Novas estruturas de interconexão à base de
barramentos e algoritmos de comunicação:
Uma contribuição à computação
maciçamente paralela.

Alfredo Goldman vel Lejbman

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA APLICADA

Área de Concentração: **Ciência da Computação**
Orientador: **Prof. Dr. Siang Wun Song**

*Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu
apoio financeiro da CAPES e FAPESP (proc.92/3991-0).*

-São Paulo, Março de 1994-

Novas estruturas de interconexão à base de
barramentos e algoritmos de comunicação:
Uma contribuição à computação
maciçamente paralela.

Alfredo Goldman vel Lejbman

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA APLICADA

Área de Concentração: **Ciência da Computação**
Orientador: **Prof. Dr. Siang Wun Song**

*Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu
apoio financeiro da CAPES e FAPESP (proc.92/3991-0).*

-São Paulo, Março de 1994-

Aos meus pais Dawid e Cléa

**Novas estruturas de interconexão à base de barramentos
e algoritmos de comunicação:
Uma contribuição à computação maciçamente paralela.**

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e defendida por Alfredo Goldman vel Lejbman
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 30 de março de 1994.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Siang Wun Song (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. José Augusto Ramos Soares - IME-USP
- Prof. Dr. Edson Norberto Cáceres - UFMS

Resumo

Em sistemas multiprocessadores MIMD de memória distribuída, processadores são ligados por uma rede de interconexão ponto-a-ponto, usualmente modelada por um grafo onde processadores são vértices do grafo e canais de comunicação são as arestas. Como a comunicação inter-processador constitui-se freqüentemente em sérios gargalos, diversas arquiteturas foram propostas que adicionam à topologia ponto-a-ponto um sistema de barramentos múltiplos. Neste trabalho mostramos o interesse de arquiteturas paralelas, onde comunicações se realizam somente por barramentos. Para isto estudamos algumas topologias ponto-a-ponto, e sua modelagem por grafos. Vemos também com algum detalhe algoritmos de comunicação global. Estudamos alguns trabalhos anteriores onde foram utilizados barramentos. Vamos propor generalizações do anel, grade, etc, que são as versões baseadas em barramentos das correspondentes redes ponto-a-ponto. Mostramos como usar conceitos de hipergrafos para modelar a comunicação entre processadores em tais redes de interconexão e damos algoritmos eficientes para as operações de difusão (*broadcast*) e troca completa (*gossiping*). Desenvolvemos uma nova ferramenta chamada *simplificação*. A idéia é construir um grafo, chamado *grafo simplificado*, da topologia original de hipergrafo, de tal modo que ficará fácil descrever e realizar esquemas de comunicação. O conceito de simplificação nos permitirá utilizar algoritmos conhecidos para redes usuais, sem barramentos.

Abstract

In most distributed memory MIMD multiprocessors, processors are connected by a point-to-point interconnection network, usually modeled by a graph where processors are nodes and communication links are edges. Since interprocessor communication frequently constitutes serious bottlenecks, several architectures were proposed that enhance point-to-point topologies with the help of multiple bus systems. In this work we demonstrate the interest of parallel architectures where the communication means are constituted *solely* by busses. We study some point-to-point topologies, and their modeling by graphs. We also study algorithms for global communication and some previous works that use busses. We propose generalizations of the ring, grid, etc, which are the bus-based versions of the well used point-to-point linear and grid interconnection networks. We show how to use hypergraph concepts in order to model inter-processor communication in such networks and we give efficient algorithms for broadcast and gossiping. We developed a new tool called *simplification*. The idea is to construct a graph, to be called *simplified graph*, from the original topology, so that it will become easy to describe and perform communication schemes. The simplification concept also allows us to use some already known communication algorithms for usual networks.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. **Siang Wun Song** pela orientação, acompanhamento, incentivo e dedicação.

Ao Prof. Dr. **Afonso Ferreira**, pela orientação inicial e conversas que ajudaram em muito a elaboração deste trabalho.

À **Ana Paula Felipe** pelo incentivo e compreensão. Por estar ao meu lado em todos os momentos em que precisei.

À minha amiga **Andréa Zisman**, pelo acompanhamento e principalmente pela torcida durante a elaboração do trabalho.

Aos membros da banca examinadora por suas sugestões e correções.

À **Adenilza, Edna, Edna Torres, Gislaine e Airton** por estarem por perto sempre que se fez necessário.

Aos **funcionários e professores** do Instituto, especialmente ao pessoal da CPG, pelo apoio em todos os momentos necessários.

Aos **amigos** que direta e indiretamente ajudaram e incentivaram na elaboração deste trabalho.

Obrigado por tudo!

Conteúdo

1	Introdução	7
1.1	Conceito de processamento paralelo	7
1.2	Arquiteturas paralelas	7
1.2.1	Arquiteturas SIMD	8
1.2.2	Arquiteturas MIMD	9
1.3	Apresentação do trabalho	11
2	Comunicação em algumas estruturas de interconexão	14
2.1	Introdução	14
2.2	Estruturas de interconexão	14
2.2.1	Caminho	15
2.2.2	Anel	15
2.2.3	d -grade	16
2.2.4	d -toro	16
2.2.5	Hipercubo	17
2.3	Tempos de comunicação	17
2.3.1	Transmissão de mensagens	17
2.3.2	Comunicação entre vértices	21
2.3.3	Padrões de comunicação	21
2.4	Modelo constante	23
2.4.1	Difusão	23
2.4.2	Troca completa	26

2.5	Tabelas com os resultados conhecidos	37
3	Alguns trabalhos anteriores	39
3.1	Introdução	39
3.2	Cálculo do máximo com um barramento global	39
3.2.1	Introdução	39
3.2.2	Modelo	40
3.2.3	Notações	40
3.2.4	Algoritmos para matrizes $n \times n$	41
3.2.5	Generalização para matrizes q -dimensionais	45
3.3	Cálculo do máximo com k barramentos globais	46
3.3.1	Limite inferior para um barramento global	47
3.3.2	Análise para k barramentos globais	50
3.4	Hipercubo generalizado	53
3.4.1	Generalização	54
3.4.2	Comunicações	55
3.4.3	Análise	55
3.4.4	Outra generalização	56
3.5	Desempenho de redes de interconexão com barramentos	58
3.5.1	Definições e notações	58
3.5.2	Algoritmos para estruturas com barramentos globais	59
3.5.3	Limite inferior para redes com barramentos globais	60
3.5.4	Um sistema de barramentos para grades quadradas	62
3.5.5	Limite inferior para grafos planares	64
4	Generalização de algumas estruturas de interconexão e um modelo de comunicação	67
4.1	Hipergrafos	67
4.1.1	Simples generalização	68
4.1.2	Dualidade	68

4.1.3	Aplicação de dualidade	69
4.2	Generalização de algumas estruturas de interconexão	71
4.2.1	Motivação	72
4.2.2	Hipercaminho	72
4.2.3	Hiperanel	73
4.2.4	d -hipergrade	74
4.2.5	d -hipertoro	75
4.3	Modelos de comunicação	75
4.3.1	Comparação com estruturas de interconexão em grafos	76
5	Algoritmos de comunicação global para as estruturas propostas	78
5.1	Introdução	78
5.2	Simplificação	78
5.2.1	Simplificação para o modelo $M_{j,i}(j \leq i)$	79
5.2.2	Simplificação para o modelo $M_{2,1}$	83
5.2.3	Simplificação * para o modelo $M_{1,1}$	87
5.2.4	Simplificação * para o modelo $M_{2,1}$	89
5.3	Padrões de comunicação	90
5.3.1	Resultados obtidos para a difusão	91
5.3.2	Troca completa	93
5.3.3	Tabelas comparativas	98
6	Conclusão	100
6.1	Apanhado geral	100
6.2	Contribuições e perspectivas	100
A	Algoritmos para o toro	102
A.1	Definições comuns	102
A.2	Programa principal	107
A.3	Propagação do conjunto	108
A.4	Diferença entre diâmetro e tempo de difusão	109

Lista de Figuras

1.1	Arquitetura SIMD.	9
1.2	Arquitetura MIMD com memória distribuída.	10
1.3	Arquitetura MIMD com memória compartilhada.	11
2.1	Caminho com 4 vértices (P_4).	16
2.2	Anel com 8 vértices (R_8).	16
2.3	Grade $G^2(V, E) = P_4 \times P_6$	16
2.4	Hipercubo H_3	17
2.5	Solução ótima para o anel com 18 vértices.	29
2.6	Padrão para a grade $G = P_5 \times P_5$	31
2.7	Padrão para a grade $G = P_6 \times P_6$	32
2.8	Concentração nos vértices primários da grade $G^2 = P_9 \times P_9$	33
2.9	Distribuição para os pontos secundários na terceira dimensão.	33
2.10	Padrão para o toro $R_4 \times R_8$	34
2.11	Padrão para o toro $R_7 \times R_5$	35
2.12	Estratégia para o toro tridimensional.	36
3.1	Uma matriz com 8 vizinhos 5×5	40
3.2	1-sobreviventes em um toro.	43
3.3	3-sobreviventes em um toro.	44
3.4	2-sobreviventes em um toro.	45
3.5	4-sobreviventes em um toro.	46
3.6	Hipercubo generalizado GHC.	54

3.7	GHB, com $N = 3 * 2$	57
3.8	Grade 32×32 , com sistema de barramentos planares.	64
4.1	Representação gráfica de um hipergrafo (6 vértices e 7 hiperarestas).	68
4.2	Grafo com alguns cliques de tamanho maior que 2.	69
4.3	Generalização imediata do grafo da figura 4.2	69
4.4	Hipergrafo dual do hipergrafo da figura 4.1.	70
4.5	Hipercubo ternário de dimensão 2.	72
4.6	Hipercaminho de tamanho 6 e ordem 2 ($\mathcal{P}_{6,2}$).	73
4.7	Hipercaminho de tamanho 3 e ordem 3 ($\mathcal{P}_{3,3}$).	73
4.8	Hiperanel de tamanho 5 e ordem 3 ($\mathcal{R}_{5,3}$).	74
4.9	2-Hipergrade $\mathcal{G}_{4 \times 3}^3$	75
4.10	2-Hipergrade $\mathcal{G}^2 = \mathcal{P}_{3,3}^1 \times \mathcal{P}_{3,2}^2$	76
5.1	O grafo simplificado do hipercaminho $\mathcal{P}_{5,4}$	80
5.2	O grafo simplificado do hipercaminho $\mathcal{P}_{3,3}$	80
5.3	Grafo simplificado do hiperanel $\mathcal{R}_{3,3}$	81
5.4	Simplificação da 2-hipergrade $\mathcal{G}^2 = \mathcal{P}_{3,3}^1 \times \mathcal{P}_{3,2}^2$	83
5.5	Grafo simplificado no modelo $M_{2,1}$ para o hipercaminho $\mathcal{P}_{5,4}$	84
5.6	Passo 1 da simplificação no modelo $M_{2,1}$ para a 2-hipergrade $\mathcal{G}^2 = \mathcal{P}_{3,3}^1 \times \mathcal{P}_{3,2}^2$	85
5.7	Passo 2 da simplificação no modelo $M_{2,1}$ para a 2-hipergrade $\mathcal{G}^2 = \mathcal{P}_{3,3}^1 \times \mathcal{P}_{3,2}^2$	85
5.8	Grafo reduzido G^* da 2-hipergrade $\mathcal{G}^2 = \mathcal{P}_{3,3}^1 \times \mathcal{P}_{3,2}^2$	86
5.9	Grafo simplificado * de uma hipergrade bidimensional.	89
5.10	Grafo reduzido de uma hipergrade bidimensional.	90
5.11	Simulação de uma transmissão no modelo H_* no grafo simplificado $\mathcal{G}^{(d)}$	91

Lista de Tabelas

2.1	Tabela com valores de β e γ para máquinas existentes.	19
2.2	Resultados conhecidos para a difusão.	37
2.3	Resultados conhecidos para a troca completa no caminho, anel e grade. . .	38
2.4	Resultados conhecidos para a troca completa no toro e hipercubo.	38
4.1	Comparação entre topologias em grafos e hipergrafos.	77
4.2	Comparação de diâmetro entre topologias em grafos e hipergrafos.	77
5.1	Resultados para a difusão nas (hiper)topologias.	98
5.2	Resultados (em função dos tempos para topologias em grafos) para a troca completa nas (hiper)topologias, modelos $M_{1,1}$ e $M_{1,*}$	98
5.3	Resultados (em função dos tempos para topologias em grafos) para a troca completa nas (hiper)topologias, modelos $M_{2,1}$ e $M_{2,*}$	98
5.4	Resultados para a troca completa nas (hiper)topologias, modelos $M_{1,1}$ e $M_{1,*}$. .	99
5.5	Resultados para a troca completa nas (hiper)topologias, modelos $M_{2,1}$ e $M_{2,*}$. .	99

Capítulo 1

Introdução

1.1 Conceito de processamento paralelo

O termo “processamento paralelo” denota a execução simultânea de múltiplos processos, cooperativamente, com o intuito de resolver um problema computacional. Existem dois tipos básicos de problemas computacionais, que por precisarem de grandes melhoras no tempo de processamento, incentivam a pesquisa em processamento paralelo. Problemas caracterizados por tamanho e complexidade muito grande (ex: previsão meteorológica) e problemas de tempo real (ex: sistemas de aviação militar).

Estes tipos de problemas requerem um desempenho muito grande. Apesar de terem sido atingidas melhoras significativas nas velocidades dos processadores, avanços contínuos estão sujeitos às leis fundamentais da física¹. As principais barreiras para obter um aumento de desempenho com o processamento paralelo são conceituais, como repartir um problema entre vários processadores e administrar a execução de múltiplos processos de uma maneira cooperativa. Como a dificuldade de ultrapassar obstáculos conceituais é menor do que a de quebrar leis da física, o processamento paralelo é um método promissor para atingir melhoras significativas de desempenho.

1.2 Arquiteturas paralelas

Denomina-se por arquitetura paralela a matéria que estuda as possíveis maneiras de interconectar processadores. Estas maneiras devem permitir a coordenação do trabalho de seus processadores, assim como permitir um esquema de comunicação eficiente entre os mesmos.

¹Velocidade da luz = 300.000 Km/s.

A classificação mais conhecida das várias possibilidades de interconectar processadores é devida a Flynn [17] e foi baseada no fluxo de instruções e de dados. Foram definidas 4 categorias:

SISD *single instruction, single data stream*

Computadores seqüenciais.

MISD *multiple instruction streams, single data stream*

Corresponde a vários processadores processando diferentes instruções sobre os mesmos dados; esta categoria é teoricamente possível mas não tem aplicações práticas.

SIMD *single instruction stream, multiple data streams*

Corresponde a vários processadores executando simultaneamente o mesmo conjunto de instruções em diferentes conjuntos de dados.

MIMD *multiple instruction streams, multiple data streams*

Corresponde a vários processadores executando independentemente diferentes instruções em diferentes conjuntos de dados.

Existem também duas categorias em relação a memória:

memória compartilhada Neste caso os processadores têm acesso a uma memória global, comum a todos.

memória distribuída Cada processador tem a sua própria memória local. Quando existe a necessidade de acesso a um dado fora da memória local de um processador, ocorrem comunicações entre os processadores.

Esta classificação não é perfeita, mas é a mais conhecida. Entre os modelos de máquinas existentes, existem modelos que não se encaixam ou que se encaixam em mais de uma categoria.

Veremos um pouco melhor as categorias SIMD e MIMD.

1.2.1 Arquiteturas SIMD

As arquiteturas SIMD (figura 1.1) são compostas por uma unidade central de controle, múltiplos processadores e uma rede de interconexão que permite comunicações processador-a-processador ou processador-a-memória. A unidade central efetua a difusão de uma única instrução para todos os processadores, os quais executam a instrução independentemente no seu próprio conjunto de dados.

Figura 1.1: Arquitetura SIMD, onde I é a instrução atual, P são os processadores e M células de memória.

A rede de interconexão permite que o resultado de uma instrução calculada em um processador seja comunicada a outro processador, para ser utilizado como operando na próxima instrução.

1.2.2 Arquiteturas MIMD

As arquiteturas MIMD utilizam múltiplos processadores que podem executar diferentes fluxos de instruções e dados. As máquinas MIMD permitem soluções paralelas nas quais os processadores funcionam de uma maneira autônoma. Não existe uma sincronização implícita em arquiteturas MIMD, os processadores podem ser assíncronos, caracterizando um *hardware* descentralizado.

Um novo conceito de arquitetura é proposto por Fraigniaud em [20], para máquinas MIMD onde deve existir uma sincronização entre os processos que estão sendo executados nos processadores. Este conceito de sincronização, para troca de mensagens, entre vários processadores executando processos de um único programa, é o da arquitetura SPMD (*simple program, multiple data stream*). Este tipo de arquitetura permite uma sincronização de alto nível.

Um outro modelo, mais teórico, que corresponde a categoria MIMD é o modelo PRAM (*parallel random access machine*). Boa parte dos algoritmos existentes para a PRAM são algoritmos do tipo SIMD. Uma PRAM consiste de múltiplos processadores com algum tipo de conexão à memória. Existem quatro regras principais que disciplinam acessos a esta memória (ver [2] para um tratamento mais detalhado):

EREW (*exclusive read, exclusive write*), a cada instante apenas um processador pode acessar uma posição da memória global.

CREW (*concurrent read, exclusive write*), a cada instante, uma posição de memória que está sendo alterada por um processador não pode ser acessada por outro. Vários processadores podem ler o conteúdo da mesma posição de memória simultaneamente.

CRCW (*concurrent read, concurrent write*), o acesso às posições de memória pode ser simultâneo. No caso de mais de um processador estar alterando a mesma posição de memória deve ser obedecida uma regra para resolver o conflito (ex: processador de maior prioridade, o ou-lógico entre os valores que estão sendo gravados).

ERCW (*exclusive read, concurrent write*), a cada instante, uma posição de memória que está sendo lida por um processador não pode ser acessada por outro. Vários processadores podem escrever em uma mesma posição de memória simultaneamente (deve existir uma forma de resolver conflitos).

Veremos agora as duas principais formas de organização de memória em uma arquitetura MIMD.

Arquiteturas com memória distribuída

Arquiteturas com memória distribuída (figura 1.2) conectam nós de processamento (processador e memória local) com uma rede de interconexão, geralmente, ponto-a-ponto. Os nós compartilham dados utilizando a transmissão de mensagens através desta rede, pois não há memória compartilhada.

Figura 1.2: Arquitetura MIMD com memória distribuída.

Diversas topologias de redes de interconexão foram propostas, de tal forma que fossem expansíveis e fornecessem um bom desempenho para programas paralelos com diferentes padrões de comunicação entre processadores.

Arquiteturas com memória compartilhada

A característica que define uma arquitetura com memória compartilhada é uma memória global, a qual cada processador no sistema tem acesso (figura 1.3). Neste tipo de arquitetura, os processos em diferentes processadores coordenam suas atividades lendo e modificando dados na memória global.

Figura 1.3: Arquitetura MIMD com memória compartilhada.

O uso de dados da memória compartilhada na coordenação de processos sendo executados em diferentes processadores requer mecanismos de sincronização no acesso a esses dados. Uma técnica é a utilização de semáforos, com primitivas do tipo testa-e-atualiza (*test-and-set*).

Existe uma pequena variação, na qual além da memória global, os processadores têm uma memória local utilizada como memória *cache*. Logo várias cópias da mesma posição de memória podem estar no *cache* de vários processadores em um dado instante. Manter uma versão consistente desses dados é um problema de coerência de *cache*.

1.3 Apresentação do trabalho

Em muitos sistemas de multiprocessadores MIMD de memória distribuída, processadores são ligados por uma rede de interconexão ponto-a-ponto, modelada usualmente por um grafo onde processadores são vértices e canais de comunicação são arestas. Em tais arquiteturas, a comunicação inter-processador constitui-se freqüentemente em um sério gargalo. A fim de contornar este problema, diversas arquiteturas fazem uso de um sistema de barramentos múltiplos [22, 29, 34]. Tais arquiteturas podem ser modeladas por um hipergrafo [3], em que uma hiperaresta é um conjunto de vértices. Cada barramento da rede é portanto representado por uma hiperaresta.

Uma alternativa para aumentar o desempenho é a utilização de arquiteturas baseadas em barramentos. Desta forma, é possível interconectar mais processadores, mantendo um diâmetro aceitável. Proporemos novas topologias utilizando somente barramentos,

de forma a contribuir com a computação maciçamente paralela. Defendemos a viabilidade destas novas topologias, com a definição de modelos realistas, e com a descrição de algoritmos básicos para a comunicação global.

Neste trabalho apresentaremos os modelos de grafos para redes de interconexão ponto-a-ponto. Veremos as topologias caminho, anel, grade, toro e hipercubo, e os diversos modelos de comunicação para grafos.

Estudaremos os algoritmos, e veremos os limites inferiores, para difusão e troca completa para cada uma das topologias. Apreciaremos algumas tentativas de melhorar redes de interconexão ponto-a-ponto utilizando barramentos.

Introduziremos alguns princípios básicos da teoria de hipergrafos, de forma a propor um modelo teórico para barramentos. Veremos algumas aplicações imediatas de hipergrafos em redes de interconexão. Generalizaremos o caminho, anel, grade e toro, com novas topologias de interconexão à base de barramentos (hiperarestas). Serão definidas as topologias hipercaminho, hiperanel, hipergrade e hipertoro, todas originais.

Definiremos uma ferramenta denominada simplificação, também original, que será utilizada na descrição de algoritmos nas topologias propostas. São apresentados diversos tipos de simplificação, assim como outra ferramenta chamada redução. Utilizando estas ferramentas descreveremos em detalhes algoritmos eficientes para a difusão e troca completa nas generalizações apresentadas. Veremos também alguns limites inferiores. Parte do trabalho sobre as generalizações e comunicação é trabalho conjunto com A. Ferreira e S. W. Song, consta em relatório técnico [13], foi publicado em conferência nacional [14] e aceito para publicação em conferência internacional [15]. Vejamos agora uma descrição por capítulos.

No capítulo 2 examinamos a modelagem, utilizando grafos, para redes de interconexão ponto-a-ponto. Veremos também algumas topologias bem conhecidas, assim como os tempos dos algoritmos para difusão e troca completa.

No capítulo 3 veremos alguns trabalhos que de alguma forma utilizaram barramentos para o aumento de desempenho de arquiteturas MIMD. Dois deles consideram grades d -dimensionais com acréscimo de barramentos. Bokhari [8] e Aggarwal [1] consideram o uso de um barramento global, ao qual todos os processadores são ligados. O primeiro utiliza um só barramento global e o segundo autor estende o trabalho para k barramentos globais. Bhuyan e Agrawal [7] apresentam uma generalização da rede de interconexão do hipercubo. Meyer auf der Heide e Pham [22] investigam grades com o uso de uma árvore de barramentos para a computação de operações associativas.

O capítulo 4 começa com definições e notações de hipergrafos, aborda algumas de suas características e mostra como podem ser utilizadas algumas de suas propriedades básicas. São apresentadas estruturas de interconexão originais, à base de barramentos. No final propomos um novo modelo de comunicação para estruturas de interconexão com

barramentos.

Algoritmos de comunicação global para as estruturas propostas, bem como ferramentas que facilitam a sua descrição, serão vistos no capítulo 5. Provaremos também alguns limites inferiores para os tempos de comunicação global. Na conclusão, capítulo 6, veremos um apanhado geral, serão apresentadas as contribuições e apresentaremos novas perspectivas geradas por este trabalho.

Capítulo 2

Comunicação em algumas estruturas de interconexão

2.1 Introdução

Neste capítulo descreveremos, em termos de grafos, algumas das estruturas de interconexão mais conhecidas para a interligação de processadores ou mesmo de uma rede de computadores. As estruturas de interconexão a serem vistas aqui serão generalizadas posteriormente.

Faremos uma apresentação dos modelos introduzidos para representar redes de processadores utilizando grafos e veremos as definições dos padrões de comunicação mais comuns. Analisaremos os limites superiores e apresentaremos os limites inferiores, para estes padrões de comunicação, nas estruturas de interconexão a serem descritas.

2.2 Estruturas de interconexão

Definimos um grafo G por $G(V, E)$, onde V é um conjunto finito $\{v_1, \dots, v_n\}$ e E é um conjunto $\{e_1, \dots, e_m\}$, onde cada $e_i \subset V, |e_i| = 2$. Denominaremos os elementos de V vértices e os elementos de E arestas. Note que com esta definição evitamos arestas múltiplas e laços.

Dado um grafo $G(V, E)$ e dois vértices $u, v \in V$ dizemos que a distância entre u e v é o comprimento (número de arestas) do menor caminho com extremidades u e v . Denotamos a distância entre u e v por $\text{dist}(u, v)$. Definimos o diâmetro, D , de um grafo $G(V, E)$ como $D = \max_{u, v \in V} \text{dist}(u, v)$.

Neste trabalho o nosso interesse está voltado para os grafos conexos, isto é, sempre

que nos referirmos a um grafo $G(V, E)$ teremos $D < \infty$.

Dado um grafo $G(V, E)$ usaremos as seguintes notações:

- dado $v \in V$ denotamos por grau de v , $\text{gr}(v)$, a quantidade de arestas incidentes em v .
- denotamos por grau de V , $\text{gr}(V)$, o grau do vértice de maior grau, isto é, $\text{gr}(V) = \max_{u \in V} \text{gr}(u)$.

Definimos um grafo orientado $\vec{G}(V, \vec{E})$, onde V é um conjunto finito $\{v_1, \dots, v_n\}$ (vértices) e $\vec{E}$ é um conjunto $\{e_1, \dots, e_m\}$ (arestas) onde cada $e_i \in V \times V$.

Dados um grafo orientado $\vec{G}(V, \vec{E})$ e dois vértices $u, v \in V$ definimos um passeio de u a v como uma sequência

$$u = x_1, e_{n_1}, x_2, \dots, x_i, e_{n_i}, x_{i+1}, \dots, e_{n_{p-1}}, x_p = v \text{ com } \begin{cases} e_{n_i} \in \vec{E} \\ e_{n_i} = (x_i, x_{i+1}). \end{cases}$$

O tamanho de um passeio é o seu número de arestas. Um caminho é um passeio sem repetição de vértices e arestas.

A distância de u a v , $\text{dist}(u, v)$, é igual ao tamanho do menor caminho de u a v . Definimos o diâmetro orientado, $\vec{D}$, como $\max_{u, v \in V} \text{dist}(u, v)$.

Dado um grafo $G(V, E)$ podemos dar uma orientação para cada aresta $e = \{v_i, v_j\}$ em E . Orientando todas as arestas obtemos um grafo orientado $\vec{G}(V, \vec{E})$.

Vários conceitos e nomenclaturas básicos da teoria de grafos serão utilizados a seguir livremente, sem repetir suas definições. No decorrer do texto, por vezes, vamos nos referir a um grafo $G(V, E)$ apenas por G .

2.2.1 Caminho

Esta é a mais simples forma de interconexão. Um caminho (*path*) $P_n(V, E)$ é definido como na teoria de grafos (figura 2.1). Note que o diâmetro de um caminho $P_n(V, E)$, de tamanho n , é $n - 1$ e o número de arestas incidentes com um vértice é no máximo 2.

2.2.2 Anel

Um anel (*ring*) $R_n(V, E)$ é definido como sendo um circuito de n vértices (figura 2.2). Observe que o diâmetro de um anel com n vértices é $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ e todo vértice tem grau 2.

