*Uma Aplicação da
Topologia Algébrica à
Teoria dos Grafos*

Yoshiharu Kohayakawa

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA APLICADA

Área de Concentração: Ciência da Computação
Orientador: Prof. Dr. Arnaldo Mandel

*Durante a elaboração deste trabalho,
o autor recebeu apoio financeiro da FAPESP.*

— SÃO PAULO, Julho de 1986 —

Aos Meus Pais

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha gratidão a todos os colegas do IME que direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão deste trabalho. Minha formação matemática de hoje é totalmente devida a todos os professores que me introduziram às várias facetas desta fascinante arte.

Em particular, é um prazer destacar meu dedicado e paciente orientador, Prof. Dr. Arnaldo Mandel, que tem me exposto, desde os tempos de Iniciação Científica, às múltiplas sutilezas dos diversos raciocínios combinatórios.

Abstract

Lovász established a way to translate graph colouring problems into a topological context by defining the *neighbourhood complex*, $\mathcal{N}G$, for every graph G . He proved that if $\mathcal{N}G$ is $(n-1)$ -connected, then G is not $(n+1)$ -colourable. J. Walker has given a generalisation of that result by means of a functor $\mathcal{W}$ he constructed, defined on the category of graphs and homomorphisms of graphs to the category of spaces with involution and homotopy classes of equivariant maps. His theorem states that if $\mathcal{N}G$ has trivial mod 2 homology in dimensions $0, 1, \dots, n-1$, then G is not $(n+1)$ -colourable. We give a further generalisation of that result by weakening the hypothesis to requiring only that $\mathcal{N}G$ have trivial homology in dimensions $\omega G - 2, \omega G - 1, \dots, n-1$. Our proof is rather similar to Walker's and is based on a slight modification of his homological version of the Borsuk-Ulam antipodal theorem.

We give in the first chapter an account of how topology can be introduced in the study of posets. The construction of $\mathcal{W}$ is described in the second, and our result is proved in the third one. We conclude this work by tackling some general problems concerning the computation of the homology of $\mathcal{N}G$. Some simple results about triangulated graphs and planar graphs are obtained.

Índice

<i>Agradecimentos</i>	v
<i>Abstract</i>	vii
<i>Introdução</i>	xi
<i>Preliminares</i>	1
1. Ordens	2
2. Grafos	4
3. Álgebra Homológica	6
4. Topologia	7
5. Categorias e Funtores	14
Notas Bibliográficas	17
 <i>Capítulo I</i>	
<i>Ordens Parciais e Topologia</i>	18
1. Topologia de Ordens Parciais	19
2. O Produto de Ordens Parciais	24
3. O Tipo de Homotopia de Certas Ordens	27
4. Os Teoremas do Nervo e do Corte	30
Notas Bibliográficas	37

*Capítulo II***O Funtor de Walker** 38

1. O Ortoreticulado dos Fechados de um Grafo 39
2. A Topologia de Ortoreticulados 43
3. A Definição do Funtor 50
4. A Estrutura do Ortoreticulado dos Fechados 52
- Notas Bibliográficas 56

*Capítulo III***O Teorema de Lovász-Walker Generalizado** 57

1. Uma Generalização do Teorema de Borsuk-Ulam 58
2. Uma Generalização do Teorema de Lovász-Walker 63
3. A Conjectura de Kneser 67
- Notas Bibliográficas 69

*Capítulo IV***O Funtor Revisitado** 70

1. Remoções de Vértices e Arestas de um Grafo 71
2. Algumas Decomposições Úteis de Grafos 80
3. Grafos Triangulados 88
4. Grafos Planares 90
5. A Conjectura do Produto 94
- Notas Bibliográficas 96

Referências Bibliográficas 97

"What *does* an Apple-Tree begin with, when it wants to speak?"
Sylvie murmured despairingly, to the irresponsible birds.

At last, taking a leaf out of Bruno's book, I ventured on a remark.
"Doesn't 'Apple-Tree' always begin with Eh!'"

Lewis Carrol

Sylvie and Bruno Concluded

Introdução

Uma fascinante conexão entre a Teoria dos Grafos e a Topologia Algébrica foi descoberta por Lovász [Lo1] em sua engenhosa prova da seguinte conjectura devida a Kneser [Kn]:

Conjectura de Kneser. *Sejam $k, r \geq 0$ e S um conjunto de cardinalidade $k + 2r$. Então, se o conjunto dos subconjuntos de cardinalidade r de S for particionado em $k + 1$ classes, necessariamente alguma classe contém dois subconjuntos disjuntos.* ||

Garey e Johnson [GJ] e Stahl [St], provaram e aplicaram o caso particular $r \leq 3$ desta conjectura. Mais recentemente, já munidos com a prova dada por Lovász, Bollobás e Thomason [BT] usaram o caso geral para provar interessantes fatos sobre r -conjunto-colorações (uma generalização do conceito de coloração de grafos) estendendo trabalhos de Geller [Ge] e Geller e Stahl [GS]. Generalizações têm sido estudadas; Schrijver [Sc] tem um resultado “melhor possível” nesta linha e aspectos extremos foram considerados por Füredi [Fü]. Veja também Poljak et. al. [Po].

Convém reformular a Conjectura de Kneser na linguagem da Teoria

dos Grafos. Fixe os parâmetros k e r e um conjunto S de cardinalidade $k + 2r$. Denote por V o conjunto dos subconjuntos de cardinalidade r de S e defina o *grafo de Kneser* $KG_{k,r}$ de vértices V , sendo dois conjuntos adjacentes em $KG_{k,r}$ se e só se eles forem disjuntos.

Teorema A.(Lovász [Lo1]) O número cromático do grafo de Kneser $KG_{k,r}$ é $k + 2$. ||

Note que a Conjectura de Kneser é equivalente a ser o número cromático pelo menos $k + 2$; que ele é, na verdade, igual a $k + 2$ pode ser visto considerando a seguinte coloração de $KG_{k,r}$: se $T \subseteq S$ é um vértice de $KG_{k,r}$ com $\min T = i$, então pinte T da cor i caso $i \leq k + 1$ e, caso contrário, da cor $k + 2$.

Na prova do Teorema A, Lovász usa o Teorema de Borsuk (ou Lyusternik-Schnirelman) que diz que quando cobrimos a esfera S^k com $k + 1$ fechados, encontramos, necessariamente, um par de pontos antípodas em um mesmo fechado. Para ilustrar como tal resultado pode ser usado em problemas de coloração de grafos, vamos descrever uma prova (altamente não ortodoxa) de que o circuito C^7 não é bipartido.

Considere um heptágono regular com vértices $x_1, \dots, x_7$ no círculo unitário S^1 do plano, e seja C^7 o grafo de vértices $x_1, \dots, x_7$, com x_i adjacente a x_j se e só se $|x_i - x_j| = 3$ ou 4 . Para $n = 1, \dots, 7$, seja σ_n o menor arco de S^1 ligando os vizinhos de x_n . Observe que

- i. $x_j \in \sigma_i \iff x_i$ é adjacente a x_j ,
- ii. $-\sigma_i \subseteq \sigma_j \cup \sigma_k$, onde x_j e x_k são os vizinhos de x_i .

Figura 1. O grafo C^7 .

Suponha agora, por absurdo, que C^7 é 2-colorável e seja $c: VC^7 \rightarrow \{1, 2\}$ uma bicoloração própria de C^7 . Defina os fechados C_1, C_2 de S^1 dados por

$$C_i = \bigcup \{\sigma_n : c(n) = i\}$$

e considere a cobertura $S^1 = C_1 \cup C_2$ do círculo. Pelo Teorema de Borsuk (que é quase trivial neste caso), encontramos um par de pontos antípodas $z, -z \in S^1$ em um mesmo fechado C_i . Temos que $z \in \sigma_n$ para algum n e, por ii. acima, segue que $-z \in \sigma_m$ para algum m tal que x_m é adjacente a x_n . Lembrando a definição dos C_i 's, concluímos que x_n e x_m estão coloridos da mesma cor, absurdo.

Certamente, a demonstração acima não é a demonstração "certa" daquele simples fato. Entretanto, ela ilustra como podemos "geometrizarmos" um problema de coloração de grafos. Associa-se um certo objeto geométrico ao grafo considerado e, pela análise do mesmo, recuperamos informações puramente combinatórias sobre o grafo do qual partimos.

Conta Lovász [Lo1] que a idéia de usar o Teorema de Borsuk para provar o Teorema A surgiu de uma observação de Simonovits [Si] sobre a semelhança dos grafos de Kneser com os *grafos de Borsuk*, B_ϵ^k , definidos da seguinte forma. Para todo $\epsilon > 0$, o grafo (infinito) B_ϵ^k tem como conjunto de vértices a k -esfera $S^k \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$ e sendo dois vértices x e y adjacentes se e só se $\|x - y\| > 2 - \epsilon$, i.e., se eles forem quase antípodas. É um exercício fácil de espaços métricos mostrar que o Teorema de Borsuk é equivalente a B_ϵ^k não ser $(k + 1)$ -colorável para todo $\epsilon > 0$. Uma semelhança entre os grafos de Borsuk e de Kneser é a não existência de circuitos ímpares curtos tanto em B_ϵ^k (se ϵ é pequeno) como em $KG_{k,r}$ (se r é grande em relação a k).

A prova de Lovász do Teorema A começa definindo, para todo grafo G , um espaço topológico denotado $|NG| \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n = |VG|$), da seguinte forma. Suponha $VG = \{x_1, \dots, x_n\}$. Denote por $\nu G(x)$ o conjunto de vértices adjacentes a $x \in VG$. Sejam $e_1, \dots, e_n$ os elementos da base canônica de $\mathbb{R}^n$. Então

$$|NG| = \bigcup_i \text{conv}\{e_j : v_j \in \nu G(v_i)\}$$

onde $\text{conv } X$ denota o fecho convexo de X . Temos então o seguinte resultado:

Teorema B.(Lovász [Lo1]) *Para todo grafo G , se $|NG|$ é $(k-1)$ -conexo, então G não é $(k+1)$ -colorável.* ||

Lovász completa sua prova do Teorema A estabelecendo:

Teorema C.(Lovász [Lo1]) *$|NKG_{k,r}|$ é $(k-1)$ -conexo.* ||

Assim, temos o seguinte paradigma para limitar inferiormente o número cromático χG de um grafo G :

Passo 1. Mostre que $|NG|$ é $(n-1)$ -conexo.

Passo 2. Aplique o Teorema B e conclua que $\chi G > k+1$.

A demonstração de $\chi C^7 > 2$ que fizemos acima segue estes dois passos. Vale que $|NG| \approx S^1$ e o passo 1 está satisfeito para $k=1$. Note que o passo 2 foi feito explicitamente, sem menção direta do Teorema B. Caso estejamos interessados em grafos mais substanciais que C^7 , o passo 1 acima pode se tornar extremamente difícil de se executar. Lovász pergunta então [Lo1] se é possível estender o Teorema B para homologias e, de fato, J. Walker (e, independentemente, Wright [Wr]) prova:

Teorema B'.(Walker [Wa1]) *Para todo grafo G , se $\tilde{H}_q(|NG|, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ é trivial para todo $0 \leq q \leq k-1$, então G não é $(k+1)$ -colorável.* ||

A relevância desta generalização é clara, já que as homologias de um espaço triangulado são efetivamente calculáveis. Em realidade, consideravelmente mais é provado por Walker. Denote por **Graf** a categoria dos grafos e homomorfismos de grafos (aplicações entre vértices que preservam arestas) e por $\text{Top}_2^\sim$ a categoria cujos objetos são espaços topológicos munidos de uma involução e cujas flechas são classes de homotopia equivariante de aplicações equivariantes.

Teorema D.(Walker [Wa1]) *Existe um funtor $\mathcal{W}$ de **Graf** em $\text{Top}_2^\sim$:*

$$\mathcal{W}: \text{Graf} \rightarrow \text{Top}_2^\sim$$

||

Não vamos definir aqui o funtor $\mathcal{W}$ (cf. Capítulo II), porém cabe mencionar que o objeto (X, τ) de $\text{Top}_2^\approx$ ($\tau: X \rightarrow X$ é a involução do espaço X) associado ao grafo G tem $X \simeq |NG|$. O funtor $\mathcal{W}$ “explica”, em algum sentido, qual é a relação entre uma propriedade puramente combinatória como a não $(k+1)$ -colorabilidade de um grafo G e a $(k-1)$ -conexidade (ou a $(k-1)$ -aciclicidade mod 2) de $|NG|$. Quando G é $(k+1)$ -colorável, i.e., se existe um morfismo de grafos $\gamma: G \rightarrow K^{k+1}$ então, pelo funtor $\mathcal{W}$, $\mathcal{W}\gamma: \mathcal{W}G \rightarrow \mathcal{W}K^{k+1}$ é uma flecha em $\text{Top}_2^\approx$, em particular, existe uma aplicação equivariante de $\mathcal{W}G$ em $\mathcal{W}K^{k+1}$. É, porém, fácil de se provar que $\mathcal{W}K^{k+1}$ é (S^{k-1}, a_{k-1}) onde S^{k-1} é a $(k-1)$ -esfera e $a_{k-1}: S^{k-1} \rightarrow S^{k-1}$, a aplicação antípoda. Acontece, entretanto, que se $\mathcal{W}G = (X, \tau)$ e $X \simeq |NG|$ é $(k-1)$ -conexo (ou $(k-1)$ -acíclico mod 2, i.e., as homologias sobre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ são triviais em dimensões $0, 1, \dots, k-1$), então não pode haver uma aplicação equivariante $X \rightarrow S^{k-1}$ —este último resultado sendo uma generalização homológica do Teorema de Borsuk-Ulam, também devido a Walker [Wa2]. Concluímos assim que se G é $(k+1)$ -colorável, então $|NG|$ não é $(k-1)$ -acíclico mod 2, i.e., o Teorema B' é um corolário do Teorema D.

A discussão acima claramente nos diz que se estamos interessados em um problema da Teoria dos Grafos que pode ser expresso como um problema de existência ou não de flechas em **Graf**, então podemos transladar tal problema à categoria $\text{Top}_2^\approx$. Existe um problema que se sugere imediatamente, a saber, o problema do clique máximo. O nosso resultado é:

Teorema E. Para todo grafo G , existe um inteiro q com $\omega G \leq q+2 \leq \chi G$ tal que $\tilde{H}_q(|NG|, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ é não trivial. ||

Como de costume, ωG é o maior número de vértices de G dois a dois adjacentes,

$$\omega G = \max\{n: \text{existe morfismo de } K^n \text{ em } G\}$$

O Teorema E pode ser encarado de duas formas.

- i. Como um resultado limitando superiormente ωG :
se definimos

$$\lambda \dim G = \max\{q: \tilde{H}_q(|NG|, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \neq (0)\}$$

então $\omega G \leq \lambda \dim G + 2$, e

- ii. Como uma generalização do Teorema B'. De fato, caso queiramos limitar o número cromático de um grafo inferiormente, o Teorema E afirma que não é necessário prestarmos atenção às homologias de $|NG|$ em dimensões baixas, basta que elas sejam triviais nas dimensões q , $\omega G \leq q + 2 < \chi$ para que $\chi G \geq \chi$.

