MECÂNICA VAKONÔMICA

Um novo modelo para a Mecânica Analítica

Mário Tirone

Dissertação apresentada

ao

Instituto de Matemática e Estatística

da

Universidade de São Paulo

para a Obtenção do Grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Área de Concentração: **Matemática Aplicada**

Orientador: Manuel Valentim de Pera Garcia

São Paulo, Agosto de 1994

MECÂNICA VAKONÔMICA

Um novo modelo para a Mecânica Analítica

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação devidamente corrigida e apresentada por Mário Tirone, e aprovada pela Comissão Julgadora.

São Paulo, 2 de Setembro de 1994

Banca Examinadora

• Prof. Dr. Manuel Valentim de Pera Garcia (orientador)	IME-USP
• Prof. Dr. Ângelo Barone Netto	IME-USP
• Prof. Dr. Marco Antônio Teixeira	IMECC-UNICAMP

AGRADECIMENTOS

Durante o curso de Mestrado em Matemática Aplicada, o qual compreende uma série de tarefas a serem realizadas, procurei me dedicar com maior ênfase a este trabalho de Dissertação aqui apresentada. O meu propósito era de encará-lo como uma espécie de iniciação à pesquisa científica. Esta se revelou árdua, mas estimulante e desafiadora.

Tal iniciação, ao final, teve como resultado mais um aprendizado do processo de pesquisa, do que propriamente um começo na carreira acadêmica. E neste aprendizado, gostaria de agradecer a ajuda recebida.

Inicialmente agradeço à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo suporte recebido durante todo o período do curso de Mestrado.

À Profa. Dra. Sônia Regina Leita Garcia, agradeço pelas sugestões referentes a este trabalho. Ao Prof. Dr. Ângelo Barone Netto, pelo apoio e pela colaboração, que foram de grande valia na elaboração desta Dissertação.

Um agradecimento especial dedico ao meu orientador Prof. Dr. Manuel Valentim de Pera Garcia, pelos seus ensinamentos, particularmente do processo de pesquisa científica, pela sua dedicação, seu incentivo, e pelo seu estilo de orientação, que de forma nenhuma foi impositiva ou restritiva, me permitindo livre escolha na maneira como conduziria o meu Mestrado.

Por fim, um muito obrigado aos meus familiares e amigos, pelo apoio e compreensão recebidos.

ÍNDICE

Prefácio	6
Capítulo 1 - Introdução - Um resumo da Mecânica Lagrangiana	8
Função Lagrangiana	11
Variações no sentido clássico	14
Problema de Lagrange	16
Formulação Hamiltoniana	17
Exemplo 1.1	19
Exemplo 1.2	23
Capítulo 2 - Mecânica Vakonômica	25
Formulação Hamiltoniana na Mecânica Vakonômica	36
Exemplo 2.1	39
Forma normal das equações de Lagrange	40
Princípio da Determinação na Mecânica Vakonômica	42
Exemplo 2.2	46
Exemplo 2.3	47
Capítulo 3 - Um teorema de instabilidade de pontos de equilíbrio para a Mecânica Vakonômica	50
Um caso de instabilidade segundo Liapunov de pontos de equilíbrio	54
Exemplo 3.1	66
Apêndice	69
Bibliografia	74

ABSTRACT

We will study a new model to describe motions of material points when they are exposed to external forces and constraints, specially non-integrable ones. This model, called Vakonomic Mechanics, is based on the Hamilton Principle (Principle of Least Action) with a new set of variations of a curve considered. It was introduced by V. V. Kozlov and V. I. Arnold and when there are only integrable constraints it is reduced to the known model.

We show in chapter 1 a short, but wide, review of the Classical Lagrangian Mechanics, based on the D'Alembert-Lagrange Principle. In chapter 2, we introduce the Vakonomic Mechanics, and show an example comparing its result with the Lagrangian Mechanics one. It has also some new facts that were not known up to now, specially related to the lost of Principle of Determinacy. In this chapter we also include a proof of a fundamental theorem in Vakonomic Mechanics.

On the last chapter, we characterize the existence of equilibrium points in this new model, when the forces involved have a potential function. We also study their Liapunov stability in some cases.

PREFÁCIO

Neste trabalho, procuraremos estudar um novo modelo de tratamento de questões relativas à Mecânica Lagrangiana, no que se refere à descrição de movimentos pontos materiais quando sujeitos a vínculos, e expostos à ação de forças. Estaremos especialmente interessados nos casos em que os vínculos presentes são não integráveis, situação que apresenta uma série de questões que até hoje ainda não foram total e satisfatoriamente respondidas. Além disso, estudamos a Estabilidade segundo Liapunov de pontos de equilíbrio sujeitos a vínculos não holônomos sob a ação de certas forças potenciais, nesta nova formulação da Mecânica Lagrangiana.

Em certos casos, verifica-se que, na presença de vínculos não holônomos, a Mecânica Lagrangiana não descreve com perfeição o movimento de pontos materiais. Como ilustração, apresentamos no Capítulo 1 um exemplo que mostra este fato. Além disso, a formulação Hamiltoniana da Mecânica Lagrangiana Clássica não é possível de ser feita nestes casos.

Apresentaremos no Capítulo 1, uma breve, mas abrangente, revisão dos conceitos da formulação Lagrangiana, baseada no Princípio das Reações Vinculares, além de mostrar alguns exemplos. Optamos, neste capítulo, por um estilo de redação mais informal do que em textos que já apresentam esta teoria, visto que o intuito deste trabalho não é ser voltado totalmente para a abordagem conhecida da Mecânica Lagrangiana. Para um estudo mais aprofundado nesta direção, sugerimos o texto do Prof. Ivan de Queiroz Barros, [1].

No capítulo 2, introduzimos formulação mencionada acima, à qual é dada o nome **Mecânica Vakonômica**, e mostramos também um exemplo em que comparamos o seu resultado com aquele da Mecânica Lagrangiana. A nossa intenção neste capítulo será a de apresentar um novo modelo de estudo, introduzido por V. V. Kozlov em [3], e posteriormente reformulado por V. I. Arnold em [2], que descreve os movimentos dos pontos materiais. Tal modelo é compatível com a formulação conhecida, quando só existem vínculos integráveis.

Ainda neste capítulo, apresentamos alguns resultados que não eram conhecidos até aqui, além de realizar a demonstração de um teorema fundamental na teoria Vakonômica, que não foi feita em [2].

No capítulo 3, motivados pelo trabalho de Angelo Barone Netto em [4], caracterizamos os pontos de equilíbrio de um sistema sujeito a forças que derivam de potencial na formulação Vakonômica (que coincidem com aquelas do modelo tradicional), e estudamos a Estabilidade segundo Liapunov de tais pontos quando sujeitos a um tipo particular de forças naturais. Tais resultados também são inovações na teoria Vakonômica.

Por fim, no Apêndice, mostramos um resultado que é utilizado no Capítulo 2, o qual mostra que, dado um sistema linear de Equações Diferenciais Ordinárias não homogêneo com mais incógnitas do que equações, existem soluções não nulas que passam duas vezes pelo vetor nulo.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO - UM RESUMO DA MECÂNICA LAGRANGIANA

CAPÍTULO 1 : INTRODUÇÃO - UM RESUMO DA MECÂNICA LAGRANGIANA

O assunto aqui apresentado tratará de questões relativas aos movimentos de pontos materiais, sujeitos a vínculos e expostos à ação de forças.

Sejam m_i , $1 \leq i \leq p$, p números reais estritamente positivos representando as massas de pontos materiais situados no espaço euclidiano R^3 . Representaremos cada ponto pelo par $(m_i; r_i)$, onde r_i será a sua posição em R^3 .

A cada instante de tempo t , um ponto material (m_i, r_i) se localiza numa certa posição $r_i(t) \in R^3$. Com isso, fica determinada uma função (curva) que tem domínio num intervalo $[t_1; t_2]$ de R e tem imagem em R^3 . Ou seja :

$$r_i : [t_1; t_2] \rightarrow R^3, \quad 1 \leq i \leq p.$$

Em cada ponto atua uma força F_i , que será representada por uma função dependente das velocidades, das posições dos pontos e também do instante de tempo t . Assim, a força F_i é escrita da forma:

$$F_i : U \subset R^{3p} \times R^{3p} \times R \rightarrow R^3 \\ (v; r; t) \rightarrow F_i(v; r; t),$$

onde $r = (r_1; \dots; r_p)$, e $v = (v_1; \dots; v_p)$ representará a velocidade.

No caso do sistema apresentar vínculos ou restrições aos movimentos dos pontos (por exemplo, os pontos materiais devem se mover sem escorregar numa esfera do R^3 , ou deslizar sobre um plano inclinado), vamos impor certas condições aos seus movimentos:

i) $r(t)$ pertence a uma certa variedade M de dimensão n , $1 \leq n \leq 3p$, invariante com o tempo, que representará os vínculos que restringem apenas as posições dos pontos; (1.2)

ii) $h_i(\dot{r}(t); r(t); t) = 0$, $t_1 \leq t \leq t_2$, $1 \leq i \leq m < n$, (1.3)
onde $h_i : R^{3p} \times R^{3p} \times R \rightarrow R$, e $\frac{\partial(h_1; \dots; h_m)}{\partial v}$ tem posto máximo.

As equações $h_i(v; r; t) = 0$ serão as representações dos vínculos não geométricos.

O nosso tema principal será a descrição de como os pontos se movem ao longo do tempo. Iniciaremos com a análise da 2ª Lei de Newton. Sem a presença de vínculos ou restrições, sabemos desta lei que:

$$m_i \ddot{r}_i(t) = F_i(\dot{r}(t); r(t); t), \quad (1.1)$$

onde $\dot{r}_i(t)$ e $\ddot{r}_i(t)$ são respectivamente as 1a. e 2a. derivadas de r_i em relação ao tempo no instante t .

Entretanto, se o sistema impõe as restrições mencionadas, devemos acrescentar à equação (1.1) uma força de reação R_i de tal modo que $F_i + R_i$ seja a força resultante agindo sobre $(m_i; r_i)$. R_i , assim como F_i , será uma função com variáveis $(v; r; t)$ e imagem em R^3 . Desta forma, (1.1) é reescrita:

$$m_i \ddot{r}_i(t) = F_i(\dot{r}(t); r(t); t) + R_i(\dot{r}(t); r(t); t), \quad t_1 \leq t \leq t_2, 1 \leq i \leq p, \quad (1.4)$$

ou ainda:

$$m \ddot{r}(t) = F(\dot{r}(t); r(t); t) + R(\dot{r}(t); r(t); t), \quad (1.5)$$

com $\ddot{r} = (\ddot{r}_1; \dots; \ddot{r}_p)$, $F = (F_1; \dots; F_p)$ e $R = (R_1; \dots; R_p)$.

Observações:

- i) Todas as funções mencionadas neste texto serão supostas de classe C^∞ ;
- ii) observa-se também que (1.2) estabelece uma relação intrínseca entre as variáveis r e v , já que esta última é uma velocidade que um ponto material na posição r pode possuir, respeitando aquela restrição. Assim, de (1.2) conclui-se que $v \in T_r M$ (o espaço tangente a M em r).

Segue-se que, em cada ponto $(v; r; t)$ compatível com as condições (1.2) e (1.3) acima, existem uma vizinhança V de r aberta em M e uma função φ , definida num aberto U de R^n com valores em R^{3p} , de modo que:

- i) $\varphi(q) \in M$, qualquer que seja $q \in U$;
- ii) qualquer que seja $s \in V$, existe $q \in U$ tal que $\varphi(q) = s$;
- iii) $\frac{\partial \varphi}{\partial q}(q)$ tem posto máximo, $\forall q \in U$.

As coordenadas $q_1, \dots, q_n$ da variável q são chamadas de **coordenadas generalizadas**. Definimos, para o que virá mais adiante, o conjunto $\mathcal{M}$ de todas as curvas $q : I \rightarrow R^n$, $I = [t_1; t_2]$, tais que q corresponde a uma curva $r : [t_1; t_2] \rightarrow R^{3p}$ que satisfaz (1.2) e (1.3), isto é, $r(t) = \varphi(q(t))$.

Em certos casos é possível que se consiga escrever o vínculo (1.3) em relação a estas coordenadas q . Por exemplo, quando h_i for linear nas velocidades v (ver [1], pág. 2.1.12, exerc. 2.1.15). Assim, existem funções $f_i : R^n \times U \times [t_1; t_2] \rightarrow R$ que descrevem as condições impostas por h_i , porém com relação às variáveis $(u; q; t)$ (a variável u é a coordenada correspondente a v , assim como q é correspondente a r ; pode-se provar que $v = \frac{\partial \varphi}{\partial q}(q)u$). Neste texto, estaremos interessados nesta situação.

Denominaremos os valores que v pode assumir a partir de um certo ponto, levando-se em conta as observações acima, como sendo as suas **velocidades virtuais**. O conjunto $\vartheta(v_0; r_0; t_0)$ de tais velocidades em $(v_0; r_0; t_0)$ é escrito em relação a $(u; q; t)$:

$$\vartheta(v_0; r_0; t_0) = \left\{ \delta v \in R^{3p} : \delta v = \frac{\partial \varphi}{\partial q}(q_0) \delta u, \text{ com } \delta u \text{ tal que } \frac{\partial f_i}{\partial u}(u_0; q_0; t_0) \delta u = 0, \right. \\ \left. 1 \leq i \leq m, \text{ e } u_0 \text{ tal que } v_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial q}(q_0) u_0 \right\}.$$

Tal conjunto é utilizado na Mecânica Lagrangiana quando se menciona o Princípio de D'Alembert-Lagrange (ou a Condição de Vínculo Perfeito). De acordo com este princípio, dado um sistema de vínculos e de forças que atuam num conjunto de pontos materiais, a curva que descreve o movimento destes pontos a partir de condições iniciais $(v_0; r_0; t_0)$ dadas a priori é aquela que satisfaz

$$\langle m\ddot{r} - F; \delta v \rangle = 0, \quad \forall \delta v \in \vartheta. \quad (1.6)$$

Fisicamente, a interpretação deste princípio é a de que as forças de reação dos vínculos não realizam trabalho, ou seja

$$\langle R; \delta v \rangle = 0, \quad \forall \delta v \in \vartheta.$$

Função Lagrangiana

Dada uma curva $r(t)$ representando o movimento de pontos materiais, a sua energia

cinética associada é definida da seguinte forma:

$$T(\dot{r}(t); r(t); t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p m_i \langle \dot{r}_i(t); \dot{r}_i(t) \rangle. \quad (1.7)$$

Em termos de coordenadas generalizadas, a curva $r : [t_1; t_2] \rightarrow R^{3p}$ tem uma curva associada $q : [t_1; t_2] \rightarrow R^n$ de modo que

$$\varphi(q(t)) = r(t) \in M,$$

e daí

$$\dot{r}(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial q}(q(t)) \dot{q}(t).$$

Com isso, (1.7) fica

$$T(\dot{q}(t); q(t); t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p m_i \langle \frac{\partial \varphi_i}{\partial q} \dot{q}; \frac{\partial \varphi_i}{\partial q} \dot{q} \rangle, \quad (1.8)$$

com φ_i sendo a representação de r_i .

Desta forma, T é uma forma homogênea de grau 2 definida positiva com respeito a $\dot{q}$.

Também será importante para o que se segue, a expressão das forças F_i em termos de coordenadas generalizadas. Para isso, definimos a potência virtual associada a F :

$$\delta P = \langle F; \delta v \rangle,$$

onde δv é uma velocidade virtual do sistema.

Usando que $\delta v = \frac{\partial \varphi}{\partial q} \delta u$, temos que

$$\delta P = \langle F; \frac{\partial \varphi}{\partial q} \delta u \rangle = \langle (\frac{\partial \varphi}{\partial q})^t F; \delta u \rangle.$$

A partir desta motivação, definimos as forças generalizadas Q como sendo

$$Q = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q} \right)^t F. \quad (1.9)$$

No caso em que F admite um potencial Π , isto é

$$F = - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial r} \right)^t \quad (1.10)$$

(isto acontece para forças ditas **naturais** ou **potenciais**, como a força peso, força elástica, etc), Q é expressa por

$$Q = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q} \right)^t F = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q} \right)^t \left(\frac{\partial \Pi}{\partial r} \right)^t = - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial q} \right)^t = - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q} \right)^t. \quad (1.11)$$

Porém há casos em que F tem uma parcela F_0 que não deriva de potencial. Em vista disto, denotaremos

$$Q_0 = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q} \right)^t F_0$$

a força generalizada associada a esta parcela.

