**FLUXOS MÁXIMOS EM REDES:
Algoritmos e Estruturas de Dados**

Roberto Duó

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE
MESTRE EM
MATEMÁTICA APLICADA

Área de Concentração: **Ciência da Computação**
Orientadora: **Professora Dr^a Yoshiko Wakabayashi**

-São Paulo, Julho de 1992-

Resumo

Neste trabalho estudamos vários algoritmos para o problema do fluxo máximo, procurando enfatizar as idéias que surgiram e como foram aprimoradas. Dado que os algoritmos mais recentes utilizam estruturas de dados sofisticadas, como árvores enviesadas e árvores dinâmicas, incluímos aqui um estudo completo e detalhado de tais estruturas. Finalmente, apresentamos e analisamos a complexidade computacional de um algoritmo recente de Goldberg-Tarjan, que usa essas estruturas, e descrevemos aspectos relativos à sua implementação.

Abstract

In this work we study the max-flow problem, with emphasis on its algorithmic aspects. We describe a number of algorithms showing the main ideas that appeared and their successive refinements. Since the most recent algorithms use sophisticated data structures, like biased trees and dynamic trees, we present here a complete and detailed study of such structures. Finally, we describe and analyse the computational complexity of a recent algorithm due to Goldberg and Tarjan, and mention details concerning its implementation.

*Aos meus pais
e esposa*

Agradecimentos

À minha orientadora, Professora Yoshiko, pela sugestão do tema e pelo acompanhamento do desenvolvimento do mesmo.

Ao meu amigo, Fábio Lotti Oliva, pelo incentivo no início da minha pós-graduação.

Aos meus amigos, Stephen Kassner e Cristina Gomes Fernandes, pelo acompanhamento do desenvolvimento do tema da dissertação.

Aos meus amigos, Dilma, Carlos e Coelho por enviarem artigos do exterior.

Ao meu amigo, Daniel Panário, por ceder a capa da sua tese.

À minha amiga Wania, por dar um jeito na impressora.

À minha professora Nami, por conselhos e sugestões.

À VILLARES, que cedeu cerca de 15% do meu tempo de trabalho, possibilitando o desenvolvimento do meu mestrado.

Aos professores do IME que incentivam a pós-graduação dos que trabalham fora deste instituto.

À Edna, pelo carinho e paciência nos momentos mais difíceis.

O meu muito obrigado!!!

Índice

Introdução	3
Capítulo 1 Algoritmos para o Problema do Fluxo Máximo	5
1.1 O Problema do Fluxo Máximo	5
1.2 O Algoritmo de Ford e Fulkerson	9
1.3 O Algoritmo de Edmonds e Karp	12
1.4 O Algoritmo de Dinic	14
1.5 O Algoritmo de Karzanov	18
1.6 O Algoritmo de Cherkasky	23
1.7 O Algoritmo de Galil	27
1.8 O Algoritmo de Malhotra, Kumar e Maheshwari	33
1.9 O Algoritmo de Galil e Naamad	34
1.10 O Algoritmo de Sleator e Tarjan	36
1.11 O Algoritmo de Shiloach e Vishkin	37
1.12 O Algoritmo de Gabow	39
Capítulo 2 Árvores de Busca Enviesadas	41
2.1 Árvores de Busca Localmente Enviesadas	44
2.2 Árvores de Busca Globalmente Enviesadas	58
2.3 Usando Árvores Binárias	65
Capítulo 3 Árvores Dinâmicas	75
3.1 O Problema das Árvores Dinâmicas	75
3.2 Representando Árvores como Conjunto de Caminhos	76
3.3 Como Implementar as Operações sobre Caminhos	85
3.4 Uma Implementação mais Sofisticada	93
Capítulo 4 O Algoritmo de Goldberg e Tarjan	103
4.1 Um Algoritmo Básico	103
4.2 Uma Primeira Implementação	112
4.3 Usando Árvores Dinâmicas	117
4.4 Comparando o Algoritmo de Goldberg-Tarjan com os do Capítulo 1 ...	123
Apêndice A Definições Básicas	125
Apêndice B Glossário	128
Apêndice C Sobre a Implementação	131
Bibliografia	133

Introdução

Neste trabalho estudaremos o problema do fluxo máximo, abordando aspectos relativos à evolução dos algoritmos que surgiram, e dando ênfase especial a um tipo de estrutura de dados que tem sido muito utilizada em algoritmos mais recentes. O problema do fluxo máximo tem sido objeto de muito estudo, desde 1956, quando Ford e Fulkerson [9] publicaram um artigo apresentando um primeiro algoritmo. Desde então, algoritmos cada vez mais eficientes vêm sendo desenvolvidos. Neste trabalho serão mencionados vários algoritmos, procurando enfatizar as idéias que surgiram e como foram aprimoradas. Como veremos, a evolução das idéias atingiu um ponto em que o próximo aspecto a ser explorado passou a ser o uso de estrutura de dados mais sofisticadas. Neste contexto, as chamadas *árvores dinâmicas*, têm um papel muito importante — razão pela qual decidimos incluir o seu estudo neste trabalho. Procuramos apresentar os conceitos e os resultados teóricos sobre tais estruturas — coletando artigos bastante sucintos — de modo a facilitar a compreensão dos resultados e também tornar este trabalho completo e auto-contido com relação à análise da complexidade de um algoritmo que descrevemos e implementamos.

Para a leitura deste trabalho são suficientes apenas os conceitos básicos da teoria de grafos e análise de algoritmos, sendo particularmente indicada para alunos de pós-graduação na área de Ciência da Computação.

No primeiro capítulo, apresentaremos onze algoritmos que resolvem o referido problema. No capítulo 2 estudaremos um tipo de estrutura de dados conhecido como árvores enviesadas, enquanto que no capítulo 3, estudaremos o problema das árvores dinâmicas, usando os resultados apresentados no capítulo 2. Finalmente, no último capítulo discutiremos um algoritmo recente de Goldberg e Tarjan para o problema do fluxo máximo, cuja implementação usa fortemente a estrutura de dados estudada nos dois capítulos anteriores. Este capítulo é finalizado com uma seção que seleciona as idéias dos algoritmos apresentados no primeiro capítulo, que estão presentes no algoritmo de Goldberg e Tarjan.

A seguir, exibimos uma tabela com os vários algoritmos que serão mencionados neste trabalho. As complexidades de tempo (pior caso) dos algoritmos, apresentadas na quarta coluna, estão expressas em termos do número n de vértices, do número m de arestas do grafo e do limite superior C' das capacidades das arestas. Para os algoritmos em que a complexidade de tempo está expressa em termos de C' , é suposto que as capacidades são inteiras.

#	Ano	Autor	Tempo de execução	Referência
1	1956	Ford e Fulkerson	$O(nmC)$	[9]
2	1969	Edmonds e Karp	$O(nm^2)$	[7]
3	1970	Dinic	$O(n^2m)$	[6]
4	1974	Karzanov	$O(n^3)$	[15]
5	1977	Cherkasky	$O(n^2m^{\frac{1}{2}})$	[4]
6	1978	Malhotra, Kumar e Maheshwari	$O(n^3)$	[16]
7	1978	Galil	$O(n^{\frac{5}{3}}m^{\frac{2}{3}})$	[12]
8	1978	Galil e Naamad	$O(nm(\lg n)^2)$	[13]
9	1980	Sleator e Tarjan	$O(nm \lg n)$	[18]
10	1982	Shiloach e Vishkin	$O(n^3)$	[17]
11	1983	Gabow	$O(nm \lg C)$	[11]
12	1986	Goldberg e Tarjan	$O(n^3)$	[14]
13	1986	Goldberg e Tarjan	$O(nm \lg(\frac{n^2}{m}))$	[14]
14	1986	Ahuja e Orlin	$O(nm + n^2 \lg C)$	[2]

Os onze primeiros algoritmos desta tabela serão estudados no capítulo 1. O algoritmo de Galil e Naamad usa, implicitamente, árvores dinâmicas; já o algoritmo de Sleator e Tarjan usa diretamente árvores dinâmicas. Assim, ambos podem ser melhor compreendidos após a leitura dos capítulos 2 e 3.

Neste trabalho damos uma ênfase especial ao algoritmo de Goldberg e Tarjan, por ser um dos algoritmos mais eficientes para o problema do fluxo máximo. Fizemos uma implementação deste algoritmo (em um microcomputador do tipo PC-XT), visando conhecer as dificuldades práticas no uso de estruturas de dados mais sofisticadas e, principalmente, porque acreditamos que, sem fazer a implementação não poderíamos considerar o aprendizado completo. De fato, foi na fase de implementação que algumas dúvidas foram esclarecidas e pudemos melhor compreender a teoria. No apêndice C discutimos alguns aspectos relativos à implementação que fizemos.

No apêndice A apresentamos os conceitos básicos da teoria de grafos, principalmente sobre árvores, que serão usados neste trabalho.

O apêndice B contém um índice de todas as definições apresentadas neste trabalho.

Capítulo 1

ALGORITMOS PARA O PROBLEMA DO FLUXO MÁXIMO

Neste capítulo descreveremos o problema do fluxo máximo e apresentaremos vários algoritmos que resolvem este problema, indicando as novas idéias que foram incorporadas pelos diversos autores, mostrando, desta forma, a evolução dos algoritmos. Omitiremos algumas demonstrações e detalhes de alguns algoritmos.

1.1 O Problema do Fluxo Máximo

A descrição do problema, que será feita aqui, é baseada na definição de fluxo encontrada no livro de Ford e Fulkerson [10] publicado em 1962. Como veremos mais tarde, a formulação original é diferente desta.

Neste capítulo, utilizaremos a seguinte notação:

Seja $G = (V, A)$ um grafo orientado, $X, Y \subseteq V$, $v \in V$, e g uma função $g : A \rightarrow \mathbb{R}$. Então $g(X, Y)$ denota a seguinte soma:

$$g(X, Y) = \sum_{\substack{(x, y) \in A \\ x \in X, y \in Y}} g((x, y)).$$

Além disso,

$$g(v, X) = g(\{v\}, X) \quad \text{e} \quad g(X, v) = g(X, \{v\}).$$

Definição 1.1 : Uma rede é uma quádrupla (G, s, t, c) , onde $G = (V, A)$ é um grafo orientado, s e t são vértices distintos de V e c é uma função, $c : A \rightarrow \mathbb{R}^+$. Chamaremos s de vértice **origem**, t de vértice **destino** e c de **função capacidade**.

A menos de menção em contrário, no que segue, G será um grafo com conjunto de vértices V e conjunto de arestas A , ou seja, $G = (V, A)$. Além disso, $|V| \geq 2$ e $|A| \geq 1$.

Definição 1.2 : Um **fluxo** numa rede (G, s, t, c) é uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$f(v, V) = f(V, v) \quad \forall v \in V - \{s, t\} \quad \text{e}$$

$$0 \leq f(v, w) \leq c(v, w), \quad \forall (v, w) \in A.$$

Figura 1.1 : Uma rede (G, s, t, c) com um fluxo f . Em cada aresta o número acima (à esquerda) dela indica a sua capacidade e o número abaixo (à direita) dela indica o fluxo em tal aresta.

Definição 1.3 : Seja $R = (G, s, t, c)$ uma rede e f um fluxo em R . O **valor do fluxo** f , denotado por $valor(f)$, é definido como:

$$f(s, V) - f(V, s).$$

Na rede da figura 1.1 temos que $valor(f)=9$.

Observação: É fácil ver que, em qualquer rede (G, s, t, c) com fluxo f , vale a seguinte

igualdade: $f(s, V) - f(V, s) = f(V, t) - f(t, V)$. Deixaremos esta demonstração a cargo do leitor.

Definição 1.4 : Um fluxo f numa rede R é chamado **fluxo máximo** se em R não existe nenhum outro fluxo cujo valor é maior que $\text{valor}(f)$.

O fluxo indicado na rede da figura 1.1 é máximo. O leitor poderá se convencer disso a partir da observação acima, notando que $f(V, t) = c(V, t)$.

Denotaremos por *PFM*, o **Problema do Fluxo Máximo**, assim definido:

Dada uma rede $R = (G, s, t, c)$, determinar em R um fluxo máximo.

Lema 1.1 : Em toda rede $R = (G, s, t, c)$, existe um fluxo máximo.

Prova: Para provar este lema, basta observar que o problema do fluxo máximo é um problema de programação linear. Tal problema é viável, pois $f = 0$ é um fluxo e, além disso é um problema limitado (devido a restrição imposta pela função capacidade).

Quem não tem familiaridade com programação linear, basta observar que cada fluxo pode ser visto como um ponto no espaço $\mathbb{R}^m$, onde m é o número de arestas do grafo G , e que o conjunto dos fluxos é um conjunto fechado e limitado do $\mathbb{R}^m$. Como a função $\text{valor}(f)$ definida em tal conjunto é contínua, ela atinge o máximo em algum ponto do conjunto. ■

Como já mencionamos, a formulação original do problema do fluxo máximo, apresentada por Ford e Fulkerson [10] em 1956, difere da que apresentamos. A título de ilustração, faremos aqui esta outra descrição e provaremos que ambas as formulações são equivalentes. Para isso, precisamos introduzir algumas definições.

Definição 1.5 : Um **caminho de fluxo** numa rede (G, s, t, c) é um par $(C; k)$, onde C é um caminho orientado de s a t e k é um número não negativo.

Definição 1.6 : Um **F-fluxo** numa rede (G, s, t, c) é uma coleção F de caminhos de fluxo, $F = \{(C_i; k_i) : i = 1, \dots, p\}$, tal que:

$$\forall (v, w) \in A, \quad \sum_{i: (v, w) \in C_i} k_i \leq c(v, w).$$

Definição 1.7 : O valor de um F-fluxo F , $F = \{(C_i; k_i) : i = 1, \dots, p\}$, é definido como:

$$val(F) = \sum_{i=1}^p k_i.$$

Utilizando essas definições, podemos agora formular a versão original do problema do fluxo máximo, que será denotado por PFM :

Dada uma rede $R = (G, s, t, c)$, determinar em R um F-fluxo de valor máximo.

Lema 1.2 : Os problemas PFM e PFM' são equivalentes.

Prova: Seja $R = (G, s, t, c)$ uma rede. Dado um F-fluxo F , $F = \{(C_i; k_i) : i = 1, \dots, p\}$, em R , podemos construir um fluxo f em R com $valor(f) = val(F)$, da seguinte maneira:

$$f(v, w) = \sum_{i: (v, w) \in C_i} k_i \quad \text{para todo } (v, w) \in A.$$

É fácil verificar que f assim definido é um fluxo com $valor(f) = val(F)$.

Precisamos mostrar agora que dado um fluxo f em R , existe um F-fluxo F , tal que $val(F) = valor(f)$. Demonstraremos esta afirmação através do algoritmo $FFluxo$, que recebe como entrada um fluxo f em R e constrói um F-fluxo F , tal que $val(F) = valor(f)$.

algoritmo $FFluxo$ (rede (G, s, t, c) ; fluxo f):

caminho C ;

F-fluxo F ;

grafo H ;

. $F = \emptyset$;

. H =subgrafo de G formado pelas arestas a tais que $f(a) > 0$;

.**enquanto** $valor(f)$ em H é positivo **faça**

. procure, em H , um caminho orientado C de s a t ;

. $k = \min\{f(a) \mid a \in C\}$;

. $F = F \cup (C; k)$;

. **para** toda aresta $a \in C$ **faça**

. $f(a) = f(a) - k$;

. H = subgrafo de H formado pelas arestas a tais que $f(a) > 0$;

. f = restrição de f às arestas de H ;

.**retorne** F ;

Precisamos mostrar que o algoritmo é correto. Primeiramente devemos notar que, em qualquer passo do algoritmo, f é um fluxo em H , pois quando diminuimos o fluxo ao longo de um caminho orientado de s a t , não desobedecemos as condições de fluxo. Além disso, se $valor(f)$ é não nulo, então existe um caminho de s a t (isto segue da observação feita após a definição 1.3). Para finalizar, basta notar que, quando acrescentamos um caminho de fluxo $(C; k)$, a F , o valor de f é decrescido de k . Logo, no final do algoritmo $val(F) = valor(f)$. O processo é finito pois em cada passo do algoritmo o fluxo em pelo menos uma aresta é anulado. ■

No decorrer deste trabalho faremos uso das definições 1.1 e 1.2 e nos referiremos somente ao *PFM*.

Denotaremos $|V|$ por n e $|A|$ por m . Suporemos que G é conexo. Sob estas hipóteses, podemos inferir que $n - 1 \leq m \leq n^2 - n$ (observe que a definição de grafo fornecida no apêndice não comporta arestas múltiplas e nem laços).

1.2 O Algoritmo de Ford e Fulkerson

Esta seção é dedicada à descrição do algoritmo proposto por Ford e Fulkerson em 1956 (cf. [9]). Antes disso, veremos alguns resultados e algumas definições.

Definição 1.8 : Seja $R = (G, s, t, c)$ uma rede e K um conjunto de arestas de G . Dizemos que K é um **corte** em R , se existe $S \subset V$ com $s \in S$ e $t \in \bar{S}$, tal que

$$K = \{(v, w) \in A \mid v \in S \text{ e } w \in \bar{S}\}.$$

Definição 1.9 : Seja $R = (G, s, t, c)$ uma rede e K um corte em R . Definimos **capacidade** de K , $cap(K)$, como sendo a soma das capacidades de suas arestas. Dizemos que K é um **corte mínimo** se em R não existe outro corte cuja capacidade é menor que $cap(K)$.

Lema 1.3 : Seja $R = (G, s, t, c)$ uma rede, $S \subset V$, $s \in S$, $t \in \bar{S}$ e f um fluxo em R . Então

$$valor(f) = f(S, \bar{S}) - f(\bar{S}, S).$$

Prova: Pelas definições 1.2 e 1.3,

$$valor(f) = f(s, V) - f(V, s) \text{ e } f(v, V) = f(V, v) \quad \forall v \in V - \{s, t\}.$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } f(s, V) - f(V, s) &= f(S, V) - f(V, S) = f(S, S \cup \bar{S}) - f(S \cup \bar{S}, S) = \\ &= (f(S, S) + f(S, \bar{S})) - (f(S, S) + f(\bar{S}, S)) = f(S, \bar{S}) - f(\bar{S}, S). \end{aligned}$$

■

Lema 1.4 : Se f é um fluxo e K é um corte em uma rede, então

$$\text{valor}(f) \leq \text{cap}(K).$$

Prova: Imediata, a partir do lema 1.3.

■

Definição 1.10 : Seja $R = (G, s, t, c)$ uma rede e f um fluxo em R . Dizemos que um caminho $\mathcal{S} = (s = v_0, a_1, v_1, \dots, a_k, v_k = t)$ em G , é um **caminho f -aumentador** em R , se para todo i , $i = 1, \dots, k$, ou $a_i = (v_{i-1}, v_i)$ e $f(a_i) < c(a_i)$, ou $a_i = (v_i, v_{i-1})$ e $f(a_i) > 0$. Além disso, dizemos que uma aresta a_i de $\mathcal{S}$ **avança em S** se $a_i = (v_{i-1}, v_i)$; e **recua**, caso contrário. Às vezes dizemos simplesmente **caminho aumentador**, devendo ficar claro pelo contexto qual é o fluxo a que estamos nos referindo.

Lema 1.5 : Seja $R = (G, s, t, c)$ uma rede e f um fluxo em R . Se em R existe um caminho f -aumentador, então existe um fluxo f' em R , tal que $\text{valor}(f') > \text{valor}(f)$.

Prova: Seja $\mathcal{S} = (s = v_0, a_1, v_1, \dots, a_k, v_k = t)$ um caminho f -aumentador e sejam $A_1 = \{a \in A \mid a \text{ avança em } \mathcal{S}\}$ e $A_2 = \{a \in A \mid a \text{ recua em } \mathcal{S}\}$, $\epsilon_1 = \min\{c(a) - f(a) \mid a \in A_1\}$, $\epsilon_2 = \min\{f(a) \mid a \in A_2\}$ e $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$.

Seja $f' : A \rightarrow \mathbb{R}$ assim definido:

$$f'(a) = \begin{cases} f(a) + \epsilon & \text{se } a \in A_1, \\ f(a) - \epsilon & \text{se } a \in A_2, \\ f(a) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

É fácil verificar que f' é um fluxo e $\text{valor}(f') = \text{valor}(f) + \epsilon$. Como ϵ é positivo, o resultado segue.

■

Teorema 1.1 : (**Fluxo máximo-corte mínimo**) Numa rede, o valor de um fluxo máximo é igual à capacidade de um corte mínimo.

Prova: Seja $R = (G, s, t, c)$ uma rede. Pelo lema 1.4, é suficiente provarmos a existência em R de um fluxo f e um corte K tal que $\text{valor}(f) = \text{cap}(K)$.

Seja f um fluxo máximo em R (tal fluxo existe pelo lema 1.1) e $S \subset V$ definido recursivamente, a partir de f , como segue:

- (1) $s \in S$;
- (2) se $(v, w) \in A$, $v \in S$ e $f(v, w) < c(v, w)$ então $w \in S$;
- (3) se $(v, w) \in A$, $w \in S$ e $f(v, w) > 0$ então $v \in S$.

Suponha por absurdo que $t \in S$. Então existe um caminho aumentador em R , e portanto, pelo lema 1.5, f não é máximo. Logo, $t \notin S$. Neste caso, o conjunto $K = \{(v, w) \in A \mid v \in S \text{ e } w \notin S\}$ é um corte em R . Pelo lema 1.3, temos que $\text{valor}(f) = f(S, \bar{S}) - f(\bar{S}, S)$. Pela definição de S , temos que $f(S, \bar{S}) = \text{cap}(K)$ e $f(\bar{S}, S) = 0$. Logo, $\text{valor}(f) = \text{cap}(K)$.

Corolário: Seja f um fluxo numa rede R . Então f é máximo se e somente se não existe caminho aumentador em R .

Prova: Segue do lema 1.5 e da demonstração do teorema 1.1. ■

O algoritmo de Ford e Fulkerson baseia-se fundamentalmente no conceito de caminho aumentador. Ele recebe como entrada uma rede com capacidades *rationais* e constrói um fluxo máximo (no final desta seção comentamos a razão de impormos tal restrição). A seguir temos a sua descrição:

algoritmo FF (rede (G, s, t, c)):

fluxo f ;

caminho S ;

. $f=0$;

.**repita**

. procure um caminho aumentador S ;

. se foi encontrado um caminho aumentador

. . **então** aumente o fluxo f procedendo da maneira sugerida na prova do lema 1.5;

. **até** que não exista caminho aumentador;

.**retorne** f ;

$$f(S, \bar{S}) = \sum_{(v,w) \in A, v \in S, w \notin S} f(v,w) = \text{cap}(K)$$

$$f(\bar{S}, S) = \sum_{(v,w) \in A, v \notin S, w \in S} f(v,w) = 0$$

A procura do caminho aumentador é feita através de um processo de rotulação (sem um critério de escolha bem determinado). O comando “aumente o fluxo f procedendo da maneira sugerida na prova do lema 1.5” será chamado de *aumentação*. Uma *iteração*

ou *passo* do algoritmo se refere à uma iteração do comando **repita**.

A verificação de que o algoritmo é correto, quando as capacidades são todas racionais, segue do corolário do teorema 1.1.

Note que se o valor de um fluxo máximo é M e as capacidades são todas *inteiras*, então este algoritmo termina no máximo em M passos, pois o valor do fluxo aumenta de pelo menos uma unidade em cada passo. Podemos então concluir que, se as capacidades forem *racionais*, o algoritmo também encontra um fluxo máximo. No entanto, quando há capacidades irracionais o método que descrevemos pode convergir para um fluxo que não é um fluxo máximo. Um exemplo deste caso pode ser encontrado em [10].

1.3 O Algoritmo de Edmonds e Karp

Edmonds e Karp [7] foram os primeiros a desenvolver um algoritmo polinomial para o problema do fluxo máximo. Chamaremos de *EK* o algoritmo desses autores.

A diferença fundamental entre o algoritmo de *EK* e o algoritmo de *FF* está na maneira de se procurar um caminho aumentador. No algoritmo *EK* esta procura é feita através de uma busca em largura. Fazendo a busca em largura, em cada iteração é encontrado um caminho aumentador de tamanho mínimo.

Figura 1.2 : Uma rede especial. As arestas têm capacidades M e 1, onde M é um inteiro positivo. O algoritmo *FF*, quando aplicado a esta rede, pode realizar $2M$ aumentações, enquanto que o algoritmo *EK* realizará apenas duas.

Faremos a demonstração da complexidade do algoritmo *EK*, para introduzir os novos conceitos que surgiram com este algoritmo.

Definição 1.11 : Seja $R = (G, s, t, c)$ uma rede e f um fluxo em R . Definimos **grafo residual** G_f como sendo o grafo $G_f = (V_f, A_f)$, onde:

$$V_f = V \quad \text{e}$$

$$A_f = \{(v, w) \in A \mid f(v, w) < c(v, w)\} \cup \{(v, w) \in (V, V) \mid (w, v) \in A \text{ e } f(w, v) > 0\}.$$

Definição 1.12 : Seja R uma rede onde foi aplicado o algoritmo EK , S o caminho aumentador escolhido pelo algoritmo durante uma determinada iteração, e f o fluxo após a aumentação. Dizemos que uma aresta a de S se torna **saturada** nesta iteração se, ou a avança em S e $f(a) = c(a)$, ou a recua em S e $f(a) = 0$.

Lema 1.6 : Durante a execução do algoritmo, a distância de s a um vértice qualquer, nos correspondentes grafos residuais, nunca decresce.

Prova: Chamemos de $d(v)$ a distância de s a v no grafo residual correspondente a uma determinada iteração. Seja $V_i = \{v \in V \mid d(v) = i\}$. Assim, na iteração seguinte (após a aumentação) o novo grafo residual só pode ganhar arestas (v, w) , com $v \in V_k$ e $w \in V_{k-1}$. Logo, a distância de s a v no novo grafo residual não pode decrescer. ■

Lema 1.7 : Durante a execução do algoritmo EK , o número máximo de vezes que uma determinada aresta do grafo se torna saturada é n .

Prova: Seja $d_k(u)$ a distância de s a u no grafo residual da iteração k . Seja (v, w) uma aresta qualquer do grafo G que foi saturada na iteração i do algoritmo. Suponha que (v, w) avançava no caminho aumentador. Então $d_i(w) = d_i(v) + 1$. Para a aresta (v, w) poder ser saturada novamente, digamos em uma iteração p , então em alguma iteração j , $i < j \leq p$, ela deverá estar no caminho aumentador como uma aresta que recua; e portanto, $d_j(v) = d_j(w) + 1$. Logo, pelo lema 1.6, $d_p(v) \geq d_i(v) + 2$. Suponha agora que a aresta (v, w) recuava no caminho aumentador da iteração i . Analogamente, podemos concluir que $d_p(w) \geq d_i(w) + 2$. Como a distância de s a qualquer vértice do grafo residual, em qualquer iteração, não é maior que n , o número máximo de saturações da aresta (v, w) durante a execução do algoritmo é n . ■

Teorema 1.2 : O algoritmo *EK* tem complexidade $O(nm^2)$.

Prova: Como em cada passo do algoritmo pelo menos uma aresta é saturada, pelo lema 1.7, no máximo nm passos precisam ser executados. Como cada passo necessita de $O(m)$ tempo (busca em largura), o algoritmo requer, no pior caso, $O(nm^2)$ tempo. ■

Além deste algoritmo, Edmonds e Karp propuseram um outro algoritmo, que em cada passo escolhe um caminho aumentador que causa o maior aumento no valor do fluxo. Os autores provaram que se as capacidades das arestas forem inteiras este novo algoritmo fará $O(n^2 \lg n + n^2 \lg \bar{c})$ aumentações, onde $\bar{c}$ é a média das capacidades de todas as arestas do grafo.

1.4 O Algoritmo de Dinic

Dinic [6], em 1970, desenvolveu, independentemente, um outro algoritmo polinomial para o problema do fluxo máximo. Chamaremos de *Di* o algoritmo de Dinic.

A diferença fundamental entre o algoritmo *EK* e o algoritmo *Di* é o fato de que o algoritmo *Di* tenta reaproveitar uma busca em largura executada, procurando não apenas um caminho, mas se possível vários. Assim, quando é feita uma busca em largura e verifica-se que a distância de s a t é k , procura-se todos os caminhos aumentadores de tamanho k antes de se fazer uma outra busca em largura.

O trabalho de Dinic evidenciou o seguinte subproblema:

Dada uma rede $R = (G, s, t, c)$, onde G é um grafo formado por caminhos orientados de s a t , de tamanho k , encontre um fluxo, para o qual não existe um caminho aumentador de tamanho menor ou igual a k .

Este problema é conhecido como o *subproblema* (ou *fase*) de Dinic. Dinic propôs um algoritmo de complexidade $O(mn)$ que resolve este subproblema. O algoritmo geral consiste de chamadas sucessivas deste ‘subalgoritmo’, até que não exista mais nenhum caminho aumentador de s a t .

Definição 1.13 : Dada uma rede $R = (G, s, t, c)$ e um fluxo f , dizemos que o grafo formado pelos caminhos orientados mínimos de s a t em G_f , é o grafo induzido por f em G . Este grafo será denotado por G^f .

Figura 1.3 : Um grafo formado por caminhos de s a t , de comprimento 5. Cada conjunto V_k contém os vértices v tais que a distância de s a v é k .

O algoritmo faz uso de uma função, DSP , que resolve o subproblema de Dinic, e que será detalhada mais tarde. A seguir, temos o algoritmo de Dinic.

algoritmo *Di* (*rede* (G, s, t, c)):

fluxo f ;

capacidade c_f ;

vértice v, w ;

$f = 0$;

repita

. compute G^f ;

. **para** toda aresta (v, w) em G^f **faça**

. se (v, w) é uma aresta de G

. então $c_f(v, w) = c(v, w) - f(v, w)$

. senão $c_f(v, w) = f(w, v)$;

. se $G^f \neq (\emptyset, \emptyset)$

. então $f = f + DSP(G^f, c_f)$;

até que $G^f = (\emptyset, \emptyset)$;

Para computar G^f , podemos fazer uma busca em largura a partir de s , até encontrar t , e uma outra de t até s , pelos vértices já visitados. Este processo necessita $O(m)$ tempo.

Vejamos agora como implementar a função DSP . Para simplificar, daremos um atributo para cada vértice e outro para cada aresta. Assim, um vértice pode ser *aberto* ou *fechado*. Da mesma maneira, uma aresta pode ser *aberta* ou *fechada*. Uma aresta é considerada *fechada*, se ela está saturada ou está entrando em um vértice fechado; caso contrário, ela é considerada *aberta*. Um vértice é considerado *fechado*, se todas as arestas que saem dele estão fechadas; um vértice que não é fechado é considerado *aberto*. Além disso, manteremos uma lista das arestas abertas que saem de um vértice. No início, todas as arestas e todos os vértices estão abertos. Chamaremos de $\alpha(v)$, a lista das arestas abertas que saem do vértice v , e de $\beta(v)$, a lista das arestas que entram no vértice v . Diremos que uma aresta (v, w) é *fechada pelo algoritmo*, se (v, w) é eliminada de $\alpha(v)$. Além disso, diremos que um vértice v é *fechado pelo algoritmo*, se toda aresta (w, v) , entrando em v , é fechada pelo algoritmo.

