Poliedros e *Clutters*
Bloqueadores e Anti-bloqueadores

Karina Marcus

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA APLICADA

Área de Concentração: **Ciência da Computação**
Orientador: **Profa. Dra. Yoshiko Wakabayashi**

Durante a elaboração deste trabalho, a autora recebeu apoio financeiro do CNPq

-São Paulo, Junho de 1992-

Poliedros e *Clutters*
Bloqueadores e Anti-bloqueadores

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e defendida por Karina Marcus e aprovada
pela comissão julgadora.

São Paulo, 3 de julho de 1992.

Banca examinadora:

- Prof. Dra. Yoshiko Wakabayashi (orientadora) - IME-USP
- Prof. Dr. Arnaldo Mandel - IME-USP
- Prof. Dr. Cláudio Leonardo Lucchesi - IMECC-UNICAMP

*aos meus pais
e ao universo*

Agradecimentos

Agradeço a todos que, direta ou indiretamente, ajudaram para que este trabalho assumisse esta forma final. E aí estão eles:

minha família,

todo o pessoal do Departamento de Ciência da Computação (até você, viu, Jô?),

todos os amigos, até os mais distantes (essa é para o Carlinhos),

às várias pessoas que me ensinaram que vale a pena realmente fazer pesquisa a sério (Arnaldo, Carlos Humes e outros),

ao Afonso, que me deu um super e-mail-apoio,

e em particular, Yoshiko Wakabayashi (a Yô). Obrigada pela paciência, pelo tempo, pela capacidade de achar “peninhas”. Sem ela, sei não...

A todos, muito obrigada!

Resumo

Neste trabalho estudamos as relações bloqueadoras e anti-bloqueadoras aplicadas a clutters e poliedros, descrevendo aplicações a vários problemas de otimização combinatória.

Primeiramente discutimos a teoria relativa a pares de clutters bloqueadores e anti-bloqueadores. Um **clutter** é uma família que consiste de subconjuntos de um conjunto finito dois a dois não comparáveis (em relação à operação de inclusão). O **clutter bloqueador** de um clutter $\mathcal{F}$ é definido como sendo a família dos elementos minimais de $\{G \subseteq \cup \mathcal{F} \mid F \cap G \neq \emptyset, \forall F \in \mathcal{F}\}$ e o **clutter anti-bloqueador** é a família que consiste dos elementos maximais de $\{G \subseteq \cup \mathcal{F} \mid |F \cap G| \leq 1, \forall F \in \mathcal{F}\}$. Estes conceitos levam a propriedades análogas à igualdade fluxo-máximo corte-mínimo e à desigualdade largura-comprimento de Lehman. Para ilustrar tais relações e propriedades nós analisamos aplicações como cobertura em grafos bipartidos, cadeias em conjuntos parcialmente ordenados, caminhos e cortes em grafos e coloração de grafos perfeitos.

Estendendo para poliedros estas relações antes definidas para clutters, apresentamos os conceitos de poliedros bloqueadores e anti-bloqueadores. Para um poliedro $B := \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Ax \geq 1\}$, $A \in \mathbb{R}_+^{m \times n}$, o seu **poliedro bloqueador** é definido como $\tilde{B} := \{y \in \mathbb{R}_+^n \mid y^T x \leq 1, x \in B\}$; e o **poliedro anti-bloqueador** do poliedro definido por $B := \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Ax \leq 1\}$, $A \in \mathbb{R}_+^{m \times n}$, é definido como $\bar{B} := \{y \in \mathbb{R}_+^n \mid y^T x \leq 1, x \in B\}$. Estudamos aqui propriedades como as já mencionadas para clutters, mas agora de uma maneira mais geral. A importância de tais conceitos em combinatória polidrica é enfatizada, mostrando que com a teoria de poliedros bloqueadores e anti-bloqueadores frequentemente pode-se derivar uma relação min-max de outra. Exemplos como 2-fluxos simultâneos, emparelhamentos em grafos e conjuntos independentes em matróides são discutidos.

Este trabalho mostra que muitos problemas de otimização combinatória são relacionados através de uma relação bloqueadora ou anti-bloqueadora. O estudo de cada problema dado para ilustrar os conceitos acima descritos, além de apresentar vários métodos de demonstração e abranger diferentes áreas, mostra alguns fatos relevantes no estudo de poliedros inteiros, como por exemplo, as propriedades relacionadas a matrizes totalmente unimodulares, balanceadas e totalmente balanceadas e grafos perfeitos.

Abstract

In this work we study the blocking and anti-blocking relations concerning clutters and polyhedra, describing applications to various combinatorial optimization problems.

First we discuss the theory related to pairs of blocking and anti-blocking clutters. A *clutter* is a family consisting of pairwise (inclusionwise) noncomparable subsets of a finite set. The *blocking clutter* of a clutter $\mathcal{F}$ is defined as the family consisting of the minimal elements of $\{G \subseteq \cup \mathcal{F} \mid F \cap G \neq \emptyset, \forall F \in \mathcal{F}\}$ and the *anti-blocking clutter* is the family consisting of the maximal elements of $\{G \subseteq \cup \mathcal{F} \mid |F \cap G| \leq 1, \forall F \in \mathcal{F}\}$. Those concepts lead to properties analogous to the max-flow min-cut equality and to the Lehman's width-length inequality. To illustrate such relations and properties we analyse applications such as coverings in bipartite graphs, chains in partially ordered sets, paths and cuts in graphs and perfect graphs coloring.

Extending to polyhedra the relations defined for clutters, we present the concepts of blocking and anti-blocking polyhedra. For a polyhedron $\mathcal{B} := \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Ax \geq 1\}$, $A \in \mathbb{R}_+^{m \times n}$, its *blocking polyhedron* is defined as $\bar{\mathcal{B}} := \{y \in \mathbb{R}_+^m \mid y^T x \leq 1, x \in \mathcal{B}\}$; and the *anti-blocking polyhedron* of the polyhedron defined by $\mathcal{B} := \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Ax \leq 1\}$, $A \in \mathbb{R}_+^{m \times n}$, is defined as $\bar{\mathcal{B}} := \{y \in \mathbb{R}_+^m \mid y^T x \leq 1, x \in \mathcal{B}\}$. We study here properties as those mentioned for clutters, but now in a more general setting. The importance of these concepts in polyhedral combinatorics is emphasized, showing that with the theory of blocking and anti-blocking polyhedra, very often one can derive a min-max relation from another one. Examples as two-commodity flows, matchings and independent sets in matroids are discussed.

This work shows that many combinatorial optimization problems are related through a blocking or an anti-blocking relation. The study of each problem given to illustrate the above concepts, besides presenting various proof techniques and touching different subjects, shows some relevant facts in the study of integer polyhedra, as for example, the properties related to totally unimodular, balanced and totally balanced matrices and to perfect graphs.

Conteúdo

Introdução	i
1 Notações e Preliminares	1
1.1 Notação básica	1
1.2 Fechos e poliedros	2
1.3 Programação linear e dualidade	3
1.4 Grafos e hipergrafos	4
1.5 Cobertura e packing	8
1.6 Clutters	8
2 Bloqueadores de Clutters	11
2.1 Definições e resultados básicos	11
2.2 Caminhos entre dois vértices	19
2.3 Coberturas de arestas em um grafo bipartido	21
2.4 T -junções e T -cortes	24
2.5 Cortes orientados	32
2.6 O problema do gargalo	32
3 Anti-bloqueadores de Clutters	35
3.1 Definições e resultados básicos	35
3.2 Cadeias em um conjunto parcialmente ordenado	45
3.3 Coberturas de arestas em grafos bipartidos	47
3.4 Cliques em grafos trianguláveis	48

3.5	Grafos perfeitos	50
4	Poliedros Bloqueadores	54
4.1	Definições e resultados básicos	54
4.2	Propriedades de matrizes bloqueadoras	59
4.3	Coberturas minimais	68
4.4	Fluxos simultâneos	70
4.5	Partição dos elementos de um matróide em bases	77
5	Poliedros Anti-bloqueadores	86
5.1	Definições e resultados básicos	86
5.2	Propriedades de matrizes anti-bloqueadores	92
5.3	Relação entre pares bloqueadores e anti-bloqueadores	97
5.4	Conjuntos independentes em matróides	100
5.5	Emparelhamentos	101
5.6	Branchings	105
6	Complementos	108
6.1	Conjuntos bloqueadores e anti-bloqueadores	109
6.2	Matrizes totalmente unimodulares	112
6.3	Matrizes balanceadas	115
6.4	Sistemas totalmente duais-inteiros	117
6.5	Continuando...	119
	Bibliografia	119
	Índice de símbolos mais usados	125
	Índice de definições	126

Introdução

Existem vários exemplos de teoremas combinatórios que tratam de problemas de *packing* máximo ou cobertura mínima, onde os teoremas ocorrem em pares. D.R. Fulkerson, em seus artigos de 1970, 1971 e 1972, notou este fato e introduziu a bela teoria sobre poliedros bloqueadores e anti-bloqueadores.

A intenção inicial deste trabalho era fazer um estudo sobre estes artigos. O principal interesse nesta teoria é justamente a sua forte relação com os problemas de *packing* e coberturas e a possibilidade de se obter igualdades min-max e desigualdades do tipo max-max ou min-min de Lehman como decorrência direta de outras relações min-max. Além disso, ela se presta a uma abordagem particular da teoria de poliedros inteiros.

No decorrer do estudo de tais artigos, que fundamentam os capítulos 4 e 5 deste texto, decidiu-se apresentar as idéias básicas contidas neles, a das relações bloqueadora e anti-bloqueadora, particularizadas para o contexto de estruturas mais simples que poliedros. Isto já havia sido feito para famílias de conjuntos muito particulares, os *clutters*, porém de uma maneira parcial — quando tais *clutters* podem ser vistos como tipos especiais de matróides — e quase exclusivamente para o caso das relações bloqueadoras. Como será visto nos exemplos, *clutters* aparecem de uma maneira natural na teoria dos grafos. Achamos que um primeiro contato com tais conceitos, quando feito com estruturas mais simples e familiares, permitiria captar melhor a essência da teoria, e também apreciar a profundidade da mesma quando estendida a um contexto mais geral.

Foi feito um levantamento do que havia na literatura e os resultados que encontramos foram então transformados para a linguagem de *clutter*. A tarefa de estabelecer relações e propriedades paralelas às introduzidas por Fulkerson na sua abordagem de poliedros constituiu um bom exercício de aprendizado. O capítulo 2 baseia-se então no estudo de

resultados obtidos principalmente por Seymour, complementados por particularizações da teoria dos poliedros bloqueadores. Os exemplos apresentados tentam abordar casos particulares de clutters bloqueadores, ilustrando as propriedades dadas pela relação bloqueadora ou servindo como contra-exemplo para possíveis conjecturas que possam aparecer a partir da teoria vista.

A relação anti-bloqueadora aplicada a clutters é o tema central do terceiro capítulo, que apresenta vários fatos já conhecidos com uma abordagem nova. A principal motivação é um resultado devido a Fulkerson e um teorema de Lovász, que fez com que fosse traçado um caminho desde a concepção do conceito de clutter anti-bloqueador até estabelecer a relação final deste com grafos perfeitos. Para tanto, introduzimos uma nova operação em clutters, além das já conhecidas, que conseguiu traduzir o que é feito em poliedros por Fulkerson para a linguagem de clutters, permitindo que todos os resultados sejam apresentados em termos somente do que é visto nos capítulos anteriores.

Os capítulos 4 e 5 seguintes, que basicamente deveriam ter sido apenas uma apresentação detalhada dos artigos de Fulkerson, proporcionaram uma agradável surpresa, ao propiciar a intuição de resultados que vêm generalizar um procedimento normal nas técnicas de demonstrações em teoria dos grafos, o de “duplicar arestas” e “subdividir vértices”. Introduzimos duas novas operações sobre matrizes, que conduzem aos resultados desejados, tanto com respeito à relação bloqueadora como anti-bloqueadora. Tais operações puderam ser particularizadas ao contexto de clutters, e novos resultados até então não observados na literatura foram adicionados aos capítulos 2 e 3, resultados estes que permitem uma maior gama de operações em clutters, preservando importantes propriedades associadas às relações bloqueadora e anti-bloqueadora.

Concluimos o trabalho com algumas notas complementares sobre o que foi visto, apresentando alternativas de abordagem e estudos que estão relacionados com a teoria.

Observação: No início deste trabalho nos deparamos com a difícil tarefa de encontrar uma tradução adequada para três termos: *clutter*, *packing* e *branching*. Para *clutter* nos foram sugeridos “desordem”, “Sperner família”, “anti-cadeia”, ... Quanto a *packing*, pensamos em “empacotamento”; e para *branching*, ocorreu-nos “ramificações”. Porém, em nenhum dos casos sentimos a confiança de estar fazendo a melhor escolha. Já na fase final deste trabalho, após ter passado meses falando e escrevendo “clutters” e “packing”, nada mais parecia substituí-los adequadamente. Resolvemos assim, usar os termos originais.

Capítulo 1

Notações e Preliminares

Neste capítulo apresentamos os conceitos básicos e estabelecemos a notação que será usada no decorrer desta dissertação. Deixamos para introduzir, na ocasião em que aparecem, alguns conceitos específicos referentes a cada um dos exemplos que serão estudados aprofundadamente nos capítulos que se seguem. A última seção é reservada para introduzir o conceito de *clutter*, entidade que será tema principal dos capítulos 2 e 3.

1.1 Notação básica

Por $\mathbb{R}$ ($\mathbb{Z}$) denotamos o conjunto dos números reais (inteiros). $\mathbb{R}_+$ ($\mathbb{Z}_+$) denota o conjunto dos números reais (inteiros) não negativos. Para um número n natural, $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{Z}^n$) denota o conjunto de vetores com n componentes, cada uma delas em $\mathbb{R}$ ($\mathbb{Z}$). Se E é um conjunto finito e R um conjunto qualquer, então R^E é o conjunto das funções de E em R . É conveniente considerar os elementos de R^E como vetores com $|E|$ componentes, onde cada uma delas é indexada por um elemento de E . Se $x \in R^E$ e $A \subseteq E$, então denotamos por $x(A)$ a soma $\sum_{e \in A} x(e)$.

Adição de vetores e multiplicação de vetores por escalares são definidas como usualmente. Um vetor pode ser um vetor-coluna ou vetor-linha, o contexto deixa claro qual é o caso em questão. O produto interno de dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ é simplesmente denotado por xy e definido como

$$xy := \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Para qualquer conjunto R , denotamos por $R^{m \times n}$ o conjunto das matrizes $m \times n$ com

componentes em R . Para uma matriz $A \in R^{m \times n}$, normalmente assumimos que o conjunto de índices das linhas é $\{1, \dots, m\}$ e o das colunas é $\{1, \dots, n\}$. A não ser que seja especificado de outra maneira no contexto, os elementos de $A \in R^{m \times n}$ são denotados por a_{ij} , $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$. As matrizes e os vetores que ocorrem nos sistemas lineares são assumidos terem dimensões compatíveis.

A matriz identidade é denotada por I , respectivamente I_n se quisermos ressaltar a sua dimensão. O símbolo 0 representa a matriz ou o vetor (cuja dimensão é dada pelo contexto) que possui todas as componentes iguais a zero. O símbolo 1 denota o vetor cujas componentes são todas iguais a 1.

Dizemos que um conjunto S **intercepta** um conjunto T se $S \cap T \neq \emptyset$. Se R e B são conjuntos tais que $B \subseteq R$, $e, e' \in R$, denotamos o conjunto $B \setminus \{e\} \cup \{e'\}$ simplesmente por $B - e + e'$.

1.2 Fechos e poliedros

Como referência para este e o próximo tópico, sugerimos Schrijver, 1986, e Chvátal, 1983.

Um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ é chamado uma **combinação cônica** dos vetores $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$, se para algum $\alpha \in \mathbb{R}_+$

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i,$$

Se além da não-negatividade de α temos que $1\alpha = 1$, dizemos que x é uma **combinação convexa** dos vetores $x_1, x_2, \dots, x_n$. Para um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$, denotamos por $\text{conv}(S)$ o **fecho convexo** dos elementos de S , i.e., o conjunto de todos os vetores que são combinações convexas de um número finito de vetores em S , e por $\text{cone}(S)$ o **fecho cônico** dos elementos de S , i.e., o conjunto de todos os vetores que são combinações cônicas de um número finito de vetores de S .

Um subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é chamado um **cone** se $S = \text{cone}(S)$, e um **conjunto convexo** se $S = \text{conv}(S)$.

Se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$, então $Ax \leq b$ é chamado um **sistema de inequações (lineares)** e $Ax = b$ é um **sistema de equações**. O conjunto solução $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ de um sistema de inequações é chamado **poliedro**.

Uma inequação $ax \leq a_0$ é **válida** para um poliedro P se $P \subseteq \{x \mid ax \leq a_0\}$. Um conjunto $F \subseteq P$ é chamado uma **face** de P se existe uma inequação $ax \leq a_0$ válida para P tal que $F = \{x \in P \mid ax = a_0\}$. Se v é um ponto em um poliedro P tal que $\{v\}$ é uma

face de P , então v é chamado **vértice** de P . Uma **faceta** de P é uma face que satisfaz $\emptyset \neq F \neq P$ e que é maximal com respeito a esta propriedade.

Todo poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$ tem uma representação da forma

$$P = \text{conv}(V) + \text{cone}(E)$$

onde V e E são subconjuntos finitos do $\mathbb{R}^n$. Um poliedro limitado é o fecho convexo de um número finito de pontos.

Se todos os vértices de um poliedro P são inteiros, então dizemos que P é um **poliedro inteiro**.

Chamamos a atenção aqui ao fato de que se uma matriz A é **totalmente unimodular**, i.e., toda submatriz quadrada de A tem determinante 0, -1, ou +1, então, para qualquer vetor b inteiro, temos que o poliedro $P = \{x \mid Ax \leq b\}$ é inteiro.

1.3 Programação linear e dualidade

No decorrer deste trabalho, a seguinte classe de problemas terá um papel fundamental:

Programa linear: Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, um vetor $b \in \mathbb{R}^m$ e um vetor $c \in \mathbb{R}^n$, encontre um vetor $x^* \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$, que maximiza a função linear cx .

Um programa linear será normalmente escrito em uma das seguintes formas

$$\max_{Ax \leq b} cx \quad \text{ou} \quad \max\{cx \mid Ax \leq b\} \quad \text{ou} \quad \max cx, Ax \leq b.$$

Um vetor $\bar{x}$ tal que $A\bar{x} \leq b$ é chamado **solução viável** do programa linear. Uma solução viável $\bar{x}$ é uma **solução ótima** se $c\bar{x} \geq cx$ para toda solução viável x . Neste caso, $c\bar{x}$ é chamado **valor ótimo** do programa linear. A função cx é chamada **função objetivo**. Se, para todo número M , existe uma solução viável $\bar{x}$ tal que $c\bar{x} > M$, então diz-se que o programa linear é **ilimitado**. Podemos associar a todo programa linear $\max cx, Ax \leq b$, um outro programa, chamado o seu **dual**, que é

$$\min yb, yA = c, y \geq 0.$$

Quando nos referimos ao tal par de problemas, o programa original é chamado **primal**. Usando transformações triviais, podemos colocar outros sistemas de equações e inequações nas formas dadas acima.

Teorema 1.3.1 (da Dualidade Forte) *Seja (P) $\max cx$, $Ax \leq b$, um programa linear e (D) $\min yb$, $yA = c$, $y \geq 0$, o seu dual. Se ambos (P) e (D) possuem soluções viáveis, então ambos os problemas têm soluções ótimas e os seus valores ótimos são iguais.*

Em adição, se um dos programas (P) ou (D) não tem solução viável, então o outro ou é ilimitado ou não tem nenhuma solução viável. Se um dos programas (P) ou (D) é ilimitado, então o outro não tem solução viável.

Observação: No decorrer do texto, quando falarmos de igualdade de valores ótimos de dois programas lineares, estaremos assumindo que ambos os programas possuem soluções viáveis e, assim, para ambos o valor ótimo é finito.

Segue das definições acima que o conjunto das soluções ótimas de um programa linear sobre um poliedro P é uma face do poliedro. Se o programa linear $\max cx$, $x \in P$, é limitado, então o programa linear tem no mínimo uma solução ótima x^* que é um vértice de P .

1.4 Grafos e hipergrafos

No decorrer desta dissertação serão vistos vários exemplos para ilustrar aplicações da teoria que apresentaremos. Muitos destes exemplos tratam de conceitos e resultados sobre grafos.

A maioria dos conceitos que serão mencionados aqui são básicos e podem ser encontrados, com algumas diferenças de terminologia e notação, em Bondy & Murty, 1976, e Harary, 1969. Usaremos, entretanto, uma notação que nos é mais conveniente, que deverá ficar clara pelo contexto.

Um **grafo** $G = (VG, AG)$ consiste de um conjunto VG finito não-vazio de elementos chamados **vértices** e um conjunto AG , $AG \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in VG, u \neq v\}$ de elementos, chamados **arestas**. Um par ocorrendo mais do que uma vez em AG é chamado de **aresta múltipla**. Grafos sem arestas múltiplas são chamados **simples**. A **ordem** de um grafo é o número de seus vértices. Se $\alpha = \{u, v\}$ é uma aresta de G , dizemos que α é **incidente** aos vértices u e v ; dizemos também que u e v são **adjacentes** e que são os **extremos** de α . Se $\alpha, \beta \in AG$ são incidentes a um mesmo vértice, dizemos que α e β são **adjacentes**.

Se G é um grafo, a menos de menção em contrário, fica subentendido que VG é o conjunto de seus vértices e AG é o conjunto de suas arestas. O **grafo complementar** de G , denotado por $\overline{G}$, é o grafo simples com o mesmo conjunto de vértices que G , e que possui como arestas todos os pares $\{v, w\}$ que não pertencem a AG .

Se S é um conjunto de vértices de um grafo G , então denotamos por $\langle S \rangle$ o conjunto das arestas de G com ambos os extremos em S , ou seja,

$$\langle S \rangle := \{\{u, v\} \in AG \mid u, v \in S\},$$

e por $\delta(S)$ o conjunto das arestas de G com exatamente um extremo em S , i.e.,

$$\delta(S) := \{\{u, v\} \in AG \mid u \in S, v \notin S\}.$$

Se $S = \{v\}$, então denotaremos $\delta(\{v\})$ por $\delta(v)$, que será chamado a **estrela** de v . O número de arestas incidentes a um vértice v é chamado o **grau** de v em G e é denotado por $g_G(v)$. Quando G está claro pelo contexto, escrevemos simplesmente $g(v)$.

Um grafo simples G é **completo** se AG é o conjunto de todos os pares de vértices de VG .

Se G é um grafo, dizemos que G' é um **subgrafo** de G se $VG' \subseteq VG$ e $AG' \subseteq AG$. Se $W \subseteq VG$, então o subgrafo H de G tal que $VH = W$ e $AH = \langle W \rangle$ é dito ser **induzido** por W . Um **subgrafo induzido** de G é um subgrafo induzido por algum subconjunto de vértices de G .

Em um grafo G , uma seqüência na forma

$$[v_0, \alpha_1, v_1, \dots, v_{t-1}, \alpha_t, v_t], \quad (1.1)$$

onde $v_0, \dots, v_t$ são vértices e $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ são arestas distintas tais que $\alpha_i = \{v_{i-1}, v_i\}$, para $i = 1, \dots, t$, é chamado **caminho** de v_0 a v_t se todos os vértices são distintos. Neste caso, os vértices v_0 e v_t são o **vértice inicial** e **vértice final** do caminho, respectivamente, ou apenas os **extremos**. Chamamos este caminho um **caminho** $v_0 - v_t$. Se a seqüência em 1.1 é um caminho, o seu **comprimento** é t . Às vezes identificaremos um caminho com o seu conjunto de arestas ou vértices. Se $v_0 = v_t$, os vértices $v_0, \dots, v_{t-1}$ são distintos, e a seqüência 1.1 tem comprimento no mínimo 1, então esta é chamada **circuito**.

Um **corte** entre v_0 e v_t (ou um **corte** $v_0 - v_t$) é o conjunto das arestas que interceptam todos os caminhos $v_0 - v_t$.

Um grafo é **conexo** se entre todo par de vértices existe um caminho. A relação de conexidade definida pela existência de caminhos induz uma relação de equivalência sobre os vértices. Estas classes são chamadas de **componentes (conexas)** do grafo.

Uma **floresta** é um grafo sem circuitos e uma **árvore** é uma floresta conexa. Não é difícil ver que as seguintes afirmações são equivalentes para um dado grafo G :

1. G é uma árvore,

2. G é conexo e $|AG| = |VG| - 1$,
3. Entre quaisquer dois vértices de G existe exatamente um caminho.

Um subgrafo G' de G é uma **árvore geradora** de G se $VG' = VG$ e G' é uma árvore.

Um **clique** (resp. **conjunto estável**), em um grafo G é um conjunto de vértices dois a dois adjacentes (resp. não adjacentes) em G .

Uma **cobertura** em um grafo G é um conjunto $K \subseteq VG$ tal que toda aresta $\alpha \in AG$ é incidente a pelo menos um vértice em K . Uma **cobertura de arestas** é um conjunto A de arestas tal que todo vértice em VG é extremo de alguma aresta em A . Um **emparelhamento** é um conjunto de arestas duas a duas não adjacentes. Um emparelhamento E tal que todo vértice de G é extremo de alguma aresta em E é chamado **emparelhamento perfeito**. Uma **coloração** de vértices em G é uma atribuição de cores a estes, de modo que vértices adjacentes tenham cores distintas. O **número cromático** de um grafo G , denotado por $\chi(G)$ é o menor número de cores necessário para se fazer uma coloração de vértices em G .

Um grafo G é **bipartido** se VG pode ser particionado em dois conjuntos V_1 e V_2 não-vazios tais que toda aresta de G é incidente a um vértice em V_1 e a um vértice em V_2 .

Seja G um grafo e seja $\alpha = \{u, v\}$ uma aresta de G . O grafo $G \setminus \alpha$ obtido pela **eliminação** da aresta α é o grafo $G' := (VG, AG - \alpha)$. O grafo G/α obtido por **contração** da aresta α é o grafo $G' := (VG - \{u, v\} + w, AG')$, onde $w \notin VG$ e AG' consiste de todas as arestas de G contidas em $VG - \{u, v\}$, junto com todas as arestas $\{x, w\}$, onde $\{x, v\}$ é uma aresta em G diferente de α e as arestas $\{x, w\}$, onde $\{x, u\}$ é uma aresta em G diferente de α .

A **matriz de incidência** A de um grafo G é a matriz $(0, 1)$ com linhas e colunas indexadas por VG e AG , respectivamente, onde $a_{v,\alpha} = 1$ se e somente se a aresta α é incidente ao vértice v .

Um **grafo orientado** é um par $D = (VD, AD)$, onde VD é um conjunto finito não-vazio e AD é tal que $AD \subseteq \{(u, v) \mid u, v \in VD, u \neq v\}$. Os elementos de VD são chamados **vértices** e os de AD são chamados **arestas**. Os vértices v e w são chamados de **início** e **fim** da aresta (v, w) , respectivamente.

Dizemos que uma aresta (v, w) **entra** em w e **sai** de v . Se W é um conjunto de vértices tal que $v \notin W$ e $w \in W$, então dizemos que (v, w) **entra** em W e **sai** de $VD - W$. Se $W \subseteq VD$, então $\delta(W)$ denota o conjunto das arestas em AD que saem de W . Denotamos por $\delta(v)$ o conjunto $\delta(\{v\})$. A rigor, deveríamos usar um outro símbolo

(por exemplo, $\delta^+(W)$), já que este mesmo símbolo já foi definido antes para grafos (não orientados). Acharmos isto desnecessário, pois o contexto deixará claro o caso a que estamos nos referindo.

Em um grafo G , uma seqüência da forma

$$[v_0, \alpha_1, v_1, \dots, v_{t-1}, \alpha_t, v_t], \quad (1.2)$$

onde $v_0, \dots, v_t$ são vértices e $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ são arestas distintas tais que $\alpha_i = (v_{i-1}, v_i)$, para $i = 1, \dots, t$, é chamada **caminho orientado de v_0 a v_t** , caso todos os vértices sejam distintos. Neste caso, dizemos que o caminho **começa** em v_0 e **termina** em v_t . Os vértices v_0 e v_t são o **vértice inicial** e **vértice final** do caminho, respectivamente, ou apenas os **extremos**. Tal caminho é chamado um **caminho orientado $v_0 - v_t$** e o seu **comprimento** é t . Às vezes identificaremos um caminho com o seu conjunto de arestas ou vértices. Se $v_0 = v_t$, todos os outros vértices são distintos e $t \geq 1$, a seqüência 1.2 é chamada **circuito orientado**.

Sendo D um grafo orientado, a operação de **eliminação** de uma aresta α de D é definida analogamente ao caso não orientado. A operação de **contração** de uma aresta $\alpha = (u, v)$ de D dá origem a um grafo $D' = (VD - \{u, v\} + w, AD')$, onde $w \notin VD$ e AD' consiste de todas as arestas de D contidas em $VD - \{u, v\}$, junto com todas as arestas (x, w) , onde (x, u) é uma aresta em D , as arestas (x, w) , onde (x, v) é uma aresta em D , $(x, v) \neq \alpha$, as arestas (w, x) , onde (u, x) é uma aresta em D , $(u, x) \neq \alpha$, e as arestas (w, x) , onde (v, x) é uma aresta em D .

Um conjunto de arestas interceptando todos os caminhos orientados $r - s$ para dados dois vértices r e s é chamado de um **corte r-s** (ou um corte que **separa** r de s). Assim, se W é um conjunto de vértices tal que $r \in W$, $s \notin W$, então $\delta(W)$ é um corte $r - s$.

Se D é um grafo orientado e $\alpha = (u, v)$ é uma aresta de G , fazer uma **subdivisão** de α consiste em substituir em D a aresta α por duas novas arestas (u, w) e (w, v) , onde $w \notin VD$. Fazer uma **duplicação** de α consiste em acrescentar a D uma nova aresta $\beta = (u, v)$. Se G é um grafo (não orientado), define-se estas mesmas operações, bastando esquecer a orientação das arestas.

Um **hipergrafo** é um par $H = (VH, AH)$, onde VH é um conjunto finito não-vazio de elementos chamados **vértices** e AH é uma família de subconjuntos de VH . Cada membro de AH é chamado **aresta**.

1.5 Cobertura e packing

Dado um conjunto finito $E = \{e_1, \dots, e_n\}$, uma família $\mathcal{F} = \{C_1, \dots, C_m\}$ de subconjuntos de E e $w \in \mathbb{R}_+^n$, dizemos que $y \in \mathbb{R}_+^m$ é um w -packing de $\mathcal{F}$ se para todo $i = 1, \dots, n$, $\sum y(C_j) \leq w(e_i)$, onde a soma é sobre todos os conjuntos C_j tais que $e_i \in C_j$. Um w -packing $\bar{y}$ é máximo se $\mathbf{1}\bar{y} \geq \mathbf{1}y$ para todo w -packing y .

Uma w -cobertura de $\mathcal{F}$ é um vetor $y \in \mathbb{R}_+^m$ tal que para todo $i = 1, \dots, n$, $\sum y(C_j) \geq w(e_i)$, onde a soma é sobre todos os conjuntos C_j tais que $e_i \in C_j$. Uma w -cobertura $\bar{y}$ é mínima se $\mathbf{1}\bar{y} \leq \mathbf{1}y$ para toda w -cobertura y .

Um w -packing (uma w -cobertura) y de $\mathcal{F}$ é inteiro se $y \in \mathbb{Z}_+^m$. Se $w = \mathbf{1}$, diremos simplesmente um packing ou uma cobertura.

No contexto de matrizes e programas lineares, dada uma matriz A e um vetor w inteiro não negativo, o problema do w -packing máximo (resp. da w -cobertura mínima) de A é encontrar um vetor y que seja solução ótima em $\max\{\mathbf{1}y \mid yA \leq w, y \geq 0\}$ (resp. $\min\{\mathbf{1}y \mid yA \geq w, y \geq 0\}$).

1.6 Clutters

O conceito de *clutter* foi primeiramente mencionado por Edmonds & Fulkerson, em 1970, junto com o conceito de *bloqueador*. Estes conceitos foram utilizados para estudar um problema específico, chamado o problema do “gargalo”, que será visto na seção 2.6. Não parando por aí, os *clutters* e *bloqueadores* conduziram de uma maneira natural à idéia de *clutter anti-bloqueador* e a uma generalização destes conceitos: os *poliedros bloqueadores* e *anti-bloqueadores* - assunto dos próximos capítulos.

Formalmente, dado um conjunto finito E , um clutter $\mathcal{F}$ sobre E é uma família de subconjuntos de E tal que nenhum membro de $\mathcal{F}$ está contido em outro membro de $\mathcal{F}$. Notemos que $\{\emptyset\}$ e $\emptyset$ são clutters e neste caso consideraremos que $E = \emptyset$.

Eis alguns exemplos de clutters que serão estudados mais tarde:

$\mathcal{F}_1$ - família das coberturas minimais em um grafo;

$\mathcal{F}_2$ - família dos caminhos de um vértice s a um vértice t em um grafo (orientado ou não).

Note que $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ são clutters sobre o conjunto dos vértices, respectivamente arestas, do grafo considerado.

Dado um clutter $\mathcal{F}$ sobre E , podemos associar a $\mathcal{F}$ um hipergrafo H da seguinte maneira: tomamos E como o conjunto de vértices de H e a família $\mathcal{F}$ como sendo as arestas de H . É claro que, dado um hipergrafo H que não possui nenhuma aresta que seja subconjunto de outra, existe um clutter associado a H . Quando isto acontece, as noções de hipergrafo e clutter são equivalentes.

A equivalência acima descrita nos leva naturalmente à seguinte pergunta: Assim como no caso de hipergrafos, existem operações sobre clutters por meio das quais podemos obter novos clutters? As próximas definições nos dão justamente duas de tais operações.

Seja $\mathcal{F}$ um clutter sobre E e Z um subconjunto de E . Definimos a **eliminação de Z** de $\mathcal{F}$, denotada por $\mathcal{F} \setminus Z$, como sendo

$$\mathcal{F} \setminus Z = \{F \in \mathcal{F} \mid F \cap Z = \emptyset\};$$

e a **contração de Z em $\mathcal{F}$** , denotada por $\mathcal{F}/Z$, como a família dos elementos minimais de $\{F - Z \mid F \in \mathcal{F}\}$. Claramente $\mathcal{F} \setminus Z$ e $\mathcal{F}/Z$ são clutters. Essas operações bem como combinações delas produzem os chamados **menores** de $\mathcal{F}$. Dizemos ainda que um menor $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ é **próprio** se $\mathcal{F}' \neq \mathcal{F}$.

No caso do clutter $\mathcal{F}_2$, se G é o grafo considerado e α é uma aresta de G , temos que $\mathcal{F}_2 \setminus \{\alpha\}$ e $\mathcal{F}_2/\{\alpha\}$ são os clutters dos caminhos $s - t$ nos grafos obtidos pela eliminação e contração de α em G , respectivamente.

Proposição 1.6.1 *Seja $\mathcal{F}$ um clutter sobre E e $Z_1, Z_2 \subseteq E$. Então $(\mathcal{F} \setminus Z_1) \setminus Z_2 = \mathcal{F} \setminus (Z_1 \cup Z_2)$, $(\mathcal{F}/Z_1)/Z_2 = \mathcal{F}/(Z_1 \cup Z_2)$ e, se $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$, $(\mathcal{F}/Z_1) \setminus Z_2 = (\mathcal{F} \setminus Z_2)/Z_1$. $\square$*

A demonstração desta proposição é bastante simples e será omitida. Como consequência deste resultado segue que todo menor $\mathcal{F}'$ obtido a partir de $\mathcal{F}$ por uma série de eliminações e contrações pode ser expresso na forma $(\mathcal{F} \setminus Z'_1)/Z'_2$ para certos conjuntos $Z'_1, Z'_2 \subseteq E$. Dizemos ser esta a sua **forma padrão**.

Introduzimos agora duas novas operações sobre clutters.

Definimos a **extensão de $\mathcal{F}$** por um elemento $e \in E$, denotada por $\text{ext}(\mathcal{F}, e)$, como sendo o seguinte clutter sobre $E \cup \{e'\}$, onde $e' \notin E$:

$$\text{ext}(\mathcal{F}, e) := (\mathcal{F} - \{F \in \mathcal{F} \mid e \in F\}) \cup \{F \cup e' \mid F \in \mathcal{F}, e \in F\}.$$

A **completação** de $\mathcal{F}$ por um elemento e , denotada por $\text{comp}(\mathcal{F}, e)$, é definida como sendo o seguinte clutter sobre $E \cup \{e'\}$, onde $e' \notin E$:

$$\text{comp}(\mathcal{F}, e) := \mathcal{F} \cup \{F + e' - e \mid F \in \mathcal{F}, e \in F\}.$$

No caso do clutter $\mathcal{F}_2$, se G é o grafo considerado e α é uma aresta de G , temos que $\text{ext}(\mathcal{F}, \alpha)$ (resp. $\text{comp}(\mathcal{F}, \alpha)$) é o clutter dos caminhos $s - t$ no grafo obtido de G pela subdivisão (resp. duplicação) da aresta α .

É fácil ver que um resultado semelhante à proposição 1.6.1 vale para a extensão e a completção:

Proposição 1.6.2 *Seja $\mathcal{F}$ um clutter sobre E e $e, f \in E$. Então $\text{ext}(\text{ext}(\mathcal{F}, e), f) = \text{ext}(\text{ext}(\mathcal{F}, f), e)$, $\text{comp}(\text{comp}(\mathcal{F}, e), f) = \text{comp}(\text{comp}(\mathcal{F}, f), e)$ e $\text{ext}(\text{comp}(\mathcal{F}, e), f) = \text{comp}(\text{ext}(\mathcal{F}, f), e)$. $\square$*

Diante deste resultado, dado um vetor $w \in \mathbb{Z}_+^E$, podemos definir a **w -extensão** (**w -completação**) de $\mathcal{F}$, como sendo a operação de realizar $w_e - 1$ extensões (completações) de $\mathcal{F}$ pelo elemento e , para todo $w_e > 1$.

Denotaremos por $M(\mathcal{F})$ a **matriz de incidência** de um clutter $\mathcal{F}$, i.e., $M(\mathcal{F})$ é uma matriz $|\mathcal{F}| \times |E|$ onde cada linha é o vetor de incidência de um elemento de $\mathcal{F}$.

Capítulo 2

Bloqueadores de Clutters

Neste capítulo apresentamos o conceito de *bloqueador* de um clutter e os principais resultados teóricos sobre este assunto. Exemplificamos e descrevemos como esta teoria se aplica a vários problemas de otimização combinatória, como os pares caminhos & cortes, T -junções & T -cortes e coberturas de arestas & estrelas de vértices. Na última seção apresentamos o “problema do gargalo”, problema este que motivou o aparecimento dos conceitos de clutters e bloqueadores.

2.1 Definições e resultados básicos

Introduzimos no capítulo anterior objetos chamados clutters sobre os quais definiremos agora uma relação *bloqueadora*. Mostraremos que tal relação associa dois clutters de uma maneira única — em *pares de clutters bloqueadores* — e que além disso, podemos obter, a partir desta relação, resultados interessantes sobre o problema de packing em clutters.

Dado um clutter $\mathcal{F}$, define-se o clutter *bloqueador* de $\mathcal{F}$, denotado por $b(\mathcal{F})$, como sendo o clutter sobre E cujos membros H satisfazem as seguintes condições:

- (i) Intersecção: $H \cap F \neq \emptyset$, para todo $F \in \mathcal{F}$,
- (ii) Minimalidade: Se $H' \subset H$, então $H' \cap F = \emptyset$ para algum $F \in \mathcal{F}$.

Ou seja, $b(\mathcal{F})$ é o clutter que consiste de todos os subconjuntos minimais de E que têm intersecção não vazia com cada membro de $\mathcal{F}$. Notemos que $b(\emptyset) = \{\emptyset\}$ e $b(\{\emptyset\}) = \emptyset$.

Por exemplo, se $\mathcal{F} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$, podemos verificar facilmente que o seu

clutter bloqueador é $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$. Veja na figura abaixo a representação de $\mathcal{F}$ e $b(\mathcal{F})$.

Outro caso interessante: se $E = \{1, 2, \dots, 2k - 1\}$ e $\mathcal{F}$ é a família de todos os subconjuntos de E com k elementos, então $b(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$. Quanto aos exemplos de clutters mencionados no capítulo anterior,

$\mathcal{F}_1$ - família das coberturas minimais em um grafo e

$\mathcal{F}_2$ - família dos caminhos de um vértice s a um vértice t em um grafo (orientado ou não),

temos que $b(\mathcal{F}_1)$ é a família de todos os pares de vértices adjacentes e $b(\mathcal{F}_2)$ consiste de todos os conjuntos de cortes que separam s e t no grafo.