Vamos introduzir agora a conhecida função Lagrangiana L associada a um sistema de pontos materiais:

$$L(u; q; t) = T(u; q; t) - \Pi(u; q; t). \quad (1.12)$$

Esta função tem a propriedade de caracterizar uma curva que descreve o movimento de pontos materiais sob a ação de forças e vínculos, ou mais precisamente, dá uma condição necessária e suficiente para que $r : [t_1; t_2] \rightarrow R^{3p}$ seja tal que:

- i) $r(t) \in M, \forall t$;
- ii) $h(\dot{r}(t); r(t); t) = 0, \forall t$;
- iii) $r(t_0) = r_0; \dot{r}(t_0) = v_0$, com r_0 e v_0 sendo condições iniciais dadas a priori e compatíveis com o sistema estudado;

iv) satisfaça (1.6).

Esta condição é de que exista $\lambda : [t_1; t_2] \rightarrow R^m$ tal que a curva $q : [t_1; t_2] \rightarrow R^n$ correspondente a r satisfaça:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial u} (\dot{q}(t); q(t); t) - \frac{\partial L}{\partial q} (\dot{q}(t); q(t); t) = Q_0^t (\dot{q}(t); q(t); t) + \lambda^t(t) \frac{\partial f}{\partial u} (\dot{q}(t); q(t); t), \quad (1.13)$$

onde
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial u} = \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial u} + \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial u} \dot{q} + \frac{\partial^2 L}{\partial u^2} \dot{u}.$$

Este fato está demonstrado em qualquer texto de Mecânica Lagrangiana, como por exemplo, em [1].

Observação: Se uma parcela Q_1 de Q admitir uma função Π_1 de modo que

$$Q_1^t = \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi_1}{\partial u} - \frac{\partial \Pi_1}{\partial q},$$

podemos reescrever a equação (12) incorporando-se Π_1 ao potencial Π . Desta forma, a equação (1.13) ficaria

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial u} - \frac{\partial T}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial (\Pi + \Pi_1)}{\partial u} + \frac{\partial (\Pi + \Pi_1)}{\partial q} = (Q - Q_1)^t + \lambda^t \frac{\partial f}{\partial u}. \quad (1.13')$$

Damos o nome de **potencial generalizado** à soma $\tilde{\Pi} = \Pi + \Pi_1$, e de **forças não potenciais** à parcela $Q_0 = Q - Q_1$ de Q .

Variações no Sentido Clássico

Dada uma curva $r : [t_1; t_2] \rightarrow R^{3n}$, $r(t) \in M$, para todo t , e a curva associada $q : [t_1; t_2] \rightarrow R^n$, diz-se que uma função $\hat{q} : (-\varepsilon; \varepsilon) \times [t_1; t_2] \rightarrow R^n$, é uma **Varição no Sentido Clássico** (daqui para frente, apenas referenciada por **Varição Clássica**) se é da forma

$$\hat{q}(\alpha; t) = q(t) + \alpha \eta(t), \quad (1.14)$$

com

$$\eta : [t_1; t_2] \rightarrow R^n, \eta(t_1) = \eta(t_2) = 0, \frac{\partial f}{\partial u} \eta = 0.$$

Observação: Para t diferente de t_1 e t_2 , a condição $\frac{\partial f}{\partial u} \eta = 0$ é a mesma que o vetor δu deve satisfazer no conjunto $\mathcal{V}(\dot{r}(t); r(t); t)$. Assim, a posição $\hat{q}(\alpha; t)$ é a soma de uma posição em M que obedece aos vínculos, com α vezes uma velocidade virtual.

Para o que se seguirá, necessitamos introduzir um pouco mais de notação.

Seja $\mathcal{U}$ uma vizinhança aberta de M e $\widetilde{\mathcal{M}}$ o conjunto das curvas definidas em $[t_1; t_2]$ com imagem em $\mathcal{U}$.

Consideramos o funcional $\mathcal{W}_I : \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\mathcal{W}_I(q) = \int_I L(\dot{q}(t); q(t); t) dt. \quad (1.14)$$

$\mathcal{W}_I$ é chamado de **Ação de q ao longo de I** .

Um problema de Cálculo de Variações que pode ser considerado é o de estudar quais são as curvas q 's que são pontos estacionários do funcional $\mathcal{W}_I$, considerando-se as variações do tipo clássico (conforme (1.14)). Dito de outro modo, queremos encontrar q tal que

$$\frac{d}{d\alpha} \mathcal{W}_I(q + \alpha\eta) \Big|_{\alpha=0} = 0. \quad (1.15)$$

Este é o chamado **Princípio de Hamilton**. Pode-se provar que este princípio e o D'Alembert-Lagrange produzem o mesmo resultado para sistemas com forças naturais. Ou, em outras palavras, temos a seguinte proposição:

Proposição 1.1: *Uma curva q pertencente a $\mathcal{M}$ satisfaz (1.13') com $Q_0 = 0$ se, e somente se, q é ponto estacionário de $\mathcal{W}_I$.*

No caso em que $f \equiv 0$, as condições para que $q(t) + \alpha\eta(t)$ seja uma variação clássica se resumem a $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$. Desta forma, o Princípio de Hamilton mostra que o problema

de procurar movimentos de um sistema mecânico com forças naturais sem vínculos não integráveis (isto é, as restrições se resumem a $r(t) \in M$) equivale ao chamado **Problema de Lagrange** para o funcional $\int_{t_1}^{t_2} L dt$ em Cálculo de Variações, com extremidades fixas e sem vínculos.

Este problema é muito conhecido em Cálculo de Variações, e será apresentado aqui na sua formulação mais geral devido à importância que terá para nós no Capítulo 2.

Problema de Lagrange (ver, por exemplo, [5])

Sejam $\mathcal{A} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\mathcal{A}(q) = \int_{t_1}^{t_2} A(\dot{q}(t); q(t); t) dt,$$

onde $A : U \rightarrow \mathbb{R}$, U é um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ e $g_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, $m < n$.

Consideramos $q : [t_1; t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $(\dot{q}(t); q(t); t) \in U$ e $g_i(\dot{q}(t); q(t); t) = 0$ $1 \leq i \leq m$, para todo $t \in [t_1; t_2]$.

Uma **Variação no Sentido Estrito** será uma aplicação

$$\begin{aligned} \tilde{q} &: (-\varepsilon; \varepsilon) \times [t_1; t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (\alpha; t) &\mapsto \tilde{q}(\alpha; t) = q(t) + \alpha \eta(t) \end{aligned}$$

tal que

- i) $\eta : [t_1; t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$;
- ii) $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$;
- iii) para todo $\alpha \in (-\varepsilon; \varepsilon)$, a curva $\tilde{q}_\alpha(t) = \tilde{q}(\alpha; t)$ satisfaz as equações dos vínculos, qualquer que seja $t \in [t_1; t_2]$.

O problema de Lagrange consiste em procurar pontos estacionários de $\mathcal{A}$ com a definição de variação dada acima, isto é, procurar $q : [t_1; t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$\frac{\partial}{\partial \alpha} \mathcal{A}(q + \alpha \eta)|_{\alpha=0} = 0$, para todo η satisfazendo (i), (ii) e (iii) acima.

A diferença entre este problema e aquele considerado na formulação do Princípio de Hamilton reside nas condições impostas às curvas $\eta : [t_1; t_2] \rightarrow R^n$ usadas para a caracterização dos pontos estacionários de $\mathcal{A}$.

Uma consequência fundamental desta diferença é que se fosse possível estabelecer uma formulação do Princípio de Hamilton, no caso geral de vínculos não integráveis, relativamente a variações no sentido estrito, poderíamos apresentar uma abordagem Hamiltoniana da Mecânica Lagrangiana (ver abaixo) também nesta situação. Esta impossibilidade é uma das questões que motivam a proposta do modelo Vakonômico de Arnold-Kozlov apresentado no Capítulo 2.

Formulação Hamiltoniana

Há uma outra forma de se estudar movimentos de pontos materiais, além destas que vimos até agora. A esta forma damos o nome de **Mecânica Hamiltoniana**, que é estudada com vínculos integráveis e com forças naturais. Vamos descrevê-la.

Introduzindo a variável

$$p = \frac{\partial L}{\partial u}, \quad (1.16)$$

é possível em certas circunstâncias modificar o conjunto de variáveis $(u; q; t)$ para um novo conjunto $(p; q; t)$. Para isto, basta que u possa ser escrito em (1.16) como uma função de $(p; q; t)$. Isto pode ser feito através da Transformação de Legendre, usando o Teorema das Funções Implícitas, quando $\det(\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}) \neq 0$, para todo $(u; q; t)$ com $t \in [t_1; t_2]$, $q \in U$ e $u \in R^n$.

Sob estas hipóteses, definimos a função **Hamiltoniana** por

$$H(p; q; t) = \langle p; u(p; q; t) \rangle - L(u(p; q; t); q; t). \quad (1.17)$$

A seguir, estão enunciados alguns resultados cujas demonstrações se encontram, por exemplo, em [1]:

- Seja L uma função Lagrangiana e H a sua Hamiltoniana associada. $q : I \rightarrow R^n$ é solução do sistema

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

(equações de Lagrange quando $f \equiv 0$ e as forças são naturais)

se, e só se, $p(t) = \frac{\partial L}{\partial u}(\dot{q}(t); q(t); t)$ é tal que

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (1.18)$$

Estas equações são chamadas de **Equações de Hamilton**.

- Se q e p satisfazem (18), então

$$\frac{d}{dt} H(p(t); q(t); t) = \frac{\partial H}{\partial t}(p(t); q(t); t).$$

Segue-se que, se H não depende de t , H é uma integral primeira de (1.18).

- Se $L = T - \Pi$, com Π não dependendo de u , a Hamiltoniana $H = T + \Pi$ é a energia total do sistema.

Também pode-se tratar o sistema (1.18) do ponto de vista do Cálculo de Variações. Para isto, considero um conjunto aberto $A \subset R^n \times R^n \times R$, $H : A \rightarrow R$ uma função Hamiltoniana.

Definimos $\overline{\mathcal{M}} = \{(p; q) \in C^\infty(I; R^n \times R^n) : (p(t); q(t); t) \in A, \forall t \in I\}$. Definimos também $\overline{W}_I : \overline{\mathcal{M}} \rightarrow R$ por

$$\overline{W}_I(p; q) = \int_I \left[\sum_{i=1}^n p_i(t) \frac{d}{dt} q_i(t) - H(p(t); q(t); t) \right] dt.$$

Proposição 1.2 (Princípio da Mínima Ação): *A curva $(p; q) : I \rightarrow R^n \times R^n$ tal que $(p(t); q(t); t) \in A$ para todo t satisfaz (1.18) se, e só se, $(p; q)$ é um ponto estacionário de*

$\overline{W}_I$ com relação às variações

$$\bar{q}(\alpha; t) = q(t) + \alpha\eta(t), \quad \bar{p}(\alpha; t) = p(t) + \alpha\xi(t),$$

$$\alpha \in (-\varepsilon; \varepsilon), \quad t \in I, \quad \eta(t_1) = \eta(t_2) = 0.$$

Exemplo 1.1:

Consideramos um ponto P_1 vinculado ao plano horizontal Γ e o ponto P_2 vinculado à vertical passando por O (veja figura 1). A distância de O a P_1 mais a distância de O a P_2 permanece constante, e igual a l .

figura 1

Adotamos o sistema de coordenadas $(x; y; z)$ com o plano $(x; y)$ coincidindo com o plano Γ , e z coincidindo com a vertical passando por O .

As restrições impostas aos pontos materiais não se referem às suas velocidades. Ou seja, a única condição do sistema é que os pontos P_1 e P_2 devem pertencer a uma certa variedade. Tal variedade será descrita pelas relações:

$$z_1 = 0;$$

$$x_2 = 0;$$

$$y_2 = 0;$$

$$x_1^2 + y_1^2 + z_2^2 - l^2 = 0,$$

com $(x_1; y_1; z_1) = P_1$ e $(x_2; y_2; z_2) = P_2$.

A força agindo no sistema é a força peso:

$$F(v_{x_1}; v_{y_1}; v_{z_1}; v_{x_2}; v_{y_2}; v_{z_2}; x_1; y_1; z_1; x_2; y_2; z_2; t) = g(0; 0; m_1; 0; 0; m_2),$$

que tem como potencial

$$\Pi(v_{x_1}; v_{y_1}; v_{z_1}; v_{x_2}; v_{y_2}; v_{z_2}; x_1; y_1; z_1; x_2; y_2; z_2; t) = -m_1 g z_1 - m_2 g z_2.$$

Lembrando que $z_1 = 0$, o Lagrangeano do sistema é :

$$L = \frac{1}{2}(m_1(v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2) + m_2 v_{z_2}^2) + m_2 g z_2.$$

Em relação a coordenadas generalizadas, representamos o sistema de acordo com a função φ dada por

$$\varphi(\theta; \psi; \rho) = (\rho \cos \theta; \rho \sin \theta; l - \rho),$$

com $\rho \in (0; l)$, $\theta \in (0; 2\pi)$.

As coordenadas φ_1 , φ_2 e φ_3 representam as coordenadas x_1 , y_1 e z_2 , respectivamente. Quanto às coordenadas restantes, estas não necessitam de representação, já que devem ser nulas neste sistema. Note-se também que a condição $h_4 = 0$, imposta a x_1 , y_1 e z_2 , é verificada por suas representações φ_1 , φ_2 e φ_3 .

As velocidades dos pontos são escritas como:

$$v_{x_1} = -\rho \sin \theta \mu_\theta + \rho \cos \theta \mu_\rho;$$

$$v_{y_1} = \rho \cos \theta \mu_\theta + \rho \sin \theta \mu_\rho;$$

$$v_{z_2} = -\mu_\rho.$$

E o Lagrangeano em $(\theta; \rho; \mu_\theta; \mu_\rho)$:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(m_1(-\rho \sin \theta \mu_\theta + \rho \mu_\rho \cos \theta)^2 + m_1(\rho \cos \theta \mu_\theta + \rho \mu_\rho \sin \theta)^2 + m_2 \mu_\rho^2) + m_2 g(l - \rho) = \\ &= \frac{1}{2}m_1(\rho^2 \sin^2 \theta \mu_\theta^2 + \rho^2 \cos^2 \theta \mu_\theta^2 - 2\rho^2 \sin \theta \cos \theta \mu_\theta \mu_\rho + 2\rho^2 \sin \theta \cos \theta \mu_\theta \mu_\rho + \end{aligned}$$

$$+ \rho^2 \mu_\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \mu_\rho^2 \sin^2 \theta) + m_2 \mu_\rho^2) + m_2 g(l - \rho) = \\ = \frac{1}{2}(m_1 \rho^2 (\mu_\theta^2 + \mu_\rho^2) + m_2 \mu_\rho^2) + m_2 g(l - \rho).$$

Este sistema não apresenta vínculos que restrinjam as suas velocidades. As únicas restrições existentes foram impostas às posições dos pontos P_1 e P_2 , as quais forma representadas na função φ , determinando uma variedade M . Vê-se, assim, que o sistema não apresenta vínculos não integráveis. Com isto, o termo $\frac{\partial f}{\partial u}$ não aparece.

E também não aparece a parcela da força generalizada Q_0 , que não apresenta potencial, já que a única força envolvida é o peso do ponto P_2 , que é uma força natural. Conclui-se que a curva q que descreve um movimento do sistema satisfaz a equação (1.12) com lado direito igual a 0.

Vamos calcular $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial u}$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial u} = \frac{d}{dt} (m_1 \rho^2 \mu_\theta^2; (m_1 \rho^2 + m_2) \mu_\rho) = \\ = (m_1 \rho^2 \dot{\mu}_\theta + 2m_1 \rho \mu_\rho \mu_\theta; (m_1 \rho^2 + m_2) \dot{\mu}_\rho + 2m_1 \rho \mu_\rho^2).$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial q} = (0; m_1 \rho (\mu_\theta^2 + \mu_\rho^2) - m_2 g).$$

Conseguimos assim uma equação diferencial ordinária de 2a. ordem.

Se tratarmos o sistema em relação à Mecânica Hamiltoniana, devemos introduzir a variável $p = \frac{\partial L}{\partial u}$:

$$p = (m_1 \rho^2 \mu_\theta; (m_1 \rho^2 + m_2) \mu_\rho).$$

Segue que $\mu_\theta = \frac{p_\theta}{m_1 \rho^2}$ e $\mu_\rho = \frac{p_\rho}{(m_1 \rho^2 + m_2)}$.

