**Políticas Hipercone
para Sistemas de Manufatura
Flexíveis**

Leônidas de Oliveira Brandão

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE
MESTRE EM
MATEMÁTICA APLICADA

Área de Concentração: **Ciência da Computação**
Orientador: **Prof. Dr. Carlos Humes Jr.**

–São Paulo, Março de 1994–

Agradecimentos

Se fosse enumerar todas as pessoas e suas contribuições diretas ou indiretas a este trabalho, seria necessário uma grande lista e ainda assim cometeria enganos e esquecimentos. Para evitar injustiças desta ordem, irei me restringir apenas a dois dos nomes que estariam nesta lista, com os quais, neste trabalho, divido muitas das conjugações na primeira pessoa do plural:

- ▷ ao Carlos, pela orientação, amizade e entusiasmo pela pesquisa,
- ▷ ao Mané, pelas dicas, paciência e disposição para muitas discussões.

Resumo

Neste trabalho estudamos uma classe de políticas de atendimento para Sistemas de Manufaturas Flexíveis, introduzida por Sharifnia, Caramanis & Gershwin (SCG-91), baseadas em hipercones $C(M, b) = \{y : My \leq b\}$. Neste tipo de políticas, troca-se o controle de produção sempre que a trajetória do sistema atingir alguma face do hipercone, podendo demandar um tempo de “set up” (preparação) não nulo. Como SCG-91, nos concentramos em sistemas compostos por uma única máquina. Introduzimos o conceito de estabilidade forte (as sequências de interseções da trajetória com as faces do hipercone serem convergentes) e mostramos a equivalência entre estabilidade forte para um sistema qualquer, operado por um hipercone $C(M, b)$, e estabilidade forte para o sistema homogêneo associado (sistema com mesmas características do primeiro, porém com tempos para “set ups” nulos, uns com os outros, operado pelo hipercone $C(M, \vec{0})$). Apresentamos condições necessárias e suficientes, sobre o hipercone, para a estabilidade forte, inclusive uma de verificação simples ($M^{-1} \succeq 0$), e ainda mostramos que a estabilidade forte equivale à convergência da trajetória para um ciclo limite, invariante com respeito aos hipercones (no sentido que os pontos deste ciclo mantêm a mesma relação de distância, independentemente do hipercone utilizado).

Abstract

In this work we studied a class of scheduling policies for Flexible Manufacturing Systems, introduced by Sharifnia, Caramanis & Gershwin (SCG-91), based on hypercones $C(M, b) = \{y : My \leq b\}$. For this kind of policies, the production control changes whenever the system trajectory intersects any hypercone facet, which may introduce a positive set up time. Like SCG-91, we concentrated in systems formed by a unique machine. We introduced the concept of strong stability (the sequences of intersections between trajectory and facets of the hypercones are convergent) and we showed the equivalence between the strong stability for any system, operated by hypercone $C(M, b)$, and strong stability for associated homogeneous systems (system with same characteristics, unless it has null set up times, operated by hypercone $C(M, \vec{0})$). We presented necessary and sufficient conditions, about hypercones, for strong stability, including one with simple verification ($M^{-1} \succeq 0$), and we yet showed that strong stability is equivalent to convergence of the trajectory to a limit cycle, invariant with respect to the chosen hypercones (in the sense that the cycles' points has the same distance relations, independently of used hypercone).

Políticas Hipercone para Sistemas de Manufatura Flexíveis

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e defendida por Leônidas de Oliveira Brandão
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 27 de maio de 1994.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Carlos Humes Junior (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Manuel Pera Garcia - IME-USP
- Prof. Dra. Maria Alice Grigas Varella - EPUSP-Elétrica

Conteúdo

Introdução	2
1 Políticas Hipercone	7
1.1 Descrição do Modelo	7
1.2 Política de Operação Hipercone	13
1.3 Vetor de Estado Transformado	22
2 Dinâmicas e Estabilidade Forte	30
2.1 Dinâmica Mista	31
2.2 Dinâmicas Não Mistas	36
2.3 Estabilidade Forte	44
3 Condições para Obtenção de Estabilidade Forte	59
3.1 Considerando o Hipercone $C(M, \vec{0})$	60
3.2 Considerando a matriz M do Hipercone	64
3.2.1 Propriedades sobre M fortemente estável	71
3.2.2 Realização sobre M fortemente estável	75
Considerações Finais	76
Notações	77
A Caracterização Alternativa para Estabilidade Forte	79
B Demonstração do Teorema 1.2	84
Referências	87

Introdução

Sistemas de Manufatura Flexíveis (SMF) são sistemas aptos a produzirem simultaneamente vários produtos distintos, utilizando-se de um mesmo conjunto de máquinas. Para isto as máquinas são capacitadas à vários tipos diferentes de processamento (em geral, semelhantes), sendo que, enquanto uma máquina realiza um tipo de processamento em uma peça qualquer p , podem existir outras aguardando processamento nesta máquina, que requeiram, inclusive, outro tipo de processamento que não o requerido por p . Além disto, em uma mesma máquina podem existir várias peças de um mesmo tipo de produto, em diferentes fases de produção.

Devido a esta competição por recursos, cada máquina dispõe de reservatórios, mais comumente designados por “*buffers*”, para armazenamento de peças aguardando produção.

Estes “*buffers*” são caracterizados pelo tipo e estágio de produção das peças que armazenam.

Desta maneira, um produto pode ser definido pelo seu *roteamento*,¹ que é a sequência de “*buffers*” visitados por peças deste produto, sendo que a cada etapa da produção de um produto está associado um *tempo de processamento*. Outra característica associada especificamente aos produtos é a *taxa de entrada* ou *de demanda*, dependendo da abordagem. Quando se trata de taxa de entrada, refere-se a sistemas *dirigidos pelas entradas* (“*driven by input*”), que é a taxa com que o “*buffer*” do início de uma rota é alimentado com peças do respectivo produto. Quando se trata de taxa de demanda, que é o caso que consideraremos neste trabalho, dizemos que o sistema é *dirigido pela demanda* (“*driven by demand*”), neste caso a operação do sistema deve ser efetuada de maneira a acompanhar esta taxa.

Outra característica dos SMF é a possibilidade de existência de um tempo de preparação (“*set up*”) não nulo para mudança de produção, ou seja, poderá existir um tempo não nulo para que uma máquina deixe de processar peças de determinado produto e inicie o processamento de outro tipo de produto.

A despeito de sua complexidade de operação, SMF se fazem necessários devido às questões econômicas. Na manufatura de produtos que necessitem de muitos tipos distintos de processamento (como é o caso de semicondutores, por exemplo), comprar e manter uma planta com máquinas dedicadas, onde cada produto tenha seu conjunto de máquinas exclusivas, uma para cada fase de sua produção, pode ser economicamente inviável.

Como as filas que se formam nos “*buffers*” geram retardos na resposta do sistema, o

¹Optamos por manter a forma inglesa de alguns termos por estes serem amplamente utilizados na literatura.

o roteamento: neologismo para ROTEIRO? ou para ROTA? (TRAJETÓRIA)?

o planta (em Português) ≠ plant (em Inglês) = instalação, fábrica

tempo médio de produção cresce proporcionalmente ao tamanho destas filas internas, um primeiro objetivo a ser buscado na operação de SMF é diminuir o tamanho das filas internas.

LK-90 → LK-90 cita a relevância do estudo de políticas de atendimento aos “buffers” na manufatura de semicondutores de tecnologia “masterslice”². Mas, uma informação mais ilustrativa da importância deste estudo foi apresentada por P.R.Kumar, em uma exposição em Urbana-Champaign (EUA) no ano de 1990, e se refere a manufatura de semicondutores para o “mainframe” IBM 3090: o tempo médio aproximado para a produção deste “chip” era de seis meses, sendo que destes apenas duas semanas se tratava de trabalho na pastilha, o restante do tempo a pastilha passava em “buffers” aguardando processamento.

Quanto à operação do sistema existem duas grandes linhas, uma baseada em abordagem *centralizada* ou *hierárquica* e a outra *descentralizada* ou *distribuída*. Tipicamente a primeira é “driven by demand” e a segunda “driven by input”. Deste modo, para um sistema já definido (topologia, taxas, etc...), a escolha de uma política que atenda proximamente os objetivos do gerenciador do sistema é crucial. Estes objetivos podem ser, por exemplo: atendimento a previsão de vendas; atendimento a prazos de entrega, em produção sob encomenda; ou simplesmente, minimização do tempo médio de produção.

Em ambas as abordagens uma boa medida de desempenho do sistema diz respeito à quantidade de estoques, no caso descentralizado, se referindo aos estoques internos, e no caso hierárquico, num nível superior, aos estoques de produtos acabados. À evolução destes estoques, denominaremos *trajetória efetiva* do sistema.

Por simplicidade de notação às vezes nos referiremos a peças de determinado produto apenas por produto.

Até recentemente, o tratamento de sistemas de manufatura flexíveis se concentrava numa abordagem *hierárquica*, e em particular, em seus níveis superiores. Esta hierarquia diz respeito a uma divisão em níveis de modelagem, onde os níveis superiores na hierarquia são caracterizados por serem modelos com informações mais gerais e horizonte de planejamento mais longos (agregados), além de usualmente serem modelos mais “relaxados”. O nível superior estabelece uma meta a ser seguida (*trajetória objetivo*) visando otimizar algum critério e os níveis inferiores “tentam” cumprir esta meta, fazendo com que a trajetória efetiva faça um “tracking” da trajetória objetivo, isto é, que a evolução da situação da produção (diferença entre produção e demanda, neste caso “driven by demand”) siga de perto a trajetória objetivo.

Após a publicação do artigo de Perkins & Kumar em 1989, PK-89, passou a existir

²Superposição de interconexão por camadas resistivas para personalização da placa. Para maiores referências vide D-88.

uma preocupação maior com a implementação de *políticas de operação descentralizadas* ou *distribuídas* (vide, por exemplo, as referências CR-89, H-90, KS-90, LK-90, P-90, K-91, HH-93, S-93 e HBG-93). Entendemos por políticas descentralizadas as regras de operação do sistema a serem implementadas em cada máquina, segundo as quais a máquina “decide” qual o “buffer” a ser processado e determina seu tempo de processamento, levando em consideração informações locais, sem necessidade do conhecimento da situação das demais máquinas. Algumas das informações consideradas podem ser: taxas de processamento, níveis de “buffers”, taxas de entrada de peças no sistema e datas de entregas de produtos, dentre outras.

Neste trabalho, estudamos uma classe de políticas de atendimento à “buffers”, tipo corredores pontados ou hipercones, introduzida por Sharifnia, Caramanis & Gershwin (SCG-91), para fazer “tracking” de uma trajetória objetivo. A idéia é conseguir um hipercone ($Ax \leq b$) que contenha esta trajetória, sendo que, sempre que a trajetória efetiva atingir uma face do hipercone inicia-se o processamento do produto associado à mesma. Este produto é processado até que a trajetória efetiva atinja outra face do hipercone. O principal interesse no estudo desta classe de políticas é a caracterização de hipercones que induzam a convergência da trajetória efetiva para o ponto alvo (ou “hedging point”) da trajetória objetivo, neste caso diremos, simplificada, que o sistema é *fortemente estável* sob a política aplicada. Quanto a esta estabilidade forte, SCG-91 mostraram que se o sistema homogêneo (sistema com tempos de “set ups” nulos, operado por um hipercone $Ax \leq \vec{0}$) é fortemente estável, segue a estabilidade forte de qualquer sistema com as mesmas taxas de demandas e tempos de processamento, porém com tempos para “set ups” não nulos, operado por hipercones $Ax \leq b$ (desde que a matriz A seja a mesma para ambos). Os autores ainda apresentaram uma condição sobre a matriz geradora do hipercone (A) que pode levar a uma sequência de atendimento “round-robin”³.

Introduziremos uma dinâmica mista (combinando duração de processamento, Δ , e vetor de estado do sistema, x), usando a descrição derivada de uma transformação linear, correspondente a descrever os controles e o vetor de estado do sistema na base definida pelos controles de operação sob velocidades máximas, V . Usaremos esta descrição para: estudar as condições nas quais uma sequência “round-robin” é gerada (mostrando a necessidade de hipóteses mais fortes que as originais de SCG-91); utilizando uma definição de estabilidade forte (utilizada implicitamente por SCG-91), mostrar que na ausência de “set ups” esta estabilidade equivale à trajetória convergir para o vértice do hipercone, sendo que este ponto é atingido em um tempo finito e, na presença de “set up”, equivale a balancear a produção com a demanda (próximo ao vértice do hipercone); mostrar a equivalência da estabilidade forte entre dois sistemas com iguais taxas de demanda e velocidades de produção, sendo que um deles tem tempos de “set ups” não nulos e é operado pelo hipercone $C(A, b)$, enquanto

³Sendo $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$ um conjunto de filas de peças em uma máquina, então qualquer sequência de atendimento seguindo uma ordem $(x_{i_j}, x_{i_{j+1}}, \dots, x_{i_k}, x_{i_1}, \dots, x_{i_{j-1}})$ é “round-robin”.

no outro estes tempos de “set ups” são nulos e o mesmo é operado pelo hipercone $C(A, \vec{0})$ (SCG-91 propuseram, apenas, que um lado desta equivalência valeria); para corrigir um resultado de estabilidade forte proposto por SCG-91; e, ainda, para obter condições necessárias e suficientes de estabilidade forte, inclusive uma de fácil verificação ($M^{-1} \succeq 0^4$, onde M deriva da matriz A e do conjunto de controles).

No *capítulo 1*, introduziremos o sistema em estudo e a notação a ser utilizada. Caracterizaremos os hipercones e as *políticas hipercone* introduzidas por SCG-91, apresentando ainda condições para que um hipercone induza uma sequência de atendimento “round-robin” (teorema 1.1). Estas condições ($A \in \mathcal{S}$ e $Ad \geq \vec{0}$) foram apresentadas por SCG-91, a menos de um detalhe técnico que elucidaremos. Mostraremos que as colunas da matriz dos controles, V , formam uma base do $\mathbb{R}^n$, o que nos permitirá trabalhar com o *vetor espaço de estado transformado* $y = V^{-1}x$ e que simplificará sobremaneira o estudo das políticas hipercone. Ainda apresentaremos vários resultados relativos a esta nova base, inclusive a forma de V^{-1} .

No *capítulo 2*, apresentaremos inicialmente, o que denominamos, *dinâmica mista* por combinar o vetor de estado do sistema y^k com o *vetor de tempo de produção* Δ^k . Mostraremos uma propriedade para a triangular inferior de uma matriz $M = AV \in \mathcal{S}$, a saber, que a mesma é não singular e sua inversa não tem entradas negativas. Esta forma será utilizada na apresentação das dinâmicas não mistas para y^k (no teorema 2.2, devido a SCG-91) e para Δ^k (na seção 2.2), e veremos que as *descrições não mistas* para as dinâmicas de Δ^k e y^k têm formas simples e semelhantes, derivadas da matriz geradora do hipercone (M). Apresentaremos formalmente uma definição de estabilidade forte, usada implicitamente por SCG-91, demonstrando que a mesma equivale a trajetória efetiva do sistema convergir para o vértice hipercone, quando o tempo para “set up” é nulo. Ainda mostraremos que, no caso geral, estabilidade forte equivale a uma convergência para um ciclo limite “próximo” ao vértice do hipercone, mostrando quão próximo. Além de, no teorema 2.9, mostrarmos que a estabilidade forte do *caso homogêneo* ($My \leq \vec{0}$ e “set ups” nulos) é equivalente à estabilidade forte do caso geral (SCG-91 haviam sugerido, apenas, valer uma das implicações desta equivalência). Deste modo passamos a nos concentrar no estudo de políticas hipercone homogêneo que induzem “round-robin”. Além disto, mostraremos no teorema 2.6 que, quando os tempos para “set ups” são nulos, se a trajetória converge para um ponto $\bar{y}$, partindo de $y^0 \in C(M, b)$, então converge em um tempo $\|\bar{y} - y^0\|_1$, *independentemente* das características do hipercone.

No *capítulo 3* trataremos basicamente de condições de estabilidade sobre o hipercone homogêneo, trabalhando conceitos semelhantes a *teoremas de separação de convexos*. Na primeira seção, mostraremos que se existir uma ponderação $p > \vec{0}$ para o vetor de estado y que seja limitada ($p^t y < +\infty$), então o sistema será estável, apresentando ainda, um

⁴Usaremos a notação $T \succeq 0$ para indicar que todos os elementos da matriz T são não negativos. Analogamente, usaremos $T \succ 0$ se todos os elementos de T são estritamente positivos.

contra-exemplo (exemplo 1.3.3) para uma afirmação de SCG-91 que garantia que, para um tipo de estrutura sobre a matriz geradora do hipercone $M = AV$, a ponderação $(1 \ 1 \cdots 1)y$ é limitada. Completando esta primeira seção, apresentaremos uma condição necessária e suficiente de estabilidade no corolário 3.1 (o hipercone estar no $\mathbb{R}_+^n$). Na segunda seção, também trataremos basicamente de condições de estabilidade, desta vez usando diretamente a matriz geradora do hipercone, M . Utilizaremos *teoremas de alternativas* para transformar as condições geométricas obtidas na seção anterior em condições algébricas que permitam uma verificação para a estabilidade forte, que seja computacionalmente simples. Neste sentido, apresentaremos uma condição necessária e suficiente para estabilidade, corolário 3.2, que transforma a condição geométrica (hipercone no $\mathbb{R}_+^n$) em uma condição análoga aos teoremas de separação de convexos. E, baseados no clássico teorema de alternativas de Farkas, aqui apresentado no teorema 3.4, transformaremos esta condição em outra de simples verificação, $M^{-1} \succeq 0$, no teorema 3.5. Outro resultado interessante a ser apresentado nesta seção, é o teorema 3.6, que basicamente diz que se a matriz geradora do hipercone satisfaz o critério de dominância diagonal para o método iterativo de Gauss-Seidel então o sistema é fortemente estável. Ainda faremos algumas considerações sobre a escolha de hipercones que gerem políticas fortemente estáveis, mostrando que se conhecemos uma matriz M , $M \in \mathcal{S}$ e $M^{-1} \succeq 0$, então, dada qualquer configuração de sistema, $(d, \tau, \vec{0}) \in \mathbb{R}_+^{n \times n \times n}$, satisfazendo a condição de carga, a política de operação hipercone definida pelo hipercone $C(A_M, \vec{0})$, com $A_M = MV^{-1}$, leva à estabilidade forte do sistema. E devido aos teoremas 2.6 e 3.3, que garantem que o tempo de convergência é invariante qualquer que seja a matriz geradora do hipercone, a importante questão quanto ao tempo de convergência é irrelevante, sendo suficiente o conhecimento de uma única $M \in \mathcal{S}$, para a qual $M^{-1} \succeq 0$.

No *Apêndice A* apresentaremos uma versão alternativa para a obtenção da caracterização de estabilidade forte para o caso homogêneo, $M^{-1} \succeq 0$, que cronologicamente é anterior a apresentada na seção 3.2, porém foi preterida por ser mais prolixa. A razão de a mantermos no Apêndice, é por conter um formalismo interessante que nos permitirá, por exemplo, apresentar um novo teorema de alternativas (teorema A.1).

No *Apêndice B*, apresentaremos, apenas a demonstração de um teorema proposto no final do primeiro capítulo, teorema 1.2.

Capítulo 1

Políticas Hipercone

Na primeira seção deste capítulo introduziremos o sistema em estudo, a notação a ser utilizada e o conceito de estabilidade usual na literatura, apresentando alguns exemplos.

Na seção 2 apresentamos as características de hipercones e as políticas de operação “geométricas” hipercones. Apresentaremos ainda as condições para que o hipercone induza uma sequência de atendimento “round-robin” e uma nova base de representação do sistema, que usa a matriz do conjunto de controles V e que simplificará sobremaneira o estudo das políticas hipercone.

Na seção 3, mostraremos que as colunas da matriz dos controles, V , formam uma base do $\mathbb{R}^n$, o que nos permitirá trabalhar com o *vetor espaço de estado transformado* $y = V^{-1}x$, além de apresentarmos uma série de resultados para fundamentar esta transformação, como por exemplo, a forma da inversa de V .

1.1 Descrição do Modelo

Em geral, na abordagem hierárquica para SMF, um nível superior da hierarquia determina um *ponto alvo* (“target point”) no *espaço de estados*¹ que é o resultado da minimização de um critério sobre os custos pela formação de estoques e penalidades por não atendimento à demanda, considerando-se a capacidade do sistema² e o conhecimento dos tempos médios de quebras de máquinas (MTBF³) e tempos médios para reparos (MTTR⁴). Este nível

¹ Espaço onde estão definidos os vetores de estado do sistema.

² Tais como topologia do sistema e tempo para cada processamento da máquina.

³ “Mean Time Between Failure”.

⁴ “Mean Time To Repair”.

superior ainda determina, a partir de um ponto inicial (situação original do sistema), a *trajetória objetivo* (“target trajectory”) para se atingir o ponto alvo. Uma característica desta trajetória objetivo é ter o ponto alvo como o único ponto fixo, ou seja, no instante em que se atinge o ponto alvo, o sistema deve fazer com que a taxa de produção seja igual à taxa de demanda para que o estado do sistema não se altere.

Como SCG-91, trabalharemos com sistemas com

uma máquina e n produtos,

numerados de 1 a n , sem *reprocessamento*⁵. Cada produto necessita de um tempo fixo para ser processado pela máquina e suas taxas de demanda são fixas e conhecidas. Deste modo, os sistemas que consideraremos neste trabalho podem ser caracterizados pelos vetores $(d, \tau, \bar{s}) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n$:

$$\begin{aligned} d &\geq \vec{0}^6, \\ \tau &> \vec{0}, \\ d^t \tau &< 1, \\ \bar{s} &\geq \vec{0}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

sendo que, para $p = 1, 2, \dots, n$,

d_p é a taxa de demanda pelo produto p ;
 τ_p o tempo necessário para que a máquina processe o produto p ; e
 $\bar{s}$ é o tempo necessário para preparar o processamento do produto p .

O principal indicador do estado do sistema é o *vetor de estado* do mesmo, que neste trabalho será a diferença entre a produção e demanda acumuladas (nesta ordem). O vetor de estado do sistema no instante t , será representado por $x(t) \in \mathbb{R}^n$, cuja dinâmica é descrita abaixo

$$\dot{x} = u \in \{v^0, v^1, \dots, v^n\}, \tag{1.2}$$

onde u é o *controle do sistema* e

$$\begin{aligned} v^0 &= -d \\ v^i &= \frac{1}{\tau_i} e^i - d, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

⁵Por simplicidade, diremos que um produto sofre reprocessamento se necessitar mais que um tipo de processamento em uma mesma máquina.

⁶Usaremos a notação $x \geq y$ se, e somente se, para todas as componentes i , $x_i \geq y_i$ e $x \geq y$, se $x \geq y$ e $x \neq y$, como em M-69. Analogamente para $x \leq y$ e $x \leq y$.

Assim, sempre que a máquina for processar algum produto, o fará sob velocidade máxima (*taxa nominal de processamento*).

Definição 1 Definiremos por trajetória (efetiva) do sistema à evolução do vetor de estado, isto é, à evolução do vetor de estado $\{x(t) : t \geq 0\}$.

A trajetória do sistema, no contexto deste trabalho, poderá ser entendida como evolução de “surplus” (ou excesso de produção), assim, $x_p(t) < 0$ indica que, no instante t , a produção acumulada do produto p está abaixo da demanda acumulada do mesmo e $x_p(t) > 0$ indica o oposto.

O suprimento de peças para processamento é ilimitado, sendo desconsiderado tempos para alimentação de máquinas. De qualquer modo, se o tempo de alimentação de um produto fosse menor ou igual ao seu tempo de processamento e mantivessemos nosso interesse em acompanhar a evolução do atendimento à demanda, o modelo permaneceria inalterado.

Apresentaremos a seguir uma interpretação à evolução da demanda e da produção:

“Podemos entender a taxa de demanda por produto como a taxa de clientes chegando à porta da fábrica a espera de uma peça manufaturada, assim, $\int_0^t d_p(s)ds$ seria o número total de clientes a procura de uma unidade do produto p , que passaram pela porta da fábrica até o instante t . Sendo $u_p(t)$ a taxa de produção do produto p no instante t , $x_p(t) = (\int_0^t u_p(s) - d_p(s)) ds$ é a quantidade de clientes, a procura do produto p , que ainda não foram atendidos no instante t .

Deste modo, $x_p(t) > 0$, é o número de clientes, no instante t , a espera do produto p (“backlog”). Se $x_p(t) < 0$, então existe estoque do produto p (“surplus”), e neste caso, mesmo chegando clientes continuamente, é possível parar a produção de p por determinado tempo, mantendo pronto atendimento aos clientes que chegam a procura de p ”.

Um intervalo de tempo onde o controle u é constante e igual a v^i ($i = 1, 2, \dots, n$) será denominado *rodada de produção i* ou simplesmente *produção de i* .

A primeira questão a ser abordada no estudo de SMF é,

“como operar o sistema ?”

Em função das características dos modelos de SMF, esta operação é baseada em eventos, que pode ser, por exemplo, que alguma componente do vetor de estado do sistema atinja o valor zero. Quanto às regras,

Definição 2 Diremos que uma política de operação (ou simplesmente política) é um conjunto de regras que determina qual produto será atendido e por quanto tempo o mesmo será processado.

Quando o sistema contiver mais que uma máquina, a regra de operação deve considerar cada uma das máquinas.