Apresentemos agora uma das propriedades características de clutters bloqueadores:

Proposição 2.1.1 *Para todo clutter $\mathcal{F}$ sobre E temos que*

$$b(b(\mathcal{F})) = \mathcal{F}.$$

Dem.: Se $\mathcal{F}$ é um clutter sobre E , denotaremos por $\mathcal{F}^+$ o conjunto $\{R \subseteq E \mid R \supseteq F \text{ para algum } F \in \mathcal{F}\}$. Se $\mathcal{F} = \emptyset$ ou $\mathcal{F} = \{\emptyset\}$, o resultado é claro. Senão, seja $F \in \mathcal{F}$. Pela definição de $b(\mathcal{F})$ temos que se $H \in b(\mathcal{F})$, então $F \cap H \neq \emptyset$. Assim $F \in b(b(\mathcal{F}))^+$.

Mostremos agora que os membros de $\mathcal{F}$ são os elementos minimais de $b(b(\mathcal{F}))^+$. Seja $T \subseteq E$, $T \notin \mathcal{F}^+$. Então para todo $G \in \mathcal{F}$ temos que $G \not\subseteq T$, e portanto, $G \cap (E - T) \neq \emptyset$. Logo, $E - T \in b(\mathcal{F})^+$ e, assim, $T \notin b(b(\mathcal{F}))^+$. Portanto, os elementos minimais de $b(b(\mathcal{F}))^+$ são justamente os membros de $\mathcal{F}$, ou seja, $\mathcal{F} = b(b(\mathcal{F}))$. $\square$

De posse deste resultado podemos definir que $\mathcal{H}$ e $\mathcal{F}$ são um par de clutters bloqueadores se $\mathcal{H} = b(\mathcal{F})$ ou $\mathcal{F} = b(\mathcal{H})$.

A demonstração da proposição 2.1.1 revela um fato interessante a respeito de um par de clutters bloqueadores:

Corolário 2.1.2 *Dois clutters $\mathcal{F}$ e $\mathcal{H}$ sobre E constituem um par de clutters bloqueadores se e somente se para todo $T \subseteq E$ ou existe um $F \in \mathcal{F}$ com $F \subseteq T$ ou um $H \in \mathcal{H}$ com $H \subseteq E - T$, mas não ambos.*

Dem.: Na demonstração da proposição 2.1.1 vimos que se $T \notin \mathcal{F}^+$, então $E - T \in b(\mathcal{F})^+$. Ambas as afirmativas não podem ser verdadeiras pela condição de intersecção dada na definição de clutter bloqueador. A recíproca é provada analogamente. $\square$

Proposição 2.1.3 *Se $\mathcal{F}$ é um clutter e $x \in A \in \mathcal{F}$, então existe $B \in b(\mathcal{F})$ tal que $A \cap B = \{x\}$.*

Dem.: Pela proposição 2.1.1 temos que $A \in b(b(\mathcal{F}))$. Logo $A - \{x\}$ não intercepta algum $B \in b(\mathcal{F})$. Mas como $A \cap B \neq \emptyset$ para todo $B \in b(\mathcal{F})$, segue que $A \cap B = \{x\}$. $\square$

A relação entre o clutter bloqueador e os menores de um clutter é dada pelo seguinte resultado:

Proposição 2.1.4 *Seja $\mathcal{F}$ um clutter sobre E e $Z \subseteq E$. Então*

$$\begin{aligned} b(\mathcal{F} \setminus Z) &= b(\mathcal{F})/Z \text{ e} \\ b(\mathcal{F}/Z) &= b(\mathcal{F}) \setminus Z. \end{aligned}$$

Dem.: Se $B' \in b(\mathcal{F} \setminus Z)$, então $B' \cup Z$ intercepta todo membro de $\mathcal{F}$ e contém, assim, algum membro B de $b(\mathcal{F})$. Mas então $B - Z$ (e portanto B') contém algum membro de $b(\mathcal{F})/Z$. Por outro lado, se $B'' \in b(\mathcal{F})/Z$ e $B'' = B - Z$, onde $B \in b(\mathcal{F})$, então B (e portanto B'') intercepta todo elemento de $\mathcal{F} \setminus Z$; logo B'' contém um elemento de $b(\mathcal{F} \setminus Z)$. Mas tanto $b(\mathcal{F} \setminus Z)$ como $b(\mathcal{F})/Z$ são clutters, e portanto, $b(\mathcal{F} \setminus Z) = b(\mathcal{F})/Z$. Aplicando este resultado a $b(\mathcal{F})$ e usando a proposição 2.1.1 completamos a demonstração. $\square$

Quanto às operações completação e extensão, temos um resultado análogo:

Proposição 2.1.5 *Seja $\mathcal{F}$ um clutter sobre E e $e \in E$. Então*

$$\begin{aligned} b(\text{ext}(\mathcal{F}, e)) &= \text{comp}(b(\mathcal{F}), e), \\ b(\text{comp}(\mathcal{F}, e)) &= \text{ext}(b(\mathcal{F}), e). \end{aligned}$$

Dem.: Se $B' \in b(\text{ext}(\mathcal{F}, e))$, então B' intercepta todo membro de $\text{ext}(\mathcal{F}, e)$. Agora, se $B' \in b(\mathcal{F})$, então $e' \notin B'$ e portanto, $B' \in \text{comp}(b(\mathcal{F}), e)$; se $B' \notin b(\mathcal{F})$, então $e' \in B'$ e portanto, $B' - e' + e \in b(\mathcal{F})$. Logo $B' \in \text{comp}(b(\mathcal{F}), e)$.

Por outro lado, se $B'' \in \text{comp}(b(\mathcal{F}), e)$, então ou $e' \in B''$, $B'' = B + e' - e$, onde $B \in b(\mathcal{F})$, ou $e' \notin B''$, e então $B'' \in b(\mathcal{F})$. Assim, temos que B'' intercepta todo elemento de $\text{ext}(\mathcal{F}, e)$, i.e., $B'' \in b(\text{ext}(\mathcal{F}, e))$.

Aplicando agora este resultado a $b(\mathcal{F})$ e a proposição 2.1.1, concluímos a segunda afirmação, demonstrando a proposição. $\square$

As seguintes propriedades foram grandes motivadoras do estudo de clutters bloqueadores, sendo depois estendidas para poliedros bloqueadores. A primeira aparece inicialmente em Lehman, 1970, e foi mais tarde generalizada em Seymour, 1990. A segunda surgiu de modo natural com o problema de fluxos em redes (cf. Ford & Fulkerson, 1968), acompanhando um dos exemplos mais clássicos de clutters bloqueadores: o $\mathcal{F}_2$, que mais tarde daria origem também à terceira definição.

Dizemos que um clutter $\mathcal{F}$ sobre E tem a propriedade **largura-comprimento**, ou **min-min**, se para todas funções $l, c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ temos

$$(1) \quad \min_{A \in \mathcal{F}} l(A) \min_{B \in b(\mathcal{F})} c(B) \leq \sum_{v \in E} l(v)c(v).$$

Dado um vetor $w \in \mathbb{R}_+^E$, denotaremos, supondo todos os problemas abaixo com solução viável,

$$(2) \quad \tau_w^*(\mathcal{F}) := \min\{wx \mid M(\mathcal{F})x \geq \mathbf{1}, x \geq 0\},$$

$$(3) \quad \tau_w(\mathcal{F}) := \min\{wx \mid M(\mathcal{F})x \geq \mathbf{1}, x \in (0, 1)^E\},$$

$$(4) \quad \nu_w^*(\mathcal{F}) := \max\{y\mathbf{1} \mid yM(\mathcal{F}) \leq w, y \geq 0\} \text{ e}$$

$$(5) \quad \nu_w(\mathcal{F}) := \max\{y\mathbf{1} \mid yM(\mathcal{F}) \leq w, y \in \mathbb{Z}_+^{\mathcal{F}}\}.$$

É claro que $\tau_w^*(\mathcal{F}) \leq \tau_w(\mathcal{F})$ e, pelo teorema da dualidade forte de programação linear, $\tau_w^*(\mathcal{F}) = \nu_w^*(\mathcal{F})$, ou seja, vale que $\nu_w(\mathcal{F}) \leq \nu_w^*(\mathcal{F}) = \tau_w^*(\mathcal{F}) \leq \tau_w(\mathcal{F})$.

Quando, para todo $w \in \mathbb{R}_+^E$, ocorrer $\tau_w^*(\mathcal{F}) = \tau_w(\mathcal{F})$ dizemos que $\mathcal{F}$ tem a propriedade (ou satisfaz a igualdade) **FMC** (**Fluxo-Máximo Corte-Mínimo**) ou **max-min**.

Notemos que se $\tau_w^*(\mathcal{F}) = \tau_w(\mathcal{F})$, então a solução ótima inteira x em (2) é o vetor de incidência de um conjunto em $b(\mathcal{F})$, ou seja, o conjunto de soluções de $M(\mathcal{F})x \geq \mathbf{1}, x \geq 0$,

é um poliedro inteiro, e assim, podemos descrever os elementos em $b(\mathcal{F})$ como vértices de um poliedro definido por um sistema linear com a matriz de coeficientes e lado direito inteiros. Como os valores em (4) e (2) são iguais, segue que o valor máximo de um w -packing de $\mathcal{F}$ (não necessariamente inteiro) é igual ao valor mínimo de w calculada nos elementos de $b(\mathcal{F})$. Ou seja, vale uma igualdade max-min (daí a razão do nome).

Se ocorrer $\nu_w(\mathcal{F}) = \tau_w(\mathcal{F})$ para todo $w \in \mathbb{Z}_+^E$, dizemos que $\mathcal{F}$ é **Mengeriano**. Notemos que neste caso temos que todo w -packing de $\mathcal{F}$ é inteiro.

A relação entre as duas primeiras propriedades foi descoberta por Lehman, 1970, que provou o seguinte resultado:

Teorema 2.1.6 *Um clutter tem a propriedade largura-comprimento (min-min) se e somente se ele tem a propriedade FMCM (max-min).*

Dem.: Seja E um conjunto finito, $\mathcal{F}$ um clutter sobre E e $w \in \mathbb{R}_+^E$.

$\mathcal{F}$ tem a propriedade largura-comprimento $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \tau_w(\mathcal{F}) \leq wl, \quad \forall l \in \mathbb{R}_+^E \text{ satisfazendo } \min_{A \in \mathcal{F}} l(A) = 1$$

$$\Leftrightarrow \tau_w(\mathcal{F}) \leq \tau_w^*(\mathcal{F})$$

$$\Leftrightarrow \tau_w(\mathcal{F}) = \tau_w^*(\mathcal{F}). \quad \square$$

Como a propriedade largura-comprimento é simétrica para um par de clutters bloqueadores, obtemos a seguinte caracterização:

Teorema 2.1.7 *Um clutter $\mathcal{F}$ tem a propriedade FMCM se e somente se o seu bloqueador também tem. $\square$*

Notemos aqui que com este resultado todas as observações feitas com relação ao sistema $M(\mathcal{F})x \geq \mathbf{1}$, $x \geq 0$, valem para o sistema $M(b(\mathcal{F}))x \geq \mathbf{1}$, $x \geq 0$, se $\mathcal{F}$ tem a propriedade FMCM.

Observação: Edmonds & Giles, em 1977, provaram o seguinte resultado, que relaciona funções objetivo reais e inteiras, quando consideramos poliedros racionais.

Teorema 2.1.8 *Seja $Ax \leq b$ um sistema de inequações lineares racionais. Então $\max\{cx \mid Ax \leq b\}$ é atingido por um vetor inteiro x para todo vetor c para o qual o máximo é finito se e somente se $\max\{cx \mid Ax \leq b\}$ é um número inteiro para todo vetor inteiro c para o qual o máximo é finito. $\square$*

A partir deste resultado podemos ver facilmente que todo clutter Mengeriano possui a propriedade FMCM. E, mais ainda, podemos concluir que $\mathcal{F}$ é Mengeriano se e somente se $\nu_w^*(\mathcal{F}) = \nu_w(\mathcal{F})$, para todo $w \in \mathbb{Z}_+^n$.

Porém a recíproca da primeira afirmação acima não é verdadeira. Tomemos como exemplo o clutter $Q_6 = \{\{1, 3, 5\}, \{1, 4, 6\}, \{2, 3, 6\}, \{2, 4, 5\}\}$, cuja matriz de incidência é

$$M(Q_6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pode-se verificar que todos os vértices do poliedro $\mathcal{A} = \{x \mid M(Q_6)x \geq 1, x \geq 0\}$ são inteiros. Logo, $\tau_w^*(Q_6) = \min\{wx \mid x \in \mathcal{A}\} = \tau_w(Q_6)$ e, assim, Q_6 tem a propriedade FMCM.

Porém, tomando-se $w = (2, 1, 2, 1, 2, 1)$, tem-se que $\nu_w(Q_6) = 2$ com solução ótima $y = (2, 0, 0, 0)$ e $\nu_w^*(Q_6) = 3 = \tau_w(Q_6)$ com solução ótima $y = (3/2, 1/2, 1/2, 1/2)$, mostrando que Q_6 não é Mengeriano.

O clutter Q_6 também nos mostra que uma afirmação análoga ao teorema 2.1.7 para a propriedade Mengeriana é falsa, pois a matriz de $b(Q_6)$ é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

que podemos facilmente constatar ser totalmente unimodular (podemos ver isto verificando que ela é a transposta da matriz de incidência de um grafo bipartido). Como consequência da total unimodularidade de $M(b(Q_6))$, temos que para todo vetor w inteiro não-negativo, $\{y \mid yM(b(Q_6)) \leq w, y \geq 0\}$ é inteiro e assim, $b(Q_6)$ é Mengeriano.

Apesar de nem todo clutter ser Mengeriano, Seymour, em 1977, mostrou que a propriedade de um clutter ser Mengeriano é hereditária para os seus menores:

Teorema 2.1.9 *Se $\mathcal{F}$ é um clutter sobre E Mengeriano, então todos os seus menores também o são.*

Dem.: Seja $\mathcal{F}'$ um menor de $\mathcal{F}$ com forma padrão $\mathcal{F}' = (\mathcal{F} \setminus Z_1)/Z_2$. Podemos assumir que $\mathcal{F}' \neq \emptyset$. Seja $w' : E \rightarrow \mathbb{Z}_+$; precisamos mostrar que $\tau_{w'}(\mathcal{F}') = \nu_{w'}(\mathcal{F}')$. Seja $\tau = \tau_{w'}(\mathcal{F}')$. Definamos $w : E \rightarrow \mathbb{Z}_+$ por

$$w(x) = \begin{cases} w'(x), & x \in \bigcup \mathcal{F}' \\ 0, & x \in Z_1 \\ \tau, & x \in Z_2. \end{cases}$$

Se $B \in b(\mathcal{F})$ e $B \cap Z_2 \neq \emptyset$, então $\sum_{x \in B} w(x) \geq \tau$. Por outro lado, se $B \cap Z_2 = \emptyset$, então B inclui um elemento B' de $b(\mathcal{F}')$, e

$$w(B) \geq w'(B') \geq \tau.$$

E ainda, existe $B \in b(\mathcal{F})$ tal que $B \cap Z_2 = \emptyset$ e $\sum_{x \in B} w(x) = \tau$ e, portanto, $\tau_w(\mathcal{F}) = \tau$. Como $\mathcal{F}$ é Mengeriano, i.e., $\nu_w(\mathcal{F}) = \tau_w(\mathcal{F}) = \tau$, então existem $A_1, \dots, A_\tau \in \mathcal{F}$ tais que para cada $x \in E$, temos que $x \in A_i$ para no máximo $w(x)$ valores de i . Para $x \in Z_1$, como $w(x) = 0$, resulta que nenhum A_i intercepta Z_1 e portanto cada A_i inclui um elemento de $\mathcal{F}'$. Segue então que $\nu_{w'}(\mathcal{F}') = \tau_{w'}(\mathcal{F}')$ e $\mathcal{F}'$ é Mengeriano. $\square$

As operações de completção e extensão de um clutter $\mathcal{F}$ por um elemento e também preservam as propriedades de $\mathcal{F}$. Para ver isto, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.1.10 *Se um clutter $\mathcal{F}$ sobre E é Mengeriano, então, dado $e \in E$, os clutters $\text{ext}(\mathcal{F}, e)$ e $\text{comp}(\mathcal{F}, e)$ também são Mengerianos.*

Dem.: Dado $e \in E$, $w' \in \mathbb{Z}_+^{E+e'}$, queremos mostrar que $\tau_{w'}(\text{ext}(\mathcal{F}, e)) = \nu_{w'}(\text{ext}(\mathcal{F}, e))$.

Seja $\tau = \tau_{w'}(\text{ext}(\mathcal{F}, e))$. Definamos $w \in \mathbb{Z}_+^E$ como:

$$w(x) = \begin{cases} w'(x), & x \neq e, \\ \min\{w'(e), w'(e')\}, & x = e. \end{cases}$$

Para $B \in b(\mathcal{F})$, se $e \notin B$, temos que $w(B) = w'(B) \geq \tau$; e se $e \in B$, então $w(B) = \min\{w'(B), w'(B - e + e')\} \geq \tau$. Seja agora $B^* \in b(\text{ext}(\mathcal{F}, e))$ tal que $w'(B^*) = \tau$. Como $B^* \in b(\text{ext}(\mathcal{F}, e))$, então ou $B^* \in b(\mathcal{F})$, e então $w(B^*) = \tau$, ou existe $B \in b(\mathcal{F})$ tal que $B^* = B - e + e'$, e então $w(B) = \min\{w'(B^*), w'(B^* + e - e')\} = w'(B^*) = \tau$. Portanto $\tau_w(\mathcal{F}) = \tau$.

Como $\mathcal{F}$ é Mengeriano, então existem $A_1, \dots, A_\tau \in \mathcal{F}$ tais que, para cada $x \in E$, temos que $x \in A_i$ para no máximo $w(x)$ valores de i . Tomando

$$A'_i = \begin{cases} A_i, & \text{se } e \notin A_i, \\ A_i + e', & \text{se } e \in A_i, \end{cases}$$

temos que $A'_i \in b(\text{ext}(\mathcal{F}, e))$ e como $w(e) = \min\{w'(e), w'(e')\}$, então, para cada $x \in E$, temos que $x \in A'_i$ para no máximo $w'(x)$ valores de i . Logo, segue que $\nu_{w'}(\text{ext}(\mathcal{F}, e)) = \tau_{w'}(\text{ext}(\mathcal{F}, e))$.

A demonstração de que $\text{comp}(\mathcal{F}, e)$ é Mengeriano é semelhante. $\square$

Como corolário desta proposição temos que

Corolário 2.1.11 *Dado um clutter $\mathcal{F}$ Mengeriano e um vetor w inteiro não-negativo, temos que os clutters obtidos por w -extensão e w -completação de $\mathcal{F}$ são Mengerianos. $\square$*

Podemos provar de modo análogo resultados sobre a propriedade FMCM. Isto é:

Teorema 2.1.12 *Se um clutter $\mathcal{F}$ tem a propriedade FMCM, então todos os seus menores também têm essa propriedade; e dado um vetor w inteiro não-negativo, os clutters obtidos por w -completação e w -extensão também têm essa propriedade. $\square$*

Ou seja, vemos que as operações de contração, eliminação, extensão e completção preservam as propriedades de ser Mengeriano e a propriedade FMCM de um clutter.

Tendo em vista o teorema 2.1.9, uma pergunta natural que surge é quanto à possibilidade de caracterizar clutters Mengerianos através de menores proibidos. Esta questão é tratada por Seymour, em 1977, que apresenta argumentos mostrando que uma tal abordagem seria pouco recomendável (por serem tais menores numerosos e não levarem ao cerne da questão).

Podemos estender ainda a definição da propriedade Mengeriana um pouco mais. Denotamos então

$$\tau_w^k(\mathcal{F}) := \min\{kwx \mid M(\mathcal{F})x \geq \mathbf{1}, x \in (0, 1)^E\} \text{ e}$$

$$\nu_w^k(\mathcal{F}) := \max\{y\mathbf{1} \mid yM(\mathcal{F}) \leq kw, y \in \mathbb{Z}_+^{\mathcal{F}}\}.$$

Diremos que um clutter é k -Mengeriano caso

$$\tau_w^k(\mathcal{F}) = \nu_w^k(\mathcal{F}), \quad \forall w \in \mathbb{Z}_+^E.$$

É claro que se $k = 1$ recaímos na definição de clutter Mengeriano. Existem conjecturas de que as afirmações que foram feitas para clutters Mengerianos valem para clutters 2-Mengerianos, 3-Mengerianos, etc.

Já vimos que nem todo clutter é Mengeriano — é o caso do clutter Q_6 . Mas será que todo clutter possui a propriedade FMCM? O próximo (contra-) exemplo mostra que também essa propriedade não é natural em pares de clutters bloqueadores.

Seja $\mathcal{F}$ o clutter representado pela seguinte matriz:

$$M(\mathcal{F}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Notemos que $\mathcal{F} = b(\mathcal{F})$.) Tomando-se $w = (1, 1, 1)$, tem-se que $\tau_w^*(\mathcal{F}) = 3/2$ e $\tau_w(\mathcal{F}) = 2$ ($\tau_w^*(\mathcal{F}) = 3/2$ é atingido com $x = (1/2, 1/2, 1/2)$).

Nas próximas seções veremos mais exemplos de clutters Mengerianos, além de um outro clutter que tem a propriedade FMCM e não é Mengeriano, mas é 2-Mengeriano.

2.2 Caminhos entre dois vértices

Estudemos com mais detalhe o clutter $\mathcal{F}_2$ que, como mencionamos, deu origem à definição da propriedade FMCM (normalmente em um grafo orientado com pesos w nas arestas o vetor y em (4) é chamado de fluxo) e a definição de clutter Mengeriano. Consideremos primeiramente o caso em que o grafo é orientado. O fato de que o clutter $\mathcal{F}_2$ é Mengeriano — e portanto possui a propriedade FMCM — segue do conhecido

Teorema 2.2.1 (de Menger (1927)) *Seja D um grafo orientado e sejam $s, t \in VD$, $s \neq t$. Então o número máximo de caminhos orientados de s a t disjuntos nas arestas é igual ao tamanho mínimo de um corte que separa s e t .*

Dem.: (Todos os caminhos aqui considerados são orientados.) É fácil ver que o número máximo de caminhos $s - t$ disjuntos nas arestas não é maior do que o tamanho mínimo de um corte $s - t$. Para provar a desigualdade contrária descreveremos um procedimento que, dados k caminhos $s - t$ disjuntos nas arestas, ou encontra $k + 1$ caminhos $s - t$ disjuntos nas arestas, ou encontra um corte $s - t$ de tamanho k .

Assim, sejam $A_1, \dots, A_k$ os conjuntos de arestas dos dados k caminhos $s - t$ disjuntos nas arestas. Tome D e reverte a orientação das arestas em $A_1 \cup \dots \cup A_k$, construindo o grafo orientado D' . Agora existem duas possibilidades:

(i) Existe um caminho $s - t$ em D' . Seja A_0 o conjunto das arestas α em D tal que α ou o seu reverso ocorre neste caminho. Então podemos facilmente verificar que a diferença

simétrica $(A_1 \cup \dots \cup A_k) \triangle A_0$ é a união disjunta de $k + 1$ caminhos $s - t$ disjuntos nas arestas.

(ii) Não existe nenhum caminho $s - t$ em D' . Seja V' o conjunto dos vértices v a partir dos quais existe um caminho até t em D' . É claro que $s \notin V'$ e $t \in V'$. Nenhuma aresta de D' entra em V' , logo nenhuma aresta em $A_1 \cup \dots \cup A_k$ sai de V' em D e nenhuma aresta em $AD - (A_1 \cup \dots \cup A_k)$ entra em V' em D . Portanto, em D exatamente uma aresta em cada um dos A_i entra em V' , pois senão, existiriam duas arestas em $\delta(\overline{V'})$ pertencentes a um mesmo conjunto A_i . Mas neste caso, em D existiria uma aresta α ligando V' a $\overline{V'}$, e portanto em D' o reverso de α estaria entrando em V' , contrariando a definição de V' . Como existem k caminhos $s - t$ disjuntos nas arestas, todo corte $s - t$ tem tamanho pelo menos k . Portanto $|\delta(\overline{V'})| = k$. $\square$

Pode-se provar também o mesmo resultado para grafos não orientados, i.e., que

Teorema 2.2.2 *se G é um grafo e $s, t \in VG$, $s \neq t$, então o número máximo de caminhos $s - t$ disjuntos nas arestas é igual ao tamanho mínimo de um corte $s - t$. $\square$*

Estes teoremas, no nosso caso, equivalem a tomar $w = 1$ ao calcularmos $\tau_w(\mathcal{F})$ e $\nu_w(\mathcal{F})$. Para obtermos o resultado para $w \in \mathbb{Z}_+^{AD}$ (ou $w \in \mathbb{Z}_+^{AG}$), basta construirmos a partir do grafo original um novo grafo, onde cada aresta α tem multiplicidade $w(\alpha)$; ao aplicarmos o teorema a este novo grafo obtemos o resultado desejado. A demonstração desta última afirmação demanda um pouco de trabalho; no entanto, veremos no capítulo 4 resultados que tornam geral este procedimento de “duplicar arestas”, associando-o à relação bloqueadora.

O programa dado em (4), para este caso específico, é o problema de encontrar um w -packing máximo de caminhos orientado $s - t$ em D . Este problema, na literatura, é conhecido como o problema de se encontrar em D um fluxo de s a t de valor máximo em D , sujeito às capacidades w . Assim, com os resultados que conseguimos aqui, é fácil concluir que

Se D é um grafo orientado, $s, t \in VD$, e $w \in \mathbb{R}_+^n$ é um vetor de capacidades, então o valor de um fluxo máximo de s a t (sujeito a w) é igual ao valor mínimo de w calculado em um corte.

Com relação à propriedade largura-comprimento, se tomarmos $l = c = 1$ na desigualdade (1) da definição, obteremos um resultado bastante simples:

o produto do comprimento mínimo de um caminho (orientado) $s - t$ pela cardinalidade mínima de um corte $s - t$ é menor ou igual ao número total de arestas do grafo.

Tomando $l = c \in \mathbb{Z}_+^E$ temos que

o produto do custo mínimo de um corte $s - t$ pelo custo mínimo de um caminho (orientado) $s - t$ é menor ou igual à soma dos quadrados dos custos de todas as arestas.

2.3 Coberturas de arestas em um grafo bipartido

Este segundo exemplo trata de coberturas de arestas em um grafo bipartido sem vértices isolados. Seja $\mathcal{F}$ o clutter de todas as coberturas minimais de arestas em um grafo bipartido G com r vértices em um lado, s vértices no outro lado e n arestas. (Como iremos considerar uma função arbitrária $w \geq 0$ definida sobre as arestas, poderíamos supor sem perda de generalidade que o grafo é bipartido completo com $r \times s$ arestas, i.e., cada um dos vértices de um lado é adjacente a todo vértice do outro.)

O clutter bloqueador de $\mathcal{F}$ é simplesmente o clutter onde cada elemento é a estrela de um vértice, i.e., $M(b(\mathcal{F}))$ é a matriz de incidência do grafo bipartido G .

Consideremos então $\tau_w^*(b(\mathcal{F})) = \min\{wx \mid M(b(\mathcal{F}))x \geq \mathbf{1}, x \geq 0\}$. É bastante conhecido o fato de que $M(b(\mathcal{F}))$ é totalmente unimodular e assim todos os vértices de $\mathcal{A} = \{M(b(\mathcal{F}))x \geq \mathbf{1}, x \geq 0\}$ são vetores inteiros. Logo $\tau_w^*(b(\mathcal{F})) = \tau_w(b(\mathcal{F}))$ e o clutter $b(\mathcal{F})$ tem a propriedade FMCM, o que, pelo teorema 2.1.7, implica que o clutter $\mathcal{F}$ também tem.

Mais ainda, novamente pelo fato de que $M(b(\mathcal{F}))$ é totalmente unimodular, sabemos que se w dado for um vetor inteiro positivo, então $\mathcal{A}_w = \{yM(b(\mathcal{F})) \leq w, y \geq 0\}$ também tem vértices inteiros. Assim obtemos que $\nu_w^*(b(\mathcal{F})) = \max\{y\mathbf{1}, y \in \mathcal{A}\} = \nu_w(b(\mathcal{F}))$ e portanto $b(\mathcal{F})$ é Mengeriano. Temos então como corolário desta propriedade, tomando $w = \mathbf{1}$ em $\nu_w(b(\mathcal{F}))$:

Teorema 2.3.1 (da cobertura de arestas de König (1932)) *O tamanho máximo de um conjunto estável (ou seja, um packing de estrelas de vértices) é igual ao tamanho mínimo de uma cobertura de arestas em um grafo bipartido. $\square$*

Para mostrar que $\mathcal{F}$ também é Mengeriano necessitaremos de novas definições e teoremas auxiliares.

Para um grafo G não orientado seja:

$\Delta(G) :=$ grau máximo de $G = \max\{g(v) \mid v \in VG\};$

$g(G) :=$ grau mínimo de $G = \min\{g(v) \mid v \in VG\};$

$\chi'(G) :=$ número aresta-cromático de $G =$ número mínimo de cores necessárias para colorir as arestas de G de modo que quaisquer duas arestas adjacentes tenham cores distintas. (Equivalentemente, $\chi'(G)$ é o número mínimo de emparelhamentos cuja a união é igual a AG .)

O primeiro resultado é bastante conhecido:

Teorema 2.3.2 (da coloração de arestas de König (1916)) *O número aresta-cromático de um grafo bipartido G é igual ao seu grau máximo, i.e., $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

Dem.: Notemos inicialmente que o teorema é fácil se $\Delta(G) \leq 2$. Neste caso o grafo consiste de caminhos disjuntos nos vértices e circuitos pares.

Se $\Delta(G) \geq 3$, colorimos o maior número possível de arestas de G com $\Delta(G)$ cores, sem dar cores iguais a arestas adjacentes. Suponha que a aresta $\alpha = \{u, v\}$ não foi colorida. Pelo menos uma cor, digamos vermelha, não ocorre entre as cores dadas às arestas incidentes a u . Do mesmo modo existe uma cor, digamos azul, que não ocorre nas arestas incidentes a v . Claramente vermelho $\neq$ azul, senão poderíamos colorir a aresta α de vermelho. Seja G' o subgrafo de G formado pelas arestas azuis e vermelhas e mais a aresta α . Temos que $\Delta(G') \leq 2$ e, assim, $\chi'(G') \leq 2$. Logo as arestas que ocorrem em G' podem ser recoloridas de azul e vermelho e deste modo podemos colorir mais arestas do que antes. $\square$

Como corolário deste teorema temos:

Teorema 2.3.3 (de Gupta (1967, 1978)) *Seja G um grafo bipartido. Então o número máximo de coberturas de arestas duas a duas disjuntas é igual ao grau mínimo, $g(G)$, de G .*

Dem.: Podemos construir a partir de G um grafo bipartido H cujos vértices têm grau ou $g(G)$ ou 1, aplicando repetidamente o seguinte procedimento de redistribuição: escolhemos um vértice v com grau maior do que $g(G)$, adicionamos um novo vértice v' e

substituímos uma aresta $\{v, w\}$ pela nova aresta $\{v', w\}$ (todas as outras arestas incidentes a v permanecem intocadas neste passo). Assim as arestas do grafo H final estão em correspondência um a um com as arestas de G .

Como H tem grau máximo igual a $g(G)$, pelo teorema anterior as arestas de H podem ser coloridas com $g(G)$ cores. Segue então que em qualquer vértice de H com grau $g(G)$ incidem todas as $g(G)$ cores. No grafo G original isto corresponde a $g(G)$ coberturas de arestas duas a duas disjuntas nas arestas, como desejado. $\square$

O Teorema de Gupta nos diz que dado um grafo bipartido G , tomando $w = 1$, obtemos a igualdade $\tau_w(\mathcal{F}) = \nu_w(\mathcal{F})$.

Para conseguirmos o resultado para qualquer $w \geq 0$ inteiro procedemos do seguinte modo: construímos a partir de G um grafo H substituindo cada aresta $\alpha = \{u, v\}$ de G com peso $w_\alpha > 1$ por w_α arestas $\{u, v\}$ com peso 1. Um w -packing de coberturas de arestas de tamanho máximo em G corresponde a um packing de tamanho máximo em H , dada a construção de H . Ao aplicarmos o Teorema de Gupta ao grafo H final temos que este número máximo de coberturas disjuntas nas arestas em H é igual a $g(H)$. Mas $g(H) = \min_{u \in V} \{\sum_{v \in V} (w_\alpha : \alpha = \{u, v\})\}$, novamente pela construção de H . Seja $\bar{v} \in V$ tal que $g_H(\bar{v}) = g(H)$, então a soma dos pesos das arestas de $\bar{v}$ em G é $g(H)$, e a partir das $g(H)$ coberturas em H podemos obter um w -packing de coberturas em G de tamanho $g(H)$ (veremos no capítulo 4 um resultado que generaliza este tipo de procedimento), estabelecendo a igualdade desejada.

Tomando então $l = c \in \mathbb{R}_+^n$ na desigualdade min-min, obtemos que

o produto do peso mínimo de uma estrela de um vértice pelo peso mínimo de uma cobertura de arestas é menor ou igual à soma dos quadrados de todos os pesos.

Tomando $l = c = 1$, obtemos que

o produto da cardinalidade mínima de uma estrela de um vértice pela cardinalidade mínima de uma cobertura de arestas é menor ou igual ao número de arestas do grafo.

E se tomarmos $l = 1, c \in \mathbb{Z}_+^E$, obtemos que

o produto da cardinalidade mínima de uma estrela de um vértice pelo peso mínimo de uma cobertura de arestas é menor ou igual à soma total dos pesos.

2.4 T -junções e T -cortes

Daremos agora um exemplo não muito conhecido, mas bastante interessante. O clutter a ser estudado apresenta, assim como o já conhecido Q_6 , a particularidade de possuir a propriedade FMCM e não ser Mengeriano.

Seja G um grafo e $T \subseteq VG$, com $|T|$ par. Um conjunto $H \subset AG$ é dito ser uma T -junção se

$$g_H(x) \cong \begin{cases} 1 \pmod{2}, & \text{se } x \in T, \\ 0 \pmod{2}, & \text{se } x \in VG - T. \end{cases}$$

Veja na figura abaixo alguns exemplos. Em cada desenho as arestas em H estão em negrito.

Até o final desta seção assumiremos que T é um subconjunto de VG , com $|T|$ par, e chamaremos T de conjunto **par**. Ainda com relação a T , dado $S \subseteq VG$, dizemos que $C = \delta(S)$ é um T -**corte** se $S \cap T$ é ímpar. Os conjuntos S e $VG - S$ são ditos as **bordas** de C . Obviamente a estrela de um vértice em T é um T -corte – tais T -cortes serão chamados **triviais**; todos os outros cortes serão chamados **não-triviais**. Diremos também que um VG -corte é um corte ímpar.

Por exemplo, seja $T = \{u, v\}$. Então os T -cortes são justamente os cortes separando u e v , e as T -junções minimais são precisamente os caminhos entre u e v . Se $T = VG$, as T -junções de tamanho $1/2|VG|$ são os emparelhamentos perfeitos. (O problema do “carteiro chinês” também pode ser reduzido a encontrar uma T -junção, vide Edmonds & Johnson, 1973.)

Lema 2.4.1 *Seja C um T -corte e J uma T -junção. Então $|J \cap C|$ é ímpar.*

Dem.: A soma dos graus de J em uma borda S de C contém um número ímpar de termos ímpares, logo a soma é ímpar. Esta soma é igual a $|J \cap C|$ mais duas vezes o número de arestas em J induzidas por S . Assim $|J \cap C|$ deve ser ímpar. $\square$

Lema 2.4.2 *Se G é um grafo conexo, então para cada subconjunto par $T \subseteq VG$ existe uma T -junção em G .*

Dem.: Seja $T = \{t_1, \dots, t_{2k}\}$ e seja P_i o caminho entre t_i e t_{k+i} ($i = 1, \dots, k$). Seja J a diferença simétrica $P_1 \Delta \dots \Delta P_k$. Então J é uma T -junção. $\square$

Proposição 2.4.3 *Um conjunto de arestas intercepta toda T -junção se e somente se ele contém um T -corte. Um conjunto de arestas intercepta todo T -corte se e somente se ele contém uma T -junção.*

Dem.: A parte “se” da primeira afirmação é trivial pelo lema 2.4.1

Seja então X um conjunto de arestas que intercepta toda T -junção. Queremos mostrar que X contém um T -corte. Sejam $G_1, \dots, G_k$ as componentes conexas de $G - X$. Não pode ocorrer que $|VG_i \cap T|$ seja par para todo i , pois senão, pelo lema 2.4.2, cada G_i conteria uma $T \cap VG_i$ -junção J_i , e assim, $J = J_1 \cup \dots \cup J_k$ seria uma T -junção em $G - X$, contradizendo a escolha de X . Mas se $|T \cap VG_i|$ é ímpar para algum i , então o corte determinado por VG_i é um T -corte contido em X .

A segunda afirmação decorre da primeira. $\square$

Esta proposição nos dá o seguinte resultado:

Proposição 2.4.4 *Para um grafo G e um conjunto par T de VG , o bloqueador do clutter $\mathcal{F}_T$ dos T -cortes minimais é o clutter das T -junções minimais.* $\square$

Mostremos agora que o par T -junções & T -cortes possui a propriedade FMCM. Seguiremos Lovász & Plummer, 1986.

Precisaremos fazer algumas manipulações com pares (G, T) , onde T é qualquer subconjunto par de VG . Primeiramente, se subdividirmos uma aresta de G , assumiremos que o novo vértice não está em T . Ao contrairmos do modo usual uma aresta $\{x, y\}$ do grafo G obteremos um grafo G' e o novo vértice estará no novo conjunto T' se e somente se exatamente um de x ou y pertence a T . Diremos que o par (G', T') se origina do par (G, T) por uma **contração** de $\{x, y\}$. É imediato verificar que T' é par e que os T' -cortes de G' correspondem de uma maneira natural àqueles T -cortes de G que não contêm a aresta $\{x, y\}$.

O comportamento das T -junções sob contração é um pouco mais complicado. Se J é uma T -junção, então a sua imagem pela contração de $\{x, y\}$ é uma T' -junção. Por outro lado, se J' é uma T' -junção em G' , as arestas em J' formam um subgrafo de G que satisfaz as restrições de grau das T -junções, com a possível exceção dos vértices x e y . Mas, ou ambos x e y satisfazem as restrições, ou ambos violam-nas, por razões de paridade. Assim ou J' ou $J' + \{x, y\}$ é uma T -junção.

Dois cortes $C_1 = \delta(X_1)$ e $C_2 = \delta(X_2)$ são ditos **cruzados** se cada um dos quatro conjuntos $X_1 \cap X_2, X_1 - X_2, X_2 - X_1$ e $V - X_1 - X_2$ é não vazio. O próximo procedimento pode ser aplicado a cortes cruzados.

Procedimento descruzador Sejam C_1 e C_2 dois T -cortes cruzados. Seja S_1 uma das bordas de C_1 . Então $|S_1 \cap T|$ é ímpar por definição e C_2 divide S_1 em dois conjuntos, um deles interceptando T em um conjunto de cardinalidade ímpar. Seja S_2 a borda de C_2 para a qual $|S_1 \cap S_2 \cap T|$ é ímpar. Segue então que $|(S_1 \cup S_2) \cap T|$ também é ímpar. Sejam C' e C'' os T -cortes determinados pelos conjuntos $S_1 \cap S_2$ e $S_1 \cup S_2$.

Além de serem não-cruzados, o par C' e C'' tem a importante propriedade de que toda aresta de G pertence a no máximo tantos dos cortes C', C'' como aos cortes C_1, C_2 . Mais precisamente, as arestas com um extremo em $S_1 - S_2$ e outro em $S_2 - S_1$ pertencem a ambos C_1 e C_2 , mas não a C' ou C'' . Qualquer outra aresta está contida no mesmo número dos cortes C_1, C_2 como dos cortes C', C'' .

Note que se um corte C_3 cruza um entre C_1 e C_2 então ele também cruza pelo menos um entre C' e C'' e se C_3 cruza tanto C' como C'' , então ele cruza ambos C_1 e C_2 . A grosso modo, o descruzamento não introduz novos cruzamentos com outros cortes.

Veremos agora algumas notações que nos auxiliarão nas demonstrações. Denotaremos por $\nu_k(G, T)$ o tamanho máximo de um k -packing de T -cortes. Para facilitar, denotaremos $\nu_1(G, T)$ simplesmente por $\nu(G, T)$, e $\tau(G, T)$ será o tamanho mínimo de uma T -junção.

O próximo teorema é devido a Edmonds & Johnson, 1973. O caso particular de T -junções para $T = VG$, G conexo, $|VG|$ foi pela primeira vez demonstrado por Lovász. Na verdade, Lovász provou este e também o teorema de Lucchesi-Younger (a ser visto na próxima seção) usando essencialmente a mesma técnica. Verificou-se então que Edmonds e Johnson já tinham feito toda a lição de casa, mas não haviam enunciado o teorema. É mais ou menos como se eles tivessem amassado uva e deixado fermentar o caldo, ao passo que Lovász reconheceu a qualidade do vinho...

Teorema 2.4.5 *Se G é um grafo e T um subconjunto par de VG , então $\tau(G, T) = \nu_2(G, T)/2$.*

Uma relação um pouco mais forte foi provada para grafos bipartidos por Seymour, 1981a, a partir da qual o teorema 2.4.5 pode ser facilmente deduzido.