Também provamos que o Teorema E é o melhor possível no seguinte sentido:

Teorema F. Suponha $2 \leq \omega \leq \hat{q} + 2 \leq \chi$ inteiros tais que $2 = \omega = \hat{q} + 2 \Rightarrow \chi = 2$. Então, existe um grafo G com $\omega G = \omega$ e $\chi G = \chi$ satisfazendo:

$$\tilde{H}_q(|NG|, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \neq (0) \iff q = \hat{q}. \quad ||$$

A última parte deste trabalho é dedicada à análise das homologias de $|NG|$. Estudamos as perguntas iniciais que se colocam, tais como:

- i. Qual é o efeito da remoção de vértices sobre $|NG|$, i.e., qual é a relação entre $|NG|$ e $|N(G - x)|$, $x \in VG$?
- ii. Idem para a remoção e contração de arestas.
- iii. Se G tem uma decomposição $G = G_1 \cup G_2$, G_i subgrafo induzido de G , existem hipóteses razoáveis sobre $G_1 \cap G_2$ para que $\tilde{H}_*(|NG|)$ tenha uma descrição simples em função dos $\tilde{H}_*(|NG_i|)$, $i = 1, 2$?
- iv. Qual é a relação entre certas restrições combinatórias sobre G (planaridade, perfeição, etc) e $\tilde{H}_*(|NG|)$?

Não apresentamos respostas definitivas aos três primeiros itens, mas os pequenos lemas que estabelecemos no Capítulo IV são suficientes para provarmos:

Teorema G. Seja G um grafo.

- i. Se G é triangulado, então $2 + \lambda \dim G = \omega G = \chi G$.

ii. Se G é planar, então $\lambda \dim G \leq 3$. ||

Desconfiamos que ii. acima pode ser melhorado para $\lambda \dim G \leq 2$, mas o máximo que conseguimos até o momento é estabelecer uma estrutura bastante restritiva sobre os eventuais grafos planares com $\lambda \dim G = 3$ (cf. seção 4 do Capítulo IV).

Finalmente, deixamos observado que a construção do funtor $\mathcal{W}$ envolve basicamente dois passos. O primeiro é puramente combinatório, estabelece-se uma relação (quase) um-a-um entre grafos e ortoreticulados. O segundo envolve uma técnica bastante conhecida de associação de espaços triangulados a ordens parciais, a saber, técnicas que se originaram nos trabalhos de Rota sobre funções de Möbius (cf. [Fo], [Ma], [La] e trabalhos mais recentes como [Ba1].) Esta técnica tem recentemente chamado muita atenção devido às profundas ligações que tem se manifestado através dela entre Combinatória, Topologia Algébrica e Teoria de Anéis [St]. Cabe também mencionar o trabalho de Quillen [Qu] que mostra também ser útil tal técnica na Teoria dos Grupos. Dedicamos o Capítulo I ao desenvolvimento dos rudimentos daquela área — somos obrigados a alertar o leitor que muito daquele capítulo (notadamente o Teorema I.4.2.) poderia ter sido deixado de lado no que concerne a construção do funtor, entretanto fomos compelidos a dedicar todo um capítulo àquele assunto esperando dar uma coleção de resultados que, ainda que elementares, fossem úteis no desenvolvimento de alguma intuição sobre as técnicas envolvidas. O capítulo seguinte, onde construímos efetivamente $\mathcal{W}: \text{Graf} \rightarrow \text{Top}_2^{\sim}$, embora tecnicamente denso, deve ter sua leitura aliviada pelo capítulo anterior.

Como descrevemos acima, o Teorema B' é um corolário da existência do funtor $\mathcal{W}$ módulo uma generalização homológica, devida a Walker, do Teorema de Borsuk-Ulam. Dedicamos o Capítulo III a uma generalização do resultado de Walker que nos dá, imediatamente, uma demonstração do Teorema E. O Teorema F fecha aquele capítulo. É importante mencionar que o último capítulo é logicamente independente da construção de $\mathcal{W}$. Como já dito, analisamos lá $|NG|$ e obtemos resultados como o Teorema G. Ainda, alguns lemas daquele capítulo são usados na prova do Teorema F.

Notas finais. As técnicas de Topologia Algébrica usadas aqui são todas elementares. Não usamos muito mais que as definições nem precisamos lançar

mão de resultados que não sejam vistos num primeiro curso de Topologia Algébrica (este autor só fez um). De qualquer forma, achou-se conveniente compilar algumas definições e resultados — não só daquela área, mas também da Teoria dos Grafos e da Teoria de Ordens Parciais — em um capítulo de preliminares. Encontram-se lá a maioria dos termos usados neste trabalho.

Uma nota editorial: preferiu-se juntar todas as notas bibliográficas no fim de cada capítulo, assim, informações sobre onde o leitor pode encontrar as fontes originais dos vários resultados que expomos aqui não estão misturadas com o corpo de cada capítulo.

Preliminares

Objetivamos aqui introduzir a linguagem de que faremos uso no decorrer deste trabalho. Inevitavelmente, a densidade definições/página é muito alta, mas, como tentamos nos ater à terminologia mais padrão que conhecemos, é possível que este capítulo sirva apenas como um dicionário entre a linguagem do leitor e a nossa, as quais, esperamos, não divirjam muito. Entre as definições, procuramos espalhar resultados que, ou serão utilizados posteriormente, ou servem para ilustrar a linguagem introduzida até o momento.

As cinco seções que compõe este capítulo são dedicadas a Ordens, a Grafos, a Álgebra Homológica, a Topologia e, finalmente, a Categorias e Funtores.

1. Ordens

Uma *ordem parcial* ou um *conjunto (parcialmente) ordenado* é um par $(P, \leq)$ onde $\leq$ é uma relação de ordem em P , i.e., $\leq$ é reflexiva, antissimétrica e transitiva. Trataremos neste trabalho apenas *ordens parciais finitas*, i.e., P será sempre um conjunto finito (a menos de menção explícita em contrário). Cometeremos abusos de linguagem já bastante usuais na literatura, tais quais referirmo-nos a $(P, \leq)$ como "a ordem (parcial) P " e também denotar as relações de ordem de dois conjuntos ordenados com o mesmo símbolo $\leq$. Dada uma ordem P , definimos a *relação de comparabilidade* em P por: x e y são comparáveis sse $x \leq y$ ou $y \leq x$. Se P e Q são duas ordens parciais, dizemos que uma função $f: P \rightarrow Q$ *preserva* (resp. *reverte*) *ordem* caso $x \leq y$ em P implique $f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) \geq f(y)$) em Q , para todo $x, y \in P$ e f *preserva comparabilidade* caso as imagens de elementos comparáveis em P sejam comparáveis em Q .

Caso P seja uma ordem parcial, $Q \subseteq P$ tem uma estrutura natural de ordem parcial, aquela induzida por P : $x \leq y$ em Q sse $x \leq y$ em P . Referimo-nos a Q , munido desta relação induzida, como a *subordem Q de P* . Caso Q seja uma *ordem total*, i.e., caso quaisquer dois elementos de Q sejam comparáveis, Q é uma *cadeia (em P)*. Se quaisquer dois elementos distintos não forem comparáveis em Q , então Q é uma *anticadeia (em P)*.

Existem algumas operações que geram ordens parciais a partir de outras. Dada P uma ordem, definimos $P^{op} = (P, \leq^{op})$, o *dual de P* , por $x \leq^{op} y \Leftrightarrow y \leq x$ em P , para quaisquer $x, y \in P$. Definimos também o *intervalo fechado* $[x, y] \subseteq P$ (resp. *aberto* $(x, y) \subseteq P$) como a subordem de P com $z \in [x, y] \Leftrightarrow x \leq z \leq y$ (resp. $x < z < y$). Seja ainda Q uma ordem, então a *união disjunta* $P \dot{\cup} Q$ é a ordem sobre a união disjunta de P e Q com $x \leq y$ em $P \dot{\cup} Q \Leftrightarrow (x, y \in Q \text{ e } x \leq y \text{ em } Q) \text{ ou } (x, y \in P \text{ e } x \leq y \text{ em } P)$. Caso acrescentemos em $P \dot{\cup} Q$ as relações $q \leq p, \forall p \in P \forall q \in Q$, obtemos o *encaixe de P sobre Q* , denotado $P * Q$. O *produto*, $P \times Q$ de P por Q é definido sobre o produto cartesiano $P \times Q$ com $(p_1, q_1) \leq (p_2, q_2) \Leftrightarrow p_1 \leq q_1$ e $p_2 \leq q_2$.

Se $x \in S \subseteq P$, dizemos que x é

- i. *mínimo* de S caso $\forall y \in S, x \leq y$,

- ii. *máximo* de S caso $\forall y \in S, y \leq x$,
- iii. *minimal* em S caso $\forall y \in S, y \leq x \Rightarrow y = x$ e
- iv. *maximal* em S caso $\forall y \in S, x \leq y \Rightarrow x = y$.

Um *limitante superior* (resp. *inferior*) de S é um elemento $z \in P$ tal que $x \leq z$ (resp. $z \leq x$) para todo $x \in S$. O máximo (resp. mínimo) dos limitantes inferiores (resp. superiores), quando existe, é denotado por $\bigwedge S$ ou $\inf S$ (resp. $\bigvee S$ ou $\sup S$). Quando $S = \{x, y\}$, temos $\bigwedge S = x \wedge y$ e $\bigvee S = x \vee y$. É usual denotarmos $\bigwedge P = 0$ e $\bigvee P = 1$. Quando, para todo $S \subseteq P$, existem tanto $\bigvee S$ quanto $\bigwedge S$, P é dito um *reticulado* (na verdade, isto define um reticulado completo, mas como todas as nossas ordens são finitas, todos os nossos reticulados são completos). Dois elementos $x, y \in R$ são *complementares* no reticulado R caso $x \vee y = 1$ e $x \wedge y = 0$. A *parte própria* de um reticulado R é a subordem $\bar{R} = R \setminus \{0, 1\}$.

Para dois elementos x, y da ordem P , y *cobre* x caso $x \neq y$ e $x \leq z \leq y$ implique $z = x$ ou $z = y$. Os *átomos* de um reticulado R são os elementos que cobrem 0 (i.e., os minimais de $R \setminus \{0\}$) e os *coátomos*, aqueles que são cobertos por 1 (i.e., os maximais de $R \setminus \{1\}$).

Certas ordens P admitem uma *função altura*, i.e., uma função $a: P \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que se y cobre x então $a(y) = a(x) + 1$. Neste caso, dizemos que P é *graduado*. Ademais, P é *semimodular* caso admita uma função altura a *semimodular*, i.e., tal que para quaisquer $x, y \in P$,

$$a(x \vee y) + a(x \wedge y) \leq a(x) + a(y)$$

Note que duas funções altura em P diferem apenas por uma constante e, assim, uma função altura em P é semimodular sse todas o forem. Semimodularidade tem um papel fundamental em Combinatória, tendo suas implicações profundamente estudadas em Teoria dos Matróides (= reticulados semimodulares onde todo elemento é sup de átomos).

Terminamos esta seção mencionando uma área bastante explorada na Teoria Combinatória de Ordens Parciais, a saber, a Teoria das Álgebras de Incidência, cujo objetivo fundamental é a criação de uma teoria geral de inversão de Möbius em ordens parciais. Embora este trabalho não vá incluir resultados daquela área, cabe registrar que as técnicas do Capítulo I têm se manifestado, nos últimos anos, uma arma útil dentro daquele assunto.

2. Grafos

Um *grafo* é um par ordenado (VG, aG) onde $VG \neq \emptyset$ é o conjunto dos *vértices* e $aG \subseteq \{\{x, y\} : x, y \in VG, x \neq y\}$, o das *arestas*. Temos aqui também a hipótese de finitude, todo grafo será *finito*, i.e., VG será finito. Uma aresta $\alpha = \{x, y\} \in aG$ *liga* x a y , que são seus *extremos*. Dizemos também que x e y são *adjacentes* e que a aresta α é *incidente* a x e a y . Duas arestas α e $\beta \in aG$ são *adjacentes* se tiverem um extremo comum. Naturalmente, um grafo G pode ser imaginado como um conjunto VG munido de uma relação simétrica irreflexiva (a relação de adjacência entre os vértices). Definimos, para todo $x \in VG$,

$$\nu G(x) = \{y \in VG : y \text{ é adjacente a } x \text{ em } G\}$$

e também, para todo $X \subseteq VG$,

$$\nu G(X) = \bigcap_{x \in X} \nu G(x)$$

(onde, por convenção, $\nu G(\emptyset) = VG$). Seja $H = (VH, aH)$ um grafo. Um *morfismo de grafos* de G em H , $f: G \rightarrow H$, é uma função $f: VG \rightarrow VH$ que preserva adjacência (de vértices), i.e.,

$$x \in \nu G(y) \Rightarrow f(x) \in \nu H(f(y))$$

para todo $x, y \in VG$. Note em particular que dois vértices adjacentes em G têm imagens distintas por f , pois a relação de adjacência é irreflexiva. Observe que os morfismos de grafos são fechados por composição. Dois grafos G e H são *isomorfos* sse existe um morfismo $f: G \rightarrow H$ onde a função f é inversível e f^{-1} também é um morfismo.

Um grafo é *completo* caso todos os seus vértices sejam adjacentes dois a dois. Um (o) grafo completo de n vértices é denotado K^n . Definimos o *número cromático* de G , χG , por

$$\chi G = \min\{n : \text{existe morfismo } G \rightarrow K^n\}$$

Uma *coloração* de G é um morfismo de G em algum grafo completo ou, equivalentemente, uma partição de VG em conjuntos de vértices tais que

nenhuma aresta é incidente a dois membros de um mesmo conjunto. Dualmente definimos

$$\omega G = \max\{n : \text{existe morfismo } K^n \rightarrow G\}.$$

Um *clique* de G é um $S \subseteq VG$, $S \neq \emptyset$, tal que qualquer par de vértices de S é adjacente em G . Assim, ωG nada mais é que a cardinalidade máxima de um clique de G .

Trivialmente se observa que não existe morfismo $K^m \rightarrow K^n$ se $m > n$. Assim, para todo grafo G , $\omega G \leq \chi G$.

Dizemos que um grafo $H = (VH, aH)$ é *subgrafo* de $G = (VG, aG)$ caso $VH \subseteq VG$ e $aH \subseteq aG$. Caso $\nu H(x) = \nu G(x) \cap VH$, para todo $x \in VH$, H é um *subgrafo induzido* de G . Dado $S \subseteq VG$, o subgrafo induzido por S , denotado $G[S]$, é o único subgrafo induzido de G com conjunto de vértices S .

Definimos $gG(x) = |\nu G(x)|$, o grau de x em G . A sequência de graus de G é $gG(x_1), \dots, gG(x_n)$ onde $VG = \{x_1, \dots, x_n\}$ e a notação é tal que $gG(x_1) \geq gG(x_2) \geq \dots \geq gG(x_n)$. Ainda, $\Delta G = gG(x_1)$ e $\delta G = gG(x_n)$. É um exercício fácil mostrar que $\chi G \leq \Delta G + 1$. O bem conhecido Teorema de Brooks melhora isto para $\chi G \leq \Delta G$ para todo grafo G a menos de alguns casos triviais.