Com isto,

$$H = \langle p; \dot{q} \rangle - L =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{p_\theta^2}{m_1 \rho^2} + \frac{p_\rho^2}{(m_1 \rho^2 + m_2)} - \frac{1}{2} \left(m_1 \rho^2 \left(\frac{p_\theta^2}{m_1^2 \rho^4} + \frac{p_\rho^2}{(m_1 \rho^2 + m_2)^2} \right) + m_2 \frac{p_\rho^2}{(m_1 \rho^2 + m_2)^2} \right) - \\
&\quad - m_2 g(l - \rho) = \\
&= \frac{1}{2} \frac{p_\theta^2}{m_1 \rho^2} + \frac{1}{2} \frac{p_\rho^2}{(m_1 \rho^2 + m_2)} - m_2 g(l - \rho).
\end{aligned}$$

As equações de Hamilton são:

$$\begin{aligned}
\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \left(\frac{p_\theta}{m_1 \rho^2}; \frac{p_\rho}{m_1 \rho^2 + m_2} \right); \\
\dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -\left(0; \frac{p_\theta^2}{m_1 \rho^3} - \frac{m_1 \rho p_\rho^2}{(m_1 \rho^2 + m_2)^2} + m_2 g \right) = \\
&= \left(0; \frac{p_\rho^2}{m_1 \rho^3} + \frac{m_1 \rho p_\rho^2}{(m_1 \rho^2 + m_2)^2} - m_2 g \right).
\end{aligned}$$

Concluimos que $\dot{p} = 0$ e então p_θ é constante.

Supomos que no instante inicial $t_0 \in (t_1; t_2)$, $p_\theta(t_0)$ é zero. Assim, $p_\theta(t) = 0$, e também $\dot{\theta}(t) = 0$ para todo t . Daí, $\theta(t)$ é constante. Consequentemente, as equações diferenciais ficam:

$$\dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m_1 \rho^2 + m_2}; \quad \dot{p}_\rho = \frac{m_1 \rho p_\rho^2}{(m_1 \rho^2 + m_2)^2} - m_2 g.$$

No caso particular em que só existe o ponto material $(m_2; P_2)$ no sistema, ou seja, a massa m_1 é nula, as equações são:

$$\dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m_2}; \quad \dot{p}_\rho = -m_2 g.$$

Segue que $\ddot{\rho} = -g$, que representa o movimento de queda livre do ponto material $(m_2; P_2)$.

Neste exemplo que vimos, os resultados obtidos analiticamente são compatíveis com os movimentos verificados experimentalmente. Porém em alguns casos, nos quais os vínculos dependem das velocidades, a teoria da Mecânica Lagrangiana, notadamente os Princípios de D'Alembert-Lagrange e o de Hamilton, produzem resultados que não correspondem ao que seria de se esperar.

Vamos a outro exemplo.

Exemplo 1.2 (extraído de [2]):

Consideramos um “skate” que desliza sem atrito sobre um plano inclinado (veja figura 2).

figura 2

Sejam x e y coordenadas cartesianas, com y sendo o eixo horizontal, e x o eixo contido no plano inclinado, com sentido para baixo.

Sejam $(x; y)$ as coordenadas do ponto de contato do skate com o plano, e θ o ângulo de rotação do skate a partir do eixo x .

A equação do vínculo deste sistema é $u_x \sin \theta - u_y \cos \theta = 0$.

Se escolhermos unidades de massa, tempo e comprimento convenientes, o Lagrangeano

do sistema é da forma:

$$L = \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2 + u_\theta^2) + x.$$

As equações de Lagrange ficam:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial L}{\partial q} = \lambda \frac{\partial}{\partial u} (u_x \sin \theta - u_y \cos \theta).$$

$$\frac{d}{dt} (u_x; u_y; u_\theta) - (1; 0; 0) = \lambda (\sin \theta; -\cos \theta; 0).$$

$$\text{Assim, } \ddot{x} = \lambda \sin \theta + 1, \quad \ddot{y} = -\lambda \cos \theta \quad \text{e} \quad \ddot{\theta} = 0.$$

Por estas relações, descobrimos o valor de λ , que é $-2 \sin \theta$.

Se considerarmos 0 e ω como condições iniciais $\theta(0)$ e $\dot{\theta}(0)$ respectivamente, então:

$$\begin{aligned} \theta &= \omega t; \\ \ddot{x} &= -2 \sin^2 \omega t + 1 = \cos 2\omega t; \\ \ddot{y} &= 2 \sin \omega t \cos \omega t = \sin 2\omega t. \end{aligned}$$

Estas equações são facilmente integráveis:

$$x(t) = \frac{1}{2\omega^2} \sin^2 \omega t, \quad y(t) = \frac{1}{2\omega^2} (\omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t),$$

com condições iniciais $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 0$.

Vemos que a expressão analítica de $x(t)$ indica que o skate faria um movimento periódico, de período $\frac{\pi}{\omega}$, o que, a princípio, sabemos que não corresponde ao que se observa experimentalmente.

CAPÍTULO 2

MECÂNICA VAKONÔMICA

CAPÍTULO 2: MECÂNICA VAKONÔMICA

Neste capítulo, vamos apresentar um novo modelo para a descrição de movimentos de pontos materiais que estão sujeitos a vínculos integráveis ou não. Este modelo foi inicialmente proposto por V. V. Kozlov nos artigos [3], e posteriormente reapresentado por V. I. Arnold em [2] com o nome de Mecânica Vakonômica (derivado da abreviação em inglês de *Variational Axiomatic Kind*).

Existem certas diferenças entre estes dois trabalhos. No que se segue, iremos levar em conta as definições dadas em [2], e, paralelamente, destacaremos tais diferenças ao longo do texto. Esta abordagem aplica-se apenas a sistemas sujeitos a forças naturais, isto é, sistemas que são descritos pela sua lagrangiana L . Como ficará claro mais adiante, esta restrição é natural, dada a forma como são encarados os movimentos neste contexto.

Vimos no capítulo precedente que, quando o sistema em estudo estava sujeito a apenas vínculos integráveis e a forças potenciais, o Princípio de Hamilton garante uma equivalência entre:

- Procurar pontos estacionários do funcional Ação, quando consideramos variações no sentido estrito (que conduz ao Problema de Lagrange para o funcional Ação; ver [5], capítulos VII, VIII e IX);
- Procurar pontos estacionários desse funcional, quando consideramos variações no sentido clássico;
- Procurar as soluções das equações de Lagrange, deduzidas a partir do Princípio de D'Alembert-Lagrange.

É conhecido entretanto que, na presença de vínculos não integráveis, esta equivalência não é perfeita, uma vez que se considerarmos o Problema de Lagrange neste contexto não obteremos as mesmas equações deduzidas do Princípio de D'Alembert-Lagrange no capítulo anterior, em (1.13). Uma forma de contornar este problema é considerar variações clássicas o que, conforme vimos, permite obter um resultado do tipo variacional para as equações de Lagrange através do Princípio de Hamilton. A grande objeção a esta forma de resolver a questão é que, com a definição clássica de variação, não se conhece, até agora, uma maneira de apresentar a Mecânica dos sistemas com vínculos não integráveis sob a forma Hamiltoniana.

Dadas as condições do capítulo anterior, consideremos uma variedade M na qual os pontos materiais devem estar (lembremos que M representa os vínculos geométricos)

e tomemos as coordenadas generalizadas $q_1, q_2, \dots, q_n$, pertencentes a um determinado conjunto aberto $U \subset R^n$, que caracterizam as suas posições. Ao longo do tempo, estas posições descrevem uma curva $q : [t_1; t_2] \rightarrow R^n$.

Na Mecânica Lagrangiana, o Princípio de Hamilton se baseia na definição de variações do tipo clássico.

A Mecânica Vakonômica se apóia em uma nova definição de variação na qual a procura de pontos estacionários do funcional ação não será mais equivalente, em sistemas com vínculos não integráveis, à busca de soluções para as equações de Lagrange (1.13). Para vínculos integráveis, porém, a equivalência continua existindo.

Dada uma curva q satisfazendo

$$i) \quad q(t) \in U, \quad \forall t \in [t_1; t_2];$$

$$ii) \quad f_i(\dot{q}(t); q(t); t) = 0, \quad \forall t \in [t_1; t_2], \quad 1 \leq i \leq m < n$$

(f_i sendo vínculos integráveis ou não), com

$$\frac{\partial(f_1; \dots; f_m)}{\partial(u_1; \dots; u_n)}$$

de posto m , definimos **Variações de q no Sentido Vakonômico** como funções $\hat{q} : (-\varepsilon; \varepsilon) \times [t_1; t_2] \rightarrow R^n$ tais que

$$i) \quad \hat{q}(0; t) = q(t), \quad \forall t \in [t_1; t_2];$$

$$ii) \quad \hat{q}(\alpha; t_1) = q(t_1) \text{ e } \hat{q}(\alpha; t_2) = q(t_2), \quad \forall \alpha \in (-\varepsilon; \varepsilon);$$

$$iii) \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(f_i \left(\frac{\partial \hat{q}}{\partial t}(\alpha; t); \hat{q}(\alpha; t); t \right) \right) \Big|_{\alpha=0} = 0, \quad \forall t \in [t_1; t_2], \quad 1 \leq i \leq m.$$

Observações:

i) Em [3], o item (ii) se resume a $\hat{q}(\alpha; t_1) = q(t_1)$. Ou seja, as variações têm apenas uma extremidade fixa;

ii) A condição (iii) acima significa que a curva $\hat{q}_\alpha(t) = \hat{q}(\alpha; t)$ satisfaz a relação $f = 0$ até $O(\alpha)$.

Para o que nos interessa, vamos considerar variações do tipo

$$\hat{q}(\alpha; t) = q(t) + \alpha\xi(t), \quad (2.1)$$

com $\xi : [t_1; t_2] \xrightarrow{C^\infty} R^n$ de modo que $\hat{q}$ satisfaça (i), (ii) e (iii).

A condição (i) é trivialmente satisfeita; para (ii), é necessário e basta que se tenha $\xi(t_1) = \xi(t_2) = 0$.

Vamos nos ater à condição (iii), explicitando a expressão ali referenciada:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(f_i \left(\frac{\partial \hat{q}}{\partial t}(\alpha; t); \hat{q}(\alpha; t); t \right) \right) \Big|_{\alpha=0} = 0 \\ & \left(\frac{\partial f_i}{\partial u} \left(\frac{\partial \hat{q}}{\partial t}(\alpha; t); \hat{q}(\alpha; t); t \right) \frac{\partial^2 \hat{q}}{\partial \alpha \partial t}(\alpha; t) + \frac{\partial f_i}{\partial q} \left(\frac{\partial \hat{q}}{\partial t}(\alpha; t); \hat{q}(\alpha; t); t \right) \frac{\partial \hat{q}}{\partial \alpha}(\alpha; t) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial f_i}{\partial t} \left(\frac{\partial \hat{q}}{\partial t}(\alpha; t); \hat{q}(\alpha; t); t \right) \frac{\partial t}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Temos que $\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial t}{\partial \alpha} = 0$, e então

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{q}}{\partial \alpha}(\alpha; t) \right) = \frac{\partial^2 \hat{q}}{\partial \alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \hat{q}}{\partial t \partial \alpha} \frac{\partial t}{\partial t} = \frac{\partial^2 \hat{q}}{\partial t \partial \alpha} = \frac{\partial^2 \hat{q}}{\partial \alpha \partial t}.$$

Também vale que

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial t}(\alpha; t) \Big|_{\alpha=0} = \dot{q}(t), \quad \frac{\partial^2 \hat{q}}{\partial \alpha \partial t}(\alpha; t) \Big|_{\alpha=0} = \dot{\xi}(t), \quad \frac{\partial \hat{q}}{\partial \alpha}(\alpha; t) \Big|_{\alpha=0} = \xi(t).$$

Segue-se que a condição (iii) para variações do tipo (2.1) é equivalente à expressão:

$$\frac{\partial f_i}{\partial u} (\dot{q}(t); q(t); t) \dot{\xi}(t) + \frac{\partial f_i}{\partial q} (\dot{q}(t); q(t); t) \xi(t) = 0, \quad 1 \leq i \leq m < n, \quad (2.3)$$

ou seja, ξ satisfaz a um sistema linear de equações diferenciais ordinárias de posto m , tal que $\xi(t_1) = \xi(t_2) = 0$. Afirmamos que existe uma infinidade de curvas não nulas deste tipo (ver apêndice).

Para facilitar a notação utilizada mais adiante, denotararemos a matriz $(\frac{\partial f}{\partial u})^t$ por A , e $(\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial q})$ por $[f]$ (a derivada Lagrangiana de f).

Vamos caracterizar as funções ξ , de modo que a aplicação descrita em (2.1) seja uma variação.

Para isso, vamos projetar $\xi(t)$ em dois espaços ortogonais V e $W = V^\perp$. V será definido como o espaço gerado pelos m vetores $\frac{\partial f_i}{\partial u}$. Assim, $\xi(t)$ será uma soma

$$\xi_V(t) + \xi_W(t), \quad (2.4)$$

com $\xi_V(t) = \sum_{j=1}^m c_j(t) \frac{\partial f_j}{\partial u} (\dot{\xi}(t); \xi(t); t) \in V$, $c_j(t) \in \mathbb{R}$.

A expressão (2.3) fica:

$$\frac{\partial f_i}{\partial u} \left(\sum_{j=1}^m \dot{c}_j \left(\frac{\partial f_j}{\partial u} \right)^t + \sum_{j=1}^m c_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_j}{\partial u} \right)^t \right) + \frac{\partial f_i}{\partial u} \dot{\xi}_W + \frac{\partial f_i}{\partial q} \left(\sum_{j=1}^m c_j \left(\frac{\partial f_j}{\partial u} \right)^t \right) + \frac{\partial f_i}{\partial q} \xi_W = 0. \quad (2.5)$$

Temos, por definição, que $\langle (\frac{\partial f_i}{\partial u})^t; \xi_W \rangle = 0$. Então:

$$\langle \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_i}{\partial u} \right)^t; \xi_W \rangle + \langle \left(\frac{\partial f_i}{\partial u} \right)^t; \dot{\xi}_W \rangle = 0$$

e, portanto,

$$\frac{\partial f_i}{\partial u} \dot{\xi}_W = - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_i}{\partial u} \xi_W.$$

Como $\xi(t_1) = \xi(t_2) = 0$, devemos ter $\xi_V(t_1) = \xi_V(t_2) = 0$, e daí $c_i(t_1) = c_i(t_2) = 0$, $1 \leq i \leq m$.

De (2.5), vemos que o vetor $c(t) = (c_1(t); \dots; c_m(t))$, formado pelas coordenadas de $\xi(t)$ em relação à base $\frac{\partial f_1}{\partial u}; \dots; \frac{\partial f_m}{\partial u}$, deve satisfazer a um sistema de e. d. o.'s não homogêneo da forma

$$\dot{c} \frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t + c \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t + \frac{\partial f}{\partial q} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t \right) + \left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial q} \right) \xi_W = 0.$$

Com as notações definidas acima, esta equação é expressa por

$$\dot{c} + (A^t A)^{-1} \left(A^t \dot{A} + \frac{\partial f}{\partial q} A c \right) - (A^t A)^{-1} [f] \xi_W = 0.$$

Pela fórmula de variação das constantes, temos:

$$c(t) = \int_{t_1}^t \Gamma^{-1}(s) (A^t A)^{-1}(s) [f](s) \xi_W(s) ds,$$

onde Γ é uma solução fundamental da equação homogênea associada

$$\dot{c} + (A^t A)^{-1} \left(A^t \dot{A} + \frac{\partial f}{\partial q} A c \right) = 0.$$

Denominando Γ^{-1} por Δ , esta é uma solução fundamental de

$$\dot{\mu}^t = \mu^t (A^t A)^{-1} \left(A^t \dot{A} + \frac{\partial f}{\partial q} A \right) = 0.$$

Observamos que $\frac{\partial f}{\partial q} = -[f] + \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u}$, e portanto,

$$c(t) = \int_{t_1}^t \Delta \left(\frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t \right)^{-1} [f] \xi_W ds.$$

Concluimos que para $c(t_2)$ ser nulo, devemos ter ξ_W ortogonal a $\Delta \frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t [f]$ em $L_2([t_1; t_2]; R^n)$.

