Hipoelipticidade de uma
Classe de Sistemas
Sobredeterminados

Claudio Hirofume Asano

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE
MESTRE EM
MATEMÁTICA APLICADA

Área de Concentração: **Matemática Aplicada**
Orientador: **Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro**

— São Paulo, Maio de 1991 —

*Para Erika,
pela sua paciência, dedicação e carinho.*

*Para você também Paulo,
pela amizade e principalmente por
ser um exemplo a ser seguido.*

Agradecimentos

Erika, obrigado por ter tomado conta de tudo.

Paulo, obrigado pela orientação. Quem sabe algum dia eu consiga aprender metade daquilo que você sabe.

Kitty, obrigado por emprestar o Fernandinho-286 para a edição de texto.

Oscar, obrigado pela ajuda nos planos de trabalho e no seminário.

Obrigado a todos os meus amigos que contribuíram direta ou indiretamente neste trabalho.

Sumário

Neste trabalho apresentamos o estudo da hipoelipticidade C^∞ e C^ω de uma classe de sistemas sobredeterminados de campos vetoriais de codimensão 1 utilizando as idéias de H. M. Maire. Estas consistem no estabelecimento de estimativas *a priori* de tipo sub-elíptico. O sistema em questão é dado por $L = d_t - id\phi \wedge \partial_x$ onde $\phi : B \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ é de classe C^ω . O resultado central é que uma condição necessária e suficiente para que L seja $C^{\infty(\omega)}$ -hipoelíptico é que a integral primeira $Z(x, t) = x + i\phi(t)$ do sistema seja uma aplicação aberta.

Abstract

In this work we present the study of the $C^{\infty(\omega)}$ -hypoellipticity of a class of overdetermined systems of vector fields with codimension 1 using the ideas of H. M. Maire. These consist of building *a priori* estimates of sub-elliptic type. The system we are dealing with is $L = d_t - id\phi \wedge \partial_x$ where $\phi : B \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ is analytic. The main result is that a necessary and sufficient condition for L 's $C^{\infty(\omega)}$ -hypoellipticity is that the first integral $Z(x, t) = x + i\phi(t)$ be an open map.

Conteúdo

1	Introdução	2
2	Preliminares; a estrutura tubular	5
2.1	Notações e Definições	5
2.2	A Estrutura Tubular	6
2.3	Uma desigualdade para ϕ sobre o fluxo gradiente	8
2.4	Outros resultados em Análise Funcional e EDP's	12
3	O conceito de hipoelipticidade	15
3.1	Hipoelipticidade	15
3.2	Uma condição necessária para hipoelipticidade	16
3.3	Uma condição suficiente para hipoelipticidade C^ω	22
4	Uma estimativa sub-elíptica	24
4.1	O caminho das pedras	24
4.2	Uma condição suficiente para hipoelipticidade C^∞	25

Hipoelipticidade de uma Classe de Sistemas Sobredeterminados

Claudio Hirofume Asano

ERRATA :

Pag. 8 :

onde se lê $\dot{\gamma}_t = -\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}(\gamma_t(t))$ leia-se $\dot{\gamma}_t = -\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}(\gamma_t)$

Pag. 9 :

onde se lê $= -M|h_t(\tau)|, \quad \forall \tau \in [0, \delta(t)[$ leia-se $= -M|h_t(\tau)|^\theta, \quad \forall \tau \in [0, \delta(t)[$

Pag. 16 :

onde se lê $\mathcal{W} = \mathbb{C} \setminus \{iy \mid y < 0\}$ leia-se $\mathcal{W} = \mathbb{C} \setminus \{iy \mid y \leq 0\}$

Pag. 22 :

onde se lê $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} | \langle L_j u_\varepsilon \rangle | = 0$ leia-se $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} | \langle L_j u_\varepsilon, \varphi \rangle | = 0$

Pag. 38 : onde se lê

... portanto existem $h_l \in C^0(J')$, $l = 0, \dots, \nu$ tais que

$$u(x, t) = \sum_{l \leq \nu} \partial_x^l h_l(x) + \sum_{\substack{k \leq m+1 \\ \alpha \leq \beta - e_j}} \partial_x^k \partial_t^\alpha w_{k\alpha}(x, t).$$

Iterando o processo mais $|\beta| - 1$ vezes segue que ...

leia-se

... portanto existem $h_{l\alpha} \in C^0(J' \times B')$ tais que

$$u(x, t) = \sum_{\substack{l \leq \nu \\ \alpha \leq \gamma}} \partial_x^l \partial_t^\alpha h_{l\alpha}(x, t)$$

onde $\gamma_j = \beta_j - 1$. Iterando o processo mais $\beta_j - 1$ vezes segue que

$$u(x, t) = \sum_{\substack{l \leq \nu' \\ \alpha \leq \gamma'}} \partial_x^l \partial_t^\alpha g_{l\alpha}(x, t)$$

onde $g_{l\alpha} \in C^0(J' \times B')$ e $\gamma'_j = 0$ e repetindo todo o processo acima mais $n - 1$ vezes segue que ...

Pag. 40 : acrescentar

F. Treves. A New Method of Proof of Subelliptic Estimates. *Comm. Pure Appl. Math.* **24** (1971) p. 71-115.

Capítulo 1

Introdução

O presente trabalho apresenta um estudo sobre a regularidade das soluções de sistemas sobredeterminados de campos vetoriais complexos definidos por estruturas localmente integráveis ([1], [2], [6]).

Mais especificamente, estudaremos sistemas dados por campos vetoriais complexos definidos em $\mathbf{R} \times B \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ da forma

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} - i \frac{\partial \phi}{\partial t_j} \frac{\partial}{\partial x}, \quad j = 1, \dots, n$$

onde $B \subseteq \mathbf{R}^n$ é aberto e $\phi : B \rightarrow \mathbf{R}$ é uma função de classe C^∞ ou analítica real. Notemos que a função

$$Z(x, t) = x + i\phi(t)$$

definida em $\mathbf{R} \times B$ é uma integral primeira do sistema, isto é, valem as condições

$$\begin{cases} L_j Z = 0 & j = 1, \dots, n \\ dZ \neq 0 & \text{em } \mathbf{R} \times B. \end{cases}$$

O fato de $\text{im } Z$ ser independente de x é que leva à nomenclatura “tubular” para a estrutura em questão (cf. [6]).

O problema que discutimos aqui será o estudo da validade da seguinte propriedade :

$$u \in \mathcal{D}', \quad L_j u \in C^\infty \quad (C^\omega) \quad j = 1, \dots, n \implies u \in C^\infty \quad (C^\omega). \quad (1.1)$$

Alguns casos podem ser respondidos imediatamente trazendo à luz resultados já clássicos da teoria das equações diferenciais parciais elípticas. Suponha, por exemplo, que $\phi(t) = t_1$. Então

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial t_1} - i \frac{\partial}{\partial x}, \quad L_2 = \frac{\partial}{\partial t_2}, \quad \dots, \quad L_n = \frac{\partial}{\partial t_n}$$

e portanto

$$\bar{L}_1 L_1 + L_2^2 + \dots + L_n^2 = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial t_n^2}$$

é igual a Δ , o operador de Laplace em $\mathbf{R}^{n+1}$. Assim, se $L_j u \in C^\infty$ (resp. C^ω) para $j = 1, \dots, n$, teremos $\Delta u \in C^\infty$ (resp. C^ω) e portanto (1.1) é válida neste caso.

Uma situação totalmente oposta ocorre quando $\phi \equiv 0$. Neste caso

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j}, \quad j = 1, \dots, n$$

e portanto qualquer distribuição u independente de $t_1, \dots, t_n$ satisfaz as equações homogêneas $L_j u = 0$ mostrando que (1.1) não se verifica em geral.

O resultado central desta monografia (Teorema 3.1.1) afirma que a validade de (1.1) é equivalente à não existência de máximos nem de mínimos locais para a função ϕ . Em termos da integral primeira Z , tal propriedade é equivalente a esta última ser uma aplicação aberta que é, por sua vez, uma condição intrínseca associada à estrutura localmente integrável em consideração ([1], [2], [6]).

Para o estudo da suficiência no caso analítico utilizamos um resultado de Baouendi-Treves (Teorema 2.4.2) que afirma que toda solução de $Lu = 0$ é composição de uma função holomorfa com a integral primeira Z . No caso C^∞ demonstramos estimativas *a priori* de tipo sub-elíptico, utilizando uma linguagem um pouco diferente do trabalho inicial de Maire [4] na apresentação e demonstração dos resultados (Capítulo 4). Para a obtenção de tais estimativas é necessário o uso de uma desigualdade envolvendo funções analíticas reais devida a Łojasiewicz [3] (Proposição 2.3.1).

Para o estudo da necessidade, no Capítulo 3 supomos que ϕ tem um mínimo local e construímos exemplos de soluções singulares de $Lu = 0$.

Finalmente, ainda no Capítulo 3, mostramos como a existência de mínimos locais para a função ϕ implica a existência de soluções não triviais do sistema

homogêneo que se anulam de ordem infinita sobre uma determinada “fibra” $Z^{-1}(\zeta_0)$ de Z bem como mostramos (Proposição 3.2.1) que esta fibra tem a seguinte propriedade : toda função localmente limitada que é solução do sistema homogêneo no seu complementar deve, necessariamente, ser solução “através” desta.

Capítulo 2

Preliminares; a estrutura tubular

2.1 Notações e Definições

Sejam $J \subseteq \mathbf{R}$ um intervalo aberto, $B \subseteq \mathbf{R}^n$ um aberto e $u : J_x \times B_t \rightarrow \mathbf{C}$. Se $u \in C^0(B, C_c^\infty(J))$ definimos

$$\begin{aligned}\|u\|_{s,K}^2 &= \sup_{t \in K} \|u(\cdot, t)\|_s^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \sup_{t \in K} \int (1 + \xi^2)^s |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi \quad \forall s \in \mathbf{R}, \quad \forall K \subset\subset B\end{aligned}$$

onde $\hat{u}(\xi, t)$ denota a transformada de Fourier na variável x :

$$\hat{u}(\xi, t) = \int e^{-ix\xi} u(x, t) dx.$$

Chamamos de $C^0(B, H^s)$ o conjunto das funções contínuas em B a valores no espaço de Sobolev $H^s = H^s(\mathbf{R})$. A topologia em $C^0(B, H^s)$ é dada pelas semi-normas

$$\|u\|_{s,K}, \quad K \subset\subset B$$

que torna $C^0(B, H^s)$ um espaço de Frechet.

