ALGUNS TEOREMAS DE
ESTABILIDADE

Manuel Valentim de Pera Garcia

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para obtenção do grau de
Doutor em Matemática Aplicada

Orientador: Angelo Barone Netto

- São Paulo, dezembro de 1987 -

***Ao Dr. Ângelo Barone Netto,
e à sua maravilhosa maneira de
encarar o trabalho matemático.***

AGRADECIMENTOS

Esta costuma ser a página deste tipo de obra onde mais se abandona o rigor e portanto o compromisso com a verdade; num trabalho de matemática tal desleixo é quase um crime, assim procurarei diminuí-lo.

É claro que nenhum trabalho de doutorado se faz sem a ajuda dos colegas e amigos que, correndo o risco de serem muito chatos, se atrevem a incentivar e, principalmente, cobrar mais empenho, dedicação e resultados. A todos aqueles que desinteressadamente, mostrando um espírito profissional invejável, correram, no meu caso, esses riscos, a minha sincera gratidão. Não farei qualquer lista porque apesar de saber muito bem por onde ela deveria começar (Prof. Angelo Barone Netto, muito obrigado!) seria uma presunção muito grande achar que saberia qual deveria ser seu ponto final.

O Autor.

Introdução

Nosso escopo neste trabalho é estudar a estabilidade segundo Liapunoff de pontos de equilíbrio de Sistemas Mecânicos Lagrangianos com 2 graus de liberdade.

Ao longo destas páginas Ω representará um aberto de R^2 ao qual a origem O pertence; $\pi: \Omega \rightarrow R$ será a Energia Potencial, a qual será suposta de classe $C^2(\Omega)$, com um ponto crítico em O e tendo nesse ponto jato de ordem $s \geq 2$.

Consideraremos $T: \Omega \times R^2 \rightarrow R$ a Energia Cinética do Sistema em estudo, ou seja, uma forma quadrática definida positiva com respeito às duas últimas variáveis, suporemos $T \in C^\infty$.

Teremos então definida em $\Omega \times R^2$ a função *lagrangiana* $L = T - \pi$ que, como é bem conhecido, caracteriza o Sistema Mecânico considerado. Este fato justifica as denominações “Sistema Lagrangiano L ”, “Sistema L ”, “pontos de equilíbrio de L ” e outras similares, tão usuais em textos deste assunto e das quais nos valeremos sem maiores preocupações.

Além disso cumpre destacar que qualquer referência aos jatos de π será, na verdade, uma referência aos jatos dessa função na origem.

Como é bastante conhecido, os pontos de equilíbrio de L são exatamente os $(q; \dot{q}) \in \Omega \times R^2$ da forma $(q; O)$, com q ponto crítico de π o que torna preciso o significado de “ponto crítico de π associado a um ponto de equilíbrio de L ” e vice-versa.

Isso também justifica um abuso de linguagem de que freqüentemente nos serviremos: falar na “origem” ora como ponto de R^2 , ora como ponto de R^4 , usando para isso o mesmo símbolo; no entanto esperamos que onde tal ocorrer o contexto se encarregue de aclarar a situação.

Ainda sobre notações, devemos alertar o leitor para o fato de utilizar T ora para representar a Energia Cinética, ora para indicar um instante de tempo positivo, acreditamos ser impossível que isto traga qualquer tipo de confusão.

Em 1898 Liapunoff provou (v. [L-0]), no contexto de n graus de liberdade, que nas condições acima, se o jato 2 de π mostrar que esta não possui mínimo na origem, então o Sistema Lagrangiano considerado terá um ponto de equilíbrio instável na origem (do R^{2n}).

Neste trabalho conseguimos uma “generalização” deste resultado, no caso de 2 graus de liberdade, em duas etapas:

- Quando o primeiro jato não nulo de π mostra que a energia potencial não possui mínimo (nem brando) na origem, esta é, sob condições genéricas, um ponto de equilíbrio instável (em [KP-0]) encontra-se provado um resultado “mais forte” mas impondo condições de analiticidade sobre π e T).

Notemos que, quando o primeiro jato não nulo é o de ordem 2, então nós obtemos, agrupando dois resultados provados no Capítulo 1, o clássico Teorema de Liapunoff supra-citado.

- Quando existe um k tal que, nenhum jato anterior mostrava que π não tinha mínimo e $J^k \pi$ é um polinômio de grau k não homogêneo com essa informação, então a origem é um ponto de equilíbrio instável. *

Esta é, num sentido que deixaremos claro no Capítulo 0, uma situação genérica no “mundo das Energias Potenciais que contém em algum jato finito a informação desejada.”

Além disso estes são, tanto quanto conhecemos, os primeiros resultados que, num sentido razoável, estendem o Teorema de Liapunoff antes citado, por conectar fortemente as informações contidas em um determinado jato

* Demonstramos, no Teorema 1.2, um pouco mais, mas este é um enunciado mais “simpático” do aquele ali apresentado.

finito de π , relativamente ao fato da origem não ser um ponto de mínimo, com propriedades de instabilidade desse ponto de equilíbrio.

Nesse sentido podemos encarar nossos Teoremas como inseridos no contexto - *A inversão do Teorema de Dirichlet-Lagrange*, o qual diz: *Um ponto crítico do Sistema Lagrangiano L no qual a Energia Potencial tem um mínimo forte é estável segundo Liapunoff.* Durante algum tempo pensou-se que valesse a recíproca deste fato, até que em 1899 Painléve deu um contra-exemplo, hoje clássico, para essa conjectura já no caso de 1 grau de liberdade (v. [L-0]).

Desde então tem-se procurado estabelecer “recíprocas parciais” para esse Teorema. O ideal seria conseguir uma caracterização da estabilidade ou não de um ponto de equilíbrio de L através de alguma propriedade do germe da Energia Potencial no ponto crítico correspondente; infelizmente isto parece ser uma tarefa muito árdua, senão impossível (exceto quando temos um grau de liberdade, caso em que o problema se trivializa, como mostra [A - 0]).

Entre os resultados destas tentativas podemos citar o célebre Teorema de Tchetaev (v. [L-0] ou o Teorema 1.2 deste trabalho) e o resultado de Tagliaferro que mostra ser instável um ponto onde a Energia Potencial tem máximo, ainda que brando (v. [T-0]). O fato deste resultado ser de 1979 é, a nosso ver, bastante eloquente sobre as dificuldades envolvidas no problema.

Este trabalho é fruto das idéias desenvolvidas nesta área por nosso Orientador, Ângelo Barone Netto, introdutor do conceito de *k-decidibilidade* (v. [B-0]), ferramenta fundamental para tornar manejáveis (ou visíveis) certas propriedades antes apenas “desconfiadas”, como a prova do Teorema 1.0 deixa evidente.

Dedicamos o Capítulo 0 ao desenvolvimento e obtenção de resultados ligados a *k-decidibilidade* vitais durante o restante do trabalho.

Por acharmos ser o contexto natural ao tratamento de k -decidibilidade, usamos nesse capítulo a linguagem de germes de função e conjunto; mais precisamente π será considerada um germe de função com jato pontual de ordem k conveniente, definido no germe de Ω na origem a valores no germe de R em zero, o conjunto destes germes será denotado por $J^k(\Omega, O; R, 0)$, ou apenas $J(k)$; o leitor que assim o desejar pode pensar que π tem classe C^∞ , sem que isso prejudique a compreensão geral do texto.

No Capítulo 1 demonstraremos as generalizações antes citadas.

Faremos agora mais alguns comentários sobre o “estado da arte” neste campo de pesquisa.

Ultimamente alguns trabalhos tem sido feitos para o caso de 2 graus de liberdade quando π é *analítica* (v. [K-0],[K-1]), hipótese que nos parece muito restritiva; uma comparação desses resultados com os nossos é razoavelmente complicada, pois as hipóteses feitas são de tipos muito diferente: enquanto Kozlov usa toda a analiticidade da Energia Potencial, nós procuramos reduzir essa regularidade à simples existência de um “bom” polinômio aproximador.

Num certo sentido achamos esta postura mais prática, pois esta é, quase sempre, a maneira de reconhecer propriedades, qualitativas e até quantitativas, mesmo quando conhecemos a série dessa Energia.

Por outro lado é inegável que o uso de propriedades de funções analíticas torna viável o uso de técnicas para nós bem mais restritas (por exemplo, séries formais).

Uma coisa interessante entretanto é que com qualquer dessas duas técnicas, os casos patológicos parecem ser os mesmos: as funções “flat”.

São elas, que de um lado, tornam tão vital a hipótese de analiticidade sobre a de C^∞ e por outro realçam muito bem a importância de procurar algum jato finito “confiável”.

De todas as formas temos a esperança de que pelo menos algumas das técnicas aqui utilizadas possam servir, ao menos no caso de 2 graus de

liberdade, para se conseguir avançar um pouco mais *com sucesso* nesta área abandonando a, para nós altamente incomoda, hipótese de analiticidade.

Seria uma tarefa útil fazer uma pequena digressão sobre a questão de erros encontrados na literatura sobre este assunto (e alguns deles poderiam hoje ser chamados de históricos), mas isso daria talvez mais trabalho do que deu escrever esta tese, por agora basta-nos dizer que apesar de, por mais de uma vez, terem-se publicado “provas” da inversão do Teorema de Dirichlet-Lagrange na situação da Energia Potencial ser analítica (e por nomes de muito gabarito), saber se isto de fato é verdade continua sendo, tanto quanto saibamos, uma questão em aberto (v. [L-0],[K-0]).

Uma última palavra de alerta. Não fazemos durante o texto nenhuma concessão no que diz respeito a deixar as hipóteses dos resultados mais “sugestivas”, elas são apresentadas sempre na sua forma mais fraca, com a qual conseguimos ainda provar o resultado almejado. Se isso deixa menos “intuitivo” ou “claro” o contexto em que os resultados se aplicam, é um preço que voluntariamente resolvemos pagar.

O mesmo se aplica de certo modo a todo o texto, ele é propositadamente “ enxuto”, procuramos ser, antes de tudo, concisos. Além disso assunto já é, a nosso ver suficientemente suculento, sem necessitar, portanto, de mais ajuda.

ABSTRACT

We present here two Theorems about the Stability of an equilibrium point of a Lagrangian mechanical system with two degrees of freedom.

Let π a Potential Energy defined in an open neighborhood Ω of the origin, we suppose π is of class C^2 and the origin is a critical point of π , which has jet of order $k \geq 2$ at this point.

We take a Kinetical Energy T defined in $\Omega \times R^2$ of class C^∞ .

Our main goal is to establish a relation between the fact of the k -jet of π at origin shows this isn't a minimum point of π and the instability of the critical point $(O; O)$ of the system with Lagrangian $L = T - \pi$.

If the k -jet is homogeneous we find a generic condition over this k -jet, to assure the instability (see Theorem 1.1). Our results contains two classical Lyapunov's Theorems as particular cases.

If the k -jet isn't homogeneous we have a nice condition (see Theorem 1.2 and Corollary 1.1) which is sufficient to assure the instability, this is a generic condition, too.

We develop in Chapter 0 the k -decidibility tools (see [B-0]) we need to the proofs of instability Theorems of Chapter 1.

CAPÍTULO 0

PROPIEDADES DE K DECIDIBILIDADE

§0.0 - Introdução Este é um Capítulo dedicado ao estudo daquelas propriedades de *k-decidibilidade* usadas no restante do trabalho.

A referência básica para o assunto em pauta é [B-0], onde Ângelo Barone Netto define este conceito.

Consideramos aqui um germe $\pi \in J^k(\Omega, O; R, 0)$ com jato 1 nulo e tendo em algum jato finito a informação que π não possui mínimo, inferindo desse fato o que puder ser útil no Estudo de Estabilidade de Liapunoff que faremos no Capítulo 1.

Dividimos nosso estudo em dois casos:

- O primeiro jato não nulo contém essa informação.
- Algum outro jato tem a informação.

No primeiro caso, genérico (v. Teorema 0.0), destacamos o Teorema 0.1, de importância bastante geral no estudo de *k-decidibilidade* independentemente de Estabilidade de Liapunoff.

