +\infty$.

Atualize a função $\bar{c}$ da seguinte forma:

$$\bar{c}'(a) = \begin{cases} \bar{c}(a) - \alpha & \text{se } a \text{ entra em } T, \\ \bar{c}(a) + \alpha & \text{se } a \text{ sai de } T, \\ \bar{c}(a) & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.3)$$

Se $\alpha_e = \alpha$ então devolva x' e Π' , sendo $x' = x$.

Se $\alpha_e < \alpha$ então execute novamente o Algoritmo Interno com entradas x, Π, e , sendo $\Pi = \Pi'$.

Para provar que o Algoritmo Interno está correto é necessário mostrar que ele pára e que tanto no Passo 3 (Caso 1), quanto no Passo 4 (Caso 2), o par x', Π' devolvido é admissível.

Vamos tratar dos dois casos separadamente.

Caso 1: Suponha que P é um caminho mais curto de t a s em H_x obtido pelo Algoritmo Interno e seja x' definido como no Passo 3. Neste caso, como $\Pi' = \Pi$, iremos nos referir a Π .

Lema 5.3.1 x' é solução viável de (PEGr).

Prova: Obviamente $0 \leq x' \leq 1$. O resto da prova consiste em provar uma série de afirmações. Denote por $\delta_P(B)$ o número de *arcos vermelhos* de P saindo de B .

Afirmção 1 Para cada $B \in \mathcal{F}$, $\lambda_{x'}(B) = \lambda_x(B) + (\delta_P(B) - \delta_P(\bar{B}))$.

Prova: Imediato se $\delta_P(B) = \delta_P(\bar{B}) = 0$. Em geral, segue por uma simples indução em $\delta_P(B) + \delta_P(\bar{B})$. ■

Seja $\varepsilon(B) = b(B) - \lambda_x(B)$, para $B \in \mathcal{F}$. Observe que $\varepsilon(B) \geq 0$ para todo $B \in \mathcal{F}$, $\varepsilon(B) = 0$ se e somente se B é um conjunto justo (em relação a x), e $\varepsilon(B) \geq 1$ se e somente se B não é justo (pois b assume valores inteiros). Também temos que ε é submodular sobre pares entrecortados de $\mathcal{F}$.

Agora vamos provar que $\delta_P(B) \leq \varepsilon(B)$ para cada $B \in \mathcal{F}$, e então seguirá da afirmação anterior que $\lambda_{x'}(B) \leq b(B)$ para cada $B \in \mathcal{F}$, ou seja, x' é solução viável de (PEGr).

Seja $B \in \mathcal{F}$. Vamos usar indução em $\delta_P(B)$. Se $\delta_P(B) = 0$ então o resultado é óbvio. Suponha então que $\delta_P(B) > 0$. Seja $a = (u, v)$ um arco vermelho de P saindo de B tal que $\Pi(v) (= \Pi(u))$ seja o maior possível. Se houver mais de um de tais arcos tome a como o primeiro a aparecer em P .

Afirmção 2 $\delta_P(B \cup J_x(u)) = \delta_P(B) - 1$.

Prova: Como não há arcos vermelhos saindo de $J_x(u)$ e (u, v) não sai de $B \cup J_x(u)$, temos que $\delta_P(B \cup J_x(u)) \leq \delta_P(B) - 1$. Por outro lado, se $a' = (q, r)$ é outro arco vermelho de P saindo de B então afirmamos que $r \notin J_x(u)$ (e portanto a' sai de $B \cup J_x(u)$). Caso contrário, temos $\Pi(r) \geq \Pi(u)$ por (5.2c) e portanto, pela escolha de $a = (u, v)$, $\Pi(r) = \Pi(v) = \Pi(u)$. Logo (u, r) é um arco vermelho em H_x . Mas por hipótese (u, v) precede (q, r) em P contrariando o fato de P ser um caminho mais curto de t a s . ■

Afirmção 3 $\delta_P(B) \leq \varepsilon(B)$ para todo $B \in \mathcal{F}$.

Prova: Usando os resultados anteriores segue que

$$\begin{aligned} \varepsilon(B) &= \varepsilon(B) + \varepsilon(J_x(u)) \\ &\geq \varepsilon(B \cap J_x(u)) + \varepsilon(B \cup J_x(u)) \\ &\geq 1 + \delta_P(B \cup J_x(u)) \\ &= 1 + (\delta_P(B) - 1) \\ &= \delta_P(B), \end{aligned}$$

como queríamos. Aqui usamos a submodularidade de ε , o fato de $J_x(u)$ ser justo e $B \cap J_x(u)$ não ser justo, a hipótese de indução para $B \cup J_x(u)$ e a afirmação anterior. ■

Isto completa a demonstração do lema. ■

Os lemas seguintes mostram que o par $x', \Pi' (= \Pi)$ devolvido no Passo 3 é admissível.

Lema 5.3.2 x' e Π satisfazem (5.2a). O arco e satisfaz (5.2b) em relação a x' e Π . Se um arco a satisfaz (5.2b) em relação a x e Π então ele continua satisfazendo em relação a x' e Π .

Prova: Como $x'(e) = 1$, e não viola mais (5.2b). Seja $a = (u, v) \in A - e$. Se $x(a) = 0$ e $x'(a) = 1$ então (u, v) era um arco branco em H_x e portanto $\bar{c}(a) \geq 0$. Se $x(a) = 1$ e $x'(a) = 0$ então (v, u) era um arco azul em H_x e portanto $\bar{c}(a) \leq 0$. O resultado segue. ■

Lema 5.3.3 x' e Π satisfazem (5.2c).

Prova: Pelo Lema 5.2.3, cada conjunto V_i é a união de conjuntos justos (em relação a x) disjuntos $X_1, X_2, \dots, X_k$. Como nenhum arco vermelho sai de um conjunto justo X_j e nenhum arco vermelho entra em V_i , temos que $\delta_P(\bar{X}_i) = \delta_P(X_i) = 0$ e portanto $\lambda_{x'}(X_i) = \lambda_x(X_i)$. Logo, cada conjunto X_i é justo em relação a x' . Usando novamente o Lema 5.2.3 (na implicação contrária), o resultado segue. ■

Caso 2: Sejam T , α , Π' e $\bar{c}'$ definidos como no Passo 4 do Algoritmo Interno.

Obviamente,

não existe nenhum arco de H_x saindo de T . (*)

Lema 5.3.4 $\alpha > 0$.

Prova: Como e viola (5.2b), $\alpha_e > 0$. Se $\bar{c}(a) \leq 0$ para algum arco $a = (u, v) \in A_D^-(T)$ tal que $x(a) = 1$ então (v, u) seria um arco azul saindo de T (em H_x), contrariando (*); logo $\alpha_a > 0$. Se $\bar{c}(a) \geq 0$ para algum arco $a = (u, v) \in A_D^+(T)$ tal que $x(a) = 0$ então (u, v) seria um arco branco saindo de T em H_x , contrariando (*); logo $\alpha_b > 0$. Finalmente, por (5.2c), $\Pi(v) \geq \Pi(u)$ quando $v \in J_x(u)$, ou seja, $\alpha_v \geq 0$. Se existirem $u \in T$ e $v \in J_x(u) - T$ tais que $\Pi(v) = \Pi(u)$, então (u, v) seria um arco vermelho saindo de T em H_x , contrariando (*). Portanto, $\alpha_v > 0$, de onde segue o resultado. ■

Lema 5.3.5 $x' (= x)$ e Π' satisfazem (5.2a).

Prova: Seja $a \in A$. Se $x(a) = 0$ então claramente a não viola (5.2a). Suponha que $x(a) = 1$. Como x e Π satisfazem (5.2a), $\bar{c}(a) \geq 0$. Se $\bar{c}'(a) < 0$ então a entra em T por (5.3). Mas, $\bar{c}(a) \geq \alpha_a \geq \alpha$, ou seja, $\bar{c}'(a) = \bar{c}(a) - \alpha \geq 0$, o que leva a uma contradição. ■

Lema 5.3.6 Se um arco $a \in A$ satisfaz (5.2b) em relação a x e Π então ele continua satisfazendo em relação a x e Π' .

Prova: Se $x(a) = 1$, o resultado é óbvio. Suponha que $x(a) = 0$. Como a satisfaz (5.2b) em relação a x e Π , $\bar{c}(a) \leq 0$. Se $\bar{c}'(a) > 0$ então a sai de T por (5.3). Mas, $-\bar{c}(a) \geq \alpha_b \geq \alpha$, ou seja, $\bar{c}'(a) = \bar{c}(a) + \alpha \leq 0$ o que leva a uma contradição. ■

Lema 5.3.7 $x' (= x)$ e Π' satisfazem (5.2c).

Prova: Observe que $J_x(u)$ não depende do potencial. Seja $v \in J_x(u)$ e suponha por absurdo que $\Pi'(v) < \Pi'(u)$. Como $\Pi(v) \geq \Pi(u)$ segue que $u \in T, v \in J_x(u) - T, \Pi'(v) = \Pi(v)$ e $\Pi'(u) = \Pi(u) + \alpha$. Portanto, $\Pi(v) - \Pi(u) < \alpha$. Mas, por outro lado, $\Pi(v) - \Pi(u) \geq \alpha_v \geq \alpha$, o que leva a uma contradição. ■

Se $\alpha_e = \alpha$ então o arco $e = (s, t)$ satisfaz (5.2b) em relação a x e Π' . Nesse caso, $x' (= x)$ e Π' é um par admissível.

Se $\alpha_e < \alpha$ então o Algoritmo Interno é executado novamente com entradas x, Π', e . Observe que o conjunto dos arcos induzidos por T no novo digrafo auxiliar H'_x é o mesmo que era induzido por T em H_x . Entretanto, a definição de α garante que em H'_x existe pelo menos um arco saindo de T , que será azul, branco ou vermelho dependendo de α ser igual a α_a, α_b ou α_v . Isto mostra que $T' = \{v \in V : \text{existe um caminho orientado de } t \text{ a } v \text{ em } H'_x\}$ inclui propriamente T . Logo, após no máximo $n - 1$ iterações, ou obtemos a igualdade $\alpha = \alpha_e$ ou encontramos um caminho orientado de t a s , recaindo no Caso 1.

Os lemas e as observações anteriores mostram que o Algoritmo Interno pára e está correto.

A seguir descrevemos como é o algoritmo mais geral que resolve o (PEGr) utilizando o Algoritmo Interno como subrotina.

Algoritmo AF

Entrada: um digrafo $D = (V, A)$,
 uma família entrecortada $\mathcal{F} \subseteq 2^V$,
 uma função inteira b submodular sobre membros entrecortados de $\mathcal{F}$,
 uma função custo $c : A \rightarrow \mathbb{R}^+$ e
 uma solução viável x do (PEGr).
Saída: uma solução ótima x' do (PEGr).

$\Pi = 0$;

Para cada arco $e = (s, t) \in A$ faça

Se $\Pi(t) - \Pi(s) < c(e)$ e $x(e) = 0$ então

Para cada $v \in V$ determine $J_x(v)$;

Aplique o Algoritmo Interno com entradas x, Π e e ;

Seja x', Π' a saída do Algoritmo Interno;

$x := x'; \Pi := \Pi'$;

Devolva x e pare.

Note que durante a execução do algoritmo a solução primal x é (0-1) independente da integralidade do vetor c . Se c for inteiro então o potencial Π será inteiro durante a execução e portanto, pelo Lema 5.2.4 obtemos uma solução dual inteira ótima (y, z) do dual de (PEGr). Estas observações completam a demonstração do Teorema 5.1.2 no caso particular em que $\mathcal{F}'$ é uma família entrecortada.

5.4 Complexidade do algoritmo

Para podermos utilizar o algoritmo da Seção 5.3 precisamos determinar o conjunto $J_x(v)$ para cada vértice v , em qualquer passo intermediário, ou seja, precisamos de um oráculo que decide, dados $u, v \in V$, se existe ou não um $v\bar{u}$ -conjunto justo em $\mathcal{F}$. Podemos obter tal oráculo se tivermos à disposição uma subrotina para minimizar uma função submodular, ou melhor, minimizar $\varepsilon(B) = b(B) - \lambda_x(B)$ sobre $v\bar{u}$ -conjuntos B de $\mathcal{F}$. Se o mínimo for negativo então x não é solução viável, se for zero então existe um $v\bar{u}$ -conjunto justo e se for positivo então $u \in J_x(v)$. Suponha que temos disponível um oráculo $\mathcal{O}$ que minimize ε em no máximo h passos.

Podemos determinar $J_x(v)$ em nh passos para um vértice fixo v . Portanto, podemos determinar todos os conjuntos $J_x(v)$ em no máximo n^2h passos. Supondo que $m = O(n^2)$, podemos construir o digrafo auxiliar H_x em $O(n^2)$ passos.

O Passo 2 do Algoritmo Interno consiste em procurar um caminho orientado sem cordas de t a s em H_x . Isto pode ser feito com o bem conhecido método de busca em largura que vai rotulando a partir de t os vértices atingíveis por ele em H_x . Se existir um caminho orientado de t a s então a busca automaticamente encontra um caminho sem cordas. Senão, T será o conjunto dos vértices rotulados. Essa busca pode ser feita em $O(n^2)$ passos.

Ainda, se ocorrer o caso em que $\alpha_\epsilon < \alpha$ durante a execução do Algoritmo Interno e este for usado novamente com entradas x e Π' então os rótulos determinados previamente podem ser reutilizados (pois $T \subset T'$). O novo digrafo auxiliar obtido nada mais é do que o digrafo auxiliar H_x anterior com alguns arcos inseridos e removidos entre T e $\bar{T}$. A complexidade total do Algoritmo Interno pode ser limitada por $O(n^2 + n^2h)$.

Como o Algoritmo Interno é usado no máximo m vezes, uma solução ótima de (PEGr) pode ser determinada em $O(mn^2 + mn^2h)$ passos, supondo que o oráculo $\mathcal{O}$ está disponível e temos uma solução viável (0-1) inicial.

5.5 Solução viável inicial

Nesta seção vamos estudar o problema de encontrar uma solução viável (0-1) de (PEGr).

Teorema 5.5.1 *Existe uma solução viável (0-1) de (PEGr) se e somente se*

$$\sum_i b(X_i) \geq -\delta_D(\bigcup X_i) \quad (5.4)$$

para membros disjuntos $X_1, \dots, X_k$ de $\mathcal{F}$.

Prova: *Necessidade.* Se x é uma solução viável de (PEGr) então

$$\sum b(X_i) \geq \sum \lambda_x(X_i) = \lambda_x(\bigcup X_i) = \rho_x(\bigcup X_i) - \delta_x(\bigcup X_i) \geq -\delta_D(\bigcup X_i).$$

Suficiência. Suponha que vale (5.4). Vamos reduzir o problema de encontrar uma solução viável (0-1) de (PEGr) a um outro problema de Edmonds-Giles.

Seja D' o digrafo obtido a partir de D acrescentando-se um novo vértice z e $|A|$ novos arcos da seguinte forma: para cada vértice $v \in V$ coloque $\delta_D(v)$ arcos novos (z, v) .

Para cada $B \in \mathcal{F}$ seja $b'(B) = b(B) + \sum_{v \in B} \delta_D(v)$. Claramente b' é submodular sobre membros entrecortados de $\mathcal{F}$. Além disso, como $\delta_D(B) = |A_D^+(B)| \leq \sum_{v \in B} \delta_D(v)$ e $b(B) \geq -\delta_D(B)$ por (5.4), segue que b' é não-negativa.

Observe que $\mathcal{F}$ é uma família entrecortada de subconjuntos de $V + z$ e b' é submodular sobre membros entrecortados de $\mathcal{F}$, interpretando agora $V + z$ como conjunto base. Seja $c' \in \{0, 1\}^A$ tal que $c'(a) = 1$ para cada arco novo a , e $c'(a) = 0$ para cada arco original a de D .

Seja N' a matriz de incidência de D' em relação a $\mathcal{F}$. Considere o seguinte problema de Edmonds-Giles.

$$\begin{array}{ll} \max & c'x \\ \text{(Paux)} \quad \text{s.a} & N'x \leq b' \\ & 0 \leq x \leq 1. \end{array} \quad (5.5)$$

Sem perda de generalidade, suponha que $x = (x_1, x_2)$ onde os componentes de x_1 e x_2 correspondem aos arcos originais e aos arcos novos, respectivamente.

Afirmção *O sistema original tem uma solução viável se e somente se o novo problema (Paux) tem uma solução viável $x = (x_1, x_2)$ tal que $x(a) = 1$ para todo arco novo a .*

Prova: O resultado segue facilmente observando que:

$$\lambda_x(B) = \lambda_{x_1}(B) + \lambda_{x_2}(B) \leq b(B) + \sum_{v \in B} \delta_D(v) = b'(B).$$

■

Vamos mostrar agora que existe uma tal solução viável x de (Paux). Para isso, basta mostrar que (Paux) tem uma solução ótima de custo $|A|$. Como $b' \geq 0$, o vetor nulo é uma solução viável (0-1) de (Paux). Aplique o algoritmo da Seção 5.3 ao novo problema com solução viável inicial $x' = 0$ e potencial $\Pi' = 0$. O algoritmo devolve x e Π satisfazendo (5.2abc). Suponha que exista algum arco novo $e = (z, u)$ tal que $x_2(e) = 0$. Observe que no início do algoritmo apenas os arcos novos violavam (5.2b), portanto, durante a execução do algoritmo o potencial em z é nulo, ou seja, $\Pi(z) = 0$. Além disso, $x_2(e) = 0$ e (5.2b) implicam que $\Pi(u) > 0$. Logo, o conjunto $X = \{v \in V : \Pi(v) > 0\}$ não é vazio. Pelo Lema 5.2.3, X é a união de conjuntos justos disjuntos $X_1, \dots, X_k$, ou seja, $X = \bigcup X_i$ e $b'(X_i) = \lambda_x(X_i)$.

Por (5.2ab), não existe nenhum arco original a com $x_1(a) = 1$ entrando em X e nenhum arco original a com $x_1(a) = 0$ saindo de X . Então $\sum \lambda_{x_1}(X_i) = \lambda_{x_1}(\bigcup X_i) = \lambda_{x_1}(X) = -\delta_D(X)$. Além disso, como $x_2(e) = 0$ temos que $\lambda_{x_2}(X) < \sum_{v \in X} \delta_D(v)$.