Considere agora

$$f(x, t) = \sum_{j=1}^n f_j(x, t) dt_j$$

uma 1-forma definida para $(x, t) \in J_x \times B_t \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$.

Definimos

$$|f(x, t)| = \left[\sum_{j=1}^n |f_j(x, t)|^2 \right]^{1/2}.$$

Se $\gamma : [a, b] \rightarrow B \subset \mathbf{R}^n$ for uma curva de classe C^1 então vale a seguinte desigualdade :

$$\begin{aligned} \left| \int_{s \in \gamma} f(x, s) d\gamma \right| &= \left| \int_a^b \sum_{j=1}^n f_j(x, \gamma(\tau)) \dot{\gamma}_j(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \int_a^b \sum_{j=1}^n |f_j(x, \gamma(\tau))| |\dot{\gamma}_j(\tau)| d\tau \\ &\leq \int_a^b \left[\sum_{j=1}^n |f_j(x, \gamma(\tau))|^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{j=1}^n |\dot{\gamma}_j(\tau)|^2 \right]^{1/2} d\tau \\ &= \int_a^b |f(x, \gamma(\tau))| |\dot{\gamma}(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Se tivermos que $f \in \Lambda^1 C^\infty(B, C_c^\infty(J))$ definimos as seguintes semi-normas

$$\|f\|_{s,K} = \sup_{t \in K} \left\{ \sum_{j=1}^n \|f_j(\cdot, t)\|_s^2 \right\}^{1/2}, \quad K \subset\subset B.$$

Observe que, pela identidade de Parseval,

$$\begin{aligned} \|f\|_{0,K} &= \sup_{t \in K} \left\{ \sum_{j=1}^n \int |f_j(x, t)|^2 dx \right\}^{1/2} \\ &= \sup_{t \in K} \left\{ \int |f(x, t)|^2 dx \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

2.2 A Estrutura Tubular

Seja $\phi : B \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ uma função de classe C^∞ e considere

$$Z(x, t) = x + i\phi(t) \tag{2.1}$$

e os campos

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} - i \frac{\partial \phi}{\partial t_j} \frac{\partial}{\partial x}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Sabemos que a estrutura definida pelos campos L_j é involutiva¹ e localmente integrável com Z como integral primeira, isto é,

$$L_j Z = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Como ϕ só depende de t a estrutura gerada pelos L_j recebe o nome de “estrutura tubular”.

Considere agora o sistema sobredeterminado

$$L_j u = f_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Observe que (2.2) pode ser escrito como

$$Lu = f$$

onde

$$L = d_t - i d\phi \wedge \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.3)$$

e

$$f = \sum_{j=1}^n f_j dt_j.$$

Aplicando a transformada de Fourier em x em ambos os lados de (2.2) obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}L_j u &= \mathcal{F} \left(\frac{\partial u}{\partial t_j} - i \frac{\partial \phi}{\partial t_j} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial t_j} - i(i\xi) \frac{\partial \phi}{\partial t_j} \hat{u} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t_j} + \xi \frac{\partial \phi}{\partial t_j} \right) \hat{u} \\ &= \hat{f}_j, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

¹Na verdade os L_j comutam.

Usando o fator integrante $e^{\phi(t)\xi}$ temos que

$$\frac{\partial}{\partial t_j} (e^{\phi(t)\xi} \hat{u}) = e^{\phi(t)\xi} \hat{f}_j, \quad j = 1, \dots, n$$

que em linguagem de formas se torna

$$d_t (e^{\phi(t)\xi} \hat{u}) = e^{\phi(t)\xi} \hat{f} \quad (2.4)$$

onde

$$\hat{f} = \sum_{j=1}^n \hat{f}_j dt_j.$$

2.3 Uma desigualdade para ϕ sobre o fluxo gradiente

Para estudar as propriedades de decrescimento na variável ξ de $\hat{u}(\xi, t)$, solução de (2.4), vamos integrar a equação (2.4) ao longo do fluxo do campo gradiente de ϕ . O Lema 2.3.1 a seguir nos dá o controle do crescimento (e decrescimento) de ϕ ao longo destas curvas.

Na sua demonstração, usaremos as seguintes desigualdades, cujas verificações são imediatas :

Para cada $\sigma \geq 1$ existem constantes $C_\sigma, C'_\sigma > 0$ tais que

$$(x - y)^\sigma \leq C_\sigma (x^\sigma - y^\sigma), \quad \forall x \geq y \geq 0 \quad (2.5)$$

$$x^\sigma + y^\sigma \geq C'_\sigma (x + y)^\sigma \quad \forall x, y \geq 0 \quad (2.6)$$

Lema 2.3.1 *Sejam $B \subseteq \mathbf{R}^n$ um aberto e $\phi \in C^\infty(\bar{B})$ uma função real. Suponha que existam $M > 0$ e $0 \leq \theta < 1$ tais que*

$$|\nabla \phi| \geq M |\phi|^\theta \quad \text{em } B. \quad (2.7)$$

Defina $\Sigma = \{t \in B \mid \nabla \phi(t) = 0\}$ e considere, para cada $t \in B \setminus \Sigma$, $\gamma_t(\tau)$ solução de

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_t &= -\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}(\gamma_t(t)) \\ \gamma_t(0) &= t \end{cases}$$

definida em $[0, \delta(t)[$. Então existem $C > 0$ e $\sigma \geq 1$ tais que

$$\phi(t) - \phi(\gamma_t(\tau)) \geq C\tau^\sigma, \quad \forall \tau \in [0, \delta(t)[.$$

Observação : a desigualdade acima implica que $\delta(t)$ é uniformemente limitada em B .

Demonstração :

Seja $h_t = \phi \circ \gamma_t$. Assim

$$\begin{aligned} \dot{h}_t(\tau) &= \nabla \phi(\gamma_t(\tau)) \cdot \dot{\gamma}_t(\tau) \\ &= -|\nabla \phi(\gamma_t(\tau))| \\ &\leq -M|\phi(\gamma_t(\tau))|^\theta \\ &= -M|h_t(\tau)|^\theta, \quad \forall \tau \in [0, \delta(t)[. \end{aligned}$$

Temos dois casos a considerar :

1º caso) $h_t(0) = \phi(t) \leq 0$.

Como ϕ é estritamente decrescente ao longo de γ_t segue que $h_t(\tau) \leq 0$, $\forall \tau \in [0, \delta(t)[$.

Assim

$$\dot{h}_t(\tau) \leq -M(-h_t(\tau))^\theta,$$

ou seja

$$\frac{-\dot{h}_t(\tau)}{(-h_t(\tau))^\theta} \geq M.$$

Note que não há possibilidade de que $h_t(\tau) = 0$ a menos que $\tau = 0$ e portanto o quociente acima está bem definido.

Integrando de 0 a τ obtemos

$$\frac{1}{1-\theta} \left[(-h_t(\tau))^{1-\theta} - (-h_t(0))^{1-\theta} \right] \geq M\tau$$

donde, usando

$$\sigma = \frac{1}{1-\theta} \geq 1 \tag{2.8}$$

obtemos por (2.5)

$$\begin{aligned} C_\sigma [-h_t(\tau) + h_t(0)] &\geq [(-h_t(\tau))^{1-\theta} - (-h_t(0))^{1-\theta}]^\sigma \\ &\geq [M(1-\theta)\tau]^\sigma, \quad \forall \tau \in [0, \delta(t)[. \end{aligned}$$

2º caso) $h_t(0) > 0$.

Seja $\alpha \in]0, \delta(t)[$ tal que

$$\begin{aligned} h_t(\tau) &> 0, \quad \forall \tau \in [0, \alpha[\\ h_t(\tau) &\leq 0, \quad \forall \tau \in [\alpha, \delta(t)[. \end{aligned}$$

Observe que α está bem definido porque ϕ é decrescente ao longo de γ_t e que no caso $\alpha = \delta(t)$ temos simplesmente que $h_t(\tau) > 0, \forall \tau \in [0, \delta(t)[$.

Se $\tau \in [0, \alpha[$ então

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \frac{\dot{h}_t(s)}{|h_t(s)|^\theta} ds &= \int_0^\tau \frac{\dot{h}_t(s)}{h_t(s)^\theta} ds \\ &\leq -M\tau. \end{aligned}$$

Assim

$$\frac{1}{1-\theta} [h_t(\tau)^{1-\theta} - h_t(0)^{1-\theta}] \leq -M\tau$$

e portanto usando que $\sigma = 1/(1-\theta)$ obtemos por (2.5)

$$C_\sigma [h_t(0) - h_t(\tau)] \geq [(1-\theta)M\tau]^\sigma, \quad \forall \tau \in [0, \alpha[.$$

Observe que, por continuidade, fazendo $\tau \nearrow \alpha$ temos

$$h_t(0) - h_t(\alpha) \geq C\alpha^\sigma$$

Agora se $\tau \in [\alpha, \delta(t)[$ temos

$$\begin{aligned} h_t(0) - h_t(\tau) &= h_t(0) - h_t(\alpha) + h_t(\alpha) - h_t(\tau) \\ &\geq C\alpha^\sigma + h_{\gamma_t(\alpha)}(0) - h_{\gamma_t(\alpha)}(\tau - \alpha) \quad (\text{o sistema é autônomo}) \\ &\geq C[\alpha^\sigma + (\tau - \alpha)^\sigma] \\ &\geq C'\tau^\sigma \quad \text{por (2.6).} \end{aligned}$$

□

Com as hipóteses do Lema acima existe o limite

$$\lim_{\tau \rightarrow \delta(t)-} \gamma_t(\tau),$$

para cada $t \in B \setminus \Sigma$.

De fato, seja $(\tau_j) \subset [0, \delta(t)[$ uma seqüência tal que $\tau_j \rightarrow \delta(t) < +\infty$. Usando que $|\dot{\gamma}_t(\tau)| = 1, \forall \tau \in [0, \delta(t)[$ temos

$$|\gamma_t(\tau_j) - \gamma_t(\tau_k)| \leq |\tau_j - \tau_k|$$

o que implica que $(\gamma_t(\tau_j))$ é uma seqüência de Cauchy em B e portanto convergente para um ponto $l(t) \in \bar{B}$.

Note que $l(t)$ não depende da seqüência (τ_j) : se $(\tau'_j) \subset [0, \delta(t)[$ com $\tau'_j \rightarrow \delta(t)$ então

$$|\gamma_t(\tau_j) - \gamma_t(\tau'_j)| \leq |\tau_j - \tau'_j|$$

implica que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \gamma_t(\tau_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \gamma_t(\tau'_j) = l(t)$$

uma vez que $\delta(t)$ é finito. Note que $l(t) \in \partial B \cup \Sigma$ porque caso contrário $\delta(t)$ não seria o extremo direito do intervalo maximal de γ_t .