Um *passeio* em G é simplesmente uma sequência $v_0, v_1, \dots, v_k$ de vértices de G com v_{i-1} adjacente a v_i , $1 \leq i \leq k$. O passeio acima é um *caminho* caso os v_i 's sejam distintos dois a dois. Ele é um *circuito* caso $k \geq 3$, $v_i \neq v_j$ para todo par $\{i, j\} \neq \{0, k\}$ e $v_0 = v_k$. O *comprimento* do passeio $v_0, \dots, v_k$ é k . A *cintura* de um grafo G é o mínimo dos comprimentos dos circuitos de G . Por convenção, se G não tem circuitos, sua cintura é *infinita* e, neste caso, G é uma *floresta*. Um grafo é *conexo* caso qualquer par de vértices esteja contido num passeio (ou, equivalentemente, num caminho). Uma *componente conexa* de G é um subgrafo conexo de G maximal (em relação à ordem "ser sugrafo de"). Uma floresta conexa, i.e., com uma única componente, é uma *árvore*.

Como vimos, $\omega G \leq \chi G$ para todo grafo G . Dizemos que G é *perfeito* se para todo subgrafo induzido H de G , vale a igualdade $\omega H = \chi H$. Existem extensas análises sobre a estrutura de grafos perfeitos, mas estamos aqui interessados na classe dos grafos *triangulados*, uma subclasse estrita

6 Preliminares

dos grafos perfeitos. Dizemos que G é triangulado caso todo circuito $v_0, v_1, \dots, v_k = v_0$ com $k \geq 4$ tem uma *diagonal*, i.e., um par de vértices v_i, v_j adjacentes com $|i - j| \neq 1$ e $\neq k - 1$.

Finalmente, definimos o conceito de *planaridade*. Um grafo G é *planar* caso possamos fazer uma associação bijetora entre os vértices de G e alguns pontos do plano e entre as arestas de G e um conjunto de curvas de Jordan simples no plano de tal forma que a curva associada a uma aresta liga os pontos do plano associados aos extremos daquela aresta. Ademais, quaisquer duas das curvas acima podem ter no máximo seus extremos em comum. Outra definição equivalente é a de que a realização geométrica de G , visto como um complexo simplicial (cf. seção 4), é homeomorfa a um subespaço do plano.

3. Álgebra Homológica

Fixe um anel comutativo com unidade R . Um *complexo de cadeias* $C_\#$ sobre R é uma seqüência (C_q, ∂_q) , $q \in \mathbb{Z}$, de R -módulos e homomorfismos de R -módulos $\partial_q: C_q \rightarrow C_{q-1}$ tal que $\partial_q \partial_{q+1} = 0$.

$$C_\# : \dots \rightarrow C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \rightarrow \dots$$

Definimos o q -ésimo grupo de homologia de $C_\#$ por

$$H_q(C_\#) = H_q(C_\#, R) = \ker \partial_q / \operatorname{im} \partial_{q+1}.$$

Note que o quociente está bem definido pela hipótese $\partial_q \partial_{q+1} = 0$. Também referimo-nos a $H_q(C_\#)$ como a homologia q -dimensional (ou de nível q) de $C_\#$.

Suponha agora $C_\# = (C_q, \partial_q)$ com C_q trivial para todo $q < 0$ e $\varepsilon: C_0 \rightarrow R$ um epimorfismo satisfazendo $\varepsilon \partial_1 = 0$. Fica então bem definido o *complexo de cadeias aumentado* de $C_\#$ por ε , denotado $(C_\#, \varepsilon)$, como o complexo $\tilde{C}_\# = (\tilde{C}_q, \tilde{\partial}_q)$ com $\tilde{C}_q = C_q$ e $\tilde{\partial}_{q+1} = \partial_{q+1}$ para todo $q \neq -1$ e $\tilde{C}_{-1} = R$

e $\tilde{\partial}_0 = \varepsilon$. Os grupos de homologia *reduzidos* $\tilde{H}_q(C_{\#})$ de $C_{\#}$ em relação a ε são os grupos de homologia do complexo de cadeias aumentado $\tilde{C}_{\#}$. Por R ser livre como R -módulo, $\varepsilon: C_0 \rightarrow R$ cinde e concluímos que

$$H_q(C_{\#}) = \begin{cases} \tilde{H}_q(C_{\#}), & \text{se } q \geq 1 \text{ e} \\ \tilde{H}_0(C_{\#}) \oplus R, & \text{se } q = 0. \end{cases}$$

Dados dois complexos de cadeias arbitrários $C_{\#} = (C_q, \partial_q)$ e $C'_{\#} = (C'_q, \partial'_q)$, uma *aplicação de cadeias* $f: C_{\#} \rightarrow C'_{\#}$ é uma seqüência $f_q, q \in \mathbb{Z}$, de homomorfismos de R -módulos, $f_q: C_q \rightarrow C'_q$ satisfazendo $f_q \partial_{q+1} = \partial'_{q+1} f_{q+1}$.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & C_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & C_q & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow f_{q+1} & & \downarrow f_q & & \\ \dots & \rightarrow & C'_{q+1} & \xrightarrow{\partial'_{q+1}} & C'_q & \rightarrow & \dots \end{array}$$

Devido a tal comutatividade, fica canonicamente definido $f_{*q}: \tilde{H}_q(C_{\#}) \rightarrow \tilde{H}_q(C'_{\#})$, um homomorfismo.

Finalmente, a *homologia* de $C_{\#}$ (resp. a *homologia reduzida*) é a seqüência—ou o módulo graduado— $H_*(C_{\#}) = H_*(C_{\#}, R) = (H_q(C_{\#}, R))_q$ (resp. $\tilde{H}_*(C_{\#}) = \tilde{H}_*(C_{\#}, R) = (\tilde{H}_q(C_{\#}, R))_q$).

4. Topologia

a. Complexos Simpliciais

Definimos um *complexo simplicial (abstrato)* K como um par ordenado $K = (VK, \text{Face } K)$, onde VK é o conjunto (finito) de *vértices* e $\text{Face } K$, o das *faces* de K , satisfazendo:

- i. $\emptyset \notin \text{Face } K \subseteq \mathcal{P}VK$,
- ii. $x \in VK \Rightarrow \{x\} \in \text{Face } K$ e
- iii. $\emptyset \neq \sigma \subseteq \tau \in \text{Face } K \Rightarrow \sigma \in \text{Face } K$.

Muitas vezes, dizemos que K é um complexo sobre VK .

Em particular, um grafo pode ser visto como um complexo simplicial sobre seu conjunto de vértices e cujas faces são suas arestas e os conjuntos unitários de vértices.

Se K_1 e K_2 são complexos simpliciais, uma *aplicação simplicial* de K_1 em K_2 , denotado $f: K_1 \rightarrow K_2$, é uma função $f: VK_1 \rightarrow VK_2$ tal que a imagem de uma face de K_1 é uma face de K_2 . Todo morfismo de grafos é uma aplicação simplicial, mas a recíproca é falsa, a imagem de uma aresta não pode ser um único vértice.

Existem várias construções muito úteis para se obter complexos simpliciais a partir de outros. Fixe K um complexo. Para $q \geq 0$, o seu *q-esqueleto* K^q é o complexo cujas faces são

$$\text{Face } K^q = \{\sigma \in \text{Face } K: |\sigma| \leq q + 1\}.$$

Definimos aliás, $\dim K = \max\{|\sigma| - 1: \sigma \in \text{Face } K\}$ e, assim, caso $q \leq \dim K$, $\dim K^q = q$ e, caso contrário, $K^q = K$. Observe que o 1-esqueleto é canonicamente um grafo. Todo q -esqueleto de K é um *subcomplexo* de K . Dizemos que L é um subcomplexo de K caso toda face de L seja face de K , em particular, todo vértice de L deve ser vértice de K . O subcomplexo L é *pleno* caso para todo $\sigma \subseteq VL$, $\sigma \in \text{Face } K \Rightarrow \sigma \in \text{Face } L$. Neste caso, denotamos $L = K[VL]$. Se K é um grafo, i.e., se $\dim K = 1$, um subcomplexo pleno é o mesmo que um subgrafo induzido, daí a semelhança de notação. Definimos agora $\text{Sd } K$, a *subdivisão baricêntrica (abstrata)* do complexo K . $\text{Sd } K$ é o complexo sobre $\text{Face } K$ cujas faces são as cadeias (em relação à inclusão) não vazias de faces de K . Assim, um vértice de $\text{Sd } K$ é uma face de K e uma face típica de $\text{Sd } K$ é

$$\tau = \{\sigma_1 \subseteq \sigma_2 \subseteq \cdots \subseteq \sigma_n\},$$

onde $\sigma_i \in \text{Face } K$ e $n \geq 1$. Considere agora complexos K_1 e K_2 . A *união disjunta* $K_1 \dot{\cup} K_2$ é o complexo sobre $VK_1 \dot{\cup} VK_2$ com conjunto de faces

Face $K_1 \dot{\cup} \text{Face } K_2$. Caso acrescentemos os conjuntos da forma $\tau = \sigma_1 \dot{\cup} \sigma_2$, $\sigma_i \in \text{Face } K_i$, $i = 1, 2$, ao conjunto de faces de $K_1 \dot{\cup} K_2$, o complexo assim obtido é a *junção* de K_1 e K_2 , denotado $K_1 * K_2$. Assim,

$$\text{Face}(K_1 * K_2) = \{\sigma_1 \cup \sigma_2 : \sigma_i \in \{\emptyset\} \cup \text{Face } K_i, i = 1, 2\} \setminus \{\emptyset\}.$$

O *produto simplicial* $K_1 \Delta K_2$ é o complexo simplicial sobre $VK_1 \times VK_2$ com

$$\text{Face}(K_1 \Delta K_2) = \{\tau : \emptyset \neq \tau \subseteq \sigma_1 \times \sigma_2, \sigma_i \in \text{Face } K_i\},$$

ou, equivalentemente, cujas faces maximais (em relação à inclusão) são os produtos cartesianos $\sigma_1 \times \sigma_2$, $\sigma_i \in \text{Face } K_i$, σ_i face maximal de K_i . Note aliás que esta última forma de definir um complexo simplicial, a saber, dando apenas suas faces maximais é bastante prática e se justifica, já que o complexo fica univocamente definido. Finalmente, a *intersecção* $K_1 \cap K_2$ é o complexo sobre $VK_1 \cap VK_2$ cujo conjunto de faces é $\text{Face } K_1 \cap \text{Face } K_2$.

Fixamos a seguinte notação. Dado um conjunto finito V , Δ^V é o complexo sobre V , cujas faces são todos os subconjuntos não vazios de V . Δ^V é o $(|V| - 1)$ -simplexo (abstrato) sobre V . Caso V não seja vazio, o *bordo* de Δ^V , denotado $\partial\Delta^V$, é obtido retirando-se a face maximal de Δ^V . No caso onde V é unitário, o bordo $\partial\Delta^V$ é o *complexo vazio*, i.e., o complexo sobre $\emptyset$.

Seja K um complexo e $x \in VK$ um de seus vértices. A *ligação* de x em K , denotado $\text{lg}_K x$, é o subcomplexo de K definido por

$$\text{Face } \text{lg}_K x = \{\sigma \in \text{Face } K : x \notin \sigma \text{ e } \sigma \cup \{x\} \in \text{Face } K\}.$$

Introduzimos a seguinte notação. Suponha $v \notin VK$ e L um subcomplexo de K . Neste caso,

$$K' = v *_L K$$

denota o complexo com $VK' = \{v\} \cup VK$ e

$$\text{Face } K' = \text{Face } K \cup \{\sigma \cup \{v\} : \sigma \in \text{Face } L \cup \{\emptyset\}\}.$$

Note que temos $\text{lg}'_K v = L$. Quando $L = K$, costumamos omitir o subíndice L (em conformidade com a notação de junção). Definimos a *suspensão* ΣK

do complexo K por $\sum K = S^0 * K$, onde S^0 é a 0-esfera, ou, equivalentemente,

$$\sum K = x *_K (y * K)$$

onde $x \neq y$ não são vértices de K . Para $n \geq 2$, $\sum^n$ é definido por indução, $\sum^n K = \sum^{n-1}(\sum K)$. Um complexo K é um cone caso for da forma $x * L$ para algum vértice $x \in VK$ e um subcomplexo L de K , $x \notin VL$. A *estrela* de x em K é o cone $x * \lg_K x$. Assim, um complexo é um cone caso for a estrela de um de seus vértices. Neste caso, tais vértices são os *picos* do cone.

Muitas vezes em provas por indução é útil *remover* vértices de um complexo K . Se $x \in VK$, definimos $K - x$, complexo sobre $VK \setminus \{x\}$, cujas faces são as faces de K que não contém x . Assim, caso $K = x *_L K'$, então $K' = K - x$. Ainda, se $W \subseteq VK$, definimos $K - W$ como o complexo obtido pela remoção, um a um, dos elementos de W .

Definimos finalmente a *realização geométrica* $|K|$ de um complexo simplicial K , conceito fundamental que introduz a geometria aos complexos abstratos—objetos puramente combinatórios. Suponha $VK = \{x_1, \dots, x_n\}$. Considere as combinações convexas formais de VK

$$\xi = \sum_i \lambda_i x_i, \quad \sum \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0$$

e defina $\text{supp}(\xi) = \{x_i: \lambda_i > 0\}$, o *suporte* de ξ . Então o conjunto de tais ξ com $\text{supp}(\xi) \in \text{Face } K$ é denotado $|K|$. Pomos em $|K|$ uma estrutura de espaço métrico definindo a distância $d: |K| \times |K| \rightarrow \mathbb{R}^+$,

$$d(\xi, \varsigma) = \sqrt{\sum_i (\lambda_i^\xi - \lambda_i^\varsigma)^2}$$

onde $\xi = \sum \lambda_i^\xi x_i$ e $\varsigma = \sum \lambda_i^\varsigma x_i$.

É fácil provar que se $f: K_1 \rightarrow K_2$ é uma aplicação simplicial, podemos definir sua *realização geométrica* $|f|: |K_1| \rightarrow |K_2|$, uma aplicação contínua de $|K_1|$ em $|K_2|$, pondo

$$|f|(\xi) = \sum_i \lambda_i f(x_i)$$

onde $\xi = \sum \lambda_i x_i \in |K_1|$.

Note que se $f: K_1 \rightarrow K_2$ e $g: K_2 \rightarrow K_3$ são aplicações simpliciais, então $|gf| = |g||f|$.

b. Homologia Simplicial

Fixe um anel R comutativo com unidade e um complexo simplicial K . Seja σ uma q -face de K ($=$ face de cardinalidade $q+1$). Defina uma relação de equivalência nas ordens totais de σ , pondo duas ordens em uma mesma classe sse elas diferem por uma permutação par. Uma q -face orientada de K é uma q -face de K munida com uma das classes de equivalência das ordens totais sobre σ . Denotamos por $[x_0, \dots, x_q]$ a q -face orientada $\sigma = \{x_0, \dots, x_q\}$ munida da ordem $x_0 < \dots < x_q$. Defina $C_q(K) = C_q(K, R)$ como o R -módulo gerado pelas q -faces orientadas de K módulo as relações $\hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2 = 0$, onde os $\hat{\sigma}_i$ são as duas q -faces orientadas correspondentes a uma mesma q -face σ de K . Conseqüentemente, $C_q(K) \cong (0)$ para $q < 0$ e, para $q \geq 0$, $C_q(K)$ é um R -módulo livre de posto igual ao número de q -faces de K . Vamos definir um complexo de cadeias $C_\#(K) = (C_q(K), \partial_q)_{q \in \mathbb{Z}}$, pondo $\partial_q: C_q(K) \rightarrow C_{q-1}(K)$ dado por

$$\partial_q[x_0, \dots, x_q] = \sum_i (-1)^i [x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_q]$$

e estendendo por linearidade para os demais elementos de $C_q(K)$. Denotamos acima por $[x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_q]$, a $(q-1)$ -face orientada obtida pela omissão de x_i , i.e., $[x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_q]$. É um exercício simples mostrar que ∂_q realmente se estende e que $\partial_q \partial_{q+1} = 0$.