A recíproca desta afirmação é de verificação imediata, ou seja, se for verificada a ortogonalidade acima, podemos concluir que $c(t_2)$ seja nulo.

Pelo que vimos acima é válida a seguinte proposição:

Proposição: *Uma função $\xi : [t_1; t_2] \rightarrow R^n$ é um campo vetorial de variação se, e somente se, a projeção ξ_W de ξ em W é ortogonal a $\Delta \frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t [f]$ em $L_2([t_1; t_2]; R^n)$, onde Δ é solução fundamental de*

$$\dot{\mu}^t = \mu^t \left(\frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t \right)^{-1} \left(-[f] \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t \right) \right).$$

Tais funções ξ são chamadas de **Campos Vetoriais de Variação**.

Observação: Como já observamos, na formulação de Kozlov não se impõe nenhuma condição sobre a extremidade $q(t_2)$. Assim, pelo raciocínio acima, toda função ξ_W tal que $\xi_W(t_1) = 0$ pode ser completada com uma função ξ_V com valores em V de modo que $q(t) + \alpha(\xi_V(t) + \xi_W(t))$ seja uma variação.

A seguir, daremos uma outra caracterização para estes campos.

Lema 2.1: *Dada uma curva q que satisfaz os vínculos, uma função ξ é um campo vetorial de variação com relação a esta curva se, e somente se:*

$$i) \xi(t_1) = \xi(t_2) = 0; \tag{2.6}$$

$$ii) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_i}{\partial u} \right) \Big|_q \xi = [f_i] \Big|_q \xi, t_1 < t < t_2, 1 \leq i \leq m. \tag{2.7}$$

Prova: ($\Rightarrow$) Por hipótese, sabemos que $\hat{q} = q + \alpha\xi$ é uma variação de q , com as extremidades fixas. Em consequência, obtemos $\xi(t_1) = \xi(t_2) = 0$.

Da condição (iii) da definição de variação, sabemos que vale (2.3), e portanto,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial q} \xi + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \xi \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \xi \right) \Big|_{\alpha=0} = 0,$$

e então,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \xi \right) \Big|_{\alpha=0} = \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \xi - \frac{\partial f}{\partial q} \xi \right) \Big|_{\alpha=0} = ([f]\xi) \Big|_{\alpha=0}$$

Concluimos que $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \Big|_q \xi \right) = [f] \Big|_q \xi$.

($\Leftarrow$) Seja ξ uma função ao longo de q , tal que $\xi(t_1) = \xi(t_2) = 0$. Tomaremos $\hat{q}(\alpha; t) = q(t) + \alpha \xi(t)$, que terá as propriedades

i) $\hat{q}(0) = q$;

ii) $\hat{q}(\alpha; t_1) = q(t_1)$ e $\hat{q}(\alpha; t_2) = q(t_2)$ (portanto não dependem de α).

Da igualdade (2.7), vem

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial \hat{q}}{\partial t}(0; t); \hat{q}(0; t); t \right) \frac{\partial \hat{q}}{\partial \alpha}(0; t) \right) = \\ & = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial \hat{q}}{\partial t}(0; t); \hat{q}(0; t); t \right) - \frac{\partial f}{\partial q} \left(\frac{\partial \hat{q}}{\partial t}(0; t); \hat{q}(0; t); t \right) \right) \frac{\partial \hat{q}}{\partial \alpha}(0; t), \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial \hat{q}}{\partial t}(\alpha; t); \hat{q}(\alpha; t); t \right) \frac{\partial \hat{q}}{\partial \alpha}(\alpha; t) \right) \Big|_{\alpha=0} = \\ & = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial \hat{q}}{\partial t}(\alpha; t); \hat{q}(\alpha; t); t \right) - \frac{\partial f}{\partial q} \left(\frac{\partial \hat{q}}{\partial t}(\alpha; t); \hat{q}(\alpha; t); t \right) \right) \Big|_{\alpha=0} \frac{\partial \hat{q}}{\partial \alpha}(\alpha; t) \Big|_{\alpha=0}. \end{aligned}$$

Fazendo as mesmas passagens da primeira parte da demonstração, porém, no sentido inverso, temos que

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(f \left(\frac{\partial \hat{q}}{\partial t}(\alpha; t); \hat{q}(\alpha; t); t \right) \right) \Big|_{\alpha=0} = 0, \quad \forall t \in (t_1; t_2).$$

Isto encerra a prova. ■

Os pontos estacionários do funcional Ação relativamente à definição de Variação Vakonômica serão denominados por **Movimentos Vakonômicos**.

Apresentaremos, agora, o equivalente ao Princípio de Hamilton da Mecânica Lagrangeana, ou seja, as equações diferenciais que caracterizam movimentos Vakonômicos, as quais chamaremos de Equações de Lagrange da Mecânica Vakonômica. Tais equações foram apenas enunciadas em [2].

Teorema 2.1: *Uma curva $q : [t_1; t_2] \rightarrow M$ que satisfaz os vínculos do sistema é um ponto estacionário do funcional ação se, e somente se, existem m funções $\lambda_i : [t_1; t_2] \rightarrow R$ que verificam a seguinte igualdade ao longo de q*

$$[L] = \sum_{i=1}^m \lambda_i [f_i] + \sum_{i=1}^m \dot{\lambda}_i \frac{\partial f_i}{\partial u}. \quad (2.8)$$

Prova: ($\Leftarrow$) Seja ξ um campo vetorial de variação ao longo de q . Temos, então

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\int_{t_1}^{t_2} L \left(\frac{\partial \hat{q}}{\partial t}(\alpha; t); \hat{q}(\alpha; t); t \right) dt \right) \Big|_{\alpha=0} = \left(\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial u} \frac{\partial^2 \hat{q}}{\partial \alpha \partial t} + \frac{\partial L}{\partial q} \frac{\partial \hat{q}}{\partial \alpha} \right) dt \right) \Big|_{\alpha=0}. \quad (2.9)$$

Como $\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial u} \frac{\partial \hat{q}}{\partial \alpha} \right) = \frac{\partial L}{\partial u} \frac{\partial \hat{q}}{\partial \alpha} \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$, segue que (2.9) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} & \left(\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \frac{\partial \hat{q}}{\partial \alpha} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial u} \frac{\partial \hat{q}}{\partial \alpha} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial u} \right) \frac{\partial \hat{q}}{\partial \alpha} \right) dt \right) \Big|_{\alpha=0} = \\ & = - \left(\int_{t_1}^{t_2} [L] \frac{\partial \hat{q}}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} = - \int_{t_1}^{t_2} [L] \xi. \end{aligned}$$

Substituindo a expressão de $[L]$ na integral,

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_1}^{t_2} [L] \xi = - \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i [f_i] + \dot{\lambda}_i \frac{\partial f_i}{\partial u} \right) \xi = \\
& = - \sum_{i=1}^m \int_{t_1}^{t_2} \left(\lambda_i [f_i] \xi + \frac{d}{dt} \left(\lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u} \xi \right) - \lambda_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_i}{\partial u} \xi \right) \right) = - \sum_{i=1}^m \int_{t_1}^{t_2} \lambda_i \left([f_i] \xi - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_i}{\partial u} \xi \right) \right).
\end{aligned}$$

Usando o fato de ξ ser um campo vetorial de variação e o lema anterior, segue-se que esta última integral é zero. Portanto, q é um ponto estacionário do funcional ação.

($\Rightarrow$) Seja D o subespaço afim de dimensão m de $\mathcal{C}^\infty([t_1; t_2]; R^m)$ formado pelas soluções da equação diferencial linear não homogênea

$$\dot{\lambda}^t = -\lambda^t [f] \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t \left(\frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t \right)^{-1} + [L] \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t \left(\frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t \right)^{-1}.$$

Consideramos $S : D \rightarrow \mathcal{C}^\infty([t_1; t_2]; R^n)$ definida por

$$S(\lambda) = [L] - \dot{\lambda}^t \frac{\partial f}{\partial u} - \lambda^t [f].$$

De q ser ponto estacionário e da definição de S conclui-se que $\int_{t_1}^{t_2} S(\lambda) \xi = 0$, para todo campo vetorial de variação ξ e, além disso, $\langle S(\lambda)(t); \left(\frac{\partial f_i}{\partial u} \right)^t(t) \rangle = 0$, para todo $t \in [t_1; t_2]$ e $1 \leq i \leq m$.

Desta forma, decompondo ξ em ξ_V e ξ_W , vem que, $\int_{t_1}^{t_2} S(\lambda) \xi_W = 0$, para toda $\lambda \in D$ e para toda ξ_W que seja a projeção em W de um campo de variação.

Pela caracterização que fizemos dos campos vetoriais de variação, vem que, para todo $\lambda \in D$, existe $\mu_0 \in R^m$ (que pode depender de λ) tal que

$$S(\lambda) = \mu_0^t \Delta \left(\frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t \right)^{-1} [f]. \quad (2.10)$$

Além disso, pela ortogonalidade de $S(\lambda)$ e V , resulta que

$$\mu_0^t \Delta \left(\frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t \right)^{-1} [f] \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t = 0.$$

Fixamos agora $\bar{\lambda} \in D$, tomamos o μ_0 correspondente, e consideramos a curva em R^m definida por $(\beta(t))^t = \mu_0^t \Delta(t)$.

É imediato verificar que β^t satisfaz

$$\dot{\beta}^t = \beta^t \left(\frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t \right)^{-1} \left(-[f] \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t \right) \right).$$

Como $\mu_0^t \Delta \left(\frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t \right)^{-1} [f] \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t = 0$, segue que

$$\dot{\beta}^t = \beta^t \left(\frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t \right)^{-1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t \right). \quad (2.11)$$

Observamos, agora, que $\frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t$ é uma solução fundamental da equação diferencial homogênea

$$\dot{\varphi}^t = \varphi^t \left(\frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t \right)^{-1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t \right),$$

a qual, por (2.11), β resolve.

Assim, existe $\rho \in R^m$ tal que $\beta^t = \rho_0^t \frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t$. Usando isto, a relação (2.10) para $\bar{\lambda}$ e a definição de β , resulta que

$$S(\bar{\lambda}) = \rho_0^t [f].$$

Consideramos, agora, $\lambda = \bar{\lambda} + \rho_0$. Para tal função, teremos

$$[L] - \dot{\lambda}^t \frac{\partial f}{\partial u} - \lambda^t [f] = S(\bar{\lambda}) - \rho_0^t [f] = 0.$$

E, finalmente, conseguimos as funções λ_i que nos interessam, que são as coordenadas de λ acima. ■

Observamos que as equações de Lagrange da Mecânica Vakonômica deduzidas acima diferem das equações usuais pelo fator $\lambda[f]$. Quando $[f] \equiv 0$ (por exemplo, quando os vínculos são integráveis), estas equações coincidem.

Formulação Hamiltoniana na Mecânica Vakonômica

Mostraremos agora que, ao contrário da Mecânica Lagrangiana, a Mecânica Vakonômica pode ser colocada na forma Hamiltoniana mesmo quando existem vínculos não integráveis. Para isso, definimos o momento p da forma

$$p = \frac{\partial L}{\partial u} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u}, \quad (2.12)$$

onde $\lambda \in R^m$ são ainda desconhecidos.

Se admitirmos que $\det(\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}) \neq 0$, será possível pelo Teorema das Funções Implícitas determinar, ao menos localmente, u como função de p, q, λ e t .

Além disso, sob certas condições, é possível, utilizando as equações dos vínculos, representar λ em função de p, q e t . Por exemplo, quando $\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}$ for definida positiva e f_i for uma função afim nas velocidades u , ou seja,

$$f_i(u, q, t) = \langle a_i(q; t); u \rangle + b_i(q; t), 1 \leq i \leq m.$$

Nessas condições,

$$\frac{\partial(f_1; \dots; f_m)}{\partial(\lambda_1; \dots; \lambda_m)} = \left(\langle a_j; \frac{\partial u}{\partial \lambda_i} \rangle \right)_{i,j}. \quad (2.13)$$

Diferenciando (2.12) com relação a λ_i , obtemos

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial \lambda_i} = -a_i. \quad (2.14)$$

Então o jacobiano (2.13) tem a expressão:

$$\left(\left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial \lambda_j}; -\frac{\partial u}{\partial \lambda_i} \right\rangle \right)_{i,j}. \quad (2.15)$$

Para avaliar esta expressão, enunciaremos agora a

Proposição 2.1: *Se a matriz não singular $A \in \mathcal{M}_n(R)$, com $\langle A \cdot; \cdot \rangle$ definida positiva, e m vetores $x_1, \dots, x_m$ em R^n são tais que $(\langle Ax_i; x_j \rangle)_{i,j}$ tem determinante nulo, então $x_1, \dots, x_m$ são linearmente dependentes.*

Prova:

Por hipótese, $(\langle Ax_i; x_j \rangle)_{i,j}$ tem determinante nulo. Então os vetores linha desta matriz são linearmente dependentes, ou seja, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ não todos nulos tais que

$$\sum_{i=1}^m \langle Ax_i; x_j \rangle = 0, \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

Portanto, $\langle A(\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i); x_j \rangle = 0, \quad \forall j.$

Por isso, $\sum_{j=1}^m \alpha_j \langle A(\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i); x_j \rangle = 0 \Rightarrow$

$$\left\langle A \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \right); A \left(\sum_{j=1}^m \alpha_j x_j \right) \right\rangle = 0 \xrightarrow{\text{A def. posit.}}$$

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = 0,$$

com α_i 's não todos nulos. Portanto, $x_1, \dots, x_m$ são linearmente dependentes. ■

Como $\frac{\partial^2 L}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial \lambda_j}$ é não singular segue-se da proposição anterior e de (2.13) que, se $\left(\frac{\partial(f_1; \dots; f_m)}{\partial(\lambda_1; \dots; \lambda_m)} \right)$ tiver determinante nulo, os vetores a_j serão linearmente dependentes, o que é uma contradição. Portanto esta matriz tem determinante não nulo. Com isto, $\lambda_i = \lambda_i(p; q; t)$.

Introduzimos agora a seguinte função Hamiltoniana do sistema, que é análoga àquela considerada na Mecânica Lagrangiana usual:

$$H(p; q; t) = p \cdot u \Big|_{p, q, t} - L(u(p; q; t); q; t).$$

Porém, deve-se notar que a variável p aqui utilizada não é a mesma da Mecânica Lagrangiana tratada no capítulo inicial deste trabalho, assim como também não é a mesma a função $u = u(p; q; t)$.

Teorema 2.2: *A curva q é um ponto estacionário do funcional ação se, e somente se, existe uma curva $p : [t_1; t_2] \rightarrow R^n$ tal que*

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (2.16)$$

Prova: ($\Rightarrow$) Seja q um ponto estacionário do funcional ação, e λ a função em R^m , correspondente a q , dada pela equação de Lagrange da Mecânica Vakonômica, (2.8).

Pela definição de p , (2.12), temos

$$\frac{\partial H}{\partial p} = u^t + p \frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial L}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial p} = u^t + \lambda^t \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial p} = u^t + \lambda^t \frac{\partial f}{\partial p}.$$

Da equação (2.8), temos também

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial u} = \frac{\partial L}{\partial q} + \dot{\lambda}^t \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) + \lambda^t \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial q} \right),$$

com $u(t) = \dot{q}(t)$, e daí

$$\frac{d}{dt} p = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial u} + \frac{d}{dt} \left(\lambda^t \frac{\partial f}{\partial u} \right) = \frac{\partial L}{\partial q} + \lambda^t \frac{\partial f}{\partial q}.$$

$$\text{Mas } \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial q} + p \frac{\partial u}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial q} + (\lambda^t \frac{\partial f}{\partial u}) \frac{\partial u}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial q} + \lambda^t \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right) \Big|_{(p;q;t)}.$$

Porém, a função f tomada nas variáveis p, q e t é identicamente nula (lembramos que quando escrevemos λ em função de $(p;q;t)$ utilizamos as equações dos vínculos). Então, $\frac{\partial f}{\partial q} = \frac{\partial f}{\partial p} = 0$.

Como consequência, temos $\frac{dp}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial q}$.

Além disso, $\frac{dq}{dt} = u(t) = -\lambda^t \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial p}$.