Portanto,

$$\sum_i \lambda_x(X_i) = \lambda_x(X) = \lambda_{x_1}(X) + \lambda_{x_2}(X) < -\delta_D(X) + \sum_{v \in X} \delta_D(v),$$

de onde segue que $\sum_i b(X_i) + \sum_{v \in X} \delta_D(v) = \sum_i b'(X_i) < -\delta_D(X) + \sum_{v \in X} \delta_D(v)$, ou seja, $\sum_i b(X_i) < -\delta_D(\bigcup X_i)$. Mas isto contraria (5.4). Portanto, $x_2(a) = 1$ para cada arco novo a . ■

A demonstração acima mostra que se tivermos um oráculo que decide, dados $u, v \in V$, se existe um $v\bar{u}$ -conjunto b' -justo (em relação a x) de $\mathcal{F}$, então podemos encontrar uma solução inicial de (PEGr) utilizando o algoritmo da seção anterior.

5.6 Famílias cruzadas

Vamos provar nesta seção o Teorema 5.1.2 no caso mais geral em que a família $\mathcal{F}'$ de subconjuntos é cruzada. Veremos que o algoritmo descrito anteriormente pode ser estendido. A idéia por trás desta extensão é associar a família cruzada $\mathcal{F}'$ e a função b' submodular sobre membros cruzados de $\mathcal{F}'$ com uma família entrecortada $\mathcal{F}$ e uma função b submodular sobre membros entrecortados de $\mathcal{F}$ de modo que os conjuntos das soluções viáveis de (PEG) e de (PEGr) sejam exatamente o mesmo. Deste modo, podemos utilizar o algoritmo descrito para resolver (PEGr) para resolver (PEG).

■ O seguinte teorema mostra como obter $\mathcal{F}$ e b (veja Frank [1982]).

Teorema 5.6.1 *Sejam $\mathcal{F}' \subseteq 2^V$ uma família cruzada e b' uma função submodular sobre membros cruzados de $\mathcal{F}'$. Seja*

$$\mathcal{F} = \{X : X \neq \emptyset, X = \bigcap X_i, X_i \in \mathcal{F}', \overline{X}_i \cap \overline{X}_j = \emptyset\} \cup \{V\}.$$

Em outras palavras, $\mathcal{F} - \{V\}$ consiste dos conjuntos não vazios obtidos por interseção de alguns membros co-disjuntos de $\mathcal{F}'$. Seja

$$b(X) = \min \left\{ \sum b'(X_i) : X = \bigcap X_i, X_i \in \mathcal{F}', \overline{X}_i \cap \overline{X}_j = \emptyset \right\}$$

e seja $b(V) = 0$. Então $\mathcal{F}$ é uma família entrecortada e b é submodular sobre membros entrecortados de $\mathcal{F}$. ■

■ Suponha agora que em (PEG), b' é a dada função sobre $\mathcal{F}'$ e em (PEGr), b e $\mathcal{F}$ são como definidos pelo Teorema 5.6.1. Denote por P_1 e P_2 o conjunto das soluções viáveis de (PEG) e (PEGr), respectivamente.

Lema 5.6.2 $P_1 = P_2$.

Prova: Como $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ e $b(B) \leq b'(B)$ para $B \in \mathcal{F}'$ temos que $P_1 \supseteq P_2$. Por outro lado, se $x \in P_1$ e $B \in \mathcal{F}$ temos que

$$\begin{aligned} b(B) &= \sum b'(X_i) \geq \sum b(X_i) \geq \sum \lambda_x(X_i) = - \sum \lambda_x(\overline{X}_i) \\ &= -\lambda_x(\bigcup \overline{X}_i) = \lambda_x(\bigcap X_i) = \lambda_x(B) \end{aligned} \tag{5.6}$$

para alguns $X_i \in \mathcal{F}'$, onde $B = \bigcap X_i$ e $\overline{X}_i \cap \overline{X}_j = \emptyset$. Logo, $x \in P_2$. ■

Lema 5.6.3 Para $B \in \mathcal{F} - \{V\}$ as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) B é b -justo
- (b) B é a interseção de alguns membros b' -justos de $\mathcal{F}'$
- (c) B é a interseção de alguns membros b' -justos dois a dois co-disjuntos de $\mathcal{F}'$

Prova: (a) $\rightarrow$ (c) segue de (5.6). (c) $\rightarrow$ (b) é trivial. Para ver que (b) $\rightarrow$ (a), seja $B = \bigcap X_i$ onde cada X_i é um membro b' -justo de $\mathcal{F}'$. Se entre esses conjuntos X_i existirem dois que se cruzam, então eles podem ser substituídos por sua interseção que é um membro b' -justo de $\mathcal{F}'$. Podemos então supor que quaisquer desse dois conjuntos não se cruzam e como eles devem ter interseção não-vazia, segue que eles são co-disjuntos dois a dois. Então $b(B) \leq \sum b'(X_i) = \sum \lambda_x(X_i) = \lambda_x(B)$. Por (5.6) segue que $b(B) = \lambda_x(B)$. ■

Ao considerarmos o Teorema 5.6.1 e o Lema 5.6.2, vemos que para resolver o problema (PEG) basta resolver o problema (PEGr) em relação à função b . Do ponto de vista algorítmico a principal dificuldade consiste em trabalhar com a nova função b quando apenas a função b' foi especificada, e a definição de b é um tanto complicada. Entretanto, vimos que o algoritmo não utiliza explicitamente os valores de b . Precisamos apenas do oráculo $\mathcal{O}$. O seguinte lema mostra que esse oráculo está disponível supondo que o oráculo equivalente para $\mathcal{F}'$ e b' está disponível.

Lema 5.6.4 Dados $x \in P_1 = P_2$ e $u, v \in V$, existe um $v\bar{u}$ -conjunto b -justo de $\mathcal{F}$ se e somente se existe um $v\bar{u}$ -conjunto b' -justo de $\mathcal{F}'$.

Prova: Seja B' um $v\bar{u}$ -conjunto b' -justo de $\mathcal{F}'$. Então $b(B') \leq b'(B') = \lambda_x(B') \leq b(B')$, ou seja, B' é b -justo. Por outro lado, seja B um $v\bar{u}$ -conjunto b -justo de $\mathcal{F}$. Pelo Lema 5.6.3, B é a interseção de alguns membros b' -justos de $\mathcal{F}'$. Um deles é um $v\bar{u}$ -conjunto. ■

O Lema 5.6.4 mostra que para obtermos uma solução x e um potencial Π satisfazendo os três critérios de otimalidade (5.2), o algoritmo desenvolvido para famílias entrecortadas pode ser utilizado sem nenhuma modificação para famílias cruzadas.

Para completarmos a demonstração do Teorema 5.1.2 precisamos mostrar como obter uma solução y' do dual e que y' é inteiro se c for inteiro. Seja y uma solução do problema dual de (PEGr) construída como na Seção 5.2.

Se $y(B) > 0$ temos que B é um conjunto b -justo de $\mathcal{F}$. Para cada $B \in \mathcal{F}$ tal que $y(B) > 0$ fixe uma *decomposição* $B = \bigcap B_i$ onde os conjuntos B_i são conjuntos b' -justos de $\mathcal{F}'$ dois a dois co-disjuntos (veja Lema 5.6.3). Para cada $B' \in \mathcal{F}'$ seja $y'(B') = \sum_B y(B)$ onde a soma é feita sobre todos os conjuntos $B \in \mathcal{F}$ em que B' aparece na decomposição de B . Não é difícil mostrar que y' é uma solução ótima do problema dual de (PEG) (satisfaz os critérios de otimalidade (5.1)).

Isto completa a demonstração do Teorema 5.1.2. Para obtermos uma prova construtiva resta mostrar como obter algoritmicamente os conjuntos B_i .

Lema 5.6.5 *Um conjunto b -justo B , para o qual o hipergrafo $\{J_x(u) : u \in B\}$ é conexo, pode ser obtido construtivamente como a interseção de membros b' -justos dois a dois co-disjuntos de $\mathcal{F}'$.*

Prova: Como já vimos, $J_x(u) = \{v \in V : \text{não existe } v\bar{u}\text{-conjunto } b'\text{-justo em } \mathcal{F}'\}$. Se $B = J_x(u)$ para algum $u \in B$ então usando o oráculo $\mathcal{O}$ podemos expressar $J_x(u)$ como a interseção de alguns membros b' -justos de $\mathcal{F}'$. Pelo Lema 5.6.3 podemos obter algoritmicamente $J_x(u)$ como a interseção de membros b' -justos dois a dois disjuntos de $\mathcal{F}'$.

Suponha agora que X, Y são dois membros b -justos cruzados de $\mathcal{F}$ e que temos membros b' -justos co-disjuntos X_i e Y_j de $\mathcal{F}'$ tais que $X = \bigcap X_i$ e $Y = \bigcap Y_j$. Então

$$X \cup Y = \bigcap (Z : Z = X_i \cup Y_j, X_i \text{ e } Y_j \text{ se cruzam}).$$

Como qualquer conjunto Z é b' -justo podemos aplicar o Lema 5.6.3. Portanto, podemos obter $X \cup Y$ como a interseção de membros b' -justos dois a dois co-disjuntos de $\mathcal{F}'$.

O resultado segue por indução pois $\{J_x(u) : u \in B\}$ é conexo. ■

Seja Π o potencial devolvido pelo algoritmo e seja V_i definido como na seção 5.2. Lembramos que $K_x(V_i)$ é a coleção dos componentes do hipergrafo $\{J_x(u) : u \in V_i\}$. Se $y(B) > 0$ então B pertence a alguma dessas coleções e aplicando o Lema 5.6.5 obtemos os conjuntos B_i descritos anteriormente.

O correspondente teorema de viabilidade para famílias cruzadas segue do Teorema 5.5.1 e do Teorema 5.6.1.

Teorema 5.6.6 *Existe uma solução viável (0-1) de (PEG) se e somente se*

$$\sum b'(X_{ij}) \geq -\delta_D(\bigcup X_i)$$

para conjuntos disjuntos não-vazios $X_1, \dots, X_k$ (não necessariamente em $\mathcal{F}'$) onde cada X_i é a interseção de membros dois a dois co-disjuntos X_{ij} de $\mathcal{F}'$, $j = 1, \dots, k_i$.

No caso de famílias cruzadas a construção feita no Teorema 5.5.1 para construir algoritmicamente uma solução viável de (PEGr) não pode ser aplicada aqui. Uma família cruzada $\mathcal{F}'$ de subconjuntos de V não é necessariamente uma família cruzada de subconjuntos de $V + z$.

Frank [1984] descreveu um algoritmo polinomial para encontrar uma solução viável do problema de Edmonds-Giles no caso mais geral (com a restrição $f \leq x \leq g$) supondo a existência de um oráculo eficiente que minimize $b'(B) - m(B)$ sobre $v\bar{u}$ -membros de $\mathcal{F}'$, onde m é uma função modular qualquer. Este mesmo algoritmo pode ser estendido para resolver o Problema de Edmonds-Giles na sua versão mais geral (maiores detalhes podem ser encontrados em Frank [1984a]).

5.7 Aplicações em orientações de grafos

Veremos nesta seção várias aplicações do Teorema 5.5.1 e do Teorema 5.6.6. Como já mencionamos, o teorema de Edmonds-Giles inclui vários teoremas mini-max em otimização combinatória. Vamos utilizá-lo agora para mostrar resultados relativos a orientações de grafos (mistos). Vamos supor que os grafos desta seção não contêm laços.

Seja $G = (V, E)$ um grafo não-orientado e l uma função inteira definida sobre uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de V . Considere o problema de decidir se existe uma orientação D de G tal que $\rho_D(X) \geq l(X)$, para todo $X \in \mathcal{F}$. Quando existe uma tal orientação D dizemos que D é uma **boa orientação** de G .

Em geral este problema é $\mathcal{NP}$ -completo mas para certas classes de funções l o problema pode ser resolvido (existe uma boa caracterização ou um algoritmo polinomial para encontrar uma boa orientação).

Uma função l definida sobre subconjuntos de V é **convexa** (em G) sobre um par $X, Y \subseteq V$ se

$$l(X) + l(Y) \leq l(X \cup Y) + l(X \cap Y) + d_G(X, Y).$$

Em particular, qualquer função supermodular é convexa.

O seguinte resultado não trivial já mostra uma aplicação do Teorema 5.5.1.

Teorema 5.7.1 *Seja $\mathcal{F}$ uma família entrecortada de subconjuntos de vértices de um grafo $G = (V, E)$, onde $\emptyset \notin \mathcal{F}$ e $V \in \mathcal{F}$. Seja l uma função convexa sobre pares entrecortados de $\mathcal{F}$ tal que $l(V) = 0$. Então G tem uma orientação D tal que*

$$\rho_D(X) \geq l(X), \quad \text{para todo } X \in \mathcal{F}$$

se e somente se

$$e_t \geq \sum_{i=1}^t l(V_i)$$

para conjuntos dois a dois disjuntos $V_1, \dots, V_t$ de $\mathcal{F}$, onde e_t denota o número de arestas com extremos em diferentes V_i .

Prova: *Necessidade.* Se D é uma orientação qualquer de G então $e_t = \sum \rho_D(V_i)$. Se $\rho_D(X) \geq l(X)$ para $X \in \mathcal{F}$ então o resultado segue.

Suficiência. A construção abaixo é típica dos problemas que iremos estudar. Seja D uma orientação qualquer de G . Defina $b(X) = \rho_D(X) - l(X)$ para todo $X \in \mathcal{F}$. Claramente, b é submodular sobre pares entrecortados de $\mathcal{F}$. Então $D, \mathcal{F}$ e b definem uma instância de (PEG). Suponha que x seja uma solução viável (0-1) deste problema. Denote por D_x o digrafo obtido a partir de D invertendo a orientação de cada arco em D tal que $x(a) = 1$. Então

$$\rho_{D_x}(X) = l(X) - \rho_D(X) \geq l(X), \quad \text{para todo } X \in \mathcal{F}.$$

De modo análogo, se tivermos uma boa orientação de G podemos obter uma solução viável (0-1) de (PEG). Usando o Teorema 5.5.1 o resultado segue. ■

Notação. Dado um digrafo $D = (V, A)$ e $x \in \{0, 1\}^A$ denotamos por D_x o digrafo obtido a partir de D substituindo cada arco $a = (u, v) \in A$ tal que $x(a) = 1$ por um arco reverso (v, u) .

Grafos k -orientáveis

Estudaremos agora o problema de encontrar orientações k -aresta-conexas de grafos (mistos). Esse problema é uma generalização do problema de encontrar orientações fortemente conexas de um grafo misto que foi estudado no Capítulo 4. O Teorema de Menger mostra que um digrafo $D = (V, A)$ é k -aresta-conexo se $\rho_D(B) \geq k$ para todo $\emptyset \subset B \subset V$. Dizemos que um grafo misto é **k -orientável** se possui uma orientação k -aresta-conexa.

A próxima aplicação que veremos é uma demonstração de um famoso teorema de Nash-Williams [1960]. Esse resultado caracteriza quando um grafo não-orientado é k -orientável.

Teorema 5.7.2 (Nash-Williams, 1960) *Um grafo não-orientado G é k -orientável se e somente se $d_G(B) \geq 2k$ para todo $\emptyset \subset B \subset V$.*

Prova: Se G é k -orientável então é óbvio que $d_G(B) \geq 2k$ para todo $\emptyset \subset B \subset V$.

Suponha agora que $d_G(B) \geq 2k$ para $\emptyset \subset B \subset V$. Seja $D = (V, A)$ uma orientação qualquer de G . Sejam $\mathcal{F}' = 2^V - \{\emptyset, V\}$ e $b'(X) = \rho_D(X) - k$ para todo $X \in \mathcal{F}'$. Considere o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \lambda_x(B) &\leq b'(X), \quad \text{para todo } B \in \mathcal{F}' \\ 0 &\leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Seja $x' \in \mathbb{R}^A$ tal que $x'(a) = 1/2$ para $a \in A$. É fácil ver que $\lambda_{x'}(B) \leq b'(B) = \rho_D(B) - k$ para $B \in \mathcal{F}'$, ou seja, x' é uma solução do sistema. Pelo Teorema 5.6.6, existe uma solução (0-1) x do sistema acima. Então D_x satisfaz:

$$\rho_{D_x}(B) = \rho_D(B) - \lambda_x(B) \geq k, \text{ para todo } \emptyset \subset B \subset V,$$

ou seja, D_x é k -aresta-conexo. Portanto, G é k -orientável. ■

As provas dos Teoremas 5.7.1 e 5.7.2 mostram a técnica geral para se obter resultados sobre orientação de grafos. É importante notar nessas demonstrações o uso do fato da função $\rho(B)$ ser submodular. As idéias acima podem ser aplicadas em problemas de orientação de grafos mistos, como veremos a seguir.

Vamos mostrar que o problema de encontrar uma orientação k -aresta-conexa de um grafo misto $M = (V, E, A)$ pode ser reduzido a um problema de Edmonds-Giles. De fato, podemos resolver um problema um pouco mais geral.

Suponha que para cada aresta $e = uv \in E$ temos um custo associado a cada possível orientação de e : $c(u, v)$ e $c(v, u)$. Queremos encontrar uma orientação k -aresta-conexa de M com custo mínimo.

Suponha que $M = D \sqcup G$. Seja $D' = (V, A')$ um digrafo obtido a partir de $G = (V, E)$ orientando as arestas de G da seguinte forma: dado $e = (u, v) \in E$, se $c(u, v) > c(v, u)$ então oriente e de u para v ($(u, v) \in A'$), e se $c(u, v) = c(v, u)$ então oriente e arbitrariamente. Seja $c' \in \mathbb{R}^{A'}$ um função custo tal que $c'(a) = c(u, v) - c(v, u)$ para todo arco $a = (u, v) \in A'$. Observe que todos os custos são não-negativos.

Seja $\mathcal{F}' = 2^V - \{\emptyset, V\}$. Para cada $B \in \mathcal{F}'$ seja:

$$b'(B) = \rho_{D'}(B) + \rho_D(B) - k.$$

Então $\mathcal{F}'$ é uma família cruzada de subconjuntos de V e b' é submodular sobre pares cruzados de $\mathcal{F}'$. É fácil ver que D' , $\mathcal{F}'$, b' e c' formam uma instância de um Problema de Edmonds-Giles, que chamaremos (PEGk).