Teorema 2.4.6 *Se G é um grafo bipartido e T um subconjunto par de VG , então $\tau(G, T) = \nu(G, T)$.*

A demonstração deste teorema, por sua vez, depende do seguinte resultado.

Lema 2.4.7 *Se G é um grafo bipartido e T um subconjunto par de VG , então $\nu_2(G, T) = 2\nu(G, T)$.*

Dem.: Usaremos indução no número de vértices de G . A afirmação é trivial se este número é 0 ou 1.

Seja $\mathcal{L}$ um 2-packing máximo de T -cortes em G e suponhamos que a hipótese de indução é verdadeira para todo grafo com menos vértices que G . Através de descruzamentos sucessivos de pares de cortes em $\mathcal{L}$, podemos substituir $\mathcal{L}$ por outro 2-packing $\mathcal{L}'$ de mesmo tamanho no qual não existem cortes cruzados.

Seja $v \in VG$ e para cada corte C em $\mathcal{L}'$ denotemos por $S(C)$ a borda de C que não contém v . Um corte C tal que $|S(C)| = 1$ será denominado um **corte-estrela**. Note que todo corte-estrela é trivial, mas a recíproca não é verdadeira, já que a estrela de v não é necessariamente um corte-estrela.

I. Suponhamos que existe um corte-estrela C que ocorre duas vezes na lista $\mathcal{L}'$. Então contraindo as arestas deste corte-estrela, apenas dois cortes de $\mathcal{L}'$ são destruídos. Assim o par (G', T') resultante tem $\nu_2(G', T') \geq \nu_2(G, T) - 2$. Pela hipótese de indução, $\nu_2(G', T') = 2\nu(G', T')$. Mais ainda, todo packing de T' -cortes em G' corresponde a um packing de T -cortes em G e esse packing pode ser aumentado com o corte-estrela C . Assim

$$\nu_2(G, T) \leq \nu_2(G', T') + 2 = 2\nu(G', T') + 2 \leq 2\nu(G, T).$$

Como a desigualdade contrária é trivial, o lema está provado para o caso I.

II. Suponha que todo corte em $\mathcal{L}'$ é um corte-estrela. Seja (A, B) uma 2-coloração de vértices de G e suponhamos, sem perda de generalidade, que $|A \cap T| \geq |B \cap T|$, de modo que $|A \cap T| \geq |T|/2$. Os cortes-estrelas determinados pelos vértices em $A \cap T$ são disjuntos nas arestas e assim

$$\nu(G, T) \geq |A \cap T| \geq |T|/2 \geq |\mathcal{L}'|/2 = \nu_2(G, T)/2.$$

Isto prova o lema para este caso.

Podemos então assumir que existe um corte $C \in \mathcal{L}'$ que não é um corte-estrela. Escolha um tal C para o qual a cardinalidade de $S(C)$ é mínima.

IIIa. Suponha que todo vértice de $T \cap S(C)$ é centro de um corte-estrela em $\mathcal{L}'$. Sem perda de generalidade podemos assumir que $|A \cap T \cap S(C)| \geq |B \cap T \cap S(C)|$, de modo que $|A \cap T \cap S(C)| \geq |T \cap S(C)|/2$. Como C é um T -corte, então $|T \cap S(C)|$ é ímpar e segue então que $|A \cap T \cap S(C)| \geq (|T \cap S(C)| + 1)/2$. Remova de $\mathcal{L}'$ o corte C , assim como todos os cortes C' tais que $S(C') \subset S(C)$. Pela escolha de C , todo C' assim é um corte-estrela e claramente o seu centro deve pertencer a T . Ainda, tais cortes C' ocorrem na lista $\mathcal{L}'$ exatamente uma vez, por hipótese. Portanto removemos exatamente $|T \cap S(C)| + 1$ cortes de $\mathcal{L}'$. Adicione à coleção $\mathcal{L}'$ as estrelas dos vértices em $A \cap T \cap S(C)$, cada qual com multiplicidade dois. Isto resulta em outro 2-packing, cujo tamanho é

$$|\mathcal{L}'| - (|T \cap S(C)| + 1) + 2|A \cap T \cap S(C)| \geq |\mathcal{L}'|.$$

Logo recaímos no caso I - e para o caso IIIa o lema está provado.

IIIb. Podemos supor, finalmente, que existe um vértice $u \in T \cap S(C)$ cuja estrela não está em $\mathcal{L}'$. Remova C de $\mathcal{L}'$, mas adicione a estrela de u . Isto resulta em um 2-packing de mesmo tamanho, também sem cortes cruzados, que contém mais cortes-estrelas que $\mathcal{L}'$. Repetindo este procedimento se necessário, devemos chegar ou ao caso II ou ao caso IIIa. $\square$

Corolário 2.4.8 *Se G é um grafo bipartido e T é um subconjunto par de VG , então para todo $k \geq 1$, $\nu_k(G, T) = k\nu(G, T)$.*

Dem.: Pelo lema 2.4.7, $\nu_2(G, T) = 2\nu(G, T)$. Aplicando este lema à subdivisão de G obtemos $\nu_4 = 2\nu_2(G, T)$. Continuando de modo análogo obtemos que

$$\nu_{2^m}(G, T) = 2^m \nu(G, T) \text{ para todo } m \geq 0.$$

Por outro lado, se $k \geq 1$ é arbitrário, seja então m tal que $2^m > k$. Usando repetidamente a desigualdade trivial $\nu_{a+b} \geq \nu_a + \nu_b$, obtemos

$$\begin{aligned} \nu_{2^m}(G, T) &\geq \nu_{2^m-k}(G, T) + \nu_k(G, T) \\ &\geq (2^m - k)\nu(G, T) + k\nu(G, T) \\ &= 2^m \nu(G, T). \end{aligned}$$

Mas sabemos que os primeiro e último valores são iguais. Logo devemos ter igualdade nas desigualdades intermediárias e, em particular, $\nu_k(G, T) = k\nu(G, T)$. $\square$

Este lema implica que os teoremas 2.4.5 e 2.4.6 são na verdade equivalentes e, deste modo, seria suficiente provar apenas o teorema 2.4.5. Daremos entretanto uma demonstração do teorema 2.4.6 que utiliza o corolário 2.4.8.

Dem.: (do Teorema 2.4.6)

Usaremos indução em $|AG|$. Se $AG = \emptyset$, então a afirmação é óbvia. Podemos assumir que nenhum *T*-corte é vazio, pois neste caso $\nu(G, T) = \tau(G, T) = \infty$ e então a afirmação vale trivialmente.

A desigualdade $\nu(G, T) \leq \tau(G, T)$ é uma consequência trivial do lema 2.4.7 e então é suficiente mostrar que G contém uma *T*-junção com não mais que $\nu := \nu(G, T)$ arestas.

Se G tem uma aresta α tal que $\nu(G - \alpha, T) = \nu(G, T)$, então pela hipótese de indução, $G - \alpha$ possui uma *T*-junção com ν arestas e esta *T*-junção também é uma *T*-junção em G . Podemos assim assumir que $\nu(G - \alpha, T) > \nu$ para toda aresta α .

Se G possui um *T*-corte C tal que $|C| = 1$, então contraímos a aresta em C . O par resultante (G', T') tem $\nu(G', T') \leq \nu - 1$, já que todo packing de *T*-cortes em G' pode ser aumentado com C . Assim, pela hipótese de indução, G' contém uma *T'*-junção de tamanho menor ou igual a $\nu - 1$ e então ou J' ou $J' \cup C$ é uma *T*-junção em G de tamanho menor ou igual a ν .

Se G tem um *T*-corte C tal que $|C| = 2$, podemos então argumentar de modo semelhante. Contraíndo as duas arestas α e β de C em (G, T) , obtemos um par (G'', T'') tal que $\nu(G'', T'') \leq \nu - 1$. Logo G'' tem uma *T''*-junção J'' com no máximo $\nu - 1$ arestas. Segue da nossa discussão a respeito de contração que um dos conjuntos J'' , $J'' + \alpha$, $J'' + \beta$ e $J'' + \alpha + \beta$ é uma *T*-junção. Mas o último destes certamente não é uma *T*-junção, pois ele intercepta o *T*-corte C em um número par de arestas. Assim encontramos uma *T*-junção com no máximo ν arestas.

Resta demonstrar – e esta é a parte principal da demonstração – que não pode acontecer que todo *T*-corte de G tenha no mínimo três arestas e ainda assim $\nu(G - \alpha, T) > \nu(G, T)$ para toda aresta α . Suponhamos, por absurdo, que isto acontece.

Seja α uma aresta de G . Então $G - \alpha$ contém $\nu + 1$ *T*-cortes disjuntos nas arestas. Em G , estes *T*-cortes são quase disjuntos nas arestas; apenas a aresta α está contida em alguns (no máximo $\nu + 1$) entre eles. Segue então que se subdividirmos α por mais do que ν vértices o grafo resultante terá $\nu + 1$ *T*-cortes disjuntos nas arestas.

Vamos subdividir uma aresta de G por dois novos vértices, se pudermos fazê-lo sem produzir $\nu + 1$ *T*-cortes disjuntos nas arestas, e repetir esse procedimento enquanto for possível. Como, pela observação anterior, nenhuma aresta será subdividida em mais do

que ν vértices, segue que em um número finito de passos devemos terminar com um grafo G' que não contém $\nu + 1$ T -cortes disjuntos nas arestas. Note que G' também é bipartido e que todo T -corte em G' tem no mínimo duas arestas.

Por hipótese, se subdividirmos qualquer aresta α de G' por dois vértices, produziremos $\nu + 1$ T -cortes disjuntos nas arestas. Isto significa que G' contém $\nu + 1$ T -cortes que possuem a propriedade que toda aresta diferente de α pertence a no máximo um entre eles, enquanto α pertence a no máximo três dentre eles. Seja $\mathcal{L}_\alpha$ uma tal lista de $\nu + 1$ T -cortes de G' e forme uma lista $\mathcal{L} = \sum_{\alpha \in AG} \mathcal{L}_\alpha$. (Note que é permitida a pertinência a mais do que um corte). Então $\mathcal{L}$ é um $(m + 2)$ -packing de T -corte, onde $m := |AG'|$. Assim

$$\nu_{m+2}(G', T') \geq m(\nu + 1).$$

Pelo corolário 2.4.8 temos que

$$\nu_{m+2}(G', T') = (m + 2)\nu$$

e segue então que $m < 2\nu$. Logo

$$|AG| \leq 2m < 2\nu.$$

Mas G contém ν T -cortes disjuntos nas arestas, cada qual com no mínimo três arestas, por hipótese. Essa contradição completa a demonstração. $\square$

Nota: A demonstração do teorema 2.4.5 segue do teorema 2.4.6, bastando para isso subdividir cada aresta de G por um vértice e aplicar o teorema 2.4.6 ao grafo bipartido resultante.

Para obtermos o resultado final necessitamos considerar a versão com pesos deste caso. Dado $w : AG \rightarrow \mathbb{Z}_+$, denotemos por $\nu(G, T, w)$ a cardinalidade máxima de um w -packing de T -cortes em G e por $\tau(G, T, w)$ o peso máximo de uma T -junção.

Podemos reduzir o problema com pesos ao sem pesos, bastando substituir uma aresta α com peso w_α , $w_\alpha > 1$, por um caminho de comprimento w_α cujos vértices que não são os extremos do caminho não estão em T , e contraindo-se as arestas com peso 0 (i.e., fazemos uma w -extensão no clutter das T -junções). Deste modo obtemos, a partir do teorema 2.4.5:

Teorema 2.4.9 *Dados um grafo G , um subconjunto par T de VG e $w : AG \rightarrow \mathbb{Z}_+$, temos que*

$$\tau(G, T, w) = \frac{\nu(G, T, 2w)}{2}. \square$$

A partir deste fato deduzimos que

$$\tau_w(\mathcal{F}_T) = \tau(G, T, w) = \frac{\nu(G, T, 2w)}{2} = \frac{\nu_{2w}(\mathcal{F}_T)}{2} \leq \frac{\nu_{2w}^*(\mathcal{F}_T)}{2} = \frac{\tau_{2w}^*(\mathcal{F}_T)}{2} = \tau_w^*(\mathcal{F}_T).$$

Como já sabemos que para todo clutter $\mathcal{F}$ e toda função $w : E \rightarrow \mathbb{Z}_+$ vale que $\tau_w(\mathcal{F}) \geq \tau_w^*(\mathcal{F})$, o teorema 2.1.8 nos dá o resultado desejado, i.e., dado um grafo G e um subconjunto par T de VG , o clutter das T -junções possui a propriedade FMCM.

Notemos, entretanto, que $\mathcal{F}_T$ não é Mengeriano. Para o grafo indicado na figura abaixo, por exemplo, tomando $T = VG$ obtemos que $\tau(G, T) = 2$ – uma T -junção neste caso é um emparelhamento – e $\nu(G, T) = 1$. Podemos verificar que se tomarmos como T -cortes as estrelas de cada um dos 4 vértices obteremos um 2-packing de tamanho 4, como seria de se esperar, pelo teorema 2.4.5. Entretanto, o teorema 2.4.9 nos dá justamente o resultado necessário para afirmar que este clutter é 2-Mengeriano.

T-junção e 2-packing de *T*-cortes

As relações obtidas a partir da desigualdade min-min são análogas às obtidas nos exemplos anteriores, considerando casos gerais e particulares de pesos nas arestas:

O produto do peso mínimo de uma T-junção pelo peso mínimo de um T-corte é menor ou igual à soma dos quadrados dos pesos.

O produto da cardinalidade mínima de uma T-junção pela cardinalidade mínima de um T-corte é menor ou igual ao número de arestas do grafo.

O produto da cardinalidade mínima de uma T-junção pelo peso mínimo de um T-corte é menor ou igual à soma total dos pesos.

2.5 Cortes orientados

Ainda como exemplo de pares de clutters que satisfazem a igualdade FMCM temos também o par cortes orientados & coberturas de cortes orientados, cujo principal resultado foi provado por Lucchesi & Younger, em 1978.

Seja D um grafo orientado. Um **corte orientado** é um conjunto de arestas da forma $\delta(S)$, onde $\emptyset \neq S \neq VD$ e $\delta(\bar{S}) = \emptyset$. Uma **cobertura de cortes orientados** é um conjunto de arestas que interceptam todos os cortes orientados.

O fato de tal par ter a propriedade FMCM segue do

Teorema 2.5.1 (de Lucchesi & Younger) *Seja D um grafo orientado. Então o tamanho mínimo de uma cobertura de cortes orientados é igual ao número máximo de cortes orientados dois a dois disjuntos nas arestas.*

A versão com pesos inteiros pode ser obtida substituindo-se arestas por caminhos orientados (i.e., fazemos uma operação de completção no clutter $\mathcal{F}$ dos cortes dirigidos), e então obtemos o resultado de que o clutter dos cortes orientados também é Mengeriano.

Como a demonstração do teorema 2.5.1 é bastante trabalhosa, e já apresentamos dois outros exemplos de pares que são Mengerianos, omitiremos aqui a referida demonstração. Não poderíamos, no entanto, deixar de mencionar este resultado, por se tratar de um teorema min-max bastante conhecido.

Woodwall, em 1978, conjecturou que um teorema “dual” ao teorema 2.5.1 valeria, ou seja, que $\tau_1(b(\mathcal{F})) = \nu_1(B(\mathcal{F}))$, porém já se sabe que o clutter $b(\mathcal{F})$ das coberturas de cortes orientados não é Mengeriano — Schrijver apresentou um contra-exemplo em 1980.

2.6 O problema do gargalo

Consideremos agora o problema com o qual apareceu o conceito de clutter bloqueador — o problema do gargalo. Em 1970, Edmonds & Fulkerson mostraram que, dado um clutter $\mathcal{F}$, existe um único clutter $\mathcal{H}$ tal que para toda função $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ o par $(\mathcal{F}, \mathcal{H})$ satisfaz a igualdade do gargalo, i.e.,

$$\min_{F \in \mathcal{F}} \max_{x \in F} f(x) = \max_{S \in \mathcal{H}} \min_{x \in S} f(x)$$

e o único clutter em questão é $b(\mathcal{F})$, o clutter bloqueador de $\mathcal{F}$.

A demonstração deste fato utiliza o corolário 2.1.7 e apresenta um método para obter um membro de $\mathcal{F}$ e um de $\mathcal{H}$ justamente para os quais a igualdade do gargalo vale.

Teorema 2.6.1 *Um par de clutters satisfaz a igualdade do gargalo se e somente se é um par de clutters bloqueadores.*

Dem.: Suponha que $(\mathcal{F}, \mathcal{H})$ é um par de clutters bloqueadores sobre E e seja $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Seja ainda

$$u(\mathcal{F}, f) = \min_{F \in \mathcal{F}} \max_{x \in F} f(x) \quad \text{e} \quad w(\mathcal{H}, f) = \max_{S \in \mathcal{H}} \min_{x \in S} f(x).$$

Mostraremos que a igualdade do gargalo vale para $(\mathcal{F}, \mathcal{H})$.

Para calcular $u(\mathcal{F}, f)$ usaremos o seguinte método: Escolha elementos $x \in E$ um após o outro em ordem não decrescente de valores de $f(x)$ até que o conjunto dos elementos escolhidos contenha um $F \in \mathcal{F}$. Quando isto acontecer, pare. Denote o conjunto final de elementos escolhidos de B_u , o último elemento escolhido por x_u e qualquer um dos membros de $\mathcal{F}$ contido em B_u por F_u (pode haver vários).

Temos que $x_u \in F_u$, já que $B_u - x_u$ não contém nenhum $F \in \mathcal{F}$. O elemento x_u maximiza f sobre B_u e, assim, sobre F_u . Logo $u(\mathcal{F}, f) \leq f(x_u)$. Como $B_u - x_u$ contém todo x tal que $f(x) < f(x_u)$, se existisse um $F \in \mathcal{F}$ tal que

$$\max_{x \in F} f(x) < f(x_u),$$

nós teríamos $F \subseteq B_u - x_u$. Portanto $u(\mathcal{F}, f) = f(x_u)$.

Pela propriedade dada pelo corolário 2.1.7, $B_w = E - (B_u - x_u)$ contém um membro S_w de $\mathcal{H}$ e $B_w - x_w = E - B_u$ não contém membro algum de $\mathcal{H}$ e, assim, temos que $x_u \in S_w$. O elemento x_u minimiza f sobre B_w e sobre S_w . Logo $f(x_u) \leq w(\mathcal{H}, f)$. Como $B_w - x_u$ contém todo elemento x tal que $f(x_u) < f(x)$, se existisse um $S \in \mathcal{H}$ tal que

$$f(x_u) < \min_{x \in S} f(x),$$

teríamos $S \subseteq B_w - x_u$. Portanto $f(x_u) = w(\mathcal{H}, f)$.

Observação: É claro que poderíamos utilizar o método dual. Ou seja, escolher elementos $x \in E$ um após o outro em ordem não crescente de valores de $f(x)$ até que o conjunto de elementos escolhidos contenha um $S \in \mathcal{H}$.

Seja agora $(\mathcal{F}, \mathcal{H})$ um par de clutters que satisfaz a igualdade do gargalo, tomemos $H \in \mathcal{H}$ e seja $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$ para $x \in H$ e $f(x) = 1$ para $x \notin H$. Se o valor

resultante de $u(\mathcal{F}, f) = w(\mathcal{H}, f)$ for 0, então algum membro de $\mathcal{F}$ está contido em H e nenhum membro de $\mathcal{H}$ está contido em $E \setminus H$. Senão, se o resultado for 1, então nenhum membro de $\mathcal{F}$ está contido em H e algum membro de $\mathcal{H}$ está contido em $E \setminus H$. $\square$

Exemplificando com o clutter $\mathcal{F}_2$ obtemos o seguinte resultado: considere um grafo com pesos nas arestas ($f : E \rightarrow \mathbb{R}$); então o valor máximo de f em uma aresta de um caminho de peso total mínimo é igual ao peso mínimo de f em uma aresta de um corte de peso total máximo.

Estudaremos no último capítulo alguns fatos sobre pares de clutters bloqueadores que são mengerianos, porém utilizaremos ferramentas um pouco diferentes das até aqui utilizadas, obtendo resultados que os caracterizam parcialmente.

Capítulo 3

Anti-bloqueadores de Clutters

Neste capítulo introduzimos o conceito de clutter *anti-bloqueador* e apresentamos alguns resultados que veremos serem bastante análogos aos que obtivemos para clutters bloqueadores. Em seguida ilustramos tais resultados com exemplos como cadeias em conjuntos parcialmente ordenados, cliques em grafos trianguláveis e coberturas em grafos bipartidos. Finalizando, apresentamos a relação entre clutters anti-bloqueadores e grafos perfeitos.

3.1 Definições e resultados básicos

O conceito de clutter *anti-bloqueador* teve origem na idéia de clutter bloqueador, mas rapidamente adquiriu um significado próprio, pois foi descoberta uma forte relação entre os clutters e seus *anti-bloqueadores* e os *grafos perfeitos*. Este fato levou a uma “boa” caracterização dos clutters que apresentam propriedades análogas às largura-comprimento e FMCM, o que não ocorre com os clutters bloqueadores.

Define-se o clutter **anti-bloqueador** de um clutter $\mathcal{F}$ sobre E , denotado por $\text{ab}(\mathcal{F})$, como sendo o clutter sobre E cujos membros H satisfazem as seguintes condições:

- (i) Intersecção: $|H \cap F| \leq 1$ para todo $F \in \mathcal{F}$;
- (ii) Maximalidade: Se $H' \supset H$, então $|H' \cap F| > 1$ para algum $F \in \mathcal{F}$.

Em outras palavras, $\text{ab}(\mathcal{F})$ é o clutter que consiste de todos os subconjuntos maximais de E que interceptam cada membro de $\mathcal{F}$ em no máximo um elemento. Observemos que $\text{ab}(\emptyset) = \text{ab}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset\}$ e $\text{ab}(\{E\}) = \{\{e\}, \forall e \in E\}$.

Essa definição pode ser estendida facilmente para hipergrafos: Dado um hipergrafo H , o seu anti-bloqueador $\text{ab}(H)$ é a família de todos os subconjuntos maximais de $\cup H$ que interceptam cada aresta de H em no máximo um elemento.

Tomemos como exemplo um clutter $\mathcal{F}$ cuja matriz de incidência é

$$M(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O anti-bloqueador de $\mathcal{F}$ é o clutter cuja matriz de incidência é

$$M(\text{ab}(\mathcal{F})) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Na figura abaixo representamos $\mathcal{F}$ e o seu anti-bloqueador.

A partir de um clutter $\mathcal{F}$ sobre E podemos construir um grafo, que denotaremos por $G(\mathcal{F})$, definido do seguinte modo: $G(\mathcal{F})$ tem como conjunto de vértices o conjunto E , sendo que dois vértices são adjacentes se eles estão contidos em um mesmo elemento de $\mathcal{F}$. Desta definição segue que, se $\mathcal{F}$ é um clutter, então $\text{ab}(\mathcal{F})$ é a família dos conjuntos estáveis maximais de $G(\mathcal{F})$.

O seguinte fato, análogo ao caso dos clutters bloqueadores (veja a proposição 2.1.3) é bastante simples de ser provado.

Proposição 3.1.1 *Dado um clutter $\mathcal{F}$ sobre E , para todo $F \in \mathcal{F}$ existe $A \in \text{ab}(\mathcal{F})$ com $|A \cap F| = 1$. $\square$*

Observação: Ao contrário dos clutters bloqueadores, os anti-bloqueadores não apresentam sempre a propriedade de que para todo clutter $\mathcal{F}$ é verdade que $\text{ab}(\text{ab}(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$. Consideremos, por exemplo, o clutter $\mathcal{F} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$. Podemos calcular facilmente o seu anti-bloqueador: $\text{ab}(\mathcal{F}) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ que, por sua vez, possui como anti-bloqueador o clutter $\text{ab}(\text{ab}(\mathcal{F})) = \{\{1, 2, 3\}\}$.

Este fato motiva a seguinte definição: um clutter $\mathcal{F}$ é **conforme** se $\text{ab}(\text{ab}(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$.

Uma pergunta natural que surge agora é quanto à existência de uma caracterização de clutters conformes. A resposta é dada pelo seguinte resultado.

Proposição 3.1.2 *Um clutter $\mathcal{F}$ é conforme se e somente se $\mathcal{F}$ é o clutter de todos os conjuntos estáveis maximais (ou cliques maximais) de algum grafo.*

Dem.: Se $\mathcal{F}$ é o clutter de todos os conjuntos estáveis maximais de um grafo G , então $\text{ab}(\mathcal{F})$ é o clutter dos cliques maximais de G . Mas então $\text{ab}(\text{ab}(\mathcal{F}))$ é o clutter dos cliques maximais de $\overline{G}$, que por sua vez é $\mathcal{F}$.

Suponhamos agora que $\mathcal{F}$ é conforme, i.e., $\text{ab}(\text{ab}(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$. Seja $G = G(\mathcal{F})$ e $\mathcal{H}$ o clutter dos conjuntos estáveis maximais de G . Como já vimos, $\mathcal{H} = \text{ab}(\mathcal{F})$, e então temos que $\mathcal{F} = \text{ab}(\text{ab}(\mathcal{F})) = \text{ab}(\mathcal{H})$. Mas $\text{ab}(\mathcal{H})$ é o clutter dos cliques maximais de G , ou seja, o clutter dos conjuntos estáveis maximais de $\overline{G}$ e, assim, $\mathcal{F}$ é o clutter dos conjuntos estáveis maximais do grafo $\overline{G}$. $\square$

A demonstração desta proposição nos dá uma caracterização mais precisa:

Proposição 3.1.3 *Um clutter $\mathcal{F}$ é conforme se e somente se $\mathcal{F}$ é o clutter dos cliques maximais de $G(\mathcal{F})$. $\square$*

Notemos que o clutter $\mathcal{F}$, dado anteriormente como exemplo de clutter não conforme, não é – de fato – o clutter dos cliques maximais de $G(\mathcal{F})$. Neste caso, $G(\mathcal{F})$ é o grafo completo de ordem 3, cujo único clique maximal é o próprio $VG(\mathcal{F})$, que, no entanto, não pertence a $\mathcal{F}$.

Com relação às operações de contração e eliminação, os resultados obtidos não são tão análogos aos dos clutters bloqueadores. A principal razão é a não-simetria entre as definições de clutter anti-bloqueador – dada por uma propriedade de maximalidade – e a de contração de um clutter – dada por uma propriedade de minimalidade.

Observação : Deste ponto em diante consideraremos os clutters $\mathcal{F}/v$ e $\mathcal{F} \setminus v$ como clutters sobre $\cup \mathcal{F}/v$ e $\cup \mathcal{F} \setminus v$, respectivamente, assim como os seus anti-bloqueadores. Como estamos interessados principalmente em clutters conformes, e devido à caracterização dada a partir de $G(\mathcal{F})$ pela proposição 3.1.3, os elementos de E que correspondem a vértices isolados em $G(\mathcal{F})$ podem ser desconsiderados.

Consideremos agora o clutter $\mathcal{F}$ sobre $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ definido como $\mathcal{F} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}, \{4, 6, 7\}, \{1, 4, 7\}\}$. É fácil calcular o seu anti-bloqueador se construirmos $G(\mathcal{F})$:

Temos então que $\text{ab}(\mathcal{F}) = \{\{1, 6\}, \{1, 5\}, \{2, 5, 7\}, \{2, 6\}, \{3, 5, 7\}, \{3, 6\}, \{4\}\}$. Ao eliminarmos o elemento 6 de $\mathcal{F}$ obtemos $\mathcal{F} \setminus 6 = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 4, 7\}\}$ e $\text{ab}(\mathcal{F} \setminus 6) = \{\{1\}, \{4\}, \{2, 7\}, \{3, 7\}\}$, enquanto que $\text{ab}(\mathcal{F})/6 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$; contraindo o elemento 6 obtemos $\mathcal{F}/6 = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{4, 5\}, \{4, 7\}\}$, $\text{ab}(\mathcal{F}/6) = \{\{1, 5, 7\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 5, 7\}, \{4\}\}$, enquanto que $\text{ab}(\mathcal{F}) \setminus 6 = \{\{1, 5\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 5, 7\}, \{4\}\}$, evidenciando que não vale necessariamente que

$$\text{ab}(\mathcal{F} \setminus v) = \text{ab}(\mathcal{F})/v \quad \text{e} \quad \text{ab}(\mathcal{F}/v) = \text{ab}(\mathcal{F}) \setminus v.$$

Notemos que neste exemplo o clutter $\mathcal{F}$ é conforme, o que sugere a não existência de uma possível relação entre a propriedade acima e o fato do clutter $\mathcal{F}$ ser conforme.

As operações de extensão e completção se comportam como no caso da relação bloqueador:

Proposição 3.1.4 *Dado um clutter $\mathcal{F}$ sobre E e $e \in E$, então*

$$\text{ab}(\text{ext}(\mathcal{F}, e)) = \text{comp}(\text{ab}(\mathcal{F}), e) \quad \text{e} \quad \text{ab}(\text{comp}(\mathcal{F}, e)) = \text{ext}(\text{ab}(\mathcal{F}), e).$$

Dem.: Seja $A \in \text{comp}(\text{ab}(\mathcal{F}), e)$. Queremos provar que $|A \cap F| \leq 1$, $\forall F \in \text{ext}(\mathcal{F}, e)$. Por definição, ou $A \in \text{ab}(\mathcal{F})$, ou existe $A' \in \text{ab}(\mathcal{F})$, $e \in A'$, tal que $A = A' - e + e'$. Se $F \in \text{ext}(\mathcal{F}, e)$, ou $F \in \mathcal{F}$, e $e \notin F$, ou existe $F' \in \mathcal{F}$, $e \in F'$, tal que $F = F' + e'$.

Então se $A \in \text{ab}(\mathcal{F})$ e $F \in \mathcal{F}$, é claro que $|A \cap F| \leq 1$. Senão, consideremos os casos:

(a) $e \in A'$, $A = A' - e + e'$, $F \in \mathcal{F}$, $e \notin F$

$$\text{Então } |A \cap F| = |(A' - e + e') \cap F| = |A' \cap F| \leq 1.$$

(b) $e \in A'$, $A = A' - e + e'$, $F = F' + e'$, $e \in F'$

Então $|A \cap F| = |(A' - e + e') \cap (F' + e')| = |A' \cap F'| - 1 + 1 \leq 1$.

(c) $A \in \text{ab}(\mathcal{F})$, $F = F' + e'$, $e \in F'$

Então $|A \cap F| = |A \cap (F' + e')| = |A \cap F'| \leq 1$.

Provemos agora que se $A \in \text{ab}(\text{ext}(\mathcal{F}, e))$, então $A \in \text{comp}(\text{ab}(\mathcal{F}, e))$. Sabemos que $|A \cap F| \leq 1$, $\forall F \in \text{ext}(\mathcal{F}, e)$.

Seja $A \in \text{ab}(\text{ext}(\mathcal{F}, e))$ e seja $F \in \text{ext}(\mathcal{F}, e)$. Se $e \in F$, então $e' \in F$, e existe $F' \in \mathcal{F}$ com $e \in F'$ tal que $F = F' + e'$. Logo $|A \cap (F' + e')| \leq 1$. Se $e' \in A$, e então $e \notin A$ e $|(A - e' + e) \cap F| \leq 1$, e se $e \notin A$, então $|A \cap F| \leq 1$.

Se $e \notin F$, então pela definição de extensão, $e' \notin F$, e assim $F \in \mathcal{F}$. Se $e' \in A$, então $|(A - e' + e) \cap F| \leq 1$; e se $e' \notin A$, então $|A \cap F| \leq 1$.

Juntando todos os casos acima, concluímos que ou $A \in \text{ab}(\mathcal{F})$ ou $A - e' + e \in \text{ab}(\mathcal{F})$, ou seja, $A \in \text{comp}(\text{ab}(\mathcal{F}, e))$.

Portanto, $\text{ab}(\text{ext}(\mathcal{F}, e)) = \text{comp}(\text{ab}(\mathcal{F}, e))$.

A segunda igualdade pode ser demonstrada analogamente. $\square$

Com relação aos menores de um clutter, a propriedade de ser conforme é parcialmente hereditária. Como exemplo tomemos o clutter $\mathcal{F} = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}\}$ com seu anti-bloqueador $\text{ab}(\mathcal{F}) = \{\{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3\}\}$. O clutter $\mathcal{F}$ é conforme, no entanto, ao eliminarmos o elemento 3 de $\mathcal{F}$ obtemos o clutter $\emptyset$, que claramente não é conforme. Já a operação de contração não preserva tal propriedade nem “parcialmente”. Por exemplo, se considerarmos os clutter conforme $\mathcal{F} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 4, 7\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 6\}\}$ e fizermos a contração de $\mathcal{F}$ pelo elemento 7, obtemos o clutter $\mathcal{F}/7 = \{\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{1, 3, 6\}\}$, que não é conforme. Vejamos $G(\mathcal{F})$ e $G(\mathcal{F}/7)$ abaixo.

Porém se considerarmos apenas a operação de eliminação em clutters que produz um

clutter $\mathcal{F} \neq \emptyset$, podemos obter um resultado de “hereditariedade”:

Proposição 3.1.5 *Se um clutter $\mathcal{F}$ sobre E é conforme, então dado $v \in E$, o clutter $\mathcal{F} \setminus v$ sobre $\cup \mathcal{F} \setminus v$, tal que $\mathcal{F} \setminus v \neq \emptyset$, é conforme.*

Dem.: É fácil ver que, como $\mathcal{F} \setminus v \neq \emptyset$, todo elemento y de $\mathcal{F} \setminus v$ é elemento de $\mathcal{F}$. Logo, y é conjunto dos elementos de um clique maximal em $G(\mathcal{F})$ e assim, em $G(\mathcal{F} \setminus v)$. Se existisse z que fosse um clique maximal em $G(\mathcal{F} \setminus v)$ e $z \notin \mathcal{F} \setminus v$, então z também deveria ser maximal em $G(\mathcal{F})$, dada a construção de $\mathcal{F} \setminus v$; assim deveríamos ter que ou $y \in \mathcal{F}$, e então $y \in \mathcal{F} \setminus v$, ou $\mathcal{F}$ não é conforme, duas contradições. Portanto, $\mathcal{F} \setminus v$ é conforme. $\square$

Com relação às operações completação e eliminação, a proposição 3.1.4 combinada com a hipótese de que um clutter é conforme nos dá seguinte resultado:

Corolário 3.1.6 *Se $\mathcal{F}$ é um clutter conforme sobre E e $e \in E$, então os clutters $\text{ext}(\mathcal{F}, e)$ e $\text{comp}(\mathcal{F}, e)$ são conformes.* $\square$

Analogamente à definição da propriedade min-min, dizemos que um clutter $\mathcal{F}$ tem a propriedade (ou satisfaz a igualdade) **max-max**, se para todas funções $l, c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ temos que

$$\max_{F \in \mathcal{F}} l(F) \max_{A \in \text{ab}(\mathcal{F})} c(A) \geq \sum_{v \in E} l(v)c(v).$$

Dado um vetor $c \in \mathbb{R}_+^E$, denotaremos para um clutter $\mathcal{F}$ sobre E , supondo que todos os programas abaixo têm solução viável:

- (1) $\xi_c^*(\mathcal{F}) = \max\{cx \mid M(\mathcal{F})x \leq 1, x \geq 0\},$
- (2) $\xi_c(\mathcal{F}) = \max\{cx \mid M(\mathcal{F})x \leq 1, x \in (0, 1)^E\},$
- (3) $\psi_c^*(\mathcal{F}) = \min\{1y \mid yM(\mathcal{F}) \geq c, y \geq 0\}$ e
- (4) $\psi_c(\mathcal{F}) = \min\{1y \mid yM(\mathcal{F}) \geq c, y \in \mathbb{Z}_+^{\mathcal{F}}\}.$

Dizemos que um clutter $\mathcal{F}$ tem a propriedade (ou satisfaz a igualdade) **min-max** se $\xi_c(\mathcal{F}) = \xi_c^*(\mathcal{F})$, para todo $c \in \mathbb{R}_+^E$.

Pelo teorema forte de dualidade temos que $\psi_c^*(\mathcal{F}) = \xi_c^*(\mathcal{F})$ e é claro que $\xi_c(\mathcal{F}) \leq \xi_c^*(\mathcal{F})$. Se $\mathcal{F}$ tem a propriedade min-max, então vale que $\psi_c^*(\mathcal{F}) = \xi_c(\mathcal{F})$. Notemos ainda que

neste caso o vetor x em (X) é o vetor de incidência de um elemento em $\text{ab}(\mathcal{F})$, i.e.,

$$\min\{1y \mid yM(\mathcal{F}) \geq c, y \geq 0\} = \max_{x \in \text{ab}(\mathcal{F})} cx.$$

Em outras palavras, se um clutter $\mathcal{F}$ possui a propriedade min-max, então o valor mínimo de uma c -cobertura dos elementos de $\mathcal{F}$ (não necessariamente inteira) é igual ao valor máximo de c calculada nos elementos de $\text{ab}(\mathcal{F})$. Mais ainda, sabemos que $\{x \mid M(\mathcal{F})x \leq \mathbf{1}, x \geq 0\}$ é inteiro e tem como vértices os vetores de incidência dos elementos em $\text{ab}(\mathcal{F})$.

Dizemos ainda que um clutter $\mathcal{F}$ possui a propriedade (ou satisfaz a igualdade) **min-max forte** se, para todo $c \in \mathbb{Z}_+^E$, temos que $\xi_c(\mathcal{F}) = \psi_c(\mathcal{F})$. Neste caso toda c -cobertura de $\mathcal{F}$ é inteira. Notemos a simetria entre a propriedade min-max forte e a propriedade de ser Mengeriano.

Pelo mesmo resultado utilizado no caso de clutters bloqueadores, o teorema 2.1.8, é fácil ver que a propriedade min-max forte implica a propriedade min-max. E ainda podemos verificar que $\psi_c^*(\mathcal{F}) = \psi_c(\mathcal{F})$, $\forall c \in \mathbb{Z}_+^E$, se e somente se $\mathcal{F}$ satisfaz a propriedade min-max forte.

Analogamente ao caso dos clutters bloqueadores, temos aqui a seguinte caracterização:

Proposição 3.1.7 *Um clutter $\mathcal{F}$ tem a propriedade max-max se e somente se $\mathcal{F}$ tem a propriedade min-max.*

Dem.: Dado um clutter $\mathcal{F}$ sobre E e uma função $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$:

$\mathcal{F}$ tem a propriedade max-max

$$\Leftrightarrow \xi_c(\mathcal{F}) \geq lc, \forall l \in \mathbb{R}_+^E \text{ satisfazendo } \max_{A \in \mathcal{F}} (l(A)) = 1$$

$$\Leftrightarrow \xi_c(\mathcal{F}) \geq \xi_c^*(\mathcal{F})$$

$$\Leftrightarrow \xi_c(\mathcal{F}) = \xi_c^*(\mathcal{F}). \quad \square$$

O próximo resultado nos dá alguma indicação de que a propriedade min-max não é inerente a todo clutter.

Proposição 3.1.8 *Se um clutter $\mathcal{F}$ possui a propriedade min-max, então $\mathcal{F}$ é conforme.*

Dem.: Suponhamos por absurdo que $\mathcal{F}$ não seja conforme. Então existe $y \in \text{ab}(\text{ab}(\mathcal{F}))$ tal que $y \notin \mathcal{F}$. (Nos produtos a seguir, considerar y e x como vetores de incidência em

$(0,1)^E$.) Notemos que neste caso $\max_{x \in \mathcal{F}} yx < yy$, pois caso contrário teríamos que ou $y \in \mathcal{F}$ ou existe $x \in \mathcal{F}$ tal que $y \subseteq x \in \mathcal{F}$, o que contraria ou a escolha de y ou a pertinência de y a $\text{ab}(\text{ab}(\mathcal{F}))$. Mas então, como $\mathcal{F}$ possui a propriedade max-max, temos

$$(\max_{x \in \mathcal{F}} yx)(\max_{b \in \text{ab}(\mathcal{F})} yb) \geq yy,$$

ou seja

$$\max_{x \in \mathcal{F}} yx \geq yy,$$

que é uma contradição. Logo $\mathcal{F}$ é conforme. $\square$

Como a propriedade max-max não assume uma ordem intrínseca entre o clutter e o seu anti-bloqueador, se o clutter dado é conforme, obtemos uma segunda caracterização, obtida combinando-se os dois resultados anteriores:

Proposição 3.1.9 *Um clutter $\mathcal{F}$ possui a propriedade min-max se e somente se o seu clutter anti-bloqueador também a possui. $\square$*

Ou seja, sabemos representar os vetores característicos dos elementos de um clutter $\mathcal{F}$ como vértices de um poliedro inteiro se e somente se sabemos fazê-lo para os elementos de $\text{ab}(\mathcal{F})$.

Com relação à recíproca da proposição 3.1.8, podemos constatar facilmente que ela não é verdadeira. Consideremos por exemplo o clutter $\mathcal{F} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{1, 5\}\}$, cuja matriz de incidência é

$$M(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{F}$ é conforme, mas tomando $c = 1$ para calcular $\xi_c(\mathcal{F})$, temos que $\xi_c(\mathcal{F}) = 3$, com uma possível solução $x = (1, 1, 1, 0, 0)$, enquanto que ao calcularmos $\xi_c^*(\mathcal{F})$ obtemos que $\xi_c^*(\mathcal{F}) = \nu_c^*(\mathcal{F}) = 5/2$, com a solução $x = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$.