No segundo caso obtemos, sob certas condições, um resultado mais geral que o Teorema 0.1 (Teorema 0.8), o qual possui, em nossa opinião, uma importância intrínseca.

§0.1 - Definições e Generalidades

Definição 0.0 : Diremos que um germe π definido no germe de Ω em O a valores no germe de R^p em O possui *jato punctual de ordem k* ($k \in N^*$) se existir um germe de polinômio P_k de grau menor ou igual a k tal que

$$\lim_{x \rightarrow O} \frac{(\pi - P_k)(x)}{\|x\|^k} = 0.$$

Tal polinômio, quando existe, é único e se π tiver polinômio de Taylor de ordem k ele evidentemente será o *jato punctual de ordem k* de π , ao qual chamaremos no futuro simplesmente de *jato k* de π denotando-o por $J^k\pi$.

Notaremos $J^k(\Omega, O; R, 0)$ ou apenas $J(k)$ ao conjunto dos germes de $(\Omega; O)$ em $(R; 0)$ que tem *jato k* .*

Evidentemente se $s < k$ então:

$$J(s) \subset J(k) \text{ e } C^{(k)}(\Omega, O; R, 0) \subset J^k(\Omega, O; R, 0).$$

Definição 0.1 : Um germe $\pi \in J(k)$ será dito *k -decidível* se a partir do $J^k\pi$ for possível concluir que π tem máximo, mínimo ou não tem extremo em O .

No futuro diremos que um germe (ou função) tem *sela* se ele não tiver extremo em O .

Denotaremos por $\pi_k = J^k\pi - J^{k-1}\pi$, assim π_k será sempre um germe de polinômio homogêneo de grau k e é evidente que $J^k\pi = \sum_{s \leq k} \pi_s$.

* Quando estivermos a salvo de confusões diremos $f \in J(k)$ querendo com isto dizer f tem *jato k* sem referência ao domínio e imagem de f .

A partir de agora, durante todo este Capítulo, π será usado para representar tanto um germe como um seu representante e só vamos considerar π 's tais que $J^1\pi = 0$.

Definamos, para $s \leq k$, $J_0(k; s) = \{f \in J(k) \mid J^{s-1}f = 0\}$.

E denotemos $J_0(k; k)$ por $J_0(k)$.

Estabeleçamos agora o:

Teorema 0.0 : Seja $\pi \in J_0(k; s)$ então $J^s\pi$ tem extremo brando (em O) se e só se π não é s -decidível.

◁: É claro que se $J^s\pi$ tem extremo brando então π não é s -decidível.

Passemos agora à recíproca.

Nas hipóteses feitas temos $J^s\pi$ homogêneo e

$$\pi = J^s\pi + R \text{ com } J^sR = 0. \quad (1)$$

Se $J^s\pi$ não tem extremo brando em O uma das seguintes coisas ocorre:

• $J^s\pi$ tem sela.

•• $J^s\pi$ tem extremo forte em O .

No primeiro caso existem duas retas r e s que passam por O tais que $J^s\pi$ tem máximo forte quando restrito ao germe de r em O e mínimo forte se restrito ao germe de s em O , ambos de ordem s . Logo por (1) segue-se que $\pi|_r$ terá máximo forte e $\pi|_s$ terá mínimo forte e isto mostra que π tem sela o que encerra a questão neste caso.

No segundo caso admitamos, sem perda de generalidade, que $J^s\pi$ tem mínimo forte em O .

Lembremos agora que $J^s\pi$ é homogêneo, logo O é um ponto de extremo global de $J^s\pi$ (que está definido em R^2) e portanto

$$\min_{\|x\|=1} J^s\pi(x) = m > 0.$$

Tomamos então um representante qualquer de π .

De Ω ser aberto segue-se que π está definida na bola aberta de centro O e raio ϵ , B_ϵ , para algum $\epsilon > 0$, tomemos então $x \in B_\epsilon \setminus \{O\}$.

Temos $x = tq$ onde $0 < t = \|x\| \leq \epsilon$ e $\|q\| = 1$.

Ora, de (1) segue-se usando a homogeneidade de $J^s\pi$:

$$\frac{\pi(x)}{\|x\|^s} = J^s\pi(q) + \frac{R(x)}{\|x\|^s}. \quad (2)$$

Como $J^sR = 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $\|x\| \leq \delta$ temos $|\frac{R(x)}{\|x\|^s}| < m$ o que mostra que em $B_\delta \setminus \{O\}$ temos $\pi > 0$. :▷

Gostaríamos de enfatizar a importância que tem a igualdade (2) na demonstração acima e como a homogeneidade foi importante na sua obtenção : é falso, em geral, que se o jato s de uma função tiver extremo forte em O então a função é s -decidível como vemos tomando $s = 4$ e $f(x; y) = x^4 + (x - y^2)^2 - y^6$.

O Teorema acima afirma que se s é a ordem do primeiro jato não nulo de π então ou $J^s\pi$ tem extremo brando ou π necessariamente é s -decidível.

É óbvio que se considerarmos em $J_0(k; s)$ a relação

$$f \sim g \Leftrightarrow J^s f = J^s g,$$

que é, evidentemente, uma relação de equivalência, podemos identificar $J_0(k; s)/\sim$ com R^{s+1} . Tomando então em $J_0(k; s)/\sim$ a topologia de R^{s+1} ele se torna um Espaço de Baire e o Teorema acima nos mostra facilmente que a propriedade ser s -decidível é genérica.

Para encerrar este parágrafo notemos que se estivermos interessados não no fato de π ser k -decidível mas apenas em que o jato k de π mostre que π não tem mínimo, vale o seguinte

Teorema 0.0a : Se $\pi \in J_0(k; s)$ então ou $J^s \pi$ tem máximo brando (em O) ou o $J^s \pi$ mostra que π não tem mínimo.

Não insultaremos o leitor apresentando a demonstração.

À luz deste resultado e da observação feita poucas linhas antes fica claro o sentido da frase por nós empregada na Introdução deste Capítulo sobre o fato de *“dentre as Energias Potenciais que contém em algum jato finito a informação de não possuírem mínimo em O genericamente esta informação está no primeiro jato não nulo.*

§0.2 - O Caso Homogêneo

Neste parágrafo consideramos $\pi \in J_0(k; s)$ tal que $J^s \pi$ mostra que π não tem mínimo.

A menos de menção explícita em contrário P será o jato s de π suposto nas condições acima.

O conjunto $P^{-1}\{0\}$ será então de um dos dois seguintes tipos:

- $\{O\}$ - caso em que π tem máximo e é s -decidível.
- $\cup_{1 \leq j \leq q} r_j$, onde $q \in \mathbb{N}$ e cada r_j é uma reta passando pela origem O (Neste caso ou π tem sela s -decidível ou P tem máximo brando em O).

No que se segue diremos que um subconjunto C de $\mathbb{R}^2$ é um Cone se $C = tC \ \forall t > 0$. Além disso se $F \subset \mathbb{R}^2$ definimos $\hat{F}$ o Cone gerado por F ao conjunto $\bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda F$.

Definição 0.2 : Diremos que um Cone C é um cone negativo s -resistente de P se para toda $f \in J(s)$ com $J^s f = P$ tivermos que sua restrição ao germe de C em O tem máximo (em O).

Teorema 0.1 : Sejam P como acima e C um cone tal que $P|_C$ tem máximo forte em O então C é s -resistente para P .

◁: É claro que $F = S^1 \cap \overline{C}$ é compacto e que $P(x) < 0, \forall x \in F$ temos então

$$M = \max_{x \in F} P(x) < 0.$$

Tome então $f \in J(s)$ com $J^* f = P$.

Repetindo a parte da demonstração do Teorema 0.0 referente à situação em que $J^* \pi$ tinha extremo forte, substituído-se B_δ por $B_\delta \cap \hat{F}$ segue-se a tese. :▷

Note que tanto este Teorema como o Teorema 0.0 valem, com as mesmas demonstrações em R^n .

Vamos agora considerar o conjunto

$$V(P) = \{q \in R^2 \mid \text{posto de } \begin{pmatrix} q^T \\ \text{grad } P(q)^T \end{pmatrix} < 2\}$$

Observemos que os pontos de $V(P)$ são exatamente os pontos onde $\text{grad } P$ é radial, ou o que é o mesmo, são os pontos críticos de $P|_S$ onde S é qualquer esfera de centro O .

Notemos também que se efetuarmos uma mudança de coordenadas R_θ em R^2 que seja uma rotação de um ângulo θ segue-se imediatamente da ortogonalidade de R_θ que

$$V(P \circ R_\theta) = R_\theta^{-1}(V(P)) \quad (*)$$

Da homogeneidade de P vem que $V(P)$ é uma reunião finita de sub-variedades lineares do R^2 todas passando por O (até agora nada do que afirmamos depende de estarmos trabalhando em R^2) logo temos para $V(P)$ as seguintes possibilidades:

- I- $\bigcup_{1 \leq j \leq n} r_j$, onde cada r_j é uma reta passando pela origem e $n \in N$.
- II- R^2 .

Quando ocorre a segunda possibilidade então P é constante em todas as esferas centradas em O , logo

$$P(q) = \lambda(\|q\|)$$

com λ uma função conveniente de $[0; +\infty[$ em $\mathbb{R}$.

Usando agora o fato de P ser um polinômio homogêneo de grau $s > 0$ (não constante) vem que λ deve ser da forma

$$\lambda(x) = \lambda(1)x^s, \text{ com } \lambda(1) \neq 0.$$

Isso mostra que então P tem extremo forte em O o que acarreta ser o mesmo verdade para π .

Concentrar-nos-emos agora no caso em que ocorre a primeira possibilidade.

Definição 0.3 : Diremos que uma semi-reta r de origem O é uma semi-reta de mínimos (máximos) negativos (positivos) de P se :

- i- $r \subset V(P)$
- ii- $r \cap S^1$ é um ponto de mínimo (máximo) local de $P|_{S^1}$.
- iii- $P(q) < 0$ (> 0) se $q \in r \setminus \{O\}$.

É de todo evidente a partir de (*) que esta é uma caracterização invariante por rotações. Isto nos permitirá, por exemplo, sempre que o desejarmos, escolher uma determinada semi-reta para semi-reta de mínimos sem que isso afete a generalidade do raciocínio.

Vamos agora fazer um comentário sobre "notação" que será extremamente útil no futuro: seja K um ângulo de vértice O e bissetriz b , seja ainda l uma semi-reta de origem O contida em K com $l \neq b$, diremos que o vetor $v \neq O$ aponta para dentro de K em l se v pertencer ao semi-plano determinado por l que contem b .

De um modo análogo definiríamos o que seria “aponta para fora” de K .

Estabeleçamos agora o

Lema 0.0 : Seja P como neste parágrafo então:

- A Se r é uma semi-reta de mínimos negativos de P temos $-\text{grad } P(q)$ paralelo a q e caso este não seja um ponto crítico de P vale que $-\text{grad } P(q)$ e q tem mesmo sentido.
- B $r \subset K$, onde K é um Cone negativo s -resistente para P .
- C Se $V(P) \neq R^2$ então podemos escolher K como um angulo central com $r \setminus \{O\}$ em seu interior, se $q \in K \setminus \{O\}$ então $\text{grad } P(q) \neq O$, $K \cap V(P) = r$ e se $q \in \partial K \setminus \{O\}$ teremos $-\text{grad } P(q)$ apontando para dentro de K .

Observação : O fato de estarmos usando $-\text{grad } P(q)$ justifica-se amplamente ao lembrarmos que $P = J^s \pi$ e do significado de $\text{grad } \pi$ em mecânica.

◁ :É óbvio que $K = r$ prova B.

Para ver A, comecemos percebendo que pela observação feita após a definição de $V(P)$ já sabemos que $-\text{grad } P(q)$ é paralelo a q .