Após PK-89, passou a existir um interesse muito grande por políticas descentralizadas, que são aquelas (definidas para cada máquina) onde os eventos que provocam decisões sobre troca de processamento são dependentes apenas de informações locais à máquina, como por exemplo, a situação do vetor de estado da mesma. Neste trabalho, consideraremos políticas descentralizadas para fazer “tracking” de um trajetória objetivo previamente determinada, como já citamos no início desta seção.

A classe de políticas que consideraremos induzirá uma ordem de atendimento específica, que devido sua importância, formalizaremos a seguir.

Definição 3 Diremos que uma sequência de atendimento, $\{q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, aos produtos $\mathcal{P} = \{1, 2, \dots, n\}$ é “round robin” se,

$$\forall (i, j) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}, \quad (q_i, q_j) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P},$$

sendo que, $q_i \neq q_j$ sempre que $i \neq j$, e ainda

$$q_k = q_{k+n}, \quad \forall k \geq 0,$$

ou seja, $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ é uma permutação de $\mathcal{P}$ e

$$(q_{k+1}, q_{k+2}, \dots, q_{k+n}) = (q_{k+n+1}, q_{k+n+2}, \dots, q_{k+n+n}), \forall k \geq 0.$$

A razão do surgimento desta sequência “round robin” advém das características da política de operação com a qual trabalharemos, que visa fazer com que a trajetória efetiva siga a trajetória objetivo. Poderemos ver isto claramente quando definirmos esta política, na próxima seção.

Para o sistema deixar de processar um produto e passar para o processamento de outro, pode existir um *tempo de “set up”*, deste modo, seria razoável trabalharmos com os tempos de “set up” em $\mathbb{R}_+^{n \times n}$, permitindo tempos de “set up” diferentes entre cada par de trocas (produto que deixa de ser processado - produto que passa a ser processado). Porém, isto é desnecessário ao considerarmos política de atendimento que induz sequência “round robin”, uma vez que neste caso a sequência de trocas é fixa e de cardinalidade n .

Se colocarmos, por exemplo, como sequência de atendimento $q_i = (i \bmod n) + 1, i \in \mathbb{N}$, poderíamos considerar

$$\bar{s}_{(i \bmod n)+1} \text{ como o tempo para mudar a produção de } i \text{ para } (i \bmod n) + 1.$$

Será conveniente definirmos os símbolos,

$$\rho_i = d_i \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$\rho = \sum_{j=1}^n \rho_j;$$

$$\vec{\rho} = (\rho_1 \ \rho_2 \cdots \ \rho_n)^t;$$

$$\tau_M = [\tau_1 e^1 | \tau_2 e^2 | \cdots | \tau_n e^n]^7.$$

Diremos que ρ_i é a *taxa de congestionamento do produto i* e ρ a *taxa de congestionamento da máquina*. Devido a importância da última das desigualdades das relações (1.1), denominaremos $\rho = d^t \tau < 1$, por *condição de carga*.

A condição de carga é necessária para que o sistema tenha capacidade suficiente para atender à demanda, por exemplo, se a taxa de demanda (d_p) for maior que a taxa de processamento deste produto ($1/\tau_p$), o sistema ficará congestionado. A razão da necessidade da condição de carga para qualquer SMF poderá ser observada nos próximos dois exemplos.

Exemplo 1.1.1 *Considere um sistema com uma só máquina e um único produto, sem reprocessamento, cuja taxa de demanda é 2 peças por segundo e tempo de processamento 1 segundo por peça, produzindo à velocidade máxima ($1/\tau$). Neste caso,*

$$d^t \tau = 2 > 1 \text{ e } \dot{x} = 2 - 1,$$

assim, sendo $x(0) = 0$, a evolução do vetor de estado é descrita por

$$x(t) = t,$$

indicando que a cada segundo o “déficit” de produção é acrescido de uma unidade de peça, ou seja, a fila de clientes a espera por produto cresce continuamente, indicando que este sistema não é dimensionado para atender à demanda existente.

Quando $d^t \tau = 1$, podem ocorrer problemas dependendo da existência de tempos não nulos para “set up” e das características da política utilizada. Um exemplo simples de não possibilidade de atendimento à demanda, quando $\rho = 1$, poderá ser observado a seguir.

Exemplo 1.1.2 *Considere um sistema com uma só máquina e apenas dois produtos, sem reprocessamento, com tempos de processamento iguais a 0.5 segundo, i.e., $\tau = (0.5 \ 0.5)^t$, e taxas de demanda iguais a 1 peça por segundo, i.e., $d = (1 \ 1)^t$, sendo de 1 segundo*

⁷Isto é, τ_M é a matriz cuja i ésima coluna é $\tau_i e^i$.

os tempos de “set up”. Se este sistema é operado pela política de atendimento “processar um produto por 1 segundo passando para o outro”, observa-se a seguinte evolução de $x(t)$, considerando-se $x(0) = (w_1 \ w_2)^t$,

Vetor de estado			Início do evento
$x(0)$	$=$	$(w_1 \ w_2)^t$	processamento 1
$x(1)$	$=$	$(w_1 + 1 - 2 \ w_2 + 1)^t$	tempo de “set up”
$x(2)$	$=$	$(w_1 + 2 - 2 \ w_2 + 2)^t$	processamento 2
$x(3)$	$=$	$(w_1 + 3 - 2 \ w_2 + 3 - 2)^t$	tempo de “set up”
$x(4)$	$=$	$(w_1 + 2 \ w_2 + 2)^t$	
$\vdots$			
$x(4k)$	$=$	$(w_1 + 4k - 2k \ w_2 + 4k - 2k)^t$	processamento 1
$x(4k + 1)$	$=$	$(w_1 + 4k + 1 - 2k - 2 \ w_2 + 4k + 1 - 2k)^t$	tempo de “set up”
$x(4k + 3)$	$=$	$(w_1 + 4k + 2 - 2k - 2 \ w_2 + 4k + 2 - 2k)^t$	processamento 2
$x(4k + 4)$	$=$	$(w_1 + 4k + 3 - 2k - 2 \ w_2 + 4k + 3 - 2k - 2)^t$	tempo de “set up”
$x(4(k + 1))$	$=$	$(w_1 + 2(k + 1) \ w_2 + 2(k + 1))^t$	
$\vdots$			

Genericamente, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$x(4k) = (w_1 + 2k \ w_2 + 2k)^t,$$

que também é uma função estritamente crescente, indicando ilimitação para o “déficit” de produção.

Uma questão essencial no estudo de SMF é a *estabilidade* do sistema, que usualmente equivale a garantir limitação para os componentes da trajetória efetiva, ou seja, em geral

Definição 4 Um SMF é estável se, e somente se,

$$\exists \Gamma_{x(0)} : \|x(t)\|_{\infty} \leq \Gamma_{x(0)}, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.3)$$

Um sistema que não seja estável é dito instável.

Deste modo, no contexto deste trabalho, dizer que o sistema é estável, equivale a dizer que a produção não pode ficar ilimitadamente abaixo ou acima da demanda (vide dinâmica (1.2)).

Vale notar que os sistemas dos dois exemplos anteriores são instáveis, sendo que o primeiro (1.1.1) é intrinsecamente instável, no sentido que qualquer que seja a política de atendimento o sistema continuará instável.

O segundo exemplo (1.1.2) também é intrinsecamente instável, pois toda sua capacidade de produção atende sem qualquer folga à demanda, sendo que, a cada “set up” é aumentado o “déficit” de produção, que não poderá mais ser compensado, dada esta ausência de folga. No entanto, se para o mesmo exemplo considerássemos tempos de “set up” nulos, a política proposta faria com que o sistema fosse estável, sendo

$$\begin{aligned} x(0) &= (w_1 \quad w_2)^t \\ x(1) &= (w_1 + 1 - 2 \quad w_2 + 1)^t \\ x(2) &= (w_1 + 2 - 2 \quad w_2 + 2 - 2)^t \\ &\vdots \\ x(2k) &= (w_1 \quad w_2)^t. \end{aligned}$$

Na seção 2.3 apresentaremos outra caracterização de estabilidade, que foi utilizada implicitamente por SCG-91, sendo mais restritiva que a apresentada acima, e por isto será denominada fortemente estável. Veremos que, no contexto das políticas em estudo, esta definição se impõe sobre o conceito apresentado acima.

A questão que trataremos neste trabalho se refere à caracterização de estabilidade forte para a classe de políticas que apresentaremos na próxima seção, para operação de Sistemas de Manufatura Flexíveis definidos pelas equações (1.1) e (1.2).

Neste trabalho nos referiremos constantemente à linhas e colunas de matrizes (derivadas da descrição da política de atendimento), sendo conveniente usarmos a notação:

Definição 5 *Seja D uma matriz $p \times q$, a menos de clara indicação em contrário, representaremos por D_i , $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, a i -ésima linha da matriz D e por D^i , $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, a i -ésima coluna da matriz D .*

1.2 Política de Operação Hipercone

SCG-91 introduziram um método para operar descentralizadamente SMF (caracterizados por (1.1) e (1.2)), baseado na abordagem hierárquica, no sentido que um nível superior já tenha computado uma trajetória objetivo a ser seguida por esta política de operação. O método consiste em acompanhar a trajetória objetivo utilizando um corredor linear (interseção de semi-espacos) contido em $\mathbb{R}^n$, onde n é a dimensão do vetor de estado do sistema. A idéia é que, existindo uma relação biunívoca entre faces do corredor ($\{1, 2, \dots, n\}$) e controles de produção ($\{v^1, v^2, \dots, v^n\}$), sempre que a trajetória efetiva atingir uma face do corredor, dispara-se a produção correspondente.

Formalizaremos abaixo estes corredores e a seguir definiremos a política de operação.

Definição 6 *Sejam $(A, b) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^n$, diremos que*

$$C(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b\} = \{x \in \mathbb{R}^n / A_i x \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n\},$$

é o corredor linear associado à (A, b) . Além disto, diremos que

$$v \text{ é um vértice de } C(A, b) \text{ se, e somente se, } A_i v = b_i, \text{ para todo } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

O método introduzido por SCG-91, consiste em: uma vez que o vetor de estado inicial do sistema esteja no interior (ou em alguma das faces) do corredor, aplica-se um controle de produção até que a trajetória atinja alguma outra face do corredor, neste momento inicia-se a produção correspondente a esta face.

Quanto a esta definição, poderíamos considerar dois tipos distintos de corredores: os corredores que tenham vértice e os que não tenham.

Observação 1.2.1 *Aos corredores que não tenham vértice denominaremos por hiperprismas⁸ ou corredores prismáticos. Para estes corredores, a política de atendimento não poderia ser uniforme, no sentido que, em algum momento, quando a trajetória efetiva estivesse próxima ao ponto alvo, seria necessário abandonar a política de atendimento (controlada pelas interseções com as faces) e passar a equilibrar produção com demanda, de modo a manter a trajetória efetiva próxima ao ponto alvo. Uma maneira de fazer isto seria, processar cada produto p por um tempo f_p , de modo que*

$$\sum_{i=1}^n f_i v^i = \Sigma_s d, \quad (1.4)$$

sendo Σ_s a soma dos tempos de “set up”.

⁸De outro modo, diremos que $C(A, b)$ é um hiperprisma se, para quaisquer hiperplanos paralelos, que não contenham uma face de $C(A, b)$, a interseção dos mesmos com o hiperprisma formar poliedros congruentes. Ou ainda, $C(A, b)$ é um hiperprisma se existir uma única direção $d \neq \vec{0}$ para a qual, $\{\forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } x \in C(A, b)\} \Rightarrow \{x + \lambda d \in C(A, b)\}$ ($Ad = \vec{0}$).

Figura 1.1: Figura onde $f_1v^1 + f_2v^2 - \bar{s}_1d - \bar{s}_2d = \vec{0}$.

Neste trabalho nos restringiremos ao estudo de corredores que tenham vértice, como no artigo de SCG-91.

É interessante adiantarmos que, para sistemas operados pelas políticas de corredores que consideraremos, a estabilidade forte levará, naturalmente, à um equilíbrio entre produção e demanda parecido com o da equação acima. Sendo f_p o limite do tempo de processamento de i , se colocarmos o ponto alvo como vértice do corredor considerado:

- ▷ Para sistemas com tempos de “set up” nulos, $\Sigma_s = 0$, a trajetória efetiva converge para o ponto alvo, fazendo com que os tempos de produção convirjam para zero. Neste caso existirá um problema, que indicaremos claramente na seção 2.3, quanto à indefinição da política no ponto alvo.
- ▷ Para sistemas com tempos de “set up” não nulos, a equação (1.4) representará um *ciclo limite* para a trajetória efetiva. Nesta situação, cada f_p da equação (1.4) representará o limite do tempo de processamento do produto p , em uma rodada “round robin” de produção, necessário para compensar a demanda acumulada do produto p nesta rodada, incluindo os tempos de “set up”, i.e., f_p é o tempo necessário para produção de i para compensar o decréscimo de $(\sum_{i=1}^n f_i + \Sigma_s)d_p$ unidades em $x_p(\cdot)$. Se considerarmos que os atendimentos formam uma sequência “round robin” convergente com, por exemplo, $\bar{x}$ como o limite da sequência de pontos determinada pela interseção da trajetória efetiva com a face n do corredor, e $t \in \mathbb{R}_+$ o instante que a trajetória efetiva atinge este limite (que mostraremos ser finito), i.e., $x(t) = \bar{x}$, após o instante t , a evolução do vetor de estado ao final de cada rodada de produção, supondo que o atendimento comece pelo produto 1, será

$$\begin{aligned}
x(t) &= \bar{x} \\
x(t + f_1 + s_1) &= \bar{x} + f_1 v^1 - s_1 d \\
x(t + f_1 + f_2 + s_1 + s_2) &= \bar{x} + f_1 v^1 + f_2 v^2 - (s_1 + s_2) d \\
&\vdots \\
x(t + \sum_{i=1}^n f_i + \Sigma_s) &= \bar{x} + \sum_{i=1}^n f_i v^i - \Sigma_s d \stackrel{(1.4)}{=} \bar{x}.
\end{aligned}$$

sendo que, neste caso, diremos que $(x(t), x(t + f_1 + s_1), \dots, x(t + \sum_{i=1}^n f_i + \Sigma_s))^t$ é um *ciclo limite*.

Observação 1.2.2 Vale notar que um corredor com vértice é basicamente a translação de um cone. Mais especificamente, qualquer que seja o corredor linear $C(A, b)$ com um vértice w ($Aw = b$), $C(A, b)$ é uma translação de $C(A, \vec{0})$ por w , pois

$$\forall x \in C(A, \vec{0}), \quad (x + w) \in C(A, b),$$

uma vez que $A(x + w) = Ax + Aw \leq Aw = b$, e

$$\forall z \in C(A, b), \quad (z - w) \in C(A, \vec{0}),$$

uma vez que $A(z - w) = Az - Aw = Az - b \leq b - b = \vec{0}$.

Além disto, o corredor $C(A, \vec{0})$ é um cone pois

$$\forall x \in C(A, \vec{0}) \quad e \quad \lambda \geq 0, \quad \lambda x \in C(A, \vec{0}),$$

i.e., $A(\lambda x) = \lambda Ax \leq \vec{0}$, já que $Ax \leq \vec{0}$.

Quanto aos corredores que utilizaremos neste trabalho,

Definição 7 Diremos que $C(A, b)$ é um corredor pontado ou simplesmente hipercone, se este corredor tiver um vértice.

A política de operação que utilizaremos tem a seguinte regra de operação:

Política de Operação Hipercone Sendo $C(A, b)$ o hipercone considerado e $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, uma vez que a trajetória efetiva alcance a face i do hipercone, definida por $A_i x = b_i$, inicia-se uma mudança para processamento do produto

$$j = (i \bmod n) + 1, \quad \text{fazendo } u = v^j,$$

mesmo que a trajetória já estivesse em outra face que não j . No ponto inicial x^0 , que não deve ser um vértice do hipercone quando $\bar{s} = \bar{0}$, aplica-se sempre o controle v^1 .

Assim que definirmos a classe de hipercones que trabalharemos, mostraremos que esta política não é ambígua para esta classe.

Fazer a face i disparar a produção de $j = (i \bmod n) + 1$ é uma *renumeração* da apresentada por SCG-91, desde que eles usaram $A_i x = b_i$ como a face que dispara a produção de i . A razão de nossa renumeração poderá ser notada quando expressarmos uma condição, sobre o hipercone e a base do conjunto de controles, que faz com que a política de operação hipercone induza uma sequência de atendimento “round-robin”.

Intuitivamente, uma vez que desejamos utilizar a política definida acima, para fazer com que, a partir de qualquer ponto do hipercone, a trajetória seja dirigida ao ponto alvo, os hipercones devem ser construídos tendo o ponto alvo como vértice. Basicamente, a questão que trataremos neste trabalho será:

“como garantir que uma política hipercone leve a trajetória a convergir para o ponto alvo?”

Esta questão será abordada na seção 2.3, onde definiremos o conceito de estabilidade forte e mostraremos que o mesmo está relacionado com a convergência da trajetória efetiva para o ponto alvo, que por sua vez, deve ser vértice do hipercone.

Observação 1.2.3 *Devido às características da política de operação, acompanharemos a evolução de um sistema operado por esta política através dos eventos “interseção da trajetória efetiva com uma face do hipercone”. Mais especificamente através das sequências*

$$\{x_i^k\}_{k \in \mathbb{N}}, \text{ para } i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

sendo x_i^k é a k ésima interseção da trajetória efetiva com a face i do hipercone. A respeito destas sequências, veremos a seguir, no teorema 1.1, que, para os hipercones que consideraremos neste trabalho, o evento k ésima “interseção com a face i ” (x_i^k) é anterior ao evento k ésima “interseção com a face $j = (i \bmod n) + 1$ ” (x_j^k), ou seja, $\{x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ será uma sequência “round robin”.

A classe de matrizes definidas a seguir fará com que as trajetórias efetivas induzam sequências de atendimento “round robin”.

⁹Se existe um tempo necessário para mudança de produção, durante este intervalo de tempo, o controle será $v^0 = -d$.

Definição 8 Fixado o conjunto de controles $\{v^i\}_{i=1}^n$, $\mathcal{S}$ é a classe das matrizes $A^{n \times n}$ para as quais

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} A_i v^i > 0, \quad 1 \leq i \leq n, \\ A_j v^i \leq 0, \quad 1 \leq (j \neq i) \leq n. \end{array} \right.$$

As condições da classe $\mathcal{S}$ dizem que, para tempos de “set up” nulos, durante a produção de i o sistema tem uma trajetória que não sai do hipercone com respeito às condições $A_j x \leq b_j$ ($i \neq j$), e é dirigido para a face $A_i x = b_i$, que dispara a produção de $(i \bmod n) + 1$.

No exemplo 1.3.2 (página 27) apresentaremos um exemplo de corredor cuja matriz que o define não está na classe $\mathcal{S}$ e os problemas que isto acarreta.

Observação 1.2.4 *Cumpramos ressaltar que, para*

$$A \in \mathcal{S} \quad e \quad Ad \geq \vec{0},$$

a política hipercone não é ambígua, no sentido que, sempre que a política aplicar um controle v^i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, num ponto x pertencente à face $i - 1$, então, a única face à qual x não pertence, que pode ser atingida nesta produção de i , é precisamente a face i , ou seja, sempre que a partir de um ponto $x_{i-1} \in C(A, b)^{10}$, a política aplicar o controle v^i e $x_i = x_{i-1} + \lambda v^i - \bar{s}_i d$, para $\lambda \geq 0$, pertencer à face j , qualquer que seja $j \neq i$, então x_i já pertencia à esta face. Mais formalmente,

$$\text{se } A_j x_i = b_j, \quad \text{então } A_j x_{i-1} = b_j,$$

uma vez que,

$$b_j = A_j x_i = A_j x_{i-1} + \lambda A_j v^i - \bar{s}_i A_j d \stackrel{A_j v^i \leq 0}{\leq} A_j x_{i-1} - \bar{s}_i A_j d \stackrel{Ad \geq \vec{0}}{\leq} A_j x_{i-1} \stackrel{A x_{i-1} \leq b}{\leq} b_j,$$

e portanto

$$A_j x_{i-1} = b_j.$$

É importante ressaltar que, ao usarmos $A \in \mathcal{S}$ deverá estar implícito o conjunto de controles associado, deste modo, uma maneira mais adequada de denotarmos estas condições seria impormos

$$M \in \mathcal{S},$$

onde $M = AV$ e $V = [v^1 \mid v^2 \mid \dots \mid v^n]$.

Note que, basicamente $M \in \mathcal{S}$ diz que os únicos elementos positivos de M estão em sua diagonal principal, i.e.,

$$\left\{ M \in \mathcal{S} \right\} \equiv \left\{ M_{ij} > 0 \Leftrightarrow i = j \right\}.$$

¹⁰Se $i = 1$, assumimos que $x_0 \equiv x_n$, pertencente à face n .

No entanto, se utilizássemos exatamente a numeração de SCG-91 os elementos positivos seriam $M_{n1}, M_{12}, M_{23}, \dots, M_{n-1n}$, o que explica parcialmente nossa renumeração.

Figura 1.2: Comportamento da trajetória efetiva quando $M \in \mathcal{S}$, para $j = (i \bmod n) + 1$.

Teorema 1.1 *Utilizando a política de operação hipercone, isto é, ao atingir a face $A_i x = b_i$ dispara-se a produção de $(i \bmod n) + 1$, se a matriz A estiver na classe $\mathcal{S}$ e $Ad \geq \vec{0}$, a trajetória efetiva será uma sequência “round-robin”.*

Demonstração Mostraremos que a política de operação hipercone faz com que: se a partir de um ponto do hipercone aplica-se o controle v^1 , atingir-se-á a face 1, que dispara o controle v^2 , sendo atingida a seguir, a face 2, que, dispara o controle v^3 . Este processo se repete até a face n ser atingida, que pela regra de operação volta a disparar o controle v^1 .

Mais especificamente, denotando por x_i^k a k ésima interseção da trajetória efetiva com a face i , para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, mostraremos que a política induz uma sequência de atendimento “round robin” $\{x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k\}_k$. Para isto, com $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, usaremos Δ_i^k para representar a duração da k ésima rodada de produção de i e $\bar{s}_i \geq 0$, como o tempo de “set up” para preparar a produção de i .

Seja $x^{k-1} = x_n^{k-1} \in C(A, b)$, ou seja,

$$Ax^{k-1} \leq b.$$

Admitindo que neste ponto, o produto 1 seja selecionado (que pela definição da política hipercone, ocorre no ponto y^0), após o tempo de “set up” $\bar{s}_1$, a política aplicará o controle v^1 , cuja duração de produção será Δ_1^k . Desde que $A_1 v^1 > 0$ e $A_1 d \leq 0$, para todo $\lambda > \frac{\bar{s}_1 A_1 d}{A_1 v^1} \geq 0$ ($\lambda A_1 v^1 - \bar{s}_1 A_1 d$),

$$A_1(x^{k-1} + \lambda v^1 - \bar{s}_1 d) = A_1 x^{k-1} + \lambda A_1 v^1 - \bar{s}_1 A_1 d > A_1 x^{k-1},$$

e portanto, quando é aplicado o controle v^1 , a trajetória se aproxima da face 1, então $\Delta_1^k \geq 0$ é finito e determinado por esta face.

Além disto, para todo tempo $\lambda \geq 0$ e $i \in \{2, 3, \dots, n\}$, a trajetória $x^{k-1} + \lambda v^1 - \bar{s}_1 d$, não sai do hipercone com respeito à face i , pois

$$\begin{aligned} A_i(x^{k-1} + \lambda v^1 - \bar{s}_1 d) &= A_i x^{k-1} + \lambda A_i v^1 - \bar{s}_1 \lambda A_i d \stackrel{A \in S}{\leq} \\ &\leq A_i x^{k-1} - \bar{s}_1 \lambda A_i d \stackrel{Ad \geq \bar{0}}{\leq} A_i x^{k-1} \stackrel{Ax^{k-1} \leq b}{\leq} b_i. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Deste modo, a face 1 é a única que pode provocar nova mudança do controle de produção (vide observação 1.2.4), sendo que o próximo ponto da trajetória efetiva a interceptar o hipercone será

$$x_1^k = x^{k-1} + \Delta_1^k v^1 - \bar{s}_1 d$$

e $A_1 x_1^k = 0$, logo Δ_1^k é definido por

$$\Delta_1^k = \frac{1}{A_1 v^1} (b_1 - A_1 x^{k-1} + \bar{s}_1 A_1 d) \geq 0,$$

segue daí e das desigualdades (1.5), que

$$A_1 x_1^k = A_1 x^{k-1} + \frac{b_1 - A_1 x^{k-1} + \bar{s}_1 A_1 d}{A_1 v^1} A_1 v^1 - \bar{s}_1 A_1 d = b_1 \quad \text{e} \quad Ax_1^k \leq b,$$

ou seja, x_1^k pertence à face 1 do hipercone, e segundo a política de operação, ao atingir esta face provoca o disparo do controle v^2 .