Além disso, se x é uma solução viável (0-1) desse problema então o digrafo $D'_x = (V, L)$ satisfaz a seguinte propriedade:

$$\rho_{D'_x}(B) \geq k - \rho_D(B), \text{ para todo } \emptyset \subset B \subset V.$$

Isso implica que o digrafo $Q_x = (V, A \cup L)$ satisfaz:

$$\rho_{Q_x}(B) = \rho_{D'_x}(B) + \rho_D(B) \geq k, \text{ para todo } \emptyset \subset B \subset V.$$

ou seja, Q_x é uma orientação k -aresta-conexa de M . Não é difícil ver que uma solução ótima do (PEGk) corresponde a uma orientação k -aresta-conexa de custo mínimo.

Para podermos utilizar o algoritmo de Frank, precisamos de um oráculo que decide, dados $u, v \in V$, se existe um $u\bar{v}$ -conjunto b' -justo. Como

$$b'(B) - \lambda_x(B) = \rho_{Q_x}(B) - k,$$

podemos utilizar um algoritmo de fluxo máximo para decidir se em Q_x existem $k+1$ caminhos orientados de u a v disjuntos nos arcos.

O único problema reside em encontrar uma solução viável (0-1) inicial. O Teorema 5.6.6 fornece uma caracterização de grafos mistos k -orientáveis, mas como vimos, a demonstração desse resultado não fornece um algoritmo polinomial para encontrar uma orientação k -aresta-conexa de um grafo misto. Entretanto, observe que *se pudermos resolver o problema de encontrar uma orientação k -aresta-conexa de um grafo não-orientado então podemos resolver o problema de encontrar uma orientação k -aresta-conexa de um grafo misto M* . Basta tomar $c(u, v) = c(v, u) = 0$ para cada aresta $e = uv$, e $c(u, v) = 0$ e $c(v, u) = 1$ para cada arco $a = (u, v)$. Tomando o grafo subjacente H de M , reduzimos nosso problema ao problema de encontrar uma orientação k -aresta-conexa de H de custo mínimo: M tem uma orientação k -aresta-conexa se e somente se H tem uma orientação k -aresta-conexa de custo zero.

Se tivermos uma orientação k -aresta-conexa de H podemos utilizar o algoritmo da Seção 5.3 para resolver esse problema. Como o oráculo está disponível por meio de um algoritmo de fluxo, podemos resolver o problema por meios puramente combinatórios. Veremos na próxima seção um algoritmo combinatório para obter uma orientação k -aresta-conexa de um grafo não-orientado.

Podemos obter outra generalização interessante do problema de encontrar uma orientação k -aresta-conexa. Sejam $p, q \in \mathbb{Z}_+^A$. Considere o problema de encontrar uma orientação k -aresta-conexa de um grafo não-orientado $G = (V, E)$ tal que $p(v) \leq \rho(v) \leq q(v)$ para todo $v \in V$. Seja l uma função definida sobre $\mathcal{F}'$ dada por:

$$l(X) = \begin{cases} k & \text{se } 1 < |X| < |V| - 1 \\ \max(k, p(v)) & \text{se } X = \{v\} \\ \max(k, d_G(v) - q(v)) & \text{se } X = V - v. \end{cases} \quad (5.7)$$

Seja $D = (V, A)$ uma orientação qualquer de M . É fácil ver que $b'(B) = \rho_D(B) - l(B)$ é uma função submodular sobre pares cruzados de $\mathcal{F}' = 2^V - \{\emptyset, V\}$, pois se X, Y se cruzam então $1 < |X|, |Y| < |V| - 1$ e portanto $l(X) = l(Y) = k$. É fácil ver que uma solução viável do sistema de Edmonds-Giles com $D, \mathcal{F}'$ e b' descritos acima corresponde a uma orientação k -aresta-conexa tal que $p(v) \leq \rho(v) \leq q(v)$ para todo $v \in V$.

Do mesmo modo podemos aplicar o algoritmo da Seção 5.3 para encontrar uma orientação de custo mínimo. Neste caso, o oráculo $\mathcal{O}$ ainda está disponível pois o mínimo de

$\{\rho_D(B) - \lambda_x(B) - l(B) : B \text{ } u\bar{v}\text{-conjunto de } \mathcal{F}'\}$ é igual a:

$$\min \begin{cases} \min(\rho_{D_x}(B) - k : B \text{ } u\bar{v}\text{-conjunto de } \mathcal{F}') \\ \rho_{D_x}(u) - p(u) \\ \rho_{D_x}(V - v) - d_G(v) + q(v) \end{cases}$$

e como já vimos isto pode ser obtido por um algoritmo de fluxo. Pode-se generalizar a construção acima para obter orientações k -aresta-conexas de grafos mistos de custo mínimo com restrições nos graus de entrada. Para isso basta modificar ligeiramente a função l . Como essa construção não apresenta nenhuma idéia nova deixamos os detalhes a cargo do leitor. Entretanto, cabe observar que o algoritmo ainda precisa de uma *orientação inicial*. Como no caso sem restrições nos graus, tal solução pode ser obtida se soubermos encontrar uma orientação k -aresta-conexa com restrição nos graus de um grafo não-orientado. Na próxima seção veremos como esses problemas podem ser resolvidos.

5.8 Orientações de grafos não-orientados

Vamos estudar aqui em que condições um grafo não-orientado $G = (V, E)$ possui uma orientação D tal que $\rho_D(X) \geq l(X)$ para $\emptyset \subset X \subset V$, quando $l(X)$ é convexa. Da demonstração desse resultado obteremos um algoritmo polinomial para encontrar uma orientação k -aresta-conexa de um grafo não-orientado. Como já mencionamos, sabendo resolver este problema no caso em que $l(X) \equiv k$ podemos encontrar uma orientação k -aresta-conexa de um grafo misto.

Teorema 5.8.1 (Frank, 1980) *Seja $G = (V, E)$ um grafo não-orientado. Seja l uma função convexa em G inteira não-negativa tal que $l(\emptyset) = l(V) = 0$. Então existe uma orientação D de $G = (V, E)$ tal que*

$$\rho_D(X) \geq l(X) \quad \text{para todo } \emptyset \subset X \subset V \quad (5.8)$$

se e somente se para toda partição $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_t$ o número de arestas e_t com extremos em diferentes V_i satisfaz

$$e_t \geq \sum_{i=1}^t l(V_i) \quad (5.9)$$

e

$$e_t \geq \sum_{i=1}^t l(\bar{V}_i). \quad (5.10)$$

Prova: *Necessidade.* Em um digrafo o número de arcos com extremos em diferentes V_i 's é igual a $\sum_{i=1}^l \rho(V_i)$. Se tivermos uma boa orientação D (ou seja, D satisfaz (5.8)) então $\sum_{i=1}^l \rho_D(V_i) \geq l(V_i)$ e vale (5.9).

Se existe uma boa orientação em relação a l então invertendo o sentido dos arcos nessa orientação obtemos uma boa orientação em relação a $l'(X) = l(\overline{X})$. Portanto, (5.9) também vale para l' , o que implica que (5.10) vale.

Suficiência. Antes da demonstração convém fazer três observações.

— Se l é convexa em G então l é convexa em qualquer supergrafo de G .

— Se existe uma orientação D e uma partição $V = V_1 \cup \dots \cup V_l$ tal que

$$\rho_D(V_1) = l(V_1) - 1, \quad \rho_D(V_i) = l(V_i), \quad i = 2, \dots, l \quad (5.11)$$

então esta partição viola (5.9).

— Se existe uma orientação D e uma partição $V = V_1 \cup \dots \cup V_l$ tal que

$$\rho_D(\overline{V}_1) = l(\overline{V}_1) - 1, \quad \rho_D(\overline{V}_i) = l(\overline{V}_i), \quad i = 2, 3, \dots, l \quad (5.12)$$

então esta partição viola (5.10).

Vamos mostrar agora que se G' possui uma boa orientação e foi obtido a partir de G ao duplicar algumas arestas, então após a remoção de uma das arestas duplicadas em G' o grafo resultante ainda possui uma boa orientação. Isto prova o teorema pois podemos duplicar todas as arestas de G e obter uma boa orientação do novo grafo orientando cada aresta e sua cópia em sentidos opostos ($\rho(X) \geq l(X)$ segue de (5.9) e do fato de l ser não-negativa).

Convém observar que um grafo G' obtido por duplicação de arestas de G satisfaz (5.9) e (5.10) sempre que G o fizer.

Seja H um grafo obtido de G ao duplicar algumas arestas de G e suponha que H tenha uma boa orientação, digamos D' . Seja $e = ab$ uma aresta de $EH - EG$ e seja $G' = H - e$. Se a orientação dos arcos de D' ainda fornece uma boa orientação de G' então nada temos a provar. Senão, temos uma orientação D de G' , onde existem alguns conjuntos X com $\rho_D(X) < l(X)$. Tal orientação é chamada **errada** e tais conjuntos são chamados **errados**.

Suponha que a orientação de $e = ab$ em D' seja $e' = (a, b)$. Embora a orientação D seja errada, ela não é “tão” ruim pois

$$\text{Se } X \subset V \text{ é errado então } \rho_D(X) = l(X) - 1. \quad (5.13)$$

Observe também que

$$b \text{ pertence a todos os conjuntos errados.} \quad (5.14)$$

e que

$$a \text{ não pertence a nenhum conjunto errado.} \quad (5.15)$$

Isto mostra que a interseção de conjuntos errados é não vazia, e que a união de todos os conjuntos errados não é igual a V . Em particular, se X, Y são conjuntos errados tais que $X \not\subseteq Y$ e $Y \not\subseteq X$ então X e Y são conjuntos cruzados.

De agora em diante vamos supor que D é uma orientação de G' em que o número de conjuntos errados é o menor possível. Suponha por absurdo que este número não seja zero. Podemos escolher D satisfazendo (5.13)–(5.15). Vamos mostrar que isto levará a uma contradição. Para simplificar a notação, daqui em diante escreveremos $\rho(X)$ e $d(X)$ em vez de $\rho_D(X)$ e $d_{G'}(X)$.

Antes vamos demonstrar alguns lemas.

Lema 5.8.2 *Sejam W_1, W_2 dois conjuntos errados em D . Então $W_1 \cap W_2$ e $W_1 \cup W_2$ também são conjuntos errados.*

Prova: Se $W_1 \subseteq W_2$ ou $W_2 \subseteq W_1$ então nada temos a provar. Caso contrário, W_1 e W_2 formam um par de conjuntos cruzados. Logo,

$$l(W_1) + l(W_2) \leq l(W_1 \cap W_2) + l(W_1 \cup W_2) + d(W_1, W_2). \quad (5.16)$$

Por outro lado, por (5.13) temos que

$$\begin{aligned} \rho(W_1 \cap W_2) &\geq l(W_1 \cap W_2) - 1, \\ \rho(W_1 \cup W_2) &\geq l(W_1 \cup W_2) - 1. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Portanto, pela Proposição 5.1.1:

$$\begin{aligned} l(W_1) - 1 + l(W_2) - 1 &= \rho(W_1) + \rho(W_2) \\ &= \rho(W_1 \cap W_2) + \rho(W_1 \cup W_2) + d(W_1, W_2) \\ &\geq l(W_1 \cap W_2) - 1 + l(W_1 \cup W_2) - 1 + d(W_1, W_2). \end{aligned} \quad (5.18)$$

As equações (5.16) e (5.18) mostram que cada desigualdade em (5.16), (5.17) e (5.18) na verdade é uma igualdade. ■

Lema 5.8.3 *Em D a união de qualquer número de conjuntos errados resulta em um conjunto errado.*

Prova: Segue imediatamente do Lema 5.8.2. ■

Vamos denotar por R a união de todos os conjuntos errados de D . Pelo Lema 5.8.3, R é errado.

Definição. Um subconjunto não vazio S de V é justo (em D) se $\rho(S) = l(S)$.

Observação. Se $\rho(S) = 0$ então trivialmente ou S é errado ou S é justo.

Lema 5.8.4 Se S_1 e S_2 são conjuntos justos tais que $S_1 \cup S_2 \neq V$ e $S_1 \cap S_2 \not\subseteq R$, então $S_1 \cap S_2$ e $S_1 \cup S_2$ são justos.

Prova: A demonstração é similar a do Lema 5.8.2. Se $S_1 \subseteq S_2$ ou $S_2 \subseteq S_1$ nada temos a provar. Caso contrário, S_1 e S_2 são cruzados. Ainda, $S_1 \cap S_2$ e $S_1 \cup S_2$ não são errados por causa da definição de R . Logo,

$$\begin{aligned} l(S_1) + l(S_2) &= \rho(S_1) + \rho(S_2) \\ &= \rho(S_1 \cap S_2) + \rho(S_1 \cup S_2) + d(S_1, S_2) \\ &\geq l(S_1 \cap S_2) + l(S_1 \cup S_2) + d(S_1, S_2) \\ &\geq l(S_1) + l(S_2), \end{aligned}$$

e o resultado segue. ■

Lema 5.8.5 Se S_1, S_2 são conjuntos justos, $S_1 \cup S_2$ não é justo e $(S_1 \cup S_2) \cap R = \emptyset$ então $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

Prova: Segue imediatamente do Lema 5.8.4. ■

Lema 5.8.6 Se S é justo, W é errado, S e W são cruzados, e $S \not\subseteq R$ então $S \cap W$ é errado.

Prova: Temos que

$$\begin{aligned} l(S) + l(W) - 1 &= \rho(S) + \rho(W) \\ &= \rho(S \cap W) + \rho(S \cup W) + d(S, W) \\ &\geq l(S \cap W) - 1 + l(S \cup W) - 1 + d(S, W) \end{aligned}$$

de onde segue que pelo menos um dos conjuntos $S \cap W$ e $S \cup W$ é um conjunto errado. Mas $S \not\subseteq R$ e portanto $S \cup W$ não pode ser errado. ■

Agora vamos tentar alterar a orientação D de G' de modo que:

1. R deixe de ser um conjunto errado,
2. não seja criado nenhum novo conjunto errado,
3. as afirmações (5.13)–(5.15) continuem valendo.

Se encontrarmos tal orientação então pela propriedade minimal de D obtemos uma contradição, o que demonstra o teorema.

Vamos analisar alguns casos:

Caso 1. Existe um vértice $x \notin R$ que não pertence a nenhum conjunto justo.

Então existe um caminho orientado P em D de um vértice $y \in R$ a x (pois um conjunto B não errado com $\rho(B) = 0$ é um conjunto justo). Inverta a orientação dos arcos em P . Não é difícil ver que a orientação obtida satisfaz as propriedades desejadas.

Caso 2. Todo vértice $x \notin R$ pertence a algum conjunto justo.

Subcaso 2.1. Todo vértice $x \notin R$ pertence a algum conjunto justo disjunto de R .

Neste caso $\overline{R}$ é a união de alguns conjuntos justos. Os subconjuntos justos maximais $V_2, \dots, V_t$ de $\overline{R}$ são disjuntos pelo Lema 5.8.5, e portanto $V_1 = R, V_2, \dots, V_t$ formam uma partição de V . Esta partição satisfaz (5.11) e portanto não satisfaz (5.9), uma contradição. Este caso é impossível.

Subcaso 2.2 Existe um vértice $x \notin R$ que pertence a alguns conjuntos justos, mas nenhum deles é disjunto de R .

Sejam $M_1, \dots, M_r$ os conjuntos justos minimais contendo x .

2.2.1. Existe um vértice $y \in M_1 \cap \dots \cap M_r \cap R$.

Então não existe conjunto justo S tal que $x \in S$ e $y \notin S$. Portanto existe um caminho orientado em D de y a x e invertendo a orientação dos arcos deste caminho, obtemos uma

nova orientação de G' com as propriedades desejadas.

2.2.2. $M_1 \cap \dots \cap M_r \cap R = \emptyset$.

Isto é equivalente a

$$\overline{M}_1 \cup \dots \cup \overline{M}_r \supseteq R. \quad (5.19)$$

Pela minimalidade dos M_i 's, pelo fato de $x \notin R$ e pelo Lema 5.8.4 temos que $M_i \cup M_j = V$, ou seja,

$$\overline{M}_i \cap \overline{M}_j = \emptyset \text{ para } 1 \leq i < j \leq r. \quad (5.20)$$

Por (5.14) sabemos que b pertence a todos os conjuntos errados. Suponha que $b \in \overline{M}_i$. Neste caso $\overline{M}_i \subset R$ ($M_i \cup R = V$). Caso contrário, aplicando o Lema 5.8.6 com $S = M_i$ e $W = R$ temos que $R \cap M_i$ é um conjunto errado não contendo b , o que leva a uma contradição. Observe que por (5.19) ao menos um dos $\overline{M}_i$ contém b .

Suponha então que $\overline{M}_1, \dots, \overline{M}_k \subset R$ e que $\overline{M}_{k+1}, \dots, \overline{M}_r \not\subset R$, onde $1 \leq k \leq r$. Pode-se verificar facilmente por indução que os conjuntos $R \cap M_{k+1}, R \cap M_{k+1} \cap M_{k+2}, \dots, R \cap M_{k+1} \cap \dots \cap M_r$ são errados. Basta aplicar no passo j o Lema 5.8.6 com a escolha $W = R \cap M_{k+1} \cap \dots \cap M_{k+j}$ e $S = M_{k+j+1}$ (se S e W não se cruzam então $W \subset S$ e portanto $W \cap S$ é errado).

Agora, por (5.19) e (5.20) segue que $R \cap M_{k+1} \cap \dots \cap M_r = \overline{M}_1 \cap \dots \cap \overline{M}_k$. Seja $S = \overline{M}_1 \cup \dots \cup \overline{M}_k$ e seja $V_1 = \overline{S}, V_2 = \overline{M}_1, V_3 = \overline{M}_2, \dots, V_t = \overline{M}_k$ onde $t = k + 1$. Então $V_1, \dots, V_t$ é uma partição de V por (5.20) e pela construção de V_1 . Esta partição satisfaz (5.12) e portanto não satisfaz (5.10). Logo o subcaso 2.2.2 é impossível. Isto completa a demonstração. ■

Vamos analisar agora o caso em que $l(X) \equiv k$. A demonstração do Teorema 5.8.1 fornece uma demonstração construtiva do teorema de Nash-Williams. Vamos descrever a partir desta demonstração um algoritmo polinomial para obter uma orientação k -aresta-conexa de um grafo não-orientado G .

Para facilitar a descrição do algoritmo de orientação suponha que o grafo de entrada $G = (V, E)$ é $2k$ -aresta-conexo. Esta condição pode ser testada em tempo polinomial e o Teorema de Nash-Williams mostra que neste caso G é k -orientável. Suponha também que temos disponível o seguinte procedimento.