O algoritmo procura caminhos de s a t , formado por arestas abertas. Quando encontra um caminho, aumenta o fluxo f ao longo deste caminho e fecha todas as arestas saturadas deste caminho. Se todas as arestas que saem de um vértice v estão fechadas ($\alpha(v) = \emptyset$), então este vértice é fechado pelo algoritmo. O algoritmo proposto por Dinic, reaproveita o caminho de s até o início da primeira aresta saturada, no entanto, isto não influencia na complexidade do algoritmo. Vejamos agora o algoritmo.

função DSP (*grafo induzido* G ; *capacidade* c):
vértice $v, w, z, \bar{w}, \bar{z}$;
caminho C ;
fluxo f ;

```
.compute  $\alpha(v)$  e  $\beta(v)$  para todo  $v \in V$ ;
.f = 0;
.v = s;
.C = s;
enquanto  $\alpha(s) \neq \emptyset$  faça
.  enquanto  $v \neq t$  e  $\alpha(v) \neq \emptyset$  faça
.    seja  $(v, w) \in \alpha(v)$ ;
.    acrescente  $w$  no caminho  $C$ ;
.     $v = w$ ;
.  se  $v \neq t$ 
.    então  $C = C - v$ ;
.      para todo  $(w, v) \in \beta(v)$  faça /* fecha  $v$  */
.        elimine  $(w, v)$  de  $\alpha(w)$ ; /* fecha  $(w, v)$  */
.       $v =$  último vértice de  $C$ 
.  senão aumente o fluxo  $f$  ao longo de  $C$ ;
.    para toda aresta saturada  $(w, z)$  de  $C$  faça
.      elimine  $(w, z)$  de  $\alpha(w)$ ;
.      seja  $(\bar{w}, \bar{z})$  a aresta de  $C$  mais próxima de  $s$  que foi saturada;
.       $v = \bar{w}$ ;
.      elimine de  $C$  todos os vértices de  $\bar{z}$  até  $t$ ;
retorne  $f$ ;
```

Teorema 1.3 : O tempo de execução da função DSP é $O(nm)$, no pior caso.

Prova: Denotemos por af o número de arestas fechadas durante a execução do algoritmo, ca o número de aumentações realizadas pelo algoritmo e $d(t)$ a distância de s a t em G . Então o tempo de execução do algoritmo DSP é, no pior caso, $O(af + (ca \cdot d(t)))$. Obviamente $af \leq m$ e $d(t) \leq n$. Cada caminho aumentador satura pelo menos uma aresta, logo $ca \leq m$. Portanto, o tempo de execução da função DSP é, no pior caso, $O(m + nm)$, ou seja, $O(nm)$. ■

Teorema 1.4 : O tempo de execução do algoritmo Di é, no pior caso, $O(n^2m)$.

Prova: Como cada fase do algoritmo de Dinic aumenta a distância de s a t de pelo menos um, o algoritmo termina após n fases, no máximo. Logo, pelo teorema 1.3 segue o

resultado. ■

Depois que surgiu o algoritmo de Dinic, vários outros algoritmos foram desenvolvidos, cada qual propondo uma nova versão mais eficiente para resolver o subproblema de Dinic. Note que no algoritmo *EK*, podemos identificar o subproblema, que é resolvido em $O(nm)$ tempo.

1.5 O Algoritmo de Karzanov

Em 1974, Karzanov propôs um novo algoritmo para resolver o subproblema de Dinic. Tal algoritmo necessita de $O(n^2)$ tempo. Assim, a complexidade do algoritmo de Karzanov é $O(n^3)$. Além do artigo original de Karzanov [15], pode-se encontrar a descrição de seu algoritmo no livro de Even [8] ou no artigo de Galil [12]. Antes de descrevermos o algoritmo, faremos algumas definições.

Definição 1.14 : Seja $R = (G, s, t, c)$ uma rede. Uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é **admissível** em R se $f(v, w) \leq c(v, w)$ para todo $(v, w) \in A$.

Definição 1.15 : Seja $R = (G, s, t, c)$ uma rede e f uma função admissível em R . Um vértice v é **f -bloqueado** se, para todo caminho orientado de v a t existe uma aresta (v, w) tal que $f(v, w) = c(v, w)$.

Definição 1.16 : Seja $R = (G, s, t, c)$ uma rede e f uma função admissível. O **excesso** de (fluxo em) um vértice $v \in V$, denotado por $e(v)$, é definido como

$$e(v) = \sum_{(w,v) \in A} f(w, v) - \sum_{(v,w) \in A} f(v, w).$$

Dizemos que um vértice v está **balanceado** se $e(v) = 0$.

Definição 1.17 : Seja $R = (G, s, t, c)$ uma rede. Uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é um **pré-fluxo** se:

- (1) f é admissível,
- (2) s é f -bloqueado,
- (3) $e(v) \geq 0$ para todo vértice v em $V - \{s\}$ e
- (4) para todo vértice v tal que $e(v) > 0$, v é f -bloqueado.

O algoritmo principal faz uso de duas funções: *Empurra* e *Balanceia*.

A função *Empurra*, constrói um pré-fluxo f' a partir de uma função admissível f , tentando enviar a maior quantidade de fluxo possível para t .

A função *Balanceia*, balanceia vértices bloqueados pelo pré-fluxo f , alterando f , até que f deixe de ser um pré-fluxo.

Antes de descrever as funções *Empurra* e *Balanceia*, vamos descrever outras funções mais básicas. Para facilitar, chamaremos de V_i à camada i , isto é, o conjunto dos vértices que estão à distância i de s . As listas $\alpha(v)$ e $\beta(v)$ são como definidas na seção anterior.

função *EmpurraVértice* (vértice v ; capacidade c ; fluxo f):

vértice w ;
booleano b ;
real δ ;

. $b = \text{falso}$;

.**enquanto** $\alpha(v) \neq \emptyset$ e $e(v) > 0$ **faça**

. tome $(v, w) \in \alpha(v)$;
. $\delta = \min\{c(v, w) - f(v, w), e(v)\}$
. $f(v, w) = f(v, w) + \delta$;
. $e(v) = e(v) - \delta$;
. $e(w) = e(w) + \delta$;
. coloque (v, δ) na pilha *Histórico*(w);
. **se** $c(v, w) = f(v, w)$
. **então** elimine (v, w) de $\alpha(v)$; /* fecha (v, w) */
. $b = b$ **ou** $(w \neq t)$;
. **retorne** b ;

função *EmpurraCamada* (inteiro i ; capacidade c ; fluxo f):

booleano b ;

vértice v ;

. b =falso;

.para todo $v \in V_i$ faça

. $b = b$ ou *EmpurraVértice*(v, c, f);

.retorne b ;

função *BalanceiaVértice* (vértice v ; fluxo f):

real δ, x ;

booleano b ;

vértice w ;

. b =verdadeiro;

.enquanto $e(v) > 0$ faça

. retire (w, δ) da pilha *Histórico*(v);

. $x = \min\{\delta, e(v)\}$;

. $f(w, v) = f(w, v) - x$;

. $e(v) = e(v) - x$;

. $e(w) = e(w) + x$;

. $b = b$ e $(\alpha(w) = \emptyset)$;

.para todo $(w, v) \in \beta(v)$ faça /* fecha v */;

. elimine (w, v) de $\alpha(w)$;

.retorne b ;

função *BalanceiaCamada* (inteiro i ; fluxo f):

booleano b ;

vértice v ;

. b =verdadeiro;

.para todo $v \in V_i$ tal que $e(v) > 0$ faça

. $b = b$ e *BalanceiaVértice*(v, f);

.retorne b ;

Com estas funções, podemos escrever o algoritmo de Karzanov, que chamaremos de *KSP*, da seguinte maneira:

função *KSP* (grafo induzido G ; capacidade c):
 fluxo f ;
 vértice v, w ;
 inteiro i, j ;

```
.f = 0;
.para todo  $v \in V$  faça
.  para toda aresta  $(v, w) \in A$  faça
.    insira  $(v, w)$  em  $\alpha(v)$ ;
.  para toda aresta  $(w, v) \in A$  faça
.    insira  $(w, v)$  em  $\beta(v)$ ;
.   $e(v) = 0$ ;
.e( $s$ ) =  $\infty$ ;
.i = 1;

.repita
.   $i = i - 1$ ;
.  enquanto EmpurraCamada( $i, c, f$ ) faça
.     $i = i + 1$ ;
.   $i = \max\{j \mid \exists v \in V_j \text{ com } e(v) > 0 \text{ e } \{t\} \neq V_j\}$ ;
.  enquanto  $i > 0$  e BalanceiaCamada( $i, f$ ) faça
.     $i = i - 1$ ;
.até que  $i = 0$ ;
.retorne  $f$ ;
```

Lema 1.8 : As três afirmações abaixo são verdadeiras:

1. Logo após uma sequência de chamadas da função *EmpurraCamada*, f é um pré-fluxo.
2. Antes de cada execução da função *BalanceiaCamada*, f é um pré-fluxo.
3. Quando a função *BalanceiaVértice*(v, f) é executada, v está f -bloqueado.

Prova: Será feita por indução. Na primeira sequência de *EmpurraCamadas*, isto é verdade, pois um vértice somente fica com excesso positivo quando todas as arestas que saem dele estão saturadas. Logo, a base da indução é também verdadeira para as afirmações (2) e (3).

Suponha que a operação *BalanceiaCamada*($i, .$), devolve verdadeiro. Seja v tal que $\alpha(v) = \emptyset$. Então v está f -bloqueado pois as arestas eliminadas de $\alpha(v)$ ou estão saturadas ou foram eliminadas durante a execução de uma função *BalanceiaCamada* anterior. Se a operação *BalanceiaCamada*($i, .$) devolve verdadeiro, o fluxo foi alterado apenas nas arestas (v, w) tais que $\alpha(v) = \emptyset$, e portanto, pela afirmação anterior, v deve ser f -bloqueado. Logo, as afirmações (2) e (3) continuam valendo para a camada $i - 1$. Então, antes de

uma seqüência de execuções da operação *EmpurraCamada*, as restrições de pré-fluxo valem para todos os vértice de V , com exceção de alguns vértices de V_i . Logo após executar esta seqüência de *EmpurraCamadas*, todo vértice v com excesso positivo estará f -bloqueado, pois para toda aresta (v, w) temos que, ou (v, w) está saturada ou w está f -bloqueado. Logo, f é um pré-fluxo, e a afirmação (1) é verdadeira. ■

Lema 1.9 : A função *BalanceiaVértice* é chamada no máximo uma vez por vértice.

Prova: Quando a função *BalanceiaVértice*($v, .$) é chamada, todas as arestas $(w, v) \in \beta(v)$ são fechadas. Logo, v não receberá mais fluxo através da função *EmpurraVértice* e nem através da função *BalanceiaCamada*, pois esta função só devolve fluxo para quem cedeu. Logo, não ocorrerá outras chamadas da função *BalanceiaVértice* para o vértice v . ■

Lema 1.10 : A função *EmpurraVértice* é chamada no máximo $O(n^2)$ vezes durante a execução do algoritmo.

Prova: Pelo lema 1.9, o número máximo de seqüências de execuções da função *BalanceiaCamada* é n . Como numa seqüência de operações *EmpurraCamada* são executadas no máximo n operações *EmpurraVértice*, durante a execução do algoritmo podem ser executadas no máximo n^2 operações *EmpurraVértice*. ■

Teorema 1.5 : A função *KSP* requer tempo $O(n^2)$.

Prova: O tempo gasto nas operações *BalanceiaCamada* é $O(m)$. O tempo gasto nas operações *EmpurraVértice* é $O(1)$ por vértice saturado mais $O(1)$ por execução da mesma, pois no máximo uma aresta não é saturada. Pelo lema 1.10 segue o teorema. ■

Tarjan [20], em 1983, propôs uma nova versão para o algoritmo de Karzanov. Esta nova versão resultou em um algoritmo que possui a mesma complexidade, mas que é muito mais simples, necessita de menos memória e segundo o autor é mais eficiente na prática.

1.6 O Algoritmo de Cherkasky

Cherkasky [4] refinou o algoritmo de Karzanov, obtendo um algoritmo melhor quando o grafo não é denso. Além do artigo original em russo, podemos encontrar maiores detalhes sobre este algoritmo no artigo de Galil [12].

A idéia de Cherkasky é agrupar as camadas em conjuntos disjuntos de camadas, que serão chamados super-camadas, e empurrar fluxo de uma super-camada para outra, usando um algoritmo semelhante ao subalgoritmo de Dinic.

Definição 1.18 : Uma **super-camada** SC é um conjunto $SC = \{V_p, V_{p+1}, \dots, V_q\}$ de camadas, onde V_p e V_q são respectivamente o **início** e o **fim** desta super-camada. As camadas que são fim de super-camadas são chamadas de **camadas especiais**. E mais, todo vértice de uma camada especial é um **vértice especial**.

As camadas $\{V_0, V_1, V_2, \dots, V_k = \{t\}\}$ são particionadas em super-camadas $\{SC_0, SC_1, \dots, SC_l\}$ de tal maneira que $SC_0 = \{V_0\}$, o início de SC_{i+1} e o fim de SC_i são duas camadas consecutivas e $\{t\}$ é uma camada especial. Além disso,

$$|SC_i| \leq x \quad \text{e} \quad \sum_{V_q \text{ é especial}} |V_q| \leq K,$$

onde x e K são dois parâmetros que serão escolhidos mais tarde.

O algoritmo faz uso de uma função *EmpurraVértice*, diferente da seção anterior. Esta função recebe um vértice e tenta enviar seu excesso para um vértice de uma camada do fim da sua super-camada. Ela faz isto da mesma maneira que a função *DSP*, definida na seção 1.4, faz para mandar fluxo de s para t . Além disso, retornará 'verdadeiro', se conseguir enviar algum fluxo e a última camada não for $\{t\}$. As funções *EmpurraCamada* e *BalanceiaCamada* são idênticas às da seção anterior.

Figura 1.4 : Um grafo constituído por caminhos de s a t , de comprimento 15 e particionado em super camadas.

A seguir, descreveremos as funções *EmpurraSuperCamada* e *BalanceiaSuperCamada*. Para facilitar, chamaremos de $fim(i)$, o índice da camada que é fim da super-camada i . No exemplo da figura 1.4, $fim(2)=7$ e $fim(4)=15$.

função *EmpurraSuperCamada* (inteiro i ; capacidade c ; fluxo f):
.retorne *EmpurraCamada*($fim(i-1), c, f$);

função *BalanceiaSuperCamada* (inteiro i ; capacidade c ; fluxo f):
 booleano b ;
 inteiro j ;

$b = \text{verdadeiro}$;
.para j de $fim(i)$ até $fim(i-1)+1$ **faça**
 . *BalanceiaCamada*(j, f);
 . $b = b$ e **não** (*EmpurraCamada*($j-i, c, f$));
.retorne b ;

O algoritmo principal é muito semelhante ao algoritmo de Karzanov.

função *CSP* (*grafo induzido* G ; *capacidade* c):

fluxo f ;

vértice v, w ;

inteiro i, j ;

. $f = 0$;

.para todo $v \in V$ faça

. para toda aresta $(v, w) \in A$ faça

. insira (v, w) em $\alpha(v)$;

. para toda aresta $(w, v) \in A$ faça

. insira (w, v) em $\beta(v)$;

. $e(s) = \infty$;

. $i = 0$;

.particione as camadas em super-camadas;

.repita

. enquanto *EmpurraSuperCamada*(i, c, f) faça

. $i = i + 1$;

. $i = \max\{j | \exists v \in V_{fim(j)} \text{ com } e(v) > 0\}$;

. enquanto $i > 0$ e *BalanceiaSuperCamada*(i, c, f) faça

. $i = i - 1$;

. $i = i - 1$

.até que $i = 0$;

.retorne f ;

O modo de particionar as camadas, em conjuntos de super-camadas, será explicado no final desta seção.

Na verdade, as pilhas *Histórico*(v) podem ser eliminadas, mas não mostraremos como fazer isto. Esta redução é explicada no artigo de Galil [12].

Lema 1.11 : As três afirmações abaixo são verdadeiras:

1. Logo após uma seqüência de chamadas da função *EmpurraSuperCamada*, f é um pré-fluxo;
2. antes de cada execução da função *BalanceiaSuperCamada*, f é um pré-fluxo;
3. quando a função *BalanceiaVértice*(v, f) é executada, v está f -bloqueado.

Prova: Análoga à prova do lema 1.8.

■

Lema 1.12 : A função *BalanceiaVértice* é chamada no máximo uma vez para cada vértice especial.

Prova: Análoga à prova do lema 1.9. ■

Lema 1.13 : Durante a execução do algoritmo a função *EmpurraVértice* é chamada pela função *EmpurraSuperCamada* no máximo K^2 vezes.

Prova: Análoga à prova do lema 1.10. ■

Definição 1.19 : Chamamos de **micro-fonte**, um vértice que ficou com excesso positivo durante uma chamada da função *BalanceiaVértice*.

Observe que se uma micro-fonte ocorre na camada i , a função *EmpurraCamada*(i, c, f) tentará empurrar seu excesso para a camada final da super-camada.

Definição 1.20 : Chamamos de **redução de fluxo** de uma aresta (w, v) , a operação de se reduzir o fluxo $f(w, v)$ pela função *BalanceiaVértice*(v, f).

Lema 1.14 : O número máximo de ocorrência de micro-fontes é $O(m)$ e o número de reduções de fluxo é $O(xm)$.

Prova: Seja $\overline{A}$ o conjunto das arestas onde o fluxo foi reduzido durante a execução da função *BalanceiaSuperCamada*($i, \dots$) e seja $\overline{V}$ o conjunto dos vértices incidentes nestas arestas. Diremos que uma aresta (v, w) é *boa*, se $(v, w) \in \overline{A}$ e ela está sendo reduzida pela primeira ou última vez; e *ruim*, caso contrário. Podemos inferir que o número de ocorrências de arestas boas é no máximo $2m$. Para cada vértice $v \in \overline{V}$ escolheremos arbitrariamente uma aresta saindo de v e diremos que esta aresta é *especial*. Para cada vértice v , diremos que v possui um *caminho especial*, que é aquele formado pelas arestas especiais, até encontrar uma aresta boa. Pelo lema 1.12, toda aresta de $\overline{A}$ entre dois vértices das duas últimas camadas de uma super camada é uma aresta boa. De acordo com a definição, se dois caminhos especiais têm um vértice em comum, então um dos caminhos conterá o outro. Considere agora um caminho especial de um vértice que é micro-fonte e seja (w, v) uma aresta deste caminho, que deve ser ruim. Logo, v foi balanceado numa etapa anterior do algoritmo, e portanto, v não pode ser uma micro-fonte. Então os caminhos especiais de micro-fontes são disjuntos nos vértices. Logo, o número máximo de ocorrências de micro-fontes é $2m$ (número de arestas boas).

Por outro lado, o número de reduções de fluxo é igual ao número de arestas boas mais o número de arestas ruins. De acordo com a definição de caminhos especiais, podemos ter no máximo x caminhos especiais para cada aresta boa. Logo, o número de reduções é $O(xm)$. ■

Teorema 1.6 : O tempo de execução do algoritmo de Cherkasky é, no pior caso, $O((K^2 + m)x)$.

Prova: O tempo gasto para executar todas as operações *EmpurraVértice* é $O(1)$ por saturação de aresta mais $O(x)$ por execução da mesma. Pelos lemas 1.13 e 1.14, obtemos que $O((K^2 + m)x)$ é o tempo gasto para executar todas as operações *EmpurraVértice*. Ainda pelo lema 1.14, o tempo gasto em *BalaceiaVértice* é $O(xm)$. Portanto, o tempo total gasto pelo algoritmo é $O((K^2 + m)x)$. ■

Vejamos agora como fazer a partição em super-camadas, supondo x conhecido. A escolha das super-camadas será feita a partir da escolha das camadas especiais. Em primeiro lugar, faça $SC_0 = \{s\}$. Divida as demais camadas em conjuntos de $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ camadas. Para cada um destes conjuntos de camadas, escolha para camada especial, a camada com menor número de elementos (no último bloco escolha t , mesmo que ocorra empate). Tais camadas definem o fim de cada super-camada. Construa as super-camadas a partir das camadas especiais. Com esta escolha temos que:

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \sum_{V_j \text{ é especial}} |V_j| \leq n + 1.$$

Ou seja, $xK = O(n)$. Assim, se escolhermos $x = \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{m}} \right\rfloor$, teremos $K = O(\sqrt{m})$ e a complexidade do algoritmo de Cherkasky será $O(n\sqrt{m})$.

1.7 O Algoritmo de Galil

O algoritmo de Galil [12] é um refinamento do algoritmo de Cherkasky. A inovação está na construção de uma floresta em cada super-camada, procurando com isso diminuir o trabalho das funções *EmpurraSuperCamada* e *BalanceiaSuperCamada*. Estas florestas são construídas no início do algoritmo e alteradas dinamicamente durante a execução do mesmo.

Para cada super-camada SC_i , $i > 0$, associamos uma floresta F_i . As folhas da floresta F_i são vértices em $V_{fim(i-1)}$ e as raízes são vértices em $V_{fim(i)}$. Os vértices que possuem mais de uma aresta aberta entrando, bem como as folhas e as raízes, serão chamados *junções* e os demais vértices abertos serão chamados *vértices pequenos*. Uma aresta *grande aresta*, $(\hat{u}, \hat{v})$, corresponderá a um caminho de $\hat{u}$ até $\hat{v}$ de vértices pequenos, onde $\hat{u}$ e $\hat{v}$ são junções. Assim, uma floresta será uma floresta maximal, de arestas grandes. Veja figura 1.5. Chamaremos de *arestas pequenas*, as arestas do grafo.

Figura 1.5 : Uma floresta para uma super-camada.

Cada aresta grande, $\hat{a}$, possui uma lista $La(\hat{a})$ de suas arestas pequenas. Além disso, possui dois tipos de fluxo: *FluxoAnterior* e *FluxoAtual*. *FluxoAtual* corresponde ao fluxo adicionado na última chamada da função *EmpurraCamada*, e *FluxoAnterior* corresponde ao fluxo adicionado em outras chamadas. Cada aresta pequena, pode já possuir um fluxo. Se a é uma aresta pequena, em uma aresta grande $\hat{a}$, o fluxo total de a , $FluxoTotal(a)$, pode ser computado como o fluxo corrente de a , somado ao $FluxoAnterior(\hat{a})$ e ao $FluxoAtual(\hat{a})$. Cada aresta grande $\hat{a}$, possui uma capacidade (residual) $c(\hat{a})$,

$$c(\hat{a}) = \min\{(c(a) - FluxoTotal(a)) \mid a \in La(\hat{a})\}.$$

Cada junção $\hat{v}$, possui uma lista, $Lv(\hat{v})$, das arestas grandes entrando em $\hat{v}$ e o valor do excesso de $\hat{v}$, $e(\hat{v})$.

As árvores são alteradas através das funções *Remove* e *Reconecta*. A função *Remove* elimina uma aresta grande. A função *Reconecta* tenta reconectar a junção que era início da aresta grande removida, ou a uma outra árvore, ou a um vértice da camada final da super-camada.

A função *Remove*($\hat{a}$), calcula $FluxoTotal(a)$ de toda aresta a em $La(\hat{a})$, fechando as arestas saturadas. Além disso, a função *Remove*, elimina $\hat{a} = (\hat{w}, \hat{v})$ de $Lv(\hat{v})$. Após esta eliminação, se obtivermos $|Lv(\hat{v})| = 1$, $\hat{v}$ não poderá continuar sendo uma junção. Neste caso, se $\hat{a}_1$ e $\hat{a}_2$ são as duas arestas grandes entrando e saindo de $\hat{v}$ respectivamente, uma nova aresta $\tilde{a}$ deve ser criada em substituição às arestas grandes $\hat{a}_1$ e $\hat{a}_2$. Para tanto, calcule $FluxoTotal(a)$, para toda aresta a em $\hat{a}_1$ ou $\hat{a}_2$. Construa $La(\tilde{a})$, concatenando $\hat{a}_1$ e $\hat{a}_2$. Faça $c(\tilde{a}) = \min\{c(\hat{a}_1), c(\hat{a}_2)\}$, $FluxoAnterior = FluxoAtual = 0$ e coloque $\tilde{a}$ em $Lv(\hat{z})$, onde $\hat{z}$ é a junção na qual $\hat{a}_2$ estava entrando. Assim, o tempo gasto para executar uma função *Remove* é $O(x)$.

Ao eliminar uma aresta grande saindo do vértice $\hat{v}$, é necessário reconectar $\hat{v}$, ou a um vértice da última camada da super-camada, ou a uma outra aresta grande (se possível). Para reconectar um vértice, percorre-se as arestas pequenas, procurando vértices de arestas grandes, vértices da última camada, ou vértices fechados; neste último caso, fecha-se todas as arestas entrando neste vértice e continua-se a busca a partir do vértice anterior. Eventualmente *Reconecta*($\hat{v}$) pode falhar. Neste caso, fecha-se $\hat{v}$, e $\hat{v}$ deixará de ser uma junção, mas isto será tratado pela função que chamou *Reconecta*($\hat{v}$). Se *Reconecta* encontrar um vértice pequeno w de uma aresta grande, este vértice passará a ser uma junção, e outras arestas grandes devem ser criadas, num processo inverso à remoção de uma junção. Assim o tempo gasto em um *Reconecta* é $O(l + x) = O((l + 1)x)$, onde l é o número de arestas fechadas durante a execução da função.

Agora podemos descrever a nova função *EmpurraSuperCamada*. Esta função é constituída de duas fases. Na primeira fase, é enviada a maior quantidade de fluxo possível, através das arestas grandes, para os vértices da camada final da super-camada. Cada aresta grande que se torna saturada, é inserida numa pilha P (detalhes sobre P serão dados mais adiante). A segunda fase vai removendo as arestas de P . Cada aresta grande $\hat{a} = (\hat{v}, \hat{w})$ removida de P , é removida da floresta através da função *Remove*. Além disso, procura-se reconectar $\hat{v}$ através da função *Reconnecta*. Em caso de $\hat{v}$ ser reconectado, tenta-se mandar seu fluxo, ou até a raiz da árvore reconectada, ou até encontrar uma aresta grande saturada. No caso de não ser possível reconectar $\hat{v}$, $\hat{v}$ é balanceado, e toda aresta grande de $Lv(\hat{v})$ é colocada na pilha.

A pilha P contém pilhas P_i de arestas grandes saindo de V_i . As pilhas P_i são listas duplamente ligadas. Além disso, P_{j_1} é considerado próximo do topo de P_{j_2} , se $j_1 > j_2$. Assim, para remover um elemento do topo de P é necessário procurar i tal que $i = \max\{j \mid P_j \neq \emptyset\}$, que gasta $O(x)$ tempo. Se ao inserirmos uma aresta em P , guardarmos a posição dela na pilha, podemos eliminar arestas do interior de P em tempo constante.

Suponha que uma função *Remove* elimine uma junção $\hat{v}$. Sejam $(\hat{w}_1, \hat{v})$ e $(\hat{v}, \hat{w}_2)$, as arestas grandes entrando e saindo de $\hat{v}$, respectivamente. Se $(\hat{w}_1, \hat{v})$ estava na pilha ($(\hat{v}, \hat{w}_2)$ não poderia estar na pilha) ela deverá ser eliminada da mesma e a nova aresta $(\hat{w}_1, \hat{w}_2)$ deverá ser inserida.

Suponha agora que a função *Reconnecta* crie uma nova junção $\hat{v}$ e duas novas arestas grandes $(\hat{w}_1, \hat{v})$ e $(\hat{v}, \hat{w}_2)$. Se a aresta grande $(\hat{w}_1, \hat{w}_2)$ estava na pilha, ela deverá ser eliminada da mesma, e pelo menos uma das duas arestas grandes criadas deve ser inserida na pilha. Cada nova aresta grande gerada deverá ser inserida na pilha, quando uma das suas arestas pequenas estiver saturada ou quando ela estiver saindo de um vértice fechado.

A seguir, temos a função *EmpurraSuperCamada*.

função *EmpurraSuperCamada* (*inteiro* i ; *capacidade* c ; *fluxo* f ; *pilha* P):
inteiro j ;
booleano b ;
junção $\hat{v}, \hat{w}, \tilde{v}, \tilde{w}, \hat{w}'$;
grande aresta $\hat{a}, \tilde{a}$;
real δ ;

/ Fase I */*

.para $j = fim(i - 1)$ **até** $fim(i) - 1$ **faça**
 .para cada junção $\hat{v} \in V_j$ **faça**
 . seja $\hat{a} = (\hat{v}, \hat{w})$ a aresta grande saindo de $\hat{v}$;
 . $FluxoAnterior(\hat{a}) = FluxoAnterior(\hat{a}) + FluxoAtual(\hat{a})$;
 . $\delta = \min\{e(\hat{v}), c(\hat{a})\}$;
 . $e(\hat{v}) = e(\hat{v}) - \delta$;
 . $e(\hat{w}) = e(\hat{w}) + \delta$;
 . $c(\hat{a}) = c(\hat{a}) - \delta$;
 . $FluxoAtual(\hat{a}) = \delta$;
 . **se** $c(\hat{a}) = 0$
 então insira $\hat{a}$ em P ;

/ Fase II */*

.enquanto P não está vazia **faça**
 . remova $\hat{a} = (\hat{v}, \hat{w})$ de P ;
 . $Remove(\hat{a})$;
 . **se** $Reconnecta(\hat{v})$ e $e(\hat{v}) > 0$
 então para toda aresta $\hat{a} = (\hat{v}, \hat{w})$ no caminho de $\hat{v}$ a $\hat{w} \in V_{fim(i)}$,
 ou $(\hat{w}, \hat{w}') \in P$ **faça**
 . $\delta = \min\{e(\hat{v}), c(\hat{a})\}$;
 . $e(\hat{v}) = e(\hat{v}) - \delta$;
 . $e(\hat{w}) = e(\hat{w}) + \delta$;
 . $c(\hat{a}) = c(\hat{a}) - \delta$;
 . $FluxoAtual(\hat{a}) = FluxoAtual(\hat{a}) + \delta$;
 . **se** $c(\hat{a}) = 0$
 então insira $\hat{a}$ em P
 . **senão se** $\hat{v} \notin V_{fim(i)}$
 então $BalanceiaJunção(\hat{v}, f)$;
 . **para** $\tilde{a} \in Lv(\hat{v})$ **faça**
 insira $\tilde{a}$ em P ;

Quando eliminamos uma junção, devemos balanceá-la, e podemos fazer isto facilmente, alterando a função *Remove*. A função *BalanceiaJunção* pode ser implementada de maneira semelhante à função *BalanceiaVértice*, e neste caso, a função *EmpurraSuperCamada* deveria atualizar a pilha *Histórico* ou usar uma outra implementação que dispensa a pilha *Histórico*, mas omitiremos esta outra implementação, que pode ser encontrada no artigo de Galil [12].

Lema 1.15 : O tempo necessário para executar a função *EmpurraSuperCamada*($i, \dots$) é $O(K_i + xr)$, onde $K_i = |V_{fm(i-1)}|$ e r é o número de arestas fechadas durante a execução desta função.