Figura 2.1: Caminho com 4 vértices (P_4).

Figura 2.2: Anel com 8 vértices (R_8).

2.2.3 d -grade

Uma d -grade (*grid*) é o resultado do produto cartesiano de d caminhos. Formalmente uma d -grade $G^d(V, E) = P_{n_1} \times \dots \times P_{n_d}$ onde $P_{n_i}, 1 \leq i \leq d$, são caminhos (figura 2.3). O diâmetro de uma d -grade é igual a soma dos diâmetros dos caminhos componentes, isto é, $D = \sum_{i=1}^d (n_i - 1)$ onde cada $n_i, 1 \leq i \leq d$, é o número de vértices do caminho P_{n_i} . O grau máximo de um vértice na d -grade é $\text{gr}(V) = 2d$ (o mínimo é d).

Figura 2.3: Grade $G^2(V, E) = P_4 \times P_6$.

2.2.4 d -toro

Assim como no item anterior, definimos o d -toro (*torus*) como um produto de d anéis. Um d -toro $T^d(V, E) = R_{n_1} \times \dots \times R_{n_d}$ onde $R_{n_i}, 1 \leq i \leq d$, são anéis. O grau de cada

vértice é $\text{gr}(V) = 2d$ e o diâmetro é $D = \sum_{i=1}^d \left\lfloor \frac{n_i}{2} \right\rfloor$, onde n_i é o número de vértices do anel R_{n_i} . O toro também é chamado de grade toroidal.

2.2.5 Hipercubo

Um hipercubo $H_d(V, E)$ (figura 2.4) é um grafo com $N = 2^d$ vértices onde

$$V = \{(b_1, \dots, b_d) \mid b_i \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq d\}$$

$$e \in E \leftrightarrow e = \{v_1, v_2\} \text{ onde } \begin{cases} v_1, v_2 \in V \\ v_1 \oplus v_2 = e_j = j\text{-ésima coordenada canônica} \\ (\oplus \text{ denota a operação de ou-exclusivo}). \end{cases}$$

O hipercubo tem diâmetro d e todos os seus vértices têm grau $\text{gr}(V) = d$.

Figura 2.4: Hipercubo H_3 .

2.3 Tempos de comunicação

Nesta seção veremos diversos tempos de comunicação para as cinco estruturas de interconexão vistas: caminho, anel, grade, toro e hipercubo. Trabalharemos sempre com o grafo correspondente às estruturas de interconexão, usando a correspondência processador-vértice e canal-aresta.

2.3.1 Transmissão de mensagens

Usaremos as seguintes definições.

- *Transmissão*: envio de uma mensagem ou parte da mesma de um vértice a um ou mais vértices. Dados um grafo $G(V, E)$ e vértices $u, v \in V$ denotamos uma transmissão do vértice u para o vértice v por $v \leftarrow u$.
- *Ciclo* ou *passo*: conjunto qualquer de transmissões simultâneas.

Transmissão entre vértices adjacentes

Supomos que dada uma rede de interconexão, representada por um grafo $G(V, E)$, o tempo de transmissão de uma mensagem M entre dois vértices adjacentes $u, v \in V$ não depende dos vértices escolhidos. Existem vários modelos em relação ao tempo de transmissão de uma mensagem entre dois vértices adjacentes, veremos uma breve descrição de alguns modelos abaixo.

Modelo constante Supõe-se que as mensagens são suficientemente curtas para poderem ser transmitidas em apenas um ciclo, que é composto de transmissão e/ou recepção de dados e computação.

Modelo linear O tempo de transmissão é proporcional ao tamanho da mensagem mais o tempo de inicialização (*start-up*). Isto é, o tempo de transmissão de uma mensagem M , de tamanho L , entre dois vértices adjacentes é

$$T(M) = \beta + \gamma L$$

onde β é o tempo para a inicialização da transmissão e γ é o tempo de propagação de uma unidade de tamanho da mensagem, $\frac{1}{\gamma}$ é a largura de banda das arestas. Neste caso a transmissão de mensagens de tamanhos diferentes não é sincronizada.

Observe que se $\beta \gg \gamma$ e com mensagens de tamanho limitada o modelo linear e o constante são semelhantes. Abaixo, temos a tabela 2.1 com valores de β e γ para algumas máquinas existentes. Esta tabela foi extraída de [19].

Modelo de pacotes Bertsekas e outros [6] apresentam um modelo onde a transferência é realizada através de pacotes de tamanho fixo. Logo para a transmissão de uma mensagem M de tamanho L , temos

$$T(M) = \left\lceil \frac{L}{m} \right\rceil m\gamma$$

onde m é o tamanho do pacote e $\frac{1}{\gamma}$ é a largura da banda das arestas. Vemos que no modelo linear os pacotes têm tamanho unitário.

máquina	β (μseg)	γ ($\mu\text{seg}/\text{octeto}$)
iPSC-1	1000	1,000
iPSC-2	350	0,200
iPSC-860	136	0,384
nCUBE	446	2,500
Meiko	250	1,000
FPS T40	830	1,430
Mega-Node	4,85	1,125
CM-2	0,0	0,100
Ametek 2010	0,084	0,035
Fujitsu AP 1000	0,040	0,040

Tabela 2.1: Tabela com valores de β e γ para máquinas existentes.

Modelo linear sem tempo de inicialização Touzene e Plateau [35] estudaram a comunicação no toro supondo o tempo de inicialização (*start-up*) nulo. Para a transmissão de uma mensagem M de tamanho L , temos

$$T(M) = L\gamma$$

onde $\frac{1}{\gamma}$ é a largura de banda das arestas.

Modelo k -linear Fraigniaud [20] estudou comunicações no hipercubo, com experimentos em máquinas a base de *transputers*, onde os tempos de inicialização e de propagação dependem do número de arestas utilizadas pelo vértice que envia a mensagem. O modelo é da forma

$$T(M) = \beta_k + L\gamma_k$$

onde L é o tamanho da mensagem M , β_k e γ_k são respectivamente os tempos de inicialização e de propagação para um vértice que utiliza simultaneamente k de suas arestas para o envio de mensagens.

Transmissão entre vértices não adjacentes

Existem modelos e técnicas específicas para o envio de mensagens entre vértices não adjacentes. A técnica mais simples é a armazene-e-envie (*store-and-forward*). Quando ocorre a transmissão entre dois vértices não adjacentes u e v , o que acontece é uma série de transmissões entre vértices adjacentes da mensagem (inteira) através de um dos caminhos entre u e v .

Logo, neste caso no modelo linear, para vértices u e v a distância d , temos

$$T_{v \leftarrow u}(M) = d(\beta + L\gamma).$$

As outras técnicas mais comuns são:

Técnica *pipeline* Para reduzir os tempos do armazene-e-envie, uma técnica é a de decompor a mensagem M , de tamanho L , em pacotes. Suponha que uma mensagem é decomposta em pacotes de tamanho B . Para simplificar suponha que L é divisível por B . Para transmitir a mensagem de um vértice u para um vértice v à distância d temos

$$T_{v \leftarrow u}(M) = \overbrace{d(\beta + B\gamma)}^{\text{pacote 1}} + \overbrace{\left(\frac{L}{B} - 1\right)(\beta + B\gamma)}^{\text{pacotes restantes}} = \left(d + \frac{L}{B} - 1\right)(\beta + B\gamma).$$

Técnica de caminhos disjuntos A idéia é decompor a mensagem em pacotes e transmiti-los do vértice origem para o vértice destino por caminhos disjuntos. Dados u e v , à distância d , se p é o número de caminhos (aresta disjuntos), de tamanho $d' \geq d$, entre os vértices u (origem) e v (destino), decomponha a mensagem M , de tamanho L , em p blocos de tamanho $\frac{L}{p}$ (para simplificar suponha L divisível por p). Temos

$$T_{v \leftarrow u}(M) = d'(\beta + \frac{L}{p}\gamma).$$

É claro que se pode combinar esta técnica com a técnica de *pipeline*.

Quanto aos modelos existentes, o principal é um relacionado a comutação de circuitos (*wormhole*). Neste modelo é criada uma rota (de comunicação) quando se deseja transmitir uma mensagem entre dois vértices não adjacentes. Para enviar uma mensagem M de um vértice u para um vértice v , à distância d , temos

$$T_{v \leftarrow u} = \alpha + d\delta + L\gamma$$

onde L é o tamanho da mensagem M , $\frac{1}{\gamma}$ é a largura de banda, α é o tempo de inicialização e δ é o tempo para a criação de uma rota em cada vértice intermediário.

Modelo adotado

Neste trabalho abordaremos o modelo de comunicação constante e as transmissões serão sempre entre vértices adjacentes.

2.3.2 Comunicação entre vértices

Existem vários modelos para a comunicação entre vértices adjacentes. Uma aresta pode ser bidirecional, isto é, as informações podem trafegar nos dois sentidos ao mesmo tempo (ex: conversa telefônica). Pode ser unidirecional, no caso em que a aresta só pode transmitir informações em um sentido simultaneamente (ex: *walkie talkie*). O modelo bidirecional é denotado por F (*full duplex*) e o unidirecional por H (*half duplex*).

Há outro modelo importante em relação ao número de arestas que um vértice pode utilizar para a transmissão/recepção de mensagens simultaneamente. Se um vértice pode transmitir/receber por apenas uma aresta por vez chamamos de 1-porta (*processor-bound*) e denotamos por F_1 ou H_1 , dependendo se as arestas são uni ou bidirecionais.

Se um vértice pode transmitir por no máximo um dado número k de suas arestas, ao mesmo tempo, chamamos de k -porta (*DMA-bound*) e denotamos por H_k ou F_k . Por último quando um vértice pode transmitir por todas as suas arestas simultaneamente temos o modelo $*$ -porta (*link-bound*) cuja notação é F_* ou H_* .

2.3.3 Padrões de comunicação

Veremos uma descrição detalhada dos padrões de comunicação mais comuns: difusão (*broadcast*), troca completa (*gossiping*), dispersão (*scattering*) e multi-dispersão (*multi-scattering*). Nas definições das descrições as mensagens a serem transmitidas serão elementos, ou conjuntos dos mesmos. Por vezes, no decorrer do texto, utilizaremos esta analogia entre conjuntos e informações.

Difusão:

Idéia: Um vértice tem uma informação que deve ser transmitida a todos os outros vértices do grafo.

Definição:

1. Estado inicial: Seja $G(V, E)$ um grafo, onde um dado vértice qualquer v contém um elemento s . Todos os outros vértices não contêm s .
2. Ciclo de comunicação: Cada vértice que tem o elemento s pode enviá-lo para um ou mais vértices adjacentes, conforme o modelo adotado. Após o recebimento os vértices que receberam uma ou mais cópias do elemento s passam a conter s .
3. Estado final: Todos os vértices do grafo devem conter o elemento s .

Troca completa:

Idéia: Cada vértice tem um pedaço distinto de uma informação completa, no final todos os vértices devem conter a informação completa.

Definição:

1. Estado inicial: Seja $G(V, E)$ um grafo, onde cada vértice v está associado inicialmente a um conjunto unitário S_v . Os conjuntos unitários iniciais são disjuntos.
2. Ciclo de comunicação: Cada vértice pode enviar seu conjunto para um ou mais vértices adjacentes, e/ou receber conjuntos dos seus vértices adjacentes, de acordo com o modelo. Após o recebimento de um ou mais conjuntos, cada vértice realiza a união de todos os conjuntos recebidos com o próprio conjunto, e este será o novo conjunto de cada vértice.
3. Estado final: Todos os vértices devem conter todos os elementos dos conjuntos unitários iniciais.

Dispersão:

Idéia: Um vértice tem uma informação, da qual cada vértice do grafo deve receber um pedaço distinto.

Definição:

1. Estado inicial: Seja $G(V, E)$ um grafo, onde um dado vértice qualquer v contém o conjunto S . S é tal que cada elemento s em S corresponde a um elemento v de V ($|S| = |V|$). Nenhum outro vértice contém elementos de S .
2. Ciclo de comunicação: Cada vértice que tem algum elemento de S pode enviá-lo para um ou mais vértices adjacentes, e/ou receber dos seus vértices adjacentes. Após o recebimento de um ou mais conjuntos cada vértice realiza a união de todos os conjuntos recebidos com o próprio conjunto, este será o novo conjunto de cada vértice.
3. Estado final: Cada vértice v do grafo deve conter o elemento s de S , correspondente a v .

Multi-dispersão:

Idéia: É a operação de dispersão simultânea entre todos os vértices do grafo.

Definição:

1. Estado inicial: Seja $G(V, E)$ um grafo, onde a cada vértice $v \in V$ corresponde inicialmente um conjunto S_v , onde cada elemento de S_v corresponde a um elemento v' de V . Os conjuntos S_v são disjuntos.

2. Ciclo de comunicação: Cada vértice pode enviar seu conjunto para um ou mais vértices adjacentes e/ou receber conjuntos dos seus vértices adjacentes. Após o recebimento de um ou mais conjuntos cada vértice realiza a união de todos os conjuntos recebidos com o próprio conjunto, este será o novo conjunto de cada vértice.
3. Estado final: Todos os vértices $v \in V$ devem conter todos os elementos associados a v dos conjuntos $S_{v'}, v' \in V$.

As definições feitas acima foram elaboradas de uma forma semelhante à definição de troca completa em [10]. Note que para o modelo linear o ciclo de comunicação deve admitir também que sejam transmitidos apenas pedaços dos conjuntos, e sem sincronismo.

Observe que não incluímos o recolhimento (*gathering*) nos tipos de comunicação mais comuns, pois o recolhimento é apenas a operação de difusão realizada no sentido inverso. Da mesma forma não incluímos o multi-recolhimento (*multi-gathering*).

Para a verificação dos tempos de comunicação em cada modelo visto utilizaremos as seguintes notações sugeridas em [18]. O número de ciclos do melhor algoritmo para a difusão (*broadcast*) em um grafo $G(V, E)$ será $b_M(G)$, onde M é o modelo utilizado (H_1, F_1, H_* ou F_*). Da mesma forma o número de ciclos para o melhor algoritmo de troca completa (*gossiping*) no grafo $G(V, E)$ com modelo M será denotado $g_M(G)$.

2.4 Modelo constante

Abordaremos neste trabalho o modelo de comunicação constante, pois além de este ser quase que um pré-requisito para o entendimento do modelo linear, existem resultados mais completos para o modelo constante.

2.4.1 Difusão

Nesta seção abordaremos os limites inferiores e superiores para a difusão nas estruturas de interconexão vistas.

Observações Gerais

A seguir veremos uma série de observações a respeito dos tempos para a difusão nos diversos modelos vistos.

Um limite inferior para comunicação em um grafo $G(V, E)$, sobre qualquer modelo de comunicação, é o seu diâmetro D , pois existem vértices $u, v \in V$ tais que $\text{dist}(u, v) = D$. Logo $v \leftarrow u$ leva no mínimo D ciclos.

Para a difusão podemos observar o seguinte. Existem sempre dois grupos de vértices, os informados (contêm o conjunto), e os não informados. Como o conjunto deve ser transmitido dos informados para os não informados é fácil ver que podemos, sem perda de generalidade, utilizar apenas o modelo unidirecional (*half duplex*).

Dado um grafo $G(V, E)$ a difusão consome no máximo D ciclos no modelo *-porta. Para isso basta que utilizemos o seguinte algoritmo. Em cada ciclo os vértices que contêm o conjunto o enviam a todos os seus vizinhos que não contêm o conjunto. É imediato que os vértices à distância e do vértice originador o receberão o conjunto em e ciclos, logo os últimos a receberem o conjunto serão os vértices à distância $\max_{v \in V} \text{dist}(o, v) \leq D$ do originador.

No modelo de comunicação constante, como não consideramos o tamanho do conjunto (um conjunto, assim como apenas um elemento, é transmitido em um ciclo), não há diferença entre a difusão e a dispersão, pois podemos enviar um conjunto no mesmo tempo em que enviamos um só elemento.

A partir das observações anteriores vemos que para a difusão no modelo constante basta analisarmos o modelo 1-porta unidirecional (H_1).

Caminho

modelo H_1 Seja $P_n(V, E)$ um caminho com n vértices. O tempo de comunicação (número de ciclos) é $n - 1$ no modelo 1-porta com o seguinte algoritmo. Se um vértice no extremo contém a mensagem, ela se propaga ao vértice adjacente, deste ao seu adjacente e assim por diante. Logo temos $n - 1$ passos até a mensagem chegar ao outro extremo. Caso o vértice que contém a mensagem não esteja em um extremo, ela é enviada primeiro ao vértice adjacente que esteja mais distante do extremo, nos próximos ciclos os vértices que receberam a mensagem no ciclo anterior transmitem para o vizinho que não tem a mensagem. Note que para completarmos a difusão levaremos $\max(n - i, i)$ ciclos, $1 \leq i \leq n - 1$. Logo o algoritmo leva no máximo $n - 1$ passos para completar a difusão.

Anel

modelo H_1 A difusão para um anel de tamanho n , no modelo unidirecional e 1-porta leva $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ ciclos com o seguinte algoritmo. O vértice que contém o conjunto inicialmente o envia a um dos seus vizinhos. Nos próximos passos cada vértice que possui um vértice adjacente não informado envia o conjunto ao mesmo. Logo, o tempo para a difusão é

$$b_{H_1}(R_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \begin{cases} D & \text{se } n \text{ é par} \\ D + 1 & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Grade

modelo H_1 Veremos os tempos para a difusão na grade d -dimensional $G^d = P_{n_1} \times \dots \times P_{n_d}$. Para o modelo 1-porta e comunicação unidirecional, segundo [11], este tempo é $\sum_{i=1}^d (n_i - 1) = D$. Para isso basta que se aplique o algoritmo de difusão para o caminho em cada dimensão da d -grade.

Inicialmente efetue a difusão no caminho P_{n_1} que contém a mensagem. Em seguida efetue a difusão nos n_1 caminhos P_{n_2} que contém a mensagem, logo após nos $n_1 n_2$ caminhos P_{n_3} que contém a mensagem, continuando assim efetua-se a difusão na grade.

Toro

modelo H_1 Farley e Hedetniemi [11] investigaram a difusão em grafos 2-toro e mostraram que para o 2-toro $T^2 = R_{n_1} \times R_{n_2}$ temos:

$$b_{H_1}(T^2) \leq \begin{cases} \left\lceil \frac{n_1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n_2}{2} \right\rceil & \text{se } n_1 \text{ e/ou } n_2 \text{ são pares} \\ \left\lceil \frac{n_1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n_2}{2} \right\rceil - 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Segue que:

$$b_{H_1}(T^2) \begin{cases} = D & \text{se } n_1 \text{ e } n_2 \text{ são pares} \\ \leq D + 1 & \text{se } n_1 \text{ e/ou } n_2 \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Para isso Farley e Hedetniemi [11] utilizaram o seguinte algoritmo. Para todos os vértices que contém o conjunto, se um vértice recebeu o conjunto de um dos seus vizinhos verticais (isto é adjacente pela dimensão do caminho R_{n_1}) no ciclo anterior, envia o conjunto ao seu outro vizinho vertical. Caso contrário, envia a mensagem ao seu vizinho horizontal, no próximo ciclo a um vizinho vertical e finalmente ao seu outro vizinho vertical.

Ainda não existe nenhum resultado específico para o toro com mais do que duas dimensões. Sabe-se que para o d -toro $T^d = R_{n_1} \times \dots \times R_{n_d}$

$$b_{H_1}(T^d) \leq D + \max(0, m)$$

onde m é o número de anéis com tamanho ímpar. A prova é feita por indução

- Base ($d = 2$)- Prova acima.

- Seja $T^d = R_{n_1} \times \dots \times R_{n_d}$ um d -toro, com m dimensões ímpares. Pela hipótese de indução podemos completar a difusão em $T^{d-1} = R_{n_1} \times \dots \times R_{n_{d-1}}$ em $D' + m'$ ciclos, onde $D' = D - \left\lfloor \frac{n_d}{2} \right\rfloor$ e $m' = m$ se n_d é par, ou $m' = m - 1$ caso contrário.

A difusão, na dimensão d , pode ser feita em $\left\lceil \frac{n_d}{2} \right\rceil$ ciclos, da mesma forma que para o anel. Logo $b_{H_1}(T^d) \leq D' + m + \left\lceil \frac{n_d}{2} \right\rceil$. Se n_d é par $m' = m$ e $\left\lfloor \frac{n_d}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n_d}{2} \right\rceil$. Se n_d é ímpar, $m' = m - 1$ e $\left\lfloor \frac{n_d}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lceil \frac{n_d}{2} \right\rceil$. Segue que

$$b_{H_1}(T^d) \leq D + \max(0, m).$$

Hipercubo

modelo H_1 Para o hipercubo $H_d(V, E)$ utiliza-se o seguinte esquema. No ciclo i cada vértice informado envia a mensagem na dimensão i , $1 \leq i \leq d$. Por indução em d , é fácil mostrar que

$$b_{H_1}(H_d) = \log_2 N = D.$$

2.4.2 Troca completa

Observações gerais

Note que, como estamos no modelo constante, não há diferença entre a troca completa e o multi-dispersão. Observemos ainda os seguintes lemas extraídos de [18].

Lema 1 *Se um grafo $G(V, E)$ é bipartido, com diâmetro D , então o tempo para a troca completa no modelo *-porta unidirecional é $\leq D + 1$.*

Prova: Seja V_1, V_2 uma bipartição de V e suponha que, por convenção, os vértices em V_1 transmitem seu conjunto a todos os seus vizinhos em ciclos ímpares, os vértices em V_2 transmitem aos seus vértices adjacentes em ciclos pares. Em no máximo $D + 1$ ciclos a troca completa terá sido realizada. $\square$

Lema 2 *Dado um grafo $G(V, E)$ o número de ciclos para se efetuar a troca completa no modelo *-porta bidirecional é igual ao diâmetro D do grafo.*

Prova: Basta que cada vértice envie seu conjunto a todos os vértices adjacentes D vezes. No ciclo l , para qualquer vértice v , o conjunto que estava inicialmente em v chega aos vértices à distância l de v . $\square$

Lema 3 Sejam $G(V, E)$ com diâmetro $D \in \vec{E}$ uma orientação das arestas de G . Se $\vec{G}(V, \vec{E})$ tem diâmetro orientado $\vec{D}$, então

$$D \leq g_{H*}(G) \leq \min(2D, \vec{D}).$$

Prova: Sabemos que para realizar a troca completa, no modelo F_* , levamos D ciclos. Utilizando o mesmo algoritmo utilizado em F_* , só que dividindo cada ciclo em duas comunicações, sendo agora as comunicações orientadas, gastaremos $2D$ ciclos. Seja $\vec{G}$ uma orientação do grafo G , com diâmetro $\vec{D}$. Se em cada passo um vértice envia seu conjunto a todos os vértices adjacentes no grafo orientado, em $\vec{D}$ ciclos efetuaremos a troca completa. $\square$

Para a troca completa teremos que analisar os modelos unidirecionais e o modelo 1-porta bidirecional.

Caminho

modelo H_1 Dado um caminho $P_n(V, E)$ com n vértices. Os vértices nos extremos iniciam uma seqüência de transmissões em direção ao outro extremo. Em um dado instante t , ocorrerá um dos casos abaixo

$$\begin{array}{ll} n \text{ par} & \cdots \circ \xrightarrow{t} \circ - \circ \xleftarrow{t} \circ \cdots \\ n \text{ ímpar} & \cdots \circ \xrightarrow{t} \circ - \circ - \circ \xleftarrow{t} \circ \cdots \end{array}$$

Continue a propagação das transmissões da seguinte forma

$$\begin{array}{ll} n \text{ par} & \cdots \circ \xleftarrow{t+3} \circ \xrightarrow{t+1} \circ \xleftarrow{t+2} \circ \xrightarrow{t+3} \circ \cdots \\ n \text{ ímpar} & \cdots \circ \xleftarrow{t+5} \circ \xrightarrow{t+1} \circ \xleftarrow{t+4} \circ \xrightarrow{t+2} \circ \xleftarrow{t+3} \circ \xrightarrow{t+4} \circ \cdots \end{array}$$

Segue que

$$g_{H_1}(P_n) \leq \begin{cases} D + 1 & n \text{ par} \\ D + 2 & n \text{ ímpar.} \end{cases}$$

modelo H_* Como o caminho é um grafo bipartido (lema 1), gastaremos no máximo $D+1$ ciclos para realizar a troca completa no modelo *-porta unidirecional.

modelo F_1 Analogamente ao modelo H_1 , iniciando uma seqüência de transmissões nos vértices localizados nos extremos, em um dado instante t , ocorrerá um dos casos abaixo

Continue as propagações da seguinte forma

Segue que

$$g_{F_1}(P_n) \leq \begin{cases} D & n \text{ par} \\ D + 1 & n \text{ ímpar.} \end{cases}$$

Anel

modelo H_1 Para o anel, $R_n(V, E)$, de tamanho n , Cybenko, Krumme e Venkatamaram [10] provaram o limite inferior $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \sqrt{2n} \right\rceil - 1$.

Propuseram ainda o seguinte limite superior. Para um anel de tamanho N a troca completa pode ser realizada em $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \sqrt{2n} \right\rceil + 2$ ciclos. Para chegar a este resultado propuseram o seguinte algoritmo. Dado um anel com n vértices $v_0, \dots, v_{n-1}$ definiram P números inteiros $0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_P < n$ igualmente espaçados (quando possível) e com amplo espaço entre eles. Usaram o seguinte esquema (figura 2.5):

1. Inicialmente $v_{s_j-1} \leftarrow v_{s_j}$ e $v_{s_j+2} \leftarrow v_{s_j+1}$ para $1 \leq j \leq P$ (em paralelo).
2. Segue a seguinte estratégia de propagação
 - se v_i recebeu de v_{i-1} , e v_{i+1} e v_{i+2} não participaram de transmissões no ciclo t então $v_{i+1} \leftarrow v_i$ no ciclo $t + 1$.
 - se v_i recebeu de v_{i+1} , e v_{i-1} e v_{i-2} não participaram de transmissões no ciclo t então $v_{i-1} \leftarrow v_i$ no ciclo $t + 1$.
 - se v_i recebeu de v_{i-1} e v_{i+1} de v_{i+2} no ciclo t (*cruzamento bom*), seguem as seguintes transmissões:
 - $v_i \leftarrow v_{i+1}$ (em $t + 1$);
 - $v_{i+1} \leftarrow v_i$ (em $t + 2$);
 - $v_{i+2} \leftarrow v_{i+1}$ e $v_{i-1} \leftarrow v_i$ (em $t + 3$).
 - se v_i recebeu de v_{i-1} e v_{i+2} de v_{i+3} no ciclo t (*cruzamento ruim*), seguem as seguintes transmissões:
 - $v_{i+1} \leftarrow v_{i+2}$ (em $t + 1$);
 - $v_i \leftarrow v_{i+1}$ (em $t + 2$);

- $v_{i+1} \leftarrow v_i$ (em $t + 3$);
- $v_{i+2} \leftarrow v_{i+1}$ e $v_{i-1} \leftarrow v_i$ (em $t + 4$).

Figura 2.5: Solução ótima para o anel com 18 vértices ($s_1 = 0, s_2 = 6, s_3 = 12$).