Procedimento Reorienta

Entrada: uma orientação $D = (V, A)$ de um grafo $2k$ -aresta-conexo e vértices $a, b \in V$ tais que para todo $X \subset V$:

Se $\rho_D(X) < k$ então $\rho_D(X) = k - 1$, $b \in X$ e $a \notin X$.

Saída: uma reorientação k -aresta-conexa D' de D .

O procedimento acima encontra sucessivas reorientações de D e baseia-se na demonstração do Teorema 5.8.1. Antes de descrevê-lo mostraremos como utilizar tal procedimento para obter uma orientação k -aresta-conexa de G . O algoritmo de orientação consiste dos seguintes passos.

Algoritmo OKAC

Entrada: um grafo não-orientado $2k$ -aresta-conexo $G = (V, E)$.

Saída: uma orientação k -aresta conexa de G .

Sejam $v_1, \dots, v_{2r}$ os vértices ímpares de G ;

Seja $F = \{v_1v_2, \dots, v_{2r-1}v_{2r}\}$;

(* Diremos que uma orientação de uma aresta de F é um **arco especial** *)

Seja $G' = G + F$;

Seja D uma orientação euleriana de G' ;

(* Claramente D é k -aresta-conexo. *)

Enquanto existir um arco especial (a, b) em D faça:

$D := D - (a, b)$;

(* D , a , b constituem uma entrada admissível para o procedimento Reorienta. *)

$D := \text{Reorienta}(D, a, b)$;

(* O procedimento Reorienta devolve uma reorientação k -aresta-conexa de D . *)

Devolva D e pare.

(* D é uma orientação k -aresta-conexa de G . *)

É fácil ver que o algoritmo OKAC faz no máximo $n/2$ chamadas do procedimento Reorienta e a orientação devolvida é uma orientação k -aresta-conexa. Descreveremos agora o funcionamento do procedimento Reorienta. Ele recebe como entradas um digrafo $D = (V, A)$ e vértices a e b que satisfazem a seguinte propriedade:

Se $X \subset V$ é tal que $\rho_D(X) < k$ então $\rho_D(X) = k - 1$, $b \in V$ e $a \notin V$. (**)

Note que um conjunto $X \subset V$ é errado se $\rho_D(X) = k - 1$. Então b pertence a todos os conjuntos errados e a não pertence a nenhum conjunto errado, como na demonstração do

Teorema 5.8.1. Denote por R a união de todos os conjuntos errados e por T o conjunto dos vértices de $V - R$ que pertencem a algum conjunto justo. Para cada $x \in V - R$ indique por $J(x)$ o conjunto dos vértices y de R tais que não existe $x\bar{y}$ -conjunto justo em D .

A seguir descrevemos o Procedimento Reorienta.

Procedimento Reorienta

(* D , a e b são as entradas do procedimento *)

Determine R e T ;

Para cada $x \in V - R$ determine $J(x)$;

Enquanto $R \neq \emptyset$ faça

(* (1) Se existe $x \notin R$ que não pertence a nenhum conjunto justo *)

Se existe $x \in (V - R) \cap (V - T)$ então

Seja P um caminho orientado de um vértice $y \in R$ a x ; (* Caso 1 *)

Inverta a orientação dos arcos de P em D ;

(* (2) Senão todo vértice de $V - R$ pertence a algum conjunto justo *)

Senão

Seja $x \in V - R$ tal que $J(x) \neq \emptyset$; (* Subcaso 2.2.1 *)

Seja $y \in J(x)$;

Seja P um caminho orientado de y a x ;

Inverta a orientação dos arcos de P em D ;

Determine R e T ;

Para cada $x \in V - R$ determine $J(x)$;

Devolva D e pare.

(* D é k -aresta-conexo *)

A cada iteração o procedimento acima mantém a propriedade (**) e $|R|$ diminui. Como G é $2k$ -aresta-conexo, a demonstração do Teorema 5.8.1 mostra que só podem ocorrer o Caso 1 e o subcaso 2.2.1. Os demais casos caem em contradição com o fato de G ser $2k$ -aresta-conexo.

O teste (1) acima verifica se ocorre o caso 1. Se isso ocorrer então existe um caminho orientado de um vértice y de R ao vértice x , como foi visto na demonstração.

Se o teste (1) falhar então ocorre o subcaso 2.2.1 da demonstração. Observe que $J(x) \supseteq M_1 \cap \dots \cap M_r$. Logo, a demonstração do Teorema 5.8.1 mostra que existe um caminho orientado de um vértice y de $J(x)$ ao vértice x . Note que $J(x)$ pode conter propriamente o conjunto $M_1 \cap \dots \cap M_r$, mas é fácil ver que isto não afeta a validade do procedimento Reorienta.

As seguintes afirmações são imediatas e mostram como calcular os conjuntos R , T e $J(x)$.

Afirmção 2 *Seja $x \in V$. Então $x \in R$ se e somente se existe $y \in V - x$ tal que $\lambda(y, x; D) = k - 1$.*

Afirmção 3 *Seja $x \in V - R$. Então x pertence a algum conjunto justo se e somente se existe $y \in V - x$ tal que $\lambda(y, x; D) = k$.*

Afirmção 4 *Seja $x \in V - R$ e $y \in R$. Então $y \in J(x)$ se e somente se $\lambda(y, x; D) > k$.*

As observações acima mostram que R , T e $J(x)$ podem ser calculados em tempo $O(n^2h)$ onde h é a complexidade de um algoritmo de fluxo máximo. Fazendo uso de um tal algoritmo com $h = O(n^3)$ (veja Lawler [1976]) o procedimento Reorienta fica com complexidade $O(n^6)$. Disto resulta que o algoritmo de orientação OKAC tem complexidade $O(n^7)$.

Pode-se estender este método para obter uma orientação k -aresta-conexa D de um grafo não-orientado G com restrições nos graus de entrada, ou seja, $p(v) \leq \rho_D(v) \leq q(v)$ para todo $v \in V$. Observe que nesta variante, para determinarmos os conjuntos R , T e $J(x)$ é suficiente que esteja disponível um algoritmo que dados $x, y \in V$ determine o mínimo de $\rho_D(X) - l(X)$ sobre $x\bar{y}$ -conjuntos, o que pode ser feito por um algoritmo de fluxo máximo como vimos na seção anterior.

Antes de encerrar este capítulo, cabe aqui observar que além dos problemas de orientação descritos neste capítulo, o Teorema de Edmonds-Giles inclui outros resultados relacionados a *arborescências* e *branchings* em grafos mistos (veja Frank [1978]).

Capítulo 6

Aumentações com demandas de aresta-conexidade

O estudo de aresta-conexidade em grafos e digrafos ocupa um lugar de destaque na Teoria dos Grafos, sendo responsável por uma literatura tão variada quanto extensa sobre esse tema. Um dos assuntos de interesse sobre esse tema consiste em estudar o problema de acrescentar arestas (arcos) a um grafo não-orientado (orientado) de modo que o grafo (digrafo) resultante satisfaça certas condições de aresta-conexidade. Em geral, existe o interesse em acrescentar o menor número possível de tais arestas (arcos).

Recentemente, Bang-Jensen, Frank e Jackson [1993] estudaram o seguinte problema.

Problema da Aumentação Aresta-Conexa (PAAC): *Dado um grafo misto $M = (V, E, A)$ e uma função demanda $r : V \times V \rightarrow \mathbb{Z}_+$, encontrar um conjunto mínimo F de arestas com extremos em V a serem acrescentadas a M de modo que o grafo misto resultante $M^* = M + F$ tenha a seguinte propriedade:*

$$\lambda(x, y; M^*) \geq r(x, y) \text{ para todo } x, y \in V, x \neq y,$$

ou seja, em M^ todo par de vértices distintos x, y é ligado por pelo menos $r(x, y)$ caminhos disjuntos nas arestas.*

De modo análogo, podemos definir uma variante deste problema, que indicaremos por PAACD, na qual F consiste de um conjunto de *arcos* com extremos em V .

Na Seção 6.2 descreveremos um algoritmo polinomial para resolver o PAAC quando a função demanda r possui determinadas propriedades. O algoritmo é baseado na demonstração de um resultado obtido por esses autores que fornece uma boa caracterização para o PAAC.

Na Seção 6.3, descreveremos um resultado análogo para o PAACD. Entretanto, como veremos, o PAACD é $\mathcal{NP}$ -difícil, mesmo para funções demanda bastante especiais.

Veremos também a relação que existe entre esses resultados de aumento com alguns teoremas de aglutinação (splitting off). Em particular, na Seção 6.2, mostraremos como derivar o resultado acima mencionado relativo ao PAAC a partir de um teorema de aglutinação.

6.1 Preliminares

Neste capítulo, diremos que uma família de subconjuntos disjuntos de V é uma **subpartição** de V .

Convém lembrar que denotamos por $d_M(X, Y)$ o número de arcos e arestas de um grafo misto $M = (V, E, A)$ com um extremo em $X - Y$ e outro em $Y - X$. Para simplificar, usaremos a notação:

$$\bar{d}_M(X, Y) := d_M(X, V - Y),$$

ou seja, $\bar{d}_M(X, Y)$ é o número de arcos e arestas com um extremo em $X \cap Y$ e outro em $V - (X \cup Y)$.

Lembramos também que $\rho_M(X)$ indica o número de arcos e arestas de M que entram em um subconjunto X de V , e $\delta_M(X) = \rho_M(V - X)$. Para um mesmo conjunto X indicaremos o mínimo desses valores por $\beta_M(X)$, ou seja,

$$\beta_M(X) := \min(\rho_M(X), \delta_M(X)).$$

Observe que $\beta_M(X) = \beta_M(V - X)$.

Dado um grafo misto $M = (V, E, A)$, neste capítulo vamos nos referir a uma função $r : V \times V \rightarrow \mathbb{Z}_+$ como uma **função demanda** (para M). Dizemos que r é **simétrica** se $r(x, y) = r(y, x)$ para todo $x, y \in V$.

O PAAC consiste em acrescentar um conjunto mínimo F de arestas a um grafo misto M de modo que no grafo resultante $M^* = M + F$ existam $r(x, y)$ caminhos viáveis de x a y disjuntos nas arestas, para quaisquer $x, y \in V$, $x \neq y$. Com esta definição, permitimos que o conjunto solução F contenha arestas paralelas, inclusive de arestas e arcos já existentes no grafo M .

Se F é uma solução ótima do PAAC então dizemos que $M^* = M + F$ é uma **aumento ótima** de M (em relação a r). Se F é uma solução viável do PAAC então

dizemos que M^* é uma **aumentação viável** de M (em relação a r). Denotamos a cardinalidade de uma solução ótima do PAAC por $\gamma(M, r)$.

O PAAC pode ser estendido de modo natural a uma versão mais geral onde há custos associados às arestas e pergunta-se por um conjunto F de arestas de custo mínimo. A variante na qual F é um conjunto de arcos com extremos em V , indicada por PAACD, pode ser estendida de modo análogo ao PAAC a uma versão mais geral com custos associados aos arcos. No caso geral, ambas as versões são $\mathcal{NP}$ -difíceis (veja Eswaran e Tarjan [1976]).

Observe que tanto no PAAC como no PAACD, podemos supor sem perda de generalidade que M é um grafo orientado (a substituição de uma aresta por um par de arcos reversos não afeta a aresta-conexidade local entre quaisquer dois vértices). Visto dessa forma, o PAACD pode ser considerado um problema “puro” sobre grafos orientados.

Até o presente momento, não se conhece resultados sobre uma variante do problema de aumentação aresta-conexa em que permite-se acrescentar simultaneamente tanto arcos como arestas ao grafo misto M .

Dado um grafo misto $M = (U, E, A)$, a operação de **aglutinação (splitting off)** de um par de arestas (arcos) $e = [u, s], f = [s, t]$, onde $e \neq f$, consiste em substituir e e f por uma aresta (um arco) $[u, t]$. Eventualmente, pode-se ter $u = t$ e nesse caso $[u, t]$ será uma laço. O grafo misto resultante da operação de aglutinação é denotado por M^{ef} . Note que esta operação é definida somente se e e f são arestas (respectivamente, arcos) e $[u, t]$ será uma aresta (respectivamente, um arco). Conforme o caso, iremos nos referir a aglutinações não-orientados ou orientados. Veja um exemplo na Figura 6.1.

Figura 6.1: (a) Um grafo M , (b) o grafo M^{ef} , e (c) o grafo M^{ab}

É fácil ver que uma operação de aglutinação nunca aumenta a aresta-conexidade local entre dois vértices (mas pode diminuir). Os teoremas de aglutinação que iremos estudar mostram que em certos grafos a aresta-conexidade local pode ser preservada através de uma escolha apropriada de arestas (arcos) a serem aglutinadas(os).

6.2 Aumentações com arestas

Vários resultados são conhecidos sobre o PAAC no caso em que M é não-orientado. Quando $r \equiv 1$ o PAAC com custos reduz-se ao problema da árvore geradora de custo mínimo.

Para $r \equiv 2$ o PAAC foi resolvido por Eswaran e Tarjan [1976] e independentemente por Plesnik [1976]. Eswaran e Tarjan desenvolveram um algoritmo linear para esse problema enquanto o artigo de Plesnik é o primeiro no qual aparece a idéia de aglutinação. Já neste caso a versão com custos é $\mathcal{NP}$ -difícil.

O caso $r \equiv k$ para um inteiro $k \geq 2$ foi resolvido por Watanabe e Nakamura [1987]. O seguinte teorema, devido a esses autores, mostra que uma aumentoção k -aresta-conexa de um grafo G pode ser obtida por uma seqüência de supergrafos.

Teorema 6.2.1 (Watanabe e Nakamura, 1987) *Seja G um grafo não-orientado com aresta-conexidade igual a p . Então existe uma seqüência $G = G_p, G_{p+1}, G_{p+2}, \dots$ de grafos não-orientados tal que para cada $i \geq p$, G_{i+1} é um supergrafo de G_i e G_i é uma aumentoção ótima i -aresta-conexa de G .*

Watanabe e Nakamura também mostraram como obter uma tal seqüência em tempo polinomial.

Frank [1992] obteve outro algoritmo polinomial para o caso $r \equiv k$. Uma das idéias básicas do algoritmo, sugerida por Plesnik, é a técnica de aglutinação. Na verdade, Frank resolveu um caso mais geral no qual r é uma função demanda simétrica arbitrária.

Bang-Jensen, Frank e Jackson [1993] resolveram o PAAC quando M é misto e r é uma função demanda não-uniforme com determinadas propriedades. O resultado obtido por eles generaliza os resultados mencionados acima (com exceção do Teorema 6.2.1). Como veremos, esse resultado pode ser demonstrado utilizando-se de um teorema sobre aglutinação. Cabe aqui ressaltar que a idéia da demonstração já havia aparecido em Frank [1992] para o caso em que M é não-orientado e r é uma função demanda simétrica arbitrária.

As provas das seguintes proposições — que serão utilizadas mais tarde — podem ser feitas usando simples argumento de contagem. Vamos deixá-las a cargo do leitor.

Proposição 6.2.2 *Seja $M = D \sqcup G$ um grafo misto. Então para quaisquer subconjuntos X, Y de vértices de M temos que*

$$\rho_M(X) + \rho_M(Y) = \rho_M(X \cap Y) + \rho_M(X \cup Y) + d_D(X, Y) + 2d_G(X, Y). \quad (6.1)$$

Proposição 6.2.3 *Seja $M = D \sqcup G$ um grafo misto e sejam X, Y subconjuntos de vértices de M . Se $\rho_D(X \cap Y) = \delta_D(X \cap Y)$ ou $\rho_D(X \cup Y) = \delta_D(X \cup Y)$ então*

$$\beta_M(X) + \beta_M(Y) \geq \beta_M(X - Y) + \beta_M(Y - X) + \bar{d}_D(X, Y) + 2\bar{d}_G(X, Y). \quad (6.2)$$

Agora iremos descrever o resultado obtido por Bang-Jensen, Frank e Jackson [1993] mencionado anteriormente.

No que segue vamos supor que $M = (V, E, A)$ é um grafo misto composto pelo digrafo D e pelo grafo não-orientado G . Seja

$$T(M) := \{x \in V : \rho_M(x) \neq \delta_M(x)\}, \quad (6.3)$$

isto é, $T(M)$ é o conjunto dos vértices não-balanceados de M . Note que $T(M) = T(D)$. Além disso, como $\rho_M(T(M)) = \delta_M(T(M))$, $T(M)$ não pode ser um conjunto com um único vértice.

Sejam $r : V \times V \rightarrow \mathbb{Z}_+$ uma função simétrica e $k \geq 2$ um inteiro satisfazendo as seguintes condições:

$$\begin{aligned} r(x, y) = r(y, x) &\leq k \text{ para todo } x, y \in V \\ r(x, y) &= k \text{ para todo } x, y \in T(M). \end{aligned} \quad (6.4)$$

O resultado de Bang-Jensen, Frank e Jackson “fornece” um algoritmo polinomial para o PAAC no caso particular em que a função demanda r satisfaz (6.4). De agora em diante, ao nos referirmos ao PAAC vamos supor que r satisfaz as condições em (6.4). Para podermos descrever esse resultado bem como o algoritmo precisaremos de algumas definições preliminares e alguns resultados que veremos a seguir.

Em relação a função r definida acima, considere a seguinte função R definida sobre os subconjuntos de V :

$$R(X) = \begin{cases} 0 & \text{se } X = \emptyset \text{ ou } X = V, \\ \max\{r(x, y) : x, y \in V, X \text{ separa } x \text{ e } y\} & \text{se } X \subset V \text{ e } X \neq \emptyset. \end{cases}$$

Claramente, $R(X) = R(V - X)$ para todo $X \subseteq V$.

Lema 6.2.4 *Para quaisquer $X, Y \subseteq V$ ao menos uma das seguintes desigualdades é válida:*

$$R(X) + R(Y) \leq R(X \cap Y) + R(X \cup Y), \quad (6.5)$$

$$R(X) + R(Y) \leq R(X - Y) + R(Y - X). \quad (6.6)$$

Prova: Inicialmente observe que se substituirmos X por $V - X$ (ou Y por $V - Y$) então cada uma das desigualdades transforma-se na outra. Seja (z, z') um par que maximiza a função r restrita aos pares que são separados por X ou por Y . Por simetria podemos supor que $z \in X$ e $z' \in V - X$. Substituindo-se Y por $V - Y$ caso seja necessário, podemos supor também que $z \notin Y$.