No fim deste capítulo apresentaremos algumas relações entre a propriedade min-max e as operações de contração, eliminação, completção e extensão.

Definamos agora uma nova operação sobre clutters que será utilizada na demonstração de um dos principais teoremas desta seção. Dado um clutter $\mathcal{F}$ sobre E e $Z \subseteq E$, definimos

a **contração estrela** de $\mathcal{F}$ por Z , denotado por $\mathcal{F}/^*Z$, como sendo a família dos elementos maximais de $\{F - Z \mid F \in \mathcal{F}\}$. É fácil ver que $\mathcal{F}/^*Z$ é um clutter.

Esta nova operação nos fornece algumas propriedades interessantes, que a contração e a eliminação não nos permitiram obter. Por exemplo, dado $Z \subseteq E$, se considerarmos $\mathcal{F}/^*Z$ um clutter sobre $\cup \mathcal{F}/^*Z$ temos que

Proposição 3.1.10 *Se $\mathcal{F}$ é um clutter conforme sobre E e $Z \subseteq E$, então*

$$(i) \text{ ab}(\mathcal{F}/^*Z) = \text{ab}(\mathcal{F})/^*Z.$$

$$(ii) \mathcal{F}/^*Z \text{ é conforme};$$

Dem.: Trivialmente (ii) segue de (i), notando que

$$\text{ab}(\text{ab}(\mathcal{F}/^*Z)) = \text{ab}(\text{ab}(\mathcal{F})/^*Z) = (\text{ab}(\text{ab}(\mathcal{F})))/^*Z = \mathcal{F}/^*Z.$$

Para verificarmos a primeira afirmação, basta ver que

$$\begin{aligned} y \in \text{ab}(\mathcal{F}/^*Z) &\Leftrightarrow |y \cap (x - z)| \leq 1, \forall x \in \mathcal{F}, y \text{ maximal} \\ &\Leftrightarrow |(y - z) \cap x| \leq 1, \forall x \in \mathcal{F}, y \text{ maximal} \\ &\Leftrightarrow y \in \text{ab}(\mathcal{F})/^*Z. \square \end{aligned}$$

Ainda com relação a essa nova operação temos uma certa “hereditariedade” com respeito à propriedade min-max, se considerarmos como menores apenas os clutters obtidos a partir da contração estrela:

Proposição 3.1.11 *Se $\mathcal{F}$ é um clutter sobre E , $Z \subseteq E$ e $\mathcal{F}$ possui a propriedade min-max, então $\mathcal{F}/^*Z$ também a possui.*

Dem.: Suponha que $\mathcal{F}/^*Z$ não tenha a propriedade min-max. Então existe $b \in \mathbb{Z}_+^{E-Z}$ tal que

$$\xi_b^*(\mathcal{F}/^*Z) > \xi_b(\mathcal{F}/^*Z).$$

Notemos que $M(\mathcal{F}/^*Z)$ é obtida a partir da matriz $M(\mathcal{F})$ removendo-se as colunas correspondentes aos elementos de Z e, em seguida, eliminando as linhas que não representam subconjuntos maximais. Observado este fato, tomando $\bar{b} \in \mathbb{Z}_+^E$ como

$$\bar{b}_i = \begin{cases} b_i, & i \in Z, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

temos que

$$\xi_b^*(\mathcal{F}/^*Z) = \xi_b^*(\mathcal{F}) = \xi_{\bar{b}}(\mathcal{F}),$$

onde a primeira igualdade segue da definição de contração estrela e da de $\bar{b}$.

Seja $\bar{x} \in \text{ab}(\mathcal{F})$ tal que $\bar{b}\bar{x} = \xi_{\bar{b}}(\mathcal{F})$ e seja $x \in \mathcal{F}/^*Z$ com $x \supseteq \bar{x} - Z$. Então $bx \geq \xi_{\bar{b}}(\mathcal{F}) = \xi_b^*(\mathcal{F}/^*Z)$. Logo,

$$\xi_b^*(\mathcal{F}/^*Z) = \xi_b(\mathcal{F}/^*Z),$$

contradizendo a hipótese inicial de que $\mathcal{F}/^*Z$ não possui a propriedade min-max. $\square$

Dado um clutter conforme $\mathcal{F}$ sobre E , sabemos que $\mathcal{F}$ é o clutter dos cliques maximais de $G(\mathcal{F})$. Além disso, dado $Z \subseteq E$, ao calcularmos $\mathcal{F}/^*Z$ obtemos um novo clutter conforme. Resta ainda saber qual a relação existente entre $G(\mathcal{F})$ e $G(\mathcal{F}/^*Z)$:

Proposição 3.1.12 *Se $\mathcal{F}$ é um clutter conforme sobre E e $Z \subseteq E$, então $G(\mathcal{F}/^*Z)$ é o subgrafo de $G(\mathcal{F})$ induzido por $E - Z$.*

Dem.: Sem perda de generalidade assumimos que $Z = \{v\}$, para algum $v \in E$. Seja H o subgrafo de $G(\mathcal{F})$ induzido por $E - v$ e C um clique maximal de H . Então ou C ou $C + v$ é clique maximal em $G(\mathcal{F})$ e, consequentemente, elemento de $\mathcal{F}$. Ao calcularmos a contração estrela de $\mathcal{F}$ por v , pela definição desta operação, ou C ou $(C + v) - v$ é elemento de $\mathcal{F}/^*v$. Assim $AH \subseteq AG(\mathcal{F}/^*v)$. A outra inclusão segue por argumentos semelhantes, provando a afirmação. $\square$

Ao contrário do caso dos clutters bloqueadores (em que ter a propriedade max-min não implica ser Mengeriano), temos aqui que a propriedade min-max implica a propriedade min-max forte. Este resultado foi obtido por Fulkerson, em 1971, 1972.

Teorema 3.1.13 *Seja $\mathcal{F}$ um clutter sobre E . Se $\mathcal{F}$ possui a propriedade min-max, então $\mathcal{F}$ possui a propriedade min-max forte.*

Dem.: Sejam as matrizes $A = M(\mathcal{F})$ e $B = M(\text{ab}(\mathcal{F}))$. Descreveremos um algoritmo para obter uma solução inteira para o programa linear $\min \mathbf{1}y$, $yA \geq w$, $y \geq 0$, onde w é um vetor inteiro não negativo. (Na verdade, na descrição supomos que o w inicial seja positivo. Como veremos mais adiante, isto é somente uma conveniência.)

Sabemos que $\min \mathbf{1}y$ com y sujeito a tais restrições é igual a $\max_j b^j w$, onde $b^1, \dots, b^r$ são as linhas de B . Seja $\max_j b^j w = \alpha$ um inteiro positivo. Suponha que $b^j w = \alpha$ para

$j = 1, \dots, k$, $b^j w < \alpha$ para $j = k + 1, \dots, r$. Então o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} b^j x = 1, & j = 1, \dots, k \\ b^j x \leq 1, & j = k + 1, \dots, r \\ x \geq 0, \end{cases}$$

tem como solução w/α . Mas este sistema define um elemento z tal que $z \subseteq x$ para algum $x \in \text{ab}(\text{ab}(\mathcal{F}))$, i.e., algum $x \in \mathcal{F}$. Seja a^i a linha correspondente ao vetor de incidência de x . Faça a i -ésima componente de y igual a 1 (temporariamente), reduza todas as componentes de w que correspondem a entradas positivas em a_i de 1 e remova as colunas em A e B que correspondem a componentes não positivas do vetor w reduzido, assim como estas mesmas componentes do vetor reduzido, obtendo as matrizes A' , B' e um vetor inteiro $w' > 0$. Seja V o conjunto dos elementos de E que correspondem às coordenadas retiradas de w . Então, pela definição de contração estrela, $A' = M(\mathcal{F}/^*V)$ e $B' = M(\text{ab}(\mathcal{F}/^*V))$. Mais ainda, como $b^j a^i = 1$ para $j = 1, \dots, k$, e $b^j a^i = 0$ ou 1 para $j = k + 1, \dots, r$, segue que $\max b^j w'$ tomado sobre todas as linhas de B' é igual a $\frac{\alpha}{\alpha} - 1$. Como $\mathcal{F}/^*V$ satisfaz a igualdade min-max, podemos agora repetir o argumento e, deste modo, construir um vetor solução inteiro para o programa $\min \mathbf{1}y$, $yA \geq w$, $y \geq 0$. Assim completamos a demonstração. $\square$

Estudaremos agora alguns casos de clutters conformes e seus anti-bloqueadores. Depois, finalizaremos o capítulo, descrevendo a relação existente entre *grafos perfeitos* e o conceito de clutter anti-bloqueador.

3.2 Cadeias em um conjunto parcialmente ordenado

Como primeiro exemplo de clutters anti-bloqueadores faremos um estudo sobre *cadeias* e *anti-cadeias* em um conjunto parcialmente ordenado.

Seja P um conjunto parcialmente ordenado (pela relação $\geq$), i.e., se $a \geq b$ e $b \geq c$, então $a \geq c$, $\forall a, b, c \in P$. Dois elementos a e b são ditos **comparáveis** se ou $a \geq b$ ou $b \geq a$; caso contrário a e b são **incomparáveis**. Um subconjunto S de P é uma **anti-cadeia** se quaisquer dois elementos distintos de S são incomparáveis e S é uma **cadeia** se quaisquer dois de seus elementos são comparáveis.

Consideremos o clutter $\mathcal{F}$ das cadeias maximais de um conjunto finito P parcialmente ordenado. É fácil ver que $\text{ab}(\mathcal{F})$ é o clutter das anti-cadeias maximais de P . Deduziremos a propriedade min-max forte para $\mathcal{F}$ (e conseqüentemente a propriedade de ser conforme) mostrando um algoritmo simples que resolve o programa linear $\min \mathbf{1}y$, $yM(\text{ab}(\mathcal{F})) \geq c$, $y \geq 0$ (que acha uma c -cobertura mínima de anti-cadeias):

Inicialmente, faça todas as componentes de y iguais a zero. Selecione a anti-cadeia de todos os elementos minimais no conjunto parcialmente ordenado e faça as componentes correspondentes de y iguais a η , onde η é o menor dos pesos (componentes de c) atribuídos aos membros desta anti-cadeia. Reduza cada um destes pesos de η , remova qualquer elemento do conjunto parcialmente ordenado que tenha ficado como o novo peso igual a zero e repita o procedimento.

Não é difícil verificar que este algoritmo resolve o programa linear que mencionamos, determinando $\psi_c^*(\text{ab}(\mathcal{F}))$. Observando que se c é um vetor inteiro, então o vetor y acima construído também é inteiro, então temos que

$$\psi_c(\text{ab}(\mathcal{F})) = \psi_c^*(\text{ab}(\mathcal{F})), \quad \forall c \in \mathbb{R}_+^n.$$

Logo, o clutter $\text{ab}(\mathcal{F})$ satisfaz a igualdade a min-max forte (e portanto, a min-max).

Se considerarmos agora o próprio clutter $\mathcal{F}$ temos que $\mathcal{F}$ e também satisfaz a igualdade min-max forte, pelos resultados vistos. Este fato nos dá como resultado, tomando a igualdade $\xi_1(\mathcal{F}) = \psi_1(\mathcal{F})$, o conhecido

Teorema 3.2.1 (de Dilworth (1950)) *Em todo conjunto finito parcialmente ordenado P , o menor número de cadeias cuja união é P é igual à cardinalidade máxima de uma anti-cadeia.* $\square$

A desigualdade max-max aplicada a $\mathcal{F}$ (ou a $\text{ab}(\mathcal{F})$) implica que se nos forem dados dois vetores de pesos c e l , então o produto do maior peso de uma cadeia, calculado usando l , pelo maior peso de uma anti-cadeia, calculado usando c , é no mínimo igual a lc .

Este exemplo nos leva a definir uma classe de grafos que será abordada posteriormente: Um grafo G é chamado um **grafo de comparabilidade** se é possível atribuir uma orientação às arestas de G de modo que o grafo orientado resultante represente uma ordem parcial sobre o conjunto dos vértices de G .

Notemos que se tomarmos um grafo de comparabilidade G e atribuirmos uma orientação às arestas de modo a obtermos uma ordem parcial, então um clique em G é uma cadeia neste conjunto parcialmente ordenado e um conjunto estável é uma anti-cadeia. Este fato nos leva ao seguinte resultado, tomando $\mathbf{1}$ como vetor de pesos na igualdade min-max e utilizando a proposição 3.1.12 e 3.1.11:

Fato *Dado um grafo G de comparabilidade, para qualquer subgrafo induzido H de G o número cromático de H é igual à cardinalidade de um clique máximo em H .* $\square$

3.3 Coberturas de arestas em grafos bipartidos

Este exemplo trata de um resultado bastante conhecido da Teoria dos Grafos, mas que não deixa de ser interessante e ilustrativo.

Seja G um grafo bipartido simples e consideremos $\mathcal{F} = AG$, ou seja, $\mathcal{F}$ é a família de pares de elementos de VG que correspondem às arestas de G . Podemos encontrar $\text{ab}(\mathcal{F})$ diretamente pela relação existente entre $\mathcal{F}$ e $G(\mathcal{F})$ — neste caso $G(\mathcal{F}) = G$ — que nos diz que $\text{ab}(\mathcal{F})$ é o clutter dos conjuntos estáveis maximais de G .

Usando o fato de que $M(\mathcal{F})$ é totalmente unimodular conseguimos o resultado de que $\xi_c^*(\mathcal{F}) = \xi_c(\mathcal{F})$, $\forall c \in \mathbb{R}^{VG}$, i.e., $\mathcal{F}$ satisfaz a igualdade min-max, e portanto (pelo teorema 3.1.13), $\mathcal{F}$ satisfaz também a igualdade min-max forte. Em particular temos que tomando $c = \mathbf{1}$, a igualdade min-max forte nos diz que a cardinalidade máxima de um conjunto estável é igual à cardinalidade de 1-cobertura de arestas, ou seja, implica o Teorema de König sobre coberturas de arestas.

Notemos que o fato da matriz de incidência de um grafo bipartido ser totalmente unimodular nos leva ao mesmo resultado — o Teorema de König — tanto via conceito de clutter bloqueador como via conceito de clutter anti-bloqueador.

No entanto os clutters anti-bloqueadores nos dão um resultado um pouco mais forte, pois sabemos que se $\mathcal{F}$ satisfaz a igualdade min-max, então $\mathcal{F}$ automaticamente satisfaz a igualdade min-max forte.

Consideremos agora o clutter $\text{ab}(\mathcal{F})$. Pela proposição 3.1.7 e teorema 3.1.13 temos que para $\text{ab}(\mathcal{F})$ vale tanto a igualdade min-max como a igualdade min-max forte. Se tomarmos $c = \mathbf{1}$ em $\xi_c(\text{ab}(\mathcal{F}))$ obtemos o resultado bastante conhecido:

Fato *Se G é um grafo bipartido e H é um subgrafo induzido de G , então o número mínimo de conjuntos estáveis que cobre VH , i.e., o número cromático de H , é igual à cardinalidade de um clique máximo em H . $\square$*

Apesar de ser um resultado bastante simples, pois é imediato que o número cromático de um grafo bipartido é 2, assim como o tamanho de um clique máximo, usaremos mais adiante esta propriedade aplicada a outros grafos, deduzindo resultados mais interessantes.

3.4 Cliques em grafos trianguláveis

Acompanhando os exemplos de pares de clutters anti-bloqueadores que possuem a propriedade min-max forte, estudaremos mais um caso de um grafo “especial”.

Dizemos que um grafo G é **triangulável** se todo circuito de G com mais do que 4 arestas tem uma **corda**, i.e., uma aresta ligando dois vértices não adjacentes do circuito. Uma propriedade interessante destes grafos é que grafos obtidos a partir da remoção de vértices de grafos trianguláveis são novamente trianguláveis.

Tomemos $\mathcal{F}$ como sendo o clutter dos cliques maximais de um grafo triangulável G . Como no exemplo anterior, $\text{ab}(\mathcal{F})$ é o clutter dos conjuntos estáveis maximais de G . Mostraremos agora que $\mathcal{F}$ também satisfaz a igualdade min-max forte.

Inicialmente precisamos das seguintes definições:

Um vértice v em um grafo G é dito ser **simplicial** se ele e todos os seus vizinhos formam um clique em G . Um subconjunto $S \subset VG$ é um **separador de vértices** para os vértices a e b não adjacentes se a remoção de S do grafo separa a e b em duas componentes conexas.

Teorema 3.4.1 (Dirac, 1961) *Todo grafo triangulável G tem um vértice simplicial. Mais ainda, se G não é completo, então ele possui dois vértices simpliciais não-adjacentes.*

Dem.: O teorema é trivial se G é completo. Vamos assumir então que G tem dois vértices não-adjacentes a e b e que o teorema é verdadeiro para todos os grafos com menos vértices que G . Seja S um separador de vértices minimal para a e b com A e B sendo os conjuntos de vértices das componentes conexas G_A e G_B de G_{VG-S} que contêm a e b , respectivamente.

Notemos que S induz um subgrafo completo em G : Como S é minimal, cada $x \in S$ é adjacente a um vértice em A e a um vértice em B . Assim, para todo par $x, y \in S$ existem caminhos $[x, a_1, \dots, a_r, y]$ e $[y, b_1, \dots, b_s, x]$ onde cada $a_i \in A$ e $b_i \in B$. Escolhamos tais caminhos de modo que sejam os de menor comprimento. Segue que $[x, a_1, \dots, a_r, y, b_1, \dots, b_s, x]$ é um circuito cujo tamanho é no mínimo 4, o que implica que ele deve conter uma corda. Mas $\{a_i, b_j\} \notin AG$, pela definição de separador de vértices, e $\{a_i, a_j\} \notin AG$ e $\{b_i, b_j\} \notin AG$, pela minimalidade de r e s . Assim a única corda possível é $\{x, y\} \in AG$.

Por indução, ou o subgrafo $G_{A \cup S}$ tem dois vértices não-adjacentes simpliciais, um dos quais deve estar em A (pois S induz um subgrafo completo) ou $G_{A \cup S}$ é por si só completo e todo vértice de A é simplicial em $G_{A \cup S}$. Ainda, como os vértices adjacentes a A estão em

$A \cup S$, um vértice simplicial de $G_{A \cup S}$ em A é simplicial no grafo G inteiro. Analogamente B contém um vértice simplicial de G . $\square$

Baseados no teorema acima podemos construir um algoritmo que calcula o valor $\min\{\mathbf{1}y \mid yM(\mathcal{F}) \geq w, y \geq 0\}$. O algoritmo é o seguinte:

Selecione um vértice simplicial em G , digamos v , e suponha que v tenha peso w_v . O vértice v é elemento de um único clique maximal C em G ; atribua à C -ésima componente de y o valor w_v , subtraia w_v de todos os outros vértices em C , remova v e todos os vértices em G com pesos não positivos e repita o processo com o novo grafo G' e o novo vetor w' .

Assim, usando o mesmo raciocínio do exemplo anterior, concluimos que $\mathcal{F}$ e $b(\mathcal{F})$ possuem a propriedade min-max forte, o que nos leva a poder enunciar então que

Fato *Dado um grafo G triangulável, temos que para qualquer subgrafo induzido H de G o número cromático de H é igual à cardinalidade de um clique máximo em H . $\square$*

Apesar destes três exemplos nos fornecerem o mesmo resultado a respeito de três classes de grafos diferentes — o número cromático ser igual ao tamanho de um clique máximo para todos os subgrafos induzidos do grafo, não é verdade que esta propriedade vale para todo grafo.

Por exemplo, dado o grafo abaixo

é fácil verificar que o tamanho de um clique máximo é dois, enquanto que são necessárias três cores para uma coloração de vértices. (Compare com o exemplo à página 42).

Existe uma denominação para a classe de grafos que satisfazem tal propriedade: são os **grafos perfeitos**, que serão estudados a seguir. Como veremos, tais grafos nos darão um dos resultados mais importantes a respeito dos clutters anti-bloqueadores.

3.5 Grafos perfeitos

Para esta seção (e as três anteriores), sugerimos como referência Golumbic, 1980.

Inicialmente, vejamos algumas notações: Dado um grafo G , denotemos por

$\chi(G)$ o número cromático de G ,

$\pi(G)$ o número de partição de G (o número mínimo de cliques que cobrem G),

$\omega(G)$ o tamanho de um clique máximo em G e

$\alpha(G)$ o tamanho de um conjunto estável máximo em G .

Consideremos também as seguintes definições:

Um grafo G é χ -perfeito se $\chi(H) = \omega(H)$ para todo subgrafo induzido H de G ; G é π -perfeito se $\pi(H) = \alpha(H)$ para todo subgrafo induzido H de G e G é perfeito se é tanto χ -perfeito como π -perfeito.

Assim, um grafo G é χ -perfeito se e somente se, tomando $\mathcal{F}$ como o clutter dos cliques maximais de G , para todo $(0, 1)$ -vetor w temos que:

- a) o programa linear $\min \mathbf{1}y, yM(\text{ab}(\mathcal{F})) \geq w, y \geq 0$ tem uma solução inteira y e
- b) $\min \mathbf{1}y = \max\{w(F), F \in \mathcal{F}\}$,

e analogamente para π -perfeição, tomando $\mathcal{F}$ como sendo o clutter dos conjuntos estáveis maximais de G .

Segundo essas definições e os resultados anteriores, segue que tanto os grafos de comparabilidade, como os trianguláveis e os bipartidos são perfeitos.

Nos seus artigos de 1971 e 1972, Fulkerson abordou a forte ligação que existe entre grafos perfeitos e clutters anti-bloqueadores. Conjecturava-se na época que χ -perfeição (ou π -perfeição) implicaria em perfeição para um grafo G (esta era chamada a conjectura dos grafos perfeitos, devido a Berge, 1967). Fulkerson definiu então a χ -pluperfeição como sendo a propriedade de que o anti-bloqueador de um clutter $\mathcal{F}$ dos cliques maximais de um grafo G satisfaça a propriedade min-max forte e a pluperfeição como sendo a propriedade de que tanto $\mathcal{F}$ como $\text{ab}(\mathcal{F})$ satisfaçam a propriedade min-max forte. (Notemos que para a pluperfeição as componentes do vetor w são inteiras, e não somente 0's ou 1's, como na definição de perfeição.) Diante disso, é fácil ver — usando os resultados anteriores — que a χ -pluperfeição implica a pluperfeição.

Para demonstrar a então conjectura seria suficiente mostrar que χ -perfeição implica χ -pluperfeição. Fulkerson sugeriu que uma maneira de verificar isso seria mostrando que, se G é χ -perfeito e se substituirmos um vértice v em G por dois vértices v' e v'' , onde v' e v'' são unidos por uma aresta e cada um desses é ligado a todo vizinho de v (i.e., duplicamos v e unimos v à sua cópia), então o novo grafo G' é de novo χ -perfeito. (Notemos que através de tais substituições vértices com pesos inteiros k , $k > 1$, podem ser substituídos por vértices com pesos inteiros, menores do que k , que é justamente a operação de extensão aplicada ao clutter dos cliques maximais de G .)

Estendendo este conceito de substituição, dados dois grafos disjuntos G, H e x um vértice de G , dizemos que **substituímos x por H** se removemos x e unimos todo vértice de H aos vértices de G que eram adjacentes a x . Com esta extensão, Lovász, em 1972, continuou o trabalho de Fulkerson, nos dando o resultado final:

Teorema 3.5.1 *Substituindo em um grafo χ -perfeito alguns vértices por grafos χ -perfeitos, temos que o grafo final obtido é novamente χ -perfeito.*

Dem.: Podemos assumir que apenas um grafo χ -perfeito H é substituído no lugar de um vértice x de um grafo perfeito G . Seja G' o grafo resultante. É suficiente mostrar que $\chi(G') = \omega(G')$, já que para os subgrafos induzidos de G' , que são construídos da mesma forma que G' , o resultado segue analogamente.

Usamos indução em $k := \omega(G')$. Para $k = 1$ o resultado é óbvio.

Assumimos então $k > 1$. É suficiente encontrar um conjunto estável T de G' que intercepta todos os cliques com k elementos, já que então ao colorirmos estes vértices com a mesma cor e os vértices restantes com outras $k - 1$ cores (o que pode ser feito por hipótese), obtemos uma k -coloração de G' .

Seja $m := \omega(G)$, $n := \omega(H)$ e seja p a cardinalidade máxima de um clique contendo x . Então, obviamente,

$$k = \max \{m, n + p - 1\}.$$

Considere uma m -coloração de G e seja K o conjunto dos vértices que possuem a mesma cor que x . Seja ainda L o conjunto dos vértices estáveis de H que interceptam todo clique com n elementos de H . Então $T := L \cup (K - \{x\})$ é um conjunto estável em G' . Mais ainda, T intercepta todo clique com k elementos de G' . Realmente, se C é um clique com k elementos de G' e intercepta H então, obviamente, ele contém um clique com n elementos de H e assim um vértice de L . Por outro lado, se C não intercepta H , então C deve ser um clique com m elementos de G e, assim, C contém um vértice de $K - \{x\}$.

□

Corolário 3.5.2 *Se G é χ -perfeito (ou π -perfeito), então G é perfeito. $\square$*

Usando os teoremas anteriores obtemos uma forte caracterização dos pares de clutters anti-bloqueadores que satisfazem a propriedade min-max forte:

Teorema 3.5.3 *Um clutter $\mathcal{F}$ possui a propriedade min-max forte se e somente se $\mathcal{F}$ é o clutter dos cliques maximais de um grafo perfeito.*

Dem.: Se G é um grafo perfeito e $\mathcal{F}$ é o clutter dos cliques maximais de G , então $\mathcal{F}$ satisfaz a propriedade min-max forte (pois $\mathcal{F}$ é pluperfeito).

Por outro lado, se $\mathcal{F}$ possui tal propriedade, então sabemos pela proposição 3.1.8 que $\mathcal{F}$ é conforme e é, então (pela proposição 3.1.2) o clutter dos cliques maximais de $G(\mathcal{F})$. Além disso, pela propriedade min-max forte, $G(\mathcal{F})$ satisfaz as condições de grafo χ -perfeito, de onde concluimos, pelo corolário anterior, que $G(\mathcal{F})$ é perfeito. $\square$

Deste resultado segue imediatamente que

Corolário 3.5.4 (Lovász (1973)) *Um grafo G é perfeito se e somente se*

$$\alpha(H)\alpha(\overline{H}) \geq |H|$$

para todo subgrafo induzido H de G .

Dem.: Basta aplicar a propriedade max-max, lembrando que os conjuntos estáveis maximais de G são exatamente os cliques maximais de $\overline{G}$. $\square$

Usando agora a linguagem de grafos perfeitos e os resultados anteriores, podemos obter um resultado sobre as operações de eliminação, contração, completção e extensão e a propriedade min-max como um corolário do que foi visto:

Corolário 3.5.5 *Dado um clutter $\mathcal{F}$ sobre E que satisfaz a propriedade min-max e $e \in E$, então a completção e a extensão de $\mathcal{F}$ por e , a eliminação de e em $\mathcal{F}$, se $\mathcal{F} \setminus e \neq \emptyset$ são clutters que também possuem tal propriedade.*

Dem.: Seja $\mathcal{F}$ um clutter sobre E que satisfaz a propriedade min-max. Sabemos então que $G(\mathcal{F})$ é perfeito. Realizar uma completção em $\mathcal{F}$ por um elemento $e \in E$ é o mesmo

que adicionar um novo vértice a $G(\mathcal{F})$ e uni-lo a todo vértice adjacente a e , sem uni-lo a e . Podemos ver que este novo grafo $G(\text{comp}(\mathcal{F}, e))$ é perfeito, pois para qualquer subgrafo H de $G(\text{comp}(\mathcal{F}, e))$, se $e \in H$, então sabemos que $\chi(H) = \omega(H)$, pois H também é subgrafo de $G(\mathcal{F})$; senão, se $e, e' \in H$, então vale que $\chi(H) = \chi(H - e) = \omega(H - e) = \omega(H)$, já que não aumentamos o tamanho de nenhum clique e podemos colorir e' com a mesma cor de e ; se $e' \in H$ e $e \notin H$, então vale que $\chi(H) = \chi(H - e' + e) = \omega(H - e' + e) = \omega(H)$.

O resultado que concerne a operação de extensão é o próprio teorema 3.5.1, em linguagem de teoria de grafos.

Fazer uma eliminação de e em $\mathcal{F}$ é o mesmo que retirar e de $G(\mathcal{F})$ e eliminar todos os vértices que estão nos cliques que contêm e . $G(\mathcal{F} \setminus e)$ também é perfeito, pois dado H subgrafo induzido de $G(\mathcal{F} \setminus e)$, temos que H também é subgrafo de $G(\mathcal{F})$, e assim, $\chi(H) = \omega(H)$. $\square$

Podemos notar então que, apesar das semelhanças e analogias entre os conceitos de pares de clutters bloqueadores e anti-bloqueadores, existe uma “boa” caracterização para os clutters que satisfazem a propriedade min-max forte, enquanto que – por ora – nenhum resultado como o teorema 3.5.3 (aparentemente simples) existe para pares de clutters bloqueadores.

Capítulo 4

Poliedros Bloqueadores

Motivado por um importante manuscrito de Lehman, 1970, e pelo — já visto — teorema do fluxo-máximo corte mínimo, D.R. Fulkerson ampliou o conceito de pares de clutters bloqueadores, trazendo à luz, em 1970, a idéia de *poliedros bloqueadores* e, posteriormente em 1971, a de *poliedros anti-bloqueadores*.

Apresentaremos aqui alguns resultados de Fulkerson sobre os conceitos de *poliedros bloqueadores*, as relações existentes entre tais poliedros e pares de clutters bloqueadores e, finalizando, veremos alguns exemplos de pares de poliedros, que ilustram a teoria estudada e abordam diferentes métodos de tratamento de problemas de otimização combinatória.

4.1 Definições e resultados básicos

No capítulo 2 estávamos interessados em estudar pares de clutters bloqueadores que possuem a propriedade FMCM, pois esta nos permite dar os elementos de um clutter $\mathcal{F}$ como os vértices de $\{x \in \mathbb{R}_+^n \mid M(b(\mathcal{F}))x \geq 1\}$. Queremos agora caracterizar os elementos de um clutter como vértices de um poliedro definido por um sistema de inequações do tipo $ax \geq 1$ (poliedro que não por acaso será chamado do tipo *bloqueador*), onde os coeficientes de cada inequação não precisam ser necessariamente 0 ou 1, ou seja, o clutter não possui necessariamente a propriedade FMCM. Na verdade, generalizamos esta idéia um pouco mais e consideramos como ponto de partida, em lugar da matriz de incidência de um clutter, uma matriz não-negativa qualquer. Cabe aqui ressaltar que os resultados combinatórios mais relevantes que são conhecidos constituem casos de matrizes $(0, 1)$, porém veremos que a generalização considerada é bastante natural, fornecendo uma teoria rica e bem geral.

Definamos então o poliedro em questão: Dizemos que um poliedro $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^n$ é do **tipo bloqueador** se existe uma matriz A $m \times n$ não negativa tal que

$$\mathcal{B} = \{b \in \mathbb{R}_+^n \mid Ab \geq 1\}. \quad (4.1)$$

Notemos que $\mathcal{B}$ é ilimitado e, além disso, $\mathcal{B}$ pode ser representado como a soma vetorial do fecho convexo de seus vértices e do ortante não negativo, i.e.,

$$\mathcal{B} = \text{conv}(\{b^1, \dots, b^r\}) + \mathbb{R}_+^n, \quad (4.2)$$

onde $b^1, \dots, b^r$ são os vértices de $\mathcal{B}$.

Queremos agora encontrar uma forma não redundante de representar o poliedro $\mathcal{B}$. Consideremos para tanto as seguintes definições:

Uma linha a^i da matriz A é chamada **não-essencial** se a^i domina uma combinação convexa de outras linhas de A , ou seja, existem $\alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ com $\alpha_i = 0$, $\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$ tais que

$$a^i \geq \sum_{j=1}^m \alpha_j a^j ;$$

caso contrário, a^i é chamada **essencial**.

A partir destes conceitos podemos provar um primeiro resultado:

Proposição 4.1.1 *Uma inequação de 4.1 pode ser eliminada da definição de $\mathcal{B}$ se e somente se a linha correspondente de A é não-essencial.*

Dem.: Seja a uma linha de A em 4.1 e $\tilde{A}$ a matriz que se obtém de A removendo-se a linha a . Então a não pode ser retirada do sistema que define $\mathcal{B}$ se e só se o sistema

$$S1 \quad \begin{cases} \tilde{A}x \geq 1 \\ ax < 1 \\ x \geq 0 \end{cases} ,$$

tem solução. Por outro lado, dizer que a é não-essencial é equivalente a dizer que o seguinte sistema tem solução:

$$S2 \quad \begin{cases} y\tilde{A} \leq a \\ y\mathbf{1} = 1 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Mostraremos que S1 e S2 constituem um par alternativo — pelos menos um entre eles necessariamente tem solução, mas nunca ambos.

Provemos inicialmente que S1 e S2 não podem ambos ter solução ao mesmo tempo. Suponhamos que exista $\bar{x}$ satisfazendo S1 e $\bar{y}$ satisfazendo S2. Então

$$1 > a\bar{x} \geq \bar{y}\tilde{A}\bar{x} \geq \bar{y}\mathbf{1} = 1,$$

onde a primeira desigualdade vem de S1, a segunda de S2, a terceira de S1 e a última igualdade de S2, o que é um absurdo.

Suponhamos agora que S1 não tenha solução. Isso implica que o programa linear

$$\begin{array}{ll} \min ax & \max \mathbf{1}y \\ \tilde{A}x \geq \mathbf{1} & \text{cujo dual é } y\tilde{A} \leq a \\ x \geq 0 & y \geq 0 \end{array}$$

ou (a) não tem solução ou (b) $ax \geq 1$, para todo x viável (no primal).

(a) Se o programa linear não tem solução viável, como $\tilde{A}$ e a são não-negativas, sabemos que 0 é viável no programa dual e este é então ilimitado. Logo, existe $y \geq 0$ tal que $y\tilde{A} \leq a$ e $\mathbf{1}y = 1$.

(b) Se $ax \geq 1$, para todo x viável, então seja $\omega := \min\{ax \mid x \text{ é viável}\}$, $\omega \geq 1$. Pelo teorema de dualidade forte temos que existe $y \geq 0$ com $y\tilde{A} \leq a$ e $\mathbf{1}y = \omega$. Tomando $w := y/\omega$ temos que $w \geq 0$, $\mathbf{1}w = 1$ e, como $\tilde{A}$ é não-negativa e $\omega \geq 1$, segue que $w\tilde{A} = (y/\omega)\tilde{A} \leq y\tilde{A} \leq a$.

Portanto, S2 tem solução. $\square$

Baseando-nos no conceito de linha essencial — para este caso — dizemos que uma matriz A $m \times n$ cujas linhas são todas essenciais é **própria**. Incluímos entre as matrizes próprias os casos degenerados:

- (a) A é uma matriz com uma só linha de zeros ($B = \emptyset$);
- (b) A não tem nenhuma linha ($B = \mathbb{R}_+^n$).

Podemos agora definir o **bloqueador** de B como sendo o poliedro

$$\hat{B} = \{a \in \mathbb{R}_+^n \mid aB \geq \mathbf{1}\}.$$

Note que se B é vazio, então $\hat{B} = \mathbb{R}_+^n$; e se $B = \mathbb{R}_+^n$, então $\hat{B}$ é vazio.

O próximo teorema mostra que o conceito de “bloqueador” relaciona em pares os membros da classe dos poliedros do tipo bloqueador, e que facetas de um membro do par de tais poliedros representam vértices do outro e vice-versa.

Teorema 4.1.2 *Tomemos A uma matriz $m \times n$ não-negativa própria com linhas $a^1, \dots, a^m$ e seja $B = \{b \in \mathbb{R}_+^n \mid Ab \geq 1\}$ com vértices $b^1, \dots, b^r$. Tomemos ainda a matriz B com linhas $b^1, \dots, b^r$ e seja $\mathcal{A} = \{a \in \mathbb{R}_+^n \mid Ba \geq 1\}$. Então*

- (i) $\hat{B} = \mathcal{A}$;
- (ii) B é própria e os vértices de $\mathcal{A}$ são $a^1, \dots, a^m$;
- (iii) $\hat{\mathcal{A}} = B$.

Dem.: Provemos primeiramente (i). Seja $a \in \mathcal{A}$. Então $b^1 a \geq 1, \dots, b^r a \geq 1$. Se $b \in B$, então por 4.2 temos que $b = \sum_{i=1}^r \alpha_i b^i + z$, onde $z \geq 0, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$. Logo, $ab \geq \sum_{i=1}^r \alpha_i (ab^i) \geq 1$ e portanto $a \in \hat{B}$, e $\mathcal{A} \subseteq \hat{B}$. Analogamente, se $a \in \hat{B}$, então $ab \geq 1$ para todo $b \in B$ e, em particular, $ab^1 \geq 1, \dots, ab^r \geq 1$. Logo, $a \in \mathcal{A}$ e portanto $\hat{B} \subseteq \mathcal{A}$, o que completa a prova de que $\mathcal{A} = \hat{B}$.

Para mostrar (ii), suponhamos que $b^1 \geq \sum_{i=2}^r \alpha_i b^i$, onde $\alpha_i \geq 0, \sum_{i=2}^r \alpha_i = 1$. Seja $y = \sum_{i=2}^r \alpha_i b^i$. Então $b^1 = y + z, z \geq 0$. Se $z = 0$, então é claro que b^1 não é vértice. Se $z \neq 0$, então $y + \frac{1}{2}z, y + \frac{3}{2}z$ são pontos distintos de B cuja média é b^1 , novamente contradizendo o fato de que b^1 é um vértice de B . Logo, B é própria.

Seja agora $\mathcal{C} = \text{conv}(\{a^1, \dots, a^m\})$. Mostraremos que $\mathcal{C} + \mathbb{R}_+^n = \mathcal{A}$. Para tanto, tomemos inicialmente $x \in \mathcal{C} + \mathbb{R}_+^n$, sendo $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i a^i + z, z \geq 0, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$. Então $b^j x = b^j \sum_{i=1}^m \alpha_i a^i + b^j z \geq 1$. Logo, $x \in \mathcal{A}$ e $\mathcal{C} + \mathbb{R}_+^n \subseteq \mathcal{A}$. Se não tivermos a igualdade, então, pelo teorema do hiperplano separador, existem $b \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que $bx \geq \alpha$ para todo $x \in \mathcal{C} + \mathbb{R}_+^n$, enquanto que $ba < \alpha$ para algum $a \in \mathcal{A}$. Como $bx \geq \alpha$ para todo $x \in \mathcal{C} + \mathbb{R}_+^n$, devemos ter que $b \geq 0$. Logo, $\alpha > ba \geq 0$ e $(1/\alpha)bx \geq 1$ para todo $x \in \mathcal{C} + \mathbb{R}_+^n$. Em particular, $(1/\alpha)ba^i \geq 1, i = 1, \dots, m$. Logo $(1/\alpha)b \in B$ e $(1/\alpha)b = \sum_{i=1}^r \beta_i b^i + z$, onde $z \geq 0, \beta_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \beta_i = 1$. Mas então

$$1 > \frac{1}{\alpha} ba = \sum_{i=1}^r \beta_i b^i a + za \geq 1,$$

contradição! Logo, $\mathcal{C} + \mathbb{R}_+^n = \mathcal{A}$.

Mais ainda, temos que as linhas $a^1, \dots, a^m$ de A são os vértices de $\mathcal{A}$. Pois suponhamos que a^1 não seja vértice. Então $a^1 = (1/2)(x + y)$, onde $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i a^i + u \neq a^1, y = \sum_{i=1}^m \beta_i a^i + v \neq a^1, \alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \sum_{i=1}^m \beta_i = 1$ e $u \geq 0, v \geq 0$. Sabemos que $\alpha_1 + \beta_1 < 2$, pois $x \neq a^1, y \neq a^1$. Logo,

$$a^1 = \sum_{i=1}^m \frac{(\alpha_i + \beta_i)}{2} a^i + \frac{1}{2}(u + v).$$

Seja $\gamma_i := (\alpha_i + \beta_i)/2$. Então $\gamma_1 < 1$ e

$$a^1 \geq \sum_{i=2}^m \frac{\gamma_i}{1 - \gamma_1} a^i, \frac{\gamma_i}{1 - \gamma_1} \geq 0, \sum_{i=2}^m \frac{\gamma_i}{1 - \gamma_1} = 1,$$

o que contradiz a hipótese de que A é própria e conclui a prova de (ii).

A parte (iii) do teorema segue de (i) e (ii). $\square$

Como a matriz B do teorema é dada de maneira única, podemos defini-la como sendo a **matriz bloqueadora** da matriz A . A matriz bloqueadora de B é, neste caso, A . Dizemos então que A, B é um **par de matrizes bloqueadoras** (ou um **par bloqueador**).