Para demonstrar a parte final da assertiva em tela, tomemos

$$h(x) = -P(xu), \text{ onde } u \text{ é o versor de } r \text{ e } x \geq 0.$$

Claramente h tem máximo em 0 e

$$h'(x) = - \langle \text{grad } P(xu) \mid u \rangle. \quad (1)$$

Como $q \in r$ não é ponto crítico de P segue-se da homogeniedade deste que $h'(x) \neq 0 \quad \forall x > 0$. Logo temos

$$h'(x) > 0. \quad (2)$$

(1) e (2) estabelecem A.

Resta provar C para isto comecemos tomando, sem perda de generalidade r como sendo o semi-eixo dos $x'_s \geq 0$.

Como $V(P) \neq R^2$ vem que podemos tomar um ângulo agudo K com r em seu interior tal que $V(P) \cap K = r$.

Observamos agora que como r é uma semi-reta de mínimos negativos temos que P não é constante em r logo se $q \in r \setminus \{O\}$ temos $\text{grad } P(q) \neq O$, pois de P ser homogêneo, $\text{grad } P$ se anula em retas que passam pela origem. Com isto e o que já sabemos de K temos $\text{grad } P \neq O$ em $K \setminus \{O\}$.

Por último sejam r^+ e r^- respectivamente as semi-retas contidas no primeiro e quarto quadrante que estão em ∂K .

Provemos que $-\text{grad } P$ aponta para dentro de K , ou seja $\{q, \text{grad } P(q)\}$ formam uma base positiva (resp. negativa) de R^2 , $\forall q \in r^+$ (resp. r^-) $\setminus \{O\}$.

Para isso tomamos $g_a(\theta) = P(a \cos \theta; a \sin \theta)$ com $a > 0$ e $\theta \in R$.

É claro que g_a tem um ponto crítico isolado, que é de mínimo, em 0.

Mais que isso se $(\cos \theta; \sin \theta) \in K \setminus \{O\}$ temos $\theta g'_a(\theta) > 0$.

Basta ver agora que fazendo $q_1(\theta) = \cos \theta$ e $q_2(\theta) = \sin \theta$ vem

$$\begin{aligned} g'_a(\theta) &= \langle \text{grad } P(aq_1(\theta); aq_2(\theta)) \mid (-aq_2(\theta); aq_1(\theta)) \rangle \\ &= \det \begin{pmatrix} aq_1(\theta) & aq_2(\theta) \\ \frac{\partial P}{\partial x}(aq_1(\theta); aq_2(\theta)) & \frac{\partial P}{\partial y}(aq_1(\theta); aq_2(\theta)) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3)$$

Isto mostra que se r' é uma semi-reta de origem O em K e $r' \neq r$ então para $q \in r' \setminus \{O\}$ temos:

- se r' está no primeiro quadrante então $\{q, \text{grad } P(q)\}$ é uma base positiva de R^2 .
- se r' está no quarto quadrante então $\{q, \text{grad } P(q)\}$ é uma base negativa de R^2 .

Em particular quando $r' = r^+$ e $r' = r^-$ alcançamos nossa meta.

Tomando então K suficientemente pequeno para valer $P(q) < 0$ em $K \setminus \{O\}$ temos pelo Teorema 1.0 que este é um conc negativo s -resistente o que encerra a prova. :▷

Gostaríamos de destacar que ao demonstrar a parte C do lema anterior provamos mais do que havíamos enunciado, na verdade mostramos que se K é qualquer ângulo agudo com $V(P) \cap K = r$ em $K \setminus r$ o vetor $-\text{grad } P$ "aponta para dentro de K ".

Isto mostra que sendo K um ângulo agudo com uma semi-reta r de mínimos locais em seu interior, se existir uma semi-reta ℓ de origem O onde $-\text{grad } P$ "aponta para fora de K ", necessariamente existe pelo menos mais uma componente de $V(P)$ em K , mais precisamente, "entre" r e ℓ . Esta observação será útil no futuro.

Também é evidente que se trocarmos mínimo por máximo e "aponta para dentro" por "aponta para fora" continuam válidos todos os itens do Lema anterior.

Antes de prosseguir faremos uma pequena advertência.

Dada a natureza deste trabalho é conveniente ter uma relação entre o gradiente do jato s de um germe (que sempre existe) e o gradiente do germe (quando este eventualmente existir). Mais precisamente desejariamos que fosse verdade a seguinte relação, válida no caso de germes em C^s .

$$\forall f \in J(s) \text{ se existe } \text{grad } f \text{ então } J^{s-1} \text{grad } f = \text{grad } J^s f$$

Infelizmente o exemplo seguinte mostra que tal coisa não tem nenhuma chance de ser verdade ainda que coloquemos a hipótese adicional de $f \in C^1$ (que no escopo desta tese não é muito restritiva).

Exemplo 0.0 : A função seguinte tem jato 2 mas $\text{grad } f$ não tem jato 1.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

O exemplo acima talvez pareça um pouco forçado, uma vez que não existe $J^{s-1} \text{grad } f$ mas o Teorema seguinte mostra que, pelo menos no mundo dos germes C^1 este é o único tipo de exemplo (este Teorema será demonstrado para R^n).

Teorema 0.2 :Seja $f \in C^1$ com $\text{grad } f \in J(s-1)$, então $f \in J(s)$ e $J^{s-1} \text{grad } f = \text{grad } J^s f$

◁ :Definamos o seguinte germe de polinômio:

$$P(x) = \int_0^1 \langle J^{(s-1)} \text{grad } f(tx) \mid x \rangle dt$$

Vamos provar que $J^s f = P$.

De fato, se $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{|f(x) - P(x)|}{\|x\|^s} &= \left| \int_0^1 \frac{\langle \text{grad } f(tx) - J^{(s-1)} \text{grad } f(tx) \mid x \rangle}{\|x\|^s} dt \right| \\ &\leq \int_0^1 t^{s-1} \frac{\|\text{grad } f(tx) - J^{s-1} \text{grad } f(tx)\|}{\|tx\|^{s-1}} dt \end{aligned}$$

Da definição de jato $s-1$ segue-se imediatamente que o limite da última expressão quando x tende a O é 0 o que mostra a igualdade desejada, já que claramente P tem grau menor ou igual a s .

Para terminar a prova observamos inicialmente que se $1 \leq j \leq n$ e $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$, então definindo os germes:

$$\begin{aligned} G_j &= J^{s-1} \frac{\partial f}{\partial x_j} \\ f &= P + R \\ \frac{\partial f}{\partial x_j} &= G_j + \hat{R}_j \end{aligned}$$

o que queremos provar é que $\frac{\partial P}{\partial x_j} = G_j$.

É fácil ver que:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x - x_j e_j) + \int_0^{x_j} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x - x_j e_j + t e_j) dt \\ &= (P + R)(x - x_j e_j) + \\ &\quad + \int_0^{x_j} (G_j + \hat{R}_j)(x - x_j e_j + t e_j) dt. \end{aligned} \quad (**)$$

Façamos agora a observação que:

$$\|x - x_j e_j + t e_j\| \leq \|x\| \quad \forall t \in [0, x_j]$$

o que, como $J^{s-1} \hat{R}_j = 0$, acarreta imediatamente

$$J^s \int_0^{x_j} \hat{R}_j(x - x_j e_j + t e_j) dt = 0$$

A tese obtem-se agora simplesmente calculando o jato s em ambos os membros de (**). :▷

Nosso próximo passo será mostrar a “cara” de P quando $\pi \in J(k, s)$ e P mostra que π não tem mínimo, uma vez escolhido um sistema de coordenadas conveniente.

Teorema 0.3 : Sejam π e P nas condições deste parágrafo então se escolhermos para semi-eixo dos $x'_s > 0$ uma semi-reta de $V(P)$ onde P é negativo teremos

$$P(x; y) = \sum_{j=0}^s a_j x^j y^{s-j}$$

com $a_s < 0$ e $a_{s-1} = 0$.

◁ : Das definições de P e $V(P)$ é claro que P é um polinômio homogêneo de grau s e que $a_s < 0$.

Para ver que $a_{s-1} = 0$ basta notar que nas hipóteses feitas

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x; 0) = 0 \quad \forall x \in R.$$

: ▷

O resultado seguinte é um dos mais úteis no Capítulo 1.

Teorema 0.4 : Sejam π e P nas hipóteses do Teorema 0.3 e seja $\alpha > 0$.

Definamos o conjunto

$$K_\alpha = \{(x; y) \in R^2 \mid -\alpha x \leq y \leq \alpha x, x \geq 0\},$$

e a função

$$V_\alpha: \begin{array}{ccc} R^2 & \longrightarrow & R \\ (x; y) & \longmapsto & \frac{\partial P}{\partial y}(x; y) - \alpha \frac{\partial P}{\partial x}(x; y) \end{array}$$

Então existe $\epsilon > 0$ tal que, se $\alpha < \epsilon$ há um $\beta \leq \alpha$ para o qual K_β é $(s-1)$ -resistente para V_α .

◁ : Tomemos a expressão de P dada pelo Teorema 0.3 e consideremos $\epsilon > 0$ tal que K_ϵ seja s -resistente para P (a existência de ϵ está garantida pelo Lema 0.0).

Seja $M = \left| \frac{2a_{s-2}}{sa_s} \right|$ e tomemos $\alpha \in]0; \epsilon[$.

Consideremos agora $\beta \in]0; \alpha B_\alpha[$ onde

$$B_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{se } M \leq 1 \\ \frac{1}{M} & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Afirmamos que K_β é $(s-1)$ -resistente para V_α .

Para provar isto basta, à luz do Teorema 0.1, mostrar que V_α tem mínimo forte quando restrito a K_β .

Com esse fim tomemos a função auxiliar de duas variáveis

$$F(a; b) = V_a(1; b)$$

Temos $F(0, 0) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial a}(0; 0) = a_s$, logo uma aplicação do Teorema das funções implícitas nos mostra que numa vizinhança U de O o conjunto $F^{-1}(0)$ é descrito como $(\psi(b); b)$, onde ψ é uma função diferenciável definida numa conveniente vizinhança de 0 tal que $\psi'(0) = \frac{2a_s - 2}{sa_s}$.

Vemos então, pela forma como escolhemos β que, se $(a; b) \in U \cap K_\beta$ e $(a; b) \neq O$ temos $F(a; b)F(a; 0) > 0$.

Como $F(a; 0) > 0$ para $a > 0$ concluímos que F tem mínimo forte em O quando restrita a K_β , a tese segue-se agora observando que se $(x; y) \in K_\beta$ então $y = \lambda x$ com $|\lambda| \leq \beta$ e portanto

$$V_\alpha(x; y) = x^s F(\alpha; \lambda),$$

o que encerra a prova.

:▷

A mesma demonstração acima prova igualmente o:

Teorema 0.4a : Com as mesmas notações do Teorema 0.4 temos que K_β é $(s-1)$ -resistente para:

$$\begin{array}{ccc} V^\alpha: & R^2 & \longrightarrow R \\ & (x; y) & \longmapsto \frac{\partial P}{\partial y}(x; y) + \alpha \frac{\partial P}{\partial x}(x; y). \end{array}$$

Observemos que pela forma como β foi escolhido, ele depende apenas de P e não de α , isto é, uma vez fixado P para todo α suficientemente pequeno podemos escolher β nas condições dos Teoremas acima tal que o quociente $\frac{\alpha}{\beta}$ é constante.

No que se segue suporemos ter escolhido um sistema de coordenadas como no Teorema 0.3.

No restante deste parágrafo, salvo menção explícita em contrário estaremos considerando $\pi \in C^2$.

Evidentemente devido à homogeneidade de $J^s\pi$ cada componente conexa de $(J^s\pi)^{-1}(R \setminus \{O\})$ é um cone K de vértice em O , nessas condições diremos que K é um cone simples de $J^s\pi$ se $\partial K \cap V(J^s\pi) = \{O\}$.

Em outras palavras dizemos que K é simples se, dada uma circunferência C centrada em O , os pontos de $C \cap \partial K$ são zeros "simples" de $J^s\pi|_C$ (isto é, não são pontos críticos de $J^s\pi|_C$). É totalmente imediato ver ser esta uma propriedade que não depende da particular C considerada.

