**A Dinâmica da Hiperinflação:
Um Exemplo de Bifurcação
de Bogdanov-Takens**

Marcelo Messias

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE
MESTRE EM
MATEMÁTICA APLICADA

Orientador: Prof.Dr.Waldyr Muniz Oliva

São Paulo, Dezembro de 1992.

Aos
meus pais
e irmãos.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por tudo.

Agradeço a todos os professores e amigos (e foram tantos!) que, de alguma forma, colaboraram para que eu pudesse realizar este trabalho, em especial à Profa Elvia e ao amigo Orlando. Somos gratos também ao Prof. Fernando de Holanda Barbosa, por ter elaborado o modelo de hiperinflação aqui estudado.

Excelente! Não encontro outra palavra com a qual me referir à orientação e ao incentivo que recebi do Prof. Waldyr Muniz Oliva, desde que cheguei no IME-USP. A ele sou e serei sincera e eternamente grato.

O presente trabalho encontra-se inserido no contexto das atividades do grupo ligado ao Projeto Temático de Equipe da FAPESP (Transição de Fase Dinâmica em Sistemas Evolutivos), Proc. nº 90/3918-5. Durante a elaboração do mesmo, obtive apoio financeiro do CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico; a ambas as Instituições sou imensamente grato. Procurarei trabalhar para que o apoio que recebi do Estado se reverta em benefícios à sociedade.

Finalmente, agradeço ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, onde foi desenvolvido o trabalho.

Sinceramente sou,

Marcelo Messias.

Resumo

Estuda-se um sistema de duas equações diferenciais ordinárias não-lineares, dependendo de quatro parâmetros, e que descreve um modelo de hiperinflação.

Faz-se uma análise das bifurcações que ocorrem no plano de fase desse sistema, ao variarem-se os parâmetros envolvidos nas equações, e prova-se a existência e unicidade de certas órbitas periódicas. Constata-se também a presença de órbitas heteroclínicas e homoclínicas.

As órbitas homoclínicas surgem com a ocorrência de uma Bifurcação do tipo Bogdanov-Takens correspondente ao aparecimento, em um dos equilíbrios, de uma raiz nula dupla; já as órbitas periódicas originam-se via uma Bifurcação de Hopf, no outro equilíbrio. A continuação dessas órbitas periódicas foi também estudada e quando seu período tende a infinito elas se aproximam da órbita homoclínica.

Análises qualitativa e quantitativa foram elaboradas, visando propor estratégias para o controle inflacionário da economia, nos termos do modelo considerado.

Abstract

A system of two nonlinear ordinary differential equations with four real parameters, describing a hiperinflation model, is considered and studied.

An analysis is done about the bifurcations that occur on the two equilibria of the system, when the parameters vary. It is proved the existence and uniqueness of some periodic orbits and also is stated the presence of heteroclinic and homoclinic orbits.

The homoclinic orbits appear through a Bogdanov-Takens bifurcation when there exists a double zero root in one of the equilibria; the periodic orbits correspond to a Hopf bifurcation at the other equilibria. The continuation of these periodic orbits is also studied and, as their periods tend to infinity, they approach a homoclinic orbit.

Qualitative and quantitative analysis were elaborated in order to suggest some strategies to the inflationary control of the economy, in terms of the considered model.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Um Modelo de Hiperinflação	4
2.1	Considerações Gerais	4
2.2	Especificação do Modelo	5
2.3	Um Primeiro Estudo do Modelo	9
2.3.1	Estudo Local dos Pontos de Equilíbrio	9
2.3.2	Bifurcação de Hopf	11
2.4	A Bifurcação de Bogdanov-Takens	13
2.5	Preparação das Equações	18
2.5.1	Scaling e Normalização dos Equilíbrios	23
2.6	Estudo Local e Global do Sistema Escalado	29
2.6.1	Órbitas Homoclínicas	30

2.6.2	Órbitas Periódicas	40
2.6.3	Unicidade das Órbitas Periódicas	60
2.6.4	Continuação das Órbitas Periódicas	64
2.6.5	Órbitas Heteroclínicas	67
2.7	Uma Análise Qualitativa dos Resultados	70
A	Simulações Numéricas	80
B	Teorema das Funções Implícitas com Parâmetros	88

Capítulo 1

Introdução

O presente trabalho foi motivado pelo estudo de um modelo de economia, representado por um sistema de duas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem não-lineares, dependendo de quatro parâmetros. O modelo foi elaborado com o objetivo de se estudar processos hiperinflacionários em sistemas econômicos. Uma primeira abordagem das equações que modelam matematicamente a questão foi efetuada em [3]. Em tal trabalho foi demonstrado que, fixando-se alguns dos parâmetros das equações e fazendo-se variar outros, o plano de fase do sistema apresenta um comportamento rico em bifurcações de vários tipos. Foi provado, em particular, que para determinados valores dos parâmetros o sistema não admite hiperdeflação, podendo, entretanto, possuir órbitas periódicas, originadas de uma bifurcação do tipo Hopf, e que tais órbitas constituem ciclos-limites estáveis.

Uma análise posterior efetuada no sistema, tanto analítica quanto numérica, levou-nos à conjectura de que, para determinados valores dos parâmetros, o sistema possui uma órbita do tipo homoclínica (que é uma órbita que tende para um único ponto de equilíbrio quando o tempo $t \rightarrow \pm\infty$ – também conhecida como *laço* ou *loop*).

O principal objetivo do presente trabalho é provar que é verdadeira a conjectura

acima. Para tanto utilizaremos basicamente as técnicas apresentadas em [4] e [9].

Além de se tratar de um problema que é, em geral, de difícil abordagem, pois envolve o estudo do comportamento global das soluções de sistemas de equações diferenciais ordinárias não-lineares, a demonstração da existência de órbitas homoclínicas tem despertado o interesse de muitos pesquisadores desta área de estudo pois, nas últimas décadas, foram obtidos vários resultados mostrando que a existência dessas órbitas pode ter como consequência a apresentação de comportamentos extremamente complexos (chamados *caóticos* por alguns autores) por parte das soluções de certos sistemas arbitrariamente próximos do sistema inicial (ver, por exemplo, a análise da transformação de retorno do pêndulo forçado [5], com a complexa intersecção das curvas correspondentes às variedades estável e instável de um ponto fixo hiperbólico).

No final do século passado, ao estudar um modelo para o problema dos três corpos, o matemático Henri Poincaré (1854-1912) já observara a ocorrência de órbitas homoclínicas, suspeitando mesmo que tais órbitas pudessem levar a um comportamento complexo das soluções das equações. A esse respeito escreveu, em seu "Métodos Novos da Mecânica Celeste - Vol.III - 1899", o seguinte:

"Quando se busca representar a figura formada por essas duas curvas e suas intersecções em número infinito (...), estas intersecções formam um tipo de tecido, de rede com malhas infinitamente emboladas. Espanta tanto a complexidade desta figura que não tento mesmo traçá-la."

As suspeitas de Poincaré foram comprovadas, principalmente nas últimas quatro décadas, através dos trabalhos de Birkhoff, Moser, Smale e, mais recentemente, de outros pesquisadores. Presenciamos também nos últimos anos o surgimento de uma nova teoria, a Teoria do Caos, que tem como objeto de estudo sistemas dinâmicos cujas trajetórias apresentam comportamentos caóticos. Podemos afirmar que as órbitas homoclínicas, objeto central de estudo no presente trabalho, possuem um papel de destaque dentro dessa Teoria.

Muito embora não venhamos a explorar esse campo no estudo do mencionado modelo econômico, acreditamos que nosso trabalho abre caminho para que se possa combinar as técnicas aqui apresentadas com outras existentes, visando a consideração de perturbações do sistema inicial, tanto determinísticas quanto estocásticas.

Visando apresentar os resultados de forma didática, o capítulo 2, em suas três primeiras seções, especifica o modelo de hiperinflação e apresenta uma síntese dos resultados obtidos em [3]. Utilizando-se então as técnicas apresentadas em [4] e [9] faz-se, nas seções seguintes daquele capítulo, um estudo de caráter global das equações que descrevem o modelo, mostrando-se que: para determinados valores dos parâmetros o sistema possui uma órbita homoclínica; para outros valores, possui órbitas periódicas; e, para outros valores ainda, o sistema possui uma órbita ligando dois pontos de equilíbrio (conhecida como órbita *heteroclínica*). Tal estudo de caráter global é efetuado para valores das variáveis e parâmetros pertencentes a uma determinada região, como veremos. Aborda-se também o difícil problema de se mostrar a unicidade de certas órbitas periódicas, o que permite obter resultados globais de continuação. Na última seção do capítulo faz-se uma análise qualitativa dos resultados obtidos e também alguns comentários sobre o modelo estudado, à luz desses resultados. Para a leitura do capítulo 2 admite-se, como requisito, uma certa familiaridade com alguns dos principais conceitos e resultados da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias. Finalizamos o trabalho com os apêndices A e B; no primeiro exibimos algumas das simulações numéricas efetuadas com o objetivo de se evidenciar numericamente os resultados teóricos obtidos; e, no apêndice B, apresentamos o Teorema das Funções Implícitas com parâmetros que se obtem, essencialmente, a partir do Teorema da Contração Uniforme.

Capítulo 2

Um Modelo de Hiperinflação

2.1 Considerações Gerais

Neste capítulo faremos um estudo detalhado de um modelo da área econômica. Tal modelo é descrito matematicamente por um sistema de duas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem não-lineares, dependendo de quatro parâmetros, e foi elaborado com o objetivo de se estudar a dinâmica de sistemas econômicos nos quais está presente a expectativa de ocorrência de processos hiperinflacionários.

Podemos englobar dentre estes o sistema econômico brasileiro que, além de apresentar longa tradição inflacionária, passou por vários períodos em que era grande a expectativa de ocorrência de processos hiperinflacionários, como, por exemplo, no governo Sarney. Nesse período e também no governo Collor, tal expectativa foi contida, em parte, por medidas radicais tomadas pelas equipes econômicas, medidas estas que, na opinião de vários políticos e economistas, acabaram por levar o país à recessão.

O modelo foi estudado primeiramente em [3], onde pode ser encontrada uma dedução completa das equações, uma interessante introdução sobre modelos hiperinflacionários,

bem como uma vasta bibliografia sobre o assunto. Utilizando o estudo teórico do modelo, foi elaborado também, na seção 3 do referido trabalho, uma interessantíssima análise da variação da taxa de inflação brasileira, em períodos subsequentes à tentativas fracassadas de combate à inflação, através de programas de estabilização denominados heterodoxos. Tal análise diz respeito aos seguintes planos (ou programas heterodoxos): Cruzado, Bresser e Política do Feijão com Arroz, Verão, e Collor I.

Neste trabalho apresentamos um estudo global da dinâmica descrita pelas soluções das equações que descrevem o modelo, considerando-se os parâmetros e variáveis em regiões específicas. Mostramos a existência de órbitas homoclínicas, heteroclínicas e periódicas, isto para determinados valores dos parâmetros.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 2.2 damos um resumo da especificação do modelo e na seção 2.3 fazemos uma síntese dos resultados obtidos em [3]. Nas seções 2.4 a 2.6, utilizando as técnicas apresentadas em [4] e [9], fazemos um estudo global do sistema, com o qual mostramos a existência de uma órbita homoclínica, que surge quando o período de uma órbita periódica (originada de uma bifurcação do tipo Hopf) tende para ∞ , ao variarmos os parâmetros envolvidos na equação; mostramos ainda a existência de órbitas heteroclínicas e a existência e unicidade de certas órbitas periódicas, para uma determinada região do espaço de parâmetros. Encerramos o capítulo com a seção 2.7, na qual fazemos uma análise qualitativa dos resultados obtidos e também alguns comentários sobre o modelo, à luz desses resultados.

2.2 Especificação do Modelo

Como dissemos anteriormente, o modelo a ser especificado tem como objetivo o estudo de processos hiperinflacionários em sistemas econômicos. Sendo assim, as hipóteses sobre as quais foi elaborado, baseiam-se, obviamente, em certas características presentes em sistemas econômicos com tendência a apresentarem processos hiperinflacionários,

como é o caso da economia de vários países da América Latina, inclusive o Brasil. As principais hipóteses consideradas são:

1) O déficit público real é financiado completamente pela emissão de moeda. Esta hipótese é tradicionalmente usada na literatura, no estudo de modelos de hiperinflação.

2) Os mercados monetário e de bens e serviços ajustam-se instantaneamente. Nesta hipótese, o ajustamento instantâneo do mercado monetário pode ser atribuído ao fato de que, em países que tiveram experiência hiperinflacionária, os custos de transação para se fugir de moeda tornaram-se bastante pequenos com o surgimento de substitutos próximos da moeda. Em alguns países da América Latina, como o Brasil, o sistema financeiro tornou-se extremamente sofisticado e a maioria das transações financeiras pode ser feita por telefone, sem custo adicional nenhum. Para justificar a hipótese de ajustamento instantâneo de bens e serviços, acredito que basta observarmos que, em face a expectativas de hiperinflação, os remarcadores de preços são os que mais trabalham.

3) As expectativas dos agentes econômicos são racionais, no sentido de previsão perfeita, pois as variáveis que aparecem nas equações que descrevem o modelo não são estocásticas.

4) A última hipótese é a de que os salários não se ajustam instantaneamente para os níveis desejados pelos trabalhadores. Esta hipótese baseia-se no fato bastante comum observado em países sujeitos a processos hiperinflacionários de que os salários não se ajustam instantaneamente com relação à taxa desejada pelos trabalhadores, em virtude da existência de contratos e de mecanismos de indexação baseados na inflação passada.

A primeira das equações que compõem o modelo representa matematicamente a hipótese de que o governo financia seu déficit através da emissão de moeda. Essa equação é tradicionalmente utilizada no estudo de modelos de hiperinflação que aparecem

na literatura, e é dada por:

$$\dot{x} = f - xy$$

onde a variável x representa a quantidade real de moeda e é considerada estritamente positiva ($x \in R^{++}$); consequentemente $\dot{x}$ representa a taxa de variação dessa quantidade com o tempo; a variável y representa a taxa de inflação, que poderá ser positiva ou negativa ($y \in R$); o parâmetro f representa o déficit público real, dado por $f = \frac{G-T}{P}$, onde G é o total de gastos do governo, T é o total da receita tributária e P é o índice de preços. Neste trabalho consideraremos o parâmetro f estritamente positivo.

A outra equação do sistema procura representar através da taxa de inflação, do nível de encaixe real, e de três parâmetros, k , β e γ , o comportamento dos diversos mercados na economia. Na dedução desta equação estão implícitos fatores relacionados com as hipóteses 2, 3 e 4 dadas acima. A equação é dada por:

$$\dot{y} = -k + \beta \ln(x) + \gamma y$$

onde $\dot{y}$ representa a taxa de variação da inflação com o tempo; x já foi definido anteriormente; os parâmetros k , β e γ , que serão considerados estritamente positivos, representam outras características da economia, dentre as quais a que nos interessará mais na análise dos resultados é a relação desses parâmetros com o prazo médio de reajuste dos salários dos trabalhadores. Denotando por m este prazo, os parâmetros acima se relacionam com m da seguinte forma:

$$k = \frac{ad}{m} \quad \beta = \frac{bd}{m} \quad \gamma = \frac{cd}{m} \quad (2.1)$$

onde a, b, c e d são constantes positivas relacionadas com características estruturais da economia.

Observação 2.2.1: A especificação da segunda equação diferencial que compõe o modelo certamente depende da teoria que se julgue adequada para descrever o comportamento da economia. A descrição mais detalhada da dedução da equação acima

(que deve interessar principalmente aos economistas) pode, como mencionamos anteriormente, ser encontrada em [3]. Ao contrário da primeira equação, que é usualmente utilizada na literatura no estudo de modelos hiperinflacionários, esta segunda equação que compõe o modelo aqui estudado pode gerar controvérsias entre economistas de variadas tendências, quanto às hipóteses subjacentes à sua dedução. Entendemos, porém, que esse é um fator que está e sempre estará presente nos momentos em que procurarmos modelar, através de objetos matemáticos como é o caso das equações diferenciais ordinárias, fenômenos tão complexos como a dinâmica econômica, seja de um país, ou mesmo de um município. Acreditamos que as hipóteses sobre as quais foi elaborado o modelo aqui apresentado, além de terem sido formuladas por um economista de renome, são razoáveis o bastante para dispendermos esforços no sentido de estudá-lo. Por outro lado também, os estudos efetuados mostraram que o sistema de equações que descreve o modelo possui características extremamente interessantes, do ponto de vista matemático.

Veremos no que segue que, na dinâmica do modelo descrito pelas equações acima, podemos observar, além de trajetórias que representam processos hiperinflacionários, outras trajetórias comumente observadas em países com longa tradição inflacionária.

Concluindo, então, o modelo a ser estudado é o descrito pelo seguinte sistema de equações:

$$\dot{x} = f - xy \quad (2.2)$$

$$\dot{y} = -k + \beta \ln(x) + \gamma y \quad (2.3)$$

onde $x \in R^{++}$, $y \in R$, f, k, β e γ são parâmetros reais positivos.

Na próxima seção iniciaremos o estudo do sistema acima.

2.3 Um Primeiro Estudo do Modelo

Nesta seção fazemos uma síntese dos resultados teóricos obtidos em [3], sobre as equações (2.2)-(2.3). Apresentaremos os resultados principais de forma sucinta. Para maiores detalhes, consultar as referidas notas.

2.3.1 Estudo Local dos Pontos de Equilíbrio

Fazendo-se $\dot{x} = 0$ e $\dot{y} = 0$ em (2.2)-(2.3) obtem-se as curvas de equações $y = \frac{f}{x}$ e $y = \frac{k - \beta \ln(x)}{\gamma}$, cuja interseção fornece os equilíbrios do sistema, ou seja, os equilíbrios são dados pelas soluções da equação

$$g(x) = \beta \ln(x) + \frac{\gamma f}{x} = k. \quad (2.4)$$

A figura 1 a seguir fornece um esboço das referidas curvas, no caso em que existem dois pontos de equilíbrio.

Figura 1: Gráfico das funções $y = \frac{f}{x}$ e $y = \frac{k - \beta \ln(x)}{\gamma}$

Estamos interessados no caso em que existe pelo menos um ponto de equilíbrio para o sistema. Como foi visto em [3], a condição necessária e suficiente para que isso ocorra é que a seguinte desigualdade se verifique:

$$k \geq \beta(1 + \ln \frac{\gamma f}{\beta}) . \quad (2.5)$$

Suporemos de agora em diante, até o final do trabalho, que a desigualdade estrita acima está verificada e denotaremos por $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ os pontos de equilíbrio do sistema (observe-se que, valendo a igualdade em (2.5), $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ coincidem). Também de [3] sabe-se que

$$x_{\mathcal{A}} < \frac{\gamma f}{\beta} < x_{\mathcal{B}} \quad (2.6)$$

onde $x_{\mathcal{A}}$ e $x_{\mathcal{B}}$ denotam as abcissas dos equilíbrios $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, respectivamente. Além disso, como $y_{\mathcal{A}} = \frac{f}{x_{\mathcal{A}}}$ e $y_{\mathcal{B}} = \frac{f}{x_{\mathcal{B}}}$ verifica-se também a seguinte desigualdade:

$$y_{\mathcal{B}} < \frac{\beta}{\gamma} < y_{\mathcal{A}} . \quad (2.7)$$

A matriz jacobiana do sistema (2.2)-(2.3) calculada num ponto $(x, y) \in R^{++} \times R$ é dada por:

$$DX(x, y) = \begin{pmatrix} -y & -x \\ \frac{\beta}{x} & \gamma \end{pmatrix} .$$

Os autovalores da matriz acima calculada no ponto $\mathcal{A}$ são:

$$\lambda = \frac{\gamma - y_{\mathcal{A}}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\gamma - y_{\mathcal{A}})^2 - 4(\beta - \gamma y_{\mathcal{A}})} . \quad (2.8)$$

Da desigualdade (2.7) segue que o equilíbrio $\mathcal{A}$ é um ponto de sela com autovalores reais, para quaisquer valores dos parâmetros.

No ponto $\mathcal{B}$ os autovalores são dados por:

$$\lambda = \frac{\gamma - y_B}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\gamma - y_B)^2 - 4(\beta - \gamma y_B)} \quad (2.9)$$

Da desigualdade (2.7) segue que os autovalores no equilíbrio B podem ser reais ou complexos, dependendo dos valores dos parâmetros. Quanto à estabilidade local do equilíbrio B , tem-se que, se $\gamma - y_B < 0$ o equilíbrio é estável e, se $\gamma - y_B > 0$ o equilíbrio é instável.

2.3.2 Bifurcação de Hopf

Foi efetuado, também, um estudo (local) das bifurcações que ocorrem no ponto de equilíbrio B , quando se fixam os parâmetros k , β e γ no sistema (2.2)-(2.3), e faz-se variar o parâmetro f (que representa o déficit público). Foi demonstrado que, para valores dos parâmetros β e γ tais que $\gamma^2 < \beta$, existe um valor $f = f_0$ do parâmetro f para o qual ocorre uma bifurcação do tipo Hopf no ponto de equilíbrio B , sendo que a órbita periódica originada desta bifurcação é um *ciclo limite estável*.