Usando novamente que ϕ é estritamente decrescente ao longo de γ_t , se $\phi(t) < 0$ então $l(t) \in \partial B$ porque $\phi(t) = 0, \forall t \in \Sigma$. Além disso, se $l(t) \in \Sigma$ então $\phi(t) > 0$.

Observe que aparentemente a condição (2.7) parece restritiva demais. Entretanto é possível provar (cf. [3], p. 92) que toda função analítica real satisfaz uma desigualdade do tipo (2.7) :

Proposição 2.3.1 (Lojasiewicz) *Seja ϕ uma função analítica definida em uma vizinhança de um ponto $a \in \mathbf{R}^n$. Então existe $\theta \in]0, 1[$ tal que*

$$|\nabla \phi(t)| \geq |\phi(t) - \phi(a)|^\theta$$

em uma vizinhança de a .

2.4 Outros resultados em Análise Funcional e EDP's

No Capítulo 4 vamos trabalhar com regularizações na variável x de elementos em $C^0(B, H^s)$. Se $u \in C^0(B, H^s)$ utilizamos a notação

$$u_t = u(\cdot, t) \in H^s.$$

Considere

$$\rho_\eta(x) = \frac{1}{\eta} \rho\left(\frac{x}{\eta}\right)$$

com $\rho \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ tal que $\text{supp } \rho \subseteq [-1, 1]$, $\rho \geq 0$ e $\int \rho = 1$.

Proposição 2.4.1 *Se $u \in C^0(B, H^s)$ então*

$$\rho_\eta \star u \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} u \quad \text{em } C^0(B, H^s).$$

Demonstração :

Temos

$$\|(\rho_\eta \star u)_t - u_t\|_s^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \xi^2)^s |\hat{u}(\xi, t)|^2 |\hat{\rho}(\eta\xi) - 1|^2 d\xi.$$

Sejam $K \subset B$ compacto e $\varepsilon > 0$. Então existe $M > 0$ tal que

$$\int_{|\xi| > M} (1 + \xi^2)^s |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi < \varepsilon, \quad \forall t \in K.$$

De fato, a seqüência de funções contínuas

$$h_N(t) = \int_{|\xi| \geq N} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi$$

é decrescente e converge pontualmente para zero, donde, pelo Teorema de Dini, a convergência será necessariamente uniforme sobre os compactos de B .

Assim, se $t \in K$,

$$\begin{aligned} \|(\rho_\eta \star u)_t - u_t\|_s^2 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M (1 + \xi^2)^s |\hat{u}(\xi, t)|^2 |\hat{\rho}(\eta\xi) - 1|^2 d\xi + \frac{2\varepsilon}{\pi} \\ &\leq \sup_{|\xi| \leq M} |\hat{\rho}(\eta\xi) - 1|^2 \|u\|_{s,K}^2 + \frac{2\varepsilon}{\pi} \end{aligned}$$

Como

$$\hat{\rho}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = 1$$

segue que

$$\sup_{t \in K} \|(\rho_\eta \star u)_t - u_t\|_s^2 \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0.$$

□

Vamos precisar também de um resultado conhecido sobre operadores elípticos (ver [5], p. 352) :

Teorema 2.4.1 *Seja P um operador diferencial parcial linear elíptico de ordem m definido em um aberto U de $\mathbf{R}^N$. Se $u \in \mathcal{D}'(U)$ e $Pu \in H_{loc}^s(U)$ então $u \in H_{loc}^{s+m}(U)$.*

O operador em questão que vamos utilizar é dado pelo Lema a seguir.

Lema 2.4.1 *O operador de segunda ordem*

$$P = L_1^2 + \cdots + L_n^2 + \lambda \partial_x^2$$

é elíptico em $J \times B$ se $\lambda > \sup_{t \in B} |\nabla \phi(t)|$.

Demonstração :

Temos que

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} - i \frac{\partial \phi}{\partial t_j} \frac{\partial}{\partial x}$$

e

$$\begin{aligned} L_j^2 &= \left(\frac{\partial}{\partial t_j} - i \frac{\partial \phi}{\partial t_j} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t_j} - i \frac{\partial \phi}{\partial t_j} \frac{\partial}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t_j^2} - 2i \frac{\partial \phi}{\partial t_j} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t_j} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial t_j} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - i \frac{\partial^2 \phi}{\partial t_j^2} \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned}$$

A parte principal de P é

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2}{\partial t_j^2} - 2i \frac{\partial \phi}{\partial t_j} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t_j} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial t_j} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) + \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

e seu símbolo principal é dado por

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left(-\tau_j^2 + 2i \frac{\partial \phi}{\partial t_j} \xi \tau_j + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t_j} \right)^2 \xi^2 \right) - \lambda \xi^2 = \\ = -|\tau|^2 + 2i\xi \langle \nabla \phi, \tau \rangle + |\nabla \phi|^2 \xi^2 - \lambda \xi^2. \end{aligned}$$

Assim, P é elíptico se e somente se

$$\begin{cases} \xi \langle \nabla \phi, \tau \rangle = 0 \\ -|\tau|^2 - (\lambda - |\nabla \phi|^2) \xi^2 = 0 \end{cases}$$

implicar $\tau = 0$ e $\xi = 0$.

Logo se tomarmos

$$\lambda > \sup_t |\nabla \phi|^2$$

então P será elíptico. □

Um outro resultado necessário no Capítulo 3 é devido a Baouendi-Treves [1] :

Teorema 2.4.2 (Baouendi-Treves) Se $\phi \in C^\omega(\bar{B})$ e $u \in C^0(\bar{J} \times \bar{B})$ então são equivalentes :

- (i) $Lu = 0$ em $J \times B$.
- (ii) Existe uma função contínua H em $Z(\bar{J} \times \bar{B})$, holomorfa em $\text{int}(Z(\bar{J} \times \bar{B}))$, tal que $u = HoZ$.

Capítulo 3

O conceito de hipoelipticidade

3.1 Hipoelipticidade

O objetivo deste trabalho é estudar a regularidade das soluções de

$$Lu = f.$$

Para ser mais preciso vamos estudar a *hipoelipticidade* C^ω e a *hipoelipticidade* C^∞ de L que definimos a seguir.

Definição 3.1.1 Dizemos que L é C^ω -hipoelíptico se dados $\mathcal{O} \subset J_x \times B_t \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ aberto e $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ com $Lu \in \Lambda^1 C^\omega(\mathcal{O})$ então $u \in C^\omega(\mathcal{O})$.

Analogamente

Definição 3.1.2 Dizemos que L é C^∞ -hipoelíptico se dados $\mathcal{O} \subset J_x \times B_t \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ aberto e $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ com $Lu \in \Lambda^1 C^\infty(\mathcal{O})$ então $u \in C^\infty(\mathcal{O})$.

O resultado central é o seguinte

Teorema 3.1.1 Seja $L = d_t - id\phi \wedge \frac{\partial}{\partial x}$, onde $\phi : B \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ é uma função analítica real. Uma condição necessária e suficiente para que L seja $C^\infty(\omega)$ -hipoelíptico é que ϕ não tenha máximo nem mínimo local em B .

É importante notar que ϕ não tem máximo nem mínimo local se e somente se a aplicação

$$\begin{aligned} Z : J \times B &\rightarrow \mathbf{C} \\ (x, t) &\mapsto Z(x, t) = x + i\phi(t) \end{aligned}$$

é aberta.

3.2 Uma condição necessária para hipoelipticidade

Vamos supor inicialmente que a função ϕ seja de classe C^∞ e que $t_0 \in B$ seja um ponto de mínimo local de ϕ .

Seja $V \subset B$ uma vizinhança de t_0 tal que

$$\phi(t) \geq \phi(t_0), \quad \forall t \in V$$

e considere

$$u(x, t) = [x + i(\phi(t) - \phi(t_0))]^{3/2}, \quad (x, t) \in \mathbf{R} \times V$$

onde tomamos o ramo da raiz quadrada definida em $\mathbf{C} \setminus \{iy \mid y < 0\}$.

Note que u é uma função de classe C^1 e que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t_j}(x, t) &= \frac{3i}{2} [x + i(\phi(t) - \phi(t_0))]^{1/2} \frac{\partial \phi}{\partial t_j}(x, t) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= \frac{3}{2} [x + i(\phi(t) - \phi(t_0))]^{1/2} \end{aligned}$$

Assim

$$L_j u = \frac{\partial u}{\partial t_j} - i \frac{\partial \phi}{\partial t_j} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Observe que

$$L_j \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} L_j u = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

mas $\frac{\partial u}{\partial x}$ é somente contínua em $\mathbf{R} \times V$. Portanto L não é C^ω -hipoelíptico e nem C^∞ -hipoelíptico.

O exemplo acima pode ser explorado para construir diversas soluções singulares de $Lu = 0$:

Lema 3.2.1 *Sejam $\mathcal{W} = \mathbf{C} \setminus \{iy \mid y < 0\}$ e G uma função holomorfa definida em $\mathcal{W}$. Se $\phi(t) \geq \phi(t_0)$ e*

$$G = \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^\nu H$$

onde H é holomorfa em $\mathcal{W}$ e de classe C^1 até a origem então

$$G(x + i\phi(t) - i\phi(t_0))$$

é solução de $Lu = 0$.

Demonstração :

A demonstração decorre diretamente do fato de que $\frac{\partial}{\partial x}$ comuta com L .

$$\begin{aligned}
 LG(x + i\phi(t) - i\phi(t_0)) &= L \left(\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^\nu H \right) (x + i\phi(t) - i\phi(t_0)) \\
 &= L \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\nu \left(H(x + i\phi(t) - i\phi(t_0)) \right) \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\nu L \left(H(x + i\phi(t) - i\phi(t_0)) \right) \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\nu \frac{\partial H}{\partial z} (x + i\phi(t) - i\phi(t_0)) L(x + i\phi(t) - i\phi(t_0)) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

□

Observe que para cada $N \in \mathbb{Z}_+$ existe H holomorfa em $\mathcal{W}$, de classe C^1 até a origem, tal que

$$\left(\frac{d}{dz} \right)^{N+2} H(z) = \frac{1}{z^N}.$$

Por exemplo, para $N = 1$ temos que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{z} &= \frac{d}{dz} \log z \\
 &= \left(\frac{d}{dz} \right)^2 (z \log z - z) \\
 &= \left(\frac{d}{dz} \right)^3 \left(\frac{z^2}{2} \log z - \frac{3z^2}{4} \right)
 \end{aligned}$$

Note que

$$H(z) = \frac{z^2}{2} \log z - \frac{3z^2}{4}$$

é holomorfa em $\mathcal{W}$ e de classe C^1 até a origem.