Prova: O tempo gasto na fase I é $O(K_i)$. O tempo gasto em uma função *Reconecta* é $O((l+1)x)$, onde l é o número de arestas fechadas pelo *Reconecta*. Mas a função *Remove*, que é executada em tempo $O(x)$, fecha pelo menos uma aresta. O tempo gasto para balancear um vértice $\hat{v}$ é no máximo $|Lv(\hat{v})|$, que é limitado pelo número de vezes em que acrescentamos fluxo nele; logo, este tempo não precisa ser computado. ■

A função *BalanceiaSuperCamada*, descrita na seção anterior, necessitará de algumas modificações. A função ao encontrar uma micro-fonte v , procurará um caminho por arestas pequenas até encontrar um vértice em $V_{fm(i)}$, um vértice fechado ou um vértice de uma grande aresta. Nos dois primeiros casos, a função procede de maneira idêntica à da seção anterior. No último caso, as arestas grandes serão percorridas, e seus fluxos transferidos para suas arestas pequenas. No caso de alguma aresta grande se tornar saturada, ela é inserida em P . Usando a pilha, após algumas aplicações das funções *Remove* e *Reconecta*, que são feitas de maneira semelhante como foi feito na função *EmpurraSuperCamada*, a floresta estará recomposta.

O tempo de todas as execuções da função *BalanceiaSuperCamada* é $O(z + yx + lx)$, onde z é o número de reduções de fluxo, y é o número de ocorrências de micro-fontes e l é o número de arestas fechadas durante a execução da função.

Como os lemas 1.13 e 1.14 continuam valendo, temos que o tempo total do algoritmo é $O(K^2 + mx)$. Escolhendo agora $K = O((nm)^{\frac{1}{3}})$, temos que o tempo total do algoritmo é $O((nm)^{\frac{2}{3}})$.

1.8 O Algoritmo de Malhotra, Kumar e Maheshwari

Em 1978, Malhotra, Kumar e Maheshwari [16] propuseram um algoritmo para resolver o subproblema de Dinic, independente dos algoritmos de Karzanov, Cherkasky e Galil. O tempo necessário para executar este algoritmo é o mesmo obtido por Karzanov, porém o algoritmo é muito mais simples.

Definição 1.21 : Seja $R = (G, s, t, c)$ uma rede e f um fluxo em R . Para cada vértice v , definimos **fluxo potencial** de v , $p_f(v)$, da seguinte maneira:

$$p_f(v) = \min\left\{ \sum_{(v,w) \in A} (c(v,w) - f(v,w)), \sum_{(w,v) \in A} (c(w,v) - f(w,v)) \right\} \quad (v \in V - \{s, t\}),$$

$$p_f(s) = \sum_{(s,w) \in A} (c(s,w) - f(s,w)),$$

$$p_f(t) = \sum_{(w,t) \in A} (c(w,t) - f(w,t)).$$

Lema 1.16 : Seja v um vértice tal que $p_f(v) = \min\{p_f(w) \mid w \in V\}$. Então existe um fluxo f' tal que $\text{valor}(f') = \text{valor}(f) + p_f(v)$.

Prova: Pela forma como foi definido $p_f(v)$, é fácil ver que podemos aumentar o fluxo nas arestas que estão entrando em (saindo de) v de modo que a soma destes aumentos sejam iguais a $p_f(v)$, sem desobedecermos as restrições de capacidade. Desta forma, se v está na camada V_i , após ter incrementado f , os vértices que estão com excesso positivo estão em V_{i+1} , e aqueles com excesso negativo estão em V_{i-1} . Note que, para cada $j > i$, podemos balancear os vértices de V_j com excesso positivo, passando seu excesso para camada V_{j+1} , desde que o excesso seja inferior ao seu potencial de fluxo. Mas isto sempre ocorre pelo modo como v foi escolhido. Indutivamente, podemos ir balanceando os vértices de todas as camadas superiores a V_i até chegar a $V_k = \{t\}$. De forma análoga, podemos ir balanceando todos os vértices com excesso negativo até chegar a $V_0 = \{s\}$. Assim, após balancear todas as camadas obtemos um fluxo igual a $\text{valor}(f) + p_f(v)$. ■

A demonstração do lema 1.16 sugere um algoritmo para o subproblema de Dinic.

função *MKMSP* (*grafo induzido* G ; *capacidade* c):

fluxo f ;

vértice v, w ;

$f = 0$;

enquanto $\nexists V_i = \emptyset$ **faça**

. selecione $v \in V$ tal que $p_f(v) = \min\{p_f(v) \mid v \in V\}$;

. incremente f da maneira sugerida na demonstração do lema 1.16;

. remova as arestas saturadas e os vértices que ficaram isolados;

. atualiza p_f e remova todos os vértices w com $p_f(w) = 0$;

retorne f ;

Cada iteração da função *MKMSP* necessita de $O(n + m_i)$ tempo, onde m_i é o número de arestas removidas na iteração i . Como são necessárias no máximo n iterações o tempo total requerido pela função é $O(n^2 + m) = O(n^2)$. Assim, o algoritmo de Malhotra, Kumar e Maheshwari para encontrar um fluxo máximo tem complexidade $O(n^3)$.

1.9 O Algoritmo de Galil e Naamad

Em 1980, Galil e Naamad [13] propuseram outro algoritmo para resolver o subproblema de Dinic. Este algoritmo necessita $O(m \lg^2 n)$ tempo. O referido algoritmo é melhor que todos os anteriores para $m = O(n^{2-\epsilon})$, $\epsilon > 0$ e n suficientemente grande.

Este algoritmo é semelhante ao algoritmo de Dinic. A diferença fundamental está no fato de que todos os caminhos percorridos são armazenados em fragmentos de caminhos. Quando um caminho aumentador é encontrado, são eliminadas as arestas saturadas, e preservados os fragmentos restantes deste caminho. Se durante a procura de um caminho aumentador, esbarramos em um fragmento de caminho, este será aproveitado melhorando o tempo de procura dos caminhos aumentadores. A seguir, descrevemos o algoritmo.

função *GNSP* (*grafo induzido* G ; *capacidade* c):

caminho C, C' ;

vértice v ;

aresta a ;

fluxo f ;

. $v = s$;

. $C = \emptyset$;

. $f = 0$;

enquanto $\alpha(s) \neq \emptyset$ **faça**

. **se** $\alpha(v) = \emptyset$

. **então** seja a a última aresta deste caminho;

. $v =$ início de a ;

. elimine a de $\alpha(v)$;

. elimine a de C

. **senão se** v não está em nenhum caminho

. **então** seja a a próxima aresta de $\alpha(v)$;

. $C' = a$

. **senão** divida o caminho de v na aresta entrando em v ;

. $C' =$ segunda metade do caminho;

. $C = C$ concatenado com C' ;

. $v =$ fim de C' ;

. **se** $v = t$

. **então** aumente o fluxo f através de C ;

. divida C nas arestas saturadas, fechando-as;

. $v =$ início da aresta saturada mais próxima de s ;

retorne f ;

Daremos agora detalhes da estrutura de dados. Em primeiro lugar, os caminhos serão representados por (2-3) árvores balanceadas e ordenadas. As folhas das árvores armazenarão as arestas. Cada nó interno, x , de uma árvore, representa o caminho, $Cam(x)$, das arestas associadas às suas folhas, na ordem das mesmas. Cada nó interno x tem um fluxo $f(x)$, bem como uma capacidade $c(x)$, associados ao seu caminho. Assim, o fluxo de cada aresta a , $FluxoTotal(a)$, será a somatória de $f(x)$, para todo x . ancestral de a . Além disso,

$$c(x) = \min_{a \in Cam(x)} \{ (c(a) - FluxoTotal(a)) \}.$$

Em um nó x , podemos, eventualmente, transferir seu fluxo para seus filhos, através dos seguintes comandos:

.para todo x_i , filho de x , faça
 . $f(x_i) = f(x_i) + f(x)$;
 . $c(x_i) = c(x_i) - f(x)$;
 . $f(x) = 0$;

Esta transferência de fluxo é usada para concatenar caminhos. Porém, omitiremos maiores detalhes.

O aumento do fluxo, nos caminhos aumentadores, pode ser feita com os seguintes comandos:

. $f(r) = f(r) + c(r)$;
 . $c(r) = 0$;

Após aumentar o fluxo, temos que localizar as arestas saturadas e eliminá-las.

Cada operação de concatenação ou divisão de caminho pode ser realizada em tempo $O(\lg n)$. O tempo total gasto em eliminações de arestas é $O(m \lg n)$. O número de concatenações é no máximo $O(m \lg n)$. Galil e Naamad, demonstraram a última afirmação através de um lema combinatorial (cf. [13]). Este tratamento dado aos caminhos é essencialmente a utilização das árvores dinâmicas, com árvores balanceadas, que veremos no capítulo 3. Neste capítulo, poderemos ver outra demonstração deste fato no teorema 3.2.

1.10 O Algoritmo de Sleator e Tarjan

O algoritmo de Sleator e Tarjan [18] é essencialmente o algoritmo de *GNSP*. A diferença está na utilização de árvores enviesadas, ao invés de árvores balanceadas. Esta modificação fornece um algoritmo de complexidade $O(m \lg n)$ para cada fase de Dinic.

Na descrição do algoritmo, usaremos as funções sobre árvores dinâmicas: *raiz*, *enxerta*, *poda*, *atualiza*, *customin*, *custo* e *pai*, que estão definidas no capítulo 3.

O algoritmo armazena várias árvores, que correspondem aos caminhos percorridos. O custo (necessário para a utilização das árvores dinâmicas) de cada aresta é a capacidade residual da mesma. No início, cada árvore é um vértice isolado do grafo.

Vejamos a seguir, uma descrição do algoritmo.

função *STSP* (grafo induzido G ; capacidade c):

vértice v, w ;

fluxo f ;

. $v = s$;

.enquanto $\alpha(s) \neq \emptyset$ faça

. se $v \neq t$

. então se $\exists (v, w) \in \alpha(v)$

. então *enxerta*(v, w , capacidade residual (v, w));

. $v = \text{raiz}(v)$

. senão para toda aresta $(w, v) \in \beta(v)$ faça

. se $(w, v) \in$ alguma árvore

. então *poda*(w);

. elimine (w, v) de $\alpha(w)$

. senão *atualiza*($s, \text{custo}(\text{customin}(s))$);

. enquanto $\text{customin}(s) \neq 0$ faça

. elimine $(v, \text{pai}(v))$ de $\alpha(v)$;

. *poda*(v);

.calcule f através das capacidades residuais;

.retorne f ;

Este algoritmo executa $O(m)$ operações sobre árvores dinâmicas. E como veremos no capítulo 3, todas estas operações podem ser executadas em tempo $O(m \lg n)$.

1.11 O algoritmo de Shiloach e Vishkin

Em 1982, Shiloach e Vishkin [17] apresentaram um novo algoritmo paralelo para o subproblema de Dinic. A implementação seqüencial deste algoritmo necessita de tempo $O(n^3)$.

O algoritmo usa as operações *Empurra Vértice* e *Balanceia Vértice*, definidas para o algoritmo de Karzanov. No entanto, a ordem de execução destas operações é diferente. O algoritmo utiliza uma fila F , onde são armazenados todos os vértices com excesso positivo.

A seguir, damos a descrição do algoritmo:

função SVSP (grafo induzido G ; capacidade c):

fluxo f ;

vértice v ;

fila F ;

. $f = 0$;

. $e(s) = \sum_{(s,v) \in A} c(s, v)$;

. $EmpurraVértice(s, c, f)$;

.armazene os vértices não balanceados em F ;

.**enquanto** $F \neq \emptyset$ **faça**

. remova v de F ;

. $EmpurraVértice(v, c, f)$;

. $BalanceiaVértice(v, f)$;

. armazene os vértices não balanceados em F ;

.**retorne** f ;

Faremos uma demonstração da complexidade deste algoritmo, diferente da demonstração encontrada no artigo original [17], por julgarmos mais simples. Antes vejamos uma definição.

Definição 1.22 : Seja v um vértice que foi balanceado na iteração i . Definiremos, indutivamente, o conjunto dos vértices que **receberam fluxo** de v da seguinte maneira: $R_0(v)$ é o conjunto dos vértices que receberam fluxo de v durante a execução da função $BalanceiaCamada(v, f)$ e, $R_{j+1}(v)$ são os vértices que receberam fluxo através da função $EmpurraVértice$, aplicada aos vértices de $R_j(v)$. Além disso, definimos $R_0(s)$ como sendo o conjunto dos vértices v tal que $(s, v) \in A$.

Lema 1.17 : Quando a operação $BalanceiaVértice$ é aplicada a um vértice com excesso positivo, o excesso deste vértice não tornará mais positivo.

Prova: Análoga à demonstração do lema 1.9. ■

Lema 1.18 : Toda vez que um vértice v fica com excesso positivo, deve existir w tal que $v \in R_j(w)$ para algum j , inteiro, maior ou igual a zero.

Prova: A demonstração será feita por indução no número de execuções da função $EmpurraVértice$. A primeira vez que a operação $EmpurraVértice$ é executada, os vértices inseridos em F pertencem a $R_0(s)$. Um vértice pode ficar com excesso positivo, durante a execução da operação $BalanceiaVértice(w, .)$ ou durante a execução da função

EmpurraVértice($w, \dots$). No primeiro caso, $v \in R_0(w)$. No segundo caso, por indução, $w \in R_j(z)$, com j inteiro maior que zero. Logo, $v \in R_{j+1}(z)$. ■

Lema 1.19 : A função *EmpurraCamada* é chamada no máximo n^2 vezes durante toda a execução do algoritmo.

Prova: Pelo lema 1.18, um vértice pode entrar na fila no máximo n vezes. Logo, a função *EmpurraCamada* é chamada no máximo n^2 vezes durante toda a execução do algoritmo. ■

Teorema 1.7 : Cada chamada da função *SVSP* requer tempo $O(n^2)$.

Prova: Como na função *KSP*, o tempo na execução de todas operações *EmpurraCamada* é $O(1)$ por execução da operação *EmpurraVértice* mais $O(1)$ por aresta saturada. Pelo lema 1.19, o resultado segue. ■

1.12 O Algoritmo de Gabow

Em 1983, Gabow [11] propôs um novo algoritmo, de ‘scaling’, para o problema do fluxo máximo. Ele usa o algoritmo de Dinic, como uma função interna e usa o conceito de *fluxo quase ótimo* que veremos a seguir.

Definição 1.23 : Seja $R = (G, s, t, c)$ uma rede e f um fluxo em R . Dizemos que f é um fluxo **quase ótimo**, se a diferença entre o valor de um fluxo máximo e o valor de f é no máximo m .

Teorema 1.8 : Seja $R = (G, s, t, c)$ uma rede onde as capacidades são inteiras. Se fornecermos um fluxo, quase ótimo f , como fluxo inicial para o algoritmo de *Di*, então o algoritmo *Di* será executado em tempo $O(nm)$.

Prova: Cada fase do algoritmo de Dinic, necessita de $O(m + an)$, onde a é o número de aumentações. Como as capacidades são todas inteiras, a cada aumentação o valor de f aumenta de pelo menos uma unidade. Logo, o algoritmo *Di* fará no máximo m

aumentações. Somando o tempo de todas as fases, o resultado segue. ■

Abaixo, segue a descrição do algoritmo proposto por Gabow. Este algoritmo utiliza a função *FluxoMáximoDinic*, que é o algoritmo de Dinic modificado. Esta função recebe o fluxo inicial como parâmetro, além dos parâmetros já definidos, e retorna um fluxo máximo.

função *FluxoMáximoGabow* (*grafo induzido* G ; *capacidade* c):

```
.se  $\max_{a \in A} \{c(a)\} \leq \frac{m}{n}$ 
. então retorne FluxoMáximoDinic  $((G, s, t, c), 0)$ 
. senão retorne FluxoMáximoDinic  $((G, s, t, c), 2 \cdot \text{FluxoMáximoGabow}(G, s, t, \lfloor \frac{c}{2} \rfloor))$ ;
```

Teorema 1.9 : O algoritmo de Gabow tem complexidade $O(nm \lg C)$, onde C é o máximo valor das capacidades.

Prova: A prova é feita por indução em $\lg C$. Assumimos como hipótese de indução o fato de que quando a função *FluxoMáximoDinic* é executada, o fluxo inicial é um fluxo quase ótimo e o algoritmo é correto. A base, $C \leq \frac{m}{n}$, segue diretamente do teorema 1.8. Em qualquer passo do algoritmo, por indução, *FluxoMáximoGabow* acha corretamente um fluxo máximo f no grafo G com $\lfloor \frac{C}{2} \rfloor$. Pelo teorema do fluxo-máximo, podemos inferir que o valor de $2f$ é pelo menos a capacidade de um corte mínimo menos m e portanto, $2f$ é um fluxo quase ótimo e a função *FluxoMáximoDinic* será executada em $O(nm)$ tempo. Como o algoritmo tem no máximo $\lg C$ chamadas recursivas, o resultado segue. ■

Capítulo 2

ÁRVORES ENVIESADAS

Neste capítulo estudaremos um tipo de estrutura de dados, as chamadas *árvores enviesadas* que, além de serem interessantes por si só, para este trabalho são necessárias para a compreensão e uma análise completa da complexidade do algoritmo de Goldberg e Tarjan que será tratado no capítulo 4. Descreveremos tais estruturas de dados (cf. [3]), introduzindo o conceito de *tempo amortizado* e faremos a análise da *complexidade amortizada* de vários algoritmos.

Estamos interessados em uma estrutura de dados que facilita a realização de operações com conjuntos. Suporemos que os elementos destes conjuntos pertencem a um conjunto universo U de itens totalmente ordenado. Queremos representar estes conjuntos de tal maneira que as seguintes operações sejam efetuadas eficientemente:

- $acesse(item\ i, conjunto\ S)$: se o item i pertence ao conjunto S , retorna um ponteiro para o item i ; caso contrário, retorna um ponteiro especial nulo.
- $insira(item\ i, conjunto\ S)$: insere o item i no conjunto S . É suposto que $i \notin S$.
- $remove(item\ i, conjunto\ S)$: remove o item i do conjunto S . É suposto que $i \in S$.
- $una(conjunto\ S, conjunto\ R)$: (una duplo) retorna o conjunto $S \cup R$ destruindo os conjuntos R e S . É suposto que cada item de S é menor que cada item de R .
- $una(conjunto\ S, item\ i, conjunto\ R)$: (una triplo) retorna o conjunto $S \cup \{i\} \cup R$ destruindo os conjuntos R e S . É suposto que cada item de S é menor que i , e cada item de R é maior que i .

- $\text{reparta}(S, \text{item } i)$: reparte o conjunto S em três conjuntos: P , Q e R ; sendo P o conjunto dos itens de S menores que i , R o conjunto dos itens de S maiores que i e Q o conjunto contendo precisamente i , se $i \in S$, ou vazio, se $i \notin S$.

Um tipo de estrutura de dados apropriado para representar e realizar operações com conjuntos ordenados é a chamada *árvore de busca*. Uma *árvore de busca* é uma árvore ordenada que contém os itens de um conjunto ordenado armazenados nas folhas e ordenados da esquerda para direita, cada folha contendo exatamente um item. As árvores de busca cujos nós possuem entre 2 e b filhos, onde b é um número inteiro fixo maior que 2, serão chamadas $(2, b)$ -árvores.

Suporemos que cada item i possui um *peso* conhecido p_i que representa a frequência com que o item i é acessado. Queremos construir árvores de tal maneira que os itens mais acessados estejam mais próximos da raiz do que os itens menos acessados. Definimos *tempo médio de acesso*, T_m , de uma árvore de busca (de um conjunto S) como sendo:

$$T_m = \sum_{i \in S} p_i \frac{d_i + 1}{P},$$

onde d_i é a profundidade do item i e $P = \sum_{i \in S} p_i$.

Nosso objetivo é manter o tempo médio de acesso o menor possível, sem perder com isso rapidez nas atualizações da árvore. Este é o chamado *problema do dicionário enviesado*. Veremos aqui dois tipos de árvores de busca, chamadas *localmente enviesadas* e *globalmente enviesadas*, para resolver este problema.

Dentre os vários resultados relacionados com o *problema do dicionário enviesado*, o seguinte teorema [1] é um dos mais importantes. Ele oferece uma cota inferior para o tempo médio de acesso de uma árvore de busca.

Teorema: Considere uma árvore de busca para um conjunto S onde cada nó possui no máximo b filhos. Então:

$$T_m - 1 = \sum_{i \in S} \frac{p_i d_i}{P} \geq \sum_{i \in S} \left(\left(\frac{p_i}{P} \right) \lg_b \left(\frac{P}{p_i} \right) \right).$$

Assim, se obtivermos árvores de busca tais que $d_i = O\left(\lg\left(\frac{P}{p_i}\right)\right)$, para cada item i , estas árvores terão um tempo médio de acesso da mesma ordem do menor tempo médio de acesso possível. Diremos que tais árvores têm *tempo ideal de acesso* e chamaremos $O\left(\lg\left(\frac{P}{p_i}\right)\right)$ de *tempo ideal de acesso* do item i . Note que se todos os n itens têm o mesmo peso, então o tempo ideal de acesso de cada item é $O(\lg n)$. Neste caso, qualquer árvore de busca balanceada tem tempo ideal de acesso.

Estamos interessados em encontrar árvores com tempo ideal de acesso, nas quais as demais operações, *insira*, *remove*, *una* e *reparta* sejam realizadas com tempo da mesma ordem do tempo ideal de acesso.

Em muitos algoritmos, determinadas estrutura de dados são utilizadas para se fazer uma sequência de operações e não apenas uma única operação. Não raro, na análise da complexidade de tais algoritmos, nós estamos interessados no tempo total gasto pela *seqüência de operações*, e não no tempo de cada uma das operações individuais.

Numa análise de pior caso, na qual os piores tempos de cada uma das operações individuais são somados, nós podemos estar sendo bastante pessimistas, porque estamos ignorando os efeitos co-relacionados das operações na estrutura de dados. Em tal situação, se fizermos uma *análise de complexidade amortizada* (usando conceito de *tempo amortizado*) poderemos obter uma resposta mais realista. Neste caso, o *tempo médio por operação* é calculado sobre uma *seqüência de operações* (de pior caso).

Para tornar a análise mais concreta, usamos o conceito de *crédito*. Um crédito representa uma unidade de tempo de computação, ou seja, um crédito permite realizar $O(1)$ passos computacionais. Para cada operação nós alocamos um certo número de créditos, definido como sendo o *tempo amortizado da operação*. O nosso objetivo é realizar uma sequência de operações sem ficar sem créditos durante o processo. Se completarmos uma operação antes de gastar todos os créditos, podemos guardar os créditos extras para usar em futuras operações. Se gastarmos todos os créditos antes de completar a operação, podemos usar créditos que foram economizados anteriormente. Se conseguirmos provar que nunca ficamos sem créditos para completar a sequência de operações, então o tempo efetivamente gasto por qualquer parte inicial da sequência de operações é limitado pela soma dos correspondentes tempos amortizados.

O conceito de tempo amortizado pode ser formalizado usando o conceito de valores (chamados potenciais) associados a configurações de estrutura de dados (cf. [20]).

Não faremos aqui esta outra definição mais formal já que neste trabalho toda a análise será feita usando o conceito de créditos, como foi introduzido em [3]. Esperamos também que este conceito fique mais claro quando fizermos a análise amortizada dos algoritmos que serão apresentados a seguir.

Primeiramente definiremos árvores localmente enviesadas e para estas árvores descreveremos um *algoritmo UNA* (que realiza a operação *una*), para o qual apresentaremos uma cota superior para o tempo amortizado, bem como para o tempo no pior caso. Descreveremos também um *algoritmo reparta*, para o qual apresentaremos apenas uma cota superior para o tempo amortizado.

Depois definiremos árvores globalmente enviesadas e descreveremos um outro *algoritmo una*, para o qual apresentaremos uma cota superior para o tempo amortizado e pior caso. Além disso, provaremos uma cota superior para o tempo amortizado do mesmo *algoritmo reparta* aplicado em árvores globalmente enviesadas. No final deste capítulo definiremos árvores binárias localmente enviesadas e globalmente enviesadas conseguindo resultados semelhantes.

No que segue, a menos de menção contrária, as árvores serão todas $(2, b)$ -árvores de busca, cada um dos itens i nela armazenados terão peso p_i e P será a soma de todos os pesos.

2.1 Árvores de Busca Localmente Enviesadas

Nesta seção definiremos árvores localmente enviesadas e provaremos que estas árvores têm tempo ideal de acesso. A seguir, apresentaremos dois algoritmos: *UNA* e *REPARTA*, e faremos a análise de complexidade amortizada desses algoritmos.

Para entender melhor as definições a seguir, recomendamos observar a figura 2.1.

Definição 2.1 : Para cada nó x de uma árvore, o *posto* de x , $S(x)$, é definido recursivamente por:

$$S(x) = \begin{cases} \lfloor \lg p_i \rfloor & \text{se } x \text{ é uma folha contendo o item } i, \\ 1 + \max\{S(y) \mid y \text{ é filho de } x\} & \text{se } x \text{ é um nó interno.} \end{cases}$$

Definição 2.2 : Seja y um nó de uma árvore e x o pai de y . Dizemos que y é **primogênito** se $S(y) = S(x) - 1$; e **caçula** se, $S(y) < S(x) - 1$. Por convenção, a raiz é um nó primogênito.

Definição 2.3 : Uma árvore é **localmente enviesada** se qualquer irmão vizinho de um nó caçula é uma folha primogênita. Algumas vezes estas árvores serão chamadas simplesmente de l.e.

Figura 2.1 : Duas árvores de busca. Os números ao lado do nó são os postos, e os números dentro das folhas são os pesos. A árvore (a) é localmente enviesada, enquanto que a árvore (b) não é localmente enviesada, pois o nó indicado (com uma seta) é caçula e seu irmão vizinho é primogênito, mas não é uma folha.

Pela definição 2.3, uma árvore onde todas as folhas têm o mesmo peso é uma árvore balanceada (def. A.18) se e só se é localmente enviesada.

Definição 2.4 : Se x é um nó de uma árvore então o **peso** de x , $p(x)$, será definido como:

$$p(x) = \begin{cases} p_i & \text{se } x \text{ é uma folha contendo o item } i, \\ \sum \{ p(y) \mid y \text{ é filho de } x \} & \text{se } x \text{ é um nó interno.} \end{cases}$$

Lema 2.1 : Para cada nó x de uma árvore i.e.

$$2^{S(x)-1} \leq p(x) .$$

Se x é uma folha,

$$2^{S(x)} \leq p(x) < 2^{S(x)+1} .$$

Prova: Faremos a demonstração por indução no tamanho da árvore. Se x é uma folha, por definição $S(x) = \lfloor \lg(p(x)) \rfloor$, e portanto $2^{S(x)} \leq p(x) < 2^{S(x)+1}$. Se x é um nó interno com um filho caçula, x tem um filho primogênito, digamos y , que é uma folha. Então,

$$2^{S(x)-1} = 2^{S(y)} \leq p(y) \leq p(x) .$$

Se x não possui filho caçula, então x possui pelo menos dois filhos primogênitos, digamos y e z . Então,

$$2^{S(x)-1} = 2^{S(x)-2} + 2^{S(x)-2} = 2^{S(y)-1} + 2^{S(z)-1} \leq p(y) + p(z) \leq p(x) .$$

■

Lema 2.2 : Numa árvore i.e., se x é uma folha com profundidade d , contendo o item i , então

$$d < \lg \left(\frac{P}{p_i} \right) + 2 .$$

Prova: Seja r a raiz da árvore. Como o *posto* aumenta de pelo menos uma unidade de um filho para o pai, então

$$d \leq S(r) - S(x) .$$

Pelo lema 2.1 ,

$$\lg(P) = \lg(p(r)) \geq S(r) - 1 \quad \text{e}$$

$$\lg(p(x)) < S(x) + 1 .$$

Logo,

$$d \leq S(r) - S(x) < \lg(P) + 1 - \lg(p(x)) + 1 = \lg \left(\frac{P}{p_i} \right) + 2 .$$

■

Teorema 2.1 : Uma $(2, b)$ -árvore l.e. tem tempo ideal de acesso.

Prova: Segue imediatamente do lema 2.2. ■

Já temos uma árvore com tempo ideal de acesso. Vejamos como implementar algumas operações e como fazer a análise amortizada dessas operações (fazendo o uso do conceito de créditos). Antes, vamos introduzir algumas convenções e definições.

Para contabilizar os créditos economizados em operações anteriores, os créditos são armazenados nas árvores. Isto é feito para facilitar a análise da complexidade de tempo: eles não são fisicamente guardados na estrutura de dados e nem afetam a implementação dos algoritmos.

A seguinte definição será útil na formalização das idéias.

Definição 2.5 : Uma árvore de busca localmente enviesada satisfaz **invariância de créditos** se cada nó caçula y com pai x possui $S(x) - S(y) - 1$ créditos. Quando atribuímos tal quantidade de créditos a y dizemos que estamos mantendo invariância de créditos em y .

Note que esta definição é consistente com o fato de que filhos primogênitos não têm créditos.

Para proceder a análise da complexidade amortizada de uma operação, vamos dar a essa operação uma cota superior T para o número de créditos necessários para realizá-la — neste caso dizemos que o algoritmo *requer T tempo amortizado* — e, supondo que as árvores iniciais satisfazem invariância de créditos, vamos provar que a árvore resultante (da operação) satisfaz invariância de créditos. Neste caso dizemos que a operação (ou algoritmo) *mantém invariância de créditos*.

Vejamos agora o algoritmo *UNA*. Esse algoritmo recebe como entrada duas árvores l.e. com raízes x e y , que representam dois conjuntos e retorna a raiz de uma árvore l.e. que representa a união destes conjuntos. Logo após o algoritmo representamos esquematicamente os casos que ocorrem e qual a árvore resultante.

função $UNA(raiz\ x, y)$:

$raiz\ z$;

$nó\ x_1, x_2, v, u, v_1, v_2$;

caso 1: $S(x) = S(y)$, ou $S(x) > S(y)$ e x é uma folha, ou $S(y) > S(x)$ e y é uma folha.

. crie um novo nó z tendo x e y como filhos;

. **retorne** z ;

caso 2: $S(x) > S(y)$ e x não é uma folha.

. seja u o filho mais à direita de x .

. $v = UNA(u, y)$;

/* Temos aqui dois (veremos que só ocorrem esses) casos a analisar: */

. subcaso 2a: $S(v) < S(x)$.

. faça v filho direito de x ;

. **retorne** x ;

. subcaso 2b: $S(v) = S(x)$.

. neste caso v terá exatamente dois filhos (será demonstrado), digamos v_1 e v_2 .

. faça v_1 e v_2 filhos de x (colocando-os à direita dos outros filhos de x);

. destrua v ;

. se x já tinha b filhos

. **então** crie três novos nós z, x_1 e x_2 ;

. tome os $\lceil (b+1)/2 \rceil$ filhos mais à esquerda de x e faça-os filhos de x_1 ;

. tome os $\lfloor (b+1)/2 \rfloor$ filhos mais à direita de x e faça-os filhos de x_2 ;

. faça x_1 e x_2 filhos de z ;

. **retorne** z

. **senão** retorne x ;

caso 3: $S(y) > S(x)$ e y não é uma folha.

. simétrico ao caso 2.

Caso 1

Caso 2

Caso 2a

Caso 2b com divisão
de filhos

Caso 2b

Figura 2.2 : Algoritmo *UNA* nos casos 1 e 2.

Lema 2.3 : O algoritmo *UNA* recebe como entrada duas árvores i.e., uma com raiz x e outra com raiz y e constrói uma árvore com raiz z tal que

$$S(z) = \max\{S(x), S(y)\} \text{ ou } S(z) = \max\{S(x), S(y)\} + 1.$$

No último caso, z possuirá exatamente dois filhos.