Vemos que esta estratégia transporta os conjuntos no anel, simultaneamente, nos dois sentidos, mesmo quando ocorrem cruzamentos. A idéia principal é que cada conjunto seja transportado para uma metade do anel por um sentido do movimento, e para a outra metade pelo outro sentido. Escolhendo P de forma a minimizar o tempo para a troca completa tem-se

$$g_{H_1}(R_n) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \lceil \sqrt{2n} \rceil = \begin{cases} \frac{n}{2} + \lceil \sqrt{2n} \rceil + 1 & \text{se } n \text{ par} \\ \frac{n+1}{2} + \lceil \sqrt{2n} \rceil + 1 & \text{se } n \text{ ímpar.} \end{cases}$$

modelo H_* No modelo $*$ -porta unidirecional, se o número de vértices é par, o anel é bipartido e conseqüentemente (lema 1) o tempo é menor ou igual a $D + 1$ ciclos. Mas é impossível realizar a troca completa em D ciclos, pois dada uma bipartição qualquer X, Y de V , em cada partição existem vértices distantes de D entre si. Na segunda partição a transmitir os vértices receberão o conjunto em D ciclos após o ciclo inicial. Logo $g_{H_*}(R_n) = D + 1$. Em [10] vemos que se n é ímpar o tempo é $D + 2$, utilizando o seguinte algoritmo. Em cada passo omite-se uma aresta do grafo sendo que cada aresta pode ser omitida uma única vez (a aresta a ser omitida

no próximo ciclo é adjacente à aresta omitida no ciclo atual). As outras arestas efetuam o esquema básico para grafos bipartidos, onde a direção é tal que cada vértice alterna o envio e o recebimento de conjuntos.

modelo F_1 No modelo bidirecional Farley e Proskurowski [12] mostraram que o número de ciclos é:

$$g_{H_1}(R_n) \leq \begin{cases} \frac{n}{2} = D & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{n-1}{2} + 2 = D + 2 & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Grade

Veremos agora o tempo para a troca completa na grade:

modelo H_1 Conforme [10] existem soluções para grades bidimensionais suficientemente grandes. Este resultado pode ser estendido para um número arbitrário de dimensões.

Para a grade $G^d = P_{n_1} \times \dots \times P_{n_d}$ se $d \geq 2$ e $n_i \geq 9$ para todo i (onde n_i é o tamanho do caminho P_i) a troca completa pode ser resolvida em D ciclos, onde D é o diâmetro da d -grade G^d .

Caso $d = 2$: Vejamos o algoritmo para o caso bidimensional. Seja G uma grade 9×9 , ou maior. Se G tiver as duas dimensões ímpares selecione uma subgrade SG , (5×5) , exatamente no seu centro. Se G for par em uma (ou nas duas) dimensão selecione uma subgrade SG , 5×6 (ou 6×6), no seu centro.

Nas figuras 2.6 e 2.7 são apresentados os padrões de comunicação para a grade 5×5 e para a grade 6×6 . Os números indicam em que ciclo a transmissão ocorre. Denominam-se os pontos grandes e cheios de *primários* e os vazados *secundários*. Por inspeção pode-se verificar que os conjuntos em pontos primários são distribuídos a todos os pontos primários em tempo ótimo. Existe um padrão semelhante para a grade 5×6 .

Pode se verificar facilmente que se K é a distância do canto de G ao canto mais próximo de SG é possível enviar simultaneamente cada conjunto de informações em qualquer vértice na grade G para algum ponto primário de SG em K ciclos (figura 2.8). Para resolver a troca completa na grade G concentre os conjuntos nos pontos primários, aplique o padrão na grade SG e distribua os conjuntos nos pontos primários para toda a grade G (usando o algoritmo inverso ao que foi usado para a concentração). Segue que para qualquer grade bidimensional, maior ou igual à grade 9×9 , existe uma solução em um número de ciclos igual ao diâmetro.

Caso $d > 2$: Para dimensões maiores ($d > 2$), se a dimensão for par basta aplicar o algoritmo acima a cada duas dimensões sequencialmente. Isto é, inicialmente fixe as duas primeiras coordenadas, defina $n_3 n_4 \dots n_d$ grades bidimensionais independentes.

Figura 2.6: Padrão para a grade $G = P_5 \times P_5$.

Efetue a troca completa em paralelo nestas grades. Em seguida fixe a terceira e quarta coordenadas, defina $n_1 n_2 n_5 \dots n_d$ grades bidimensionais independentes. Efetue a troca completa nestas grades e assim sucessivamente.

Para resolver o problema para grades com um número ímpar de dimensões, utiliza-se a mesma idéia que para grades bidimensionais com mais de duas dimensões. Para isto apresenta-se a seguir a solução para grades tridimensionais.

Note que no padrão de comunicação dado pelas figuras 2.6 e 2.7, qualquer conjunto que estiver em pontos secundários depois do primeiro ciclo é distribuído aos pontos primários no final das comunicações.

Caso $d = 3$: Seja G uma grade tridimensional $9 \times 9 \times 5$, ou maior. Para a grade $n_1 \times n_2 \times n_3$ primeiramente mantenha a terceira coordenada fixa e concentre os conjuntos nos pontos primários da subgrade central das n_3 grades $n_1 \times n_2$. Agora para cada par (ponto primário/secundário) considere a $2 \times n_3$ subgrade definida pela seleção do par com todos os valores possíveis da terceira coordenada. Em seguida utilize o n_3 -passo, definido na figura 2.9, em todas estas grades. Essa estratégia transporta os conjuntos dos pontos primários aos secundários, ao mesmo tempo que distribui os conjuntos pela terceira dimensão. Agora efetue o padrão, a partir do segundo passo, nas subgrades (SG). Por fim aplique a parte final para grades bidimensionais em todas as grades $n_1 \times n_2$. Desta forma resolve-se a troca completa no modelo H_1 para a grade $G = P_{n_1} \times \dots \times P_{n_d}$ onde $n_i \geq 9$ para pelo menos $\frac{2}{3}$ dos caminhos e $n_i \geq 5$ para os restantes em um número de ciclos igual ao diâmetro.

modelo H_* Roberts e Xu [30, 31, 32] demonstraram que para a grade bidimensional $G^2(V, E) = P_1 \times P_2$ o diâmetro orientado é igual ao diâmetro. Isto é, existe uma orientação $\vec{E}$ das arestas de $G^2(V, E)$ tal que o diâmetro do grafo orientado $\vec{G}(V, \vec{E})$ é $D = \vec{D}$. Segue que (lema 3) $g_{H_*}(G^2) = D$. Para a d -grade, $G^d = P_1 \times \dots \times P_d$, $d > 2$, a troca completa no modelo H_* é um problema em aberto. Mas note que para grades com dimensões grandes (tamanho de cada dimensão ≥ 9) tem-se que $g_{H_*}(G^d) \leq g_{H_1}(G^d) = D$.

$$g_{F_1}(G^2) = \begin{cases} 5 & \text{se } P_1 \text{ e } P_2 \text{ têm tamanho } 3 \\ D & \text{caso contrário} \end{cases}$$
$$g_{F_1}(G^d) \leq \begin{cases} D+1 & \text{se } d-1 \text{ caminhos têm tamanho } 3 \\ D & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Figura 2.8: Concentração nos vértices primários da grade $G^2 = P_9 \times P_9$.

Figura 2.9: Distribuição para os pontos secundários na terceira dimensão.

Toro

modelo H_1 O melhor resultado para a troca completa no modelo 1-porta unidirecional é devido a Cybenko, Krumme e Venkatamaram [10] que provaram o seguinte teorema:

Teorema 1 *Seja $T^d = R_{n_1} \times \dots \times R_{n_d}$, $d \geq 2$ um d -toro tal que $n_i \geq 4$ para $1 \leq i \leq d$ e $\exists k \mid n_k \geq 2d$. A troca completa em T^d pode ser completada em $D + 18d + 39$ ciclos, onde D é o diâmetro de T^d .*

Para encontrar o resultado acima os autores se basearam no esquema para duas dimensões da figura 2.10.

Figura 2.10: Padrão para o toro $R_4 \times R_8$.

Este esquema de comunicação utiliza um padrão de quatro passos que são repetidos até que a troca completa esteja completa. As arestas em que a transmissão ocorre no primeiro passo são denotadas por 0, as em que a transmissão ocorre no segundo passo por 1, e assim por diante.

As seguintes propriedades são evidentes

1. Os conjuntos se movem com velocidade máxima nas direções vertical e horizontal;
2. O sentido de uma linha vertical é oposto ao sentido das linhas verticais adjacentes. Isto também é válido para as linhas horizontais;
3. Cada conjunto recebido por um vértice em uma direção será, com um atraso de dois ciclos, transportado na direção ortogonal.

Verifica-se que um conjunto oriundo de um vértice origem arbitrário, s , atinge um vértice destino arbitrário, t , em no máximo $d + k$ ciclos, onde d é a distância entre os vértices s e t , e k é uma constante que não depende do tamanho da grade.

O conjunto no vértice s , em um número constante de ciclos, chegará a uma linha horizontal com orientação no sentido do vértice t . Então é transportado com velocidade máxima até que atinja uma linha vertical orientada na direção de t , que esteja no máximo a distância 1 de t . Após um atraso de dois ciclos, segue até um ponto a distância menor ou igual a dois de t , do qual o vértice t será atingido após um número constante de ciclos.

No caso de grades bidimensionais formadas por caminhos com tamanhos múltiplos de 4 tem-se que dado um vértice origem gasta-se no máximo 9 ($=8+1$) ciclos para que seus 4 vizinhos recebam a sua informação. É fácil ver que k é no máximo 18 neste caso. Verificamos experimentalmente que a diferença entre o tempo para a difusão e o diâmetro é no máximo 6 para grades bidimensionais com tamanho dos caminhos (múltiplos de 4) até 300×100 . No apêndice temos a implementação deste

esquema de comunicação em linguagem C, para a difusão, em grades toroidais com tamanhos múltiplos de 4.

A mesma estratégia pode ser adaptada para grades bidimensionais cujas dimensões não sejam múltiplos de 4 (figura 2.11). A idéia é: “Use o máximo de vértices possível na forma padrão, deixando no máximo uma linha de vértices em cada dimensão violando a consistência de transmissões”.

Figura 2.11: Padrão para o toro $R_7 \times R_5$.

A estratégia em dimensões maiores é uma generalização do caso bidimensional. Não foram encontrados padrões específicos para grades com 3, 4, ... dimensões (com tamanhos divisíveis por 6, 8, ...). A idéia é manter o mesmo padrão básico em uma das dimensões (horizontal). No lugar das linhas verticais, considere agora hiperplanos ortogonais à dimensão horizontal. Repita a idéia em cada hiperplano, em uma das dimensões escolha uma direção (para frente ou para trás), com transmissões nesta direção da mesma forma que para grade bidimensional (figura 2.12).

modelo H_* König, Krumme e Lazard [24] tentaram encontrar uma orientação do d -toro com diâmetro orientado igual ao diâmetro. Eles mostraram que dado um d -toro $T^d = R_{n_1} \times \dots \times R_{n_d}$, $g_{H_*}(T^d) = D(= \vec{D})$ quando $\exists R_{n_i}, R_{n_j}, i \neq j$ com tamanhos n_i, n_j tais que $n_i > 3$ é ímpar e $n_j \equiv 2 \mid 4$, ou n_i, n_j pares e maiores que 4, ou ainda se $n_i = n_j = 4$.

Um outro resultado é obtido, utilizando o algoritmo para o anel, em cada dimensão do d -toro. Em cada dimensão i , de tamanho ímpar, as arestas omitidas devem ter coordenadas combinando (isto é, os vértices incidentes nestas arestas devem ter a mesma ordenada na coordenada i), tais que formem linhas, colunas ou hiperplanos. Assim tem-se que $g_{H_*}(T^d) \leq D + k + d$, onde k é o número de dimensões de tamanho ímpar.

Figura 2.12: Estratégia para o toro tridimensional.

modelo F_1 Neste modelo para o 2-toro $T^2 = R_p \times R_q$ tem-se

$$g_{F_1}(T^2) \begin{cases} = D & \text{se } p \text{ e } q \text{ são pares} \\ \leq D + 2 & \text{se apenas } p \text{ ou } q \text{ é par} \\ \leq D + 4 & \text{se } p \text{ e } q \text{ são ímpares.} \end{cases}$$

Para isto utiliza-se o mesmo algoritmo que para a troca completa no anel dimensão por dimensão. Generalizando, no d -toro $T^d = R_{n_1} \times \dots \times R_{n_d}$ em dimensões onde o anel R_{n_i} tem tamanho par gasta-se $\left\lceil \frac{n_i}{2} \right\rceil = D(R_{n_i})$ ciclos e para dimensões com anel de tamanho ímpar gasta-se $\left\lceil \frac{n_i}{2} \right\rceil + 1 = D(R_{n_i}) + 2$ ciclos. Note que a dimensão do d -toro é igual à soma das dimensões dos anéis que o compõe.

Logo tem-se que, para $T^d = R_{n_1} \times \dots \times R_{n_d}$, $g_{F_1}(T^d) \leq D + 2x$, onde x é o número de anéis R_{n_i} de tamanho ímpar.

Hipercubo

modelo H_1 Existem vários algoritmos que resolvem a troca completa, no hipercubo $H_d(V, E)$, em $2d$ ciclos. Para isso sejam π_{i-} (π_{i+}) transmissões (simultâneas) de vértices com o i -ésimo bit com valor zero (um) para os seus vizinhos com o i -ésimo bit com valor um (zero). Seja Π a composição destas $2d$ transmissões em qualquer ordem. Verifica-se que Π resolve o problema em $2d$ ciclos.

Para provar a afirmação acima sejam u e $v \in V$. Estes vértices diferem no máximo d coordenadas, logo obtém-se v de u invertendo não mais do que d bits. As comunicações em Π podem ser vistas como inversões de bits, logo como Π é composta de todas as transmissões π_{i-} e π_{i+} alguma subsequência de transmissões de Π transformará u em v .

Foram encontrados algoritmos [25], para $d \geq 2$, utilizando estratégias não triviais, tais que

$$g_{H_1}(H_d) \leq 1.88d.$$

modelo H_* Seja $H_d(V, E)$ um hipercubo. Em [25] Krumme apresentou algoritmos, para $d \geq 3$, tais que $g_{H_*}(H_d) = d$. Em [26] foram apresentadas orientações das arestas para hipercubos com $d \geq 4$, tais que $\vec{D} = D$.

modelo F_1 Dado um hipercubo $H_d(V, E)$ usa-se o seguinte esquema. No ciclo i , $1 \leq i \leq d$, cada vértice troca todas as suas informações através da dimensão i . Por indução em d é fácil provar que

$$g_{F_1}(H_d) = \log_2 N = D.$$

2.5 Tabelas com os resultados conhecidos

Apresentaremos o número de ciclos de algoritmos conhecidos para a difusão e troca completa para as seguintes topologias. Caminho $P_n(V, E)$, anel $R_n(V, E)$, grade $G^d(V, E) = P_{n_1} \times \dots \times P_{n_d}$, toro $T^d(V, E) = R_{n_1} \times \dots \times R_{n_d}$ e hipercubo $H_d(V, E)$. Temos as próximas tabelas, onde m é o número de dimensões n_i (do toro) de tamanho ímpar.

- Difusão(H_1)

Caminho	Anel	Grade	Toro	Hipercubo
P_n	R_n	G^d	T^d	H_d
D	D, n par $D + 1, n$ ímpar	D	$D + m$	D

Tabela 2.2: Resultados conhecidos para a difusão.

- Troca completa

Observe que para a troca completa na grade e no hipercubo existem condições que devem ser satisfeitas para os algoritmos utilizados.

	Caminho	Anel	Grade
	P_n	R_n	G^d
H_1	$D + 1, n \text{ par}$ $D + 2, n \text{ ímpar}$	$D + \lceil \sqrt{2n} \rceil + 1, n \text{ par}$ $D + \lceil \sqrt{2n} \rceil + 2, n \text{ ímpar}$	D
H_*	$D + 1$	$D + 1, n \text{ par}$ $D + 2, n \text{ ímpar}$	D
F_1	$D, n \text{ par}$ $D + 1, n \text{ ímpar}$	$D, n \text{ par}$ $D + 2, n \text{ ímpar}$	D

Tabela 2.3: Resultados conhecidos para a troca completa no caminho, anel e grade.

	Toro	Hipercubo
	T^d	H_d
H_1	$D + 18d + 39$	$1.88D$
H_*	$D + m + d$	D
F_1	$D + 2m$	D

Tabela 2.4: Resultados conhecidos para a troca completa no toro e hipercubo.

Capítulo 3

Alguns trabalhos anteriores

3.1 Introdução

Neste capítulo veremos vários trabalhos anteriores sobre estruturas de interconexão que utilizam barramentos. A intenção comum em todos os trabalhos é o aumento do desempenho de redes de interconexão com o uso de barramentos. Veremos algoritmos para o cálculo do máximo, em uma matriz de processadores, com um ou mais barramentos globais. Entende-se por matriz a estrutura da grade toroidal, ou simplesmente o toro e uma pequena variação do mesmo. Inicialmente veremos as idéias e o algoritmo de Bokhari [8] que aborda o caso de matrizes com apenas um barramento global. Logo após estudaremos as generalizações propostas por Aggarwal [1].

Veremos duas generalizações do hipercubo propostas por Bhuyan e Agrawal [7]. Por fim veremos o artigo de Pham [22] onde é analisado o aumento de desempenho das estruturas de interconexão, representadas por grafos com a utilização de barramentos globais.

3.2 Cálculo do máximo com um barramento global

3.2.1 Introdução

Em [8] Bokhari aborda o cálculo do máximo em dois tipos de matrizes de processadores com um barramento global. O primeiro tipo de matriz é um d -toro $n \times n$. O outro é um d -toro $n \times n$ onde, além das conexões usuais, cada processador também está conectado, através de canais, aos seus vizinhos na diagonal. Denomina-se esta estrutura por matriz com 8 vizinhos (figura 3.1).

O autor apresenta resultados para matrizes bidimensionais e suas generalizações pa-

Figura 3.1: Uma matriz com 8 vizinhos 5×5 .

ra os casos d -dimensionais (onde cada dimensão tem tamanho n). São apresentadas as vantagens do uso de um algoritmo misto, que utiliza os canais de comunicação e o barramento global, para o cálculo do máximo entre os valores armazenados inicialmente em cada processador.

3.2.2 Modelo

O modelo utilizado, em relação aos vértices e arestas, é o F_* sendo que o tempo de transmissão de um vértice é proporcional ao número de arestas utilizadas para o envio de mensagens. Para o barramento em um dado ciclo apenas uma informação pode ser transmitida. O tempo de transmissão de um vértice é proporcional ao número de arestas utilizadas. São propostos dois modelos para o tempo de propagação de uma mensagem no barramento: constante e logarítmico (no número de elementos do barramento).

Dada uma matriz $G(V, E)$, cada vértice $v \in V$ contém inicialmente um valor $\text{Val}(v)$. O problema tratado é o de achar o máximo de $\text{Val}(v)$ e transmiti-lo a todos os vértices.

3.2.3 Notações

Neste capítulo serão utilizadas as seguintes notações:

- n tamanho de cada dimensão da matriz; uma matriz bidimensional tem n^2 vértices;
- A número de vértices adjacentes a cada vértice na matriz. No caso bidimensional A é 4 no caso de toros e 8 na matriz com 8 vizinhos;

- G_n tempo do ciclo de comunicação global. $G_n = O(\log n)$ no modelo logarítmico e $G_n = O(1)$ no caso constante;
 - T tempo para o cálculo do máximo para o algoritmo misto;
 - q dimensão da matriz;
 - D diâmetro da matriz.
-

3.2.4 Algoritmos para matrizes $n \times n$

Comunicações locais

O algoritmo que utiliza somente as arestas é o seguinte. Dada uma matriz $G(V, E)$, em cada ciclo ou passo, cada vértice $v \in V$ envia o seu valor $\text{Val}(v)$ para todos os seus vizinhos. Em seguida cada vértice v atualiza o seu valor (fazendo $\text{Val}(v)$ igual ao máximo até então encontrado), se necessário, conforme os valores recebidos.

Em um passo do algoritmo todos os vértices trocam seus valores com seus vizinhos. O tempo gasto em cada passo do algoritmo é portanto linear em A . Se repetirmos o passo, o número suficiente de vezes, o valor máximo será difundido na matriz.

Observa-se que após o j -ésimo passo o valor máximo terá se propagado para todos os vértices a distância $\leq j$ do vértice que continha o valor máximo no início. Segue que o número de passos (j) para atingirmos o objetivo é no máximo D .

Como para $A = 4$ temos $D = n$, ou ainda se $A = 8$ temos $D = \frac{n}{2}$, segue que o número de ciclos é $4n$.

Comunicações globais

Para o cálculo do máximo utiliza-se a seguinte idéia. Um vértice que deseja enviar seu valor aos outros, o faz através do barramento global. Os vértices que receberem um valor menor que o seu próprio valor são candidatos a próxima transmissão. Supõe-se que se dois ou mais vértices tentam utilizar o barramento simultaneamente existe uma forma de permitir o acesso a apenas um dos mesmos.

É fácil ver que o pior caso para este mecanismo é $n^2 G_n$ para matrizes bidimensionais.

Algoritmo misto

Veremos agora o algoritmo que utiliza as arestas e o barramento. A idéia principal é aplicar o algoritmo local nos primeiros k passos e então aplicar o algoritmo global para

completar a tarefa. É claro que para o algoritmo global apenas os vértices que não tiveram os seus valores alterados são candidatos à transmissão.

O problema agora é o de encontrar o ponto ótimo de transição (k) entre os dois algoritmos. Para isso é introduzido o termo *sobrevivente*.

Definição 1 *Um vértice que não teve o seu valor atualizado em um dado ciclo, nem em ciclos anteriores, é chamado sobrevivente.*

Um vértice que sobreviveu até o j -ésimo ciclo (do algoritmo local) é chamado j -sobrevivente.

Para formalizar o algoritmo misto é preciso calcular o número máximo de vértices sobreviventes no ciclo k do algoritmo local. Denomina-se este número por S_k . Segue que, no pior caso, o tempo para encontrar o máximo é

$$T = Ak + S_k G_n.$$

Cálculo do número máximo de sobreviventes (S_k) no ciclo k .

Primeiramente estuda-se o caso em que no início todos os vértices contêm valores distintos. Observe que, neste caso, os vértices k -sobreviventes estão a uma distância de no mínimo $k + 1$ entre si. Será utilizada a seguinte abordagem. Procura-se o número máximo de nós tais que os mesmos estejam a uma distância de pelo menos $k + 1$ entre si.

Para este cálculo o problema é dividido em 2 partes, k -par e k -ímpar.

k -ímpar: O número de arestas em um 2-toro $n \times n$ é $2n^2$. Cada vértice 1-sobrevivente não pode estar a uma distância menor que 2 de qualquer outro 1-sobrevivente. Observando que cada 1-sobrevivente *forma um padrão* com suas arestas incidentes (figura 3.2), o problema se resume em descobrir quantos destes padrões podem ser colocados no 2-toro, sem sobreposição.

Segue que $S_1 = \frac{2n^2}{4}$ (cada padrão tem 4 arestas). Os 3-sobreviventes não podem estar a uma distância menor que 4 entre si. Neste caso é considerada o padrão que cada 3-sobrevivente forma com as arestas que transmitiram seu valor (figura 3.3).

Segue que o número máximo destes padrões que pode ser colocado no 2-toro sem sobreposição é $S_2 = \frac{2n^2}{16}$.

Como no caso geral para cada k -ímpar, cada k -sobrevivente forma um padrão com $(k + 1)^2$ arestas, tem-se

$$S_k = \frac{2n^2}{(k + 1)^2}.$$

Figura 3.2: 1-sobreviventes em um toro.

k -par: O número de vértices em um 2-toro $n \times n$ é n^2 . No segundo ciclo, os 2-sobreviventes não podem ter distância entre si menor do que 3. Neste caso é utilizado o padrão composto pelo 2-sobrevivente e seus 4 vértices adjacentes (figura 3.4). Como este padrão tem 5 vértices, segue que o número máximo destes padrões, sem sobreposição, em um 2-toro $n \times n$ é $S_2 = \frac{n^2}{5}$.

Para os vértices 4-sobreviventes é formado o padrão composto pelo próprio vértice, e pelos vértices à distância 1 e 2 do mesmo (figura 3.5). Segue que $S_4 = \frac{n^2}{13}$.

No caso geral, como o número de vértices à distância menor ou igual a k é $\frac{(k+1)^2+1}{2}$, segue que

$$S_k = \frac{2n^2}{(k+1)^2+1}.$$

Escolha do ponto ótimo de transição

Observando que $S_k = \frac{2n^2}{(k+1)^2}$ é um limite superior para o máximo de k -sobreviventes em um 2-toro, tem-se:

$$T = 4k + \frac{2n^2}{(k+1)^2} G_n$$

que atinge o mínimo para $k = (G_n n^2)^{\frac{1}{3}} - 1$. Portanto

$$T_{\min} = 6(G_n n^2)^{\frac{1}{3}} - 4.$$

Figura 3.3: 3-sobreviventes em um toro.

Estudo do número de k -sobreviventes para a matriz de 8 vizinhos

Observe que o conjunto de todos os vértices a uma distância menor ou igual a k , de um dado vértice, tem a forma de um quadrado. Assim o problema de descobrir o número máximo de k -sobreviventes recai no problema de verificar quantos quadrados de lado $k+1$ cabem na matriz $n \times n$.

Para $k = 1$, cada 1-sobrevivente está no centro de um quadrado 2×2 , logo $S_1 = \frac{n^2}{4}$. Da mesma forma, $S_2 = \frac{n^2}{9}$. No caso geral temos

$$S_k = \frac{n^2}{(k+1)^2}.$$

Segue que o número de ciclos é

$$T = 8k + \frac{n^2}{(k+1)^2} G_n$$

que atinge o mínimo para $k = \left(\frac{n^2 G_n}{4}\right)^{\frac{1}{3}} - 1$, o que leva a

$$T_{\min} = 12G_n^{\frac{1}{3}} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{2}{3}} - 8.$$

Figura 3.4: 2-sobreviventes em um toro.

Vértices com valores repetidos

Aplicando as idéias vistas, no caso de vértices com valores repetidos, tem-se que o número de vértices sobreviventes após a primeira fase, com valores distintos, é menor que o número obtido anteriormente (S_k). Na fase global do algoritmo supõe-se que um vértice deixa de ser sobrevivente quando recebe um valor maior, ou igual ao dele. Desta forma os tempos calculados acima ainda são válidos para o caso onde ocorrem valores repetidos.

3.2.5 Generalização para matrizes q -dimensionais

Para o anel, o número máximo de sobreviventes no ciclo k é $\frac{n}{k+1}$ (trivial), logo o tempo mínimo para o cômputo do máximo usando o algoritmo misto é

$$T_{\min} = 2^{\frac{3}{2}}(((n+1)G_n)^{\frac{1}{2}} - 1).$$

Dada uma matriz com n^q vértices, na forma de q -toro (ou matriz com 8-vizinhos), tem-se:

- cada vértice tem grau $O(q)$;
- o diâmetro é $O(qn)$;
- cada ciclo da primeira fase leva $O(q)$;
- após o k -ésimo ciclo (local), cada vértice sobrevivente terá capturado um volume proporcional a k^q ;

Figura 3.5: 4-sobreviventes em um toro.

- o número máximo de sobreviventes após o passo k é proporcional a $\frac{n^q}{k^q}$.