A partir do teorema 4.1.2 obtemos que, dada a matriz A que define $\mathcal{B}$, a matriz B que define $\mathcal{A}$ pode ser determinada por um processo de geração de vértices do poliedro $\mathcal{B}$. (Por exemplo, adicionamos à matriz A a matriz identidade $I_{n \times n}$ e então procuramos uma submatriz não-singular $\bar{A}$ $n \times n$ a partir da matriz construída. Resolvemos em seguida um sistema de equações com $\bar{A}$ como matriz dos coeficientes e com lado direito 1 ou 0 conforme a linha correspondente de $\bar{A}$ pertença a A ou a I . Se a solução correspondente b satisfaz $b \geq 0$, $Ab \geq 1$, então b é um vértice de $\mathcal{B}$.)

Por exemplo, tomando

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1/2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

obtemos como sua matriz anti-bloqueadora a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Os poliedros definidos por tais matrizes estão representados abaixo.

4.2 Propriedades de matrizes bloqueadoras

Observemos que, em se tratando de matrizes $(0,1)$, assumir que a matriz A é própria é equivalente a assumir que A é a matriz de incidência de um clutter $\mathcal{F}$. Temos então a questão natural: Quando é que a matriz bloqueadora da matriz de incidência de um clutter corresponde à matriz de incidência do clutter bloqueador? O capítulo anterior nos fornece uma resposta: basta que ou o clutter $\mathcal{F}$ ou $b(\mathcal{F})$ tenha a propriedade FMCM, ou que a desigualdade min-min valha para $\mathcal{F}$ ou $b(\mathcal{F})$. Mas em geral, como nem todo clutter possui tal propriedade, a matriz B contém as linhas de $M(b(\mathcal{F}))$ e mais outras linhas com componentes fracionárias.

Podemos estender esta propriedade FMCM para matrizes e poliedros: dadas A e B matrizes $m \times n$ e $r \times n$ próprias com linhas $a^1, \dots, a^m$ e $b^1, \dots, b^r$ respectivamente, dizemos que a igualdade FMCM (fluxo-máximo corte-mínimo) ou max-min vale para A, B (nesta ordem) se, para todo $w \in \mathbb{R}_+^n$, temos que

$$\max\{1y \mid yA \leq w, y \geq 0\} = \min\{b^j w \mid b^j \text{ é linha de } B\} \quad (4.3)$$

Dizemos ainda que a desigualdade min-min (ou comprimento-largura) vale para A, B se, para todo $l, c \in \mathbb{R}_+^n$ temos

$$\left(\min_{1 \leq i \leq m} a^i l\right) \left(\min_{1 \leq j \leq r} b^j c\right) \leq lc. \quad (4.4)$$

Observação: Notemos que, na definição da propriedade FMCM, poderíamos ter equivalentemente exigido a validade da igualdade só para $w \in \mathbb{R}_+^n$, onde w não tem componentes nulas.

Na verdade, a definição da propriedade FMCM e da desigualdade min-min apareceu inicialmente em Lehman, 1970, onde este caracterizava justamente as matrizes $(0,1)$ que formavam um par bloqueador; e, ao trabalhar com matrizes de incidência de clutters de matróides binários, Seymour, em 1977, particularizou estas definições como apresentadas no segundo capítulo.

Caracterizando matrizes não necessariamente $(0,1)$ temos um resultado parcialmente análogo ao encontrado sobre clutters bloqueadores — resultado que pode ser muito útil para se provar que duas matrizes formam um par bloqueador. Notemos que novamente vai existir uma relação forte entre o problema de encontrar um w -packing máximo de uma matriz (problema de maximização em 4.3) e o de encontrar a matriz bloqueadora desta mesma matriz. Acabaremos por caracterizar as soluções do problema do w -packing para uma matriz A em função das linhas da sua matriz bloqueadora B . Mais precisamente:

Teorema 4.2.1 (i) Seja A, B um par de matrizes bloqueadoras. Então a igualdade FMCM vale para A, B e também para B, A , e a desigualdade min-min vale para A, B .

(ii) Sejam A, B matrizes próprias cujas linhas $a^1, \dots, a^m$ e $b^1, \dots, b^r$ satisfazem $a^i b^j \geq 1$. Se a desigualdade min-min vale para A, B , então A, B é um par bloqueador.

(iii) Sejam A e B matrizes próprias. Se a igualdade FMCM vale para A, B , então A, B é um par bloqueador.

Dem.: Suponhamos que A, B seja um par bloqueador. Veremos que a igualdade FMCM para A, B segue do teorema 4.1.2 e do teorema de dualidade forte de programação linear. O programa linear dual do programa de maximização em 4.3 é

$$\begin{aligned} \min & \omega b \\ & Ab \geq 1 \\ & b \geq 0. \end{aligned}$$

O valor ótimo deste programa é atingido em um vértice do conjunto $\mathcal{B} = \{b \in \mathbb{R}_+^n \mid Ab \geq 1\}$, ou seja, pelo teorema 4.1.2, em uma linha de B , e assim A, B satisfaz FMCM. Analogamente, segue que B, A satisfaz FMCM.

Para ver que a desigualdade min-min vale para A, B , seja

$$\lambda := \min_{1 \leq i \leq m} a^i l = \min_{a \in \mathcal{A}} a l, \quad (1)$$

$$\omega := \min_{1 \leq j \leq r} b^j c = \min_{b \in \mathcal{B}} b c. \quad (2)$$

Aqui $a^1, \dots, a^m$ são as linhas de A ; $b^1, \dots, b^r$ são as linhas de B e $\mathcal{A} = \{a \in \mathbb{R}_+^n \mid Ba \geq 1\}$, $\mathcal{B} = \{b \in \mathbb{R}_+^n \mid Ab \geq 1\}$. A segunda igualdade em (1) (resp. a segunda em (2)) segue do teorema 4.1.2 e do fato de que o valor ótimo de uma função linear definida sobre $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) ocorre em um vértice de $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$).

Se $\lambda = 0$ ou $\omega = 0$, a igualdade vale trivialmente. Se $\lambda \neq 0$ e $\omega \neq 0$, então temos que $(l/\lambda)a \geq 1$ para todo $a \in \mathcal{A}$ e $(c/\omega)b \geq 1$ para todo $b \in \mathcal{B}$ por (1) e (2). Conseqüentemente $l/\lambda \in \hat{\mathcal{A}}$ e $c/\omega \in \hat{\mathcal{B}} = \mathcal{A}$. Assim $(l/\lambda)(c/\omega) \geq 1$, i.e., $lc \geq \lambda\omega$.

(ii) Sejam A e B matrizes próprias cujas linhas satisfazem $a^i b^j \geq 1$ e definamos $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Ax \geq 1\}$, $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Bx \geq 1\}$. Então $\hat{\mathcal{B}} = \text{conv}(\{a^1, \dots, a^m\}) + \mathbb{R}_+^n$ e $\hat{\mathcal{A}} = \text{conv}(\{b^1, \dots, b^r\}) + \mathbb{R}_+^n$ satisfazem $\hat{\mathcal{A}}\hat{\mathcal{B}} \geq 1$. Assim $\hat{\mathcal{A}} \subseteq \hat{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$. Assumamos agora que a desigualdade min-min vale para A, B e seja $b \in \mathcal{B}$. Queremos mostrar que $b\mathcal{A} \geq 1$. Assim, seja $a \in \mathcal{A}$. Pela desigualdade min-min aplicada a a, b obtemos:

$$ab \geq \left(\min_{1 \leq j \leq r} ab^j \right) \left(\min_{1 \leq i \leq m} ba^i \right) \geq 1,$$

dado que $a \in \mathcal{A}$ e $b \in \mathcal{B}$. Logo, $\mathcal{B} \subseteq \hat{\mathcal{A}}$ e, portanto, $\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{B}$.

(iii) Sejam A e B matrizes próprias e assumamos que a igualdade FMCM vale para A, B . Sejam $a^1, \dots, a^m$ as linhas de A , sejam $b^1, \dots, b^r$ as linhas de B e seja $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Ax \geq \mathbf{1}\}$.

Suponhamos que $b^k \notin \mathcal{B}$. Pelo teorema do hiperplano separador existem $w \in \mathbb{R}_+^n$ e $\alpha > 0$ tais que $wb^k < \alpha \leq wb$ para todo $b \in \mathcal{B}$. Mas pelo teorema de dualidade forte de programação linear e pela igualdade FMCM temos que

$$\min_{b \in \mathcal{B}} bw = \min_{1 \leq j \leq r} b^j w,$$

uma contradição. Assim $b^j \in \mathcal{B}$ para $1 \leq j \leq r$ e, conseqüentemente $a^i b^j \geq 1$ para $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq r$. Finalizaremos a demonstração mostrando que a desigualdade min-min vale para A, B . Seja então $l, w \in \mathbb{R}_+^n$ e definamos

$$\lambda := \min_{1 \leq i \leq m} a^i l, \quad \omega := \min_{1 \leq j \leq r} b^j w.$$

Pela igualdade FMCM, existe $y = (\eta_1, \dots, \eta_m) \geq 0$ tal que $yA \leq w$ e $\mathbf{1}y = \omega$. Assim

$$\lambda\omega = \lambda(\mathbf{1}y) = \lambda \sum_{i=1}^m \eta_i \leq \sum_{i=1}^m (a^i l) \eta_i = l \sum_{i=1}^m \eta_i a^i \leq lw.$$

Logo, a desigualdade min-min vale para A, B e, pelo item (ii), A, B é um par bloqueador.

□

Relacionando matrizes e clutters de uma maneira mais estreita, podemos estender o conceito de clutter Mengeriano para matrizes, usando agora a denominação dada por Fulkerson.

Dizemos que um par de matrizes bloqueadoras próprias A, B , ambas $(0, 1)$ satisfaz a **igualdade FMCM (max-min) forte** se o programa de maximização em 4.3 tiver solução inteira sempre que w for um vetor inteiro. Assim, se A é a matriz de incidência de um clutter, isto equivale exatamente à nossa definição de Mengeriano para o clutter $\mathcal{F}$. Em vista da definição da igualdade FMCM, é plausível — e pode ser facilmente provado — que uma condição necessária para a igualdade FMCM forte é que a matriz B seja a matriz $M(b(\mathcal{F}))$, onde $\mathcal{F}$ é o clutter tal que A é a matriz de incidência de $\mathcal{F}$. Mas esta condição não é, entretanto, suficiente, como vimos no exemplo dado no capítulo 2 sobre T -junções & T -cortes. Tal par satisfaz a igualdade FMCM, não sendo porém Mengeriano, ou seja, as matrizes de incidência dos clutters satisfazem a igualdade FMCM, mas não a FMCM forte.

Continuando com as nossas extensões de propriedades e operações já definidas para clutters, podemos falar também de contração e eliminação de uma coordenada em uma

matriz. Assim, se A é uma matriz própria $m \times n$, por **contração** da coordenada $i \in \{1, \dots, n\}$ em A entendemos o seguinte: eliminamos a i -ésima coluna de A e, em seguida, todas as linhas não-essenciais da matriz resultante. A **eliminação** da coordenada i em A consiste em retirar a i -ésima coluna de A e, então, retirar todas as linhas que tinham uma entrada positiva na coluna i .

Observemos que as matrizes resultantes de uma contração ou eliminação de uma coordenada de uma matriz própria são próprias.

Geometricamente, contrair a coordenada i em A é fazer a intersecção do poliedro $\mathcal{B} = \{b \in \mathbb{R}_+^n \mid Ab \geq \mathbf{1}\}$ com o hiperplano $e_i = 0$. É fácil ver que se primeiramente contrairmos a coordenada i e então eliminarmos a coordenada j , é equivalente a inicialmente eliminarmos a coordenada j e então contrairmos a coordenada i . Podemos então, assim como nos clutters, falar em **menores** de A (ou de $\mathcal{B}$).

A relação entre estas operações e pares de matrizes bloqueadoras é dado por:

Proposição 4.2.2 *Seja A, B um par de matrizes bloqueadoras. Então se contrairmos a coordenada i em A , a matriz bloqueadora da matriz resultante é obtida a partir de B eliminando-se a coordenada i .*

Dem.:

Seja $\hat{A}$ a matriz resultante da contração da coordenada i na matriz A e $\hat{B}$ a matriz resultante da eliminação da coordenada i da matriz B . Mostremos que $\hat{A}, \hat{B}$ é um par bloqueador.

Provemos inicialmente que $\hat{a}^k \hat{b}^j \geq 1$, onde $\hat{a}^k, \hat{b}^j$ são linhas de $\hat{A}$ e $\hat{B}$, respectivamente. Notemos que

$$\hat{a}^k \hat{b}^j = \sum_{l=1}^n a_l^k b_l^j - a_i^k b_i^j \leq a^k b^j.$$

Estamos supondo que a linha $\hat{a}^k$ de $\hat{A}$ (resp. $\hat{b}^j$ de $\hat{B}$) corresponde à linha a^k de A (resp. b^j de B).

(a) Se $a_i^k b_i^j = 0$, então $\hat{a}^k \hat{b}^j = a^k b^j \geq 1$.

(b) Se $a_i^k b_i^j \neq 0$, então $b_i^j \neq 0$, contradizendo a construção de $\hat{B}$ a partir da eliminação da coordenada i de B .

Verifiquemos agora que a desigualdade min-min vale para $\hat{A}, \hat{B}$.

Suponhamos por absurdo que existam $\hat{l}, \hat{c} \in \mathbb{R}_+^{n-1}$ tais que

$$\left(\min_{1 \leq i \leq \hat{m}} \hat{l} \hat{a}^i \right) \left(\min_{1 \leq j \leq \hat{r}} \hat{c} \hat{b}^j \right) > \hat{l} \hat{c},$$

onde $\hat{m}$ e $\hat{r}$ são o número de linhas de $\hat{A}$ e $\hat{B}$, respectivamente. Sejam $l, c \in \mathbb{R}_+^n$ tais que

$$l_k := \begin{cases} \hat{l}_k, & k \neq i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{e} \quad c_k := \begin{cases} \hat{c}_k, & k \neq i \\ \min_{1 \leq j \leq \hat{r}} \hat{c} \hat{b}^j, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então $\min_{1 \leq i \leq \hat{m}} \hat{l} \hat{a}^i = \min_{1 \leq k \leq m} l a^k$ e $\min_{1 \leq j \leq \hat{r}} \hat{c} \hat{b}^j = \min_{1 \leq s \leq r} c b^s$, o que nos leva a concluir que l, c são testemunhas de que a desigualdade min-min não vale para A, B — absurdo!

Assim, $\hat{A}, \hat{B}$ é um par bloqueador. $\square$

Notemos que se tratarmos somente de matrizes $(0,1)$, o teorema 2.1.9 nos diz que

Proposição 4.2.3 *Se A, B é um par de matrizes $(0, 1)$ que satisfaz a propriedade max-min forte, então as matrizes $\hat{A}$ obtida a partir de A pela contração de uma coordenada i , e $\hat{B}$ obtida pela eliminação desta coordenada i satisfazem a igualdade max-min forte. $\square$*

Como uma operação inversa à contração, definimos a **extensão** da coordenada i em uma matriz A como sendo a obtenção da matriz $\tilde{A}$ a partir de A , onde $\tilde{A}$ é uma matriz $m \times (n+1)$, com as colunas de A e a coluna adicional i' que é exatamente igual à coluna i . E como inversa da operação de eliminação, definimos também a **completação** de uma matriz B $r \times n$ por uma coordenada i como sendo a operação que constrói a matriz B^* $r^* \times (n+1)$, onde $r^* = r + |\{j \mid b_i^j \neq 0\}|$. assim obtida: tomamos as r linhas de B e acrescentamos a elas uma nova coluna i' nula; depois, para cada linha b^j de B com $b_i^j \neq 0$, construímos uma linha $b^{*j'}$ tal que

$$b^{*j'}_l = \begin{cases} b_l^j, & \text{se } l \neq i, \\ b_i^j, & \text{se } l = i', \\ 0, & \text{se } l = i. \end{cases}$$

Temos então que

Proposição 4.2.4 *Se A, B é um par de matrizes bloqueadoras, então a matriz $\tilde{A}$ resultante da extensão de uma coordenada i , e a matriz B^* obtida pela completção de B pela coordenada i formam um par de matrizes bloqueadoras.*

Dem.: A demonstração é semelhante à demonstração da proposição 4.2.2.

É fácil ver que $\tilde{a}^k b^{*j} \geq 1$, já que $\tilde{a}^k b^{*j} = a^k b^j$ para as linhas b^{*j} que provêm diretamente das linhas de B , às quais foi apenas acrescentada uma coordenada nula. Para as outras linhas de B^* temos que

$$\begin{aligned}\tilde{a}^k b^{*j} &= a^k b^j - \tilde{a}_i^k b_i^{*j} + \tilde{a}_i^k b_i^{*j}, \\ &= a^k b^j \geq 1\end{aligned}$$

onde a segunda igualdade vem da definição de B^* e de $\tilde{A}$.

Verifiquemos agora que a desigualdade min-min vale para $\tilde{A}$, B^* .

Suponhamos por absurdo que existam $\hat{l}, \hat{c} \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ tais que

$$\left(\min_{1 \leq k \leq m} \hat{l} \tilde{a}^k \right) \left(\min_{1 \leq j \leq r^*} \hat{c} b^{*j} \right) > \hat{l} \hat{c}.$$

Sejam $l, c \in \mathbb{R}_+^n$ assim definidos:

$$l_k := \begin{cases} \hat{l}_k, & k \neq i \\ \hat{l}_i + \hat{l}_{i'}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{e} \quad c_k := \begin{cases} \hat{c}_k, & k \neq i \\ \min\{\hat{c}_i, \hat{c}_{i'}\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então $\min_{1 \leq i \leq m} \hat{l} \tilde{a}^i = \min_{1 \leq k \leq m} l a^k$ e $\min_{1 \leq j \leq r^*} \hat{c} b^{*j} = \min_{1 \leq j \leq r} c b^j$, e $\hat{l} \hat{c} \geq l c$, o que nos mostra que l, c são testemunhas de que a desigualdade min-min não vale para A, B — absurdo! $\square$

Propriedades claras destas operações são a comutatividade e associatividade. Diante disso, dado $w \in \mathbb{Z}_+^n$, $w \geq 1$, definimos a w -extensão de A como sendo a operação de fazer $w_i - 1$ extensões da coordenada i para cada $w_i > 1$; e do mesmo modo definimos a w -completação de uma matriz B .

Assim como fizemos com as operações eliminação e contração, ao considerarmos apenas matrizes $(0, 1)$, podemos aproveitar a proposição 2.1.10 para obter o seguinte resultado:

Proposição 4.2.5 *Se A, B é um par de matrizes $(0, 1)$ próprias que satisfaz a igualdade max-min forte, então, dado $w \in \mathbb{Z}_+^n$, $w \geq 1$, o par de matrizes $\tilde{A}, B^*$ obtido de A, B partir de uma w -extensão e uma w -completação, respectivamente, satisfaz a igualdade max-min forte. $\square$*

Acompanhando agora este estudo de matrizes $(0, 1)$ e das operações extensão e completção, podemos obter um resultado bastante interessante, que nos permitirá mostrar mais facilmente que um par de matrizes é bloqueador.

Proposição 4.2.6 *Seja A, B um par de matrizes racionais que, para $w = 1$, satisfaz a seguinte igualdade*

$$\max\{1y \mid yA \leq w, y \geq 0\} = \min\{wb^j \mid b^j \text{ é linha de } B\}. \quad (4.5)$$

Então, se para todo $\bar{w} \in \mathbb{Z}_+^n$, o par de matrizes $A^, \hat{B}$ obtido de A, B por $\bar{w}$ -completação e $\bar{w}$ -extensão, respectivamente, também satisfaz a seguinte igualdade, para $w = 1$:*

$$\max\{1y \mid yA^* \leq w, y \geq 0\} = \min\{w\hat{b}^j \mid \hat{b}^j \text{ é linha de } \hat{B}\}, \quad (4.6)$$

então A, B satisfaz a igualdade FMCM, e as matrizes próprias obtidas a partir de A e B é um par de matrizes bloqueadoras.

Dem.: Provemos que para todo $\bar{w} \in \mathbb{Z}_+^n$, $\bar{w} \geq 1$, A, B satisfaz 4.5 com $w = \bar{w}$. Notemos que basta mostrar o resultado para $\bar{w} \geq 1$.

Provemos inicialmente para um vetor $\bar{w}$ tal que $\bar{w}_i = 2$ e todas as outras componentes são iguais a 1.

Por hipótese, o vetor $\hat{x}$ ótimo no programa $\min\{1x \mid A^*x \geq 1, x \geq 0\}$, dual do programa de maximização em 4.5, é uma linha de $\hat{B}$. Dada a construção da matriz A^* , se restringirmos $\hat{x}$ a $\bar{x} \in \mathbb{R}_+^n$, contraindo a componente i' (componente estendida a partir de i), podemos verificar que $\bar{x}$ satisfaz $A\bar{x} \geq 1$, $\bar{x} \geq 0$ e, mais ainda, $\bar{w}\bar{x} = 1\hat{x}$ é mínimo, pois caso contrário, se existisse x solução de $Ax \geq 1, x \geq 0$ com $\bar{w}x < \bar{w}\bar{x}$, ao realizarmos uma $\bar{w}$ -extensão em x , obteríamos um vetor x' tal que $A^*x' \geq 1, x' \geq 0$ e $1x' = \bar{w}x < \bar{w}\bar{x} = 1\hat{x}$. Absurdo! Logo, A, B satisfaz 4.5 com tal $\bar{w}$ (pois $\hat{x}$ é uma linha de B).

Provaremos agora o resultado para um vetor $\bar{w} \in \mathbb{Z}_+^n$, qualquer diferente do caso anterior.

Seja então um vetor $\bar{w} \in \mathbb{Z}_+^n$ e $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\bar{w}_j > 1$. Construímos um vetor $w' \in \mathbb{Z}_+^n$ a partir de $\bar{w}$ do seguinte modo:

$$w'_i = \begin{cases} \bar{w}_i, & \text{se } i \neq j, \\ \bar{w}_j - 1, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Fazemos agora uma completção de A e uma extensão de B pela coordenada j , obtendo o par $A_j^*, \hat{B}_j$. Tal par, por hipótese, satisfaz a igualdade 4.6 com $w = 1$. Seja agora o par $A_{w'}^*, \hat{B}_{w'}$ obtido a partir de $A_j^*, \hat{B}_j$ por uma w' -completção e uma w' -extensão, resp. É fácil ver que este par pode ser obtido a partir de A, B por uma $\bar{w}$ -completção e uma $\bar{w}$ -extensão, resp. Logo, por hipótese, tal par satisfaz a igualdade 4.6 com $w = 1$.

Usando agora o fato de que o par $A_j^*, \tilde{B}_j$ satisfaz a igualdade 4.6 com $w = w'$, por um raciocínio análogo ao feito no caso anterior, aplicado aqui para o par $A_j^*, \tilde{B}_j$, satisfazendo 4.6 com $w = w'$, podemos provar que A, B satisfaz a igualdade 4.5 com $w = \bar{w}$. Logo, podemos concluir o mesmo para todo $\bar{w} \in \mathbb{Z}_+^n$.

Suponhamos agora, por absurdo, que exista $\bar{w} \in \mathbb{R}_+^n$ tal que

$$\max\{1y \mid yA \leq \bar{w}, y \geq 0\} \neq \min\{\bar{w}b^j \mid b^j \text{ é linha de } B\},$$

ou seja, existe $\bar{x}$ vértice de $\mathcal{B} = \{x \mid Ax \geq 1, x \geq 0\}$ tal que $\bar{x}$ não é uma linha de B . Sabemos que existe um hiperplano suporte $cx = \delta$ para $\bar{x}$, i.e., existe um vetor racional c (e como A é não negativa, c não-negativo), tal que $c\bar{x} = \delta < cx, \forall x \in \mathcal{B}, x \neq \bar{x}$; em particular, $cb^i \neq \delta$, para toda linha b^i de B , $b_i \neq \bar{x}$. Construimos a partir de c um vetor $\bar{c}$ inteiro não negativo, multiplicando c pelo mínimo múltiplo comum dos possíveis denominadores das componentes de c . É fácil ver que $\bar{x}$ é a solução única do programa de minimização em 4.5 com $w = \bar{c}$. Mas agora, como $\bar{c} \in \mathbb{Z}_+^n$, por hipótese existe b^j linha de B que é solução do programa de minimização em 4.5, e assim

$$\bar{c}\bar{x} = \bar{c}b^j,$$

i.e., $\delta = c\bar{x} = cb^i$, uma contradição.

Logo, A, B satisfaz 4.5 para todo $\bar{w} \in \mathbb{R}_+^n$, e portanto satisfaz a igualdade FMCM. Logo, as matrizes próprias obtidas a partir de A, B são matrizes bloqueadoras. $\square$

Podemos enunciar e provar um resultado mais forte do que esse, caso as matrizes na hipótese satisfaçam a igualdade max-min forte:

Proposição 4.2.7 *Seja A, B um par de matrizes bloqueadoras $(0, 1)$ que satisfaz a igualdade*

$$\max\{1y \mid yA \leq w, y \in \mathbb{Z}_+^m\} = \min\{wb^j \mid b^j \text{ é linha de } B\}, \quad (4.7)$$

quando $w = 1$. Então, se para todo $\bar{w} \in \mathbb{Z}_+^n$ as matrizes $A^, \tilde{B}$ obtidas por $\bar{w}$ -completação e $\bar{w}$ -extensão de A, B , respectivamente, satisfazem a igualdade*

$$\max\{1y \mid yA^* \leq 1, y \in \mathbb{Z}_+^{m^*}\} = \min\{1\tilde{b}^j \mid \tilde{b}^j \text{ é linha de } \tilde{B}\}, \quad (4.8)$$

então A, B satisfaz a igualdade max-min forte.

Dem.: Sabemos pela proposição 4.2.4, que $A^*, \tilde{B}$ é um par bloqueador. Seja agora $y \in \mathbb{Z}_+^{m^*}$ uma solução ótima do problema de maximização em 4.8.

Para cada $\bar{w}_i$, existe $\bar{w}_i - 1$ colunas obtidas ao fazer $\bar{w}_i - 1$ completções de A . Sem risco de confusão, cada uma delas será chamada de i' .

Se a^{*k} e a^{*l} são linhas de A^* tais que

$$\begin{cases} a_j^{*k} = a_j^{*l}, & j \notin \{i, i'\}, \\ a_i^{*k} = a_{i'}^{*l}, \\ a_{i'}^{*k} = a_i^{*l} = 0, \end{cases}$$

chamaremos tais linhas de **linhas gêmeas**.

Construímos agora $\bar{y} \in \mathbb{Z}_+^m$ do seguinte modo:

$$\bar{y}_j := y_j + \sum y_{j'}, \quad \text{onde a somatória é sobre todas as linhas gêmeas de } a^{*j}.$$

Então não é difícil ver que $\bar{y}A \leq \bar{w}$ e $\mathbf{1}\bar{y} = \mathbf{1}y$. Ainda mais, se $\mathbf{1}y = \mathbf{1}\tilde{b}^k$, onde $\tilde{b}^k$ é linha de $\hat{B}$, então $\mathbf{1}\bar{y} = \bar{w}\tilde{b}^k$, i.e., A, B satisfaz a igualdade 4.7 com $w = \bar{w}$. Como isso vale para todo $\bar{w} \in \mathbb{Z}_+^n$, então A, B satisfaz a igualdade max-min forte. $\square$

Analogamente ao corolário 2.1.2 para clutters bloqueadores, existe um “teorema de coloração” para um par de matrizes bloqueadoras, i.e.,

Teorema 4.2.8 *Se A, B é um par de matrizes bloqueadoras, então para qualquer partição do conjunto de colunas $\{1, \dots, n\}$ de A e B em dois conjuntos vermelho e azul (não excluimos conjuntos vazios), ou existe um vetor-linha de A cujo suporte é azul ou um vetor-linha de B cujo suporte é vermelho, mas não ambos. (Aqui o suporte de um vetor $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é o conjunto de índices $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tais que $\alpha_i \neq 0$).*

Dem.: É claro que não podem ocorrer as duas alternativas, já que então teríamos alguma linha de A e alguma linha de B com produto interno zero.

Consideremos agora a igualdade FMCM aplicada a A, B , com o vetor w construído de modo que

$$w_i := \begin{cases} 0, & \text{se } i \text{ é vermelho} \\ 1, & \text{se } i \text{ é azul.} \end{cases}$$

Se não existe uma linha em A cujo suporte é azul, então temos que o máximo em

$$\begin{aligned} \max \mathbf{1}y \\ yA \leq w \\ y \geq 0 \end{aligned}$$

é atingido com $y = 0$, já que toda linha de A possui algum elemento diferente de zero com índice vermelho.

Como A, B é um par bloqueador, obtemos que $\min_{1 \leq j \leq r} b^j w = 0$, i.e., se b^k é a linha na qual tal mínimo é atingido, claramente b^k tem suporte vermelho. $\square$

Em relação aos poliedros bloqueadores $\mathcal{B} = \{b \in \mathbb{R}_+^n \mid Ab \geq 1\}$ e $\mathcal{A} = \{a \in \mathbb{R}_+^n \mid Ba \geq 1\}$ definidos pelas matrizes bloqueadoras A, B , o teorema de coloração afirma que para qualquer partição azul-vermelha das coordenadas, ou existe $a \in \mathcal{A}$ com suporte azul, ou $b \in \mathcal{B}$ com suporte vermelho, mas não ambos.

Podemos apresentar como exemplos de pares de poliedros bloqueadores cada um dos exemplos estudados no capítulo anterior, associando a cada clutter o poliedro formado pelo fecho convexo dos vetores característicos do clutter em questão.

Assim, considerando os pares caminhos & cortes em um grafo, coberturas de arestas & estrelas, e T -junções & T -cortes em grafos bipartidos, como todos satisfazem a igualdade FMCM, é fácil verificar que para cada um destes pares o poliedro bloqueador associado a um clutter do par é exatamente o poliedro associado ao clutter bloqueador, resultado este baseado no Teorema 4.2.1(iii). Como em cada um destes pares as matrizes que descrevem os poliedros são inteiras (pois são formadas por vetores característicos) e os clutters em questão são Mengerianos, cada um dos poliedros satisfaz também a igualdade FMCM forte. Isto só não ocorre para o caso de T -junções e T -cortes para grafos quaisquer, como já observamos quando da definição desta propriedade. No último capítulo estudaremos algumas classes de matrizes especiais relacionadas com a propriedade Mengeriana.

4.3 Coberturas minimais

Estudaremos agora um caso ainda não tão bem resolvido – se considerarmos o caso geral, ao contrário dos exemplos estudados no capítulo 2, onde conseguíamos descrever através de matrizes $(0, 1)$ os poliedros associados aos clutters em questão (com exceção do exemplo das T -junções & T -cortes).

Seja A a matriz de incidência de todas as coberturas minimais de um grafo. Seria interessante conhecer uma caracterização dos vetores-linhas de A como vértices de um poliedro.

Aqui desigualdades caracterizando o fecho convexo das linhas de A não são conhecidas. Nem conhecemos ao menos as desigualdades caracterizando a soma do fecho convexo das linhas de A e do ortante não-negativo, i.e., as linhas da matriz bloqueadora B .

Alguns exemplos podem deixar mais evidente a dificuldade em determinar a matriz B .

Seja A a matriz de incidência de todas as coberturas minimais do grafo completo de n vértices. Então A é uma matriz $n \times n$ com 0's na diagonal principal e 1's em todas as outras posições. Não é difícil ver que neste caso a matriz B tem $2^n - (n + 1)$ linhas, cada uma delas correspondendo a um subconjunto $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ tal que $|I| \geq 2$; mais precisamente, a linha $b(I)$ tem coordenadas $1/(|I| - 1)$ nas posições correspondentes a $i \in I$, e zeros nas outras componentes.

Deste modo temos aqui uma situação em que todos os elementos diferentes de zero em uma linha de B são iguais. Mas tal situação não é típica para este problema. Por exemplo, considere o grafo de uma “roda” com um número ímpar de “raios”. Mais concretamente, seja a roda de tamanho 5, mostrada abaixo. As matrizes A e B estão representadas logo em seguida. Notemos a composição da primeira linha de B .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mas, se considerarmos um grafo G bipartido, então o clutter bloqueador do clutter que consiste das coberturas minimais de G é o clutter formado pelos conjuntos de vértices que são adjacentes, ou seja, a matriz de incidência do clutter bloqueador é a matriz de incidência aresta por vértice de G . É sabido que tal matriz é totalmente unimodular, e pelos resultados do capítulo anterior – o bloqueador do bloqueador de um clutter é o próprio clutter original – concluímos que A e B , neste caso, são inteiras e, mais ainda, o par B, A satisfaz a igualdade FMCM forte. Isto significa que, se tomarmos $w = 1$ em 4.3, recairemos no:

Teorema 4.3.1 (de König sobre coberturas) *Se um grafo G é bipartido, então a cardinalidade de uma cobertura mínima é igual à cardinalidade de um emparelhamento máximo em G . □*

Considerando agora um w -packing de B , se não soubéssemos que B é TU, mas tivéssemos o teorema acima, se usássemos a técnica de dividir um vértice v em w_v vértices não adjacentes, tendo os mesmos vizinhos de v , ou seja, realizássemos uma w -completação na matriz A , utilizando o teorema acima, poderíamos então utilizar a proposição 4.2.7 e chegaríamos ao

Teorema 4.3.2 *Dado um grafo bipartido G e uma função $w : VG \rightarrow \mathbb{Z}_+$, o valor mínimo de uma cobertura é igual ao valor máximo $\sum_{\alpha \in AG} y_\alpha$, onde, para cada aresta $\alpha \in AG$, y_α é um inteiro não negativo tal que $y(\delta(v)) \leq w_v, \forall v \in VG$ (i.e., é um w -packing das linhas da matriz B .) □*

Utilizando agora o fato trivial de que o tamanho de um packing máximo de coberturas é igual a 2 ($= \min\{1b^i \mid b^i \text{ linha de } B\}$), e aplicando novamente a proposição 4.2.7, concluimos que também A, B satisfaz a igualdade forte. Ou seja, neste caso temos que tanto A, B como B, A satisfazem a propriedade max-min forte. No entanto, a validade da igualdade max-min forte para A, B nos fornece um resultado combinatório não tão interessante como para o caso B, A . Deixamos a cargo do leitor a obtenção de tal resultado.

O fato de G ser bipartido é muito forte como hipótese, tanto que verificamos no estudo de clutters bloqueadores e anti-bloqueadores que sempre obtínhamos clutters Mengerianos e clutters que possuíam a propriedade min-max forte nos exemplos de clutters associados a tais grafos. Faremos no último capítulo um estudo um pouco mais completo das propriedades de uma matriz totalmente unimodular – característica fundamental associada a grafos bipartidos.

4.4 Fluxos simultâneos

Vimos no capítulo 2 que, dado um grafo (orientado ou não) G e $s, t \in VG$, o par caminhos $s-t$ (orientados ou não) & cortes $s-t$ (orientados ou não), além de ser um par de clutters bloqueadores, satisfaz a igualdade max-min (FMCM). No caso em que consideramos o programa linear

$$\max\{1x \mid xA \leq w, x \geq 0\},$$

onde A é a matriz de incidência do clutter que consiste dos caminhos $s-t$ (orientados ou não) em G , tal problema é o mesmo que encontrar um fluxo máximo de s a t , onde

o vetor de capacidades associado a AG é w . Verificamos ainda que este último clutter é Mengeriano, o que significa que, dado $w \in \mathbb{Z}_+^{AG}$, obtemos um vetor x inteiro, i.e., um fluxo inteiro.

Uma maneira natural de estender este problema seria considerar diversos tipos de fluxos simultâneos em uma rede — sendo cada fluxo entre pares pré-determinados de vértices — e decidir se tais fluxos sujeitos a algumas restrições existem ou não em tal rede.

Este problema de fluxos simultâneos — mais conhecido como “multi-fluxo” (“multicommodity flow”) — possui muitas aplicações práticas. Envio de mensagens em uma rede de comunicações, roteamento de diferentes bens em um sistema de transporte e vários problemas de tráfego podem ser formulados como problema de fluxos simultâneos. Ele foi mencionado pela primeira vez por Ford e Fulkerson, em 1956.

Consideramos uma rede G como sendo um grafo (VG, AG) em cujas arestas $\{i, j\}$ estão associados valores positivos c_{ij} , chamados capacidades.

Suponhamos que queremos m tipos de fluxos, sendo cada fluxo de v_i a $v_{i'}$, $i = 1, \dots, m$. O k -ésimo tipo de fluxo será chamado fluxo k , que vai de v_k para $v_{k'}$ e será denotado por $F(k, k')$. Um multi-fluxo será dado então por uma orientação de G para dada fluxo k , $k = 1 \dots, m$ — que nos dá um grafo orientado $D_k = (VD_k = VG, AD_k)$, e por um fluxo de v_k a $v_{k'}$ em D_k . O valor de $F(k, k')$ é denotado por $f(k, k')$.

Diremos que estes m fluxos simultâneos são viáveis se a soma de quantidades de diferentes tipos de fluxos em ambas as direções em uma aresta não exceder a capacidade desta aresta.

O problema de fluxos simultâneos que nos interessa aqui é: Dados uma rede G com um vetor c de capacidades, m pares de vértices $(v_i, v_{i'})$ e m números não-negativos

$$r_k, \quad k = 1, \dots, m,$$

é possível termos m fluxos simultâneos viáveis $F(k, k')$ com $f(k, k') = r_k$, $k = 1, \dots, m$?

Podemos ver que tal problema é equivalente ao seguinte: Dada a matriz de incidência A de todos os caminhos $v_i - v_{i'}$, verificar se existe um c -packing $(y_1, \dots, y_q)$ (onde q é o número de linhas de A) de caminhos $v_i - v_{i'}$, $i = 1, \dots, m$ tal que $\sum y_j = r_k$, onde a somatória é sobre todos os y_j , cada qual associado a uma linha a_j que corresponde a um caminho $v_i - v_{i'}$, $k = 1, \dots, m$.

Como vimos no capítulo 2, o clutter bloqueador do clutter dos $s - t$ caminhos é o clutter dos cortes $s - t$. Para encontrarmos o clutter bloqueador do clutter $\mathcal{F}_m$ associado à matriz A dos caminhos $v_i - v_{i'}$, definiremos a noção correspondente de separação de

vários pares de vértices. Um conjunto **desconectador** próprio para m pares de vértices $(v_i, v_{i'})$, $i = 1, \dots, m$, é um conjunto de arestas cuja remoção deixa v_i e $v_{i'}$ em componentes conexas diferentes, e tal que nenhum subconjunto próprio possui esta propriedade. A capacidade de um conjunto desconectador é a soma das capacidades das arestas neste conjunto. Um conjunto desconectador mínimo é aquele cuja capacidade é mínima. Denotaremos por $(1, 2, \dots, k; 1', 2', \dots, k')$ um conjunto desconectador mínimo separando v_i de $v_{i'}$, $i = 1, \dots, k$, e por $\bar{c}(1, 2, \dots, k; 1', 2', \dots, k')$ a capacidade deste conjunto desconectador mínimo.

A partir desta definição não é difícil ver que o clutter bloqueador do clutter $\mathcal{F}_m$ é o clutter dos desconectores próprios que separam v_i de $v_{i'}$, $i = 1, \dots, m$.

Estudaremos a partir daqui com mais atenção o caso em que $m = 2$. Hu, em 1963, demonstrou que a matriz bloqueadora da matriz A definida acima para dois tipos de fluxos é justamente $M(b(\mathcal{F}_2))$, i.e., que $\mathcal{F}_2$ possui a propriedade FMCM. Apresentaremos este resultado de uma maneira diferente da apresentada por Hu.

O resultado que provaremos é:

Teorema 4.4.1 (2-Fluxos Máximo Corte Mínimo) *Seja G uma rede como definida anteriormente e sejam $f(1, 1')$ e $f(2, 2')$ dois fluxos em G . Então $f(1, 1')$ e $f(2, 2')$ são viáveis se e somente se as três seguintes desigualdades estão satisfeitas:*

$$f(1, 1') \leq \bar{c}(1; 1') \quad (1)$$

$$f(2, 2') \leq \bar{c}(2; 2') \quad (2)$$

$$f(1, 1') + f(2, 2') \leq \bar{c}(1, 2; 1', 2'). \quad (3)$$

A soma máxima dos dois fluxos é igual à capacidade do desconectador mínimo separando os dois pares de vértices, i.e.,

$$\max\{f(1, 1') + f(2, 2')\} = \min \bar{c}(1, 2; 1', 2'). \quad (4)$$

A necessidade de (1), (2) e (3) é clara. A suficiência delas e a validade da igualdade em (4) será provada por meio de uma transformação do problema original em um problema de *circulações viáveis*. Esta transformação é sugerida por Seymour, em 1979. Preenchemos aqui os detalhes da redução e da sua demonstração.