Indutivamente, para $i \in \{2, 3, \dots, n\}$, sendo $x_{i-1}^k \in C(A, b)$, com $A_{i-1} x_{i-1}^k = b_{i-1}$, o ponto que dispara o controle v^i pela k -ésima vez e Δ_i^k a duração desta rodada de produção, ou seja,

$$x_i^k = x_{i-1}^k + \Delta_i^k v^i - \bar{s}_i d$$

é o primeiro ponto a partir de x_{i-1}^k que dispara outra produção. Então, por um raciocínio análogo ao caso anterior,

$$\Delta_i^k = \frac{1}{A_i v^i} (b_i - A_i x_{i-1}^k + \bar{s}_i A_i d) \geq 0,$$

sendo que, para todo $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$A_j x_i^k = \begin{cases} A_j x_{i-1}^k + \Delta_i^k A_j v^i + \bar{s}_i A_j d \stackrel{Ax_{i-1}^k \leq \bar{0} \wedge Ad \geq \bar{0}}{\leq} b_j + \Delta_i^k A_j v^i \stackrel{A \in S}{\leq} b_j, & j \neq i \\ A_i x_{i-1}^k + \Delta_i^k A_i v^i - \bar{s}_i A_i d = A_i x_{i-1}^k + \frac{b_i - A_i x_{i-1}^k + \bar{s}_i A_i d}{A_i v^i} A_i v^i - \bar{s}_i A_i d = b_i, & j = i. \end{cases}$$

Deste modo, x_i^k pertence à face i do hipercone, i.e., $Ax_i^k \leq b$ e $A_i x_i^k = b_i$, e segundo a política de operação, ao atingir esta face dispara-se o controle $(i \bmod n) + 1$. ■

Exemplo 1.2.1 Para o sistema $(\tau, d, \bar{s}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\tau = (1/2 \ 1/2)^t$, $d = (1 \ 1/2)^t$ e $\bar{s} = \vec{0}$ se considerarmos a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$, então $A \in \mathcal{S}$ e $Ad \geq \vec{0}$, pois

$$V = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}, \quad AV = \begin{bmatrix} 3/2 & -5/2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Ad = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A figura apresentada a seguir, ilustra uma trajetória, para este exemplo, a partir do ponto $x^0 = (-6 \ -3)^t$, que dispara o controle v^1 , tendo como primeira rodada de produção

$$\Delta_1^1 = -\frac{A_1 x^0}{A_1 v^1} = -\frac{1}{3/2}(-1 * 6 + 1 * 3) = 2, \quad x_1^1 = x^0 + \Delta_1^1 v^1 = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2^1 = -\frac{A_2 x_1^1}{A_2 v^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} * 4 - 1 * 4\right) = 1, \quad x_2^1 = x_1^1 + \Delta_2^1 v^2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -5/2 \end{bmatrix}.$$

Figura 1.3: Representação da trajetória efetiva para o exemplo anterior.

Vale ressaltar, neste teorema, o aparecimento do *vetor de tempos de produção*, Δ^k . A dinâmica deste vetor será amplamente explorada a partir da seção 2.1.

Doravante, todos os hipercones que utilizaremos terão as matrizes que os definem na classe $\mathcal{S}$, de maneira a garantir atendimento “round robin”.

1.3 Vetor de Estado Transformado

A fim de garantir que sob tempos de “set up” não nulos a trajetória permaneça dentro do hipercone, devemos impor, como em SCG-91 e no teorema anterior, que

$$Ad \geq \vec{0}$$

(vale lembrar que $d \geq \vec{0}$). Na verdade esta imposição é absolutamente necessária para que a política hipercone faça sentido, apesar de, à primeira vista, podermos imaginar que o controle v^{i+1} traz a trajetória efetiva de volta ao hipercone sempre que a partir de um ponto x_i^k , $x_i^k - \bar{s}_{i+1}d$ deixar o hipercone. Porém, isto nem sempre é possível, como podemos observar no exemplo a seguir.

Exemplo 1.3.1 Para o sistema, $\tau = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/6 \end{bmatrix}$, $d = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $\bar{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, operado pelo hipercone $C(A, \vec{0})$, com $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{S}$, tomando o ponto $\bar{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$, na face 2 deste hipercone, $\bar{x}$ provoca o disparo do controle $v^1 = (3 \quad -3)^t$. Porém, este só passará a ser aplicado

após o tempo de “set up” $\bar{s}_1$, ou seja, após a trajetória atingir o ponto $\bar{x} - \bar{s}_1 d$. No entanto, a trajetória

$$\bar{x} + \lambda v^1 - \bar{s}_1 d, \quad \lambda \geq 0,$$

não mais interceptará a face 1, pois

$$A_1(\bar{x} + \lambda v^1 - \bar{s}_1 d) = A_1 \bar{x} + \lambda A_1 v^1 - \bar{s}_1 A_1 d = -1 + 6\lambda + 2 > 0, \quad \lambda \geq 0.$$

Figura 1.4: Trajetória de $\bar{x} + \lambda v^1 - \bar{s}_1 d$ $\lambda \geq 0$, jamais interceptará a face 1.

É importante ressaltarmos que, se $Ad \geq \vec{0}$ e $M \in \mathcal{S}$, a trajetória induzida pela política hipercone $C(A, b)$, uma vez iniciada em um ponto do hipercone, não mais sairá do mesmo. Além disto esta classe de políticas não é vazia, basta usarmos $A = I$ (corredor “clearing”), pois $I \in \mathcal{S}$ e, como $d \geq \vec{0}$, $Id \geq \vec{0}$.

Em termos de M , a condição acima ($Ad \geq \vec{0}$) é aparentemente mal definida. Porém, mostraremos a seguir que V é não singular (lema 1.1) e portanto

$$\begin{aligned} Ad \geq \vec{0} &\Leftrightarrow AVV^{-1}d \geq \vec{0} \\ &\Leftrightarrow M\vec{\rho} \geq \vec{0}^{11}. \end{aligned}$$

Além deste importante resultado, apresentaremos no lema a seguir a expressão da inversa de V , e mostraremos que V^{-1} não têm elemento negativo. Estes resultados nos permitirão uniformizar e simplificar a notação.

Lema 1.1 *Sob as hipóteses $\tau > \vec{0}$, $d \geq \vec{0}$ e $d^t \tau = \rho < 1$,*

i) $\{v^i = \frac{1}{\tau_i} e^i - d\}_{i=1}^n$ é uma base do $\mathbb{R}^n$;

ii) $V = [v^1 \mid v^2 \mid \cdots \mid v^n] \Rightarrow V^{-1} = (1 - \rho)^{-1} \left((1 - \rho)I + [\vec{\rho} \mid \vec{\rho} \mid \cdots \mid \vec{\rho}] \right) \tau_M$;

¹¹Lembrando que $\vec{\rho} = (\rho_1 \ \rho_2 \ \cdots \ \rho_n)^t$.

$$\text{iii)} \quad \begin{cases} d \geq \vec{0} & \Rightarrow V^{-1} \succeq 0 \\ d > \vec{0} & \Rightarrow V^{-1} \succ 0 \end{cases}.$$

Demonstração

i) Assumir que $\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j = 0$ é equivalente a assumir que

$$\frac{\alpha_i}{\tau_i} - \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \right) d_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

ou seja, $\alpha_i = \rho_i \sum_{j=1}^n \alpha_j.$

Assim $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \right) \rho_i = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \rho_i \right) \alpha_j = \rho \sum_{j=1}^n \alpha_j$

como $\rho \in (0, 1)$, isto leva a $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 0$, daí $\alpha_j = \rho_i \sum_{j=1}^n \alpha_j = 0$, para $j = 1, 2, \dots, n$. Logo $\{v^i\}_{i=1}^n$ é linearmente independente. $\triangleleft$

ii) Notando que, por (i), V é não singular, $\tau > \vec{0}$ e

$$V = \tau_M^{-1} [I - [\vec{\rho} | \vec{\rho} | \dots | \vec{\rho}]] = \tau_M^{-1} R,$$

então

$$V^{-1} = R^{-1} \tau_M.$$

Definindo $H = (1 - \rho)^{-1} ((1 - \rho)I + [\vec{\rho} | \vec{\rho} | \dots | \vec{\rho}])$ e multiplicando a i -ésima linha de R (R^i) pela j -ésima coluna de H (H^j), teremos

$$\begin{aligned} R^i H^j &= (e^i - \rho_i \vec{1})^t (1 - \rho)^{-1} [(1 - \rho)e^j + \vec{\rho}] \\ &= (1 - \rho)^{-1} [(1 - \rho)\delta_{ij} + \rho_i - \rho_i(1 - \rho) - \rho_i \rho] \\ &= \delta_{ij}^{12}. \end{aligned}$$

$\triangleleft$

E (iii) segue por inspeção da descrição de V^{-1} em (ii). $\blacksquare$

¹²Símbolo de Kronecker, $\delta_{ij} = 1 \Leftrightarrow i = j$.

O lema 1.1 será usado para permitir o estudo da dinâmica do sistema, utilizando como base do espaço de estados o conjunto de vetores $\{v^1, v^2, \dots, v^n\}$. Ao vetor de estado descrito nesta base denominaremos por *vetor de estado transformado* $y = V^{-1}x$.

A maior simplicidade introduzida por esta base pode ser observada ao reescrevermos o sistema do exemplo 1.2.1, $\tau = (1/2 \ 1/2)^t$, $d = (1 \ 1/2)^t$ e $\bar{s} = \vec{0}$, agora utilizando a base V . O hipercone de operação será $C(M, \vec{0})$, com

$$M = \begin{bmatrix} 3/2 & -5/2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } V^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Tomando o mesmo ponto inicial do exemplo 1.2.1, $y^0 = (-12 \ -6)^t = V^{-1}(-6 \ -3)^t = V^{-1}x^0$ pertencente à face 2, a primeira rodada de produção para o sistema será

$$\Delta_1^1 = -\frac{M_1 y^0}{M_{11}} = -\frac{1}{3/2} \left(-\frac{3}{2} * 12 + \frac{5}{2} * 6 \right) = 2, \quad y_1^1 = y^0 + \Delta_1^1 e^1 = \begin{bmatrix} -10 \\ -6 \end{bmatrix},$$

$$\Delta_2^1 = -\frac{M_2 y_1^1}{M_{22}} = -\frac{1}{2} (1 * 10 - 2 * 6) = 1, \quad y_2^1 = y_1^1 + \Delta_2^1 e^2 = \begin{bmatrix} -10 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Figura 1.5: Trajetória do sistema na base V .

Na figura acima, apresentamos a representação gráfica da primeira rodada de produção para o sistema do exemplo anterior.

Usando esta representação enunciaremos um número de resultados simples que usaremos no restante do trabalho.

Corolário 1.1 Se $y = V^{-1}x$, então

- i) $Ax \leq \vec{0} \Leftrightarrow AVy \leq \vec{0} \Leftrightarrow My \leq \vec{0}$
- ii) $x = d \Leftrightarrow y = (1 - \rho)^{-1}\vec{\rho}$
- iii) $\tau^t x = (1 - \rho)(1 \ 1 \cdots 1)y$
- iv) $x \geq \vec{0} \Rightarrow y \geq \vec{0}$
- v) $\begin{matrix} A \succeq 0 & \Rightarrow & M \succeq 0 \\ A \succ 0 & \Rightarrow & M \succ 0 \end{matrix}$

Demonstração É omitida por serem resultados triviais. ■

Devido à relação bijetora entre o vetor de estado x e o vetor de estado transformado y , e à simplificação que este segundo acarretará, doravante passaremos a trabalhar com o vetor de estado transformado, que passaremos a denominar apenas por vetor de estado. Quando houver necessidade, nos referiremos ao vetor x por vetor de estado original.

No trabalho de SCG-91 uma estrutura mais fraca que $M \in \mathcal{S}$ é sugerida para que o hipercone $C(M, b)$ induza “round robin”, no sentido que não impuseram (utilizando nossa renumeração) que $A_j v^i \leq 0$, para $j = (i \bmod n) + 1$. Esta condição mais fraca não é usada aqui pois, neste caso, a política pode não ser claramente definida como podemos observar no exemplo de hipercone homogêneo $C(M, \vec{0})$, a seguir.

Exemplo 1.3.2 Tomando $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, uma vez que estamos na face 1 em qualquer outro ponto que não $(0\ 0)^t$, se aplicarmos o controle 2 deixaremos o hipercone. Além disto, se artificialmente impusermos que, fora do hipercone, a interseção da trajetória com $M_2 y = 0$ dispara o controle 1, ainda assim teremos instabilidade e o controle 2 jamais será utilizado novamente, como podemos observar na figura abaixo.

Figura 1.6: Trajetória induzida por uma matriz $M \notin S$.

Nesta figura, começando do ponto y^3 , a linha vertical tracejada representa uma trajetória sem a realização do disparo da produção 1 ($M_2 y = 0 \Rightarrow$ produz 1) e a linha horizontal pontilhada, uma que realiza o disparo da produção 1 ($M_2 y = 0 \Rightarrow$ produz 1). Em qualquer destes casos, a trajetória não volta a interceptar a face 2 ou a face 1 novamente.

SCG-91 ainda afirmaram, no teorema 5.2 de seu trabalho, que se $M \in S$, então $\vec{1}^t y \leq 0$ ¹³, qualquer que seja $y \in C(M, \vec{0})$. Isto não é válido mesmo quando acrescentamos as hipóteses de que $M\vec{p} \geq \vec{0}$ e de que o hipercone $C(M, \vec{0})$ tenha interior não vazio. Isto poderá ser visto claramente no exemplo a seguir.

Cumpramos ressaltarmos que, no corolário 3.2, página 64, veremos que: se pudermos garantir as condições acima, i.e., $\{M \in S : \forall y \in C(M, \vec{0}) \Rightarrow \vec{1}^t y \leq 0\}$, então o sistema homogêneo operado por $C(M, \vec{0})$ é fortemente estável.

¹³Usando o item (iii) do corolário 1.1, $(1 - \rho)\vec{1}^t y = (1 - \rho)\vec{1}^t V V^{-1} y = \tau^t x$. A função $\tau^t x(t)$ (carga de trabalho) é usada em alguns trabalhos (como PK-89 e KS-90) como uma função de Liapunov, para a obtenção de resultados de estabilidade.

Exemplo 1.3.3 Consideremos $M_{[4]} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{\rho} = (0 \ 0 \ 0.1 \ 0.1)^t$ e $y = (1 \ 2 \ 0 \ 1)^t$. Neste caso, $M \in \mathcal{S}$, $M_{[4]}\vec{\rho} = \vec{0}$ e $M_{[4]}y < \vec{0}$. No entanto, podemos verificar que $\vec{1}^t y > 0$.

Este exemplo também elucida dois pontos interessantes:

- i) se começamos em uma linealidade¹⁴ (por exemplo, $y^0 = \vec{\rho}$), um ponto fixo da política é atingido;
- ii) nem toda linealidade pode ser atingida a partir de algum outro ponto do hipercone, por exemplo, $y^0 = \vec{\rho}$ não é atingível pela política, pois para que algum y atingisse $\vec{\rho}$ usando um controle e^i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, seria necessário que

$$y + \delta e^i = \vec{\rho} \Leftrightarrow y = \vec{\rho} - \delta e^i,$$

e

$$My \leq \vec{0} \Leftrightarrow M(\vec{\rho} - \delta e^i) = -\delta M_i \leq \vec{0}.$$

Porém, por inspeção, notamos que a última desigualdade não é válida, pois não existe sequer uma coluna de $M_{[4]}$ cujos elementos sejam todos não negativos.

No entanto se tomarmos

$$M_{[5]} = \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \hline 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right] \begin{array}{c} \\ \\ M_{[4]} \\ \\ \end{array}$$

então $y^0 = (0 \ \vec{\rho}^t)^t$ é atingível pelo controle e^1 (v^1 no espaço de estados original).

Para o exemplo acima, $\vec{\rho}$ é uma linealidade do hipercone. Devemos notar que a menor dimensão de M , para que o sistema

$$\{M \in \mathcal{S}, \exists y : My < \vec{0} \text{ e } \exists h \neq \vec{0} : Mh = \vec{0}\}, \quad (1.6)$$

tenha solução é 4, ou seja,

¹⁴Diremos que h é uma linealidade de $\{y/M y \leq \vec{0}\} \Leftrightarrow Mh = \vec{0}$ e $h \neq \vec{0}$.

Teorema 1.2 *Se o sistema 1.6 tem solução, então $n \geq 4$.*

Demonstração A prova deste teorema segue imediatamente dos dois lemas (lema B.1 e lema B.2) que compõem o Apêndice B. ■

Poderemos ver no capítulo seguinte, que a utilização da base V , no estudo de estabilidade forte dos sistemas, é muito conveniente, sendo que a partir desta derivaremos uma dinâmica mista para o sistema, que nos permitirá expressar resultados de estabilidade forte, como os que apresentaremos nas seções 3.1 e 3.2.

Capítulo 2

Dinâmicas e Estabilidade Forte

Neste capítulo apresentaremos algumas formas para a dinâmica do vetor de estado do sistema y^k e para o vetor de tempos de produção Δ^k .

Na primeira seção do capítulo, apresentaremos uma destas formas que combina ambos os vetores, e por isto denominaremos *dinâmica mista*, além de mostrarmos, por exemplo, que a matriz triangular inferior de um $M \in \mathcal{S}$ é não singular com inversa sem entradas negativas.

Na seção 2.2, apresentaremos as dinâmicas não mistas para o vetor de estado e o vetor de tempos de produção, mostrando que ambos têm formas muito parecidas e estão relacionados com um processo iterativo de Gauss-Seidel para resolução de sistemas lineares.

Na seção 2.3, apresentaremos uma definição formal para o conceito de estabilidade utilizado implicitamente por SCG-91, que denominamos estabilidade forte. Explorando as dinâmicas obtidas nas duas primeiras seções deste capítulo, mostraremos, entre outros resultados, que: as matrizes da classe $\mathcal{S}$ que fazem sentido, para a operação dos sistemas em estudo, devem ser não singulares; no caso homogêneo – sistemas com tempos nulos para “set up” operados por $C(M, \vec{0})$ ($M \in \mathcal{S}$ não singular) – estabilidade forte é equivalente à trajetória efetiva do sistema convergir para a origem; para sistemas fortemente estáveis, com tempos de “set up” nulos operados por $C(M, b)$ ($M \in \mathcal{S}$ não singular), a trajetória efetiva converge para o vértice do hipercone $C(M, b)$; para um sistema, operado por $C(M, b)$ ($M \in \mathcal{S}$ não singular), a estabilidade forte equivale à existência de um ciclo limite “próximo” ao vértice do hipercone $C(M, b)$; se o sistema, com tempos de “set up” nulos, operado por $C(M, b)$ ($M \in \mathcal{S}$ não singular), é fortemente estável, então a trajetória efetiva do sistema converge para o vértice do hipercone em um tempo finito.

2.1 Dinâmica Mista

Para derivarmos uma dinâmica que combina o vetor de estado do sistema com o vetor de tempos de produção, é interessante lembrarmos que estamos utilizando M_i para representar a i -ésima linha da matriz M , logo

$$M_i y = \sum_{j=1}^n M_{ij} y_j.$$

Além disto, considerando, novamente, $\bar{s}_i$ como o tempo de “set up” para disparar a produção i e $s_i = \bar{s}_i / (1 - \rho)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), ao bater na face i , no ponto $\bar{y}$, o controle $(i \bmod n) + 1$ só será aplicado após o sistema atingir o ponto

$$\bar{y} - \frac{\bar{s}_i}{1 - \rho} \vec{\rho} = \bar{y} - s_i \vec{\rho},$$

pois, durante o tempo de “set up”, $\dot{x} = -d$ ou $\dot{y} = V^{-1}d = \frac{1}{1-\rho} \vec{\rho}$.

Ainda, por simplicidade definiremos o símbolo

$$\Sigma_s = \sum_{i=1}^n s_i.$$

que será usado no restante deste trabalho.

Lema 2.1 *A dinâmica mista do sistema sob política hipercone $C(M, b)$, para $M \in \mathcal{S}$ e $M\vec{\rho} \geq \vec{0}$, é dada por*

$$(a) \ y^k = y_n^k = y^{k-1} + \Delta^k - \Sigma_s \vec{\rho}$$

onde

$$(b) \ \Delta^k = (\Delta_1^k \ \Delta_2^k \ \dots \ \Delta_n^k)^t \geq \vec{0}$$

e (c) Δ_i^k , a duração da k -ésima produção de i , é dada por

$$\Delta_i^k = \frac{1}{M_{ii}} \left(b_i - M_i y^{k-1} - \sum_{j=1}^{i-1} M_{ij} \Delta_j^k + \sum_{j=1}^i s_j M_{ij} \vec{\rho} \right). \quad (2.1)$$

Demonstração Para uniformizar a notação, colocaremos $y_0^k = y_n^{k-1}$. Considerando $k > 0$, pela definição da política de operação, y^{k-1} é um vetor de estado que dispara o controle e^1 , deste modo

$$y_1^k = y^{k-1} + \Delta_1^k e^1 - s_1 \vec{\rho}.$$

Em geral, tomando $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, temos que

$$y_i^k = y_{i-1}^k + \Delta_i^k e^i - s_i \vec{\rho} = y^k + \sum_{j=1}^i (\Delta_j^k e^j - s_j \vec{\rho}).$$

Além disto, uma vez que $M_j y_j^k = b_j$, para $1 \leq j \leq n$,

$$b_i = M_i y_i^k = M_i y_i^{k-1} + \sum_{j=1}^i (\Delta_j^k M_i e^j - s_j M_i \vec{\rho}) = M_i y_i^{k-1} + \sum_{j=1}^i (\Delta_j^k M_{ij} - s_j M_i \vec{\rho}),$$

logo

$$\Delta_i^k = \frac{1}{M_{ii}} \left(b_i - M_i y_i^{k-1} - \sum_{j=1}^{i-1} M_{ij} \Delta_j^k + \sum_{j=1}^i s_j M_i \vec{\rho} \right).$$

Usando estas fórmulas e devido à $M y^k \leq b$, $s_i \geq \vec{0}$, $\vec{\rho} \geq \vec{0}$ e $M \in \mathcal{S}$, segue que $\Delta^k \geq \vec{0}$. ■

Um resultado imediato para o caso homogêneo (sistema com “set ups” nulos, operado por $C(M, \vec{0})$) segue abaixo.

Corolário 2.1 *A dinâmica mista do sistema homogêneo, operado pelo hipercone $C(M, \vec{0})$, sendo que $M \in \mathcal{S}$, é dada por*

$$(a) \ y^k = y_n^k = y^{k-1} + \Delta^k$$

onde

$$(b) \ \Delta^k = (\Delta_1^k \ \Delta_2^k \ \dots \ \Delta_n^k)^t \geq \vec{0}$$

e (c) Δ_i^k , a duração da k -ésima produção de i , é dada por

$$\Delta_i^k = \frac{1}{M_{ii}} \left(-M_i y^{k-1} - \sum_{j=1}^{i-1} M_{ij} \Delta_j^k \right). \quad (2.2)$$

Demonstração Segue diretamente do lema anterior, assumindo $s = \vec{0}$. ■

Em alguns dos resultados a seguir, e principalmente na seção 2.2, utilizaremos a notação seguinte.

Definição 9 *Sendo $M \in \mathcal{S}$, definiremos as matrizes L e U , por*

$$M = L + U, \quad \text{sendo} \quad \begin{cases} L_{ij} = 0, & j > i, \\ U_{ij} = 0, & j \leq i, \end{cases}$$

ou seja, L é a matriz triangular inferior e U a triangular estritamente superior de M .

Definiremos ainda, a matriz

$$J = -L^{-1}U.$$

Para estas matrizes, podemos mostrar uma variante de um resultado apresentado por PHK-92,

Teorema 2.1 *Seja $(L + U \equiv M) \in \mathcal{S}$, conforme definição acima, existe inversa para L e $L^{-1} \succeq 0$, sendo que para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,*

$$L_{ij} = \begin{cases} L_{ii} > 0, \\ L_{ij} = 0, & i < j \leq n. \end{cases}$$

Além disto,

$$J = -L^{-1}U \succeq 0.$$

Demonstração Faremos a primeira parte desta demonstração, relativa à inversa de L , por indução na dimensão n da matriz M .

Para $n = 1$, $L = M \in \mathcal{S}$, logo, da definição da classe $\mathcal{S}$, $L_{11} > 0$ e portanto

$$L^{-1} = 1/L_{11} > 0.$$

Admitindo válida a hipótese para $k \geq 1$, seja $n = k + 1$. Vamos considerar $L_{[1]} \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $\beta \in \mathbb{R}^k$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tais que

$$L = \left[\begin{array}{c|c} L_{[1]} & \vec{0} \\ \hline \beta^t & \alpha \end{array} \right]_{n \times n}$$

deste modo, como $M \in \mathcal{S}$, segue que

$$\alpha > 0 \text{ e } \beta \leq \vec{0}.$$

Além disto, $L_{[1]}$ é a triangular inferior de uma matriz da classe $\mathcal{S}$, de dimensão k , portanto, por hipótese de indução, existe inversa para $L_{[1]}$, sendo $L_{[1]}^{-1} \succeq 0$, uma matriz triangular inferior com diagonal principal positiva.

Seja ainda, $\gamma \in \mathbb{R}^k$, para o qual

$$\beta^t L_{[1]}^{-1} + \alpha \gamma^t = \vec{0}^t,$$

e usando a hipótese de indução, $\alpha > 0$, $\beta \leq \vec{0}$ e $L_{[1]}^{-1} \succeq 0$, segue que

$$\gamma \geq \vec{0}.$$

Deste modo, a matriz

$$T = \left[\begin{array}{c|c} L_{[1]}^{-1} & \vec{0} \\ \hline \gamma^t & 1/\alpha \end{array} \right]$$

é uma triangular inferior de dimensão $n = k + 1$, com diagonal principal positiva e triangular estritamente inferior não negativa. Além disto, podemos verificar que, $LT = I = TL$, ou seja,

$$L^{-1} = T,$$

completando a primeira parte desta demonstração.