Prova: Será feita por indução no tamanho da árvore construída. No caso 1 do algoritmo o nó z possui exatamente dois filhos, x e y e portanto $S(z) = \max\{S(x), S(y)\} + 1$.

No caso 2, se ocorrer o subcaso 2a temos $z = x$ e $S(z) = S(x) = \max\{S(x), S(y)\}$. Se não ocorrer o subcaso 2a, temos $S(v) \geq S(x)$. Logo,

$$S(v) \leq \max\{S(u), S(y)\} + 1 \leq S(x), \quad \text{e portanto } S(v) = S(x)$$

e v tem exatamente dois filhos. Note que a primeira desigualdade e a última afirmação seguem da hipótese de indução. Se x já tinha b filhos então:

$$S(x_2) = S(x) = S(z) - 1$$

e z tem 2 filhos; caso contrário, $S(z) = S(x)$. ■

Lema 2.4 : A árvore construída pelo algoritmo *UNA* é l.e.

Prova: Por indução no tamanho da árvore. No caso 1, se um dos nós (x ou y) é caçula, o outro é folha, logo a árvore resultante é l.e.

No caso 2a, temos que analisar o caso em que o irmão esquerdo de v é caçula e o caso em que v é caçula. Suponha que v seja caçula. Então u era caçula na árvore original e seu irmão esquerdo era uma folha primogênita. Logo, a nova árvore é l.e. Suponha, por outro lado, que o irmão esquerdo de v seja caçula, neste caso u era uma folha primogênita, o *UNA*(u, y) recairia no caso 1 e o *UNA* original recairia no caso 2b e não 2a.

No caso 2b, temos, novamente, dois casos a analisar: o caso em que o filho esquerdo de v é caçula e o caso em que o irmão esquerdo de u (na árvore original) é caçula. No primeiro caso (o filho esquerdo de v é caçula), os filhos de v são exatamente u e y , e como o irmão esquerdo de u (na árvore original) é uma folha primogênita, a nova árvore será l.e. Note que por hipótese de indução a árvore com raiz v é l.e. No segundo caso (o irmão esquerdo de u , na árvore original, é caçula), u já era uma folha primogênita, e os filhos de v são exatamente u e y , logo a nova árvore é l.e. ■

Lema 2.5 : O algoritmo *UNA* requer $|O(S(x) - S(y))| + 1$ tempo amortizado.

Prova: Vamos supor que $S(x) \geq S(y)$. O caso $S(x) < S(y)$ é simétrico. No caso 1, precisamos de 1 crédito para construir a nova árvore e mais $S(x) - S(y)$ créditos para manter invariância de créditos em y (note que se y é caçula na nova árvore, $S(z) - S(y) - 1 = S(x) - S(y)$). No total precisamos de $S(x) - S(y) + 1$ créditos.

No caso 2 recebemos $S(x) - S(u) - 1$ créditos de u perfazendo um total de $2.S(x) - S(y) - S(u)$ créditos. Precisamos $|S(u) - S(y)| + 1$ para o *UNA* recursivo. No caso 2a precisamos um crédito para construir a nova árvore e $S(x) - S(v) - 1$ créditos para manter invariância de créditos em v . Assim, o total de créditos necessários para o *UNA* do caso 2a é:

$$S(x) - S(v) - 1 + \max\{S(u), S(y)\} - \min\{S(u), S(y)\} + 1 + 1 \leq 2.S(x) - \max\{S(u), S(y)\} - \min\{S(u), S(y)\}. \quad (*)$$

pois $S(v) \geq \max\{S(u), S(y)\}$ e $S(x) > \max\{S(u), S(y)\}$.

Note que, qualquer que seja a relação entre $S(u)$ e $S(y)$, a última expressão da desigualdade (*) é precisamente $2.S(x) - S(y) - S(u)$.

No caso 2b precisamos de 1 crédito para construir a nova árvore, não precisamos de nenhum crédito para armazenar nos filhos de x , pois os filhos de v já os possuíam. A análise anterior mostra que são necessários no máximo $2.S(x) - S(y) - S(u)$ créditos. ■

Teorema 2.2 : O algoritmo $UNA(x, y)$ é correto e requer $O(|S(x) - S(y)|)$ tempo amortizado.

Prova : Imediata a partir dos lemas 2.4 e 2.5 . ■

Teorema 2.3 : O tempo do algoritmo UNA no pior caso é

$$O(\max\{S(x), S(y)\} - \max\{S(u), S(v)\}) = O\left(\lg\left(\frac{P}{p_- + p_+}\right)\right),$$

onde u e v são as folhas mais à direita de x e mais à esquerda de y , respectivamente, $p_- = p(u)$, $p_+ = p(v)$ e $P = p(z)$ e z é a raiz da nova árvore.

Prova: Basta analisar o comportamento do algoritmo UNA em termos do caminho de x até a sua folha mais à direita e do caminho de y até a sua folha mais à esquerda. Veja figura 2.3.

Não é difícil verificar que, no algoritmo, basicamente tais caminhos são percorridos paralelamente, até que se encontra uma folha em um dos caminhos ou até que dois nós com o mesmo posto são encontrados, um em cada caminho. As partes percorridas desses caminhos são então “juntadas”, ordenando os nós em ordem decrescente de posto, e criando ou não um novo nó para ajustar os postos. A partir da base do caminho que surgiu da junção, indo em direção à raiz, faz-se a divisão de nós, se necessário, para manter no máximo b filhos. Esta descrição do algoritmo justifica o resultado. ■

Figura 2.3 : Duas árvores onde foi aplicado o *UNA*. Os números dentro dos vértices são os postos. O nó indicado com uma seta foi inserido pelo *UNA*.

Vamos agora considerar outras operações, começando pelo *UNA-TRIPLO*. Podemos implementar o *UNA-TRIPLO* com uma sequência de dois *UNAs* (duplos). Os dois teoremas anteriores fornecem o seguinte resultado:

Teorema 2.4 : O *UNA-TRIPLO* requer

$$O(\max\{S(x), S(y), S(z)\} - \min\{S(x), S(y), S(z)\}),$$

tempo amortizado, e o tempo no pior caso é

$$O(\max\{S(x), S(y), S(z)\} - S(y)) = O\left(\lg\left(\frac{P}{p_i}\right)\right),$$

onde x é a raiz da primeira árvore; y , raiz da segunda árvore, é uma folha; z é a raiz da última árvore; p_i é o peso do item i , armazenado no nó y , e P é o peso total dos itens na nova árvore.

Uma outra maneira de formular o conceito de “alocação de créditos e manutenção de invariância de créditos é a seguinte:

Definição 2.6 : Dizemos que uma árvore com raiz x é K -crédito invariante se ela satisfaz invariância de créditos e possui $K - S(x)$ créditos armazenados na raiz.

Com esta definição o resultado do teorema 2.2 pode ser expresso assim:

Lema 2.6 : Se duas árvores com raízes x e y são K -crédito invariantes com $K > \max\{S(x), S(y)\}$ então o algoritmo *UNA* faz a união dessas duas árvores sem gastar mais créditos, produzindo uma nova árvore K -crédito invariante.

Prova: Imediata a partir do teorema 2.2 .

■

A seguir veremos como implementar o algoritmo *REPARTA*. Este algoritmo terá como entrada a raiz de uma árvore l.e., que representa um conjunto e um item i de U . O algoritmo retornará uma árvore l.e. que representa o conjunto dos elementos da árvore de entrada menores que o item i ; o item i , se i está na árvore, ou um ponteiro especial nulo, caso contrário; e uma outra árvore que representa o conjunto dos elementos da árvore de entrada maiores que i .

Vejamos antes uma definição que será usada a seguir.

Definição 2.7 : Seja i um item qualquer de U . Dizemos que um nó y com filhos $f_1, \dots, f_k$ é nó **base** do item i na árvore se um dos casos ocorre:

caso 1: $\exists l \in \{1, \dots, k\}$ tal que f_l é folha contendo item i .

caso 2: $\exists l \in \{1, \dots, k-1\}$ tal que $f_1, \dots, f_l$ são raízes de subárvores cujas folhas contêm itens menores que i e $f_{l+1}, \dots, f_k$ são raízes de subárvores cujas folhas contêm elementos maiores que i .

função *REPARTA* (raiz x ; item i):

nó a , atual, próximo, e , árvore-esquerda, árvore-temporária, Q , árvore-direita;

```
. se  $x$  é uma folha
. então se conteúdo de  $x < i$ 
.     então retorne ( $x, nulo, nulo$ ) e pare;
.     se conteúdo de  $x = i$ 
.     então retorne ( $nulo, i, nulo$ ) e pare;
.     se conteúdo de  $x > i$ 
.     então retorne ( $nulo, nulo, x$ ) e pare;

. Procure o nó  $a$  com filhos  $f_1, f_2, \dots, f_k$  que é o nó base do item  $i$  na árvore;

. se  $x$  não tem nó base
. então se os itens de  $x$  são menores que  $i$ 
.     então retorne ( $x, nulo, nulo$ ) e pare
.     senão retorne ( $nulo, nulo, x$ ) e pare;

. se o caso 1 (da definição 2.7) ocorreu
. então faça  $Q = i$ 
.     se  $l = 1$ 
.     então faça árvore-esquerda =  $nulo$ ;
.     se  $l = 2$ 
.     então faça árvore esquerda = subárvore na qual  $f_1$  é raiz;
.     se  $l > 2$ 
.     então crie um nó  $e$ ;
.         faça  $f_1, \dots, f_{l-1}$  filhos de  $e$ ;
.         faça árvore-esquerda = árvore cuja raiz é  $e$ ;

. analogamente construa a árvore-direita:

. senão /* caso 2 ocorreu */
.     faça  $Q = nulo$ ;
.     se  $l = 1$ 
.     então faça árvore-esquerda = subárvore na qual  $f_1$  é raiz;
.     se  $l > 1$ 
.     então crie um nó  $e$ ;
.         faça  $f_1, \dots, f_{l-1}$  filhos de  $e$ ;
```

```

.   faça árvore-esquerda = árvore na qual e é raiz;

.   analogamente construa árvore-direita;

.   faça atual=a;
.   faça próximo = pai(atual);

.   enquanto atual não é a raiz faça
.   .   sejam  $f_1, f_2, \dots, f_k$  os filhos de próximo
.   .   seja  $f_l$  o atual
.   .   se  $l = 1$ 
.   .   .   então faça árvore-temporária=nulo;
.   .   se  $l = 2$ 
.   .   .   então faça árvore-temporária=subárvore que tem  $f_1$  como raiz;
.   .   se  $l > 2$ 
.   .   .   então crie um nó e;
.   .   .   .   faça  $f_1, \dots, f_{l-1}$  filhos de e ;
.   .   .   .   faça árvore-temporária=árvore cuja raiz é e ;
.   .   faça árvore-esquerda=UNA(árvore-temporária,árvore-esquerda);
.   .   analogamente produza uma nova árvore-direita;
.   .   faça atual = próximo;
.   .   faça próximo=pai(próximo);

.   retorne árvore-esquerda, Q,árvore-direita;

```

Figura 2.4 : Um passo do algoritmo *REPARTA*. O nó p é o próximo nó, o nó a é o nó atual, as árvores de raiz t são as árvores temporárias. As árvores com raízes d e e são as árvores direita e esquerda, sendo que as árvores mais abaixo são as novas árvores esquerda e direita depois de serem unidas com as árvores temporárias.

Este algoritmo faz a operação *REPARTA* corretamente. Para analisar o seu tempo amortizado, vamos analisar o caso em que a árvore de entrada tem nó base. No outro caso o tempo gasto pelo algoritmo *REPARTA* é $O(1)$.

Chamemos de a , p , e , e' e t o nó-atual, nó-próximo, raiz da árvore esquerda atual, raiz da próxima árvore esquerda e raiz da árvore temporária em cada passo do algoritmo. Na primeira iteração, nó-atual = a (do algoritmo) e nó-próximo = pai(a).

Lema 2.7 : $S(a) \geq S(e)$ em qualquer passo do algoritmo *REPARTA*.

Prova: Logo após executar o passo inicial temos que $S(e) \leq S(a)$. pois ou e era um filho de a na árvore original, ou é um novo nó que é pai de dois ou mais filhos de a (na árvore original).

Num outro passo qualquer temos que $S(t) \leq S(p)$. Por indução, $S(e) \leq S(a)$ e portanto $S(e) < S(p)$. Se $S(t) < S(p)$, pelo lema 2.3 temos que $S(e') \leq S(p)$. Se $S(t) = S(p)$, então $S(t) > S(a)$. Logo, o *UNA* recairia no caso 2 e como t tem menos que b filhos $S(e') = S(t)$. Logo, $S(e') \leq S(p)$, onde e' e p são a raiz da árvore esquerda e o nó atual do próximo passo, respectivamente. ■

O lema obviamente vale para a árvore direita também.

Lema 2.8 : Em cada passo do algoritmo *REPARTA* necessitamos de $2.(S(p) - S(a)) + 5$ créditos e as árvores esquerda e direita são $(S(a) + 1)$ -crédito invariantes.

Prova: No passo inicial precisamos de um crédito mais $2.(S(p) - S(a) + 1)$ créditos para colocar nas árvores esquerda e direita num total de $2.(S(p) - S(a)) + 3 < 2.(S(p) - S(a)) + 5$.

Num outro passo qualquer do algoritmo se colocarmos $S(p) - S(a)$ créditos em e , e tornar-se-á $(S(p) + 1)$ -crédito invariante. Se a árvore temporária for vazia, a árvore esquerda anterior será a nova árvore esquerda. Se t for um filho de p , então t tem $S(p) - S(t) - 1$ créditos (pois a árvore original satisfazia invariância de créditos); colocando mais dois créditos em t a nova árvore será $(S(p) + 1)$ -crédito invariante. Se t for pai de mais de um filho de p , então $S(t) = S(p)$ e colocando um crédito em t ele tornar-se-á $(S(p) + 1)$ -crédito invariante. Logo precisamos de no máximo dois créditos para que a árvore temporária seja $(S(p) + 1)$ -crédito invariante. Pelo lema 2.6, a nova árvore esquerda será $(S(p) + 1)$ -crédito invariante. Mais $S(p) - S(a) + 2$ créditos serão necessários para formar a nova árvore direita. Mais um crédito é necessário para o restante do passo do algoritmo num total de $2.(S(p) - S(a)) + 5$ créditos. ■

Teorema 2.5 : Se x é a raiz da árvore original e y é o nó base de i então, o algoritmo *REPARTA* requer $O(S(x) - S(y))$ tempo amortizado, gera árvores que são $(S(x) + 1)$ -crédito invariantes.

Prova: Sejam $x_1, \dots, x_t = y$ os nós atuais de todos os passos e $x_0 = x$. Então, pelo lema anterior, o seguinte número de créditos é suficiente:

$$\begin{aligned} & (2.(S(x_0) - S(x_1)) + 5) + (2.(S(x_1) - S(x_2)) + 5) + \dots + (2.(S(x_{t-1}) - S(x_t)) + 5) = \\ & 2.(S(x_0) - S(x_t)) + 5t = 2.(S(x) - S(y)) + 5t \leq 2.(S(x) - S(y)) + 5.(S(x) - S(y)) = \\ & 7.(S(x) - S(y)) \end{aligned}$$

Ainda para o algoritmo *REPARTA* podemos observar que o tempo amortizado desse algoritmo é

$$O(S(x) - S(y)) = \begin{cases} O\left(\lg\left(\frac{P}{p_i}\right)\right) & \text{se } i \in S \\ O\left(\lg\left(\frac{P}{p_{i^-} + p_{i^+}}\right)\right) & \text{se } i \notin S, \end{cases}$$

onde no segundo caso i^+ e i^- são itens em S tais que $i^- < i < i^+$, e existem duas folhas consecutivas na árvore que contêm os elementos i^- e i^+ .

Sabe-se que o pior tempo do algoritmo *REPARTA* não tem uma cota superior logarítmica (conforme [3]). No entanto, na próxima seção veremos que usando árvores um pouco mais restritas pode-se obter cotas superiores boas para o pior tempo da operação *REPARTA*.

Quanto às operações, *insere* e *remove*, estas podem ser obtidas combinando-se as operações *UNA* e *REPARTA*. Note que uma inserção é um *REPARTA* seguido de um *UNA-TRIPLO*; uma remoção é um *REPARTA* seguido de um *UNA* (duplo).

Para a realização da função *acesse* (e para encontrar o nó base na operação *REPARTA*) é necessário guardar em cada nó interno o maior e o menor item da sua subárvore. Note que é fácil manter estas informações nas operações *UNA* e *REPARTA* e que estas informações podem guiar a busca da folha que contém o item.

2.2 Árvores de Busca Globalmente Enviesadas

Nesta seção introduziremos as chamadas árvores globalmente enviesadas e provaremos o tempo, no pior caso, para o algoritmo *REPARTA*, usando tal estrutura de dados. Antes de definir árvores globalmente enviesadas, veremos outras definições, que serão usadas para definir tais árvores.

Definição 2.8 : Seja x um nó qualquer de uma árvore. Dizemos que y é o **primeiro vizinho esquerdo(direito)** de x se o irmão direito (esquerdo) de y é o primeiro ancestral de x que possui y como irmão esquerdo (direito). Veja figura 2.5.

Figura 2.5 : y é o primeiro vizinho esquerdo de x ; f é a folha mais à direita de y ; f é a folha vizinha esquerda de x ; (u, v, w) é o caminho direito da árvore.

Definição 2.9 : Seja x um nó de uma árvore. Dizemos que y é a **folha mais à direita (esquerda)** de x se y é folha descendente de x e todos os ancestrais a de y que são descendentes de x , $a \neq x$, são filhos mais à direita (esquerda).

Definição 2.10 : Seja x um nó de uma árvore. Definimos **folha vizinha esquerda (direita)** de x como sendo a folha mais à direita (esquerda) do primeiro vizinho esquerdo (direito) de x . As folhas vizinhas direita e esquerda de x são chamadas **folhas vizinhas** de x .

Definição 2.11 : Seja $\mathcal{A}$ uma árvore com raiz x . O **caminho esquerdo (direito)** de $\mathcal{A}$ é o caminho de x até a folha mais à esquerda (direita) de x .

Definição 2.12 : Uma árvore é **globalmente enviesada** se toda folha vizinha v de um nó caçula y com pai x é tal que $S(v) \geq S(x) - 1$. Se uma árvore possui um nó y com tal propriedade, dizemos que a árvore é **globalmente enviesada em y** . Para simplificar, tais árvores são denotadas simplesmente por g.e.

Figura 2.6 : A árvore A_1 é uma árvore g.e. A árvore A_2 é uma árvore l.e., mas não é uma árvore g.e. pois as folhas assinaladas são folhas vizinhas caçulas que não satisfazem a propriedade da definição 2.12.

Como toda árvore g.e. é também l.e., segue que as árvores g.e. têm tempo ideal de acesso.

Veremos agora uma nova versão para o algoritmo *UNA* que chamaremos de *UNA-GLOBAL*. Esse algoritmo receberá como entrada raízes de duas árvores g.e., que representam dois conjuntos e retornará a raiz de uma árvore g.e. que representa a união destes conjuntos.

função *UNA-GLOBAL*(*raiz* x, y):

raiz z, z_1, z_2, v, e, d ;

.**caso 1** : $S(x) \geq S(y)$ e x é uma folha, ou $S(x) \leq S(y)$ e y é uma folha.

- . crie um novo nó z ;
- . faça x e y filhos de z ;
- . **retorne** z ;

.**caso 2** : $S(x) > S(y)$ e x não é uma folha.

- . faça como no caso 2 do *UNA* (local);

.**caso 3** : $S(x) < S(y)$ e y não é uma folha.

- . Simétrico ao caso 2.

.**caso 4** : $S(x) = S(y)$ e nem x nem y é uma folha.

- . sejam d o filho mais à direita de x e e o filho mais à esquerda de y ;
- . remova d de x e remova e de y ;
- . $v = \text{UNA-GLOBAL}(e, d)$;
- . crie um nó z ;
- . se $S(v) < S(x)$
 - . **então** tome os filhos de x , v e os filhos de y e faça-os filhos de z
 - . **senão** tome os filhos de x , os dois filhos de v e os filhos de y e faça-os filhos de z ;
- . se z ficar com mais de b filhos
 - . **então** crie dois novos nós z_1 e z_2 ;
 - . divida os filhos de z entre z_1 e z_2 ;
 - . faça z_1 e z_2 filhos de z ;
- . **retorne** z ;

Figura 2.7 : Exemplo de um *UNA-GLOBAL* que recaiu no caso 4.

Observação: Na aplicação do *UNA-GLOBAL*(x, y), chamaremos de *árvore-esquerda* (*direita*) a árvore com raiz x (y).

Definição 2.13 : Considere duas árvores para as quais aplicou-se o algoritmo *UNA-GLOBAL* (sem divisão de filhos). Sejam cd (ce) o caminho direito (esquerdo) da árvore à esquerda (direita). Considere o caminho formado pelos nós raízes das árvores que resultaram da aplicação recursiva dos *UNA-GLOBAL*, chamaremos tal caminho de **caminho central**. Para cada nó v deste caminho definimos o nó **referência esquerda(direita)** de v como sendo o nó g de cd (ce), se existir, tal que $S(g) \leq S(v) < S(f)$, onde f é o pai de g .

Lema 2.9 : Seja v o nó no caminho central após a aplicação de um *UNA-GLOBAL* (sem divisão de filhos). Então a folha vizinha esquerda (direita) de v é a folha vizinha esquerda (direita) do nó referência esquerda (direita) de v (na árvore original).

Prova: Se o nó v não possui nó referência esquerda, então ele não tem folha vizinha esquerda. Se o nó v for nó da árvore esquerda, então v é o próprio nó referência. Logo, se v possuir folha vizinha esquerda na nova árvore, ela é a própria folha vizinha esquerda de v na árvore original. Se v não é nó da árvore esquerda, então v não possui irmão direito.

O primeiro vizinho esquerdo de v será o primeiro vizinho esquerdo do nó referência direita de v . Logo, a folha vizinha esquerda de v será a folha vizinha esquerda do nó referência esquerda de v . ■

Teorema 2.6 : O algoritmo UNA-GLOBAL é correto.

Prova: Suponha que não houve divisão de filhos. Os únicos nós nos quais a nova árvore pode não ser g.e. são os nós caçulas ao longo do caminho central. Seja w um nó caçula no caminho central. Seja v o pai de w . Basta analisar o caso em que v possui nó referência esquerda, pois caso contrário v não possui folha vizinha esquerda e conseqüentemente a árvore é g.e. em v . Pelo lema 2.9 a folha vizinha esquerda u de v é a folha vizinha esquerda do nó referência esquerda g de pai f de w . Como w é caçula, g também o é. Portanto, $S(u) \geq S(f) - 1$. Como $S(f) \geq S(v)$, então $S(u) \geq S(v) - 1$. O mesmo raciocínio pode ser feito em relação à folha vizinha direita de w . Como as divisões de filhos preservam a propriedade de ser g.e., a nova árvore é g.e. ■

Teorema 2.7 : O tempo gasto pelo algoritmo UNA-GLOBAL é

$$O\left(\lg\left(\frac{P}{p_- + p_+}\right)\right)$$

no pior caso, onde P é o peso total das duas árvores, p_- é o peso da da folha mais à direita da árvore esquerda, e p_+ é o peso da folha mais à esquerda da árvore direita.

Prova: Raciocínios análogos aos desenvolvidos na demonstração do teorema 2.3 valem para o UNA-GLOBAL também. ■

Teorema 2.8 : O tempo gasto pelo UNA-GLOBAL-TRIPLO é

$$O\left(\lg\left(\frac{P}{p_i}\right)\right)$$

no pior caso, onde P é o peso total das duas árvores e p_i é peso do item inserido entre as duas árvores.

Prova: Imediata a partir do teorema 2.7. ■

Podemos usar o *REPARTA* definido anteriormente para repartir uma árvore g.e. produzindo duas árvores g.e., usando UNAs (locais).

Teorema 2.9 : O algoritmo REPARTA é correto (isto é, quando aplicado a uma árvore g.e. gera duas árvores g.e.) e leva tempo

$$O\left(\lg\left(\frac{P}{p_i}\right)\right) \text{ se o item } i \text{ está na árvore}$$

e

$$O\left(\lg\left(\frac{P}{p_- + p_+}\right)\right) \text{ se o item } i \text{ não está na árvore.}$$

Prova: Chamemos de a, p, e, e' e t (veja figura 2.4) os nós atual, próximo, raiz da árvore esquerda anterior, raiz da próxima árvore esquerda e raiz da árvore temporária em cada passo do algoritmo. Para o passo inicial chame de nó atual o nó a (do algoritmo) e de próximo nó $\text{pai}(a)$.

Provaremos por indução usando como hipótese de indução que as árvores esquerda e direita são g.e. e que o caminho esquerdo da árvore esquerda e o caminho direito da árvore direita estavam (possivelmente não as raízes) na árvore original.

Após o primeiro passo estas hipóteses estão satisfeitas. Num passo qualquer do algoritmo temos que a árvore com raiz t é g.e. por construção assim como a árvore esquerda. Como a não é folha, o irmão esquerdo de a é um filho primogênito. Logo, $S(t) = S(p)$ ou $S(t) = S(p) - 1$, e pelo lema 2.7, $S(e) \leq S(a) < S(p)$, ou seja, $S(e) \leq S(t)$. Ou seja o algoritmo faz UNAs recursivos nos nós do caminho direito de t até encontrar um nó q tal que $S(q) \leq S(e)$. Se $S(q) = S(e)$ então nenhum outro UNA será executado. Se $S(q) < S(e)$ então q deve ser caçula e neste caso a deve ser uma folha, pois na árvore original a folha vizinha v de q é a folha mais à esquerda de a (pois por indução o caminho esquerdo da árvore esquerda estava na árvore original) e como a árvore original era g.e., $S(v) \geq S(\text{pai}(t)) - 1 \geq S(a)$. Logo não serão necessários mais unas. Obviamente o caminho esquerdo de e' está todo ele (com possível exceção de e') na árvore original. Os nós descendentes de q que estavam no caminho direito de t são g.e., pois a folha vizinha deles é a folha mais à esquerda da árvore esquerda (como era na árvore original). Logo, a nova árvore esquerda é g.e.. Analogamente demonstra-se para a nova árvore direita.

Para demonstrar o tempo do pior caso chamemos de $t_1, t_2, \dots, t_k$ os nós raízes das árvores temporárias, $p_1, p_2, \dots, p_k$ os nós próximo e $e_1, e_2, \dots, e_k$ os nós das árvores esquerdas após o UNA(t_i, e_{i-1}) para $i \geq 2$ e $e_1 = t_1$. Então $S(t_i) \leq S(e_i) \leq S(p_i) \leq S(p_{i+1}) - 1 \leq S(t_{i+1}) \leq S(p_{i+1})$ para $1 < i \leq k$. Para o UNA no passo i , $2 \leq i \leq k - 1$ precisamos de $O(S(t_{i+1}) - S(e_i))$. Pelas desigualdades acima temos que $S(t_{i+1}) - S(e_i) \leq S(p_{i+1}) - S(e_i)$ e $S(p_i) - 1 \geq S(t_i) \geq S(e_i)$, ou seja, $S(t_{i+1}) - S(e_i) \leq S(p_{i+1}) - S(p_i) - 1$,

ou seja, $O(S(t_{i+1}) - S(e_i)) = O(S(p_{i+1}) - S(p_i))$. Somando sobre todos os passos, temos o teorema. ■

2.3 Usando Árvores Binárias

Nesta seção definiremos dois tipos de árvores de busca — binárias localmente enviesadas e binárias globalmente enviesadas — conseguindo os mesmos resultados obtidos na seção anterior. Esta nova abordagem traz vantagens no aspecto de implementação, pois como veremos, permitem desenvolver algoritmos mais simples. Nesta seção, não demonstraremos todos os resultados.

Começaremos definindo árvores binárias l.e. que é a versão binária das árvores l.e.

Definição 2.14 : Chamaremos de **árvore binária l.e.** às árvores binárias completas (todo nó interno possui exatamente dois filhos) cujos nós x possuem um número inteiro $S(x)$ com as seguintes propriedades:

- (i) Se x é uma folha então $S(x) = \lfloor \lg(p_i) \rfloor$.
- (ii) Se y é um nó com pai x , então $S(y) \leq S(x)$; se y é uma folha, então $S(y) \leq S(x) - 1$.
- (iii) Se y é um nó com avô x , então $S(y) \leq S(x) - 1$.
- (iv) Se y é um nó caçula com pai x , então se y é um filho esquerdo (direito), então o irmão de y ou o filho esquerdo (direito) do irmão de y é uma folha k tal que $S(k) = S(x) - 1$. Se, além disso, x é um filho direito e tem posto igual ao de seu pai, então o irmão de x ou o filho direito do irmão de x é uma folha de posto $S(x) - 1$.

Figura 2.8 : Os números dentro dos vértices são os postos. A árvore A_1 é uma árvore binária l.e., enquanto que a árvore A_2 não é binária l.e., pois os nós assinalados (com seta) não satisfazem a propriedade (iv) da definição 2.14.

Árvores binárias enviesadas constituem uma versão binária de (2,4)-árvores enviesadas como mostra a figura 2.9.

Figura 2.9 : Correspondência entre (2,4)-árvores e árvores binárias.

Todos os teoremas da seção anterior para (2,b) árvores enviesadas valem para árvores binárias. Em particular, uma árvore binária possui tempo ideal de acesso. Mostraremos uma versão dos algoritmos *UNA*, *UNA-GLOBAL* e *REPARTA* para árvores binárias enviesadas.

Primeiramente, definiremos duas operações básicas que serão usadas no *UNA-BINÁRIO*.

rotação-esquerda(x): Sejam x_1 e x_2 os filhos esquerdo e direito de x . Se $S(x) = S(x_1) = S(x_2)$, faça $S(x) = S(x) + 1$ e retorne x . Se $S(x_1) < S(x) = S(x_2)$, então sejam x_{21} e x_{22} os filhos esquerdo e direito de x_2 . Faça x e x_{22} filhos esquerdo e direito de x_2 e, faça x_1 e x_{21} filho esquerdo e direito de x_1 e retorne x_2 (veja figura 2.10). Nos demais casos retorne x .

rotação-direita(x): Simétrica à *rotação-esquerda*(x).

Figura 2.10 : Uma rotação em torno do nó x e outra em torno do nó y .

Note que após uma rotação as folhas das árvores original e resultante estão na mesma ordem, e se a árvore original é binária l.e. a resultante também o é.

Veremos agora o *UNA-BINÁRIO* que é a versão do *UNA* para árvores binárias l.e. Esse algoritmo receberá como entrada a raiz de duas árvores binárias l.e., que representam dois conjuntos e retornará a raiz de uma árvore binária l.e. que representa a união destes conjuntos.

função *UNA-BINÁRIO* (*raiz* x, y):
 nó z, z_1, z_2 ;

.caso 1: $S(x) = S(y)$, ou $S(x) > S(y)$ e x é folha, ou $S(x) < S(y)$ e y é folha.
 . crie um nó z ;
 . faça x e y filhos esquerdo e direito de z ;
 . $S(z) = \max\{S(x), S(y)\} + 1$;
 . **retorne** z ;

.caso 2: $S(x) > S(y)$ e x não é folha.
 . $z = \text{rotação-esquerda}(x)$;
 . $z_1 =$ filho direito de z ;
 . $z_2 = \text{UNA-BINÁRIO}(z_1, y)$;
 . faça z_2 filho direito de z ;
 . **retorne** z ;

.caso 3: $S(x) < S(y)$ e y não é folha.
 . Simétrico ao caso 2.