Teorema 0.5 : Seja π verificando as hipóteses deste parágrafo e suponhamos ter escolhido um sistema de coordenadas como no Teorema 0.3.

Seja K a componente conexa de $(J^s\pi)^{-1}(R \setminus \{O\})$ que contém o germe de $A = \{(x; 0) \mid x > 0\}$. Uma das seguintes alternativas ocorre:

(A) $K \cap V(J^s\pi) \neq A$.

(B) $\frac{\partial J^s\pi}{\partial x}$ não se anula em $K^+ = K \cap \{(x; y) \in R^2 \mid x \geq 0\}$.

◁ : Suponhamos que (B) não ocorre, da homogeneidade de $\frac{\partial J^s\pi}{\partial x}$, existe então uma semi-reta r contida em K^+ tal que $\frac{\partial J^s\pi}{\partial x}|_r = 0$.

Além disso $J^s\pi|_r < 0$ e como $J^s\pi$ é homogêneo vem, usando a fórmula de Euler, que $J^s\pi - \langle \text{grad } J^s\pi \mid \text{Id} \rangle$, onde Id é o germe da identidade. Isto estabelece que

$$y \frac{\partial J^s\pi}{\partial y}(x; y) < 0, \text{ se } (x; y) \in r. \quad (*)$$

Observemos agora que se r estiver contida no eixo dos y ($x = 0$) então $r \in V(J^s\pi)$ e (A) vale, logo basta considerar o caso em que $x > 0$ nos pontos de r .

Admitamos que em r temos $y > 0$ (o caso em que $y < 0$ é análogo e evidentemente y nunca se anula em r). Então segue-se de (*) que

$$\left\{ (x; y); \left(\frac{\partial J^s\pi}{\partial x}(x; y); \frac{\partial J^s\pi}{\partial y}(x; y) \right) \right\}$$

é uma base negativa de R^2 (lembramos que $x > 0$).

Como A é uma semi-reta de mínimos locais de $J^s \pi$ uma aplicação do Lema 0.0 mostra que (A) ocorre e estabelece a tese. :▷

Uma consequência deste resultado que será para nós importante é o:

Corolário 0.0 : Com as notações do Teorema anterior, se K for simples então ou $\bar{K}$ é s-1 resistente para $\frac{\partial J^s \pi}{\partial x}$ ou $K \cap V(J^s \pi) \neq A$.

◁: Basta ver que se K for simples e ocorrer (B) então $\frac{\partial J^s \pi}{\partial x}$ não se anula em $K \setminus \{O\}$. :▷

Para encerrar este parágrafo sobre o caso homogêneo, restaria provar que se o primeiro jato não nulo de π mostra não ter esta mínimo e se $f \in (R^2, O; R^2, O)$ é um difeomorfismo C^1 então o germe $\pi \circ f$ tem um primeiro jato não nulo de mesma ordem que π e este também mostra que $\pi \circ f$ não tem mínimo. Tal fato entretanto é uma completa trivialidade decorrente imediatamente de que, se k é a ordem do primeiro jato não nulo de π então $J^k(\pi \circ f) = J^k \pi \circ J^1 f$, sendo o lado direito desta expressão um polinômio homogêneo de grau k . Dessa expressão vemos também imediatamente que a propriedade $J^k \pi$ ter um cone negativo simples não se altera por mudança de coordenadas.

Tão evidente (ou mais) do que a afirmação anterior é o fato de se $J^k \pi$ é homogêneo e λ é um germe de $(R^2; O)$ em $(R; a)$, com $a > 0$, que tem jato k então $\frac{\pi}{\lambda}$ tem jato k igual a $\frac{J^k \pi}{a}$. Daí decorre imediatamente que se $J^k \pi$ (homogêneo) mostra que π não tem mínimo, o mesmo vale para $\frac{\pi}{\lambda}$.

§0.4 O Caso Não Homogêneo : Trataremos agora do caso em que a informação de que π não tem mínimo está contida num jato não homogêneo.

Resulta evidente daí a existência de naturais k e s , com $2 \leq k < s$, tais que $\pi \in J_0(s; k)$ e

- 4.i $J^k \pi$ é homogêneo, não nulo e semidefinido positivo.
- 4.ii π tem sela e é s decidível.
- 4.iii π não é $s - 1$ decidível.

Faremos neste trabalho a seguinte hipótese adicional, de caráter puramente técnico:

(HT) O menor jato de π que é s -decidível é o de ordem s .

Conseguiremos nestas condições um resultado similar ao Teorema 0.1.

Antes disso porém, daremos um exemplo para mostrar que 4.i, 4.ii e 4.iii não implicam (HT).

Contra Exemplo : Seja p o seguinte germe em R^2

$$p(x; y) = y^4 - x^4 y + x^4 y^2.$$

Afirmamos que p não é 5-decidível pois a origem é um ponto de mínimo local de $f(x; y) = J^5 p(x; y) + x^{5.2}$.

De fato, para termos $f(x_0; y_0) = 0$, com $(x_0; y_0) \neq O$, é claro que $y_0 > 0$ e $x_0 \neq 0$, logo

$$J^5 p(x_0; y_0) = y_0(y_0^3 - x_0^4) = -x_0^{5.2} < 0.$$

Então devemos ter $y_0 < x_0^{\frac{4}{3}}$ (†).

Tomamos então $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno para termos $x^{5.2} > x^{\frac{16}{3}}$, se $0 < |x| < \epsilon$.

Agora é imediato ver que se x_0 está nestas condições e valer (†) temos $y_0 x_0^4 < x_0^{\frac{16}{3}} < x_0^{5.2}$, o que contraria o fato de $f(x_0; y_0) = 0$ e acarreta f ter mínimo em O .

Porém $J^5 p$ já é 6-decidível, para isto basta ver o comportamento desse polinômio ao longo da curva $y = x^{1.4}$.

Observemos, de passagem, que caso $s = 2$, então 4.ii e 4.iii acarretam imediatamente (HT). *

Usaremos aqui os seguintes resultados sobre curvas algébricas planas:

- (a) Se P é um polinômio de duas variáveis que se anula em O então numa vizinhança desse ponto o conjunto $V = P^{-1}(0) \setminus \{O\}$ tem um número finito de componentes conexas admitindo cada uma delas uma parametrização do tipo $(h_1(t); h_2(t))$, com $t \in (0; 1)$, h_1 e h_2 funções analíticas tais que $\lim_{t \rightarrow 0} h_i(t) = 0$, $i = 1, 2$ e além disso se H_i é a extensão contínua de h_i a $[0; 1)$ então H_i é analítica, $i = 1, 2$.
- (b) Caso, nas condições do item anterior, uma componente conexa de V seja tangente ao eixo dos x' , então essa componente pode ser parametrizada por

$$(t; t^\alpha h(t)), \quad t \in (0; \epsilon) \quad (\text{para algum } \epsilon > 0)$$

onde α é um racional maior que 1 e h é uma função analítica que pode ser estendida analiticamente a $[0; \epsilon[$; além disso se a componente em questão não for o próprio eixo dos x' , então h e α estão univocamente determinados pela condição $h(0) \neq 0$.

Neste parágrafo ser-nos-á útil a seguinte definição:

Definição 0.4 Diremos que uma função (ou germe) f definida em $[0; \omega[$ a valores em R tem ordem $\lambda > 0$ se

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^\lambda} \in R \setminus \{0\}.$$

* Para maiores detalhes sobre este exemplo ver [G-0].

O seguinte lema geral sobre k -decidibilidade terá sua importância nos resultados vindouros:

Lema 0.1 Seja $f \in J(k)(\Omega, O; R, 0)$ tal que seu jato k nos mostra não possuir esta mínimo em O . Então existe um germe de curva algébrica $\gamma \in C^\omega([0; +\infty[, 0; \Omega, O)$ com as seguintes propriedades:

A $J^k f \circ \gamma$ tem máximo forte em 0 .

B $\lim_{t \downarrow 0} \frac{J^k f(\gamma(t))}{\|\gamma(t)\|^k} < 0$ (podendo ser eventualmente $-\infty$).

A prova deste resultado é uma trivialidade técnica da qual nos dispensaremos, registremos apenas que ela se encontra essencialmente em [B-0].

Percebamos agora que se escolhermos para eixo dos x'_i positivos a semi-reta tangente a γ em 0 e escolhermos a parametrização dada em (b) na página 18 (convencionando que se γ for o próprio semi-eixo escolhemos a parametrização $(t; 0)$) vemos que a condição B se traduz (para essa parametrização) de modo equivalente por

B1 A ordem de $J^k f \circ \gamma$ é menor ou igual a k .

No futuro usaremos a condição B1, apesar de esta levar fortemente em conta a parametrização, por ser freqüentemente mais cômoda que B.

Mostraremos agora a existência, também neste caso, de uma semi-reta privilegiada que será convenientemente escolhida para eixo dos x'_i positivos.

Teorema 0.6 As propriedades 4.i a 4.iii e a hipótese (HT) acarretam a existência de uma semi-reta r tal que $\pi_j|_r = 0$ para $k \leq j < s$ e π_s tem máximo forte quando restrito a r .

<: Começemos por provar que as condições 4.i a 4.iii acarretam a existência de uma reta r onde $\pi_j|_r = 0$ para $k \leq j < s$.

Como π_k é um polinômio homogêneo com mínimo fraco em O temos que $\pi_k^{-1}\{0\}$ é uma reunião finita de retas concorrentes em O .

Tomemos K um cone tal que $\pi_k^{-1}\{0\} \cap K = \{O\}$, uma aplicação do Teorema 0.1 mostra ser ele é um cone k -positivo para π . (*)

Logo, se para toda reta $\ell \in \pi_k^{-1}\{0\}$ existisse um $j_\ell \in \{k+1; \dots; s-1\}$ tal que π_{j_ℓ} não se anulasse em ℓ então escolhendo para cada ℓ o menor j_ℓ nessas condições e depois chamando de r o maior desses números vemos que π seria r decidível, contrariando 4.iii e encerrando esta parte da prova.

Sejam então $r_1, \dots, r_p$ as retas onde todos os π_j se anulam, até $j = s-1$.

O nosso escopo agora é mostrar que

$$\pi_s^{-1}\{]-\infty; 0[\} \cap \bigcap_{1 \leq j \leq p} r_j \neq \emptyset.$$

A hipótese 4.ii acarreta pelo Lema 0.1 a existência de uma curva algébrica $\gamma \in C^\omega([0; +\infty[, 0; \Omega, O)$ tal que

$$J^s \pi \circ \gamma < 0, \text{ se } t > 0$$

e tem ordem menor ou igual a s (quando convenientemente parametrizada).

Se $J^{s-1} \pi \circ \gamma$ também tiver essas propriedades concluímos que $J^{s-1} \pi$ é s -decidível, contra a hipótese (HT).

Assim, $\pi_s \circ \gamma(t) < 0$ para $t > 0$ com ordem menor ou igual a s .

Mas de (*) segue-se que γ é tangente em O a alguma das r_j ; antes consideradas, assim escolhendo essa reta para eixo dos x'_j vamos parametrizar γ por $\gamma(t) = (t; t^\alpha p(t))$, $t \geq 0$, onde $\alpha \geq 1$ e p é uma função analítica (é com essa parametrização que valem as observações quanto à ordem).

Se γ for uma semi-reta a prova está concluída, logo vamos analisar o caso em que $p(0) \neq 0$ e $\alpha > 1$.

Como γ é tangente ao eixo dos x'_j em O vemos que $\pi_s(x; 0) \leq 0 \forall x > 0$.

Mas como π_s é um polinômio homogêneo de grau s se $\pi_s(x; 0) = 0$ resultaria imediatamente $\pi_s = yQ(x; y)$ com $Q(0; 0) = 0$ (pois $s > k \geq 2$), então como $\alpha > 1$ resultaria que a ordem de $\pi_s \circ \gamma \geq \alpha + s - 1 > s$.

Esta contradição mostra que $\pi_s(x, 0) < 0$ se $x > 0$ e impõe a tese. $\triangleright$

A partir de agora todas as vezes que falarmos em ordem de $f \circ \gamma$ estaremos supondo que γ está nas condições da observação B1 sem voltar a chamar a atenção sobre isto.