Concluiu-se mais geralmente, em [3], que o ponto de equilíbrio B tem as seguintes características, quanto à estabilidade (mostradas esquematicamente na figura 2, no plano- (γ, β)): se $\gamma^2 \geq 4\beta$, então B é uma fonte real; se $\beta < \gamma^2 < 4\beta$, B é uma fonte real ou complexa; sobre a curva $\gamma^2 = \beta$, B é uma fonte complexa; e, na região $\gamma^2 < \beta$, ocorrem os comportamentos mais interessantes para o ponto B , ou seja, o ponto pode ser um poço ou uma fonte, sendo que para $f = f_0$ ocorre uma bifurcação do tipo Hopf, que dá origem a um ciclo-limite estável. Mais precisamente, na região $\gamma^2 < \beta$, se $f \geq f_0$ o ponto B é um poço complexo; para o valor do parâmetro $f = f_0$ o ponto perde sua estabilidade, com a ocorrência de uma bifurcação do tipo Hopf; para $f < f_0$, o ponto B é uma fonte, sendo que surge em torno deste ponto um ciclo limite estável (originado

da bifurcação de Hopf).

Figura 2: Característica do Equilíbrio B quanto à estabilidade local, com relação aos parâmetros γ e β

Para finalizar esta seção, citamos que também foi demonstrada em [3] a inexistência de trajetórias de *hiperdeflação* para o sistema (2.2)-(2.3), ou seja, não existem soluções $(x(t), y(t))$ do sistema tais que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = -\infty, \quad (2.10)$$

na região $\gamma^2 < \beta$. Observemos que esta é uma importante característica das soluções do sistema, aliás de caráter global.

2.4 A Bifurcação de Bogdanov-Takens

Quando se estuda equações diferenciais ordinárias, existem várias circunstâncias que dão origem à seguinte questão: existe uma solução da equação que, quando $t \rightarrow +\infty$ e $t \rightarrow -\infty$, tende para um dado par de elementos críticos, ou mesmo para um único ponto de equilíbrio da equação? No primeiro caso, se existir, a órbita é denominada heteroclínica, e neste último é denominada homoclínica. Já fizemos, no capítulo 1, alguns comentários a respeito do interesse na verificação da existência de órbitas homoclínicas para sistemas de equações diferenciais ordinárias.

Ao contrário de questões sobre o comportamento das soluções de uma equação diferencial ordinária nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio, as questões colocadas acima estão relacionadas com o comportamento *global* das soluções. Neste trabalho estamos interessados em responder a essas questões para o sistema de equações (2.2)-(2.3), que representa o modelo na área de economia.

Em [4] são enunciadas, sem demonstração, condições que, segundo o autor, garantem, entre outras coisas, a existência de uma órbita homoclínica para uma família de equações diferenciais ordinárias no plano, dependendo de *dois* parâmetros. As condições apontadas pelo autor são as que seguem.

Consideremos a seguinte família de equações dependendo do parâmetro ϵ :

$$\dot{x} = X_{\epsilon}(x, y) \tag{2.11}$$

onde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2) \in \mathbb{R}^2$, e $X_{\epsilon}(0, 0) = 0$. Denotemos por $DX_{\epsilon}(0, 0)$ a matriz jacobiana do sistema (2.11) calculada na origem $(x, y) = (0, 0)$. Suponhamos que $DX_0(0, 0)$ tenha dois autovalores nulos e, além disso, que $DX_{\epsilon}(0, 0)$ seja da seguinte forma:

$$DX_{(\epsilon)}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Suponhamos mais, que

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2}(0,0) = 0 \quad \frac{\partial^2 X_2}{\partial x^2}(0,0) < 0 \quad \frac{\partial^2 X_2}{\partial x \partial y}(0,0) > 0 \quad (2.13)$$

onde X_1 e X_2 são as componentes do campo X_ϵ . As duas primeiras condições acima estão relacionadas com a existência de exatamente dois pontos de equilíbrio, que bifurcam do equilíbrio $(0,0)$ de (2.11), para $\epsilon \neq 0$, numa vizinhança da origem [9]; a última condição está relacionada com a estabilidade das órbitas periódicas que existem para o sistema. De fato, provaremos nas próximas seções, que $\frac{\partial^2 X_2}{\partial x \partial y}(0,0) > 0$ garante a estabilidade das órbitas periódicas existentes, para cada valor dos parâmetros, no sistema (2.2)-(2.3).

O autor afirma que, nas condições acima e para ϵ numa vizinhança da origem, podemos decompor o espaço de parâmetros em componentes distintas tais que, se ϵ e $\bar{\epsilon}$ estão na mesma componente, então os planos de fase da equação (2.11) com $X_\epsilon(x,y)$ e $X_{\bar{\epsilon}}(x,y)$, são topologicamente equivalentes (veja figura 3 abaixo). Além disso, o autor afirma ainda que, para ϵ numa vizinhança da origem, se o parâmetro está na região 1 ou sobre a curva H (ver figura 3), então o plano de fase de (2.11) é o mostrado na figura 4; se o parâmetro está na região 2, o plano de fase é o mostrado na figura 5; sobre a curva L existe uma órbita homoclínica para o sistema (ver figura 6); e, finalmente, na região 3 o plano de fase é o dado na figura 7.

Observe que as curvas H e L são constituídas de pontos de bifurcação das soluções

do sistema.

figura 3: Decomposição do espaço de parâmetros

figura 4: Plano de Fase de (2.11) para ϵ na região 1 e sobre a curva H

figura 5: Plano de Fase de (2.11) para ϵ na região 2

figura 6: Plano de Fase de (2.11) para ϵ sobre a curva L

figura 7: Plano de Fase de (2.11) para ϵ na região 3

Nas próximas seções usaremos algumas das técnicas apresentadas em [4] (capítulo 4) e em [9], que também aborda o problema, para mostrar que o sistema de equações que descreve o modelo de economia e que estamos interessados em estudar, satisfaz as hipóteses acima e que são verdadeiras as afirmações do autor sobre o retrato de fase do sistema, para ϵ pertencente às diferentes regiões nas quais está decomposto o espaço de parâmetros (definiremos oportunamente, no decorrer do texto, os parâmetros ϵ_1 e ϵ_2 que consideraremos para estudo do sistema (2.2)-(2.3)). Daremos também, uma equação aproximada para cada uma das curvas H e L. A técnica a ser utilizada constituir-se, basicamente, em uma utilização sistemática do *Método de Scaling* juntamente com aplicações do Teorema das Funções Implícitas.

Observação 2.4.1 Na figura 3 consideramos, propositalmente, somente o caso $\epsilon_1 > 0$. O caso $\epsilon_1 < 0$ também é citado em [4], porém veremos que tal situação não nos interessa no estudo que faremos nas próximas seções.

O problema colocado acima foi também estudado, separadamente, por Takens [14]

, [15], e Bogdanov [1], porém, através da utilização de métodos distintos daqueles que serão apresentados aqui. O método utilizado por eles consiste, basicamente, na redução da equação à sua forma normal, módulo termos de ordem superior. Alguns autores denominam a sequência de bifurcações apresentada nas figuras 4-7, que ocorrem quando se variam os parâmetros ϵ_1 e ϵ_2 de (2.11), de *Bifurcação de Bogdanov-Takens* (veja, por exemplo, as notas [2]) .

Para um estudo mais completo sobre o assunto, podem ser consultados, por exemplo, os trabalhos [2], [4], [5], [9].

Empenharemos, nas próximas seções, nossos esforços no sentido de demonstrar a existência de uma bifurcação do tipo *Bogdanov-Takens* para as soluções das equações (2.2)-(2.3).

2.5 Preparação das Equações

Considere o sistema (2.2)-(2.3). Suponha que a desigualdade $k \geq \beta(1 + \ln \frac{\gamma f}{\beta})$ esteja satisfeita. Assim o sistema possuirá um ou dois pontos de equilíbrio, que denotaremos por $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ (lembramos que se $k = \beta(1 + \ln \frac{\gamma f}{\beta})$ então os equilíbrios $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ coincidem e, portanto, o sistema possui um único ponto de equilíbrio; para $k > \beta(1 + \ln \frac{\gamma f}{\beta})$, o sistema possui dois, e somente dois, pontos de equilíbrio). Para que o sistema satisfaça as hipóteses mencionadas na seção anterior, façamos as seguintes mudanças de variáveis:

1. Uma translação da origem para o ponto de equilíbrio $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} X &= x - x_{\mathcal{A}} \\ Y &= y - y_{\mathcal{A}} \end{aligned}$$

onde $x_{\mathcal{A}}$ e $y_{\mathcal{A}}$ são as coordenadas do ponto de equilíbrio $\mathcal{A}$.

Com essa mudança de coordenadas, o sistema é transformado em:

$$\dot{X} = f - (X + x_{\mathcal{A}})(Y + y_{\mathcal{A}}) \quad (2.14)$$

$$\dot{Y} = -k + \beta \ln(X + x_{\mathcal{A}}) + \gamma(Y + y_{\mathcal{A}}) \quad (2.15)$$

Observe que, como $x \in R^{++}$, tem-se que $X + x_{\mathcal{A}} > 0$. Por outro lado, como $y \in R$, então $(Y + y_{\mathcal{A}}) \in R$. Essa translação foi efetuada para que a origem do sistema passe a ser ponto de equilíbrio para quaisquer valores dos parâmetros.

2. A segunda hipótese apresentada na seção anterior corresponde à jacobiana do sistema ter dois autovalores nulos se $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ e ser da forma (2.12), para $\epsilon \neq 0$. Para que a jacobiana do sistema tenha a forma desejada e para que possamos definir os parâmetros ϵ_1 e ϵ_2 , a mudança de coordenadas mais óbvia a ser efetuada é a seguinte:

$$u = X \quad (2.16)$$

$$v = f - (X + x_{\mathcal{A}})(Y + y_{\mathcal{A}}) \quad (2.17)$$

pois assim teremos, nas novas coordenadas, $\dot{u} = v$; obtendo a expressão de $\dot{v}$ e em seguida calculando a jacobiana do sistema na origem, poderemos definir naturalmente quais serão os parâmetros ϵ_1 e ϵ_2 , nesse caso. Além disso, a transformação acima constitui uma boa mudança de variáveis, pois trata-se, como é de fácil verificação, de um difeomorfismo global. Observemos ainda que, como $X + x_{\mathcal{A}} > 0$, então $u + x_{\mathcal{A}} > 0$; também, como $Y \in R$, $v \in R$.

Com a mudança acima, o novo sistema é dado por:

$$\dot{u} = v \quad (2.18)$$

$$\dot{v} = \frac{v^2 - vf}{(u + x_{\mathcal{A}})} + k(u + x_{\mathcal{A}}) - \beta(u + x_{\mathcal{A}}) \ln(u + x_{\mathcal{A}}) + \gamma(v - f). \quad (2.19)$$

A matriz jacobiana desse sistema, calculada na origem $(u, v) = (0, 0)$, é dada por:

$$DX(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (k - \beta \ln x_{\mathcal{A}} - \beta) & \gamma - \frac{f}{x_{\mathcal{A}}} \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Definimos então, naturalmente, os parâmetros ϵ_1 e ϵ_2 como sendo:

$$\epsilon_1 = \frac{\partial X_2}{\partial u}(0,0) = k - \beta \ln x_{\mathcal{A}} - \beta$$

$$\epsilon_2 = \frac{\partial X_2}{\partial v}(0,0) = \gamma - \frac{f}{x_{\mathcal{A}}},$$

onde

$$X_1(u, v) = v$$

$$X_2(u, v) = \frac{v^2 - vf}{(u + x_{\mathcal{A}})} + k(u + x_{\mathcal{A}}) - \beta(u + x_{\mathcal{A}}) \ln(u + x_{\mathcal{A}}) + \gamma(v - f).$$

Temos ainda que $X_1(0,0) = X_2(0,0) = 0$, para quaisquer valores dos parâmetros (lembrando que estamos supondo $k \geq \beta(1 + \ln \frac{\gamma f}{\beta})$). Além disso,

$$DX_{(\epsilon)}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 \end{pmatrix}$$

donde se vê que $DX_0(0,0)$ possui dois autovalores nulos, situação em que a origem é um ponto de equilíbrio não-hiperbólico.

Verifiquemos agora as hipóteses sobre as derivadas de ordem superior, calculadas na origem, para o sistema (2.18)-(2.19). Alguns cálculos simples de derivadas levam a:

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial u^2}(0,0) = 0 \quad \frac{\partial^2 X_2}{\partial u^2}(0,0) = \frac{-\beta}{x_{\mathcal{A}}} < 0 \quad \frac{\partial^2 X_2}{\partial u \partial v}(0,0) = \frac{f}{x_{\mathcal{A}}^2} > 0, \quad (2.21)$$

donde concluímos que as hipóteses formuladas na seção anterior estão satisfeitas.

Faremos a seguir um estudo do sistema (2.18)-(2.19) para (u, v) numa vizinhança da origem. Consideraremos, também, (ϵ_1, ϵ_2) numa vizinhança da origem, no espaço de parâmetros.

Como nosso estudo restringir-se-á à região mencionada acima, consideraremos o desenvolvimento de Taylor das equações numa vizinhança da origem, que fornece:

$$\dot{u} = v \quad (2.22)$$

$$\dot{v} = \epsilon_1 u + \epsilon_2 v + \frac{1}{2} \left[\frac{-\beta}{x_{\mathcal{A}}} u^2 + \frac{2f}{x_{\mathcal{A}}^2} uv + \frac{2}{x_{\mathcal{A}}} v^2 \right] + R(u, v) \quad (2.23)$$

em que

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{R(u, v)}{\|(u, v)\|^2} = 0 .$$

Na literatura em geral escreve-se simplesmente $R = o(\|(u, v)\|^2)$. Neste trabalho utilizaremos também a definição dada a seguir:

Definição 2.5.1 *Seja $f : I \rightarrow R$ uma função definida num intervalo I da reta, contendo a origem. Diremos que f é da ordem de δ^r , $r \in R$, para δ tendendo a zero, se $|\frac{f(\delta)}{\delta^r}| < K$, onde K é uma constante real, e δ é arbitrariamente próximo de zero. Denotaremos, neste caso, $f = O(\delta^r)$.*

Observemos agora que, como o sistema (2.18)-(2.19) foi obtido de (2.2)-(2.3) através de uma translação e de um difeomorfismo, e estamos supondo $k \geq \beta(1 + \ln \frac{\gamma f}{\beta})$, tal sistema (e, consequentemente, seu desenvolvimento de Taylor em torno da origem, dado por (2.22)-(2.23)) possui um ou dois pontos de equilíbrio, dependendo dos valores dos parâmetros, sendo que a origem é sempre equilíbrio. Vejamos então o que ocorre com os pontos de equilíbrio do sistema para os possíveis valores dos parâmetros ϵ_1 e ϵ_2 :

Caso 1) $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$.

De $\epsilon_1 = 0$ tem-se que $k = \beta \ln(x_{\mathcal{A}}) + \beta$. Como $\mathcal{A}$ é ponto de equilíbrio, tem-se que $k = \beta \ln(x_{\mathcal{A}}) + \gamma y_{\mathcal{A}}$. Logo $\beta \ln(x_{\mathcal{A}}) + \beta = \beta \ln(x_{\mathcal{A}}) + \gamma y_{\mathcal{A}}$, donde segue que

$$y_{\mathcal{A}} = \frac{\beta}{\gamma}. \quad (2.24)$$

Por outro lado, de $\epsilon_2 = 0$ e $\mathcal{A}$ ponto de equilíbrio tem-se que $\gamma = \frac{f}{x_{\mathcal{A}}} = y_{\mathcal{A}}$, ou ainda por (2.24), $\gamma^2 = \beta$. De (2.24) segue também que $x_{\mathcal{A}} = \frac{\gamma f}{\beta}$.

Logo, se $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$, então $k = \beta \ln\left(\frac{\gamma f}{\beta}\right) + \beta$, que é a condição necessária e suficiente para que (2.2)-(2.3) tenha um único ponto de equilíbrio, que é dado por:

$$\left(\frac{\gamma f}{\beta}, \frac{\beta}{\gamma}\right).$$

Concluindo, se $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$, os equilíbrios $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ coincidem, e a equação (2.22)-(2.23) possui um único ponto de equilíbrio, sendo que os autovalores da jacobiana desse sistema, calculada na origem, são nulos.

Caso 2) $\epsilon_1 < 0$ e ϵ_2 qualquer.

Se $\epsilon_1 < 0$ então $k - \beta \ln(x_{\mathcal{A}}) - \beta < 0$. Sendo $\mathcal{A}$ equilíbrio, $\beta \ln(x_{\mathcal{A}}) + \gamma y_{\mathcal{A}} - \beta - \beta \ln(x_{\mathcal{A}}) < 0$, donde $y_{\mathcal{A}} < \frac{\beta}{\gamma}$, o que contradiz a desigualdade (2.7). Concluimos assim que, para $\epsilon_1 < 0$, não faz sentido estudarmos o sistema (2.22)-(2.23), pois este não apresenta relação nenhuma com o sistema (2.2)-(2.3), se considerarmos a hipótese $k \geq \beta(1 + \ln \frac{\gamma f}{\beta})$. Já havíamos apontado esse fato anteriormente, na observação 2.4.1.

Cálculos análogos aos efetuados acima mostram que, respeitada a inequação (2.5), a condição $\epsilon_1 > 0$ é necessária e suficiente para a existência de dois pontos de equilíbrio para o sistema, não importando o valor do parâmetro ϵ_2 . Sendo assim, de agora em diante restringiremos nosso estudo ao caso em que os parâmetros estão numa vizinhança da origem, ϵ_1 sendo positivo e ϵ_2 qualquer.

Feitas estas considerações, passemos ao estudo do sistema.

As idéias básicas do procedimento que adotaremos a seguir são as seguintes: faremos uma mudança de variáveis, uma mudança no espaço de parâmetros e, por fim, uma mudança no tempo, com o objetivo de transformar o sistema (2.22)-(2.23) num novo sistema, que será o *perturbado* de um sistema hamiltoniano. Usaremos então as propriedades (conhecidas) do sistema hamiltoniano para, com auxílio do Teorema das Funções

Implícitas, mostrar que valem certas propriedades (como, por exemplo, a existência de uma órbita homoclínica) para esse novo sistema. Por fim, invertendo todas as mudanças efetuadas, inclusive no espaço de parâmetros, concluiremos algumas propriedades para o sistema (2.2)-(2.3).

O conjunto de mudanças que mencionamos acima é conhecido como *Método de Scaling*. Como veremos, as mudanças são efetuadas em bloco, ou seja, todas ao mesmo tempo. Sendo assim, o método pode, a princípio, parecer um tanto artificial, mas a verdade é que funciona bem e atende aos objetivos desejados. Iniciaremos as mudanças e faremos mais alguns comentários sobre o método na próxima subseção.

2.5.1 Scaling e Normalização dos Equilíbrios

Scaling: Transformaremos o sistema (2.22)-(2.23) em um novo sistema, com a introdução de novos parâmetros μ e δ , novas variáveis y_1 e y_2 e um novo tempo $\bar{t}$, através das seguintes relações:

variáveis:

$$y_1 = \frac{u}{\delta^2} \quad y_2 = \frac{v}{|\alpha|^{\frac{1}{2}} \delta^3} \quad (2.25)$$

parâmetros:

$$\mu = \frac{\epsilon_2}{|\alpha|^{\frac{1}{2}} \delta} \quad \delta = \left| \frac{\epsilon_1}{\alpha} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (2.26)$$

tempo:

$$\bar{t} = \delta |\alpha|^{\frac{1}{2}} t \quad (2.27)$$

onde

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X_2}{\partial u^2}(0, 0) = -\frac{\beta}{2x_A}.$$

Observações: i) O scaling acima é constituído de transformações singulares em δ . Logo, as únicas propriedades do sistema transformado (ou *escalado*) que poderemos utilizar para obtermos resultados sobre o sistema (2.22)-(2.23) são aquelas válidas para $\delta \neq 0$. Em virtude da definição do parâmetro δ na expressão (2.26) acima consideraremos somente $\delta > 0$, quando formos efetuar a inversão das mudanças efetuadas.

ii) Suporemos no decorrer do trabalho que as novas variáveis y_1 e y_2 estão contidas num conjunto compacto de R^2 (por exemplo, $|y_i| \leq M, i=1,2$, para algum $M \in R$). Desse modo, se (μ, δ) pertence a uma vizinhança da origem no novo espaço de parâmetros, então (u, v) e (ϵ_1, ϵ_2) pertencerão também a vizinhanças da origem do plano de fase e do espaço de parâmetros, respectivamente.

iii) Veremos que o scaling efetuado acima mantém separados os pontos de equilíbrio do novo sistema a ser estudado. Lembremos que, quando os parâmetros ϵ_1 e ϵ_2 tendem a zero, os dois pontos de equilíbrio do sistema (2.22)-(2.23) colapsam num único ponto. Isto não ocorrerá com o novo sistema, para o qual os equilíbrios estarão separados, para quaisquer valores de μ e δ numa vizinhança da origem, inclusive para $\mu = \delta = 0$. Esta é uma das peculiaridades do scaling.