($\Leftarrow$) Temos p e q soluções das equações (2.16). Por outro lado,

$$\frac{dq}{dt}(t) = u(t)$$

e

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{dp}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\lambda^t \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial H}{\partial q} - \lambda^t \frac{\partial f}{\partial q} = \dot{\lambda}^t \frac{\partial f}{\partial u} + \lambda^t [f],$$

e, portanto, q é ponto estacionário. ■

Este resultado nos garante, também no contexto da Mecânica Vakonômica, a validade do seguinte fato, cuja demonstração é de todo imediata e será omitida.

Proposição 2.2: *Se um sistema de pontos materiais tem função Hamiltoniana Vakonômica H independente do tempo, então tal função é uma integral primeira deste sistema.*

A seguir, daremos um exemplo de aplicação do que foi discutido até aqui.

Exemplo 2.1: Voltemos a analisar o exemplo do “skate” do capítulo anterior. O vínculo do sistema era dado por $u_x \sin \varphi - u_y \cos \varphi = 0$, e o Lagrangiano era $L = \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2 + u_\varphi^2) + x$.

O momento do sistema será

$$p_x = u_x - \lambda \sin \varphi, \quad p_y = u_y + \cos \varphi, \quad p_\varphi = u_\varphi. \quad (2.17)$$

Com isto, a variável λ escrita como função de p e q , será

$$\lambda = p_y \cos \varphi - p_x \sin \varphi. \quad (2.18)$$

Com estas expressões, podemos determinar o Hamiltoniano do sistema

$$H = \frac{1}{2} \left((p_x \cos \varphi + p_y \sin \varphi)^2 + p_\varphi^2 \right) - x.$$

Observamos, da expressão de H , que $\frac{\partial H}{\partial y} = 0$. Escolheremos como condição inicial $p_y(0) = 0$, e daí segue que $p_y \equiv 0$. Além disso, temos $\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = 1$, $\dot{\varphi} = p_\varphi$ e $\dot{p}_\varphi = p_x^2 \sin \varphi \cos \varphi$.

Concluimos que p_x é igual a t (a menos de uma constante), e que $\ddot{\varphi} = t^2 \sin \varphi \cos \varphi$.

E, analisando as equações (2.17) e (2.18), obtemos

$$\dot{x} = t \cos^2 \varphi, \quad \dot{y} = t \sin \varphi \cos \varphi.$$

A expressão de x mostra que o skate desce indefinidamente por sobre o plano inclinado.

Forma normal da equações de Lagrange

Dadas as equações de Lagrange da Mecânica Vakonômica, estamos interessados na obtenção de uma curva que verifique tais equações, além de satisfazer os vínculos impostos ao sistema. Também estamos interessados na possibilidade de determinar tal curva, a partir de condições iniciais conhecidas a priori (ou seja, a validade do chamado **Princípio**

de Determinação no escopo da Mecânica Vakonômica). A esta questão estão dedicadas esta e a próxima secções.

Vamos estudar o problema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial u} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = \dot{\lambda}^t \frac{\partial f}{\partial u} + \lambda^t [f]; \\ f(\dot{q}; q; t) = 0; \\ q(t_0) = q_0 \quad \dot{q}(t_0) = u_0, \end{cases}$$

ou, equivalentemente, derivando a equação do vínculo em relação ao tempo

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial u} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = \dot{\lambda}^t \frac{\partial f}{\partial u} + \lambda^t [f]; \\ \frac{\partial f}{\partial u} \ddot{q} + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0; \\ q(t_0) = q_0; \quad \dot{q}(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Denotando a matriz $\left(\frac{\partial^2 T}{\partial u_i \partial u_j} \right)$ por Ψ , a expressão

$$- \left(\frac{\partial^2 T}{\partial u_i \partial q_j} \right) \dot{q} - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q} \right)^t + \left(\frac{\partial T}{\partial q} \right)^t - \left(\frac{\partial^2 T}{\partial t \partial u_i} \right)$$

por Φ e

$$- \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q}$$

por β , obtemos um problema equivalente (notemos que Ψ , Φ e β dependem apenas de q , u e t):

$$\begin{cases} \Psi \ddot{q} = \Phi + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t \dot{\lambda}^t [f]^t \lambda; \\ \frac{\partial f}{\partial u} \ddot{q} = \beta; \\ q(t_0) = q_0; \quad \dot{q}(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Como sabemos que T é uma forma quadrática definida positiva, a função Ψ pode ser invertida, e então, da primeira equação do problema de Cauchy acima, temos

$$\ddot{q} = \Psi^{-1} \Phi + \Psi^{-1} [f]^t \lambda + \Psi^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t \dot{\lambda}.$$

Substituindo na segunda equação, resulta que

$$\frac{\partial f}{\partial u} \Psi^{-1} \Phi + \frac{\partial f}{\partial u} \Psi^{-1} [f]^t \lambda + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \Psi^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t \right) \dot{\lambda} = \beta.$$

Porém, a matriz $\Gamma = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \Psi^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t \right)$ que está multiplicando $\dot{\lambda}$ na expressão acima é inversível, pois é simétrica definida positiva.

Desta forma, obtemos o problema de Cauchy das equações de Lagrange da Mecânica Vakonômica na forma normal

$$\begin{cases} \ddot{q} = \Psi^{-1} \Phi + \Psi^{-1} [f]^t \lambda + \Psi^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t \dot{\lambda}; \\ \dot{\lambda} = -\Gamma^{-1} \frac{\partial f}{\partial u} \Psi^{-1} [f]^t \lambda + \Gamma^{-1} \beta - \Gamma^{-1} \frac{\partial f}{\partial u} \Psi^{-1} \Phi; \\ q(t_0) = q_0; \quad \dot{q}(t_0) = u_0; \\ \lambda(t_0) = \lambda_0 \in R^m. \end{cases} \quad (2.19)$$

Observamos que a condição inicial λ_0 da variável λ é arbitrária, podendo ser qualquer ponto de R^m , o que nos faz desconfiar que as condições iniciais nas variáveis q e u podem não determinar, de forma única, a curva $q(t)$. A este assunto está dedicada a secção seguinte.

Princípio da Determinação na Mecânica Vakonômica

Na Mecânica Lagrangiana convencional, baseada no Princípio de D'Alembert-Lagrange, obtem-se como resultado as equações de Lagrange (1.13), que podem ser reduzidas a um problema de Cauchy nas variáveis $(u; q)$ (veja [1]). Portanto, estas equações determinam o movimento do sistema de pontos a partir das forças externas, dos vínculos e das condições iniciais nas variáveis $(u; q)$, permitindo achar a curva $q(t)$.

Todas estas propriedades determinam que, dadas condições iniciais compatíveis com as restrições do sistema, havia uma única curva $q(t)$ que satisfaz (1.13) e, associada a esta, apenas uma função λ (nas equações de Lagrange), e uma única curva p (para as equações de Hamilton), correspondentes à curva citada, que verificavam tais equações. Este é o chamado Princípio de Determinação.

Porém, conforme ressaltamos no fim da secção anterior, na Mecânica Vakonômica, tal princípio pode não ser válido. Para começar, nos sistemas que apresentam vínculos não integráveis, não há unicidade nas curvas λ e p para as equações Vakonômicas de Lagrange e de Hamilton.

Se voltarmos a analisar a forma normal das equações de Lagrange na Mecânica Vakonômica, (2.19) do final do parágrafo anterior, obteremos certas proposições que se referem a esta questão.

Proposição 2.3: *Sejam*

$$(q_0; u_0) \in R^n \times R^n, \quad \lambda_0 \in R^m,$$

$$q : [t_1; t_2] \rightarrow R^n, \quad \lambda : [t_1; t_2] \rightarrow R^m$$

de forma a $(q; \lambda)$ ser a solução de (2.19) com condições iniciais $q(t_0) = q_0$, $\dot{q}(t_0) = u_0$ e $\lambda(t_0) = \lambda_0$. Então a condição necessária e suficiente para que o par $(q; \tilde{\lambda})$ seja a solução de tais equações com condições iniciais $q(t_0) = q_0$, $\dot{q}(t_0) = u_0$ e $\lambda(t_0) = \tilde{\lambda}_0 \in R^m$, onde $\tilde{\lambda} : [t_1; t_2] \rightarrow R^m$, é que $\varphi = \tilde{\lambda} - \lambda$ resolva a equação diferencial ordinária sobredeterminada

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t \dot{\varphi} + [f]^t \varphi = 0$$

com condição inicial $\varphi(t_0) = \tilde{\lambda}(t_0) - \lambda(t_0)$.

Prova:

Se tomarmos $(q; \lambda)$ e $(q; \tilde{\lambda})$ como nas hipóteses da proposição, as provas das verificações da equação e da condição inicial por parte de φ são imediatas. Basta analisar a expressão de φ , e substituí-la na primeira equação de (2.19).

Para a demonstração da suficiência das condições sobre φ , observamos que $\dot{\lambda} = \dot{\tilde{\lambda}} - \dot{\varphi}$, e que uma substituição das expressões de λ e $\tilde{\lambda}$ garante a verificação da primeira equação de (2.19) por parte de $(q; \tilde{\lambda})$.

Com relação à segunda equação, lembramos que $\dot{\tilde{\lambda}} = \dot{\varphi} + \dot{\lambda}$, e portanto

$$\dot{\tilde{\lambda}} = \dot{\varphi} - \Gamma^{-1} \frac{\partial f}{\partial u} \Psi^{-1} [f]^t \lambda + \Gamma^{-1} \beta - \Gamma^{-1} \frac{\partial f}{\partial u} \Psi^{-1} \Phi.$$

Sabemos, ainda, que $[f]^t \lambda = -[f]^t \varphi + [f]^t \tilde{\lambda} = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t \dot{\varphi} + [f]^t \tilde{\lambda}$, e daí

$$\dot{\tilde{\lambda}} = \dot{\varphi} - \Gamma^{-1} \frac{\partial f}{\partial u} \Psi^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t \dot{\varphi} - \Gamma^{-1} \frac{\partial f}{\partial u} \Psi^{-1} [f]^t \tilde{\lambda} + \Gamma^{-1} \beta - \Gamma^{-1} \frac{\partial f}{\partial u} \Psi^{-1} \Phi.$$

Mas Γ^{-1} é a matriz inversa de $\frac{\partial f}{\partial u} \Psi^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t$, e portanto a segunda equação está satisfeita.

Quanto à condição inicial $\tilde{\lambda}(t_0)$, esta é verificada trivialmente. ■

Esta proposição tem algumas conseqüências interessantes que enunciamos abaixo e cujas demonstrações, completamente imediatas, nos permitimos omitir.

Corolário 2.1: *Sejam $u_0, q_0 \in R^n$, $\lambda_0 \in R^m$ e $(q; \lambda)$ solução de (2.19), e considere $Z = \{\varphi_0 \in R^m : \text{o problema } \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t \dot{\varphi} + [f]^t \varphi = 0, \varphi(t_0) = \varphi_0, \text{ tem solução}\}$. Então a solução de (2.19) com condições iniciais $q(t_0) = q_0$, $\dot{q}(t_0) = u_0$, $\lambda(t_0) = \tilde{\lambda}_0$ será $(q; \tilde{\lambda})$ se, e somente se, $\tilde{\lambda}_0 \in \lambda_0 + Z$.*

Corolário 2.2: *As condições iniciais $(q_0; u_0) \in R^n \times R^n$ no instante t_0 determinam de forma única a solução q de (2.19) se, e somente se, o conjunto Z definido no corolário anterior é R^m .*

Estes dois resultados são bastante úteis na análise da questão da perda da unicidade. Quando se verificar a situação descrita no corolário 2 diremos que $(u_0; q_0; t_0)$ determina a **unicidade no sentido mecânico** das equações (2.19).

Uma primeira aplicação destes resultados pode ser vista na:

Proposição 2.4: *Dado $(u_0; q_0; t_0) \in R^n \times R^n \times R$ no qual a matriz*

$$\left(\left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t (u_0; q_0; t_0) \mid [f]^t(u_0; q_0; t_0) \right) \quad (2.20)$$

tem posto máximo (igual ao mínimo de $\{2m, n\}$), então $(u_0; q_0; t_0)$ não determina unicidade no sentido mecânico.

Prova:

Será dividida em dois casos.

• $2m \leq n$:

Supomos que a matriz (2.20) tem posto máximo. Portanto, como $2m \leq n$ o único vetor que pertence ao seu núcleo é o vetor nulo. Segue-se que o conjunto Z definido no corolário 1 é composto apenas por este vetor. Daí, pelo corolário 2, tem-se que há perda de unicidade no sentido mecânico em (2.19).

• $2m > n$:

Neste caso, suponhamos por absurdo que $(u_0; q_0; t_0)$ determina unicidade no sentido mecânico. Então, pelo corolário 2, $Z = R^m$. Assim, tomando para condição inicial em $\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^t \dot{\varphi} + [f]^t \varphi = 0$ os vetores $\varphi_j = e_j$, $1 \leq j \leq m$, vemos que existem pelo menos m vetores linearmente independentes no núcleo da matriz P dada em (2.20).

Como $\dim(\ker P) + \dim(\text{Im} P) = 2m$, vem que $\text{rk}(P) = \dim(\text{Im} P) \leq m < n$, o que contraria nossa hipótese. ■

Esta ambigüidade na condição inicial sobre $\lambda_0 = \lambda(t_0)$ em (2.19) (λ_0 pode ser qualquer vetor do R^m) também é observada na formulação Hamiltoniana da Mecânica Vakonômica. Esta se manifesta na definição do momento Vakonômico p , dada em (2.12), onde se vê novamente uma “indeterminação” de ordem m .

Tal “indeterminação”, que traduz-se simplesmente na observação de que a aplicação

$$\gamma : (p; q) \mapsto (u; q)$$

é degenerada, e

$$\gamma^{-1}(0; \bar{q}) = \{(p; \bar{q}) \in R^n \times R^n : p = \sum_{k=1}^m \mu_k a_k(\bar{q}), (\mu_1; \dots; \mu_m) \in R^m\},$$

quando $f_i = \langle a_i(q); u \rangle$, $i = 1, \dots, m$ e L independe de t , encontra-se discutida em [2] (página 35), sem a apresentação destes resultados.

Entretanto, esta “indeterminação” não implica necessariamente em uma perda de unicidade na variável q (em qualquer uma das formulações) no sentido dado pelo corolário 2.

Estas observações ficam claras no exemplo abaixo e na proposição que encerra este capítulo.

Por último, apresentamos um resultado que garante que há unicidade de soluções quando sabemos que uma curva $q(t) \equiv q_0$ satisfaz as equações de Lagrange no caso de sistemas com vínculos da forma $f_i(u; q) = \langle a_i(q); u \rangle$.

Proposição 2.5: *Se $q(t) \equiv q_0$ é um movimento no sentido da Mecânica Vakonômica, então se $(\bar{q}; \bar{\lambda})$ resolve (2.19) com condições iniciais $q(t_0) = q_0$, $\dot{q}(t_0) = 0$, $\lambda(t_0) = \lambda_0 \in R^m$ tem-se $\bar{q}(t) \equiv q_0$, para todo $\lambda_0 \in R^m$.*

Prova:

Se $q(t) \equiv q_0$ é movimento Vakonômico, existe $\lambda_0 \in R^m$ e $\lambda : [t_1; t_2] \rightarrow R^m$ tal que $(q; \lambda)$ resolve (2.19) com condições iniciais $(q_0; 0; \lambda_0)$.

Pelo corolário 2, basta provar que o problema

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial f}{\partial u}(0; q_0; t) \right)' \dot{\varphi} + [f]^t(0; q_0; t) \varphi = 0; \\ \varphi(t_0) = \varphi_0 \end{cases}$$

tem solução para todo $\varphi_0 \in R^m$. Mas sabemos que $[f](0; q_0; t)$ é identicamente nulo. Portanto, $\varphi(t) \equiv \varphi_0$ resolve o problema acima. ■

Vamos mostrar alguns exemplos que ilustram estes fatos citados acima.