A segunda parte da demonstração segue diretamente da primeira e da observação que $U \preceq 0$, resultando daí que

$$J = -L^{-1}U \succeq 0.$$

■

Lema 2.2 Sendo $(L + U \equiv M) \in \mathcal{S}$, conforme a definição 9, qualquer que seja $y^0 \in C(M, b)$,

$$\Delta^1 = L^{-1}(b - My^0 + SM\vec{\rho}), \quad (2.3)$$

$$\text{onde } S = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_1 + s_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Sigma_s \end{bmatrix}.$$

Demonstração Para derivarmos este resultado, consideremos a equação (2.1) multiplicada por M_{ii} ($M_{ii} > 0$, pois $M \in \mathcal{S}$), tomando $k = 1$ e $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$M_{ii}\Delta_i^1 = b_i - M_{ii}y^0 - \sum_{j=1}^{i-1} M_{ij}\Delta_j^1 + \sum_{j=1}^i s_j M_{ij}\vec{\rho}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Colocando o lado esquerdo desta equação no somatório dos tempos de produção à direita, podemos reescrevê-la na forma matricial, obtendo a equação

$$\vec{0} = b - My^0 + L\Delta^1 + SM\vec{\rho},$$

que multiplicada por L^{-1} , resulta a equação (2.3). ■

Note que para este lema não é necessário que M seja não singular pois, a única inversa que usamos é de L , que é sempre inversível, pois sua triangular estritamente superior é nula e a diagonal principal toda positiva, logo $\det(L) = L_{11}L_{22} \dots L_{nn} > 0$.

Corolário 2.2 Para o caso homogêneo, sendo $(L + U \equiv M) \in \mathcal{S}$, conforme definição 9, qualquer que seja $y^0 \in C(M, b)$,

$$\Delta^1 = L^{-1}(b - My^0) = L^{-1}b - (I - J)y^0, \quad (2.4)$$

Demonstração Segue diretamente do lema anterior tomando $s = \vec{0}$.

Observação 2.1.1 Vale ressaltarmos que, se y^0 for o vértice do hipercone $C(M, b)$ ($My^0 = b$), para um sistema com “set ups” nulos, segue que $\Delta^1 = \vec{0}$ e a política não pode aplicar efetivamente qualquer controle, sendo esta uma singularidade da política. De outro modo, por estar na interseção entre todas as faces é como se instantaneamente, a política efetuasse uma sequência “round robin” de trocas de controles, porém, com cada uma das produções tendo tempo nulo.

Uma maneira de contornar este problema seria acrescentar às regras da política que, ao atingir o vértice do hipercone, passa-se a produzir na mesma velocidade da demanda ($v = d$), de modo a manter a trajetória neste ponto, i.e., deveríamos fazer com que a máquina dedicasse uma fração f_p de sua capacidade a cada produto p , equilibrando produção com demanda

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^n f_i v^i = \sum_{i=1}^n f_i \frac{1}{\tau_i} e^i - \sum_{i=1}^n f_i d = \sum_{i=1}^n f_i \frac{1}{\tau_i} e^i - d,$$

repetindo a equação de equilíbrio (1.4).

Mesmo utilizando este artifício ainda restará um problema prático. Quando existe, a convergência ao vértice do hipercone, esta é, em geral, assintótica, e apesar de mostrarmos que a mesma se dá em um tempo finito (teorema 2.6, página 52), em termos de aplicação da política por uma máquina, mesmo idealizada, as rodadas de produção, uma após outra, estarão cada vez menores, indefinidamente.

Considerando que:

- ▷ mostraremos a equivalência da estabilidade forte entre os sistemas com tempos de “set up” nulos e não nulos;
- ▷ um sistema, com tempos de “set up” não nulos, fortemente estável, têm sua trajetória efetiva convergindo para um ciclo limite “próximo” ao vértice do hipercone; e
- ▷ sistemas com tempos de “set up” nulos, serão muito úteis para deduzirmos algumas condições necessárias e suficientes de estabilidade, inclusive uma de verificação $O(n^3)$.

Deste modo a questão da singularidade da política pode ser contornada, visto que:

- ▷ Se a política for aplicada a um particular sistema real, este terá naturalmente tempos para “set up” não nulos, mesmo que muito pequenos. Se estivermos tratando de simulações, situação que permite tempos para “set up” efetivamente nulos, pela própria natureza destas, já será necessário uma interrupção de convergências assintóticas;
- ▷ Impor tempos de “set up” nulos para determinado sistema é interessante para obtermos condições de convergência sobre os hipercones que, dada a referida equivalência, poderá ser aplicado ao sistema com tempos de “set up” não nulos, acarretando estabilidade forte.

Como indicado no enunciado do lema 2.1 nos referiremos àquela descrição da dinâmica por *dinâmica mista*, desde que ela combina duas diferentes variáveis, y^k e Δ^k . Uma *descrição não mista* para a dinâmica do sistema, no caso homogêneo, seria do tipo $y^{k+1} = Jy^k$ (como em SCG-91) e uma descrição não mista para a dinâmica do vetor de tempos de produção seria do tipo $\Delta^{k+1} = J\Delta^k$, como em PHK-92 e HH-93. A próxima seção explora estes dois tipos de descrições, quando poderemos verificar que suas formas são muito parecidas, na verdade para o caso homogêneo são idênticas, a menos das condições iniciais.

Um resultado interessante que pode ser obtido da dinâmica mista, é o seguinte

Corolário 2.3 (*“Finite reachability”*) *Para um sistema com “set ups” nulos, se $A = V^{-1}$ (i.e., $M = I$) e iniciando a trajetória em $\bar{y} \in C(I, 0)$, então em não mais que $\#\{j \mid \bar{y}_j < 0\}$ mudanças de produção, a trajetória alcança a origem, ou seja, ao final da primeira rodada de produção a origem é atingida.*

Demonstração Considerando $y_0^k = y_n^{k-1}$ e usando o lema 2.1 com “set ups” nulos, segue que,

$$y_i^k = y_{i-1}^k + \Delta_i^k e^i, \quad (2.5)$$

ou seja, uma rodada de produção de i só altera a i ésima componente de y_{i-1}^k para atingir a face i de $C(M, \vec{0})$. Como $M = I$, y_i^k tem a componente i igual a zero e a equação (2.5) implica que só uma produção de i altera esta componente. Deste modo, uma vez em zero permanece em zero.

Mais especificamente, a primeira componente de y_1^1 é nula, pois $y_1^1 = y^0 + \Delta_1^1 e^1$ e

$$0 = M_1 y_1^1 = (e^1)^t y_1^1.$$

Indutivamente, usando o raciocínio anterior, y_i^1 tem todas as i primeiras componente nulas, ou seja, y_i^1 pode ser escrito como,

$$y_i^1 = 0e^1 + 0e^2 + \cdots + 0e^{i-1} + 0e^i + \alpha_1 e^{i+1} + \alpha_2 e^{i+2} + \cdots + \alpha_{n-i} e^n, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

seguindo daí, que

$$y_n^1 = \vec{0}.$$

■

2.2 Dinâmicas Não Mistadas

Para os resultados seguintes será conveniente lembrarmos que:

- ▷ $y^0 = y_n^0$ e $y^k = y_n^k$, para $k > 0$; e
- ▷ sendo $\bar{s} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{s}_i$ é o tempo de “set up” para iniciar a produção de i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, sendo o vetor $s \in \mathbb{R}^n$, definido por

$$s_i = \frac{\bar{s}_i}{1 - \rho}.$$

Além disto, será útil observarmos que, para a , b e c em $\mathbb{R}^n$

$$a^t b c = (c a^t) b, \quad (2.6)$$

sendo que, por simplicidade de notação, usaremos $c a^t b$ à $(c a^t) b$.

Apresentaremos a seguir um teorema (devido a SCG-91) que mostra ser linear a dinâmica induzida por uma sequência de atendimento “round robin”.

Teorema 2.2 *A dinâmica induzida pelo hipercone $C(M, b)$, para $M \in \mathcal{S}$, é dada por*

$$y^{k+1} = B y^k + C s + D b, \quad (2.7)$$

$$\text{onde } B = B^{(n)} B^{(n-1)} \dots B^{(2)} B^{(1)} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

$$C = - \left[B^{(n)} B^{(n-1)} \dots B^{(1)} \vec{\rho} \mid B^{(n)} B^{(n-1)} \dots B^{(2)} \vec{\rho} \mid \dots \mid B^{(n)} \vec{\rho} \right] \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

$$D = \left[\frac{1}{M_{11}} B^{(n)} B^{(n-1)} \dots B^{(2)} e^1 \mid \frac{1}{M_{22}} B^{(n)} B^{(n-1)} \dots B^{(3)} e^2 \mid \dots \mid \frac{1}{M_{nn}} e^n \right] \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

$$\text{e } B^{(i)} = I - \frac{1}{M_{ii}} e^i M_i \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Demonstração Para $k > 0$, como a política de operação faz com que y_n^{k-1} dispare a produção 1, a k ésima interseção do vetor de estado com a face 1 é dada por

$$y_1^k = y_n^{k-1} + \Delta_1^k e^1 - s_1 \vec{\rho}. \quad (2.8)$$

O tempo da k ésima rodada de produção 1 pode ser determinado multiplicando-se a equação acima por M_1 , pois Δ_1^k é tempo necessário para se atingir a face 1, isto é,

$$M_1 y_1^k = M_1 y_n^{k-1} + \Delta_1^k M_{11} - s_1 M_1 \vec{\rho} = b_1,$$

de onde obtemos,

$$\Delta_1^k = -\frac{1}{M_{11}} M_1 y_n^{k-1} + \frac{s_1}{M_{11}} M_1 \vec{\rho} + \frac{b_1}{M_{11}}, \quad (2.9)$$

Substituindo (2.9) na equação (2.8), obteremos

$$\begin{aligned} y_1^k &= y_n^{k-1} - \frac{1}{M_{11}} M_1 y_n^{k-1} e^1 + \frac{s_1}{M_{11}} M_1 \vec{\rho} e^1 + \frac{b_1}{M_{11}} e^1 - s_1 \vec{\rho} \stackrel{2.6}{=} \\ &\stackrel{2.6}{=} \left(I - \frac{1}{M_{11}} e^1 M_1 \right) y_n^{k-1} + s_1 \left(\frac{1}{M_{11}} e^1 M_1 - I \right) \vec{\rho} + \frac{b_1}{M_{11}} e^1, \end{aligned}$$

ou seja,

$$y_1^k = B^{(1)} y_n^{k-1} - s_1 B^{(1)} \vec{\rho} + \frac{b_1}{M_{11}} e^1. \quad (2.10)$$

Para $1 < j \leq n$, temos

$$y_j^k = y_{j-1}^k + \Delta_j^k e^j - s_j \vec{\rho},$$

e analogamente ao desenvolvimento acima, obtemos

$$\begin{aligned} \Delta_j^k &= -\frac{1}{M_{jj}} M_j y_{j-1}^k + \frac{s_j}{M_{jj}} M_j \vec{\rho} + \frac{b_j}{M_{jj}}, \\ y_j^k &= y_{j-1}^k - \frac{1}{M_{jj}} M_j y_{j-1}^k e^j + \frac{s_j}{M_{jj}} M_j \vec{\rho} e^j + \frac{b_j}{M_{jj}} e^j - s_j \vec{\rho} \end{aligned}$$

e

$$y_j^k = B^{(j)} y_{j-1}^k - s_j B^{(j)} \vec{\rho} + \frac{b_j}{M_{jj}} e^j, 1 < j \leq n. \quad (2.11)$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} y^{k+1} &= y_n^{k+1} = B^{(n)} y_{n-1}^{k+1} - s_n B^{(n)} \vec{\rho} + \frac{b_n}{M_{nn}} e^n = \\ &= B^{(n)} \left(B^{(n-1)} y_{n-2}^{k+1} - s_{n-1} B^{(n-1)} \vec{\rho} + \frac{b_{n-1}}{M_{n-1n-1}} e^{n-1} \right) - s_n B^{(n)} \vec{\rho} + \frac{b_n}{M_{nn}} e^n = \\ &= B^{(n)} B^{(n-1)} y_{n-2}^{k+1} - \left(s_{n-1} B^{(n)} B^{(n-1)} + s_n B^{(n)} \right) \vec{\rho} + \frac{b_{n-1}}{M_{n-1n-1}} B^{(n)} e^{n-1} + \frac{b_n}{M_{nn}} e^n \end{aligned}$$

e continuando a substituição de y_j^{k+1} , para $j = n-2, n-3, \dots, 2, 1$, segundo as equações 2.10 e 2.11, obtém-se

$$\begin{aligned} y^{k+1} &= B^{(n)} B^{(n-1)} \dots B^{(2)} B^{(1)} y_n^k - \\ &\quad \left(s_1 B^{(n)} B^{(n-1)} \dots B^{(1)} + s_2 B^{(n)} B^{(n-1)} \dots B^{(2)} + \dots + s_n B^{(n)} \right) \vec{\rho} + \\ &\quad \frac{b_1}{M_{11}} B^{(n)} B^{(n-1)} \dots B^{(2)} e^1 + \frac{b_2}{M_{22}} B^{(n)} B^{(n-1)} \dots B^{(3)} e^2 + \dots + \frac{b_n}{M_{nn}} e^n \end{aligned}$$

demonstrando a tese. ■

Para os próximos resultados será conveniente lembrarmos, da definição 9, que as matrizes L , U e J , para $M \in \mathcal{S}$, são tais que,

$$M = L + U, \text{ sendo } \begin{cases} L_{ij} = 0, & j > i \\ U_{ij} = 0, & j \leq i \end{cases},$$

e

$$J = -L^{-1}U.$$

Apresentaremos a seguir a dinâmica, não mista, dos tempos de produção.

Lema 2.3 *A dinâmica dos tempos de produção $\{\Delta^k\}_k$, para a política hipercone $C(M, b)$ com “set up” não nulo, $M \in \mathcal{S}$, é dada por*

$$\Delta^{k+1} = -L^{-1}U\Delta^k + \Sigma_s(I + L^{-1}U)\vec{\rho} = J\Delta^k + \Sigma_s(I - J)\vec{\rho}. \quad (2.12)$$

Demonstração Consideremos novamente os pontos da trajetória $\{y_1^k, y_2^k, \dots, y_n^k\}$, sendo $\{y_i^k\}$ a k ésima interseção da trajetória com a face i ($M_i y_i^k = b_i$).

Em uma rodada $k+1$, com $k \geq 0$, se admitirmos $y_{n+1}^k = y_1^{k+1}$, então, para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $y_{i+1}^k = y_i^k + \Delta_i^k e^i - s_i \vec{\rho}$, daí

$$\begin{aligned} y_i^{k+1} &= y_i^k + \sum_{j=i+1}^n (\Delta_j^k e^j - s_j \vec{\rho}) + \sum_{j=1}^i (\Delta_j^{k+1} e^j - s_j \vec{\rho}) = \\ &= y_i^k + \sum_{j=i+1}^n \Delta_j^k e^j + \sum_{j=1}^i \Delta_j^{k+1} e^j - \sum_{j=1}^n s_j \vec{\rho} \\ &= y_i^k + \sum_{j=i+1}^n \Delta_j^k e^j + \sum_{j=1}^i \Delta_j^{k+1} e^j - \Sigma_s \vec{\rho} \end{aligned}$$

sendo que

$$\begin{aligned} b_i = M_i y_i^{k+1} &= M_i y_i^k + \sum_{j=i+1}^n \Delta_j^k M_i e^j + \sum_{j=1}^i \Delta_j^{k+1} M_i e^j - \Sigma_s M_i \vec{\rho} = \\ &= b_i + \sum_{j=i+1}^n \Delta_j^k M_{ij} + \sum_{j=1}^i \Delta_j^{k+1} M_{ij} - \Sigma_s M_{i\vec{\rho}}. \end{aligned}$$

Logo

$$\sum_{j=1}^i \Delta_j^{k+1} M_{ij} = - \sum_{j=i+1}^n \Delta_j^k M_{ij} + \Sigma_s M_{i\vec{\rho}}, \quad (2.13)$$

ou seja, na forma matricial

$$\begin{bmatrix} M_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & M_{nn} \end{bmatrix} \Delta^{k+1} = - \begin{bmatrix} 0 & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \Delta^k + \Sigma_s \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & M_{nn} \end{bmatrix} \vec{\rho},$$

portanto

$$L\Delta^{k+1} = -U\Delta^k + \Sigma_s(L+U)\vec{\rho} \Leftrightarrow \Delta^{k+1} = -L^{-1}U\Delta^k + \Sigma_s(I+L^{-1}U)\vec{\rho},$$

ou ainda, do teorema 2.1, L é inversível, daí

$$\Delta^{k+1} = J\Delta^k + \Sigma_s(I-J)\vec{\rho},$$

concluindo a demonstração. ■

O vetor b não aparece na equação 2.12 por ser apenas uma translação da origem, não influenciando nos tempos de produção, que são determinados exclusivamente pelas relações entre as faces do hipercone e os tempos de “set up”.

Tomando $s = \vec{0}$, podemos reescrever a equação 2.13 como $M_{ii}\Delta_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1}\Delta_j^{k+1}M_{ij} - \sum_{j=i+1}^n\Delta_j^kM_{ij}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, ou ainda, sendo $D = \text{Diag}(M)$ e $\bar{L}$ a triangular estritamente inferior da matriz M ,

$$D\Delta^{k+1} = -\bar{L}\Delta^{k+1} - U\Delta^k, \quad (2.14)$$

que é uma descrição usual de um processo de Gauss-Seidel para resolução de $My = \vec{0}$. Porém, a dinâmica do sistema impõe um Δ^1 específico, para cada $y^0 \in C(M, \vec{0})$, determinado pela equação (2.3), com $S = 0$, ou seja, $\Delta^1 = L^{-1}b + (J-I)y^0$. Este Δ^1 é o ponto que determina a sequência de interseções $\{y_1^k, y_2^k, \dots, y_n^k\}_k$, respectivamente, com as faces $\{1, 2, \dots, n\}$ do hipercone $C(M, \vec{0})$.

Exemplo 2.2.1 Considere o hipercone $C(M, \vec{0})$ com $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, ou seja,

$$\begin{aligned} 2y_1 - y_2 &= 0 \\ -2y_1 + 3y_2 &= 0 \end{aligned},$$

neste caso, $L = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $L^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $J = -L^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$. Assumindo $y^0 = \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \end{bmatrix}$, segue que

$$\Delta^1 = (J-I)y^0 = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 \\ 0 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Usando a equação 2.14, segue que,

$$\Delta_1^{k+1} = \frac{1}{2}\Delta_2^k$$

$$\Delta_2^{k+1} = \frac{2}{3}\Delta_1^{k+1},$$

e o processo de Gauss-Seidel produz a sequência

$$\Delta^1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \Delta^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4/3 \end{bmatrix}, \quad \Delta^3 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 4/9 \end{bmatrix}, \dots$$

que provoca a seguinte evolução de y^k ,

$$y^0 = \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad y^1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad y^2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2/3 \end{bmatrix}, \dots$$

Graficamente, podemos perceber que $\{\Delta^k\}_k$ é um “espelho” de $\{y^k\}_k$, no sentido que estas dinâmicas têm o mesmo comportamento, sendo opostos pelo vértice do hipercone ($M\Delta^k \geq \vec{0}$ e $My^k \leq \vec{0}$), como podemos observar na figura abaixo.

Figura 2.1: Evoluções de $\{\Delta^k\}_k$ e de $\{y^k\}_k$.

Para o caso homogêneo, temos a seguinte descrição.

Corolário 2.4 *A dinâmica do vetor de tempo de produção $\{\Delta^k\}_k$, para um sistema com tempos de “set up” nulos, operado por $C(M, \vec{0})$, $M \in \mathcal{S}$, é dada por*

$$\Delta^{k+1} = -L^{-1}U\Delta^k = J\Delta^k.$$

Demonstração Segue diretamente do lema 2.3, colocando $s = \vec{0}$. ■

Para a dinâmica do vetor de estado $\{y^k\}_k$ no caso geral,

Lema 2.4 *A dinâmica não mista de $\{y^k\}_k$, para $C(M, b)$ com “set up” não nulo, é dada por*

$$y^{k+1} = -L^{-1}Uy^k + L^{-1}b = Jy^k + L^{-1}b,$$

ou seja,

$$B = B^{(n)}B^{(n-1)} \dots B^{(2)}B^{(1)} = J,$$

$$D = \left[\frac{1}{M_{11}}B^{(n)}B^{(n-1)} \dots B^{(2)}e^1 \mid \frac{1}{M_{22}}B^{(n)}B^{(n-1)} \dots B^{(3)}e^2 \mid \dots \mid \frac{1}{M_{nn}}e^n \right] = L^{-1},$$

onde $B^{(i)} = I - \frac{1}{M_{ii}}e^i M_i.$

Demonstração Assumindo $s = \vec{0}$ e usando o teorema 2.2, o lema 2.1 e o lema 2.3, respectivamente, temos que

- (i) $y^{k+1} = By^k + Db;$
- (ii) $y^{k+1} = y^k + \Delta^k;$
- e (iii) $\Delta^{k+1} = J\Delta^k.$

Deste modo, podemos reescrever Δ^k como

$$\begin{aligned} \Delta^k &\stackrel{(ii)}{=} y^{k+1} - y^k \stackrel{(i)}{=} (By^k + Db) - (By^{k-1} + Db) \\ &= B(y^k - y^{k-1}) \stackrel{(i)}{=} B\Delta^{k-1} \end{aligned}$$

De (iii), segue que

$$B = J.$$

Usando a relação $\Delta^1 = L^{-1}b + (J - I)y^0$, da equação 2.3,

$$y^0 + (L^{-1}b + (J - I)y^0) = y^0 + \Delta^1 \stackrel{(ii)}{=} y^1 \stackrel{(i)}{=} Jy^0 + Db$$

ou seja, $y^0 - Jy^0 + (J - I)y^0 + L^{-1}b = Db$, logo

$$D = L^{-1},$$

finalizando a prova. ■

A construção do lema acima pode ser interpretada como uma representação do processo de Gauss-Seidel, conforme mostraremos na seção 2.3 e, deste modo, é possível computar as matrizes das iterações de Gauss-Seidel (L^{-1} e J) utilizando as multiplicações de matrizes elementares indicadas no enunciado do referido lema.

Utilizando o lema anterior podemos obter a seguinte generalização,

Teorema 2.3 A dinâmica não mista de $\{y^k\}$, para $C(M, b)$ com “set up” não nulo, é dada por

$$y^{k+1} = Jy^k + L^{-1}b + L^{-1}SM\vec{\rho} - \Sigma_s\vec{\rho},$$

$$\text{sendo } S = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_1 + s_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Sigma_s \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$B = B^{(n)}B^{(n-1)} \dots B^{(2)}B^{(1)} = J,$$

$$Cs = - \left[B^{(n)}B^{(n-1)} \dots B^{(1)}\vec{\rho} \mid B^{(n)}B^{(n-1)} \dots B^{(2)}\vec{\rho} \mid \dots \mid B^{(n)}\vec{\rho} \right] s = SM\vec{\rho} - \Sigma_s\vec{\rho},$$

$$D = \left[\frac{1}{M_{11}}B^{(n)}B^{(n-1)} \dots B^{(2)}e^1 \mid \frac{1}{M_{22}}B^{(n)}B^{(n-1)} \dots B^{(3)}e^2 \mid \dots \mid \frac{1}{M_{nn}}e^n \right] = L^{-1},$$

onde $B^{(i)} = I - \frac{1}{M_{ii}}e^i M_i$.

Demonstração No teorema 2.2 mostramos que a dinâmica (geral) de um sistema operado pelo hipercone $C(M, b)$, com $M \in \mathcal{S}$, é descrita por

$$y^{k+1} = By^k + Cs + Db, \quad (2.15)$$

sendo que o processo de dedução desta equação funciona também para $s = \vec{0}$ (fato explorado no lema anterior), ou seja, um sistema com mesmas taxas de demanda e de produção, porém com “set ups” nulos, operado também pelo mesmo hipercone $C(M, b)$, terá como dinâmica de $\{y^k\}_k$, $y^{k+1} = By^k + Db$, sendo B e D as mesmas matrizes da equação (2.15) acima. Além disto, o vetor b não influi no cômputo de B ou D , conforme pudemos observar no referido teorema 2.2.

Deste modo,

$$\forall b \in \mathbb{R}^n,$$

segue do lema anterior que $B = J$ e $D = L^{-1}$, restando-nos demonstrar que $Cs = SM\vec{\rho} - \Sigma_s\vec{\rho}$. Para fazermos isto usaremos, também, a descrição mista da dinâmica de $\{y^k\}_k$

$$y^{k+1} = y^k + \Delta^{k+1} - \Sigma_s\vec{\rho}$$

e a expressão para Δ^1 da equação (2.3)

$$\Delta^1 = L^{-1}(b - My^0 + SM\vec{\rho}),$$

sendo a matriz S a mesma do enunciado deste teorema.

Tomando $k = 0$, podemos escrever, juntando estas expressões

$$\begin{aligned}
 Jy^0 + Cs + L^{-1}b &= y^1 = y^0 + \Delta^1 - \Sigma_s \vec{\rho} = \\
 &= y^0 + L^{-1}(b - My^0 + SM\vec{\rho}) - \Sigma_s \vec{\rho} = \\
 &= y^0 + L^{-1}b - L^{-1}(L + U)y^0 + L^{-1}SM\vec{\rho} - \Sigma_s \vec{\rho} = \\
 &= y^0 + L^{-1}b - y^0 - L^{-1}Uy^0 + L^{-1}SM\vec{\rho} - \Sigma_s \vec{\rho} = \\
 &= Jy^0 + L^{-1}b + L^{-1}SM\vec{\rho} - \Sigma_s \vec{\rho}
 \end{aligned}$$

quaisquer que sejam $b \in \mathbb{R}^n$ e $y^0 \in C(M, \vec{0})$, portando

$$y^{k+1} = Jy^k + L^{-1}b + L^{-1}SM\vec{\rho} - \Sigma_s \vec{\rho},$$

completando a demonstração. ■

2.3 Estabilidade Forte

O fato mais relevante no trabalho de Sharifnia, Caramanis & Gershwin (SCG-91), é que foram capazes de provar que, para $M \in \mathcal{S}$,

- (a) se a política faz sentido para hipercones $C(M, \vec{0})$ ($C(M, \vec{0})$ têm interior não vazio); e
- (b) se os hipercones para o sistema com tempos de “set ups” nulos é fortemente estável no sentido de que sua dinâmica

$$y^{k+1} = Jy^k$$

é uma contração (a matriz J seja estável, i.e., $\lim_{k \rightarrow +\infty} J^k = \mathbf{0}$),

então para todo $b \in \mathbb{R}^n$ tal que $\overset{\circ}{C}(M, b) \neq \emptyset$, a política hipercone para $C(M, b)$ é fortemente estável, quaisquer que sejam os tempos de “set up” (corolário apresentado na seção 5.1 de SCG-91).