Considerando, então, as transformações (2.25)-(2.27) teremos, derivando as novas variáveis y_1 e y_2 em relação ao novo tempo $\bar{t}$, o seguinte sistema de equações:

$$\dot{y}_1 = y_2 \quad (2.28)$$

$$\dot{y}_2 = y_1 + \mu y_2 - y_1^2 + \frac{f}{x_A^2} |\alpha|^{-\frac{1}{2}} \delta y_1 y_2 + \frac{1}{x_A} \delta^2 y_2^2 + R_1(y_1, y_2, \delta) \quad (2.29)$$

onde

$$R_1(y_1, y_2, \delta) = \frac{o(\|(\delta^2 y_1, |\alpha|^{\frac{1}{2}} \delta^3 y_2)\|^2)}{|\alpha| \delta^4}.$$

Observação: Os pontos sobre y_1 e y_2 significam, na equação acima, derivação em relação a $\bar{t}$.

Para escrevermos as equações de uma forma mais adequada visando prosseguirmos seu estudo, utilizaremos o seguinte resultado:

Afirmção: $R_1(y_1, y_2, \delta) = O(\delta^2)$

Prova: Com efeito, a menor potência de δ que aparece no termo $o(\|(\delta^2 y_1, |\alpha|^{\frac{1}{2}} \delta^3 y_2)\|)$, que é constituído por potências de δ multiplicadas por potências de y_1 e y_2 , é δ^6 . Assim, quando esse termo é dividido por $|\alpha| \delta^4$, a menor potência de δ que aparece no termo resultante (que é a própria função R_1) é δ^2 . A afirmação segue então do fato de estarmos considerando δ numa vizinhança da origem e (y_1, y_2) pertencerem a um compacto.

Considerando essa afirmação e observando que o termo $\frac{1}{x_A} \delta^2 y_2^2$ que aparece na equação (2.29) é, também, $O(\delta^2)$, podemos escrever o sistema (2.28)-(2.29) da seguinte forma:

$$\dot{y}_1 = y_2 \quad (2.30)$$

$$\dot{y}_2 = y_1 + \mu y_2 - y_1^2 + \delta \eta y_1 y_2 + O(\delta^2). \quad (2.31)$$

onde

$$\eta = \frac{\partial^2 X_2}{\partial u \partial v}(0, 0) |\alpha|^{-\frac{1}{2}} = \frac{f}{x_A^2} |\alpha|^{-\frac{1}{2}},$$

que será suposto fixo em toda a análise que faremos a seguir.

Os pontos de equilíbrio do último sistema são dados pelas soluções das equações $\dot{y}_1 = 0$ e $\dot{y}_2 = 0$. A origem é equilíbrio para quaisquer valores de μ e δ . O outro equilíbrio é dado por $y_2 = 0$ e a solução de

$$F(y_1, \delta) = y_1 - y_1^2 + O(\delta^2) = 0. \quad (2.32)$$

Resolveremos a equação acima usando o Teorema das Funções Implícitas. Em primeiro lugar, observemos que $F(1, 0) = 0$. Além disso, a derivada de F com relação a y_1 , calculada no ponto $(1, 0)$, é dada por:

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}(y_1, \delta) |_{(1,0)} = \left[1 - 2y_1 + \frac{\partial}{\partial y_1} O(\delta^2) \right] |_{(1,0)} = -1 \neq 0.$$

Logo, para δ suficientemente pequeno, existe uma única função $y_1 = y_1(\delta)$, com $y_1(0) = 1$, e tal que $F(y_1(\delta), \delta) = 0$. Procuremos uma aproximação para tal função. Calculando a derivada de $y_1(\delta)$ com relação a δ , para $\delta = 0$, temos (por (2.32)):

$$\frac{\partial y_1}{\partial \delta}(\delta) |_{\delta=0} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial \delta}(y_1, \delta)}{\frac{\partial F}{\partial y_1}(y_1, \delta)} |_{(1,0)} = \frac{\partial F}{\partial \delta}(y_1, \delta) |_{(1,0)} = \frac{\partial}{\partial \delta} O(\delta^2) |_{\delta=0} = 0,$$

donde segue que

$$y_1(\delta) = y_1(0) + 0 \delta + \frac{\partial^2 y_1}{\partial \delta^2}(0) \delta^2 + \dots = 1 + O(\delta^2).$$

Observe-se que o termo $O(\delta^2)$ acima não depende de y_1 ou y_2 .

Resumindo, os equilíbrios do sistema são:

$$(y_1, y_2) = (0, 0) \quad \epsilon \quad (y_1, y_2) = (1 + O(\delta^2), 0).$$

Agora, o fato de o ponto de equilíbrio $(1 + O(\delta^2), 0)$ depender do parâmetro δ pode (como de fato iria) nos trazer alguns problemas futuramente, no prosseguimento do estudo do sistema. Sendo assim, para resolver essa questão faremos uma mudança de variáveis com a qual os pontos de equilíbrio de (2.30)-(2.31) passarão a ser $(0, 0)$ e $(1, 0)$, para valores de μ e δ suficientemente pequenos. Como estamos interessados em estudar o sistema apenas para (μ, δ) numa vizinhança da origem, tal mudança de variáveis resolve nossos problemas, isto é, elimina a dependência dos equilíbrios em relação aos parâmetros. Chamaremos essa mudança que fixa os pontos de equilíbrio de *Normalização dos Equilíbrios*.

A transformação a ser efetuada é a seguinte:

$$\overline{y_1} = \frac{y_1}{1 + O(\delta^2)} \quad \epsilon \quad \overline{y_2} = y_2. \quad (2.33)$$

Observemos que $O(\delta^2)$ não depende do parâmetro μ ou das variáveis y_1 e y_2 . Também, para δ suficientemente pequeno, a transformação acima é um difeomorfismo.

Com essa mudança as equações (2.30)-(2.31) transformam-se em (omitiremos as barras sobre as novas variáveis, para simplificar a notação):

$$\dot{y}_1 = y_2 + \tilde{O}(\delta^2)y_2 \quad (2.34)$$

$$\dot{y}_2 = y_1 + \mu y_2 - y_1^2 + \delta \eta y_1 y_2 + O(\delta^2). \quad (2.35)$$

Observe que o termo $\tilde{O}(\delta^2)$ é da ordem de δ^2 e não depende de y_1 , y_2 ou μ . Por outro lado, o termo $O(\delta^2)$ é distinto daquele da equação (2.31).

Os pontos de equilíbrio desse novo sistema são, então, os transformados dos pontos de equilíbrio de (2.30)-(2.31) por (2.33), ou seja, são os pontos (fixos) (0,0) e (1,0), para quaisquer valores de μ e δ suficientemente pequenos. Observe que a transformação (2.33) levou a alterações somente nos termos de ordem superior (em δ) do sistema (2.30)-(2.31).

Como dissemos na seção anterior, utilizaríamos o método de scaling para transformar o sistema (2.22)-(2.23) no *perturbado* de um sistema hamiltoniano. Isto foi, de fato, feito acima. Com efeito, se $\mu = \delta = 0$, o sistema (2.34)-(2.35) tem a seguinte forma:

$$\dot{y}_1 = y_2 \quad (2.36)$$

$$\dot{y}_2 = y_1 - y_1^2 \quad (2.37)$$

que é um sistema hamiltoniano, cuja integral primeira é dada por:

$$H(y_1, y_2) = \frac{y_1^3}{3} - \frac{y_1^2}{2} + \frac{y_2^2}{2}. \quad (2.38)$$

Logo, para valores de μ e δ suficientemente pequenos, o sistema (2.34)-(2.35) nada mais é que o perturbado do sistema hamiltoniano acima. Vejamos algumas das propriedades das equações (2.36)-(2.37). A função (2.38) possui dois pontos críticos: o ponto

$(0,0)$ e o ponto $(1,0)$. Um cálculo simples das derivadas da função mostra que a origem é um ponto de sela e o ponto $(1,0)$ é um ponto de mínimo para (2.38). Assim, suas curvas de nível $H(y_1, y_2) = c$ (e, portanto, o plano de fase do sistema (2.36)-(2.37)) são as dadas na figura 8 abaixo, para uma determinada região englobando os pontos $(0,0)$ e $(1,0)$.

figura 8: Plano de Fase do Sistema (2.36)-(2.37)

Uma perturbação do sistema (2.36)-(2.37) não possui, necessariamente, uma órbita homoclínica ou alguma órbita periódica; poderia ter, por exemplo, uma trajetória ligando os pontos de equilíbrio, espiralando de $(1,0)$ para a origem. Entretanto, existe um *unfolding* uni-dimensional desse sistema, cujas propriedades persistem por pequenas perturbações, dado por:

$$\dot{y}_1 = y_2 \quad (2.39)$$

$$\dot{y}_2 = y_1 - y_1^2 + \mu y_2. \quad (2.40)$$

Com efeito, mostraremos que, para cada $\delta \neq 0$ suficientemente pequeno, existe um único $\mu = \mu(\delta)$ para o qual o sistema (2.34)-(2.35) (que é uma pequena perturbação

do *unfolding* acima) possui uma órbita homoclínica. Além disso, existem valores dos parâmetros (μ, δ) para os quais existem órbitas periódicas, e ainda outros valores para os quais o sistema possui uma órbita heteroclínica. Invertendo o scaling, deduziremos propriedades análogas a essas para o sistema (2.2)-(2.3), para determinados valores dos parâmetros.

Tendo em mente as considerações acima, iniciaremos, na próxima seção, um estudo detalhado do sistema (2.34)-(2.35).

2.6 Estudo Local e Global do Sistema Escalado

Iniciemos o estudo fazendo uma análise local quanto à estabilidade dos pontos de equilíbrio das equações (2.34)-(2.35). A matriz jacobiana do sistema calculada num ponto (y_1, y_2) qualquer é dada por:

$$DX(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 + \tilde{O}(\delta^2) \\ 1 - 2y_1 + \delta\eta y_2 + O_1(\delta^2) & \mu + \delta\eta y_1 + O_2(\delta^2) \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

onde $O_1(\delta^2) = \frac{\partial}{\partial y_1}[O(\delta^2)]$ e $O_2(\delta^2) = \frac{\partial}{\partial y_2}[O(\delta^2)]$, assim como $\tilde{O}(\delta^2)$, são termos da ordem de δ^2 .

Calculando (2.41) no equilíbrio (0,0) temos:

$$DX(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 + \tilde{O}(\delta^2) \\ 1 + O(\delta^2) & \mu + O(\delta^2) \end{pmatrix}.$$

Calculando os autovalores da matriz acima obtemos:

$$\lambda = \frac{(\mu + O(\delta^2)) \pm \sqrt{(\mu + O(\delta^2))^2 + 4(1 + O(\delta^2))}}{2}.$$

Logo, para μ e δ suficientemente pequenos, a origem é um ponto de sela.

Calculando (2.41) no ponto $(1,0)$ temos:

$$DX(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 + \tilde{O}(\delta^2) \\ -1 + O_3(\delta^2) & \mu + \delta\eta + O_4(\delta^2) \end{pmatrix}.$$

Os autovalores são dados por:

$$\lambda = \frac{\mu + \delta\eta + O_4(\delta^2) \pm \sqrt{(\mu + \delta\eta + O_4(\delta^2))^2 - 4(1 - O_5(\delta^2))}}{2}.$$

Para μ e δ suficientemente pequenos teremos $|(\mu + \delta\eta + O_4(\delta^2))^2 + 4O_5(\delta^2)| < 4$, donde segue que os autovalores são complexos conjugados. A estabilidade do ponto depende do sinal do traço: se $\mu + \delta\eta + O_4(\delta^2) < 0$, o equilíbrio é um poço; se $\mu + \delta\eta + O_4(\delta^2) > 0$, é uma fonte. É claro que na notação acima os termos $O_i(\delta^2)$, $i=3,4,5$, são da ordem de δ^2 .

Nas próximas subseções faremos uma análise global das trajetórias do sistema (2.34)-(2.35). Utilizaremos, para tanto, o sistema (2.36)-(2.37) e a função (2.38) como elementos auxiliares.

2.6.1 Órbitas Homoclínicas

Provaremos em primeiro lugar a seguinte proposição, que garante a existência de órbitas homoclínicas para o sistema (2.34)-(2.35), para determinados valores dos parâmetros.

Proposição 2.6.1 *Para cada δ suficientemente pequeno, existe uma função $\mu = \mu(\delta)$ tal que, se $\mu = \mu(\delta)$ em (2.34)-(2.35), o sistema possui uma órbita do tipo homoclínica.*

Prova: Observemos inicialmente que, se $\mu = \delta = 0$, o sistema (2.34)-(2.35) se reduz ao sistema hamiltoniano (2.36)-(2.37), que possui a integral primeira dada por (2.38),

e cujo plano de fase é o mostrado na figura 8. Na análise local feita acima, vimos que a origem é um ponto de sela para o sistema (2.34)-(2.35), para quaisquer valores dos parâmetros μ e δ suficientemente pequenos. Denotemos por $\mathcal{U}(\mu, \delta)$ e $\mathcal{S}(\mu, \delta)$ as variedades instável e estável, respectivamente, da origem desse sistema (por extensão natural, denotaremos as variedades instável e estável da origem de (2.36)-(2.37) por $\mathcal{U}(0, 0)$ e $\mathcal{S}(0, 0)$, respectivamente). Pela dependência das variedades invariantes locais com relação aos parâmetros μ e δ [11], juntamente com o teorema da dependência contínua das soluções com relação a parâmetros e dados iniciais [13], para μ e δ suficientemente pequenos, podemos definir as seguintes funções:

$H_+(\mu, \delta)$: como sendo o valor da função $H(y_1, y_2)$, dada em (2.38), no ponto de abscissa y_1^+ onde a variedade instável $\mathcal{U}(\mu, \delta)$ toca o eixo $y_2 = 0$ com $\dot{y}_2 < 0$, pela primeira vez após deixar a origem.

$H_-(\mu, \delta)$: como sendo o valor da função $H(y_1, y_2)$, dada em (2.38), no ponto de abscissa y_1^- onde a variedade estável $\mathcal{S}(\mu, \delta)$ toca o eixo $y_2 = 0$, com $\dot{y}_2 < 0$, pela última vez antes de tender para a origem.

As funções $H_+(\mu, \delta)$ e $H_-(\mu, \delta)$ são, pelo menos, de classe C^1 para μ e δ suficientemente pequenos. Isso decorre da dependência, em relação a parâmetros, das variedades invariantes locais e das soluções das equações diferenciais.

Para uma visão geométrica dessas definições, veja a figura 9.

figura 9

Das considerações acima segue que, para μ e δ suficientemente pequenos, o sistema (2.34)-(2.35) possuirá uma órbita homoclínica à origem se, e somente se, a seguinte equação estiver satisfeita:

$$G(\mu, \delta) = H_+(\mu, \delta) - H_-(\mu, \delta) = 0. \quad (2.42)$$

Resolveremos a equação acima, para μ como função de δ , utilizando o Teorema das Funções Implícitas. Para tanto, escreveremos as funções H_+ e H_- com uma forma mais apropriada, utilizando as seguintes funções:

$$I_+(\mu, \delta) = \int_{-\infty}^0 \dot{H}(y_1, y_2) dt \quad (2.43)$$

onde a integral acima é relativa à porção de $\mathcal{U}(\mu, \delta)$ com $y_1 \geq 0$ e $y_2 \geq 0$, de $y_1 = y_2 = 0$ até $y_1^+ > 0$, $y_2 = 0$, e $\dot{H}(y_1, y_2)$ representa a derivada da função (2.38), com relação ao tempo, sobre as órbitas do sistema (2.34)-(2.35). Analogamente, definimos:

$$I_-(\mu, \delta) = \int_0^{+\infty} \dot{H}(y_1, y_2) dt \quad (2.44)$$

onde a integral acima é relativa à porção de $S(\mu, \delta)$ com $y_1 \leq 0$ e $y_2 \leq 0$, de $y_1 = y_2 = 0$ até $y_1^- > 0$, $y_2 = 0$. Calculando agora a derivada de (2.38) com relação ao tempo, sobre as trajetórias do sistema (2.34)-(2.35), obtemos:

$$\dot{H}(y_1, y_2) = \mu y_2^2 + \delta \eta y_1 y_2^2 + O(\delta^2) y_2 . \quad (2.45)$$

Note-se que a convergência das integrais impróprias (2.43) e (2.44) segue do fato de ser a origem (0,0) um ponto de sela hiperbólico do sistema (2.34)-(2.35), para todo $|\mu|$ e $|\delta|$ suficientemente pequenos (ver [6] - pg. 157). Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, tem-se que:

$$I_+(\mu, \delta) = H(y_1^+, 0) = H_+(\mu, \delta) \quad e \quad I_-(\mu, \delta) = H(y_1^-, 0) = H_-(\mu, \delta)$$

com o que a equação (2.42) pode ser escrita da seguinte forma:

$$G(\mu, \delta) = I_+(\mu, \delta) - I_-(\mu, \delta) = 0 . \quad (2.46)$$

A expressão (2.45), substituída em (2.43) e (2.44), fornece:

$$I_+(\mu, \delta) = \int_{-\infty}^0 \mu y_2^2 dt + \int_{-\infty}^0 \delta \eta y_1 y_2^2 dt + \int_{-\infty}^0 O(\delta^2) y_2 dt \quad (2.47)$$

e também

$$I_-(\mu, \delta) = \int_0^{+\infty} \mu y_2^2 dt + \int_0^{+\infty} \delta \eta y_1 y_2^2 dt + \int_0^{+\infty} O(\delta^2) y_2 dt. \quad (2.48)$$

Da equação (2.34) tem-se

$$\frac{dy_1}{dt} = (1 + \hat{O}(\delta^2)) y_2,$$

que sugere uma mudança de variáveis, ou seja, formalmente:

$$\frac{y_2 dy_1}{(1 + \hat{O}(\delta^2))} = y_2^2 dt . \quad (2.49)$$

Usando o fato acima, podemos escrever as funções I_+ e I_- da seguinte forma:

$$I_+(\mu, \delta) = \frac{1}{[1 + \tilde{O}(\delta^2)]} \left(\int_0^{y_1^+} \mu y_2 dy_1 + \int_0^{y_1^+} \delta \eta y_1 y_2 dy_1 + \int_0^{y_1^+} O(\delta^2) dy_1 \right) \quad (2.50)$$

e

$$I_-(\mu, \delta) = \frac{1}{[1 + \tilde{O}(\delta^2)]} \left(\int_0^{y_1^-} \mu y_2 dy_1 + \int_0^{y_1^-} \delta \eta y_1 y_2 dy_1 + \int_0^{y_1^-} O(\delta^2) dy_1 \right) \quad (2.51)$$

onde, nas integrais, tem-se $y_2 = y_2(y_1, \mu, \delta)$, relativamente às curvas definidas anteriormente, agora parametrizadas por y_1 .

No que segue, haverá necessidade de derivar, com relação a parâmetros, sob o sinal de integral, as expressões de $I_+(\mu, \delta)$ e $I_-(\mu, \delta)$; procederemos ainda formalmente, como feito em [4] e [9], mas a justificativa de todos esses procedimentos encontra-se no Lema 2.6.2, que é apresentado logo após a prova desta proposição.

Feitas essas considerações, aplicaremos o Teorema das Funções Implícitas à equação (2.46) para encontrarmos μ como função de δ de modo que $G(\mu(\delta), \delta) = 0$. Observemos em primeiro lugar que $G(0, 0) = 0$, por definição. Calculemos então a derivada de $G(\mu, \delta)$, com relação a μ , no ponto $(0, 0)$. Para tal, podemos fazer $\delta = 0$ antes da derivação. Assim, derivando $I_+(\mu, 0)$ sob o sinal de integral obtemos:

$$\frac{\partial I_+}{\partial \mu}(\mu, \delta) |_{(0,0)} = \int_0^{\frac{3}{2}} y_2 dy_1 \quad (2.52)$$

onde a integral é relativa à porção de $\mathcal{U}(0, 0)$ com $y_1 \geq 0$ e $y_2 \geq 0$, de $y_1 = y_2 = 0$ até $y_1^+ = \frac{3}{2}$, $y_2 = 0$. O valor $\frac{3}{2}$ pode ser facilmente encontrado, observando-se que a curva de nível da função H que passa pela origem, passa também pelo ponto $(\frac{3}{2}, 0)$ (e a integral é calculada relativamente à porção dessa curva com $y_2 \geq 0$). Além disso, podemos obter uma expressão para y_2 como função de y_1 , também igualando H a zero. Tal expressão é dada por:

$$y_2(y_1) = +\sqrt{y_1^2 - \frac{2}{3}y_1^3}.$$

Utilizando essa expressão e integrando (2.52) por partes obtém-se

$$\int_0^{\frac{3}{2}} y_2(y_1) dy_1 = \frac{3}{5}.$$

Por outro lado, da simetria de $H(y_1, y_2)$ com relação ao eixo- y_1 , segue que

$$\frac{\partial I_-}{\partial \mu}(\mu, \delta) |_{(0,0)} = -\frac{\partial I_+}{\partial \mu}(\mu, \delta) |_{(0,0)}$$

e, portanto,

$$\frac{\partial G}{\partial \mu}(\mu, \delta) |_{(0,0)} = 2 \int_0^{\frac{3}{2}} y_2(y_1) dy_1 = \frac{6}{5} > 0.$$

Concluimos, pelo Teorema das Funções Implícitas, que, para δ suficientemente pequeno, existe uma única função $\mu = \mu(\delta)$, com $\mu(0) = 0$, tal que $G(\mu(\delta), \delta) = 0$. Sendo assim, se fizermos $\mu = \mu(\delta)$ em (2.34)-(2.35), o sistema possuirá uma órbita homoclínica relativa à origem (para μ e δ suficientemente pequenos). ■

O lema seguinte justifica os procedimentos formais da prova da Proposição 2.6.1.