Escrevendo

$$F = \{(x, t) \in J \times B \mid x = 0 \text{ e } \phi(t) = \phi(t_0)\}$$

temos que para todo $N \in \mathbf{Z}_+$ existe $u \in \mathcal{D}'(J \times V)$ tal que

$$Lu = 0 \quad \text{e} \quad u = \frac{1}{Z^N} \quad \text{em} \quad (J \times V) \setminus F.$$

Vamos agora construir uma solução não identicamente zero que se anula de ordem infinita¹ em F .

Considere

$$H(z) = e^{-\frac{1}{\sqrt{\zeta}z}}$$

onde $\zeta = e^{-i\pi/4}$.

Escrevendo $z = \rho e^{i\theta}$ temos que $\sqrt{\zeta}z = \sqrt{\rho}e^{i(\frac{\theta-\pi/4}{2})}$.

Assim

$$|H(z)| = e^{-\frac{1}{\sqrt{\rho}} \cos(\frac{\theta-\pi/4}{2})}$$

Se $\theta \in [0, \pi]$ então

$$-\frac{\pi}{8} \leq \frac{\theta - \pi/4}{2} \leq \frac{3\pi}{8}$$

e portanto

$$\cos\left(\frac{\theta - \pi/4}{2}\right) \geq \lambda > 0.$$

Observe que $H(z)$ se anula de ordem infinita em $z = 0$ quando nos restringimos a argumentos $\theta \in [0, \pi]$.

Logo, pelo Lema 3.2.1

$$u(x, t) = H(x + i\phi(t))$$

é uma solução de $Lu = 0$ em $(J \times V)$, com u se anulando de ordem infinita em F .

Observação : Se $\phi \in C^\omega(B)$ não tiver máximo nem mínimo local então o Teorema 2.4.2 mostra que a única solução de $Lu = 0$ que se anula de ordem infinita em algum ponto é $u = 0$.

Suponha agora que ϕ tem um ponto de mínimo t_0 em um aberto $V \subset B$ e considere a "fibra"

$$F = \{(x, t) \in J \times V \mid x = 0 \quad \text{e} \quad \phi(t) = \phi(t_0)\}.$$

¹isto é, que se anula junto com todas as suas derivadas.

Mostraremos a seguir que dada uma solução $u \in L_{loc}^\infty(J \times V)$ de $Lu = 0$ sobre $(J \times V) \setminus F$ então ela será, necessariamente, solução sobre $J \times V$; este fenômeno fornece uma nova explicação para o resultado enunciado no Lema 3.2.1.

Vamos precisar inicialmente do seguinte

Lema 3.2.2 *Seja $K \subset \subset \mathbf{R}^n$ e defina para $\delta > 0$ o conjunto*

$$K_\delta = \{t \in \mathbf{R}^n \mid \text{dist}(t, K) \leq \delta\}.$$

Se $\phi \in C^2(K_\delta)$, $\phi \geq 0$ então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\sup_{t \in K \cap \{\phi \leq \varepsilon\}} |\nabla \phi(t)| \leq C\sqrt{\varepsilon}.$$

Demonstração :

Seja

$$M = \sup_{\substack{t \in K_\delta \\ |\alpha|=2}} |\partial_t^\alpha \phi(t)|.$$

Usando a Fórmula de Taylor temos que

$$0 \leq \phi(t + he_j) \leq \phi(t) + \frac{\partial \phi}{\partial t_j}(t)h + \frac{1}{2}Mh^2, \quad \forall t \in K, \quad |h| \leq \delta$$

uma vez que $\text{dist}(t + he_j, K) \leq |h|$. Assim, se $0 < |h| \leq \delta$ temos que

$$-\text{sinal}(h) \frac{\partial \phi}{\partial t_j}(t) = -\frac{h}{|h|} \frac{\partial \phi}{\partial t_j}(t) \leq \frac{\phi(t)}{|h|} + \frac{M|h|}{2}$$

e portanto

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial t_j}(t) \right| \leq \frac{\phi(t)}{\tau} + \frac{M\tau}{2}, \quad \forall \tau \in]0, \delta], \quad t \in K.$$

Agora se $\frac{M\delta}{2} \leq \frac{\phi(t)}{\delta}$ então

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial t_j}(t) \right| \leq 2 \frac{\phi(t)}{\delta}. \quad (3.1)$$

Se $\frac{M\delta}{2} > \frac{\phi(t)}{\delta} > 0$ então tome $\tau \in]0, \delta]$ tal que $\frac{M\tau}{2} = \frac{\phi(t)}{\tau}$.

Portanto

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial t_j}(t) \right| \leq 2 \frac{\phi(t)}{\tau} = M\tau$$

e daí segue que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t_j}(t)^2 \leq 2M\phi(t), \quad \text{se } 0 < \phi(t) < \frac{M\delta^2}{2}, \quad t \in K. \quad (3.2)$$

Observe que como $\phi \geq 0$ em K_δ , se existir um $t_0 \in K \subset \text{int } K_\delta$ tal que $\phi(t_0) = 0$ então $\frac{\partial \phi}{\partial t_j}(t_0) = 0$. Logo a desigualdade (3.2) acima vale para todo $t \in K$ com $\phi(t) < M\delta^2/2$.

De (3.1) e (3.2) temos que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t_j}(t)^2 \leq 4 \frac{\phi(t)^2}{\delta^2} + 2M\phi(t), \quad \forall t \in K.$$

Assim existe uma constante tal que

$$|\nabla \phi(t)|^2 \leq \text{const } \phi(t), \quad \forall t \in K.$$

□

Proposição 3.2.1 *Seja $L = d_t - id\phi \wedge \frac{\partial}{\partial x}$, onde $\phi : B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^∞ com mínimo local em $t_0 \in B$. Defina*

$$F = \{(x, t) \in J \times V \mid x = 0 \text{ e } \phi(t) = \phi(t_0)\}$$

onde $V \subset B$ é uma vizinhança aberta de t_0 na qual $\phi(t) \geq \phi(t_0)$, $\forall t \in V$ e $J \subset \mathbb{R}$ é uma vizinhança da origem.

Se $u \in L_{loc}^\infty(J \times V)$ satisfaz $Lu = 0$ em $(J \times V) \setminus F$ então $Lu = 0$ em $J \times V$.

Demonstração :

Podemos supor sem perda de generalidade que $\phi(t_0) = 0$ porque caso contrário substituímos $\phi(t)$ por $\phi(t) - \phi(t_0)$.

Seja $\chi \in C^\infty(\mathbb{C})$ tal que

$$\chi(\zeta) = \begin{cases} 0 & \text{se } |\zeta| < 1/2 \\ 1 & \text{se } |\zeta| > 1 \end{cases}$$

e defina

$$u_\varepsilon(x, t) = \chi \left(\frac{x + i\phi(t)}{\varepsilon} \right) u(x, t), \quad \varepsilon > 0.$$

Como $u \in L_{loc}^\infty(J \times V)$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u \quad \text{em } \mathcal{D}'(J \times V).$$

Assim

$$Lu_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} Lu \quad \text{em } \Lambda^1 \mathcal{D}'(J \times V)$$

e portanto vamos verificar que

$$Lu_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{em } \Lambda^1 \mathcal{D}'(J \times V)$$

para concluir que $Lu = 0$.

Escrevendo

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} - i \frac{\partial \phi}{\partial t_j} \frac{\partial}{\partial x}, \quad j = 1, \dots, n$$

temos que

$$\begin{aligned} L_j u_\varepsilon &= (L_j \chi) u + \underbrace{(L_j u) \chi}_{=0} \\ &= \frac{\partial \chi}{\partial \zeta} \left(\frac{x + i\phi(t)}{\varepsilon} \right) \frac{1}{\varepsilon} \underbrace{L_j(x + i\phi(t)) u}_{=0} + \\ &\quad + \frac{\partial \chi}{\partial \bar{\zeta}} \left(\frac{x + i\phi(t)}{\varepsilon} \right) \frac{1}{\varepsilon} L_j(x - i\phi(t)) u \\ &= -\frac{2i}{\varepsilon} \frac{\partial \chi}{\partial \bar{\zeta}} \left(\frac{x + i\phi(t)}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \phi}{\partial t_j} u. \end{aligned}$$

Se $\varphi \in C_c^\infty(J \times V)$ então

$$\langle L_j u_\varepsilon, \varphi \rangle = -\frac{2i}{\varepsilon} \iint_{\Gamma_\varepsilon \cap \text{supp } \varphi} \frac{\partial \chi}{\partial \bar{\zeta}} \left(\frac{x + i\phi(t)}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \phi}{\partial t_j} u \varphi \, dx \, dt$$

onde $\Gamma_\varepsilon = \{(x, t) \in J \times V \mid \frac{\varepsilon}{2} < |x + i\phi(t)| < \varepsilon\}$.

Logo

$$| \langle L_j u_\varepsilon, \varphi \rangle | \leq \text{const} \sup_{(x,t) \in \Gamma_\varepsilon \cap \text{supp } \varphi} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t_j}(t) \right| \iint_{\Gamma_\varepsilon \cap \text{supp } \varphi} \frac{dx dt}{\varepsilon}$$

com a constante acima dependendo de u e φ .

Note que

$$\Gamma_\varepsilon \cap \text{supp } \varphi \subset \{(x, t) \in J \times V \mid |x| < \varepsilon\} \cap \text{supp } \varphi$$

e portanto

$$\iint_{\Gamma_\varepsilon \cap \text{supp } \varphi} \frac{dx dt}{\varepsilon} \leq \iint_{\{|x| < \varepsilon\} \cap \text{supp } \varphi} \frac{dx dt}{\varepsilon}$$

é limitado, para todo $\varepsilon > 0$.

Agora, utilizando o Lema 3.2.2 anterior,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{(x,t) \in \Gamma_\varepsilon \cap \text{supp } \varphi} |\nabla \phi(t)| = 0$$

o que implica

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} | \langle L_j u_\varepsilon \rangle | = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(J \times V), \quad j = 1, \dots, n.$$

□

3.3 Uma condição suficiente para hipoelipticidade C^ω

Teorema 3.3.1 *Se ϕ é analítica e não tem máximo nem mínimo local então L é C^ω -hipoelíptico.*

Demonstração :

Sejam $\mathcal{O} \subseteq J \times B$ aberto e $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ com $Lu = f \in \Lambda^1 C^\omega(\mathcal{O})$. Seja também $(x_0, t_0) \in \mathcal{O}$. Vamos primeiramente mostrar que existem um intervalo J_0 centrado em x_0 , uma bola aberta U_0 centrada em t_0 e $v \in C^\omega(J_0 \times U_0)$ tais que $Lv = f$ em $J_0 \times U_0$. Vamos supor sem perda de generalidade que $(x_0, t_0) = 0$ e que $\phi(t_0) = 0$.