Logo o tempo do algoritmo é:

$$T = O\left(kq + \frac{n^q}{k^q}G_n\right)$$

que é mínimo quando

$$k = (n^q G_n)^{\frac{1}{q+1}}$$

e portanto

$$T_{\min} = O((q+1)(n^q G_n)^{\frac{1}{q+1}}).$$

3.3 Cálculo do máximo com k barramentos globais

Apresentaremos agora o trabalho [1], onde Aggarwal demonstra limites inferiores e generaliza os resultados de Bokhari [8] apresentados na seção anterior. Utilizaremos as mesmas notações da seção anterior.

O algoritmo misto encontra o máximo de uma matriz bidimensional de processadores em $O\left(\min((n^2 G_n)^{\frac{1}{3}}, n)\right)$. Se $G_n \geq n$, o tempo de propagação no barramento global é muito grande e o máximo pode ser calculado em $O(n)$ utilizando-se apenas as arestas. Caso contrário utilizando-se uma variação do algoritmo de Bokhari pode-se dividir o algoritmo em 2 etapas. Na primeira, a matriz é particionada em $(\frac{n}{G_n})^{\frac{2}{3}}$ submatrizes com $(n^2 G_n)^{\frac{1}{3}} \times (n^2 G_n)^{\frac{1}{3}}$ vértices cada. Em cada submatriz o tempo para o cálculo do máximo é $O((n^2 G_n)^{\frac{1}{3}})$. Armazena-se o máximo no vértice mais a esquerda e no topo, para cada uma das $(\frac{n}{G_n})^{\frac{2}{3}}$ submatrizes. O máximo entre estes valores é calculado na segunda etapa utilizando o barramento global. Como a segunda etapa consome $O((\frac{n}{G_n})^{\frac{2}{3}})$ ciclos do barramento, o algoritmo é $O((n^2 G_n)^{\frac{1}{3}})$. Note que com esta representação é muito mais fácil a generalização para dimensões maiores.

Veremos a seguir o limite inferior para o problema do cálculo do máximo em uma matriz com apenas 1 barramento global, assim como a generalização do problema para o caso de k barramentos globais.

3.3.1 Limite inferior para um barramento global

Veremos que os resultados obtidos por Bokhari são ótimos, fora uma constante multiplicativa. No decorrer desta prova, será utilizada, sem perda de generalidade, a matriz com 8 vizinhos. Além disso, supõe-se que as transmissões vértice-vértice gastam tempo 1 e uma transmissão global, isto é, uma transmissão através do barramento, tempo G_n , e ainda, as mesmas podem ser efetuadas ao mesmo tempo. Note que estas condições são mais amplas do que as utilizadas anteriormente.

Seja $G(V, E)$ o grafo correspondente a uma matriz com 8 vizinhos $n \times n$. Seja $V = \{v_1, \dots, v_i, \dots, v_{n^2}\}$. Seja $I_i(t)$ o maior número de vértices cujos máximos podem ser computados pelo vértice v_i , até o instante t . Diz-se que v_i tem os “dados” de $I_i(t)$ vértices no instante t . A quantidade de informação acumulada em v_i consiste das informações enviadas por arestas e pelo barramento global. Estas quantidades serão denotadas, respectivamente, por $I'_i(t)$ e $I''_i(t)$. Em $t = 0$ temos $I'_i(t) = I''_i(t) = 0$, $I_i(t) = 1$. Para qualquer t positivo $I_i(t) \leq I'_i(t) + I''_i(t) + 1$.

Lema 4 *Dado $G_n > 0$, existem constantes positivas c_1, c_2 e c_3 tais que para todo i , $1 \leq i \leq n^2$, e para qualquer $t \geq 0$ temos*

$$I_i(t) \leq \left(\frac{c_1 t^3}{G_n}\right) + c_2 t^2 + c_3.$$

Prova: Note que para $t = 0$, $v_i \in V$, $I_i(t) = 1$ e a desigualdade acima é verdadeira para $c_3 \geq 1$. Seja $t = mG_n + l$, para $0 \leq l \leq G_n - 1$, e sejam $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$ ($k \leq m$) os vértices

que efetuaram a difusão até o momento. Então, para todo j , v_i transmite todas as suas informações acumuladas até o instante $t = u_j$, a todos os outros vértices.

Note que apenas $I''_{i_j}(u_j)$ foram recebidas pelo barramento global. Esta mesma quantidade de informação foi recebida também por todos os outros vértices nas difusões anteriores. Segue que a quantidade de informação não redundante que é difundida por v_{i_j} , é no máximo $I_{i_j}(u) - I''_{i_j}(u)$. Logo o vértice v_{i_j} efetua a difusão, com no máximo $I_{i_j}(u_j) - I''_{i_j}(u_j) \leq I'_{i_j}(u_j) + 1$ informações novas. Portanto

$$I_i(t) \leq I'_i(t) + \sum_{\sigma=1}^m \left(\max_j I'_j(\sigma G_n + l) + 1 \right) + 1$$

ou seja,

$$I_i(t) \leq I'_i(t) + m + \sum_{\sigma=1}^m \left(\max_j I'_j(\sigma G_n + l) \right) + 1.$$

No instante t , para qualquer i , o vértice v_i recebe através de arestas, as informações de todos os vértices a uma distância menor ou igual a t de v_i . Observando que as informações recebidas referentes a difusões anteriores são redundantes, tem-se

$$I'_i(t) \leq (2t + 1)^2$$

efetuando a substituição na equação anterior tem-se

$$I_i(t) \leq (2t + 1)^2 + m + \sum_{\sigma=1}^m (2(\sigma G_n + l) + 1)^2 + 1.$$

Através da manipulação algébrica chegamos a

$$\begin{aligned} &= 4t^2 + 2t + 2 + m + \sum_{\sigma=1}^m (4(\sigma G_n + l)^2 + 4(\sigma G_n + l) + 1) \\ &= 4t^2 + 2t + 2 + m + 4 \sum_{\sigma=1}^m (\sigma G_n + l)^2 + 4 \sum_{\sigma=1}^m (\sigma G_n + l) + m \\ &\leq 4t^2 + 2t + 2 + 2m + 4G_n^2 \sum_{\sigma=1}^m (\sigma + 1)^2 + 4G_n \sum_{\sigma=1}^m (\sigma + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 4t^2 + 2t + 2 + 2m + 4G_n^2 m^3 + 4G_n m^2 \\
&= 4t^2 + 2t + 2 + 2\frac{t}{G_n} + 4\frac{t^3}{G_n} + 4\frac{t^2}{G_n}.
\end{aligned}$$

Se $t \leq 1$, seja c_3 tal que

$$I_i(t) \leq 8 + \frac{10}{G_n} \leq c_3.$$

Se $t > 1$

$$I_i(t) \leq 5t^2 + 5\frac{t^3}{G_n}.$$

Segue que $\exists c_1, c_2$ e c_3 tais que

$$I_i(t) \leq \frac{c_1 t^3}{G_n} + c_2 t^2 + c_3, t \geq 0. \quad \square$$

Teorema 2 *O cálculo do máximo de um conjunto de valores armazenados em uma matriz $n \times n$, com um barramento global, leva $\Omega(\min(n, (n^2 G_n)^{\frac{1}{3}}))$.*

Prova: É analisado apenas o caso em que $G_n < n$. Se T é o tempo mínimo para o cálculo do máximo na matriz, então para algum i , $I_i(T) \geq n^2$. Mas $I_i(T) \leq \frac{c_1 T^3}{G_n} + c_2 T^2 + c_3$, logo tem-se

$$n^2 \leq \frac{c_1 T^3}{G_n} + c_2 T^2 + c_3$$

e segue que $T = \Omega((n^2 G_n)^{\frac{1}{3}})$. $\square$

Teorema 3 *O cálculo do máximo de um conjunto de valores armazenados em uma matriz d -dimensional com n^d vértices e um barramento global é $\Omega(\min(n, (n^d G_n)^{\frac{1}{d+1}}))$.*

Prova: Análoga à anterior, observando que $I'_i(t) \leq (2t + 1)^d$ no caso d -dimensional. $\square$

3.3.2 Análise para k barramentos globais

Analisa-se o caso em que se têm k barramentos globais em uma matriz d -dimensional com n^d vértices. As hipóteses em relação à utilização e ao tempo de propagação no barramento global são as mesmas discutidas anteriormente. Supõe-se também que, a cada instante, um vértice não pode estar conectado a mais que um barramento, assim como, apenas um vértice pode difundir mensagens em um barramento, a cada ciclo do mesmo.

Um algoritmo

No caso anterior (apenas 1 barramento global), se $G_n \geq n$ o máximo pode ser calculado em $O(n)$ ciclos utilizando-se apenas as arestas. Além disso, para o algoritmo abaixo, mais do que n barramentos não ajudam a calcular o máximo com maior rapidez, segue que pode se supor $G_n < n$ e $k \leq n$. Para efeito de simplificação do algoritmo abaixo seja n divisível por k e por G_n .

Algoritmo MAXFIND.

1. Fase 1: Particione a matriz d -dimensional inicial em $m = (\frac{nk}{G_n})^{\frac{d}{d+1}}$ submatrizes d -dimensionais com $(\frac{n^d G_n}{k})^{\frac{1}{d+1}}$ vértices cada. Calcule o máximo de cada uma das submatrizes em $O((\frac{n^d G_n}{k})^{\frac{1}{d+1}})$ (tamanho do lado de cada submatriz) usando somente as arestas. Sejam $v_1, v_2, \dots, v_m$ os vértices que contêm o máximo de cada submatriz.
2. Fase 2: Se $k \geq m$, ou seja, $k \geq (\frac{n}{G_n})^d$, renomeie $v_1, \dots, v_m$, como $u_1, \dots, u_m$ e armazene $-\infty$ em outros, que serão denominados $u_{m+1}, \dots, u_k$.

Caso contrário, particione os vértices v_i em k grupos de tamanho $\frac{m}{k}$ e conecte o j -ésimo barramento ao j -ésimo grupo de vértices para $1 \leq j \leq k$. Em seguida calcule o máximo destes grupos em $O(\frac{m G_n}{k})$, ou seja, em $O((\frac{n^d G_n}{k})^{\frac{1}{d+1}})$ ciclos. Sejam $u_1, \dots, u_k$ os vértices que contêm o máximo de cada grupo.

3. Fase 3: Neste instante, o número de vértices candidatos a serem máximo é igual ao número de barramentos. Seja $M = \max\{u_1, \dots, u_k\}$. M pode ser calculado em $\frac{\log k}{\log G_n}$ etapas, onde cada etapa leva $O(G_n)$ ciclos. Na i -ésima etapa, $1 \leq i \leq \frac{\log k}{\log G_n}$, o número de candidatos a M é reduzido de $\frac{k}{G_n^{(i-1)d}}$ para $\frac{k}{G_n^{id}}$ vértices.

A etapa i consiste de 2 subetapas, uma que utiliza apenas as arestas, e a outra que só efetua difusões nos barramentos. Sem perda de generalidade, é suposto que a distância entre cada par de vértices é pelo menos G_n . Se não for o caso, pode-se calcular o máximo de todos os vértices à distância $\leq G_n$ de outros vértices e armazenar o resultado em outros vértices, de tal forma que a distância entre cada par de vértices (candidatos a M) seja no mínimo G_n . Como esta operação é $O(G_n)$ a complexidade do algoritmo permanece inalterada.

Na primeira subetapa da etapa i , particione $u_1, \dots, u_{\frac{k}{G_n^{(1-1)^d}}}$ em $\frac{k}{G_n^{(1-1)^d}}$ grupos de G_n^d vértices cada e relacione G_n^d barramentos para cada grupo (note que $G_n^d \leq G_n^{di}$). Utilize os barramentos para transmitir os valores dos vértices no grupo, para vértices que estejam a uma distância menor ou igual a G_n entre si, de tal forma que cada vértice receba apenas uma transmissão. Isto leva tempo G_n .

Na segunda subetapa, utilize as arestas para calcular o máximo em cada grupo. Como todos os G_n^d vértices de um grupo estão distantes em no máximo G_n entre si, o máximo pode ser calculado e armazenado em um vértice “próximo” em $O(G_n)$ ciclos. Logo cada etapa é $O(G_n)$.

Teorema 4 *O algoritmo MAXFIND calcula o máximo em*

$$O\left(\left(\frac{n^d G_n}{k}\right)^{\frac{1}{d+1}} + G_n \frac{\log n}{\log G_n}\right).$$

Prova: As etapas 1 e 2 são $O\left(\left(\frac{n^d G_n}{k}\right)^{\frac{1}{d+1}}\right)$ e a etapa 3 é $O\left(G_n \frac{\log n}{\log G_n}\right)$. □

Limite inferior

Teorema 5 *É necessário tempo*

$$\Omega\left(\min\left(n, \left(\frac{n^d G_n}{k}\right)^{\frac{1}{d+1}} + G_n \frac{\log n}{\log G_n}\right)\right)$$

para o cálculo do máximo em uma matriz d -dimensional com k barramentos globais.

Prova: Se $G_n \geq n$, temos que o tempo é $\Omega(n)$ (usando-se apenas as arestas) pois o tempo de propagação no barramento é muito grande, para que o mesmo seja utilizado para o cálculo do máximo eficientemente.

Se $G_n < n$, demonstra-se que o tempo T é

$$\Omega\left(\max\left(G_n \frac{\log n}{\log G_n}, \left(\frac{n^d G_n}{k}\right)^{\frac{1}{d+1}}\right)\right).$$

Utiliza-se a notação $I_i(t)$ como o número de vértices dos quais o máximo pode ser calculado por V_i até o tempo t .

Tem-se que $T = \Omega\left(G_n \frac{\log n}{\log G_n}\right)$ pois cada vértice está conectado a no máximo um barramento em cada instante.

- se $G_n = \text{constante}$, $T = \Omega(\log n)^1$.
 - para $G_n \geq 2$ mostrar-se-á que para qualquer $v_i \in V$, $I_i(t) \leq G_n^{3d(\alpha+1)}$, $t = \alpha G_n + \beta$ onde $\alpha \geq 0$ e $0 \leq \beta < G_n$.
- Se T é o tempo de um algoritmo para o cálculo do máximo, $I_i(T) \geq n^d$ para algum $v_i \in V$. Segue que

$$n^d \leq G_n^{3d(\alpha+1)}$$

$$d \log n \leq 3d(\alpha + 1) \log G_n$$

$$\text{como } T = \alpha G_n + \beta \leq (\alpha + 1)G_n$$

$$T \geq G_n \frac{\log n}{\log G_n}$$

A prova será feita por indução

- Base: $I_i(0) = 1 \leq G_n^0$
- Passo: $I_i(t) \leq G_n^{3d\alpha}$ para $(\alpha - 1)G_n \leq t \leq \alpha G_n$.
Mostra-se que $I_i(t) \leq G_n^{3d\alpha}$ para $\alpha G_n \leq t \leq (\alpha + 1)G_n$. Para isso varia-se β da fórmula $t = \alpha G_n + \beta$.
- * $\beta < G_n$, então nenhuma difusão foi recebida desde o instante (αG_n) , e v_i recebe, através de arestas, informações de no máximo $(2\beta + 1)^d$ vértices. Logo

$$I_i(t) \leq (2\beta + 1)^d G_n^{3d\alpha} \leq G_n^{3d(\alpha+1)}$$

- * $\beta = G_n$, v_i recebe informações de no máximo $(2G_n + 1)^d$ vértices, através de arestas, e recebe no máximo uma difusão de algum outro vértice. Consequentemente

$$I_i(t) \leq (2G_n + 1)^d G_n^{3d\alpha} + G_n^{3d\alpha} \leq G_n^{3d(\alpha+1)}$$

Para demonstrar $T = \Omega\left(\left(n^d \frac{G_n}{k}\right)^{\frac{1}{d+1}}\right)$ supõe-se que todo vértice está conectado a todos os barramentos e recebe todas as k difusões, simultaneamente, em intervalos de G_n ciclos de tempo. Esta prova está baseada no número de barramentos ser limitado.

¹Resultado conhecido para PRAM's

Lema 5 *Dados k barramentos, para todo i , $1 \leq i \leq n^2$, e para qualquer $t \geq 0$ e $G_n > 0$ temos que*

$$I_i(t) \leq \frac{c_1 k t^3}{G_n} + c_2 t^2 + c_3$$

para constantes positivas c_1, c_2 e c_3 .

Prova: Pequena variação do lema 4.

Utilizando novamente o resultado de que, para algum i , $I_i(T) \geq n^d$, temos

$$T = \Omega \left(\left(n^d \frac{G_n}{k} \right)^{\frac{1}{d+1}} \right).$$

□

3.4 Hipercubo generalizado

Bhuyan e Agrawal [7] apresentaram uma generalização do hipercubo, bem como várias propriedades importantes dos mesmos. Uma estrutura de interconexão, em geral, deve ter um baixo número de canais por nó, diâmetro pequeno e um grande número de caminhos alternativos entre quaisquer dois nós. Traduzindo em termos de grafos, queremos um grafo da seguinte forma

- vértices com grau baixo;
- diâmetro pequeno;
- alta conectividade.

O hipercubo com $N = 2^n$ vértices tem vértices de grau $n = \log_2 N$, diâmetro n e conectividade n .

Em uma rede de interconexão, a distância média entre nós, a densidade do tráfego de mensagens, e a tolerância a falhas são muito dependentes do diâmetro e do grau dos nós. Existe um compromisso entre o grau de um nó e o diâmetro.

O anel e o grafo completo representam os extremos. Observe que a multiplicação do diâmetro pelo grau do nó pode ser um critério razoável para medir o desempenho de uma estrutura de interconexão.

3.4.1 Generalização

A nova estrutura tem as seguintes características

1. permite um número arbitrário de nós;
2. seu projeto está baseado no diâmetro permitido;
3. grande tolerância a falhas;
4. hipercubo e grafo completo podem ser representados com esta estrutura.

Definição 2 *Seja N o número de vértices. Represente N como produto de inteiros positivos m_i 's, isto é*

$$N = m_r m_{r-1} \dots m_1, m_i > 0, 1 \leq i \leq r.$$

Cada vértice $v \in V$ é dado por uma r -upla $(x_r x_{r-1} \dots x_1)$ com $0 \leq x_i \leq (m_i - 1)$. Cada vértice $v = (x_r x_{r-1} \dots x_{i+1} x_i x_{i-1} \dots x_1)$ é adjacente aos vértices

$$v = (x_r x_{r-1} \dots x_{i+1} x'_i x_{i-1} \dots x_1)$$

para todo $1 \leq i \leq r$, onde x'_i está entre 0 e $(m_i - 1)$, $x'_i \neq x_i$ (figura 3.6).

Figura 3.6: Exemplo: para $N = 24 = m_1 m_2 m_3$ com $m_1 = 2, m_2 = 3, m_3 = 4$ tem-se $V = (x_3 x_2 x_1), 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 2, 0 \leq x_3 \leq 3$.

Observe que para o hipercubo generalizado $G(V, E)$

- tem r dimensões, com m_i vértices na i -ésima dimensão;
- um vértice em um dado eixo é adjacente a todos os outros vértices deste eixo;

- para cada vértice $v \in V$ existem $(m_i - 1)$ arestas incidentes na direção i . Logo o grau de v é $\sum_{i=1}^r (m_i - 1)$;
 - o número de arestas é $|E| = L = \frac{|V|}{2} \sum_{i=1}^r (m_i - 1)$;
 - a distância entre dois vértices $v_1, v_2 \in V$ é igual a soma do número de coordenadas em que os mesmos diferem;
-
- seu diâmetro é r .

3.4.2 Comunicações

Para a transmissão de uma mensagem do vértice v_1 ao vértice v_2 , do hipercubo generalizado $G(V, E)$, utiliza-se o seguinte procedimento.

1. A mensagem deve conter além da informação a ser transmitida, o endereço do vértice destino.
2. Enquanto o endereço destino não for igual ao endereço do vértice, transmita a mensagem na direção da primeira coordenada do endereço que não seja igual ao endereço do vértice atual.

Para a difusão tem-se um algoritmo de r ciclos. Sem perda de generalidade supõe-se que o vértice $(00 \dots 0)$ é o originador da mensagem.

1. O originador envia a mensagem junto com um rótulo de valor i , na direção da dimensão i .
2. para $i = 1$ até r faça
 - (a) os vértices que contêm a mensagem com rótulo $p \geq 1$ a transmitem na dimensão p .
 - (b) os vértices que recebem a mensagem decrementam em um o seu rótulo.

3.4.3 Análise

Quando se deseja um grafo $G(V, E)$ com N vértices e diâmetro no máximo d , devemos representar N como o produto de $r \leq d$ fatores, $N = m_r \dots m_1$. Tem-se assim que o grau de cada vértice é $\sum_{i=1}^r (m_i - 1)$.

Lema 6 Quando $\sqrt[r]{N}$ é inteiro, um grafo de custo ótimo (considerando o critério de minimizar o produto entre diâmetro e grau de cada vértice) com diâmetro r é obtido com $m_i = \sqrt[r]{N}, 1 \leq i \leq r$.

Prova: Como o grau é o mesmo para todos os vértices, queremos minimizar $L = \sum_{i=1}^r (m_i - 1)$, com respeito aos m_i 's

$$m_1 = \frac{N}{m_r m_{r-1} \dots m_2}$$

$$L = \sum_{i=2}^r (m_i - 1) + \left(\frac{N}{m_r m_{r-1} \dots m_2} - 1 \right)$$

queremos

$$\frac{\partial L}{\partial m_r} = \frac{\partial L}{\partial m_{r-1}} = \frac{\partial L}{\partial m_2} = 0$$

que leva a $m_r = m_{r-1} = \dots = m_2 = m_1 = \sqrt[r]{N}$.

Definindo o fator custo ϵ como o produto do diâmetro pelo grau de um dos vértices, tem-se o seguinte problema de otimização inteira:

$$\begin{aligned} \min & (r \sum_{i=1}^r (m_i - 1)) \\ \text{s.a.} & \begin{cases} \prod_{i=1}^r m_i = N \\ r, m_i \in \mathcal{N}. \end{cases} \end{aligned}$$

Bhuyan e Agrawal [7] apresentam algumas conjecturas a respeito, como por exemplo, para N potência de 2 o custo ótimo é obtido quando $r = \lfloor \log_4 N \rfloor$.

3.4.4 Outra generalização

Na generalização anterior, N especifica o número de vértices da estrutura (grafo). Será visto agora [7] o caso em que N especifica o número de barramentos (hiperarestas). Esta estrutura será denominada hiper-barramento generalizado (GHB).

Definição 3 A estrutura GHB, $G(V, E)$, consiste de $N = m_r m_{r-1} \dots m_1$ hiperarestas. Uma hiperaresta é denotada pela r -tupla $(x_r \dots x_i \dots x_1)$ para $0 \leq x_i \leq m_i - 1, 1 \leq i \leq r$. Um vértice será denotado por

$$(x_r \dots x_{i+1} [y_i z_i] x_{i-1} \dots x_1)$$

e isto significa que o mesmo pertence as hiperarestas

$$(x_r \dots x_{i+1} y_i x_{i-1} \dots x_1) \text{ e } (x_r \dots x_{i+1} z_i x_{i-1} \dots x_1)$$

com $y_i, z_i \in \{0, 1, \dots, (m_i - 1)\}$ e a posição i pode variar entre 1 e r (figura 3.7).

Figura 3.7: GHB, com $N = 3 * 2$.

Note que

- cada vértice tem grau 2;
- o número de vértices em uma hiperaresta é

$$|e| = \sum_{i=1}^r (m_i - 1), e \in E.$$

- o número total de vértices é

$$|V| = \frac{N}{2} \sum_{i=1}^r (m_i - 1).$$

- seu diâmetro é $r + 1$.

3.5 Desempenho de redes de interconexão com barramentos

Neste trabalho Meyer auf der Heide e Pham [22] tratam principalmente de duas questões:

1. Até que ponto redes de interconexão podem ter a sua velocidade aumentada com o uso de barramentos?
2. Até que ponto células de memória compartilhada de uma PRAM podem ser trocadas por canais de comunicação (arestas), em uma rede de interconexão? (Note que uma célula de memória compartilhada pode ser vista como um barramento global.)

Serão apresentados limites superiores e inferiores para a computação de operações associativas (e.g. adição, máximo) em grafos com barramentos. Será apresentada também uma nova estrutura denominada *rede planar com barramentos*.

3.5.1 Definições e notações

No decorrer do trabalho, em relação a comunicação no barramento, são utilizadas notações bem conhecidas para a PRAM. No que se segue, entende-se por “escrita no barramento” o envio de alguma informação e por “leitura do barramento” a recepção de uma informação através do mesmo. São utilizados os modos

- EREW apenas um vértice pode utilizar o barramento para escrita e apenas um vértice pode receber o que foi escrito;
- CREW apenas um vértice pode transmitir ao barramento por vez, vários vértices podem receber a transmissão, concorrentemente;
- CRCW tanto a escrita como a leitura podem ser concorrentes, neste caso utiliza-se um método para resolver conflitos de escrita.

Serão utilizados grafos $G(V, E)$, $V = \{v_1, \dots, v_N\}$ para representar as redes de interconexão, em conjunto com m barramentos (hiperarestas) $B_1, \dots, B_m$ ($B_i \subset V, 1 \leq i \leq m$). Supõe-se que cada vértice contém um valor inicial. Por fim v_1 conterá o resultado final.

As seguintes definições serão utilizadas no decorrer desta seção do texto.

Definição 4 Dado um grafo $G(V, E)$ e $t \geq 0$, o t -ambiente de um vértice $v \in G$ consiste de todos os vértices que podem ser atingidos a partir de v , com um caminho de tamanho no máximo t .

Definição 5 Dado um grafo $G(V, E)$ e $t \geq 0$, um conjunto t -dominante é um subconjunto $S \subseteq V$, tal que os t -ambientes dos vértices de S cobrem V .

Seja $L_G(t)$ a cardinalidade do menor conjunto t -dominante de um grafo G .

Definição 6 Dado um grafo $G(V, E)$ e $t \geq 0$, uma t -rede é um subconjunto $S \subseteq V$ tal que os t -ambientes dos vértices em S são disjuntos.

Seja $l_G(t)$ a cardinalidade da maior t -rede de um grafo G .

3.5.2 Algoritmos para estruturas com barramentos globais

Em relação aos modelos de interconexão considera-se uma estrutura representada por um grafo $G(V, E)$, com N vértices e m barramentos globais (com alguma forma de resolver conflitos de leitura/escrita). Sem perda de generalidade supõe-se que $m \leq N$.

Teorema 6 Dado um grafo $G(V, E)$ com m barramentos globais, qualquer operação associativa pode ser realizada em

$$O\left(\min_{t>0}\left(t + \frac{L_G(t)}{m}\right) + h(N)\right)$$

ciclos, onde $h(N) = \log N$, exceto para o cálculo do máximo com barramentos CRCW, neste caso $h(N) = \log \log N$.

Prova: Considere $t > 0$. Seja S o conjunto t -dominante de G , com cardinalidade $L_G(t)$. Para $v \in S$, seja $U(v)$ o subconjunto do t -ambiente de v , tal que os conjuntos $U(v), v \in S$ formam uma partição disjunta de V .

Considere o seguinte algoritmo para adição (note que o mesmo algoritmo funciona também para outras operações associativas).

Algoritmo:

- Etapa 1: Para cada vértice $v \in S$, os vértices de $U(v)$ usam suas arestas para somar seus valores iniciais e armazená-los em v .
- Etapa 2: Enquanto existirem $k > m$ valores a serem somados, execute $\min(m, k - m)$ adições utilizando os barramentos.