Lema 2.6.2

$$\frac{\partial I_+}{\partial \mu}(\mu, \delta) |_{(0,0)} = \int_0^{\frac{3}{2}} y_2(y_1, 0) dy_1,$$

em que

$$y_2(y_1, 0) = \sqrt{y_1^2 - \frac{2}{3}y_1^3}.$$

Prova: No cálculo de $\frac{\partial I_+}{\partial \mu}(\mu, \delta) |_{(0,0)}$, podemos derivar $I_+(\mu, \delta)$ fazendo $\delta = 0$ previamente, e, portanto, o sistema de equações diferenciais a ser considerado é o dado por

(2.39)-(2.40) que, para $\mu = 0$, fornece o sistema hamiltoniano (2.36)-(2.37), de hamiltoniana (2.38). O cálculo de $\dot{H}(y_1, y_2)$ ao longo das soluções de (2.39)-(2.40) é, portanto, $\dot{H} = \mu y_2^2$, que fornece o valor de $I_+(\mu, 0)$ (ver (2.47) para $\delta = 0$):

$$I_+(\mu, 0) = \int_{-\infty}^{t(y_1^+)} \mu y_2^2(t, \mu) dt .$$

A convergência dessa integral segue do fato de ser a origem um ponto de sela hiperbólico, para todo $|\mu|$ e $|\delta|$ suficientemente pequenos (ver [6] - pg. 157). O extremo $t(y_1^+) = t(y_1^+(\mu))$ é o instante em que a solução $(y_1(t, \mu), y_2(t, \mu))$, que parametriza a variedade instável $\mathcal{U}(\mu, 0)$, encontra o eixo $y_2 = 0$, pela primeira vez, após deixar a origem. Como essa solução fica parametrizada a menos de uma translação no tempo, escolheremos, convenientemente, o ponto de $\mathcal{U}(\mu, 0)$ por onde tal solução passa no instante $t=0$. Para isso, observemos que, pela teoria da variedade instável (ver [11]), é possível escolher um número a , com $0 < a < \frac{1}{2}$, de modo que, para μ suficientemente pequeno, $\mathcal{U}(\mu, 0)$ seja gráfico de uma função diferenciável $y_2 = y_2(y_1, \mu)$, definida no intervalo $-a \leq y_1 \leq (\frac{3}{2} - a)$. Determinamos univocamente a solução $(y_1(t, \mu), y_2(t, \mu))$, para $-\infty < t \leq t(y_1^+(\mu))$, de tal modo que $y_1(0, \mu) = \frac{3}{2} - a$ e $y_2(0, \mu) = y_2(\frac{3}{2} - a, \mu)$. Por outro lado, a escolha de a ainda permite que se considere, também para μ suficientemente pequeno, a porção de $\mathcal{U}(\mu, 0)$ entre os pontos $(y_1(0, \mu), y_2(0, \mu)) = (\frac{3}{2} - a, y_2(\frac{3}{2} - a, \mu))$ e $(y_1^+(\mu), 0)$. como o gráfico de uma função diferenciável $y_1 = y_1(y_2, \mu)$. definida no intervalo $0 \leq y_2 \leq y_2(\frac{3}{2} - a, \mu)$. Utilizaremos esses dois gráficos para mudar a variável de integração na expressão de $I_+(\mu, 0)$, transformando-a em uma integral com extremos de integração finitos. Assim, para t no intervalo $-\infty < t \leq 0$ temos $\dot{y}_1 \neq 0$, o que permite expressar t como função $t(y_1)$ de y_1 , e, portanto,

$$\int_{-\infty}^0 \mu y_2^2(t, \mu) dt = \int_0^{(\frac{3}{2}-a)} \mu y_2(y_1, \mu) dy_1 . \quad (2.53)$$

Analogamente, como $\dot{y}_2 = y_1 - y_1^2 + \mu y_2 \neq 0$, para $0 \leq t \leq t(y_1^+(\mu))$, teremos:

$$\int_0^{t(y_1^+(\mu))} \mu y_2^2(t, \mu) dt = \int_{y_2(\frac{3}{2}-a, \mu)}^0 \frac{\mu y_2^2}{y_1(y_2, \mu) - y_1^2(y_2, \mu) + \mu y_2} dy_2 . \quad (2.54)$$

As expressões (2.53) e (2.54) fornecem, então,

$$I_+(\mu, 0) = \int_0^{(\frac{3}{2}-a)} \mu y_2(y_1, \mu) dy_1 + \int_{y_2(\frac{3}{2}-a, \mu)}^0 \frac{\mu y_2^2}{y_1(y_2, \mu) - y_1^2(y_2, \mu) + \mu y_2} dy_2. \quad (2.55)$$

Analisemos, inicialmente, a integral correspondente à primeira parcela de (2.55) que deverá ser derivada em relação à μ , no ponto $\mu = 0$. Então

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{d}{d\mu} \left[\int_0^{(\frac{3}{2}-a)} \mu y_2(y_1, \mu) dy_1 \right]_{\mu=0} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{\mu} \int_0^{(\frac{3}{2}-a)} \mu y_2(y_1, \mu) dy_1 = \\ &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{(\frac{3}{2}-a)} y_2(y_1, \mu) dy_1 = \int_0^{(\frac{3}{2}-a)} y_2(y_1, 0) dy_1. \end{aligned}$$

Derivando agora, em relação à μ , a segunda parcela que aparece em (2.55) e fazendo em seguida $\mu = 0$, obtemos, pela Regra de Leibnitz:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{d}{d\mu} \left[\int_{y_2(\frac{3}{2}-a, \mu)}^0 \frac{\mu y_2^2}{y_1(y_2, \mu) - y_1^2(y_2, \mu) + \mu y_2} dy_2 \right]_{\mu=0} = \\ &= \int_{y_2(\frac{3}{2}-a, 0)}^0 \frac{y_2^2}{y_1(y_2, 0) - y_1^2(y_2, 0)} dy_2 \end{aligned}$$

já que os outros termos se anulam, ao fazermos $\mu = 0$. Efetuando-se a mudança de variável $y_2 = y_2(y_1, 0)$ na última integral, obtemos

$$I_2 = \int_{\frac{3}{2}-a}^{\frac{3}{2}} y_2(y_1, 0) dy_1. \quad (2.56)$$

Em conclusão,

$$\frac{\partial I_+}{\partial \mu} |_{\mu=0} = I_1 + I_2 = \int_0^{\frac{3}{2}} y_2(y_1, 0) dy_1 \quad \blacksquare$$

Vamos agora deduzir uma fórmula aproximada para a função $\mu = \mu(\delta)$, encontrada na Proposição 2.6.1. Para tanto, calculemos $\frac{\partial \mu}{\partial \delta}(\delta) |_{\delta=0}$ utilizando a equação (2.46). Derivando $G(\mu(\delta), \delta) = 0$ com relação a δ , calculada em $\mu = \delta = 0$ temos:

$$\frac{\partial}{\partial \delta} G(\mu(\delta), \delta) = 0,$$

ou seja (abreviando a notação e lembrando que $\mu(0) = 0$),

$$\frac{\partial G}{\partial \mu}(0,0) \frac{\partial \mu}{\partial \delta}(0) + \frac{\partial G}{\partial \delta}(0,0) = 0,$$

donde segue que:

$$\frac{\partial \mu}{\partial \delta}(0) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial \delta}(0,0)}{\frac{\partial G}{\partial \mu}(0,0)}.$$

(A validade da derivação com relação a δ justifica-se de modo análogo à da derivação com relação a μ).

Efetuando-se os cálculos acima, considerando-se $y_2 = y_2(y_1, \mu)$ como no Lema 2.6.2, obtem-se:

$$\frac{\partial \mu}{\partial \delta}(0) = -\frac{2 \int_0^{\frac{3}{2}} \eta y_1 y_2 dy_1}{2 \int_0^{\frac{3}{2}} y_2 dy_1} = -\eta \frac{\int_0^{\frac{3}{2}} y_1 y_2 dy_1}{\int_0^{\frac{3}{2}} y_2 dy_1}.$$

Logo, o desenvolvimento de Taylor até primeira ordem de $\mu = \mu(\delta)$, em torno de $\delta = 0$, é dado por:

$$\mu(\delta) = \mu(0) + \frac{\partial \mu}{\partial \delta}(0)\delta + O(\delta^2) = -\delta \eta \frac{\int_0^{\frac{3}{2}} y_1 y_2 dy_1}{\int_0^{\frac{3}{2}} y_2 dy_1} + O(\delta^2).$$

Vimos, na demonstração da Proposição 2.6.1, que o valor do denominador do coeficiente de $\delta\eta$ na expressão acima é $\frac{3}{5}$. Integrando também por partes obtemos $\int_0^{\frac{3}{2}} y_1 y_2 dy_1 = \frac{18}{35}$. Assim, a expressão aproximada para a função $\mu(\delta)$ tem a seguinte forma:

$$\mu(\delta) = -\frac{6}{7} \delta \eta + O(\delta^2). \quad (2.57)$$

Tal expressão é, então, no plano- (μ, δ) , uma aproximação para a curva correspondente à curva L, mostrada na figura 3. (Ver também a figura 10).

Do que vimos até aqui, pode-se concluir que, se substituirmos $\mu = \mu(\delta) = -\frac{6}{7} \delta \eta + O(\delta^2)$ nas equações (2.34)-(2.35), com δ suficientemente pequeno, o sistema possuirá

uma órbita homoclínica relativa à origem, e que engloba o equilíbrio $(1,0)$. Analisemos agora o comportamento local do equilíbrio $(1,0)$ para esse valor de μ . Para tal, consideremos o traço da jacobiana do sistema, calculada no ponto $(1,0)$, que é dado por $\text{tr} [DX(1,0)] = \mu + \delta\eta + O_4(\delta^2)$. Logo, no caso em que $\mu = \mu(\delta)$, tem-se $\text{tr} [DX(1,0)] = -\frac{6}{7} \delta\eta + O(\delta^2) + \delta\eta + O_4(\delta^2) = \frac{1}{7} \delta\eta + O(\delta^2)$.

figura 10: Curva L no plano- (μ, δ) , dos valores para os quais o sistema (2.34)-(2.35) possui uma órbita homoclínica

Como, por definição, $\eta > 0$ e fixo, conclui-se da expressão acima que, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, o sinal do traço é positivo, e, portanto, o equilíbrio $(1,0)$ é uma fonte complexa. Na figura 11 apresentamos um esboço do plano de fase do sistema (2.34)-(2.35), com $\mu = \mu(\delta)$.

Estudaremos, nas próximas subseções, os casos em que $\mu \neq \mu(\delta) = -\frac{6}{7} \delta\eta + O(\delta^2)$ que, como veremos, implicarão na existência de órbitas periódicas e heteroclínicas para

o sistema.

figura 11: Esboço do Plano de Fase do sistema (2.34)-(2.35) para $\mu = \mu(\delta) = -\frac{6}{7} \delta \eta + O(\delta^2)$

2.6.2 Órbitas Periódicas

Estudaremos nesta seção o sistema (2.34)-(2.35) no caso em que $\mu < \mu(\delta) = -\frac{6}{7} \delta \eta + O(\delta^2)$. Da expressão do traço da jacobiana desse sistema, calculada no ponto $(1,0)$, tem-se que, para aqueles valores do parâmetro μ tais que $-\delta \eta - O_4(\delta^2) < \mu < \mu(\delta) = -\frac{6}{7} \delta \eta + O(\delta^2)$, o equilíbrio $(1,0)$ é uma fonte complexa. Consideremos, então, a função $G(\mu, \delta) = H_+(\mu, \delta) - H_-(\mu, \delta) = H(y_1^+, 0) - H(y_1^-, 0)$ (definida na Proposição 2.6.1). Vimos que a derivada dessa função, com relação a μ , calculada no ponto $\mu = \delta = 0$, é estritamente positiva. Assim, para cada $\bar{\delta} > 0$ suficientemente pequeno, fixo, a função $G(\mu, (\bar{\delta}))$ é estritamente crescente como função de μ , para valores pequenos de μ , e, portanto, se $\mu < \mu(\bar{\delta})$, $G(\mu, \bar{\delta}) < 0$, donde $H(y_1^+, 0) - H(y_1^-, 0) < 0$. Como, para $y_1 > 1$, a função H é estritamente crescente na variável y_1 , $y_1^+ < y_1^-$. Dessas considerações conclui-se que um esboço do plano de fase do sistema (2.34)-(2.35), com parâmetro μ satisfazendo $-\delta \eta - O_4(\delta^2) < \mu < -\frac{6}{7} \delta \eta + O(\delta^2)$, e para todo δ suficientemente pequeno,

fixo, é o mostrado na figura 12 abaixo.

figura 12: Esboço do Plano de Fase do sistema (2.34)-(2.35) para $-\delta\eta - O_4(\delta^2) < \mu < \mu(\delta) = -\frac{6}{7}\delta\eta + O(\delta^2)$

Analisando-se a figura 12 pode-se observar a existência de uma região positivamente invariante, interior à região limitada pelas variedades estável e instável da origem, unidas pelo segmento $[y_1^+, y_1^-]$, no qual não existem pontos de equilíbrio do sistema. Conclui-se assim, pelo Teorema de Poincaré - Bendixson, que para cada δ suficientemente pequeno, fixo, e para aqueles valores do parâmetro μ tais que $-\delta\eta - O_4(\delta^2) < \mu < \mu(\delta) = -\frac{6}{7}\delta\eta + O(\delta^2)$, o sistema (2.34)-(2.35) possui pelo menos uma órbita periódica envolvendo o equilíbrio instável $(1,0)$ (veja figura 13 a seguir, na qual supomos

a existência de apenas uma órbita periódica, para facilitar o esboço do plano de fase).

figura 13: Esboço do Plano de Fase do sistema (2.34)-(2.35) para $-\delta\eta - O_4(\delta^2) < \mu < \mu(\delta) = -\frac{6}{7}\delta\eta + O(\delta^2)$ - (considerando-se a existência de uma única órbita periódica, para cada δ suficientemente pequeno fixo)

Das considerações acima e de uma análise da da figura 13 pode-se concluir também que, se existir uma única órbita periódica, esta será, necessariamente, um *ciclo-limite estável*. Com efeito, as trajetórias do sistema que começam no interior da órbita periódica, com exceção do equilíbrio $(1,0)$, tem como ω -limite a própria órbita periódica, já que o equilíbrio $(1,0)$ é uma fonte; por outro lado, as trajetórias que cortam o segmento $[y_1^+, y_1^-]$ verticalmente, de cima para baixo, tem também como ω -limite a órbita periódica, o que é facilmente observado na figura 13, tendo em mente o Teorema de Poincaré-Bendixson.

A seguir, utilizando técnicas semelhantes àsquelas usadas para demonstrar a Proposição 2.6.1, consideraremos mais detalhadamente essas órbitas periódicas. Nosso objetivo é mostrar que elas são únicas (e, conseqüentemente, estáveis) para cada valor do parâmetro μ , satisfazendo $-\delta\eta - O_4(\delta^2) < \mu < -\frac{6}{7}\delta\eta + O(\delta^2)$ com δ suficientemente

pequeno, e se aproximam da órbita homoclínica dada pela Proposição 2.6.1, quando o parâmetro μ tende para o valor $\mu(\delta)$, se considerarmos as órbitas no espaço- (y_1, y_2, μ) , ao acrescentarmos a equação $\dot{\mu} = 0$ ao sistema (2.34)-(2.35).

Antes de abordarmos essas questões, observemos que $(0,0)$ e $(1,0)$ são os únicos pontos de equilíbrio do sistema (2.34)-(2.35), pelo menos para μ e δ suficientemente pequenos, e que a origem é um ponto de sela. Sendo assim, se existir uma órbita periódica para o sistema, esta deve, necessariamente, englobar o equilíbrio $(1,0)$. Consequentemente, tal órbita deve passar por um ponto do segmento $]0,1[$. Usaremos esse fato para caracterizar as órbitas periódicas existentes para o sistema, definindo uma função auxiliar que depende de um parâmetro c , variando no intervalo $]0,1[$, e analisando algumas das propriedades dessa função. É o que faremos a seguir.

Lembremos inicialmente que, para $\mu = \delta = 0$, o sistema possui o plano de fase mostrado na figura 8. Assim, para μ e δ suficientemente pequenos e $0 < c < 1$, podemos definir, pelo teorema da dependência contínua das soluções com relação a parâmetros e dados iniciais, as seguintes funções:

$H_+(\mu, \delta, c)$: como sendo o valor da função $H(y_1, y_2)$, dada em (2.38), no ponto de abscissa c_1^+ onde a órbita de (2.34)-(2.35), iniciada em $y_1 = c, y_2 = 0$, toca o eixo $y_2 = 0$, no futuro, pela primeira vez.

$H_-(\mu, \delta, c)$: como sendo o valor da função $H(y_1, y_2)$, dada em (2.38), no ponto de abscissa c_1^- onde a órbita de (2.34)-(2.35), iniciada em $y_1 = c, y_2 = 0$, toca o eixo $y_2 = 0$, no passado, pela primeira vez.

Observação: Embora tenhamos definido as funções acima somente para $0 < c < 1$, é claro que tais funções podem também ser definidas para valores de $c \geq 1$ (pelos menos para $0 < c < \frac{3}{2}$). Além disso, $H_+(\mu, \delta, c)$ e $H_-(\mu, \delta, c)$ são, pelo menos, de classe C^1 (Teorema da Dependência das Soluções com Relação a Parâmetros e Dados Iniciais).

Para uma melhor visualização dessas definições, veja a figura 14.

Das considerações acima conclui-se que, para μ e δ suficientemente pequenos, o sistema (2.34)-(2.35) possui uma órbita periódica passando pelo ponto $(c,0)$ se, e somente se, a seguinte equação estiver satisfeita:

$$G(\mu, \delta, c) = H_+(\mu, \delta, c) - H_-(\mu, \delta, c) = 0. \quad (2.58)$$

figura 14

Resolveremos essa equação, agora para μ como função de δ e c , utilizando o Teorema das Funções Implícitas. Novamente escreveremos (2.58) de forma mais conveniente, utilizando as seguintes funções, definidas para μ e δ suficientemente pequenos e $0 < c < 1$:

$$I_+(\mu, \delta, c) = \int \dot{H}(y_1, y_2) dt \quad (2.59)$$

em que a integral é relativa à porção da órbita de (2.34)-(2.35), com $y_2 \geq 0$, e que começa em $y_1 = c, y_2 = 0$ e termina em $y_1 = c_1^+ > 0, y_2 = 0$, sendo que $\dot{H}(y_1, y_2)$ representa a derivada da função (2.38), com relação ao tempo, sobre as órbitas do sistema (2.34)-(2.35). Analogamente, definimos:

$$I_-(\mu, \delta, c) = \int \dot{H}(y_1, y_2) dt \quad (2.60)$$

em que a integral é relativa à porção da órbita de (2.34)-(2.35), com $y_2 \leq 0$, que começa em $y_1 = c, y_2 = 0$, e termina em $y_1 = c_1^- > 0, y_2 = 0$.

A figura 14 mostra as curvas com relação às quais estão sendo calculadas essas integrais.

Agora, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, tem-se que:

$$\begin{aligned} I_+(\mu, \delta, c) &= H(c_1^+, 0) - H(c, 0) \\ e \quad I_-(\mu, \delta, c) &= H(c_1^-, 0) - H(c, 0). \end{aligned}$$

com o que a equação (2.58) pode ser escrita da forma:

$$G(\mu, \delta, c) = I_+(\mu, \delta, c) - I_-(\mu, \delta, c) = 0. \quad (2.61)$$

Substituindo-se a expressão para $\dot{H}$, dada em (2.45), nas integrais introduzidas acima obtem-se:

$$I_+(\mu, \delta, c) = \int_0^{t(c_1^+)} \mu y_2^2 dt + \int_0^{t(c_1^+)} \delta \eta y_1 y_2^2 dt + \int_0^{t(c_1^+)} O(\delta^2) y_2 dt, \quad (2.62)$$

e também

$$I_-(\mu, \delta, c) = \int_0^{t(c_1^-)} \mu y_2^2 dt + \int_0^{t(c_1^-)} \delta \eta y_1 y_2^2 dt + \int_0^{t(c_1^-)} O(\delta^2) y_2 dt, \quad (2.63)$$

onde $t(c_1^+)$ é o tempo que a trajetória de (2.34)-(2.35) leva para ir de $(c, 0)$ à $(c_1^+, 0)$. O significado de $t(c_1^-)$ é análogo.