Considere

$$w(x, t, s) = x + i\phi(t) - i\phi(s)$$

e observe que w é solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} Lw = 0 \\ w|_{t=s} = x. \end{cases}$$

Escolhemos então $J_0 \times U_0$ de tal modo que a aplicação

$$\begin{aligned} J_0 \times U_0 \times U_0 &\rightarrow \mathbb{C} \times U_0 \\ (x, t, s) &\mapsto (w(x, t, s), t) \end{aligned}$$

tem imagem contida no domínio de f , onde esta última foi estendida holomorficamente em $z \in \mathbb{C}$.

Se escrevermos

$$f(z, s) = \sum_{j=1}^n f_j(z, s) ds_j$$

então

$$d_s [f(w(x, t, s), s)] = (d_s f)(w(x, t, s), s) - id\phi \wedge \frac{\partial f}{\partial z}(w(x, t, s), s).$$

Como $Lf(x, t) = 0$, pelo princípio do prolongamento analítico segue que $f(w(x, t, s), s)$ é uma 1-forma d_s -fechada.

Considere então

$$v(x, t) = \int_{s \in [0, t]} f(w(x, t, s), s), \quad (x, t) \in J_0 \times U_0.$$

Assim

$$\begin{aligned} Lv(x, t) &= f(w(x, t, t), t) + \int_{s \in [0, t]} L(f(w(x, t, s), s)) \\ &= f(x, t) + \int_{s \in [0, t]} \frac{\partial f}{\partial z}(w(x, t, s), s) \underbrace{Lw(x, t, s)}_{=0} \\ &= f(x, t). \end{aligned}$$

Portanto $L(u - v) = 0$ em $J_0 \times U_0$. Sendo $Z(x, t) = x + i\phi(t)$ uma aplicação aberta uma vez que ϕ não tem máximo nem mínimo local, podemos aplicar o Teorema 2.4.2 :

Existe uma função contínua em $Z(\bar{J}_0 \times \bar{U}_0)$ e holomorfa em $Z(J_0 \times U_0)$ (aberto) tal que

$$u - v = H(Z) \in C^\omega(J_0 \times U_0).$$

Portanto $u \in C^\omega(J_0 \times U_0)$ e como $(x_0, t_0) \in \mathcal{O}$ é arbitrário temos que $u \in C^\omega(\mathcal{O})$. $\square$

Capítulo 4

Uma estimativa sub-elíptica

4.1 O caminho das pedras

Neste capítulo vamos verificar que se ϕ não tiver máximo nem mínimo local então L é C^∞ -hipoelítico.

Inicialmente vamos demonstrar uma estimativa de tipo sub-elíptico

$$\|u\|_{\varepsilon, B'}^2 \leq C \left(\|Lu\|_{0, B}^2 + \|u\|_{0, B}^2 \right), \quad \forall u \in C^\infty(\bar{B}, C_c^\infty(J)). \quad (4.1)$$

Para isso vamos calcular integrais de linha sobre as curvas definidas pelo Lema 2.3.1. Neste ponto será fundamental que ϕ não tenha máximo nem mínimo local para conseguir decaimento suficiente na variável ξ da Transformada de Fourier $\hat{u}(\xi, t)$.

Em seguida verificamos que (4.1) implica que se $I \subset\subset J$ então para cada $s \in \mathbf{R}$ existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{\varepsilon+s, B'}^2 \leq C \left(\|Lu\|_{s, B}^2 + \|u\|_{s, B}^2 \right), \quad \forall u \in C^\infty(\bar{B}, C_c^\infty(I)). \quad (4.2)$$

Lembramos agora que para verificar a hipoelipticidade C^∞ de L partimos de uma distribuição u tal que Lu é de classe C^∞ .

Como

$$Lu = d_t u - id\phi \wedge u_x = f \in \Lambda^1 C^\infty(J' \times B'),$$

é possível verificar que $u \in C^\infty(B', H_{loc}^{-N}(J'))$ para algum $N \in \mathbf{Z}_+$. Entretanto esbarramos com dificuldades no uso da topologia de $C^\infty(B, H^s)$ uma vez que nossas estimativas não fornecem informações sobre as derivadas na variável t .

Tomamos portanto um caminho intermediário provando que (4.2) continua válida mesmo para funções

$$u \in C^0(\bar{B}, C_c^\infty(K))$$

dado que

$$Lu \in \Lambda^1 C^0(\bar{B}, C_c^\infty(K)).$$

Com (4.2) podemos então mostrar que se

$$u \in C^0(B', H_{loc}^{-N}(J'))$$

e

$$Lu \in \Lambda^1 C^\infty(B', C^\infty(J')) .$$

então na realidade

$$u \in C^0(B', H_{loc}^{-N+\varepsilon}(J')).$$

Se iterarmos o processo, verificamos que u está na verdade em L_{loc}^2 .

Neste ponto escolhemos um operador elíptico P que comuta com L e utilizamos o fato conhecido de que com todo operador elíptico sempre “ganhamos” o máximo de derivadas (veja o Teorema 2.4.1).

Aplicando o resultado obtido concluiremos então que $P^M u \in L_{loc}^2 \forall M \in \mathbb{Z}_+$, o que implica $u \in C^\infty$.

4.2 Uma condição suficiente para hipoelipticidade C^∞

Proposição 4.2.1 *Seja $L = d_t - id\phi \wedge \frac{\partial}{\partial x}$ definido em $J_x \times \bar{B}_t \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, onde $\phi : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^∞ sem mínimo nem máximo local satisfazendo (2.7). Então existe $\varepsilon \in]0, 1]$ tal que para cada compacto $B' \subset\subset B$ existe uma constante $C = C(B') > 0$ tal que*

$$\|u\|_{\varepsilon, B'}^2 \leq C \left(\|Lu\|_{0, B}^2 + \|u\|_{0, B}^2 \right), \quad \forall u \in C^\infty(\bar{B}, C_c^\infty(J)).$$

Demonstração :

Seja $u \in C^\infty(\bar{B}, C_c^\infty(J))$ tal que $Lu = f$ e considere $B' \subset\subset B$ e $t \in B' \setminus \Sigma$ (Σ é o conjunto dos pontos críticos de ϕ). Vamos tratar dois casos :

1º caso) $l(t) \in \partial B$.

Sabemos por (2.4) que

$$e^{\phi(t)\xi} \hat{u}(\xi, t) = e^{\phi(l(t))\xi} \hat{u}(\xi, l(t)) - \int_{s \in \gamma_t} e^{\phi(s)\xi} \hat{f}(\xi, s).$$

Assim

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{[\phi(l(t)) - \phi(t)]\xi} \hat{u}(\xi, l(t)) - \int_{s \in \gamma_t} e^{[\phi(s) - \phi(t)]\xi} \hat{f}(\xi, s).$$

Defina

$$d' = \frac{\text{dist}(B', \partial B)}{2} > 0.$$

Se $t \in B' \setminus \Sigma$ então, pelo Lema 2.3.1,

$$\phi(t) - \phi(\gamma_t(\tau)) \geq C\tau^\sigma, \quad \forall \tau \in [0, \delta(t)[$$

o que implica que

$$\begin{aligned} \phi(t) - \phi(l(t)) &\geq C\delta(t)^\sigma \\ &\geq C|l(t) - t|^\sigma \\ &\geq Cd'^\sigma \end{aligned}$$

pois γ_t é uma curva parametrizada por comprimento de arco.

Vamos definir

$$d = Cd'^\sigma > 0. \tag{4.3}$$

Assim, para $\xi > 0$, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |\hat{u}(\xi, t)| &\leq e^{-d\xi} |\hat{u}(\xi, l(t))| + \int_0^{\delta(t)} e^{-C\tau^\sigma \xi} |\hat{f}(\xi, \gamma_t(\tau))| d\tau \\ &\leq e^{-d\xi} |\hat{u}(\xi, l(t))| + \left\{ \int_0^{\delta(t)} e^{-2C\tau^\sigma \xi} d\tau \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^{\delta(t)} |\hat{f}(\xi, \gamma_t(\tau))|^2 d\tau \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta(t)} e^{-2C\tau^\sigma \xi} d\tau &= \int_0^{\delta(t)\xi^{1/\sigma}} \frac{e^{-2C\tau'^\sigma}}{\xi^{1/\sigma}} d\tau' \quad (\tau\xi^{1/\sigma} = \tau') \\ &\leq \frac{C'}{\xi^{1/\sigma}}. \end{aligned}$$

Assim obtemos a seguinte desigualdade

$$|\hat{u}(\xi, t)|^2 \leq 2e^{-2d\xi} |\hat{u}(\xi, l(t))|^2 + \frac{2C'}{\xi^{1/\sigma}} \int_0^{\delta(t)} |\hat{f}(\xi, \gamma_t(\tau))|^2 d\tau$$

Escrevendo

$$\varepsilon = \frac{1}{2\sigma} = \frac{1-\theta}{2} \in]0, 1] \quad (\text{cf. equação (2.8)})$$

temos

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \xi^{2\varepsilon} |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi &\leq \\ &\leq \text{const} \left\{ \int_0^{+\infty} \underbrace{\xi^{2\varepsilon} e^{-2d\xi}}_{\leq \text{const}} |\hat{u}(\xi, l(t))|^2 d\xi + \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{\delta(t)} |\hat{f}(\xi, \gamma_t(\tau))|^2 d\tau \right] d\xi \right\} \end{aligned}$$

2º caso) $l(t) \in \Sigma$ (e portanto $\phi(t) > 0$ e $\phi(l(t)) = 0$).

Neste caso escolhemos t_0 arbitrariamente próximo de $l(t)$ satisfazendo as seguintes condições :

- $\phi(t_0) < 0$ (lembre que ϕ não tem mínimo local).
- $t_0 \in V$, onde V é uma vizinhança aberta convexa de $l(t)$ na qual $\phi(s) < \phi(t)$, $\forall s \in V$.
- Se $\text{dist}(l(t), \partial B) > d'$ então supomos que $\text{dist}(t_0, \partial B) > d'$.