- Etapa 3: Para os m valores remanescentes, use o algoritmo conhecido para a PRAM, que soma m valores utilizando N processadores e m células de memória compartilhada.

A etapa 1 leva tempo $O(t)$. A etapa 2 leva tempo $O\left(\frac{|S|}{m}\right) = O\left(\frac{L_G(t)}{m}\right)$, pois cada passo do laço leva tempo constante e $\left\lceil \frac{|S|}{m} \right\rceil - 1$ passos são executados. Observando que um barramento pode ser visto como uma célula de memória compartilhada temos os tempos da etapa 3. Em Shiloach [33] estão os algoritmos para operações associativas em uma PRAM. A etapa 3 leva tempo $O(\log m)$, exceto no caso de cálculo do máximo com barramentos CRCW onde o tempo é $O(\log \log m)$.

3.5.3 Limite inferior para redes com barramentos globais

Para demonstrar o limite inferior supõe-se o seguinte ciclo de computação:

computação: cada vértice v executa uma computação arbitrariamente complexa. Em particular, calcula os valores $tr(v)$, $w(v)$ e $r(v)$, onde $tr(v)$ é o valor a ser transmitido, $r(p)$ e $w(p)$, as arestas, ou barramentos, incidentes a v , usados para leitura ou escrita respectivamente.

escrita: v escreve $tr(v)$ no barramento, ou aresta, $w(v)$.

leitura: v lê o valor escrito no barramento, ou aresta, $r(v)$.

Teorema 7 *O cálculo do máximo em um grafo $G(V, E)$ com m barramentos globais requer tempo*

$$\Omega \left(\min_{t>0} \left(t + \frac{l_{G(t)}}{m} \right) + h(N) \right)$$

onde $h(N) = \log N$ para barramentos globais EREW e CREW, e $h(N) = \log \log N$ para a CRCW.

Observe que o mesmo resultado é válido para outras operações associativas, como adição ou multiplicação. Nestes casos, $h(N) = \log N$ mesmo no caso de barramentos globais CRCW.

Prova: Usaremos uma aplicação do princípio da casa do pombo (*pidgeon hole*).

Definição 7 Para $U \subseteq X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $S \subseteq \mathcal{N}$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\text{seja } \begin{cases} L^i = S, & \text{se } x_i \in U \\ L^i = \{a_i\} \subseteq \mathcal{N}, & \text{se } x_i \in X \setminus U, \text{ tais que } a_i < \min S \end{cases}$$

Seja $A = \{a_i \mid x_i \in X \setminus U\}$. Denominam-se as variáveis em U por variáveis vivas.

Define-se $L(U, S, A)$ como o produto cartesiano dos L^i 's, isto é

$$L(U, S, A) = \times_{i=1}^n L^i$$

Seja T o número de ciclos de um algoritmo que calcula o máximo. Prova-se que

$$1. T = \Omega(h(n))$$

$$2. T \geq \frac{l_G(T)}{m}$$

o item (2) implica que $T = \Omega\left(T + \frac{l_G(T)}{m}\right)$ e $T + \frac{l_G(T)}{m} = \Omega\left(\min_{t>0} \left\{t + \frac{l_G(t)}{m}\right\}\right)$. De (1) e (2) temos o teorema.

- $T = \Omega(h(n))$ - Este resultado para PRAM EREW e CREW é demonstrado em [9] e para PRAM CRCW em [16]. É claro que os limites inferiores para PRAM também são válidos para o modelo suposto.
- $T \geq \frac{l_G(T)}{m}$ - Esta demonstração foi inspirada nos limites inferiores obtidos em [16].

Lema 7 Para cada $1 \leq t \leq T$ existem (U_t, S_t, A_t) , tais que com os dados de entrada em $L_t = L(U_t, S_t, A_t)$ as seguintes propriedades são válidas até o ciclo t

1. Cada vértice conhece no máximo uma variável viva;
2. Para todo vértice $v \in V$, para todo $i \in U_i$. Se v conhece x_i então v não escreveu no barramento após conhecer x_i ;
3. $|S_t| = \infty$;
4. $|U_t| \leq l_G(T) - m(t - 1)$;
5. $S_t \subseteq S_{t-1}, U_t \subseteq U_{t-1}$

Prova: Faz-se por indução em t

$t = 1$: Seja $U_1 \subseteq V$ uma T -rede em G de cardinalidade $l_G(T)$. Fixe cada $x_i \notin U_1$ em 1 ($a_i = 1$). Seja $S_1 = \mathcal{N} - 1$. O conjunto $L_1 = L(U_1, S_1, A_1)$ satisfaz as condições do lema para $t = 1$.

$t > 1$: Sejam $U_{t-1}, S_{t-1}, A_{t-1}$ tais que $L_{t-1} = L(U_{t-1}, S_{t-1}, A_{t-1})$ satisfaça o lema para $t - 1$.

v_1 conhece no máximo uma variável viva x . Segue que $w(v_1), r(v_1)$ dependem somente do valor de x .

Como a função $f : S_{t-1} \mapsto (w(v_1), r(v_1))$ tem imagem finita, existe um subconjunto infinito, $R_1 \subseteq S_{t-1}$, tal que f é constante em R_1 .

Restrinja S_{t-1} a R_1 , proceda da mesma maneira com os vértices $v_2, \dots, v_n$ restringindo R_1 a R_2, R_2 a R_3 , e assim por diante.

Como resultado obtemos um conjunto infinito $R_n \subseteq S_{t-1}$, tal que com os dados de entrada de $L' = L(U_{t-1}, R_n, A_{t-1})$ cada vértice usará vértices pré determinados para a leitura/escrita no ciclo $t - 1$.

Igualre todas as variáveis x_i , conhecidas pelos vértices que escrevem no barramento no ciclo $t - 1$ a $c = \min R_n$. Faça

$$\begin{aligned} A_t &= \{c\} \cup A_{t-1} \\ U_t &= U_{t-1} \setminus \bigcup \{x_i\} \\ S_t &= R_n \setminus \{c\}. \end{aligned}$$

É claro que $L_t = L(U_t, S_t, A_t)$ satisfaz (2), (3), (4) e (5). O item (1) é verdadeiro pois, por construção, um vértice v que conhece uma variável viva x desde o ciclo $t' < t$ não escreveu nos barramentos desde o instante t' , pois caso contrário x não seria uma variável viva. Segue que um vértice só pode conhecer uma variável viva através de arestas. Portanto um vértice v só pode conhecer as variáveis vivas do seu T -ambiente no decorrer do algoritmo. Como U_1 , e conseqüentemente U_t , formam T -redes nenhum vértice tem mais que uma variável viva em seu T ambiente, o que implica (1). $\square$

Aplicações

Para a grade d -dimensional com N vértices, $L_G(t)$ e $L_G(t)$ são $\Theta(\frac{N}{t^d})$. Segue que o cômputo do máximo requer tempo $\Theta(\sqrt[d+1]{\frac{N}{m}} + \log N)$ para barramentos CRCW e CREW, e $\Theta(\sqrt[d+1]{\frac{N}{m}} + \log \log N)$ para barramentos CRCW.

3.5.4 Um sistema de barramentos para grades quadradas

Meyer auf der Heide e Pham [22] construíram um sistema de barramentos planares, com base em uma grade $(\sqrt{N} \times \sqrt{N})$, tal que qualquer operação associativa pode ser realizada em tempo ótimo $\Theta(\log N)$.

Definição 8 Um sistema de m barramentos $B_1, B_2, \dots, B_m$ é dito planar se existem $T_1, T_2, \dots, T_m$ árvores tais que suas arestas são disjuntas, onde T_i tem como vértices os vértices de B_i , e $\bigcup_{i=1}^m T_i$ forma um grafo planar.

Definição 9 A definição desta nova estrutura será dada recursivamente. Sejam $k, L \in \mathcal{N}, k \leq L$. Defina-se um sistema de barramentos (L, k) para uma grade $(2^k L \times 2^k L)$ (figura 3.8) da seguinte forma:

- $k = 1$: o $(L, 1)$ -barramento contém um barramento, o qual conecta 4 vértices dos cantos superiores esquerdos das quatro subgrades $(L \times L)$ que fazem parte da grade $(2L \times 2L)$. Durante o decorrer do texto, denominaremos por bloco subgrades $(L \times L)$.
- $k > 1$: um (L, k) -barramento consiste dos quatro $(L, k-1)$ -barramentos, definidos recursivamente nas quatro subgrades $(2^{k-1} L \times 2^{k-1} L)$ e um novo barramento B .

B interliga quatro vértices, estes vértices são os k -ésimos na diagonal do bloco localizado no extremo inferior à direita, em cada uma das quatro grades $(2^{k-1} L \times 2^{k-1} L)$. Observe que como $k \leq L$, estes nós estão bem definidos.

A verificação da planaridade do sistema de barramentos acima pode ser verificada graficamente, basta desenharmos os barramentos na forma de $\sqcup$.

Seja $L = \min\{s \in \mathcal{N} \mid 2^s s \geq \sqrt{N}\}$, para efeito de simplificação, supõe-se que $\sqrt{N} = 2^k L$, para algum $k \leq L, k \in \mathcal{N}$. Segue que $L \approx k \approx \log N$. Então o sistema planar para a grade $(\sqrt{N} \times \sqrt{N})$ é o sistema de (L, k) -barramentos.

Algoritmo para operações associativas

Para simplificar o problema, o resultado final será armazenado no k -ésimo vértice na diagonal do bloco inferior, mais a esquerda da grade $(2^k L \times 2^k L)$.

Algoritmo:

- $k = 1$ Use as arestas para associar os elementos de cada bloco na grade $2^k L \times 2^k L$, armazene o resultado nos vértices superiores à esquerda de cada bloco.
- $k > 1$ Calcule recursivamente as associações das quatro subgrades $(2^{k-1} L \times 2^{k-1} L)$, que compõem a grade $2^k L \times 2^k L$, armazene o resultado no $(k-1)$ -ésimo vértice da diagonal do bloco inferior à direita de cada subgrade $(2^{k-1} L \times 2^{k-1} L)$.

Utilize as arestas para mover estas quatro novas associações para o k -ésimo vértice (na mesma diagonal), associe as informações nestes vértices utilizando o barramento que os conecta.

Figura 3.8: Grade 32×32 , com sistema de barramentos planares.

É fácil ver que o algoritmo funciona. Seja $T(k)$ o tempo necessário para uma grade $(2^k L \times 2^k L)$, temos:

$$\begin{aligned} T(1) &= 2(L - 1) + 3 \\ T(k) &= T(k - 1) + 5, \text{ para } k > 1. \end{aligned}$$

Segue que $T(k) = 2L + 5k - 4$. como $L \approx k \approx \log N$, tem-se o limite superior $O(\log N)$.

3.5.5 Limite inferior para grafos planares

Será demonstrado que a operação de ordenação em grafos planares, com barramentos planares CRCW, é tão lenta quanto a ordenação nestes mesmos grafos, sem barramentos.

A operação de ordenação em grades $(\sqrt{N} \times \sqrt{N})$ é $\Theta(\sqrt{N})$, a mesma operação em grades $(\sqrt{N} \times \sqrt{N})$, com qualquer sistema de barramentos CRCW planares é $\Theta(\sqrt{N})$. Para estas demonstrações é utilizado o teorema do separador planar [28].

Teorema 8 *Seja $G(V, E)$ um grafo planar com $|V| = N$. Existe uma partição X, S, Y de V , tal que*

1. $|X| \leq \frac{2N}{3}, |Y| \leq \frac{2N}{3};$
2. $|S| \leq 4\sqrt{N};$
3. S separa X de Y , isto é, não existe aresta com uma extremidade em X , e outra em Y .

Teorema 9 *Seja $G(V, E)$ um grafo planar com N vértices, com um sistema planar de barramentos CRCW. Os algoritmos para ordenação necessitam $\Omega(\sqrt{N})$ ciclos.*

Prova: Sejam $B_1, \dots, B_m$ os seus barramentos. Seja $G'(V, E')$ o grafo planar formado pelas arestas das árvores T_i 's, da definição de sistema de barramentos planares. O teorema do plano separador garante que existe uma partição X, S, Y de V relativa a G , e outra partição X', S', Y' de V relativa a G' tais que:

$$|S|, |S'| \leq 4\sqrt{N}$$

$$\frac{N}{3} - 4\sqrt{N} \leq |X|, |Y|, |X'|, |Y'| \leq \frac{2N}{3}.$$

Sem perda de generalidade, supõe-se $|X'| \leq |Y'|$ e $|X' \cap Y| \leq |X' \cap X|$, isto implica

$$|X'| \leq \frac{N}{2}, \text{ pois } |X'| + |Y'| \leq N$$

$$|X' \cap Y| \leq \frac{N}{4}, \text{ pois } |X'| \leq \frac{N}{2}, X', X, Y \subset V \text{ e } X \cap Y = \emptyset.$$

Segue que

$$|Y \cap Y'| = |Y| - |X' \cap Y| - |S' \cap Y|$$

$$\geq \left(\frac{N}{3} - 4\sqrt{N}\right) - \frac{N}{4} - 4\sqrt{N} = \frac{N}{12} - 8\sqrt{N}$$

$$|X' \cap X| \geq \frac{|X'| - |S|}{2} \geq \frac{\frac{N}{3} - 8\sqrt{N}}{2} = \frac{N}{6} - 4\sqrt{N}.$$

As desigualdades acima conduzem às seguintes conclusões:

- Existem no máximo $|S|$ caminhos disjuntos que interligam os vértices de $V = Y \cap Y'$ com os vértices de $U = X \cap X'$. Então, em um ciclo, no máximo $|S| \leq 4\sqrt{N}$ valores podem ser transmitidos de V para U utilizando-se arestas.
- Como $V \subseteq Y'$ e $U \subseteq X'$, cada barramento que contém um vértice de V , e um vértice de U , deve conter um vértice de S' . Como cada vértice está em um número máximo c de barramentos, existem no máximo $c|S'|$ barramentos interligando os vértices de V aos vértices de U . Segue que, em um ciclo, no máximo $4c\sqrt{N}$ variáveis podem ser enviadas de V para U através de barramentos.

No máximo $O(\sqrt{N})$ valores podem ser enviados de V para U em um ciclo. Portanto a ordenação leva $\Omega(\sqrt{N})$ no grafo G , com sistema de barramentos planares (se ao menos $\frac{N}{12} - 8\sqrt{N}$ valores devem ser enviados de V para U).

Capítulo 4

Generalização de algumas estruturas de interconexão e um modelo de comunicação

Veremos neste capítulo a definição de hipergrafo e algumas de suas propriedades. Apresentaremos novas estruturas de interconexão à base de barramentos, as quais serão representadas por hipergrafos. Por fim, vamos propor um novo modelo de comunicação para ser utilizado em estruturas de interconexão que utilizam barramentos.

4.1 Hipergrafos

Seguindo as definições e notações de Berge [3], definimos um hipergrafo por $\mathcal{G}(V, E)$, onde V é um conjunto finito $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ é um conjunto de subconjuntos de V , tais que

$$\begin{cases} e_i \neq \emptyset \\ \bigcup_{i=1}^m e_i = V. \end{cases}$$

Os elementos de V são chamados vértices e os conjuntos $e_1, \dots, e_m$ arestas. No decorrer do trabalho chamaremos, por vezes, as arestas de um hipergrafo de *hiperarestas*.

Observe que todo grafo conexo é um hipergrafo onde toda hiperaresta tem cardinalidade 2.

Um hipergrafo $\mathcal{G}(V, E)$ pode ser representado graficamente como um conjunto de pontos representando os vértices. A hiperaresta e_j é representada por um segmento de reta,

ligando dois vértices, se $|e_j| = 2$, por um laço se $|e_j| = 1$, e por uma curva fechada contendo todos os seus elementos se $|e_j| \geq 3$ (figura 4.1).

Figura 4.1: Representação gráfica de um hipergrafo (6 vértices e 7 hiperarestas).

Considere um hipergrafo $\mathcal{G}(V, E)$. Um passeio entre os vértices $u, v \in V$ é uma sequência $u = x_1, e_{n_1}, x_2, \dots, x_i, e_{n_i}, x_{i+1}, \dots, e_{n_{p-1}}, x_p = v$ com $\{x_i, x_{i+1}\} \subseteq e_{n_i}$. Um caminho entre dois vértices $u, v \in V$ é um passeio sem arestas nem vértices repetidos. O tamanho de um passeio, ou caminho, é o seu número de hiperarestas.

A distância entre dois vértices $u, v \in V$, $\text{dist}(u, v)$, é igual ao tamanho do menor caminho com extremidades u e v . Definimos diâmetro, D , como $D = \max_{u, v \in V} \text{dist}(u, v)$.

Dado um vértice $v \in V$ definimos como grau de v , $\text{gr}(v)$, a quantidade de arestas a que v pertence ($\text{gr}(v) = |\{e \mid v \in e, e \in E\}|$). Definimos $\text{gr}(V)$ como $\max_{v \in V} \text{gr}(v)$.

4.1.1 Simples generalização

Uma idéia imediata para generalizar grafos é substituir todos os cliques¹ de tamanho maior que 2 por hiperarestas (figuras 4.2 e 4.3). Dado um grafo $G(V, E)$ sejam

$$G_1(V_1, E_1), \dots, G_c(V_c, E_c)$$

os subgrafos completos maximais, com mais de dois vértices, de $G(V, E)$. Definimos o hipergrafo, $\mathcal{G}(V, E_{\mathcal{G}})$, onde $E_{\mathcal{G}} = (E \setminus (E_1 \cup \dots \cup E_c)) \cup \{V_1, \dots, V_c\}$.

4.1.2 Dualidade

Definição 10 O dual de um hipergrafo $\mathcal{G}(V, E)$ (figura 4.4) é um hipergrafo $\mathcal{G}^*(V^*, E^*)$ com $V^* = E = \{e_1, \dots, e_m\}$ e com arestas

$$E^* = \{v_1, \dots, v_n\}, v_i = \{e_j \mid v_i \in e_j, e_j \in E\}.$$

¹Entendemos por clique os subgrafos completos maximais de um grafo.

Figura 4.2: Grafo com alguns cliques de tamanho maior que 2.

Figura 4.3: Generalização imediata do grafo da figura 4.2

4.1.3 Aplicação de dualidade

Em [5] Bermond, Bond e Peyrat utilizaram as propriedades do dual de alguns hipergrafos. Os autores buscavam famílias de hipergrafos, com o maior número de vértices possível, com as seguintes características

- Cada vértice está conectado a duas hiperarestas, isto é, tem grau dois;
- O tempo de transmissão é limitado, isto é, o diâmetro do hipergrafo é limitado;
- O tamanho da hiperaresta é limitado.

Em outras palavras, procuraram hipergrafos $\mathcal{G}(V, E)$ com $gr(V) = 2$, tamanho das arestas no máximo r ($|e| \leq r, e \in E$) e diâmetro D , com o maior número de vértices.

Notações e propriedades

Dado um hipergrafo $\mathcal{G}(V, E)$, dizemos que este hipergrafo é (Δ, D, r) se tem diâmetro D , grau máximo de vértice Δ ($gr(V) = \Delta$) e maior tamanho de aresta r ($\max_{e \in E} |e| = r$).

Figura 4.4: Hipergrafo dual do hipergrafo da figura 4.1.

Denota-se por $n(\Delta, D, r)$ o maior número de vértices de um hipergrafo (Δ, D, r) .

Proposição 1 $n(\Delta, D, r) \leq 1 + \Delta(r-1) \sum_{i=0}^{D-1} (\Delta-1)^i (r-1)^i$.

Prova: Seja um hipergrafo $\mathcal{G}(V, E) = (\Delta, D, r)$. Existem no máximo $\Delta(r-1)$ vértices a distância 1 de um vértice v qualquer. Da mesma forma existem $\Delta(r-1)(\Delta-1)(r-1)$ vértices a distância 2 e no caso geral $\Delta(\Delta-1)^{i-1}(r-1)^i$ vértices a distância i .

Para $\Delta = 2$ (vértices de grau no máximo 2), tem-se que

$$n(2, D, r) \leq 1 + 2(r-1) \sum_{i=0}^{D-1} (r-1)^i = 1 + \frac{2(r-1)((r-1)^D - 1)}{r-2}.$$

Observe que se temos um hipergrafo $\mathcal{H}(V, E) = (\Delta, D, r)$ o seu hipergrafo dual $\mathcal{H}^*(V, E)$ é (r, D^*, Δ) . Logo o dual de um grafo $G(V, E)$ é um hipergrafo $\mathcal{G}^*(V^*, E^*)$ do tipo $(2, D, r)$. $\square$

Proposição 2 Se $G(V, E)$ é um grafo com $gr(V) = r$, diâmetro D e m arestas, então seu dual é um hipergrafo $\mathcal{H}^*(V, E) = (2, \Delta^*, r)$ com m vértices, onde $D-1 \leq D^* \leq D+1$.

Prova: Sejam E_1 e E_2 vértices de $\mathcal{H}^*$. E_1 e E_2 correspondem a arestas e_1 e e_2 de E . Seja x_1 um vértice de e_1 e x_2 um vértice de e_2 . Como $\text{dist}(x_1, x_2) \leq D$ temos $\text{dist}(E_1, E_2) \leq D+1$ e portanto $D^* \leq D+1$. Por dualidade temos $D \leq D^* + 1$. $\square$

Proposição 3 Se $G(V, E)$ é um grafo bipartido com $gr(V) = r$, diâmetro D e m arestas, então seu dual é um hipergrafo $\mathcal{H}^*(V, E) = (2, D^*, r)$ com m vértices onde $D^* \leq D$.

Prova: Sejam E_1 e E_2 vértices de $\mathcal{H}$ correspondentes a arestas $e_1 = (x_1, y_1)$ e $e_2 = (x_2, y_2)$ em G . Se $\text{dist}(x_1, x_2) \leq D - 1$ então $\text{dist}(E_1, E_2) \leq D$. Suponha que $\text{dist}(x_1, x_2) = D$, como G é bipartido, não tem passeios fechados de tamanho ímpar, logo $\text{dist}(x_1, y_2) \neq D$. Segue que $\text{dist}(x_1, y_2) \leq D - 1$ e $\text{dist}(E_1, E_2) \leq D$. Portanto $D^* \leq D$. $\square$

Teorema 10 Existem hipergrafos do tipo $(2, D, r)$ com $\binom{r}{2}^D + \binom{r}{2}^{D-1}$ vértices.

Idéia da prova: Considere o hipergrafo dual de um grafo de Kautz², não dirigido, com diâmetro $D - 1$ e grau dos vértices r . $\square$

Teorema 11 Existem hipergrafos do tipo $(2, D, r)$ com $2\binom{r}{2}^D$ vértices.

Idéia da prova: Utilize o dual de grafos bipartidos associados a planos de projeção³. $\square$

4.2 Generalização de algumas estruturas de interconexão

Apresentaremos agora novas estruturas de interconexão à base de barramentos.

²Grafo de Kautz

Definição 11 Um grafo dirigido de Kautz com grau dos vértices δ e diâmetro D tem como vértices as palavras de D letras onde duas letras consecutivas são diferentes e cada letra pode variar entre $\delta + 1$ valores. Existe uma aresta de x para y se as $D - 1$ primeiras letras de x são as $D - 1$ últimas letras de y . No texto nos referimos ao grafo de Kautz não orientado onde cada aresta orientada é substituída por uma aresta não orientada.

³Grafos bipartidos associados a hiperplanos de projeção

Definição 12 Definimos um grafo bipartido associado a planos de projeção, $G(V, E)$, da seguinte forma: Um vértice de G tem como coordenadas $(i, a_1, \dots, a_k)$, onde $i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e a_j pertence a um alfabeto A com δ letras. O vértice $(i, a_1, \dots, a_k)$ é adjacente a todos os vértices $(1-i, \lambda, a_1, \dots, a_{k-1})$ e $(1-i, a_2, \dots, a_k, \lambda)$ onde $\lambda \in A$. Se mantivermos as arestas duplas, G será regular com grau de vértice 2δ e terá $2\delta^k$ vértices e diâmetro $D = k + 1$.

4.2.1 Motivação

O que nos motivou foi a seguinte definição. Unindo a idéia do grafo hipercubo generalizado (seção 3.4) com a simples generalização de grafos para hipergrafos (seção 4.1.1) chegamos a seguinte generalização do hipercubo.

Definimos um hipercubo n -ário de dimensão b por $\mathcal{H}(V, E)$ (figura 4.5) onde:

$$\begin{cases} v \in V \leftrightarrow v \in \{0, \dots, b-1\}^n \\ e \in E \leftrightarrow e = \{v_1, \dots, v_b\} \mid \exists p \mid v_i^p \neq v_j^p \text{ e } v_i^k = v_j^k, 1 \leq i, j \leq b, k \neq p. \end{cases}$$

Figura 4.5: Hipercubo ternário de dimensão 2.

4.2.2 Hiper caminho

Estrutura: Um caminho de tamanho n é definido por $P_n(V, E)$ onde:

$$\begin{aligned} V &= \{0, \dots, n-1\} \\ e \in E &\leftrightarrow e = \{v_1, v_2\} \mid v_1 = (v_2 - 1). \end{aligned}$$

Generalização: Definimos o *hipercaminho* $\mathcal{P}_{n,m}(V, E)$ de tamanho n e ordem m (figuras 4.6 e 4.7) por:

$$\begin{aligned} V &= \{0, \dots, nm-1\} \\ e \in E &\leftrightarrow e = \{v_1, \dots, v_m, v'_1, \dots, v'_m\} \\ &\text{onde } \begin{cases} v_i = v_j \bmod n \\ v'_i = v'_j \bmod n \\ v_i = (v'_i - 1). \end{cases} \end{aligned}$$

Figura 4.6: Hiper caminho de tamanho 6 e ordem 2 ($\mathcal{P}_{6,2}$).

Figura 4.7: Hiper caminho de tamanho 3 e ordem 3 ($\mathcal{P}_{3,3}$).

4.2.3 Hiperanel

Estrutura: Um anel de tamanho n é definido por $R_n(V, E)$ onde:

$$V = \{0, \dots, n-1\}$$

$$e \in E \leftrightarrow e = \{v_1, v_2\} \mid v_1 = (v_2 - 1) \bmod n.$$

Definimos o *hiperanel* $\mathcal{R}_{n,m}(V, E)$ de tamanho n e ordem m (figura 4.8) por:

$$V = \{0, \dots, nm-1\}$$

$$e \in E \leftrightarrow e = \{v_1, \dots, v_m, v'_1, \dots, v'_m\}$$

$$\text{onde } \begin{cases} v_i = v_j \bmod n \\ v'_i = v'_j \bmod n \\ v_i = (v'_i - 1) \bmod n. \end{cases}$$

Figura 4.8: Hiperanel de tamanho 5 e ordem 3 ($\mathcal{R}_{5,3}$).