Podemos aumentar $C_q(K)$ pelo epimorfismo $\varepsilon: C_0(K) \rightarrow R$ tal que $\varepsilon[x] = 1 \in R$ para todo vértice x de K . O complexo aumentado $\tilde{C}_\#(K) = (C_\#(K), \varepsilon)$ é o complexo aumentado de cadeias orientadas de K (sobre R):

$$\tilde{C}_\#(K): \dots \rightarrow C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\varepsilon} R.$$

$$\begin{array}{ccc}
 K_1 \cap K_2 & \xhookrightarrow{i_1} & K_1 \\
 \downarrow i_2 & & \downarrow j_1 \\
 K_2 & \xhookrightarrow{j_2} & K_1 \cup K_2
 \end{array}$$

Figura 1. As inclusões.

Definimos a q -ésima homologia simplicial reduzida de K como a q -ésima homologia do complexo aumentado $\tilde{C}_\#(K)$. A notação que usaremos é $\tilde{H}_q(K) = \tilde{H}_q(K, R) = H_q(\tilde{C}_\#(K)) = \tilde{H}_q(C_\#(K))$.

Suponha agora $f: K_1 \rightarrow K_2$ uma aplicação simplicial. Defina

$$f_\#[x_0, \dots, x_q] = \begin{cases} 0, & \text{caso } f(x_i) = f(x_j) \\ & \text{para algum } x_i \neq x_j \text{ e} \\ [fx_0, \dots, fx_q], & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e observe que fica então bem definida uma aplicação de cadeias $f_\#: \tilde{C}_\#(K_1) \rightarrow \tilde{C}_\#(K_2)$ pela extensão por linearidade. A aplicação induzida a nível de homologia $f_{*q} = f_{\#*q}: \tilde{H}_q(K_1) \rightarrow \tilde{H}_q(K_2)$ é o homomorfismo induzido de $f: K_1 \rightarrow K_2$.

Terminamos enunciando um resultado muito útil no cálculo de homologias simpliciais.

Teorema 4.1. *Sejam K_1 e K_2 complexos simpliciais com $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$. Então a seqüência de Mayer-Vietoris*

$$\begin{aligned}
 \dots \rightarrow \tilde{H}_q(K_1 \cap K_2) &\xrightarrow{\alpha} \tilde{H}_q(K_1) \oplus \tilde{H}_q(K_2) \xrightarrow{\beta} \\
 &\xrightarrow{\beta} \tilde{H}_q(K_1 \cup K_2) \xrightarrow{\gamma} \tilde{H}_{q-1}(K_1 \cap K_2) \rightarrow \dots
 \end{aligned}$$

é exata. ||

Obs. Não definimos a aplicação γ acima, mas observamos que se as várias inclusões entre os complexos simpliciais que ocorrem na seqüência são denotadas como no diagrama da Figura 1., então

$$\alpha(\xi) = (i_{1*}\xi, i_{2*}\xi)$$

e

$$\beta(\zeta_1, \zeta_2) = j_{1*}\zeta_1 - j_{2*}\zeta_2$$

para todo $\xi \in \tilde{H}_q(K_1 \cap K_2)$ e para todo $\zeta_i \in \tilde{H}_q(K_i)$, $i = 1, 2$.

c. Homologia Singular

Não vamos definir homologia singular, a notação que usamos é bastante padronizada (cf. [Gr]). Em particular, se X é um espaço topológico e R , um anel comutativo com unidade,

$C_q(X, R)$ denota o R -módulo das q -cadeias,

$Z_q(X, R)$ são os q -ciclos,

$B_q(X, R)$ são os q -bordos e

$\tilde{H}_q(X, R)$ denota a q -homologia singular reduzida de X com coeficientes em R .

Se $f: X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua entre espaços topológicos,

$$f_{\#}: C_{\#}(X, R) \rightarrow C_{\#}(Y, R)$$

denota a aplicação de cadeias induzida por f e

$$f_*: \tilde{H}_*(X, R) \rightarrow \tilde{H}_*(Y, R),$$

a aplicação induzida a nível de homologia.

Os teoremas fundamentais conectando as homologias simplicial e singular são:

Teorema 4.2. *Seja K um complexo simplicial, então existe um isomorfismo (canônico) de R -módulos*

$$j_q = j_q^K: \tilde{H}_q(|K|, R) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_q(K, R),$$

para todo q .

||

O isomorfismo acima goza da seguinte propriedade de naturalidade:

Teorema 4.3. Sejam K_1 e K_2 complexos simpliciais e $f: K_1 \rightarrow K_2$ uma aplicação simplicial. Então, os homomorfismos induzidos em ambas as homologias são iguais, i.e., é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_q(K_1, R) & \xrightarrow{f_*} & \tilde{H}_q(K_2, R) \\ \parallel j_q & & \parallel j_q \\ \tilde{H}_q(|K_1|, R) & \xrightarrow{|f|_*} & \tilde{H}_q(|K_2|, R) \end{array}$$

para todo q . ||

O último resultado que deixamos registrado é a Fórmula de Künneth para o caso onde o anel de coeficientes é um corpo. Neste caso particular, o enunciado é bastante simples:

Teorema 4.4. Sejam X_1 e X_2 espaços topológicos e suponha o anel e coeficientes das homologias um corpo k . Então, para todo $q \geq 0$,

$$H_q(X_1 \times X_2) \cong \bigoplus_{i,j} H_i(X_1) \otimes_k H_j(X_2),$$

onde a soma direta se estende sobre os $i, j \geq 0$ com $i + j = q$. ||

5. Categorias e Funtores

Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste de

- i. Objetos $A, B, C, \dots$
- ii. Para cada par A, B de objetos, temos o conjunto dos *morfismos* ou *flechas*, $\text{Mor}(A, B)$, de A para B , uma flecha usualmente denotada $f: A \rightarrow B$ e
- iii. Para cada tripla A, B, C de objetos, temos uma *lei de composição*

$$\text{Mor}(A, B) \times \text{Mor}(B, C) \rightarrow \text{Mor}(A, C)$$

que associa a flecha gf ao par (f, g) .

Ademais, valem os seguintes axiomas:

- a. Uma flecha f define univocamente os objetos A e B tais que $f: A \rightarrow B$,
- b. Se $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ e $h: C \rightarrow D$ são flechas em $\mathcal{C}$, então $h(gf) = (hg)f$ e
- c. Para cada objeto A , existe uma flecha privilegiada, denotada $1_A: A \rightarrow A$, satisfazendo $f1_A = f$ e $1_Ag = g$ para quaisquer flechas $f: A \rightarrow B$ e $g: C \rightarrow A$

Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Um *funtor covariante* $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ é uma lei de associação entre os objetos e entre as flechas de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ tal que para cada objeto A de $\mathcal{C}$, existe um de $\mathcal{D}$ associado, denotado $\mathcal{F}A$, e, para cada flecha $f: A \rightarrow B$ em $\mathcal{C}$, temos associado uma de $\mathcal{D}$, denotada $\mathcal{F}f: \mathcal{F}A \rightarrow \mathcal{F}B$. Ademais, a associação deve ser tal que

- a. $\mathcal{F}(gf) = (\mathcal{F}g)(\mathcal{F}f)$ e
- b. $\mathcal{F}1_D = 1_{\mathcal{F}D}$,

para quaisquer flechas $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ e qualquer objeto D .

Conhecemos já várias categoria, de fato, cada uma das seções anteriores foi dedicada à definição de uma certa categoria particular. Iremos, ao longo deste trabalho, ligá-los por funtores e o nosso objetivo final é, como descrito na Introdução, utilizar tais funtores para obter resultados puramente combinatórios. Definimos abaixo as várias categorias e respectivas notações de que faremos uso mais adiante.

i. Graf,

objetos: grafos,

flechas: morfismos de grafos.

ii. $\text{OrdP}^{\text{Comp}}$, (resp. $\text{OrdP}^{\text{Pres}}$),

objetos: ordens parciais,

flechas: aplicações que preservam comparabilidade (resp. ordem.)

iii. **Top**,

objetos: espaços topológicos,

flechas: funções contínuas.

iv. **Top₂**, (resp. **Top₂[~]**),objetos: pares (X, τ) , X um espaço topológico e $\tau: X \rightarrow X$ uma involução contínua,

flechas: aplicações equivariantes (resp. classes de homotopia equivariante de aplicações equivariantes.)

v. **R-Mod**,

objetos: R-módulos,

flechas: homomorfismos de R-módulos.

vi. **CompS**,

objetos: complexos simpliciais,

flechas: aplicações simpliciais.

Já temos, também, alguns funtores:

i. $|\cdot|: \text{CompS} \rightarrow \text{Top}$, cuja definição nos objetos é $K \mapsto |K|$ e nas flechas é

$$(K_1 \xrightarrow{f} K_2) \mapsto (|K_1| \xrightarrow{|f|} |K_2|).$$

ii. $\tilde{H}_*(\cdot, R): \text{CompS} \rightarrow \text{R-Mod}$, cuja definição nos objetos é

$$K \mapsto \tilde{H}_*(K, R)$$

e nas flechas é

$$(K_1 \xrightarrow{f} K_2) \mapsto (\tilde{H}_*(K_1, R) \xrightarrow{f_*} \tilde{H}_*(K_2, R)),$$

e, analogamente, para o funtor homologia singular $\text{Top} \rightarrow \text{R-Mod}$.

Notas Bibliográficas.

A referência básica para ordens parciais é [Bi]. A nossa terminologia da Teoria dos Grafos é bastante padrão, o leitor perceberá conformidade de notação com textos como [Bo] ou [Lu]. Provavelmente os grafólogos perceberam que os nossos grafos são todos simples e que este fato está tácito na terminologia. Termos da Álgebra Homológica e da Topologia Algébrica em geral podem ser encontrados em [Sp], [ES], [Cr] ou em [Gr].

Capítulo I

Ordens Parciais e Topologia

Apresentamos aqui um funtor $|\cdot|: \text{OrdP}^{\text{Comp}} \rightarrow \text{Top}$, a *realização geométrica* de ordens parciais. Como comentamos na Introdução, é a partir deste funtor que a geometria entra na construção do funtor de Walker $\mathcal{W}$. Também observamos lá que, estritamente falando, apenas algumas definições deste capítulo são efetivamente usadas na construção de $\mathcal{W}$. Entretanto, espera-se que haja aqui uma coleção de resultados sobre realizações geométricas suficiente para desenvolvermos uma intuição razoável sobre o assunto.

O resultado principal da seção 1 é o Teorema 1.8. que dá uma condição sobre ordens parciais que garante a contratibilidade das respectivas imagens pelo funtor $|\cdot|$. A seção 2 é dedicada à prova de que $|P \times Q| \approx |P| \times |Q|$ para quaisquer ordens P e Q . O objetivo da seção 3 é expor uma fórmula para o tipo de homotopia de $|P|$ em função de vários $|Q|$, Q subordem de P . Este último resultado é suficiente para se calcular o tipo de homotopia de $|R \setminus \{0, 1\}|$, se R é um reticulado semimodular. Tal resultado será importante na prova da Conjectura de Kneser. A última seção deste capítulo é dedicada a dois resultados clássicos da área: o Teorema do Nervo e o Teorema do Corte. O primeiro nos será útil no Capítulo IV e

o segundo foi incluído devido a ter sido um dos primeiros resultados desta área e por ilustrar a relevância do funtor $|\cdot|$ na Teoria das Álgebras de Incidência.

1. Topologia de Ordens Parciais

Dada uma ordem parcial finita P , o *complexo das cadeias* de P , denotado CP , é o complexo simplicial sobre P cujo conjunto de faces é o conjunto das cadeias não vazias de P . Observe que, por exemplo, se K é um complexo simplicial, K , ou mais precisamente, *Face* K , é canonicamente uma ordem parcial pela relação de inclusão e *C Face* K é simplesmente a subdivisão baricêntrica de K . Assim, $|K| \approx |C \text{ Face } K|$.

Suponha P e Q duas ordens parciais e $f: P \rightarrow Q$ uma aplicação que preserva comparabilidade. É fácil ver então que f é uma aplicação simplicial de CP em CQ e, assim, fica definida uma função contínua $|f|: |CP| \rightarrow |CQ|$ associada a f .

Teorema 1.1. *As associações $P \mapsto |CP|$ e $f \mapsto |f|$ acima definem um funtor covariante de $\text{OrdP}^{\text{Comp}}$ em Top .* ||

Dizemos que $|CP|$ é a *realização geométrica* da ordem parcial P e $|f|$, a da aplicação f . Este funtor permite-nos analisar ordens parciais por um ponto de vista geométrico. Passaremos a cometer alguns abusos de notação e de linguagem tais como “ P é contraível” ou “ $f \simeq g$ ”. Claramente, nestes casos, estamos nos referindo às respectivas realizações geométricas. Assim, para P e Q ordens parciais, $P \simeq Q$ significa $|CP| \simeq |CQ|$; se $f, g: P \rightarrow Q$ preservam ordem, $f \simeq g$ significa $|f| \simeq |g|$, etc.

Observe que se P^{op} é o dual da ordem P , $|P| = |P^{op}|$; logo todos os resultados podem ser “dualizados”.

O caso onde P é a ordem parcial dos subconjuntos próprios de $U = \{1, 2, \dots, n+2\}$ é fundamental. Note que neste caso, P é a ordem parcial das faces do bordo $\partial\Delta^U$ do simplexo sobre U , assim, $CP = \text{Sd } \partial\Delta^U$ e

$|CP| \approx |\partial \Delta^U| \approx S^n$. Se $c: P \rightarrow P$ é a complementação restrita a P , c é uma involução e como $c \mapsto |c|$ é funtorial, $|c|: |P| \rightarrow |P|$ também o é. Mais ainda, existe um homeomorfismo $h: S^n \rightarrow |CP|$ tal que $|c|h = ha$ onde $a: S^n \rightarrow S^n$ é a antípoda de S^n , cf. Proposição II.3.3.

Os seguintes lemas elementares são úteis no estudo do funtor realização geométrica $|\cdot|: \text{OrdP}^{\text{Comp}} \rightarrow \text{Top}$.

Lema 1.2. *Sejam K um complexo simplicial, X um espaço topológico e $f, g: |K| \rightarrow X$ duas aplicações contínuas. Admita que para cada σ face de K , podemos associar $C(\sigma) \subseteq X$, subespaço de X , com:*

- i. $C(\sigma)$ é contraível,
- ii. $\tau \subseteq \sigma \Rightarrow C(\tau) \subseteq C(\sigma)$,
- iii. $f(|\sigma|) \cup g(|\sigma|) \subseteq C(\sigma)$

para todo $\sigma, \tau \in \text{Face } K$. Então $f \simeq g$.