Figura 2.11 : Exemplo de *UNA-BINÁRIO*. a) Caso 1. b) Caso 2 quando a rotação não ocorreu efetivamente. c) Caso 2 quando a rotação ocorreu efetivamente.

Lema 2.10 : Seja z a raiz de uma árvore resultante do *UNA-BINÁRIO*(x, y) então $S(z) = \max\{S(x), S(y)\}$ ou $S(z) = \max\{S(x), S(y)\} + 1$ e no último caso se os filhos de z são z_1 e z_2 , $S(z) > S(z_1)$ e $S(z) > S(z_2)$.

Prova: No caso 1 temos que $S(z) = \max\{S(x), S(y)\} + 1$, $S(z) > S(z_1)$ e $S(z) > S(z_2)$. No caso 2, se $S(x)$ não se alterou então $S(z) = \max\{S(x), S(y)\}$. Por outro lado, ainda no caso 2, se $S(x)$ foi incrementado, então se x_2 era o filho direito de x , x_2 não era folha (pois $S(x) = S(x_2)$) e $S(x_2) > S(y)$. Portanto, o caso 2 foi aplicado novamente. Pela propriedade (iii) das árvores binárias i.e., $S(x_{21}) < S(x_2)$ e $S(x_{22}) < S(x_2)$, onde x_{21} e x_{22} são os filhos de x_2 . Portanto, se z_2 é a raiz do *UNA-BINÁRIO* recursivo, temos que $S(z_2) = S(x_2)$. Portanto, $S(z) > S(z_1)$ e $S(z) > S(z_2)$. O caso 3 é simétrico. ■

Teorema 2.10 : O algoritmo *UNA-BINÁRIO* é correto.

Prova: No caso 1 é óbvio. No caso 2 temos 3 subcasos a analisar:

Caso 2a: após a rotação-esquerda $S(x)$ foi incrementado.

Caso 2b: após a rotação-esquerda não houve nenhuma alteração na árvore.

Caso 2c: após a rotação-esquerda houve alteração na estrutura da árvore.

No caso 2a, como vimos no lema 2.10, $S(z_2) < S(z)$. Portanto, as propriedades (i), (ii), e (iii) continuam válidas e neste caso, x_1 e x_2 não podiam ser caçulas. Logo, a propriedade (iv) também continua válida.

No caso 2b, pelo lema 2.10, $S(z_2) \leq \max\{S(x_2), S(y)\} + 1$ e portanto $S(z_2) \leq S(z)$, satisfazendo a propriedade (ii). Se $S(z_2) = S(z)$, pelo lema 2.10, $S(z_2) > S(z_{21})$ e $S(z_2) > S(z_{22})$ satisfazendo a propriedade (iii). Se x_1 for caçula, então x_2 ou x_{21} (o filho esquerdo de x_2) é folha primogênita. Logo, $z_{21} = x_{21}$, o que verifica a validade da propriedade (iv).

No caso 2c, $S(x_{22}) < S(x_2)$ (x_2 ficou sendo a nova raiz da árvore). Pelo lema 2.10, $S(z_2) \leq \max\{S(x_2), S(y)\} + 1$ e portanto $S(z_2) \leq S(x_{22})$, o que verifica a propriedade (ii); se $S(z_2) = S(x_{22})$, pelo lema 2.10, $S(z_2) > S(z_{21})$ e $S(z_2) > S(z_{22})$ o que verifica a propriedade (iii). Como x não é caçula a propriedade (iv) continua valendo. ■

Os resultados obtidos nos teoremas 2.2, 2.3 e 2.4, podem ser demonstrados para a versão binária do *UNA*.

O algoritmo *REPARTA* apresentado na seção anterior pode ser usado com uma redução no número de casos e os resultados apresentados no teorema 2.5 podem ser demonstrados. O tempo, no pior caso, do algoritmo *REPARTA* pode ser obtido para árvores binárias g.e.

Definição 2.15 : Chamaremos de árvore binária **globalmente enviesadas** às árvores binárias completas cujos nós possuam as propriedades (i), (ii), e (iii) das árvores binárias l.e. e a seguinte propriedade (iv'):

(iv') Se y é um filho caçula com pai x , então para qualquer folha v vizinha de y temos que $S(v) \geq S(x) - 1$.

Precisamos novamente modificar o algoritmo *UNA-BINÁRIO* para unir árvores g.e. . Chamaremos de $d(x)$ e $e(x)$ os filhos direito e esquerdo de um nó x . Esse algoritmo receberá como entrada raízes de duas árvores binárias g.e., que representam dois conjuntos e retornará a raiz de uma árvore binária g.e. que representa a união destes conjuntos.

função *UNA-GLOBAL-BINÁRIO* (*raiz* x, y):

nó z, z_1, z_2, u, v ;

.caso 1 : $S(x) \geq S(y)$ e x é uma folha, ou $S(y) \geq S(x)$ e y é uma folha.

- . crie um nó z ;
- . faça x e y filhos de z ;
- . **retorne** z ;

.caso 2: $S(x) > S(y)$ e x não é folha.

- . $z = \text{rotação-esquerda}(x)$;
- . $z_1 =$ filho direito de z ;
- . $z_2 = \text{UNA-GLOBAL-BINÁRIO}(z_1, y)$;
- . faça z_2 filho direito de z ;
- . **retorne** z ;

.caso 3: $S(x) < S(y)$ e y não é folha.

- . Simétrico ao caso2;

.caso 4: $S(x) = S(y)$ e nem x nem y é uma folha.

- . se $S(d(x)) < S(x)$
- . **então** $u = x$
- . **senão** $u = d(x)$;
- . se $S(e(y)) < S(y)$
- . **então** $v = y$
- . **senão** $v = e(y)$;
- . $z = \text{UNA-GLOBAL-BINÁRIO}(d(u), e(v))$;

/* Observe que em qualquer um dos casos temos que $S(u) = S(x)$ e $S(d(u)) < S(x)$,
ocorrendo o mesmo entre y e v . */

. caso4a: $S(z) = S(x)$.

- . $d(u) = e(z)$;
- . $e(v) = d(z)$;
- . $e(z) = x$;
- . $d(z) = y$;
- . $S(z) = S(x) + 1$;
- . **retorne** z ;


```

. caso4b:  $S(z) < S(x)$ . /* Temos aqui 5 subcasos: */

.   caso4b(i):  $u = d(x)$ .
.      $d(x) = e(u)$ ;
.      $e(v) = z$ ;
.      $e(u) = x$ ;
.      $d(u) = y$ ;
.      $S(u) = \max\{S(x), S(y)\} + 1$ ;
.     retorne  $u$ ;

.   caso4b(ii):  $v = e(y)$ .
.      $e(y) = d(v)$ ;
.      $d(u) = z$ ;
.      $e(v) = x$ ;
.      $d(v) = y$ ;
.      $S(v) = \max\{S(x), S(y)\} + 1$ ;
.     retorne  $v$ ;

.   caso4b(iii):  $u = x$  e  $S(x) = S(e(x))$ .
.      $e(v) = z$ ;
.      $d(x) = y$ ;
.      $S(x) = S(x) + 1$ ;
.     retorne  $x$ ;

.   caso4b(iv):  $v = y$  e  $S(y) = S(d(y))$ .
.      $d(u) = z$ ;
.      $e(y) = x$ ;
.      $S(y) = S(y) + 1$ ;
.     retorne  $y$ ;

.   caso4b(v):  $u = x$ ,  $S(x) > S(e(x))$ ,  $v = y$  e  $S(y) > S(d(x))$  .
.      $e(v) = z$ ;
.      $d(x) = y$ ;
.     retorne  $x$ ;

```

Observação: Os casos 4b(i) e (ii) assim como os casos 4b(iii) e 4b(iv) não são disjuntos. Quando dois casos são possíveis a escolha pode ser arbitrária.

Figura 2.12 : Caso 4 do *UNA-GLOBAL-BINÁRIO*.

- a) Caso 4a ($S(z) = S(x)$) com $u = x, v = y$.
- b) Caso 4a com $u = d(x), v = y$. Caso 4a com $u = x, v = e(v)$ é simétrico.
- c) Caso 4a com $u = d(x), v = e(y)$.
- d) Caso 4b(i) com $v = y$. Caso 4b(ii) com $u = x$ é simétrico.
- e) Caso 4b(i) com $v = e(y)$. Caso 4b(ii) com $u = d(x)$ é simétrico.
- f) Caso 4b(iii) com $v = y$ e caso 4b(v). Caso 4b(iv) com $u = x$ é simétrico.
- g) Caso 4b(iii) com $v = e(y)$. Caso 4b(iv) com $u = d(x)$ é simétrico.

A verificação de que o algoritmo é correto pode ser feita através de uma simples, porém longa, verificação de todos os casos. Deixaremos isto a cargo do leitor.

Da mesma maneira que ocorre com $(2,b)$ -árvores g.e., o *REPARTA-BINÁRIO* usado para repartir árvores binárias l.e., pode ser usado para repartir árvores binárias g.e. e obter árvores binárias g.e. . Além disso, o teorema 2.9 que fornece o tempo no pior caso do *REPARTA*, vale também para árvores binárias g.e. .

Além da aplicação no problema das árvores dinâmicas — que será visto no próximo capítulo — tais estruturas de dados podem ser aplicadas no tratamento de vários problemas computacionais, como por exemplo no problema do dicionário com pesos de acesso e no problema das árvores de busca multidimensionais. Maiores detalhes podem ser encontrados em [3].

Capítulo 3

ÁRVORES DINÂMICAS

Vários algoritmos de otimização em redes requerem uma estrutura de dados para representar uma coleção de árvores disjuntas, nas quais deseja-se realizar operações que podem ou não alterar suas estruturas. Neste capítulo veremos que, usando árvores (de busca) enviesadas, podemos desenvolver uma estrutura de dados para tais *árvores dinâmicas*, nas quais várias operações de interesse podem ser realizadas em tempo $O(\lg n)$, onde n é o número de vértices da coleção. A estrutura de dados que apresentaremos aqui será utilizada na implementação de um algoritmo bastante eficiente para o problema do fluxo máximo, tópico este a ser abordado no próximo capítulo. Faremos aqui uma descrição similar a feita por Sleator e Tarjan [18], com algumas modificações.

3.1 O Problema das Árvores Dinâmicas

Considere o seguinte problema: Dada uma floresta de árvores disjuntas (com raiz), onde cada uma das arestas possui um custo, desejamos representar essas árvores por uma estrutura de dados que nos permita executar eficientemente as seguintes operações:

- $\text{pai}(\text{vértice } v)$: Retorna o pai do vértice v . Se v não possui pai (é a raiz de uma árvore), então retorna um valor especial nulo.
- $\text{raiz}(\text{vértice } v)$: Retorna a raiz da árvore que contém v .
- $\text{customin}(\text{vértice } v)$: Retorna um vértice w tal que a aresta $(w, \text{pai}(w))$ seja a aresta de menor custo no caminho de v até $\text{raiz}(v)$. Esta operação supõe que v não é uma raiz.
- $\text{custo}(\text{vértice } v)$: Retorna o custo da aresta $(v, \text{pai}(v))$. Esta operação supõe que v não

é uma raiz.

- *tamanho*(*vértice* v): Retorna o tamanho da árvore a que v pertence.
- *atualiza*(*vértice* v , *real* x): Soma x no custo de cada uma das arestas do caminho de v até *raiz*(v).
- *enxerta*(*vértice* v, w ; *real* x): Junta as árvores que contêm os vértices v e w adicionando a aresta (v, w) com custo x e fazendo w pai de v . Esta operação considera que v e w estão em árvores diferentes e que v é a raiz de uma árvore.
- *poda*(*vértice* v): Divide a árvore contendo o vértice v em duas árvores, obtidas eliminando-se a aresta $(v, \text{pai}(v))$; retorna o custo desta aresta. Esta operação supõe que v não é raiz.
- *reverte*(*vértice* v): Modifica a árvore que contém v , fazendo v tornar-se raiz da árvore.

As operações *pai*, *raiz*, *customin*, *custo*, *tamanho* só extraem informações da floresta sem alterá-la; a operação *atualiza* altera os custos das arestas, mas não altera a estrutura da floresta. As operações *enxerta*, *poda* e *reverte* alteram a estrutura da floresta.

Nas análises que faremos, suporemos que a floresta inicial é uma coleção de n vértices isolados, $n \geq 2$, e denotaremos por m o número total de operações (dos tipos acima).

Antes de apresentarmos uma solução mais sofisticada, consideremos a solução óbvia, que seria cada vértice v guardar um ponteiro para o seu pai e o custo da aresta $(v, \text{pai}(v))$. Com esta representação poderíamos realizar cada uma das operações *pai*, *custo*, *enxerta* e *poda* em tempo $O(1)$. O tempo para cada uma das demais operações seria o comprimento do caminho de v até *raiz*(v), que é $O(n)$ no pior caso.

Usando uma outra representação — que veremos a seguir — podemos realizar as operações *raiz*, *customin*, *atualiza* e *reverte* em tempo $O(\lg(n))$, com prejuízo das demais operações que passam a ser realizadas em tempo $O(\lg(n))$ também.

3.2 Representando Árvores como Conjunto de Caminhos

Para resolver o problema das árvores dinâmicas que descrevemos na seção anterior, vamos representar cada árvore por uma coleção de caminhos disjuntos, e vamos realizar cada uma

das operações na árvore por meio de uma ou mais operações sobre caminhos. Nesta seção veremos uma maneira simples de representar árvores como conjunto de caminhos.

Dada uma árvore, particionando as suas arestas em dois grupos, *sólidas* e *frágeis* — com a propriedade de que no máximo uma aresta sólida entra em um vértice (def. A.14) —, podemos particionar tal árvore em conjuntos de caminhos disjuntos. As arestas sólidas definem uma coleção de caminhos sólidos. Um vértice no qual não incide nenhuma aresta sólida é também um caminho (de comprimento nulo) que será considerado sólido. Assim, cada vértice da árvore pertence a exatamente um caminho sólido. Os caminhos sólidos serão chamados simplesmente de caminhos.

Cada caminho tem um nó *cabeça*, que é o nó mais distante da *raiz*, e um nó *cauda*, que é o nó mais próximo da *raiz*. A cabeça é o início do caminho, e a cauda é o fim do caminho. Além dos caminhos precisamos representar as arestas frágeis. Estas ficam representadas da seguinte forma: Cada nó *cauda* v , guarda a informação $dpai(v)$, que é o pai de v na árvore (via aresta frágil) e a informação $dcusto$, que é o custo da aresta $(v, pai(v))$. Se v é a raiz da árvore então $dpai(v)=\text{nulo}$ e $dcusto(v)$ fica indefinido.

Figura 3.1 : Exemplo de uma árvore particionada em caminhos. (k, h, d, a) é um caminho onde k é a cabeça e a a cauda.

A seguir definiremos várias operações sobre caminhos:

- $caminho(\text{vértice } v)$: Retorna o caminho ao qual o vértice v pertence.
- $cabeça(\text{caminho } c)$: Retorna a cabeça do caminho c .
- $cauda(\text{caminho } c)$: Retorna a cauda do caminho c .

- *anterior*(*vértice* v): Retorna o vértice anterior a v no *caminho*(v). Se v é a cabeça do caminho, retorna um valor especial nulo.
- *posterior*(*vértice* v): Retorna o vértice posterior a v no *caminho*(v). Se v é a cauda do caminho, retorna um valor especial nulo.
- *ccusto*(*vértice* v): Retorna o custo da aresta $(v, \text{posterior}(v))$. Esta operação supõe que v não é a cauda do *caminho*(v).
- *ccustomin*(*caminho* c): Retorna o vértice v no caminho c tal que a aresta $(v, \text{posterior}(v))$ seja a aresta de menor custo no caminho c .
- *catualiza*(*caminho* c ; *real* x): Adiciona x ao custo de cada uma das arestas do caminho c .
- *inverte*(*caminho* c): Inverte a direção do caminho c fazendo com que a *cabeça* se torne *cauda* e vice-versa.
- *concatena*(*caminho* p, q ; *real* x): Concatena os caminhos p e q adicionando a aresta $(\text{cauda}(p), \text{cabeça}(q))$ com custo x , retornando o novo caminho formado.
- *quebra*(*vértice* v): Divide o caminho p em até três caminhos removendo as arestas incidentes a v . Retorna a lista $\{c_1, c_2, x_1, x_2\}$ onde:
 - c_1 é o caminho de *cabeça*(*caminho*(v)) até *anterior*(v);
 - c_2 é o caminho de *cauda*(*caminho*(v)) até *posterior*(v);
 - x_1 é o custo da aresta removida $(\text{anterior}(v), v)$;
 - x_2 é o custo da aresta removida $(v, \text{posterior}(v))$.

Se v é originalmente a cabeça do *caminho*(v) então c_1 é nulo e x_1 indefinido. Por outro lado, se v é originalmente a cauda do *caminho*(v) então c_2 é nulo e x_2 indefinido.

- *emenda*(*caminho* c): Estende o caminho c , convertendo a aresta frágil incidente à *cauda*(c) em sólida e a aresta sólida entrando em *pai*(*cauda*(p)), se existir, em frágil. Retorna este caminho. Veja figura 3.2 (i). Esta operação supõe que *cauda*(c) não é uma raiz.
- *estende*(*vértice* v): Cria um caminho com cabeça v e cauda *raiz*(v) convertendo as arestas frágeis entre v e *raiz*(v) em sólidas e convertendo as arestas sólidas incidentes a este caminho em frágeis. Retorna este novo caminho formado. Veja figura 3.2 (ii).

- $ctamanho(caminho\ c)$: Retorna o tamanho da subárvore que tem como raiz $cauda(c)$.

Figura 3.2 : Exemplo de *emenda* e *estende*: i) *emenda(c)*, ii) *estende(v)*.

Veremos agora como implementar *emenda*, *estende*, e as operações sobre as árvores com base nas operações sobre caminhos.

função *emenda*(*caminho* *c*):

vértice *v*;

caminho *c*₁, *c*₂;

real *x*₁, *x*₂;

.*v* = *dpai*(*cauda*(*c*));

.*c*₁, *c*₂, *x*₁, *x*₂ = *quebra*(*v*);

.**se** *c*₁ ≠ *nulo*

. **então** *dpai*(*cauda*(*c*₁)) = *v*;

. *dcusto*(*cauda*(*c*₁)) = *x*₁;

.*c* = *concatena*(*c*, *caminho*(*v*), *dcusto*(*cauda*(*c*)));

.**se** *c*₂ = *nulo*

. **então** **retorna** *c*

. **senão** **retorna** *concatena*(*c*, *c*₂, *x*₂);

função *estende*(*vértice* *v*):

caminho *c*, *c*₁, *c*₂;

real *x*₁, *x*₂;

.*c*₁, *c*₂, *x*₁, *x*₂ = *quebra*(*v*);

.**se** *c*₁ ≠ *nulo*

. **então** *dpai*(*cauda*(*c*₁)) = *v*;

. *dcusto*(*cauda*(*c*₁)) = *x*₁;

.**se** *c*₂ = *nulo*

. **então** *c* = *caminho*(*v*)

. **senão** *c* = *concatena*(*caminho*(*v*), *c*₂, *x*₂);

.**enquanto** *dpai*(*cauda*(*c*)) ≠ *nulo* **faça**

. *c* = *emenda*(*c*);

.**retorna** *c*;

função *pai*(*vértice* *v*):

.**se** *v* = *cauda*(*caminho*(*v*))

. **então** **retorna** *dpai*(*v*)

. **senão** **retorna** *posterior*(*v*) :

função *raiz*(*vértice* v):

.**retorna** *cauda*(*estende*(v)) ;

função *custo*(*vértice* v):

.**se** $v = \text{cauda}(\text{caminho}(v))$

. **então retorna** *dcusto*(v)

. **senão retorna** *ccusto*(v);

função *customin*(*vértice* v):

.**retorna** *ccustomin*(*estende*(v)) ;

função *atualiza*(*vértice* v :*real* x):

.*catualiza*(*estende*(v), x);

função *enxerta*(*vértice* v, w :*real* x):

.*concatena*(*caminho*(v), *estende*(w), x) ;

função *poda*(*vértice* v):

caminho c_1, c_2 ;

real x_1, x_2 ;

.*estende*(v) ;

. $c_1, c_2, x_1, x_2 = \text{quebra}(v)$;

.*dpai*(v) = *nulo* ;

.**retorna** x_2 ;

função *reverte*(*vértice* v):

.inverte(*estende*(v)) ;
.dpai(v) = *nulo* ;

função *tamanho*(*vértice* v):

.retorna *ctamanho*(*estende*(*raiz*(v)));

Na análise das operações acima, a única tarefa não trivial é calcular o número de operações *emenda* realizadas por *estende*. Contaremos o número de operações *emenda* realizadas após uma seqüência de m operações sobre árvores.

Definição 3.1 : Definimos **grandeza** de um vértice v , denotada por *grandeza*(v), como sendo o número de descendentes de v contando ele próprio.

Definição 3.2 : Dizemos que uma aresta $(v, \text{pai}(v))$ é **pesada** se $2 \cdot \text{grandeza}(v) > \text{grandeza}(\text{pai}(v))$; e **leve**, caso contrário.

Lema 3.1 : Seja v um vértice qualquer de uma floresta com n vértices. Então existe no máximo uma aresta pesada entrando em v e no máximo $\lfloor \lg(n) \rfloor$ arestas leves no caminho de v até *raiz*(v).

Prova: Suponha por absurdo que (w_1, v) e (w_2, v) sejam duas arestas pesadas entrando em v . Então $2 \cdot \text{grandeza}(w_1) > \text{grandeza}(v)$ e $2 \cdot \text{grandeza}(w_2) > \text{grandeza}(v)$. Logo, $2 \cdot (\text{grandeza}(w_1) + \text{grandeza}(w_2)) > 2 \cdot \text{grandeza}(v)$. Absurdo, pois $(\text{grandeza}(w_1) + \text{grandeza}(w_2)) < \text{grandeza}(v)$.

Veremos agora, porque existem no máximo $\lfloor \lg(k) \rfloor$ arestas *leves* no caminho de v até *raiz*(v). A prova será por indução em k , onde k é o número de vértices da árvore que contém v .

Denotaremos por *leves*(v, w) o número de arestas *leves* no caminho de v até w .

Se $k = 1$, não há arestas e portanto não há arestas leves.

Suponha $k \geq 2$. Suponha que r é a raiz da árvore e (r', r) é a última aresta no caminho de v até r . Se (r, r') é pesada não há nada a demonstrar. Suponha que (r, r')

seja leve. Seja k' o número de vértices da subárvore com raiz r' . Então $2 \cdot \text{grandeza}(r') \leq \text{grandeza}(r)$, isto é, $2 \cdot k' \leq k$. Por indução, $\text{leves}(v, r') \leq \lfloor \lg(k') \rfloor$. Logo, $\text{leves}(v, r) = \text{leves}(v, r') + 1 \leq \lfloor \lg(k') \rfloor + 1$, e portanto

$$\text{leves}(v, r) \leq \left\lfloor \lg \left(\frac{k}{2} \right) \right\rfloor + 1 = \lfloor \lg(k) \rfloor$$

■

Considerando as características *leves*, *pesadas*, *sólidas* e *frágeis* podemos dividir as arestas em quatro grupos: *pesadas sólidas*, *pesadas frágeis*, *leves sólidas* e *leves frágeis*. Com base no efeito que as operações sobre árvores causam no tamanho destes grupos de arestas daremos um limite para o total de *emenda*. Chamamos uma operação *emenda*(c) de *especial* se $\text{pai}(\text{cauda}(c))$ é a cabeça de um caminho; e *normal*, caso contrário. Uma operação *emenda* especial aumenta o número de arestas sólidas de um, enquanto que uma operação *emenda* normal deixa o número de arestas sólidas inalterado.

Teorema 3.1 : Em uma seqüência de m operações sobre árvores são executadas no máximo m operações *emenda* especiais.

Prova: Sejam $| \text{sólidas} |$, $| \text{estende} |$, $| \text{especiais} |$, $| \text{enxerta} |$ e $| \text{poda} |$ o número de arestas sólidas, operações *estende*, *emendas* especiais, operações *enxerta* e operações *poda*, respectivamente. O número total de arestas é: $| \text{enxerta} | - | \text{poda} |$. Logo,

$$| \text{sólidas} | \leq | \text{enxerta} | - | \text{poda} |.$$

Os primeiros comandos da função *estende* decrementam $| \text{sólidas} |$ de no máximo 1; o último comando desta função (**enquanto**) incrementa $| \text{sólidas} |$ de pelo menos 1 por *emenda* especial. Fora da operação *estende*, a operação *enxerta* incrementa $| \text{sólidas} |$ de 1, e a operação *poda* decrementa $| \text{sólidas} |$ de no máximo 1. Logo, podemos escrever a seguinte desigualdade:

$| \text{sólidas} | \geq | \text{especiais} | + | \text{enxerta} | - | \text{estende} | - | \text{poda} |$. Dessa desigualdade resulta que $| \text{especiais} | \leq | \text{estende} | + | \text{sólidas} | - | \text{enxerta} | + | \text{poda} |$. E como $| \text{sólidas} | - | \text{enxerta} | + | \text{poda} | \leq 0$, segue que

$$| \text{especiais} | \leq | \text{estende} | \leq m.$$

■

Teorema 3.2 : Em uma seqüência de m operações sobre árvores dinâmicas, são executadas no máximo $m(3 \cdot \lfloor \lg(n) \rfloor + 1)$ operações *emenda*.

Prova: Dizemos que uma operação $emenda(c)$ é *leve* quando a aresta $(cauda(c), pai(cauda(c)))$ é leve; e *pesada*, caso contrário. Para calcular o número total de operações $emenda$, vamos calcular o número de $emendas$ leves, $|emendas\ leves|$ e o número de operações $emenda$ pesadas,

$|emendas\ pesadas|$. Durante uma operação $estende$ são realizadas no máximo $\lfloor \lg(n) \rfloor$ $emendas$ leves. Então $|emendas\ leves| \leq \lfloor \lg(n) \rfloor |estende|$. Para obter um limite no número de operações $emendas$ pesadas vamos denotar por ps o número de arestas pesadas e sólidas. Durante uma operação $estende$, cada operação $emenda$ pesada incrementa ps de 1, cada operação $emenda$ leve decrementa ps de no máximo 1, e as duas primeiras linhas do $estende$ decrementa ps de no máximo 1.

Na operação $enxerta(v, w, x)$, temos que quantificar o decremento de ps ocorrido após a operação $estende$, já que o decremento de ps causado pela operação $estende$ será contado à parte. Após a operação $estende$ temos que todas as arestas do caminho de w até $raiz(w)$ se tornam sólidas, logo depois de adicionar a aresta (v, w) possivelmente algumas arestas deste caminho se tornam pesadas. Já as arestas incidentes a este caminho eram frágeis e continuam assim. Logo, o ps não decresce.

A operação $poda$ decrementa a grandeza de todos os vértices, exceto v , de v , até $raiz(v)$ no caminho da árvore original. No máximo $\lfloor \lg(n) \rfloor$ arestas deste caminho tornam-se leves. Logo, a operação $poda$ decrementa o ps de no máximo $\lfloor \lg(n) \rfloor + 1$, contando a aresta removida.

Na operação $reverte(v)$, novamente, temos que quantificar o decremento de ps ocorrido após a operação $estende$. A operação $reverte(v)$ altera a grandeza de todos os vértices no caminho de v até $raiz(v)$ na árvore original. No máximo $\lfloor \lg(n) \rfloor$ arestas deste caminho tornam-se leves. Logo, a operação $reverte$ decrementa ps de no máximo $\lfloor \lg(n) \rfloor$.

A partir das afirmações acima podemos inferir que:

$$\begin{aligned} & |enxerta| - |poda| \geq ps \geq \\ & \geq |emendas\ pesadas| - |emendas\ leves| - |estende| - (\lfloor \lg(n) \rfloor + 1) \cdot |poda| - \lfloor \lg(n) \rfloor \cdot |reverte|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} & |emendas\ pesadas| \leq \\ & \leq |enxerta| - |poda| + |emendas\ leves| + |estende| + (\lfloor \lg(n) \rfloor + 1) \cdot |poda| + \lfloor \lg(n) \rfloor \cdot |reverte| = \\ & = |enxerta| + |emendas\ leves| + |estende| + (\lfloor \lg(n) \rfloor) \cdot (|poda| + |reverte|) \leq \\ & (\lfloor \lg(n) \rfloor + 1) \cdot |estende| + \lfloor \lg(n) \rfloor \cdot (|enxerta| + |poda| + |reverte|) \leq m \cdot (2 \cdot \lfloor \lg(n) \rfloor + 1), \end{aligned}$$

e portanto,

$$|emendas\ leves| + |emendas\ pesadas| \leq m \cdot (3 \cdot \lfloor \lg(n) \rfloor + 1).$$

■

Teorema 3.3 : Em uma sequência de m operações sobre árvores dinâmicas são realizadas no máximo $O(m \lfloor \lg(n) \rfloor)$ operações sobre caminhos.

Prova: Imediata a partir do teorema 3.2. ■

3.3 Como Implementar as Operações Sobre Caminhos

Para completar a solução do nosso problema, precisamos de uma maneira de representar os caminhos. A solução que apresentaremos é representar estes caminhos por árvores binárias, onde cada nó folha, da esquerda para direita, é um nó do caminho, nesta ordem, isto é, o nó mais à esquerda é a cabeça do caminho, e o nó mais à direita a cauda. Cada nó interno representará um subcaminho dos nós que são seus descendentes. Cada nó interno representa também uma aresta que é a aresta que liga o descendente mais à direita, de seu filho esquerdo com o descendente mais à esquerda, de seu filho direito.

Para cada nó interno v da árvore definimos dois valores:

- $custobruto(v)$: Que é o custo da aresta que o nó v representa.
- $menorcusto(v)$: Que é o menor custo entre as arestas do subcaminho que o nó v representa.

Para facilitar a implementação das várias operações com caminhos, armazenamos em cada nó interno v as seguintes informações:

- $bitrev(v)$: pode assumir os valores 0 ou 1. Inicialmente $bitrev(v)=0$, e seu valor é alterado apenas pela função *reverte*;
- $bpai(v)$: pai do nó v na árvore binária. Se v for a raiz da árvore, assume um valor especial nulo;
- $resmin(v)$: $menorcusto(v)$, se v for a raiz da árvore binária, $menorcusto(v) - menorcusto(bpai(v))$, caso contrário;
- $rescusto(v)$: $custobruto(v) - menorcusto(v)$;
- $bcabeça(v)$: aponta para a cabeça do subcaminho correspondente a v ;
- $besquerdo(v)$: aponta para o filho esquerdo de v ;
- $bdireito(v)$: aponta para o filho direito de v ;
- $bcauda(v)$: aponta para a cauda do subcaminho correspondente a v .

Definição 3.3 : Definimos recursivamente, **estado reverso** de um vértice v como:

Se v é raiz da árvore binária, então estado reverso de v é $bitrev(v)$. Se v não é raiz, então estado reverso de v é $bitrev(v)$ ou (exclusivo) estado reverso de $(bpai(v))$.

O *estado reverso* de um vértice indica se seus filhos estão trocados, isto é, se seu filho direito é, na realidade, seu filho esquerdo, e vice-versa. Este conceito será usado nas operações *anterior* e *posterior*.