Se $z' \in Y$ então $r(z, z') = R(X) = R(Y) = R(X - Y) = R(Y - X)$ e portanto vale a segunda desigualdade. Se $z' \notin Y$ então $r(z, z') = R(X) = R(X \cup Y) = R(X - Y)$. Claramente, $R(Y) \leq R(X \cap Y)$ ou $R(Y) \leq R(Y - X)$. De acordo com o caso, vale a primeira ou a segunda desigualdade. ■

É interessante observar que a Proposição 6.2.4 é válida para qualquer função simétrica r (não satisfazendo necessariamente a condição (6.4)).

Para cada $X \subseteq V$ defina

$$\varepsilon(X) := \beta_M(X) - R(X).$$

Lema 6.2.5 *Para quaisquer $X, Y \subseteq V$ ao menos uma das seguintes desigualdades é válida:*

$$\varepsilon(X) + \varepsilon(Y) \geq \varepsilon(X \cap Y) + \varepsilon(X \cup Y) + 2d_G(X, Y) + d_D(X, Y), \quad (6.7)$$

$$\varepsilon(X) + \varepsilon(Y) \geq \varepsilon(X - Y) + \varepsilon(Y - X) + 2\bar{d}_G(X, Y) + \bar{d}_D(X, Y). \quad (6.8)$$

Prova: Como $\varepsilon(X) = \varepsilon(V - X)$, cada uma das desigualdades transforma-se na outra ao substituirmos X por $V - X$. Portanto podemos supor que $\beta_M(X) = \rho_M(X) \leq \delta_M(X)$ e que $\beta_M(Y) = \rho_M(Y) \leq \delta_M(Y)$.

Se R satisfaz (6.5) então subtraindo (6.5) de (6.1) obtemos a desigualdade (6.7). Suponha agora que R não satisfaz (6.5). Então ao menos um dos conjuntos $T(M) \cap X \cap Y$ e $T(M) - (X \cup Y)$ é vazio, pois caso contrário, a definição de R e (6.4) implicariam que $R(X) = R(Y) = R(X \cap Y) = R(X \cup Y) = k$ e valeria (6.5). Portanto, vale (6.2). Por outro lado, pelo Lema 6.2.4, R satisfaz (6.6). Subtraindo (6.6) de (6.2) obtemos a desigualdade (6.8). ■

A proposição seguinte mostra uma relação existente entre λ , r , β_M e R .

Proposição 6.2.6 *Sejam $M = (V, E, A)$ um grafo misto e $r : V \times V \rightarrow \mathbb{Z}_+$ uma função demanda simétrica. Então*

$$\lambda(x, y; M) \geq r(x, y) \text{ para todo } x, y \in V$$

se e somente se

$$\beta_M(X) \geq R(X) \text{ para todo } X \subseteq V.$$

Prova: Se $\lambda(x, y; M) \geq r(x, y)$ para todo $x, y \in V$, então para qualquer $x\bar{y}$ -conjunto $X \subset V$, temos que $\delta_M(X) \geq \lambda(x, y; M) \geq r(x, y)$. Portanto, $\delta_M(X) \geq R(X)$ para todo $X \subseteq V$. A desigualdade $\rho_M(X) \geq R(X)$ segue de modo análogo.

Reciprocamente, suponha que $\beta_M(X) \geq R(X)$ para todo $X \subseteq V$. Sejam $x, y \in V$. Pelo Teorema de Menger existe um $x\bar{y}$ -conjunto X tal que $\lambda(x, y; M) = \delta_M(X)$. Portanto $\lambda(x, y; M) = \delta_M(X) \geq R(X) \geq r(x, y)$. ■

A proposição acima mostra que a condição “ $\beta_M(X) \geq R(X)$ para todo $X \subseteq V$ ” pode ser verificada em tempo polinomial, pois para cada par x, y de vértices de M , podemos calcular $\lambda(x, y; M)$ usando um algoritmo de fluxo máximo. Vamos denotar por FluMax um tal algoritmo. Na demonstração do resultado principal ficará clara a utilidade dessa caracterização.

A seguir descrevemos um resultado sobre aglutinação que será utilizado para resolver o PAAC. Como a demonstração deste teorema é bastante complexa, iremos deixá-la para o final desta seção. Inicialmente vamos apenas indicar como ele será utilizado para resolver o PAAC.

Seja $M = (V + s, E', A')$ um grafo misto. Suponha que $\lambda(x, y; M) \geq k$ para todo $x, y \in T(M)$, para algum inteiro $k \geq 2$ (não necessariamente o mesmo de (6.4)). Defina a seguinte função demanda $r_M : (V + s) \times (V + s) \rightarrow \mathbb{Z}_+$:

$$r_M(x, y) = \begin{cases} \min\{k, \lambda(x, y; M)\} & \text{se } x, y \in V; \\ 0 & \text{se } s \in \{x, y\}. \end{cases}$$

Observe que r_M depende de M , de k e de s .

Teorema 6.2.7 (Bang-Jensen, Frank e Jackson, 1993) *Seja $M = (V + s, E, A)$ um grafo misto tal que $d_M(s)$ é par. Suponha que não exista nenhum arco incidente a s e que não exista nenhuma aresta de corte incidente a s . Seja $k \geq 2$ um inteiro tal que $\lambda(x, y; M) \geq k$ para todo $x, y \in T(M)$. Então as arestas incidentes a s podem ser agrupadas em $d_M(s)/2$ pares disjuntos de modo que*

$$\lambda(x, y; M^*) \geq r_M(x, y) \text{ para todo } x, y \in V,$$

onde M^* denota o grafo misto obtido a partir de M pelas sucessivas aglutinações de todos esses pares.

O enunciado do teorema acima é um tanto complicado devido à função r_M e à primeira vista não parece ter nenhuma relação com o PAAC. Veremos, no entanto, que a idéia básica para resolver o PAAC se apóia no Teorema 6.2.7.

Para isso, inicialmente suponha que queremos resolver o seguinte problema: *dados um grafo misto $M = (V, E, A)$, uma função demanda r satisfazendo (6.4) e um inteiro $\gamma \geq 0$, decidir se existe uma aumento viável de M que utiliza no máximo γ novas arestas.*

A seguir indicamos como proceder para resolver esse problema. Acrescente um novo vértice s a M e algumas arestas sv para cada $v \in V$ de modo que o grafo misto resultante M' satisfaça a seguinte propriedade:

$$\beta_{M'}(X) \geq R(X) \text{ para todo } X \subseteq V.$$

Pelo Teorema de Menger, para cada par $x, y \in V$ existe um $x\bar{y}$ -conjunto X tal que $\lambda(x, y; M') = \delta_{M'}(X)$ e portanto, $\lambda(x, y; M') = \delta_{M'}(X) \geq R(X) \geq r(x, y)$. Logo, no grafo misto M' temos que

$$\lambda(x, y; M') \geq r(x, y) \text{ para todo } x, y \in V. \quad (6.9)$$

Em particular, $\lambda(x, y; M') \geq k$ para todo $x, y \in T(M') (= T(M))$.

Se não existir nenhuma aresta de corte incidente a s em M' então podemos aplicar o Teorema 6.2.7 ao grafo M' . Note que a condição “ $d_{M'}(s)$ par” sempre pode ser satisfeita bastando acrescentar mais uma aresta a M' , se necessário.

Suponha que $d_{M'}(s) = 2\gamma$. Observe que $r_{M'}(x, y) \geq r(x, y)$ para todo $x, y \in V$, pois se existissem $u, v \in V$ tais que $r_{M'}(u, v) < r(u, v)$ então pelo fato de $r(u, v) \leq k$ teríamos que $r(u, v) > \lambda(u, v; M')$ o que contraria (6.9). Portanto, o grafo misto M^* (a menos do vértice s) obtido pela aplicação do Teorema 6.2.7 a M' satisfaz:

$$\lambda(x, y; M^*) \geq r_{M'}(x, y) \geq r(x, y) \text{ para todo } x, y \in V,$$

ou seja, M^* é uma aumento viável de M com exatamente γ novas arestas.

As idéias acima mencionadas constituem a essência do algoritmo que descreveremos para o PAAC. A necessidade de não haver arestas de corte incidentes a s no grafo M' , para podermos aplicar o Teorema 6.2.7, justifica a seguinte definição.

Diremos que um componente C de M é **marginal** (em relação a r) se

$$\begin{aligned} r(u, v) &\leq \lambda(u, v; M) && \text{para todo } u, v \in C \\ r(u, v) &\leq \lambda(u, v; M) + 1 && \text{para todo } u, v \text{ separado por } C. \end{aligned}$$

Em outras palavras, C é marginal se não é necessário aumentar a aresta-conexidade local entre vértices de C , e o aumento de aresta-conexidade local entre um vértice de C e outro fora de C deve ser de 0 ou de 1. Como mostraremos adiante, é possível acrescentar uma única aresta incidindo em C para satisfazer as demandas entre um vértice de C e outro fora de C . Claramente, essa será uma aresta de corte.

Vamos mostrar agora que o PAAC pode ser reduzido ao caso especial no qual M não possui componentes marginais em relação a r . Através dessa redução poderemos utilizar o método de aglutinação para resolver o PAAC.

Para isso, vamos supor, sem perda de generalidade, que r satisfaz as seguintes propriedades.

$$\text{Se } \lambda(u, v; M) \geq 1 \text{ então } r(u, v) \geq 1, \quad (6.10)$$

$$\text{Se } r(u, w) \geq 1 \text{ e } r(w, v) \geq 1 \text{ então } r(u, v) \geq 1. \quad (6.11)$$

O lema seguinte mostra que tais restrições podem ser assumidas (em relação a r), sem com isso causar perda de generalidade da função r . Veja a justificativa após a demonstração do lema.

Lema 6.2.8 *Suponha que M^* é uma aumentação viável de M e sejam $u, v \in V$. Então $\lambda(u, v; M^*) \geq 1$ se e somente se $\lambda(v, u; M^*) \geq 1$.*

Prova: Observe que os componentes de $M - T(M)$ são fortemente conexos. Além disso, $\lambda(u, v; M^*) \geq r(u, v) = k \geq 2$, para todo $u, v \in T(M)$. O resultado segue. ■

Note que, se existem $x, y \in V$ tais que $\lambda(x, y; M) \geq 1$, então pelo lema anterior, $\lambda(x, y; M^*) \geq 1$ e $\lambda(y, x; M^*) \geq 1$. Isso mostra que mesmo que $r(x, y) = r(y, x) = 0$ podemos modificar a demanda r de modo que $r(x, y) = r(y, x) = 1$ e continuaremos com um problema de aumentação equivalente (de fato, ambos os problemas têm o mesmo espaço de soluções viáveis).

O próximo teorema mostra como eliminar um componente marginal. Por simplicidade, não faremos distinção entre um componente C e seu conjunto de vértices.

Teorema 6.2.9 *Suponha que C seja um componente marginal de M e seja $M_1 = M - C$. Denote por r_1 a restrição da função demanda r a $V - C$. Então $\gamma(M, r) = \gamma(M_1, r_1) + R(C)$.*

Prova: Sejam $\gamma = \gamma(M, r)$ e $\gamma_1 = \gamma(M_1, r_1)$.

Vamos mostrar primeiramente que $\gamma \leq \gamma_1 + R(C)$. Seja F uma solução ótima do PAAC para M_1 em relação a r_1 . Se $R(C) = 0$ então claramente $M' = M + F$ é uma augmentação viável para M em relação a r . Portanto, $\gamma \leq \gamma_1 + R(C)$.

Suponha que $R(C) = 1$. Sejam $a \in C$, $b \in V - C$ tais que $r(a, b) = 1$. Afirmamos que $M' = M + F + ab$ é uma augmentação viável de M em relação a r .

Suponha por absurdo que isto não ocorra. Então existem $s, t \in V$ tais que $r(s, t) > \lambda(s, t, M')$. Como C é marginal e $M + F$ é uma augmentação ótima de M_1 em relação a r_1 , temos que exatamente um desses vértices, digamos s , está em C e t está em $V - C$. Então $r(s, t) = 1$ e $\lambda(s, t, M') = 0$, pois C é marginal.

Vamos mostrar que C é fortemente conexo. Como C é um componente marginal e $k \geq 2$, um dos conjuntos C e $V - C$ tem que ser disjunto de $T(M)$. Temos então dois casos:

1. $T(M) \subseteq V - C$: ou seja, $\rho_M(v) = \delta_M(v) > 0$ para todo $v \in C$. Portanto, C é fortemente conexo.
2. $T(M) \subseteq C$: como C é marginal, $\lambda(u, v; M) \geq k \geq 2$ para todo $u, v \in T(M)$. É fácil ver que C é fortemente conexo.

Logo, em qualquer dos casos C é fortemente conexo.

Como $\lambda(s, t, M') = 0$, temos que $\lambda(b, t, M') = 0 = r_1(b, t) = r(b, t)$. Se $s = a$ então como $r(s, t) = 1$ e $r(a, b) = 1$, por (6.11) segue que $r(b, t) \geq 1$, o que leva a uma contradição. Se $s \neq a$ então por (6.10) temos que $r(a, s) = 1$, e como $r(s, t) = 1$, usando novamente (6.11) segue que $r(b, t) \geq 1$, o que é uma contradição.

Logo, não existem tais vértices s e t e M' é uma augmentação viável de M em relação a r . Portanto, $\gamma \leq |F| + 1 = \gamma_1 + R(C)$.

Vamos mostrar agora que $\gamma \geq \gamma_1 + R(C)$. Seja M_0 o grafo misto obtido a partir de M contraindo C a um único vértice v_C . Defina $r_0(u, v) = r(u, v)$ se $u, v \in V - C$ e $r_0(v_C, v) = r_0(v, v_C) = R(C)$ para $v \in V - C$. Seja $\gamma_0 = \gamma(M_0, r_0)$. Obviamente, $\gamma_0 \leq \gamma$.

Seja $M'_0 = M_0 + F$ uma augmentação ótima de M_0 em relação a r_0 . Suponha ainda que o número t de arestas de F que incidem em v_C seja o menor possível.

Se $t = 0$ então $R(C) = 0$ e as arestas de F possuem extremos em $V - C$. Portanto, $\gamma_1 \leq |F| = \gamma_0 \leq \gamma = \gamma - R(C)$. Se $t = 1$ então pela minimalidade de F , $R(C) = 1$. Seja $f \in F$ a aresta incidente a v_C . Então $M_1 + F - f$ é uma augmentação viável de M_1 em relação a r_1 . Portanto, $\gamma_1 \leq |F| - 1 = \gamma_0 - 1 \leq \gamma - R(C)$.

Finalmente, suponha que $t \geq 2$ e sejam $v_C u_1, \dots, v_C u_t$ as arestas de F incidentes a v_C . Considere o conjunto F' obtido a partir de F substituindo cada $v_C u_i$ por $u_1 u_i$, para

$2 \leq i \leq t$. Não é difícil ver que $M_0 + F'$ é uma aumentoção ótima de M_0 , contrariando a escolha de t . ■

Podemos então reduzir o PAAC para o caso em que M não possui componentes marginais procedendo da seguinte forma. Se a função r não satisfaz as condições (6.10) e (6.11) então ela pode ser modificada facilmente para satisfazê-los. Pelo Lema 6.2.8, isto não afeta a solução do PAAC. Se C for um componente marginal então resolva o PAAC com entradas M_1 e r_1 , mencionados no Teorema 6.2.9. A seguir estenda a solução obtida para uma solução do PAAC original, como descrito na primeira parte da prova do Teorema 6.2.9. Através deste método os componentes marginais são eliminados um por um.

O Teorema 6.2.9 generaliza um resultado obtido por Frank [1992] para eliminação de componentes marginais, no caso em que M é um grafo não-orientado. Bang-Jensen, Frank e Jackson afirmam no seu artigo, sem fornecer maiores detalhes que esse método pode ser facilmente estendido quando M é misto. Os passos descritos acima juntamente com o Teorema 6.2.9 fornecem os detalhes omitidos no artigo desses autores.

Agora mostraremos como resolver o PAAC quando M não possui componentes marginais em relação a r .

Teorema 6.2.10 (Bang-Jensen, Frank e Jackson, 1993) *Sejam M um grafo misto, $k \geq 2$ e $\gamma \geq 0$ inteiros, e r uma função demanda satisfazendo (6.4). Suponha que M não possui componentes marginais. Então M pode ser estendido a um grafo misto M^* acrescentando-se γ novas arestas de modo que*

$$\lambda(x, y; M^*) \geq r(x, y) \text{ para todo } x, y \in V \quad (6.12)$$

se e somente se

$$\sum_{i=1}^t (R(X_i) - \beta_M(X_i)) \leq 2\gamma \quad (6.13)$$

para toda sub-partição $\{X_1, \dots, X_t\}$ de V .

Prova: Podemos supor sem perda de generalidade que M é um grafo orientado.

Necessidade: Seja M^* uma aumentoção de M com exatamente γ novas arestas.

Se M^* satisfaz (6.12) então pelo Lema 6.2.6 existem pelo menos $R(X) - \beta_M(X)$ novas arestas entre X e $V - X$, para todo $X \subseteq V$. Portanto, para qualquer sub-partição $\{X_1, \dots, X_t\}$ temos que $\gamma \geq \sum_{i=1}^t (R(X_i) - \beta_M(X_i))$.

Suficiência: Seja $M' = (V + s, E', A)$ o grafo misto obtido a partir de M acrescentando um novo vértice s e arestas múltiplas sv para todo $v \in V$ de modo que M' satisfaça

$$\beta_{M'}(X) \geq R(X) \text{ para todo } X \subseteq V. \quad (6.14)$$

Claramente, isso pode ser feito acrescentando k arestas múltiplas entre s e v , para cada vértice $v \in V$. Suponha que M' é minimal com essa propriedade, isto é. se removermos uma aresta de M' então o grafo misto resultante viola (6.14). Suponha ainda que $M' = D \sqcup G'$.

Seja $\varepsilon(X) = \beta_{M'}(X) - R(X)$. Pelo Lema 6.2.16, $\varepsilon(X) \geq 0$, para todo $X \subseteq V$. Diremos que um subconjunto não vazio $X \subseteq V$ é **R-justo** se $\varepsilon(X) = 0$.