Usando-se (2.49), pode-se também escrever as funções I_+ e I_- como segue:

$$I_+(\mu, \delta, c) = \frac{1}{[1 + \tilde{O}(\delta^2)]} \left(\int_c^{c_1^+} \mu y_2 dy_1 + \int_c^{c_1^+} \delta \eta y_1 y_2 dy_1 + \int_c^{c_1^+} O(\delta^2) dy_1 \right) \quad (2.64)$$

e

$$I_-(\mu, \delta, c) = \frac{1}{[1 + \tilde{O}(\delta^2)]} \left(\int_c^{c_1^-} \mu y_2 dy_1 + \int_c^{c_1^-} \delta \eta y_1 y_2 dy_1 + \int_c^{c_1^-} O(\delta^2) dy_1 \right) \quad (2.65)$$

Aplicaremos o Teorema das Funções Implícitas à equação (2.61) para encontrarmos μ como função de δ e c , de modo que $G(\mu(\delta, c), \delta, c) = 0$. Para tal, observemos em primeiro lugar que $G(0, 0, c) = 0$, pela definição de $G(\mu, \delta, c)$. Calculemos então a derivada de $G(\mu, \delta, c)$, com relação a μ , no ponto $(0, 0, c)$. Fazendo-se $\delta = 0$ e derivando $I_+(\mu, 0, c)$, com relação a μ , sob o sinal de integral, obtém-se:

$$\frac{\partial I_+}{\partial \mu}(\mu, \delta, c) |_{(0,0,c)} = \int_c^{c_1} y_2 dy_1 > 0, \quad (2.66)$$

onde a integral é relativa à porção da órbita de (2.34)-(2.35), com $\mu = \delta = 0$, de $y_1 = c, y_2 = 0$ até $y_1 = c_1, y_2 = 0$, considerando-se $y_2 \geq 0$. Pode-se obter uma expressão para o integrando y_2 , como função de y_1 e c , fazendo-se $H(y_1, y_2) = H(c, 0)$, ou seja, considerando-se a porção com $y_2 \geq 0$ da curva de nível de H que passa por $(c, 0)$ (a integral em (2.66) é calculada relativamente à essa curva). Tal expressão é dada por:

$$y_2(c, y_1) = +\sqrt{y_1^2 - \frac{2}{3}y_1^3 - c^2 + \frac{2}{3}c^3}. \quad (2.67)$$

De $H(y_1, 0) = H(c, 0)$ obtém-se também a seguinte expressão para c_1 :

$$c_1 = \frac{(\frac{3}{2} - c) + \sqrt{3c - 3c^2 + \frac{9}{4}}}{2}. \quad (2.68)$$

Por outro lado, da simetria de $H(y_1, y_2)$ com relação ao eixo- y_1 , segue que

$$\frac{\partial I_-}{\partial \mu}(\mu, \delta, c) |_{(0,0,c)} = -\frac{\partial I_+}{\partial \mu}(\mu, \delta, c) |_{(0,0,c)}$$

e, portanto,

$$\frac{\partial G}{\partial \mu}(\mu, \delta, c) |_{(0,0,c)} = 2 \int_c^{c_1} y_2(c, y_1) dy_1 > 0.$$

Conclui-se, pelo Teorema das Funções Implícitas, que existe uma vizinhança $V(c)$ do ponto c , uma vizinhança $I(0)$ de $\delta = 0$ (dependendo de c), e uma função $\mu = \mu(\delta, c)$ definida em $V(c) \times I(0)$, com $\mu(0, c) = 0$, tal que $G(\mu(\delta, c), \delta, c) = 0$. Sendo assim,

substituindo-se $\mu = \mu(\delta, c)$ em (2.34)-(2.35), conclue-se que o sistema possui uma órbita periódica passando por $(\dot{c}, 0)$, isso para δ numa vizinhança de $\delta = 0$ (dependendo de c) e $0 < c < 1$.

Se, nas considerações acima, a vizinhança $I(0)$, de $\delta = 0$, não depender de c , diremos que $G(\mu, \delta, c) = 0$ está resolvida uniformemente em c , para $0 < c < 1$. Gostaríamos de resolver $G(\mu, \delta, c) = 0$ uniformemente em c , entretanto, ao tentarmos fazê-lo, defrontamo-nos com uma dificuldade, pois, quando $c \rightarrow 1$, segue, da expressão (2.68), que $c_1 \rightarrow 1$ e, conseqüentemente,

$$\frac{\partial G}{\partial \mu}(\mu, \delta, c) |_{(0,0,c)} = 2 \int_c^{c_1} y_2(c, y_1) dy_1 \rightarrow 0 .$$

Para contornar tal dificuldade usaremos uma função auxiliar. Definamos então, para μ e δ próximos de zero, em intervalos fechados convenientes I_1 e I_2 , respectivamente, e $0 < c < 1$, a seguinte função:

$$\overline{G}(\mu, \delta, c) = \frac{1}{(c-1)^2} G(\mu, \delta, c) \quad (2.69)$$

que será estendida continuamente para $0 \leq c \leq 1$ por passagem ao limite. Se a equação $\overline{G}(\mu, \delta, c) = 0$ puder ser resolvida uniformemente em c , é claro que poderemos resolver também $G(\mu, \delta, c) = 0$ uniformemente em c , como queremos. Sendo assim, visando a aplicar o Teorema das Funções Implícitas com parâmetros à equação $\overline{G}(\mu, \delta, c) = 0$ (ver Apêndice B), mostraremos a seguir que: $\overline{G}$ é contínua para $0 \leq c \leq 1$ e $(\mu, \delta) \in I_1 \times I_2$; $\frac{\partial \overline{G}}{\partial \mu}(\mu, \delta, c)$ é contínua nos pontos $(0,0,c)$, uniformemente em $c \in [0, 1]$; e, existem constantes K e k , com $K > k$, tais que $K > \frac{\partial \overline{G}}{\partial \mu}(\mu, \delta, c) |_{(0,0,c)} \geq k > 0$, para $0 \leq c \leq 1$.

Lema 2.6.3 $\overline{G}$ é limitada para $0 < c < 1$ e $(\mu, \delta) \in I_1 \times I_2$.

Prova: Consideremos o parâmetro c da função $\overline{G}$ variando no intervalo $]0,1[$ do eixo y_1 do plano de fase de (2.34)-(2.35). Sendo assim, fora de uma vizinhança do ponto

$c=1$, e para $(\mu, \delta) \in I_1 \times I_2$, a função $\overline{G}$ é o produto de duas funções limitadas e, portanto, é limitada. Basta então mostrarmos que $\overline{G}$ é limitada para c pertencente a uma vizinhança de 1 e $(\mu, \delta) \in I_1 \times I_2$, (reduzindo I_1 e I_2 se necessário), que é o que faremos a seguir.

Por conveniência, vamos escrever as equações (2.34)-(2.35) da seguinte forma:

$$\dot{y}_1 = y_2 + g_1(y_2, \delta) \quad (2.70)$$

$$\dot{y}_2 = y_1 + \mu y_2 - y_1^2 + \delta \eta y_1 y_2 + g_2(y_1, y_2, \delta) \quad (2.71)$$

onde g_i , $i=1,2$, são funções da ordem de δ^2 . Calculando-se $\dot{H}$ sobre as órbitas desse sistema obtem-se:

$$\dot{H} = \mu y_2^2 + \delta \eta y_1 y_2^2 + y_2 g_2 + (y_1^2 - y_1) g_1 \quad (2.72)$$

É evidente que tal expressão é equivalente àquela dada em (2.45), pois alteramos somente a forma de escrevê-la. Como $(0,0)$ e $(1,0)$ são, para μ e δ suficientemente pequenos, pontos de equilíbrio do sistema (2.34)-(2.35), então $g_1(0, \delta) = 0$ e $g_2(0, 0, \delta) = g_2(1, 0, \delta) = 0$. e, portanto, para (y_1, y_2) numa vizinhança de $(1,0)$, e δ suficientemente pequeno, pode-se escrever essas funções da seguinte maneira (basta considerarmos o seu desenvolvimento de Taylor em torno do ponto $(1,0)$):

$$\begin{aligned} g_1(y_2, \delta) &= y_2 g_{12}(\delta) \\ g_2(y_1, y_2, \delta) &= (y_1 - 1) g_{21}(y_1, y_2, \delta) + y_2 g_{22}(y_1, y_2, \delta) \end{aligned}$$

que, substituídas em (2.72), fornecem:

$$\dot{H} = [\mu + \delta \eta + g_{22}] y_2^2 + (y_1 - 1) y_2 [g_{21} + y_1 g_{12}] . \quad (2.73)$$

Inicialmente minoraremos e majoraremos a função $\dot{H}$ por formas quadráticas em $(y_1 - 1)$ e y_2 . Para tal, tomando-se a diferença entre a função $\dot{H}$ e uma forma quadrática, digamos $Q((y_1 - 1), y_2) = A y_2^2 + B(y_1 - 1) y_2 + C(y_1 - 1)^2$, com A , B e C dependendo

únicamente de μ e δ , e calculando a expressão da matriz hessiana dessa nova função no ponto $(1,0)$, obtemos:

$$Hess[(\dot{H} - Q)](1,0) = \begin{pmatrix} -2C & g_{21}(1,0) + g_{12}(1,0) - B \\ g_{21}(1,0) + g_{12}(1,0) - B & 2\mu + 2\delta\eta + 2g_{22}(1,0) - 2A \end{pmatrix}.$$

Pode-se então concluir que existem funções $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ e $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, dependendo unicamente de μ e δ , e que podem ser tomadas como sendo da forma $O(\mu) + O(\delta)$, de modo que a função $\dot{H}$ é majorada acima e abaixo pelas seguintes formas quadráticas em $(y_1 - 1)$ e y_2 , respectivamente:

$$\begin{aligned} Q_1((y_1 - 1), y_2) &= \bar{A}(\mu, \delta)y_2^2 + \bar{B}(\mu, \delta)(y_1 - 1)y_2 + \bar{C}(\mu, \delta)(y_1 - 1)^2 \\ Q_2((y_1 - 1), y_2) &= \underline{A}(\mu, \delta)y_2^2 + \underline{B}(\mu, \delta)(y_1 - 1)y_2 + \underline{C}(\mu, \delta)(y_1 - 1)^2. \end{aligned}$$

Consideremos, por outro lado, a função H dada por

$$H(y_1, y_2) = \frac{y_1^3}{3} - \frac{y_1^2}{2} + \frac{y_2^2}{2},$$

que também pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} H(y_1, y_2) + \frac{1}{6} &= \frac{y_1^3}{3} - \frac{y_1^2}{2} + \frac{y_2^2}{2} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{y_2^2}{2} + \frac{1 + 2y_1^3 - 3y_1^2}{6} \\ &= \frac{y_2^2}{2} + \frac{1}{6}(2y_1^3 - 4y_1^2 + y_1^2 + 2y_1 - 2y_1 + 1) \\ &= \frac{y_2^2}{2} + \frac{1}{6}(2y_1 + 1)(y_1 - 1)^2. \end{aligned}$$

Logo, para $\frac{1}{2} \leq y_1 \leq \frac{3}{2}$, $H + \frac{1}{6}$ pode ser majorada acima e abaixo por formas quadráticas positivas em $(y_1 - 1)$ e y_2 . Chamemos $Q_3((y_1 - 1), y_2)$ e $Q_4((y_1 - 1), y_2)$, respectivamente, essas formas quadráticas. Dessas considerações temos que, para $((y_1 - 1), y_2) \neq (1, 0)$, é válida a seguinte majoração:

$$\frac{Q_2((y_1 - 1), y_2)}{Q_3((y_1 - 1), y_2)} \leq \frac{\dot{H}}{H + \frac{1}{6}} \leq \frac{Q_1((y_1 - 1), y_2)}{Q_4((y_1 - 1), y_2)}.$$

Dividindo-se o numerador e o denominador das inequações acima por $|((y_1 - 1), y_2)|^2$, e considerando-se o fato de que as formas quadráticas assumem seus valores mínimo e máximo na esfera unitária e de que os coeficientes das formas Q_1 e Q_2 são funções da forma $O(\mu) + O(\delta)$, conclui-se que os quocientes $\frac{Q_1}{Q_4}$ e $\frac{Q_2}{Q_3}$ são majorados e minorados, respectivamente, por funções da forma $O(\mu) + O(\delta)$. Chamando q_1 e q_2 tais funções, obtem-se, da desigualdade acima:

$$q_2(\mu, \delta) \leq \frac{Q_2((y_1 - 1), y_2)}{Q_4((y_1 - 1), y_2)} \leq \frac{\dot{H}}{H + \frac{1}{6}} \leq \frac{Q_1((y_1 - 1), y_2)}{Q_3((y_1 - 1), y_2)} \leq q_1(\mu, \delta) ,$$

ou, equivalentemente:

$$q_2(\mu, \delta) \leq \frac{d}{dt} \left[\ln(H + \frac{1}{6}) \right] \leq q_1(\mu, \delta) .$$

Integrando a expressão acima com relação a t , sobre a porção da órbita de (2.34)-(2.35) iniciando em $(c, 0)$, com $y_1 \geq 0$ e $y_2 \geq 0$, obtem-se:

$$\int q_2(\mu, \delta) dt \leq \left[\ln(H(c_1^+, 0) + \frac{1}{6}) - \ln(H(c, 0) + \frac{1}{6}) \right] \leq \int q_1(\mu, \delta) dt .$$

Para μ e δ suficientemente pequenos, o tempo T^+ necessário para a solução do sistema descrever tal curva é finito, donde tem-se:

$$q_2(\mu, \delta)T^+ \leq \ln \left[\frac{H(c_1^+, 0) + \frac{1}{6}}{H(c, 0) + \frac{1}{6}} \right] \leq q_1(\mu, \delta)T^+ ,$$

ou ainda

$$\exp(q_2(\mu, \delta)T^+) \leq \left[\frac{H(c_1^+, 0) + \frac{1}{6}}{H(c, 0) + \frac{1}{6}} \right] \leq \exp(q_1(\mu, \delta)T^+) .$$

Procedendo-se de forma análoga, obtem-se também, para um conveniente T^- :

$$\exp(q_2(\mu, \delta)T^-) \leq \left[\frac{H(c_1^-, 0) + \frac{1}{6}}{H(c, 0) + \frac{1}{6}} \right] \leq \exp(q_1(\mu, \delta)T^-) .$$

Lembrando-se que $H(c_1^+, 0) = H_+(\mu, \delta, c)$ e que $H(c_1^-, 0) = H_-(\mu, \delta, c)$, e fazendo-se a diferença das expressões acima obtém-se:

$$\left[\frac{H_+ - H_-}{H(c, 0) + \frac{1}{6}} \right] \leq \exp(q_1(\mu, \delta)T^+) - \exp(q_2(\mu, \delta)T^-) = O(\mu) + O(\delta) ,$$

e também

$$\left[\frac{H_+ - H_-}{H(c, 0) + \frac{1}{6}} \right] \geq \exp(q_2(\mu, \delta)T^+) - \exp(q_1(\mu, \delta)T^-) = O(\mu) + O(\delta) .$$

Agora, da expressão de $H(y_1, y_2) + \frac{1}{6}$, segue que $H(c, 0) + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(2c + 1)(c - 1)^2$ o que, juntamente com a desigualdade acima, mostra que $|\overline{G}| = \left| \frac{H_+ - H_-}{(c-1)^2} \right|$ é limitada numa vizinhança de $c=1$ e que a limitação é pequena, para μ e δ pequenos. Logo $\overline{G}$ é limitada para $0 < c < 1$, $(\mu, \delta) \in I_1 \times I_2$ (reduzidos I_1 e I_2 , se necessário). ■

Antes de provarmos o Lema 2.6.4, façamos a seguinte observação:

Observação: O desenvolvimento de Taylor de $G(\mu, \delta, c)$ nas vizinhanças de $c=1$ (para μ e δ fixos), é dado por

$$G(\mu, \delta, c) = G(\mu, \delta, 1) + \frac{\partial G}{\partial c}(\mu, \delta, 1)(c - 1) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial c^2}(\mu, \delta, 1)(c - 1)^2 + \dots .$$

Como $\overline{G}(\mu, \delta, c)$ é limitada para $0 < c < 1$, tem-se necessariamente que, para todo $(\mu, \delta) \in I_1 \times I_2$,

$$G(\mu, \delta, 1) = \frac{\partial G}{\partial c}(\mu, \delta, 1) = 0 ,$$

donde podemos definir

$$\overline{G}(\mu, \delta, 1) = \lim_{c \rightarrow 1} \frac{G(\mu, \delta, c)}{(c - 1)^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial c^2}(\mu, \delta, 1).$$

Lema 2.6.4 $G(\mu, \delta, c) \longrightarrow G(\mu, \delta)$, quando $c \rightarrow 0$, para $(\mu, \delta) \in I_1 \times I_2$, onde I_1 e I_2 são intervalos fechados, contendo a origem, escolhidos convenientemente.

Prova: Observemos que a convergência de $G(\mu, \delta, c)$ para $G(\mu, \delta)$, a que se refere o enunciado, não segue imediatamente do Teorema da Dependência Contínua de Parâmetros e Dados Iniciais pois, quando $c \rightarrow 0$, os tempos necessários para a solução de (2.34)-(2.35), em relação a qual estão sendo calculadas as integrais que aparecem na definição de $G(\mu, \delta, c)$, ir do ponto $y_1 = c, y_2 = 0$ até o ponto $(0, c_1^+)$ ou $(0, c_1^-)$, tendem para infinito. Lembremos que a função $G(\mu, \delta)$ é dada por:

$$G(\mu, \delta) = I_+(\mu, \delta) - I_-(\mu, \delta)$$

onde $I_+(\mu, \delta)$ e $I_-(\mu, \delta)$ são dadas em (2.50) e (2.51); por outro lado, a função $G(\mu, \delta, c)$ é dada por:

$$G(\mu, \delta, c) = I_+(\mu, \delta, c) - I_-(\mu, \delta, c)$$

onde $I_+(\mu, \delta, c)$ e $I_-(\mu, \delta, c)$ aparecem em (2.64) e (2.65).

Vamos mostrar que a função $I_+(\mu, \delta, c) \rightarrow I_+(\mu, \delta)$, quando $c \rightarrow 0$. Tais funções são

$$I_+(\mu, \delta, c) = \frac{1}{[1 + \tilde{O}(\delta^2)]} \left(\int_c^{c_1^+} \mu y_2(c, y_1) dy_1 + \int_c^{c_1^+} \delta \eta y_1 y_2(c, y_1) dy_1 + \int_c^{c_1^+} O(\delta^2) dy_1 \right)$$

e

$$I_+(\mu, \delta) = \frac{1}{[1 + \tilde{O}(\delta^2)]} \left(\int_0^{y_1^+} \mu y_2(y_1) dy_1 + \int_0^{y_1^+} \delta \eta y_1 y_2(y_1) dy_1 + \int_0^{y_1^+} O(\delta^2) dy_1 \right).$$

Mostraremos inicialmente que $\lim_{c \rightarrow 0} I_+(\mu, 0, c) = I_+(\mu, 0)$. Para tal, consideremos a reta $y_1 = 2c_0$, tomando-se c_0 suficientemente pequeno, de tal forma que essa reta corte $\mathcal{U}(\mu, \delta)$, $\mathcal{S}(\mu, \delta)$ e a solução de (2.34)-(2.35) que passa por $(c_0, 0)$, simultaneamente (ver

figura 15). Dividamos então as integrais que aparecem em $I_+(\mu, 0, c)$ e $I_+(\mu, 0)$ da seguinte forma, para $c < c_0$:

$$\int_c^{c_1^+} \mu y_2(c, y_1) dy_1 = \int_c^{2c} \mu y_2(c, y_1) dy_1 + \int_{2c}^{c_1^+} \mu y_2(c, y_1) dy_1 \quad (2.74)$$

e

$$\int_0^{y_1^+} \mu y_2(y_1) dy_1 = \int_0^{2c} \mu y_2(y_1) dy_1 + \int_{2c}^{y_1^+} \mu y_2(y_1) dy_1. \quad (2.75)$$

Fazendo-se a diferença das integrais acima obtem-se:

$$\left| \int_c^{c_1^+} \mu y_2(c, y_1) dy_1 - \int_0^{y_1^+} \mu y_2(y_1) dy_1 \right| \leq \left| \int_c^{2c} \mu y_2(c, y_1) dy_1 - \int_0^{2c} \mu y_2(y_1) dy_1 \right| + \left| \int_{2c}^{c_1^+} \mu y_2(c, y_1) dy_1 - \int_{2c}^{y_1^+} \mu y_2(y_1) dy_1 \right|.$$

Analisemos os termos acima, quando $c \rightarrow 0$. Em primeiro lugar, tem-se que:

$$\left| \int_c^{2c} \mu y_2(c, y_1) dy_1 - \int_0^{2c} \mu y_2(y_1) dy_1 \right| \leq \left| \int_c^{2c} \mu y_2(c, y_1) dy_1 \right| + \left| \int_0^{2c} \mu y_2(y_1) dy_1 \right| \leq 2 \left| \int_0^{2c} \mu y_2(y_1) dy_1 \right| \leq 2M2c,$$

onde M é o máximo de $\mu y_2(y_1)$ no intervalo $[0, y_1^+]$. Segue daí que, dado $\epsilon > 0$, existe $c_1 < c_0$ de maneira que, se $0 < c \leq c_1$ então

$$\left| \int_c^{2c_1} \mu y_2(c, y_1) dy_1 - \int_0^{2c_1} \mu y_2(y_1) dy_1 \right| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.76)$$

Analisemos agora o outro termo da desigualdade. Fixando-se a reta $y_1 = 2c_1$, onde $c_1 > 0$ é aquele obtido na majoração acima, temos, pelo Teorema do Fluxo Tubular Longo [11], que, dado $\rho > 0$, existe uma vizinhança de diâmetro ρ do arco de variedade instável da origem do sistema (2.34)-(2.35), entre os pontos de abscissas $2c_1$ e y_1^+ , e na qual está contido um fluxo tubular que contém tal arco. Agora, das considerações

iniciais, segue que existe c_2 , com $0 < c_2 \leq c_1$ de maneira que o ponto de abscissa $2c_1$, da trajetória que passa por $(c_2, 0)$, pertence a esse fluxo tubular. Para uma melhor visualização desse fato, veja figura 15 abaixo.

figura 15

Assim, para $0 < c \leq c_2$ tem-se:

$$\left| \int_{2c_1}^{c_1^+} \mu y_2(c, y_1) dy_1 - \int_{2c_1}^{y_1^+} \mu y_2(y_1) dy_1 \right| =$$

$$\left| \int_{2c_1}^{c_1^+} \mu y_2(c, y_1) dy_1 - \int_{2c_1}^{c_1^+} \mu y_2(y_1) dy_1 - \int_{c_1^+}^{y_1^+} \mu y_2(y_1) dy_1 \right| \leq$$

$$\int_{2c_1}^{c_1^+} \mu |y_2(c, y_1) - y_2(y_1)| dy_1 + \int_{c_1^+}^{y_1^+} |\mu y_2(y_1)| dy_1 \leq M_3 \rho + M_4 \rho \leq M_5 \rho ,$$

com M_3 , M_4 e M_5 constantes.