Apesar de SCG-91 afirmarem que uma propriedade desejável em um hipercone seria que o mesmo levasse a trajetória efetiva a convergir para um ciclo limite, próximo ao ponto alvo¹, esta propriedade não foi muito explorada pelos mesmos. Apresentaremos, após o exemplo 2.3.1, uma definição derivada desta observação e que nos permitirá, por exemplo, apresentar, no teorema 2.9, página 57, uma generalização do referido corolário da seção 5.1 de SCG-91.

Motivados pela afirmação de SCG-91 que, para o sistema $y^{k+1} = Jy^k$ ser estável, é suficiente que a matriz J seja estável ($\lim_{k \rightarrow \infty} J^k = \mathbf{0}$), poderíamos questionar:

¹SCG-91 registra, por exemplo, no penúltimo parágrafo da página 159, do referido artigo, “... how can we design a corridor wich would make the setup level trajectory stabilize near the target point?...”

“esta é também uma condição suficiente?”

Se considerarmos a definição de estabilidade (definição 4), apresentada na página 12, podemos responder a esta pergunta negativamente considerando o exemplo abaixo.

Exemplo 2.3.1 Se considerarmos o hipercone $C(M, \vec{0})$, $M \in \mathcal{S}$, com $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$,
teremos

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

logo,

$$J = -L^{-1}U = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = J^k, \quad \forall k > 0.$$

Para este exemplo a dinâmica do sistema pode ser dada por $y^{k+1} = Jy^k = J^k y^0$, ou seja, para todo $k > 0$, tomando $y^0 = y \in C(M, \vec{0})$,

$$y^{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_3 \\ y_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_3 \\ y_3 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

que de fato pertence ao hipercone, pois

$$My^{k+1} = \begin{bmatrix} y_3 - y_3 \\ y_3 - y_3 \\ -1/2 y_3 - 1/2 y_3 + y_3 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

Ou seja, qualquer que seja o ponto inicial do hipercone, $y \in C(M, \vec{0})$, uma linealidade do hipercone, que é também um ponto fixo, é atingida na primeira rodada de produção, fazendo com que $y^k = y_3 \vec{1}$, para todo $k \geq 0$. Portanto $\{y^k\}_k$ é estável no sentido da definição 4, no entanto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J^k = J \neq 0.$$

Este exemplo mostra que a definição usual de estabilidade, da literatura de SMF, não é suficiente para garantir que a trajetória efetiva convirja ou sequer se aproxime do ponto alvo, pois no exemplo acima, qualquer que seja o ponto inicial y do hipercone, a trajetória efetiva

atinge um ponto fixo, $y_3\vec{1}$, já na primeira rodada de produção. Uma vez que as políticas hipercones são utilizadas para fazer “tracking” de uma trajetória objetivo, buscando atingir um ponto alvo, devemos impor um conceito de estabilidade mais adequado ao contexto e, necessariamente, mais restritivo que o da definição 4.

Para um dado sistema, caracterizado por $(d, \tau, \vec{s}) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n$, e um hipercone $C(M, b)$ contendo sua trajetória objetivo, podemos definir estabilidade forte das trajetórias $\{y_i^k\}_k$, como segue.

Definição 10 Diremos que a sequência $\{y_i^k\}_k$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, é fortemente estável se, e somente se, $\{y_i^k\}_k$ convergir para um único ponto de acumulação, qualquer que seja $y^0 \in C(M, b)$.

Quanto ao sistema,

Definição 11 Diremos que um sistema operado pela política hipercone $C(M, b)$, contendo sua trajetória objetivo, é fortemente estável se, e somente se, cada sequência $\{y_i^k\}_k$, $i = 1, 2, \dots, n$, for fortemente estável.

Vale observar que pode existir $\bar{y}_i \neq \bar{y}_j$, para os quais $\{y_i^k\} \rightarrow \bar{y}_i$ e $\{y_j^k\} \rightarrow \bar{y}_j$. Veremos que, para sistemas fortemente estáveis, este caso só ocorre na presença de “set ups”, sendo que a estabilidade forte levará a um equilíbrio entre produção e demanda “próximo” ao vértice do hipercone (teorema 2.8, página 56). Na ausência de “set ups”, além de mostrarmos que todas as sequências convergem para um mesmo ponto de acumulação (lema 2.6, página 48), mostraremos que este ponto é precisamente o vértice do hipercone (teorema 2.5, página 49).

Lema 2.5 Se um sistema, com “set ups” nulos, operado pela política hipercone $C(M, \vec{0})$ é fortemente estável, então M é não singular.

Demonstração Por contradição, se existisse $\bar{y} \neq \vec{0}$, para o qual $M\bar{y} = \vec{0}$, teríamos, por exemplo, que pontos iniciais $\bar{y}$ e $-\bar{y}$ levariam a dois diferentes pontos de acumulação, na verdade pontos fixos, pois neste caso, de acordo com a equação (2.2), $\Delta^k = \vec{0}$, para todo $k \geq 0$, o que contradiz o fato do sistema ser fortemente estável.

Portanto, $\nexists \bar{y} \neq \vec{0} : M\bar{y} = \vec{0}$, logo M é não singular. ■

Observação 2.3.1 Este resultado compatibiliza o conjunto de hipercones candidatos a controlar a produção, de maneira fortemente estável, com a existência de um único ponto alvo, no sentido de permitir um único vértice (ponto alvo). Deste modo, passaremos a considerar, a menos de clara referência em contrário, apenas matrizes não singulares, de maneira que os hipercones tenham apenas um vértice.

Teorema 2.4 *Considerando $M \in \mathcal{S}$ não singular, um sistema homogêneo, que pode ser caracterizado $y^{k+1} = Jy^k$, é fortemente estável se, e somente se, a matriz J for estável.*

Demonstração

($\Leftarrow$) Sendo $\lim_{k \rightarrow \infty} J^k = 0$, como $y^k = J^k y^0$, segue imediatamente que

$$\{y^k\}_k \rightarrow \vec{0}, \quad \forall y^0 \in C(M, \vec{0}),$$

logo, $\{y^k\}_k$ é uma sequência fortemente estável.

($\Rightarrow$) Sendo $\{y^k\}_k$ uma sequência fortemente estável, segue do lema anterior que M é não singular, daí

$$\bar{y} = -M^{-1} \vec{1} \in \mathring{C}(M, \vec{0}),$$

pois, $M\bar{y} = -\vec{1} < \vec{0}$. Além disto, seja z tal que,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y^k = z, \quad \forall y^0 \in C(M, \vec{0}),$$

como $y^{k+1} = Jy^k = J^k y^0$, segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J^k y^0 = z, \quad \forall y^0 \in C(M, \vec{0}). \quad (2.16)$$

Seja $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno, de maneira que

$$M(\bar{y} + \epsilon e^i) < \vec{0}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

neste caso, se tomarmos $y^0 = \bar{y} + \epsilon e^i$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, segue que

$$z = \lim_{k \rightarrow \infty} y^k = \lim_{k \rightarrow \infty} J^k y^0 = \lim_{k \rightarrow \infty} J^k \bar{y} + \epsilon \lim_{k \rightarrow \infty} J^k e^i \stackrel{(2.16)}{=} z + \epsilon \lim_{k \rightarrow \infty} J^k e^i,$$

logo,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J^k = 0.$$

■

Apresentaremos a seguir, um importante corolário deste teorema, que será amplamente utilizado no próximo capítulo.

Corolário 2.5 *Para $M \in \mathcal{S}$ não singular, um sistema homogêneo é fortemente estável se, e somente*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y^k = \vec{0}, \quad \forall y^0 \in C(M, \vec{0}).$$

Demonstração

Se $\lim_{k \rightarrow \infty} y^k = \vec{0}$, $\forall y^0 \in C(M, \vec{0})$, segue diretamente da definição que $\{y^k\}_k$ é fortemente estável.

Se $\{y^k\}_k$ é fortemente estável, segue do teorema acima que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J^k = 0,$$

portanto, usando a descrição da dinâmica homogênea, $\forall y^0 \in C(M, \vec{0})$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y^k = \lim_{k \rightarrow \infty} J^k y^0 = \vec{0},$$

encerrando a demonstração. ■

Em função deste resultado sempre que trabalharmos com o caso homogêneo, utilizaremos a equivalência entre fortemente estável e $\lim_{k \rightarrow \infty} y^k = \vec{0}$, $\forall y^0 \in C(M, \vec{0})$.

Também devemos deixar claro que ao considerarmos apenas matrizes não singulares, nos concentraremos em hipercones cujo interior sejam não vazios, desde que, uma vez que a matriz M é não singular, $\overset{\circ}{C}(M, \vec{0}) \neq \emptyset$, pois, como indicado no teorema acima, o ponto

$$y = -(M)^{-1}(1 \ 1 \cdots 1)^t$$

está no interior do hipercone ($My = -(1 \ 1 \cdots 1)^t < \vec{0}$).

O lema a seguir simplifica nosso estudo sobre estabilidade.

Lema 2.6 *O sistema definido pela equação (2.7), com $s = \vec{0}$, é fortemente estável se, e somente se, para qualquer y^0 , toda sequência $\{y_i^k\}_k$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tiver um único ponto de acumulação, ou seja, um sistema com tempos de “set up” nulos é fortemente estável se, e somente se, todas as sequências convergem para um único ponto.*

Demonstração

($\Leftarrow$) Se todas as sequências $\{y_i^k\}_k$, têm o mesmo ponto de acumulação, segue da definição de estabilidade forte que o sistema é fortemente estável.

($\Rightarrow$) Se o sistema é fortemente estável com, por exemplo, $\{y^k\}_k \rightarrow \bar{y}$, mostraremos que $\{y_i^k\}_k \rightarrow \bar{y}$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Sabemos que $y^k = y^{k-1} + \Delta^k$, e como $\{y^k\}_k$ é uma sequência convergente,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y^k = \lim_{k \rightarrow \infty} y^{k-1},$$

segue daí que, $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta^k = \vec{0}$, ou seja,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_i^k = 0, \text{ para todo } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Usando novamente a dinâmica mista,

$$y_i^k = y^{k-1} + \Delta_1^k e^1 + \Delta_2^k e^2 + \dots + \Delta_i^k e^i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

e tomando o limite quando $k \rightarrow \infty$ para esta expressão, obtemos,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_i^k = \lim_{k \rightarrow \infty} y^{k-1} = \bar{y}, \text{ para todo } i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

completando a demonstração. ■

Em razão deste lema, na ausência de “set ups”, podemos nos restringir ao estudo de apenas uma das sequências $\{y_i^k\}_k$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Sendo $M \in \mathcal{S}$, uma matriz não singular, podemos finalmente mostrar um importante resultado relacionando estabilidade forte induzida pelo hipercone $C(M, b)$ com a solução do sistema linear $My = b$.

Teorema 2.5 *Para $M \in \mathcal{S}$ uma matriz não singular, a trajetória induzida pelo hipercone $C(M, b)$, para um sistema com “set ups” nulos,*

$$\left. \begin{array}{l} \text{toda } \{y_i^k\}_k, i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ \text{é fortemente estável} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{toda } \{y_i^k\}_k, i \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{ converge} \\ \text{para o vértice do hipercone } C(M, b) \end{array} \right.$$

Demonstração

($\Rightarrow$) Do lema 2.6, página 48, se uma sequência $\{y_i^k\}_k$ é fortemente estável, todas as sequências $\{y_j^k\}_k$ são fortemente estáveis, convergindo para o mesmo ponto. Deste modo, basta considerarmos a sequência

$$\{y^k\}_k \rightarrow \bar{y}, \quad \forall y^0 \in C(M, b).$$

Usando a dinâmica não mista, $y^{k+1} = Jy^k + L^{-1}b$, segue que

$$\bar{y} = \lim_{k \rightarrow \infty} y^{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} Jy^k + L^{-1}b = J\bar{y} + L^{-1}b,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \bar{y} = J\bar{y} + L^{-1}b = -L^{-1}U\bar{y} + L^{-1}b &\Leftrightarrow L\bar{y} = -U\bar{y} + b \\ &\Leftrightarrow (L + U)\bar{y} = b \\ &\Leftrightarrow M\bar{y} = b. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Se $\forall y^0 \in C(M, b)$,

$$\{y^k\}_k \rightarrow \bar{y}; \quad M\bar{y} = b,$$

segue da definição de estabilidade forte que $\{y^k\}_k$ é fortemente estável, e novamente do lema 2.6, toda $\{y_i^k\}_k, i \in \{1, 2, \dots, n\}$, é fortemente estável. ■

Intuitivamente, podemos entender a equivalência entre a política hipercone e o processo iterativo de Gauss-Seidel se pensarmos na representação gráfica deste e lembrarmos que a cada rodada de produção, por exemplo, do produto i , apenas a i ésima componente do vetor de estado é alterada, sendo que esta alteração leva a trajetória a atingir a face i ($M_i y = b_i$). Além do que, estas alterações se sucedem em uma sequência “round robin”, como no método Gauss-Seidel.

Deste modo, podemos finalmente obter um resultado que torna conveniente a utilização de políticas hipercones para levar a trajetória efetiva a convergir para um ponto alvo.

Corolário 2.6 *Para $M \in \mathcal{S}$, uma matriz não singular, com o ponto alvo como vértice do hipercone $C(M, b)$, o sistema, com “set ups” nulos, é fortemente estável se, e somente se, toda $\{y_i^k\}_k, i \in \{1, 2, \dots, n\}$, converge para o ponto alvo.*

Demonstração Segue diretamente do teorema anterior. ■

Se denotarmos por t^k , o tempo até o início da k ésima rodada de produção e admitindo que, qualquer que seja a matriz quadrada J , $J^0 \equiv I$ (matriz identidade), para $k > 0$, obtemos que

$$t^{k+1} = t^k + \sum_{i=1}^n \Delta_i^{k+1} = t^k + \langle \vec{1}, \Delta^{k+1} \rangle.$$

Sabemos que, no caso de sistemas com tempos de “set up” nulos, $\Delta^{k+1} = J\Delta^k$ e $y^{k+1} = y^k + \Delta^{k+1}$. Deste modo, podemos reescrever as trajetórias de $\{\Delta^k\}_k, \{y^k\}_k$ e $\{t^k\}_k$ como segue

$$\Delta^{k+1} = J^k \Delta^1, \quad (2.17)$$

$$y^{k+1} = y^0 + (J^0 + J^1 + \dots + J^k) \Delta^1, \quad (2.18)$$

$$\text{e } t^{k+1} = \langle \vec{1}, (J^0 + J^1 + \dots + J^k) \Delta^1 \rangle. \quad (2.19)$$

Para esclarecermos estas dinâmicas iremos computá-las em um exemplo simples em $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 2.3.2 *Vamos considerar um sistema com tempos de “set up” nulos ($s = \vec{0}$) e por simplicidade de notação, neste exemplo, usaremos $y^k \in \mathbb{R}^2$ para representar a k ésima*

interseção da trajetória efetiva com alguma das faces do hipercone. Deste modo, como a política começa com o controle e^1 , se k for par $M_2 y^k = 0$ e em caso contrário $M_1 y^k = 0$. Assim, poderemos escrever y^k , excepcionalmente aqui, como $(y_1^k, y_2^k)^t$.

Tomando $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, segue que $L = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J = -L^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

É fácil verificar que $J^k = \begin{bmatrix} 0 & 1/2^k \\ 0 & 1/2^k \end{bmatrix}$ e sendo $y^0 \in C(M, \vec{0})$, usando as equações para Δ^k do corolário 2.1,

$$\Delta_1^1 = \frac{1}{M_{11}} [-M_1 y^0] = -y_1^0 + \frac{y_2^0}{2} \quad (y_1^0 \leq 0 \text{ e } y_2^0 \leq 0)^2,$$

$$\Delta_2^1 = \frac{1}{M_{22}} [-M_2 y^0 - M_{21} \Delta_1^1] = -y_1^0 - y_2^0 + \Delta_1^1 = -\frac{y_2^0}{2}.$$

Usando a descrição de J^k acima, é fácil ver que $(J^0 + J^1 + \dots + J^k) = \begin{bmatrix} 1 & 1-1/2^k \\ 0 & 2-1/2^k \end{bmatrix}$ (progressões geométricas de razão $1/2$, $\sum_{i=1}^k 1/2^i = 1 - 1/2^k$). Logo

$$\{\Delta^k\}_k \rightarrow \vec{0},$$

$$\{y^k\}_k \rightarrow y^0 + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Delta^1 = \begin{pmatrix} y_1^0 + \Delta_1^1 + \Delta_2^1 \\ y_2^0 + \Delta_1^1 \end{pmatrix},$$

$$\text{e} \quad \{t^k\}_k \rightarrow \langle \vec{1}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Delta^1 \rangle = \langle \vec{1}, \begin{pmatrix} -y_1^0 \\ -y_2^0 \end{pmatrix} \rangle = -y_1^0 - y_2^0 = \|y^0\|_1^3.$$

É interessante ressaltarmos o fato de que, no exemplo acima, $\{t^k\}_k$ converge para $\|y^0\|_1$, qualquer que seja $y^0 \in \mathbb{R}_-^2$. Na dinâmica do vetor de estado os controles são do tipo e^i , assim, dois pontos sucessivos da trajetória efetiva que interceptam faces do hipercone, diferem em uma única coordenada. Ainda mais, como $y_{i+1}^k = y_i^k + \Delta_{i+1}^k e^{i+1}$, esta diferença é exatamente Δ_{i+1}^k .

Deste modo é razoável esperarmos que

² Por absurdo, suponhamos que $y_2^0 > 0$, neste caso $\{-y_1^0 + y_2^0 \leq 0 \Leftrightarrow y_2^0 \leq y_1^0\} \Rightarrow y_1^0 > 0$. No entanto, teríamos $0 \geq 2y_1^0 - y_2^0 \geq 2y_2^0 - y_2^0 = y_2^0 > 0$ (contradição!). Sendo $y_2^0 \leq 0$, $2y_1^0 - y_2^0 \leq 0 \Rightarrow y_1^0 \leq 0$.

³ $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$.

Teorema 2.6 *Para um sistema fortemente estável, com “set ups” nulos, operado por $C(M, b)$ qualquer que seja o ponto inicial $y^0 \in C(M, b)$, o sistema converge em tempo $\|y^0 - \bar{y}\|_1$, para seu ponto de acumulação $\bar{y}$. Ou seja,*

$$\text{se } \{y^k\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \bar{y}, \forall y^0 \in C(M, b), \text{ então } \{t^k\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \|y^0 - \bar{y}\|_1.$$

Demonstração Da equação 2.19, $y^{k+1} = y^0 + (J^0 + J^1 + \dots + J^k)\Delta^1$, daí $y^{k+1} - y^0 = (J^0 + J^1 + \dots + J^k)\Delta^1$ e como $\{y^k\}_k \rightarrow \bar{y}$, por continuidade

$$\{(J^0 + J^1 + \dots + J^k)\Delta^1\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \bar{y} - y^0.$$

Ainda da equação 2.18, $t^{k+1} = \langle \vec{1}, (J^0 + J^1 + \dots + J^k)\Delta^1 \rangle$ e portanto $\{t^k\}_k$ converge. Como $\bar{y} - y^0 \geq \vec{0}$, pois $\bar{y} \geq y^{k+1} \geq y^k \geq y^0$, segue que

$$\{t^k\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \|\bar{y} - y^0\|_1.$$

■

Apresentaremos a seguir um importante resultado para sistemas com tempos de “set up” não nulos.

Teorema 2.7 *Para $M \in \mathcal{S}$ não singular, um sistema operado por $C(M, b)$ é fortemente estável se, e somente se,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta^k = \Sigma_s \vec{\rho}. \quad (2.20)$$

Demonstração

($\Rightarrow$) Se $\{y^k\}_k$ é fortemente estável, então existe um único $\bar{y}$ para o qual,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y^{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} y^k = \bar{y},$$

além disto, sabemos que $y^{k+1} = y^k + \Delta^{k+1} - \Sigma_s \vec{\rho}$, portanto da linearidade das dinâmicas de y^k e Δ^k , segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta^k = \Sigma_s.$$

($\Leftarrow$) Sabemos que

$$\Delta^{k+1} = J\Delta^k + \Sigma_s(I - J)\vec{\rho} = J^k\Delta^1 + \Sigma_s(I + J + J^2 + \dots + J^{k-1})(I - J)\vec{\rho}.$$

Considerando $S_{k-1} = I + J + J^2 + \dots + J^{k-1}$ e fazendo $S_{k-1} - S_{k-1}J$, obtemos que

$$S_{k-1}(I - J) = I - J^k,$$

o que, substituindo na expressão anterior de Δ^k , produz

$$\Delta^{k+1} = J^k \Delta^1 + \Sigma_s(I - J^k)\vec{\rho} = J^k(\Delta^1 - \Sigma_s\vec{\rho}) + \Sigma_s\vec{\rho}.$$

Tomando o limite desta expressão, quando $k \rightarrow \infty$, e utilizando a equação (2.20) acima, segue que

$$\Sigma_s\vec{\rho} = \lim_{k \rightarrow \infty} J^k(\Delta^1 - \Sigma_s\vec{\rho}) + \Sigma_s\vec{\rho},$$

ou seja,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J^k(\Delta^1 - \Sigma_s\vec{\rho}) = \vec{0}. \quad (2.21)$$

Sendo M não singular o sistema linear $My = b$ tem solução única, deste modo podemos tomar

$$y^* \in \mathbb{R}^n, \text{ para o qual } My^* = b.$$

Tomemos ainda

$$\alpha = -M^{-1}\vec{1}.$$

Neste caso,

$$y^* + \lambda\alpha \in \overset{\circ}{C}(M, b), \text{ qualquer que seja } \lambda > 0,$$

pois,

$$M(y^* + \lambda\alpha) = My^* + \lambda M\alpha = b - \lambda\vec{1} < b.$$

Além disto,

$$\{b - M(y^* + \lambda\alpha) = \lambda\vec{1}; \lambda > 0\} \text{ é ilimitado.}$$

Como $M \in \mathcal{S}$, segue do teorema 2.1 que,

$$L^{-1} \succeq \mathbf{0},$$

com diagonal principal estritamente positiva. Deste modo, usando a equação (2.3) que descreve Δ^1 , e considerando $y^0 = y^* + \lambda\alpha$, é possível tomar um $\lambda > 0$ suficientemente grande, de modo a tornar

$$\Delta^1 - \Sigma_s\vec{\rho} = L^{-1}(b - My^0 + SM\vec{\rho}) - \Sigma_s\vec{\rho} = L^{-1}(\lambda\vec{1} + SM\vec{\rho}) - \Sigma_s\vec{\rho}$$

positivo. Seja um tal $\lambda > 0$, e tomemos

$$\beta = \Delta^1 - \Sigma_s\vec{\rho} = L^{-1}(b - My^0 + SM\vec{\rho}) - \Sigma_s\vec{\rho} > \vec{0}.$$

Assim, para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, usando o limite (2.21), obtemos que sua *i*-ésima componente é tal que

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} J_i^k \beta = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \beta_j J_{ij}^k,$$

além disto, do teorema 2.1 sabemos que $J \succeq 0$, portanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J_i^k = \vec{0}^t,$$

qualquer que seja $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, ou seja,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J^k = 0. \quad (2.22)$$

Considerando novamente $S_{k-1} = I + J + J^2 + \dots + J^{k-1}$, obtemos que

$$(I - J)S_{k-1} = I - J^k = S_{k-1}(I - J)$$

e usando a equação (2.22), segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{k-1} = (I - J)^{-1}.$$

Abrindo a recorrência do sistema (2.7), $y^k = By^{k-1} + Cs + Db$, usando do teorema 2.3 que $B = J$ e $D = L^{-1}$, segue que

$$y^k = J^k y^0 + (I + J + J^2 + \dots + J^{k-1})(Cs + L^{-1}b) = J^k y^0 + S_{k-1}(Cs + L^{-1}b),$$

e, tomando o limite desta expressão quando $k \rightarrow \infty$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y^k = (I - J)^{-1}(Cs + L^{-1}b).$$

Usando estes resultados e a dinâmica mista, assumindo $y_0^k = y_n^{k-1}$

$$y_i^k = y_{i-1}^k + \Delta_i^k e^i - s_i \vec{\rho}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

e lembrando que $y^k = y_n^k$, segue por indução que

$$\bar{y}_i = \lim_{k \rightarrow \infty} y_i^k = \bar{y}_{i-1} + \sum_s \rho_i e^i - s_i \vec{\rho},$$

para todo $y^0 \in C(M, b)$, completando a demonstração. ■

Vale notar que

$$\bar{y}_n = \bar{y}_{n-1} + \sum_s \rho_n e^n - s_n \vec{\rho} = \dots = \bar{y}_1 + \sum_s \sum_{i=1}^n \rho_i e^i - \sum_{i=1}^n s_i \vec{\rho} = \bar{y}_1 + \sum_s \vec{\rho} - \sum_s \vec{\rho} = \bar{y}_1.$$

Conforme já referido anteriormente, ao conjunto de pontos $\{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n\}$, para os quais

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_i^k = \bar{y}_i, \text{ denominamos ciclo limite,}$$

que no caso homogêneo se reduz a um único ponto, conforme o lema 2.6.