Seja $S := \{v \in V : sv \in E'\}$. Como nenhuma aresta de M' pode ser removida sem violar (6.14), cada aresta sv está contida em algum conjunto R-justo. Logo, existe uma família $\mathcal{F}$ de conjuntos R-justos cuja união contém S . Escolha $\mathcal{F} = \{X_1, \dots, X_t\}$ de modo $\sum |X_i|$ seja mínima.

Vamos provar agora que $\mathcal{F}$ é uma sub-partição de V . Suponha por absurdo que existam $X, Y \in \mathcal{F}$ tais que $X \cap Y \neq \emptyset$. Pelo Lema 6.2.5 pelo menos uma das seguintes desigualdades é válida:

$$0 = \varepsilon(X) + \varepsilon(Y) \geq \varepsilon(X \cap Y) + \varepsilon(X \cup Y) \geq 0, \quad (6.15)$$

$$0 = \varepsilon(X) + \varepsilon(Y) \geq \varepsilon(X - Y) + \varepsilon(Y - X) \geq 0. \quad (6.16)$$

Se vale (6.15) então $\varepsilon(X \cup Y) = 0$, ou seja, $X \cup Y$ é R-justo. Como $X \cap Y \neq \emptyset$ então $|X \cup Y| < |X| + |Y|$, o que contraria a escolha de $\mathcal{F}$.

Se vale (6.16) então $\varepsilon(X - Y) = \varepsilon(Y - X) = 0$, ou seja, $X - Y$ e $Y - X$ são R-justos. Como $X \cap Y \neq \emptyset$ então $|X - Y| < |X|$ e $|Y - X| < |Y|$, o que contraria novamente a escolha de $\mathcal{F}$.

Logo, $\mathcal{F}$ é uma sub-partição de V .

Então usando (6.13) segue que

$$2\gamma \geq \sum_{i=1}^t (R(X_i) - \beta_M(X_i)) = \sum_{i=1}^t (R(X_i) - \beta_{M'}(X_i)) + d_{M'}(s) = 0 + d_{M'}(s),$$

ou seja, $d_M(s) \leq 2\gamma$.

Acrescentando algumas novas arestas, se necessário, podemos supor que $d_{M'}(s) = 2\gamma$. Afirmamos que não existe aresta de corte incidente a s em M' . Suponha que $e = st$ seja uma aresta de corte. Seja C o componente de $M' - e$ que contém t . Como e é a única aresta de M' saindo de C , claramente C é um componente marginal, o que contraria a hipótese.

Pela Proposição 6.2.6, $\lambda(x, y; M) \geq r(x, y)$ para todo $x, y \in V$. Em particular, $\lambda(x, y; M) \geq k$ para todo $x, y \in T(M)$. Aplique o Teorema 6.2.7 a M' e remova o vértice s . Chame o grafo misto resultante de M^* .

Como $r_M(x, y) \geq r(x, y)$ para todo $x, y \in V$, M^* satisfaz (6.12). ■

Um corolário imediato é a seguinte desigualdade mini-max.

Corolário 6.2.11 *Sejam $M = (V, E, A)$ um grafo misto e r uma função demanda para M tal que $\lambda(x, y; M) \geq r(x, y)$ para todo $x, y \in T(M)$. Suponha que M não possui componentes marginais em relação a r . Então*

$$\gamma(M, r) = \max \left\{ \left\lceil \sum_{i=1}^t (R(X_i) - \beta_M(X_i)) / 2 \right\rceil : \{X_1, \dots, X_t\} \text{ é uma sub-partição de } V \right\}.$$

A seguir descrevemos o algoritmo para o PAAC que está implícito na demonstração do Teorema 6.2.10.

Algoritmo AAC

Entrada: um grafo misto $M = (V, E, A)$,
 uma função demanda r satisfazendo (6.4) tal que
 M não possui componentes marginais em relação a r .
Saída: uma solução ótima F do PAAC com entradas M e r .

Acrescente um novo vértice s a M ;

Para cada $v \in V$ acrescente k arestas paralelas sv a M ;

Seja M' o grafo resultante;

Remova uma a uma as novas arestas de M' até que não seja mais possível fazê-lo sem violar (6.14);

Se $d_{M'}(s)$ for ímpar então acrescente uma nova aresta sv a M' ;

Encontre um agrupamento de $d_{M'}(s)/2$ pares disjuntos de arestas incidentes a s que satisfazem o Teorema 6.2.7;

Faça a aglutinação de cada um desses pares e seja F o conjunto das arestas do grafo resultante que não pertencem a M ;

Devolva F ;

A demonstração do Teorema 6.2.7 mostra claramente que o conjunto F devolvido pelo algoritmo AAC é uma solução ótima do PAAC. Quando M possuir componentes marginais em relação a r , podemos determinar componentes $C_1, C_2, \dots, C_p$ de M tais que:

- C_j é um componente marginal de $M_j := M - \bigcup_{i=1}^{j-1} C_i$ em relação a função r restrita a M_j , para $1 \leq j \leq p$, e
- $M' := M - \bigcup_{i=1}^p C_i$ não possui componentes marginais em relação a r' , onde r' é a restrição de r a M' .

Assim, utilizando o algoritmo AAC para M' e r' obtemos uma solução ótima F do PAAC com entradas M' e r' . Procedendo como na demonstração do Teorema 6.2.9, acrescentando sucessivamente $R(C_i)$ arestas (0 ou 1) a F obtemos uma solução ótima do PAAC com entradas M e r .

Segundo Bang-Jensen, Frank e Jackson, a fase de remoção das arestas pode ser feita em um grafo com n vértices executando-se $2n^2$ chamadas de um algoritmo FluMax, e a fase de aglutinação não exige mais do que n^3 chamadas de um tal algoritmo. Usando um algoritmo FluMax de complexidade $O(n^3)$, resulta que a complexidade total do Algoritmo AAC é $O(n^6)$.

A seguir descrevemos alguns resultados não triviais decorrentes do Teorema 6.2.10. É interessante observar que o Teorema 6.2.10 não é válido se M possui componentes marginais. Tome por exemplo o grafo sem arestas com 4 vértices e $r \equiv 1$.

Quando M é não orientado então $T(M) = \emptyset$ e r pode ser uma função demanda simétrica arbitrária. Portanto, o Teorema 6.2.10 é uma generalização do seguinte resultado:

Corolário 6.2.12 (Frank, 1992) *Sejam $G = (V, E)$ um grafo não-orientado, $\gamma \geq 0$ um inteiro e r uma função demanda simétrica. Suponha que G não possui componentes marginais. Então G pode ser estendido a um grafo não-orientado G^* acrescentando-se γ novas arestas de modo que $\lambda(x, y; G^*) \geq r(x, y)$ para todo $x, y \in V$ se e somente se*

$$\sum (R(X_i) - d_G(X_i)) \leq 2\gamma$$

para toda sub-partição $\{X_1, \dots, X_t\}$ de V .

Outro caso especial ocorre quando $r \equiv k$.

Corolário 6.2.13 *Sejam $M = (V, E, A)$ um grafo misto e $k \geq 2$, $\gamma \geq 0$ inteiros. Então M pode ser estendido a um grafo misto k -aresta-conexo acrescentando-se γ novas arestas se e somente se*

$$\sum (k - \beta_M(X_i)) \leq 2\gamma$$

para toda sub-partição $\{X_1, \dots, X_t\}$ de V .

É interessante observar que o Corolário 6.2.13 não vale para $k = 1$. Um exemplo disso é o grafo M indicado na Figura 6.2. Tome $\gamma = 2$. É fácil ver que são necessárias 3 arestas para estender M a um grafo 1-aresta-conexo (fortemente conexo), no entanto, para $k = 1$ temos $\sum(k - \beta_M(X_i)) \leq 4 = 2\gamma$.

Figura 6.2: Um grafo contra-exemplo para $k = 1$.

Entretanto, pode-se demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 6.2.14 (Bang-Jensen, Frank e Jackson, 1993) *Seja M um grafo misto conexo. Então M pode ser estendido a um grafo misto fortemente conexo acrescentando-se γ novas arestas se e somente se toda sub-partição $\mathcal{F} = \{X_1, \dots, X_\gamma\}$ contém membros (não necessariamente distintos) X e Y tais que $\rho_M(X) > 0$ e $\delta_M(Y) > 0$.* ■

Como havíamos mencionado, encerraremos esta seção com a demonstração do Teorema 6.2.7.

Seja $M = (V + s, E, A)$ um grafo misto tal que $\rho_M(s) = \delta_M(s)$, ou seja, s é balanceado. Seja $k \geq 2$ um inteiro tal que:

$$\lambda(x, y; M) \geq k \text{ para todo } x, y \in T(M). \quad (6.17)$$

Observe que se $\delta_M(X) < k$ para algum $X \subset V$ então por (6.17) um dos conjuntos X e $V - X$ tem que ser disjunto de $T(M)$, o que implica que $\rho_M(X) = \delta_M(X)$.

Considere novamente a função demanda r_M sobre pares de vértices de $V + s$:

$$r_M(x, y) = \begin{cases} \min\{k, \lambda(x, y; M)\} & \text{se } x, y \in V; \\ 0 & \text{se } s \in \{x, y\}. \end{cases} \quad (6.18)$$

Lema 6.2.15 $r_M(x, y) = r_M(y, x)$ para quaisquer $x, y \in U$.

Prova: O resultado é óbvio se $\lambda(x, y; M) = \lambda(y, x; M)$ ou se $s \in \{x, y\}$. Suponha então que $x, y \in V$ e que $\lambda(x, y; M) < \lambda(y, x; M)$.

Pelo Teorema de Menger, existe um $x\bar{y}$ -conjunto X tal que $\delta_M(X) = \lambda(x, y; M)$. Então não podemos ter $\lambda(x, y; M) < k$ pois senão ou X ou $U - X$ é disjunto de $T(M)$. Mas então $\rho_M(X) = \delta_M(X)$ e portanto, $\lambda(x, y; M) = \delta_M(X) = \rho_M(X) \geq \lambda(y, x; M)$, o que leva a uma contradição.

Logo, $k \leq \lambda(x, y; M) < \lambda(y, x; M)$, ou seja, $r_M(x, y) = k = r_M(y, x)$. ■

O lema anterior mostra que (6.4) é válida com $r = r_M$.

Seja $R_M(X) = \max(r_M(x, y) : X \text{ separa } x \text{ e } y)$. Observe que $R_M(X) = R_M(V - X)$ para $X \subseteq V$ e que o Lema 6.2.4 é válido com $R = R_M$.

Lema 6.2.16 Para qualquer subconjunto $X \subseteq V$ separando vértices $x, y \in V$

$$\beta_M(X) \geq R_M(X) \geq r_M(x, y). \quad (6.19)$$

Ainda, se $\lambda(x, y; M) \leq k$ então existe um subconjunto $X_0 \subseteq V$ separando x e y tal que

$$\beta_M(X_0) = R_M(X_0) = r_M(x, y). \quad (6.20)$$

Prova: Podemos supor sem perda de generalidade que $x \in X$ e $y \in V - X$. Então $r_M(x, y) \leq \lambda(x, y; M) \leq \delta_M(X)$ e $r_M(y, x) \leq \lambda(y, x; M) \leq \rho_M(X)$. Pelo Lema 6.2.15 segue que $\beta_M(X) \geq r_M(x, y)$. Juntando a isto a definição de $R_M(X)$ obtemos (6.19).

Se $\lambda(x, y; M) \leq k$ então $\lambda(x, y; M) = r_M(x, y)$. Pelo Teorema de Menger, existe um subconjunto X_0 separando x e y tal que $\beta_M(X_0) = \lambda(x, y; M)$, de onde segue o resultado. ■

Seja $\varepsilon_M(X) = \beta_M(X) - R_M(X)$. Observe que o Lema 6.2.5 é válido com $\varepsilon(X) = \varepsilon_M(X)$ e pelo Lema 6.2.16 $\varepsilon_M(X) \geq 0$ para todo $X \subseteq V$. Vamos chamar um subconjunto não vazio $X \subseteq V$ de **justo** (respectivamente **crítico**) se $\varepsilon_M(X) = 0$ (respectivamente $\varepsilon_M(X) \leq 1$).

Como já mencionamos, após uma operação de aglutinação a aresta-conexidade local entre alguns vértices pode diminuir. Informalmente falando, os resultados sobre aglutinação mostram que dado um grafo misto $M = (V + s, E, A)$ existe um par apropriado de arestas (arcos) incidentes a s cuja aglutinação preserva a aresta-conexidade local entre vértices de V .

Mader [1978] demonstrou o seguinte resultado sobre aglutinações não-orientadas.

Teorema 6.2.17 (Mader, 1978) *Seja $G = (V + s, E)$ um grafo não-orientado conexo tal que $0 < d_G(s) \neq 3$ e não existe aresta de corte incidente a s . Então existe um par de arestas $e = su$ e $f = st$ tal que $\lambda(x, y; G^{ef}) = \lambda(x, y; G)$ para todo $x, y \in V$.*

Exemplo: Considere o grafo $G = (V + s, E)$ indicado na Figura 6.3.

Figura 6.3: As arestas e e f são tais que $\lambda(x, y; G^{ef}) = \lambda(x, y; G)$ para todo $x, y \in V$.

Um dos principais resultados de Bang-Jensen, Frank e Jackson [1993] é uma extensão do Teorema de Mader para grafos mistos.

No que segue ainda iremos supor que $M = (V + s, E, A)$ é um grafo misto composto de um digrafo $D = (V + s, A)$ e um grafo não-orientado $G = (V + s, E)$.

Teorema 6.2.18 (Bang-Jensen, Frank e Jackson, 1993) *Seja $M = (V + s, E, A)$ um grafo misto. Suponha que não existe nenhum arco incidente a s , $0 < d_M(s) \neq 3$, e não existe nenhuma aresta de corte incidente a s . Seja $k \geq 2$ um inteiro tal que $\lambda(x, y; M) \geq k$ para todo $x, y \in T(M)$. Então existe um par de arestas $e = su$, $f = st$ tal que*

$$\lambda(x, y; M^{ef}) \geq r_M(x, y) \text{ para todo } x, y \in V. \quad (6.21)$$

Chamaremos um par $\{e, f\}$ satisfazendo (6.21) de **aglutináveis** (em M). A condição (6.21) é equivalente a

$$r_{M^{ef}}(x, y) \geq r_M(x, y) \text{ para todo } x, y \in V. \quad (6.22)$$

Cabe aqui observar que sob as mesmas hipóteses do Teorema 6.2.18, em geral não é verdade que dada uma aresta $e = su$ existe uma aresta $f = st$ que satisfaz (6.21).

O próximo lema permite-nos realizar sucessivas aglutinações.

Lema 6.2.19 *Se $\{e, f\}$ é aglutinável em um grafo misto $M = (V + s, E, A)$ satisfazendo as hipóteses do Teorema 6.2.18, então não existe aresta de corte incidente a s em M^{ef} .*

Prova: Sejam x e y vértices adjacentes a s . Afirmamos que $\lambda(x, y; M) \geq 2$. Caso contrário, temos $\lambda(x, y; M) = 1$ pois $xs, ys \in E$. Pelo Teorema de Menger, existe um $x\bar{y}$ -conjunto $X \subset V$ tal que $\delta_M(X) = 1$. Como $d_G(X) \geq 1$ temos $d_G(X) = 1$ e $\delta_D(X) = 0$.

Seja h a única aresta de G com um extremo em X e o outro em $V + s - X$. Claramente, $h = xs$ ou $h = ys$. Como $k \geq 2$, por (6.17) ou X ou $V + s - X$ é disjunto de $T(M)$. Portanto, $\rho_D(X) = \delta_D(X) = 0$ mostrando que h é uma aresta de corte incidente a s , o que contraria a hipótese.

Logo, $\lambda(x, y; M) \geq 2$ e por (6.21) segue que $\lambda(x, y; M^{ef}) \geq 2$ para quaisquer vértices x, y adjacentes a s . ■

Abaixo enunciamos novamente o Teorema 6.2.7 e mostraremos que é equivalente ao Teorema 6.2.18.

Teorema 6.2.7 (Bang-Jensen, Frank e Jackson, 1993) *Seja $M = (V + s, E, A)$ um grafo misto tal que $d_M(s)$ é par. Suponha que não exista nenhum arco incidente a s e que não exista nenhuma aresta de corte incidente a s . Seja $k \geq 2$ um inteiro tal que $\lambda(x, y; M) \geq k$ para todo $x, y \in T(M)$. Então as arestas incidentes a s podem ser agrupadas em $d_M(s)/2$ pares disjuntos de modo que*

$$\lambda(x, y; M^*) \geq r_M(x, y) \text{ para todo } x, y \in V,$$

onde M^* denota o grafo misto obtido a partir de M pelas aglutinações de todos esses pares.

Observação 1: O Teorema 6.2.7 não vale para $k = 1$. Veja um exemplo na Figura 6.4. No grafo indicado não há meio de agrupar as arestas incidentes a s de modo que após as aglutinações o grafo misto resultante seja fortemente conexo.

Proposição 6.2.20 *Os Teoremas 6.2.18 e 6.2.7 são equivalentes.*

Prova: Suponha inicialmente que vale o Teorema 6.2.18. Pelo Lema 6.2.19, o Teorema 6.2.18 pode ser aplicado $d_M(s)/2$ vezes ao grafo misto M . O Teorema 6.2.7 segue de (6.22).

Figura 6.4: Grafo mencionado na Observação 1.

Reciprocamente, suponha que vale o Teorema 6.2.7. Se $d_M(s)$ for par então nada temos a provar (aglutinações não aumentam aresta-conexidade local). Suponha então que $d_M(s)$ é ímpar. Então $d_M(s) \geq 5$. Seja M' o grafo misto obtido a partir de M acrescentando um novo vértice x e três arestas múltiplas ligando x e s . Claramente, não existe aresta de corte incidente a s em M' e portanto o Teorema 6.2.7 aplica-se a M' . Como $d_M(s) \geq 5$, entre os $(d_M(s) + 3)/2$ pares aglutináveis em M' ao menos um par $\{e, f\}$ consiste de arestas originais de M . Claramente, $\{e, f\}$ é aglutinável em M . ■

Prova do Teorema 6.2.7.

Pelo Lema 6.2.19 basta provar que existe um par aglutinável em M . Podemos supor que qualquer aresta não-orientada de M é incidente a s (basta notar que as arestas não incidentes a s podem ser substituídas por um par de arcos reversos).