Figura 3.3 : Em (a), temos um caminho e em (b) a representação do mesmo em uma árvore binária (as folhas são os nós do caminho e os nós internos as arestas).

Com esta representação podemos implementar facilmente as operações sobre caminhos da maneira como segue. Note que se c é um caminho, então podemos nos referir

a c como sendo a raiz da árvore que representa tal caminho.

- *caminho*(*vértice* v): Procura o ancestral de w de v tal que $bpai(w)=\text{nulo}$. Esta operação toma tempo proporcional à profundidade de v .

- *cabeça*(*caminho* c): Se $bitrev(c)=0$ retorna $bcabeça(c)$; caso contrário, retorna $bcauda(c)$. Esta operação leva tempo $O(1)$.

- *cauda*(*caminho* c): Simétrico a *cabeça*(c).

- *anterior*(*vértice* v): Percorra os vértices de v até *caminho*(v) na árvore binária. Retorne neste caminho computando o estado reverso de cada nó. Procure o ancestral w mais próximo de v que é um filho direito. Seja u o irmão esquerdo de w . Retorne $bcauda(u)$ se $estado\ reverso(u)=0$; e $bcabeça(u)$, caso contrário. Esta operação leva tempo proporcional à profundidade de v na árvore.

- *posterior*(*vértice* v): Simétrico a *anterior*.

- *ccusto*(*vértice* v): Procura o ancestral w mais próximo de v que é um filho esquerdo. Seja $(bpai(w) = v_0, v_1, \dots, v_k = \text{caminho}(v))$ os vértices do caminho de v até *caminho*(v) na árvore binária. Retorne $rescusto(bpai(w)) + menorcusto(bpai(w)) = rescusto(v_0) + \sum_{i=0}^k (resmin(v_i))$. Esta operação leva tempo proporcional à profundidade de v na árvore.

- *ccustomin*(*caminho* c): Comece com $u = c$ e repita o seguinte passo enquanto um dos filhos de u não é folha e possui *rescusto* positivo: se o filho direito de u é um nó interno e tem *rescusto* nulo, substitua u pelo seu filho direito; caso contrário, substitua u pelo seu filho esquerdo. Uma vez computado u , retorne o descendente (folha) mais à direita de seu filho esquerdo (o estado reverso deve ser levado em conta). Esta operação leva tempo proporcional à profundidade de u .

- *catualiza*(*caminho* c , *real* x): Adiciona x ao *resmin*(c). Esta operação leva tempo $O(1)$.

- *inverte*(*caminho* c): Nega o *bitrev*(c). Esta operação leva tempo $O(1)$.

As operações acima independem da classe de árvores que escolhemos para representar os caminhos, pois elas não alteram a estrutura das mesmas, mas apenas extraem e alteram informações das mesmas. A operação *ctamanho*, poderia ser implementada independentemente do tipo de árvore, no entanto faremos isto assim que escolhermos o tipo de árvore mais adequada para tal. No caso das operações *quebra* e *concatena*, precisamos explicitar a classe de árvores que estamos trabalhando, pois elas vão alterar a estrutura das árvores. Uma boa classe de árvores, pode ser a classe das árvores balanceadas. Com árvores balanceadas, todas as operações que levam tempo proporcional à

altura das árvores seriam executadas em tempo $O(\lg n)$. As operações *quebra* e *concatena* também poderiam ser executadas em tempo $O(\lg n)$. A operação *ctamanho*, poderia ser executada em tempo constante, mas veremos como implementá-la mais adiante. Além disso, uma operação *emenda* pode ser executada em tempo $O(\lg n)$ pois ele chama uma vez a operação *quebra* e uma ou duas vezes a operação *concatena*. O teorema 3.3, nos fornece uma cota superior para o tempo necessário para realizar m operações sobre árvores, apresentada no seguinte teorema:

Teorema 3.4 : Representado-se os caminhos por árvores binárias balanceadas, uma sequência de m operações sobre árvores dinâmicas necessitam tempo $O(m(\lg n)^2)$.

Um resultado melhor que o teorema anterior pode ser obtido como veremos, representando-se os caminhos por árvores binárias l.e. Consegue-se neste caso, uma melhora de um fator igual a $\lg n$. Para usar esta classe de árvores precisamos definir o peso das folhas, que será definido como segue:

$$peso(v) = \begin{cases} grandeza(v), & \text{se não entra nenhuma aresta sólida em } v; \\ grandeza(v) - grandeza(w), & \text{se a aresta sólida } (w, v) \text{ entra em } v. \end{cases}$$

Note que se c é um caminho então $peso(c)$ denota o peso da raiz da árvore que representa c .

No capítulo 2, definimos peso de um nó interno (definição 2.4), mas esta informação não era armazenada nos nós internos das árvores enviesadas. Para a implementação das árvores dinâmicas, é importante armazenar esta informação, porém isto não acarreta alteração no tempo de execução das operações sobre árvores enviesadas. Observe que com esta informação, a função *ctamanho* pode ser implementada de maneira muito simples:

função *ctamanho*(caminho c):

.retorne $peso(c)$;

Relembramos aqui que $S(v)$ denota o posto de v , conforme definimos no capítulo anterior.

Lema 3.2 : Representando caminhos por árvores binárias l.e. a operação *concatena*(c_1, c_2, x) requer $O(|S(c_1) - S(c_2)|)$ tempo amortizado e a raiz da nova árvore possuirá posto $\max\{S(c_1), S(c_2)\}$ ou $\max\{S(c_1), S(c_2)\} + 1$.

Prova: Segue do lema 2.3 e do teorema 2.2. ■

Lema 3.3 : Representando caminhos por árvores binárias l.e. a operação *quebra*(v), requer $O(S(c) - S(v))$ tempo amortizado, onde c é o caminho ao qual v pertencia antes da operação *quebra* ser aplicada. Se a lista retornada for (c_1, c_2, x, y) , então se $c_1 \neq \text{nulo}$ então $S(c_1) \leq S(c) + 1$, se $c_2 \neq \text{nulo}$ então $S(c_2) \leq S(c) + 1$. Além disso, se $c_1 \neq \text{nulo}$ então c_1 é $(S(c_1) - S(c) + 1)$ -crédito invariante e se $c_2 \neq \text{nulo}$ então c_2 é $(S(c_2) - S(c) + 1)$ -crédito invariante

Prova: Segue do teorema 2.5. ■

Observe que a operação *REPARTA* deve ser modificada, pois não definimos qual é o item de cada folha, mas esta informação é necessária apenas para encontrar o nó base, e este pode ser encontrado facilmente, já que temos a folha da árvore enviesada que estamos repartindo.

Lema 3.4 : Para qualquer nó interno v de uma árvore binária l.e. que representa um caminho tem-se que $1 \leq \text{peso}(v) \leq n$, onde n é o número total de vértices da árvore. Isto significa que $0 \leq S(v) \leq 1 + \lg n$.

Prova: Seja c a raiz de uma árvore binária l.e. que representa o caminho $(\text{cabeça}(c) = v_0, v_1, \dots, v_k = \text{cauda}(c))$ e v um vértice qualquer deste caminho. Pela definição de peso temos que :

$$1 \leq \text{peso}(v) \leq \text{peso}(c) = \sum_{i=0}^k \text{peso}(v_i) =$$

$$\text{grandeza}(v_0) + \sum_{i=1}^k (\text{grandeza}(v_i) - \text{grandeza}(v_{i-1})) =$$

$$\text{grandeza}(v_k) = \text{grandeza}(\text{cauda}(c)) \leq n.$$

As operações *emenda* e *estende* precisam ser modificadas para atualizar os pesos dos vértices. Abaixo reescrevemos as operações indicando com setas as modificações necessárias.

```

função emenda(caminho c):
  vértice v;
  caminho c1, c2;
  real x1, x2;

  .v = dpai(cauda(c));
  .c1, c2, x1, x2 = quebra(v);
  .peso(v) = peso(v) - peso(c);      ⇐
  .se c1 ≠ nulo
  .  então dpai(cauda(c1)) = v;
  .      dcusto(cauda(c1)) = x1;
  .      peso(v) = peso(v) + peso(c1);      ⇐
  .c = concatena(c, caminho(v), dcusto(cauda(c)));
  .se c2 = nulo
  .  então retorna c
  . senão retorna concatena(c, c2, x2);

```

```

função estende(vértice v):
  caminho c, c1, c2;
  real x1, x2;

  .c1, c2, x1, x2 = quebra(v);
  .se c1 ≠ nulo
  .  então dpai(cauda(c1)) = v;
  .      dcusto(cauda(c1)) = x1;
  .      peso(v) = peso(v) + peso(c1);      ⇐
  .se c2 = nulo
  .  então c = caminho(v)
  . senão c = concatena(caminho(v), c2, x2);
  .enquanto dpai(cauda(c)) ≠ nulo faça
  .  c = emenda(c);
  .retorna c;

```

Lema 3.5 : Seja (w, v) uma aresta *sólida* de uma árvore. Se u é irmão de w e é cauda de um caminho c , então $\text{peso}(v) \geq \text{peso}(c)$ e $S'(v) \geq S'(c) - 1$.

Prova: $\text{peso}(v) = \text{grandeza}(v) - \text{grandeza}(w) \geq \text{grandeza}(u) = \text{peso}(c)$.

Logo,

$$S'(v) = \lfloor \lg \text{peso}(v) \rfloor \geq \lfloor \lg \text{peso}(c) \rfloor \geq S'(c) - 1 ,$$

onde a última desigualdade segue do lema 2.1 .

■

Figura 3.4 : Exemplo de uma *emenda* normal.

Teorema 3.5 : Usando árvores binárias l.e. e fazendo a implementação descrita, o tempo necessário para realizar uma seqüência de m operações sobre árvores dinâmicas é $O(m \lg n)$.

Prova: Os lemas 3.2, 3.3 e 3.4 implicam que as operações *concatena* e *quebra* necessitam $O(\lg n)$ tempo amortizado e as demais operações sobre caminhos necessitam de $O(\lg n)$ tempo no pior caso. A operação *emenda* necessita de $O(\lg n)$ tempo amortizado. Isto significa que, pelos teoremas 3.1 e 3.2 o tempo necessário para realizar m operações é $O(m \lg n)$ mais o tempo necessário para as $O(m \lg n)$ operações *emenda* normais que são realizadas durante as operações *estende*.

Para obter um limite para o tempo gasto em operações *emenda* normais considere a i -ésima operação *emenda* normal que ocorre dentro de uma iteração de uma operação *estende* (veja figura 3.4). Seja u a *cauda* do caminho que está sendo estendido, c o caminho

contém u antes da primeira operação *emenda* e c' o caminho contendo u antes da i -ésima operação *emenda*. Seja v o pai de u , s o caminho contendo v antes da primeira operação *emenda*, e s' o caminho contendo v após a i -ésima operação *emenda*. Seja ainda w o filho de v que está no caminho s . Provaremos em primeiro lugar que cada *emenda* normal necessita de $O(S(s) - S(c) + S(s') - S(c'))$ tempo amortizado.

Sejam $\text{peso}(v)$ e $\text{peso}'(v)$, os pesos de v antes e depois da i -ésima operação *emenda*, respectivamente, e $S(v)$ e $S'(v)$ o posto de v antes e depois da i -ésima operação *emenda*.

Como a operação *emenda* é normal, então $S(s) \geq S(v) + 1$.

Pelo lema 3.5 temos que $S(v) + 1 \geq S(c)$ e $S(v) + 1 \geq S(c')$.

Logo,

$$S(s) \geq S(c) \text{ e } S(s) \geq S(c'). \quad (1)$$

Pelo lema 3.5 temos que

$$S(s) - S(v) \leq S(s) - S(c) - 1. \quad (2)$$

Pelo lema 3.5 temos que $S(s') \leq S'(v) + 1 = S(q)$. Logo,

$$S(s') \leq S(q). \quad (3)$$

Para a operação *quebra*, necessitamos de $O(S(s) - S(v))$ créditos. Logo, de (2) segue que $O(S(s) - S(c))$ créditos são suficientes para realizar esta operação.

Na primeira concatenação da operação *emenda* precisamos de $|S(c') - S'(v)| + 1$ créditos. Se $S(c') - S'(v) \geq 0$, então:

$$|S(c') - S'(v)| + 1 = S(c') - S'(v) + 1 \leq S(s') - S(c') + S(s') - S'(v) + 1.$$

Pois, pelo lema 3.2, $S(c') \leq S(s')$ e $S(s') - S(c') \geq 0$. Por outro lado se $S(c') - S'(v) \leq 0$, então

$$|S(c') - S'(v)| + 1 = S'(v) - S(c') + 1 \leq S(s') - S(c') + S(s') - S'(v) + 1.$$

Pois, pela definição de posto, $S'(v) \leq S(s')$ e $S(s') - S'(v) \geq 0$.

Logo, de (3) temos que

$$|S(c') - S'(v)| + 1 \leq S(s') - S(c') + S(s') - S'(v) + 1 \leq$$

$$\leq S(s') - S(c') + S(s') - S'(q) + 2.$$

Pois, do lema 3.5 temos que $S'(v) \geq S(q) - 1$. Como a operação *quebra* deixa $S(s) - S(q) + 1$ créditos temos que esta concatenação necessita de mais $S(s') - S(c) + S(s') - S(s) + 1 \leq 2(S(s') - S(c')) + 1$ créditos.

Sejam c'' e c''' os caminhos da segunda concatenação da operação *emenda*. A segunda concatenação necessita de mais $|S(c'') - S(c''')| + 1$. Com um raciocínio semelhante ao aplicado para obter o resultado anterior e usando (3) obtemos:

$$|S(c'') - S(c''')| + 1 \leq S(s') - S(c'') + S(s') - S(c''') + 1.$$

Como $S(c'') \geq S(c')$, então, pelo lema 3.2

$$S(s') - S(c'') + S(s') - S(c''') + 1 \leq 2.S(s') - S(c') - S(c''') + 1$$

Como a operação *quebra* deixa mais $S(s) - S(c''') + 1$ créditos e

$$2.S(s') - S(c') - S(s) \leq 2.(S(s') - S(c')),$$

uma operação *emenda* gastará $O(S(s) - S(c) + S(s') - S(c'))$ créditos. Somando o tempo gasto em operações *emendas* normais de uma operação *estende* temos um limite de $O(k + \lg n)$ onde k é o número de operações *emendas* normais. Com este resultado e o do teorema 3.2 temos que o tempo total gasto em uma sequência de m operações sobre árvores dinâmicas é no pior caso $O(m \lg n)$. ■

3.4 Uma Implementação Mais Sofisticada

Nesta seção veremos uma implementação mais sofisticada para o problema das árvores dinâmicas, objetivando encontrar um limite superior para o pior tempo de execução de uma operação particular sobre árvores dinâmicas.

Faremos algumas modificações nos algoritmos da seção anterior, que resultará em algoritmos que necessitam de tempo $O(\lg n)$ no pior caso. Vale aqui ressaltar que a modificação que introduziremos torna a estrutura mais complicada, sendo portanto muito provável que a implementação já vista tenha um desempenho melhor na prática. Assim, a nova estrutura que veremos é mais de interesse teórico do que prático.

A nova implementação manterá uma aresta sólida se e somente se ela for pesada ($2 \text{ grandeza}(v) > \text{grandeza}(\text{pai}(v))$). Como a operação *estende* pode transformar arestas leves em sólidas, e pesadas em frágeis, necessitamos uma nova operação que recoloca a estrutura de dados na situação desejada. Com este propósito usaremos a seguinte operação:

- *abafa(caminho c)*: Converte todas as arestas leves deste caminho em frágeis; e toda aresta pesada incidente a este caminho em sólida.

A seguir reescrevemos cada operação com as devidas alterações:

função *pai*(*vértice v*):
(a mesma da seção anterior)

função *raiz*(*vértice v*):
caminho c;

```
.c=estende(v) ;
.v=cauda(c) ;
.abafa(c) ;
.retorna v ;
```

função *custo*(*vértice v*):
(a mesma da seção anterior)

função *customin*(*vértice v*):
caminho c;
real x;

```
.c=estende(v) ;
.x=ccustomin(c) ;
.abafa(c) ;
.retorna x ;
```

função tamanho(*vértice* v):
inteiro t ;
raiz r ;

$r = \text{raiz}(v)$;
 $t = \text{ctamanho}(\text{estende}(r))$;
 $\text{abaixa}(r)$;
retorna t ;

função atualiza(*vértice* v ; *real* x):
caminho c ;

$c = \text{estende}(v)$;
 $\text{catualiza}(c, x)$;
 $\text{abaixa}(c)$;

função enxerta(*vértice* v, w ; *real* x):

$\text{abaixa}(\text{concatena}(\text{caminho}(v), \text{estende}(w), x))$;

função poda(*vértice* v):
caminho c_1, c_2, c ;
real x_1, x_2 ;

$c = \text{estende}(v)$;
 $c_1, c_2, x_1, x_2 = \text{quebra}(v)$;
 $\text{dpai}(v) = \text{nulo}$;
 $\text{abaixa}(c_2)$;
 $\text{abaixa}(\text{caminho}(v))$;
retorna x_2 ;

função *reverte*(*vértice* *v*):
caminho *c*;

.c = *estende*(*v*) ;
.inverte(*c*) ;
.dpai(*v*) = *nulo* ;
.abafa(*c*) ;

Para implementar a operação *abafa* faremos três modificações na estrutura de dados. A primeira modificação consiste em acrescentar dois campos nos nós internos da árvore binária. Antes definiremos dois conceitos que determinarão o conteúdo dos campos.

Definição 3.4 : Seja *u* um nó interno de uma árvore binária que corresponde à aresta (*v*, *w*). Definimos **tendesquerdo**(*u*) como sendo a soma dos pesos dos vértices do subcaminho de *v* até *cabeça*(*v*) menos *peso*(*w*). Definimos **minesquerdo**(*u*) como sendo:

$$\min\{tendesquerdo(t) \mid t \text{ é descendente de } u\}.$$

Definição 3.5 : Seja *u* um nó interno de uma árvore binária que corresponde à aresta (*v*, *w*). Definimos **tendedireito**(*u*) como sendo a soma dos pesos dos vértices do subcaminho de *w* até *cauda*(*w*) menos *peso*(*v*). Definimos **mindireito**(*u*) como sendo:

$$\min\{tendedireito(t) \mid t \text{ é descendente de } u\}.$$

Lema 3.6 : Seja *u* um nó interno de uma árvore binária que corresponde à aresta (*v*, *w*) do caminho *c*. Então (*v*, *w*) é pesada se e somente se *tendesquerdo*(*u*) > 0.

Prova: Sejam $v_0 = \text{cabeça}(c)$, $v_1, \dots, v_k = w$, os vértices do subcaminho de *cabeça*(*c*) até *w*. Então:

$$tendesquerdo(u) = \sum_{i=0}^{k-1} \text{peso}(v_i) - \text{peso}(w) =$$

$$\text{grandeza}(v_0) + \sum_{i=1}^{k-1} (\text{grandeza}(v_i) - \text{grandeza}(v_{i-1})) - (\text{grandeza}(w) - \text{grandeza}(v)) =$$

$$grandeza(v) + grandeza(v) - grandeza(w) = 2 \cdot grandeza(v) - grandeza(w),$$

ou seja, (v, w) é pesada se e somente se $tendesquerdo(u) > 0$. ■

Precisamos agora de mais uma operação sobre caminhos:

- *leve(caminho c)*: Retorna o vértice v mais próximo da *cauda(c)* tal que $(anterior(v), v)$ seja leve; ou nulo, se não existir tal vértice.

A implementação da função acima é semelhante à implementação do *ccustomin*. Começando da raiz da árvore binária, desce-se nos nós calculando *minesquerdo* e *tendesquerdo* (*mindireito* e *tendedireito* também), procurando o nó w mais à esquerda tal que $tendesquerdo < 0$ (ou *tendedireito* < 0 , dependendo do estado reverso). Devolva o descendente mais à direita do filho esquerdo de w . Esta operação leva tempo proporcional à profundidade de w .

Outra modificação é a utilização de árvores g.e. em lugar de l.e. Com esta modificação, conseguimos um limite superior para o tempo de execução das operações *concatena* e *quebra*.

Lema 3.7 : Se representarmos caminhos por árvores binária g.e., podemos realizar a operação *concatena*(c_1, c_2, x) em tempo $O(\max\{S(c_1), S(c_2)\} - \max\{S(v), S(w)\})$, onde $v = cauda(c_1)$ e $w = cabeça(c_2)$ e a árvore resultante terá posto $\max\{S(c_1), S(c_2)\}$ ou $\max\{S(c_1), S(c_2)\} + 1$.

Prova: Imediata a partir do lema 2.3 e do teorema 2.7. ■

Lema 3.8 : Se representarmos caminhos por árvores binária g.e., podemos realizar a operação *quebra*(v), retornando a lista (c_1, c_2, x, y) em tempo $O(S(c) - S(v))$, onde c é o caminho ao qual v pertencia antes da operação *quebra* ser aplicada.

Prova: Imediata a partir do teorema 2.9. ■

A última modificação será a manutenção, para cada vértice v , de um conjunto de todos caminhos c tais que $(cauda(c), v)$ é leve. Estes conjuntos serão manipulados por três operações:

- *pesomax*(*vértice v*) : Devolve o caminho de maior peso no conjunto de caminhos de *v*. Se o conjunto de caminhos de *v* é vazio devolve nulo.
- *insere*(*caminho c* ,*vértice v*) : Insere o caminho *c* no conjunto de caminhos de *v*.
- *remove*(*caminho c* ,*vértice v*) : Remove o caminho *c* no conjunto de caminhos de *v*.

Para representar estes conjuntos de caminhos, utilizaremos árvores binárias g.e.. O peso de cada caminho é utilizado como posto. Além disso manteremos, para cada nó interno, um apontador para seu descendente mais à esquerda. Com esta representação podemos executar a operação *pesomax* em tempo $O(1)$ e as operações *insere*(*c*, *v*) e *remove*(*c*, *v*) em $O(\lg(\frac{P}{\text{peso}(c)}))$, onde *P* é a soma dos pesos de todos os caminhos no conjunto de caminhos de *v*.

As operações *emenda* e *estende* precisam ser modificadas para manter os conjuntos de caminhos. Abaixo temos as operações reescritas com as modificações necessárias.

função *emenda*(*caminho c*):

vértice v;

*caminho c*₁, *c*₂;

*real x*₁, *x*₂;

```
.v = dpai(cauda(c));
.c1, c2, x1, x2 = quebra(v);
.peso(v) = peso(v) - peso(c);
.remove(c, v);
.se c1 ≠ nulo
. então dpai(cauda(c1)) = v;
.         dcusto(cauda(c1)) = x1;
.         peso(v) = peso(v) + peso(c1);
.         insere(c1, v);
.c = concatena(c, caminho(v), dcusto(cauda(c)));
.se c2 = nulo
. então retorna c
. senão retorna concatena(c, c2, x2);
```

função *estende*(*vértice* *v*):

caminho *c*, *c*₁, *c*₂;

real *x*₁, *x*₂;

.*c*₁, *c*₂, *x*₁, *x*₂ = *quebra*(*v*);

.*se* *c*₁ ≠ *nulo*

. *então* *dpai*(*cauda*(*c*₁)) = *v*;

. *dcusto*(*cauda*(*c*₁)) = *x*₁;

. *peso*(*v*) = *peso*(*v*) + *peso*(*c*₁);

. *insere*(*c*₁, *v*);

.*se* *c*₂ = *nulo*

. *então* *c* = *caminho*(*v*)

. *senão* *c* = *concatena*(*caminho*(*v*), *c*₂, *x*₂);

.*enquanto* *dpai*(*cauda*(*c*)) ≠ *nulo* *faça*

. *c* = *emenda*(*c*);

.*retorna* *c*;

Teorema 3.6 : A operação *estende*, na última versão, necessita de tempo $O(\lg n)$, no pior caso.

Prova: A demonstração é muito semelhante à feita para o teorema 3.5. O tempo de uma operação *estende* é $O(\lg n)$ mais o tempo gasto nas $O(\lg n)$ operações *emenda*. Considere a *i*-ésima operação *emenda* de uma operação *estende* (veja figura 3.4). Seja *u* a *cauda* do caminho que está sendo estendido pela operação *emenda*, seja *c* o caminho que continha *u* antes do início da operação *estende*, e *c'* o caminho contendo *u* antes da *i*-ésima operação *emenda*. Seja *v* o *pai* de *u*, seja *s* o caminho contendo *v* antes da *i*-ésima operação *emenda*, e *s'* o caminho contendo *v* após a *i*-ésima operação *emenda*. Seja ainda *w* o filho de *v* que está no caminho *s*.

Pelo lema 3.8 necessitamos de $O(\bar{S}(s) - \bar{S}(v))$ tempo para executar a operação *quebra* em uma operação *emenda*. Pelo lema 3.5, $\bar{S}(c') \leq 1 + \bar{S}(v)$. Logo, necessitamos de tempo $O(\bar{S}(s) - \bar{S}(c))$ em cada *quebra*, ou seja, o tempo total gasto nas operações *quebra* é $O(\lg n)$.

A operação *remove* necessita de tempo $O\left(\lg\left(\frac{\text{peso}(v)}{\text{peso}(c')}\right)\right)$ para ser executada. Como $\text{peso}(v) \leq \text{peso}(s)$, $O\left(\lg\left(\frac{\text{peso}(s)}{\text{peso}(c')}\right)\right)$ tempo é suficiente para realizar um *remove*. Somando sobre todas as operações *emenda*, temos um tempo total de $O(\lg n)$ gasto em todas as operações *remove*.

A operação *insere* necessita de tempo $O(\lg(\frac{\text{peso}(v)}{\text{peso}(q)}))$, onde *q* é o caminho inserido. Como (*cauda*(*q*), *v*) é pesada: $2 \cdot \text{grandezza}(\text{cauda}(q)) > \text{grandezza}(v)$, ou seja, $\frac{\text{peso}(v)}{\text{peso}(q)} = \frac{\text{grandezza}(v) - \text{grandezza}(\text{cauda}(q))}{\text{grandezza}(\text{cauda}(q))} \leq 1$. Logo, a operação *insere* necessita de tempo $O(1)$.

Pelo lema 3.7, a primeira operação *concatena* necessita tempo $O(\max\{S(c'), S'(v)\} - \max\{S(\text{cauda}(c')), S'(v)\}) = O(S(s') - S'(v))$. Analogamente, a segunda operação *concatena* necessita de tempo $O(S(s') - S'(v))$. Como (u, v) é *leve*,

$$2.\text{grandeza}(u) \leq \text{grandeza}(v), \quad \text{ou seja,}$$

$$\text{grandeza}(u) \leq \text{grandeza}(v) - \text{grandeza}(u).$$

Portanto, é suficiente tempo $O(S(s') - S(c'))$ para realizar as duas operações *concatena* de cada operação *emenda*. Somando sobre todas as operações *emenda*, temos um tempo total de $O(\lg n)$ para todas as operações *concatena*. Logo, para realizar a operação *estende* é necessário tempo $O(\lg n)$. ■

A operação *abafa* é praticamente a operação *estende* de trás para frente. Ela recebe um caminho, que tem a raiz como cauda, vai subindo, da cabeça em direção à raiz, realizando, uma operação inversa à operação *emenda*, a qual chamaremos de *corta*. A operação *corta* está descrita abaixo.

- *corta(caminho c)*: Converte a aresta *leve*(c) em frágil, dividindo o caminho c em dois caminhos q e r . Se existir alguma aresta pesada entrando em r , torna-a sólida. Retorna o caminho q . Esta operação supõe que existe pelo menos uma aresta *leve* em c . Veja figura 3.5.

Figura 3.5 : Exemplo de um *corta*.

A seguir, temos a implementação das funções *corta* e *abafa*:

função *corta*(*caminho* *c*):

vértice *v*;

caminho *q, r, s*;

real *x, y*;

.*v*=*leve*(*c*);

.*c, r, x, y*=*quebra*(*v*) ;

.*se* *r*=nulo *inverte*(*c*)

. **então** *s*=*caminho*(*v*)

. **senão** *s*=*concatena*(*caminho*(*v*),*r,y*) ;

.*dpai*(*cauda*(*c*)).*dcusto*(*cauda*(*c*))=*v, x*;

.*peso*(*v*)=*peso*(*v*)+*peso*(*c*);

.*q*=*pesomax*(*v*);

.*se* 2.*peso*(*q*) $\geq$ *peso*(*v*)

. **então** *peso*(*v*)=*peso*(*v*)-*peso*(*q*) ;

. *remove*(*q, v*)

. *concatena*(*q, s, dcusto*(*cauda*(*q*))) ;

.*insere*(*c, v*);

.**retorna** *c*;

procedimento *abafa*(*caminho* *c*):

vértice *v*;

caminho *q, r, s*;

real *x, y*;

.**enquanto** *leve*(*c*) $\neq$ nulo **faça**

. *c*=*corta*(*c*);

. *v*=*cabeça*(*c*);

. *s*=*maxpeso*(*v*);

. *se* *s* $\neq$ nulo e 2.*peso*(*s*) $\geq$ *peso*(*v*)

. **então** *q, r, x, y*=*quebra*(*v*) ;

. *peso*(*v*)=*peso*(*v*)-*peso*(*s*) ;

. *s*=*concatena*(*s.caminho*(*v*), *dcusto*(*cauda*(*s*))) ;

. *remove*(*s, v*);

. *se* *r* $\neq$ nulo

. **então** *concatena*(*s, r, y*);

Teorema 3.7 : A operação *abafa* requer de tempo $O(\lg n)$, no pior caso.

Prova: A demonstração deste teorema é muito semelhante à do teorema anterior. A operação *abafa* requer tempo $O(\lg n)$, mais o tempo necessário das operações *corta*. Considere uma operação *corta* típica. Seja c o caminho a ser cortado, $v = \text{leve}(c)$, c' o caminho contendo v após a operação *corta*, s o caminho retornado pela operação *corta* e s' o caminho contendo $\text{cauda}(s)$ após o término da operação *abafa*. (Na figura 3.5, c' é o caminho r , e s é o caminho q).

As operações *leve* e *quebra* necessitam tempo $O(S(c) - S(v))$. Como $(\text{cauda}(s), v)$ é leve, $2 \cdot \text{grandeza}(\text{cauda}(s)) \leq \text{grandeza}(v)$. Ou seja, $\text{peso}(s) = \text{grandeza}(\text{cauda}(s)) \leq \text{grandeza}(v) - \text{grandeza}(\text{cauda}(s)) = \text{peso}(v)$. Logo, em cada *corta*, as operações *leve* e *quebra* necessitam tempo $O(S(c) - S(s))$, ou seja, o tempo total gasto em todas as operações *leve* e *corta* em um *abafa* é $O(\lg n)$.

A operação *remove* necessita tempo $O\left(\lg\left(\frac{\text{peso}(v)}{\text{peso}(q)}\right)\right)$ onde q é o caminho removido. Como a aresta $(\text{cauda}(q), v)$ é pesada, então $\text{grandeza}(v) < 2 \cdot \text{grandeza}(\text{cauda}(q))$, e portanto, $\lg\left(\frac{\text{peso}(v)}{\text{peso}(q)}\right) = O(1)$. Logo, o tempo total gasto em todas as operações *remove* de um *abafa* é $O(\lg n)$.

As duas operações *concatena* necessitam tempo $O(S(c') - S'(v))$. Como $S'(s') \leq 1 + \lfloor \lg \text{peso}(s) \rfloor \leq 1 + \lfloor \lg \text{peso}'(v) \rfloor = 1 + S(v)$, as operações *concatena* de cada *corta* necessitam tempo $O(S(c') - S'(s'))$, e $O(\lg n)$ em toda operação *abafa*.