Prova. Vamos construir uma homotopia explícita

$$F: |K| \times I \rightarrow X$$

tal que $F(\cdot, 0) = f$, $F(\cdot, 1) = g$ e, ainda, $F(\sigma \times I) \subseteq C(\sigma)$. De fato, construímos para cada $q = 0, 1, \dots$,

$$F^q: |K^q| \times I \rightarrow X$$

homotopia $F^q: f^q \simeq g^q$, onde f^q (resp. g^q) denota a restrição de f (resp. g) a $|K^q|$ e ainda F^q satisfazendo

$$F^q(|\sigma| \times I) \subseteq C(\sigma) \quad \forall \sigma \in \text{Face } K, \quad \dim \sigma \leq q$$

e tal que F^{q+1} restrita a $|K^q| \times I$ coincide com F^q . Desta forma, para $q = \dim K$, F^q é a homotopia procurada.

Caso $q = 0$. Para cada $x \in VK$, seja $\lambda_x: I \rightarrow X$, contínua, com $\lambda_x(0) = f(x)$, $\lambda_x(1) = g(x)$ e $\lambda_x(I) \subseteq C(x)$. Defina

$$F^0(x, t) = \lambda_x(t)$$

para todo $x \in VK$ e todo $t \in I$.

Caso $q > 0$. Admita F^{q-1} já definida. Seja $\sigma \in \text{Face } K$ com $\dim \sigma = q$. Defina

$$L^\sigma: (|\partial\sigma| \times I) \cup (|\sigma| \times \{0, 1\}) \longrightarrow X$$

por

$$L^\sigma(x, t) = \begin{cases} f(x) & \text{se } t = 0, \\ g(x) & \text{se } t = 1 \text{ e} \\ F^{q-1}(x, t) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que L^σ tem sua imagem contida em $C(\sigma)$ contraível e, portanto, L^σ pode ser estendida a uma aplicação $\widehat{L}^\sigma: |\sigma| \times I \rightarrow X$. Defina F^q como a colagem das várias extensões $\widehat{L}^\sigma$, $\sigma \in \text{Face } K$, $\dim \sigma = q$. $\parallel$

O seguinte corolário é uma versão combinatória do lema anterior:

Corolário 1.3. *Sejam K_1 e K_2 dois complexos e $f, g: K_1 \rightarrow K_2$ duas aplicações simpliciais. Suponha $K_2[f(\sigma) \cup g(\sigma)]$ contraível para todo $\sigma \in \text{Face } K_1$. Então $f \simeq g$.*

Prova. Decorre do Lema 1.2. tomando $C(\sigma) = |f(\sigma) \cup g(\sigma)|$, o subespaço contraível de $|K_2|$ correspondente ao subcomplexo pleno $K_2[f(\sigma) \cup g(\sigma)]$ de K_2 . $\parallel$

Lema 1.4. *Seja P uma ordem parcial com um elemento $a \in P$ comparável com qualquer outro elemento de P . Então P é contraível.*

Prova. Basta perceber que CP é o cone $a * C(P \setminus \{a\})$. $\parallel$

Os seguintes resultados são simples aplicações do Corolário 1.3. no contexto de ordens parciais.

Proposição 1.5. *Sejam P e Q duas ordens parciais e $f, g: P \rightarrow Q$ duas aplicações que preservam ordem. Se $f(x)$ e $g(x)$ são comparáveis para todo $x \in P$, então $f \simeq g$.*

Prova. Para cada $\sigma \in \text{Face } CP$, seja $Q_\sigma = f(\sigma) \cup g(\sigma)$ subordem parcial de Q . Pelo Corolário 1.3., concluímos $f \simeq g$: note que o Lema 1.4. implica que $Q_\sigma \simeq *$ pois Q_σ tem elemento mínimo. $\parallel$

Corolário 1.6. Sejam P e Q duas ordens parciais e $f: P \rightarrow Q$, $g: Q \rightarrow P$ duas aplicações que reverterem ordem satisfazendo:

- i. $\forall x \in P$, x e $gf(x)$ são comparáveis,
- ii. $\forall y \in Q$, y e $fg(y)$ são comparáveis.

Então $P \simeq Q$.

Prova. Nestas condições, a Proposição 1.5. implica que $1_P \simeq gf$ e $1_Q \simeq fg$, isto é, f é uma equivalência de homotopia entre P e Q com inversa de homotopia g . ||

Uma situação muito interessante onde as hipóteses de 1.6. são satisfeitas é quando temos uma *conexão de Galois* entre duas ordens parciais. Dados P, Q duas ordens, um par de aplicações (f, g) , $f: P \rightarrow Q$ e $g: Q \rightarrow P$, é uma *conexão de Galois* caso

- i. f e g reverterem ordem,
- ii. $gf(x) \geq x$ para todo $x \in P$ e $fg(y) \geq y$ para todo $y \in Q$.

O conceito acima é uma abstração da situação que ocorre na Teoria dos Corpos, de onde aliás, provém seu nome. Se K é um corpo e G é o grupo de automorfismos de K , para cada subcorpo L de K , podemos associar o subgrupo de G que fixa L ponto a ponto e, reciprocamente, se H é um subgrupo de G , temos um subcorpo de K naturalmente associado, o corpo dos elementos fixos por todos os elementos de H . Esta associação entre os subcorpos de K e os subgrupos de G é uma conexão de Galois entre os respectivos reticulados. Uma situação puramente combinatória onde ela ocorrerá vai ser vista na seção 4 deste capítulo, quando provarmos o Teorema do Nervo. Cabe mencionar que os resultados devido a Rota sobre cortes em reticulados (cf. seção 4) que o levaram a conjecturar a existência de bases topológicas daqueles resultados, foram obtidos por técnicas envolvendo conexões de Galois.

Corolário 1.7. Sejam $f, g: P \rightarrow Q$ duas aplicações que preservam ordem entre as ordens parciais P e Q . Se $f(x) \wedge g(x)$ existe para todo $x \in P$, então $f \simeq g$.

Prova. Basta observar que $h: P \rightarrow Q$ dada por $h(x) = f(x) \wedge g(x)$ é homotópico a f e g pela Proposição 1.5. ||

Observe que podemos substituir $\wedge$ por $\vee$ neste corolário. Ainda, o resultado acima implica que se numa ordem parcial P existe um elemento $t \in P$ tal que $t \wedge x$ existe para todo elemento $x \in P$, então P é contraível: note que a aplicação identidade de P e a constante em t satisfazem as hipóteses de 1.7., logo são homotópicas. Uma pergunta natural é se podemos estender esta observação para o caso onde apenas admitimos a existência de um $t \in P$ tal que para todo $x \in P$, ou existe $t \wedge x$, ou existe $t \vee x$. Infelizmente tal extensão não pode existir, mas o seguinte resultado está nesta direção:

Teorema 1.8. *Seja P uma ordem parcial com um elemento $t \in P$ satisfazendo:*

- i. $\forall x \in P$, ou existe $t \wedge x$, ou existe $t \vee x$
- ii. $\forall x, y \in P$ com $x < y$, se $x \wedge t$ não existe, mas $y \wedge t$ existe, então $(y \wedge t) \vee x$ existe.

Então P é contraível.

Prova. Seja $M = \{y \in P: y \wedge t \text{ existe}\}$. Para cada $\sigma \in \text{Face } CP$, defina

$$\begin{aligned} P(\sigma) = & \sigma \cup \{t\} \cup \{y \wedge t: y \in \sigma \cap M\} \\ & \cup \{x \vee t: x \in \sigma \setminus M\} \\ & \cup \{(y \wedge t) \vee x: x < y, x \in \sigma \setminus M \text{ e } y \in \sigma \cap M\}. \end{aligned}$$

Seja também $m = \min \sigma$. Observe que se $z \in P(\sigma)$, ou $z \geq m$, ou $z = t$, ou $z = y \wedge t$ para algum $y \in \sigma \cap M$. Suponha que $m \in M$. Neste caso $m \wedge z$ existe trivialmente nos dois primeiros casos e $m \in M$ implica que $m \wedge (y \wedge t) = m \wedge t$ no terceiro caso. Considere agora o caso $m \notin M$. Observe então que $m \vee z$ existe para todo $z \in P(\sigma)$. De fato, se $z \geq m$ ou $z = t$, isto é trivial e se $z = y \wedge t$, para algum $y \in \sigma \cap M$, então a hipótese ii. se aplica.

Em ambos os casos, concluímos que $|CP(\sigma)|$ é contraível pela nota que precede este teorema (no caso $m \notin M$, use a versão dual da nota). Observe que definimos $C(\sigma) = |CP(\sigma)|$, para toda face σ de CP , satisfazendo as hipóteses do Lema 1.2. em relação às aplicações identidade de P e constante igual a t . Concluímos que P é contraível. $\parallel$

Terminamos esta seção observando que este teorema é uma extensão de um resultado clássico da área. Recordemos que a *parte própria* $\bar{L}$ de um

reticulado L é $L \setminus \{0, 1\}$. Ainda $x, y \in L$ são *complementares* em L se e só se $x \wedge y = 0$ e $x \vee y = 1$. Um reticulado L é *complementado* se e só se todo elemento de L tem pelo menos um complemento.

Corolário 1.9. *A parte própria de um reticulado não complementado é contraível.*

Prova. Seja L um reticulado não complementado e $s \in \bar{L}$ sem complemento. Neste caso, o Teorema 1.8. pode ser aplicado a $\bar{L}$ já que a hipótese i. é equivalente a s não ter complemento e a ii. decorre de $0 < x \leq (y \wedge s) \vee x \leq (y \wedge s) \vee y = y < 1$ para todo $x, y \in \bar{L}$ com $x \leq y$. ||

2. O Produto de Ordens Parciais

Suponha dadas duas ordens parciais P e Q . É natural perguntarmos qual é a relação entre $|CP|$, $|CQ|$ e as realizações geométricas das várias ordens parciais obtidas a partir de P e Q , tais como a união disjunta $P \dot{\cup} Q$, o encaixe $P * Q$ e o produto (categórico) $P \times Q$. Registramos inicialmente que

Proposição 2.1. *Sejam P e Q duas ordens parciais. Então:*

- i. $C(P \dot{\cup} Q) = CP \dot{\cup} CQ$ e
- ii. $C(P * Q) = CP * CQ$, a junção dos complexos CP e CQ . ||

O produto exige mais cuidado, mas o seguinte resultado é bastante conhecido:

Teorema 2.2. *Dadas duas ordens parciais P e Q , existe um homeomorfismo*

$$\tau = \tau_{P,Q}: |CP| \times |CQ| \longrightarrow |C(P \times Q)|$$

$$\begin{array}{ccc}
 |CP| \times |CQ| & \xrightarrow{\tau} & |C(P \times Q)| \\
 \downarrow |f| \times |g| & & \downarrow |f \times g| \\
 |CP'| \times |CQ'| & \xrightarrow{\tau'} & |C(P' \times Q')|
 \end{array}$$

Figura 1. A naturalidade de τ .

com a seguinte propriedade de naturalidade: caso P' e Q' sejam duas outras ordens parciais e $f: P \rightarrow P'$, $g: Q \rightarrow Q'$, aplicações que ambas preservam ou revertem ordem, o diagrama da Figura 1. ($\tau' = \tau_{P', Q'}$) é comutativo, onde definimos $f \times g: P \times Q \rightarrow P' \times Q'$ e $|f| \times |g|: |P| \times |Q| \rightarrow |P'| \times |Q'|$ coordenada a coordenada.

Prova. O enunciado é em termos de τ , pois a naturalidade acima será muito útil no Capítulo II. Entretanto, a definição de τ^{-1} é mais simples. Sejam π_P e π_Q as projeções nas primeira e segunda coordenadas definidas sobre $P \times Q$. Defina

$$\eta = |\pi_P| \times |\pi_Q|: |C(P \times Q)| \longrightarrow |CP| \times |CQ|$$

pondo $\xi \mapsto (|\pi_P|\xi, |\pi_Q|\xi)$, para todo $\xi \in |C(P \times Q)|$. Defina η' para P' e Q' analogamente. Um cálculo simples mostra que $\eta'|f \times g| = (|f| \times |g|)\eta$. Vamos construir as inversas (contínuas) de η e η' . Feito isto, a última comutatividade implica que $|f \times g|\tau = \tau'(|f| \times |g|)$ e isto é a propriedade de naturalidade exigida para τ .

Fixe $(p, q) \in |CP| \times |CQ|$ arbitrariamente, então $p = \sum_{i=0}^n \alpha_i x_i$ e $q = \sum_{j=0}^m \beta_j y_j$ com $\sum_i \alpha_i = \sum_j \beta_j = 1$, $\alpha_i, \beta_j > 0$ e $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ cadeia em P e $y_0 < y_1 < \dots < y_m$ cadeia em Q . Defina $a_k = \alpha_0 + \dots + \alpha_k$ para $0 \leq k \leq n$ e $b_l = \beta_0 + \dots + \beta_l$ para $0 \leq l \leq m$. Considere os conjuntos ordenados de símbolos $A = \{A_0 < A_1 < \dots < A_n\}$ e $B = \{B_0 < B_1 < \dots < B_m\}$. Defina em $C = A \dot{\cup} B$ uma extensão dessas ordens pondo $A_i < B_j$ se e só se $a_i \leq b_j$. Denote $C = \{C_0 < C_1 < \dots < C_{n+m+1}\}$. Defina agora, para $i = 0, 1, \dots, n+m+1$,

$$c_i = \begin{cases} a_j, & \text{se } C_i = A_j \text{ e} \\ b_j, & \text{se } C_i = B_j \end{cases}$$

e convencie $c_{-1} = 0$. Ponha também

$$k_i = |\{j < i: C_j \in A\}|$$

e

$$l_i = |\{j < i: C_j \in B\}|.$$

Observe que se $r = \max\{i: k_i = j\}$ então $C_r = A_j$ e analogamente para B . Nestas condições,

$$(x_{k_0}, y_{l_0}) < (x_{k_1}, y_{l_1}) < \cdots < (x_{k_{m+n+1}}, y_{l_{m+n+1}})$$

é uma cadeia em $P \times Q$. Definimos

$$\tau(p, q) = \sum_{i=0}^{m+n+1} (c_i - c_{i-1})(x_{k_i}, y_{l_i}).$$

Provamos que $\eta\tau(p, q) = (p, q)$. Por definição,

$$\eta\tau(p, q) = \left(\sum_j \sum_{k_i=j} (c_i - c_{i-1})x_j, \sum_j \sum_{l_i=j} (c_i - c_{i-1})y_j \right).$$

Fixe j e sejam t, u respectivamente o máximo e o mínimo de $\{i: k_i = j\}$; então $c_t = a_j$, $c_u = a_{j-1}$ e $\sum_i (c_i - c_{i-1}) = a_j - a_{j-1} = \alpha_j$ e, assim, $|p|_P \eta\tau(p, q) = p$. A segunda componente é análoga.