Exemplo 2.2: Vamos supor que o vínculo é da forma $f = \sin q_2 u_1 + \cos q_2 u_2 + \sin q_2 u_3$ e o Lagrangiano é $L = \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + q_2$. Com isto, as variáveis Ψ, Φ, β e Γ definidas no parágrafo anterior serão

$$\Psi = Id,$$

$$\Phi = (0; 1; 0)^t,$$

$$\beta = u_2(u_1 \cos q_2 - u_2 \sin q_2 + u_3),$$

$$\Gamma = 1 + \sin^2 q_2.$$

Assim, as equações de Lagrange ficam

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_1 &= \dot{\lambda} \sin q_2 + \lambda \dot{q}_2 \cos q_2 \\
\ddot{q}_2 &= \dot{\lambda} \cos q_2 - \lambda \cos q_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_3) + 1 \\
\ddot{q}_3 &= \dot{\lambda} \sin q_2 + \lambda \dot{q}_2 \cos q_2 \\
\dot{\lambda} &= \frac{-1}{1 + \sin^2 q_2} (2\dot{q}_2 \sin q_2 \cos q_2 - \cos^2 q_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_3)) \lambda - \frac{\cos q_2}{1 + \sin^2 q_2} - \\
&\quad - \frac{1}{1 + \sin^2 q_2} \dot{q}_2 (\dot{q}_1 \cos q_2 - \dot{q}_2 \sin q_2 + \dot{q}_3 \cos q_2).
\end{aligned}$$

Tomando condições iniciais $q_1(0) = q_2(0) = q_3(0) = 0$, $\dot{q}_1(0) = 1$, $\dot{q}_2(0) = 0$, $\dot{q}_3(0) = -1$, e escolhendo $\lambda(0) = 0$, verifica-se, por substituição direta, que $q(t) = (t; 0; -t)$, $\lambda(t) = -t$ é solução.

Então vemos que a equação

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t \dot{\varphi} + [f]^t \varphi = 0$$

fica

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{\varphi} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{q}_1 - \dot{q}_3 \\ 0 \end{pmatrix} \varphi = 0,$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{\varphi} = 0,$$

e então concluímos que $\dot{\varphi} = 0$, que tem solução para qualquer condição inicial $\varphi(0) = \varphi_0$. Logo, pelo corolário 2, a única curva q que é solução de (2.19) condições iniciais $q(0) = (0; 0; 0)$, $\dot{q}(0) = (1; 0; -1)$ é $q(t) = (t; 0; -t)$.

Exemplo 2.3: (perda de unicidade) Suporemos que o vínculo é dado por $f(u; q) = (1 + q_2)u_1 + q_2 u_2 + q_2 u_3$, e o Lagrangeano por $L = \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) - \Pi(q)$, onde Π é um potencial qualquer.

Tomamos $(q; \lambda)$ a solução de (2.19) com condições iniciais $q(0) = (0; 1; 0)$,

$\dot{q}(0) = (0; 1; 0)$ e $\lambda(0) = 0$. Afirmamos que se $\lambda_0 \neq 0$, a solução de (2.19) com condições iniciais $q(0) = \dot{q}(0) = 0$ e $\lambda(0) = \lambda_0$ tem solução $(\bar{q}; \bar{\lambda})$ com $q \neq \bar{q}$.

De fato, se, por absurdo isso, não ocorresse para λ_0 , então o problema

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u} (\dot{q}(t); q(t); t) \right)^t \dot{\varphi} + [f]^t (\dot{q}(t); q(t); t) \varphi = 0$$

$$\varphi(0) = \varphi_0$$

teria solução para $\varphi_0 = \lambda_0 \neq 0$.

Mas, o problema acima é

$$\begin{pmatrix} 1 + q_2(t) \\ q_2(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} \dot{\varphi} + \begin{pmatrix} \dot{q}_2(t) \\ -\dot{q}_1(t) - \dot{q}_3(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{pmatrix} \varphi = 0$$

$$\varphi(0) = \varphi_0.$$

Comparando a 1a. e a 3a. linhas desta equação, vem

$$\dot{\varphi} = 0 \Rightarrow \varphi(t) \equiv \varphi_0.$$

Como $\varphi_0 \neq 0$, a primeira equação acarretaria $\dot{q}_2(t) \equiv 0$, o que é um absurdo, pois $\dot{q}_2(0) = 1$. Logo, neste caso, há efetivamente vários movimentos Vakonômicos satisfazendo $q(0) = \dot{q}(0) = (0; 1; 0)$.

Observação: Poderíamos detectar a perda de unicidade no exemplo 2.3 aplicando a Proposição 2.4.

Entretanto observa-se facilmente que ainda é válido um princípio de determinação um pouco mais fraco que aquele visto na Mecânica convencional. Se conhecermos, além das condições iniciais do movimento, a curva que descreve o movimento dos pontos materiais em algum intervalo de tempo, podemos saber como é o seu comportamento em todo o intervalo $[t_1; t_2]$.

Observação: Ao final deste capítulo, vale ressaltar que o tratamento de forças não naturais não é feito na formulação variacional, tanto na Mecânica Lagrangiana, quanto na Vakonômica.

CAPÍTULO 3

UM TEOREMA DE INSTABILIDADE DE POSIÇÕES DE EQUILÍBRIO PARA A MECÂNICA VAKONÔMICA

CAPÍTULO 3: INSTABILIDADE DE POSIÇÕES DE EQUILÍBRIO

Vamos tratar neste capítulo de curvas $q(t) = q_0 = \text{constante}$, chamadas de **Pontos de Equilíbrio**, que satisfazem as equações de Lagrange da Mecânica Vakonômica. Caracterizaremos as suas existências, e em certos casos, analisaremos a estabilidade segundo Liapunov. Convém salientar que os resultados aqui expostos são também válidos para a Mecânica Lagrangiana.

Este estudo que faremos a seguir, teve o teorema 3.1, que se refere à caracterização de pontos de equilíbrio, desenvolvido nos artigos de Kozlov, [3]. Quanto ao estudo de estabilidade de Liapunov de tais pontos, o que apresentaremos mais adiante se constitui num resultado novo no contexto da Mecânica Vakonômica, que foi inicialmente estabelecido por Ângelo Barone Netto para a Mecânica Lagrangiana em [4].

Porém, como vimos na capítulo anterior, é possível que em certos sistemas ocorra a falta de determinação na Mecânica Vakonômica. Isto nos leva a considerar uma definição de instabilidade diversa daquela vista na Mecânica Lagrangiana:

Definição 3.1 *Dado um ponto de equilíbrio $(0; q_0)$ das equações de Lagrange Vakonômicas, dizemos que este ponto é instável se existe $\varepsilon > 0$ tal que, para qualquer $\delta > 0$, existem $(\tilde{u}_0; \tilde{q}_0) \in B_\delta(0; q_0)$ e $\tilde{\lambda}_0 \in R^m$ tal que a solução $(\tilde{q}; \tilde{\lambda})$ das equações de Lagrange Vakonômicas na forma normal com condições iniciais $\tilde{q}(t_0) = \tilde{q}(t_0)$, $\dot{\tilde{q}}(t_0) = u_0$, $\tilde{\lambda}(t_0) = \tilde{\lambda}_0$ satisfaz*

$$\|(\dot{\tilde{q}}(T); \tilde{q}(T)) - (0; q_0)\| \geq \varepsilon$$

para algum $T \geq t_1$.

Suporemos em todo o capítulo, que os vínculos são da forma

$$f_i(u; q; t) = \langle a_i(q); u \rangle, \quad 1 \leq i \leq m,$$

com a_i 's vetores linearmente independentes, e que a energia cinética T é uma forma quadrática definida positiva em u . Suporemos também, que a força generalizada Q admite um potencial Π . Assim, neste caso, o Lagrangeano L será $T - \Pi$.

Lembramos ainda do capítulo anterior, que foi definido o subespaço V de R^n , formado

pelas combinações lineares dos vetores a_i 's. Este espaço será utilizado na caracterização dos pontos de equilíbrio. A seguir daremos uma condição necessária e suficiente para a existência destes pontos.

Teorema 3.1: *A curva $q = q_0$ é um ponto de equilíbrio se, e somente se, a força generalizada Q em $(0; q_0; t)$ está em V para todo $t \in [t_1; t_2]$.*

Prova :

Conforme vimos no capítulo 2, as variações para a curva q acima são

$$\hat{q}(\alpha; t) = q_0 + \alpha \xi(t),$$

$$\text{onde } \xi(t_1) = \xi(t_2) = 0, \text{ e } \langle a_i(q_0); \dot{\xi}(t) \rangle = 0, 1 \leq i \leq m, t \in [t_1; t_2]. \quad (3.1)$$

Esta última condição vem do sistema de E.D.O.'s que ξ deve satisfazer.

De $\xi(t_1) = 0$, segue $\langle a_i(q_0); \xi(t_1) \rangle = 0$. E, em vista de (3.1), temos $\langle a_i(q_0); \xi(t) \rangle = 0$ e então $\xi(t) \in W$, para todo t .

Pelo que vimos no capítulo 2, uma curva satisfaz as equações de Lagrange da Mecânica Vakonômica se, e somente se, é um ponto crítico do funcional ação, ou seja,

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0.$$

Desenvolvendo esta expressão

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \alpha} \right) dt = 0.$$

Tomando $L = T - \Pi$, onde $\Pi(q; t)$ é a energia potencial do sistema, com $Q = -(\frac{\partial \Pi}{\partial q})^t$,

temos:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial T}{\partial u} \frac{\partial^2 \hat{q}}{\partial \alpha \partial t} + \frac{\partial T}{\partial q} \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q} \frac{\partial \hat{q}}{\partial \alpha} \right) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \left\langle Q; \frac{\partial \hat{q}}{\partial \alpha} \right\rangle dt.$$

Se $q = q_0$ é um ponto crítico, então vale a relação acima. Mas $\dot{q} = 0$, e por isso $\frac{\partial T}{\partial u} = \frac{\partial T}{\partial q} = 0$, pois T é uma forma quadrática em u .

$$\text{Então} \quad \int_{t_1}^{t_2} \left\langle Q(0; q_0; t); \xi(t) \right\rangle dt = 0 \quad (\text{aqui usamos que } \xi = \frac{\partial \hat{q}}{\partial \alpha}) \quad (3.2).$$

Pela equação que ξ deve satisfazer para ser um campo vetorial de variação, é suficiente que ξ se anule em t_1 e t_2 , e que $\dot{\xi}$ pertença a W .

Mas $W = V^\perp$, onde V é o subespaço gerado por $a_1(q_0), \dots, a_m(q_0)$. Este subespaço não se modifica ao longo do tempo. Assim, se $\dot{\xi}(t) \in W$, $\xi(t)$ também deve pertencer a W .

Conseqüentemente, ξ pode ser uma função arbitrária em W , se anulando em t_1 e t_2 . E portanto a projeção ξ_V de ξ em V é nula.

Voltando à expressão (3.2), temos

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\langle Q_V(0; q_0; t); \xi_V(t) \right\rangle dt + \int_{t_1}^{t_2} \left\langle Q_W(0; q_0; t); \xi_W(t) \right\rangle dt = 0,$$

onde Q_V e Q_W são as projeções de Q em V e W respectivamente, e ξ_W é a projeção de ξ em W .

Pelo que vimos anteriormente, sabemos que $\xi_V(t) = 0$. Segue, então, do Lema Fundamental do Cálculo de Variações, que $Q_W(0; q_0; t) = 0$, ou seja, $Q(0; q_0; t) \in V$.

A recíproca também é válida. Isto é, se $Q(0; q_0; t) \in V$, então

$\int_{t_1}^{t_2} \langle Q(0; q_0; t); \xi_W(t) \rangle dt = 0$, e daí segue (2) (pois ξ deve estar em W). E então $q = q_0$ é ponto crítico. ■

Um Caso de Instabilidade Segundo Liapunov de Pontos de Equilíbrio

Nesta seção estudaremos, para certos casos, a instabilidade de pontos de equilíbrio na Mecânica Vakonômica. Este trabalho foi motivado pelo resultado apresentado por Angelo Barone Netto em [4], porém com relação à Mecânica Lagrangiana. Fazendo uma hipótese natural análoga ao de forças repulsivas no caso de não existência de vínculos, e provaremos que isto é uma condição de instabilidade.

Dado um sistema de pontos materiais com coordenadas generalizadas $q_1, \dots, q_m$ e vínculos da forma

$$f_i(u; q; t) = \langle a_i(q); u \rangle, \quad 1 \leq i \leq m,$$

$$f(u; q; t) = a^t(q).u,$$

consideraremos curvas $q \equiv q_0$ que são pontos de equilíbrio. Suporemos, sem perda de generalidade, que $q_0 = 0$.

As equações de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial L}{\partial q} = \dot{\lambda}^t \frac{\partial f}{\partial u} + \lambda^t \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial q} \right),$$

onde $\lambda : [t_1; t_2] \rightarrow R^m$, ficam satisfeitas para $q = 0$. Daremos uma condição necessária e suficiente para que isso aconteça.

Da hipótese de q ser constante, segue que $\dot{q} \equiv 0$ e portanto

$$\frac{\partial f_i}{\partial q}(0; 0; t) = \left(\frac{\partial a_i^t}{\partial q}(0) \dot{q}(t) \right)^t = 0, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Além disso, $\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u}(0; 0; t) = \frac{d}{dt} a^t(0) = 0$.

Também temos que $\frac{\partial T}{\partial u}(0; 0; t) = \frac{\partial T}{\partial q}(0; 0; t) = 0$, pois a energia cinética T é quadrática em u .

Portanto as equações de Lagrange ficam:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q}(0) = \dot{\lambda}^t(t) a^t(0). \quad (3.3)$$

Reciprocamente, se $\frac{\partial \Pi}{\partial q}(0) = \dot{\lambda}^t(t) a^t(0)$, a curva $q(t) = 0$ é tal que:

i) satisfaz os vínculos;

ii) $[f](0;0;t) = 0$;

iii) $\frac{\partial T}{\partial u}(0;0;t) = \frac{\partial T}{\partial q}(0;0;t) = 0$,

e portanto satisfaz as equações de Lagrange da Mecânica Vakonômica.

Isto prova que (3.3) é uma condição necessária e suficiente para que $q = 0$ seja um ponto de equilíbrio. Nota-se ainda, que esta condição é a mesma que foi enunciada no teorema do início desta seção. Basta ver que (3.3) pode ser expressa como

$$Q^t(0) = \dot{\lambda}^t(t) a^t(0).$$

Vamos mostrar que o vetor $\dot{\lambda}$ pode ser escrito como a soma de uma função $\mu(q)$ com uma função $\nu(u; q)$.

Da equação de Lagrange, sabemos que

$$\dot{\lambda}^t = [L] \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t \left(\frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t \right)^{-1} - \lambda^t[f] \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t \left(\frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t \right)^{-1}.$$

$$\text{No caso } f_i = \langle a_i; u \rangle, \quad \frac{\partial f_i}{\partial u} = a_i^t \text{ e } [f_i] = \frac{d}{dt}(a_i^t) - \left(\frac{\partial a_i^t}{\partial q} u \right)^t = \left(\frac{\partial a_i}{\partial q} u \right)^t - \left(\frac{\partial a_i^t}{\partial q} u \right)^t. \quad (3.4)$$

Assim, pela variação das constantes,

$$\lambda(t) = \left(\lambda(t_1) + \int_{t_1}^t [L](s) a_i(s) (a^t(s) a(s))^{-1} \phi^{-1}(s) ds \right) \phi(t),$$

onde ϕ é uma solução fundamental de $\dot{y}^t = -y^t[f] \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t \left(\frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^t \right)^{-1}$.

De (3.4), obtemos que

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}^t &= [L]a(a^t a)^{-1} - \left(\lambda(t_1) + \int_{t_1}^t [L]a(a^t a)^{-1} \phi^{-1} ds \right) \phi[f]a(a^t a)^{-1} = \\ &= \frac{\partial \Pi}{\partial q} a(a^t a)^{-1} + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial u} \right) a(a^t a)^{-1} - \left(\lambda(t_1) + \int_{t_1}^t [L]a(a^t a)^{-1} \phi^{-1} ds \right) \phi[f]a(a^t a)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Vamos denotar $\frac{\partial \Pi}{\partial q} a(a^t a)^{-1}$ por μ , e o restante da soma por ν . De (3.4), e do fato de T ser uma forma quadrática em u , segue que ν é função de u (e também de q), sendo que $\nu(0; q) = 0$. Verifica-se também que μ é função só de q .

Pelo que vimos, então, a condição (3.3) se escreve como

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q}(0) = \mu(0)a^t(0).$$

Definimos a função $G : R^n \times R^m \rightarrow R^n$ dada por

$$G(q; \mu) = \frac{\partial \Pi}{\partial q}(q) - \mu a^t(q),$$

que se anula em $(0; \mu(0))$, e também a função $\tilde{G} : R^n \rightarrow R^n$ com

$$\tilde{G}(q) = G(q; \mu(q)).$$

Tal função só é anulada pelos pontos de equilíbrio do sistema e tem a propriedade de que o conjunto $\tilde{G}^{-1}(0)$ é uma variedade de dimensão m .