Suporemos no restante deste parágrafo ter escolhido para semi-eixo dos x'_s positivos a semi-reta r cuja existência acabamos de mostrar; nessas condições é imediato que $\pi_s(x; 0) = A_s x^s$, com $A_s < 0$.

Consideremos agora a componente conexa C de $J^s \pi^{-1}(]-\infty; 0])$ que contém o semi-eixo $\{(x; 0) \mid x > 0\}$.

Evidentemente $\partial C \setminus \{O\}$ é formado por duas componentes conexas γ_1 e γ_2 de $J^s \pi^{-1}(\{0\})$ aderentes a O e cujos germes estão contidos respectivamente no germe de $\{(x; y) \mid x > 0 \text{ e } y > 0\}$ e $\{(x; y) \mid x > 0 \text{ e } y < 0\}$.

Aplicando o que vimos sobre curvas algébricas planas podemos para $i \in \{1, 2\}$ parametrizar o fecho de γ_i numa vizinhança conveniente de O como:

$$(t; t^{\alpha_i} h_i(t)),$$

com $t \in [0; \epsilon[$ para algum $\epsilon > 0$, α_i um racional estritamente maior que 1 e h_i funções analíticas em $[0; \epsilon[$ tais que $h_1(0) > 0$ e $h_2(0) < 0$ (Lembremos que devido a nenhuma das γ_i ser o eixo dos x'_s temos α_i e h_i univocamente determinados).

Dessas parametrizações vemos que para todo natural $j \in [k; s]$, tal que $\pi_j \neq 0$ o sinal de $\pi_j \circ \gamma_i(t)$ para t próximos de 0 é determinado pelo coeficiente a_j do termo de π_j de maior expoente na variável x , chamaremos esse expoente $r(j)$ ($0 \leq r(j) \leq j$). Isto é $\pi_j = a_j x^{r(j)} Q_j(x; y)$, com $Q_j(0; y) \neq 0$.

Observemos que como consequência direta do Teorema 0.6 temos:

$$r(j) < j, \quad \text{se } k \leq j < s \text{ e}$$

$$r(s) = s.$$

A última igualdade estabelecida mostra que $A_s = a_s$ (a partir daqui abandonaremos a notação A_s).

Definamos $u_j = \pi_j \circ \gamma_1$ e escolhamos um $\delta > 0$ conveniente para que em $]0; \delta[$ nenhuma das u_j se anule.

Não é difícil ver que a ordem de u_j é $g(j) = r(j) + \alpha_1(j - r(j))$ (notemos que $g(s) = s$).

Definamos agora $I = \{j \mid g(j) \text{ é mínimo} \}$.

Como $J^s \pi \circ \gamma_1 \equiv 0$ e $J^s \pi \circ \gamma_1 = \sum_{j=k}^{j=s} u_j$, vemos que nenhum dos dois conjuntos abaixo é vazio:

$$I^+ = \{j \in I \mid a_j > 0\} \text{ e } I^- = \{j \in I \mid a_j < 0\}.$$

Notemos aqui que ainda do fato de $J^s \pi \circ \gamma_1 \equiv 0$ vale a relação:

$$\sum_{j \in I^+} a_j h_1(0)^{\alpha_1(j-r(j))} = \sum_{j \in I^-} a_j h_1(0)^{\alpha_1(j-r(j))} \quad (*).$$

Mas da forma como foi determinada γ_1 fica claro que existe $\lambda > 0$ tal que, se $\lambda < \beta < h_1(0)$ então:

$$\sum_{j \in I^+} a_j \beta^{\alpha_1(j-r(j))} < \sum_{j \in I^-} a_j \beta^{\alpha_1(j-r(j))}$$

(Se não, para pontos entre o eixo dos x'_s e γ_1 teríamos $J^s \pi > 0$, contra a definição de γ_1).

Se $s \notin I^-$ então $g(j) < s$ e a relação que acabamos de estabelecer mostra que se $M = \sup I$ então $J^M \pi$ é s -decidível e como $M \leq s - 1$ isto contraria (HT).

Provemos agora o

Teorema 0.7 Com as hipóteses e notações feitas neste parágrafo temos $I^- = \{s\}$.

◁: Como $I^- \neq \emptyset$ basta mostrar que $I^- \cap [k; s-1] = \emptyset$.

Admitamos, por absurdo, que $J = I^- \cap [k; s-1] \neq \emptyset$.

Seja então $m = \inf J$. Afirmamos que $J^m \pi$ é s -decidível.

Definamos $J^+ = \{j \in I^+ \mid j < m\}$.

Se $J^+ = \emptyset$ então $J^m \pi \circ \gamma_1$ tem máximo em 0 de ordem s o que acarretaria imediatamente $J^m \pi$ ser s -decidível, logo $J^+ = \{j_1, \dots, j_r\} \neq \emptyset$.

Consideremos as curvas $\Lambda_C = (t; Ct^{\alpha_1})$, com $C > 0$.

Temos que ordem $\pi_j \circ \Lambda_C$ é constante e maior ou igual à ordem de $\pi_l \circ \Lambda_C$ para $l \in J^+ \cup \{m\}$ (igual a s), e além disso vemos que

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{J^m \pi \circ \Lambda_C(t)}{t^s} = \sum_{j \in J^+} a_j C^{\alpha_1(j-r(j))} + a_m C^{\alpha_1(m-r(m))}.$$

Como $s = \alpha_1(j-r(j)) + r(j)$, para todo $j \in J^+ \cup \{m\}$, se tomarmos $j_p \in J^+$ temos $\alpha_1(j_p-r(j_p)) + r(j_p) = \alpha_1(m-r(m)) + r(m)$ e $j_p < m$.

Pensemos nas retas r_1 e r_2 cujas equações são respectivamente $y = (m-r(m))x + r(m)$ e $y = (j_p-r(j_p))x + r(j_p)$. Como essas duas retas se encontram num ponto de abscissa $x = \alpha_1 > 1$ e na reta $x = 1$ temos r_1 acima de r_2 (pois $m > j_p$) concluímos que

$$(m-r(m)) < (j_p-r(j_p)) \quad \forall j_p \in J^+.$$

Usando esta última expressão e o limite calculado acima vemos que para $C > 0$ suficientemente pequeno $\lim_{t \downarrow 0} \frac{J^m \pi \circ \Lambda_C(t)}{t^s} < 0$.

Isto e 4.i provam que $J^m \pi$ é s -decidível, contradizendo (HT) e mostrando que nossa hipótese de $J \neq \emptyset$ é insustentável. :▷

Vamos agora estabelecer os resultados fundamentais deste parágrafo:

Teorema 0.8 Nas mesmas hipóteses do Teorema 0.7 se para $i \in \{1, 2\}$ tivermos $\lambda_i(t) = (t; t^{\beta_i} g_i(t))$, com $\beta_i \in \mathbb{Q}$, $\beta_i > 1$, g_i germes de funções analíticas definidas em $([0; +\infty[, 0)$ tomando valores respectivamente em $(\mathbb{R}; \sigma_1)$ e $(\mathbb{R}, \sigma_2)$ com $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 < 0$ (isto é, $g_1(0) > 0$ e $g_2(0) < 0$) e além disso, para cada i uma das duas possibilidades ocorrer:

$$\beta_i < \alpha_i, \text{ ou}$$

$$\beta_i = \alpha_i \text{ e } |\sigma_i| < |h_i(0)|,$$

então o germe (π, O) terá máximo quando restrito a $(C; O)$, onde

$$C = \{(x; y) \mid x \geq 0 \text{ e } t^{\beta_2} g_1(x) \leq y \leq t^{\beta_1} g_1(x)\}.$$

◁ :Basta provar o caso em que $\beta_i = \alpha_i$ e $|\sigma_i| < |h_i(0)|$.

Seja C um representante de $(C; O)$ e tomemos

$$C^+ = \{(x; y) \in C \mid y \geq 0\}$$

$$C^- = \{(x; y) \in C \mid y \leq 0\}.$$

Consideremos π um representante de (π, O) que suporemos estar definido em C .

Vamos provar que $\pi|_{C^+}$ tem máximo em O .

De fato, utilizando todas as notações vistas anteriormente, vemos que $h_1(0)$ é a única raiz de

$$P(X) = \sum_{j \in I^+} a_j X^{\alpha_1(j-r(j))} - a_s X^{\alpha_1(s-r(s))} = 0.$$

Isto porque como $r(s) = s$, $a_s < 0$, $j - r(j) > 0$ e $a_j > 0$, para todo $j \in I^+$ temos $P(0) = a_s < 0$ e $P'(X) > 0$ para todo $X > 0$.

Logo $P(X) < 0$ para $X \in [0, \sigma'_1]$, onde $\sigma'_1 = \frac{\sigma_1 + h_1(0)}{2}$, e portanto

$$\sup_{0 \leq X \leq \sigma'_1} \{P(X)\} = m < 0.$$

Notemos que se $(x; y) \in C^+$, então existe $\sigma \in [0; \sigma'_1]$ tal que $y = \sigma x^{\alpha_1}$.

Segue-se do que fizemos para provar o Teorema 0.7 podermos escolher ϵ suficientemente pequeno para, tomando $(x; y)$ como acima, valer

$$J^s \pi(x; y) = J^s \pi(x; \sigma x^{\alpha_1}) = P(x)x^s + Q(x),$$

onde, se $\|x\| < \epsilon$ temos $|\frac{Q(x)}{x^s}| < -\frac{m}{4}$, pois a ordem de Q é estritamente maior que s (veja a definição de I o Teorema 0.7).

Definamos $R = \pi - J^s \pi$, é claro que existe $\epsilon' > 0$ tal que, caso $0 < \|(x; y)\| < \epsilon'$ vale

$$\left| \frac{R(x, y)}{\|(x; y)\|^s} \right| < -\frac{m}{4}.$$

Tomando então $(x; y) \in C^+ \cap B_\delta \setminus \{O\}$, onde $\delta = \min\{\epsilon, \epsilon'\}$, estabelecemos

$$\pi(x; y) = \pi(x; \sigma x^{\alpha_1}) = P(x)x^s + Q(x) + R(x; y),$$

e como $P(x) \leq m$ segue-se $\pi(x; y) < \frac{m}{2}x^s < 0$.

Evidentemente isto prova que $\pi|_{C^+}$ tem máximo em O .

De modo inteiramente análogo provamos que $\pi|_{C^-}$ também tem máximo em O e isto encerra a prova. :▷

Um outro resultado que nos será útil é o

Teorema 0.9 : Seja π um germe C^1 com $\text{grad } \pi \in J(s-1)$ e satisfazendo às hipóteses do Teorema 0.7, então a derivada radial de π definida por

$$D_r \pi(x; y) = \langle \text{grad } \pi(x; y) \mid (x; y) \rangle$$

também satisfaz às hipóteses do Teorema 0.7.

◁ : Observemos de início que nestas hipóteses $D_r \pi \in J(s)$ e

$$J^s D_r \pi = \langle J^{s-1} \text{grad } \pi \mid Id \rangle,$$

onde Id é o germe da aplicação identidade.

De fato, basta notar que se $u \neq 0$ temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{D_r \pi(u) - \langle J^{s-1} \text{grad } \pi(u) \mid u \rangle}{\|u\|^s} \right| &= \left| \langle \frac{\text{grad } \pi(u) - J^{s-1} \text{grad } \pi(u)}{\|u\|^{s-1}} \mid \frac{u}{\|u\|} \rangle \right| \\ &\leq \frac{\|\text{grad } \pi(u) - J^{s-1} \text{grad } \pi(u)\|}{\|u\|^{s-1}}. \end{aligned}$$

E lembrando o Teorema 0.2 estabelecemos

$$\begin{aligned} J^s D_r \pi &= \langle \text{grad } J^s \pi \mid Id \rangle \\ &= \sum_{j=k}^s j \pi_j. \end{aligned} \quad (**)$$

Provemos agora que $D_r \pi$ satisfaz as condições 4.i, 4.ii, 4.iii e (HT) deste parágrafo.