Provaremos agora que τ é sobrejetor. Combinado a $\eta\tau = \text{id}$, τ é uma bijeção, em realidade, η é sua inversa. Seja $s = \sum_i \lambda_i z_i$, $\sigma = \{z_0 < z_1 < \cdots < z_t\}$ cadeia em $P \times Q$. Sejam $\sigma_1 = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\}$ a imagem de σ pela projeção π_P e $\sigma_2 = \{y_0 < y_1 < \cdots < y_m\}$ a pela π_Q . Adicionando eventualmente alguns coeficientes nulos, podemos assumir que se $z_r = (x_i, y_j)$, então ou $z_{r+1} = (x_{i+1}, y_j)$ ou $z_{r+1} = (x_i, y_{j+1})$. Defina $c_r = \sum_{i=0}^r \lambda_i$. Suponha $z_r = (x_i, y_j)$. Caso $z_{r+1} = (x_{i+1}, y_j)$, defina $a_i = c_r$ e, caso contrário, $b_j = c_r$. Temos então $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n = 1$ e $b_0 \leq b_1 \leq \cdots \leq b_m = 1$. Defina $p = \sum_{i=0}^n (a_i - a_{i-1})x_i \in |CP|$ e $q = \sum_{j=0}^m (b_j - b_{j-1})y_j \in |CQ|$ ($a_{-1} = b_{-1} = 0$). Por cálculo direto, segue que $\tau(p, q) = s$. ||

3. O Tipo de Homotopia de Certas Ordens

Seja P uma ordem parcial e suponha $Q \subseteq P$ uma subordem contraível de P . O Lema 3.5. abaixo, de caráter puramente topológico, diz que $|CP| \simeq |CP|/|CQ|$. Admita que, além disso, $P \setminus Q$ é uma anticadeia. Neste caso, uma reflexão geométrica simples (cf. Lema 3.6.) mostra que $|CP|/|CQ|$ é homeomorfo ao buquê das suspensões das ligações dos elementos $x \in P \setminus Q$ em CP : o homeomorfismo pode ser tomado tal que a imagem do ponto no qual CQ é contraído é o ponto de identificação das suspensões no buquê. Observe agora que se denotamos $P_{\sim x} = \{y \in P: x \geq y \text{ ou } x < y\}$, a ligação de x em CP é simplesmente $CP_{\sim x} \setminus \{x\}$.

Registramos o raciocínio acima no teorema seguinte. Se P é uma ordem parcial, dizemos que $a, b \in P$ são *ortogonais* caso não existam ambos $a \wedge b$ e $a \vee b$. Definimos ainda a seguinte notação:

$$a^\perp = \{b \in P: a \text{ e } b \text{ são ortogonais}\}.$$

Teorema 3.1. *Seja P uma ordem parcial com um elemento $t \in P$ tal que*

- i. $t^\perp$ é uma anticadeia e
- ii. *Se $x, y \in P \setminus t^\perp$, com $x < y$ são tais que $x \wedge t$ não existe, mas $y \wedge t$ existe, então $(y \wedge t) \vee x$ existe.*

Então

$$P \simeq \bigvee_{x \in t^\perp} \sum C(P_{\sim x} \setminus \{x\}).$$

Prova. Basta tomar $Q = P \setminus t^\perp$ na discussão acima e observar que Q é contraível pelo Teorema 1.8. ||

Seguem dois corolários que serão importantes nos capítulos posteriores.

O primeiro refere-se ao tipo de homotopia da parte própria do produto de duas ordens parciais *limitadas*, i.e., ordens parciais com elemento mínimo (0) e elemento máximo (1). A *parte própria* de uma ordem parcial limitada P é, naturalmente, $\overline{P} = P \setminus \{0, 1\}$. Se P e Q são duas ordens parciais, defina o *encaixe* de P sobre Q como a ordem obtida pela união disjunta de

P e Q acrescida das relações $q < p$ para todo $q \in Q$ e $p \in P$. Denotamos tal encaixe por $P * Q$. É bastante fácil de ver que o complexo de cadeias de qualquer um dos encaixes de P e Q é a junção (como complexos simpliciais) dos respectivos complexos de cadeias.

Corolário 3.2. *Sejam P e Q ordens parciais limitadas com partes próprias não vazias. Então*

$$\overline{P \times Q} \simeq \sum (\overline{P} * \overline{Q})$$

Prova. Segue da aplicação do Teorema 3.1. a $\overline{P \times Q}$, tomando $t = (0, 1)$. Observe que $t^\perp = \{(1, 0)\}$ e que para todo $(p, q) \in \overline{P \times Q}$, $(p, q) \wedge t = (0, q)$, assim, a segunda condição é vácuua. ||

No segundo corolário, pesquisamos o tipo de homotopia das partes próprias de reticulados semimodulares. Para tanto, utilizamos o seguinte resultado sobre a suspensão de buquês de esferas:

Lema 3.3. $\sum_{i=1}^n S^q \simeq \sum_{i=1}^n S^{q+1}$, para todo $q \geq 0$. ||

Corolário 3.4. *Se L é um reticulado semimodular de comprimento $d + 2$, $d \geq 0$, sua parte própria $\overline{L}$ tem o tipo de homotopia de um buquê de esferas de dimensão d .*

Prova. Usamos indução em d . O caso $d = 0$ é claro, já que $\overline{L}$ é um anticadeia que tem o tipo de homotopia de um buquê de 0-esferas. Admita $d > 0$ e seja $t \in \overline{L}$ um átomo. Caso $t^\perp = \emptyset$, o Corolário 1.9. nos diz que a parte própria de L é contraível, i.e., tem o tipo de homotopia de um buquê vazio de esferas. Suponha então $t^\perp \neq \emptyset$. Da semimodularidade de L , segue que todo elemento de $t^\perp$ é um coátomo, logo $t^\perp$ é uma anticadeia. Para aplicarmos o Teorema 3.1., verificamos que as hipóteses de ii. implicam que $x \wedge t = 0$, $y \wedge t = t$ (pois t é átomo) e, portanto, $z = t \vee x = (y \wedge t) \vee x \in \overline{L}$, posto que certamente $z \geq t$ não são complementares e, também $z = t \vee x < 1$, já que, caso contrário, $x \in t^\perp$. Observe agora que $\overline{L}_{\sim x} \setminus \{x\}$ é o intervalo aberto $(0, x) \subseteq L$ para todo coátomo x de L . Como $(0, x) = \overline{[0, x]}$ é a parte própria de um reticulado semimodular de comprimento $d + 1$, segue

da hipótese de indução que $C(0, x)$ é homotópico a um buquê de $(d-1)$ -esferas. Pelo Lema 3.3.,

$$\bar{L} \simeq \bigvee_{x \in t^{\perp}} \sum C(0, x)$$

é homotópico a um buquê de d -esferas. ||

Obs. Podemos na demonstração acima contar o número de esferas dos buquês que ocorrem no argumento e, através de um resultado devido a Weisner [We], concluir que $\bar{L}$ tem o tipo de homotopia de um buquê de $|\mu(0, 1)|$ d -esferas, onde μ é a função de Möbius de L . Concluimos esta seção registrando dois lemas que foram mencionados na prova do Teorema 3.1.

Lema 3.5. Se K é um complexo simplicial e A é um subcomplexo contraível, então $|K| \simeq |K|/|A|$. ||

O seguinte lema formaliza a “reflexão geométrica” a que nos referimos na prova do Teorema 3.1.

Lema 3.6. Seja K um complexo simplicial com $W \subseteq VK$ satisfazendo:

i. $K[W]$ tem dimensão 0 e

ii. $K - W$ é contraível.

Então

$$K \simeq \bigvee_{w \in W} \sum \lg_K w.$$

Prova. Considere $|K| \subseteq \mathbb{R}^{VK}$ a realização geométrica e K . Podemos então “separar” $|W|$ nessa representação, encarando

$$|K| \subseteq \mathbb{R}^{VK} = \mathbb{R}^{V(K-W)} \oplus \mathbb{R}^W.$$

Isto é, se $p \in |K|$ então $p \in |K - W| \cup |W|$ ou

$$p = \lambda_p \bar{p} + (1 - \lambda_p) \tilde{p}$$

para uma única tripla $(\lambda_p, \bar{p}, \tilde{p}) \in I \times |K - W| \times |W|$.

Da hipótese i., todo $\tilde{p}$ acima é um vértice de $|W|$, i.e., se $p \notin |K - W| \cup |W|$, então, na verdade,

$$p = \lambda_p \bar{p} + (1 - \lambda_p) w_p$$

onde $(\lambda_p, \bar{p}, w_p) \in I \times |K - W| \times W$.

Seja agora $H: |K - W| \times I \rightarrow |K - W|$ uma contração de $|K - W|$ a um ponto, i.e., $H: 1_{|K - W|} \simeq c_q$ onde c_q é a aplicação constante em $q \in |K - W|$. Defina

$$\tilde{H}: |K| \times I \rightarrow |K|$$

pondo

$$\tilde{H}(p, t) = \begin{cases} H(p, t) & \text{se } p \in |K - W| \\ p & \text{se } p \in |W| \text{ ou } \lambda_p \leq 1/2 \\ \mu_p H(\bar{p}, t) + (1 - \mu_p) \frac{1}{2} (\bar{p} + w_p) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

onde, no último caso, $\mu_p \in I$ é definido por

$$p = \mu_p \bar{p} + (1 - \mu_p) \frac{1}{2} (\bar{p} + w_p).$$

Observe que $\tilde{H}(\cdot, 0) = 1_{|K|}$ e que

$$\tilde{H}(|K| \times \{1\}) \simeq \bigvee_{w \in W} \sum \lg_K w.$$

Ainda, $\tilde{H}$ mostra que $|K| \simeq \tilde{H}(|K| \times \{1\})$ e concluímos a prova. ||

4. Os Teoremas do Nervo e do Corte

Vamos nos referir ao seguinte resultado como o Teorema do Nervo:

Teorema 4.1. *Seja G um grafo bipartido com bipartição $VG = V_1 \dot{\cup} V_2$. Defina o complexo K_i , $i = 1, 2$, por*

$$\begin{aligned} V K_i &= \{x \in V_i: x \text{ de grau pelo menos } 1\} \\ \text{e} \quad \text{Face } K_i &= \{\sigma \subseteq V_i: \exists y \in V_{3-i} \text{ com } \nu G(y) \supseteq \sigma \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Então $K_1 \simeq K_2$.

Prova. Considere Face K_i como uma ordem parcial através da inclusão. Definimos uma conexão de Galois entre tais ordens. Inicialmente, sejam $f: \text{Face } K_1 \rightarrow \text{Face } K_2$, dada por $f(\sigma) = \bigcap \{\nu G(x): x \in \sigma\}$ para todo $\sigma \in \text{Face } K_1$ e, analogamente, $g: \text{Face } K_2 \rightarrow \text{Face } K_1$, $g(\sigma) = \bigcap \{\nu G(x): x \in \sigma\}$ para todo $\sigma \in \text{Face } K_2$. Observe então que

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in \text{Face } K_1, \quad gf(\sigma) &\supseteq \sigma \\ \text{e} \quad \forall \sigma \in \text{Face } K_2, \quad fg(\sigma) &\supseteq \sigma, \end{aligned}$$

logo, pelo Corolário 1.6., as duas ordens parciais são homotópicas. Lembrando que o complexo de cadeias da ordem parcial das faces de um complexo é exatamente sua subdivisão baricêntrica, concluímos

$$|K_1| \approx |C \text{ Face } K_1| \simeq |C \text{ Face } K_2| \approx |K_2|. \quad \parallel$$

Uma versão mais conhecida do Teorema do Nervo é a seguinte. Para uma família finita $A = (A_i: i \in I)$ de conjuntos, defina o *nervo* de A como o complexo simplicial $\text{nv } A$ onde

$$\begin{aligned} V \text{nv } A &= \{i \in I: A_i \neq \emptyset\} \\ \text{e} \quad \text{Face } \text{nv } A &= \{\sigma \subseteq I: \sigma \neq \emptyset \text{ e } \bigcap_{i \in \sigma} A_i \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Teorema 4.1'. *Um complexo simplicial é homotópico ao nervo da família de suas faces maximais.*

Prova. Seja K um complexo simplicial e $A = (\sigma_i: i \in I)$ a família de suas faces maximais. Defina o grafo bipartido G de vértices $VG = I \dot{\cup} VK$

com $i \in I$ adjacente a $v \in VK$ sse $v \in \sigma_i$. Resta-nos apenas aplicar o Teorema 4.1. a G . ||

Uma generalização interessante deste último resultado é obtida quando substituímos a família das faces maximais por uma cobertura por subcomplexos contraíveis (com algumas restrições). Naturalmente, dizemos que $(K_i; i \in I)$, uma família de subcomplexos do complexo simplicial K , é uma *cobertura* de K sse toda face de K é uma face de algum K_i , i.e., $\text{Face } K = \bigcup_i \text{Face } K_i$. Lembre que o complexo L é um *cone de pico* v sse para toda face σ de L , $\sigma \cup \{v\}$ é também face de L , i.e., $L = v * (L \setminus \{v\})$.

Teorema 4.2. *Seja K um complexo simplicial e $(K_i; i \in I)$ uma cobertura finita por subcomplexos tal que para todo $I' \subseteq I$ não vazio, ou $\bigcap_{i \in I'} \text{Face } K_i = \emptyset$, ou o subcomplexo $\bigcap_{i \in I'} K_i$ é um cone. Então*

$$K \simeq \text{nv}(\text{Face } K_i; i \in I).$$

Obs. Embora a técnica da demonstração deste resultado seja análoga àquela do Teorema 4.1. e não essencialmente difícil, parece conveniente isolar o seguinte lema. Começamos simplificando a notação pondo $C^2P = C \text{ Face } CP$ para toda ordem parcial P . Ainda, $\text{at } P$ denota o conjunto dos elementos minimais de P e

$$\mu_P: \text{Face } C^2P \rightarrow P$$

é definida pela composta

$$\sigma \in \text{Face } C^2P \mapsto \bigvee \sigma \in \text{Face } CP \mapsto \bigwedge \bigvee \sigma \in P.$$

Lema 4.3. *Sejam P, Q ordens parciais admitindo aplicações $f: P \rightarrow \text{at } Q$ e $g: Q \rightarrow \text{at } P$ tais que:*

- i.a. $\forall \sigma \in \text{Face } CP, \exists \bigvee f(\sigma) \in Q$
- b. $\forall \tau \in \text{Face } CQ, \exists \bigvee g(\tau) \in P$.

Denote respectivamente por f_1 e g_1 , as aplicações

$$\sigma \in \text{Face } CP \mapsto \bigvee f(\sigma) \in Q$$

e

$$\tau \in \text{Face } CQ \mapsto \bigvee g(\tau) \in Q.$$

ii. Sejam $f_2: \text{Face } C^2P \rightarrow \text{Face } CQ$

dada por $\{\sigma_1 \subseteq \sigma_2 \subseteq \dots\} \mapsto \{f_1\sigma_1 \leq f_1\sigma_2 \leq \dots\}$

e $g_2: \text{Face } C^2Q \rightarrow \text{Face } CP$

dada por $\{\tau_1 \subseteq \tau_2 \subseteq \dots\} \mapsto \{g_1\tau_1 \leq g_1\tau_2 \leq \dots\}$

as aplicações que preservam ordem induzidas por f_1 e g_1 entre as ordens $\text{Face } C^2P$ e $\text{Face } CQ$ e entre $\text{Face } C^2Q$ e $\text{Face } CP$. Admita que

a. $\forall \sigma \in \text{Face } C^2P, (g_1f_2)(\sigma) \vee \mu_P(\sigma)$ existe em P e

b. $\forall \tau \in \text{Face } C^2Q, (f_1g_2)(\tau) \vee \mu_Q(\tau)$ existe em Q .