4.2.4 d -hipergrade

Vamos propor duas alternativas para a generalização da grade e do toro. A primeira segue a idéia das generalizações do caminho e anel, isto é, define uma noção de “altura” (ordem) no hipergrafo generalizado. Utilizando esta idéia, definimos uma p -hipergrade de ordem d por $\mathcal{G}_{n_1 \times \dots \times n_p}^d(V, E)$ (figura 4.9) onde:

$$\begin{aligned}
 V &= \{(l_1, \dots, l_p, l_{p+1}) \mid 0 \leq l_j < n_j, 1 \leq j \leq p, 0 \leq l_{p+1} < d\} \\
 e \in E &\Leftrightarrow e = \{v_1, \dots, v_d, v'_1, \dots, v'_d\} \\
 \text{onde } \begin{cases} (v_i - v_j)_k = (v'_i - v'_j)_k = 0, 1 \leq k \leq p \\ (v_i)_{p+1} = (v'_i)_{p+1} = i - 1 \text{ onde } (\dots)_i = \langle \dots, e_i \rangle \text{ denota o produto escalar.} \\ \exists! k \text{ tal que } (v_1)_h = (v'_1)_h, h \neq k \text{ e } |(v_1 - v'_1)_k| = 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Uma outra forma, seguindo a definição da grade, é definir a hipergrade como o produto de hipercaminhos. Para isso definimos antes o produto de dois hipergrafos.

Definição 13 *Sejam $\mathcal{G}_1(V_1, E_1), \mathcal{G}_2(V_2, E_2)$ dois hipergrafos. Definimos o seu produto, $\mathcal{G}(V, E) = \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$, da seguinte forma:*

$$V = \{u_k\}, 0 \leq k < |V_1||V_2|, \text{ tal que } u_k = (v_1, v_2) \text{ com } v_1 \in V_1 \text{ e } v_2 \in V_2.$$

dois vértices (a, b) e (c, d) pertencem à mesma hiperaresta em $\mathcal{G}$ se e só se:

1. $a = c$ e b, d pertencem à mesma hiperaresta em $\mathcal{G}_2$, ou
2. $b = d$ e a, c pertencem à mesma hiperaresta em $\mathcal{G}_1$

Esta definição pode ser estendida facilmente para o produto de d hipergrafos. Desta forma definimos uma d -hipergrade por $\mathcal{G}^d = \mathcal{P}_{n_1, m_1}^1 \times \dots \times \mathcal{P}_{n_d, m_d}^d$ (figura 4.10) onde $\mathcal{P}_{n_i, m_i}^i$ são hipercaminhos. Esta será a definição utilizada no decorrer do texto.

Figura 4.9: 2-Hipergrade $\mathcal{G}_{4 \times 3}^3$.

4.2.5 d -hipertoro

Para a definição do d -hipertoro também temos duas possibilidades. No texto optamos por produto de hiperanéis. Definimos um d -hipertoro por $\mathcal{T}^d = \mathcal{R}_{n_1, m_1}^1 \times \dots \times \mathcal{R}_{n_d, m_d}^d$, onde $\mathcal{R}_{n_i, m_i}^i$ são hiperanéis.

4.3 Modelos de comunicação

Nesta seção apresentaremos novos modelos de comunicação para hipergrafos. Com isto modelizaremos as características de barramentos por meio de hiperarestas.

Dado um hipergrafo, $\mathcal{G}(V, E)$, temos:

modelo vértice Se um vértice pode utilizar simultaneamente (enviar/receber) apenas uma de suas hiperarestas temos o modelo 1-porta, caso possa utilizar k hiperarestas, ao mesmo tempo, temos o modelo k -porta.

modelo hiperaresta Neste modelo trataremos da quantidade de mensagens distintas que podem ser transportadas por um hiperaresta ao mesmo tempo. Se apenas uma informação pode trafegar, em um dado instante, denotaremos por 1-porta. Se k informações podem trafegar ao mesmo tempo temos o modelo k -porta.

Analogamente ao modelo $*$ -porta para grafos, temos:

Figura 4.10: 2-Hipergrade $\mathcal{G}^2 = \mathcal{P}_{3,3}^1 \times \mathcal{P}_{3,2}^2$.

modelo *-porta vértice Cada vértice pode utilizar simultaneamente todas as suas hiperarestas.

modelo *-porta hiperaresta Cada hiperaresta $e \in E$ pode transportar $|e|$ mensagens ao mesmo tempo.

Utilizaremos a notação $M_{e,v}$ onde e é o modelo da hiperaresta (e -porta) e v é o modelo do vértice (v -porta). Por exemplo, $M_{1,*}$ indica que os vértices podem utilizar simultaneamente todas as suas hiperarestas, as quais só transportam uma mensagem por vez.

Dado um hipergrafo $\mathcal{G}$, denotaremos por $b_{M_{e,v}}(\mathcal{G})$, o limite superior para efetuar a difusão no modelo $M_{e,v}$. Analogamente usaremos $g_{M_{e,v}}(\mathcal{G})$ para a troca completa (*gossiping*).

Dado um hipergrafo $\mathcal{G}(V, E)$, seja $v \in V$ e $e \in E$ tal que $v \in e$. Denotamos uma transmissão de v para $E' \subseteq E$ por $E' \Leftarrow v$.

4.3.1 Comparação com estruturas de interconexão em grafos

Nesta seção apresentamos uma comparação entre os vários parâmetros das estruturas de interconexão aqui definidas com as estruturas de interconexão usuais. Os aspectos a-

bordados são: número de vértices, grau dos vértices, grau das hiperarestas e diâmetro. Na tabela 4.1 $\text{gr}(E)$ é a cardinalidade da aresta com maior cardinalidade entre as (hi-per)arestas do (hiper)grafo. Temos também que $\mathcal{G}^d(V, E) = \mathcal{P}_{n_1, m_1}^1 \times \dots \times \mathcal{P}_{n_d, m_d}^d$ e $\mathcal{T}^d(V, E) = \mathcal{R}_{n_1, m_1}^1 \times \dots \times \mathcal{R}_{n_d, m_d}^d$.

	Estrutura	$ V $	$\text{gr}(V)$	$\text{gr}(E)$	diâmetro
Caminho	$P_n(V, E)$	n	2	2	$n - 1$
Anel	$R_n(V, E)$	n	2	2	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
Grade	$G_{n_1, \dots, n_d}(V, E)$	$n_1 \dots n_d$	$2d$	2	$\sum_{i=1}^d (n_i - 1)$
Toro	$T_{n_1, \dots, n_d}(V, E)$	$n_1 \dots n_d$	$2d$	2	$\sum_{i=1}^d (\lfloor \frac{n_i}{2} \rfloor)$
Hipercaminho	$\mathcal{P}_{n, m}(V, E)$	nm	2	$2m$	$n - 1$
Hiperanel	$\mathcal{R}_{n, m}(V, E)$	nm	2	$2m$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
Hipergrade	$\mathcal{G}^d(V, E)$	$\prod_{i=1}^d (m_i n_i)$	$2d$	$2 \max_{i=1}^d (m_i)$	$\sum_{i=1}^d (n_i - 1)$
Hipertoro	$\mathcal{T}^d(V, E)$	$\prod_{i=1}^d (m_i n_i)$	$2d$	$2 \max_{i=1}^d (m_i)$	$\sum_{i=1}^d (\lfloor \frac{n_i}{2} \rfloor)$

Tabela 4.1: Comparação entre topologias em grafos e hipergrafos.

Desta forma vemos que, por exemplo, uma estrutura de interconexão com n vértices na forma de anel tem diâmetro $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Enquanto que uma estrutura com n vértices na forma de hiperanel com hiperarestas de tamanho m (supondo $(n \bmod 2m) = 0$) tem diâmetro m vezes menor ($\frac{n}{2m}$). Na tabela 4.2 temos o diâmetro de várias topologias. O número de vértices é fixo igual a 48, e o número de vértices por hiperaresta é 6.

Topologia	Diâmetro	(hiper)Topologia	Diâmetro
Caminho	47	Hipercaminho	7
Anel	24	Hiperanel	4
Grade (2×24)	24	Hipergrade (2×4)	4
Grade (4×12)	14	Hipertoro (2×4)	3
Grade (6×8)	12		
Toro (2×24)	13		
Toro (4×12)	8		
Toro (6×8)	7		

Tabela 4.2: Comparação de diâmetro entre topologias em grafos e hipergrafos.

Capítulo 5

Algoritmos de comunicação global para as estruturas propostas

5.1 Introdução

Serão apresentados os tempos de comunicação para a difusão e troca completa nas estruturas de interconexão definidas. Para facilitar o trabalho introduziremos algumas ferramentas simples para a manipulação destas estruturas de interconexão. Em particular o conceito introduzido, de grafo simplificado, torna a descrição de algoritmos de comunicação mais simples e concisa, além de poder utilizar os algoritmos de comunicação já conhecidos para estruturas modeladas por grafos. Todos os resultados deste capítulo são originais, alguns dos quais já foram ou serão publicados [14, 15] em co-autoria com A. Ferreira e S.W. Song.

5.2 Simplificação

Para realizar as comunicações (difusão e troca completa) nos hipergrafos definidos no capítulo anterior, usaremos um novo conceito que será denominado *simplificação*. A idéia é construir um grafo, que será denominado *grafo simplificado*, a partir do hipergrafo, de tal forma que seja fácil descrever e realizar comunicações no hipergrafo. Além disso, também queremos aproveitar os algoritmos já desenvolvidos para grafos em hipergrafos que são as suas generalizações.

A operação de simplificação é efetuada escolhendo-se vértices no hipergrafo, denominados *vértices representantes*, os quais serão os vértices do grafo simplificado. Vértices representantes adjacentes no hipergrafo serão adjacentes no grafo simplificado. Cada vértice representante u corresponderá a um conjunto bem definido N_u de vértices por ele

representados. Os detalhes serão vistos a seguir.

Trataremos a comunicação no grafo simplificado da seguinte forma. A transmissão de um vértice v_1 a um vértice adjacente v_2 , em um grafo simplificado G , equivale a uma transmissão do vértice correspondente a v_1 no hipergrafo, a todos os vértices da hiperaresta que contém os vértices correspondentes a v_1 e a v_2 . Uma transmissão para um vértice representante no grafo simplificado, significa transmissões também para os seus vértices representados. Isto é, $u \leftarrow v$ no grafo simplificado corresponde a $N_u \Leftarrow v$ e $N_v \Leftarrow v$ no hipergrafo.

É importante ressaltar que a operação de simplificação depende não só do hipergrafo, mas também do modelo de comunicação adotado. Veremos agora quatro formas de simplificação para os hipergrafos definidos no capítulo anterior.

5.2.1 Simplificação para o modelo $M_{j,i}(j \leq i)$

Usaremos esta simplificação nos hipergrafos de tal forma que seja fácil modelar a comunicação do hipergrafo no modelo $M_{j,i}$ (hiperarestas j -porta e vértices i -porta) através do grafo simplificado no modelo H_i , se $j = 1$, ou no modelo F_i , se $j = 2$. Os enunciados desta seção serão utilizados para os seguintes modelos $M_{1,1}$, $M_{1,*}$ e $M_{2,*}$. A idéia principal é a de escolher os vértices representantes nas intersecções de hiperarestas que serão especificadas a seguir. Vejamos os casos particulares:

- **Grafo simplificado $G(V', E')$ de um hipercaminho $\mathcal{P}_{n,m}(V, E)$.** Elegemos $n - 1$ representantes $V' = \{u_1, \dots, u_{n-1}\}$, com $u_i \in V$ tais que:

$$\begin{cases} (u_1 \bmod n) = 0, \text{ ou } (u_1 \bmod n) = 1 \\ u_{i+1} = u_i + 1, \text{ para } 1 \leq i \leq n - 2. \end{cases}$$

Os vértices de G são adjacentes se e só se os mesmos são adjacentes em $\mathcal{P}_{n,m}$. Desta forma em cada intersecção de hiperarestas teremos um vértice representante, além destes teremos um representante em um dos extremos de $\mathcal{P}_{n,m}$ (figuras 5.1 e 5.2).

No decorrer do texto vamos supor, sem perda de generalidade, que o representante no extremo onde está o vértice de índice 0 é sempre escolhido. Logo $V' = \{u_1, \dots, u_{n-1}\}$, com $u_i \in V$ tais que:

$$\begin{cases} (u_1 \bmod n) = 0 \\ u_{i+1} = u_i + 1, \text{ para } 1 \leq i \leq n - 2. \end{cases}$$

Para cada vértice $u \in V'$ definimos o conjunto de vértices representados por u , $N_u = \{y_1, \dots, y_{m-1}\}$, onde:

$$\begin{cases} (y_i - u) \bmod n = 0 \\ y_i \neq u, 1 \leq i \leq m - 1. \end{cases}$$

Cada $y_i \in N_u$ é chamado vértice representado por u . Seja $N = \bigcup_{u \in V'} N_u$, definimos por $W = V \setminus (N \cup V')$, o conjunto de vértices sem representante (figuras 5.1 e 5.2).

Figura 5.1: O grafo simplificado do hipercaminho $\mathcal{P}_{5,4}$ tem os vértices $\{10, 11, 12, 13\}$, suas arestas estão representadas por linhas pontilhadas. Temos também que $N_{10} = \{0, 5, 15\}$, $N_{11} = \{1, 6, 16\}$, $N_{12} = \{2, 7, 17\}$, $N_{13} = \{3, 8, 18\}$ e $W = \{4, 9, 14, 19\}$.

Figura 5.2: O grafo simplificado do hipercaminho $\mathcal{P}_{3,3}$ tem os vértices $\{3, 4\}$, sua aresta está representada por uma linha pontilhada. Temos também que $N_3 = \{0, 6\}$, $N_4 = \{1, 7\}$ e $W = \{2, 5, 8\}$.

- **Grafo simplificado $G(V', E')$ de um hiperanel $\mathcal{R}_{n,m}(V, E)$.** Elegemos n vértices representantes, $V' = \{u_1, \dots, u_n\}$. Tais que:

$$\begin{cases} (u_1 \bmod n) = 0 \\ u_{i+1} = u_i + 1, \text{ onde } 1 \leq i \leq n - 1. \end{cases}$$

Os vértices de G são adjacentes se e só se os mesmos são adjacentes em $\mathcal{R}_{n,m}$ (figura 5.3). Teremos um representante por intersecção de hiperarestas de $\mathcal{R}_{n,m}$.

Assim como para o grafo simplificado do hipercaminho, para cada $u \in V'$ definimos o conjunto dos vértices representados N_u .

Figura 5.3: Grafo simplificado (linhas pontilhadas) do hiperanel $\mathcal{R}_{3,3}$.

- **Grafo simplificado de uma d -hipergrade $\mathcal{G}^d(V, E) = \mathcal{P}_{n_1, m_1}^1 \times \dots \times \mathcal{P}_{n_d, m_d}^d$.** Faremos uma simplificação por dimensões. Escolhemos primeiro os vértices representantes para o hipercaminho $\mathcal{P}_{n_1, m_1}^1$. Seja G_1 o seu grafo simplificado, com os seus vértices representantes $V'^{(1)} = \{u_1^{(1)}, \dots, u_{n_1-1}^{(1)}\}$. Seja $\mathcal{G}^{(1)} = G_1 \times \mathcal{P}_{n_2, m_2}^2 \times \dots \times \mathcal{P}_{n_d, m_d}^d$. Denominaremos os vértices de $\mathcal{G}^{(1)}$ por vértices representantes de primeira ordem. Escolhemos os vértices representantes para o hipercaminho $\mathcal{P}_{n_2, m_2}^2$, teremos o grafo simplificado G_2 , com os seus vértices representantes $V'^{(2)} = \{u_1^{(2)}, \dots, u_{n_2-1}^{(2)}\}$. Os vértices de $\mathcal{G}^{(2)} = G_1 \times G_2 \times \mathcal{P}_{n_3, m_3}^3 \times \dots \times \mathcal{P}_{n_d, m_d}^d$ serão denominados vértices representantes de segunda ordem. Fazendo o mesmo para os hipercaminhos restantes, teremos $\mathcal{G}^{(d)} = G^{(d)} = G_1 \times \dots \times G_d$. Observe que cada $G_i, 1 \leq i \leq d$, é um grafo, e portanto $G^{(d)}$ é um grafo, mais especificamente uma d -grade. Para uniformidade de notação definimos também $\mathcal{G}^{(0)} = \mathcal{G}^d$.

Para cada vértice x de $\mathcal{G}^{(j)}, 1 \leq j \leq d$, definimos o conjunto dos vértices representados por x , $N_x^{(j)} = \{y_1^{(j)}, \dots, y_{m_j-1}^{(j)}\}$, que são os vértices em $\mathcal{G}^{(j-1)}$ tais que:

$$\begin{cases} (x - y_i^{(j)})_l = 0, l \neq j \\ (x - y_i^{(j)})_j \bmod n_j = 0 \\ x \neq y_i^{(j)}, 1 \leq i \leq m_j - 1. \end{cases} \quad \text{onde } (\dots)_j = \langle \dots, e_j \rangle$$

Em cada hipergrafo $\mathcal{G}^{(j)}, 1 \leq j \leq d$, definimos o conjunto $W^{(j)}$ dos vértices, em $\mathcal{G}^{(j-1)}$, sem representante, isto é, $v \in W^{(j)} \Leftrightarrow v \in \mathcal{G}^{(j-1)}, v \notin \mathcal{G}^{(j)}$ e v não é representado por nenhum vértice em $\mathcal{G}^{(j)}$.

Para cada j , o conjunto $W^{(j)}$ é formado pelos vértices sem representante correspondentes a simplificação de todos os $(n_1 - 1) \dots (n_{j-1} - 1)(n_{j+1}m_{j+1}) \dots (n_dm_d)$

hipercaminhos nesta dimensão em $\mathcal{G}^{(j-1)}$. Sejam

$$W_{i_1, \dots, i_d}^{(j)} \begin{cases} 0 \leq i_s < n_s - 1, s < j \\ i_j = 1 \\ 0 \leq i_s < n_s m_s, s > j. \end{cases}$$

definidos da seguinte forma:

$$v \in W_{i_1, \dots, i_d}^{(j)} \Leftrightarrow \begin{cases} v \in \mathcal{G}^{(j-1)} \\ (v)_s = \begin{cases} u_{i_s+1}^{(j)}, s < j \\ i_s, s > j \end{cases} \\ (v_j \bmod n_j) = n_j - 1. \end{cases}$$

Vemos que $W^{(j)}$ é a união dos conjuntos $W_{i_1, \dots, i_d}^{(j)}$.

Na figura 5.4 temos os passos 1 e 2, que correspondem a $\mathcal{G}^{(1)}$ e $\mathcal{G}^{(2)}$. Para cada vértice $x^{(1)}$ de $\mathcal{G}^{(1)}$, temos os seus vértices representados ($N_{x^{(1)}}$) em $\mathcal{G}^{(0)}$, por exemplo, para $x = (0, 5)$ temos $N_{x^{(1)}} = \{(3, 5), (6, 5)\}$. O conjunto de vértices sem representante de $\mathcal{G}^{(1)}$ é

$$W^{(1)} = \bigcup_{i=0}^5 \{(2, i), (5, i), (8, i)\}$$

é fácil ver que $|W^{(1)}| = m_1(n_2 m_2) = 18$. Vemos que $W^{(1)} = \bigcup_{i=0}^5 W_{1,i}$ e $W_{1,i} = \{(2, i), (5, i), (8, i)\}, 0 \leq i \leq 5$.

Para cada vértice x de $\mathcal{G}^{(2)}$, temos os seus vértices representados ($N_{x^{(2)}}$) em $\mathcal{G}^{(1)}$, por exemplo, para $x = (0, 4)$ temos $N_{x^{(2)}} = \{(0, 1)\}$. O conjunto de vértices sem representante de $\mathcal{G}^{(2)}$ é $W^{(2)} = \{(0, 2), (0, 5), (1, 2), (1, 5)\}$, $|W^{(2)}| = n_1 m_2 = 4$. Vemos que $W^{(2)} = \bigcup_{i=0}^1 W_{i,1}$ e que $W_{0,1} = \{(0, 2), (0, 5)\}$ e $W_{1,1} = \{(1, 2), (1, 5)\}$.

- **d -hipertoro** $\mathcal{T}^d = \mathcal{R}_{n_1, m_1}^1 \times \dots \times \mathcal{R}_{n_d, m_d}^d$. Repetiremos a idéia anterior. Na primeira dimensão escolhemos os vértices representantes para o hiperanel $\mathcal{R}_{n_1, m_1}^1$, seja G_1 seu grafo simplificado. Denominamos os vértices de $\mathcal{G}^{(1)} = G_1 \times \mathcal{R}_{n_2, m_2}^2 \times \dots \times \mathcal{R}_{n_d, m_d}^d$ por vértices representantes de primeira ordem. Seguindo a idéia anterior teremos o grafo $\mathcal{G}^{(d)} = G^{(d)} = G_1 \times \dots \times G_d$. Definimos os conjuntos de vértices representados $N_x^{(j)}$ de uma forma análoga à utilizada para a hipergrade.

Note que a simplificação dos hipergrafos dados resultou em grafos simplificados, dos quais os hipergrafos foram generalizados.

Figura 5.4: Simplificação (dois passos) da 2-hipergrade $\mathcal{G}^2 = \mathcal{P}_{3,3}^1 \times \mathcal{P}_{3,2}^2$.

5.2.2 Simplificação para o modelo $M_{2,1}$

Neste caso queremos modelar a comunicação no hipergrafo através de um grafo simplificado no modelo F_1 , ou F_* (este último veremos a seguir, no item simplificação *). Escolheremos dois vértices representantes em cada intersecção de hiperarestas para o hipercaminho e hiperanel. Na hipergrade e no hipertoro temos duas simplificações possíveis, uma escolhendo dois vértices representantes por intersecção e outra escolhendo $2d$ vértices representantes nas intersecções das arestas que forem convenientes, onde d é a dimensão do hipergrafo em questão. A segunda simplificação, a ser denominada simplificação *, será vista mais adiante

- **Grafo simplificado $G(V', E')$ de um hipercaminho $\mathcal{P}_{n,m}(V, E)$.** Elegemos $2(n-1)$ vértices representantes, $V' = \{u_1, \dots, u_{n-1}, u_n, \dots, u_{2(n-1)}\}$, tais que:

$$\begin{cases} (u_1 \bmod n) = (u_n \bmod n) = 0 \\ u_{i+1} = u_i + 1, 1 \leq i \leq n-2, n \leq i \leq 2n-3 \\ u_1 \neq u_n. \end{cases}$$

Vértices de G são adjacentes se e só se os mesmos são adjacentes em $\mathcal{P}_{n,m}$ (figura 5.5). Definimos o conjunto dos vértices representados por N_z , para cada $z \in V'$, $N_z = \{y_1, \dots, y_m\}$, tais que:

$$(y_i - z) \bmod n = 0, 1 \leq i \leq m.$$

Note que z agora pertence a N_z e dado i , $N_{u_{i+(n-1)}} = N_{u_i}$. Neste caso dizemos que u_i e $u_{i+(n-1)}$ são *equivalentes*. Seja $N = \bigcup_{u \in V'} N_u$, definimos o conjunto de vértices não representados $W = V \setminus N$.

Figura 5.5: Grafo simplificado no modelo $M_{2,1}$ para o hipercaminho $\mathcal{P}_{5,4}$.

- **Grafo simplificado $G(V', E')$ de um hiperanel $\mathcal{R}_{n,m}(V, E)$.** Escolhemos $2n$ vértices representantes, $V' = \{u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_{2n}\}$, tais que:

$$\begin{cases} (u_1 \bmod n) = (u_n \bmod n) = 0 \\ u_{i+1} = u_i + 1, 1 \leq i \leq n-1, n < i \leq 2n-1 \\ u_1 \neq u_n. \end{cases}$$

Definimos analogamente os conjuntos $N_u, u \in V'$, dos vértices representados, da mesma forma que para o hipercaminho.

- **Grafo simplificado de uma d -hipergrade $\mathcal{G}^d(V, E) = \mathcal{P}_{n_1, m_1}^1 \times \dots \times \mathcal{P}_{n_d, m_d}^d$.** Escolhemos inicialmente os vértices representantes para o hipercaminho $\mathcal{P}_{n_1, m_1}^1$ no modelo $M_{2,1}$. Seja G_1 o seu grafo simplificado, com seus vértices representantes

Figura 5.6: Passo 1 da simplificação no modelo $M_{2,1}$ para a 2-hipergrade $\mathcal{G}^2 = \mathcal{P}_{3,3}^1 \times \mathcal{P}_{3,2}^2$.

Figura 5.7: Passo 2 da simplificação no modelo $M_{2,1}$ para a 2-hipergrade $\mathcal{G}^2 = \mathcal{P}_{3,3}^1 \times \mathcal{P}_{3,2}^2$.

$V^{(1)} = \{u_1^{(1)}, \dots, u_{n-1}^{(1)}, u_n^{(1)}, \dots, u_{2(n-1)}^{(1)}\}$. Seja $\mathcal{G}^{(1)} = G_1 \times \mathcal{P}_{n_2, m_2}^2 \times \dots \times \mathcal{P}_{n_d, m_d}^d$, denominamos seus vértices por vértices representantes de primeira ordem. Repetindo o procedimento acima para as outras dimensões chegaremos ao grafo $\mathcal{G}^{(d)}$ (figuras 5.6 e 5.7).

Podemos definir analogamente à simplificação anterior da hipergrade os conjuntos de vértices representados e os conjuntos de vértices sem representante.

Redução: Observe que em cada dimensão i de $\mathcal{G}^{(d)} = G_1 \times \dots \times G_d$ para todo vértice $v \in G_i$ existe um único vértice $u \in G_i, u \neq v$, tais que u e v são *equivalentes*, isto é tem os mesmos conjuntos de vértices representados ($N_u^{(i)} = N_v^{(i)}$). Se os vértices u e v são equivalentes então u e v pertencem às mesmas hiperarestas de $\mathcal{P}_{n_i, m_i}^i$.

Definição: A partir de um grafo simplificado G_s definimos o grafo simplificado reduzido, ou *grafo reduzido*, G^* . Em cada uma das dimensões de G_s , os pares de vértices equivalentes correspondem a um único vértice na mesma dimensão de G^* . As relações de adjacência entre os vértices são mantidas.

Seja G^* (figura 5.8) o grafo reduzido de $\mathcal{G}^{(d)}$.

Figura 5.8: Grafo reduzido G^* da 2-hipergrade $\mathcal{G}^2 = \mathcal{P}_{3,3}^1 \times \mathcal{P}_{3,2}^2$.

Lema 8 *Um algoritmo de comunicação em G^* , no modelo F_1 , pode ser simulado em $\mathcal{G}^{(d)}$ no modelo H_1 .*

Idéia: Uma transmissão simultânea $(0,1) \leftarrow (1,1), (1,1) \leftarrow (0,1)$ no grafo reduzido da figura 5.8 é realizada no grafo $\mathcal{G}^{(d)}$ (figura 5.7) através das seguintes transmissões: $(0,1) \leftarrow (1,1), (7,1) \leftarrow (6,1), (0,4) \leftarrow (1,4), (7,4) \leftarrow (6,4)$. Pois, estas transmissões em $\mathcal{G}^{(d)}$ correspondem as seguintes transmissões em $\mathcal{G}^d$.

$\mathcal{G}^{(d)}$	$\mathcal{G}^d$
$(0,1) \leftarrow (1,1)$	$\{(0,1), (6,1)\} \Leftarrow (1,1)$
$(7,1) \leftarrow (6,1)$	$\{(1,1), (7,1)\} \Leftarrow (6,1)$
$(0,4) \leftarrow (1,4)$	$\{(0,4), (6,4)\} \Leftarrow (1,4)$
$(7,4) \leftarrow (6,4)$	$\{(1,4), (7,4)\} \Leftarrow (6,4)$

Prova: Para esta demonstração supõe-se que inicialmente os vértices $\{v_1, \dots, v_{2d}\} (\subset \mathcal{G}^{(d)})$ que correspondem a cada vértice v de G^* contém as mesmas informações que v .