Evidentemente $D_r \pi$ verifica 4.i e 4.ii.

Admitamos, por absurdo, que $D_r \pi$ não satisfaz 4.iii, como pelo Teorema 0.6 π_j se anula nas semi-retas $r_1, \dots, r_p$, para $1 \leq j \leq s-1$, temos que $(D_r \pi)_j$ também se anula aí para esses j'_s , assim $D_r \pi$ seria uma sela $s-1$ decidível.

Logo, existiria uma curva algébrica γ nas condições do Lema 0.1 (fazendo naquele enunciado $k = s-1$) cuja tangente em 0 é uma das semi-retas

$r_1, \dots, r_p$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que essa semi-reta é o semi-eixo $\{(x; 0) : x \geq 0\}$, e escrevamos $\gamma(t) = (t; t^\alpha h(t))$, nas condições deste parágrafo.

Vamos também supor que $h(0) > 0$ o que, como ficará claro pela continuação da prova, não causará perda de generalidade alguma.

Sejam $f = D_r J^{s-1} \pi \circ \gamma$ e g a ordem de f .

Temos $f = \sum b_r t^r$, onde os r 's percorrem um conjunto de racionais maiores ou iguais a g , e além disso $b_g < 0$.

De $(*)$ vemos que $f = \sum_{j=k}^{s-1} (j \pi_j \circ \gamma)$.

Como $\pi_j = \sum_{l=0}^j b_l x^l y^{j-l}$ vemos que a ordem de $j \pi_j \circ \gamma$ é determinado pelo termo $b_{n_j} x^{n_j} y^{j-n_j}$ de π_j tal que $n_j = \max \{l \in N \mid b_l \neq 0\}$. Denotaremos por $d(j)$ e $e(j)$ respectivamente o coeficiente e o expoente de y deste termo e por $c(j)$ a ordem de $j \pi_j \circ \gamma$.

O fato de $b_g < 0$ mostra que o seguinte subconjunto de N é não vazio e, portanto, unitário.

$$I = \{j \in N \cap [k; s-1] \mid d(j) < 0 \text{ e } c(j) \leq c(l), \text{ se } k \leq l < j\}.$$

Seja l_0 o único elemento de I e definamos

$$I^+ = \{j \in N \cap [k; l_0 - 1] \mid c(j) - c(l_0)\}$$

(eventualmente $I^+ = \emptyset$).

Consideremos a família de curvas $\{\gamma_a(t) = (t; at^\alpha) \mid a \in R^+\}$.

Da discussão anterior fica claro que para todo $a > 0$

$$J^{l_0} \pi \circ \gamma_a(t) = \left(\sum_{j \in I^+} d(j) a^{e(j)} + d(l_0) a^{e(l_0)} \right) t^{e(l_0)} + R(t),$$

onde

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{R(t)}{t^{\epsilon(l_0)}} = 0.$$

Como $\alpha > 1$ e para todo $j \in I^+$ temos

$$\alpha e(j) + (j - \epsilon(j)) = \alpha e(l_0) + (l_0 - \epsilon(l_0)),$$

e em consequência $e(l_0) < e(j)$ (lembramos que $j < l_0$).

Assim segue-se imediatamente

$$\lim_{a \downarrow 0} \sum_{j \in I^+} d(j) a^{e(j)} + d(l_0) a^{e(l_0)} = d(l_0).$$

Como $d(l_0) < 0$ e $e(l_0) \leq s - 1$ teríamos $J^{l_0} \pi$ s decidível, contrariando (HT) e mostrando, finalmente, ser absurdo admitirmos que $D_r \pi$ não satisfaz 4.iii.

Uma repetição dos mesmos argumentos que acabamos de apresentar, com modificações óbvias, mostra que $D_r \pi$ também satisfaz (HT); pouparemos ao leitor a chatice de ver essa repetição. :▷

Vamos continuar trabalhando num sistema de coordenadas no qual $J^s \pi(x; 0) = a_s x^s$, com $a_s < 0$ e nas hipóteses do Teorema 0.9.

Denotemos K_0 e K_1 , respectivamente, as componentes conexas de $(J^s \pi)^{-1}([-\infty; 0])$ e $(J^s(D_r \pi))^{-1}([-\infty; 0])$ que contém o semi-eixo dos x'_s positivos.

Temos que $\partial K_i \setminus \{O\}$ é formado por duas componentes conexas, γ_i^+ e γ_i^- , cujos fechos podem ser parametrizados por $(t; t^{\alpha_i^+} h_i^+(t))$ e $(t; t^{\alpha_i^-} h_i^-(t))$, com $t \in [0; \omega]$, as funções h'_i analíticas em $[0; \omega]$ com $h_i^+(t) > 0$ e $h_i^-(t) < 0$, e os α'_i números racionais estritamente maiores que 1 ($i = 0; 1$).

Consideremos agora os conjuntos I_r^+ e I_r^- construídos para o germe $J^s D_r \pi$, como I^+ e I^- o foram para $J^s \pi$ no Teorema 0.7.

Usando o Teorema 0.7 juntamente com o Teorema 0.9 vemos imediatamente que $I_r^- = I^- = \{s\}$.

Isso, a relação (**) estabelecida no último resultado e a própria demonstração do Teorema 0.7 mostram que $I_r^+ = I^+$.

Logo, podemos concluir que:

$$\alpha_0^+ = \alpha_1^+ \text{ e } \alpha_0^- = \alpha_1^-.$$

Além disso, lembrando agora de (*) (pag. 22), (**) e dos dois Teoremas supra-referidos, estabelecemos facilmente que

$$|h_0^-(0)| < |h_1^-(0)| \text{ e } |h_0^+(0)| < |h_1^+(0)|.$$

De fato, como os conjuntos I^+ e I^- são os mesmos para π e $D_r\pi$ temos que (veja a prova do Teorema 0.8) h_0^+ e h_1^+ são a única raiz positiva, respectivamente, de

$$\sum_{j \in I^+} a_j X^{\alpha(j-r(j))} - a_s X^{\alpha s} = 0$$

e

$$\sum_{j \in I^+} j a_j X^{\alpha(j-r(j))} - s a_s X^{\alpha s} = 0,$$

onde $\alpha = \alpha_0^+ = \alpha_1^+$.

Daqui segue-se imediatamente que $0 < h_0^+ < h_1^+$.

Um raciocínio análogo mostraria a outra desigualdade desejada.

Estas relações estabelecidas muito mais a partir das provas dos Teoremas 0.7 e 0.9 permitem escrever o

Escólio 0.0 : Com as hipóteses do Teorema 0.9 se C_0 e C_1 são respectivamente os germes na origem das componentes conexas de $\pi^{-1}(|-\infty; 0|)$

e $(D_r\pi)^{-1}([-\infty; 0])$ que contém o germe $(\{(x; 0) \mid x > 0\}; O)$, temos que $(C_0; O) \subset (C_1; O)$.

◁ : Com as notações que acabamos de ver tomemos $H^+ = \frac{h_0^+ + h_1^+}{2}$, o germe de curva

$$\gamma^+(t) = (t; H^+ t^{\alpha_0^+})$$

e o germe na origem de

$$C = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ e } 0 \leq y \leq H^+ x^{\alpha_0^+}\}.$$

Denotemos por C_0^+ e C_1^+ a intersecção de C_0 e C_1 com o primeiro quadrante (fechado).

Vemos que

- (i) $J^s\pi \circ \gamma^+$ tem mínimo forte em O e sua ordem é menor ou igual a s , logo $\pi \circ \gamma$ também tem mínimo forte em O , isto mostra que $(C_0^+; O) \subset (C; O)$.
- (ii) Usando o Teorema 0.8 e as duas relações estabelecidas antes de enunciarmos este escólio, em restrita a $(C; O)$, $D_r\pi$ tem máximo forte em O , isto é, $(C; O) \subset (C_1^+; O)$.

Um raciocínio análogo para os pontos dos germes envolvidos onde $y < 0$ estabelece a tese.

:▷

CAPÍTULO 1

TEOREMAS DE INSTABILIDADE

§1.0 - Introdução Nosso escopo neste capítulo é provar os Teoremas de Instabilidade citados na Introdução deste trabalho.

As técnicas envolvidas nas demonstrações feitas aqui são essencialmente distintas daquelas que vêm sendo utilizadas para provar resultados nesta área mais recentemente. Tanto quanto sabemos, desde o tempo de Liapunoff no início do século não se procura usar as informações contidas num jato finito da Energia Potencial num ponto crítico para concluir propriedades acerca da Estabilidade de Liapunoff no ponto de equilíbrio correspondente (sem lançar mão de argumentos de analiticidade).

Sem dúvida o fato do conceito de k -decidibilidade ser apenas de apenas de 1980 e o trabalho em que ele é introduzido não se relacionar com estabilidade é uma razão forte para isso ocorrer já que sem essa ferramenta é muito difícil conectar as informações disponíveis.

Uma vez que, como vimos no Capítulo anterior, as técnicas para provar que certos conjuntos são " k -resistentes" é completamente diferente, conforme o jato k seja ou não homogêneo, não é de surpreender o fato de

também na prova dos Teoremas de instabilidade se apresentem técnicas distintas para esses dois casos.

Porém são de registrar-se os fatos de que *em todos os casos onde logramos conseguir algo, o conjunto usado tinha em seu interior uma reta* e, além disso se considerarmos as noções de cone negativo simples, referente ao caso homogêneo, e as observações feitas após o Teorema 0.9 (veja a pag. 29) e o próprio Escólio 0.0, vemos que de uma certa forma K_0 , que é a componente conexa de $(J^s\pi)^{-1}([-\infty; 0])$ que contém o semi-eixo dos x'_s positivos também é um conjunto "simples" (no mesmo sentido dado aos cones).

Note-se também a importância de trabalhar em R^2 quando:

- (i) nos valem do fato, no caso homogêneo, de que podemos considerar apenas a Energia Cinética Euclidiana, sem perder com isso generalidade (v. Teorema 1.0), aliás este teorema é praticamente o único ponto deste trabalho em que usamos um resultado sem fazermos sua demonstração remetendo o leitor a uma bibliografia adequada. Fizemos isto por achar que incluir aqui a prova deste resultado, bastante conhecido de geometria diferencial, quebraria um pouco a unidade do texto e o tornaria desnecessariamente longo;
- (ii) no caso não homogêneo usamos, de maneira abusiva, a descrição de componentes conexas de conjuntos algébricos de dimensão 1, e o fato de que em R^2 todos os conjuntos algébricos não triviais tem essa dimensão. Entretanto neste caso todas as dificuldades envolvidas em tentar superar esta restrição envolvem "apenas" conceitos de k decidibilidade e conjuntos algébricos, enquanto no caso homogêneo existe o agravante de ser usado o Teorema 1.0 (que parece ser uma barreira bem mais "conceitual"), e este obstáculo parece ser, a nosso ver, mais difícil de remover.

§1.1 - O caso homogêneo: Neste parágrafo trabalharemos com um germe de Energia Potencial $\pi \in C^2 \cap J(s)$, onde $J^{s-1}\pi = 0$ e $J^s\pi$ mostra que π não tem mínimo. Suporemos também que $\text{grad } \pi \in J^{s-1}$.

Consideraremos ainda que T é uma Energia Cinética de classe C^∞ .

O seguinte resultado de geometria será usado sem demonstração

Teorema 1.0 : Existe um sistema de coordenadas onde a Energia Cinética T toma a forma

$$T(q; \dot{q}) = \frac{1}{2} \lambda(q) \|\dot{q}\|^2,$$

onde λ é uma função positiva (estritamente) C^∞ (Coordenadas Isotermicas).

Para uma demonstração deste fato o leitor, entre outros, pode consultar [C-0].

Mostremos ainda que, num certo sentido, podemos supor $\lambda = 1$.

Para ver isto consideremos que a partir das coordenadas lagrangianas $(q; \dot{q})$ construímos as coordenadas de Hamilton $(q; p)$.