Logo, tomando-se $\rho < \frac{\epsilon}{2M_5}$, tem-se que , para qualquer $\epsilon > 0$ dado, e c suficientemente pequeno,

$$\left| \int_{2c_1}^{c_1^+} \mu y_2(c, y_1) dy_1 - \int_{2c_1}^{y_1^+} \mu y_2(y_1) dy_1 \right| < \frac{\epsilon}{2} .$$

Conclui-se pois, que, quando $c \rightarrow 0$,

$$\int_c^{c_1^+} \mu y_2(c, y_1) dy_1 \longrightarrow \int_0^{y_1^+} \mu y_2(y_1) dy_1 .$$

Pela continuidade de $I_+(\mu, \delta, c)$ e $I_+(\mu, \delta)$ pode-se então estimar:

$$\begin{aligned} |I_+(\mu, \delta, c) - I_+(\mu, \delta)| &\leq |I_+(\mu, \delta, c) - I_+(\mu, 0, c)| + \\ &+ |I_+(\mu, 0, c) - I_+(\mu, 0)| + |I_+(\mu, 0) - I_+(\mu, \delta)| \end{aligned}$$

concluindo-se que $I_+(\mu, \delta, c) \rightarrow I_+(\mu, \delta)$ para μ e δ suficientemente pequenos e $c \rightarrow 0$.

Procedendo-se de forma inteiramente análoga, prova-se que $I_-(\mu, \delta, c) \rightarrow I_-(\mu, \delta)$. Concluimos, assim, que $G(\mu, \delta, c) \rightarrow G(\mu, \delta)$, quando $c \rightarrow 0$, para $(\mu, \delta) \in I_1 \times I_2$, I_1 e I_2 suficientemente pequenos. ■

Observação: Decorre imediatamente do Lema anterior que $\overline{G}(\mu, \delta, c) \rightarrow G(\mu, \delta)$, quando $c \rightarrow 0$. Fica então definida

$$\overline{G}(\mu, \delta, 0) = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{G(\mu, \delta, c)}{(c-1)^2} = G(\mu, \delta) ,$$

onde a função $G(\mu, \delta)$ é aquela definida na Proposição 2.6.1.

Com os lemas e observações acima prova-se facilmente o seguinte corolário:

Corolário: $\overline{G}(\mu, \delta, c)$ é C^0 em $I_1 \times I_2 \times [0, 1]$.

Lema 2.6.5 $\frac{\partial \overline{G}}{\partial \mu}(\mu, \delta, c)$ é contínua no ponto $(0, 0, c)$ uniformemente em $c \in [0, 1]$.

Prova: Dado $\epsilon > 0$ e arbitrário, e fixado $\bar{c} \in]0, 1[$, correspondem vizinhanças abertas de zero, $J_1(\bar{c})$ e $J_2(\bar{c})$ e uma vizinhança $V(\bar{c})$ de $\bar{c}$ tais que

$$\left| \frac{\partial \overline{G}}{\partial \mu}(\mu, \delta, c) - \frac{\partial \overline{G}}{\partial \mu}(0, 0, \bar{c}) \right| < \epsilon$$

para todo $(\mu, \delta, c) \in J_1(\bar{c}) \times J_2(\bar{c}) \times V(\bar{c})$. Necessitamos, também, desigualdades análogas para os valores $\bar{c} = 0$ e $\bar{c} = 1$: caso isso ocorra, teremos, pela compacidade do intervalo

$[0,1]$, que $\frac{\partial \bar{G}}{\partial \mu}(\mu, \delta, c)$ é contínua no ponto $(0,0,c)$, uniformemente em $c \in [0,1]$, que é uma das condições exigidas nas hipóteses do Teorema das Funções Implícitas com Parâmetros (ver Apêndice B), para que possamos resolver $\bar{G}(\mu, \delta, c) = 0$ uniformemente em c . Vejamos inicialmente o que ocorre para $\bar{c} = 0$, isto é, estimemos

$$\left| \frac{\partial \bar{G}}{\partial \mu}(\mu, \delta, c) - \frac{\partial \bar{G}}{\partial \mu}(0, 0, 0) \right| .$$

Pela desigualdade

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \bar{G}}{\partial \mu}(\mu, \delta, c) - \frac{\partial \bar{G}}{\partial \mu}(0, 0, 0) \right| &\leq \left| \frac{\partial \bar{G}}{\partial \mu}(\mu, \delta, c) - \frac{\partial \bar{G}}{\partial \mu}(\mu, 0, c) \right| + \\ &+ \left| \frac{\partial \bar{G}}{\partial \mu}(\mu, 0, c) - \frac{\partial \bar{G}}{\partial \mu}(0, 0, c) \right| + \left| \frac{\partial \bar{G}}{\partial \mu}(0, 0, c) - \frac{\partial \bar{G}}{\partial \mu}(0, 0, 0) \right| \end{aligned}$$

e considerando-se a continuidade de $\frac{\partial \bar{G}}{\partial \mu}(\mu, \delta, c)$ para $0 < c < 1$, $(\mu, \delta) \in I_1 \times I_2$, vê-se que basta estimarmos a última parcela do segundo membro da expressão acima. Para tal, observando-se que (ver observação seguinte ao Lema 2.6.4)

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial \mu}(0, 0, 0) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\bar{G}(\mu, 0, 0) - \bar{G}(0, 0, 0)}{\mu} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{G(\mu, 0) - G(0, 0)}{\mu} = \frac{\partial G}{\partial \mu}(\mu, \delta) \big|_{(0,0)} ,$$

e que

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial \mu}(0, 0, c) = \frac{1}{(c-1)^2} \frac{\partial G}{\partial \mu}(0, 0, c) ,$$

pode-se derivar, com relação a μ , fazendo-se $\delta = 0$ previamente, sob o sinal de integral, as expressões (2.50), (2.51), (2.64) e (2.65), tendo-se em conta (2.46) e (2.61) e, a seguir, comparar-se as integrais resultantes correspondentes. Para ilustrar as idéias, derivemos $I_+(\mu, 0)$ e $I_+(\mu, 0, c)$, com relação a μ . A primeira integral, dada por $\int_0^{y_1^+(\mu)} \mu y_2 dy_1$, quando derivada em relação a μ e calculada no ponto $\mu = 0$, fornece

$$\int_0^{\frac{3}{2}} y_2(y_1, 0) dy_1 ,$$

como visto no lema 2.6.2; já a segunda integral, dada por $\int_c^{c_1^+} \mu y_2(y_2, c, \mu) dy_1$, se derivada com relação a μ , para $\mu = 0$, fornece

$$\int_c^{c_1} y_2(y_1, c, 0) dy_1 .$$

Com as estimativas do lema 2.6.4 tem-se que

$$\int_c^{c_1} y_2(y_1, c, 0) dy_1 \longrightarrow \int_0^{\frac{3}{2}} y_2(\mu, 0) dy_1 ,$$

quando $c \rightarrow 0$. Do mesmo modo mostra-se que $\frac{\partial I_-}{\partial \mu}(0, 0, c) \rightarrow \frac{\partial I_-}{\partial \mu}(0, 0)$, para $c \rightarrow 0$.

Daí é fácil ver que dado $\epsilon > 0$ e arbitrário,

$$\left| \frac{\partial \bar{G}}{\partial \mu}(0, 0, c) - \frac{\partial \bar{G}}{\partial \mu}(0, 0, 0) \right| < \frac{\epsilon}{3} ,$$

para c suficientemente pequeno.

As considerações acima implicam que, dado $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança $V(0)$ de zero, tal que

$$\left| \frac{\partial \bar{G}}{\partial \mu}(\mu, \delta, c) - \frac{\partial \bar{G}}{\partial \mu}(0, 0, 0) \right| < \epsilon$$

para todo $(\mu, \delta, c) \in I_1 \times I_2 \times V(0)$ (diminuídos I_1 e I_2 , quando necessário).

Resta, agora, provar que

$$\left| \frac{\partial \bar{G}}{\partial \mu}(\mu, \delta, c) - \frac{\partial \bar{G}}{\partial \mu}(0, 0, 1) \right| < \epsilon$$

para (μ, δ, c) suficientemente próximos de $(0, 0, 1)$. Para isso consideremos a desigualdade

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \bar{G}}{\partial \mu}(\mu, \delta, c) - \frac{\partial \bar{G}}{\partial \mu}(0, 0, 1) \right| &\leq \left| \frac{\partial \bar{G}}{\partial \mu}(\mu, \delta, c) - \frac{\partial \bar{G}}{\partial \mu}(\mu, 0, c) \right| + \\ &+ \left| \frac{\partial \bar{G}}{\partial \mu}(\mu, 0, c) - \frac{\partial \bar{G}}{\partial \mu}(0, 0, c) \right| + \left| \frac{\partial \bar{G}}{\partial \mu}(0, 0, c) - \frac{\partial \bar{G}}{\partial \mu}(0, 0, 1) \right| . \end{aligned}$$

As duas primeira parcelas do segundo membro dessa desigualdade são arbitrariamente pequenas para $|\mu|$ e $|\delta|$ suficientemente próximos de zero. Para a terceira parcela, mostraremos que

$$\lim_{c \rightarrow 1} \frac{\partial \overline{G}}{\partial \mu}(0, 0, c) = \frac{\partial \overline{G}}{\partial \mu}(0, 0, 1) .$$

De fato

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{G}}{\partial \mu}(0, 0, 1) &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\overline{G}(\mu, 0, 1) - \overline{G}(0, 0, 1)}{\mu} = \\ &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{2\mu} \left[\frac{\partial^2 G}{\partial c^2}(\mu, 0, 1) - \frac{\partial^2 G}{\partial c^2}(0, 0, 1) \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial^3 G}{\partial \mu \partial c^2}(0, 0, 1). \end{aligned}$$

Mas,

$$\lim_{c \rightarrow 1} \frac{\partial \overline{G}}{\partial \mu}(0, 0, c) = \lim_{c \rightarrow 1} \left[\frac{1}{(c-1)^2} \frac{\partial G}{\partial \mu}(0, 0, c) \right] ,$$

limite esse que, calculado utilizando-se a Regra de L'Hospital, tendo-se em mente a observação feita após o Lema (2.6.3), resulta ser também igual à

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^3 G}{\partial \mu \partial c^2}(0, 0, 1) .$$

Observe que a existência da derivada acima decorre da dependência diferenciável das soluções das equações diferenciais com relação a parâmetros e dados iniciais. Isso completa a prova do Lema 2.6.6. ■

Vamos então à prova do último Lema desta seção.

Lema 2.6.6 *Existem constantes K e k tais que $K > \frac{\partial \overline{G}}{\partial \mu}(\mu, \delta, c) |_{(0,0,c)} \geq k > 0$, para $0 \leq c \leq 1$.*

Prova: Da definição de $\overline{G}(\mu, \delta, c)$ tem-se

$$\frac{\partial \overline{G}}{\partial \mu}(\mu, \delta, c) |_{(0,0,c)} = \frac{2}{(c-1)^2} \int_c^{c_1} y_2(c, y_1) dy_1 ,$$

para $0 < c < 1$. Agora, das considerações feitas no Lema 2.6.5, segue que, quando $c \rightarrow 0$,

$$\frac{\partial \overline{G}}{\partial \mu}(0, 0, c) = \frac{2}{(c-1)^2} \int_c^{c_1} y_2(c, y_1) dy_1 \longrightarrow 2 \int_0^{\frac{3}{2}} y_2(y_1) dy_1 = \frac{\partial G}{\partial \mu}(0, 0).$$

Desse modo, a função $\frac{\partial \overline{G}}{\partial \mu}(\mu, \delta, c) |_{(0,0,c)}$ se estende continuamente até $c = 0$ e é estritamente positiva, para c variando no intervalo $[0, 1 - \xi]$, com $\xi > 0$ suficientemente pequeno, donde segue que tal função atinge, nesse intervalo, um valor mínimo m , que é estritamente positivo. Por outro lado, a integral $2 \int_c^{c_1} y_2(c, y_1) dy_1$ é exatamente a área sob a curva fechada dada pela órbita de (2.34)-(2.35) com $\mu = \delta = 0$, passando por $(c, 0)$. Tal curva é dada pela expressão $H(y_1, y_2) = H(c, 0)$, que também pode ser escrita da forma (ver prova do Lema 2.6.3)

$$H(y_1, y_2) + \frac{1}{6} = \frac{y_2^2}{2} + \frac{1}{6}(2y_1 + 1)(y_1 - 1)^2 = \frac{1}{6}(2c + 1)(c - 1)^2 = H(c, 0) + \frac{1}{6}.$$

Assim, para c próximo de 1, digamos $1 - \xi \leq c \leq 1$, segue da expressão acima que tais órbitas são aproximadamente as curvas

$$\frac{y_2^2}{2} + \frac{(y_1 - 1)^2}{2} \approx H(c, 0) + \frac{1}{6} \approx \frac{(c - 1)^2}{2}.$$

cuja área é aproximadamente $\pi(c - 1)^2$. Logo, para c próximo de 1,

$$\frac{\partial \overline{G}}{\partial \mu}(\mu, \delta, c) |_{(0,0,c)} = \frac{2}{(c-1)^2} \int_c^{c_1} y_2(c, y_1) dy_1 \approx \pi.$$

Com isso fica provado que, para $0 \leq c \leq 1$, a derivada da função $\overline{G}$ com relação a μ , calculada no ponto $(0, 0, c)$, é estritamente positiva (de fato, é maior que $k = \min\{m, \pi - \lambda\}$, para algum λ suficientemente pequeno). De modo inteiramente análogo prova-se a existência de K . ■

Das considerações acima segue, pelo Teorema das Funções Implícitas com Parâmetros (ver Apêndice B), que podemos resolver a equação $\overline{G}(\mu, \delta, c) = 0$ (e, conseqüentemente,

$G(\mu, \delta, c) = 0$), para μ como função de δ e c , $0 \leq c \leq 1$ e $\delta \in I_2$, e tal que $\mu(0, c) = 0$. As propriedades de diferenciabilidade de $\overline{G}(\mu, \delta, c)$ para μ e δ no interior dos intervalos I_1 e I_2 , respectivamente, e $c \in]0, 1[$, garantem que a função $\mu = \mu(\delta, c)$ é diferenciável, para δ pertencente ao interior do intervalo I_2 e $c \in]0, 1[$.

Provamos assim que, para cada $\delta \in I_2$ suficientemente pequeno fixo, existe para o sistema (2.34)-(2.35) uma órbita periódica passando pelo ponto $(c, 0)$, $0 < c < 1$, desde que se substitua μ por $\mu(\delta, c)$ naquele sistema. Na próxima seção consideraremos a questão da unicidade dessas órbitas periódicas.

2.6.3 Unicidade das Órbitas Periódicas

Mostraremos agora que, para cada δ suficientemente pequeno fixo, as órbitas periódicas do sistema (2.34)-(2.35), cuja existência demonstramos na seção anterior, são, na realidade, únicas. Inicialmente deduziremos uma expressão aproximada para a função $\mu(\delta, c)$ que resolve $G(\mu, \delta, c) = 0$. Para tanto, vamos calcular $\frac{\partial \mu}{\partial \delta}(0, c)$ utilizando a equação (2.61). Derivando $G(\mu(\delta, c), \delta, c) = 0$ com relação a δ , calculada em $\mu = \delta = 0$, temos $\frac{\partial}{\partial \delta}G(0, 0, c) = 0$, ou seja,

$$\frac{\partial G}{\partial \mu}(0, 0, c) \frac{\partial \mu}{\partial \delta}(0, c) + \frac{\partial G}{\partial \delta}(0, 0, c) = 0 ,$$

já que $\mu(0, c) = 0$, donde segue que:

$$\frac{\partial \mu}{\partial \delta}(0, c) = - \frac{\frac{\partial G}{\partial \delta}(0, 0, c)}{\frac{\partial G}{\partial \mu}(0, 0, c)}$$

Efetuando-se os cálculos acima, considerando-se $y_2 = y_2(y_1, \mu)$. obtem-se:

$$\frac{\partial \mu}{\partial \delta}(0, c) = - \frac{2 \int_c^{c_1^+} \eta y_1 y_2 \, dy_1}{2 \int_c^{c_1^+} y_2 \, dy_1} = - \eta \frac{\int_c^{c_1^+} y_1 y_2 \, dy_1}{\int_c^{c_1^+} y_2 \, dy_1} .$$

Observação: Note-se que, para $0 < c < 1$ tem-se

$$\frac{\partial \overline{G}}{\partial c}(\mu, \delta, c) \big|_{(0,0,c)} = 0 .$$

Logo, o desenvolvimento de Taylor, até primeira ordem, de $\mu = \mu(\delta, c)$ em torno do ponto $(0, c)$ é dado por:

$$\mu(\delta, c) = \mu(0, c) + \frac{\partial \mu}{\partial \delta}(0, c)\delta + O(\delta^2) = -\delta \eta \frac{\int_c^{c_1^+} y_1 y_2 dy_1}{\int_c^{c_1^+} y_2 dy_1} + O(\delta^2) .$$

Chamaremos $P(c)$ o coeficiente do termo $\delta\eta$ na expressão acima, isto é,

$$P(c) = \frac{\int_c^{c_1^+} y_1 y_2 dy_1}{\int_c^{c_1^+} y_2 dy_1} .$$

A seguir mostraremos que a função $\mu(\delta, c)$ é estritamente monótona em sua dependência do parâmetro c , mostrando que $P'(c) > 0$ para $0 < c < 1$. Utilizaremos para tal o seguinte resultado:

Afirmção: $P(0) = \frac{6}{7}$ e $\lim_{c \rightarrow 1} P(c) = 1$.

Prova: Já vimos, após a prova da Proposição 2.6.1, que $P(0) = \frac{6}{7}$ (ver (2.57)). Mostremos agora que $\lim_{c \rightarrow 1} P(c) = 1$. Com efeito

$$\left| \int_c^{c_1} y_1 y_2 dy_1 - \int_c^{c_1} y_2 dy_1 \right| = \left| \int_c^{c_1} y_2 (y_1 - 1) dy_1 \right| \leq \int_c^{c_1} |y_1 - 1| y_2 dy_1 \leq (c_1 - c) \int_c^{c_1} y_2 dy_1 ,$$

donde

$$\frac{\left| \int_c^{c_1} y_1 y_2 dy_1 - \int_c^{c_1} y_2 dy_1 \right|}{\int_c^{c_1} y_2 dy_1} \leq (c_1 - c) .$$

Logo,

$$\left| \frac{\int_c^{c_1} y_1 y_2 dy_1}{\int_c^{c_1} y_2 dy_1} - 1 \right| = \frac{\left| \int_c^{c_1} y_1 y_2 dy_1 - \int_c^{c_1} y_2 dy_1 \right|}{\int_c^{c_1} y_2 dy_1} \leq (c_1 - c) .$$

Tomando-se o limite, quando $c \rightarrow 1$, na expressão acima, segue o resultado. ■

Provemos então o seguinte Lema (ver também [9] - pgs. 345 e 346):

Lema 2.6.7 $P'(c) > 0$ para $0 < c < 1$.