Dado um ciclo T em G^* , no modelo F_1 , sejam $t_1, \dots, t_p$ as transmissões que compõem T . Como estamos no modelo F_1 as arestas envolvidas em cada transmissão são, t_i , 2 a 2 disjuntas ($t_i \cap t_j = \emptyset, i \neq j$), vamos mostrar que uma transmissão t , entre dois vértices u, v (adjacentes), com $u \leftarrow v$ e $v \leftarrow u$, pode ser realizada em $\mathcal{G}^{(d)}$.

Sejam $(u_i, u'_i), 1 \leq i \leq 2(d-1)$, os pares de vértices equivalentes que deram origem a u , na dimensão onde ocorre a transmissão. Respectivamente $(v_i, v'_i), 1 \leq i \leq 2(d-1)$ em relação a v , de tal forma que u_i e v_i , tem uma aresta em comum (em $\mathcal{G}^{(d)}$).

Uma transmissão simultânea $u \leftarrow v, v \leftarrow u$, é equivalente a transmissão $u_i \leftarrow v_i, v'_i \leftarrow u'_i, 1 \leq i \leq 2(d-1)$. Pois como v_i, v'_i, u_i, u'_i estão na mesma hiperaresta $u_i \leftarrow v_i$ implica $\{u_i, u'_i\} \Leftarrow v_i$ e $v'_i \leftarrow u'_i$ implica $\{v_i, v'_i\} \Leftarrow u'_i$. Observe que após a transmissão a suposição inicial continua válida. $\square$

Lema 9 *Um algoritmo de comunicação em $\mathcal{G}^{(d)}$ no modelo H_1 , pode ser simulado em $\mathcal{G}^d$ no modelo $M_{2,1}$.*

Prova: Dados dois vértices adjacentes u, v em $\mathcal{G}^d$ é fácil verificar que a transmissão isolada $u \leftarrow v$ pode ser realizada em $\mathcal{G}^d$. Suponha que exista um ciclo T realizável em $\mathcal{G}^{(d)}$ no modelo H_1 , que não pode ser executado em $\mathcal{G}^d$ no modelo $M_{2,1}$. Podemos decompor T em $t_1, \dots, t_d$, onde t_i contém as transmissões na dimensão i .

Segue que existe um $j, 1 \leq j \leq d$, tal que t_j não pode ser realizado em $\mathcal{G}^d$ no modelo $M_{2,1}$. Observando que na dimensão j , temos dois vértices de $\mathcal{G}^{(d)}$ por hiperaresta de $\mathcal{G}^d$, e que cada aresta comporta duas transmissões, chegamos a uma contradição. $\square$

5.2.3 Simplificação * para o modelo $M_{1,1}$

Nessa e na próxima operação de simplificação, vamos aproveitar melhor as características dos hipergrafos. Para isso, como no modelo $M_{2,1}$, escolheremos mais de um representante por intersecção.

- **Grafo simplificado $G(V', E')$ de um hipercaminho $\mathcal{P}_{n,m}(V, E)$.**

O grafo simplificado $G(V', E')$ é o mesmo que na simplificação para o modelo $M_{2,1}$. Seja G^* o seu grafo reduzido.

Lema 10 *Um algoritmo de comunicação em G^* , no modelo H_* , pode ser simulado em $\mathcal{P}_{n,m}$ no modelo $M_{1,1}$.*

Prova: Como a limitação do modelo é relativa ao envio de mensagens, vamos analisar o caso em que um vértice v de G^* envia mensagens aos seus dois vizinhos u, w . Seja v_1 e v_2 os vértices equivalentes correspondentes a v em G , e N_u e N_w os conjuntos dos vértices representados, respectivamente pelos vértices correspondentes a u e w . É fácil ver que o ciclo $\{u \leftarrow v, w \leftarrow v\}$ é equivalente a $\{N_u \Leftarrow v_1, N_w \Leftarrow v_2\}$.

Note que para esta demonstração supusemos que todo vértice v do grafo G^* contém a mesma informação que os vértices correspondentes a v , em G . $\square$

- **Grafo simplificado $G(V', E')$ de um hiperanel $\mathcal{R}_{n,m}(V, E)$.** Análogo ao anterior.

- **Grafo simplificado de uma d -hipergrade** $\mathcal{G}^d(V, E) = \mathcal{P}_{n_1, m_1}^1 \times \dots \times \mathcal{P}_{n_d, m_d}^d$.
Seja $G_1(V'_1, E'_1)$ o grafo simplificado de $\mathcal{P}_{n_1, m_1}^1$. Da seguinte forma, sejam os vértices representantes $V'_1 = \{u_1^{(1)}, \dots, u_{(n_1-1)2d}^{(1)}\}$, tais que:

$$\begin{cases} u_{1+j(n_1-1)} \bmod n_1 = 0 \\ u_{i+1+j(n_1-1)} = u_{i+j(n_1-1)} + 1 & 1 \leq i \leq n-1 \text{ e } 0 \leq j \leq 2d-1 \\ u_{1+l(n_1-1)} \neq u_{1+k(n_1-1)}, \text{ se } k \neq l. \end{cases}$$

onde os vértices de G_1 são adjacentes, se e só se os mesmos são adjacentes em $\mathcal{P}_{n_1, m_1}^1$. Da mesma forma definimos os grafos simplificados $G_i(V'_i, E'_i)$ correspondentes aos hipercaminhos $\mathcal{P}_{n_i, m_i}^i$, $2 \leq i \leq d$.

Seja $\mathcal{G}^{(1)} = G_1 \times \mathcal{P}_{n_2, m_2}^2 \times \dots \times \mathcal{P}_{n_d, m_d}^d$, denominamos os vértices de $\mathcal{G}^{(1)}$ por vértices representantes de primeira ordem. Os vértices de $\mathcal{G}^{(2)} = G_1 \times G_2 \times \mathcal{P}_{n_3, m_3}^3 \times \dots \times \mathcal{P}_{n_d, m_d}^d$ serão denominados vértices representantes de segunda ordem. Continuando teremos $\mathcal{G}^{(d)} = G_1 \times \dots \times G_d$, que será um grafo, cujos vértices serão os vértices representantes de d -ésima ordem (figura 5.9).

Para cada $x \in \mathcal{G}^{(j)}$ definimos o conjunto $N_x = \{y_1^{(j)}, \dots, y_{m_j}^{(j)}\}$ pertencente a $\mathcal{G}^{(j-1)}$ tais que:

$$\begin{cases} (x - y_i^{(j)})_l = 0, l \neq j \\ ((x - y_i^{(j)}) \bmod n_j)_j = 0. \end{cases} \quad 1 \leq i \leq m_j$$

Definimos também os conjuntos $W_{i_1, \dots, i_d}^{(j)}$, $1 \leq j \leq d$, dos vértices sem representante analogamente à definição dos conjuntos de vértices sem representante para a d -hipergrade no modelo $M_{1,1}$. A partir do grafo $\mathcal{G}^{(d)}$ definimos o grafo reduzido G^* (figura 5.10).

Seguindo a mesma linha de raciocínio utilizada para o hipercaminho, temos:

Lema 11 *Um algoritmo de comunicação em G^* , no modelo H_* , ou H_{2d} , pode ser simulado em $\mathcal{G}^{(d)}$ no modelo H_1 .*

Idéia: Uma transmissão de um vértice $v \in G^*$ a todos os seus vizinhos (em uma grade bidimensional) é realizada conforme a figura 5.11 pelos vértices que deram origem a v em $\mathcal{G}^{(d)}$ (As setas indicam a direção de transmissão). $\square$

Lema 12 *Um algoritmo de comunicação em $\mathcal{G}^{(d)}$ no modelo H_1 , pode ser simulado em $\mathcal{G}^d$ no modelo $M_{1,1}$.*

- Os procedimentos para o hipertoro são análogos.

Figura 5.9: Grafo simplificado $*$ de uma hipergrade bidimensional $\mathcal{G}^2 = \mathcal{P}_{3,m_1} \times \mathcal{P}_{3,m_2}$, ($m_1, m_2 \geq 4$). As setas indicam que todos os vértices da linha, ou coluna são adjacentes.

5.2.4 Simplificação $*$ para o modelo $M_{2,1}$

Note que para esta seção iremos supor que um vértice, no modelo $M_{x,1}$ (assim como no modelo H_1) pode enviar, no máximo, uma mensagem, e receber várias mensagens, no mesmo ciclo. Isto é, supomos que o modelo adotado limita apenas o número de transmissões por vértice. Esta simplificação será utilizada para a hipergrade e hipertoro, de tal forma que possamos trabalhar com o grafo reduzido no modelo F_* .

- **hipergrade** Seguindo os mesmos passos utilizados para chegar aos grafos simplificado $\mathcal{G}^{(d)}$ e reduzido G^* de uma hipergrade $\mathcal{G}^d$, na simplificação $*$ para o modelo $M_{1,1}$, temos:

Lema 13 *Um algoritmo de comunicação em G^* , no modelo F_* pode ser simulado em $\mathcal{G}^{(d)}$ no modelo F_1 .*

Figura 5.10: Grafo reduzido de uma hipergrade bidimensional $\mathcal{G}^2 = \mathcal{P}_{3,m_1} \times \mathcal{P}_{3,m_2}$, $(m_1, m_2 \geq 4)$.

Lema 14 *Um algoritmo de comunicação em $\mathcal{G}^{(d)}$, no modelo F_1 , pode ser simulado em $\mathcal{G}^d$ no modelo $M_{2,1}$.*

- **hipertoro** Analogamente ao anterior, se temos o grafo simplificado $\mathcal{G}^{(d)}$, o reduzido $\mathcal{G}^*$ de um hipertoro $\mathcal{T}^d$, valem os corolários do item anterior.

5.3 Padrões de comunicação

Dados um hipergrafo $\mathcal{G}(V, E)$ e seu grafo simplificado $G(V', E')$, denotamos a operação de difusão por $broadcast_M(G)$, no modelo M , no grafo G . Cada transmissão $v \leftarrow u$ no grafo G representa uma transmissão de u a todos os vértices da hiperaresta que contém u e v em $\mathcal{G}$. Analogamente denotamos por $gossiping_M(G)$ a troca completa no grafo G , no modelo M .

No decorrer do texto, quando definimos um grafo simplificado, estamos definindo implicitamente os conjuntos de vértices representantes V' , de vértices representados $N_u, u \in V'$ e, se for o caso, os conjuntos de vértices sem representante.

Para as descrições dos algoritmos utilizaremos a notação:

instrução-for

comando₁
 $\vdots$
comando _{n}

onde os n ($n \geq 0$) comandos serão executados conforme a instrução-for. Usaremos nos algoritmos os seguintes tipos de instruções-for:

for all $v \in V$

Figura 5.11: Simulação de uma transmissão no modelo H_* no grafo simplificado $\mathcal{G}^{(d)}$. As setas pequenas indicam a direção de transmissão.

for $i = 0$ to $n - 1$

for each $v \in V$

for two $v \in V$

5.3.1 Resultados obtidos para a difusão

Nesta seção apresentaremos os resultados obtidos para a difusão nas estruturas de interconexão definidas.

Comentários

É importante ressaltar que para a difusão só interessa a análise dos modelo $M_{1,i}$ em qualquer hipergrafo. Pois a cada passo da difusão existe uma bipartição de vértices, os que contêm a informação, e os que não a contêm. A informação deve ser transmitida de uma partição a outra. Além de que no modelo de transmissão suposto (tempo de transmissão independe do tamanho da mensagem), não importa o grau das hiperarestas

que ligam os mesmos dois vértices entre as partições. Segue que o estudo dos modelos em que as hiperarestas são k -porta recai no estudo dos modelos com as hiperarestas 1-porta.

Se o vértice que contém a mensagem inicialmente é candidato a vértice representante, é fácil ver que podemos sem perda de generalidade supor que ele será eleito vértice representante.

Algoritmos

Hipercaminho $\mathcal{P}_{n,m}$. Seja $G(V', E')$ o seu grafo simplificado, no modelo $M_{1,1}$. O vértice representante que contém a mensagem inicia a difusão, enviando a mensagem ao seu vizinho. Note que uma transmissão $v \leftarrow u$, com $u, v \in V'$, é equivalente a $N_u \Leftarrow u, N_v \Leftarrow u$. Em seguida os vértices em V' que contém a mensagem continuam a propagação da mensagem em G . Por fim, os nós sem representante recebem a mensagem do nó representante adjacente. Logo $g_{M_{1,1}}(\mathcal{P}_{n,m}) = g_{H_1}(G) + 1 = n - 1 = D(\mathcal{P}_{n,m})$.

Algoritmo:

1. $\text{broadcast}_{H_1}(G)$
2. $W \Leftarrow u_{n-1}$

Hipergrade $\mathcal{G}^d = \mathcal{P}_{n_1, m_1}^1 \times \dots \times \mathcal{P}_{n_d, m_d}^d$. Resolvemos o problema por dimensões, primeiramente disseminamos a mensagem no caminho $\mathcal{P}_{n_1, m_1}$. Em seguida todos os caminhos na segunda dimensão efetuam a difusão. Seguindo esta idéia completaremos a difusão em $\sum_{i=1}^d (n_i - 1)$ ciclos.

Proposição 4 *A complexidade do algoritmo de difusão, para o hipercaminho, e hipergrade, no modelo mais fraco ($M_{1,1}$), é ótima.*

Hiperanel $\mathcal{R}_{n,m}$. Seja $G(V', E')$ o seu grafo simplificado, no modelo $M_{1,x}$. Temos o seguinte algoritmo.

1. $\text{broadcast}_{H_x}(G)$

Proposição 5 *A complexidade do algoritmo de difusão, para o hiperanel ($\mathcal{R}_{n,m}$), nos modelos $M_{1,1}$ e $M_{1,2}$ é ótima.*

Prova: Para o modelo $M_{1,2}$ não há o que demonstrar, pois $g_{M_{1,1}} = D(\mathcal{R}_{n,m})$. No modelo $M_{1,1}$, se n é ímpar, temos que, existem dois vértices em hiperarestas diferentes de $\mathcal{R}_{n,m}$ à distância D (diâmetro) do originador. Por indução, em i , a cada ciclo i , no máximo 1 aresta pode transmitir para vértices a distância i do originador ($i > 1$). Logo se temos dois vértices, em hiperarestas diferentes, apenas um pode receber a mensagem no ciclo D , portanto $g_{M_{1,1}}(\mathcal{R}_{n,m}) \geq D + 1$, se n é ímpar. $\square$

Hipertoro. Resolvemos o problema por dimensões, analogamente à hipergrade. Desta forma $g_{M_{1,1}}(\mathcal{T}^d) \leq D + m$, onde m é o número de dimensões de $\mathcal{T}^d$ com hiperanel de tamanho ímpar e $g_{M_{1,2}}(\mathcal{T}^d) = D$.

5.3.2 Troca completa

Apresentaremos agora os resultados obtidos para a troca completa.

Comentários

Para a operação de troca completa, o limite inferior utilizado para a difusão (diâmetro) é “muito” menor do que o número de ciclos dos algoritmos apresentados. Assim sendo apresentaremos alguns limites inferiores específicos para a troca completa.

Os algoritmos para a troca completa se dividem em 3 fases, *inicial*, *central* e *final*. A etapa inicial corresponde a concentração das mensagens nos vértices representantes. A etapa final é a difusão dos vértices representantes para os seus representados. Na etapa central, a idéia é realizar a troca completa no grafo simplificado, ou reduzido.

Hipercaminho $\mathcal{P}_{n,m}$.

- $M_{1,i}$

Primeiramente observe que as informações nos vértices localizados nas hiperarestas no extremo levam no mínimo m ciclos para alcançar a hiperaresta vizinha, segue que um limite inferior é $m + D(\mathcal{P}_{n,m}) - 1$.

Seja $G(V', E')$ o grafo simplificado para o modelo $M_{1,i}$, temos o seguinte algoritmo.

1. Inicial
 - (a) for all $u \in V'$
for each $v \in N_u, u \leftarrow v$
 - (b) for each $v \in W, u_{n-1} \leftarrow v$
2. Central
 $gossiping_{H_i}(G)$
3. Final
 $W \Leftarrow u_{n-1}$

Proposição 6 Para o modelo $M_{1,i}$ ($i = 1$ ou $i = 2$), o limite superior para a troca completa no hipercaminho $\mathcal{P}_{n,m}$ é menor que $(2m - 1) + g_{H_i}(G) + 1 = 2m + g_{H_i}(G)$.

Utilizando a simplificação $*$ para o modelo $M_{1,1}$ a fase central poderia ser executada no padrão H_* . Enquanto que a fase inicial seria realizada em $2m$ ciclos, logo $g_{M_{1,1}}(\mathcal{P}_{n,m}) \leq 2m + 1 + g_{H_*}(G)$.

- $M_{2,1}$

Neste caso, como as hiperarestas podem transmitir até duas mensagens por ciclo temos $\lceil \frac{m}{2} \rceil + D(\mathcal{P}_{n,m}) - 1$ como limite inferior. Seja $G(V', E')$ o grafo simplificado no modelo $M_{2,1}$, seja $G^*(V^*, E^*)$ o grafo reduzido de $G(V', E')$. Algoritmo:

1. Inicial
 - (a) for all $u_i \in V' \mid 1 \leq i \leq n-1$
for two $v \in N_{u_i}, \{u_i, u_{i+n-1}\} \Leftarrow v$
 - (b) for two $v \in W, \{u_{n-1}, u_{2(n-1)}\} \Leftarrow v$
2. Central
 $gossiping_{F_1}(G^*)$
3. Final
 $W \Leftarrow u_{n-1}$

Proposição 7 No modelo $M_{2,1}$, temos $g(\mathcal{P}_{n,m}) \leq m + g_{F_1}(G^*) + 1 = m + 1 + g_{F_1}(G^*)$.

- $M_{2,2}$

Usamos um algoritmo similar ao do modelo $M_{2,1}$, com uma pequena alteração na fase inicial. Seja $G(V', E')$ o grafo simplificado, temos:

1. Inicial
 - (a) for all $u_i \in V'$
for two $v \in N_{u_i}, u_i \leftarrow v$
 - (b) for two $v \in W, u_{n-1} \leftarrow v$
2. Central
 $gossiping_{F_*}(G)$
3. Final
 $W \Leftarrow u_{n-1}$

Proposição 8 No modelo $M_{2,2}$, $g(\mathcal{P}_{n,m}) \leq m + g_{F_*}(G) + 1$.

Hiperanel $\mathcal{R}_{n,m}$

- $M_{1,i}$

Um limite inferior trivial para o hiperanel é $\lceil \frac{m}{2} \rceil + \lceil \frac{n}{2} \rceil$, o $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ está relacionado a quantidade de informações em cada intersecção de hiperarestas. O $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ vem diretamente do limite inferior para o anel de tamanho n . Seja $G(V', E')$ o grafo simplificado para o modelo $M_{1,i}$. Algoritmo:

1. Inicial
for all $u \in V'$
for each $v \in N_u, u \leftarrow v$

2. Central
 $gossiping_{H_i}(G)$

O algoritmo gasta $m - 1 + g_{H_i}(G)$ ciclos. Utilizando a simplificação * para o modelo $M_{1,1}$, sejam $G(V', E')$ o grafo simplificado e $G^*(V^*, E^*)$ o grafo reduzido.

Algoritmo:

1. Inicial
for all $u_i \in V' \mid 1 \leq i \leq n$
for each $v \in N_{u_i}, \{u_i, u_{i+n}\} \Leftarrow v$
2. Central
 $gossiping_{H_*}(G^*)$

Neste caso o algoritmo gasta $m + g_{H_*}(G)$ ciclos.

Proposição 9 Para o modelo $M_{1,i} (i = 1, 2)$, o número de passos do melhor algoritmo para a troca completa no hiperanel $\mathcal{R}_{n,m}$ é no máximo $m + (1 - i) + g_{H_*}(G)$

• $M_{2,1}$

Como as hiperarestas podem transmitir até duas mensagens por ciclo temos $\lceil \frac{m}{4} \rceil + \lceil \frac{n}{2} \rceil$ como limite inferior. Seja $G(V', E')$ o grafo simplificado no modelo $M_{2,1}$, seja $G^*(V^*, E^*)$ o grafo reduzido de $G(V', E')$. Algoritmo:

1. Inicial
for all $u_i \in V' \mid 1 \leq i \leq n$
for two $v \in N_{u_i}, \{u_i, u_{n+i}\} \Leftarrow v$
2. Central
 $gossiping_{F_1}(G^*)$

Proposição 10 No modelo $M_{2,1}$, temos $g(\mathcal{R}_{n,m}) \leq m + g_{F_1}(G^*)$.

• $M_{2,2}$

Seja $G(V', E')$ o grafo simplificado no modelo $M_{2,2}$. Utilizando a fase inicial do modelo $M_{1,i}$ e a fase central do modelo $M_{2,i}$ (com $G^* = G$) temos o algoritmo para o modelo $M_{2,2}$.

Proposição 11 No modelo $M_{2,2}$, $g(\mathcal{R}_{n,m}) \leq m - 1 + g_{F_*}(G)$.

Hipergrade

Troca completa na d -hipergrade, $\mathcal{G}^d = \mathcal{P}_{n_1, m_1}^1 \times \dots \times \mathcal{P}_{n_d, m_d}^d$, em qualquer modelo, depende quase que só dos passos de inicialização e finalização, pois para d -grades

suficientemente grandes a troca completa, no modelo H_1 , pode ser efetuada em D passos [10] (seção 2.4.2).

Neste trabalho não encontramos bons limites inferiores para os algoritmos de troca completa na hipergrade e no hipertoro. Denotaremos um vértice $v \in \mathcal{G}^d$ com coordenadas $i_1, \dots, i_d$ por $v_{i_1, \dots, i_d}$.

- $M_{1,i}$

Seja G o seu grafo simplificado no modelo $M_{1,i}$. Temos o seguinte algoritmo para a troca completa.

1. for $j = 1$ to d
 - for all $x^{(j)} \in \mathcal{G}^{(j)}$
 - for each $v \in N_{x^{(j)}}, x^{(j)} \leftarrow v$
 - for all $W_{i_1, \dots, i_d}^{(j)}$
 - for each $v \in W_{i_1, \dots, i_d}^{(j)}$
 - $v_{i_1, \dots, i_{j-1}, u_{n_j-1}^{(j)}, i_{j+1}, \dots, i_d} \leftarrow v$
2. $\text{gossiping}_{H_i}(G)$
3. for $j = d$ to 1
 - for all $x^{(j)} \in \mathcal{G}^{(j)}, N_{x^{(j)}} \Leftarrow x^{(j)}$
 - for all $W_{i_1, \dots, i_d}^{(j)}$
 - $W_{i_1, \dots, i_d}^{(j)} \Leftarrow v_{i_1, \dots, i_{j-1}, u_{n_j-1}^{(j)}, i_{j+1}, \dots, i_d}$

- $M_{2,1}$

Seja $G(V', E')$ o grafo simplificado da d -hipergrade $\mathcal{G}^d = \mathcal{P}_{n_1, m_1}^1 \times \dots \times \mathcal{P}_{n_d, m_d}^d$ no modelo $M_{2,1}$ ($k = 1$), ou grafo simplificado $*$ no modelo $M_{2,1}$ ($k = 2d$). Seja G^* o grafo reduzido. Algoritmo:

1. for $j = 1$ to d
 - for all $x^{(j)} \in \mathcal{G}^{(j)}$
 - for two $v \in N_{x^{(j)}}, E \Leftarrow v$
 - onde E é a hiperaresta que contém os representantes de v na dimensão j .
 - for all $W_{i_1, \dots, i_d}^{(j)}$
 - for two $v \in W_{i_1, \dots, i_d}^{(j)}$
 - $E \leftarrow v$
 - onde E é a hiperaresta que contém v na dimensão j .
2. $\text{gossiping}_{F_k}(G^*)$
3. for $j = d$ to 1
 - for all $x^{(j)} \in \mathcal{G}^{(j)}, N_{x^{(j)}} \Leftarrow x^{(j)}$
 - for all $W_{i_1, \dots, i_d}^{(j)}$
 - $W_{i_1, \dots, i_d}^{(j)} \Leftarrow v_{i_1, \dots, i_j, u_{n_j-1}^{(j)}, i_{j+1}, \dots, i_d}$

- $M_{2,*}$

Finalmente para o modelo $M_{2,*}$, temos:

1. for $j = 1$ to d
 - for all $x^{(j)} \in \mathcal{G}^{(j)}$
 - for two $v \in N_{x^{(j)}}, x^{(j)} \leftarrow v$
 - for all $W_{i_1, \dots, i_d}^{(j)}$
 - for two $v \in W_{i_1, \dots, i_d}^{(j)}$
 - $v_{i_1, \dots, i_{j-1}, u_{n_j-1}^{(j)}, i_{j+1}, \dots, i_d} \leftarrow v$
2. $\text{gossiping}_{F_*}(G)$
3. for $j = d$ to 1
 - for all $x^{(j)} \in \mathcal{G}^{(j)}, N_{x^{(j)}} \Leftarrow x^{(j)}$
 - for all $W_{i_1, \dots, i_d}^{(j)}$
 - $W_{i_1, \dots, i_d}^{(j)} \Leftarrow v_{i_1, \dots, i_{j-1}, u_{n_j-1}^{(j)}, i_{j+1}, \dots, i_d}$

Observe que em qualquer um dos modelos a fase final (3) pode ser realizada em d ciclos, pois quando ocorrem as transmissões aos vértices representados também ocorrem transmissões aos vértices sem representante. Isto é cada passo do for da fase 3 é realizado em um ciclo.

Proposição 12 *Os tempos para a troca completa em hipergrades são menores ou iguais a*

- $\sum_{i=1}^d (2m_i - 1) + g_{H_i}(G) + d$, no modelo $M_{1,i}$
- $\sum_{i=1}^d (m_i) + g_{F_1}(G^*) + d$, no modelo $M_{2,1}$
- $\sum_{i=1}^d (m_i) + g_{F_*}(G) + d$, no modelo $M_{2,*}$

onde G e G^* são respectivamente o grafo simplificado e o grafo reduzido no modelo correspondente.

Observe que para o modelo $M_{2,1}$, colocamos o tempo para a simplificação, e não simplificação *. Pois as hipóteses da simplificação * não são válidas para os barramentos existentes atualmente. Faremos o mesmo para o hipertoro.

Hipertoro

Seguindo passos análogos aos algoritmos para hipergrade temos:

Proposição 13 *Dado um hipertoro $\mathcal{T}^d(V, E) = \mathcal{R}_{n_1, m_1}^1 \times \dots \times \mathcal{R}_{n_d, m_d}^d$. Os tempos para a troca completa são menores ou iguais a*

- $\sum_{i=1}^d (m_i - 1) + g_{H_i}(G) + d$, no modelo $M_{1,i}$

- $\sum_{i=1}^d (\lceil \frac{m_i}{2} \rceil) + g_{F_1}(G) + d$, no modelo $M_{2,1}$
- $\sum_{i=1}^d (\lceil \frac{m_i-1}{2} \rceil) + g_{F_*}(G) + d$, no modelo $M_{2,*}$

onde G e G^* são respectivamente o grafo simplificado e o grafo reduzido no modelo correspondente.

5.3.3 Tabelas comparativas

Apresentaremos agora um resumo de todos os resultados obtidos.