É claro que para estudar a estabilidade de um ponto crítico, não faz a mais mínima diferença usar as equações de Lagrange ou de Hamilton, ademais se em coordenadas lagrangianas $T(q; \dot{q}) = \frac{1}{2} \lambda(q) \|\dot{q}\|^2$, em coordenadas de Hmilton temos

$$\tilde{T}(q; p) = \frac{1}{2} \lambda(q) \|p\|^2.$$

Assim se λ está nas condições acima e H e H_1 são as hamiltonianas associadas respectivamente a $L(q; \dot{q})$ e $L_1(q; \dot{q}) = \lambda(q)L(q; \dot{q})$ então $H_1(q; p) = \lambda(q)H(q; p)$.

O que mostraremos agora é que dois sistemas Hamiltonianos que diferem por uma função positiva das coordenadas q tem "mesmas trajetórias" de Energia nula, mais precisamente provaremos o:

Lema 1.0 : Sejam π uma Energia Potencial, T uma Energia Cinética e ϕ uma função estritamente positiva definidas num aberto U de R^n .

Consideremos os sistemas Hamiltonianos de hamiltonianas $H = T + \pi$ e $H_1 = \phi H$.

Então as trajetórias de Energia Total nulas, de H e H_1 , diferem apenas por uma reparametrização do tempo.

◁ :Basta tomar $(q(t); p(t))$ uma solução do sistema de hamiltoniana H e definir

$$(\bar{q}(t); \bar{p}(t)) = (q(\int_0^t \phi(q(\sigma)) d\sigma); p(\int_0^t \phi(q(\sigma)) d\sigma)).$$

É imediato que $(\bar{q}(t); \bar{p}(t))$ é uma solução do sistema de hamiltoniana H_1 . :▷

Usando o Lema 1.0, as observações feitas sobre equações de Lagrange e Hamilton e o fato de que estabilidade de um ponto crítico é invariante por mudança de coordenadas segue-se imediatamente o:

Corolário 1.0 : Seja $L = T - \pi$ um germe de lagrangiana dado e seja L_1 o germe que se obtém passando primeiro para Coordenadas Isotérmicas e depois dividindo o “novo Lagrangiano” pelo fator positivo em q da Energia Cinética escrita naquelas Coordenadas.

Se a origem for um ponto de equilíbrio instável segundo Liapunoff para o sistema de lagrangiana L_1 e isso for observado usando apenas trajetórias de Energia Total nula, então a origem será igualmente instável para o sistema de lagrangiana L .

A partir de agora, neste parágrafo chamaremos (S) ao sistema de equações de Lagrange para uma Energia Potencial π e a Energia Cinética

euclidiana (neste caso as equações de Hamilton e Lagrange empatam), ou seja,

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= -\frac{\partial \pi}{\partial x} \\ \tilde{y} &= -\frac{\partial \pi}{\partial y}.\end{aligned}$$

Daremos agora uma definição.

Definição 1.0 Seja $A \subset \Omega$, onde Ω é o domínio de π e $q \in \partial A$. Dizemos que q é um *ponto de retorno de A* relativamente a (S) se existir alguma solução ϕ de (S) e um $T > 0$ tais que:

- (i) $\phi(t)$ é um ponto do interior de A , se $0 \leq t < T$.
- (ii) $\phi(T) = q$.
- (iii) Existe $\rho > 0$ tal que, se $t \in]T; T + \rho[$ então $\phi(t)$ está de novo no interior de A .

Estabeleçamos agora alguns lemas:

Lema 1.1 Seja π nas condições deste parágrafo, se $J^s \pi$ tem uma semi-reta de máximos locais negativos então a origem é um ponto de equilíbrio instável de (S).

◁ :Vamos fazer a demonstração por absurdo.

Tomemos um representante da Energia Potencial ao qual continuaremos a chamar π , definida no aberto U , e seja r a semi-reta de máximos locais negativos de $J^s \pi$.

Seja K um cone satisfazendo as condições do Lema 0.0.

Escolhemos então $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno para termos em $\partial K \setminus \{O\} \cap B_\epsilon$ o gradiente de π "aponte para fora" de K , e além disso π e $D_r \pi$ sejam estritamente negativas quando restritas a esse conjunto (notemos que se K é s resistente para $J^s \pi$ também o é para $J^s D_r \pi = s J^s \pi$, pelo Teorema 0.7), além disso admitiremos que $\overline{B_\epsilon} \subset U$.

A partir de agora chamaremos K ao conjunto $K \cap B_\epsilon$.

Dáí segue-se imediatamente que nestas condições nenhum ponto de $\partial K \setminus \{O\}$ é de retorno para (S).

Agora, pela nossa hipótese de absurdo existe um $\lambda \in]0; \epsilon[$ tal que se $u_0 = (x_0; y_0; \dot{x}_0; \dot{y}_0) \in B_\lambda$, a solução de (S) que em $t = 0$ passa por u_0 ficaria em B_ϵ no futuro.

Escolhemos $\delta \in]0; \frac{\lambda}{2}[$ e consideremos os conjuntos:

$$C(\delta; \epsilon) = \{(x; y) \in K \mid \delta \leq \|(x; y)\| \leq \epsilon\}$$

$$S(\delta) = K \cap C(\delta; \epsilon)$$

$$L(\delta; \epsilon) = \{(x; y) \in \partial K \mid \delta < \|(x; y)\| < \epsilon\}$$

$$F(\delta) = S(\delta) \cap \partial K.$$

Para cada $q \in S(\delta)$ escolhemos $\dot{q} = \dot{q}(q) \in R^2$ de modo contínuo tal que :

- (i) $\|(q; \dot{q})\| < \delta$;
- (ii) $H(q; \dot{q}) = 0$;
- (iii) Nos pontos $q \in F(\delta)$ o vetor $\dot{q}$ "aponta para fora" de K (Note que há exatamente 2 pontos em $F(\delta)$);
- (iv) Se $q \in S(\delta)$ o vetor $\dot{q}$ "aponta para fora de B_δ " (isto é, se K está contido na reunião do I e IV quadrantes, $\langle q \mid \dot{q} \rangle > 0$) (percebamos que, evidentemente, sempre podemos fazer uma escolha nestas condições).

Chamemos A ao conjunto dos pares $(q; \dot{q}(q))$ assim obidos.

Da maneira como escolhemos K segue-se imediatamente que solução ϕ_q de (S) tal que $(\phi_q(0); \dot{\phi}_q(0)) = (q; \dot{q}(q))$, onde $(q; \dot{q}) \in A$, deve deixar

$C(\delta; \epsilon)$ (basta calcular a derivada de $\|\phi_q\|^2$) e da nossa hipótese de absurdo vemos que isso deve ocorrer por um ponto de $L(\delta; \epsilon)$.

Logo, para todo $q \in S(\delta)$ existe $T = T_q \geq 0$ tal que $\phi_q(T) \in L(\delta; \epsilon)$ e $\phi_q(t) \in C(\delta; \epsilon)$, se $t \in [0; T]$. Notemos também que exceto para os dois pontos de $F(\delta)$ temos $T_q > 0$.

Como nenhum ponto de $L(\delta; \epsilon)$ é de retorno para $C(\delta; \epsilon)$ relativamente a (S), segue-se do Teorema da dependência contínua das soluções de uma equação diferencial ordinária relativamente a condições iniciais que a aplicação

$$\begin{aligned} D : S(\delta) &\longrightarrow L(\delta; \epsilon) \\ q &\mapsto D(q) = \phi_q(T_q) \end{aligned}$$

é contínua.

Além disso, se $q \in F(\delta)$ evidentemente $D(q) = q$, logo tomando P a projeção natural de $L(\delta; \epsilon)$ em $F(\delta)$ teríamos $P \circ D$ de $S(\delta)$ em $F(\delta)$ contínua e restrita a $F(\delta)$ a identidade.

O Teorema de Brouwer do ponto fixo mostra que isto não pode ocorrer e esta contradição estabelece a tese. :▷

Como as soluções ϕ_q tem Energia nula pelas observações feitas no início desta secção não há perda de generalidade alguma em supor a Energia Cinética euclidiana. Notemos também que o fato de $F(\delta)$ ter dois pontos não foi fundamental, os fatos realmente relevantes foram:

- (I) $S(\delta)$ é homeomorfo a $[0; 1]$ e $F(\delta)$, é o "bordo" de $S(\delta)$, o que permitiu o conveniente uso do Teorema de Brouwer.
- (II) Em $L(\delta; \epsilon)$ o vetor $-\text{grad } \pi$ "aponta para fora" de K , absolutamente essencial para garantir que D é contínua.

(III) A associação $q \mapsto \dot{q}(q)$ ser contínua e os pares $(q; \dot{q})$ tomados satisfazerem (i), (iii) e (iv) (e sempre é possível escolher $\dot{q}$ convenientemente para isto ocorrer).

Lema 1.2 : Seja π nas condições deste parágrafo e considere um sistema de coordenadas dado pelo Teorema 0.3, então se $|sa_s| > |2a_{s-2}|$, a origem é um ponto de equilíbrio instável de (S).

◁ : Observemos que pelos Teorema 0.4 e 0.4a nessas condições podemos tomar (com as notações daqueles Teoremas) $\beta = \alpha$, o que mostra ser K_α $s-1$ resistente para V^α e V_α .

Seja então um representante da energia potencial, definida na vizinhança aberta U de O , que, como sempre, ainda será denotado π .

Escolhamos agora $0 < \alpha < \epsilon$ suficientemente pequenos para que em $K_\alpha \setminus \{O\} \cap B_\epsilon$, as funções π , $D_r \pi$, V^α e V_α não troquem de sinal e também $\overline{B_\epsilon} \subset U$.

Como no Lema anterior, daqui até o final desta prova, indicaremos por K o conjunto $K_\alpha \cap B_\epsilon$.

Tomemos $(x_0; 0) \in K$, $\dot{x}_0 > 0$ com $H(x; 0; \dot{x}_0; 0) = 0$ e denotemos $\phi = (\phi_1; \phi_2)$ à solução de (S) tal que $(\phi(0); \dot{\phi}(0)) = (x_0; 0; \dot{x}_0; 0)$.

Analizando o que ocorre com a derivada de $\|\phi\|^2$ vemos que ϕ deve deixar K e o faz num ponto de norma maior que x (logo sua primeira coordenada deve ser positiva).

Assim o ponto $(\bar{x}; \bar{y})$ em que ϕ abandona K satisfaz a uma das seguintes propriedades:

- (A) $\bar{y} = \alpha \bar{x}$
- (B) $\bar{y} = -\alpha \bar{x}$
- (C) $\|(\bar{x}; \bar{y})\| = \epsilon$.

Caso (A) ocorra existe um instante $T > 0$ tal que

- (i) $\phi(t) \in K$, para todo $t \in [0; T]$ e
- (i) $\dot{\phi}_2(T) = \alpha \dot{\phi}_1(T)$.

Considere agora a função auxiliar

$$W(x; y; \dot{x}; \dot{y}) = \dot{y} - \alpha \dot{x}.$$

Um cálculo imediato mostra que $\dot{W}(x; y; \dot{x}; \dot{y}) = V_\alpha(x; y)$ (aqui $\dot{W}$ é a derivada "no sentido de Liapunoff").

Como $W(x_0; 0; \dot{x}_0; 0) < 0$ e $V_\alpha < 0$ em $K \setminus \{O\}$, por (i) concluímos $W(\phi(T); \dot{\phi}(T)) < 0$, contra (ii) e mostrando que (A) não pode ocorrer.

De um modo análogo (trocando V_α por V^α) vemos que (B) igualmente não pode ocorrer.

Assim somos obrigados a concluir que (C) ocorre.

Percebendo agora que para todo $\delta > 0$ existe $x_0 \in]0; \delta[$ tal que se $\dot{x}_0$ verifica $H(x_0; 0; \dot{x}_0; 0) = 0$ temos $|\dot{x}_0| < \delta$, vemos do fato de ϵ estar fixado que nossa última conclusão acarreta imediatamente a tese. :▷

Juntando os dois Lemas anteriores obtemos o

Lema 1.3 : Seja π nas condições desta secção e seja K uma componente conexa de $(J^s\pi)^{-1}(]-\infty; 0])$ tal que $V(J^s\pi) \cap K$ tem pelo menos duas componentes conexas.