Suponha por absurdo que o teorema seja falso. Seja M um contra-exemplo com o menor número possível de vértices, arcos e arestas no qual toda aresta não-orientada de M é incidente a s . É claro que M é conexo. Observe ainda que para $X \subseteq V$ e arestas $e = su, f = st$ temos $\beta_{M \setminus f}(X) = \beta_M(X) - 2$ se $u, t \in X$; e $\beta_{M \setminus f}(X) = \beta_M(X)$, caso contrário.

Provaremos a seguir uma série de afirmações até chegarmos a uma contradição final. Como as provas destas afirmações são bastante técnicas, e algumas vezes um tanto longas, recomendamos que numa primeira leitura, o leitor não se detenha nessas provas e procure apenas acompanhar a linha de raciocínio da demonstração geral.

Afirmção 2 Um par $\{e = su, f = st\}$ é aglutinável em M se e somente se não existe conjunto crítico X contendo u e t .

Prova: Suponha que X é um conjunto crítico contendo u e t . Então $\beta_{M \setminus f}(X) + 2 =$

$\beta_M(X) \leq R_M(X) + 1$. Sejam $x \in X$ e $y \in V - X$ tais que $R_M(X) = r_M(x, y)$. Aplicando o Lema 6.2.16 a M^{ef} obtemos

$$r_{M^{ef}}(x, y) \leq \beta_{M^{ef}}(X) = \beta_M(X) - 2 \leq R_M(X) - 1 = r_M(x, y) - 1,$$

ou seja, $\{e, f\}$ não é aglutinável, uma contradição.

Reciprocamente, suponha que $\{e, f\}$ não é aglutinável. Então existem vértices $x, y \in V$ tais que $\lambda(x, y; M^{ef}) < r_M(x, y) \leq k$. Então $r_{M^{ef}}(x, y) = \lambda(x, y; M^{ef})$ e aplicando o Lema 6.2.16 a M^{ef} existe $X \subset V$ separando x e y tal que $\beta_{M^{ef}}(X) = r_{M^{ef}}(x, y)$. Usando (6.19) temos

$$\beta_M(X) - 2 \leq \beta_{M^{ef}}(X) = r_{M^{ef}}(x, y) \leq r_M(x, y) - 1 \leq R_M(X) - 1 \leq \beta_M(X) - 1.$$

Logo, $\beta_M(X) \leq R_M(X) + 1$, ou seja, X é crítico. Além disso, $\beta_M(X) > \beta_{M^{ef}}(X)$ e portanto $u, t \in X$. ■

Afirmção 3 *Seja $X \subseteq V$ um conjunto justo. Um par $\{e = su, f = st\}$ é aglutinável em M se o correspondente par $\{e', f'\}$ é aglutinável no grafo misto M' obtido a partir de M contraindo X a um único vértice.*

Prova: Seja $\{e = su, f = st\}$ um par de arestas em M incidentes a s tal que o correspondente par $\{e', f'\}$ é aglutinável em M' .

Para um subconjunto Z de vértices de M tal que $Z \subseteq V - X$ ou $X \subseteq Z$ denote por Z' o subconjunto de vértices de M' correspondente a Z . Para um tal Z , claramente $R_{M'}(Z') \geq R_M(Z)$ e $\rho_{M'}(Z') = \rho_M(Z)$.

Portanto, se Z é crítico em M então Z' é crítico em M' . Pela Afirmção 2 segue que não existe conjunto crítico Z em M contendo u, t tal que $Z \subseteq V - X$ ou $X \subseteq Z$ (*).

Suponha, por absurdo, que $\{e, f\}$ não seja aglutinável em M . Pela Afirmção 2 existe um conjunto crítico Y contendo u e t . Considere o Lema 6.2.5.

Se vale (6.7) para X, Y então

$$0 + 1 \geq \varepsilon_M(X) + \varepsilon_M(Y) \geq \varepsilon_M(X \cap Y) + \varepsilon_M(X \cup Y) \geq \varepsilon_M(X \cup Y),$$

ou seja, $Z = X \cup Y$ é crítico em M , contrariando (*).

Se vale (6.8) para X, Y então

$$0 + 1 \geq \varepsilon_M(X) + \varepsilon_M(Y) \geq \varepsilon_M(X - Y) + \varepsilon_M(Y - X) + 2\bar{d}_G(X, Y) \geq \varepsilon_M(Y - X) + 2\bar{d}_G(X, Y).$$

Portanto, $\varepsilon_M(Y_X) \leq 1$, $\bar{d}_G(X, Y) = 0$ e $u, t \notin X \cap Y$. Mas então $Z = Y - X$ é crítico em M e contém u e t , contrariando (*).

Logo, $\{e, f\}$ é aglutinável em M . ■

Vamos chamar um conjunto justo X de **trivial** se $|X| = 1$. Como M é um contra-exemplo minimal, a Afirmação 3 mostra que

$$\text{em } M \text{ todo conjunto justo é trivial.} \quad (6.23)$$

Afirmação 4 Para todo $u, v \in V$

$$r_M(u, v) = \min\{\beta_M(u), \beta_M(v), k\}.$$

Prova: Por (6.19), temos que $\min\{\beta_M(u), \beta_M(v)\} \geq r_M(u, v)$.

Se $\lambda(u, v; M) \geq k$ então o resultado segue imediatamente. Suponha que $\lambda(u, v; M) < k$. Pelo Lema 6.2.16 existe um conjunto $X \subset V$ separando u e v tal que $\beta_M(X) = R_M(X) = r_M(u, v)$. Ou seja, X é justo e por (6.23), $|X| = 1$, de onde segue o resultado. ■

Afirmação 5 O conjunto $V - T(M)$ não é vazio.

Prova: Suponha por absurdo que $V - T(M) = \emptyset$. Defina os seguintes conjuntos

$$\begin{aligned} X &= \{v \in V : \rho_M(v) < \delta_M(v)\}, \\ Y &= \{v \in V : \rho_M(v) > \delta_M(v)\}. \end{aligned}$$

Então $\{X, Y\}$ é uma partição de V . Pela definição de X e Y , existe um arco $h = (x, y)$ que sai de X e entra em Y .

Seja $M' := M - h$. Então $T(M') \subseteq T(M)$ e, como $k \geq 2$, não existe aresta de corte incidente a s em M' . Como $\rho_M(y) > \delta_M(y) \geq k > R(y)$, segue que h não entra em nenhum conjunto justo. Portanto, $\lambda(u, v; M) = \lambda(u, v; M')$ para todo $u, v \in V$.

Como $T(M') \subseteq T(M)$, (6.17) vale para M' e pela minimalidade de M , M' não é um contra-exemplo para o teorema. Logo, existe um par $\{e, f\}$ de arestas aglutináveis em M' . Mas então tal par também é aglutinável em M , contrariando a escolha de M . ■

Seja $t_0 \in V - T(M)$ um vértice tal que $\beta_M(t_0)$ é mínimo.

Temos dois casos a analisar.

Caso 1. $d_G(s, t_0) \geq 1$.

Para facilitar a referência a afirmações anteriores, vamos indicar t_0 por t no Caso 1. Assim, $d_G(s, t) \geq 1$.

Afirmção 6 Para todo $t\bar{s}$ -conjunto X , $X \neq \{t\}$, temos

$$R_M(X - t) \geq R_M(X).$$

Prova: Sejam $x \in V$ e $y \in V - X$ tais que $R_M(X) = r_M(x, y)$. Se $x \neq t$ então $R_M(X - t) \geq r_M(x, y) = R_M(X)$ e o resultado segue.

Suponha que $x = t$ e seja $u \in X - t$ um vértice qualquer. Pela Afirmção 4, temos que $R_M(X) = r_M(t, y) = \min\{\beta_M(t), \beta_M(y), k\}$ e $R_M(X - t) \geq r_M(u, t) = \min\{\beta_M(u), \beta_M(t), k\}$. Portanto, para obtermos o resultado basta provarmos que $\beta_M(u) \geq \beta_M(t)$ ou que $\beta_M(u) \geq k$.

Suponha que $\beta_M(u) < \beta_M(t)$ e que $\beta_M(u) < k$. Pela escolha de $t = t_0$, temos que $u \in T(M)$. Como $T(M)$ nunca consiste de um único vértice, por (6.17) temos que $\beta_M(u) \geq k$, o que leva a uma contradição. ■

Afirmção 7 Se $X \subseteq V$ é crítico então $d_G(s, X) \leq d_G(s, V - X)$.

Prova: Sejam $d_1 := d_G(s, X)$ e $d_2 := d_G(s, V - X)$ e suponha sem perda de generalidade que $\rho_M(X) = R_M(X)$.

Então $R_M(V - X) = R_M(X) \geq \rho_M(X) - 1 = \delta_M(V - X) - d_2 + d_1 - 1 \geq R_M(V - X) - d_2 + d_1 - 1$, do qual segue que $d_1 \leq d_2 + 1$. Note que não podemos ter igualdade, pois senão $d_G(s) = 2d_2 + 1$, contrariando o fato de $d_G(s)$ ser par. Logo, $d_1 \leq d_2$, e a prova está completa. ■

Seja S o conjunto dos vértices adjacentes a s . Como nenhum par $\{su, st\}$ é aglutinável em M , a Afirmção 2 mostra que todo elemento de S pertence a algum $t\bar{s}$ -conjunto crítico. Seja $\mathcal{F}$ uma família minimal de conjuntos críticos tal que $\bigcup(X : X \in \mathcal{F}) \supseteq S$. Pela Afirmção 7, $|\mathcal{F}| \geq 2$. Podemos supor que os membros de $\mathcal{F}$ são $t\bar{s}$ -conjuntos críticos maximais.

Afirmção 8 $|\mathcal{F}| \geq 3$.

Prova: Suponha que $\mathcal{F}$ possui apenas dois membros, digamos X e Y . Como $S \subseteq X \cup Y$ e $t \in S \cap X \cap Y$, pela Afirmação 7 temos que $d_G(s, x) \leq d_G(s, V - X) < d_G(s, Y) \leq d_G(s, V - Y) < d_G(s, X)$, o que leva a uma contradição. ■

Afirmção 9 Para todo $X, Y \in \mathcal{F}$, temos que $|X - Y| = |Y - X| = 1$, $\bar{d}_D(X, Y) = 0$ e $d_G(X, Y) = 1$.

Prova: Se vale (6.8) para X e Y então $1 + 1 \geq \varepsilon_M(X) + \varepsilon_M(Y) \geq \varepsilon_M(X - Y) + \varepsilon_M(Y - X) + 2\bar{d}_G(X, Y) + \bar{d}_D(X, Y) \geq 0 + 0 + 2 + 0$, e portanto, $2\bar{d}_G(X, Y) = 1$, $\bar{d}_D(X, Y) = 0$ e, $X - Y$ e $Y - X$ são justos. O resultado segue pois em M todo conjunto justo é trivial.

Suponha que não vale (6.8) e que vale (6.7) para X e Y . Como X e Y são conjuntos críticos maximais, $\varepsilon_M(X \cup Y) \geq 2$, e portanto, $1 + 1 \geq \varepsilon_M(X) + \varepsilon_M(Y) \geq \varepsilon_M(X \cap Y) + \varepsilon_M(X \cup Y) \geq 0 + 2$. Logo, $\varepsilon_M(X \cap Y) = 0$, ou seja, $X \cap Y$ é justo. Portanto $X \cap Y = \{t\}$. Pela Afirmação 6, $R_M(X - t) \geq R_M(X)$ e $R_M(Y - t) \geq R_M(Y)$. Portanto, $R_M(X) + R_M(Y) \leq R_M(X - t) + R_M(Y - t) = R_M(X - Y) + R_M(Y - X)$. Logo, vale (6.6) para R_M .

Mas como $X \cap Y = \{t\}$ e $t \in V - T(M)$, vale (6.2), e portanto vale (6.8), o que leva a uma contradição. ■

Sejam X_1, X_2 e X_3 três membros de $\mathcal{F}$ e $Z = X_1 \cap X_2 \cap X_3$. Pela minimalidade de $\mathcal{F}$, cada X_i contém um vértice x_i que não pertence a nenhum outro membro de $\mathcal{F}$. Pela Afirmação 9 segue que $X_i = Z + x_i$ ($i = 1, 2, 3$) e que $\bar{d}_D(X_i, X_j) = 0$ e $\bar{d}_G(X_i, X_j) = 1$ para $1 \leq i < j \leq 3$.

Logo, não existem arcos entrando ou saindo de Z e apenas a aresta st incide em Z . Ou seja, st é uma aresta de corte, contrariando a hipótese de não existir nenhuma aresta de corte incidente a s em M . Essa contradição mostra que o Caso 1 não pode ocorrer.

Caso 2. $d_G(s, t_o) = 0$.

Como M é conexo temos que $\rho_M(t_o) = \delta_M(t_o) > 0$. Sejam (a, t_o) e (t_o, b) tais que, se possível, $a \neq b$. Observe que $a = b$ somente se t_o tem apenas um único vértice adjacente a este em M . Seja M' o grafo misto obtido a partir de M pela aglutinação de (a, t_o) e (t_o, b) .

Claramente, $T(M) = T(M')$ e $\lambda(t_o, v; M') \geq \lambda(t_o, v; M) - 1$ para todo $v \in V - t_o$. Ainda, $\lambda(u, v; M') = \lambda(u, v; M)$ para todo $u, v \in V - t_o$. Isto é fácil de ver se $a = b$. e segue do fato de todo conjunto justo em M ser trivial, quando $a \neq b$. Portanto, temos que

$$\begin{aligned} r_{M'}(t_o, v) &\geq r_M(t_o, v) - 1 && \text{para todo } v \in V - t_o \\ r_{M'}(u, v) &= r_M(u, v) && \text{para todo } u, v \in V - t_o. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Afirmção 10 *Não existe aresta de corte incidente a s em M' .*

Prova: Suponha que exista uma aresta de corte incidente a s em M' . Então existe um conjunto $X \subseteq V$ separando t_0 de a e b tal que $\rho_M(X) = \delta_M(X) = 2$ e existe uma única aresta $h = sz$ incidindo em X .

Seja $h' = su$ outra aresta de M . Então $u \neq z$ e $\lambda(u, z; M) \geq 2$ (veja Lema 6.2.19). Isto implica que X é justo, e portanto $|X| = 1$. Mas então $z = t_0$ contrariando a hipótese de que $d_G(s, t_0) = 0$. ■

Logo, M' satisfaz as condições do Teorema 6.2.7. Pela minimalidade de M , M' não é um contra-exemplo para esse teorema. Então existe um par $\{e = su, f = st\}$ aglutinável em M' . Como estamos no Caso 2, $t \neq t_0$.

Afirmção 11 *$\{e, f\}$ é aglutinável em M .*

Prova: Suponha que $\{e, f\}$ não seja aglutinável em M . Então existe um conjunto crítico $X \subseteq V$ contendo u e t . Por (6.24) temos que $R_{M'}(X) \geq R_M(X) - 1$. Usando o fato de que X não é crítico em M' , ou seja, $\beta_{M'}(X) \geq R_{M'}(X) + 2$, obtemos

$$\beta_M(X) \geq \beta_{M'}(X) \geq R_{M'}(X) + 2 \geq R_M(X) + 1 \geq \beta_M(X). \quad (6.25)$$

Portanto, $R_{M'}(X) = R_M(X) - 1$ e X separa t_0 de a e b . Logo, por (6.24) segue que $R_M(X) = r_M(t_0, y)$ para algum $y \in V$ que é separado de t_0 por X e que

$$r_M(t_0, y) > r_M(x, y) \text{ para todo } x \in V - t_0 \text{ separado de } y \text{ por } X. \quad (6.26)$$

Se $t_0 \in X$ então tome $x := t$ ($\neq t_0$). Se $t_0 \in V - X$ então existe um vértice x em $V - X - t_0$, senão $V - X = \{t_0\}$ do qual segue que $\beta_M(X) \geq \beta_M(t_0) + 2$. Então pela Afirmção 4 temos que $R_M(X) = r_M(t_0, y) = \min\{\beta_M(y), \beta_M(t_0), k\} \leq \beta_M(t_0) \leq \beta_M(X) - 2$, contrariando o fato de X ser crítico em M .

Em ambos os casos segue que

$$\min\{\beta_M(t_0), \beta_M(y), k\} = r_M(t_0, y) > r_M(x, y) = \min\{\beta_M(x), \beta_M(y), k\}.$$

Isto implica que $\beta_M(x) < \beta_M(t_0)$ e que $\beta_M(x) < k$. Pela escolha de t_0 e pelo fato de $\lambda(u, v; M) \geq k$ para todo $u, v \in T(M)$, segue que $x \notin T(M)$, o que leva a uma contradição. ■

As Afirmações 10 e 11 mostram que M não pode ser um contra-exemplo para o Teorema 6.2.7. Esta contradição mostra que o Caso 2 não pode ocorrer e completa a demonstração do teorema. ■

Os dois corolários seguintes são resultados não triviais decorrentes do Teorema 6.2.18. O primeiro refere-se ao caso $r \equiv k \geq 2$, enquanto o segundo refere-se ao caso especial em que M é simétrico.

Corolário 6.2.21 *Seja $M = (V + s, E, A)$ um grafo misto tal que $0 < d_M(s) \neq 3$. Não existe nenhum arco incidente a s e nenhuma aresta de corte incidente a s . Seja $k \geq 2$ um inteiro tal que $\lambda(x, y; M) \geq k$ para todo $x, y \in V$. Então existe um par de arestas $e = su$, $f = st$ tal que $\lambda(x, y; M^{ef}) \geq k$ para todo $x, y \in V$.*

Corolário 6.2.22 *Seja $M = (V + s, E, A)$ um grafo misto simétrico tal que $0 < d_M(s) \neq 3$, não existe nenhum arco incidente a s e não existe nenhuma aresta de corte incidente a s . Então existe um par de arestas $e = su$, $f = st$ tal que $\lambda(x, y; M^{ef}) = \lambda(x, y; M)$ para todo $x, y \in V$.*

Observe que o último corolário já é uma generalização do Teorema 6.2.17 de Mader.

6.3 Aumentações com arcos

Nesta seção veremos os principais resultados relativos ao PAACD que foram encontrados na literatura. Como já foi mencionado, podemos supor sem perda de generalidade que o grafo de entrada $M = D$ é orientado.

O caso $r \equiv 1$ consiste em encontrar o menor supergrafo fortemente conexo de D . Este problema foi resolvido por Eswaran e Tarjan [1976] como foi visto no Capítulo 4. Já neste caso a versão com custos é $\mathcal{NP}$ -difícil.