Uma **circulação** em uma rede D é uma função $F : AD \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo vértice $v_i \in VD$

$$\sum_{(i,j) \in AD} F(i, j) = \sum_{(j,i) \in AD} F(j, i). \quad (5)$$

Dadas l e c duas funções definidas sobre AD , onde $l \leq c$, uma circulação viável em D é uma função que além de satisfazer (5), satisfaz também

$$l(i, j) \leq F(i, j) \leq c(i, j), \quad (i, j) \in AD.$$

Queremos agora conhecer condições suficientes para a existência de circulações viáveis. O conhecido teorema da circulação de Hoffman (como referência, Ford & Fulkerson, 1968, Hoffman, 1960) nos diz que

Teorema 4.4.2 (de Circulação de Hoffman) *Dada uma rede D com $l, c : AD \rightarrow \mathbb{R}$, uma condição necessária e suficiente para que exista uma circulação viável em D é que*

$$c(\delta(X)) \geq l(\delta(\overline{X})), \quad \forall X \subseteq VD. \square$$

Para verificar a suficiência das condições (1), (2) e (3) do teorema 4.4.1, vamos provar que estas condições implicam a existência de duas circulações viáveis numa certa rede D^* . Tais circulações por sua vez garantirão a existência de dois fluxos simultâneos e viáveis em G .

Observemos que a partir de G podemos construir um grafo orientado $D = (VD, AD)$, onde para cada aresta (i, j) existe a aresta (j, i) , estendendo o vetor de capacidades c para tais novas aresta fazendo $c_{ji} := c_{ij}$. Se forçarmos $x_{ij}^k = -x_{ij}^k$ (e então podemos atribuir a orientação ao fluxo k e construir D_k), então o problema na rede G se reduz a verificar se dois fluxos são viáveis em D , i.e., para toda aresta $\alpha = (i, j) \in AD$,

$$\sum_{k=1}^m |x_{ij}^k| \leq c_{ij}.$$

Dada a rede D com vetor de capacidades c . Estendemos tal rede D a uma rede D^* , com vetor de capacidades D^* , onde

$$\begin{aligned} VD^* &:= VD \\ AD^* &:= AD \cup \{e_1 = (v_1', v_1), e_2 = (v_2', v_2)\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} c^*(e_1) &:= r_1, \\ c^*(e_2) &:= r_2, \\ c^*(\alpha) &:= c(\alpha), \quad \forall \alpha \in AD^* - \{e_1, e_2\}. \end{aligned}$$

Note que se em D^* existem duas circulações F_1^* e F_2^* , tais que

$$\begin{aligned} |F_1^*(e_1)| &= c^*(e_1), & F_1^*(e_2) &= 0, \\ F_2^*(e_1) &= 0, & |F_2^*(e_2)| &= c^*(e_2), \end{aligned}$$

$$|F_1^*(\alpha)| + |F_2^*(\alpha)| \leq c^*(\alpha), \quad \forall \alpha \in AD - \{e_1, e_2\}.$$

É fácil verificar que se as circulações F_1^*, F_2^* são viáveis em D^* , então existem fluxos simultâneos F_1, F_2 em G , com valores $f(1, 1') = r_1$ e $f(2, 2') = r_2$, respectivamente.

Notemos que as condições (1), (2) e (3) do teorema 4.4.1, implicam que na rede D^* a seguinte condição está satisfeita:

$$c^*(\delta(X) \cup \delta(\overline{X}) \cap \{e_1, e_2\}) \leq c^*(\delta(X) \cup \delta(\overline{X}) - \{e_1, e_2\}), \quad \forall X \subseteq VD^*. \quad (4.9)$$

Para ver isto, consideremos os casos:

(i) $e_1 \in \delta(X) \cup \delta(\overline{X})$, $e_2 \notin \delta(X) \cup \delta(\overline{X})$ (equivalente ao caso $e_2 \in \delta(X) \cup \delta(\overline{X})$, $e_1 \notin \delta(X) \cup \delta(\overline{X})$)

Então

$$\begin{aligned} c^*(\delta(\overline{X}) \cup \delta(X) \cap \{e_1, e_2\}) &= c^*(e_1) = f(1, 1') \\ &\leq \bar{c}(1, 1') \\ &\leq c^*(\delta(\overline{X}) \cup \delta(X)) - c^*(e_1) \\ &= c^*((\delta(\overline{X}) \cup \delta(X)) - \{e_1, e_2\}). \end{aligned}$$

(ii) $e_1, e_2 \in \delta(X) \cup \delta(\overline{X})$

Então

$$\begin{aligned} c^*(\delta(\overline{X}) \cup \delta(X) \cap \{e_1, e_2\}) &= c^*(e_1) + c^*(e_2) = f(1, 1') + f(2, 2') \\ &\leq \bar{c}(1, 2; 1', 2') \\ &\leq c^*(\delta(\overline{X}) \cup \delta(X)) - c^*(e_1) - c^*(e_2) \\ &= c^*((\delta(\overline{X}) \cup \delta(X)) - \{e_1, e_2\}). \end{aligned}$$

(iii) $e_1, e_2 \notin \delta(X) \cup \delta(\overline{X})$

Então

$$c^*(\delta(\overline{X}) \cup \delta(X) \cap \{e_1, e_2\}) = 0 \leq c^*((\delta(\overline{X}) \cup \delta(X)) - \{e_1, e_2\}).$$

Seymour, em 1979, mostrou a necessidade e suficiência da condição 4.9 para a existência das circulações F_1^* e F_2^* em D^* , definidas anteriormente. Aproveitaremos aqui somente o resultado que nos garante a suficiência, apresentando-o de maneira detalhada.

Teorema 4.4.3 *Dada a rede D^* com vetor de capacidade c^* e $e_1, e_2 \in AD^*$ como definidas acima, se, para todo $X \subseteq VD^*$,*

$$c^*(\delta(X) \cup \delta(\overline{X}) \cap \{e_1, e_2\}) \leq c^*((\delta(X) \cup \delta(\overline{X})) - \{e_1, e_2\}),$$

então existem circulações F_1^*, F_2^* em D^* tais que

$$\begin{aligned} |F_1^*(e_1)| &= c^*(e_1), & F_1^*(e_2) &= 0, \\ F_2^*(e_1) &= 0, & |F_2^*(e_2)| &= c^*(e_2), \\ |F_1^*(\alpha)| + |F_2^*(\alpha)| &\leq c^*(\alpha), & \forall \alpha &\in AD^* - \{e_1, e_2\}. \end{aligned}$$

Dem.: Afirmamos que, pelo teorema de circulação de Hoffman, existe uma circulação H_1 em D^* tal que

$$\begin{aligned} H_1(e_1) &= c^*(e_1), \\ H_1(e_2) &= c^*(e_2), \\ -c^*(\alpha) &\leq H_1(\alpha) \leq c^*(\alpha) \quad \alpha \in AD^* - \{e_1, e_2\}. \end{aligned}$$

Para ver isso, notemos que estamos querendo uma circulação que satisfaça

$$l(\alpha) \leq H_1(\alpha) \leq u(\alpha),$$

onde

$$l(\alpha) = \begin{cases} -c^*(\alpha), & \alpha \neq e_1, e_2 \\ c^*(\alpha), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$u(\alpha) = c^*(\alpha), \quad \forall \alpha \in AD.$$

Queremos então garantir que $u(\delta(X)) \geq l(\delta(\overline{X}))$, para todo $X \subseteq VD^*$.

Se $e_1, e_2 \notin \delta(\overline{X})$, então

$$u(\delta(X)) = c^*(\delta(X)) \geq 0 \geq -c^*(\delta(\overline{X})) = l(\delta(\overline{X})).$$

Se $e_1 \in \delta(\overline{X})$ e $e_2 \notin \delta(\overline{X})$ (ou $e_2 \in \delta(\overline{X})$ e $e_1 \notin \delta(\overline{X})$), então

$$\begin{aligned} u(\delta(X)) = c^*(\delta(X)) &= c^*(\delta(X)) + c^*(\delta(\overline{X}) - e_1) - c^*(\delta(\overline{X}) - e_1) \\ &= c^*((\delta(\overline{X}) \cup \delta(X)) - e_1) + l(\delta(\overline{X}) - e_1) \\ &\geq c^*(e_1) + l(\delta(\overline{X}) - e_1) = l(\delta(\overline{X})). \end{aligned}$$

Se $e_1, e_2 \in \delta(\overline{X})$, então

$$\begin{aligned} u(\delta(X)) = c^*(\delta(X)) &= c^*(\delta(X) + c^*(\delta(\overline{X}) - \{e_1, e_2\}) - c^*(\delta(\overline{X}) - \{e_1, e_2\})) \\ &= c^*((\delta(\overline{X}) \cup \delta(X)) - \{e_1, e_2\}) + l(\delta(\overline{X}) - \{e_1, e_2\}) \\ &\geq c^*(e_1) + c^*(e_2) + l(\delta(\overline{X}) - \{e_1, e_2\}) = l(\delta(\overline{X})). \end{aligned}$$

E, do mesmo modo, podemos mostrar que existe uma circulação H_2 tal que

$$H_2(e_1) = c^*(e_1),$$

$$H_2(e_2) = -c^*(e_2),$$

$$-c^*(\alpha) \leq H_2(\alpha) \leq c^*(\alpha) \quad \alpha \in AD^* - \{e_1, e_2\}.$$

Sejam $F_1^* := 1/2(H_1 + H_2)$, $F_2^* := 1/2(H_1 - H_2)$. Mostraremos que F_1^* e F_2^* satisfazem as condições desejadas.

Certamente

$$\begin{aligned} |F_1^*(e_1)| &= c(e_1), & F_1^*(e_2) &= 0, \\ F_2^*(e_1) &= 0, & |F_2^*(e_2)| &= c(e_2), \end{aligned}$$

e, para $e \in AD^* - \{e_1, e_2\}$,

$$\begin{aligned} |F_1^*(\alpha)| + |F_2^*(\alpha)| &= |1/2(H_1(\alpha) + H_2(\alpha))| + |1/2(H_1(\alpha) - H_2(\alpha))| \\ &= \max(|H_1(\alpha)|, |H_2(\alpha)|) \\ &\leq c^*(\alpha), \end{aligned}$$

como desejado. $\square$

Deste modo, mostramos que o teorema 4.4.1 é verdadeiro e assim, o par formado pela matriz A de todos os caminhos $v_1 - v_{1'}$ e $v_2 - v_{2'}$ e a matriz de incidência B dos conjuntos desconectores $(v_1, v_2; v_{1'}, v_{2'})$ satisfaz a igualdade FMCM.

Pela maneira como obtemos F_1^* e F_2^* , poderíamos supor que nem sempre os fluxos F_1 e F_2 são inteiros, pois os cálculos envolvem divisões por 2. E na realidade, isto acontece. Por exemplo, tomemos a seguinte rede

cujas matrizes A de caminhos $v_1 - v_{1'}$ e $v_2 - v_{2'}$ e B de $(v_1, v_2; v_{1'}, v_{2'})$ conjuntos desco-

ectores são:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tomando $w = 1$ no problema de w -packing máximo de caminhos, i.e.,

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{1}y \\ \text{s.t.} \quad & yA \leq w \\ & y \geq 0, \end{aligned}$$

temos como solução única o vetor $y = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$.

Mais ainda, pode-se verificar que este par B, A satisfaz a igualdade max-min forte, o que nos mostra que, não só o fato de B ser inteira não implica que o par de matrizes deva satisfazer a propriedade max-min forte, como o fato de B, A – nesta ordem – satisfazer tal igualdade, não implica que A, B satisfaça.

4.5 Partição dos elementos de um matróide em bases

Matróides podem ser considerados como uma abstração de matrizes e grafos. Eles podem representar propriedades de matrizes que são invariantes sob operações elementares nas linhas, porém, relacionando-os com grafos e matrizes, eles não possuem objetos correspondendo a vértices ou linhas.

Um **matróide** $M = (E, \mathcal{I})$ é um conjunto finito E de elementos e uma família não vazia $\mathcal{I}$ de subconjuntos de E , ditos **independentes**, tal que

- (1) todo subconjunto de um conjunto independente é independente e
- (2) para todo conjunto $A \subseteq E$, todos os subconjuntos maximais independentes de A têm a mesma cardinalidade.

Para $A \subseteq E$, o **posto** de A , denotado por $p(A)$, é a cardinalidade de um subconjunto maximal independente de A . Se $M = (E, \mathcal{I})$, então denotamos por $p(M)$ o posto de M , cujo valor é $p(E)$.

Qualquer conjunto finito de elementos e família dos ditos conjuntos independentes destes elementos que satisfaz a primeira condição é chamado um **sistema de independência**. Para qualquer sistema de independência $(E, \mathcal{I})$, um **subsistema** consiste de um conjunto $A \subseteq E$ de elementos e todos os subconjuntos independentes contidos em A . Tal subsistema é claramente um sistema de independência. Mais ainda, um subsistema de um matróide M definido por um conjunto $A \subseteq E$ é um matróide e dizemos que é um **submatróide**, que denotaremos por $M.A$.

Os conjuntos independentes maximais de E são chamados de **bases** de E . Se A é a matriz de incidência $m \times n$ de todas as bases de um matróide $M = (E, \mathcal{I})$, $|E| = n$, então o que queremos, no decorrer desta subseção, é encontrar a sua matriz bloqueadora B . Ou seja, dado o problema de encontrar um packing máximo de bases de M , queremos encontrar a matriz B tal que

$$\max\{1y \mid yA \leq 1, y \geq 0\} = \min\{1b^i, b_i \text{ linha de } B\}.$$

Antes de apresentar os principais resultados, obtidos por Edmonds, 1965, necessitamos de alguns fatos auxiliares, para os quais não apresentaremos demonstrações (como referência, Edmonds, 1967, Welsh, 1976).

Um conjunto $A \subseteq E$ é dito **dependente** relativo a um matróide $M = (E, \mathcal{I})$ se ele não é um membro de $\mathcal{I}$. Seja A qualquer subconjunto de elementos de um matróide M e seja $I \subseteq A$ independente (relativo a M). O conjunto $S \subseteq A$, consistindo de I e todos os elementos $e \in A$ tais que $I \cup e$ é dependente, é chamado de **fecho** de I em A (com respeito a M).

Lema 1 *Para qualquer conjunto A de elementos de um matróide M , e qualquer conjunto independente $I \subseteq A$, o fecho de I em A é o único conjunto maximal S de A tal que $I \subseteq S \subseteq A$ e $p(S) = |I|$. □*

Um conjunto dependente minimal de elementos de um matróide M é chamado um **circuito** de M . Se I é um conjunto independente em M , não necessariamente contido em A , denotaremos o fecho de $I \cap A$, relativo a M , por $T(I, A)$

Lema 2 *A união de um conjunto independente I e um elemento e de um matróide M contém no máximo um circuito de M . □*

A partir desta proposição é fácil ver que as duas condições de definição de um matróide são equivalentes às seguintes:

- (1') Nenhum circuito contém outro circuito;
- (2') se dois circuitos distintos C_1 e C_2 contém um mesmo elemento e , então $C_1 \cup C_2 - e$ contém um circuito.

Com estes resultados em mãos, podemos demonstrar o seguinte teorema, devido a Edmonds, 1965.

Teorema 4.5.1 *Os elementos de um matróide $M = (E, \mathcal{I})$ podem ser particionados em no mínimo k conjuntos independentes se e somente se não existe um conjunto $A \subseteq E$ tal que*

$$|A| < kp(A).$$

Dem.: A prova do “somente se” é fácil. Suponha que $\{I_i\}, i = 1, \dots, k$, é uma partição de E , de modo que todo I_i é independente em M . Então, para todo $A \subseteq E$,

$$|A| = \sum_i |A \cap I_i| \leq kp(A).$$

Para demonstrar a parte “se”, apresentamos o algoritmo dado por Edmonds, 1965.

Seja $\{I_i\}, i = 1, \dots, k$, uma família de subconjuntos de E dois a dois disjuntos, tais que I_i é independente em M . Qualquer número destes conjuntos pode ser vazio. Denotemos por $H = \cup(\{I_i\})$ a união destes I_i . O conjunto H é dito ser **particionável**.

Suponhamos que exista um $e \in E - H$. Mostraremos como ou encontrar um $A \subseteq H \cup e$ tal que $|A| > kp(A)$, ou particionar $H \cup e$, i.e., rearranjar elementos entre os conjuntos I_i para dar lugar a e em um deles, preservando a propriedade de serem disjuntos e independentes. Isso provará o teorema.

O algoritmo utiliza como “operação primitiva” a seguinte: para um dado índice i , um dado conjunto $I \subseteq E$ que sabemos ser independente em M , e para um elemento $e \in E - I$, determinar se $I \cup e$ é independente em M ou encontrar $C \subseteq I \cup e$ tal que C é circuito de M . Em vista da condição (2), é fácil ver como podemos determinar $p(S)$, para qualquer $S \subseteq E$.

Fase 1

Seja $S_0 = E$. Para cada $j - 1$, começando com $j - 1 = 0$, verifique se existe algum i , que denotaremos por $i(j)$, tal que

$$|I_{i(j)} \cap S_{j-1}| < p(S_{j-1}).$$

Caso existe tal i , seja

$$S_j := T(I_{i(j)}, S_{j-1})$$

o fecho em S_{j-1} de $I_{i(j)} \cap S_{j-1}$. Repita então o procedimento acima com $j - 1$ incrementado de um, construindo uma sequência $(I_{i(1)}, S_1, \dots, I_{i(n)}, S_n)$. Os índices $i(j)$ não são necessariamente distintos.

Notemos que o conjunto S_j é um subconjunto próprio de S_{j-1} , já que, pelo Lema 1,

$$p(S_{i(j)}) = |I_{i(j)} \cap S_{j-1}| < p(S_{j-1}).$$

Assim, para que a sequência seja finita, devemos alcançar algum S_n tal que para todo i , $|I_i \cap S_n| = kp(S_n)$. Como os I_i 's são disjuntos, isto é equivalente a

$$|H \cap S_n| = kp(S_n).$$

Agora, se $e \in S_n - H$, então se

$$A := (H \cap S_n) \cup e \subseteq S_n,$$

devemos ter que

$$|A| = |H \cap S_n| + 1 > kp(S_n) \geq kp(A).$$

Portanto, de acordo com a parte "somente se" deste teorema, como $A \subseteq H \cup e$ e $|A| > kp(A)$, o conjunto $H \cup e$ não pode ser particionado.

Por outro lado, se $e \in E - (H \cup S_n)$, mostraremos como encontrar uma partição de $H \cup e$.

Fase 2

Como $e \notin S_n$ e $e \in S_0$, e como cada $S_{j-1} \subset S_j$, para todo j , existe algum S_h tal que $e \notin S_h$ e tal que $e \in S_j$, $0 \leq j < h$.

Se $e \cup I_{i(h)}$ é independente, então adicione e a $I_{i(h)}$ e estamos feitos. Caso contrário, seja C o circuito que está contido em $e \cup I_{i(h)}$.

O conjunto C não está contido em S_{h-1} , por que neste caso, pela definição da função fecho T e da construção de S_h , teríamos que $e \in S_h$. Seja então m o menor inteiro, $0 < m < h$, tal que C não está contido em S_m e seja e' um elemento de $C - S_m$. Pelo Lema 2, $I'_{i(h)} := e \cup I_{i(h)} - e'$ é independente. Substituindo $I_{i(h)}$ por $I'_{i(h)}$, e fazendo $I'_i = I_i$, para $i \neq i(h)$, nós agora precisamos tratar de e' ao invés de e .

Sabemos que $e' \notin S_m$ e que $e' \in S_j$ para $0 \leq j < m$. Também podemos mostrar que a sequência $(I'_{i(1)}, S_1), \dots, (I'_{i(h)}, S_h)$ é construída do mesmo modo que a sequência $((I_{i(1)}, S_1), \dots, (I_{i(h)}, S_h))$.

Consideremos os termos $j = 1, \dots, m$, em ordem. Se $i(j) = i(h)$, então $I'_{i(j)} = e \cup I_{i(j)} - e'$. Como $C \subseteq S_{j-1}$, o conjunto $D := (I'_{i(j)} \cup e') \cap S_{j-1} = (I_{i(j)} \cup e) \cap S_{j-1}$ é dependente em M e, assim,

$$p(D) = |I'_{i(j)} \cap S_{j-1}| = |I_{i(j)} \cup S_{j-1}|,$$

e pela unicidade dada pelo Lema 1. temos que

$$T(I'_{i(j)}, S_{j-1}) = T(I_{i(j)}, S_{j-1}) = S_j.$$

Essa relação obviamente vale se $i(j) \neq i(h)$, já que, neste caso, $I'_{i(j)} = I_{i(j)}$. Assim podemos tratar e' da mesma maneira que tratamos e , e assim por diante. Como m é um inteiro estritamente menor do que h , teremos terminado esta aplicação da fase 2 em menos de h iterações. Isto completa a descrição do algoritmo e a demonstração do teorema 4.5.1. $\square$

Antes de completarmos o estudo dos resultados básicos sobre matróides apresentados com o objetivo de encontrar matriz bloqueadora B em questão, vejamos uma aplicação deste teorema.

Dado um grafo G , podemos associar a G o matróide $M_G = (E, \mathcal{I})$, onde $E = AG$ e $\mathcal{I}$ é o conjunto das arestas que não formam circuitos em G . O posto $p(A)$ de um subconjunto A é então igual ao número de vértices menos o número de componentes conexas no subgrafo obtido a partir das arestas em A e dos vértices aos quais tais arestas são incidentes. Não é difícil verificar que M_G é um matróide.

O Teorema 4.5.1 aplicado a M_G nos diz que

Teorema 4.5.1' *As arestas de um grafo G podem ser particionadas em no mínimo k florestas se e somente se não existe um subconjunto U de vértices em G tal que, se (U, U) indica o conjunto de arestas em G que têm os dois extremos em U ,*

$$|(U, U)| > k(|U| - 1). \square$$

Para demonstrar o próximo resultado sobre a decomposição de um matróide em conjuntos independentes maximais, ou seja, bases, introduziremos mais alguns termos freqüentemente utilizados na teoria dos matróides e alguns resultados preliminares.

Dado um conjunto A de elementos de um matróide M , definimos os circuitos de $M \times A$ como sendo as intersecções minimais não vazias de A com os circuitos de M .

Proposição 4.5.2 *O conjunto de elementos A e os circuitos de $M \times A$ formam um matróide (denotado por $M \times A$), dito a contração de M a A . $\square$*

Corolário 4.5.3 *Se A e $\bar{A}$ são subconjuntos complementares de um matróide M , $\bar{A}$ é fechado em M se e somente se o matróide $M \times A$ não contém laços, i.e., elementos de posto zero. $\square$*

Dizemos que um conjunto $A \subseteq E$ gera o conjunto S em M se o fecho de A em M é S .

Proposição 4.5.4 *Se K e A são subconjuntos de um matróide M , um subconjunto T' de A gera $K \cap A$ em $M \times A$ se e somente se existe um subconjunto T de M tal que $T' = T \cap A$ e T gera K em M . $\square$*

Corolário 4.5.5 *Os conjuntos fechados de um matróide $M \times A$ são precisamente as intersecções de A com conjuntos fechados de M . $\square$*

Entendemos por **eliminar** um conjunto A de elementos em um matróide $M = (E, \mathcal{I})$ a operação de substituir M pelo submatróide sobre o conjunto $E - A$; por **contrair** um conjunto A de elementos em um matróide M , a operação de substituir o matróide M pela contração de M a A .

Um fato fácil de ser obtido a partir das definições de contração e submatróides é:

Proposição 4.5.6 *As operações de eliminar alguns elementos junto com as operações de contrair alguns elementos em um matróide são associativas e comutativas. $\square$*

Proposição 4.5.7 *Se A e $\bar{A}$ são conjuntos complementares de elementos em um matróide M , então os elementos em uma base de $M \times A$ junto com os elementos de uma base de $M \cdot \bar{A}$ formam uma base de M . $\square$*

Corolário 4.5.8 $p(M \times A) + p(M, \bar{A}) = p(M)$. $\square$

Denotaremos daqui por diante por $t(A)$ a função posto $p(M \times A)$ de um conjunto A em M .

Finalmente conseguimos material suficiente para demonstrar o próximo teorema, o segundo resultado principal deste estudo sobre matróides, que foi dado primeiramente em Edmonds, 1965.

Teorema 4.5.9 *Os elementos de um matróide $M = (E, \mathcal{I})$ podem ser particionados em k conjuntos, cada qual um conjunto gerador de M , se e somente se não existe $A \subseteq E$ tal que*

$$|A| < kt(A).$$

(Note que, como $t(A) = p(M) - p(\bar{A})$, o teorema 4.5.9 pode ser enunciado sem a noção de contração.)

Dem.: Para demonstrar a parte “somente se”, assumamos que M possa ser particionado em k conjuntos, cada um gerador de M . Tomando-se um subconjunto de cada um deles, obtemos base disjuntas B_i ($i = 1, \dots, k$). Seja A um subconjunto de M . Como B_i é independente, $p(\bar{A}) \geq |\bar{A} \cap B_i|$, e como B_i é uma base, $|A \cap B_i| + |\bar{A} \cap B_i| = |B_i| = p(M)$. Combinando os dois, temos que $|A \cap B_i| \geq p(M) - p(\bar{A}) = t(A)$. Portanto,

$$|A| \geq \sum_i |A \cap B_i| \geq kt(A).$$

A parte “se” do teorema segue das proposições 4.5.6 e 4.5.7 e do teorema 4.5.1

Consideremos M um matróide e k um número inteiro positivo. Suponha que A_0 é um subconjunto maximal de M tal que $|A_0| = kp(A_0)$ e $|A| \leq kp(A)$ para todo $A \subseteq A_0$. O conjunto A_0 pode ser vazio. Pelo teorema 4.5.1, A_0 pode ser particionado em k conjuntos independentes, I_i . Como $|A_0| = kp(A_0)$, cada I_i deve ser uma base do submatróide A_0 e, assim, uma base de $S(A_0)$, o fecho de A_0 em M .

Denotemos por M' o matróide contração de M obtido contraindo-se $S(A_0)$ em M . Suponha que A_1 é um subconjunto de M' tal que $|A_1| = kp(A_1)$ e $|A| \leq p(A)$ no matróide M' para todo $A \subseteq A_1$. Então assim como A_0 em M , A_1 pode ser particionado em k bases I'_i do submatróide A_1 de M' . Pela proposição 4.5.6, o submatróide de M' é a contração a A_1 do submatróide $A_1 \cup S(A_0)$ de M . Chamamô-lo de menor A_1 . Pela proposição 4.5.7, uma base de A_1 junto com uma base do $S(A_0)$ de M é uma base do submatróide $A_1 \cup S(A_0)$ de M .

Em particular, unindo os conjuntos I'_i um a um com os conjunto I_i , conseguimos k base disjuntas $I''_i = I'_i \cup I_i$ do submatróide $A_1 \cup S(A_0)$ de M . Como $\cup I''_i = A_0 \cup A_1 \subset M$, e como os conjuntos I'' geram um ao outro em M , $|A_0 \cup A_1| = kp(A_0 \cup A_1)$ e, pela parte “somente se” do teorema 4.5.9, $|A| \leq kp(A)$ em M para todo $A \subseteq A_0 \cup A_1$. Entretanto, A_0 foi escolhido por ser maximal par tal propriedade e, assim, A_1 é vazio e o matróide M' não contém nenhum A_1 como definido que seja não vazio.

Como $S(A_0)$ é fechado em M , o matróide M' , obtido ao se contrair $S(A_0)$, não contém nenhum elemento de posto zero (corolário 4.5.3). Suponhamos que M' contém $A_2 \neq \emptyset$ tal que $|A_2| \geq kp(A_2)$ em M' . Escolhamos tal A_2 minimal com respeito a essa propriedade. Pela não-existência em M' de $A_1 \neq \emptyset$ como descrito acima, obrigatoriamente temos que $|A_2| > kp(A_2)$. Como não há elementos de posto zero, A_2 contém no mínimo dois elementos. Eliminando-se um elemento de A_2 , obtemos $A_3 \neq \emptyset$, para o qual vale que

$$|A_3| \geq kp(A_2) \geq kp(A_3)$$

em M' , o que contradiz a minimalidade de A_2 . Logo, para todo subconjunto A de M' , $|A| < kp(A)$. $\square$

Assim, pelo teorema 4.5.9, os elementos de um matróide $M = (E, \mathcal{I})$ podem ser particionados em k bases se e só se

$$k \leq \frac{|F|}{p(E) - p(\overline{F})}, \quad \forall F \subseteq E, F \neq \emptyset.$$

Então se quisermos encontrar o k máximo que satisfaz a desigualdade acima, que é justamente o problema do packing máximo das linhas de A , então basta calcular

$$\min \frac{|F|}{p(E) - p(\overline{F})}, \quad \forall F \subseteq E, F \text{ complemento de fechado}, F \neq \emptyset.$$

Se B é a matriz que consiste das linhas essenciais da matriz B^+ , que possui linhas $b(\overline{S})$ correspondentes a cada complemento não vazio de um conjunto fechado S : a linha $b(\overline{S})$ tem componentes $1/(p(E) - p(S))$ nas posições correspondentes a elementos de $\overline{S}$, e zeros, caso contrário, então vale que o mínimo em

$$\begin{aligned} \min \mathbf{1}y \\ yA &\geq \mathbf{1} \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

é igual a $\max \mathbf{1}b^i, b^i$ linha de B .

É fácil ver que se estendermos a matriz A por uma coordenada i , obtemos uma matriz A' que pode ser vista como a matriz de incidência das bases do matróide $M' = (E \cup \{e\}, \mathcal{I}')$,

onde e é um novo elemento, e se f é o elemento correspondente à coordenada que foi estendida, $\mathcal{I}' := \mathcal{I} \cup \{I - e \cup f \mid I \in \mathcal{I}, f \in I\}$. Logo, o teorema 4.5.9 pode ser novamente aplicado a esse matróide e com auxílio do resultado dado pela proposição 4.2.6 concluímos que A, B é um par de matrizes bloqueadoras.

Veja abaixo um exemplo ilustrando um par de matrizes bloqueadoras que surgem a partir do matróide definido em cima do grafo dado, onde as bases são as árvores geradoras do grafo.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

O problema de packing para B consiste em encontrar a linha de A de valor mínimo, que pode ser realizado pelo conhecido algoritmo guloso ("greedy"), dado por Edmonds, 1967, e não é difícil descrever um método para determinar um vetor y de packing máximo de B^+ . Aqui podemos usar contrações e eliminações de coordenadas das matrizes bloqueadoras para encontrar tal vetor y .

Capítulo 5

Poliedros Anti-bloqueadores

Desenvolveremos aqui uma teoria paralela àquela apresentada para poliedros bloqueadores. Assim como fizemos com a relação bloqueadora, estenderemos a relação anti-bloqueadora de clutters para matrizes e poliedros. Estudaremos ainda a relação entre pares de poliedros bloqueadores e pares de poliedros anti-bloqueadores e discutiremos detalhadamente alguns exemplos.

5.1 Definições e resultados básicos

Assim como no capítulo anterior vimos como caracterizar os elementos de um clutter $\mathcal{F}$ por meio de desigualdades do tipo $ax \geq 1$, queremos aqui caracterizá-los conhecendo as desigualdades do tipo $ax \leq 1$ que descrevem o poliedro cujos vértices são exatamente os vetores característicos dos elementos de $\mathcal{F}$.

Generalizando esta idéia, procuramos descrever as linhas de uma matriz não-negativa qualquer, não necessariamente $(0, 1)$, como sendo vértices de um poliedro do tipo *anti-bloqueador*.

Um poliedro $\mathcal{B}$ no $\mathbb{R}_+^n$ é dito ser do tipo **anti-bloqueador** se $\mathcal{B} \neq \emptyset$ e existe uma matriz A $m \times n$ não negativa, sem colunas-zero, tal que

$$\mathcal{B} = \{b \in \mathbb{R}_+^n \mid Ab \leq 1\}. \quad (5.1)$$

Notemos que, como assumimos que nenhuma coluna de A é inteiramente constituída de zeros, temos que $\mathcal{B}$ é limitado e, assim, pode ser escrito como o fecho convexo dos seus

pontos extremos $b^1, \dots, b^r$, i.e.,

$$\mathcal{B} = \text{conv}(\{b^1, \dots, b^r\}). \quad (5.2)$$

Assim como no caso dos poliedros bloqueadores, queremos encontrar aqui também uma forma de representar o poliedro $\mathcal{B}$ através de uma matriz A não-negativa minimal.

Diremos então que uma linha a^i da matriz A em 5.1 é **não-essencial** caso a^i seja dominada por uma combinação convexa de outras linhas de A , i.e., se a desigualdade

$$a^i \leq \sum_{j=1}^m \alpha_j a^j \quad (5.3)$$

vale para alguns $\alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ satisfazendo $\alpha_i = 0, \sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$.

Considerando tal definição, temos, a partir do resultado abaixo, uma maneira minimal de representar $\mathcal{B}$, pois:

Proposição 5.1.1 *Uma inequação de 5.1 pode ser eliminada da definição de $\mathcal{B}$ se e somente se a linha correspondente de A é não-essencial.*

Dem.: Seja $ax \leq 1$ uma desigualdade de 5.1. Se $a = 0$, então como A é não negativa, claramente a é não-essencial.

Suponhamos então que $a \neq 0$. Seja $\hat{A}$ a matriz obtida de A removendo-se a linha a . Vamos mostrar que ou existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$S1 \quad \begin{cases} \hat{A}x \leq 1 \\ ax > 1 \\ x \geq 0, \end{cases}$$

ou (exclusivo) existe $y \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$S2 \quad \begin{cases} y\hat{A} \geq a \\ y\mathbf{1} = 1 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Ou seja, vamos mostrar que $S1$ e $S2$ são sistemas alternativos. Notemos que $S2$ tem solução se e só se a é não-essencial.

Mostraremos inicialmente que ambos os sistemas não podem ter solução ao mesmo tempo.

Suponhamos que existam x satisfazendo $S1$, e y satisfazendo $S2$. Então

$$1 = \mathbf{1}y \geq (\hat{A}x)y = x(y\hat{A}) \geq xa > 1$$

onde a primeira igualdade vem de $S2$, a primeira desigualdade vem de $S1$, a segunda de $S2$ e a terceira de $S1$, nos levando a um absurdo.

Para concluir a demonstração, verifiquemos que, se um dos sistemas não tem solução, então necessariamente o outro possui. Para isso, suponhamos que $S1$ não tenha solução e consideremos o seguinte programa linear:

$$\begin{array}{ll} \max ax & \min \mathbf{1}y \\ (PL) \quad \hat{A}x \leq \mathbf{1} & \text{cujo dual é} \quad (DL) \quad y\hat{A} \geq a \\ x \geq 0 & y \geq 0 \end{array}$$

Notemos que se $S1$ não tem solução, então ou (a) (PL) é inviável, ou (b) (PL) tem solução, mas $\max ax \leq 1$.

Caso (a) Como $x = 0$ é solução para (PL) , este caso não pode ocorrer.

Caso (b) Mostremos que existe $x \geq 0$, tal que $\hat{A}x \leq \mathbf{1}$ e $ax \neq 0$.

Como $a \neq 0$, seja j tal que $a_j > 0$.

Tomando

$$x_k = \begin{cases} 0, & k \neq j, \\ \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{1}{a_{ji}}, a_{ji} \neq 0 \right\}, & k = j, \end{cases}$$

obtemos um tal x .

Seja então $\bar{x}$ uma solução ótima de (PL) e $z = \max a\bar{x}$, com $0 < z \leq 1$. Pelo teorema forte de dualidade, (DL) tem solução ótima y tal que $\mathbf{1}y = z$. Tomemos $y^* = y/z$. Então temos que $y^* \geq 0$, $y^*\mathbf{1} = z/z = \mathbf{1}$, e

$$y^{*T}\hat{A} = \frac{1}{z}y\hat{A} \geq \frac{1}{z}a \geq a.$$

Logo, y^* satisfaz $S2$, concluindo a demonstração. $\square$

Estendemos agora o conceito de clutter anti-bloqueador: Dado $\mathcal{B}$ um poliedro do tipo anti-bloqueador, definimos o seu **poliedro anti-bloqueador**, denotado por $\overline{\mathcal{B}}$, como sendo

$$\overline{\mathcal{B}} = \{a \in \mathbb{R}_+^n \mid a\mathcal{B} \leq \mathbf{1}\}.$$

Se $\mathcal{B}$ é definido por uma matriz A , então uma matriz que define $\overline{\mathcal{B}}$ é chamada **matriz anti-bloqueadora** (da matriz A).

O próximo resultado caracteriza o poliedro anti-bloqueador de um poliedro e, mais ainda, nos diz que $\overline{\mathcal{B}}$ é também um poliedro do tipo anti-bloqueador, como já era de se esperar.

Teorema 5.1.2 *Seja A uma matriz não-negativa sem colunas-zero, e suponhamos que $\mathcal{B} = \{b \in \mathbb{R}_+^n \mid Ab \leq 1\}$ tenha como pontos extremos $b^1, \dots, b^r$. Seja B a matriz constituída pelas linhas $b^1, \dots, b^r$. Então B é não-negativa, não possui colunas-zero e*

$$(i) \overline{\mathcal{B}} = \{a \in \mathbb{R}_+^n \mid Ba \leq 1\}.$$

$$(ii) \overline{\overline{\mathcal{B}}} = \mathcal{B}.$$

Dem.: Claramente $\mathcal{B}$ é não-negativa. Se o maior elemento na i -ésima coluna de A é $\mu_i > 0$, então B tem como uma das suas linhas o vetor

$$(0, \dots, 0, 1/\mu_i, 0, \dots, 0),$$

com o número $1/\mu_i$ ocorrendo na i -ésima posição. Em particular, B não tem colunas-zero.

Suponhamos que $a \in \overline{\mathcal{B}} = \{a \in \mathbb{R}_+^n \mid a\mathcal{B} \leq 1\}$. Então $ab^j \leq 1$, $j = 1, \dots, r$, e assim $\mathcal{B} \subseteq \{a \in \mathbb{R}_+^n \mid Ba \leq 1\}$. Por outro lado, suponhamos que $a \in \mathbb{R}_+^n$ e $ab^j \leq 1$, para $j = 1, \dots, r$. Seja $b = \sum_{j=1}^r \alpha_j b^j$, onde $\alpha_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^r \alpha_j = 1$. Então temos que

$$ab = \sum_{j=1}^r \alpha_j (ab^j) \leq 1.$$

Logo, $a \in \overline{\mathcal{B}}$, o que demonstra (i).

Claramente $\mathcal{B} \subseteq \overline{\mathcal{B}}$. Suponhamos que $x \in \overline{\overline{\mathcal{B}}}$, $x \notin \mathcal{B}$. Então, para alguma linha de A , digamos a^1 , devemos ter que $a^1 x > 1$, já que $x \in \mathbb{R}_+^n$, $x \notin \mathcal{B}$. Mas $a^1 \in \mathbb{R}_+^n$ e satisfaz $Ba^1 \leq 1$ e, deste modo, $a^1 \in \overline{\mathcal{B}} = \{a \in \mathbb{R}_+^n \mid Ba \leq 1\}$. Como $x \in \overline{\mathcal{B}}$ e $a^1 \in \overline{\mathcal{B}}$, segue que $a^1 x \leq 1$, uma contradição. Logo $\overline{\overline{\mathcal{B}}} = \mathcal{B}$. $\square$

Como decorrência deste teorema temos que, se nos for dada uma matriz A definindo $\mathcal{B}$, então uma matriz B que define $\overline{\mathcal{B}}$ pode ser determinada de modo análogo ao que descrevemos para obter a matriz bloqueadora de uma dada matriz. Ou seja, anexamos à matriz A a matriz identidade $n \times n$, e então procuramos uma submatriz $\overline{A}$ não singular $n \times n$ desta matriz. Resolvemos em seguida o sistema de equações cuja matriz de coeficientes é

$\bar{A}$ e cujo lado direito é 1 ou 0, dependendo se a linha correspondente de $\bar{A}$ pertence à A ou à matriz identidade. Se a solução resultante b satisfaz $b \geq 0$, $Ab \leq 1$, então b é um ponto extremo de $\mathcal{B}$. Todos os pontos extremos de $\mathcal{B}$ podem ser obtidos desta maneira.

As matrizes abaixo exemplificam o teorema 5.1.2 e o método descrito acima para a obtenção de uma matriz anti-bloqueadora.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Neste caso, se começarmos com a matriz A , onde as todas linhas são essenciais para definir $\mathcal{B}$ (definem facetas de $\mathcal{B}$), obtemos B pelo processo descrito acima. Todas as linhas de B com exceção da primeira são essenciais para $\bar{\mathcal{B}}$. Por outro lado, se começarmos com B (ou mesmo apenas com as linhas essenciais de B), e calcularmos os pontos extremos de $\mathcal{B}$, obtemos, além das linhas de A , os quatro vetores $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, todos eles não-essenciais para $\mathcal{B}$. Notemos que, em ambos os casos, um ponto extremo não essencial (i.e., um ponto extremo de $\bar{\mathcal{B}}$ que não representa uma faceta de $\mathcal{B}$) é a projeção de algum outro ponto extremo essencial (i.e., um ponto extremo de $\bar{\mathcal{B}}$ que representa uma faceta de $\mathcal{B}$).

Na verdade, podemos provar que esta última observação é válida em geral.