Corolário 2.7 *Para um sistema operado por $C(M, b)$, com $M \in \mathcal{S}$ não singular, se para algum $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, a sequência $\{y_i^k\}_k$ for fortemente estável, então para todo $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, a sequência $\{y_j^k\}_k$ é fortemente estável, sendo que*

$$\text{se } \lim_{k \rightarrow \infty} y^k = \bar{y}_n \text{ então } \lim_{k \rightarrow \infty} y_i^k = \bar{y}_n + \Sigma_s \sum_{j=1}^i \rho_j e^j - \sum_{j=1}^i s_j \vec{\rho}.$$

Demonstração Seja $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ para o qual a sequência $\{y_i^k\}_k$ é fortemente estável, com

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_i^k = \bar{y}_i.$$

Da dinâmica mista, temos que

$$y_i^k = y_i^{k-1} + \Delta_{i+1}^{k-1} e^{i+1} + \dots + \Delta_n^{k-1} e^n + \Delta_1^k e^1 + \dots + \Delta_i^k e^i - \Sigma_s \vec{\rho},$$

e como $\lim_{k \rightarrow \infty} y_i^k = \lim_{k \rightarrow \infty} y_i^{k-1}$, segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \Delta_{i+1}^{k-1} \\ \vdots \\ \Delta_n^{k-1} \\ \Delta_1^k \\ \vdots \\ \Delta_i^k \end{bmatrix} = \Sigma_s \vec{\rho},$$

ou seja,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_j^k = \Sigma_s \rho_j, \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Colocando $y_0^k = y_n^{k-1}$ e usando novamente a dinâmica mista, podemos mostrar indutivamente que, iniciando com $j = i + 1$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_j^k = \lim_{k \rightarrow \infty} (y_{j-1}^k + \Delta_j^k e^j - s_j \vec{\rho}) = \bar{y}_{j-1} + \Sigma_s \rho_j e^j - s_j \vec{\rho} = \bar{y}_j,$$

e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_1^k = \lim_{k \rightarrow \infty} y_n^{k-1} + \Delta_1^k e^1 - s_1 \vec{\rho} = \bar{y}_n + \Sigma_s \rho_1 e^1 - s_1 \vec{\rho} = \bar{y}_1,$$

finalizando a demonstração. ■

Este resultado pode ser generalizado no teorema a seguir.

Teorema 2.8 Para $M \in \mathcal{S}$ não singular, um sistema operado por $C(M, b)$ é fortemente estável se, e somente se, qualquer que seja $y^0 \in C(M, b)$, o sistema converge para um único ciclo limite,

$$(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n),$$

sendo

$$\bar{y}_n = \bar{y} = M^{-1}b + M^{-1}LCs \quad (M^{-1}b \text{ é o vértice do hipercone})$$

e para $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$,

$$\bar{y}_i = \bar{y} + \Sigma_s(\rho_1 e^1 + \rho_2 e^2 + \dots + \rho_i e^i) - (s_1 + s_2 + \dots + s_i)\vec{\rho}.$$

Demonstração

($\Rightarrow$) Se o sistema é fortemente estável, existe, e é única, a sequência $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)$, para a qual

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_i^k = \bar{y}_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Do teorema 2.7, sabemos que

$$\text{o sistema é fortemente estável} \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta^k = \Sigma_s \vec{\rho} \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_i^k = \Sigma_s \rho_i, \forall i,$$

e da dinâmica mista,

$$y_i^k = \begin{cases} y_n^{k-1} + \Delta_1^k e^1 - s_1 \vec{\rho}, & i = 1, \\ y_{i-1}^k + \Delta_i^k e^i - s_i \vec{\rho}, & 1 < i \leq n, \end{cases} \quad (2.23)$$

deste modo, colocando $y_0^k = y_n^{k-1}$, obtemos que, para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\bar{y}_i = \lim_{k \rightarrow \infty} y_i^k = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{i-1}^k + \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_i^k e^i - s_i \vec{\rho} = \bar{y}_{i-1} + \Sigma_s \rho_i e^i - s_i \vec{\rho}.$$

Além disto, se tomarmos y^* , para o qual, $My^* = b$, segue que

$$\begin{aligned} (L + U)y^* = b &\Leftrightarrow (I + L^{-1}U)y^* = L^{-1}b \Leftrightarrow (I - J)y^* = L^{-1}b \\ &\Leftrightarrow y^* = Jy^* + L^{-1}b, \end{aligned}$$

e, se considerarmos

$$\bar{y}_n = \bar{y} = \lim_{k \rightarrow \infty} y^{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} Jy^k + L^{-1}b + Cs = J\bar{y} + L^{-1}b + Cs,$$

segue que,

$$\begin{aligned} \bar{y} - y^* &= J(\bar{y} - y^*) + Cs \Leftrightarrow (I - J)\bar{y} = (I - J)y^* + Cs \\ &\Leftrightarrow L(I - J)\bar{y} = L(I - J)y^* + LCs = (L + U)y^* + LCs \\ &\Leftrightarrow M\bar{y} = My^* + LCs = b + LCs, \\ &\Leftrightarrow \bar{y} = M^{-1}b + M^{-1}LCs. \end{aligned}$$

Deste modo, para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_i^k = \bar{y} + \Sigma_s \sum_{j=i}^n \rho_j e^j - \sum_{j=i}^n s_j \vec{\rho}.$$

($\Leftarrow$) Para todo $y^0 \in C(M, b)$, se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_i^k = \bar{y} + \Sigma_s (\rho_1 e^1 + \rho_2 e^2 + \dots + \rho_i e^i) - (s_1 + s_2 + \dots + s_i) \vec{\rho}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

para $\bar{y} = M^{-1}b + M^{-1}LCs$, segue da definição que o sistema é fortemente estável. ■

Um resultado muito importante ao estudo de estabilidade forte, que permitirá nos concentrarmos no estudo do caso homogêneo, é apresentado a seguir.

Teorema 2.9 *Um sistema $(d, \tau, \bar{s})$, com tempos de “set up” não nulos, operado por $C(M, b)$, $M \in \mathcal{S}$ não singular, é fortemente estável se, e somente se, o mesmo sistema (d, τ) , porém considerando tempos de “set up” nulos, operado por $C(M, \vec{0})$ é fortemente estável, i.e., o sistema cuja dinâmica é descrita pela equação (2.7) é fortemente estável se, e somente se, o sistema*

$$y^{k+1} = Jy^k \quad (2.24)$$

é fortemente estável, onde a matriz J é a mesma para ambos os sistemas.

Demonstração Simplificadamente, demonstraremos que

$$\left. \begin{array}{l} y^{k+1} = Jy^k + L^{-1}b + Cs \\ \text{é fortemente estável} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y^{k+1} = Jy^k \\ \text{é fortemente estável} \end{array} \right.$$

onde $J = -L^{-1}U$ ($L+U = M$), conforme definição 9 e C conforme definido nos teoremas 2.2 e 2.3.

($\Leftarrow$) Abrindo a recorrência do sistema (2.7), $y^k = By^{k-1} + Cs + Db$, com $B = J$ e $D = L^{-1}$, obtemos

$$y^k = J^k y^0 + (I + J + J^2 + \dots + J^{k-1})(Cs + L^{-1}b). \quad (2.25)$$

Colocando, mais um vez, $S_{k-1} = I + J + J^2 + \dots + J^{k-1}$, obtemos que

$$(I - J)S_{k-1} = I - J^k = S_{k-1}(I - J)$$

e como por hipótese o sistema (2.24) é fortemente estável, segue do teorema 2.4 que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J^k = 0,$$

portanto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = (I - J)^{-1}.$$

Usando estes resultados e aplicando o limite quando $k \rightarrow \infty$ à equação (2.25), obtemos,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y^k = (I - J)^{-1}(Cs + L^{-1}b)$$

qualquer que seja o ponto $y^0 \in C(M, \vec{0})$, visto que $\lim_{k \rightarrow \infty} J^k y^0 = \vec{0}$.

Deste modo, usando o corolário 2.7, toda sequência $\{y_i^k\}_k$ é fortemente estável, e portanto o sistema (2.7) é fortemente estável.

($\Rightarrow$) O teorema 2.7 mostra que se o sistema é fortemente estável, então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta^k = \Sigma_s \vec{\rho},$$

qualquer que seja $y^0 \in C(M, b)$. Deste resultado, ainda é derivado no mesmo teorema a equação (2.22),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J^k = 0,$$

seguindo daí que a sequência $\{y^k\}_k$ é fortemente estável, e do corolário 2.7, todas as sequências $\{y_i^k\}_k$ são fortemente estáveis. Portanto, o sistema homogêneo $y^{k+1} = J^k y^0$ é fortemente estável. ■

SCG-91, haviam proposto, apenas, que a primeira parte deste teorema (($\Leftarrow$)) valeria.

Este resultado é extremamente importante ao estudo de estabilidade forte, pois permite nos concentrarmos no estudo do caso homogêneo, sistemas com tempos de “set up” nulos operados por hipercones homogêneos $C(M, \vec{0})$, como faremos no próximo capítulo.

Capítulo 3

Condições para Obtenção de Estabilidade Forte

No capítulo anterior mostramos que o estudo de estabilidade forte, para sistema caracterizados pelas equações (1.1) e (1.2) e operado por políticas hipercones visando seguir uma trajetória objetivo, pode ser restrito ao caso homogêneo, isto é, um sistema, caracterizado por $(d, \tau, \vec{s})$, operado por um hipercone $C(M, b)$ é fortemente estável se, e somente se, o sistema $(d, \tau, \vec{0})$ operado pelo hipercone $C(M, \vec{0})$ é fortemente estável. Devido à este resultado, estudaremos condições necessárias e suficientes para a estabilidade forte considerando apenas o caso homogêneo, para $M \in \mathcal{S}$ não singular. Deste modo, o título completo deste capítulo deveria ser *Condições para Obtenção de Estabilidade Forte para o Caso Homogêneo com $M \in \mathcal{S}$ não singular*.

Na seção 3.1, exploraremos a idéia, apresentada por SCG-91 em seu teorema 5.2, de que, para $M \in \mathcal{S}$, se $y \in C(M, \vec{0})$, então $(1 \ 1 \cdots 1)^t y \leq 0$ (já apresentamos um contra-exemplo para tal afirmação no exemplo 1.3.3, página 28). Usaremos o fato que a sequência $z^k = p^t y^k$, para $p > \vec{0}$, é não decrescente para mostrar, por exemplo, que se $\{z^k\}_k$ for limitada, então o sistema homogêneo é fortemente estável e que neste caso $C(M, \vec{0}) \subseteq \mathbb{R}_-^n$. Além disto, mostraremos que $C(M, \vec{0}) \subseteq \mathbb{R}_-^n$ é uma condição necessária e suficiente para a estabilidade forte.

Na seção 3.2, exploraremos teoremas de alternativas para tornar os resultados geométricos obtidos na seção anterior em resultados algébricos e poderemos derivar um teste, computacionalmente simples, para verificação de estabilidade forte. Além disto, apresentaremos um resultado análogo ao critério da dominância diagonal para convergência de processo iterativo de Gauss-Seidel.

3.1 Considerando o Hipercone $C(M, \vec{0})$

Nesta seção apresentaremos uma condição necessária e suficiente de estabilidade forte usando o hipercone $C(M, \vec{0})$, $M \in C(M, \vec{0})$ não singular. A demonstração da validade destes resultados não demanda muito esforço, porém ele não nos permitirá um teste computacionalmente simples. A razão disto é que a condição diz respeito à posição geométrica do hipercone no $\mathbb{R}^n$.

Utilizando os resultados do capítulo anterior, podemos expressar a seguinte condição necessária de estabilidade.

Teorema 3.1 *Se um sistema operado por $C(M, \vec{0})$, com $M \in \mathcal{S}$, é fortemente estável, então*

$$C(M, \vec{0}) \subseteq \mathbb{R}_-^n.$$

Demonstração Por contradição, suponhamos que exista $y \in C(M, \vec{0})$, $y \notin \mathbb{R}_-^n$. Neste caso tomando $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, para o qual $y_i > 0$, e $y^0 = y$, segue que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$y_i^k = y_i^0 + \sum_{j=1}^k \Delta_i^j \geq y_i^0 > 0$$

daí, $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_i^k > 0$ e, pelo corolário 2.5 ($\{y^k\}_k$ fortemente estável $\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} y^k = \vec{0}$), na página 47, o sistema não é fortemente estável, contrariando a hipótese do teorema. ■

Para obtermos uma condição suficiente para estabilidade forte, utilizaremos uma derivação da clássica função de carga de trabalho, ou WIP, da literatura de SMF, que é uma ponderação a coeficientes positivos do vetor de estado, i.e., para $p > \vec{0}$,

$$p^t y = \langle p, V^{-1} x \rangle = \langle (V^{-1})^t p, x \rangle,$$

sendo que $(V^{-1})^t p > 0$, pois $V^{-1} \succeq 0$ e $p > \vec{0}$. Por simplicidade, denotaremos esta ponderação por *carga de trabalho ponderada*.

Lema 3.1 *Para todo vetor p , $p > \vec{0}$, a sequência*

(i) $z^k = p^t y^k$ *é não decrescente; e*

(ii) $z^{k+1} = z^k \Leftrightarrow \forall j \geq 1, z^{k+j} = z^k \Leftrightarrow y^k$ *está no espaço nulo de M .*

Demonstração Usando o corolário 2.1 ($y^k = y^{k-1} + \Delta^k$),

$$z^k = p^t y^k = p^t y^{k-1} + p^t \Delta^k = z^{k-1} + p^t \Delta^k.$$

Como $p > \vec{0}$ e $\Delta^k \geq \vec{0}$, segue diretamente o item (i). Ainda,

$$\begin{aligned}
z^{k+1} = z^k &\Leftrightarrow \Delta^k = \vec{0} \Leftrightarrow \Delta^{k+j} = J^j \Delta^k = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow z^k = z^{k+1} = z^{k+2} = \dots = z^{k+j} \\
&\Leftrightarrow My^k = \vec{0}.
\end{aligned}$$

A última equivalência segue de $\Delta^k = 0$ e da descrição de Δ_i^k expressa no corolário 2.1,

$$\Delta_i^k = \frac{1}{M_{ii}} \left(-M_{iy}^{k-1} - \sum_{l=1}^{i-1} M_{il} \Delta_l^k \right).$$

■

Este resultado corresponde a dizer que a carga de trabalho do sistema, ponderada por $(V^{-1})^t p > \vec{0}$, é não decrescente.

Outro resultado nesta linha de utilização da carga de trabalho ponderada, é apresentado a seguir.

Lema 3.2 Para $M \in \mathcal{S}$, se existe um $p > \vec{0}$ para o qual

$$\sup \{p^t y / My \leq \vec{0}\} \neq +\infty$$

$$\begin{aligned}
\text{então, } \forall y^0 \in C(M, \vec{0}), \quad & (i) \quad \{\Delta^k\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \vec{0} \\
& (ii) \quad \{z^k\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \bar{z} \leq \vec{0} \\
& (iii) \quad \{My^k\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \vec{0}.
\end{aligned}$$

Demonstração Como $C(M, \vec{0}) = \{y / My \leq \vec{0}\}$ é um cone,

$$\sup \{p^t y / y \in C(M, \vec{0})\} \in \{0\} \cup \{+\infty\},$$

pois se este supremo for maior que um $\bar{z} = p^t \bar{y} > 0$, para $\bar{y} \in C(M, \vec{0})$, segue que, para todo $\lambda > 0$,

$$M(\lambda \bar{y}) = \lambda M \bar{y} \leq \vec{0},$$

e portanto aquele supremo é ilimitado, desde que

$$\sup \{\lambda p^t \bar{y} / \lambda > 0\} = +\infty.$$

Assim, sob as hipóteses do lema, para todo $y^k \in C(M, \vec{0})$, $z^k \leq \vec{0}$. Deste modo $\{z^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência monótona não decrescente, limitada por $\vec{0}$, logo

$$\{z^k = p^t y^k\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \bar{z} \leq \vec{0},$$

e como $z^k = z^{k-1} + p^t \Delta^k$, $p > \vec{0}$ e $\Delta^k \geq \vec{0}$, segue que

$$\bar{z} = \lim_{k \rightarrow \infty} z^k = \lim_{k \rightarrow \infty} z^{k-1} + \lim_{k \rightarrow \infty} p^t \Delta^k = \bar{z} + p^t \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta^k \geq \bar{z}$$

portanto

$$\{\Delta^k\}_{k \in N} \rightarrow \vec{0}.$$

Usando a expressão de Δ_j^k do corolário 2.1,

$$\Delta_j^k = \frac{1}{M_{jj}} \left(-M_j y^k - \sum_{l=1}^{j-1} M_{jl} \Delta_l^k \right)$$

seguindo por continuidade que

$$\{M y^k\}_{k \in N} \rightarrow \vec{0},$$

o que completa a demonstração. ■

Estes resultados nos permitem apresentar a seguinte condição suficiente de estabilidade,

Teorema 3.2 *Se $C(M, \vec{0}) \subseteq \mathbb{R}_-^n$, $M \in \mathcal{S}$ não singular, então um sistema homogêneo operado por $C(M, \vec{0})$ é fortemente estável.*

Demonstração Sendo $C(M, \vec{0}) \subseteq \mathbb{R}_-^n$, para todo $p > \vec{0}$ e $y \in C(M, \vec{0})$,

$$p^t y \leq 0,$$

e, como $p^t \vec{0} = 0$ e $\vec{0} \in C(M, \vec{0})$,

$$\sup\{p^t / M y \leq \vec{0}\} = \vec{0}.$$

Usando o item (iii) lema 3.2 acima, $\{M y^k\}_k \rightarrow \vec{0}$, e colocando

$$\alpha^k = M y^k,$$

segue que a sequência $\{\alpha^k\}_k$ converge para zero pela esquerda. Assim, usando $M^{-1} \alpha^k$, segue por continuidade que, $\{M^{-1} \alpha^k\} \rightarrow \vec{0}$, ou seja,

$$\{y^k\} = \{M^{-1} \alpha^k\} \rightarrow \vec{0},$$

logo, do corolário 2.5 (página 47), segue que o sistema homogêneo é fortemente estável. ■

Agora podemos explicitar uma condição necessária e suficiente para a estabilidade de um sistema homogêneo, de características geométricas.

Corolário 3.1 *Para $M \in \mathcal{S}$ não singular, um sistema homogêneo é fortemente estável se, e somente se,*

$$C(M, \vec{0}) \subseteq \mathbb{R}_-^n.$$

Demonstração Segue diretamente dos teoremas 3.1 e 3.2. ■

No exemplo 1.3.3, página 28, apresentamos um sistema homogêneo, com $M \in \mathcal{S}$, no qual $C(M, \vec{0}) \not\subseteq \mathbb{R}_-^n$. Para aquele exemplo não existe $p > \vec{0}$, para o qual

$$\{p^t y : y \in C(M, \vec{0})\} \text{ seja limitado.}$$

Agora podemos exprimir um resultado um pouco mais forte que o apresentado no teorema 2.6, da última seção do capítulo anterior, usando o corolário 3.1 (para $M \in \mathcal{S}$ não singular, o sistema homogêneo é fortemente estável $\Leftrightarrow C(M, \vec{0}) \subseteq \mathbb{R}_-^n$).

Teorema 3.3 *Para $M \in \mathcal{S}$ não singular, um sistema homogêneo é fortemente estável se, e somente se,*

$$\left\{ \left(\sum_{i=0}^k J^i \right) \Delta^1 \right\}_k \rightarrow \|y^0\|_1,$$

e isto implica em

$$\{t^k\}_k \rightarrow \|y^0\|_1,$$

sendo t^k o instante em que a trajetória efetiva intercepta a face n pela k -ésima vez, i.e., $y(t^k) = y^k$.

Demonstração Da seção anterior, mais especificamente da página 50, sabemos que

$$y^{k+1} = y^0 + \left(\sum_{i=0}^k J^i \right) \Delta^1 \Leftrightarrow y^{k+1} - y^0 = \left(\sum_{i=0}^k J^i \right) \Delta^1$$

e

$$t^{k+1} = \langle \vec{1}, \left(\sum_{i=0}^k J^i \right) \Delta^1 \rangle,$$

logo

$$\begin{aligned} C(M, \vec{0}) \subseteq \mathbb{R}_-^n &\Leftrightarrow \{y^k\}_k \rightarrow \vec{0}, \forall y^0 \in C(M, \vec{0}) \\ &\Leftrightarrow \left\{ \left(\sum_{i=0}^k J^i \right) \Delta^1 \right\}_k \rightarrow -y^0 \geq \vec{0}, \forall y^0 \in C(M, \vec{0}) \\ &\Rightarrow \{t^k\}_k \rightarrow \|y^0\|_1, \forall y^0 \in C(M, \vec{0}), \end{aligned}$$

completando a demonstração. ■

Este teorema garante, resumidamente, que se o sistema é fortemente estável ele converge para o vértice do hipercone (teorema 2.5, página 49) em um tempo finito $\|y^0\|_1$, independentemente da relação entre as faces do hipercone, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \|y^0\|_1} y(t) = \vec{0}.$$

3.2 Considerando a matriz M do Hipercone

Apesar de já conhecermos uma condição necessária e suficiente de estabilidade, ainda não conhecemos um método computacionalmente simples para decidirmos a questão crucial que é:

“uma dada matriz $M \in \mathcal{S}$, geradora do hipercone $C(M, \vec{0})$,
induz ou não estabilidade forte ?”

Nesta seção apresentaremos uma caracterização de estabilidade forte, utilizando a matriz geradora do hipercone, de verificação rápida, a saber, a verificação se $M^{-1} \succeq 0$.

Usando o lema 3.2 (página 61), podemos derivar o seguinte resultado utilizando a idéia dos teoremas de separação de convexos.

Corolário 3.2 *Dada uma matriz M , não singular, da classe $\mathcal{S}$, a política hipercone $C(M, \vec{0})$ gera uma trajetória fortemente estável, i.e., que converge para a origem (vértice do hipercone) se, e somente se, para todo vetor p , tal que*

$$(i) \quad p > \vec{0}$$

têm-se

$$(ii) \quad \forall y : My \leq \vec{0} \Rightarrow p^t y \leq 0.$$

Demonstração

($\Leftarrow$) Seja um $p > \vec{0}$, valendo a condição (ii), segue daí que

$$\sup \{p^t y / My \leq \vec{0}\} = 0,$$

pois, $M\vec{0} \leq \vec{0}$, logo do lema 3.2 (página 61), obtemos que

$$\{My^k\}_k \rightarrow \vec{0}$$

e, novamente definindo $\alpha^k = My^k$, segue por continuidade que

$$\{y^k\}_k = \{M^{-1}\alpha^k\}_k \rightarrow \vec{0}.$$

($\Rightarrow$) Se o sistema homogêneo é fortemente estável, do teorema 3.1 (página 60), segue que

$$C(M, \vec{0}) \subseteq \mathbb{R}_-^n,$$

logo,

$$\forall y : My \leq \vec{0} \Rightarrow y \leq \vec{0}.$$

Portanto, tomando qualquer $p > \vec{0}$,

$$p^t y \leq 0,$$

completando a demonstração. ■

Podemos notar, do teorema 2.4 (página 47), que a estabilidade forte do sistema homogêneo é equivalente à matriz da dinâmica não mista do vetor de estado ser estável ($\lim_{k \rightarrow \infty} J^k = 0$). Apesar disto parecer mais geral que as condições (i) e (ii) do corolário 3.2, veremos que a presente linha de estudo gerará uma condição de estabilidade de fácil verificação, como indicado no início desta seção, além de permitir uma melhor compreensão do trabalho de SCG-91.

Para transformarmos as condições geométricas, de estabilidade forte, da seção anterior em condições algébricas, podemos tentar uma abordagem por teorema de alternativas, i.e., podemos procurar transformar o resultado anterior, ligado à teoremas de separação de convexos, em um equivalente utilizando teorema de alternativas.

Neste contexto, entendemos que um *teorema de alternativas* é caracterizado pela existência de solução para apenas um dentre dois sistemas mutuamente exclusivos, em geral lineares. Mais especificamente, se denotarmos estes sistemas por *I* e *II*, simplificadaamente, um teorema de alternativas assume a forma:

$$I \text{ vale} \Leftrightarrow II \text{ não vale.}$$

O seguinte teorema de alternativas, devido a J. Farkas, nos permitirá uma nova interpretação do corolário anterior,

Teorema 3.4 (Farkas, 1902) Dadas uma matriz $A_{p \times n}$ e um vetor $b_{n \times 1}$,

$$\left. \begin{array}{l} I \quad Ax \leq \vec{0}, \quad b^t x > 0 \\ \text{tem solução } x \in \mathbb{R}^n \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} II \quad A^t y = b, \quad y \geq \vec{0} \\ \text{não tem solução } y \in \mathbb{R}^p \end{array} \right.$$

Demonstração

($\Rightarrow$) Se *I* tem solução. Suponhamos por contradição que *II* também tenha solução. Neste caso teríamos

$$0 < b^t x = (A^t y)^t x = y^t Ax \leq 0,$$

portanto *II* não pode ter solução.