Note que, com a primeira condição acima, $l(t_0) \in \partial B$.

Para começar temos que

$$\begin{aligned} e^{\phi(t)\xi} \hat{u}(\xi, t) &= \left\{ e^{\phi(t)\xi} \hat{u}(\xi, t) - e^{\phi(l(t))\xi} \hat{u}(\xi, l(t)) \right\} + \\ &+ \left\{ e^{\phi(l(t))\xi} \hat{u}(\xi, l(t)) - e^{\phi(t_0)\xi} \hat{u}(\xi, t_0) \right\} + \\ &+ \left\{ e^{\phi(t_0)\xi} \hat{u}(\xi, t_0) - e^{\phi(l(t_0))\xi} \hat{u}(\xi, l(t_0)) \right\} + \\ &+ e^{\phi(l(t_0))\xi} \hat{u}(\xi, l(t_0)) \end{aligned}$$

Usando novamente que

$$e^{\phi(t)\xi} \hat{u}(\xi, t) = e^{\phi(l(t))\xi} \hat{u}(\xi, l(t)) - \int_{\gamma_t} e^{\phi(s)\xi} \hat{f}(\xi, s)$$

temos

$$\begin{aligned}
e^{\phi(t)\xi} \hat{u}(\xi, t) &= - \int_{\gamma_t} e^{\phi(s)\xi} \hat{f}(\xi, s) + \\
&+ \left\{ e^{\phi(l(t))\xi} \hat{u}(\xi, l(t)) - e^{\phi(t_0)\xi} \hat{u}(\xi, t_0) \right\} - \\
&- \int_{\gamma_{t_0}} e^{\phi(s)\xi} \hat{f}(\xi, s) + \\
&+ e^{\phi(l(t_0))\xi} \hat{u}(\xi, l(t_0)).
\end{aligned}$$

Portanto para estimar $|\hat{u}(\xi, t)|$ temos que estimar as seguintes parcelas :

(a)

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\gamma_t} e^{[\phi(s)-\phi(t)]\xi} \hat{f}(\xi, s) \right| \leq \\
&\leq \left\{ \int_0^{\delta(t)} e^{-2C\tau^\sigma \xi} d\tau \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^{\delta(t)} |\hat{f}(\xi, \gamma_t(\tau))|^2 d\tau \right\}^{1/2} \quad \text{como no 1º caso} \\
&\leq \left(\frac{C'}{\xi^{2\varepsilon}} \right)^{1/2} \left\{ \int_0^{\delta(t)} |\hat{f}(\xi, \gamma_t(\tau))|^2 d\tau \right\}^{1/2}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\gamma_{t_0}} e^{[\phi(s)-\phi(t)]\xi} \hat{f}(\xi, s) \right| \leq \\
&\leq \left\{ \int_0^{\delta(t_0)} e^{-2C\tau^\sigma \xi} d\tau \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^{\delta(t_0)} |\hat{f}(\xi, \gamma_{t_0}(\tau))|^2 d\tau \right\}^{1/2} \\
&\leq \left(\frac{C'}{\xi^{2\varepsilon}} \right)^{1/2} \left\{ \int_0^{\delta(t_0)} |\hat{f}(\xi, \gamma_{t_0}(\tau))|^2 d\tau \right\}^{1/2}
\end{aligned}$$

(c)

$$\left| e^{[\phi(l(t_0))-\phi(t)]\xi} \hat{u}(\xi, l(t_0)) \right|$$

Como $l(t) \in \Sigma$ segue que $\phi(t) > 0 > \phi(t_0)$ e $\phi(l(t)) = 0$.

Assim

$$\begin{aligned}
\phi(t) - \phi(l(t_0)) &\geq \phi(t_0) - \phi(l(t_0)) \\
&\geq C\delta(t_0)^\sigma \\
&\geq C|t_0 - l(t_0)|^\sigma.
\end{aligned}$$

Por outro lado, como $\phi(l(t_0)) \leq 0$ segue que

$$\begin{aligned}\phi(t) - \phi(l(t_0)) &\geq \phi(t) \\ &= \phi(t) - \underbrace{\phi(l(t))}_{=0} \\ &\geq C\delta(t)^\sigma \\ &\geq C|t - l(t)|^\sigma.\end{aligned}$$

Portanto

$$\phi(t) - \phi(l(t_0)) \geq C \max\{|t_0 - l(t_0)|, |t - l(t)|\}^\sigma.$$

Vamos verificar que

$$\max\{|t_0 - l(t_0)|, |t - l(t)|\} \geq d'.$$

Se $|t - l(t)| < d'$ então $\text{dist}(l(t), \partial B) > d'$ pois $\text{dist}(t, \partial B) \geq 2d'$.

Portanto, pela nossa escolha de t_0 , temos $\text{dist}(t_0, \partial B) > d'$ e $l(t_0) \in \partial B$ donde $|t_0 - l(t_0)| > d'$.

Logo, usando (4.3),

$$\left| e^{[\phi(l(t_0)) - \phi(t)]\xi} \hat{u}(\xi, l(t_0)) \right| \leq e^{-d\xi} |\hat{u}(\xi, l(t_0))|.$$

(d)

$$\left| e^{-\phi(t)\xi} \left\{ e^{\phi(l(t))\xi} \hat{u}(\xi, l(t)) - e^{\phi(t_0)\xi} \hat{u}(\xi, t_0) \right\} \right|$$

Neste ponto é importante que $\phi(t) > 0$.

Pela escolha de t_0 segue que $\phi(s) < \phi(t)$, $\forall s \in [l(t), t_0]$.

Usando novamente que

$$d_t \left[e^{\phi(t)\xi} \hat{u}(\xi, t) \right] = e^{\phi(t)\xi} \hat{f}(\xi, t)$$

temos

$$e^{\phi(l(t))\xi} \hat{u}(\xi, l(t)) - e^{\phi(t_0)\xi} \hat{u}(\xi, t_0) = - \int_{s \in [l(t), t_0]} e^{\phi(s)\xi} \hat{f}(\xi, s)$$

Assim obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
& \left| e^{-\phi(t)\xi} \left\{ e^{\phi(l(t))\xi} \hat{u}(\xi, l(t)) - e^{\phi(t_0)\xi} \hat{u}(\xi, t_0) \right\} \right| \leq \\
& \leq \int_{s \in [l(t), t_0]} e^{[\phi(s) - \phi(t)]\xi} |\hat{f}(\xi, s)| |ds| \\
& \leq \int_{s \in [l(t), t_0]} |\hat{f}(\xi, s)| |ds| \quad (\text{para } \xi \geq 0) \\
& \leq \int_{s \in [l(t), t_0]} \sup_{\substack{\xi > 0 \\ t \in B}} \left\{ \xi^\varepsilon (1 + \xi) |\hat{f}(\xi, t)| \right\} \frac{1}{\xi^\varepsilon (1 + \xi)} |ds| \\
& \leq \text{const} \frac{1}{\xi^\varepsilon (1 + \xi)} |l(t) - t_0|.
\end{aligned}$$

Somando as estimativas acima obtemos

$$\begin{aligned}
|\hat{u}(\xi, t)| & \leq \left(\frac{C'}{\xi^{2\varepsilon}} \right)^{1/2} \left\{ \int_0^{\delta(t)} |\hat{f}(\xi, \gamma_t(\tau))|^2 d\tau \right\}^{1/2} + \\
& + \left(\frac{C'}{\xi^{2\varepsilon}} \right)^{1/2} \left\{ \int_0^{\delta(t_0)} |\hat{f}(\xi, \gamma_{t_0}(\tau))|^2 d\tau \right\}^{1/2} + \\
& + e^{-d\xi} |\hat{u}(\xi, l(t_0))| + \\
& + \text{const} \frac{|l(t) - t_0|}{\xi^\varepsilon (1 + \xi)}
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\xi^{2\varepsilon} |\hat{u}(\xi, t)|^2 & \leq \text{const} \left[\int_0^{\delta(t)} |\hat{f}(\xi, \gamma_t(\tau))|^2 d\tau + \right. \\
& + \int_0^{\delta(t_0)} |\hat{f}(\xi, \gamma_{t_0}(\tau))|^2 d\tau + \\
& + e^{-2d\xi} \xi^{2\varepsilon} |\hat{u}(\xi, l(t_0))|^2 \left. \right] + \\
& + \text{const} \frac{|l(t) - t_0|^2}{(1 + \xi)^2}
\end{aligned}$$

Integrando em $\xi > 0$ obtemos

$$\int_0^{+\infty} \xi^{2\varepsilon} |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi \leq \text{const} \left[\int_0^{+\infty} \int_0^{\delta(t)} |\hat{f}(\xi, \gamma_t(\tau))|^2 d\tau d\xi + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{+\infty} \int_0^{\delta(t_0)} |\hat{f}(\xi, \gamma_{t_0}(\tau))|^2 d\tau d\xi + \\
& + \int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-2d\xi} \xi^{2\varepsilon}}_{\leq \text{const}} |\hat{u}(\xi, l(t_0))|^2 d\xi \Big] + \\
& + \text{const} |l(t) - t_0|^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + \xi)^2} d\xi
\end{aligned}$$

Trocando a ordem de integração e usando que $\delta(t)$ é uniformemente limitado temos que

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \xi^{2\varepsilon} |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi \leq \\
& \leq \text{const} \left[\sup_{s \in B} \int_0^{+\infty} |\hat{f}(\xi, s)|^2 d\xi + \sup_{s \in B} \int_0^{+\infty} |\hat{u}(\xi, s)|^2 d\xi \right] + \\
& + \text{const} |l(t) - t_0|^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + \xi)^2} d\xi, \quad \forall t \in B' \setminus \Sigma.
\end{aligned}$$

Como t_0 é arbitrariamente próximo de $l(t)$ segue que

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \xi^{2\varepsilon} |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi \leq \\
& \leq \text{const} \left[\sup_{s \in B} \int_0^{+\infty} |\hat{f}(\xi, s)|^2 d\xi + \sup_{s \in B} \int_0^{+\infty} |\hat{u}(\xi, s)|^2 d\xi \right], \quad \forall t \in B' \setminus \Sigma.
\end{aligned}$$

Observe que a constante da desigualdade acima não depende de u nem de f , mas somente de B' e ε .