Então $P \simeq Q$.

Prova. Vamos mostrar que, feitas as identificações

$$|C \text{Face } C^2P| = |C \text{Face } CP| = |CP|$$

em relação a P e as análogas para Q , $|f_1| = |f_2|$ é uma equivalência de homotopia com inversa de homotopia $|g_1| = |g_2|$. As identificações mencionadas acima são os homeomorfismos lineares por partes obtidos quando realizamos a subdivisão baricêntrica de um complexo K através da subdivisão baricêntrica geométrica de $|K|$. Observe que, pelo dual do Corolário 1.7., a hipótese ii.a. (resp. ii.b.) implica que $g_1f_2, \mu_P: \text{Face } C^2P \rightarrow P$ (resp. $f_1g_2, \mu_Q: \text{Face } C^2Q \rightarrow Q$) são homotópicas. Registramos no lema abaixo que, módulo as identificações, $\mu_R \simeq 1_R$ para toda ordem R . Assim, concluímos que $|f_1| = |f_2|$ e $|g_1| = |g_2|$ são inversas a menos de homotopia. $\parallel$

Lema 4.4. Seja R uma ordem parcial $h: \text{Face } CR \rightarrow R$ tal que $h(\sigma) \in \sigma$ para toda cadeia σ não vazia de R . Então

i. h preserva comparabilidade e

ii. se $\varphi: |CR| \rightarrow |C \text{ Face } CR|$ é o homeomorfismo linear por partes canônico identificando $|CR|$ e $|C \text{ Face } CR|$, então $\varphi|_h \simeq 1_{|C \text{ Face } CR|}$.

Obs. Em particular,

$$\mu_R: \sigma \in \text{Face } C^2 R \mapsto \bigwedge \bigvee \sigma \in R$$

é homotópico à identidade em $|CR|$.

Prova do Lema 4.4.

- i. Se $\sigma \subseteq \tau$, então $h(\sigma) \in \sigma \subseteq \tau$, $h(\tau) \in \tau$ e $\tau \in \text{Face } CR$ implicam que $h(\sigma)$ e $h(\tau)$ são comparáveis.
- ii. Vamos usar o Lema 1.2. Para cada face $\tilde{\sigma}$ de $|C \text{ Face } CR|$, $\tilde{\sigma} = \{\sigma_1 \supseteq \sigma_2 \supseteq \dots\}$, σ_i cadeia em CR , defina

$$C(\tilde{\sigma}) = \varphi|\sigma_1| \subseteq |C \text{ Face } CR|.$$

As hipóteses i. e ii. do Lema 1.2. para os $C(\tilde{\sigma})$, $\tilde{\sigma}$ face de $C \text{ Face } CR$, são imediatas. Note então que

$$\begin{aligned} (\varphi|_h)|\tilde{\sigma}| &= \varphi|h\tilde{\sigma}| \\ &\subseteq \varphi|\sigma_1| \end{aligned}$$

e que

$$1_{|C \text{ Face } CR|}(|\tilde{\sigma}|) = |\tilde{\sigma}| \subseteq \varphi|\sigma_1|$$

onde a última inclusão é uma propriedade de φ . Concluimos do Lema 1.2. que $\varphi|_h \simeq 1_{|C \text{ Face } CR|}$. ||

Prova do Teorema 4.2. Usamos 4.3. pondo $P = \text{Face nv}(\text{Face } K_i : i \in I)$ e $Q = \text{Face } K$ e tomando uma $f: P \rightarrow \text{at } Q$ tal que fI' é um pico do complexo $\bigcap_{i \in I'} K_i$, $\forall I' \in P$, e a aplicação $g: Q \rightarrow \text{at } P$ satisfazendo $\sigma \in \text{Face } K_{g\sigma}$, $\forall \sigma \in Q$. Observe inicialmente que

a. Se $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_n$ é uma cadeia em P , então

$$\{fI_1, fI_2, \dots, fI_n\} \in \bigcap_{i \in I_1} \text{Face } K_i,$$

isto decorrendo por indução em n .

- b. Se $\sigma_1 \subseteq \sigma_2 \subseteq \dots$ é uma cadeia em Q , então $I = \{g\sigma_1, g\sigma_2, \dots\} \in P$ já que $\sigma_1 \in \text{Face } K_{g\sigma_i}$, para todo i .

As observações a. e b. acima mostram que a hipótese i. do Lema 4.3. está satisfeita. Considere agora $\sigma \in \text{Face } C^2P$, $\sigma = \{\sigma_1 \subseteq \sigma_2 \subseteq \dots\}$, $\sigma_i \in \text{Face } CP$, $\sigma_1 = \{I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots\}$, $I_i \in P$. Note então que a hipótese ii.a. de 4.3. decorre de

Obs. 1.

$$\bigcap \{\text{Face } K_i : i \in g_1 f_2 \sigma \cup \mu_P \sigma\} \supseteq \bigcap \{\text{Face } K_i : i \in g_1 f_2 \sigma \cup I_1\} \neq \emptyset,$$

pois basta notar que se $\tilde{\sigma} = f_1 \sigma_1 = \{fI_1, fI_2, \dots\} \in Q = \text{Face } K$, então $\tilde{\sigma} \in \bigcap_{i \in I_1} \text{Face } K_i$, de a. e $\tilde{\sigma} \in \text{Face } K_{g f_1 \sigma_i}$, para tod i , de b. Assim concluímos esta observação, já que

$$\begin{aligned} g_1 f_2 \sigma &= g_1 \{f_1 \sigma_1, f_1 \sigma_2, \dots\} \\ &= \{g\tilde{\sigma}, g f_1 \sigma_2, \dots\}. \end{aligned}$$

Para a hipótese ii.b. de 4.3., note que se $\tau = \{\tau_1 \subseteq \dots \subseteq \tau_p\} \in \text{Face } C^2Q$, $\tau_1 \in \text{Face } CQ$ com $\tau_p = \{\sigma_1 \subseteq \sigma_2 \subseteq \dots\}$, $\sigma_i \in \text{Face } K$ então vale:

Obs. 2.

$$f_1 g_2 \tau \cup \mu_Q \tau \in \bigcap \{\text{Face } K_i : i \in g_1 \tau_1\} \subseteq \text{Face } K,$$

de fato, denote $I_i = g_1 \tau_i$ e $\sigma' = f_1 g_2 \tau$ então $\sigma' = \{fI_1, \dots, fI_p\}$. Note que $\sigma' \in \bigcap \{\text{Face } K_i : i \in I_1\}$ decorre de a. e que para todo $\sigma \in \bigcap \{\text{Face } K_i : i \in I_p\}$, $\sigma \cup \sigma' \in \{\text{Face } K_i : i \in I_1\}$. Ainda, por b., $\sigma_1 = \mu_Q \tau \in \text{Face } K_{g\sigma_i}$, para todo i , logo $\mu_Q \tau \in \bigcap \{\text{Face } K_i : i \in I_p\}$. $\parallel$

Como corolário de 4.2., temos um dos resultados que comprovam a fundamentação topológica de certos teoremas na teoria de Álgebras de Incidência.

Começemos com uma definição. Seja L um reticulado e $X \subseteq L$ satisfazendo:

- i. $X \subseteq \bar{L} = L \setminus \{0, 1\}$,
- ii. X é uma anticadeia e

- iii. toda cadeia maximal de L encontra X , i.e., tem intersecção não vazia com X .

Nestas condições, dizemos que X é um *corte* de L . Defina ainda o *complexo dos não-geradores* de X em L , denotado $N(X, L)$, como o complexo simplicial sobre X cujo conjunto de faces é $\{\sigma \subseteq X: \bigvee \sigma \neq 1 \text{ ou } \bigwedge \sigma \neq 0\}$, i.e., o conjunto dos *não-geradores* em L . O Teorema do Corte é:

Teorema 4.5. Para todo reticulado L e corte $X \subseteq L$, $N(X, L) \simeq C\bar{L}$.

Prova. Defina K_x o subcomplexo de $C\bar{L}$ cujo conjunto de faces é

$$\text{Face } K_x = \{\sigma \subseteq \bar{L}: \sigma \neq \emptyset \text{ e } \sigma \cup \{x\} \text{ é cadeia em } \bar{L}\}.$$

Por X encontrar toda cadeia maximal de $\bar{L}$, $\mathcal{C} = (K_x: x \in X)$ cobre $C\bar{L}$. Note que para $I \subseteq X$,

$$\begin{aligned} I \in \text{Face } \text{nv}(\text{Face } K_x: x \in X) &\iff \bigcap_{i \in I} \text{Face } K_i \neq \emptyset \\ &\iff \exists l \in \bar{L} \forall e \in I: l \text{ e } e \text{ são comparáveis} \\ &\iff I \text{ é não-gerador em } L. \end{aligned}$$

Concluimos que o nervo da cobertura $\mathcal{C}$ é $N(X, L)$. Observe ainda que se l acima existe e se, por exemplo, l limita I inferiormente, $\bigcap_{x \in I} K_x$ é um cone de pico $\bigwedge I \neq 0$. No caso dual, $\bigcap_{x \in I} K_x$ é um cone de pico $\bigvee I \neq 1$. Temos então pelo Teorema 4.2.,

$$\begin{aligned} C\bar{L} &\simeq \text{nv}(\text{Face } K_x: x \in X) \\ &= N(X, L) \end{aligned} \quad \parallel$$

Notas Bibliográficas.

O funtor $|\cdot|: \text{OrdP}^{\text{Comp}} \rightarrow \text{Top}$ foi inicialmente considerado por Folkman [Fo], Mather [Ma] e Lakser [La] em conexão com uma conjectura de Rota [Ro] sobre $N(X, L)$, viz. que as homologias daquele complexo são independentes do corte particular X escolhido. A prova que apresentamos aqui do Teorema do Corte (Teorema 4.5.) é, basicamente devido à Lakser [La]. A nossa idéia de separar o Lema 4.3. surgiu da dificuldade natural de manipularmos subdivisões (de segunda ordem) de complexos simpliciais — dificuldade certamente não muito profunda, mas não desprezível. O Teorema 4.2. pode ser generalizado, enfraquecendo-se as hipóteses. Tal versão pode ser encontrada em [Bj2], [Lo3] ou [Qu].

Os fatos básicos sobre o funtor $|\cdot|$ expostos na seção 1 já são hoje bastante padrões e parecem ter sido primeiro divulgados por Quillen [Qu], exceto o Teorema 1.8. que é um recente resultado devido a Björner e Walker [BW]. O clássico Corolário 1.9. foi primeiro provado por Baclawski e Björner em conexão com a Teoria de Pontos Fixos em Ordens Parciais (cf. [BB1], [BB2] e [CF]).

A seção 2 é baseada em [ES]. O resultado principal da seção 3, o Teorema 3.1., tal como o Corolário 3.4., são devidos a Björner e a Walker [BW].

Capítulo II

O Funtor de Walker

Este é um capítulo central deste trabalho, definimos aqui o funtor $\mathcal{W}: \text{Graf} \rightarrow \text{Top}_2^{\sim}$. A construção de $\mathcal{W}$ é constituída de uma parte combinatória seguida de uma geométrica. Na primeira, associa-se um ortoreticulado $\mathcal{F}G$ a cada grafo G , o *ortoreticulado dos fechados* de G . Um ortoreticulado R é um reticulado munido de uma involução $c: R \rightarrow R$ que associa um complemento $c(x)$ a cada elemento $x \in R$. A geometria é então introduzida através das técnicas do capítulo anterior: o funtor $|\cdot|: \text{OrdP}^{\text{Comp}} \rightarrow \text{Top}$ pode ser aplicado ao par (R, c) , obtendo-se um objeto em Top_2 : um espaço $|CR|$ munido de uma involução $|c|: |CR| \rightarrow |CR|$. A ação de $\mathcal{W}$ nos objetos é, basicamente, $G \mapsto |C \mathcal{F}G|$. Sua ação nas flechas precisa ser definida com mais cuidado.

A primeira seção deste capítulo é dedicada à parte combinatória mencionada acima. Na seção seguinte, tratamos da topologia das realizações geométricas de ortoreticulados. Completamos a definição de $\mathcal{W}$ na seção 3. A última seção é dedicada a uma pequena análise da estrutura dos ortoreticulados de fechados de grafos.

1. O Ortoreticulado dos Fechados de um Grafo

Dado um grafo G , definimos o *complexo das vizinhanças* de G , denotado $\mathcal{N}G$, como o complexo simplicial cujas faces maximais são as vizinhanças de vértices de grau positivo, mais formalmente:

$$V \mathcal{N}G = \{x \in VG: gG(x) \geq 1\}$$

e
$$\text{Face } \mathcal{N}G = \{\sigma \subseteq VG: \emptyset \neq \sigma \text{ e } \exists y \in VG: \sigma \subseteq \nu G(y)\}.$$

As perguntas mais canônicas sobre $\mathcal{N}G$ são estudadas no Capítulo IV, estamos interessados aqui em um ortoreticulado obtido a partir de $\mathcal{N}G$.

Um ortoreticulado é um par (R, c) , onde R é um reticulado (como sempre, finito) e $c: R \rightarrow R$, uma involução que reverte ordem e associa, a cada elemento $x \in R$, um *complemento* $c(x)$, i.e., um $c(x) \in R$ tal que $x \wedge c(x) = 0$ e $x \vee c(x) = 1$. Vamos nos referir ao par (R, c) simplesmente como R , deixando implícito a complementação c (que eventualmente será denotada c_R). Definimos um *morfismo* de ortoreticulados $\mu: R, c_R \rightarrow S, c_S$ como uma aplicação $\mu: R \rightarrow S$ que preserva ordem, que comuta com as complementações a menos de uma desigualdade, i.e., tal que $\mu c_R \leq c_S \mu$ e, além disso, tal que $\mu^{-1}\{0\} = \{0\}$. O motivo pelo qual não exigimos igualdade na comutatividade é que estamos interessados, na verdade, na preservação da relação de *ortogonalidade*: defina tal relação para todo ortoreticulado L , denotada $\perp = \perp_L$, por

$$x \perp y \iff x \leq c(y),$$

para todo $x, y \in L$.

Proposição 1.1. *Seja R um ortoreticulado. Então*

- i. *a relação de ortogonalidade é simétrica,*
- ii. *todo elemento x é ortogonal a seu complemento $c(x)$, logo $c(0) = 1$,*
- iii. *$0 \in R$ é o único elemento ortogonal a si próprio e*
- iv. *se S é um ortoreticulado e $\mu: R \rightarrow S$, uma aplicação que preserva ordem, então*

$$\mu c_R \leq c_S \mu \iff \mu \text{ preserva ortogonalidade.}$$

Ademais, neste caso, $\mu^{-1}\{0\} = \{0\}$ implica que $\mu^{-1}\{1\} \subseteq \{1\}$.

Prova.