Prova: A função $P(c)$ é dada pelo quociente de integrais tomadas sobre a porção da órbita de (2.34)-(2.35), com $\mu = \delta = 0$, que passa por $y_1 = c, y_2 = 0$, com $y_2 \geq 0$. Observando que tal órbita corresponde à curva de nível de H (dada por (2.38)) que passa pelo ponto $(c, 0)$, tem-se a seguinte expressão para y_2 (ver (2.67)):

$$y_2(c, y_1) = + \sqrt{y_1^2 - \frac{2}{3}y_1^3 - c^2 + \frac{2}{3}c^3}.$$

Definamos:

$$Y = y_2(c, y_1) \quad e \quad \frac{2}{3}c^3 - c^2 = b.$$

Note que, dessa forma, mostrar que $P'(c) > 0$ para $0 < c < 1$ é equivalente a mostrar que $P'(b) < 0$ para $-\frac{1}{3} < b < 0$, que é o que faremos a seguir. Observemos inicialmente que $P(c)$ é exatamente a coordenada y_1 do centro de gravidade da curva sobre a qual são tomadas as integrais que aparecem na sua definição. Denotemos por $\bar{y}_1$ essa coordenada (isto é, $\bar{y}_1 = P(c)$, para cada c fixo). Por outro lado, temos que $\int_c^{c_1} Y \, dy_1$ é a área sob a curva Y . Denotemos por $\frac{m}{2}$ tal integral. Desse modo teremos:

$$\frac{m}{2} \frac{d\bar{y}_1}{db} = \frac{d}{db} \left[\frac{m}{2} \bar{y}_1 \right] - \frac{1}{2} \frac{dm}{db} \bar{y}_1 = \int_c^{c_1} \frac{y_1 - \bar{y}_1}{2Y} \, dy_1.$$

Como $YY' = (y_1(1 - y_1))$, temos que

$$(\bar{y}_1 - 1) \frac{m}{2} = \int_c^{c_1} (y_1 - 1)Y \, dy_1 = - \int_c^{c_1} \frac{Y^2 Y'}{y_1} \, dy_1 = - \int_c^{c_1} \frac{Y^3}{3y_1^2} \, dy_1 < 0,$$

donde se conclui que $\bar{y}_1 < 1$. Vimos ainda que $\bar{y}_1 = \frac{6}{7}$ se $b=0$, e $\bar{y}_1 \rightarrow 1$ quando $b \rightarrow -\frac{1}{3}$.

Como

$$\int_c^{c_1} (y_1 - \bar{y}_1)Y \, dy_1 = \int_c^{c_1} y_1 Y \, dy_1 - \bar{y}_1 \int_c^{c_1} Y \, dy_1 = 0,$$

integrando por partes essa igualdade, obtemos:

$$\int_c^{c_1} (y_1 - \bar{y}_1) Y \, dy_1 = \int_c^{c_1} \frac{(y_1 - \bar{y}_1)^2}{2} \frac{(y_1 - y_1^2)}{Y} \, dy_1 .$$

É claro que $\bar{y}_1 \in]c, c_1[$. Definindo então $\bar{Y}^2 = Y^2(\bar{y}_1)$, tem-se:

$$\begin{aligned} \bar{Y}^2 \frac{m}{2} \frac{d\bar{y}_1}{db} &= \bar{Y}^2 \int_c^{c_1} \frac{(y_1 - \bar{y}_1)}{2Y} \, dy_1 - \frac{1}{2} \int_c^{c_1} (y_1 - \bar{y}_1) Y \, dy_1 + \\ &\quad + \frac{2}{3} (\bar{y}_1 + \frac{1}{2}) \int_c^{c_1} \frac{(y_1 - \bar{y}_1)^2}{2} \frac{(y_1 - y_1^2)}{Y} \, dy_1 = \\ &= (\bar{y}_1^2 - \frac{2}{3} \bar{y}_1^3 + b) \int_c^{c_1} \frac{(y_1 - \bar{y}_1)}{2Y} \, dy_1 - \frac{1}{2} \int_c^{c_1} \frac{(y_1 - \bar{y}_1) Y^2}{Y} \, dy_1 + \\ &\quad + \frac{2}{3} (\bar{y}_1 + \frac{1}{2}) \int_c^{c_1} \frac{(y_1 - \bar{y}_1)^2}{2} \frac{(y_1 - y_1^2)}{Y} \, dy_1 = \\ &= -(\bar{y}_1 - \frac{1}{2}) \int_c^{c_1} \frac{(y_1 - \bar{y}_1)^2}{3Y} (y_1 - 1)^2 \, dy_1 - \int_c^{c_1} \frac{(y_1 - \bar{y}_1)^2}{3Y} (1 - \bar{y}_1) (\bar{y}_1 + \frac{1}{2}) \, dy_1 . \end{aligned}$$

Mas, $0 < \bar{y}_1 \leq 1$ para $-\frac{1}{3} \leq b \leq 0$ e, portanto, da igualdade acima tem-se que:

$$\frac{d\bar{y}_1}{db} \leq -q(b) (\bar{y}_1 - \frac{1}{2}), \quad (2.77)$$

onde

$$q(b) = \left(\frac{1}{\bar{Y}^2 \frac{m}{2}} \right) \int_c^{c_1} \frac{(y_1 - \bar{y}_1)^2}{3Y} (y_1 - 1)^2 \, dy_1 \geq 0 .$$

Consideremos agora a seguinte função:

$$f(b) = (\bar{y}_1 - \frac{1}{2}) \exp \left(\int_0^b q(\nu) d\nu \right) .$$

Calculando sua derivada com relação a b , segue de (2.77) que $f'(b) \leq 0$, o que mostra ser f decrescente para $-\frac{1}{3} \leq b \leq 0$. Como, para $b = 0, \bar{y}_1 - \frac{1}{2} = \frac{5}{14} > 0$, então $f(0) = \frac{5}{14} > 0$, donde $\bar{y}_1 > \frac{6}{7}$ para $-\frac{1}{3} \leq b < 0$. Logo, $\frac{d\bar{y}_1}{db} < 0$ para $-\frac{1}{3} < b < 0$. Conclui-se assim que $\bar{y}_1$ decresce monotonicamente de 1 a $\frac{6}{7}$, quando b vai de $-\frac{1}{3}$ até

0 (ou, equivalentemente, $\bar{y}_1$ cresce de $\frac{6}{7}$ a 1, quando c vai de zero a 1, como queríamos demonstrar). ■

Desse modo, ficou provado que, como a função $P(c)$, definida para $0 < c < 1$, é estritamente crescente, $\mu(\delta, c) = -\delta\eta P(c) + O(\delta^2)$ é estritamente decrescente, como função de c , para $0 < c < 1$. Considerando-se então o espaço- (y_1, y_2, μ) , para todo δ suficientemente pequeno fixo, o sistema (2.34)-(2.35), acrescido da equação $\dot{\mu} = 0$, possui uma única órbita periódica que passa pelo ponto $(c, 0, \mu(\delta, c))$, $0 < c < 1$, em que c é a coordenada y_1 dessa órbita, no plano- (y_1, y_2) , quando ela passa pelo eixo $y_2 = 0$, com $\dot{y}_2 > 0$ (ver figura 17). Das considerações feitas anteriormente (veja, por exemplo, a figura 13), segue que tal órbita é um ciclo-limite estável. Na próxima seção estudaremos questões globais relativas à continuação dessas órbitas periódicas.

2.6.4 Continuação das Órbitas Periódicas

Mostraremos nesta subseção que as órbitas periódicas acima, consideradas para cada δ suficientemente, tendem (como conjunto) para a órbita homoclínica dada na Proposição 2.6.1. Para tanto, tendo em mente o que foi feito até aqui, basta mostrarmos que, quando $c \rightarrow 0$, $\mu(\bar{\delta}, c) \rightarrow \mu(\bar{\delta})$, para cada $\bar{\delta}$ fixo, suficientemente pequeno. Isto é, devemos mostrar que $\mu(\delta, c)$ é contínua em relação a c , no ponto $c = 0$. Lembremos que tais funções foram obtidas através do Teorema das Funções Implícitas, aplicado às equações $G(\mu, \delta) = 0$ e $G(\mu, \delta, c) = 0$, respectivamente. Usaremos isso, juntamente com o Lema 2.6.4, para demonstrar que, de fato, $\mu(\bar{\delta}, c) \rightarrow \mu(\bar{\delta})$, quando $c \rightarrow 0$.

Inicialmente, tomemos δ_0 suficientemente pequeno de tal forma que $\mu(\delta, c)$ e $\mu(\delta)$ estejam definidas para todo δ tal que $|\delta| < \delta_0$ (isto é possível, pois $\mu(\delta, c)$ está definida para $0 < c < 1$ e δ pertencente a I_2 , que é uma vizinhança da origem, independente de c ; por outro lado, $\mu(\delta)$ também está definida para δ numa vizinhança da origem). Pelo Lema 2.6.7, $\mu(\delta, c)$ é decrescente na variável c . Essa função é também limitada, pois

$$|\mu(\delta, c)| \leq |-\delta\eta P(c)| + |O(\delta^2)| \leq \delta\eta + M\delta^2 < 1,$$

para δ suficientemente pequeno. Logo, para todo $\bar{\delta}$ fixo, com $|\bar{\delta}| < \delta_0$, existe $\lim_{c \rightarrow 0} \mu(\bar{\delta}, c) = \varphi(\bar{\delta})$, donde segue, pelo Lema 2.6.4, que:

$$0 = \lim_{c \rightarrow 0} G(\mu(\bar{\delta}, c), \bar{\delta}, c) = G(\varphi(\bar{\delta}), \bar{\delta}).$$

Por outro lado, da Proposição 2.6.1, tem-se $G(\mu(\bar{\delta}), \bar{\delta}) = 0$. Logo, da unicidade da função $\mu(\delta)$ obtida através do Teorema das Funções Implícitas, tem-se que $\mu(\bar{\delta}) = \varphi(\bar{\delta})$, ou seja,

$$\mu(\bar{\delta}, c) \longrightarrow \mu(\bar{\delta}),$$

quando $c \rightarrow 0$. Provamos assim, que as órbitas periódicas que passam pelos pontos $(c, 0)$, associadas a um $\bar{\delta}$ fixo, suficientemente pequeno, tendem para a órbita homoclínica dada pela Proposição 2.6.1, correspondente ao mesmo $\bar{\delta}$, quanto $c \rightarrow 0$.

Analisemos agora o caso em que $c \rightarrow 1$. Como a função $\mu(\delta, c)$ está definida para $0 < c < 1$, é estritamente decrescente na variável c , e limitada, pode-se concluir que, quando $c \rightarrow 1$, as órbitas periódicas tendem para o ponto de equilíbrio $(1, 0)$. Olhando agora para a jacobiana do sistema, aplicada nesse ponto, observa-se que os autovalores são complexos conjugados e que o traço dessa matriz é dado por $\text{tr}[DX(1, 0)] = \mu + \delta\eta + O_4(\delta^2)$. Dessa forma, para δ suficientemente pequeno, fixo, o traço se anula quando $\mu = -\delta\eta - O_4(\delta^2)$ e, além disso, considerando-se os autovalores como funções do parâmetro μ , teremos:

$$\frac{d\text{Re}(\lambda(\mu))}{d\mu} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Logo, pelo Teorema de Hopf (ver [10], pg. 65), ocorre uma bifurcação do tipo Hopf no ponto de equilíbrio $(1, 0)$, exatamente quando o traço se anula. Dessas considerações e da unicidade das órbitas periódicas estudadas na seção anterior, segue que aquelas órbitas são originadas dessa bifurcação de Hopf e existem até tenderem para a órbita homoclínica, depois do que, deixam de existir. Conclui-se, desse modo, que o período dessas órbitas periódicas tende, necessariamente, para ∞ , quando estas se aproximam da órbita homoclínica.

Analisemos, por outro lado, a função $\mu(\delta, c)$, quando $c \rightarrow 1$. Vimos que $\lim_{c \rightarrow 1} P(c) = 1$, donde segue que, para cada δ suficientemente pequeno, fixo, $\mu(\delta, c) \rightarrow -\delta\eta + O(\delta^2)$.

quando $c \rightarrow 1$. Assim, de (2.57) e das considerações acima, as expressões

$$\mu(\delta, 1) = -\delta\eta + O(\delta^2) \quad e \quad \mu(\delta, 0) = -\frac{6}{7}\delta\eta + O(\delta^2) \quad (2.78)$$

forneem, no plano (μ, δ) , uma boa aproximação para as curvas correspondentes à H e L, mostradas na figura 3. Em resumo, se η for mantido fixo no sistema (2.34)-(2.35), então, para todo δ suficientemente pequeno, fixo, pode-se afirmar que se (μ, δ) está sobre a curva H, ocorre uma bifurcação de Hopf no ponto $(1, 0)$; e, se (μ, δ) está sobre a curva L, existe uma órbita homoclínica relativa ao ponto $(0, 0)$ (veja figuras 16 e 20).

figura 16

Com os lemas e considerações apresentados até aqui, fica provada a seguinte proposição (ver [9], Lema 7.2 - pg.336):

Proposição 2.6.8 *Seja δ suficientemente pequeno, fixo. Se considerarmos o desdobramento do sistema (2.34)-(2.35) (acrescentando a este a equação $\dot{\mu} = 0$), então existe, no espaço- (y_1, y_2, μ) , uma superfície bi-dimensional, invariante, formada por órbitas periódicas do sistema. Essa superfície é parametrizada por t e c , sendo c a coordenada y_1 da órbita periódica, no plano- (y_1, y_2) , quando esta encontra o eixo $y_2 = 0$, com $\dot{y}_2 > 0$.*

Mais ainda, quando $c \rightarrow 0$, as órbitas periódicas que formam a superfície tendem para a órbita homoclínica dada pela Proposição (2.6.1) e, por outro lado, quando $c \rightarrow 1$, as órbitas tendem para o ponto de equilíbrio $(1,0)$.

Para uma visualização do resultado acima, veja a figura 17.

figura 17

2.6.5 Órbitas Heteroclínicas

Mostraremos agora que, para aqueles valores de μ tais que $\mu > \mu(\delta) = -\frac{6}{7}\delta\eta + O(\delta^2)$ e $\mu < -\delta\eta + O(\delta^2)$, o sistema possui órbitas do tipo heteroclínica. Com efeito, a função $G(\mu, \delta) = H(y_1^+, 0) - H(y_1^-, 0)$ é crescente como função de μ , para μ suficientemente pequeno, e é tal que $G(\mu(\delta), \delta) = 0$. Logo, para cada δ suficientemente pequeno, fixo, se $\mu > \mu(\delta)$, então $G(\mu, \delta) > 0$, donde $H(y_1^+, 0) - H(y_1^-, 0) > 0$, e, portanto, de $H(y_1, y_2)$

ser crescente na variável y_1 , para $y_1 > 1$, tem-se $y_1^+ > y_1^-$. Por outro lado, do Lema 2.6.7, $\mu(\delta, c) = -\delta\eta P(c) + O(\delta^2) < -\frac{6}{7}\delta\eta + O(\delta^2) = \mu(\delta)$. Assim, para os valores de μ tais que $\mu > -\frac{6}{7}\delta\eta + O(\delta^2)$, não existem órbitas periódicas para o sistema (2.34)-(2.35), envolvendo a origem, donde pode-se concluir, através do Teorema de Poincaré-Bendixson, que, neste caso, um esboço do retrato de fase do sistema é o apresentado na figura 18.

Consideremos agora o caso $\mu < -\delta\eta + O(\delta^2)$. Já vimos anteriormente que, neste caso, $y_1^+ < y_1^-$. Do que foi provado sobre a função $\mu(\delta, c)$, que dá uma caracterização das órbitas periódicas do sistema, pelo menos para μ e δ suficientemente pequenos, podemos concluir que, neste caso, não existem órbitas periódicas envolvendo a origem. Sendo assim, pode-se concluir, utilizando-se novamente o Teorema de Poincaré-Bendixson, que um esboço do plano de fase do sistema (2.34)-(2.35) é o mostrado na figura 19.

figura 18: Esboço do Plano de Fase de (2.34)-(2.35), para $\mu > -\frac{6}{7}\delta\eta + O(\delta^2)$

figura 19: Esboço do Plano de Fase de (2.34)-(2.35), para μ tais que $\mu < -\delta\eta + O(\delta^2)$

Concluimos esta seção com a figura 20, que mostra um diagrama de bifurcação para o sistema (2.34)-(2.35), para μ e δ numa vizinhança da origem.

figura 20: Diagrama de Bifurcação para o sistema (2.34)-(2.35)

Na próxima seção faremos uma análise qualitativa dos resultados obtidos.

2.7 Uma Análise Qualitativa dos Resultados

Nesta seção será feita uma análise dos resultados obtidos no capítulo dois, em função dos parâmetros iniciais do modelo de hiperinflação dado pelas equações (2.2)-(2.3).

Iremos inicialmente inverter o *scaling* definido na seção 2.5.1, visando obter μ e δ em função dos parâmetros f , k , β e γ . Assim, pelas expressões sugeridas por (2.20), e pela expressão (2.26), temos:

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= k - \beta \ln(x_{\mathcal{A}}) - \beta \\ \epsilon_2 &= \gamma - \frac{f}{x_{\mathcal{A}}}\end{aligned}$$

e também

$$\delta = \left| \frac{\epsilon_1}{\alpha} \right|^{\frac{1}{2}}, \quad \mu = \frac{\epsilon_2}{|\alpha|^{\frac{1}{2}} \delta}, \quad \alpha = -\frac{\beta}{2x_{\mathcal{A}}}.$$

Podemos então obter

$$\mu = \frac{\gamma - \frac{f}{x_{\mathcal{A}}}}{\delta |\alpha|^{\frac{1}{2}}} \quad (2.79)$$

além do que, no estudo do sistema (2.30)-(2.31),

$$\eta = \frac{f}{x_{\mathcal{A}}^2} |\alpha|^{-\frac{1}{2}}$$

foi mantido fixo. Levando-se isso em conta, e substituindo-se o valor de α na expressão de η , obtem-se

$$x_{\mathcal{A}} = \left(\frac{2f^2}{\beta\eta^2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.80)$$

Considerando-se agora a expressão de η e eliminando-se $|\alpha|^{\frac{1}{2}}$ em (2.79), podemos escrever

$$\mu = \frac{\eta}{\delta} \left(\frac{\gamma}{f} x_{\mathcal{A}}^2 - x_{\mathcal{A}} \right) , \quad (2.81)$$

que, juntamente com (2.80), fornece:

$$\mu = \frac{\eta}{\delta} \left[\frac{\gamma}{f} \left(\frac{2f^2}{\beta\eta^2} \right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{2f^2}{\beta\eta^2} \right)^{\frac{1}{3}} \right] \quad (2.82)$$

Essa expressão de μ e as curvas de bifurcação visualizadas na figura 20, respeitada a desigualdade (2.5), permitir-nos-ão proceder a uma análise da dinâmica da economia, focalizada pelo modelo em questão.

Em correspondência às várias situações qualitativas da dinâmica do modelo, apresentadas na figura 20 (considerando-se os parâmetros μ e δ), existem, no plano- (x, y) , retratos de fase da equação (2.2)-(2.3) que definem, claramente, quais as evoluções temporais ideais de uma economia estável do ponto de vista de inflação controlada, bem como aquelas que levam a situações de hiperinflação, para a quase totalidade das condições iniciais. As figuras 21 e 22 a seguir ilustram os planos de fase (x, y) corres-

pondentes às diferentes regiões definidas pelas curvas H e L (fig.20).

figura 21: Plano de fase de (2.2)-(2.3) para valores dos parâmetros tais que:

$$(a) \mu \leq -\delta\eta + O(\delta^2) \quad (b) -\delta\eta + O(\delta^2) < \mu < -\frac{6}{7}\delta\eta + O(\delta^2) .$$

figura 22: Plano de fase de (2.2)-(2.3) para valores dos parâmetros tais que:

$$(a) \mu = -\frac{6}{7}\delta\eta + O(\delta^2) \quad (b) \mu > -\frac{6}{7}\delta\eta + O(\delta^2) .$$

A expressão (2.82) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mu = \frac{\eta}{\delta} \left[\gamma^{\frac{1}{3}} f^{\frac{1}{3}} \left(\frac{2\gamma}{\beta\eta^2} \right)^{\frac{2}{3}} - f^{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{\beta\eta^2} \right)^{\frac{1}{3}} \right] .$$

Usando-se agora (2.1), temos

$$\mu = \frac{\eta}{\delta} \left[\gamma^{\frac{1}{3}} f^{\frac{1}{3}} \left(\frac{2c}{\eta^2 b} \right)^{\frac{2}{3}} - \frac{f^{\frac{2}{3}}}{\gamma^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{2c}{\eta^2 b} \right)^{\frac{1}{3}} \right] ,$$

ou ainda

$$\mu = \frac{\eta}{\delta} \left(A\gamma^{\frac{1}{3}} f^{\frac{1}{3}} - B \frac{f^{\frac{2}{3}}}{\gamma^{\frac{1}{3}}} \right), \quad (2.83)$$

em que A e B só dependem de b , c , e η , que, juntamente com δ , são todos supostos fixos. A expressão acima mostra a dependência de μ com relação a γ e a f . Admitindo-se, por um instante, que o déficit público f esteja fixo, num certo intervalo que determinaremos adiante, obtem-se a seguinte expressão para μ como função de γ :

$$\mu = A_1 \Gamma - \frac{B_1}{\Gamma}, \quad (2.84)$$

em que $\Gamma = \gamma^{\frac{1}{3}}$, e A_1 e B_1 só dependem de b , c , η , δ e f , todos supostos fixos. A figura 23 dá um esboço dessa dependência de μ como função de γ .

figura 23

Da figura acima constata-se que, para γ suficientemente pequeno, obtem-se μ abaixo da curva H, isto é, na região 1, mostrada na figura 20; isso implica em que a dinâmica das trajetórias do modelo corresponde a uma situação altamente desejável, do ponto de vista econômico (veja também a figura 21). Por outro lado, o aumento de γ faz com

que μ aumente, passando-se da região 1 para as regiões 2 e 3 (fig.20), sucessivamente, obtendo-se portanto situações tanto menos desejáveis quanto maior for o valor de γ (veja também as figuras 21 e 22). Estamos, agora, em condições de analisar o efeito do prazo médio do ajuste de salários na dinâmica da economia; com efeito, da expressão (2.1) sabemos que $\gamma = \frac{cd}{m}$, onde m representa o prazo médio do ajuste de salário dos trabalhadores, e portanto, quando γ diminui em virtude do aumento do prazo médio m , a situação econômica melhora, em contraposição à uma redução exagerada desse prazo médio, que pode levar a situações de hiperinflação (região 3), em consequência do aumento de γ .