($\Leftarrow$) Se *II* não tem solução (utilizaremos conceitos de Programação Linear nesta prova). Consideremos os seguintes programas lineares

$$P \left\{ \begin{array}{l} \max b^t x \\ \text{sujeito à } Ax \leq \vec{0} \end{array} \right. \quad \text{e seu dual} \quad D \left\{ \begin{array}{l} \min \vec{0}^t y \\ \text{sujeito à } A^t y = b \text{ e } y \geq \vec{0}. \end{array} \right.$$

Como II não tem solução o problema D é inviável. Deste modo, o valor ótimo do problema D é $+\infty$. Uma vez que P é sempre viável, pois $A\vec{0} \leq \vec{0}$, para todo A , e utilizando o teorema forte de dualidade em programação linear, que garante igualdade entre os valores ótimos do par primal-dual sempre que um destes for viável, segue que P é ilimitado, isto é, existe uma direção $h \neq \vec{0}$ para a qual

$$b^t h > 0 \text{ e } Ah \leq \vec{0},$$

logo o sistema I tem solução. ■

O capítulo 2 de M-69, apresenta um interessante estudo sobre teoremas de alternativa, utilizando apenas conceitos elementares de álgebra linear. Este capítulo serve de base para o restante do texto, que trata de Programação Não Linear, em particular, para fundamentar sua apresentação sobre teoremas de separação de convexos (no capítulo 3).

Neste ponto surge uma questão natural:

“ se a matriz M é não singular e pertence a classe $\mathcal{S}$, isto implica na existência de um vetor p obedecendo as hipóteses do corolário 3.2 ? ”

Esta conjectura é falsa, como podemos observar no contra-exemplo a seguir.

Exemplo 3.2.1 *Seja a matriz $M \in \mathcal{S}$, não singular, definida por*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Para esta matriz, } M^{-1} = - \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \prec 0.$$

Deste modo, $\forall p > \vec{0}$, $(M^{-1})^t p < \vec{0}$, portanto o sistema

$$\begin{aligned} M^t z &= p > \vec{0} \\ z &\geq \vec{0} \end{aligned} \quad (\Leftrightarrow z = (M^{-1})^t p \geq \vec{0})$$

não tem solução $z \in \mathbb{R}^n$, isto é,

$$\forall p > \vec{0}, \exists y, \text{ para o qual, } My \leq \vec{0} \text{ e } p^t y > 0.$$

Podemos notar esta ilimitação na figura a seguir, que é a representação gráfica para o exemplo acima, na qual podemos observar que, para todo $p > \vec{0}$ o produto escalar com qualquer ponto do hipercone é positivo.

Figura 3.1: Exemplo de uma trajetória “round-robin” instável.

O exemplo anterior é também um contra-exemplo para a técnica de prova, do teorema 5.2 de SCG-91, para a estabilidade do sistema homogêneo¹, como é claramente um caso onde existe y tal que $(1 - \rho)(1 \dots 1)y = \tau^t x > 0$ (note que $M^{-1} \not\leq 0$). O problema no raciocínio de SCG-91 se encontra na suposição de que qualquer trajetória a partir de um ponto x , para o qual $\tau^t x > 0$, em virtude da sequência de atendimento “round robin”, irá interceptar o hiperplano $\{x : \tau^t x = 0\}$, quando isto pode não ocorrer, como mostra o exemplo anterior, e mais claramente, como indica a figura abaixo.

Figura 3.2: Gráfico de trajetória que não intercepta $\{x : \tau^t x = 0\}$.

Um outro contra-exemplo, muito mais sofisticado, para a tese que $p^t y \leq 0$, sempre que $y \in C(M, \vec{0})$, com $M \in \mathcal{S}$ não singular, é apresentado a seguir.

¹SCG-91, tentaram mostrar, por contradição, que $\nexists x \in C(A, \vec{0}) : \tau^t x > 0$.

Exemplo 3.2.2 Considere $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & -10 & 1 \end{bmatrix}$, e neste caso $M \in \mathcal{S}$ e não é singular,

sendo que $M^{-1} = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 19 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & -2 \\ -11 & -11 & 0 \end{bmatrix}$.

Para esta matriz

$$M^t z = (1 \ 1 \ 1)^t \Leftrightarrow z = (M^t)^{-1} (1 \ 1 \ 1)^t = \frac{1}{22} (5 \ -13 \ -4)^t.$$

Para este exemplo, os sistemas

$$\{M^t z = (1 \ 1 \ 1)^t, z \geq \vec{0}\} \quad \text{e} \quad \{M^t z = -(1 \ 1 \ 1)^t, z \geq \vec{0}\}$$

não têm, ambos, solução. Logo, pelo teorema de Farkas (3.4), ambos os sistemas

$$\{My \leq \vec{0}, (1 \ 1 \ 1)y > 0\} \quad \text{e} \quad \{My \leq \vec{0}, (1 \ 1 \ 1)y < 0\}$$

têm solução (note que neste caso, $M^{-1} \succeq 0$ e $M^{-1} \preceq 0$ são ambos falsos). Em vista disto, o argumento de que

$$(1 \ 1 \ 1)y < 0, \quad \forall y \in C(M, \vec{0}), y \neq \vec{0},$$

não é correto, mesmo se introduzirmos a hipótese de que exista $\bar{y}$ para o qual

$$\{M\bar{y} \leq \vec{0} \quad \text{e} \quad (1 \ 1 \ 1)\bar{y} < 0\}.$$

Levando em consideração o teorema de Farkas, vamos tornar a condição geométrica do corolário 3.1 (página 62), que caracteriza estabilidade forte, em uma condição algébrica, mas que ainda não permitirá um teste simples e direto para sua verificação.

Lema 3.3 Dada uma matriz M , não singular, da classe $\mathcal{S}$, o sistema homogêneo é fortemente estável se, e somente se, para todo vetor $p > \vec{0}$, o sistema

$$\begin{aligned} M^t z &= p \\ z &\geq \vec{0} \end{aligned}$$

tem solução $z \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração Mostraremos que o sistema acima ter solução equivale ao sistema do corolário 3.2 (página 64) ter solução, i.e.,

$$\forall p > \vec{0} : \quad \forall y : My \leq \vec{0} \Rightarrow p^t y \leq 0$$

seguindo daí a tese, visto que o sistema do referido corolário é uma condição necessária e suficiente para a estabilidade forte do sistema homogêneo, com $M \in \mathcal{S}$ não singular.

Para conseguirmos esta equivalência, consideremos os seguintes sistemas

$$(I_A) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall p > \vec{0} : \\ \forall y : My \leq \vec{0} \Rightarrow p^t y \leq 0 \end{array} \right\}$$

$$(I_B) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nexists p > \vec{0} : \\ My \leq \vec{0}, p^t y > 0 \\ \text{tem solução } y \in \mathbb{R}^n \end{array} \right\}$$

$$(I_C) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall p > \vec{0} : \\ M^t z = p > \vec{0}, z \geq \vec{0}, \\ \text{tem solução } z \in \mathbb{R}^n \end{array} \right\}$$

$$(I_A) \Leftrightarrow (I_B)$$

▷ Se (I_A) vale, segue que, para todo $y \in C(M, \vec{0})$ e para todo $p > \vec{0}$

$$p^t y \leq 0,$$

logo, (I_B) vale.

▷ Se (I_B) vale, então para todo $p > \vec{0}$, $\{My \leq \vec{0}, p^t y > 0\}$ não tem solução. Logo, para todo $y : My \leq \vec{0}$, segue que $p^t y \leq 0$, portanto vale (I_A) .

$$(I_B) \Leftrightarrow (I_C)$$

Considerando $I \equiv \{My \leq \vec{0}, p^t y > 0\}$ e $II \equiv \{M^t z = p, z \geq \vec{0}\}$, do teorema de Farkas, temos que

$$I \text{ tem solução} \Leftrightarrow II \text{ não tem solução},$$

deste modo, podemos obter que:

▷ Se (I_B) vale, segue que, para todo $p > \vec{0}$, I não tem solução, logo II tem solução para todo $p > \vec{0}$. Portanto, vale (I_C) .

▷ Se (I_C) vale, então não existe $p > \vec{0}$, para o qual II não tenha solução, i.e., não existe $p > \vec{0}$, para o qual I tenha solução. Portanto, vale (I_B) .

Daí segue a equivalência entre os sistemas (I_A) e (I_B) , completando a demonstração. ■

Daqui podemos expressar uma condição necessária e suficiente para estabilidade forte do sistema homogêneo, com $M \in \mathcal{S}$ não singular, de caracterização algébrica.

Teorema 3.5 Para $M \in \mathcal{S}$ não singular, o sistema homogêneo é fortemente estável se, e somente se,

$$M^{-1} \succeq 0.$$

Demonstração Nesta demonstração vamos utilizar o lema anterior, mostrando que

$$M^{-1} \succeq 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} \forall p > \vec{0} \\ M^t z = p > \vec{0}, z \geq \vec{0}, \\ \text{tem solução } z \in \mathbb{R}^n. \end{array}$$

($\Rightarrow$) Se o sistema é fortemente estável, segue do lema anterior que, para todo $p > \vec{0}$ o sistema

$$\begin{array}{l} M^t z = p \\ z \geq \vec{0} \end{array}$$

tem solução $z \in \mathbb{R}^n$.

Deste modo, se considerarmos, para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$p = e^i + \epsilon \vec{1}, \quad \epsilon > 0$$

tomando ϵ suficientemente pequeno, segue que, para uma solução $\bar{z}$ do sistema acima

$$\vec{0} \leq \bar{z} = (M^{-1})^t M^t \bar{z} = (M^{-1})^t p,$$

portanto, $(M^{-1})^t$ não tem coluna com entrada negativa, isto é

$$M^{-1} \succeq 0.$$

($\Leftarrow$) Se $M^{-1} \succeq 0$, então qualquer que seja

$$p > \vec{0},$$

segue que

$$(M^{-1})^t p \geq \vec{0}$$

e portanto,

$$\begin{array}{l} M^t z = p \\ z \geq \vec{0} \end{array}$$

tem solução $z = (M^{-1})^t p \geq \vec{0}$, qualquer que seja $p > \vec{0}$.

Logo, segue do lema 3.3, que o sistema é fortemente estável. ■

3.2.1 Propriedades sobre M fortemente estável

Em razão do teorema anterior,

Definição 12 Diremos que M é uma matriz fortemente estável sempre que $M \in \mathcal{S}$ e $M^{-1} \succeq 0$.

Um caso particular onde a estabilidade forte é válida face ao resultado acima, é apresentado no corolário a seguir.

Corolário 3.3 Se $A^{-1} \succeq 0$, então a política de corredor induzida por $C(M, \vec{0})$ é fortemente estável.

Demonstração

Isto se deve ao fato que $M^{-1} = V^{-1}A^{-1}$ e $V^{-1} \succeq 0$ (item (iii) do lema 1.1). ■

Isto leva-nos a um resultado trivial de estabilidade forte para corredores “clearing” ($A = I \Rightarrow A^{-1} = I \succeq 0$).

Outro resultado interessante pode ser derivado explorando a poderosa estrutura de $M \in \mathcal{S}$.

Teorema 3.6 Se $M \in \mathcal{S}$ e M é não singular, então

$$M\vec{1} \geq \vec{0} \Rightarrow M^{-1} \succeq 0,$$

ou equivalentemente

$$-\vec{1} \in C(M, \vec{0}) \Rightarrow C(M, \vec{0}) \subseteq \mathbb{R}_-^n.$$

A razão da equivalência é: da hipótese M não singular segue que $M\vec{1} \geq \vec{0}$; dos teoremas 3.1 e 3.2 ($C(M, \vec{0}) \subseteq \mathbb{R}_-^n \Leftrightarrow M$ é fortemente estável), e do teorema A.2 (M é fortemente estável $\Leftrightarrow M^{-1} \succeq 0$) segue que $M^{-1} \succeq 0 \Leftrightarrow C(M, \vec{0}) \subseteq \mathbb{R}_-^n$.

Demonstração Suponhamos, por contradição, que $M\vec{1} \geq \vec{0}^2$ e $M^{-1} \not\succeq 0$. Então, existe $\alpha \leq \vec{0}$ para o qual $M^{-1}\alpha \not\leq \vec{0}$. Colocando $-y^0 = M^{-1}\alpha$, segue que existe $y^0 \in \mathbb{R}^n$, $y^0 \not\leq \vec{0}$ para o qual $My^0 \geq \vec{0}$.

Como em cada linha e coluna de M existe exatamente um elemento estritamente positivo, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $y^0 = (y_1 \cdots y_s \cdots y_r \cdots y_n)^t$, onde

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_s < y_{s+1} \leq y_{s+2} \leq \cdots \leq y_r < 0 \text{ e } y_j \geq 0, \text{ para } j > r. \quad (3.1)$$

Usaremos a notação

²Desde que M é não singular, $M\vec{1} \geq \vec{0}$ implica $M\vec{1} > \vec{0}$.

$$\begin{aligned}
y^- &= (y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_{s-1} \ y_s)^t = y_1 \vec{1} < \vec{0}, \\
\tilde{y}^- &= (y_{s+1} \ y_{s+2} \ \cdots \ y_{r-1} \ y_r)^t < \vec{0}, \\
\text{e} \quad y^+ &= (y_{r+1} \ y_{r+2} \ \cdots \ y_{n-1} \ y_n)^t \geq \vec{0}
\end{aligned}$$

(note que $\tilde{y}^-$ ou y^+ pode ser vazio, mas não y^-).

Consideremos a seguinte decomposição de M ,

$$M = \left[\begin{array}{c|c|c} M_{[1]} & W_{[1]} & N_{[1]} \\ \hline W_{[2]} & M_{[2]} & N_{[2]} \\ \hline W_{[3]} & N_{[3]} & M_{[3]} \end{array} \right]$$

onde $M_{[1]}$, $M_{[2]}$ e $M_{[3]}$ são respectivamente matrizes $(s \times s)$, $((r-s) \times (r-s))$ e $(n-r) \times (n-r)$.

É fácil ver que $M_{[i]} \in \mathcal{S}$, $N_{[i]} \leq \vec{0}$ e $W_{[i]} \leq \vec{0}$ para $1 \leq i \leq 3$.

Denotando $M_{[1]} = [M^1 | \cdots | M^s]^t$, $W_{[1]} = [W^1 | \cdots | W^s]^t$ e $N_{[1]} = [N^1 | \cdots | N^s]^t$ podemos ver que, para todo j , $1 \leq j \leq s$,

$$M^j \vec{1} + W^j \vec{1} + N^j \vec{1} \geq 0, \quad (3.2)$$

$$M^j y^- + W^j \tilde{y}^- + N^j y^+ \geq 0. \quad (3.3)$$

Desde que, $N_{[1]} \leq \vec{0}$ e $y^+ \geq \vec{0}$, da equação (3.3) e da definição de y^- , $\tilde{y}^-$ e $y_1 = \cdots = y_s$, segue que, para todo j , $1 \leq j \leq s$,

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{(3.2)}{\geq} y_j (M^j \vec{1} + W^j \vec{1}) = M^j y^- + y_j W^j \vec{1} \stackrel{(3.1)}{\geq} \\
&\geq M^j y^- + W^j \tilde{y}^- \stackrel{(3.1)}{\geq} M^j y^- + W^j \tilde{y}^- + N^j y^+ \geq 0.
\end{aligned} \quad (3.4)$$

A derivação do resultado será feita em três estágios. No primeiro, mostraremos que $N_{[1]} = \vec{0}$. Então, provaremos que $W_{[1]} = \vec{0}$ e usando estes dois fatos, concluiremos que $\det M_{[1]} = 0$. Isto implica que $\det M = 0$ e isto acarreta uma contradição com a hipótese de que M é não singular, completando a prova do teorema.

(i) ($N_{[1]} = \vec{0}$)

Como $y_1 = y_2 = \cdots = y_s < 0$, das desigualdades (3.4) ($0 \geq y_j (M^j \vec{1} + W^j \vec{1}) \geq 0$) temos que, $M^j \vec{1} + W^j \vec{1} = 0$, para $1 \leq j \leq s$. Isto e a equação (3.2) mostram que $N^j \vec{1} \geq 0$ e desde que $N^j \leq \vec{0}$ obtemos $N^j = \vec{0}$, $j \in \{1, 2, \dots, s\}$, ou seja, $N_{[1]} = \vec{0}$.

(ii) ($W_{[1]} = \vec{0}$)

Das desigualdades 3.4, para $1 \leq j \leq s$, $M^j \vec{1} + W^j \vec{1} = 0$, então $y_1 (M^j \vec{1} + W^j \vec{1}) = 0$, para $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Desde que $y_1 \vec{1} = y^-$ segue que

$$M^j y^- + y_1 W^j \vec{1} = 0, \quad 1 \leq j \leq s. \quad (3.5)$$

Usando novamente a equação (3.4) ($0 \geq M^j y^- + W^j \tilde{y}^- \geq 0$), podemos ver que

$$M^j y^- + W^j \tilde{y}^- = 0.$$

Daí podemos concluir, da equação (3.5) ($M^j y^- = -y_1 W^j \vec{1}$), que

$$W^j(\tilde{y}^- - y_1 \vec{1}) = 0, \quad 1 \leq j \leq s. \quad (3.6)$$

Desde que $W^j \leq \vec{0}$ e pela definição de $\tilde{y}^-$, teremos que

$$\tilde{y}_j^- - y_1 \vec{1} > 0,$$

e a equação (3.6) implica que $W^j = \vec{0}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, isto é, $W_{[1]} = \mathbf{0}$.

(iii) ($\det M_{[1]} = 0$)

Da equação (3.4) $N_{[1]} = \mathbf{0}$ e $W_{[1]} = \mathbf{0}$, podemos ver que $M^j \vec{1} = 0$, para todo $1 \leq j \leq s$. Isto mostra que $M_{[1]} \vec{1} = 0$ e portanto assegura que $M_{[1]}$ é singular.

Considerando a decomposição acima de M em nove blocos e que $N_{[1]} = \mathbf{0}$, $W_{[1]} = \mathbf{0}$ e $M_{[1]}$ é singular, teríamos M singular, produzindo uma contradição, o que completa a prova. ■

Uma observação interessante é destacada a seguir.

Observação 3.2.1 *No mesmo espírito da visualização de estabilidade da política induzida por $C(M, \vec{0})$ como a convergência do método de Gauss-Seidel para $My = \vec{0}$, a condição $M \in \mathcal{S}$ e $M\vec{1} \geq \vec{0}$, é o critério da dominância diagonal, pois como $M \in \mathcal{S}$,*

$$\{M_{ij} > 0 \Leftrightarrow i = j\},$$

portanto

$$M\vec{1} \geq \vec{0} \Rightarrow M_{ii} \geq \sum_{j \neq i} M_{ij}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

O teorema anterior é uma versão fraca do seguinte

Teorema 3.7 *Dado uma matriz não singular M , $M \in \mathcal{S}$, então*

$$\{\exists q > \vec{0} : Mq \geq \vec{0} \text{ ou } \exists q \geq \vec{0} : Mq > \vec{0}\} \Leftrightarrow M^{-1} \succeq \mathbf{0},$$

ou equivalentemente

$$\{\exists -q \in C(M, \vec{0}) \cap \mathbb{R}_-^n : -q \in \overset{\circ}{C}(M, \vec{0}) \text{ ou } -q \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}_-^n\} \Leftrightarrow C(M, \vec{0}) \subseteq \mathbb{R}_-^n.$$

A equivalência acima segue do corolário 3.1 ($C(M, \vec{0}) \subseteq \mathbb{R}_-^n \Leftrightarrow M \succeq 0$) e do teorema 3.5 (o sistema homogêneo é fortemente estável $\Leftrightarrow M^{-1} \succeq 0$).

Demonstração

($\Rightarrow$) Se existe $q^1 \geq \vec{0} : Mq^1 > \vec{0}$, por continuidade existe um q para o qual

$$q > \vec{0} \text{ e } Mq > \vec{0},$$

e assim, basta considerarmos que as hipóteses do teorema implicam na existência de $q > \vec{0} : Mq \geq \vec{0}$.

Definindo $Q = \text{diag}(q)$, i.e., $Q_{ij} = q_i \delta_{ij}$ e $N = MQ$, teremos

- (i) $N\vec{1} = MQ\vec{1} = Mq \geq \vec{0}$;
- (ii) $N \in \mathcal{S}$;
- (iii) $N^{-1} = Q^{-1}M^{-1}$ or $M^{-1} = QN^{-1}$.

Pelo teorema 3.6, estes itens implicam que, $N^{-1} \succeq 0$ e, como $Q \succeq 0$, segue que $M^{-1} \succeq 0$.

($\Leftarrow$) Dado que $M^{-1} \succeq 0$, tomemos

$$q = M^{-1}\vec{1}.$$

Como $M^{-1} \succeq 0$ e M^{-1} é não singular,

$$q \geq \vec{0}$$

$$\text{e } Mq = MM^{-1}\vec{1} = \vec{1} > \vec{0}.$$

■

Devemos notar que, para hipercones,

$$\{\exists q \neq \vec{0} : -q \in C(M, \vec{0}) \cap \mathbb{R}_-^n\} \Leftrightarrow \{\exists q \geq \vec{0} : Mq \geq \vec{0}\} \not\Leftrightarrow \{M^{-1} \succeq 0\}.$$

Isto pode ser visto pelo seguinte exemplo

Exemplo 3.2.3 Para $M = \begin{bmatrix} 1 & -10 & -0.1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ -0.1 & -10 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{\rho} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -10 \\ 1 \end{bmatrix}$,

temos $M \in \mathcal{S}$, $\det M = -98.01 \neq 0$, $\vec{\rho} \geq \vec{0}$, $M\vec{\rho} \geq \vec{0}$ e $My < \vec{0}$, porém $y \notin \mathbb{R}_-^4$, logo

$$C(M, \vec{0}) \not\subseteq \mathbb{R}_-^4.$$

3.2.2 Realização sobre M fortemente estável

Um dos principais aspectos de nossos resultados é que a estabilidade pode ser obtida considerando-se somente o estudo da matriz M , e, deste modo, estabilidade é parcialmente independente dos dados originais.

A classe das matrizes fortemente estáveis ($M \in \mathcal{S}$ e $M^{-1} \succeq 0$) é grande, contendo, por exemplo, todas as matrizes triangulares inferiores com elementos positivos apenas na diagonal principal, pois mostramos no teorema 2.1 (página 33), que estas matrizes são não singulares e que suas inversas são, também, matrizes do tipo triangular inferior, sem entradas negativas e com diagonais principais positivas.

Além disto, dada uma matriz genérica M , $M \in \mathcal{S}$, testar se $M^{-1} \succeq 0$ é uma tarefa computacionalmente simples.

Para matrizes M fortemente estáveis, podemos afirmar que

Corolário 3.4 *Dado uma matriz fortemente estável M e qualquer sistema (d, τ) , para o qual $\tau^t d < 1$, a matriz A_M , definida por*

$$A_M = MV^{-1} = (1 - \rho)^{-1} \left[(1 - \rho)M + M[\vec{\rho} | \vec{\rho} | \cdots | \vec{\rho}] \right] \tau_M$$

induz em uma sequência de produção “round-robin” fortemente estável.

Demonstração Direto do fato de y^k ser fortemente estável e de que $y^k = V^{-1}x^k$. ■

Denominando qualquer sistema, como no corolário acima (3.4), uma *realização de M* , podemos expressar uma nova caracterização de estabilidade sobre M ,

Teorema 3.8 *Dado uma matriz não singular M , $M \in \mathcal{S}$,*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{existe uma realização de } M \text{ tal que} \\ Ad > \vec{0}, \text{ com } d \geq \vec{0} \\ \text{ou } Ad \geq \vec{0} \text{ com } d > \vec{0} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C(M, \vec{0}) \text{ induz uma sequência} \\ \text{“round-robin” fortemente estável, i.e.,} \\ M^{-1} \succeq 0 \end{array} \right\}.$$

Demonstração

($\Rightarrow$) Como $d \geq \vec{0}$ implica que $(1 - \rho)^{-1} \vec{\rho} = V^{-1}d \geq \vec{0}$ (item (iii) do corolário 1.1), e

$$(1 - \rho)^{-1} M \vec{\rho} = Ad > \vec{0},$$

aplicando o teorema 3.7, o resultado segue.

($\Leftarrow$) Pelo teorema 3.7, $M^{-1} \succeq 0$ implica que

$$\exists q \geq \vec{0} \text{ tal que } Mq > \vec{0}$$

Seja $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_n = \left((n+1) \|q\|_\infty \right)^{-1}$ e $d = q$.

Por construção, $d^t \tau \leq n(n+1)^{-1} < 1$.

Usando o corolário 3.4 e o teorema 3.7, segue o resultado. ■

Considerações Finais

Neste trabalho formalizamos uma definição de estabilidade – um hipercone $C(M, b)$ induz uma sequência fortemente estável se, e somente se, para todo $y^0 \in C(M, b)$, a sequência $\{y_i^k\}_i, \forall i$, convergem para um único ponto – aparentemente menos restritiva que a implicitamente assumida por SCG-91 – convergência para o vértice do hipercone, quando “set ups” nulos – e no entanto mostramos serem, para “set ups” nulos, equivalentes.

Fortalecemos um resultado proposto por SCG-91 que dizia, se um sistema homogêneo, $(d, \tau, \vec{0})$ operado por $C(M, \vec{0})$ é fortemente estável, então o sistema $(d, \tau, \vec{s})$ operado por $C(M, b)$ é fortemente estável. O resultado que mostramos é que, na verdade, estes dois sistemas são equivalentes quanto à estabilidade forte. Para obtermos esta equivalência tivemos que conseguir vários resultados relativos às formas das dinâmicas dos vetores de estado do sistema e de tempos de produção. Por exemplo, refinamos outro resultado apresentado por SCG-91 a respeito da dinâmica do vetor de estado, onde mostravam que, para um sistema operado por $C(M, b)$, $M \in \mathcal{S}$, $y^{k+1} = By^k + Cs + Db$. Além disto, mostramos que $B = J$ e $D = L^{-1}$, sendo $J = -L^{-1}U$, L e U respectivamente a triangular inferior e triangular estritamente superior de M .