Teorema 5.1.3 *Seja A uma matriz não-negativa definindo o poliedro $\mathcal{B} = \{b \in \mathbb{R}_+^n \mid Ab \leq 1\}$ e sejam $b, b^1, \dots, b^r$ pontos de $\mathcal{B}$ tais que b é ponto extremo de $\mathcal{B}$ e é dominado por uma combinação convexa de $b^1, \dots, b^r$. Então b pode ser obtido a partir de algum b^i , zerando-se algumas (zero ou mais) componentes de b^i , i.e., b é uma projeção de algum b^i .*

Dem.: Podemos supor que

$$b \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i b^i = c, \quad (5.4)$$

onde $\alpha_i > 0$, $i = 1, \dots, k$ e $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$. Se tivermos igualdade em 5.4, então, como b é ponto extremo, devemos ter $b = b^1 = \dots = b^k$ e a conclusão do teorema é verdadeira.

Senão, seja $b = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $c = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ e analisemos b . Se $b = 0$, já obtemos o resultado desejado. Senão, rearranjando as coordenadas se necessário, podemos supor

que

$$\beta_1 > 0, \dots, \beta_e > 0, \beta_{e+1} = \dots = \beta_n = 0.$$

Como b é ponto extremo de $\mathcal{B}$, podemos encontrar uma submatriz E $e \times e$ de A , tal que o sistema $Ex = \mathbf{1}$ tenha a única solução $x = (\beta_1, \dots, \beta_e)$. Seja $y = (\gamma_1, \dots, \gamma_e)$. Como $0 \leq x \leq y$ e $E \geq 0$, temos que $Ey \geq \mathbf{1}$. Se alguma componente de Ey é maior do que 1, então $c \notin \mathcal{B}$, uma contradição. Assim, $Ey = \mathbf{1}$ e, deste modo, como E é não-singular, $y = x$. Seja $b^i = (\beta_1^i, \dots, \beta_n^i)$, e definamos as projeções $b_*^i = (\beta_1^i, \dots, \beta_e^i, 0, \dots, 0)$. Como $\beta_i = \gamma_i$, para $i = 1, \dots, e$ e $\beta_{e+1} = \dots = \beta_n = 0$, devemos ter que

$$b = \sum_{i=1}^k \alpha_i b_*^i,$$

onde $b_*^i \in \mathcal{B}$, $i = 1, \dots, k$. Como b é ponto extremo de $\mathcal{B}$, segue que $b = b_*^1 = \dots = b_*^k$ e, b é uma projeção de b^i para $i = 1, \dots, k$, como queríamos. $\square$

Este teorema pode ser útil de diversas maneiras. Por exemplo, se nos for dada uma matriz A não negativa definindo $\mathcal{B} = \{b \in \mathbb{R}_+^n \mid Ab \leq \mathbf{1}\}$, e conseguirmos encontrar os pontos extremos de $\mathcal{B}$, então as facetas do poliedro anti-bloqueador $\overline{\mathcal{B}}$ podem ser determinadas facilmente, já que cada faceta de $\overline{\mathcal{B}}$ corresponde a um ponto extremo de $\mathcal{B}$ que não é projeção de outros pontos extremos de $\mathcal{B}$. Podemos ainda, com auxílio deste teorema e da definição de clutter e poliedro anti-bloqueador, facilmente mostrar que:

Teorema 5.1.4 *Seja A a matriz de incidência de um clutter sobre $\{1, \dots, n\}$, com linhas $a^1, \dots, a^m$, e seja $\mathcal{B} = \{b \in \mathbb{R}_+^n \mid Ab \leq \mathbf{1}\}$ limitado com pontos extremos $b^1, \dots, b^r$. Então os pontos extremos do poliedro limitado $\overline{\mathcal{B}} = \{a \in \mathbb{R}_+^n \mid Ba \leq \mathbf{1}\}$ são precisamente $a^1, \dots, a^m$ junto com todos os vetores de incidência dos subconjuntos dos membros do clutter (i.e., todas as projeções de $a^1, \dots, a^m$). $\square$*

Notemos que o teorema 5.1.4 nada diz a respeito dos pontos extremos de $\mathcal{B}$. O resultado se refere exclusivamente aos pontos extremos de $\overline{\mathcal{B}}$.

O exemplo anteriormente dado ilustra o teorema 5.1.4. Os pontos extremos de $\mathcal{B} = \{b \in \mathbb{R}_+^n \mid Ab \leq \mathbf{1}\}$ são precisamente as linhas de A (os vetores de incidência do clutter de todos os subconjuntos com 2 elementos de um conjunto com 3 elementos) juntamente com os vetores de incidência dos conjuntos unitários e o conjunto vazio.

Como pudemos ver pelos teoremas 5.1.2 e 5.1.4 e pelo exemplo dado, não há uma correspondência um a um entre facetas e pontos extremos no par de poliedros anti-bloqueadores. Por isso, não trataremos de pares de matrizes anti-bloqueadoras “próprias” como fizemos na relação bloqueadora. Diremos apenas que qualquer par de matrizes que definem um par de poliedros anti-bloqueadores constituem um **par anti-bloqueador de matrizes**.

5.2 Propriedades de matrizes anti-bloqueadores

Estendendo agora as propriedades min-max e max-max que definimos para clutters, temos: Dadas A e B duas matrizes não-negativas, cada uma com n colunas e sem colunas-zero, onde $a^1, \dots, a^m$ são as linhas de A e $b^1, \dots, b^r$, as linhas de B , dizemos que a **igualdade min-max vale para A, B** (nesta ordem) se, para todo $w \in \mathbb{R}_+^n$, temos

$$\min\{1y \mid yA \geq w, y \geq 0\} = \min\{b^j w \mid b^j \text{ é linha de } B\}. \quad (5.5)$$

Analogamente, dizemos que a **desigualdade max-max vale para A, B** se, para todo $l, w \in \mathbb{R}_+^n$, tivermos

$$\left(\max_{1 \leq i \leq m} a^i l\right) \left(\max_{1 \leq j \leq r} b^j w\right) \geq lw. \quad (5.6)$$

Assim como no caso dos poliedros bloqueadores, existe uma forte relação entre pares de poliedros anti-bloqueadores e matrizes que satisfazem a igualdade min-max e/ou a desigualdade max-max. Neste caso, podemos verificar que, dado $w \in \mathbb{R}_+^n$, o valor de uma solução ótima de uma w -cobertura de uma matriz A (o problema de minimização em 5.5) é igual ao valor máximo de w quando calculado nas linhas de uma matriz anti-bloqueadora de A . Mais precisamente, tal relação nos é dada pelo:

Teorema 5.2.1 (i) Sejam $\mathcal{B} = \{b \in \mathbb{R}_+^n \mid Ab \leq 1\}$ e $\overline{\mathcal{B}} = \{a \in \mathbb{R}_+^n \mid Ba \leq 1\}$. Então a igualdade min-max vale para A, B e a desigualdade max-max vale para A, B .

(ii) Sejam A, B matrizes que satisfazem a igualdade min-max. Então $\mathcal{B} = \{b \in \mathbb{R}_+^n \mid Ab \leq 1\}$, $\mathcal{A} = \{a \in \mathbb{R}_+^n \mid Ba \leq 1\}$ é um par de poliedros anti-bloqueadores.

(iii) Sejam A, B matrizes (com linhas $a^1, \dots, a^m$, $b^1, \dots, b^r$, respectivamente) tais que $a^i b^j \leq 1$, para todo $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, r$ e que satisfazem a desigualdade max-max. Então $\mathcal{B} = \{b \in \mathbb{R}_+^n \mid Ab \leq 1\}$, $\mathcal{A} = \{a \in \mathbb{R}_+^n \mid Ba \leq 1\}$ é um par de poliedros anti-bloqueadores.

Dem.: (i) Pelo teorema 5.1.2, as linhas de B contêm os vetores dos pontos extremos de $\mathcal{B}$ que são essenciais para $\overline{\mathcal{B}}$. Como uma linha não essencial de B pode ser ignorada ao se calcular $\max_{1 \leq j \leq r} b^j w$, segue (a partir do teorema de dualidade de programação linear, junto com o fato de que o valor máximo de uma função linear definida sobre $\mathcal{B}$ é alcançado

por um ponto extremo de B) que o valor mínimo de $1y$ em 5.5 é igual a

$$\max_{x \in B} wx = \max_{1 \leq j \leq r} b^j w.$$

Logo, a igualdade min-max vale para A, B .

Sejam agora $l, w \in \mathbb{R}_+^n$ e definamos

$$\lambda := \max_{1 \leq i \leq m} a^i l, \quad (1)$$

$$\omega := \max_{1 \leq j \leq r} b^j w. \quad (2)$$

Se $l = 0$ ou $w = 0$, a desigualdade max-max vale trivialmente. Assumamos então que $l \neq 0$ e $w \neq 0$. Se $\lambda = 0$, então alguma coluna de A é formada por zeros, contradizendo a nossa hipótese sobre A . Logo, $l \neq 0$ implica que $\lambda > 0$. Do mesmo modo, $w \neq 0$ implica que $\omega > 0$. Então, por (1) e (2), temos que

$$a^i(l/\lambda) \leq 1, \quad i = 1, \dots, m$$

$$b^j(w/\omega) \leq 1, \quad j = 1, \dots, r,$$

e assim $l/\lambda \in B$ e $w/\omega \in \bar{B}$. Conseqüentemente $(l/\lambda)(w/\omega) \leq 1$ e $lw \leq \lambda\omega$.

(ii) Sejam $\bar{b}^1, \dots, \bar{b}^s$ os pontos extremos de B e seja $\bar{B}$ a matriz formada por estas linhas. Mostraremos que

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid \bar{B}x \leq 1\}.$$

Suponhamos que exista $w \in \mathbb{R}_+^n$ tal que $Bw \leq 1$ e $\bar{B}w$ possua alguma componente maior do que 1. Então

$$\max_{1 \leq j \leq r} b^j w < \max_{1 \leq i \leq s} \bar{b}^i w = \max_{x \in B} wx. \quad (3)$$

Mas pela igualdade min-max e pelo teorema de dualidade para programação linear devemos ter que $\min 1y$, sujeito às restrições $yA \geq w$, $y \geq 0$, é igual a ambos os lados direito e esquerdo de (3), uma contradição. Logo $\mathcal{A} \subseteq \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid \bar{B}x \leq 1\}$. Do mesmo modo podemos ver que $\mathcal{A} \supseteq \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid \bar{B}x \leq 1\}$ e, assim, $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid \bar{B}x \leq 1\}$ e, pelo teorema 5.1.2, temos que $\mathcal{A} = \bar{B}$.

(iii) (Note que A, B satisfazer a desigualdade max-max implica a nossa hipótese de que nenhuma coluna de A ou de B é zero.)

Mostraremos inicialmente que

$$B \subseteq \bar{A} \quad \text{e} \quad \mathcal{A} \subseteq \bar{B}.$$

Suponhamos que $a \in \mathcal{A}$ e $b \in \mathcal{B}$. Então

$$\max_{1 \leq j \leq r} b^j a \leq 1, \quad \max_{1 \leq i \leq m} a^i b \leq 1.$$

E assim, por hipótese,

$$1 \geq \left(\max_{1 \leq i \leq m} a^i b \right) \left(\max_{1 \leq j \leq r} b^j a \right) \geq ab$$

e, portanto, $a \in \overline{\mathcal{B}}$ e $b \in \overline{\mathcal{A}}$. Se $\mathcal{B} \not\subseteq \overline{\mathcal{A}}$, então seja $\bar{a} \in \overline{\mathcal{A}}$, $\bar{a} \notin \mathcal{B}$. Como $\bar{a} \in \overline{\mathcal{A}}$, devemos ter que $a^i \bar{a} > 1$ para algum $i = 1, \dots, m$. Mas, por hipótese, $a^i \in \mathcal{A}$, uma contradição. Logo $\mathcal{B} = \mathcal{A}$. $\square$

É claro que temos como corolário deste último teorema que

Corolário 5.2.2 *Se a igualdade min-max vale para A, B de matrizes, então tal igualdade vale para o par B, A . $\square$*

Ou seja, se obtivermos uma relação min-max para um par A, B de matrizes, obtemos – de graça – uma relação min-max para o par B, A . Veremos aplicações do teorema 5.1.4 e deste corolário nos exemplos que vão se seguir.

Queremos agora, antes de apresentarmos os exemplos, relacionar mais profundamente a teoria desta seção com o nosso estudo de clutters anti-bloqueadores. Trataremos então, daqui por diante, de matrizes compostas somente de 0's e 1's. Diremos que um par anti-bloqueador de matrizes $(0, 1)$ satisfaz a **igualdade min-max forte** se o programa linear de maximização em 5.5 tem um vetor solução y inteiro sempre que w é um vetor não-negativo inteiro. Notemos que esta é exatamente a mesma definição dada para a propriedade min-max forte aplicada a clutters.

Antes de apresentar um dos principais teoremas desta seção, observemos que uma matriz $(0, 1)$ definindo um poliedro do tipo anti-bloqueador cujas linhas são todas essenciais é a matriz de um clutter. Agora, então, vejamos o resultado, que nos é parcialmente conhecido.

Teorema 5.2.3 *Seja A uma matriz $(0, 1)$ sem colunas-zero e seja B uma matriz anti-bloqueadora de A . Então a igualdade min-max forte vale para A, B se e somente se cada linha essencial de B é um vetor $(0, 1)$. Assim, se a igualdade min-max forte vale para A, B , ela vale igualmente para B^*, A , onde B^* consiste das linhas essenciais de B .*

Antes de demonstrarmos o teorema, observemos que não conseguimos provar um resultado equivalente para matrizes bloqueadoras, como pudemos verificar com os exemplos do clutter Q_6 e dos 2-fluxos.

Dem.: Notemos inicialmente que o resultado dado pelo teorema 3.1.13 é exatamente a afirmação da suficiência do teorema acima e da parte de que B^* , A também satisfazem a igualdade min-max forte. O que nos resta provar é então a parte “se” do teorema.

Suponhamos que a igualdade min-max forte valha para A, B e, por absurdo, que B tenha uma linha fracionária $b = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, ou seja, b é um ponto extremo do poliedro

$$B = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Ax \leq 1\}$$

e existe um vetor $w = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ não-negativo inteiro para o qual o valor máximo de wx , para $x \in B$ é atingido unicamente por $x = b$. Seja λ um inteiro positivo. Então, por hipótese, o programa linear $yA \geq w$, $y \geq 0$, $\min 1y$, tem um vetor solução y inteiro e $(\lambda w)b = 1(\lambda y)$ é um valor positivo inteiro α . Suponhamos que $0 < \beta_1 < 1$ e seja $w_\lambda := (\lambda\omega_1 + 1, \dots, \lambda\omega_n)$, então $w_\lambda b = \alpha + \beta_1$ não é inteiro. Consideremos o programa $yA \geq w_\lambda$, $y \geq 0$, $\min 1y$. Existe um vetor inteiro y_λ que resolve este programa, e este vetor y_λ satisfaz $1y_\lambda = \max w_\lambda b'$, onde o máximo é tomado sobre as linha b' de B . Como $1y_\lambda$ é um inteiro e $w_\lambda b$ não é inteiro, existe uma linha $b_\lambda = (\beta_1(\lambda), \dots, \beta_n(\lambda)) \neq b$ de B tal que

$$w_\lambda b_\lambda = \beta_1(\lambda) + (\lambda w)b_\lambda > w_\lambda b = \beta_1 + (\lambda w)b,$$

e assim,

$$\beta_1(\lambda) > \lambda(wb - wb_\lambda). \quad (*)$$

Mas $wb > wb'$ para todas as linhas $b' \neq b$ e, deste modo, como B tem um número finito de linhas, devemos ter que $wb - wb_\lambda > \delta > 0$, onde δ é independente de λ .

Assim, a partir de (*), $\beta_1(\lambda) > \lambda\delta$. Como λ é um número inteiro arbitrário e o número de linhas de B é finito, isto é um absurdo. Portando todas as linhas essenciais de B são vetores $(0, 1)$. $\square$

Já discutimos as aplicações e implicações deste resultado no estudo de clutters anti-bloqueadores, pois essencialmente o que este teorema no diz em termos de um clutter $\mathcal{F}$ é que: Se $A = (M\mathcal{F})$ e $B = M(\text{ab}(\mathcal{F}))$, para todo $w \in \mathbb{R}_+^n$ o vetor solução x do programa 5.5 é um vetor de incidência de um membro do clutter anti-bloqueador de $\mathcal{F}$, isto é, se o clutter $\mathcal{F}$ possui a propriedade min-max, então $\mathcal{F}$ satisfaz a igualdade min-max forte. (Lembremos que quando isso ocorre, $\mathcal{F}$ é o clutter dos cliques maximais de um grafo perfeito.)

Partindo-se então de uma matriz $(0, 1)$ A totalmente unimodular, como já utilizamos várias vezes até agora, temos que existe uma matriz B anti-bloqueadora de A que também é uma matriz $(0, 1)$. Assim, a igualdade min-max forte vale tanto para A, B como para B, A , se uma delas for totalmente unimodular.

Consideremos agora as definições das operações contração, eliminação, extensão e completação dadas para matrizes no capítulo anterior. Podemos provar resultados análogos

aos que obtivemos então a respeito da relação entre pares anti-bloqueadores de matrizes e tais operações (as demonstrações são análogas, por isso não as repetiremos aqui). Mas explicitamente, com relação às operações contração e eliminação, temos

Proposição 5.2.4 *Seja A, B um par de matrizes anti-bloqueadoras. Então se contrairmos a coordenada i em A , uma matriz anti-bloqueadora da matriz resultante é obtida a partir de B eliminando-se a coordenada i . □*

Usando agora o teorema 5.2.3, obtemos como corolário do resultado anterior:

Corolário 5.2.5 *Se A, B é um par de matrizes $(0, 1)$ que satisfaz a propriedade min-max forte, então as matrizes $\hat{A}$ obtida a partir de A pela contração de uma coordenada i , e $\hat{B}$ obtida pela eliminação desta coordenada i satisfazem a igualdade min-max forte. □*

A relação entre as operações extensão e completção é dada por:

Proposição 5.2.6 *Se A, B é um par anti-bloqueador de matrizes, então a matriz $\tilde{A}$ resultante da extensão de uma coordenada i , e a matriz B^* obtida pela completção de B pela coordenada i formam um par anti-bloqueador de matrizes. □*

E o corolário direto, novamente usando o resultado 5.2.3, é:

Corolário 5.2.7 *Se A, B é um par de matrizes $(0, 1)$ que satisfaz a igualdade min-max forte, então, dado $w \in \mathbb{Z}_+^n$, o par de matrizes $\hat{A}, B^*$ obtido a partir de uma w -extensão e uma w -completção, respectivamente, satisfaz a igualdade min-max forte. □*

Também aqui podemos obter os resultados que obtivemos no capítulo 4, que nos permitem provar mais facilmente que um par de matrizes é anti-bloqueador:

Proposição 5.2.8 *Seja um par A, B de matrizes que, tomando-se $w = 1$, satisfaz a seguinte igualdade*

$$\min\{1y \mid yA \geq w, y \geq 0\} = \max\{wb^j \mid b^j \text{ é linha de } B\}. \quad (5.7)$$

Então, se para todo $\bar{w} \in \mathbb{Z}_+^n$ o par de matrizes $A^, \hat{B}$ obtido de A, B por $\bar{w}$ -completção e $\bar{w}$ -extensão, respectivamente, também satisfaz a seguinte igualdade, dado que $w = 1$:*

$$\min\{1y \mid yA^* \geq w, y \geq 0\} = \max\{w\hat{b}^j \mid \hat{b}^j \text{ é linha de } \hat{B}\}, \quad (5.8)$$

então A, B satisfaz a igualdade min-max. □

De posse deste resultado, é imediato, usando mais uma vez o teorema 5.2.3, que:

Proposição 5.2.9 *Seja A, B um par anti-bloqueador de matrizes $(0, 1)$ que satisfaz a igualdade*

$$\min\{1y \mid yA \geq w, y \in \mathbb{Z}_+^m\} = \max\{wb^j \mid b^j \text{ é linha de } B\}, \quad (5.9)$$

quando $w = 1$. Então, se para todo $\bar{w} \in \mathbb{Z}_+^n$ as matrizes $A^, \tilde{B}$ obtidas por $\bar{w}$ -completação e $\bar{w}$ -extensão de A, B , respectivamente, satisfazem a igualdade*

$$\min\{1y \mid yA^* \geq w, y \in \mathbb{Z}_+^{m^*}\} = \max\{w\tilde{b}^j \mid \tilde{b}^j \text{ é linha de } B\}, \quad (5.10)$$

então A, B satisfaz a igualdade max-min forte. $\square$

Assim temos aqui todas as ferramentas que tínhamos no capítulo anterior para manipularmos matrizes anti-bloqueadoras, e temos ainda os resultados que tornam mais fácil a tarefa de provar que duas matrizes realmente constituem um par anti-bloqueador.

5.3 Relação entre pares bloqueadores e anti-bloqueadores

Esta subseção é dedicada ao estudo da relação existente entre pares de poliedros anti-bloqueadores e pares de poliedros bloqueadores. Descreveremos tal relação no contexto de matrizes $(0, 1)$ e mostraremos um resultado de Fulkerson, 1971. Veremos que se A é a matriz de incidência de um clutter e A' é a matriz complemento de A (i.e., A' é obtida a partir de A trocando-se os 0's por 1's e vice-versa), então o poliedro anti-bloqueador do poliedro $\mathcal{B}' = \{b \in \mathbb{R}_+^n \mid A'b \leq 1\}$ pode ser facilmente obtido a partir da matriz bloqueadora de A .

Inicialmente provaremos um resultado auxiliar.

Lema *Seja E uma matriz $(0, 1)$ $e \times e$ não singular e seja E' o complemento de E . Suponhamos que o sistema $Ex = 1$ tenha uma única solução $x = (x_1, \dots, x_e)$ e que $x \geq 0$, $\sum_{i=1}^e x_i > 1$. Então o sistema $E'y = 1$, tem uma única solução $y = (y_1, \dots, y_e)$. Mais ainda, $y \geq 0$ e $\sum_{i=1}^e y_i > 1$.*

Dem.: Seja $\rho = \sum_{i=1}^e x_i$ e seja J a matriz $e \times e$ consistindo inteiramente de 1's, então

$y = x/(\rho - 1)$ satisfaz

$$\begin{aligned} E'y &= (J - E) \left(\frac{x}{\rho - 1} \right) = \frac{Jx}{\rho - 1} - \frac{Ex}{\rho - 1} \\ &= \left(\frac{\rho}{\rho - 1}, \dots, \frac{\rho}{\rho - 1} \right) - \left(\frac{1}{\rho - 1}, \dots, \frac{1}{\rho - 1} \right) \\ &= \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Claramente $y \geq 0$ e a soma das suas componentes é $\sigma = \rho/(\rho - 1) > 1$. Se $E'y = \mathbf{1}$ tivesse duas soluções distintas y_1 e y_2 , com soma de componentes $\sigma_1 \neq 1$, $\sigma_2 \neq 2$, deduziríamos, como feito acima, que $Ex = \mathbf{1}$ teria duas soluções distintas, contradizendo a nossa hipótese inicial. Se $E'y = \mathbf{1}$ tivesse uma solução y com soma de componentes $\sigma = 1$, então $Ey = (J - E')y = Jy - E'y = \mathbf{1} - \mathbf{1} = 0$, e, assim, E seria singular, nova contradição. Isto prova o Lema. $\square$

Agora o resultado que relaciona pares de poliedros bloqueadores e anti-bloqueadores:

Teorema 5.3.1 *Seja A a matriz de incidência $m \times n$ de um clutter sobre $\{1, \dots, n\}$ e seja A' o seu complemento. Suponhamos que A não possui nenhuma coluna formada inteiramente por 1's. Seja B a matriz bloqueadora $r \times n$ de A e denotemos por ρ_j a soma dos elementos da j -ésima linha b^j de B . Então o poliedro anti-bloqueador de $B' = \{b \in \mathbb{R}_+^n \mid A'b \leq \mathbf{1}\}$ é o poliedro $\overline{B'} = \{a \in \mathbb{R}_+^n \mid B'a \leq \mathbf{1}\}$, onde B' é a matriz $r \times n$ cujas linhas são*

$$b^1/(\rho_1 - 1), \dots, b^r/(\rho_r - 1).$$

Dem.: Notemos inicialmente que $\rho_j > 1$. Pois como A é uma matriz $(0, 1)$, certamente devemos ter que $\rho_j \geq 1$. Se $\rho_j = 1$, como b^j é um ponto extremo do poliedro $B = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Ax \leq \mathbf{1}\}$, segue que b^j é o vetor de incidência de um conjunto unitário, e, assim, a j -ésima coluna de A consiste somente de 1's, contradizendo a hipótese sobre A .

Como b^j é um ponto extremo de $B = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Ax \leq \mathbf{1}\}$, existe uma sub-matriz E de A não singular tal que as coordenadas diferentes de zero de b^j são dadas como solução das equações $Ex = \mathbf{1}$. Aplicando o lema, verificamos que $\frac{b^j}{\rho_j - 1}$ é um ponto extremo de $B' = \{b \in \mathbb{R}_+^n \mid A'b \leq \mathbf{1}\}$ se este vetor satisfizer todas as inequações definindo B' . Mas isto segue da demonstração do lema, pois

$$\begin{aligned} A' \frac{b^j}{\rho_j - 1} &= (J - A) \frac{b^j}{\rho_j - 1} = \frac{Jb^j}{\rho_j - 1} - \frac{Ab^j}{\rho_j - 1} \\ &\leq \left(\frac{\rho_j}{\rho_j - 1}, \dots, \frac{\rho_j}{\rho_j - 1} \right) - \left(\frac{1}{\rho_j - 1}, \dots, \frac{1}{\rho_j - 1} \right) \\ &\leq \mathbf{1}. \end{aligned}$$

De maneira análoga podemos ver que um ponto extremo b de B' tem soma das componentes $\sigma \geq 1$; e que se $\sigma > 1$, a mesma transformação $b \rightarrow b/\sigma - 1$, produz um ponto extremo de B' . Além disso, estes são os únicos pontos extremos de B' que possuem soma das componentes igual a 1. Isto completa a demonstração. $\square$

Segue dos teorema 5.1.4 e 5.3.1 que, se soubermos as desigualdades que caracterizam os vetores de incidência de um clutter como os pontos extremos de um poliedro do tipo bloqueador, então conhecemos as desigualdades que caracterizam o fecho convexo dos vetores de incidência da família que consiste do clutter complementar mais os subconjuntos dos membros deste clutter.

Concluimos esta seção com um exemplo ilustrando o teorema 5.3.1. Considere o grafo G indicado na figura abaixo. A matriz A indicada a seguir é a matriz de incidência de todas as árvores geradoras do grafo G , B é a matriz bloqueadora de A , A' é o complemento de A e B' é obtida a partir de B como no teorema 5.3.1. As linhas não essenciais de B' estão assinaladas com *. Como o exemplo indica, muitas simplificações podem ser feitas ao se passar de B para B' .

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & A' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & (\geq 1) \quad B' &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ * & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ * & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ * & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ * & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ * & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ * & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ * & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ * & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ * & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & (\leq 1)
 \end{aligned}$$

Os exemplos estudados no capítulo de clutters anti-bloqueadores podem ser vistos todos como casos onde determinamos pares anti-bloqueadores de matrizes $(0, 1)$. Porém, como vimos tanto neste capítulo como no de clutters anti-bloqueadores, ao descobrirmos que um clutter tem a propriedade min-max (uma matriz anti-bloqueadora da matriz dada tem como linhas essenciais somente linhas compostas de 0's e 1's), então o clutter satisfaz a igualdade min-max forte (então o par de matrizes satisfaz a igualdade min-max forte). Ao desenvolver um pouco mais esta teoria, acabamos por verificar que em cada um dos exemplos estudados o clutter em questão podia ser visto como o clutter dos cliques maximais de um grafo perfeito.

Veremos agora alguns exemplos não tão “bem comportados”, i.e., onde o clutter não possui a propriedade min-max, ou seja, as linhas essenciais de uma matriz anti-bloqueadora da matriz considerada não possui somente 0's e 1's.

5.4 Conjuntos independentes em matróides

Estudaremos agora um exemplo relacionado à seção 5 do capítulo anterior. Naquela seção vimos qual é a matriz bloqueadora da matriz de incidência do clutter das bases de um matróide, que por sinal não é sempre composta somente de 0's e 1's.

Neste exemplo não trabalharemos com clutters, pois o que queremos é encontrar uma matriz B anti-bloqueadora da matriz A de incidência da família dos conjuntos independentes em um matróide $M = (E, \mathcal{I})$ (notemos que se tomarmos apenas os membros maximais desta família, recairemos no clutter das bases de um matróide, que já foi estudado).

O teorema 4.5.1 nos diz que

$$\max\{\mathbf{1}y \mid yA \leq \mathbf{1}, y \geq 0\} = \min\left\{\frac{|S|}{p(S)}, S \subseteq E\right\}.$$

ou seja, que uma matriz anti-bloqueadora de A tem como linhas os vetores b^i associados aos conjuntos $S_i \subseteq E$ construídos do seguinte modo:

$$b_\epsilon^i = \begin{cases} 1/p(S_i), & \text{se } \epsilon \in S_i \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Não é difícil ver que as linhas essenciais de B são aquelas correspondentes aos conjuntos fechados de E .

Notemos ainda que o par B, A também satisfaz a igualdade min-max, pois, sabendo que

$$\max\{1y \mid yB \leq 1, y \geq 0\} = \min\{1a_i, a_i \text{ linha de } A\},$$

dado $w \in Z_+^n$, se realizarmos uma w -completação em A , como fizemos no caso do exemplo de partição de matróides dado na seção 4.5, já sabemos que o resultado é de novo a matriz de incidência de um matróide. Aplicando agora a proposição 5.2.8, obtemos o resultado desejado. Ou seja, sabemos, através da matriz B , descrever o poliedro cujos vértices são os vetores característicos dos conjuntos independentes em um matróide. Podemos utilizar tal conhecimento para desenvolver algoritmos sobre matróides que utilizam tais desigualdades, como por exemplo, algoritmos baseados em planos de corte (vide Grötschel, 1988, Schrijver, 1986).

5.5 Emparelhamentos

Estudamos até agora emparelhamentos e coberturas em grafos bipartidos, sendo os resultados obtidos sempre decorrentes do fato da matriz de incidência de um grafo bipartido ser totalmente unimodular. Usando este fato obtivemos facilmente pares de clutters bloqueadores Mengerianos e anti-bloqueadores que têm a propriedade min-max forte.

Mas em geral este não é o caso. Por exemplo, a matriz A de incidência do grafo abaixo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

não é totalmente unimodular, já que $\det(A) = 2$.

Edmonds, em 1965, mostrou quais são as desigualdades que descrevem o poliedro cujos pontos extremos são os vetores de incidência dos emparelhamentos de um grafo qualquer G , não necessariamente bipartido. Pela forma do sistema de desigualdades, veremos que as linhas deste são justamente as linhas de uma matriz anti-bloqueadora da matriz de incidência dos emparelhamentos de G .

Para mostrar a caracterização dada por Edmonds, seguiremos Schrijver, 1986, que deduz tal caracterização a partir de um resultado sobre o poliedro cujos vértices são os vetores característicos dos emparelhamentos perfeitos de um grafo, i.e., um emparelhamento que cobre todos os vértices.

Teorema 5.5.1 *O poliedro P cujos vértices são os vetores característicos dos emparelhamentos perfeitos de um grafo G é dado por*

$$\begin{aligned} (i) \quad & x \geq 0, \\ (ii) \quad & x(\delta(v)) = 1, \quad \forall v \in VG \\ (iii) \quad & x(\delta(W)) \geq 1, \quad \forall W \subseteq VG, |W| \text{ ímpar} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Dem.: Suponhamos $P \neq \emptyset$ (e então, necessariamente, temos que $|VG|$ é par). Denotemos por Q o conjunto dos vetores no $\mathbb{R}^{AG}$ satisfazendo 5.11. Como o vetor de incidência de um emparelhamento perfeito em G satisfaz 5.11, segue trivialmente que $P \subseteq Q$.

Suponhamos, por absurdo, que $Q \not\subseteq P$ e tomemos G como sendo o menor grafo com $Q \not\subseteq P$ (i.e., com $|VG| + |AG|$ menor possível). Tomemos x um vértice tal que $x \in Q - P$. Então para cada aresta α , $x_\alpha > 0$ — caso contrário poderíamos remover α de G para obter um contra-exemplo menor. E também $x_\alpha < 1$, caso contrário poderíamos obter um contra-exemplo menor tomando o grafo que obtemos de G removendo os extremos de α . Mais ainda, $|AG| > |VG|$, pois senão ou G não é conexo (caso em que uma das componentes de G seria um contra-exemplo menor) ou G é um circuito par (quando o teorema é trivial).

Como x é um vértice de Q , existem $|AG|$ restrições em 5.11 que são satisfeitas por x com igualdade. Como $x \geq 0$ e $|AG| > |VG|$ e $|VG|$ é par, segue que existe $W \subseteq VG$ com $|W|$ ímpar, $|W| \geq 3$, $|VG - W| \geq 3$ e $x(\delta(W)) \geq 1$.

Denotemos por G_1 e G_2 os grafos obtidos a partir de G ao contrairmos $VG - W$ e W , respectivamente. Ou seja, $VG_1 = W \cup \{w^*\}$, onde w^* é um novo vértice, e $AG_1 = \{\alpha \in AG \mid \alpha \subseteq W\} \cup \{\{v, w^*\} \mid v \in W \text{ e } \{v, w\} \in AG \text{ para algum } w \in VG - W\}$. Do mesmo modo, $VG_2 = (VG - W) \cup \{w_*\}$, onde w_* é um segundo novo vértice, e $AG_2 = \{\alpha \in AG \mid \alpha \subseteq VG - W\} \cup \{\{v, w_*\} \mid v \in VG - W \text{ e } \{v, w\} \in AG \text{ para algum } w \in W\}$.

Chamaremos de x_1 e x_2 as projeções de x sobre os conjuntos AG_1 e AG_2 , respectivamente. Isto é,

$$\begin{aligned} x_1(\alpha) &:= x(\alpha), & \text{se } \alpha \in W, \\ x_1(\{v, w^*\}) &:= \sum_{w \in VG - W} x(\{v, w\}). & \text{caso contrário.} \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} x_2(\alpha) &:= x(\alpha), & \text{se } \alpha \in VG - W, \\ x_2(\{v, w_*\}) &:= \sum_{w \in W} x(\{v, w\}). & \text{caso contrário.} \end{aligned}$$

Notemos que x_1 e x_2 satisfazem as desigualdades em 5.11 (em relação a G_1 e G_2 , respectivamente). Como G_1 e G_2 são menores do que G , segue que x_1 e x_2 podem ser

decompostos como combinações convexas dos vetores característicos de emparelhamentos perfeitos em G_1 e G_2 , respectivamente. Tais decomposições podem ser “coladas” para formar uma decomposição de x como combinação convexa de vetores característicos de emparelhamentos em G , contradizendo a nossa hipótese.

Podemos “colar” os dois vetores x_1 e x_2 , por exemplo, do seguinte modo: Pela racionalidade de x (por ser vértice de Q), existe um número natural k tal que para $i = 1, 2, \dots, k$, kx_i é a soma dos vetores característicos de k emparelhamentos perfeitos, digamos $E_1^i, \dots, E_k^i$, em G_i (possivelmente com repetições).

Cada um dos emparelhamentos E_j^1 corresponde a um emparelhamento F_j^1 em G tal que F_j^1 cobre todos os vértices em W e exatamente um vértice em $VG - W$, de tal modo que, para cada aresta α com $|W \cap \alpha| \geq 1$, o número de j 's com $\alpha \in F_j^1$ é igual a $kx(\alpha)$. Analogamente, a partir dos E_j^2 obtemos um emparelhamento F_j^2 em G tal que F_j^2 cobre todos os vértices em $VG - W$ e exatamente um vértice em W , de tal modo que, para cada aresta α com $|(VG - W) \cap \alpha| \geq 1$, o número de j 's com $\alpha \in F_j^2$ é igual a $kx(\alpha)$. Sem perda de generalidade podemos assumir que, para cada j , F_j^1 e F_j^2 possuem uma aresta em comum. Assim $F_j^1 \cup F_j^2$ é um emparelhamento perfeito em G e cada aresta α de G está em exatamente $kx(\alpha)$ emparelhamentos que formam $F_j^1 \cup F_j^2$. Logo x é uma combinação convexa de vetores característicos de emparelhamentos perfeitos. $\square$

Através de uma construção conhecida, podemos derivar a caracterização dada por Edmonds do poliedro dos emparelhamentos de um grafo a partir do teorema 5.5.1.

Corolário 5.5.2 *O poliedro cujos vértices são os vetores característicos dos emparelhamentos em um grafo G é determinado por*

$$\begin{aligned} (a) \quad & x \geq 0, \\ (b) \quad & x(\delta(v)) \leq 1, \quad \forall v \in VG, \\ (c) \quad & x(<W>) \leq \frac{1}{2}(|W| - 1), \quad \forall W \subseteq VG, |W| \text{ ímpar}, \end{aligned} \tag{5.12}$$

onde $<W>$ denota o conjunto de arestas com ambos os extremos em W .

Dem.: Tomemos $x \in \mathbb{R}^{AG}$ satisfazendo 5.12. Seja $G^* = (VG^*, AG^*)$ uma cópia disjunta de G , onde a cópia de um vértice v será denotada por v^* e a cópia de uma aresta α ($= \{v, w\}$) será denotada por α^* ($= \{v^*, w^*\}$). Seja $\tilde{G}$ o grafo com vértices $VG \cup VG^*$ e arestas $AG \cup AG^* \cup \{\{v, v^*\}, v \in VG\}$, e definamos $\hat{x}(\alpha) := \hat{x}(\alpha^*) := x(\alpha)$ para $\alpha \in AG$, e $\hat{x}(\{v, v^*\}) := 1 - x(\delta(v))$, para $v \in VG$.

Não é difícil verificar que a condição 5.11 é satisfeita por $\hat{x}$ com relação a $\tilde{G}$. Claramente (i) e (ii) são satisfeitas. Para demonstrar que $\hat{x}$ satisfaz (iii) devemos mostrar, para

$V_1, V_2^* \subseteq V\tilde{G}$, com $V_1 \subseteq G$ e $V_2^* \subseteq V_2^*$ e $|V_1 \cup V_2^*|$ ímpar, que

$$\hat{x}(\delta(V_1 \cup V_2^*)) \geq 1.$$

Na verdade, podemos assumir, por simetria, que $|V_1 - V_2^*|$ é ímpar. Logo,

$$\begin{aligned} \hat{x}(\delta(V_1 \cup V_2^*)) &= \hat{x}(\delta(V_1 - V_2)) + \hat{x}(\delta(V_2^* - V_1^*)) \\ &\geq \hat{x}(\delta(V_1 - V_2)) \\ &= |V_1 - V_2| - 2x(< V_1 - V_2 >) \geq 1, \end{aligned}$$

que segue por contagem e por 5.12(c).

Deste modo $\hat{x}$ é uma combinação convexa de emparelhamentos perfeitos em $\tilde{G}$. Pela restrição de $\hat{x}$ a G , segue que x é uma combinação convexa de emparelhamentos em G . $\square$

O corolário 5.5.2 é o resultado no qual estamos realmente interessados, pois observando as desigualdades de 5.12, verificamos que a matriz B cujas linhas são ou do tipo b^v ou b^W , definidas, para $v \in VG$ como

$$b_u^v = \begin{cases} 1, & \text{se existe } \alpha = \{v, u\} \in AG, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e para $W \subseteq VG, |W| \geq 3$ ímpar, como

$$b_u^W = \begin{cases} \frac{2}{|W| - 1}, & \text{se } u \in W, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

é uma matriz anti-bloqueadora de A . Ou seja, os vértices do poliedro $\bar{B} = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Bx \leq 1\}$ são justamente os vetores característicos dos emparelhamentos do grafo G em questão.

Nem todas as desigualdades de 5.12 representam facetas do poliedro dos emparelhamentos. Entretanto, pode-se mostrar que se $G = K_n$ (o grafo completo de ordem n), $n \geq 4$, então cada desigualdade em 5.12 determina uma faceta do poliedro dos emparelhamentos de G .

Observemos agora que, como sabemos que a matriz A de um grafo bipartido G é totalmente unimodular, temos que as linhas essenciais de uma matriz anti-bloqueadora de A são formadas apenas por 0's e 1's. Assim, se G é bipartido, apenas as desigualdades (a) e (b) de 5.12 (respectivamente, (i) e (ii) de 5.11) são suficientes para definir o poliedro dos emparelhamentos (respectivamente emparelhamentos perfeitos) de G .

Vale ressaltar que a demonstração de Edmonds de que 5.12 tem como vértices exatamente os vetores característicos de emparelhamentos é um algoritmo que resolve os

programas duais $Bx \leq 1, x \geq 0, \max wx$ e $yB \geq w, y \geq 0, \min 1y$, estabelecendo a igualdade min-max para B, A .