A operação *insere* necessita tempo $O\left(\lg \frac{\text{peso}'(v)}{\text{peso}(s)}\right)$ onde $\text{peso}'(v)$ é o *peso* de v depois da operação *corta*. Como $\text{peso}(s) = \text{peso}(s')$ e $\text{peso}'(v) \leq \text{peso}(c')$, a operação *insere* em uma operação *corta* necessita tempo $O\left(\lg \frac{\text{peso}(c')}{\text{peso}(s')}\right)$. Logo, para todas as operações *insere* de uma operação *abafa*, é necessário tempo $O(\lg n)$.

Logo, é necessário tempo $O(\lg n)$ para realizar a operação *abafa*. ■

Teorema 3.8 : Com a nova implementação, podemos realizar cada uma das operações sobre árvores dinâmicas em tempo $O(\lg n)$.

Prova: Imediata a partir dos teoremas 3.6 e 3.7. ■

Além da aplicação em algoritmos para o problema do fluxo máximo, tais estruturas de dados podem ser aplicadas ao problema da construção de árvores geradoras mínimas e ao algoritmo simplex para redes, entre outros. Maiores detalhes podem ser encontrados em [18].

Capítulo 4

O ALGORITMO DE GOLDBERG-TARJAN

Em 1986, Goldberg desenvolveu um algoritmo (cf. [5]) de complexidade $O(n^3)$, utilizando a idéia de pré-fluxo introduzida por Karzanov. A partir desse algoritmo, Goldberg e Tarjan desenvolveram uma versão mais simples com a mesma complexidade. Fazendo uso de árvores dinâmicas, os autores melhoraram este algoritmo, obtendo um, de complexidade $O\left(nm \log\left(\frac{n^2}{m}\right)\right)$. Neste capítulo veremos detalhadamente estes dois últimos algoritmos.

Primeiramente, redefiniremos o conceito de fluxo e pré-fluxo, de maneira similar à feita no capítulo 1, e introduziremos duas operações básicas. A seguir, descreveremos um algoritmo básico, que consiste fundamentalmente na aplicação indiscriminada destas operações. Veremos então, um critério de escolha destas operações, obtendo um algoritmo de complexidade $O(n^3)$. Finalmente, veremos a forma mais sofisticada deste algoritmo que utiliza árvores dinâmicas.

Na última seção, selecionaremos todas as idéias deste algoritmo que surgiram nos algoritmos descritos no capítulo 1.

4.1 Um Algoritmo Básico

Nesta seção apresentaremos um algoritmo básico, que será refinado nas próximas seções. Para isso, faremos algumas definições e convencionaremos uma notação similar à exibida no capítulo 1:

Seja $G = (V, A)$ um grafo orientado, $X, Y \subseteq V$, $v \in V$, e g uma função

$g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Então $g[X, Y]$ denota a seguinte soma:

$$g[X, Y] = \sum_{(x,y) \in X \times Y} g((x, y)).$$

Além disso,

$$g[v, X] = g[\{v\}, X] \text{ e } g[X, v] = g[X, \{v\}].$$

Note que, neste capítulo, trataremos de funções definidas sobre $V \times V$.

Definição 4.1 : Uma **rede GT** é uma quádrupla (G, s, t, c) , onde $G = (V, A)$ é um grafo orientado, s e t são vértices distintos de V e c é uma função, $c : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$c(v, w) = 0 \text{ se } (v, w) \in (V \times V) - A \text{ e}$$

$$c(v, w) > 0 \text{ se } (v, w) \in A.$$

Chamaremos s de vértice **origem**, t de vértice **destino** e c de **função capacidade**.

Definição 4.2 : Um **GT-fluxo** numa rede GT (G, s, t, c) é definido como uma função $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

1) $f(v, w) \leq c(v, w)$ para todo $(v, w) \in V \times V$	(restrição de capacidade);
2) $f(v, w) = -f(w, v)$ para todo $(v, w) \in V \times V$	(restrição de antissimetria);
3) $f[V, v] = 0$ para todo $v \in V - \{s, t\}$	(restrição de conservação).

Além disso, definimos o **valor** do GT-fluxo f como sendo: $f[V, t]$. Dizemos também que um GT-fluxo é máximo se f tem valor máximo.

A restrição de antissimetria elimina a possibilidade de existir fluxo positivo em ambas as arestas de um par reverso (v, w) e (w, v) , eliminando assim certas dificuldades técnicas. Além disso, com esta restrição (antissimetria), é possível formular a restrição de conservação de forma mais simples do que a feita no capítulo 1, pois, note que para todo $v \in V - \{s, t\}$

$$\sum_{(u,v) \in A} f(u, v) - \sum_{(v,z) \in A} f(v, z) = \sum_{(u,v) \in A} f(u, v) + \sum_{(v,z) \in A} f(z, v) = f[V, v].$$

Assim, é fácil ver que dada uma rede R e um fluxo f em R , como definidos no capítulo 1, o problema de encontrar um fluxo máximo em R pode ser reduzido ao problema

de encontrar um GT -fluxo máximo numa rede GT . Note que, se $G = (V, A)$ é o grafo da rede $R = (G, s, t, c)$, então basta estender para todo $(v, w) \in V \times V$ a função capacidade c definida apenas para as arestas de G , definindo $c(v, w) = 0$ para todo $(v, w) \notin A$. Obtemos assim uma rede GT , e, claramente, um GT -fluxo máximo f' nessa rede define um fluxo máximo f em R . Tal f é obtido tomando-se $f(v, w) = f'(v, w)$ se $f'(v, w) > 0$, e $f(v, w) = 0$ se $f'(v, w) \leq 0$.

Nota importante: Neste capítulo só trataremos de GT -fluxos em redes GT . Para simplificar a notação, deste ponto em diante nos referiremos aos GT -fluxos simplesmente por fluxos, e às redes GT , simplesmente por redes.

O algoritmo que descreveremos, para resolver o problema do fluxo máximo, utilizará uma função menos restrita que a função fluxo, e quando esta função satisfizer todas as condições de fluxo, ela será a solução do problema. Tal função receberá o nome de pré-fluxo e está definida a seguir.

Definição 4.3 : Seja $R = (G, s, t, c)$ uma rede. Uma função $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é um **pré-fluxo** em R se satisfizer as condições 1) e 2) de fluxo (definição 4.2) e a seguinte condição 3')):

$$3') f[V, v] \geq 0. \quad \text{para todo } v \in V - \{s, t\} \quad (\text{restrição de não negatividade}).$$

Para quantificarmos o que falta para um pré-fluxo ser um fluxo, definiremos excesso de (fluxo em) um vértice.

Definição 4.4 : Seja $R = (G, s, t, c)$ uma rede e f um pré-fluxo em R . Para cada vértice v , definimos **excesso** de (fluxo em) v , $\epsilon(v)$, da seguinte maneira:

$$\epsilon(v) = f[V, v].$$

Observação: No capítulo 1, para descrevermos o algoritmo de Karzanov, definimos *pré-fluxo* e *excesso* de fluxo em um vértice. As definições que apresentaremos aqui são diferentes, devendo ficar claro que neste capítulo, estamos nos referindo às definições aqui feitas, segundo Goldberg e Tarjan.

A idéia do algoritmo consiste em ‘empurrar’ fluxo de um vértice v com excesso positivo até outro que esteja ‘mais próximo’ de t . Para podermos descrever este processo apresentaremos antes algumas definições.

Definição 4.5 : Seja $R = (G, s, t, c)$ uma rede e f um pré-fluxo em R . Para cada par (v, w) , em $V \times V$, define-se **capacidade residual** de (v, w) , denotada por $r_f(v, w)$, da seguinte maneira:

$$r_f(v, w) = c(v, w) - f(v, w).$$

Definição 4.6 : Seja $R = (G, s, t, c)$ uma rede e f um pré-fluxo em R . Definimos **grafo residual** de f como sendo o grafo $G_f = (V_f, A_f)$, onde:

$$\begin{aligned} V_f &= V \text{ e} \\ A_f &= \{(v, w) \in V \times V \mid r_f(v, w) > 0\}. \end{aligned}$$

Com o objetivo de estimar a distância de um vértice qualquer ao vértice t ou s , definiremos rotulação válida.

Definição 4.7 : Seja $R = (G, s, t, c)$ uma rede e f um pré-fluxo em R . Uma f -**rotulação válida** em R é definida como sendo uma função $d : V \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$ tal que:

- . $d(s) = n$;
- . $d(t) = 0$;
- . $d(v) \leq d(w) + 1$ para todo $(v, w) \in A_f$.

Chamaremos de **rótulo** de um vértice v , ao valor de $d(v)$. Para não sobrecarregarmos a notação, chamaremos simplesmente de **rotulação válida**, devendo ficar claro no contexto qual é o pré-fluxo a que estamos nos referindo.

Note que se d é uma rotulação válida, se $d(v) < n$ então $d(v)$ é uma cota inferior para a distância de v a t no grafo residual G_f . Veremos que durante o desenrolar do algoritmo, se $d(v) \geq n$ então $d(v) - n$ é uma cota inferior para a distância de v a s no grafo residual.

A seguir, definiremos vértice ativo, que utilizaremos na descrição do algoritmo.

Definição 4.8 : Seja $R = (G, s, t, c)$ uma rede, f um pré-fluxo em R e d uma rotulação válida em R . Um **vértice ativo** é um vértice v tal que

- . $v \in V - \{s, t\}$;
- . $d(v) < \infty$;
- . $e(v) > 0$.

O algoritmo consistirá de duas *operações básicas*: *empurra* e *rerrotula*. A operação *empurra*, enviará fluxo de um vértice ativo para um outro, enquanto que a operação *rerrotula* aumentará o rótulo de um vértice ativo, passível de aumento.

procedimento *empurra*(*vértice* v, w):

real δ ;

/* É aplicável quando: */
 /* v é ativo, */
 /* $r_f(v, w) > 0$ e */
 /* $d(v) = d(w) + 1$. */
 /* f é o pré-fluxo corrente */

$\delta = \min(e(v), r_f(v, w));$

$f(v, w) = f(v, w) + \delta;$

$f(w, v) = f(w, v) - \delta;$

$e(v) = e(v) - \delta;$

$e(w) = e(w) + \delta;$

Definição 4.9 : Seja $R = (G, s, t, c)$ uma rede e f um pré-fluxo em R . Se uma operação *empurra* é aplicada de v a w , dizemos que (v, w) fica **saturada**, se após esta operação obtemos $f(v, w) = c(v, w)$. Além disso, um *empurra* aplicado de v a w é dito **saturador** se ele satura (v, w) ; e **não saturador**, caso contrário.

procedimento *rerrotula*(*vértice* v):

vértice w ;

/* É aplicável quando: */
 /* v é ativo e */
 /* $\forall w \in V, (v, w) \in A_f \Rightarrow d(v) < d(w) + 1$ */
 /* f é o pré-fluxo corrente */

$d(v) = \min_{(v, w) \in A_f} (d(w) + 1);$

Lema 4.1 : Seja $R = (G, s, t, c)$ uma rede, f um pré-fluxo em R e d uma rotulação válida. Se v é um vértice ativo, então ou um *empurra* ou um *rerrotula* pode ser aplicado a v .

Prova: No caso em que não podemos aplicar o *empurra* ao vértice ativo v , temos que $\{w \in V \mid r_f(v, w) > 0 \text{ e } d(v) = d(w) + 1\} = \emptyset$. Como d é uma rotulação válida, então $\forall w \in V, (v, w) \in A_f \Rightarrow d(v) < d(w) + 1$. Como v é ativo, *rerrotula* é aplicável a v . ■

A seguir descreveremos o algoritmo *FLUXO-MÁXIMO-BÁSICO*. Este algoritmo recebe como entrada uma rede e devolve um fluxo máximo nesta rede. Este fluxo máximo será obtido a partir de um pré-fluxo que será alterado dinamicamente pelo algoritmo até se tornar um fluxo máximo.

algoritmo *FLUXO-MÁXIMO-BÁSICO*(*rede*(G, s, t, c)):

pré-fluxo f ;

vértice v, w ;

/ Inicialização do pré-fluxo */*

.para todo $(v, w) \in (V - s) \times (V - s)$ **faça**

. $f(v, w) = f(w, v) = 0$;

.para todo vértice $w \in V$ **faça**

. $f(s, w) = c(s, w)$;

. $f(w, s) = -f(s, w)$;

/ Inicialização dos rótulos */*

. $d(s) = n$;

.para todo $v \in V - s$ **faça**

. $d(v) = 0$;

/ iteração */*

.enquanto $\exists$ uma operação básica aplicável **faça**

. selecione uma operação básica e aplique-a;

.retorne f ;

A seguir, faremos a análise da complexidade do algoritmo e provaremos que o mesmo é correto.

Lema 4.2 : Durante a execução do algoritmo, para cada vértice v , o seu rótulo $d(v)$ nunca decresce. Uma operação *rerrotula* aplicada a v aumenta $d(v)$.

Prova: Segue imediatamente observando a condição para que a operação *rerrotula* possa ser aplicada a v , e a atualização que é feita no rótulo de v . ■

Lema 4.3 : O algoritmo mantém a rotulação válida.

Prova: Suponha que uma operação *rerrotula* seja aplicada a v . Seja d a rotulação antes da chamada do *rerrotula* e d' a rotulação após a chamada do mesmo. Como $d'(v) = \min_{(v,w) \in A_f} (d(w) + 1)$; e $d'(w) = d(w)$ para todo $w \in V - \{v\}$, temos que $d'(v) \leq d(w) + 1 = d'(w) + 1 \quad \forall w \in V$ tal que $(v, w) \in A_f$. Como $d(w) \leq d(v) + 1 \quad \forall w \in V$ tal que $(w, v) \in A_f$, usando o lema 4.2, concluímos que: $d'(w) = d(w) \leq d(v) + 1 < d'(v) + 1$.

Suponha agora que uma operação *empurra* seja aplicada de v a w . Se após esta operação, (v, w) fica saturada, esta deixa de pertencer a A_f , o que não invalida a rotulação. Se após a operação *empurra*, (w, v) passa a pertencer ao novo A_f , como $d(v) = d(w) + 1$, então $d(w) \leq d(v) + 1$. Como a rotulação inicial é válida, segue que a rotulação feita pelo algoritmo permanece válida. ■

Teorema 4.1 : Seja $R = (G, s, t, c)$ uma rede e f um fluxo em R . Então, f é máximo se e somente se não existe caminho orientado de s a t em G_f .

Prova: Imediata a partir do corolário do teorema do fluxo máximo, visto no capítulo 1, observando a equivalência entre a existência de um caminho orientado de s a t em G_f e a existência de um caminho aumentador de s a t em G . ■

Lema 4.4 : Se (G, s, t, c) é uma rede, f é um pré-fluxo e d é uma rotulação válida, então não existe caminho orientado de s a t em G_f .

Prova: Suponha que existam $s = v_0, v_1, \dots, v_k = t$ tais que $(v_i, v_{i+1}) \in A_f$, para $i = 0, 1, \dots, k-1$. Como d é uma rotulação válida, $d(v_i) \leq d(v_{i+1}) + 1$. Logo, $d(s) \leq d(t) + k$. Como $d(s) = n$ e $d(t) = 0$, então $k \geq n$, absurdo. ■

Teorema 4.2 : Suponha que o algoritmo termine com $d(v) < \infty, \forall v \in V$. Então o pré-fluxo f é um fluxo máximo.

Prova: Se o algoritmo pára, então não existe operação básica aplicável. Logo, pelo lema 4.1, não existe vértice ativo. Como $d(v) < \infty, \forall v \in V$, temos pela definição de vértice ativo que $e(v) = 0, \forall v \in V - \{s, t\}$, ou seja, f é um fluxo.

Pelo lema 4.2, o algoritmo mantém a rotulação válida; e pelo lema 4.4, temos que não existe caminho orientado de s até t em G_f . Portanto, pelo teorema 4.1, temos que f

é um fluxo máximo. ■

Lema 4.5 : Se f é um pré-fluxo em uma rede (G, s, t, c) e v é um vértice com excesso positivo, então existe um caminho orientado de v até s em G_f .

Prova: Seja v um vértice com $\epsilon(v) > 0$,
 $S = \{i \in V \mid \exists \text{ caminho orientado em } G_f \text{ de } v \text{ a } i\}$ e $\bar{S} = V - S$.
 Suponha por absurdo que $s \notin S$. Então

$$\sum_{i \in S} \epsilon(i) = \sum_{i \in S} f[V, i] = f[V, S] = f[S, S] + f[\bar{S}, S] = f[\bar{S}, S].$$

Seja $(i, w) \in (S, \bar{S})$. Pela definição de S , temos que $(i, w) \notin A_f$, ou seja $r_f(i, w) = 0$, e portanto, $c(i, w) = f(i, w)$. Logo, $f(i, w) \geq 0$. Como $f(w, i) = -f(i, w)$, temos que $f(w, i) \leq 0$. Portanto, $\sum_{i \in S} \epsilon(i) \leq 0$. Como $\epsilon(i) \geq 0, \forall i \in S$ e, $v \in S$, temos que $\epsilon(v) = 0$. Absurdo. ■

Lema 4.6 : Em qualquer passo da execução do algoritmo tem-se que, $d(v) \leq 2n - 1$ para todo v em V .

Prova: Como d só se altera na operação *rerrotula* e esta é aplicada a vértices ativos, basta provarmos o lema para um vértice ativo. Se v é ativo então $\epsilon(v) > 0$; logo, pelo lema 4.5 existe um caminho orientado $(v = v_0, v_1, \dots, v_k = s)$ em G_f . Como d é uma rotulação válida, $d(v) \leq d(s) + k$. Logo, $d(v) \leq n + n - 1$. ■

Lema 4.7 : O número máximo de operações *rerrotula* é $2n - 1$ por vértice e $(2n - 1)(n - 2)$ em toda a execução do algoritmo.

Prova: Pelo lema 4.6, o rótulo de um vértice v é no máximo $2n - 1$, em qualquer passo da execução do algoritmo. Como a operação *rerrotula* incrementa o rótulo de um vértice v de pelo menos 1, e o rótulo inicial de v é zero (pois $v \neq s$), podemos aplicar a operação *rerrotula*(v) no máximo $2n - 1$ vezes. Como a s e a t não se aplica *rerrotula*, temos que o número máximo de operações *rerrotula* é $(n - 2)(2n - 1) \leq 2n^2$. ■

Lema 4.8 : O número máximo de *empurras* saturadores é $2mn$ durante toda a execução do algoritmo.

Prova: Considere dois vértices v e w . Vamos contar o número de *empurras* saturadores entre v e w (isto é, de v a w ou de w a v). Note que se tais operações ocorrem então $(v, w) \in A$ ou $(w, v) \in A$. Suponha que num determinado passo do algoritmo, (v, w) fica saturada pela operação *empurra*. Logo, $d(v) = d(w) + 1$. Para ocorrer uma nova saturação entre v e w , é necessário que uma operação *empurra* tenha sido aplicada de v a w . Se chamarmos de d' a rotulação durante a aplicação deste último *empurra*, temos que $d'(w) = d'(v) + 1$. Pelo lema 4.2, $d'(v) \geq d(v)$. Portanto, $d(w) = d(v) - 1 \leq d'(v) - 1 = d'(w) - 2$. Isto significa que, para ocorrer uma nova saturação entre v e w , o rótulo de w deve ser incrementado de pelo menos 2.

Analogamente, se (w, v) fica saturada pela operação *empurra*, podemos concluir que para ocorrer uma nova saturação entre v e w , o rótulo de v deve ser incrementado de pelo menos 2.

Portanto, entre dois *empurras* saturadores ocorridos entre v e w , $d(v) + d(w)$ deve ser incrementado de pelo menos 2.

No primeiro *empurra* aplicado entre v e w temos $d(v) + d(w) \geq 1$. Pelo lema 4.6 e pelas condições de aplicabilidade do *empurra*, temos que no último *empurra* aplicado entre v e w , $d(v) + d(w) \leq 4n - 3$. Então, o número máximo de *empurras* saturadores entre v e w é $2n - 1$.

Logo, temos $(2n - 1)m \leq 2nm$ *empurras* saturadores durante toda a execução do algoritmo. ■

Lema 4.9 : O número máximo de *empurras* não saturadores é $4n^2m$ durante toda a execução do algoritmo.

Prova: Seja

$$\phi = \sum_{\{v|v \text{ é ativo}\}} d(v).$$

Analisemos o efeito de cada operação básica sobre a função ϕ .

Em primeiro lugar, vejamos o efeito de um *empurra* não saturador sobre ϕ . Suponha que um *empurra* não saturador seja aplicado de v a w . Como num *empurra* não saturador $\min\{e(v), r_f(v, w)\} = e(v)$, temos que após a aplicação desta operação v deixa de ser um vértice ativo, logo $d(v)$ deixará de fazer parte da somatória. Por outro lado, após a aplicação desta operação, caso w não seja nem s nem t , $d(w)$ fará parte da somatória, sendo $d(w) = d(v) - 1$. Ou seja, ϕ decresce de 1 ou de $d(v)$. Portanto, após a aplicação de um *empurra* não saturador, ϕ decresce de pelo menos 1.

Vejam agora o efeito de todos os *empurras* saturadores sobre ϕ . Se um *empurra* saturador for aplicado de v a w , então $\min\{e(v), r_f(v, w)\} = r_f(v, w)$, portanto v pode continuar ativo e caso w não seja nem s nem t , $d(w)$ fará parte da somatória. Como $d(v) \leq 2n - 1$, temos que ϕ pode aumentar de no máximo $2n - 1$ unidades. Portanto, o total de acréscimos a ϕ causados pelos *empurras* saturadores é no máximo $2mn(2n - 1)$.

Vejam então, o efeito das operações *rerrotula*. Como toda vez que é aplicado um *rerrotula* a v , v deve ser um vértice ativo, $d(v) \leq 2n - 1$, então o total de acréscimos causados por *rerrotulas* é no máximo $(n - 2)(2n - 1)$, já que não se aplica *rerrotula* nem a s nem a t .

No início do algoritmo $\phi = 0$ e no decorrer do mesmo $\phi \geq 0$. Como cada *empurra* não saturador decrementa ϕ de pelo menos 1, o número de *empurras* não saturadores não pode ser maior que o total de acréscimos que ϕ sofreu pelos *rerrotulas* e *empurras* saturadores. Ou seja, o número máximo de *empurras* não saturadores é:

$$T = 2mn(2n - 1) + (n - 2)(2n - 1).$$

Como $m \geq n - 1$, temos:

$$\begin{aligned} T &\leq 4n^2m - 2mn + 2n^2 - 5n + 2 \leq \\ &4n^2m - 2(n - 1)n + 2n^2 - 5n + 2 = \\ &4n^2m - 2n^2 + 2n + 2n^2 - 5n + 2 \leq 4n^2m. \end{aligned}$$

■

Teorema 4.3 : O algoritmo *FLUXO-MÁXIMO-BÁSICO* é correto e realiza $O(n^2m)$ operações básicas para encontrar o fluxo máximo.

Prova: Imediata, a partir do teorema 4.2 e dos lemas 4.6, 4.7, 4.8 e 4.9.

■

4.2 Uma Primeira Implementação

Note que no algoritmo básico, o comando “selecione uma operação básica” pode ser implementado de várias maneiras. Para selecionar uma operação básica, precisamos fazer duas seleções: a de um vértice ativo e a operação em si. Nesta seção, veremos uma maneira de selecionar um vértice ativo e a operação básica, obtendo um algoritmo de complexidade $O(n^3)$.

Precisamos incluir algumas novas informações na estrutura de dados. Em primeiro lugar, chamemos um par não ordenado $\{v, w\}$ de *aresta real* se $(v, w) \in A$ ou $(w, v) \in A$. A cada aresta real $\{v, w\}$ associaremos 3 valores: $c(v, w)$, $c(w, v)$ e $f(v, w) (= -f(w, v))$. Cada vértice v possuirá uma lista de arestas reais $\{v, w\}$, incidentes a ele. Desta maneira, cada aresta real $\{v, w\}$ aparecerá em duas listas, na lista de v e na lista de w . Além disso, cada lista possuirá um ponteiro para o candidato — chamado *corrente* — a realizar um *empurra*; este ponteiro, no início, estará apontando para o primeiro elemento da lista. Tal lista tem uma ordenação arbitrária, mas fixa.

A seguir, temos a descrição da operação *empurra-rerotula* (aplicada a v), que combina as duas operações (resolvendo o problema de selecionar a operação a ser aplicada a v , quando este está selecionado), retornando o vértice w tal que $\{v, w\}$ é aresta real corrente da lista de v no início da aplicação da operação. O vértice w será utilizado num procedimento posterior.

função *empurra-rerotula*(vértice v):
vértice w ;

/* É aplicável quando v é um vértice ativo */
/* f é o pré-fluxo corrente */

.tome a aresta corrente $\{v, w\}$, da lista de arestas reais de v ;
.se $d(v) = d(w) + 1$ e $r_f(v, w) > 0$
. então *empurra*(v, w) /* *empurra* é aplicável */
. senão se $\{v, w\}$ não é a última aresta da lista de arestas de v
. então troque aresta corrente corrente $\{v, w\}$ pela próxima aresta da lista de v
. senão faça a primeira aresta da lista de v a aresta corrente de v ;
. *rerrotula*(v);
.retorne w ;

Precisamos mostrar que a operação *empurra-rerotula* usa corretamente a operação *rerrotula*.

Lema 4.10 : A operação *empurra-rerotula* chama a operação *rerrotula* somente quando ela é realmente aplicável.

Prova: Para aplicarmos a operação *rerrotula* a um vértice v é necessário que v seja ativo e que para cada aresta $\{v, w\}$ da lista de v , tenhamos ou $d(v) < d(w) + 1$ ou $r_f(v, w) = 0$. A primeira condição é satisfeita pois o *empurra-rerotula* só é aplicado a vértices ativos. Vejamos agora porque a segunda condição é satisfeita.

No momento em que é feita a troca da aresta corrente $\{v, w\}$ pela próxima aresta

da lista de v , ou $d(v) < d(w) + 1$ ou $r_f(v, w) = 0$, pois o *empurra* não pôde ser aplicado. Se o *empurra* não pôde ser aplicado porque $d(v) < d(w) + 1$, como $d(w)$ nunca cresce, enquanto o *rerrotula* não for aplicado a v , esta condição será mantida. Por outro lado, se o *empurra* não pôde ser aplicado porque $r_f(v, w) = 0$, e esta condição não se mantiver até a aplicação do *rerrotula* a v , então um *empurra* foi aplicado de w a v e neste caso, $d(w) = d(v) + 1$ ou seja, $d(v) < d(w) + 1$. Portanto, a partir do momento da troca, em qualquer passo antes do *rerrotula* ser aplicado ao vértice v , ou $d(v) < d(w) + 1$ ou $r_f(v, w) = 0$, ocorre.

Como imediatamente antes da aplicação da operação *rerrotula* ao vértice v , o ponteiro da lista de arestas de v já percorreu toda a lista, com exceção da última aresta (mas nesta aresta, como o *empurra* não pode ser aplicado, esta aresta também satisfaz as condições acima), para cada vértice w tal que $\{v, w\}$ está na lista de v , ou $d(v) < d(w) + 1$ ou $r_f(v, w) = 0$, e portanto, a operação *rerrotula* é aplicável a v . ■

Finalmente, resta-nos descrever como fazer a seleção de um vértice ativo. Para isto, necessitamos de mais uma estrutura de dados. Esta estrutura de dados é uma fila, F , que contém todos os vértices ativos, e será manipulada pelo procedimento *descarta*. Este procedimento remove um vértice da fila e aplica a operação *empurra-rerrotula* até que o vértice deixe de ser ativo ou o seu rótulo aumente. No início, $F = \{w \in V - \{s, t\} | c(s, w) > 0\}$. O algoritmo chama o procedimento *descarta* até a fila F se tornar vazia. A seguir, temos a descrição do procedimento *descarta*.

procedimento *descarta*(fila F):

vértice v, w ;

/* É aplicável quando $F \neq \emptyset$ */

.remova o vértice v de F ; /* v deve ser ativo */

.repita

. $w = \text{empurra-rerrotula}(v)$;

. se w tornou-se ativo durante a operação *empurra-rerrotula*(v)

. então insira w em F ;

. até que $e(v) = 0$ ou $d(v)$ aumenta;

. se v ainda é ativo

. então insira v em F ;

A seguir, reescrevemos o algoritmo *FLUXO-MÁXIMO-BÁSICO*, incluindo a técnica de seleção das operações básicas e dos vértices ativos, descritas nesta seção. Este algoritmo recebe o nome de *FLUXO-MÁXIMO1*.

```

algoritmo FLUXO-MÁXIMO1(rede( $G, s, t, c$ ) ):
  pré-fluxo  $f$ ;
  vértice  $v, w$ ;

  /* Inicialização do pré-fluxo */
  .para toda aresta  $(v, w) \in (V - s) \times (V - s)$  faça
  .  $f(v, w) = f(w, v) = 0$ ;
  .para todo vértice  $w \in V$  faça
  .  $f(s, w) = c(s, w)$ ;
  .  $f(w, s) = -f(s, w)$ ;

  /* Inicialização dos rótulos */
  . $d(s) = n$ ;
  .para todo  $v \in V - s$  faça
  .  $d(v) = 0$ ;

  /* Inicialização da fila  $F$  de vértices ativos */
  . $F = \{w \in V - \{s, t\} \mid c(s, w) > 0\}$ 

  /* iteração */
  .enquanto  $F \neq \emptyset$  faça
  . descarta( $F$ ); /* chama o procedimento empurra-errotula */

  .retorne  $f$ ;

```

Lema 4.11 : O tempo que o algoritmo *FLUXO-MÁXIMO1* necessita é $O(mn)$ mais $O(1)$ por *empurra* não saturador.

Prova: Chamemos a lista de arestas reais de um vértice v de L_v . Após cada *errotula*, a lista do vértice v foi percorrida duas vezes, uma antes de aplicar o *errotula* e outra durante o *errotula*. Pelo lema 4.7, o *errotula* é aplicado no máximo $2n - 1$ vezes por vértice. Portanto, o tempo gasto em operações *errotula*, incluindo os tempos de percorrer as listas é

$$(2n - 1) \sum_{v \in V - \{s, t\}} 2|L_v| \leq (2n - 1)4m.$$

ou seja, $O(mn)$. Logo, o tempo gasto pelo algoritmo é $O(mn)$ mais $O(1)$ por *empurra*. Aplicando o lema 4.8, o resultado segue. ■

Teorema 4.4 : A complexidade do algoritmo *FLUXO-MÁXIMO1* é $O(n^2m)$.

Prova: Imediata, a partir dos lemas 4.11 e 4.9. ■

Na verdade, a complexidade do algoritmo *FLUXO-MÁXIMO1* é $O(n^3)$, pois não são necessários mais que $O(n^3)$ *empurras* não saturadores. Para demonstrar esta afirmação é necessário analisar o comportamento da fila F (lembrando que numa fila, o primeiro que entra é o primeiro que sai). Faremos isto a seguir.

Definição 4.10 : Define-se **passagem** sobre uma fila indutivamente, da seguinte maneira: **Passagem 1** é a aplicação da operação *descarta* sobre todos os vértices da fila inicial. Dado que a **passagem** i está definida, a **passagem** $i+1$ é a aplicação da operação *descarta* sobre todos os vértices inseridos na fila durante a *passagem* i .