Raciocínio análogo pode ser aplicado utilizando as curvas dadas pelas soluções de

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_t &= + \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}(\gamma_t) \\ \gamma_t(0) &= t \end{cases}$$

e usando a hipótese que ϕ não tem máximo local para concluir que

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^0 |\xi|^{2\varepsilon} |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi \leq \\
& \leq \text{const} \left[\sup_{s \in B} \int_{-\infty}^0 |\hat{f}(\xi, s)|^2 d\xi + \sup_{s \in B} \int_{-\infty}^0 |\hat{u}(\xi, s)|^2 d\xi \right], \quad \forall t \in B' \setminus \Sigma.
\end{aligned}$$

Assim

$$\|u(\cdot, t)\|_\varepsilon^2 \leq \text{const} \left(\sup_{s \in B} \|f(\cdot, s)\|_0^2 + \sup_{s \in B} \|u(\cdot, s)\|_0^2 \right) \quad \forall t \in B' \setminus \Sigma.$$

Como ϕ não tem máximo nem mínimo local, Σ tem interior vazio e portanto

$$\begin{aligned} \|u\|_{\varepsilon, B'}^2 &= \sup_{t \in B'} \|u(\cdot, t)\|_\varepsilon^2 \\ &\leq \text{const} \left(\|f\|_{0, B}^2 + \|u\|_{0, B}^2 \right). \end{aligned}$$

□

O passo seguinte consiste em estender a desigualdade da Proposição anterior para as normas $\|\cdot\|_{s, B}$.

Proposição 4.2.2 *Sejam $L = d_t - i d\phi \wedge \frac{\partial}{\partial x}$ definido em $J_x \times \bar{B}_t \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ e $K \subset \subset J$.*

Suponha que exista $\varepsilon \in [0, 1[$ tal que para todo $B' \subset \subset B$ existe $C = C(B') > 0$ tal que

$$\|u\|_{\varepsilon, B'}^2 \leq C \left(\|Lu\|_{0, B}^2 + \|u\|_{0, B}^2 \right), \quad \forall u \in C^\infty(\bar{B}, C_c^\infty(J)).$$

Então para cada $s \in \mathbf{R}$ existe $C_1 > 0$ tal que

$$\|u\|_{\varepsilon+s, B'}^2 \leq C_1 \left(\|Lu\|_{s, B}^2 + \|u\|_{s, B}^2 \right), \quad \forall u \in C^\infty(\bar{B}, C_c^\infty(J)) \quad \text{com} \quad \text{supp } u(\cdot, t) \subset K.$$

Demonstração :

Seja $\Lambda^s = (1 - \partial_x^2)^{s/2}$. Observe que $\hat{\Lambda}^s u(\xi, t) = (1 + \xi^2)^{s/2} \hat{u}(\xi, t)$.

Assim, se denotarmos $u_t = u(\cdot, t)$ temos

$$\|\Lambda^s u_t\|_\varepsilon = \|u_t\|_{\varepsilon+s}, \quad \forall t \in B$$

e portanto

$$\|\Lambda^s u\|_{\varepsilon, B'} = \|u\|_{\varepsilon+s, B'}$$

Seja $\psi \in C_c^\infty(J)$ tal que $\psi \equiv 1$ em K .

Considere Ψ o operador multiplicação por ψ .

Temos que

$$\Lambda^s \Psi = \Psi \Lambda^s + [\Lambda^s, \Psi].$$

Note que $\Psi\Lambda^s$ tem ordem s e $[\Lambda^s, \Psi]$ tem ordem $s - 1$.

Assim

$$\Lambda^s \Psi u_t = \Psi \Lambda^s u_t + [\Lambda^s, \Psi] u_t \quad \forall t \in B.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \|\Lambda^s \Psi u_t\|_\epsilon^2 &\leq 2 \left[\|\Psi \Lambda^s u_t\|_\epsilon^2 + \|[\Lambda^s, \Psi] u_t\|_\epsilon^2 \right] \\ &\leq \text{const} \left[\|\Psi \Lambda^s u_t\|_\epsilon^2 + \|u_t\|_{\epsilon+s-1}^2 \right] \end{aligned}$$

porque $[\Lambda^s, \Psi] : H^{\epsilon+s-1} \rightarrow H^\epsilon$ é contínuo.

Note que

$$\|\Lambda^s \Psi u_t\|_\epsilon^2 = \|\Lambda^s u_t\|_\epsilon^2 = \|u_t\|_{\epsilon+s}^2.$$

e que $\|u_t\|_{\epsilon+s-1}^2$ pode ser absorvido por $\|u_t\|_s^2$ uma vez que $\epsilon + s - 1 < s$, isto é,

$$\|u\|_{\epsilon+s-1,B}^2 \leq \text{const} \|u\|_{s,B}^2.$$

Assim

$$\|u_t\|_{\epsilon+s}^2 \leq \text{const} \left[\|\Psi \Lambda^s u_t\|_\epsilon^2 + \|u_t\|_s^2 \right]. \quad (4.4)$$

Agora, por hipótese

$$\|\Psi \Lambda^s u_t\|_\epsilon^2 \leq C \left[\|L \Psi \Lambda^s u\|_{0,B}^2 + \|\Psi \Lambda^s u\|_{0,B}^2 \right] \quad \forall t \in B'. \quad (4.5)$$

Podemos escrever

$$L \Psi \Lambda^s = \Psi \Lambda^s L + [L, \Psi \Lambda^s].$$

Note que $\Psi \Lambda^s L$ tem ordem $s + 1$ em x e $[L, \Psi \Lambda^s]$ tem ordem s em x .

Logo

$$\begin{aligned} \|(L \Psi \Lambda^s u)_t\|_0^2 &\leq 2 \left[\|\Psi \Lambda^s (Lu)_t\|_0^2 + \|([L, \Psi \Lambda^s] u)_t\|_0^2 \right] \\ &\leq \text{const} \left[\|(Lu)_t\|_s^2 + \|u_t\|_s^2 \right], \quad \forall t \in B. \end{aligned}$$

Note que aparentemente a constante da desigualdade acima deve depender de t .

Entretanto, examinando o comutador

$$\begin{aligned} [L, \Psi \Lambda^s] &= [d_t - \text{id} \phi \wedge \frac{\partial}{\partial x}, \Psi \Lambda^s] \\ &= [-\text{id} \phi \wedge \frac{\partial}{\partial x}, \Psi \Lambda^s] \end{aligned}$$

temos que a parte que depende de t só aparece em ϕ e portanto a norma de $[L, \Psi\Lambda^s] : H^s \rightarrow H^0$ é uniformemente limitada em t .

Assim

$$\|L\Psi\Lambda^s u\|_{0,B}^2 \leq \text{const} [\|Lu\|_{s,B}^2 + \|u\|_{s,B}^2] \quad (4.6)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \|u\|_{\epsilon+s,B'}^2 &\leq \text{const} [\|\Psi\Lambda^s u\|_{\epsilon,B'}^2 + \|u\|_{s,B}^2] \quad \text{por (4.4)} \\ &\leq \text{const} [\|L\Psi\Lambda^s u\|_{0,B}^2 + \|u\|_{s,B}^2] \quad \text{por (4.5)} \\ &\leq \text{const} [\|Lu\|_{s,B}^2 + \|u\|_{s,B}^2] \quad \text{por (4.6).} \end{aligned}$$

□

Observação : Estimativas do tipo da Proposição 4.2.2 são chamadas de estimativas sub-elípticas.

Vamos agora estender a desigualdade da Proposição anterior para funções contínuas na variável t .

Proposição 4.2.3 *Sejam $L = d_t - id\phi \wedge \frac{\partial}{\partial x}$ definido em $J_x \times \bar{B}_t \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ e compactos $K \subset\subset J$ e $B' \subset\subset B$.*

Suponhamos que exista $\epsilon \in [0, 1[$ tal que para todo $s \in \mathbf{R}$ existe $C_1 > 0$ tal que

$$\|u\|_{\epsilon+s,B'}^2 \leq C_1 (\|Lu\|_{s,B}^2 + \|u\|_{s,B}^2), \quad \forall u \in C^\infty(\bar{B}, C_c^\infty(K)).$$

Então a desigualdade acima continua válida $\forall u \in C^0(\bar{B}, C_c^\infty(K))$ com $Lu \in \Lambda^1 C^0(\bar{B}, C_c^\infty(K))$.

Demonstração :

Seja $u \in C^0(\bar{B}, C_c^\infty(K))$ com $Lu \in \Lambda^1 C^0(\bar{B}, C_c^\infty(K))$.

Como

$$Lu = d_t u - id\phi \wedge u_x \in \Lambda^1 C^0(\bar{B}, C_c^\infty(K))$$

então

$$d_t u \in \Lambda^1 C^0(\bar{B}, C_c^\infty(K)).$$

Considere $v \in C_c^0(\mathbf{R}^n, C_c^\infty(K))$ tal que $v(t, x) = u(t, x)$, $\forall t \in \bar{B}$, $\forall x \in K$ e defina

$$v_\nu = \chi_{1/\nu} \star v \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n, C_c^\infty(K))$$

onde

$$\chi_\eta(t) = \frac{1}{\eta^n} \chi\left(\frac{t}{\eta}\right)$$

com $\chi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\chi \geq 0$ e $\int \chi = 1$.

Temos que

$$v_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} v \quad \text{em } C^0(\mathbf{R}^n, C_c^\infty(K)).$$

De fato,

$$\begin{aligned} \partial_x^j v_\nu(x, t) - \partial_x^j v(x, t) &= \int \nu^n \chi(\nu s) \left[\partial_x^j v(x, t-s) - \partial_x^j v(x, t) \right] ds \\ &= \int_{\text{supp } \rho} \rho(s) \left[\partial_x^j v(x, t-s/\nu) - \partial_x^j v(x, t) \right] ds. \end{aligned}$$

Portanto

$$\sup_{\substack{x \in K \\ t \in K'}} \left| \partial_x^j v_\nu(x, t) - \partial_x^j v(x, t) \right| \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0 \quad \forall K' \subset \subset \mathbf{R}^n, \quad \forall j \in \mathbf{Z}_+$$

donde

$$v_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} v$$

em $C^0(\bar{B}, C_c^\infty(K))$. Em particular, a convergência se dá em $C^0(\bar{B}, H_c^s(K))$, $\forall s \in \mathbf{R}$.