Notemos ainda que, por outro lado, a melhor resposta inteira no programa $yA \geq 1, y \geq 0, \min 1y$, nos dá uma coloração para as arestas do grafo G com o menor número de cores. Como é sabido, este último problema é difícil (vide Holyer, 1981). Mas se permitirmos “colorações fracionárias”, i.e., se considerarmos o programa $yA \geq w, y \geq 0, \min 1y$, sobre os reais ou os racionais, então o resultado de Edmonds e o teorema 5.2.1 nos dizem qual é a resposta. Por exemplo, podemos deduzir que se G é um grafo 3-regular 3-aresta-conexo, então as arestas de G podem ser “coloridas fracionadamente” com uma “coloração” de peso total 3, i.e., $\min 1y = 3$, sujeito a $yA \geq 1, y \geq 0$. Para vermos isso, basta notar que tal mínimo é igual a $\max 1b^i, b^i$ linha de B , e se G é 3-regular, então $\max 1b^i = 3$, para b^i em 5.12(b). Para b^i em 5.12(c) correspondendo a $W \subseteq VG, |W|$ ímpar, $|W| \geq 3$, temos que

$$\begin{aligned} 1b^i &= \frac{2|<W>|}{|W| - 1} \\ &= 2 \left(\frac{\frac{3|W|}{2} - x(\delta(W))}{|W| - 1} \right) \leq \frac{2(\frac{3|W|}{2} - 3)}{|W| - 1} \\ &= \frac{3|W| - 3/2}{|W| - 1} < 3, \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade vem do fato de que o grafo é 3-regular e a primeira desigualdade, de que o grafo é 3-aresta-conexo.

Como já observamos no exemplo anterior, podemos usar o conhecimento das desigualdades que definem o poliedro dos emparelhamentos para desenvolver algoritmos que se baseiam em planos de corte. Grötschel e Holland apresentaram em 1985 um algoritmo nestes moldes para encontrar emparelhamentos perfeitos, obtendo resultados bastante encorajadores.

5.6 Branchings

Como último exemplo, apresentaremos mais um problema relacionado com grafos, desta vez orientados. Queremos caracterizar uma matriz anti-bloqueadora B - e conseqüentemente o poliedro anti-bloqueador - da matriz de incidência A dos *branchings* de um grafo orientado. Um *branching* em um grafo D é uma floresta no grafo D tal que toda aresta é orientada para um vértice diferente, i.e., em cada vértice entra no máximo uma aresta.

Edmonds, em 1968, apresentou um algoritmo que encontra num grafo D orientado com peso c nas arestas, um *branching* de peso máximo. Isto é, tal algoritmo resolve o

seguinte programa

$$\begin{aligned} \max \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Bx \leq 1 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

onde B é uma matriz anti-bloqueadora da matriz dos branchings.

No decorrer da demonstração da corretude do algoritmo, Edmonds caracterizou os branchings como sendo vértices do poliedro definido por

$$\begin{aligned} x(\delta(VD - v)) &\leq 1, \quad \forall v \in VD, \\ x(< S >) &\leq |S| - 1, \quad \forall S \subseteq VD, |S| \geq 2 \\ x &\geq 0, \end{aligned}$$

de onde podemos facilmente obter uma matriz anti-bloqueadora B para A .

Construindo B a partir das desigualdades em 5.6, verificamos que aqui novamente não podemos extrair nenhuma relação min-max “bem-comportada”, já que as linhas essenciais de B não são necessariamente compostas somente de 0's e 1's.

O resultado dado por Edmonds, explicitamente, é a igualdade min-max para o par B, A , i.e., ele mostrou que

$$\min\{y1 \mid yB \geq c, y \geq 0\} = \max\{ca^i \mid a \text{ linha de } A\}.$$

Por outro lado, a igualdade min-max para o par A, B é equivalente ao fato de que o valor mínimo de uma c -cobertura fracionária (se $c = 1$, uma cobertura fracionária) do grafo G por branchings, i.e., cada aresta e de AD pertence a pelo menos c_e branchings — com repetições permitidas, é igual a $\max cb^i$, b^i linha de B . Resultado que novamente pode ser aproveitado em algoritmos baseados em planos-de-corte, ou para obter limites superiores para tal c -cobertura.

Como pudemos ver, a teoria sobre os poliedros anti-bloqueadores é bastante análoga àquela que apresentamos quando consideramos a relação bloqueadora sobre poliedros. Porém as diferenças existentes são significativas. O fato de que se uma matriz $(0, 1)$ possui uma matriz anti-bloqueadora composta somente de 0's e 1's, então ela satisfaz a propriedade min-max forte é um resultado substancial, que pode ser facilmente relacionado com os resultados que vimos no capítulo 3 sobre grafos perfeitos e clutters anti-bloqueadores. Conseguimos entretanto resultados similares aos obtidos para poliedros bloqueadores quando estudamos matrizes não compostas somente de 0's e 1's.

Como pudemos ver no exemplo dos emparelhamentos, podemos usar tais relações min-max para termos idéia aproximada dos resultados de alguns programas lineares, ou em

algoritmos que precisam de informações sobre facetas e/ou vértices. Em resumo, esta relação - assim como a bloqueadora - pode ser uma ferramenta utilíssima para tratar de problemas de otimização combinatória.

Capítulo 6

Complementos

Este deveria ser um capítulo do tipo: “tudo o que você gostaria de saber a mais sobre clutters e poliedros bloqueadores e anti-bloqueadores, e nunca teve coragem de perguntar”. Mas não seremos tão ambiciosos assim. Entendemos este como um capítulo no qual dizemos algo que possa completar, esclarecer, generalizar, etc, o que já foi dito até agora nos capítulos anteriores. Apenas mencionaremos os resultados, indicando as fontes onde as demonstrações poderão ser encontradas.

Começamos com uma generalização da generalização. Estendemos o conceito de poliedros bloqueadores e anti-bloqueadores para conjuntos quaisquer, usando polaridades.

As duas seções seguintes tratam de dois tipos de matrizes muito especiais: as totalmente unimodulares (TU) e as *balanceadas*. Já usamos algumas propriedades das matrizes TU nos capítulos precedentes, e tentaremos aqui ampliar o quadro destas propriedades. A respeito das matrizes balanceadas ainda não falamos nada, mas veremos que tais matrizes apresentam propriedades interessantes no contexto de problemas de cobertura e packing e, assim, no estudo das relações bloqueadoras e anti-bloqueadoras.

Em seguida abordaremos rapidamente a teoria de *sistemas totalmente duais-inteiros* que, como veremos, apresentam alguma relação com as propriedades de ser Mengeriano e a min-max forte.

6.1 Conjuntos bloqueadores e anti-bloqueadores

A partir dos artigos de Fulkerson sobre poliedros bloqueadores e anti-bloqueadores, Tind, em 1974, 1980, aproveitou o conceito de polaridade de Minkowski e generalizou tais idéias, obtendo os *conjuntos bloqueadores e anti-bloqueadores* e conseguindo também condições para que propriedades do tipo: “o conjunto B é o bloqueador do bloqueador de B ” e “o conjunto B é o anti-bloqueador do anti-bloqueador de B ” sejam válidas.

Comecemos pela polaridade de Minkowski. Dado um conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$, definimos o **polar** C^* de C como sendo o conjunto

$$C^* := \{z \in \mathbb{R}^n \mid zx \leq 1, \forall x \in C\}.$$

Se C é fechado, convexo e tal que $0 \in C$, então pode-se mostrar que C^* também é fechado, convexo e $0 \in C^*$. Adicionalmente temos a propriedade **involutória** de que

$$C^{**} = C. \quad (6.1)$$

Para um conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ arbitrário, temos a fórmula mais geral

$$C^{**} = \text{fecho}(\text{conv}(C \cup \{0\})),$$

onde o **fecho** é o fecho no sentido topológico (vide Rockafellar, 1970).

A idéia agora é de modificar a definição de conjuntos polares interceptando tais conjuntos com um outro conjunto D . Em geral, isto destrói a propriedade involutória. Por isso, logo a seguir, veremos condições para que essa propriedade torne a valer.

Sejam $B \subseteq \mathbb{R}^n$ e $D \subseteq \mathbb{R}^n$ conjuntos não vazios, e definamos o **conjunto $\bar{B}$ anti-bloqueador** de B com relação a D como sendo

$$\bar{B} := B^* \cap D.$$

A questão que queremos examinar agora é sob quais condições temos que

$$\bar{\bar{B}} = B,$$

i.e., quando B é o conjunto anti-bloqueador do conjunto $\bar{B}$ com relação ao conjunto D . Neste caso dizemos que B e $\bar{B}$ constituem um **par de conjuntos anti-bloqueadores**.

Observemos aqui que se $D = \mathbb{R}^n$, recaímos na polaridade de Minkowski. Ou seja, na verdade estamos tratando de uma generalização desta polaridade.

Daqui por diante assumiremos que C é fechado, convexo e que $0 \in C$. Então, $C = C^{**}$. Tomaremos também D fechado e convexo, contendo a origem. Para tais conjuntos temos então (vide Rockafellar, 1970) que

$$(C \cap D)^* = \text{fecho}(\text{conv}(C^* \cup D^*)). \quad (6.2)$$

Os próximos dois teoremas nos dão condições necessárias e suficientes para que $\overline{\overline{C}} = C$.

Teorema 6.1.1 $\overline{\overline{C}} = C$ (i.e., C é o anti-bloqueador de $\overline{C}$ com relação a D) se e somente se $C = \text{fecho}(\text{conv}(C \cup D^*)) \cap D$.

Dem.:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{C}} &= \overline{C^* \cap D} = (C^* \cap D)^* \cap D \\ &= \text{fecho}(\text{conv}(C^{**} \cup D^*)) \cap D \\ &= \text{fecho}(\text{conv}(C \cup D^*)) \cap D, \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue de 6.2. $\square$

O próximo teorema segue de uma maneira natural do teorema anterior.

Teorema 6.1.2 Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado, convexo, contendo a origem, e seja $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Então $B = \overline{\overline{B}}$ se e somente se existe um conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ fechado, convexo, $0 \in C$, tal que $B = C \cap D$ e tal que $D^* \subseteq C$. $\square$

Notemos que quando estudamos poliedros do tipo anti-bloqueador, i.e., $B = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Ax \leq 1\}$, onde A é uma matriz não-negativa, podemos considerar como C o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 1\}$, e como D o ortante não-negativo do $\mathbb{R}^n$. Então $\overline{B} = B^* \cap \mathbb{R}_+^n$ e pelo teorema 6.1.1 ou 6.1.2, B e $\overline{B}$ são um par de conjuntos anti-bloqueadores, resultado que obtemos no capítulo 5 por outras vias. Note que aqui não nos é dada nenhuma informação sobre os vértices e facetas dos poliedros, apenas a propriedade involutória 6.1.

Reverteremos agora a desigualdade na definição de conjunto polar para que possamos generalizar também a noção de poliedro bloqueador, assim como acabamos de fazer com os anti-bloqueadores.

Para um conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$, $C \neq \emptyset$, definimos o **conjunto C° polar reverso** de C por

$$C^\circ = \{x^\circ \in \mathbb{R}^n \mid xx^\circ \geq 1, \forall x \in C\}.$$

Não é difícil ver que C° é convexo, fechado e $0 \notin C^\circ$, e que $C^\circ = \emptyset$ se e somente se $0 \in \text{fecho}(\text{conv}(C))$.

Denotemos por $P_o(C)$ o cone gerado por C com vértice em 0, i.e.,

$$P_o(C) = \{\lambda x \mid x \in C \text{ e } \lambda \geq 0\}.$$

Pode ser mostrado então que

$$C^{\circ\circ} = \text{fecho}(\text{conv}(C)) + P_o(\text{fecho}(\text{conv}(C))).$$

Para chegarmos mais perto do conceito de bloqueador, usaremos o conceito de cone. Seja K um cone fechado e convexo no $\mathbb{R}^n$ com vértice em 0, e tomemos $B = C \cap K$. Então B é fechado e convexo, $0 \notin B$ e $B = B + P_o(B)$.

Se B é não-vazio, podemos definir o conjunto bloqueador $\hat{B}$ com relação a K como sendo

$$\hat{B} = B^\circ \cap K.$$

Com relação a uma possível propriedade involutória para conjuntos bloqueadores, o teorema companheiro do teorema 6.1.1 é algo mais fraco que o dado para a relação anti-bloqueadora:

Teorema 6.1.3 *Se $C^\circ \subseteq K$, então $B = \hat{B}$. $\square$*

Recaindo nos poliedros do tipo bloqueador, i.e., $B = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Ax \geq 1\}$, onde A é uma matriz não-negativa, temos que $B = C \cap K$, onde $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq 1\}$ e $K = \mathbb{R}_+^n$. É fácil ver que $C^\circ \subseteq K$, e assim, por 6.1.3 temos que B e $\hat{B}$ são um par de conjuntos bloqueadores, resultado que já conhecíamos.

Assim como relacionamos poliedros bloqueadores e anti-bloqueadores, podemos relacionar de várias maneiras também conjuntos bloqueadores e anti-bloqueadores. Por exemplo, tomemos $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid (x, y) > 0\}$ e $B \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\overline{B} \subseteq \mathbb{R}^n$ um par de conjuntos anti-bloqueadores com respeito a esse D .

Sejam $(x_A, y_A) \in B$, onde $(x_A, y_A) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ e $(x_A^*, y_A^*) \in \overline{B}$, onde $(x_A^*, y_A^*) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ e definamos a relação

$$(x_A, y_A) \longrightarrow (x_B, y_B),$$

onde $x_B = \frac{-x_A}{y_A}$ e $y_B = \frac{-1}{y_A}$ para $(x_A, y_A) \in B$, e a relação

$$(x_A^*, y_A^*) \longrightarrow (x_B^\circ, y_B^\circ),$$

onde $x_B^\circ = \frac{x_A^*}{y_A^*}$ e $y_B^\circ = \frac{1}{y_A^*}$ para $(x_A^*, y_A^*) \in \overline{B}$.

Então afirmamos que estes dois conjuntos $\{(x_B, y_B)\}$ e $\{(x_B^\circ, y_B^\circ)\}$, constituídos dos pontos descritos acima, formam um par de conjuntos bloqueadores com respeito a D . Isso se deve ao fato de que as duas desigualdades básicas seguintes são equivalentes para a dada escolha de D :

$$\begin{cases} x_A x_A^* + y_A y_A^* \leq 1, \\ x_B x_B^\circ + y_B y_B^\circ \geq 1. \end{cases}$$

Assim vemos que podemos entender as definições de poliedros bloqueadores e anti-bloqueadores como casos muito particulares de conjuntos bloqueadores e anti-bloqueadores. Por ter uma estrutura muito especial — o fato de ser convexo e fechado — podemos obter vários resultados adicionais quando estudamos um poliedro, resultados que não são necessariamente válidos para todo conjunto. Porém podemos compreender melhor as relações bloqueadoras e anti-bloqueadoras se as encararmos tanto no seu aspecto mais restrito — quando consideramos clutters, como no seu aspecto mais amplo que acabamos de ver.

6.2 Matrizes totalmente unimodulares

Apresentamos nesta seção algumas propriedades fundamentais das matrizes totalmente unimodulares que, como já vimos, conduzem a uma classe de problemas de programas lineares com soluções ótimas inteiras. Observamos as consequências do fato da matriz de incidência de um grafo bipartido ser totalmente unimodular nos capítulos 2, 3 e 4. Veremos agora também mais alguns exemplos de tais matrizes.

Relembremos do capítulo 1 que uma matriz A é **totalmente unimodular (TU)** se cada submatriz quadrada de A tem determinante 0, +1 ou -1. Em particular, cada componente de uma matriz TU é 0, +1 ou -1.

Os resultados que se seguem podem ser encontrados em Nemhauser & Wolsey, 1988, Schrijver, 1986. Inicialmente damos um resultado que nos mostra como obter outras matrizes TU a partir de uma matriz TU dada.

Proposição 6.2.1 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. A é TU

2. A transposta de A é TU.
3. Uma matriz obtida adicionando a A uma linha (coluna) nula, ou adicionando uma linha (coluna) com um elemento diferente de zero, sendo este 1, -1, é TU.
4. Uma matriz obtida eliminando-se uma linha (coluna) de A é TU.
5. Uma matriz obtida multiplicando-se uma linha (coluna) de A por -1 é TU.
6. Uma matriz obtida permutando-se duas linhas (colunas) de A é TU.
7. Uma matriz obtida duplicando-se uma linha (coluna) de A é TU. $\square$

A principal propriedade de tais matriz é que

Teorema 6.2.2 *Se A é uma matriz TU e b um vetor inteiro, então o poliedro $P := \{x \mid Ax \leq b\}$ é inteiro. $\square$*

Como consequência direta deste teorema, temos um resultado que relaciona uma matriz TU também com os programas duais.

Corolário 6.2.3 *Se A é uma matriz TU e b, c são vetores inteiros, então ambos os problemas na seguinte equação*

$$\max\{cx \mid Ax \leq b\} = \min\{yb \mid yA = c, y \geq 0\}$$

têm soluções inteiras $\square$

A partir da proposição 6.2.1 sabemos que podemos fazer operações com as matrizes TU que fazem com que o teorema 6.2.2 e o corolário 6.2.3 se tornem muito mais amplos, abrangendo também os programas citados nas propriedades min-max e max-min. Daí concluímos que todo clutter que tiver uma matriz de incidência TU não só satisfaz a igualdade max-min, como é Mengeriano, e satisfaz a igualdade min-max forte.

O próximo resultado caracteriza de uma maneira mais geral uma matriz TU através de diferentes propriedades.

Teorema 6.2.4 *Seja A uma matriz com componentes 0, +1 ou -1. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. A é totalmente unimodular;
2. para todo vetor b inteiro, o poliedro $\{x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ tem apenas vértices inteiros;
3. para quaisquer vetores a, b, c, d o poliedro $\{x \mid a \leq Ax \leq b, c \leq x \leq d\}$ tem apenas vértices inteiros;
4. toda coleção de colunas de A pode ser dividida em duas partes de modo que a soma das colunas em uma parte menos a soma das colunas na outra parte é um vetor com componentes 0, +1 ou -1;
5. toda matriz não singular de A tem uma linha com um número ímpar de componentes diferentes de zero;
6. a soma das componentes de qualquer submatriz com soma par nas linhas e nas colunas é divisível por 4;
7. nenhuma submatriz quadrada de A tem determinante +2 ou -2. $\square$

Como exemplo de matriz TU temos a já conhecida matriz de incidência de um grafo bipartido. Outro exemplo são as *matrizes de intervalo*. Uma **matriz de intervalo** é uma matriz $A(0, 1) m \times n$ onde em cada coluna os 1's aparecem sucessivamente, i.e., se $a_j^i = a_j^k = 1$ e $k > i + 1$, então $a_j^l = 1$ para todo $l, i < l < k$. Temos ainda como exemplo de matriz TU a matriz de incidência $VD \times AD$ de um grafo orientado D .

Um dos exemplos mais significativos de matrizes TU é o de *matrizes de rede*. Dado um grafo orientado $D = (V, AD)$ e uma árvore orientada $T = (V, AT)$ em D , a matriz de incidência $A = M(T, D)$ de arestas de T por arestas de D é assim definida, para $\alpha' \in AT$ e $\alpha = (v, w) \in AD$:

$$a_{\alpha', \alpha} := \begin{cases} +1, & \text{se o único caminho } v - w \text{ em } T \text{ utiliza } \alpha' \text{ na sua orientação,} \\ -1, & \text{se o único caminho } v - w \text{ em } T \text{ utiliza } \alpha' \text{ em orientação contrária,} \\ 0, & \text{se o único caminho } v - w \text{ em } T \text{ não utiliza } \alpha', \end{cases}$$

Matrizes que são obtidas desta maneira são chamadas **matrizes de rede**.

Seymour mostrou em 1980 que as matrizes de rede formam as bases de todas as matrizes TU. Nem todas as matrizes TU são matrizes de rede ou transpostas destas,

como Bixby mostrou em 1977, apresentando as seguintes matrizes TU:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Seymour mostrou que, de uma certa maneira, matrizes TU são formadas por matrizes de rede e pelas matrizes 6.3.

A partir deste resultado foram desenvolvidos algoritmos para reconhecer matrizes de rede e matrizes TU (vide Bixby & Wagner, 1988). Assim, temos em mão não só uma família de matrizes que nos dá propriedades relevantes dentro da teoria de programação inteira e otimização combinatória, como pode também ser “facilmente” reconhecida quando presente na estrutura de um problema e, então, devidamente aproveitada.

6.3 Matrizes balanceadas

Outra classe de matrizes associadas às relações bloqueadora e anti-bloqueadora é a das *matrizes balanceadas*. Esta classe foi estudada por Berge, em 1970 e 1972. Berge apresenta tais matrizes no contexto de hipergrafos, como uma generalização de grafos bipartidos. Apresentaremos aqui, entretanto, apenas os resultados que se referem especificamente às matrizes.

Seja $\mathcal{M}_k$, $k \geq 3$, a família das matrizes $(0, 1)$ $k \times k$, cujas somas nas linhas e nas colunas são sempre iguais a 2, e que não contém a submatriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dizemos que uma matriz A $(0, 1)$ é **totalmente balanceada (TB)** se ela não contém nenhuma submatriz em $\mathcal{M}_k$, para $k \geq 3$. Se A não contém nenhuma submatriz em $\mathcal{M}_k$, $k \geq 3$, ímpar, dizemos que A é **balanceada**.

Diante destas definições temos que

Proposição 6.3.1 *Se A é uma matriz balanceada, então as seguintes matrizes também o são:*

1. (A, I) ;
2. a transposta de A ;
3. qualquer matriz obtida permutando-se linhas ou colunas de A ;
4. qualquer submatriz de A . $\square$

E temos que é fácil ver que

Proposição 6.3.2 *Se A é uma matriz $(0, 1)$ TU, então A é balanceada.* $\square$

Por outro lado, uma matriz $(0, 1)$ TU pode não ser uma matriz TB. E reciprocamente, existem matrizes TB que não são TU. Por exemplo, podemos verificar que a seguinte matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

não é TU, mas é TB. Mais ainda, $P := \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Ax \leq 1\}$ é inteiro e $P(b) := \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Ax \leq b\}$, com $b = (2, 1, 1, 1)$, contém o vértice $(1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$. Adicionalmente, a matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ A' & 0 \end{pmatrix},$$

onde $A' \in \mathcal{M}_4$, é balanceada, mas não é TU ou TB.

Com relação às matrizes balanceadas, temos os seguintes resultados (vide Berge, 1972 e Fulkerson, Hoffman & Oppenheim, 1974):

Teorema 6.3.3 *Se A é balanceada, dado $b \in (0, 1)^m$, $c \in \mathbb{Z}^n$, então $Q(b) := \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Ax \geq b\}$ é inteiro e $\max\{by \mid yA \leq c, y \geq 0\}$ atinge o valor ótimo em um ponto inteiro.* $\square$

E considerando os problemas de cobertura,

Teorema 6.3.4 *Se A é balanceada, dado $b \in (0, 1)^m$, $c \in \mathbb{Z}^n$, então $P(b) := \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Ax \leq b\}$ é inteiro e $\min\{by \mid yA \geq c, y \geq 0\}$ atinge o valor ótimo em um ponto inteiro.* $\square$

Ou seja, clutters que possuem matrizes de incidência balanceadas são Mengerianos e satisfazem a igualdade min-max forte. Olhando por outro ângulo, matrizes balanceadas possuem matrizes bloqueadoras inteiras (0, 1), e as linhas essenciais de suas matrizes anti-bloqueadoras são compostas apenas de 0's e 1's.

A principal diferença entre matrizes TB e matrizes balanceadas (por enquanto) é que existe um algoritmo polinomial para reconhecer matrizes TB e, mais ainda, os problemas de otimização associados podem ser resolvidos por métodos combinatórios eficientes (vide Hoffman, Kolen & Sakarovitch, 1985), enquanto não se conhece nada no gênero para matrizes apenas balanceadas.

Como curiosidade, notemos que a matriz A dos cliques maximais do grafo dado na figura abaixo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Não é balanceada, e no entanto, como G é perfeito (G é triangulável), o clutter dos cliques maximais de G possui a propriedade min-max forte. Logo, a condição de ter a matriz de incidência balanceada não é necessária para que um clutter possua a propriedade min-max forte. Com relação à propriedade FMCM forte, o mesmo fato ocorre, pois as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

satisfazem a propriedade FMCM forte, tanto como par A, B como B, A (pois A é balanceada), porém B não é balanceada.

6.4 Sistemas totalmente duais-inteiros

O conceito de *sistema totalmente dual-inteiro* foi introduzido por Edmonds & Giles, em 1977, quando estes estudaram relações entre sistemas de inequações e poliedros inteiros.

Dizemos que um sistema de inequações lineares é **totalmente dual-inteiro (TDI)** se, para todo vetor inteiro c tal que $\max\{cx \mid Ax \leq b\}$ é finito, o dual de tal programa

$\min\{yb \mid yA = c, y \geq 0\}$ tem solução ótima inteira.

A partir desta definição, segue que:

Corolário 6.4.1 *Se $Ax \leq b$ é um sistema TDI e b é inteiro, então o poliedro $\{x \mid Ax \leq b\}$ é inteiro. $\square$*

Entretanto esta definição é exclusivamente vinculada aos sistemas que representam os poliedros, e não aos próprios poliedros, pois

Proposição 6.4.2 *Qualquer poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Ax \leq b\}$ pode ser representado por um sistema TDI. $\square$*

Porém o que diferencia os poliedros inteiros é que

Proposição 6.4.3 *Se $P = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Ax \leq b\}$ é um poliedro inteiro, então P pode ser representado como $P = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid A'x \leq b'\}$, onde $A'x \leq b'$ é TDI e b' é inteiro. $\square$*

Relacionando tais conceitos e resultados mais diretamente com os de bloqueador e anti-bloqueador, podemos concluir que quando perguntamos se um clutter $\mathcal{F}$ é Mengeriano ou possui a propriedade min-max forte, estamos interessados em descobrir se os sistemas

$$M(\mathcal{F})x \geq \mathbf{1}, x \geq 0 \quad \text{e} \quad M(\mathcal{F})x \leq \mathbf{1}, x \geq 0$$

são TDI.

Abrindo um parênteses — já que mencionamos tal problema — cabe aqui ressaltar que não se sabe se o problema de decidir se um sistema é TDI está em NP. Da mesma forma, também não se sabe se está em NP o problema de decidir se um sistema $Ax \leq b$ determina um poliedro inteiro.

Como vimos pelo teorema 2.1.8, o fato de um clutter ser Mengeriano (possuir a propriedade min-max forte, resp.) implica que ele tenha a propriedade FMCM (a propriedade min-max, resp.), o que poderíamos ter deduzido também a partir do corolário 6.4.1 acima.

6.5 Continuando...

Toda a teoria contida nesta dissertação fornece ferramentas úteis na área de otimização combinatória, tanto na área mais discreta, como quando estudamos clutters, como na área mais ampla, feita no estudo de poliedros.

Tentamos abranger os resultados existentes sobre as relações bloqueadora e anti-bloqueadora, mas é claro que ainda existe muito a ser estudado, como por exemplo uma caracterização mais precisa dos clutters que têm a propriedade FMCM. Seymour, em 1990, apresentou uma caracterização de tais clutters. Outras podem aparecer, esclarecendo melhor esta área de estudos.

Considerando a relação anti-bloqueadora, dada a forte relação existente entre esta e o conceito de grafos perfeitos, nos defrontamos com toda uma classe de problemas relativos a estes últimos. Em particular, o problema de encontrar uma boa caracterização de tais grafos está em aberto. Por enquanto, não se conhece uma caracterização que possa ser “facilmente” (i.e., polinomialmente) aplicada no reconhecimento de grafos perfeitos.

As matrizes e os poliedros bloqueadores e anti-bloqueadores podem ser instrumentos úteis no desenvolvimento e utilização de algoritmos de otimização baseados em planos de corte, como já mencionamos nos capítulos 4 e 5. Os exemplos ilustram a utilidade de tais conceitos, mas existem muitos mais exemplos na literatura, como o de matrizes de permutação (Fulkerson, 1964, 1971) e conjuntos independentes em dois matróides (Fulkerson, 1971). Porém novos casos estão ainda por ser estudados, como o de subgrafos minimais fortemente conexos e circuitos hamiltonianos.

As desigualdades min-min e max-max, tanto para os pares de matrizes e poliedros bloqueadores como anti-bloqueadores já descobertos, ainda não foram completamente estudadas, e tais desigualdades podem vir a ser utilizadas como ferramentas para a descoberta de novos pares.

No âmbito do estudo de poliedros inteiros e programação inteira que foi feito — implícita e explicitamente — no decorrer deste texto, existe a possibilidade de se tentar tratar os poliedros associados a problemas, que não os de cobertura e packing, de uma maneira análoga à feita para estes. Talvez estes outros poliedros possam ser caracterizados através de relações semelhantes, podendo ser aproveitadas as operações em matrizes e clutters aqui apresentadas, os métodos ilustrados nos exemplos e as diferentes abordagens feitas no estudo dessas relações.

Bibliografia

C. Berge, "Some classes of perfect graphs", *Graph theory and theoretical physics*, Academic Press, New York, 1967, 155-165.

C. Berge, "Sur certains hypergraphes généralisant les graphes bipartites", in: *Combinatorial Theory and its Applications I*, (Proceedings Colloquium on Combinatorial Theory and its Applications, Balatonfüred, Hungary, 1969), (eds. P. Erdős, A. Rényi e V.T. Sós), North-Holland, Amsterdam, 1970, 119-133.

C. Berge, "Balanced matrices", *Mathematical Programming* **2** (1972) 19-31.

J.A. Bondy & U.S.R. Murty, *Graph theory with applications*, Macmillan, London, 1976.

R.E. Bixby, "Kuratowski's and Wagner's theorems for matroids", *Journal of Combinatorial Theory (B)* **22** (1977) 32-53.

R.E. Bixby & D.K. Wagner, "An almost linear-time algorithm for graph realization", *Math. of Operation Research*, Vol. 13 **11** (1988) 99-123.

V. Chvátal, *Linear programming*, Freeman, New York, 1983.

R.D. Dilworth, "A decomposition theorem for partially ordered sets", *Annals of Mathematics*, Vol. 51, **1** (1950), 161-166.

G.A. Dirac, "On rigid circuit graphs", *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* **25** (1961) 71-76.

J. Edmonds, "Maximum matching and a polyhedron with 0, 1-vertices", *J. Res. Nat. Bur. Standards*, Vol. 69B **1 e 2** (1965) 125-130.

- J. Edmonds, "Optimum branchings", *J. Res. Nat. Bur. Standards*, Sect. B. Vol 71 (1967) 233-240.
- J. Edmonds, "Minimum partition of a matroid into independent subsets", *J. Res. Nat. Bur. Standards*, Vol 69B 1 e 2 (1968) 67-77.
- J. Edmonds, "Optimum branchings", in: *Mathematics of the decision sciences, Lectures in applied mathematics* (eds. G.B. Dantzig and A.F. Veinott, Jr.), Vol 11, Amer. Math. Soc. (1968) 346-361.
- J. Edmonds & D.R. Fulkerson, "Bottleneck extrema", *Journal of Combinatorial Theory* 8 (1970) 299-306.
- J. Edmonds & R. Giles, "A min-max relation for submodular functions on graphs", in: *Studies in integer programming* (eds. P.L. Hammer et al.), Annals of Discrete Mathematics 1 (1977) 185-204.
- J. Edmonds & E.L. Johnson, "Matching, Euler tours and the chinese postman", *Mathematical Programming* 5 (1973) 88-124.
- L.R. Ford & D.R. Fulkerson, *Flows in networks*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1962.
- D.R. Fulkerson, "The maximum number of disjoint permutations contained in a matrix of zeros and ones", *Canadian Journal of Mathematics* 16 (1964) 729-735.
- D.R. Fulkerson, "Networks, frames, blocking systems", *Mathematics of the Decision Sciences*, Lectures in Applied Mathematics, Vol. 11 Amer. Math. Soc. (1968), 303-333.
- D.R. Fulkerson, "Blocking polyhedra", in: *Graph Theory and its Applications* (ed. B. Harris), Academic Press (1970) 93-112.
- D.R. Fulkerson, "Blocking and anti-blocking pairs of polyhedra", *Mathematical Programming* 1 (1971) 168-194.
- D.R. Fulkerson, "Anti-blocking polyhedra", *Journal of Combinatorial Theory (B)* 12 (1972) 50-71.
- D.R. Fulkerson, A.J. Hoffman & R. Oppenheim, "On balanced matrices", *Mathematical*

Programming Study **1** (1974) 120-132.

M. Golumbic, *Algorithm Graph Theory and Perfect Graphs*, Academic Press, New York, 1980.

M. Grötschel & O. Holland, "Solving matching problems with linear programming", *Mathematical Programming* **33** (1985) 243-259.

M. Grötschel, L. Lovász & A. Schrijver, *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

R.P. Gupta, "A decomposition theorem for bipartite graphs", in: *Theory of graph* (ed. P. Rosenstiehl), Gordon and Breach, New York, 1967, 135-138.

R.P. Gupta, "An edge coloring theorem for bipartite graphs with applications", *Discrete Math.* **23** (1978) 229-233.

A.J. Hoffman, A. Kolen & M. Sakarovitch, "Totally balanced and greedy matrices", *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods* **6** (1985) 721-730.

I. Holyer, "The NP-completeness of edge coloring", *SIAM J. Comp.* **10** (1981) 718-720.

T.C. Hu, "Multi-commodity network flows", *Operations Research* **11** (1963) 244-360.

D. König, "Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre", *Mat. Ann.* **77** (1916) 453-465.

D. König, "Über trennende Knotenpunkte in Graphen" (nebst Anwendungen auf Determinanten und Matrizen), *Acta. Lit. Sci. Sect. Sci. Math* (Szeged) **6** (1932-1934) 155-179.

A. Lehman, "On the width-length inequality", *Mathematical Programming* **16** (1979) 245-259. *Melhor: Math Progr* **17** (1979) 403-417

L. Lovász, "Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture", *Discrete Mathematics* **2** (1972) 253-267.

L. Lovász, "A characterization of perfect graphs", *Journal of Combinatorial Theory* (B)

13 (1972) 95-98.

L. Lovász, "On two minimax theorems in graph", *Journal of Combinatorial Theory* (B) **21** (1976) 96-103.

L. Lovász & M.D. Plummer, *Matching theory*, North-Holland, Amsterdam, 1986.

C.L. Lucchesi & D.H. Younger, "A minimax theorem for directed graphs", *Journal of the London Mathematical Society* **17** (1978) 369-374.

K. Menger, "Zur allgemeinen Kurventheorie", *Fund. Math.* **10** (1927) 96-115.

G.L. Nemhauser & L.A. Wolsey, *Integer and Combinatorial Optimization*, Wiley, New York, 1988.

W.R. Pulleyblank, "Polyhedral combinatorics", in: *Handbook in Optimization* (eds.: G.L. Nemhauser, A.H.G. Rinnooy Kan, M.J. Todd), inédito.

B. Reed, Notas de seminário no Workshop em Combinatória, Campinas, 1991.

R.T. Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

A. Schrijver, "A counter-example to a conjecture of Edmonds and Giles", *Discrete Mathematics* **32** (1980) 213-214.

A. Schrijver, "Min-max results in combinatorial optimization" in: *Mathematical Programming - The State of the Art* (eds. A. Bachem, M. Grötschel, B. Korte), Bonn (1982).

A. Schrijver, *Theory of Linear and Integer Programming*, Wiley, Chichester, 1986.

P.D. Seymour, "The forbidden minors of binary clutters", *J. London Math. Soc.* (2) **12** (1976) 356-360.

P.D. Seymour, "The matroids with the max-flow min-cut property", *Journal of Combinatorial Theory* (B) **23** (1977) 189-222.

P.D. Seymour, "A short proof of the two-commodity flow theorem", *Journal of Combinatorial Theory* (B) **26** (1979) 370-371.

P.D. Seymour, "Decomposition of regular matroids", *Journal of Combinatorial Theory* (B) **28** (1980) 305-359.

P.D. Seymour, "On odd cuts and plane multicommodity flows", *Proceedings of the London Mathematical Society* (3) **42** (1981) 178-192.

P.D. Seymour, "On Lehman's width-length characterization", *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* **1** (1990) 107-117.

P.D. Seymour, "On Lehman's inequality", Notas de seminário no Workshop em Combinatória, Campinas, 1991.

J. Tind, "Blocking and anti-blocking sets", *Mathematical Programming* **6** (1974) 157-166.

J. Tind, "Certain kinds of polar sets and their relation to mathematical programming", *Mathematical Programming Study* **12** (1980) 206-213.

D.R. Woodall, "Menger and König systems", *Theory and Applications of Graphs* (Lecture Notes in Math. 642), Springer, 1978.

Índice dos símbolos mais usados

$\mathbb{R}, (\mathbb{R}_+)$	1
$\mathbb{Z} (\mathbb{Z}_+)$	1
$\text{cone}(S)$	2
$\text{conv}(S)$	2
$\delta(W)$	6, 7
$\langle W \rangle$	6
G/α	6
$G \setminus \alpha$	6
$\mathcal{F}/e$	9
$\mathcal{F} \setminus e$	9
$\text{ext}(\mathcal{F}, e)$	9
$\text{comp}(\mathcal{F}, e)$	10
$b(\mathcal{F})$	11
$g(G)$	21
$\Delta(G)$	22
$\text{ab}(\mathcal{F})$	35
$\chi(G)$	6, 50
$\chi'(G)$	22
$\omega(G)$	50
$\alpha(G)$	50
$\pi(G)$	50
$\hat{B}$	55
$\overline{B}$	88

Índice

- anti-bloqueador
 - de clutter 35
 - de poliedro 86
- anti-cadeia 45
- aresta 4
 - adjacente 4
 - múltipla 4
- árvore 5
 - geradora 6
- base 78
- bloqueador
 - de clutter 11
 - de poliedro 56
- borda 24
- branching 105
- cadeia 45
- caminho 5
 - orientado 7
- circuito 5
 - orientado 7
- clique 6
- clutter 8
 - anti-bloqueador 35
 - bloqueador 11
 - Mengeriano 15
- cobertura 6, 8
 - de aresta 6
 - de corte orientado 32
- coloração 6
- combinação
 - cônica 2
 - convexa 2
- começa (aresta) 7
- comparável 45
- completação
 - em clutter 10
 - em matriz 63
- componente conexa 5
- comprimento de um caminho 5
- cone 2
- conjunto
 - anti-bloqueador 109
 - bloqueador 111
 - convexo 2
 - estável 6
 - par 24
- contração
 - em clutter 9
 - em grafo 6
 - em matriz 62
 - em matróide 82
 - estrela 43
- corte 5, 7
 - estrela 27
 - orientado 32
- cortes cruzados 26
- dependente 78
- desconectador 71
- desigualdade
 - comprimento-largura 14, 59
 - max-max 40, 92
 - min-min 14, 59
- dual 3
- duplicação de aresta 7

- eliminação
 - em clutter 9
 - em grafo 6
 - em matriz 62
 - em matróide 82
- emparelhamento 6
 - perfeito 6
- estrela de um vértice 5
- extensão
 - em clutter 9
 - em matriz 63
- extremos de uma aresta 4
- face 2
- faceta 3
- fecho 109
 - cônico 2
 - convexo 2
 - em matróide 78
- floresta 5
- FMCM 14, 59
- forma padrão 9
- função objetivo 3
- gerar (matróide) 82
- grafo 4
 - bipartido 6
 - completo 4
 - conexo 5
 - de comparabilidade 46
 - orientado 6
 - perfeito 50
 - simples 4
 - π -perfeito 50
 - χ -perfeito 50
- grau de um vértice 5
- hipergrafo 7
- igualdade
 - do gargalo 32
 - FMCM 14, 59
 - forte 15, 61
 - max-min 14, 59
 - forte 15, 61
 - min-max 39, 92
 - forte 41, 94
- incidente (aresta) 4
- incomparável 45
- independente 77
- inequação válida 2
- intercepta (conjunto) 2
- linha
 - essencial 55, 87
 - não-essencial 55, 87
- matriz
 - anti-bloqueadora 89
 - balanceada 115
 - bloqueadora 58
 - de incidência
 - de grafo 6
 - de clutter 10
 - própria 56
 - totalmente balanceada (TB) 115
 - totalmente unimodular (TU) 3, 112
- matróide 77
- max-max 40, 92
- max-min 14, 59
- forte 15, 61
- Mengeriano 15
- menor
 - de um clutter 9
 - de uma matriz 62
 - próprio 9
- min-max 40, 92
- forte 41, 94
- min-min 14
- número cromático 6
- ordem de um grafo 4
- packing 8
- par

- anti-bloqueador 86
 - de matrizes 91
- bloqueador 56
 - de matrizes 55
 - de matrizes bloqueadoras 58
- perfeito 50
- pluperfeição 51
- polar 109
 - reverso 110
- poliedro 2
 - ilimitado 3
 - inteiro 3
 - tipo anti-bloqueador 86
 - tipo bloqueador 55
- posto 77
- primal 3
- problema
 - de cobertura 8
 - de packing 8
 - do gargalo 32
- programa linear 3
- π -perfeito 50
- sair (aresta) 6
- separador de vértice 48
- sistema
 - de equações 2
 - de inequações 2
- solução
 - ótima 3
 - viável 3
- subdivisão de aresta 7
- subgrafo 5
 - induzido 5
- submatróide 78
- T -corte 24
- termina (aresta) 7
- tipo anti-bloqueador 86
- tipo bloqueador 55
- T -junção 24
- valor ótimo 3
- vértice
 - de grafo 4
 - de poliedro 3
 - inicial 5
 - final 5
 - simplicial 48
- vértices adjacentes 48
- χ -perfeito 50
- χ -pluperfeição 50