Lema 4.12 : O número máximo de passagens sobre a fila F é $4n^2$.

Prova: Seja $\Phi = \max\{d(v) | v \text{ é ativo}\}$. Para obter o número máximo de passagens sobre a fila F , contaremos o número de passagens em que Φ aumenta, se mantém inalterado e diminui. Se após uma passagem sobre a fila, Φ não se alterou, então é necessário que para todo v na fila tal que $d(v) = \Phi$, v tenha deixado de ser ativo; além disso, deve existir algum vértice v na fila tal que $d(v) < \Phi$ e em v tenha-se aplicado um *rerrotula* de tal maneira que $d'(v) = \Phi$, após o *rerrotula*. Portanto, neste caso pelo menos uma operação *rerrotula* deve ter sido aplicada. Por outro lado, se Φ aumentou, então o rótulo de algum vértice v , deve ter sido incrementado pelo menos na mesma quantidade que Φ aumentou, ou seja, novamente temos que pelo menos um *rerrotula* deve ter sido aplicado. Portanto, o número total de passagens sobre a fila tal que Φ não se altera ou aumenta é no máximo o número de operações *rerrotula* que é no máximo $2n^2$, pelo lema 4.7.

Cada vértice pode provocar acréscimos à função Φ de no máximo $(2n-1)$. Como temos $(n-2)$ vértices que podem causar acréscimos a Φ , temos que o total de acréscimos a Φ é no máximo $(n-2)(2n-1) \leq 2n^2$. Como no início $\Phi=0$, e $\Phi \geq 0$ durante a execução do algoritmo, o número total de passagens em que Φ diminui é no máximo $2n^2$. Logo, o número máximo de passagens sobre a fila é $4n^2$. ■

Teorema 4.5 : A complexidade do algoritmo *FLUXO-MÁXIMO1* é $O(n^3)$.

Prova: Em uma passagem sobre a fila F são executados no máximo n *empurras* não saturadores, pois o tamanho máximo da fila é n e quando um *empurra* não saturador é aplicado a um vértice v , o excesso de v se anula e portanto não se aplica mais nenhum

empurra-rerrotula a v , até o final desta passagem sobre a fila. Portanto, pelo lema 4.12, temos que o número máximo de *empurras* não saturadores é no máximo $4n^3$. Pelo lema 4.11, segue o resultado. ■

4.3 Usando Árvores Dinâmicas

Nesta seção veremos um algoritmo mais eficiente que os descritos anteriormente, que chamaremos de *FLUXO-MÁXIMO2*. A idéia fundamental deste algoritmo consiste em realizar vários *empurras* simultaneamente. Tais *empurras* simultâneos são executados eficientemente, diminuindo assim, o tempo gasto em *empurras* não saturadores, que é o gargalo da complexidade do algoritmo apresentado na seção anterior.

Note que se $(v = v_0, v_1, \dots, v_k = w)$ é um caminho orientado no grafo residual, tal que $d(v_i) = d(v_{i+1}) + 1$, é possível passar $\min\{e(v), \min\{r(v_i, v_{i+1}) \mid 0 \leq i < k\}\}$ fluxo de v até w realizando um *empurra* direto de v até w . Para poder passar algum fluxo, este caminho deve ser formado por arestas admissíveis, cuja definição formal está a seguir.

Definição 4.11 : Seja $R = (G, s, t, c)$ uma rede, f um pré-fluxo em R e d uma rotulação válida em R . A aresta corrente $\{v, w\}$ de um vértice $v \in V - \{s, t\}$ é **admissível** se $r_f(v, w) > 0$ e $d(v) = d(w) + 1$.

A idéia do algoritmo consiste em armazenar caminhos formados por arestas admissíveis. Podemos criar subgrafos de arestas admissíveis. Porém, pelas propriedades de arestas admissíveis, estes subgrafos devem ser árvores.

Uma boa maneira de guardar árvores de arestas admissíveis é usar a estrutura de dados de árvores dinâmicas apresentada no capítulo 3, definindo o custo de cada aresta como sendo a sua capacidade residual. Com esta estrutura de dados, podemos realizar uma sequência de l operações sobre essas árvores em tempo $O(l \log K)$, onde K é o tamanho máximo dessas árvores. Utilizaremos nesta seção, as operações *raiz*, *custo*, *customin*, *tamanho*, *atualiza*, *inverte* e *poda*, definidas no capítulo 3. Nesta nova estrutura de dados, consideramos que as arestas das árvores estão direcionadas para a raiz, e se $\{v, w\}$ é uma aresta de uma árvore dinâmica, com $w = \text{pai}(v)$ então o fluxo $f(v, w)$ estará armazenado implicitamente, isto é $f(v, w) = c(v, w) - \text{custo}(v, w)$. Se $\{v, w\}$ não é uma aresta de uma árvore dinâmica, então $f(v, w)$ ou $f(w, v)$ está armazenado explicitamente.

A seguir, temos a descrição da função *projeta*(v), que manda fluxo de um vértice ativo v até a raiz de sua árvore e poda as arestas saturadas até que $e(v) = 0$ ou v é raiz da árvore.

procedimento *projeta*(*vértice* v):

real δ ;

vértice i ;

.repita

. $\delta = \min(e(v), \text{custo}(\text{customin}(v)))$;

. *atualiza*($v, -\delta$);

. **repita**

. $i = \text{customin}(v)$;

. *poda*(i)

. **até que** $v = \text{raiz}(v)$ **ou** $\text{custo}(\text{customin}(v)) > 0$

.até que $\text{raiz}(v) = v$ **ou** $e(v) = 0$;

O algoritmo *FLUXO-MÁXIMO2* mantém a mesma fila F de vértices ativos e chama o procedimento *descarta* até que a fila F se torne vazia, como na seção anterior. A diferença fundamental é que o procedimento *descarta* chama o procedimento *empurra-rerrotula-na-árvore* ao invés de chamar o procedimento *empurra-rerrotula*. Além disso, o procedimento *descarta* insere todos os vértices que se tornaram ativos durante a aplicação do *empurra-rerrotula-na-árvore*. No início, as árvores são os vértices isolados do grafo G . É o procedimento *empurra-rerrotula-na-árvore* que chama a rotina *enxerta* e faz as árvores aumentarem de tamanho. O tamanho das árvores será limitado por um parâmetro K que será escolhido mais tarde. A seguir, temos a descrição do procedimento *empurra-rerrotula-na-árvore*.

procedimento *empurra-rerrotula-na-árvore*(*vértice v*):
vértice w, i;

```

/* É aplicável quando v é um vértice ativo */

/* */.seja {v, w} a aresta corrente da lista de v;
/* */.se  $d(v) = d(w) + 1$  e  $r_f(v, w) > 0$  /* se {v, w} é admissível */
/* 1 */. então se  $\text{tamanho}(v) + \text{tamanho}(w) \leq K$ 
/* 1a */. então enxerta(v, w, rf(v, w));
/* */. projeta(v)
/* 1b */. senão /*  $\text{tamanho}(v) + \text{tamanho}(w) > K$  */
/* */. empurra(v);
/* */. se  $w \neq s$  e  $w \neq t$  e  $\text{raiz}(w) \neq w$ 
/* */. então projeta(w)
/* 2 */. senão /*  $d(v) < d(w) + 1$  ou  $r_f(v, w) = 0$  */
/* */. se {v, w} não é a última aresta da lista de v
/* 2a */. então troque a aresta corrente {v, w} pela próxima aresta da lista de v
/* 2b */. senão /* {v, w} é a última aresta da lista de v */
/* */. faça a primeira aresta da lista de v a aresta corrente de v;
/* */. para todo vértice i filho de v faça
/* */. poda(i);
/* */. rerrotula(v);

```

Teorema 4.6 : O algoritmo *FLUXO-MÁXIMO2* é correto.

Prova: Para isto, basta mostrarmos que é lícito aplicar a operação *enxerta*, ou seja, que *v* é raiz de uma árvore e que *v* e *w* não estão na mesma árvore.

Um vértice ativo só não é raiz de uma árvore após a aplicação do *enxerta* (caso 1a) ou do *empurra* (caso 1b), mas a operação *projeta* é aplicada logo em seguida, e esta transforma este vértice numa raiz ou num vértice com excesso nulo.

Vejamos porque *v* e *w* não estão numa mesma árvore. É fácil ver que $d(\text{raiz}(w)) \leq d(w)$. Como $d(v) = d(w) + 1$ e *v* é raiz de alguma árvore, ela não pode ser a raiz da árvore que contém *w*. ■

Lema 4.13 : A complexidade do algoritmo *FLUXO-MÁXIMO2* é $O(nm \log K) + O(I \log K)$, onde *I* é o número de inserções na fila *F*.

Prova: Para analisar a complexidade do algoritmo vamos analisar o tempo gasto em todas as chamadas do *empurra-rerrotula-na-árvore*. É imediato que o tamanho máximo de qualquer árvore dinâmica é no máximo K . O tempo gasto em cada operação *empurra-rerrotula-na-árvore* é $O(1)$ mais o tempo gasto nas operações *rerrotula* (caso 2b) mais o tempo gasto nas operações *poda* mais o tempo gasto nas operações *projeta* mais o tempo das demais operações sobre árvores dinâmicas do procedimento.

O tempo total gasto em operações *rerrotula* é $O(mn)$, pela demonstração do lema 4.11. O número de operações sobre árvores dinâmicas executadas pelo *projeta* é da mesma ordem que o número de operações *poda* executadas por ele. O número total de operações *poda* é no máximo o número total de operações *enxerta* executadas durante todo o algoritmo. Através de um raciocínio análogo ao feito na demonstração do lema 4.8 podemos inferir que o número máximo de operações *enxerta* é $O(nm)$. Logo, o número de operações sobre árvores dinâmicas executadas pelo procedimento *projeta* mais o número das demais operações *poda* (caso 2b) é $O(nm)$.

As demais operações sobre árvores dinâmicas executadas em cada *empurra-rerrotula-na-árvore* são no máximo 3 (*tamanho(v)*, *tamanho(w)* e *raiz(w)*). Pelo teorema 3.5, temos que o tempo total gasto em todas as chamadas do *empurra-rerrotula-na-árvore* é $O(mn \log K) + O(I' \log K)$, onde I' é o número de chamadas do procedimento *empurra-rerrotula-na-árvore*. Por um raciocínio análogo ao da demonstração do teorema 4.5, temos que $I' = O(mn) + I$. Portanto, a complexidade deste algoritmo é $O(mn \log K) + O(I \log K)$. ■

A seguir, temos o lema crucial deste capítulo.

Lema 4.14 : O número de inserções na fila F é $O\left(mn + \frac{n^2}{K}\right)$.

Prova: Um vértice v pode ser inserido na fila quando o seu rótulo é incrementado, ou quando ele se torna ativo (sugerimos ao leitor, acompanhar esta demonstração observando a figura 4.1).

Pelo lema 4.7, o número de vezes que ocorre incremento de rótulo é no máximo $2n^2$. Por outro lado, um vértice pode tornar-se ativo nos casos 1a e 1b do procedimento *empurra-rerrotula-na-árvore*. O número de inserções na fila F ocorridas nos casos 1a e 1b é igual ao número de operações *poda* ocorridas em todas as chamadas do *projeta* mais um para cada *projeta*, que é igual ao número de ocorrências dos casos 1a e 1b. O número máximo de operações *poda* é $2mn$. O número de ocorrências do caso 1a é no máximo $2mn$ (número de operações *enxerta*). Resta-nos contar o número de ocorrências do caso 1b.

Vamos subdividir o caso 1b em três casos. O primeiro caso que consideraremos

é quando o procedimento *projeta*(w) causa alguma chamada da função *poda*: isto pode ocorrer no máximo $2nm$ vezes. O segundo caso é quando o procedimento *empurra* causa a saturação de $\{v, w\}$: este caso, pelo lema 4.8, pode ocorrer no máximo $2mn$ vezes. Restamos agora analisar o terceiro caso, que é a não ocorrência de nenhum dos dois primeiros casos.

Para analisar este caso, vamos chamar de A_v a árvore a qual um vértice v pertence e $|A|$ o número de vértices da árvore A . Além disso, dizemos que uma árvore A é grande se $|A| > \frac{K}{2}$ e pequena, caso contrário. Assim, no início de cada passagem pela fila F , temos no máximo $\frac{2n}{K}$ árvores grandes. Se ocorrer o caso 1b, ou A_v ou A_w (ou ambas) é uma árvore grande. Vamos considerar agora, mais dois subcasos dentro do último subcaso: o primeiro, quando A_v é uma árvore grande e o segundo, quando A_v é uma árvore pequena.

Considere o caso em que A_v é uma árvore grande. Como o *empurra*(v, w) não foi saturador, o excesso de v se anulou, o que significa que o procedimento *empurra-rerrotularna-árvore* não será aplicado novamente a v nesta passagem pela fila F . Portanto, se A_v se alterou desde o início desta passagem pela fila F , então contaremos este caso através das operações *poda* e *enxerta* ocorridos mais recentemente em A_v . Como cada *poda* gera duas árvores, mas uma pode ser desprezada, pois é pequena, e cada *enxerta* gera uma árvore, até o fim do algoritmo teremos no máximo $4nm$ destes casos. Suponha que A_v não tenha se alterado desde o início desta passagem pela fila F . Como no início desta passagem pela fila F tínhamos no máximo $\frac{2n}{K}$ destas árvores, pelo lema 4.12, no algoritmo inteiro teremos no máximo $\frac{8n^3}{K}$ destes casos.

Considere agora o caso em que A_v é uma árvore pequena. Como estamos analisando o caso 1b, A_w deve ser grande. Como não ocorreram chamadas da função *poda* e o *empurra* é não saturador, temos que todo o excesso de v foi transferido para a raiz de A_w . Como neste lema estamos contando o número de inserções em F e isto ocorre só uma vez para a raiz de A_w por passagem na fila F , podemos desprezar as demais ocorrências de A_w ser grande, neste caso. Portanto, pelo mesmo raciocínio do caso anterior, podemos inferir que o número máximo de ocorrências destes casos é $4mn + \frac{8n^3}{K}$.

Vamos agora, somar todas as estimativas:

$$2n^2 + 2nm + 2nm + 2nm + 2nm + 4mn + \frac{8n^3}{K} + 4n + \frac{8n^3}{K} = 2n^2 + 16nm + \frac{16n^3}{K}.$$

Logo, o número de inserções na fila F é $O(nm + \frac{n^3}{K})$. ■

Figura 4.1 : Casos abordados na demonstração do lema 4.14.

Teorema 4.7 : Se escolhermos $K = \frac{n^2}{m}$, a complexidade do algoritmo desta seção (usando árvores dinâmicas) é $O\left(nm \log\left(\frac{n^2}{m}\right)\right)$.

Prova: Imediata, a partir dos lemas 4.13 e 4.14. ■

4.4 Comparando o Algoritmo de Goldberg-Tarjan e os do Capítulo 1

Nesta seção, selecionaremos as idéias dos algoritmos descritos no capítulo 1, que estão presentes no algoritmo de Goldberg e Tarjan.

A demonstração do teorema 4.1 usa o teorema do fluxo máximo de Ford e Fulkerson. O algoritmo de Ford e Fulkerson realiza aumentações sobre caminhos de s a t , enquanto que o algoritmo de Goldberg-Tarjan realiza aumentações sobre caminhos de um vértice ativo a um vértice qualquer.

Edmonds e Karp usaram a idéia de distância e esta é crescente durante a execução do algoritmo, como ocorre no algoritmo de Goldberg-Tarjan. Porém, a distância do algoritmo *EK* é exata e é calculada a cada passo da execução do algoritmo, enquanto que no algoritmo de Goldberg-Tarjan é usada uma distância aproximada (rotulação válida), que é mantida durante a execução do algoritmo. Mais ainda, tanto no algoritmo *EK* quanto no algoritmo de Goldberg-Tarjan, o número de saturações é $O(mn)$.

A idéia de distância também ocorre no algoritmo de Dinic, mas neste algoritmo a distância é mantida durante cada fase. É interessante notar que Goldberg e Tarjan abandonaram a idéia de fase, introduzida por Dinic; porém, introduziram a idéia de passagem sobre fila.

Karzanov introduziu a noção de pré-fluxo. Note que a definição de pré-fluxo de Karzanov é ligeiramente diferente da de Goldberg e Tarjan. Além disso, as operações realizadas na função *EmpurraVértice* são semelhantes às operações do procedimento *empurra*.

Assim como o algoritmo de Goldberg-Tarjan, o algoritmo de Cherkasky realiza aumentações de vértices ativos para vértices quaisquer, mas de maneira muito diferente.

Galil introduziu o uso de árvores para representar caminhos aumentadores.

Galil e Naamad usaram implicitamente árvores dinâmicas; porém, com árvores

balanceadas, ao invés de árvores enviesadas.

O Algoritmo de Sleator e Tarjan usa árvores dinâmicas, e neste caso, com árvores enviesadas; como no algoritmo de Goldberg-Tarjan.

Shiloach e Vishkin usaram fila para guardar os vértices ativos, assim como Goldberg e Tarjan.

Provavelmente, existem outros pontos em comum entre o algoritmo de Goldberg e Tarjan e aqueles apresentados no capítulo 1; porém, acreditamos que os pontos apresentados revelam os alicerces do algoritmo de Goldberg e Tarjan.

Apêndice A

Definições Básicas

Definição A.1 : Um **grafo** é um par ordenado (V, A) onde V é um conjunto finito de elementos chamados **vértices** e A é um conjunto de elementos chamados **arestas**, onde cada aresta é um conjunto de dois vértices.

Definição A.2 : Um **grafo orientado** é um par ordenado de (V, A) onde V é um conjunto finito de elementos chamados **vértices** e um A é um conjunto de elementos chamados **arestas**, onde cada aresta é um par ordenado de vértices distintos.

Definição A.3 : Um **caminho** num grafo $G = (V, A)$ é uma seqüência da forma $(v_0, a_1, v_1, a_2, \dots, a_m, v_m)$ com $m \geq 0$, onde os v_i 's são vértices distintos de G e $a_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ para $i = 1, \dots, m$ são arestas distintas de G . Algumas vezes, por simplicidade, representamos um caminho pela seqüência de seus vértices (já que suas arestas ficam implicitamente definidas).

Definição A.4 : Um **caminho orientado** num grafo orientado $G = (V, A)$ é uma seqüência da forma $(v_0, a_1, v_1, a_2, \dots, a_m, v_m)$ com $m \geq 0$, onde os v_i 's são vértices distintos de G e $a_i = (v_{i-1}, v_i)$ para $i = 1, \dots, m$ são arestas distintas de G . Como na definição A.3, por simplicidade, podemos representar um caminho pela seqüência de seus vértices.

Definição A.5 : Um **caminho** num grafo orientado $G = (V, A)$ é uma seqüência da forma $(v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \dots, a_m, v_m)$, com $m \geq 0$, onde os v_i 's são vértices e a_i 's são arestas de G e, para $i = 1, \dots, m$ ou $a_i = (v_{i-1}, v_i)$ ou $a_i = (v_i, v_{i-1})$.

Definição A.6 : Seja $G = (V, A)$ um grafo (orientado ou não), e c um caminho em G . O **comprimento** ou **tamanho** de c é o número de arestas em c . Se v e w são dois vértices consecutivos de c , então dizemos que v (w) é **anterior (posterior)** a w (v).

Definição A.7 : Se $G = (V, A)$ é um grafo (orientado) e u, v são vértices distintos de G , a **distância** de u a v é o comprimento de um caminho (orientado) mínimo de u a v . Se não existe um tal caminho, a distância é considerada infinita.

Definição A.8 : Um **circuito** num grafo $G = (V, A)$ é uma seqüência da forma $(v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \dots, a_m, v_m)$ com $m \geq 3$, tal que $v_i \in V$, $(v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \dots, v_{m-1})$ é um caminho, $v_0 = v_m$ e $\{v_{m-1}, v_m\} \in A$.

Definição A.9 : Um **circuito** num grafo orientado $G = (V, A)$ é uma seqüência da forma $(v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \dots, a_m, v_m)$ com $m \geq 2$, tal que $v_i \in V$, $(v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \dots, v_{m-1})$ é um caminho, $v_0 = v_m$, $a_m \in A$ e $a_m = (v_{m-1}, v_m)$ ou $a_m = (v_m, v_{m-1})$.

Definição A.10 : Se $G = (V, A)$ é um grafo (orientado ou não), então dizemos que G é **conexo** se para quaisquer dois vértices $v, w \in V$, existe um caminho de v a w , em G .

Definição A.11 : Um grafo G é uma **árvore** se G não possui circuitos e é conexo. Podemos distinguir um vértice r de G e dizer que r é **raiz** da árvore G . Neste caso G é uma **árvore com raiz**. Além disso, o **tamanho** de uma árvore é definido como o número de seus vértices.

Definição A.12 : Seja A uma árvore com raiz r , e sejam x, y vértices de A , tais que y está no caminho de x até r . Então, dizemos que x é **descendente** de y e y é **ancestral** de x .

Definição A.13 : Se A é uma árvore com raiz r e x é um vértice de A , então dizemos que os descendentes de x formam uma **subárvore** com raiz x .

Definição A.14 : Seja A uma árvore com raiz, e x, y vértices de A . Se $\{x, y\}$ é uma aresta de A e x é descendente de y , dizemos que y é **pai** de x ($y = \text{pai}(x)$) e x é **filho** de y . Também dizemos que a aresta (x, y) **entra** em y .

Definição A.15 : Seja A uma árvore com raiz r , e sejam x, y vértices distintos de A e diferentes de r . Dizemos que x é **irmão** de y e que x e y são **irmãos**, se $\text{pai}(x) = \text{pai}(y)$.

Definição A.16 : Seja A uma árvore com raiz. Um vértice x de A , é uma **folha** se não possui filhos, e **nó interno**, caso contrário.

Definição A.17 : Seja A uma árvore com raiz r , e x um vértice de A . A **profundidade** de x é definida indutivamente da seguinte forma:

$$profundidade(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = r \\ profundidade(pai(x)) + 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Definição A.18 : Uma árvore com raiz é chamada **balanceada** se todas as suas folhas têm a mesma profundidade.

Definição A.19 : Seja A uma árvore com raiz, e R uma relação de ordem estrita definida sobre os vértices de A . Dizemos que A é uma **árvore ordenada** pela relação de ordem R , se quaisquer dois vértices irmãos são comparáveis pela relação R .

Definição A.20 : Seja A uma árvore ordenada pela relação de ordem estrita R , x um nó interno de A e $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ os filhos de x tais que $(x_i, x_{i+1}) \in R$, $i = 0, 1, \dots, k-1$. O **irmão vizinho direito(esquerdo)** de x_i (x_{i+1}) é x_{i+1} (x_i), $i = 0, 1, \dots, k-1$. Se z é irmão vizinho direito de y , então z e y são **irmãos vizinhos**. O vértice $x_0(x_k)$ é o **filho mais a esquerda(direita)** de x . Sejam x e y duas folhas da árvore A . Se $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são ancestrais de x e y , respectivamente, tais que $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são irmãos, então dizemos que x **está à esquerda (direita)** de y se $(\bar{x}, \bar{y}) \in R$ ($(\bar{y}, \bar{x}) \in R$).

Apêndice B

Glossário

	página
admissível (aresta) definição 4.11	117
ancestral definição A.12	126
balanceada (árvore) definição A.18	127
árvore definição A.11	126
bloqueado (vértice) definição 1.15	18
caçula (vértice) definição 2.2	45
caminho definição A.3	125
caminho (em grafo orientado) definição A.5	125
caminho aumentador definição 1.10	10
caminho orientado definição A.4	125
caminho esquerdo/direito definição 2.11	60
caminho de fluxo definição 1.5	7
capacidade (de corte) definição 1.9	9
capacidade residual definição 4.5	106
circuito definição A.8	126
circuito (em grafo orientado) definição A.9	126
comprimento (de caminho) definição A.6	125
conexo (grafo) definição A.10	126
corte definição 1.8	9
crédito invariante (é K') definição 2.6	53
crédito invariante (satisfaz) definição 2.5	47
descendente definição A.12	126
distância definição A.7	126
estado reverso definição 3.3	86
excesso definição 1.16	18

excesso	definição 4.4	105
filho	definição A.14	126
fluxo	definição 1.2	6
fluxo	definição 1.6	7
F -fluxo	definição 4.2	104
fluxo potencial	definição 1.21	33
fluxo proximamente ótimo	definição 1.23	39
folha	definição A.16	127
folha mais à direita/esquerda	definição 2.9	59
folha vizinha esquerda/direita	definição 2.10	59
função admissível	definição 1.14	18
global biased(árvore)	definição 2.12	60
global biased(árvore binária)	definição 2.15	70
grafo	definição A.1	125
grafo orientado	definição A.2	125
grafo induzido	definição 1.13	15
grafo residual	definição 1.11	13
grafo residual	definição 4.6	106
irmão	definição A.15	126
irmão vizinho esquerdo/direito	definição A.20	127
leve/pesada (aresta)	definição 3.2	82
local biased(árvore)	definição 2.3	45
local biased(árvore binária)	definição 2.14	65
micro fonte	definição 1.19	26
minesquerdo	definição 3.4	96
mindireito	definição 3.5	96
nó base	definição 2.7	53
nó interno	definição A.16	127
nó referência esquerdo/direito	definição 2.13	62
ordenada (árvore)	definição A.19	127
pai	definição A.14	126
passagem	definição 4.10	116
pré-fluxo	definição 1.17	19
pré-fluxo	definição 4.3	105
primeiro vizinho esquerdo/direito	definição 2.8	59
primogênito (vértice)	definição 2.2	45
profundidade	definição A.17	127
posto	definição 2.1	44
rede	definição 1.1	6
rede de fluxo	definição 4.1	104
redução de fluxo	definição 1.20	26
receberam fluxo (conjunto de vértices que)	definição 1.22	38
rotulação válida	definição 4.7	106

saturada (aresta) definição 1.12	13
saturador (empurra) definição 4.9	107
subárvore definição A.13	126
super camada definição 1.18	23
tamanho (de um vértice) definição 3.1	82
tende esquerdo definição 3.4	96
tende direito definição 3.5	96
valor de um fluxo definição 1.7	8
vértice ativo definição 4.8	106

Apêndice C

Sobre a Implementação

A implementação do algoritmo de Goldberg e Tarjan foi feita com o objetivo de complementar o aprendizado. De fato, durante a implementação, as últimas dúvidas foram esclarecidas.

O programa foi feito em linguagem C. Ele está completamente modularizado e é possível utilizar somente a biblioteca de funções referente às árvores enviesadas ou às árvores dinâmicas. O programa é constituído de 48 módulos, dos quais 8 são referentes às árvores enviesadas, 22 são referentes às árvores dinâmicas e o restante referente ao algoritmo do fluxo máximo. Além disso, os conteúdos dos nós das árvores enviesadas e das árvores dinâmicas são totalmente configuráveis. O programa é constituído de aproximadamente duas mil linhas de código exigiu cerca de 130 horas de programação. O computador utilizado foi um 'PC-XT'(8086) e o compilador utilizado foi o 'TURBOC' da *Borland*, sendo que o modelo de compilação utilizado foi 'large' e o programa executável gerado possui 100K 'bytes'.

Na programação foram utilizadas muitas variáveis do tipo ponteiro e muitas variáveis são alocadas dinamicamente. Desta forma, não foi necessário fazer estimativas de espaços de memória e o tamanho do maior problema executável pelo algoritmo depende do tamanho da memória da máquina. No entanto, isto trouxe dificuldades na hora da depuração.

Uma das dúvidas sanadas durante a implementação foi a respeito do item que uma folha de uma árvore enviesada representa. Isto gerou a observação da página 89 após o lema 3.3.

O programa foi testado, na maior parte das vezes, para problemas pequenos — cerca de 25 vértices e 40 arestas — e notou-se que para problemas pequenos as árvores

dinâmicas não cresceram muito e que o maior empurra utilizava apenas 2 arestas. Além disso, não foi encontrado nenhum exemplo em que a operação *empurra-rerrotula-na-árvore* recaia no caso 2b. O maior exemplo testado possuía cerca de 300 vértices e 500 arestas e o tempo de execução foi de 5 horas. No entanto, esse dado não é muito representativo, uma vez que não foi comparado com outros algoritmos.

Bibliografia

- [1] N. Abramson, Information Theory and Coding, McGraw-Hill, New York, 1963.
- [2] R. K. Ahuja and J. B. Orlin. A Fast and Simple Algorithm for the Maximum Flow Problem. *Operations Research* 37, No. 5, 748-759, 1989.
- [3] S. W. Bent, D. D. Sleator, and R. E. Tarjan. Biased Search Trees. *SIAM J. Comput.* 14, No.3, 545-568, 1985.
- [4] R. V. Cherkasky. Algorithm for construction of maximal flow in networks with complexity of $O(V^2\sqrt{E})$ operations. *Mathematical Methods of Solution of Economical Problems* 7, 112-125, 1977. (Em Russo).
- [5] U. Derigs and W. Meier. Implementing Goldberg's Max-Flow-Algorithm – A Computational Investigation. *ZOR – Methods and Models of Operational Research* 33, 383-403, 1989.
- [6] E. A. Dinic. Algorithm for solution of a problem of maximum flow in networks with power estimation. *Soviet Math. Dokl.* 11, 1277-1280, 1970.
- [7] J. Edmonds and R. M. Karp. Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems. *Journal of the ACM* 19, 248-264, 1972.
- [8] S. Even. Graph Algorithms. Computer Science Press, Potomac, MD, 1979.
- [9] L. R. Ford, Jr. and D. R. Fulkerson. Maximal flow through a network. *Canadian Journal of Math.* 8, 399-404, 1956.
- [10] L. R. Ford, Jr. and D. R. Fulkerson. Flows in Networks. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ., 1962.
- [11] H. N. Gabow. Scaling algorithms for network problems. *Journal of Computer and System Sciences* 31, 148-168, 1985.
- [12] Z. Galil . An $O(V^{\frac{5}{3}}E^{\frac{2}{3}})$ algorithm for the maximal flow problem. *Acta Informatica* 14, 221-242, 1980.

- [13] Z. Galil and A. Naamad. An $O(EV \log^2 V)$ algorithm for the maximum flow problem. *Journal of Computer and System Sciences* 21, 203-217, 1980.
- [14] A. V. Goldberg and R. E. Tarjan. A new approach to the maximum flow problem. *Proc. 18th Annual ACM Symp. on the Theory of Computing*, 136-146, 1986.
- [15] A. V. Karzanov. Determining the maximal flow in a network by the method of pre-flows. *Soviet Math. Dokl.* 15, 434-437, 1974.
- [16] V. M. Malhotra, M. Pramodh Kumar, and S.N. Maheshwari. An $O(|V|^3)$ algorithm for finding maximum flows in networks. *Inform. Process. Lett.* 7, 277-278, 1978.
- [17] Y. Shiloach and U. Vishkin. An $O(n^2 \log n)$ parallel max-flow algorithm. *Journal of Algorithms* 3, 128-146, 1982.
- [18] D. D. Sleator and R. E. Tarjan. A data structure for dynamic trees. *Journal of Computer and System Sciences* 26, 362-391, 1983.
- [19] R. E. Tarjan. Amortized Computational Complexity. *SIAM J. Alg. Disc. Meth.* 6, No.2, 306-318, 1985.
- [20] R. E. Tarjan. A Simple Version of Karzanov Blocking Flow Algorithm. *Operations Research Letters* 2, No. 6. 265-267, 1983.