Da expressão (2.83) segue também que é possível analisar a dependência de μ com relação ao déficit público f , supondo-se constantes os demais parâmetros, isto é, obtem-se facilmente a expressão

$$\mu = A_2 F - B_2 F^2 \quad (2.85)$$

em que $F = f^{\frac{1}{3}}$, e as constantes A_2 e B_2 dependem somente de γ , η , b , c , e δ . A figura 24 mostra a dependência de $\mu = \mu(f)$.

figura 24

Tendo em vista (2.1), a igualdade (2.5) se escreve

$$\frac{a}{b} \geq \left[1 + \ln\left(\frac{fc}{b}\right) \right]$$

expressão cuja igualdade fornece um extremo superior para a variação de f , isto é,

$$f_3 = \frac{b}{c} \exp\left(\frac{a}{b} - 1\right). \quad (2.86)$$

(ver figura 24). Um extremo inferior f_2 , economicamente razoável, para a variação de f , pode ser obtido quando (μ, δ) está sobre a curva L (figura 20), isto é, f_2 é determinado, aproximadamente, pela seguinte igualdade:

$$-\frac{6}{7}\delta\eta + O(\delta^2) = A_2 f_2^{\frac{1}{3}} - B_2 f_2^{\frac{2}{3}}.$$

Olhando para a figura 24, e tendo em mente as expressões (2.83) e (2.86), pode-se concluir que, para $\bar{\delta}$ suficientemente pequeno, o par $(\mu(f_3), \bar{\delta})$ localiza-se na região 1 da figura 20, enquanto que $(\mu(f_2), \bar{\delta})$ está sobre a curva L. Portanto, com a redução de f no intervalo aberto $]f_2, f_3[$, o par $(\mu(f), (\bar{\delta}))$ passa da região 1 para a região 2 (fig.20), como mostra a figura 24; porém, uma redução ainda maior de f , que pela figura 1 poderia parecer benéfica, já que provocaria uma redução da inflação do ponto de equilíbrio B , torna-se, na verdade, indesejável, pois o par $(\mu(f), \bar{\delta})$ passaria para a região 3, de hiperinflação para a quase totalidade das condições iniciais, no plano de fase correspondente. Isso mostra a importância da órbita homoclínica, como elemento limitador, na dinâmica do modelo estudado. Em resumo, da figura 24 e das considerações acima, podemos concluir que a estratégia econômica desejável consiste em procurar reduzir-se ao máximo o déficit público, situando-o no intervalo $]f_2, f_3[$ e buscando deslocar a terna (f_1, f_2, f_3) para valores cada vez menores de f_1 , dado por

$$f_1^{\frac{1}{3}} = \frac{A_2}{B_2} = \gamma^{\frac{2}{3}} \left(\frac{2c}{\eta^2 b} \right)^{\frac{1}{3}},$$

através da redução de γ . Observe-se que o valor de f_2 também decresce com γ , como pode ser visto pela expressão (2.83), que fornece

$$f_2^{\frac{1}{3}} = \frac{A\gamma^{\frac{2}{3}} + \sqrt{A^2\gamma^{\frac{1}{3}} + 4B\gamma^{\frac{1}{3}}\frac{6}{7}\delta^2 + O(\delta^2)}}{2B}.$$

O comportamento das trajetórias do sistema, com a variação do parâmetro f , pode ser observado nas simulações numéricas apresentadas no apêndice A.

Com o objetivo de enriquecer e complementar o estudo aqui apresentado, citamos abaixo uma pequena e interessante parte da análise (de caráter econômico) do modelo de hiperinflação, efetuada em [3]:

”O modelo apresentado e analisado até aqui é capaz de explicar alguns fatos observados em economias com uma longa tradição inflacionária, como é o caso da economia brasileira e de outras economias latino-americanas, que têm usado de maneira sistemática a emissão de moeda para financiar as despesas do governo. As principais conclusões de nossa análise são enumeradas a seguir:

- a) Este modelo mostra que a hiperinflação não ocorre somente quando o déficit público ultrapassa o nível que seria incompatível com o seu financiamento pela expansão monetária. A economia pode entrar num processo hiperinflacionário mesmo que exista um ponto de equilíbrio estacionário para a taxa de inflação, consistente com um déficit público financiado pela emissão de moeda;
- b) A dinâmica de uma economia que usa de maneira permanente a emissão de moeda para financiar o déficit público é bastante complexa e instável em sua estrutura. Esta característica explica porque os países que adotam o regime em que a política monetária é determinada pela política fiscal acabam por introduzir mecanismos de controle de preços e salários. Estes controles têm como objetivo não deixar que a economia entre em trajetórias inflacionárias explosivas;
- c) A liberação de preços e salários numa economia com déficit público financiado sistematicamente por moeda pode eventualmente levar a trajetórias hiperinflacionárias. A

pré-condição para a liberação de preços e salários é desvincular a política monetária da política fiscal, mudando-se o regime das políticas monetária-fiscal;

d) Numa economia com déficit público financiado por moeda o fato de que a inflação está num determinado patamar pode levar alguns analistas a interpretar a inflação como um fenômeno de auto-reprodução – no jargão dos heterodoxos a inflação é inercial – e recomendarem um choque, através do congelamento de preços e salários, para eliminá-la. O modelo mostra que nestas circunstâncias um choque na economia pode levá-la a uma trajetória hiperinflacionária;

e) O prazo médio de ajuste dos salários, que depende dos mecanismos de indexação, embora não afete os pontos de equilíbrio estacionários do sistema, é importante na determinação da dinâmica da economia. Quando os salários se ajustam rapidamente a possibilidade de a economia entrar numa trajetória hiperinflacionária é maior. Por outro lado, quando os salários se ajustam mais lentamente, a economia pode eventualmente localizar-se numa região mais estável. ”

Observações: i) Note-se a relação dos itens (a) e (e) acima com as considerações apresentadas na análise qualitativa do sistema, que fizemos nesta seção;

ii) Observe-se a interessante relação do item (d) com a existência de órbitas periódicas para o sistema;

iii) A consideração de perturbações, tanto determinísticas quanto estocásticas, do modelo apresentado, pode vir a corroborar fortemente com as afirmações do item (b), pois estas perturbações podem levar a um comportamento caótico das trajetórias de um sistema arbitrariamente próximo daquele que representa o modelo, haja vista a existência de órbitas homoclínicas, demonstrada aqui.

Concluimos assim que as expressões para as curvas L e H, mesmo não sendo convenientemente tratáveis, do ponto de vista quantitativo, ao efetuarmos a inversão dos parâmetros, nos permitiram obter importantes resultados qualitativos sobre a dinâmica

do modelo, com os quais pudemos provar as conjecturas anteriores.

No apêndice a seguir mostramos alguns dos planos de fase obtidos numericamente para o sistema (2.2)-(2.3).

Apêndice A

Simulações Numéricas

Neste apêndice mostramos alguns dos retratos de fase que obtivemos numericamente para o sistema (2.2)-(2.3). Para se obter as figuras apresentadas, foi utilizado o software *PHASER - An Animator/Simulator for Difference and Differential Equations for IBM-PC* [8], através do qual as soluções do sistema foram computadas utilizando-se o Método de Runge-Kutta de quarta ordem, com passo tamanho 0.05, e com as variáveis x e y variando nos intervalos $[-2, 30]$ e $[-4, 9]$, respectivamente. Esse é um dos métodos mais conhecidos e utilizados no estudo de sistemas de equações diferenciais ordinárias e, na maioria dos casos, fornece bons resultados. Observe nas figuras seguintes os comportamentos para as trajetórias do sistema, mencionados no capítulo anterior. Tais figuras foram obtidas fixando-se os parâmetros k , γ e β , como sendo $k = 2$, $\gamma = 1$ e $\beta = 2.5$, satisfazendo a condição $k \geq \beta(1 + \ln(\frac{\gamma f}{\beta}))$, e fazendo-se variar o parâmetro f , que representa o déficit público.

figura 1: Plano de Fase do sistema (2.2)-(2.3) com $f = 1.7$. O equilíbrio B é um poço. Pode-se dizer que, neste caso, o parâmetro (μ, δ) do sistema escalado correspondente encontra-se na região 1 da figura 20.

figura 2: Plano de Fase do sistema (2.2)-(2.3) com $f = 1.3$. Existe uma órbita periódica englobando o equilíbrio B , que agora é uma fonte. Na realidade, houve uma bifurcação de Hopf para $f \approx 1.4$, com a qual o equilíbrio perdeu a estabilidade. Pode-se concluir que, com a variação de f de 1.7 para 1.3, os parâmetros do sistema escalado correspondente cruzaram a curva H, mostrada na figura 20, no plano- (μ, δ) , de baixo para cima.

figura 3: Plano de Fase do sistema (2.2)-(2.3) com $f = 1.0$. Observa-se um aumento da órbita periódica que engloba o ponto B .

figura 4: Plano de Fase do sistema (2.2)-(2.3) com $f = 0.875$. A órbita periódica está agora bem próxima da órbita homoclínica. Pode-se então concluir que o parâmetro (μ, δ) do sistema escalado correspondente está próximo da curva L, mostrada na figura 20, para esse valor de f .

figura 5: Plano de Fase do sistema (2.2)-(2.3) com $f = 0.87$. Uma aproximação da órbita homoclínica do sistema. Os parâmetros μ e δ do sistema escalado correspondente estão praticamente sobre a curva L mostrada na figura 20, para esse particular valor de f .

figura 6: Plano de Fase do sistema (2.2)-(2.3) com $f = 0.8$. Não existe mais a órbita homoclínica. Pode-se concluir que, na variação do parâmetro f de 0.87 a 0.8, o parâmetro μ do sistema escalado correspondente cruzou a curva L , mostrada na figura 20, de baixo para cima, para um $\bar{\delta}$ suficientemente pequeno, fixo.

figura 7: Curvas de níveis de uma superfície no espaço- (x, y, f) , obtidas ao calcularmos as soluções do sistema (2.2)-(2.3), acrescido da equação $\dot{f} = 0$, variando-se o parâmetro f de 1.38 (menor órbita periódica (1)), até 0.88 (órbita periódica próxima da órbita homoclínica (6)). Observe como as órbitas periódicas se aproximam da órbita homoclínica, como demonstrado no capítulo 2, para o sistema escalado correspondente.

Apêndice B

Teorema das Funções Implícitas com Parâmetros

Neste Apêndice apresentamos uma prova do Teorema das Funções Implícitas com Parâmetros, utilizado no capítulo 2.

Teorema B.0.1 *Seja $F(x, y, c)$ definida e contínua em $|x - x_0| \leq a$, $|y - y_0| \leq b$ e $0 \leq c \leq 1$, tal que existe $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, c)$ em $|x - x_0| < a$, $|y - y_0| < b$ e $0 \leq c \leq 1$. Suponha que:*

i) $F(x_0, y_0, c) = 0$, para todo $c \in [0, 1]$;

ii) $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, c)$ é contínua nos pontos (x_0, y_0, c) , uniformemente em $c \in [0, 1]$ (isto é, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $|(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta$, então $|\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, c) - \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, c)| < \epsilon$, $\forall c \in [0, 1]$);

iii) Existem constantes M e m tais que

$$M > \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, c) \geq m > 0,$$

para $0 \leq c \leq 1$.

Então existem constantes $a^* > 0$ e $b^* > 0$ tais que $F(x, y, c) = 0$ tem uma única solução $u(x, c)$, contínua em $B[x_0, a^*] \times [0, 1]$, com valores em $B[y_0, b^*]$, isto é, $F(x, u(x, c), c) = 0$, $\forall (x, c) \in B[x_0, a^*] \times [0, 1]$. Se, além disso, $F(x, y, c)$ for de classe C^1 no produto $B(x_0, a) \times B(y_0, b) \times]0, 1[$, então a solução $u(x, c)$ é de classe C^1 em $B(x_0, a^*) \times]0, 1[$.

Observação: Da hipótese (ii) acima segue que $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, c)$ é contínua no produto de $[0, 1]$ por uma vizinhança do ponto (x_0, y_0) . Com efeito, tomando-se um ponto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c})$ tal que $|(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c}) - (x_0, y_0, \bar{c})| < \delta$, com $\bar{c} \in [0, 1]$, dado $\epsilon > 0$ e arbitrário, de (ii) segue que existe $\delta_1 > 0$ tal que, se $|(x, y, c) - (\bar{x}, \bar{y}, \bar{c})| < \delta_1$, tem-se que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, c) - \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c}) \right| &\leq \left| \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, c) - \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, c) \right| + \\ &+ \left| \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, c) - \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, \bar{c}) \right| + \left| \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, \bar{c}) - \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c}) \right| < \epsilon. \end{aligned}$$

Para demonstrar o Teorema B.0.1, seguiremos de perto a demonstração elaborada em [7] - páginas 39 a 44, para o caso sem parâmetro. A prova seguirá dos seguintes lemas:

Lema B.0.2 *Seja $f(x, y, c)$ contínua em $|x - x_0| \leq a$, $|y - y_0| \leq b$ e $0 \leq c \leq 1$. Suponha que existe uma constante K , com $0 < K < 1$, tal que*

$$|f(x, y, c) - f(x, y^*, c)| \leq K |y - y^*|$$

$\forall (x, y, c), (x, y^, c) \in B[x_0, a] \times B[y_0, b] \times [0, 1]$, e que $f(x_0, y_0, c) = y_0$, $\forall c \in [0, 1]$. Então existe a^* , com $0 < a^* \leq a$, tal que a equação*

$$f(x, y, c) = y$$

possui uma única solução $y = u(x, c)$, definida e contínua em $(x, c) \in B[x_0, a^] \times [0, 1]$, e com valores em $B[y_0, b]$, $\forall (x, c) \in B[x_0, a^*] \times [0, 1]$*

Prova: Definamos

$$g(x, c) = f(x, y_0, c) - y_0.$$

Tal função é contínua para $(x, c) \in B[x_0, a] \times [0, 1]$ e $g(x_0, c) = 0$, $\forall c \in [0, 1]$. Logo, dado $b - Kb > 0$, pela compacidade de $[0, 1]$ segue que existe $0 < a^* < a$ tal que

$$|g(x, c)| = |f(x, y_0, c) - y_0| \leq b - Kb,$$

$\forall (x, c) \in B[x_0, a^*] \times [0, 1]$. Lembremos agora que o conjunto E das funções contínuas definidas em $B[x_0, a^*] \times [0, 1]$, com valores em $B[y_0, b]$ é completo, com a norma do sup. Definamos então a aplicação $T : E \rightarrow E$, tal que

$$T[v](x, c) = w(x, c) = f(x, v(x, c), c),$$

$\forall v \in E$. A aplicação acima está bem definida, pois f é contínua e

$$\|w(x, c) - y_0\| \leq \|f(x, v(x, c), c) - f(x, y_0, c)\| + \|f(x, y_0, c) - y_0\| \leq$$

$$K\|v(x, c) - y_0\| + (b - Kb) \leq b.$$

Assim, temos

$$\|Tv - Tv^*\| = \sup |(Tv)(x, c) - (Tv^*)(x, c)| \leq \sup K |v(x, c) - v^*(x, c)| = K \|v - v^*\|,$$

onde o sup acima é considerado para $(x, c) \in B[x_0, a^*] \times [0, 1]$. Portanto, pelo Teorema do Ponto Fixo, existe uma única função $u(x, c)$ tal que $f(x, u(x, c), c) = u(x, c)$, $\forall (x, c) \in B[a^*, x_0] \times [0, 1]$. ■

Lema B.0.3 Se $f(x, y, c)$ é definida e contínua no produto de $[0, 1]$ por uma vizinhança de $(x_0, y_0) \in R^2$, possui derivada $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, c)$ contínua no mesmo produto e, além disso,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, c) = 0,$$

$\forall c \in [0, 1]$, então existem constantes reais $a > 0$, $b > 0$ e $0 < K < 1$, tais que f satisfaz

$$|f(x, y, c) - f(x, y^*, c)| \leq K|y - y^*|$$

para todo $(x, y, c), (x, y^*, c) \in B[x_0, a] \times B[y_0, b] \times [0, 1]$.

Prova: Dado K , com $0 < K < 1$, pela compacidade do intervalo $[0,1]$ conclue-se que existem constantes $a, b > 0$, tais que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, c) \right| \leq K ,$$

$\forall (x, y, c) \in B[x_0, a] \times B[y_0, b] \times [0, 1]$. Portanto, pelo Teorema da Média, temos

$$|f(x, y, c) - f(x, y^*, c)| \leq \sup \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, c) \right| |y - y^*| ,$$

onde o sup acima é considerado para $(x, y, c) \in B[x_0, a] \times B[y_0, b] \times [0, 1]$. ■

Prova do Teorema B.0.1: Definamos a função

$$f(x, y, c) = y - \frac{F(x, y, c)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, c)} ,$$

que é definida e contínua no produto de $[0,1]$ por uma vizinhança de (x_0, y_0) e sua derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, c) = 1 - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, c)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, c)}$$

é contínua no mesmo produto e se anula em (x_0, y_0, c) para todo $c \in [0, 1]$. Além disso, $f(x_0, y_0, c) = y_0$ para todo $c \in [0, 1]$. O resultado segue, então, dos Lemas B.0.2 e B.0.3 acima. ■

Bibliografia

- [1] V.I. Arnold. Bifurcations in Versal Families. *Russian Math. Surveys*, (27):54 : 123, 1972.
- [2] R. Bamon and R. Roussarie. Bifurcations: an introduction. Notas de curso, Winter School - CIMPA - UNESCO - CHILE - Dynamical Systems and Frustrated Systems, 1992.
- [3] F.H. Barbosa, W.M. Oliva, and E.M Sallum. A Dinâmica da Hiperinflação. Seminários de Economia 173, Fundação Getúlio Vargas, Rio de Janeiro, 1991.
- [4] J. Carr. *Applications of Centre Manifold Theory*. Appl. Math. Sciences, 35. Springer-Verlag, New York, 1981.
- [5] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscilations. Dynamical Systems. and Bifurcations of Vector Fields*. Appl. Math. Sciences, 42. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [6] J.K. Hale. *Ordinary Differential Equations*. John Wiley and Sons, New York, 1969.
- [7] C.S. Honig. *Aplicações da Topologia à Análise*. Textos de Matemática, 8. Inst. de Fis. e Mat. - Univ. do Recife, 1961.
- [8] H. Kocak. *Differential and Difference Equations Through Computer Experiments*. Springer-Verlag, New York, 1986.

- [9] N. Kopell and L.N. Howard. Bifurcations and Trajectories Joining Critical Points. *Advances in Mathematics*, 18:306–358, 1976.
- [10] J.E. Marsden and M. McCracken. *The Hopf Bifurcation and its Applications*. Appl. Math. Sciences, 19. Springer-Verlag, New York, 1976.
- [11] J. Palis and W. de Melo. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*. Projeto Euclides. IMPA-CNPq, 1977.
- [12] L.S. Pontryagin. *Ordinary Differential Equations*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1962.
- [13] J. Sotomayor. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Projeto Euclides. IMPA-CNPq, 1979.
- [14] F. Takens. Forced Oscillations and Bifurcations. Communication 3, Math. Inst., Rijksuniversiteit, Utrecht, 1974.
- [15] F. Takens. Singularities of Vector Fields. *Publ. Inst. Hautes Etudes Sci.*, (33):1133:1140, 1978.