Agora

$$\begin{aligned} Lv_\nu &= L(\chi_{1/\nu} \star v) \\ &= \chi_{1/\nu} \star d_t v - id\phi \wedge (\chi_{1/\nu} \star (\partial_x v)) \\ &\xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} d_t v - id\phi \wedge \partial_x v \quad \text{em } \Lambda^1 C^0(\mathbf{R}^n, H_c^s(K)), \quad \forall s \in \mathbf{R} \\ &= Lv \end{aligned}$$

Assim, para cada $s \in \mathbf{R}$ existe $C_1 > 0$ tal que

$$\|v_\nu\|_{\varepsilon+s, B'}^2 \leq C_1 \left(\|Lv_\nu\|_{s, B}^2 + \|v_\nu\|_{s, B}^2 \right), \quad \forall \nu \in \mathbf{N}.$$

Tomando-se o limite para $\nu \rightarrow \infty$ temos que

$$\|v\|_{\varepsilon+s, B'}^2 \leq C_1 \left(\|Lv\|_{s, B}^2 + \|v\|_{s, B}^2 \right)$$

e sendo v uma extensão de u temos que

$$\|u\|_{\varepsilon+s, B'}^2 \leq C_1 \left(\|Lu\|_{s, B}^2 + \|u\|_{s, B}^2 \right)$$

□

Proposição 4.2.4 *Seja $L = d_t - id\phi \wedge \frac{\partial}{\partial x}$ definido em $J_x \times \bar{B}_t \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ onde $\phi : \bar{B} \rightarrow \mathbf{R}$ é uma função de classe C^∞ sem mínimo nem máximo local satisfazendo (2.7). Então existe $\varepsilon \in]0, 1]$ tal que se*

$$u \in C^0(B, H_{loc}^m(J)) \quad e \quad Lu \in \Lambda^1 C^0(B, H_{loc}^m(J))$$

então

$$u \in C^0(B, H_{loc}^{m+\varepsilon}(J)).$$

Demonstração :

Sejam $u \in C^0(B, H_{loc}^m(J))$ tal que $Lu \in \Lambda^1 C^0(B, H_{loc}^m(J))$ e $I \subset\subset J$. Bastará mostrar que $u \in C^0(\Omega, H_{loc}^{m+\varepsilon}(J))$ para todo $\Omega \subset\subset B$.

Considere $\psi \in C_c^\infty(I)$ arbitrária e defina

$$A_\eta(v) = \rho_\eta \star (\Psi v), \quad v \in C^0(\bar{\Omega}, \mathcal{D}'(J))$$

lembrando aqui que Ψ denota o operador multiplicação por ψ e

$$\rho_\eta(x) = \frac{1}{\eta} \rho\left(\frac{x}{\eta}\right)$$

com $\rho \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ tal que $\text{supp } \rho \subseteq [-1, 1]$, $\rho \geq 0$ e $\int \rho = 1$.

Temos que, pela Proposição 2.4.1

$$A_\eta(u) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \Psi u \quad \text{em} \quad C^0(\bar{\Omega}, H_c^m(I)).$$

Agora, uma vez que convolução na variável x comuta com L , temos

$$\begin{aligned} LA_\eta u &= \rho_\eta \star L(\Psi u) \\ &\xrightarrow{\eta \rightarrow 0} L\Psi u \quad \text{em} \quad \Lambda^1 C^0(\bar{\Omega}, H_c^m(I)) \end{aligned}$$

uma vez que

$$L\Psi u = \Psi Lu + uL\Psi \in \Lambda^1 C^0(\bar{\Omega}, H_c^m(I))$$

Assim pela Proposição 4.2.3, para todo $\Omega' \subset\subset \Omega$, $m \in \mathbf{R}$ existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|A_{1/j}(u) - A_{1/k}(u)\|_{\varepsilon+m, \Omega'}^2 &\leq \\ &\leq C \left(\|L(A_{1/j}(u) - A_{1/k}(u))\|_{m, \Omega}^2 + \|A_{1/j}(u) - A_{1/k}(u)\|_{m, \Omega}^2 \right) \end{aligned}$$

para todos $j, k \in \mathbf{Z}_+$. Logo $(A_{1/j}(u))_j$ é uma sequência de Cauchy em $C^0(\bar{\Omega}', H_c^{m+\varepsilon}(I))$.

Como também $(A_{1/j}(u))_j$ converge para Ψu em $C^0(\bar{\Omega}', H_c^m(I))$, concluímos que $\Psi u \in C^0(\bar{\Omega}', H_c^{m+\varepsilon}(I))$. Sendo $\Omega' \subset\subset \Omega$ arbitrário, o resultado segue. $\square$

Corolário 4.2.1 *Nas hipóteses da Proposição 4.2.4 temos que L é C^∞ -hipoelético.*

Demonstração :

Sejam $\mathcal{O} \subseteq J \times B$ um aberto e $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ com $Lu = f \in \Lambda^1 C^\infty(\mathcal{O})$. Precisamos verificar que $u \in C^\infty(\mathcal{O})$.

Se $J' \times B' \subset\subset \mathcal{O}$ então segue que $u \in \mathcal{D}'_F(J' \times B')$, isto é, a restrição de u a $J' \times B'$ é uma distribuição de ordem finita.

Portanto existem $m \in \mathbf{Z}_+$ e $\beta \in \mathbf{Z}_+^n$ tais que

$$u(x, t) = \sum_{\substack{k \leq m \\ \alpha \leq \beta}} \partial_x^k \partial_t^\alpha u_{k\alpha}(x, t),$$

onde $u_{k\alpha} \in C^0(J' \times B')$.

Vamos verificar que $u \in C^0(B', H_{loc}^{-N}(J'))$, para algum $N \in \mathbf{N}$.

Sabemos que para cada $j = 1, \dots, n$

$$L_j u = \frac{\partial u}{\partial t_j} - i \frac{\partial \phi}{\partial t_j} \frac{\partial u}{\partial x} = f_j \in C^\infty(J' \times B').$$

Assim

$$\frac{\partial u}{\partial t_j} = f_j + i \frac{\partial \phi}{\partial t_j} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
&= f_j + i \frac{\partial \phi}{\partial t_j} \sum_{\substack{k \leq m \\ \alpha \leq \beta}} \partial_x^{k+1} \partial_t^\alpha u_{k\alpha} \\
&= \sum_{\substack{k \leq m+1 \\ \alpha \leq \beta}} \partial_x^k \partial_t^\alpha v_{k\alpha}
\end{aligned}$$

onde $v_{k\alpha} \in C^0(J' \times B')$.

Logo, se $\beta_j > 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t_j} = \frac{\partial}{\partial t_j} \sum_{\substack{k \leq m+1 \\ \alpha \leq \beta - e_j}} \partial_x^k \partial_t^\alpha w_{k\alpha}$$

onde

$$w_{k\alpha}(x, t) = \begin{cases} v_{k\alpha+e_j}(x, t) + \int_{t_0^j}^{t_j} v_{k\alpha}(x, t_1, \dots, t_{j-1}, s, t_{j+1}, \dots, t_n) ds & \text{se } \alpha_j = 0 \\ v_{k\alpha+e_j}(x, t) & \text{se } \alpha_j \geq 1. \end{cases}$$

Assim

$$u - \sum_{\substack{k \leq m+1 \\ \alpha \leq \beta - e_j}} \partial_x^k \partial_t^\alpha w_{k\alpha}$$

não depende de t_j e portanto existem $h_l \in C^0(J')$, $l = 0, \dots, \nu$ tais que

$$u(x, t) = \sum_{l \leq \nu} \partial_x^l h_l(x) + \sum_{\substack{k \leq m+1 \\ \alpha \leq \beta - e_j}} \partial_x^k \partial_t^\alpha w_{k\alpha}(x, t).$$

Iterando o processo mais $|\beta| - 1$ vezes segue que

$$u(x, t) = \sum_{k \leq N} \partial_x^k u_k(x, t)$$

onde $u_k \in C^0(J' \times B')$.

Portanto temos que

$$u \in C^0(B', H_{loc}^{-N}(J')).$$

Agora, se $Lu \in \Lambda^1 C^\infty(\mathcal{O})$ então

$$Lu \in \Lambda^1 C^\infty(B', H_{loc}^m(J')), \quad \forall m \in \mathbf{R}.$$

Logo pela Proposição 4.2.4 temos que

$$u \in C^0(B', H_{loc}^{-N+\varepsilon}(J')).$$

Iterando o processo obtemos que

$$u \in C^0(B', L_{loc}^2(J')) \subset L_{loc}^2(J' \times B').$$

Tome agora

$$P = L_1^2 + \cdots + L_n^2 + \lambda \partial_x^2, \quad \lambda > 0.$$

Se λ for suficientemente grande, pelo Lema 2.4.1 temos que P é um operador elíptico.

Como P comuta com L segue que, para todo $M \in \mathbb{Z}_+$

$$P^M L u = L P^M u \in \Lambda^1 C^\infty(\mathcal{O})$$

o que implica

$$P^M u \in L_{loc}^2(J' \times B'), \quad \forall M \in \mathbb{Z}_+.$$

Portanto, pelo Teorema 2.4.1, temos que

$$u \in H_{loc}^{2M}(J' \times B'), \quad \forall M \in \mathbb{Z}_+.$$

Assim $u \in C^\infty(J' \times B')$ e como $J' \times B' \subset \mathcal{O}$ é arbitrário segue que

$$u \in C^\infty(\mathcal{O}).$$

□

Corolário 4.2.2 *Se ϕ for uma função analítica real sem máximo nem mínimo local então L é C^∞ -hipoelíptico.*

Demonstração :

A demonstração decorre do fato de que localmente a função ϕ satisfaz as condições da Proposição 4.2.4 pela Proposição 2.3.1. Basta então usar o corolário anterior para concluir que L é C^∞ -hipoelíptico.

□

Bibliografia

- [1] M. S. Baouendi and F. Treves. A Local Constancy Principle for the Solutions of Certain Overdetermined Systems of First-Order Linear Partial Differential Equations. *Mathematical Analysis and Applications, Part A. Advances in Mathematics Supplementary Studies*. Vol. 7A (1981) p. 245-262.
- [2] P. Cordaro. *Sistemas de Campos Vetoriais Complexos*. Notas de Curso da VIII Escola Latino-Americana de Matemática. Rio de Janeiro (1986).
- [3] S. Lojasiewicz. *Ensembles Semi-Analytiques*. Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Bures-sur-Yvette (Seine-et-Oise). France. (notas mimeografadas).
- [4] H. M. Maire. Hypoelliptic Overdetermined Systems of Partial Differential Equations. *Comm. in Partial Differential Equations* 5(4) (1980) p. 331-380.
- [5] F. Treves. *Basic Linear Partial Differential Equations*. Academic Press (1975).
- [6] F. Treves. *Hypoanalytic Structures*. Princeton University Press, Princeton, NJ (1991) (a aparecer).
- [7] F. Treves. *Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators*. Vol 1, Plenum (1982).
- [8] F. Treves. *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*. Academic Press, New York (1967).