Nessas condições a origem é um ponto de equilíbrio instável de (S), além disso essa instabilidade pode ser detetada usando apenas soluções de Energia Total nula.

◁ : Cada componente conexa de $V(J^s\pi) \cap K$ é uma semi-reta de origem O .

Como existem pelo menos duas dessas componentes, pelo menos uma não é uma semi-reta de mínimos de $J^s\pi$ (dados dois pontos críticos consecutivos de uma função, pelo menos um deles não é de mínimo), seja r essa semi-reta.

Se r for uma semi-reta de máximos então pelo Lema 1.2 segue-se a tese.

Se r não é nem de máximos nem de mínimos, fazendo uma rotação, podemos supor que r é o semi-eixo dos x' , positivos, assim escrevendo nesse

sistema de coordenadas usando o Teorema 0.3 vem $J^s \pi = \sum_{j=0}^s a_j x^j y^{s-j}$, com $a_s < 0$ e $a_{s-1} = 0$

Mas do fato de r não ser nem de mínimos nem de máximos temos $a_{s-2} = 0$ e o Lema 0.1 estabelece a tese. :▷

Finalmente estamos prontos para estabelecer o principal resultado desta secção.

Teorema 1.1 : Seja π um germe de Energia Potencial nas condições estabelecidas no início deste parágrafo e além disso admitamos que exista um *cone simples negativo* de $J^s \pi$.

Seja ainda T um germe de Energia Cinética de classe C^2 .

Então a origem é um ponto de equilíbrio instável segundo Liapunoff do sistema mecânico de lagrangiana $L = T - \pi$.

◁ : Como o fato de $J^s \pi$ ter um cone simples negativo não é alterado por mudança de coordenadas nem por multiplicação por funções positivas podemos considerar o sistema (S) de lagrangiana $L_1 = T_1 - \pi_1$, obtido da forma descrita no início desta secção, e π_1 ainda será tal que $J^s \pi$ possui um cone simples negativo.

Se provarmos então que a origem é um ponto de equilíbrio instável para (S) usando soluções de Energia Total nula, seguir-se-à a tese.

Seja K o cone simples negativo de $J^s \pi_1$, se $V(J^s \pi_1) \cap K$ tiver pelo menos duas componentes conexas, o Lema 1.3 estabelece imediatamente o resultado desejado.

Admitamos então que $V(J^s \pi_1) \cap K$ tenha exatamente uma componente conexa r e admitamos, sem perda de generalidade, que r seja o semi eixo dos x' , positivos.

Seja então π_1 um representante do germe de mesmo nome, definido na vizinhança aberta da origem U e admitamos que se $(x; 0) \in U$ com $x > 0$ então $\pi_1(x; 0) < 0$.

Seja K_0 a componente conexa de $\pi_1^{-1}(]-\infty; 0])$ que contém o semi-eixo dos x' positivos.

Pelo Teorema 0.5, existe $\epsilon > 0$ tal que se

$$(x; y) \in A = K_0 \setminus \{O\} \cap \{(x; y) \in U \mid x > 0\} \cap B_\epsilon$$

então $\frac{\partial \pi}{\partial x} < 0$.

Tomemos $(x_0; 0) \in A$ e $\dot{x}_0 > 0$ tal que $H(x_0; 0; \dot{x}_0; 0) = 0$ e seja $\phi = (\phi_1; \phi_2)$ a solução de (S) satisfazendo à condição inicial $(\phi(0); \dot{\phi}(0)) = (x_0; 0; \dot{x}_0; 0)$.

Como $\dot{\phi}(0) > 0$ vemos que ϕ não pode permanecer indefinidamente em A , pois como nesse conjunto $\frac{\partial \pi}{\partial x} < 0$, teríamos $\phi_1(t) \geq t\dot{x}_0$, contra o fato de A ser limitado.

Se $(x; y) \in \partial A$, o ponto por onde ϕ primeiro abandona A , no instante $T > 0$. Uma das seguintes coisas ocorre:

- (I) $\pi_1(x; y) = 0$,
- (II) $x = 0$,
- (III) $\|(x; y)\| = \epsilon$.

Mas (I) não pode ocorrer pois como $\dot{\phi}_1(t) > 0$ até esse instante, teríamos $H(x; y; \dot{\phi}(T)) > 0$, contra o fato de ϕ ser uma solução de Energia Total nula.

Claramente, (II) também leva a um absurdo, pois $x > x_0 > 0$ (já que até aí ϕ estava em A).

Logo impõe-se (III) e isto mostra que a origem é um ponto de equilíbrio instável de (S) (exatamente com a mesma argumentação do final do Lema 1.2). Como usamos para isso soluções de Energia Total nula, segue-se a tese. :▷

Para encerrar este parágrafo, gostaríamos de fazer duas observações.

Primeiro, a propriedade $J^s \pi$ ter um cone negativo simples é, no mundo dos jatos homogêneos de grau s que mostram que π não tem mínimo, "genérica".

De fato, seja $M(s)$ o conjunto dos germes C^2 tais que seu jato de ordem $s-1$ é nulo e o jato s contém a informação desejada.

Considere em $M(s)$ a relação de equivalência $f \sim g$ se $J^s f = J^s g$.

Claramente $\frac{M(s)}{\sim}$ pode ser identificado com um subconjunto dos polinômios homogêneos de grau s e portanto com um subconjunto de R^{s+1} (identificando $\sum_{j=0}^s a_j x^j y^{s-j}$ com $(a_0; a_1; \dots; a_s)$).

Considerando $U(s) = \frac{M(s)}{\sim}$ com a topologia induzida de R^{s+1} vemos que $U(s)$ é um aberto de R^{s+1} e que se

$$M_0(s) = \{f \in M(s) \mid J^s f \text{ tem um cone negativo simples}\},$$

então $U_0 = \frac{M_0}{\sim}$ contém o seguinte conjunto de $U(s)$:

$$A = \{f \in U(s) \mid R(f) \neq 0\},$$

onde $R(f)$ é o discriminante de f .

Como é bem sabido que A é um subconjunto genérico de U_0 segue-se a nossa primeira observação.

Por último, se $s = 2$ o Lema 1.2 e o Teorema 1.1 cobrem todos os casos possíveis pois, se $J^2 \pi$ mostra que π não tem mínimo, então $J^2 \pi$ tem sela ou é semi-definido positivo.

No primeiro caso é muito fácil ver que então a única componente conexa de $(J^2 \pi)^{-1}(-\infty; 0]$ é um cone simples negativo, portanto aplica-se o Teorema 1.1.

Se $J^2 \pi$ é semi-definido positivo então usando uma rotação ele se escreve como x^2 e uma aplicação o Lema 1.2 tem suas hipóteses verificadas

(notemos que $J^2\pi$ ser semi-definido positivo é uma propriedade invariante por mudança de coordenadas e multiplicação por funções positivas).

Nesse sentido podemos afirmar que o clássico Teorema de Liapunoff sobre instabilidade detectada pelo jato 2, é, no caso de 2 graus de liberdade, uma situação particular dos resultados expostos neste parágrafo.

§ 1.2 - Um Caso de Instabilidade Detectada por Jatos não Homogêneos

Neste parágrafo combinamos os resultados da secção 0.4 com um resultado clássico de Tchetaev obtendo assim o Teorema 1.2.

Usaremos de agora até o final deste capítulo todas as notações envolvidas no parágrafo 0.4.

Começemos por enunciar o Teorema de Tchetaev que será usado na prova do nosso resultado (para uma demonstração veja [L-0]).

Teorema de Tchetaev : Sejam Ω um aberto do R^n ao qual a origem pertence e $\pi : \Omega \rightarrow R$ de classe C^2 com um ponto crítico em O . Considere T uma Energia Cinética definida em $\Omega \times R^n$ e o sistema lagrangiano $L = T - \pi$.

Se o conjunto $\pi^{-1}]-\infty; 0[$ tiver uma componente conexa U aderente a O tal que

$$\langle q \mid \text{grad } \pi(q) \rangle < 0, \forall q \in U,$$

então a origem é um ponto de equilíbrio instável de L .

Com isso vamos mostrar o:

Teorema 1.2 : Sejam π um germe C^2 satisfazendo às hipóteses do Teorema 0.12 e T uma energia cinética, então a origem é um ponto de equilíbrio instável do sistema mecânico de lagrangiana $L = T - \pi$.

◁ :Basta ver que pelo Escólio 0.0 valem as hipóteses do Teorema de Tchev, para seguir-se, sem mais, a tese. : ▷

Antes de encerrar este Capítulo faremos apenas a observação de que o Teorema 1.2 tem um corolário de “interpretação mecânica” interessante.

Corolário 1.1 : Seja $\pi \in J(s; k)$ uma Energia Potencial C^2 com $\text{grad } \pi$ tendo jato $s-1$, tal que:

- (i) $J^r \pi$ é semi-definido positivo para $k \leq r < s$ e $J^k \pi$ é não nulo.
- (ii) π tem sela s -decidível.

Então se T é uma Energia Cinética, a origem é um ponto de equilíbrio instável segundo Liapunoff do sistema lagrangiano $L = T - \pi$.

◁ :É óbvio que (i) e (ii) acarretam as hipóteses do Teorema 1.2. : ▷

Para encerrar gostaríamos de fazer um pequeno comentário, é um fato, no nosso entender estranho, que as hipóteses do Teorema sobre jatos não homogêneos sejam até mais naturais do que aquelas verificadas no caso homogêneo, uma vez que não há neste caso referências sobre “cones simples”.

Temos a esperança de que uma contornadas certas dificuldades técnicas o Teorema que deve se impor é simplesmente, “Se o primeiro jato que não for semidefinido positivo tiver ordem s e for s decidível então a origem é instável”.

Por último gostaríamos de observar que levando em conta o Teorema 0.6, caso $\pi \in J(s+1; s)$ e o $J^s \pi$ seja homogêneo, semidefinido positivo e não nulo, então, genericamente, π é $s+1$ decidível (basta que a resultante de π_s e π_{s+1} seja não nula) e portanto ou π tem mínimo forte em O (e nesse caso é claro que nenhum jato de π vai conter a informação de que π não

tem mínimo) ou π tem sela e vemos imediatamente estarmos nas hipóteses do Corolário 1.1, podendo assim garantir a instabilidade de O .

Isto mostra que nosso Teorema 1.2, e mesmo seu caso particular, o Corolário 1.2, são “genéricos” no mundo das π' , que possuem um primeiro jato não nulo semi-definido positivo e contém em algum jato finito a informação de não ter mínimo.

BIBLIOGRAFIA

[A-0] ARNOLD, V. — *Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique* — Moscou — Mir — 1976.

[B-0] BARONE NETTO, A. — Jet Detectable Extrema — *Proc. of American Math.* — vol 92 — n ° 4 — pp 604-608.

[C-0] CHERN, S-S. — An Elementary Proof of the Existence of Isothermal Parameters on a Surface — *Proc. of Am. Math. soc.* — vol 6 (1955) — pp 771-782

[K-0] KOZLOV, V.V. — Instability of Equilibrium in a Potential Field — *Russian Math. Survey* — vol 36 — n ° 1 — pp 238-239

[K-1] KOZLOV, V.V. — On the Instability of Equilibrium in a Potential Field — *Russian Math. Survey* — vol 36 — n ° 3 — pp 256-257

[KP-0] KOZLOV, V.V. & PALAMODOV, P. — On Asymptotic Solutions of the Equations of Classical Mechanics — *Transl. of Amer. Math. Soc.* — pp 335-339

[L-0] LALOY, M. et. al. — *Stability Theory by Liapunov's Direct Method* — Applied Mathematical Sciences v.22 — New York — Springer-Verlag — 1977

[G-0] GARCIA, M. — A Note on k-decidability — *Anais do X Congresso Nacional de Mat. Aplicada* — vol 1 — 1987 — pp. 343-345