Nesta linha, ainda mostramos que este processo está relacionado com o método iterativo de Gauss-Seidel para resolução de sistemas lineares,

$$My = b \Leftrightarrow (L + U)y = b \Leftrightarrow Ly = -Uy + b \Leftrightarrow y = -L^{-1}Uy + L^{-1}b \Leftrightarrow y = Jy + L^{-1},$$

além do que na subseção 3.2.1, mostramos que, se M satisfaz o critério da dominância diagonal o sistema é fortemente estável.

Ainda podemos destacar os últimos resultados do capítulo anterior, que são um fortalecimento do resultado apresentado em SCG-91, no sentido de que, para cada M , para garantir estabilidade de um sistema é necessário que $Ad > \vec{0}$ com $d \geq \vec{0}$ ou $Ad \geq \vec{0}$ com $d > \vec{0}$, sendo este o resultado mais forte que pode ser obtido, uma vez que mostramos que impor $Ad \geq 0$ ou mesmo $Ad \geq 0$ não é suficiente para garantir estabilidade.

Mais importante é que, para um dado sistema físico, encontrar uma única M fortemente estável é suficiente, desde que mostramos que o tempo de convergência do sistema depende apenas do ponto inicial, ou seja, é invariante em relação ao volume dos hipercones.

Notações

- ▷ $\vec{1}$ é o vetor com todos os componentes iguais a um.
- ▷ $\vec{0}$ é o vetor com todos os componentes iguais a zero.
- ▷ $\mathbf{0}$ é a matriz, cujos elementos são todos iguais a zero.
- ▷ $x \leq y$ ($x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^n$), se todos os componentes de x forem menores ou iguais aos correspondentes de y , análogo para $x \geq y$;
- ▷ $x \leq y$, se todos os componentes de x forem menores ou iguais aos correspondentes de y , sendo que $x \neq y$, análogo para $x < y$; *a mesma coisa! Não seria $>$?*
- ▷ $A \succeq B$ ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$), se todos os componentes de A forem maiores ou iguais aos correspondentes de B ;
- ▷ A^i ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$) é a *i*-ésima coluna da matriz A ;
- ▷ A_i ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$) é a *i*-ésima linha da matriz A ;
- ▷ $L + U = M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, L é a triangular inferior e U a triangular estritamente superior de M ;
- ▷ $C(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq \vec{0}\}$;
- ▷ $C(M, b) = \{y \in \mathbb{R}^n : My \leq \vec{0}\}$;
- ▷ $y_i^k \in \mathbb{R}^n$, a *k*-ésima interseção do vetor de estado com a face i ;
- ▷ $y^k = y_n^k$, para $k > 0$;
- ▷ $y_n^0 = y^0$;
- ▷ $z^k = p^t y^k$, para algum $p > \vec{0}$, é a carga ponderada do sistema;
- ▷ $\Delta_i^k \in \mathbb{R}$, a duração da *k*-ésima produção de i ;
- ▷ $\Delta^k = (\Delta_1^k, \Delta_2^k, \Delta_n^k)^t$, $k \geq 0$;

- ▷ $t^{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=1}^n \Delta_j^k = t^k + \sum_{j=1}^n \Delta_j^k$, o tempo até a rodada $k + 1$;
 - ▷ $d \geq \vec{0}$ é o vetor de demanda por produtos;
 - ▷ $\tau > \vec{0}$ é o vetor dos tempos de produção;
 - ▷ $\rho_i = d_i \tau_i$ é a taxa de congestionamento do produto i ;
 - ▷ $\rho = d^t \tau$ é a taxa de congestionamento da máquina;
-
- ▷ $\vec{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)^t$;
 - ▷ $\delta_{ij} = \{1, \text{ se } i = j; 0, \text{ se } i \neq j\}$;
 - ▷ $\tau_M = \delta_{ij} \tau_i$;
 - ▷ $\bar{s}_i$ o tempo de “set up” necessário para iniciar a produção de i ;
 - ▷ $s_i = \frac{\bar{s}_i}{1-\rho} \quad (V^{-1}d = \frac{1}{1-\rho} \vec{\rho})$.
 - ▷ $\Sigma_s = \sum_{i=1}^n \bar{s}_i$.

Apêndice A

Caracterização Alternativa para Estabilidade Forte

Neste apêndice, apresentaremos uma caracterização para a estabilidade forte de sistemas homogêneos, com $M \in \mathcal{S}$ não singular, alternativa à apresentada na seção 3.2. Cronologicamente, em nosso trabalho, esta forma de caracterização é anterior àquela apresentada na seção 3.2, porém optamos por apresentar aquela no corpo principal do texto, por ser a mesma mais concisa.

Mantivemos a apresentação desta caracterização, por ela apresentar alguns resultados interessantes, em particular, por permitir a derivação de um teorema de alternativas (teorema A.1).

Implicitamente SCG-91 trabalharam com a seguinte condição de estabilidade,

$$\{[My \leq \vec{0}, (1 \ 1 \cdots 1)y \geq 0] \Rightarrow y = \vec{0}\},$$

que é um caso particular da condição mais geral

$$\{\exists p > \vec{0} : My \leq \vec{0} \Rightarrow p^t y \leq 0\},$$

pois se o primeiro sistema vale, tomando $p = \vec{1}$, o segundo sistema também é válido.*

Para estudar estas condições diremos que, para todo vetor $q \in \mathbb{R}^n$,

Definição 13 H_q vale $\Leftrightarrow \langle My \leq \vec{0}, q^t y \geq 0 \Rightarrow y = \vec{0} \rangle$.

Outra definição que nos será útil é

Definição 14 $\mathcal{H}$ vale $\Leftrightarrow \langle \forall p > \vec{0}, H_p \text{ vale} \rangle$.

* invertendo-se a desigualdade final, pois não?

Podemos observar que estas classes estão relacionadas com a estabilidade do sistema homogêneo, pois, para $p > \vec{0}$, dizer que H_p vale implica que

$$\{My \leq \vec{0} \Rightarrow p^t y \leq 0\}$$

vale. Por outro lado,

$$\{My \leq \vec{0} \Rightarrow p^t y \leq 0\} \Leftrightarrow \sup\{p^t y / My \leq \vec{0}\} \neq +\infty,$$

pois $C(M, \vec{0}) = \{y : My \leq \vec{0}\}$ é um cone. Deste modo, se impusermos que $M \in S$ e M não singular, do lema 3.2 e do teorema 3.2, segue que o sistema é fortemente estável.

Vale observar que

$$\{My \leq \vec{0} \Rightarrow p^t y \leq 0\} \not\equiv \{H_p \text{ vale}\},$$

pois, basta existir $\bar{y} \neq \vec{0}$, para o qual $M\bar{y} \leq \vec{0}$ e $p^t \bar{y} = 0$.

Para obtermos alguns resultados de estabilidade forte usando as definições das classes acima, apresentaremos um interessante teorema de alternativas.

Teorema A.1 *Qualquer que seja $q \in \mathbb{R}^n$, H_q vale, i.e.,*

$$\{My \leq \vec{0}, q^t y \geq 0\} \Rightarrow y = \vec{0}$$

se, e somente se,

$$\mathbb{R}^n \equiv \text{cone gerado por } \{q, -M_1^t, -M_2^t, \dots, -M_n^t\}.$$

Demonstração H_q vale se, e somente se, para todo vetor $b \in \mathbb{R}^n$, o programa linear

$$\begin{array}{ll} \min & b^t y \\ & -My \geq \vec{0} \\ & q^t y \geq 0 \end{array}$$

tem valor ótimo igual a zero. Assim, pelo teorema forte de dualidade em Programação Linear, H_q vale se, e somente se, $\forall b \in \mathbb{R}^n$, o programa linear

$$\begin{array}{ll} \max & (0 \ 0 \dots 0)\alpha + 0\alpha_0 \\ & -M^t \alpha + \alpha_0 q = b \\ & \alpha \geq \vec{0} \quad \alpha_0 \geq 0 \end{array}$$

é viável, i.e., H_q vale se, e somente se, $\forall b \in \mathbb{R}^n$,

$$\exists(\alpha_0, \alpha) \geq \vec{0} : \alpha_0 q - \sum_{i=1}^n \alpha_i M_i^t = b,$$

completando a demonstração. ■

O teorema acima pode ser enunciado na forma característica dos teoremas de alternativas como segue

Corolário A.1 Para quaisquer $M \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, $q \in \mathbb{R}^{n_2}$ e $b \in \mathbb{R}^{n_2}$

$$\left. \begin{array}{l} I \quad b^t y < 0 \\ \begin{bmatrix} -M \\ q^t \end{bmatrix} y \geq \vec{0} \\ \text{tem solução } y \in \mathbb{R}^{n_2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} II \\ -M^t \alpha + \alpha_0 q = b \\ \alpha \geq \vec{0}, \alpha_0 \geq 0 \\ \text{não tem solução } \alpha \in \mathbb{R}^{n_1}, \alpha_0 \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Demonstração A equivalência entre dois sistemas segue diretamente da prova do teorema A.1. ■

Usando estes resultados podemos mostrar que

Lema A.1 Se $M \in \mathcal{S}$ e para algum vetor $q > \vec{0}$, H_q vale, então

- i) M é não singular;
- ii) O sistema é homogêneo e fortemente estável;
- iii) $\forall p > 0$, H_p vale, ou seja, $\mathcal{H}$ vale.

Demonstração

- i) Como $\mathbb{R}^n$ coincide com o hipercone gerado por q e pelas linhas da matriz M , as linhas de M devem ser linearmente independentes, desde que um vetor e um hiperplano não podem gerar um hipercone que cobre o espaço. ◀
- ii) Usando (i) e o corolário 3.2, segue este item. ◀
- iii) Suponhamos que $\exists p > \vec{0}$, tal que H_p não vale. Então $\exists \bar{y} \neq \vec{0} : p^t \bar{y} > 0$
Usando o lema 3.1, a sequência $z^k = p^t y^k$ com $y^0 = \bar{y}$ é não decrescente e por (ii) acima (estabilidade), $\{z^k\} \rightarrow \vec{0}$. Isto implica que para todo k ,
 $p^t \Delta^k = 0$ e $\Delta^k = \vec{0} \Rightarrow M \bar{y} = \vec{0} \Rightarrow \bar{y} = \vec{0}$, já que M é não singular. ■

Vale observar, em função deste lema, que para a matriz M do exemplo 3.2.2 (página 68), que é um exemplo de hipercone $C(M, \vec{0})$ (com $M \in \mathcal{S}$ não singular) que não leva à estabilidade forte, não existe $q > \vec{0}$ para o qual H_q vale, i.e.,

$$\nexists q > \vec{0} : My \leq \vec{0} \Rightarrow q^t y \leq 0,$$

pois, se existisse tal $q > \vec{0}$, então o sistema

$$\{My \leq \vec{0}, q^t y > 0\}$$

não teria solução e pelo teorema de Farkas (3.4)

$$\{M^t z = q > 0, z \geq \vec{0}\}$$

teria solução, isto é, teríamos

$$z = (M^t)^{-1} q = \frac{1}{22}(19q_1 - 3q_2 - 11q_3, -q_1 - q_2 - 11q_3, -2q_1 - 2q_2)^t \geq \vec{0}, \text{ com } q > \vec{0},$$

que obviamente não é possível, basta observarmos as últimas duas componentes de z .

Neste ponto é interessante ressaltarmos que,

Corolário A.2 *Seja $M \in \mathcal{S}$*

$$\left\{ \exists q > \vec{0} : H_q \text{ vale} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \mathcal{H} \equiv \{ \forall p > \vec{0}, H_p \text{ vale} \} \right\}.$$

Demonstração

($\Rightarrow$) Segue do item (iii) do lema A.1.

($\Leftarrow$) Direto. ■

Este resultado é aparentemente não intuitivo, no sentido que, se existe um conjunto de pesos positivos para a carga de trabalho que nos permite garantir estabilidade, então qualquer conjunto de pesos positivos levará à estabilidade. No entanto, no contexto da seção 3.1, o resultado tem uma interpretação geométrica intuitiva, que, resumidamente diz que estabilidade forte equivale à: qualquer hiperplano gerado por $p \in \mathbb{R}_{++}^n$, $\{p^t y = 0 : y \in \mathbb{R}^n\}$, separa o hipercone $C(M, \vec{0})$ de $\mathbb{R}_+^n$.

Podemos formalizar esta intuição no seguinte lema,

Lema A.2 *Dado $M \in \mathcal{S}$, $\mathcal{H}$ vale $\Leftrightarrow C(M, \vec{0})$ induz estabilidade forte.*

Demonstração

($\Rightarrow$) Usando os teoremas 3.1 e 3.2 ($C(M, \vec{0})$ induz estabilidade $\Leftrightarrow C(M, \vec{0}) \in \mathbb{R}_-^n$), suponhamos por absurdo, existirem $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ e $\bar{y} \in C(M, \vec{0})$, para os quais $\bar{y}_i > 0$. Neste caso, tomando $p = \epsilon(e^1 + e^2 + \dots + e^{i-1} + e^{i+1} + \dots + e^n) + e^i$, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, teríamos $p^t \bar{y} > 0$ e $\bar{y} \neq \vec{0}$, encerrando uma contradição.

($\Leftarrow$) Para todo $y \in C(M, \vec{0})$, dos teoremas 3.1 e 3.2, segue que $y \in \mathbb{R}_-^n$. Deste modo, $\forall q > \vec{0}$, teremos $q^t y \leq 0$, logo H_q vale. Portanto vale $\mathcal{H}$. ■

Dos resultados precedentes podemos expressar a caracterização da seção 3.2, utilizando a classe $\mathcal{H}$, como segue,

Teorema A.2 Para $M \in \mathcal{S}$, o sistema homogêneo é fortemente estável $\Leftrightarrow M^{-1} \succeq 0$ (ou equivalentemente $\mathcal{H}$ vale $\Leftrightarrow M^{-1} \succeq 0$).

Demonstração O lema anterior, A.2, garante que $\mathcal{H}$ vale $\Leftrightarrow C(M, \vec{0})$ induz estabilidade. Assim, para provarmos que $M^{-1} \succeq 0$ é uma condição necessária e suficiente de estabilidade, basta demonstrarmos que

$$\mathcal{H} \text{ vale} \Leftrightarrow M^{-1} \succeq 0.$$

($\Rightarrow$) Se $\mathcal{H}$ vale, então, pelo teorema A.1

$$\forall (p, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : p > \vec{0},$$

$$\exists (\alpha, \alpha_0) \geq \vec{0} : b = \alpha_0 p - M^t \alpha.$$

Como M é não singular, isto equivale a dizer que

$$\forall (p, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : p > \vec{0}$$

$$\exists (\alpha, \alpha_0) \geq \vec{0} : w = \alpha_0 (M^{-1})^t p - \alpha.$$

Tomando $w = \vec{1}^t$ e o correspondente $(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}_0) \geq \vec{0}$,

$$\bar{\alpha}_0 (M^{-1})^t p \geq \bar{\alpha}_0 (M^{-1})^t p - \bar{\alpha} = \vec{1}^t > \vec{0}.$$

Deste modo, como $\bar{\alpha}_0 \geq 0$, $(M^{-1})^t p > \vec{0}$ para todo $p > \vec{0}$.

Tomando $p = \epsilon \vec{1} + e^i$, com $\epsilon > 0$, segue trivialmente que

$$(M^{-1})^t e^i \geq \vec{0}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

assim

$$M^{-1} \succeq 0.$$

($\Leftarrow$) Se $M^{-1} \succeq 0$, então

$\forall p > \vec{0}$, $(M^{-1})^t p > 0$, caso contrário $(M^{-1})^t$ conteria uma linha com zeros e, portanto, seria singular.

Assim, dado qualquer $b \in \mathbb{R}^n$, $\exists \alpha_0 \geq 0$ tal que

$$\alpha_0 (M^{-1})^t p \geq (M^{-1})^t b,$$

i.e., $\exists \alpha \geq \vec{0}$, para o qual $\alpha_0 (M^{-1})^t p - \alpha = (M^{-1})^t b$, ou equivalentemente

$$\forall b \in \mathbb{R}^n, \exists (\alpha_0, \alpha) \geq \vec{0} : \alpha_0 p - M^t \alpha = b,$$

assim o hipercone gerado por q e pelas linhas de M cobrem o $\mathbb{R}^n$ e usando o teorema A.1 H_p vale. Portanto do corolário A.2 ($\forall p > \vec{0}$, $H_p \Leftrightarrow \mathcal{H}$) segue que vale $\mathcal{H}$. ■

Apêndice B

Demonstração do Teorema 1.2

Lema B.1 Para $n = 2$ o sistema 1.6 não tem solução $(y, h) \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Demonstração Sendo $n = 2$, tomemos $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{S}$. Deste modo $\det M = ad - bc$.

Se existe $y : My < \vec{0}$, então

$$\begin{aligned} ay_1 + by_2 &< 0 \\ cy_1 + dy_2 &< 0. \end{aligned}$$

De $M \in \mathcal{S}$, $d > \vec{0}$, $b \leq \vec{0}$ e $y_2 < -\frac{c}{d}y_1$, segue que

$$by_2 \geq -\frac{bc}{d}y_1$$

logo

$$ay_1 + by_2 \geq ay_1 - \frac{bc}{d}y_1 = \frac{(ad - bc)}{d}y_1 = \frac{\det M}{d}y_1.$$

Portanto, para que o sistema 1.6 tenha solução, $\det M = 0$ e da última desigualdade $ay_1 + by_2 \geq 0$, uma contradição com a primeira desigualdade de $My < \vec{0}$. ■

Lema B.2 Para $n = 3$ o sistema 1.6 não tem solução $(y, h) \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Demonstração Sem perda de generalidade, tomemos $M = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ c & 1 & d \\ e & f & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{S}$. Faremos a

prova por contradição: supondo que para a matriz M acima o sistema 1.6 tenha solução, inicialmente demonstraremos que $-ac - be - df \leq -3$, e a seguir extrairemos uma contradição.

Sendo $h \neq \vec{0} : Mh = \vec{0}$, segue que $\det M = 1 + ade + bcf - ac - be - df = 0$, daí

$$df = 1 + ade + bcf - ac - be, \quad (\text{B.1})$$

$$be = 1 + ade + bcf - ac - df, \quad (\text{B.2})$$

$$ac = 1 + ade + bcf - be - df. \quad (\text{B.3})$$

De $My < \vec{0}$, seguem as desigualdades

$$y_1 < -ay_2 - by_3, \quad (B.4)$$

$$y_2 < -cy_1 - dy_3, \quad (B.5)$$

$$y_3 < -ey_1 - fy_2. \quad (B.6)$$

Usando as desigualdades acima provaremos que: (i) $df \geq 1$; (ii) $be \geq 1$; e (iii) $ac \geq 1$.

(i) Usando $(a \leq 0 \wedge (B.5))$ e $(b \leq 0 \wedge (B.6))$, segue a primeira das desigualdades abaixo

$$\begin{aligned} y_1 + ay_2 + by_3 &\geq y_1 - acy_1 - ady_3 - bey_1 - bfy_2 = \\ &\quad (B.5) \wedge (B.6) \\ &= (1 - ac - be)y_1 - bfy_2 - ady_3 \geq \\ &\geq (1 - ac - be)y_1 + bcfy_1 + bdfy_3 + adey_1 + adfy_3 = \\ &= (1 - ac - be + bcf + ade)y_1 + adfy_2 + bdfy_3 \stackrel{\det M=0}{=} \\ &= dfy_1 + adfy_2 + bdfy_3 = df(y_1 + ay_2 + by_3), \end{aligned}$$

e como $y_1 + ay_2 + by_3 < 0$ por hipótese, segue que

$$df \geq 1. \quad (B.7)$$

(ii) Usando $(c \leq 0 \wedge (B.4))$ e $(d \leq 0 \wedge (B.6))$,

$$\begin{aligned} cy_1 + y_2 + dy_3 &\geq -acy_2 - bcy_3 + y_2 - dey_1 - dfy_2 = \\ &\quad (B.4) \wedge (B.6) \\ &= -dey_1 + (1 - ac - df)y_2 - bcy_3 \geq \\ &\geq adey_2 + bdey_3 + (1 - ac - df)y_2 + bcey_1 + bcfy_2 = \\ &= bcey_1 + (1 - ac - df + ade + bcf)y_2 + bdey_3 \stackrel{\det M=0}{=} \\ &= be(cy_1 + y_2 + dy_3), \end{aligned}$$

e como $cy_1 + y_2 + dy_3 < 0$ por hipótese, segue que

$$be \geq 1. \quad (B.8)$$

(iii) Usando $(e \leq 0 \wedge (B.4))$ e $(f \leq 0 \wedge (B.5))$,

$$\begin{aligned} ey_1 + fy_2 + y_3 &\geq -aey_2 - bey_3 - cfy_1 - dfy_3 + y_3 = \\ &\quad (B.4) \wedge (B.5) \\ &= -cfy_1 - aey_2 + (1 - be - df)y_3 \geq \\ &\geq acfy_2 + bcfy_3 + acey_1 + adey_3 + (1 - be - df)y_3 \stackrel{\det M=0}{=} \\ &= acey_1 + acfy_2 + (1 - be - df + bcf + ade)y_3 = ac(ey_1 + fy_2 + y_3), \end{aligned}$$

e como $ey_1 + fy_2 + y_3 < 0$, segue que

$$ac \geq 1. \quad (B.9)$$

Agora, usando $\det M = 0$ e as desigualdades B.7, B.8 e B.9,

$$0 = 1 - ac - be - df + ade + bcf \leq ade + bcf - 2 \stackrel{M \in S}{<} 0$$

encerrando uma contradição. ■

Referências

- D-63 Dantzig, G., 1963. *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- M-69 Mangasarian, O.L., 1969. *Nonlinear Programming*. McGraw-Hill Book Company, USA.
- PI-77 S. S. Panwalker e W. Iskander, 1977 *A survey of scheduling rules*, Operations Research, 25(1): 45-61, janeiro-fev.
- KG-83 J.Kimania e S.B.Gershwin, 1983. *An Algorithm for the Computer Control of Flexible Manufacturing Systems*, IIE Transactions, Vol.15, No.4, 353-362, dezembro.
- GAC-85 S.B.Gershwin, R.Akella e Y.F.Choong, 1985 *Short-term Production Scheduling of an Automated Manufacturing Facility*, IBM J. Res. Development, Vol. 29, No.4, julho.
- MG-88 Oded Z. Maimon e Stanley B. Gershwin, 1988. *Dynamical Scheduling and Routing for Flexible Manufacturing Systems that have Unreliable Machines*, Operations Research, vol. 36, No.2, Março-abril.
- CR-89 Chase, C. and Ramdage, P.J. 1989. *On real time scheduling policies for flexible manufacturing policies for flexible manufacturing systems*. Preprint. Department of Electrical Engineering, Princeton University, Princeton, New Jersey.
- PK-89 J. Perkins e P. R. Kumar, 1989. *Stable, distributed, real-time scheduling of flexible manufacturing/assembly/disassembly systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 34, pp 139-148, fev.
- AMG-90 R. Akella, O.Maimon e S.B.Gershwin, 1990. *Value Function Approximation via Linear Programming for FMS Scheduling*, Int. J. Prod. Res., Vol.28, No.8, 1459-1470.
- H-94 C. Humes Jr., 1994. *A regulator stabilization schema: Kumar-Seidman revisited*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 39, No. 1, pp. 191-196, janeiro.

- KS-90 P. R. Kumar e T. I. Seidman, 1990. *Dynamic instabilities and stabilization methods in distributed real-time scheduling of manufacturing systems*. In Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control, pp 2028-2031, Tampa, Florida, 1989. IEEE Trans. on Automatic Control, 35:289-298 de 1990.
- LK-91 S. H. Lu e P. R. Kumar, 1991. *Distributed scheduling based on due dates and buffer priorities*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 36, pp. 1406-1416, dezembro.
-
- P-90 J. Perkins, 1990. *Stable, real-time scheduling of a single machine manufacturing systems*. Master's thesis, University of Illinois, Urbana.
- K-91 P. R. Kumar, 1991. *Re-entrant Lines*, relatório técnico do "Electrical and Computer Engineering", e "Coordinated Science Laboratory", da Universidade de Illinois, Champaign-Urbana.
- SCG-91 A. Sharifnia, M. Caramanis e S. Gershwin, 1991. *Dynamical setup scheduling and Flow control in Manufacturing Systems*. Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Applications, 1:149-175.
- PHK-92 J. Perkins, C. Humes Jr. e P. R. Kumar, 1992. *Distributed control of flexible manufacturing systems: stability and performance*. Submitted to publication.
- HBG-93 C. Humes Jr., L.O. Brandão e M.P. Garcia, 1993. *A Mixed Dynamics Approach for Linear Corridor Policies (A Revisitation of Dynamic Setup Scheduling and Flow Control in Manufacturing Systems)*, RT-MAC 9304. A aparecer em "Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Applications".
- HH-93 C. Humes Jr. e A.F.P.C. Humes, 1993. *Clearing Open-loop Policies*, Computacional and Applied Mathematic, Birkhauser.
- S-93 Thomas I. Seidman, 1993. *First Come First Served is unstable!*, Department of Mathematic and Statistics da University of Maryland Baltimore County, pre-print, fevereiro.