Se $A = \frac{\partial G}{\partial q}(0; \mu(0))$ é não singular, segue do Teorema da Funções Implícitas que existem:

- i) uma vizinhança $D \subset R^m$ de $\mu(0)$;
- ii) uma vizinhança $D_0 \subset R^n$ da origem;
- iii) uma função $g : D \rightarrow D_0$ que satisfaz $g(\mu(0)) = 0$ e tal que os únicos pontos de $D_0 \times D$ que anulam G são os da forma $(g(\mu); \mu)$.

A imagem I^m de g tem a propriedade de ser uma variedade de dimensão m . Além disso, vamos provar que tal conjunto coincide com o conjunto dos pontos que anulam $\tilde{G}$. Em outras palavras, a imagem de g é formada pelos pontos de equilíbrio pertencentes a D_0 . Denominaremos a imagem de g por **variedade de equilíbrio**.

Se $q \in \tilde{G}^{-1}(0) \cap D_0$, então $G(q; \mu(q)) = 0$, e devido a (iii), existe μ' tal que $(q; \mu(q)) = (g(\mu'); \mu')$. Segue que $g(\mu') = q$ e então $q \in I^m$. Conseqüentemente $\tilde{G}^{-1}(0) \subset I^m$. Como as duas variedades têm a mesma dimensão, temos que $I^m = \tilde{G}^{-1}(0)$.

Observação: Tal variedade pode existir ainda que A seja singular. Por exemplo, no caso que vimos anteriormente no capítulo 2, o vínculo era dado pela relação $f = u_x \sin \varphi - u_y \cos \varphi = 0$, e o Lagrangeano do sistema era $L = \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2 + u_\varphi^2) + x$. Com isto, temos as seguintes igualdades:

$$a^t(q) = \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}} \right)^t (q) = (\sin \varphi; -\cos \varphi; 0);$$

$$[f](u; q; t) = (u_\varphi \cos \varphi; u_\varphi \sin \varphi; u_x \cos \varphi + u_y \sin \varphi);$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q}(q) = (-1; 0; 0);$$

$$[L](u; q; t) = (\ddot{x} - 1; \ddot{y}; \ddot{\varphi});$$

Com estes dados, podemos obter as equações de Lagrange da Mecânica Vakonômica:

$$\ddot{x} - 1 = \dot{\lambda} \sin \varphi + \lambda \dot{\varphi} \cos \varphi;$$

$$\ddot{y} = -\dot{\lambda} \cos \varphi + \lambda \dot{\varphi} \sin \varphi;$$

$$\ddot{\varphi} = \lambda(\dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi).$$

Observamos que uma das variedades de equilíbrio deste sistema é dada por $\varphi = \frac{\pi}{2}$ e $y = cte$, pois todos os seus pontos obedecem às equações acima. Tomamos o ponto $(x_0; y_0; \frac{\pi}{2})$ pertencente a esta variedade. Para este ponto, teremos

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q}(x_0; y_0; \frac{\pi}{2}) = (-1; 0; 0);$$

$$a^t(x_0; y_0; \frac{\pi}{2}) = (1; 0; 0).$$

Assim, μ , nestes pontos, será -1 e a função G será $(-1 - \mu \sin \varphi; \mu \cos \varphi; 0)$. Consequentemente a matriz A definida acima é dada por

$$A(x_0; y_0; \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mu \cos \varphi \\ 0 & 0 & -\mu \sin \varphi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (x_0; y_0; \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que é singular.

Admitiremos a existência da variedade I^m no que segue.

Vamos denotar por B a matriz $\frac{1}{2}(A + A^t)$ e por I_q^{n-m} a variedade linear de dimensão $n - m$ das velocidades virtuais no ponto q .

Lema 3.1 (de transversalidade): *Se existir a variedade de equilíbrio I^m de dimensão m e se $B|_{I_0^{n-m}}$ for definida então I_0^{n-m} é transversal a I^m .*

Prova:

Seja $\eta \in T_0(I^m) \cap I_0^{n-m}$. Temos que a variedade I^m coincide com $\tilde{G}^{-1}(0)$. Por este motivo, os seus espaços tangentes também são iguais. Portanto $\eta \in T_0(\tilde{G}^{-1}(0))$ e então $\frac{\partial \tilde{G}}{\partial q}(0)\eta = 0$. Segue que

$$\left(A + \frac{\partial G}{\partial \mu}(0; \mu(0)) \frac{\partial \mu}{\partial q}(0) \right) \eta = 0$$

$$\left(A - a(0) \frac{\partial \mu}{\partial q}(0) \right) \eta = 0,$$

e daí

$$\eta^t A \eta - \eta^t a \frac{\partial \mu}{\partial q} \eta = 0.$$

Por outro lado, $\eta \in I_0^{n-m}$ por hipótese, e então, $\frac{\partial f}{\partial u} \eta = a^t \eta = 0$, isto é, $\eta^t a = 0$. Então $\eta^t A \eta = 0$ e $\eta^t A^t \eta = 0$.

Portanto $\eta^t B \eta^t = 0$. Da hipótese de que B é definida segue que $\eta = 0$, e então I_0^{n-m} é transversal a I^m . ■

Vamos tomar agora um sistema de coordenadas para a variedade de equilíbrio que nos será conveniente. Terá m coordenadas e as seguintes propriedades:

i) a variedade I^m ficará determinada pelas equações $x_{m+1} = \dots = x_n = 0$; (3.6)

ii) dado um ponto $S \in I^m$, a matriz $\bar{a}^t$ calculada em S será tal que $\bar{a}_{j,i}^t = \delta_{i,j}$; (3.7)

iii) os pontos de I_0^{n-m} não terão as suas coordenadas $(x_{m+1}; \dots; x_n)$ modificadas e $(x_1; \dots; x_m)$ serão nulas. (3.8)

Tendo em vista estes objetivos, inicialmente consideramos um aberto U de R^m contendo 0 e uma função $S : U \rightarrow D_0 \cap I^m$ tal que $S(0) = 0$ e que $\frac{\partial S}{\partial (x_1; \dots; x_m)}(x_1; \dots; x_m)$ tenha posto m qualquer que seja $(x_1; \dots; x_m)$ em U .

Seja $S(x_1; \dots; x_m)$ um ponto de $D_0 \cap I^m$. Consideramos um ponto P pertencente a I_Q^{n-m} , a variedade linear das velocidades virtuais que passa por $S(x_1; \dots; x_m)$, e que portanto verifica a relação

$$a^t(S)(P - S) = 0.$$

Em vista deste fato, definimos a função $\mathcal{H} : R^{n+m} \rightarrow R^m$, como sendo

$$\mathcal{H}(P; x_1; \dots; x_m) = a^t(S(x_1; \dots; x_m))(P - S(x_1; \dots; x_m)),$$

que se anula em $(0; 0; \dots; 0)$, pois $S(0; \dots; 0) = 0$.

A matriz de $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (x_1; \dots; x_m)}(0; \dots; 0)$ é $a^t(0) \left(\frac{\partial S}{\partial x_1}(0; \dots; 0) \dots \frac{\partial S}{\partial x_m}(0; \dots; 0) \right)$, que tem colunas l.i., devido à hipótese feita sobre S .

Aplicando o Teorema das Funções Implícitas à função $\mathcal{H}$, obtemos no ponto $(0; \dots; 0)$

- i) uma vizinhança $D_1 \subset D_0$ de $0 \in R^n$;
- ii) uma vizinhança $D_2 \subset D$ de $0 \in R^m$;
- iii) uma função $\mathcal{G} : D_1 \rightarrow D_2$ tal que $\mathcal{G}(0) = 0$, e tal que os únicos pontos de $D_1 \times D_2$ que anulam $\mathcal{H}$ são os da forma $(P; \mathcal{G}(P))$. Assim, $\mathcal{G}$ associa cada $P \in D_1$ a um ponto $\mathcal{G}(P) = a^t(S(\mathcal{G}(P)))(P - S(\mathcal{G}(P))) = 0$. Assim, $S(\mathcal{G}(P)) \in D_0 \cap I^m$, e de $a^t(S(\mathcal{G}(P)))(P - S(\mathcal{G}(P))) = 0$ vem que $P \in I_{S(\mathcal{G}(P))}^{n-m}$.

Devido à continuidade de todas as funções aqui envolvidas, é possível se escolher D_1 de modo que cada ponto P de D seja tal que a variedade linear I_P^{n-m} , que passa por P e é paralela a I_0^{n-m} , ainda continue transversal a I^m , e portanto concorra com I^m em um ponto $\tau(P)$. Este ponto será único devido ao fato de I^m e I_P^{n-m} serem transversais e terem dimensões complementares.

Com isto, e pelo que vimos no item (iii) acima, o ponto P está determinado pelas coordenadas:

- i) $x_1, \dots, x_m$ do ponto S ;
- ii) $x_{m+1}, \dots, x_n$ do vetor $P - \tau(P)$;

Em resumo, obtivemos um sistema de coordenadas $(x_1; \dots; x_m)$ de modo que:

- i) (3.6) está verificado, pois o ponto P de D_0 que estiver em I^m terá $P - \tau(P) = 0$;

ii) (3.7) está verificado;

iii) (3.8) está verificado.

Vamos agora enunciar o teorema da instabilidade.

Teorema 3.2: Na hipótese de existência de I^m , se a restrição $B|_{I_0^{n-m}}$ for definida negativa, a origem (bem como os pontos de equilíbrio vizinhos) é um ponto de equilíbrio instável.

Observação: Este resultado, sob certo aspecto, é uma generalização de teorema de instabilidade para um sistema sem vínculos no caso em que Π não tem mínimo e isto é detectável pelo seu polinômio de Taylor de ordem 2.

Prova:

Consideramos o sistema de coordenadas $(x_1; \dots; x_n)$ definido acima e $(y_1; \dots; y_n)$ as suas velocidades associadas. Neste sistema, com a mudança de coordenadas de $(q_1; \dots; q_n)$ para $(x_1; \dots; x_n)$ e reescrevendo T, Π, λ e a nestas novas coordenadas, teremos funções $\bar{T}, \bar{\Pi}, \bar{\lambda}$ e $\bar{a}$. Com isto, as equações de Lagrange ficam:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y_j} - \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m \dot{\bar{\lambda}}_i \bar{a}_{j,i} + \bar{\lambda}_i \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \bar{a}_{j,i}}{\partial x_k} - \frac{\partial \bar{a}_{k,i}}{\partial x_j} \right) y_k \right) \quad 1 \leq j \leq n, \quad (3.9)$$

onde a origem é um ponto de equilíbrio.

Utilizaremos nesta demonstração o Teorema de Tchetayev para instabilidade (veja demonstração em [6]). Em vista disto, introduzimos a função $K : R^{2n} \rightarrow R$ dada por

$$K(x_1; \dots; x_n; y_1; \dots; y_n) = \sum_{j=m+1}^n x_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial y_j}.$$

Desta forma, K calculada em $(x_1; \dots; x_n; 0; \dots; 0)$ será nula. E a derivada de K em relação ao tempo será

$$\dot{K} = \sum_{j=m+1}^n y_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial y_j} + x_j \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y_j}.$$

Nesta expressão, os termos $y_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial y_j}$ e $x_j \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y_j}$ podem ser desenvolvidos, levando em consideração que $\bar{T}$ é uma forma homogênea de grau 2 e que a relação (3.9) está satisfeita.

Pelo Teorema de Euler para funções homogêneas, e por (3.9), obtemos:

$$\dot{K} = 2\bar{T} + \sum_{j=m+1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^m \dot{\bar{\lambda}}_i \bar{a}_{j,i} + \bar{\lambda}_i \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \bar{a}_{j,i}}{\partial x_k} y_k - \frac{\partial \bar{a}_{k,i}}{\partial x_j} y_k \right) + \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x_j} \right) - \sum_{j=1}^m y_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial y_j}.$$

Por outro lado, sabemos que $\dot{\bar{\lambda}} = \bar{\mu} + \bar{\nu}$, e portanto

$$\begin{aligned} \dot{K} = & \left[2\bar{T} + \sum_{j=m+1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^m \bar{\nu}_i \bar{a}_{j,i} + \bar{\lambda}_i \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \bar{a}_{j,i}}{\partial x_k} - \frac{\partial \bar{a}_{k,i}}{\partial x_j} \right) y_k + \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right) \right) - \sum_{j=1}^m y_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial y_j} \right] + \\ & + \sum_{j=m+1}^n x_j \left(\left(\sum_{i=1}^m \bar{\mu}_i \bar{a}_{j,i} \right) - \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x_j} \right). \end{aligned}$$

Mostraremos, em primeiro lugar, que a expressão entre colchetes na soma acima é, para x numa vizinhança de $0 \in R^n$, uma forma quadrática definida positiva em y .

Derivando a equação dos vínculos em relação ao tempo, obtemos que

$$\frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial x} y = 0.$$

Observamos que $\frac{\partial f}{\partial y}$ é uma função só de x , e que $\frac{\partial f}{\partial x} y$ é uma forma quadrática em y . Segue que $\dot{y}$ também é uma forma quadrática em y .

Observamos, também, que em (3.9), do lado esquerdo da expressão, existe uma forma quadrática em y somada com um termo, $\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x}$, que depende só de x . Portanto, devem haver termos correspondentes do lado direito de (3.9).

O termo do lado direito que só depende de x é a somatória $\sum_{i=1}^m \bar{\mu}_i \bar{a}_{j,i}$, já que a outra parcela depende também de y , assim como ν e λ . Por estes motivos, decompondo-se $\dot{\lambda}$ em μ e ν , obtemos, da somatória em (3.9) onde aparecem ν e λ , uma forma quadrática em y .

Além disso, nos pontos da variedade de equilíbrio, as equações dos vínculos $\bar{a}^t y$ são tais que $\bar{a}_{j,i} = \delta_{i,j}$, e portanto a sub-matriz de $\bar{a}^t$ correspondente às m primeiras colunas é não singular.

Então, por continuidade, existe uma vizinhança D_3 da origem $0 \in R^n$, contida em D_1 , tal que $D_3 \subset D_2 \times R^{n-m}$ e na qual a submatriz ainda é não singular. Sob estas condições, podemos obter $(y_1; \dots; y_m)$ em função de $(y_{m+1}; \dots; y_n)$ a partir das equações dos vínculos. E esta dependência será linear em $y_{m+1}, \dots, y_n$.

Voltando à análise de $\dot{K}$, vemos que os termos da somatória onde estão λ e ν também aparecem em (3.9), a qual já sabemos se constitui numa soma entre uma forma quadrática em y e uma função só em x , que é $\sum_{j=m+1}^n x_j \left(\left(\sum_{i=1}^n \bar{\mu}_i \bar{a}_{j,i} \right) - \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x_j} \right)$. Substituindo $y_1, \dots, y_m$ em termos de $y_{m+1}, \dots, y_n$, conseguimos, então, uma forma quadrática nestas últimas variáveis.

Assim, a parcela de $\dot{K}$ entre colchetes é uma forma quadrática em y que se anula quando $y_{m+1} = \dots = y_n = 0$. Logo, nos pontos de I^m , esta parcela se reduz a $2\bar{T}$, que é definida positiva. Portanto, pelo Teorema de Sylvester, existe uma vizinhança D_4 de 0 (na variável x) em R^n , tal que esta parcela se mantém definida positiva.

Analisaremos agora a parcela $\sum_{j=m+1}^n x_j \left(\left(\sum_{i=1}^m \bar{\mu}_i a_{j,i} \right) - \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x_j} \right)$, a qual chamaremos de N . Vamos mostrar que existe uma vizinhança $D_5 \subset D_4$ da origem $0 \in R^n$ tal que $N|_{C_{D_5}^{I^m}} > 0$.

Sabemos que tal função é nula em I^m , e por isso

$$\frac{\partial N}{\partial x_k} \Big|_{P \in I^m \cap D_4} = 0, \quad k = 1, \dots, m,$$

pois I^m é dada por $x_{m+1} = \dots = x_n = 0$.