Difusão	$M_{1,1}$	$M_{1,*}$	diâmetro
$\mathcal{P}_{n,m}(V, E)$	$n - 1$	$n - 1$	$n - 1$
$\mathcal{R}_{n,m}(V, E)$	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
$\mathcal{G}^d(V, E) = \mathcal{P}_{n_1, m_1}^1 \times \dots \times \mathcal{P}_{n_d, m_d}^d$	$\sum_{i=1}^d (n_i - 1)$	$\sum_{i=1}^d (n_i - 1)$	$\sum_{i=1}^d (n_i - 1)$
$\mathcal{T}^d(V, E) = \mathcal{R}_{n_1, m_1}^1 \times \dots \times \mathcal{R}_{n_d, m_d}^d$	$\sum_{i=1}^d (\lceil \frac{n_i}{2} \rceil) + m^d$	$\sum_{i=1}^d (\lfloor \frac{n_i}{2} \rfloor)$	$\sum_{i=1}^d (\lfloor \frac{n_i}{2} \rfloor)$

Tabela 5.1: Resultados para a difusão nas (hiper)topologias, onde m^d é o número de dimensões com tamanho ímpar de $\mathcal{T}^d(V, E)$.

Nas tabelas para a troca completa (tabela 5.2 e 5.3) G e G^* são os grafos simplificado e reduzido, do hipergrafo em questão, no modelo referido.

Troca Completa	$M_{1,1}$	$M_{1,*}$
$\mathcal{P}_{n,m}(V, E)$	$2m + g_{H_1}(G)$	$2m + g_{H_2}(G)$
$\mathcal{R}_{n,m}(V, E)$	$m + g_{H_2}(G)$	$m - 1 + g_{H_2}(G)$
$\mathcal{G}^d(V, E)$	$\sum_{i=1}^d (2m_i) + g_{H_1}(G)$	$\sum_{i=1}^d (2m_i) + g_{H_*}(G)$
$\mathcal{T}^d(V, E)$	$\sum_{i=1}^d (m_i) + g_{H_1}(G)$	$\sum_{i=1}^d (m_i) + g_{H_*}(G)$

Tabela 5.2: Resultados (em função dos tempos para topologias em grafos) para a troca completa nas (hiper)topologias, modelos $M_{1,1}$ e $M_{1,*}$.

Troca Completa	$M_{2,1}$	$M_{2,k}$
$\mathcal{P}_{n,m}(V, E)$	$m + 1 + g_{F_1}(G^*)$	$m + 1 + g_{F_*}(G)$
$\mathcal{R}_{n,m}(V, E)$	$m + g_{F_1}(G^*)$	$m - 1 + g_{F_*}(G)$
$\mathcal{G}^d(V, E)$	$\sum_{i=1}^d (m_i) + g_{F_1}(G^*) + d$	$\sum_{i=1}^d (m_i) + g_{F_*}(G) + d$
$\mathcal{T}^d(V, E)$	$\sum_{i=1}^d (\lceil \frac{m_i}{2} \rceil) + g_{F_1}(G^*) + d$	$\sum_{i=1}^d (\lceil \frac{m_i-1}{2} \rceil) + g_{F_*}(G) + d$

Tabela 5.3: Resultados (em função dos tempos para topologias em grafos) para a troca completa nas (hiper)topologias, modelos $M_{2,1}$ e $M_{2,*}$.

Utilizando as tabelas com os tempos para a troca completa nas estruturas de interconexão modeladas por grafos temos as tabelas 5.4 e 5.5.

Troca Completa	$M_{1,1}$	$M_{1,*}$
$\mathcal{P}_{n,m}(V, E)$	$2m + n$	$2m + n - 1$
$\mathcal{R}_{n,m}(V, E)$	$m + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$	$m + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$
$\mathcal{G}^d(V, E)$	$\sum_{i=1}^d (2m_i + n_i) - d$	$\sum_{i=1}^d (2m_i + n_i) - d$
$\mathcal{T}^d(V, E)$	$\sum_{i=1}^d (m_i + \lfloor \frac{n_i}{2} \rfloor) + 18d + 39$	$\sum_{i=1}^d (m_i + \lfloor \frac{n_i}{2} \rfloor) + m^d + d$

Tabela 5.4: Resultados para a troca completa nas (hiper)topologias, modelos $M_{1,1}$ e $M_{1,*}$.

Troca Completa	$M_{2,1}$	$M_{2,k}$
$\mathcal{P}_{n,m}(V, E)$	$m + n$	$m + n - 1$
$\mathcal{R}_{n,m}(V, E)$	$m + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$	$m - 1 + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
$\mathcal{G}^d(V, E)$	$\sum_{i=1}^d (m_i + n_i)$	$\sum_{i=1}^d (m_i + n_i)$
$\mathcal{T}^d(V, E)$	$\sum_{i=1}^d (\lceil \frac{m_i}{2} \rceil + \lfloor \frac{n_i}{2} \rfloor) + d + 2m^d$	$\sum_{i=1}^d (\lceil \frac{m_i-1}{2} \rceil + \lfloor \frac{n_i}{2} \rfloor) + d$

Tabela 5.5: Resultados para a troca completa nas (hiper)topologias, modelos $M_{2,1}$ e $M_{2,*}$.

Capítulo 6

Conclusão

6.1 Apanhado geral

Neste trabalho estudamos modelos e algumas topologias para redes de interconexão ponto-a-ponto. Vimos algoritmos para a difusão e troca completa para estas topologias. Fizemos um pequeno estudo sobre alguns trabalhos anteriores que de alguma forma utilizaram barramentos.

Definimos um novo modelo de comunicação para a utilização com hipergrafos, que se adapta em topologias de interconexão ponto-a-ponto e/ou com barramentos. Propusemos novas topologias baseadas em barramentos, a saber, hiperanéis e hipertoros, etc, e definimos ferramentas (conceito de simplificação e redução) que facilitam a descrição de algoritmos nas mesmas. Por fim apresentamos algoritmos de comunicação global para estas topologias. Estes algoritmos são compostos por três fases:

1. *Inicial*- Concentração das informações nos vértices representantes;
2. *Central*- Utilização dos algoritmos para topologias em grafos (capítulo 2);
3. *Final*- Difusão das informações dos vértices representantes.

6.2 Contribuições e perspectivas

Observamos a viabilidade das novas topologias propostas através da apresentação de algoritmos de difusão e troca completa para cada uma delas.

A modelagem de barramentos por hiperarestas poderá ser muito útil para a formalização de várias topologias já existentes, bem como na criação de novas topologias baseadas em barramentos.

Os modelos de barramentos utilizados (para a transmissão de 1 ou 2 mensagens ao mesmo tempo), assim como os modelos utilizados para vértices (utilização de 1 ou todos os seus canais de comunicação) são bem conhecidos e utilizados por fabricantes de máquinas paralelas. Assim, outra vantagem destas novas topologias é a simplicidade e a facilidade de implementação.

Com a utilização de ferramentas de simplificação e redução, diversos algoritmos já existentes para topologias convencionais podem ser adaptados, com muito pouco esforço, para as topologias propostas.

Outro tópico muito interessante apresentado por este trabalho foi a possibilidade de criar redes de interconexão com as seguintes características:

- muitos processadores;
- diâmetro pequeno;
- simplicidade.

Alguns dos resultados obtidos neste trabalho foram ou serão publicados [13, 14, 15].

Uma perspectiva aberta por este trabalho é a elaboração de outros tipos de comunicação global como ordenação e cálculo do máximo. Um problema diretamente relacionado com as novas topologias propostas é o de encontrar limites inferiores para algoritmos de comunicação global específicos para cada uma delas. Outra possibilidade interessante é a generalização de outras topologias ponto-a-ponto, bem como a adaptação de propriedades e outros modelos de grafos para hipergrafos.

Apêndice A

Algoritmos para o toro

Apresentaremos os algoritmos de comunicação para a difusão para o toro no modelo H_1 conforme o padrão da seção 2.4.2. Veremos também uma listagem das possíveis saídas do algoritmo.

A.1 Definições comuns

Abaixo temos a declaração de variáveis e funções do programa.

```
/* funcoes e definicoes comuns */
#define MaxX 300 /* Numero maximo de linhas (deve ser multiplo de 4) */
#define MaxY 100 /* Numero maximo de colunas (deve ser multiplo de 4) */

#include <stdio.h> /* Bibliotecas utilizadas */
#include <conio.h>
#include <dos.h>

/* Verifica se o vertice nas coordenadas (lin,col) transmite na direcao
   horizontal no passo ciclo. Retorna 1 - transmissao a direita
                                   -1 - transmissao a esquerda
                                   0 - sem transmissao */
int hor(int ciclo, int lin, int col)
{ switch(lin%4)
  { case 0: if (col%4==ciclo%4)
            return(1);
            return(0);
  }
```

```

        case 1: if ((col+ciclo)%4==3)
                return(-1);
                return(0);
        case 2: if (col%4==(ciclo+2)%4)
                return(1);
                return(0);
        case 3: if (((col+ciclo)%4)==1)
                return(-1);
                return(0);
    }
    return(0);
}

/* Verifica se o vertice nas coordenadas (lin,col) transmite na direcao
vertical no passo ciclo. Retorna 1 - transmissao para cima
                                -1 - transmissao para baixo
                                0 - sem transmissao */
int ver(int ciclo, int lin, int col)
{ switch(col%4)
  { case 0: if ((lin+ciclo)%4==2)
            return(-1);
            return(0);
    case 1: if ((lin%4)==((ciclo+1)%4))
            return(1);
            return(0);
    case 2: if ((lin+ciclo)%4==0)
            return(-1);
            return(0);
    case 3: if ((lin%4==((ciclo+3)%4)))
            return(1);
            return(0);
  }
  return(0);
}

typedef unsigned short vertice; /* cada vertice contem um valor
                                0, se ainda nao recebeu o conjunto
                                n, se recebeu o conjunto no ciclo n */

typedef vertice toro[MaxX][MaxY]; /* o toro e uma matriz de vertices */

```

```

FILE *arq; /* arquivo onde serao armazenados os resultados */

/* funcao que inicializa cada vertice no toro com o valor 0, indicando
   que nenhum vertice no toro contem a mensagem */
void inicializa(toro t,int linhas, int colunas)
{ int i,j;
  for (i=0;i<linhas;i++)
    for (j=0;j<colunas;j++)
      t[i][j]=0;
}

/* funcao que imprime o ciclo em que cada vertice recebe o conjunto
   atraves da difusao no toro */
void imprime(toro t, int x,int y)
{ int i,j;
  FILE *arq1;
  arq1=fopen("saida1.txt","w");
  for (i=x-1;i>=0;i--)
    { for (j=0;j<y;j++)
      if (t[i][j]!=99)
        fprintf(arq1,"%2d ",t[i][j]);
      else
        fprintf(arq1,"IN ");
        fprintf(arq1,"\n");
      }
  fclose(arq1);
}

/* Efetua a difusao no toro de dimensoes (linhas,colunas) */
int broadcast(int linhas,int colunas)
{
  toro t;
  int i,j,k,passo,inx,iny,aux,quantidade;
  int cont,Maxpasso=0;
  struct {int c,
           l; } temp[2*MaxX];
  /* Vemos que existem 16 classes distintas de vertices, verifica-se o
     tempo da difusao para cada uma das classes */
  for(inx=0;inx<=3;inx++)
    for(iny=0;iny<=3;iny++)

```



```

{
    inicializa(t,linhas,colunas);
    t[inx][iny]=99; /* o originador comeca com a "marca" 99 */
    quantidade=1; /* Variavel que indica quantos
vertices contem a mensagem */
    /* O laço continua enquanto existem vertices nao informados */
    for(passo=0;(quantidade<linhas*colunas);passo++)
    {
        cont=0; /* Conta o numero de vertices a serem informados
neste passo */
        for (i=0;i<linhas;i++) /* Percorre a matriz buscando */
        for(j=0;j<colunas;j++)/* candidatos a transmissao */
        {
            if (t[i][j]) /* se e' candidato a transmissao */
            {
                temp[cont].c=(j+hor(passo,i,j)+colunas)%colunas;
                temp[cont].l=(i+ver(passo,i,j)+linhas)%linhas;
                /* calcula a direcao da transmissao */
                if (!(t[temp[cont].l][temp[cont].c]))
                    cont++; /* so' incrementa se este vertice ainda
                            nao recebeu o conjunto */
            }
        }
    }

    /* Atualiza os novos vertices informados */
    for(aux=0;aux<cont;aux++)
    {
        {
            t[temp[aux].l][temp[aux].c]=passo;
            quantidade++;
        }
    }
}

/* Se o numero de ciclos da difusao com o vertice originador com
coordenadas (inx,iny) e' maior que o maximo anterior, sera'
o novo maximo. */
if (passo>Maxpasso)
    Maxpasso=passo;
}

return(Maxpasso);/* Retorna o numero maximo de passos para completar
a difusao no toro de dimensoes (linhas,colunas) */
}

```

```

/* Efetua a difusao no toro de dimensoes (linhas,colunas) */
void broadcast2(int linhas,int colunas, int cx, int cy)
{
    toro t;
    int i,j,k,passo,inx,iny,aux,quantidade;
    int cont;
    struct {int c,
            l; } temp[2*MaxX];
    inicializa(t,linhas,colunas);
    t[cx][cy]=99; /* o originador comeca com a "marca" 99 */
    quantidade=1; /* Variavel que indica quantos
vertices contem a mensagem */
    /* O laço continua enquanto existem vertices nao informados */
    for(passo=0;(quantidade<linhas*colunas);passo++)
    {
        cont=0; /* Conta o numero de vertices a serem informados
neste passo */
        for (i=0;i<linhas;i++) /* Percorre a matriz buscando */
        for(j=0;j<colunas;j++)/* candidatos a transmissao */
        {
            if (t[i][j]) /* se e' candidato a trasnmissao */
            {
                temp[cont].c=(j+hor(passo,i,j)+colunas)%colunas;
                temp[cont].l=(i+ver(passo,i,j)+linhas)%linhas;
                /* calcula a direcao da transmissao */
                if (!(t[temp[cont].l][temp[cont].c]))
                    cont++; /* so' incrementa se este vertice ainda
                            nao recebeu o conjunto */
            }
        }
        /* Atualiza os novos vertices informados */
        for(aux=0;aux<cont;aux++)
        {
            {
                t[temp[aux].l][temp[aux].c]=passo;
                quantidade++;
            }
        }
    }
    imprime(t,linhas,colunas);
}

```

```
}
```

A.2 Programa principal

Existem duas opções para a utilização do programa, podemos ver como se propaga a difusão, segundo o esquema dado (ex: seção A.3) e também a diferença entre o diâmetro, e o tempo de difusão para toros de tamanho até 300×100 (ex: seção A.4).

```
/* Programa Principal */
main()
{
    int l,c,it;
    int opcao;
    int xinicial,yinicial,cx,cy;
    clrscr();
    printf(" OPCOES  \n");
    printf("  1) Diferenca entre o numero de ciclos para completar o ");
    printf("difusao e o diametro.\n");
    printf("  2) Comportamento da difusao em uma determinada grade.\n");
    scanf("%d",&opcao);
    if (opcao==1)
    {
        printf("Entre com o numero de linhas inicial ");
        scanf("%d",&xinicial);
        printf("Entre com o numero de colunas inicial ");
        scanf("%d",&yinicial);
        clrscr();
        arq=fopen("saida2.txt","w");
        for (l=xinicial;l<MaxX;l=l+4)
            for (c=yinicial;c<MaxY;c=c+4)
                if (l>=c)
                {
                    it=broadcast(l,c);
                    printf("grade (%3d,%3d) - diam=%3d - b(G)=%3d  dif=%2d\n"
                        ,l,c,(l+c)/2,it,it-(l+c)/2);
                    fprintf(arq,"grade (%3d,%3d) - diam=%3d - b(G)=%3d  dif=%2d\n"
                        ,l,c,(l+c)/2,it,it-(l+c)/2);
                }
        fclose(arq);
    }
    else
```

```

{
    printf("Entre com o numero de linhas ");
    scanf("%d",&xinicial);
    printf("Entre com o numero de colunas ");
    scanf("%d",&yinicial);
    printf(" Coordenada x do ponto inicial ");
    scanf("%d",&cx);
    printf(" Coordenada y do ponto inicial ");
    scanf("%d",&cy);
    broadcast2(xinicial,yinicial,cx,cy);
}
}

```

A.3 Propagação do conjunto

Abaixo temos a reprodução do arquivo *saida.txt* para o toro com 20×24 , com ponto inicial de difusão (1,1). Os números indicam em que ciclo o vértice recebe o conjunto, no primeiro ciclo apenas o difusor está informado.

```

6 13 12 15 14 17 16 19 18 21 20 21 18 19 16 17 14 15 12 13 10 11 8 9
7 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 19 22 17 20 15 18 13 16 11 14 9 12
8 15 14 17 16 19 18 21 20 23 22 23 20 21 18 19 16 17 14 15 12 13 10 11
9 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 21 24 19 22 17 20 15 18 13 16 11 14
10 17 16 19 18 21 20 23 22 25 24 25 22 23 20 21 18 19 16 17 14 15 12 13
11 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 23 26 21 24 19 22 17 20 15 18 13 16
12 15 18 21 20 23 22 25 24 27 26 27 24 25 22 23 20 21 18 19 16 17 14 15
13 14 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 25 26 23 24 21 22 19 20 17 18 15 16
14 13 20 19 22 21 24 23 26 25 28 27 26 25 24 23 22 21 20 19 18 17 16 15
15 12 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 24 25 22 23 20 21 18 19 16 17 14
14 11 18 17 20 19 22 21 24 23 26 25 26 23 24 21 22 19 20 17 18 15 16 13
15 10 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 22 25 20 23 18 21 16 19 14 17 12
12 9 16 15 18 17 20 19 22 21 24 23 24 21 22 19 20 17 18 15 16 13 14 11
13 8 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 20 23 18 21 16 19 14 17 12 15 10
10 7 14 13 16 15 18 17 20 19 22 21 22 19 20 17 18 15 16 13 14 11 12 9
11 6 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 18 21 16 19 14 17 12 15 10 13 8
8 5 12 11 14 13 16 15 18 17 20 19 20 17 18 15 16 13 14 11 12 9 10 7
9 4 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 16 19 14 17 12 15 10 13 8 11 6
2 IN 10 13 12 15 14 17 16 17 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3
5 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 17 20 15 18 13 16 11 14 9 12 7 10

```

A.4 Diferença entre diâmetro e tempo de difusão

Abaixo temos a reprodução do arquivo *saida2.txt* para toros de tamanho 4×4 à tamanho 32×32 .

grade (4, 4) - diam= 4 - b(G)= 9	dif= 5
grade (8, 4) - diam= 6 - b(G)= 12	dif= 6
grade (8, 8) - diam= 8 - b(G)= 14	dif= 6
grade (12, 4) - diam= 8 - b(G)= 14	dif= 6
grade (12, 8) - diam=10 - b(G)= 16	dif= 6
grade (12,12) - diam=12 - b(G)= 18	dif= 6
grade (16, 4) - diam=10 - b(G)= 16	dif= 6
grade (16, 8) - diam=12 - b(G)= 18	dif= 6
grade (16,12) - diam=14 - b(G)= 20	dif= 6
grade (16,16) - diam=16 - b(G)= 22	dif= 6
grade (20, 4) - diam=12 - b(G)= 18	dif= 6
grade (20, 8) - diam=14 - b(G)= 20	dif= 6
grade (20,12) - diam=16 - b(G)= 22	dif= 6
grade (20,16) - diam=18 - b(G)= 24	dif= 6
grade (20,20) - diam=20 - b(G)= 26	dif= 6
grade (24, 4) - diam=14 - b(G)= 20	dif= 6
grade (24, 8) - diam=16 - b(G)= 22	dif= 6
grade (24,12) - diam=18 - b(G)= 24	dif= 6
grade (24,16) - diam=20 - b(G)= 26	dif= 6
grade (24,20) - diam=22 - b(G)= 28	dif= 6
grade (24,24) - diam=24 - b(G)= 30	dif= 6
grade (28, 4) - diam=16 - b(G)= 22	dif= 6
grade (28, 8) - diam=18 - b(G)= 24	dif= 6
grade (28,12) - diam=20 - b(G)= 26	dif= 6
grade (28,16) - diam=22 - b(G)= 28	dif= 6
grade (28,20) - diam=24 - b(G)= 30	dif= 6
grade (28,24) - diam=26 - b(G)= 32	dif= 6
grade (28,28) - diam=28 - b(G)= 34	dif= 6
grade (32, 4) - diam=18 - b(G)= 24	dif= 6
grade (32, 8) - diam=20 - b(G)= 26	dif= 6
grade (32,12) - diam=22 - b(G)= 28	dif= 6
grade (32,16) - diam=24 - b(G)= 30	dif= 6
grade (32,20) - diam=26 - b(G)= 32	dif= 6
grade (32,24) - diam=28 - b(G)= 34	dif= 6
grade (32,28) - diam=30 - b(G)= 36	dif= 6
grade (32,32) - diam=32 - b(G)= 38	dif= 6

Bibliografia

- [1] A. Aggarwal, Optimal bounds for finding maximum on array of processors with k global buses, *IEEE Transactions on Computers*, C-35:62-64, no. 1, Jan. 1986.
- [2] G.S. Almasi and A.Gottlieb, *Highly Parallel Computing*, The Benjamin/Cummings Publishing Co., 1989.
- [3] C. Berge, *Hypergraphs, Combinatorics of Finite Sets*, North-Holland Mathematical Library, North-Holland, 1989.
- [4] J-C. Bermond, C. Delorme, and J-J.Quisquater, Strategies for interconnection networks: some methods from graph theory, *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 3:433-449, 1986.
- [5] J-C. Bermond, J. Bond, and C. Peyrat, Interconnection network with each node on two busses, *Proccedings of the International Workshop on Parallel Algorithms & Architectures*. France, April 1986.
- [6] D.P. Bertsekas, C. Ozveren, G.D. Stamoulis, P. Tseng, and J.N. Tsitsiklis, Optimal communication algorithms for hypercubes, *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 11:263-275, 1991.
- [7] L.N. Bhuyan and D.P. Agrawal, Generalized hypercube and hyperbus structures for a computer network, *IEEE Transactions on Computers*, vol. C-33, no.4, pp. 323-332, 1984.
- [8] S.H. Bokhari, Finding maximum on an array processor with a global bus, *IEEE Transactions on Computers*, C-33:133-139, Feb 1984.
- [9] S. Cook, C. Dwork, and R. Reischuk, Upper and lower bounds for parallel random access machines without simultaneous writes, *SIAM Journal of Computing*, 15(1):87-97, 1986.

- [10] G. Cybenko, D.W. Krumme, and K.N. Venkataraman, Gossiping in minimum time, *SIAM Journal on Computing*, Vol.21, no.1, pp. 111-139, Feb 1992.
 - [11] A.M. Farley and S.T. Hedetniemi, Broadcasting in grid graphs, *In Congressus Numerantium XXI, editor, Proc. 9th S-E conf. combinatorics, graph theory, and computing*, pages 275-288, 1978.
-
- [12] A. Farley and A. Proskurowski, Gossiping in grid graphs, *Journal of Combinatorics Information and Systems Science*, 5:161-172, 1980.
 - [13] A. Ferreira, A. Goldman vel Lejbman, S.W. Song, Bus based parallel computers and new communication patterns, Technical Report 93-18, LIP, ENS-Lyon, France, 1993.
 - [14] A. Ferreira, A. Goldman vel Lejbman, S.W. Song, Comunicação em hipergrades e hipertoros usando barramentos, *V Simpósio Brasileiro de Arquitetura de Computadores - Processamento de Alto Desempenho*, pag. 13-32, 1993.
 - [15] A. Ferreira, A. Goldman vel Lejbman, S.W. Song, A viable way for massive parallelism, *PARLE'94 Parallel Architectures and Languages Europe* (Lecture Notes of Computer Science, Springer-Verlag), Athens, July 1994. (a aparecer)
 - [16] F. Fich, F. Meyer auf der Heide, and A. Wigderson, Lower bounds for parallel random access machines with unbounded shared memory, *In F. P. Preparata, editor, Advances in Computing Research, volume 4 of Parallel and Distributed Computing*, 1987.
 - [17] M.J. Flynn, Very High Speed Computing Systems, *Proceedings IEEE*, 54, pp. 1901-1909, 1966.
 - [18] P. Fraigniaud and E. Lazard, Methods and problems of communication in usual networks, Technical Report no.701 of the LRI, Université Paris-Sud, Orsay, France, 1991.
 - [19] P. Fraigniaud, Performance analysis of broadcasting in hypercubes with restricted communication capabilities, *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 16(1):15-26, 1992.
 - [20] P. Fraigniaud, Introduction aux machines parallèles a mémoire distribuée, *CIMPA - CIMI - UNESCO - CHILE School*, Temuco, Chile, 1994.

- [21] S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, and A.L. Liestman, A survey of gossiping and broadcasting in communication networks, *Networks*, 18:319-349, 1988.
- [22] F. Meyer auf der Heide and H.T. Pham, On the performance of networks with multiple busses, *STACS 92 Lecture Notes in Computer Science*, Volume 577:97-108, Springer-Verlag, 1992.
- [23] H. Jiang and K.C. Smith, PPMB: a partial-multiple-bus multiprocessor architecture with improved cost-effectiveness, *IEEE Transactions on Computers*, Vol. 41, (1992) 361-366
- [24] J.C. König and E. Lazard, and D.W. Krumme, Oriented torus Diameter, Manuscript, June 1991.
- [25] D.W. Krumme, Fast gossiping for the hypercube, *SIAM Journal on Computing*, to appear.
- [26] J.E. McCanna, Orientations on the n -cube with minimum diameter, *Discrete Maths.*, 68:309-310, 1988.
- [27] M. Maheo and J.F. Sacle, Gossiping in Grids, Manuscript, April 1991.
- [28] K. Mehlhorn, Graph Algorithms and NP -Completeness, *volume 2 of Data Structures and Algorithms. EATCS Monographs on Theoretical Computer Science*. Springer Berlin, 1984.
- [29] S. Olariu, J.L. Schwing, and J. Zhang, On the power of two-dimensional processor arrays with reconfigurable bus system, *Parallel Processing Letters*, Vol.1, no.1, (1991) 29-34.
- [30] F.S. Roberts and Y. Xu, On the optimal strongly connected orientations of city street graphs III: three east-west avenues or north-south streets, Technical report RRR 21-86, Rutgers University, 1986.
- [31] F.S. Roberts and Y. Xu, On the optimal strongly connected orientations of city street graphs I: large grids, *SIAM Journal of Disc. Math*, 1(2):199-222, 1988.
- [32] F.S. Roberts and Y. Xu, On the optimal strongly connected orientations of city street graphs I: two east-west avenues or north-south streets, *Networks*, 19:221-233, 1989.
- [33] Y. Shiloach and U. Vishkin, Finding the maximum, merging, and sorting in a parallel computation model, *Journal of Algorithms*, 2:88-102, 1981.

- [34] Q.F. Stout, Meshes with multiple buses, *In 27th IEEE Symp. on Foundations of Comp. Science*, pages 264-273, 1986.
 - [35] A. Touzene and B. Plateau, Optimal multinode broadcast on a mesh connected graph with reduced bufferization, In A. Bode, editor, *Distributed Memory Computing, Lecture Notes in Computer Science 487*, 143-152. Springer-Verlag, 1991.
-
- [36] B. Wilkinson, On crossbar switch and multiple bus interconnection networks with overlapping connectivity, *IEEE Transactions on Computers*, Vol. 41 no. 6, June 1992.