Uma variante deste problema na qual permitimos acrescentar apenas arcos que sejam reversos aos arcos de D pode ser resolvida em tempo polinomial, mesmo no caso com custos

nos arcos. Trata-se de um resultado bastante conhecido de Lucchesi e Younger [1978] que mencionamos na primeira seção do Capítulo 5.

Generalizando o resultado de Eswaran e Tarjan, Frank [1992] obteve um algoritmo polinomial para o PAACD no caso em que $r \equiv k (\geq 1)$. Esse algoritmo baseia-se em um teorema sobre aglutinação orientada devido a Mader (Corolário 6.3.2), e usa técnicas análogas às descritas para o PACC na seção anterior.

Por outro lado, Frank também mostrou que o PAACD com demanda arbitrária é $\mathcal{NP}$ -difícil mesmo no seguinte caso:

$$r(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{se } u, v \in S, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde S é um subconjunto fixo de V . Diante disso, há poucas possibilidades de obter possíveis generalizações que forneçam boas caracterizações ou algoritmos polinomiais.

Bang-Jensen, Frank e Jackson [1993] provaram um resultado mais geral para o caso de demanda não-uniforme, que descreveremos mais adiante. A demonstração deste resultado usa o seguinte teorema de aglutinação orientada.

Considere $T(M)$ e r_M como na Seção 6.2.

Teorema 6.3.1 (Bang-Jensen, Frank e Jackson, 1993) *Seja $M = (V + s, E, A)$ um grafo misto tal que $\lambda(x, y; M) \geq k$ para todo $x, y \in T(M)$. Suponha que não incidem arestas em s e que s é balanceado. Então para todo arco $f = (s, t)$ existe um arco $e = (u, s)$ tal que*

$$\lambda(x, y; M^{ef}) \geq r_M(x, y) \text{ para todo } x, y \in V.$$

Como já havíamos mencionado, não há grande generalidade em considerar grafos mistos no Teorema 6.3.1. Entretanto, ele generaliza os seguintes resultados.

Corolário 6.3.2 (Mader, 1982) *Seja $D = (V + s, A)$ um digrafo tal que $\lambda(x, y; D) \geq k$ para todo $x, y \in V$ e s é balanceado. Então para cada arco $f = (s, t)$ existe um arco $e = (u, s)$ tal que $\lambda(x, y; D^{ef}) \geq k$ para todo $x, y \in V$.*

Corolário 6.3.3 (Jackson, 1988) *Seja $D = (V + s, A)$ um digrafo euleriano. Então para cada arco $f = (s, t)$ existe um arco $e = (u, s)$ tal que $\lambda(x, y; D^{ef}) = \lambda(x, y; D)$ para todo $x, y \in V$.*

A seguir descrevemos o resultado acima mencionado, relacionado ao PAACD, obtido por Bang-Jensen, Frank e Jackson [1993].

Teorema 6.3.4 (Bang-Jensen, Frank e Jackson, 1993) *Sejam $M = (V, E, A)$ um grafo misto, $k \geq 1$ e $\gamma \geq 0$ inteiros, e r uma função demanda para M satisfazendo (6.4), ou seja,*

$$\begin{aligned} r(x, y) = r(y, x) &\leq k \text{ para todo } x, y \in V, \\ r(x, y) &= k \text{ para todo } x, y \in T(M). \end{aligned}$$

Então M pode ser estendido a um grafo misto M^ acrescentando-se γ novos arcos de modo que*

$$\lambda(x, y; M^*) \geq r(x, y) \text{ para todo } x, y \in V,$$

se e somente se

$$\sum_{i=1}^t (R(X_i) - \rho_M(X_i)) \leq \gamma \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^t (R(X_i) - \delta_M(X_i)) \leq \gamma$$

para toda sub-partição $\{X_1, \dots, X_t\}$ de V .

A técnica da demonstração do resultado acima é análoga à do Teorema 6.2.10: acrescente um vértice s a M e arcos (s, v) e (v, s) de modo a satisfazer as demandas; se $\rho(s) = \delta(s) = \gamma$ então aplique o Teorema 6.3.1. Fazendo uso desse resultado, de maneira análoga à que foi feita para o PAAC, no caso em que r satisfaz (6.4), obtém-se um algoritmo polinomial para a correspondente versão do PAACD. De fato, o algoritmo de Frank [1992] para o caso $r \equiv k$ segue essa linha e baseia-se no Corolário 6.3.2.

A seguir mencionamos três corolários. No primeiro supomos que $T(M)$ é vazio, ou seja, M é simétrico. Deste modo, r pode ser uma função demanda (simétrica) arbitrária. No segundo, obtemos uma generalização de um resultado demonstrado por Frank [1992].

Corolário 6.3.5 *Sejam M um grafo misto simétrico, r uma função demanda simétrica e $\gamma \geq 0$ um inteiro. Então M pode ser estendido a um grafo misto M^* acrescentando-se γ novos arcos de modo que $\lambda(x, y; M^*) \geq r(x, y)$ para todo $x, y \in V$ se e somente se*

$$\sum_{i=1}^t (R(X_i) - \rho_M(X_i)) \leq \gamma \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^t (R(X_i) - \delta_M(X_i)) \leq \gamma$$

para toda sub-partição $\{X_1, \dots, X_t\}$ de V . Além disso, M^ pode ser escolhido de modo a ser simétrico.*

A última afirmação do corolário acima segue da demonstração do Teorema 6.3.4 que foi omitida aqui. O corolário seguinte trata do caso especial de demanda em que $r(u, v) = k \geq 1$ se u e v pertencem a um subconjunto fixo S de V tal que $T(M) \subseteq S$ e $r(u, v) = 0$ caso contrário.

Corolário 6.3.6 *Sejam M um grafo misto, $k \geq 1$ e $\gamma \geq 0$ inteiros, e $S \subseteq V$ tal que $T(M) \subseteq S$. Então M pode ser estendido a um grafo misto M^* acrescentando-se γ novos arcos de modo que $\lambda(x, y; M^*) \geq k$ para todo $x, y \in V$ se e somente se*

$$\sum_{i=1}^t (k - \rho_M(X_i)) \leq \gamma \quad e \quad \sum_{i=1}^t (k - \delta_M(X_i)) \leq \gamma$$

para toda sub-partição $\{X_1, \dots, X_t\}$ de V tal que $X_i \cap S, S - X_i \neq \emptyset$ para $1 \leq i \leq t$.

Observamos que Frank [1992] já tinha demonstrado o resultado anterior para o caso em que $S = V$.

Na Tabela 6.1 apresentamos um resumo dos principais resultados sobre a complexidade computacional do PAAC e do PAACD.

	arcos	arestas	
	$D = (V, A)$	$G = (V, E)$	$M = D \sqcup G$
$r \equiv k \geq 1$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$
$r(x, y) = r(y, x) \leq k$ para $x, y \in V$ $r(x, y) = r(y, x) = k$ para $x, y \in T(D)$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$
$r(x, y) = 1$ se $x, y \in S \subset V$ $r(x, y) = 0$ c.c.	$\mathcal{NP}$ -completo	$\mathcal{P}$	?
r qualquer	$\mathcal{NP}$ -completo	$\mathcal{P}$	?

Tabela 6.1: Principais resultados relativos ao PAACD e ao PAAC.

Considerações finais

Ao chegarmos no final deste trabalho, gostaríamos de destacar alguns aspectos que chamaram nossa atenção durante a sua elaboração. Primeiramente, ressaltamos o fato de não termos encontrado na literatura nenhum trabalho que desse um tratamento unificado, ou mesmo uma visão geral, dos diversos problemas que aqui estudamos. Nesse sentido, esperamos que o presente trabalho possa ser útil como consulta ou fonte de referências àqueles que tiverem interesse ou curiosidade sobre problemas relacionados a grafos mistos.

Outro aspecto, sendo este um dos mais agradáveis, foi a descoberta da interessante teoria das funções submodulares que se mostrou de grande utilidade na descoberta de vários resultados aqui descritos e que certamente pode ser aplicada à outras áreas de pesquisa como uma poderosa ferramenta no ataque a novos problemas.

Por fim, como ocorre em muitas áreas de pesquisa, ainda restam problemas em aberto que poderiam ser estudados futuramente. Entre eles podemos destacar o problema do circuito negativo e o problema do caminho mínimo em grafos mistos planares, mencionados no Capítulo 3. Outra direção possível seria procurar algoritmos mais eficientes e práticos para vários problemas descritos neste trabalho, em particular, os problemas tratados nos Capítulos 5 e 6.

Bibliografia

- [1986] E.M. Arkin, Complexity of cycle and path problems in graphs, Tese de Doutorado, Stanford University.
- [1993] J. Bang-Jensen, A. Frank e B. Jackson, Preserving and increasing local edge-connectivity in mixed graphs, Report N. 92784, Research Institute for Discrete Mathematics, Institute for Operations Research, University of Bonn (submetido ao *SIAM J. on Discrete Math.*)
- [1976] N.L. Biggs, E.K. Lloyd e R.J. Wilson, *Graph Theory 1736–1936*, Clarendon Press, Oxford.
- [1980] F. Boesch e R. Tindell, Robbin's theorem for mixed multigraphs, *Am. Math. Monthly*, **87** (1980), 716–719.
- [1979] B. Bollobás, *Graph Theory, an Introductory Course*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, N. York.
- [1976] J.A. Bondy e U.S.R. Murty, *Graph Theory with Applications*, Macmillan, London.
- [1984] N. Christofides, E.B. Benavent, V. Campos, A. Corberan e E. Mota, An optimal method for the mixed postman problem, *Lect. Notes Control Inf. Sci.*, **59** (1984), 641–649.
- [1985] F.R.K. Chung, M.R. Garey e R.E. Tarjan, Strongly connected orientations of mixed multigraphs, *Networks*, **15** (1985), 477–484.
- [1978] V. Chvátal e G. Thomassen, Distances in orientations of graphs, *J. Combinatorial Theory Ser. B*, **24** (1978), 716–719.
- [1965] J. Edmonds, The Chinese postman problem, *Operations Research*, **13** (1965), B73–B77.
- [1973] J. Edmonds e E.L. Johnson, Matching, Euler tours and the Chinese postman problem, *Math. Programming*, **5** (1973), 88–124.

- [1977] J. Edmonds e R. Giles, A min-max relation for submodular functions on graphs, *Annals of Discrete Math.*, **1** (1977), 185–204.
- [1976] K.P. Eswaran e R.E. Tarjan, Augmentation problems, *SIAM J. Computing*, **5** (1976), 653–665.
- [1736] L. Euler, Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, **8** (1736), 128–140.
- [1973] L.R. Ford e D.R. Fulkerson, *Flows in Networks*, Princeton U. Press, Princeton.
- [1978] A. Frank, On disjoint trees and arborescences, em: *Algebraic methods in graph theory*, Colloquia Mathematica, Soc. J. Bolyai, **25** (1978), 159–169, North-Holland.
- [1980] A. Frank. On the orientations of graphs, *J. Combinatorial Theory Ser. B*, **28** (1980), 251–261.
- [1982] A. Frank, An algorithm for submodular functions on graphs, *Annals of Discrete Math.*, **16** (1982), 97–120.
- [1984] A. Frank, Finding feasible vectors of Edmonds-Giles polyhedra, *J. Combinatorial Theory Ser. B*, **36** (1984), 221–239.
- [1984a] A. Frank, Submodular Flows, em: *Progress in Combinatorial Optimization*, W.R. Pulleyblank, Academic Press, N. York, 147–165.
- [1992] A. Frank, Augmenting graphs to meet edge-connectivity requirements, *SIAM J. on Discrete Math.*, **5** (1992), 22–53.
- [1994] A. Frank, Connectivity augmentation, em: *Mathematical Programming — State of the Art* (ed. J.R. Birge e K.G. Murty), XV International Symposium on Mathematical Programming, Ann Arbor, Michigan (1994).
- [1979] G.N. Frederickson, Approximation algorithms for some postman problems, *Journal of ACM*, **26** (1979), 538–554.
- [1978] G.N. Frederickson, M.S. Hecht e C.E. Kim, Approximation algorithms for some routing problems, *SIAM J. Computing*, **7** (1978), 178–193.
- [1979] M.R. Garey e D.S. Johnson, *Computers and Intractability — A guide to the theory of NP-completeness*, Freeman, N. York.
- [1985] A. Gibbons, *Algorithmic Graph Theory*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [1980] M. Grötschel, L. Lovász e A. Schrijver, *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Springer-Verlag.

- [1987] D. Gusfield, Optimal mixed graph augmentation, *SIAM J. Computing*, **16** (1987), 599–612.
 - [1873] C. Hierholzer, On the possibility of traversing a line-system without repetition or discontinuity, *Mathematische Annalen*, **6** (1873)
-
- [1988] B. Jackson, Some remarks on arc-connectivity, vertex splitting, and orientations of graphs and digraphs, *J. Graph Theory*, **12** (1988), 429–436.
 - [1979] C.H. Kappauf e G.J. Koehler, The mixed postman problem, *Discrete Applied Math.*, **1** (1979), 89–103.
 - [1976] E.L. Lawler, *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*, Holt, Rinehart & Winston, N. York.
 - [1978] W. Mader, A reduction method for edge-connectivity in graphs, *Annals of Discrete Math.*, **3** (1978), 145–164.
 - [1979] C. Lucchesi, *Introdução à Teoria dos Grafos*, 12o. Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas — MG, IMPA, RJ.
 - [1978] C. Lucchesi e D. Younger, A minimax theorem for directed graphs, *J. London Math. Soc.*, **17** (1978), 369–374.
 - [1982] W. Mader, Konstruktion aller n -fach kantenzusammenhängenden Digraphen, *Europ. J. Combinatorics*, **3** (1982), 63–67.
 - [1962] K. Mei-Ko, Graphic programming using odd or even points, *Chinese Mathematics*, **1** (1962), 237–277.
 - [1978] E. Minieka, *Optimization Algorithms for Networks and Graphs*, Marcel Dekker, N. York.
 - [1979] E. Minieka, The Chinese postman problem for mixed networks, *Management Science*, **25** (1979), 643–648.
 - [1960] C.St.J.A. Nash-Williams, On orientations, connectivity and odd-vertex-pairings in finite graphs, *Canad. J. Math.*, **12** (1960), 555–567.
 - [1990] Y. Nobert, J.P. Picard e P. Samson, Checking unicursality of a mixed graph a base for an optimal algorithm for the Chinese postman problem, Proc. 20th Manitoba Conference.
 - [1976] C.H. Papadimitriou, On the complexity of edge traversing, *Journal of ACM*, **23** (1976), 544–554.

- [1982] C.H. Papadimitriou e K. Steiglitz, *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*, Prentice-Hall, New Jersey.
- [1976] J. Plesnik, Minimum block containing a given graph, *Archiv der Mathematik*, **Vol. XXVII** (1976), Fasc. 6, 668–672.
- [1993] T.K. Ralphs, On the mixed Chinese postman problem, *Operations Research Letters*, **14** (1993), 123–127.
- [1939] H. Robbins, A theorem on graphs with an application to a problem of traffic control, *Am. Math. Monthly*, **46** (1939), 281–283.
- [1987] T. Watanabe e A. Nakamura, Edge-connectivity augmentation problems, *Computer and System Sciences*, **35** (1987), 96–144.

Índice dos símbolos mais usados

$A_D^+(X)$	3
$A_D^+(X, Y)$	3
$A_D^-(X)$	3
$A_D^-(X, Y)$	3
$D = (V, A)$	
$E_G(X, Y)$	2
$G = (V, E)$	2
$M + (F \cup L)$	4
$M - U$	4
M/U	4
$M = (V, E, A)$	2
$M = D \sqcup G$	2
$M[U]$	4
$X + x$	2
$X - x$	2
$[u, v]$	2
$\bar{d}_M(X, Y)$	82
$\beta_M(X)$	82
$\delta_D(X)$	3

$\delta_M(X)$	3
$\lambda(x, y; M)$	6
$\overline{X}$	2
$\rho_D(X)$	3
$\rho_M(X)$	3
$c(P)$	11
$d_G(X, Y)$	3
$d_M(X, Y)$	3
$g_G(v)$	3
$g_M(v)$	4
$l = (u, v)$	2
$l = uv$	2

Índice

- acréscimo, 4
- adjacentes, 2
- arcos, 1, 2
 - entrando, 2,3
 - paralelos, 2
 - reversos, 2
 - saindo, 2,3
- aresta, 1, 2
 - de corte, 6
- aresta-conexidade local, 6
- arestas
 - paralelas, 2
- árvore, 5
- caminhos, 5
 - disjuntos nas arestas, 5
 - mínimos, 21
- cauda, 2
- circuito, 5
 - negativo, 21
- componente, 6
 - fortemente conexo, 6
- comprimento, 5
- concatenação, 5
- contração, 4
- digrafo, 2
- entrada
 - em um conjunto, 3
 - em um vértice, 2
- extremos
 - de um arco ou uma aresta, 2
 - de um caminho, 5
- final
 - de um passeio, 5
- fonte, 4
- grafo, 2
 - acíclico, 6
 - composto, 2
 - conexo, 6
 - euleriano, 8
 - fortemente conexo, 6
 - k -aresta-conexo, 6
 - k -orientável, 69
 - misto, 1
 - nao-orientado, 2
 - orientado, 2
 - orientável, 30
 - par, 4
 - simétrico, 4
- grau, 3
 - de entrada, 3
 - de saída, 3
- hipergrafo, 6
 - conexo, 6
- incidência
 - em um vértice, 2
 - em um conjunto, 3
- início
 - de um passeio, 5
- laço, 2
- m-árvore, 6
- orientação

- de uma aresta, 6
- de um grafo, 6
- fortemente conexa, 30
- parte
 - nao-orientada, 2
 - orientada, 2
- passagem, 5
- passeio, 5
 - de carteiro, 10
 - fechado, 5
 - orientado, 5
 - viável, 5
- percorrido, 5
- ponta, 2
- ponte, 6
- remoção, 4
- saída
 - de um conjunto, 3
 - de um vértice, 2
- seção, 5
- separação de vértices, 6
- sorvedouro, 4
- subgrafo, 4
 - induzido, 4
- supergrafo, 4
- trilha, 5
 - euleriana, 8
 - fechada, 5
- vértice, 1
 - balanceado, 4
 - ímpar, 4
 - interno, 5
 - isolado, 4
 - par, 4
- $x\bar{y}$ -conjunto, 6