Consideramos, agora, $\frac{\partial N}{\partial x_k}$, para $k = m+1, \dots, n$:

$$\frac{\partial N}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^m \bar{\mu}_i \bar{a}_{k,i} - \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x_k} + \sum_{j=m+1}^n x_j \left(\left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial \bar{\mu}_i}{\partial x_k} \bar{a}_{j,i} + \bar{\mu}_i \frac{\partial \bar{a}_{j,i}}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial^2 \bar{\Pi}}{\partial x_j \partial x_k} \right).$$

Mas $(\sum_{i=1}^m (\bar{\mu}_i \bar{a}_{k,i} - \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x_k}))|_{P \in I^m} = 0$ e $x_j = 0$, para $j = m+1, \dots, n$, pois $P \in I^m$.

Portanto $\frac{\partial N}{\partial x_k} \Big|_{P \in I^m \cap D_4} = 0$. Com isso, concluímos que N é estacionária em todo ponto de $I^m \cap D_4$.

Vamos considerar a restrição de N à variedade I_P^{n-m} com $P \in I^m$. A sua matriz hessiana tem termo geral

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 N}{\partial x_l \partial x_k} \Big|_P = \\ &= \sum_{j=m+1}^n x_j \left(\left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 \bar{\mu}_i}{\partial x_l \partial x_k} \bar{a}_{j,i} + \frac{\partial \bar{\mu}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{a}_{j,i}}{\partial x_l} + \frac{\partial \bar{\mu}_i}{\partial x_l} \frac{\partial \bar{a}_{j,i}}{\partial x_k} + \bar{\mu}_i \frac{\partial^2 \bar{a}_{j,i}}{\partial x_l \partial x_k} \right) - \frac{\partial^3 \bar{\Pi}}{\partial x_l \partial x_k \partial x_j} \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \bar{\mu}_i}{\partial x_k} \bar{a}_{l,i} + \bar{\mu}_i \frac{\partial \bar{a}_{l,i}}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial^2 \bar{\Pi}}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \bar{\mu}_i}{\partial x_k} \bar{a}_{k,i} + \bar{\mu}_i \frac{\partial \bar{a}_{k,i}}{\partial x_l} \right) - \frac{\partial^2 \bar{\Pi}}{\partial x_l \partial x_k}. \end{aligned}$$

Devido à propriedade (3.7), sabemos que $\bar{a}_{l,i} = \bar{a}_{k,i} = 0$. Também sabemos que $x_{m+1} = \dots = x_n = 0$ em I^m . E então

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x_l \partial x_k} \Big|_P = \sum_{i=1}^n \left(\bar{\mu}_i \frac{\partial \bar{a}_{k,i}}{\partial x_l} + \bar{\mu}_i \frac{\partial \bar{a}_{l,i}}{\partial x_k} \right) - 2 \frac{\partial^2 \bar{\Pi}}{\partial x_l \partial x_k}, \quad l, k = m+1, \dots, n.$$

Tomando $P = 0$, temos que a restrição da mudança de coordenadas de q para x em I_0^{n-m} é a identidade. E com isso temos que a expressão acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x_l \partial x_k} \Big|_0 = \sum_{i=1}^n \left(\mu_i \frac{\partial a_{k,i}}{\partial q_l} + \mu_i \frac{\partial a_{l,i}}{\partial q_k} \right) - 2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_l \partial q_k} = -2B_{l,k} \quad l, k = m+1, \dots, n.$$

Por hipótese, sabemos que $B \Big|_{I_0^{n-m}}$ é definida negativa. Com isso, $\frac{\partial^2 N}{\partial x_l \partial x_k}$ é definida positiva, e pelo Teorema de Sylvester, existe uma vizinhança D_5 de $0 \in R^n$ onde a matriz $(d^2 N)_{n-m}$ de ordem $n-m$ e termo geral $\frac{\partial^2 N}{\partial x_l \partial x_k}$, $l, k = m+1, \dots, n$, continua definida positiva.

Para completar a demonstração de que $N|_{\mathcal{C}_{D_5}^{I^m}}$ é positiva, consideramos um ponto $P = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathcal{C}_{D_5}^{I^m}$, e S dado pelas coordenadas $(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ (S será a “projecção” de P em I^m).

Vamos fazer a hipótese adicional, que não prejudicará a demonstração, de que D_5 é uma bola aberta com centro em 0 . Assim garantimos que $S \in D_5$.

Da hipótese de D_5 ser um conjunto aberto, segue-se que existe um intervalo aberto D_6 de R que contem $[0; 1]$ tal que $S + s(P - S)$ está em D_5 , para todo s em D_6 .

Definimos a função ψ com domínio em D_6 dada por

$$\psi(s) = N(S + s(P - S)).$$

Para tal função podemos afirmar que

- i) $\psi(0) = N(S) = 0$, pois $S \in I^m$;
- ii) $\psi(1) = N(P)$;
- iii) $\psi'(s) = (dN \Big|_{S+s(P-S)}).(P - S)$ e $\psi'(0) = (dN \Big|_S).(P - S) = 0$, pois $dN \Big|_S = 0$ para $S \in I^m \cap D_4$;

iv) $\psi''(s) = \eta^t (d^2 N)_{n-m} \eta$, com $\eta = (x_{m+1}; \dots; x_n)$ dado pelas últimas $n - m$ coordenadas de $(P - S)$. Sabemos que $\eta \neq 0$, pois $P \notin I^m$. Assim, $\psi''(s) > 0$, já que $(d^2 N)_{n-m}$ é definida positiva.

Da afirmação (iv) acima, concluímos que ψ' é estritamente crescente. De (iii), segue-se que ψ é estritamente crescente. E de (i) e (ii), podemos afirmar que $N(P) > 0$. Como P foi tomado arbitrariamente, temos $N_{c_{P_5}^{I^m}} > 0$.

Assim, existe uma vizinhança de 0 na qual $\dot{K} > 0$, exceto no pontos pertencentes à sua intersecção com I^m . Logo, K também não é identicamente nula nesta mesma vizinhança, a qual suporemos simétrica em relação à secção nula do espaço de fase.

Então existe S tal que $K(S) \neq 0$. Se $K(S) > 0$, tomamos $P = S$. Se $K(S) < 0$, tomamos P o simétrico de S em relação à secção nula do espaço de fase (trocamos os sinais das coordenadas $y_1, \dots, y_n$ de S).

Da expressão de K , vemos que K é linear em y . E então $K(P) = -K(S) > 0$. ■

Exemplo 3.1: Suporemos que o vínculo do sistema é dado por $f = u_1 \sin q_2 + u_2 \cos q_2 + u_3 \sin q_2$ e que o Lagrangeano é $\frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)$. Temos, assim, as relações

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^t(q) = (\sin q_2; \cos q_2; \sin q_2);$$

$$[f](u; q; t) = (u_2 \cos q_2; -(u_1 + u_3) \cos q_2; u_2 \cos q_2);$$

$$[L](u; q; t) = (\dot{u}_1 - q_1; \dot{u}_2 - q_2; \dot{u}_3 - q_3).$$

Com isto, as equações de Lagrange ficam

$$\dot{u}_1 - q_1 = \lambda u_2 \cos q_2 + \dot{\lambda} \sin q_2;$$

$$\dot{u}_2 - q_2 = -\lambda(u_1 + u_3) \cos q_2 + \dot{\lambda} \cos q_2;$$

$$\dot{u}_3 - q_3 = \lambda u_2 \cos q_2 + \dot{\lambda} \sin q_2.$$

Para obtermos as posições de equilíbrio, devemos determinar pontos nos quais vale que

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = \mu a^t,$$

ou seja

$$-(q_1; q_2; q_3) = \mu(\sin q_2; \cos q_2; \sin q_2).$$

Para isto, basta tomarmos $\mu = -\frac{q_2}{\cos q_2}$, $q_1 = q_3 = q_2 \tan q_2$, com $q_2 \in (0; \frac{\pi}{2})$.

A função G será

$$G(q; \mu) = (-q_1 - \mu \sin q_2; -q_2 - \mu \cos q_2; -q_3 - \mu \sin q_2).$$

E a sua derivada em relação a q

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial q} \left(q_2 \tan q_2; q_2; q_2 \tan q_2; -\frac{q_2}{\cos q_2} \right) &= \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -\mu \cos q_2 & 0 \\ 0 & -1 + \mu \sin q_2 & 0 \\ 0 & -\mu \cos q_2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 \tan q_2; q_2; q_2 \tan q_2; -\frac{q_2}{\cos q_2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & q_2 & 0 \\ 0 & -1 - q_2 \tan q_2 & 0 \\ 0 & q_2 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

O determinante de $\frac{\partial G}{\partial q}$ é $-1 - q_2 \tan q_2$, que é diferente de zero para $q_2 \in (0; \frac{\pi}{2})$. Portanto a variedade de equilíbrio existe.

A matriz B é

$$B = \frac{1}{2}(A + A^t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -\mu \cos q_2 & 0 \\ -\mu \cos q_2 & -2 + 2\mu \sin q_2 & -\mu \cos q_2 \\ 0 & -\mu \cos q_2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Na restrição de B a I_0^{n-m} só teremos as coordenadas referentes a q_1 e q_3 . Assim,

$$B \Big|_{I_0^{n-m}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

que é definida negativa.

Concluimos que os pontos da forma $(q_2 \tan q_2; q_2; q_2 \tan q_2)$ são pontos de equilíbrio instáveis.

APÊNDICE

APÊNDICE

Teorema: *Dado um sistema linear de m equações diferenciais ordinárias de posto m com n incógnitas, $1 \leq m < n$, e um intervalo $[t_1; t_2] \subset R$, existe uma solução não nula do sistema que se anula em t_1 e t_2 .*

Prova:

Supomos o sistema de equações:

$$a_{i,1}\dot{\gamma}_1 + \dots + a_{i,n}\dot{\gamma}_n + b_{i,1}\gamma_1 + \dots + b_{i,n}\gamma_n = 0, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (A.1)$$

Ou, vetorialmente:

$$\langle a_i; \dot{\gamma} \rangle + \langle b_i; \gamma \rangle = 0,$$

com $a_i = (a_{i,1}, \dots, a_{i,n})$ e $b_i = (b_{i,1}, \dots, b_{i,n})$, $1 \leq i \leq m$.

Por hipótese, o sistema apresenta posto máximo m . Assim, existe uma matriz $A(t)$ $n \times n$ não singular tal que $A(t)a_i(t) = e_i$, $\forall i = 1, \dots, m$ (e_i é o i -ésimo vetor da base canônica do R^n).

Considero a variável $x(t)$ dada por $x(t) = (A^*(t))^{-1}\gamma(t)$. Então, $\gamma(t) = A^*(t)x(t)$ e $\dot{\gamma}(t) = \dot{A}^*(t)x(t) + A^*(t)\dot{x}(t)$.

Substituindo na equação vetorial acima, obtemos:

$$\langle a_i; \dot{A}^*x + A^*\dot{x} \rangle + \langle b_i; A^*x \rangle = \dot{x}_i + \langle \dot{A}a_i + Ab_i; x \rangle = 0.$$

Definimos $B_i = \dot{A}a_i + Ab_i$, um vetor com m coordenadas, e B a matriz com as m linhas dadas por B_i .

Temos então o sistema de e.d.o.'s:

$$\dot{x}_{(1;m)} + B_{(1;m)}x_{(1;m)} + B_{(m+1;n)}x_{(m+1;n)} = 0, \quad (A.2)$$

onde

$$x_{(1;m)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$x_{(m+1;n)} = \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$B_{(1;m)} = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \dots & B_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m,1} & \dots & B_{m,m} \end{pmatrix}$$

$$B_{(m+1;n)} = \begin{pmatrix} B_{1,m+1} & \dots & B_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m,m+1} & \dots & B_{m,n} \end{pmatrix}$$

Tomamos Φ uma solução fundamental do sistema

$$\dot{y} = -B_{(1;m+1)}y.$$

Assim, a solução do sistema de e.d.o.'s para a condição inicial $x_{(1;m)}(t_1) = 0$ é da forma:

$$x_{(1;m)}(t) = -\Phi(t) \int_{t_1}^t [\Phi^{-1}(s)B_{(m+1;n)}(s)x_{(m+1;n)}(s)]ds.$$

Para que $x_{(1;m)}(t_2)$ também se anule é necessário e suficiente que

$$\int_{t_1}^{t_2} [\Phi^{-1}(s)B_{(m+1;n)}(s)x_{(m+1;n)}(s)]ds = 0.$$

Vamos tomar $x_{m+1}, \dots, x_n$ como funções polinomiais:

$$x_{m+1}(t) = \sum_{j=0}^{k_{m+1}} c_j^{(m+1)} t^j, \dots, x_n(t) = \sum_{j=0}^{k_n} c_j^{(n)} t^j,$$

com graus k_i ainda não determinados, e

$$\Psi(t) = \Phi^{-1}(t) B_{(m+1;n)}(t)$$

com coordenadas

$$\begin{pmatrix} \Psi_{1,1} & \dots & \Psi_{1,n-m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_{m,1} & \dots & \Psi_{m,n-m} \end{pmatrix}$$

Assim, devemos ter:

$$\int_{t_1}^{t_2} [\Psi_{1,1}(s) \sum_{j=0}^{k_{m+1}} c_j^{(m+1)} s^j + \dots + \Psi_{1,n-m}(s) \sum_{j=0}^{k_n} c_j^{(n)} s^j] ds = 0,$$

$\vdots$

$$\int_{t_1}^{t_2} [\Psi_{m,1}(s) \sum_{j=0}^{k_{m+1}} c_j^{(m+1)} s^j + \dots + \Psi_{m,n-m}(s) \sum_{j=0}^{k_n} c_j^{(n)} s^j] ds = 0,$$

ou seja,

$$\sum_{j=0}^{k_{m+1}} c_j^{(m+1)} \int_{t_1}^{t_2} \Psi_{1,1}(s) s^j ds + \dots + \sum_{j=0}^{k_n} c_j^{(n)} \int_{t_1}^{t_2} \Psi_{1,n-m}(s) s^j ds = 0,$$

$\vdots$

$$\sum_{j=0}^{k_{m+1}} c_j^{(m+1)} \int_{t_1}^{t_2} \Psi_{m,1}(s) s^j ds + \dots + \sum_{j=0}^{k_n} c_j^{(n)} \int_{t_1}^{t_2} \Psi_{m,n-m}(s) s^j ds = 0.$$

Com isso, concluímos que o vetor

$$c = (c_0^{(m+1)}; \dots; c_{k_{m+1}}^{(m+1)}; \dots; c_0^{(n)}; \dots; c_{k_n}^{(n)})$$

deve ser perpendicular aos vetores

$$d_i = (d_{i,0}^{(1)}; \dots; d_{i,k_{m+1}}^{(1)}; \dots; d_{i,0}^{(n-m)}; \dots; d_{i,k_n}^{(n-m)}),$$

onde

$$d_{i,j}^{(l)} = \int_{t_1}^{t_2} \Psi_{i,l}(s) s^j ds, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq l \leq n-m, 0 \leq j \leq k_l.$$

Além disso, como as funções polinomiais $x_{m+1}, \dots, x_n$ devem se anular em t_1 e t_2 , os coeficientes $c^{(l)}$ devem ainda formar vetores perpendiculares a $(1; t_1; t_1^2; \dots; t_1^{k_l})$ e $(1; t_2; t_2^2; \dots; t_2^{k_l})$, para $l = m+1, \dots, n$. A existência de tais coeficientes segue do fato de que os graus k_l dos polinômios podem ser arbitrariamente aumentados.

Ao final deste processo, obtemos n funções que se anulam em t_1 e t_2 e que resolvem (A.2). Substituindo em (A.2) a expressão de x em termos de γ , concluímos que esta função resolve (A.1).

E do fato de x se anular em t_1 e t_2 , segue trivialmente que o mesmo acontece com γ .

■

BIBLIOGRAFIA

- [1] - Barros, Ivan de Queiroz, Mecânica Analítica Clássica, São Paulo, IME-USP, 1981.
- [2] - Arnold, V. I., Dynamical Systems III, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 3, Springer-Verlag.
- [3] - Kozlov, V. V., "Dynamics of systems with nonintegrable constraints I, II, III," Vestnik Moskovskogo Universiteta, Mekhanika, vol. 37, No. 4, pp 70-76, 1982.
- [4] - Barone Netto, Ângelo, Um teorema de Instabilidade segundo Liapunov para o equilíbrio de sistemas sujeitos a vínculos não-holônomos, Tese (Doutoramento), IMECC-UNICAMP.
- [5] - Bliss, G. A., Lectures on the calculus of variations, Chicago, University of Chicago Press, 1946.
- [6] - Chetayev, N. G., The stability of motion, New York, Pergamon Press, 1961.