- i. $x \perp y \iff x \leq c(y) \iff c(x) \geq c^2(y) = y \iff y \perp x.$
- ii. $x = c^2(x) \Rightarrow x \perp c(x).$
- iii. $x \perp x \Rightarrow x \leq c(x) \Rightarrow 0 = x \wedge c(x) = x.$
- iv. Caso $\mu c_R \leq c_S \mu,$

$$\begin{aligned} x \perp y &\iff x \leq c_R(y) \\ &\implies \mu(x) \leq \mu c_R(y) \leq c_S \mu(y) \\ &\iff \mu(x) \perp \mu(y), \end{aligned}$$

para todo $x, y \in R$. Reciprocamente, caso μ preserve ortogonalidade,

$$\begin{aligned} x \perp c_R(x) &\Rightarrow \mu(x) \perp \mu c_R(x) \\ &\Rightarrow \mu(x) \leq c_S \mu c_R(x) \\ &\Rightarrow c_S \mu(x) \geq \mu c_R(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in R$. Finalmente,

$$\begin{aligned} \mu(x) = 1 &\Rightarrow \mu c_R(x) \leq c_S \mu(x) = 0 \\ &\Rightarrow c_R(x) = 0 \\ &\Rightarrow x = 1 \end{aligned} \quad \parallel$$

Estamos interessados em analisar ortoreticulados através do funtor realização geométrica de ordens parciais. Note entretanto que todo reticulado finito, tendo elemento mínimo, é contraível, cf. I.1.4. Assim, definimos a *parte própria* de um ortoreticulado R, c_R por $\bar{R}, \bar{c}_R$ onde $\bar{R}$ é a parte própria de R e $\bar{c}_R: \bar{R} \rightarrow \bar{R}$ é a involução sobre $\bar{R}$ obtida através da restrição da involução c_R , cf. 1.1.ii. acima. Se $\mu: R, c_R \rightarrow S, c_S$ é um morfismo de ortoreticulados, $\bar{\mu}: \bar{R}, \bar{c}_R \rightarrow \bar{S}, \bar{c}_S$ é definida pela restrição de μ , observe que $\bar{\mu}$ está bem definida devido a 1.1.iv. acima, $\mu^{-1}\{0, 1\} \subseteq \{0, 1\}$. É claro que os morfismos de ortoreticulados são fechados por composição e, assim, podemos definir OrtoR , a categoria dos ortoreticulados e de seus morfismos. Definimos, também, $\overline{\text{OrtoR}}$, cujos objetos são os pares $\bar{R}, \bar{c}_R$, onde R, c_R é um ortoreticulado, e cujas flechas são as aplicações $\bar{\mu}, \mu$ flecha em OrtoR .

O ortoreticulado de nosso interesse é dado por:

Proposição 1.2. Seja G um grafo. Denote $\nu = \nu G: \text{Face } NG \rightarrow \text{Face } NG$. Então

i. $\nu^2: \text{Face } NG \rightarrow \text{Face } NG$ é um operador de fecho, i.e.,

$$a. \nu^2 \sigma \supseteq \sigma,$$

$$b. (\nu^2)^2 \sigma = \nu^2 \sigma \text{ e}$$

$$c. \nu^2 \sigma \subseteq \nu^2 \tau \text{ se } \sigma \subseteq \tau,$$

para todo $\sigma, \tau \in \text{Face } NG$.

ii. Defina $\mathcal{F}G$ como a ordem parcial dos fechados de NG em relação ao fecho ν^2 , i.e., dos $\sigma \in \text{Face } NG$ tais que $\nu^2 \sigma = \sigma$, acrescido dos elementos mínimo $0 = \emptyset$ e máximo $1 = VG$. Então $\mathcal{F}G, \nu$ é um ortoreticulado, o ortoreticulado dos fechados de G .

Prova. i. Lembre que $\nu \sigma = \bigcap \{\nu x: x \in \sigma\}$, para toda face σ de NG , i.e., $\nu \sigma$ é o conjunto dos vértices adjacentes a todos os de σ , em particular, $\sigma \subseteq \nu^2 \sigma$. Como ν reverte ordem, $\nu \sigma \supseteq \nu^3 \sigma = \nu^2(\nu \sigma) \supseteq \nu \sigma$, i.e., $\nu^3 = \nu$, logo segue b.

ii. Isto decorre de i. Note inicialmente que $\mathcal{F}G = \{\emptyset, VG\} \cup \text{im } \nu$. Como $\nu^3 = \nu$, $\nu \sigma$ é fechado para toda face σ de NG , ademais, $\nu^2 \sigma = \sigma \Rightarrow \sigma \in \text{im } \nu$. Equivalentemente, $\mathcal{F}G$ é obtido fechando-se a coleção $\{\nu G(x): x \in VG\}$ das vizinhanças dos vértices de G (convencionando $\bigcap \emptyset = VG$). Desta última observação, fica claro que $\mathcal{F}G$ é um reticulado,

$$\bar{\sigma} \wedge \bar{\tau} = \bar{\sigma} \cap \bar{\tau} \in \mathcal{F}G$$

$$\begin{aligned} e \quad \bar{\sigma} \vee \bar{\tau} &= \bigwedge \{\bar{\rho} \in \mathcal{F}G: \bar{\rho} \supseteq \bar{\sigma} \cup \bar{\tau}\} \\ &= \nu^2(\bar{\sigma} \cup \bar{\tau}) \in \mathcal{F}G, \end{aligned}$$

para todo $\bar{\sigma}, \bar{\tau} \in \mathcal{F}G$. Note agora que $\nu: \mathcal{F}G \rightarrow \mathcal{F}G$ está bem definido (convencionando $\nu \emptyset = VG$). Concluímos de i.b. que ν é uma involução sobre $\mathcal{F}G$; claramente ν reverte ordem e, como $x \notin \nu x$ para todo $x \in VG$, $\bar{\sigma} \wedge \nu \bar{\sigma} = \emptyset$ para todo fechado $\bar{\sigma}$. Observe ainda que se $\bar{\sigma} \in \mathcal{F}G$, então $\nu(\bar{\sigma} \cup \nu \bar{\sigma}) = \emptyset$ já que, caso contrário, $x \in \nu(\bar{\sigma} \cup \nu \bar{\sigma}) \Rightarrow x \in \nu \bar{\sigma}$ e $x \in \nu^2 \bar{\sigma} = \bar{\sigma}$, logo $x \in \bar{\sigma} \cap \nu \bar{\sigma} = \emptyset$; absurdo. ||

Seja $f: G_1 \rightarrow G_2$ um morfismo entre os grafos G_1 e G_2 . Denote por $\mathcal{F}f$ a aplicação

$$\mathcal{F}f: \mathcal{F}G_1 \rightarrow \mathcal{F}G_2$$

dada por

$$(\mathcal{F}f)\bar{\sigma} = (\nu G_2)^2(f\bar{\sigma}).$$

É necessário fechar $f\bar{\sigma}$ em $\mathcal{F}G_2$ já que $\bar{\sigma} \in \mathcal{F}G_1$ não implica que $f\bar{\sigma} \in \mathcal{F}G_2$. O interessante é observar que $\mathcal{F}f$ assim definida é um morfismo de ortoreticulados. De fato, é trivial que $\mathcal{F}f$ preserva ordem e que $(\mathcal{F}f)^{-1}\{\emptyset\} = \{\emptyset\}$. Note ainda que se G é um grafo,

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} \perp \bar{\tau} &\iff \bar{\sigma} \subseteq \nu(\bar{\tau}) \\ &\iff \forall x \in \bar{\sigma} \forall y \in \bar{\tau}: x \text{ e } y \text{ são adjacentes em } G. \end{aligned}$$

para todo $\bar{\sigma}, \bar{\tau} \in \overline{\mathcal{F}G}$. Desta última observação, fica claro que o fato de ser f um morfismo de grafos implica que $\mathcal{F}f$ preserva ortogonalidade.

Infelizmente, a associação $G \mapsto \mathcal{F}G$, $f \mapsto \mathcal{F}f$, embora bem definida de **Graf** em **OrtoR**, não é um funtor, $\mathcal{F}$ não comuta com a composição de flechas. Considere, por exemplo, P^4 o caminho de comprimento 3, $a \in VP^4$ um dos vértices de grau um e $b \in VP^4$ o seu vizinho. Defina o grafo trivial G_1 , cujo único vértice é b , e também $G_2 = P^4 - a$. Sejam $i: G_1 \hookrightarrow P^4$ e $j: G_2 \hookrightarrow P^4$ as inclusões. Neste caso, $(\mathcal{F}j)(\mathcal{F}i)\{b\} \supset \mathcal{F}(ji)\{b\}$.

Proposição 1.3. Sejam G_i , $i = 1, 2, 3$, grafos e $f_1: G_1 \rightarrow G_2$ e $f_2: G_2 \rightarrow G_3$ morfismos. Então, para todo $\bar{\sigma} \in \mathcal{F}G_1$,

$$(\mathcal{F}f_2)(\mathcal{F}f_1)\bar{\sigma} \supseteq \mathcal{F}(f_2f_1)\bar{\sigma}. \quad \parallel$$

A proposição acima nos diz que $\mathcal{F}$ comuta com a composição de flechas “a menos de uma desigualdade”, $(\mathcal{F}f_2)(\mathcal{F}f_1) \geq \mathcal{F}(f_2f_1)$. Como salientamos na Introdução, estamos interessados no problema da existência ou não de morfismos entre dois grafos G_1 e G_2 dados. A proposição seguinte mostra que a existência de tais flechas em **Graf** é equivalente à existência de flechas em **OrtoR** de $\mathcal{F}G_1$ em $\mathcal{F}G_2$.

Proposição 1.3. *Sejam G_1 e G_2 dois grafos e suponha que exista um morfismo μ de ortoreticulados $\mu: \mathcal{F}G_1, \nu G_1 \rightarrow \mathcal{F}G_2, \nu G_2$. Então existe um morfismo de grafos $f: G_1 \rightarrow G_2$ tal que $\mathcal{F}f \leq \mu$.*

Prova. Seja x um vértice de G_1 . Para todo vértice x de G_1 , defina arbitrariamente $f(x) \in \mu(\nu G_1)^2(x) \neq \emptyset$. Se x e $y \in VG_1$ são vértices adjacentes em G_1 , então $(\nu G_1)^2(x) \perp (\nu G_1)^2(y)$ e, assim, $\mu(\nu G_1)^2(x) \perp \mu(\nu G_1)^2(y)$. Logo $f(x) \in \mu(\nu G_1)^2x \subseteq \nu G_2 \mu(\nu G_1)^2y$. Como $f(y) \in \mu(\nu G_1)^2y$, segue que f preserva adjacência, i.e., é um morfismo de grafos. Se, ainda, $\bar{\sigma} \in \mathcal{F}G_1 \setminus \{\emptyset, VG_1\}$ então

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f)\bar{\sigma} &= (\nu G_2)^2 f\bar{\sigma} \\ &\subseteq (\nu G_2)^2 \bigcup_{x \in \bar{\sigma}} \mu(\nu G_1)^2 x \\ &= \bigvee_{x \in \bar{\sigma}} \mu(\nu G_1)^2 x \\ &\subseteq \mu \bigvee_{x \in \bar{\sigma}} (\nu G_1)^2 x \\ &\subseteq \mu(\nu G_1)^2 \bar{\sigma} = \mu \bar{\sigma} \end{aligned}$$

logo, $\mathcal{F}f \leq \mu$. ||

Estamos agora num ponto fundamental da construção de $\mathcal{W}$. Embora haja um série de perguntas naturais sobre a associação $\mathcal{F}: G \mapsto \mathcal{F}G, \nu G$, preferimos continuar a construção do funtor e dedicar a última seção deste capítulo a análise de $\mathcal{F}$.

2. A Topologia de Ortoreticulados

Lembramos que dedicamos todo o Capítulo II a uma técnica topológica de análise de ordens parciais. Passamos agora a utilizar resultados daquele gênero no estudo do problema da existência de flechas em $\overline{\text{OrtoR}}$.

Começamos observando que se R, c é um ortoreticulado, podemos aplicar o funtor realização geométrica de ordens parciais, $|\cdot|: \mathbf{OrdP}^{\mathbf{Comp}} \rightarrow \mathbf{Top}$, no par $\overline{R}, \bar{c}$, obtendo um espaço topológico $|\overline{R}|$ e uma aplicação $|\bar{c}|: |\overline{R}| \rightarrow |\overline{R}|$. Lembrando que $\bar{c}$ é uma involução, segue da functorialidade de $|\cdot|$ que $|\bar{c}|$ também é uma involução:

$$|\bar{c}|^2 = |\bar{c}^2| = |1_{\overline{R}}| = 1_{|\overline{R}|}.$$

Defina a categoria $\mathbf{Top}_2$ cujos objetos são os espaços topológicos X munidos de uma involução contínua $\tau: X \rightarrow X$ e cujas flechas são as aplicações equivariantes $\varphi: X, \tau \rightarrow Y, \rho$, i.e., aplicações contínuas $\varphi: X \rightarrow Y$ comutando com as involuções: $\rho\varphi = \varphi\tau$. As considerações acima mostram que a associação $\overline{R}, \bar{c} \mapsto |\overline{R}|, |\bar{c}|$ leva objetos de $\mathbf{OrtoR}$ em objetos de $\mathbf{Top}_2$. Sejam agora $\overline{R}$ e $\overline{S}$ objetos de $\mathbf{OrtoR}$ e $\bar{\mu}: \overline{R} \rightarrow \overline{S}$ uma flecha, i.e., R e S são ortoreticulados e $\mu: R \rightarrow S$, um morfismo de ortoreticulados. Analisemos $|\bar{\mu}|: |\overline{R}| \rightarrow |\overline{S}|$. Como, para todo $x \in \overline{R}$,

$$\begin{aligned} \bar{c}_R x \perp x &\implies \bar{\mu} \bar{c}_R x \perp \bar{\mu} x \\ &\iff \bar{\mu} \bar{c}_R x \leq \bar{c}_S \bar{\mu} x, \end{aligned}$$

vale que $\bar{\mu} \bar{c}_R \leq \bar{c}_S \bar{\mu}$, i.e., $\bar{\mu}$ é equivariante “a menos de uma desigualdade”. Note agora que se definimos $\bar{\mu}' = \bar{c}_S \bar{\mu} \bar{c}_R$, então

$$\bar{\mu}' \bar{c}_R = \bar{c}_S \bar{\mu} \geq \bar{\mu} \bar{c}_R = \bar{c}_S \bar{\mu}'$$

e, comparando,

$$\begin{aligned} \bar{\mu} \bar{c}_R &\leq \bar{c}_S \bar{\mu}, \\ \text{enquanto que} \quad \bar{\mu}' \bar{c}_R &\geq \bar{c}_S \bar{\mu}'. \end{aligned}$$

Assim, nem $|\bar{\mu}|$, nem $|\bar{\mu}'|$, são aplicações equivariantes $|\overline{R}| \rightarrow |\overline{S}|$. (Embora ambos comutem com as involuções a menos de homotopia, cf. Proposição I.1.5). Experimentemos tirar a “média” entre $|\bar{\mu}|$ e $|\bar{\mu}'|$. Isto será feito através das técnicas introduzidas na seção I.2. Denote por n a cadeia $\{\widehat{0}, \dots, \widehat{n-1}\}$. Como $\bar{\mu} \bar{c}_R \leq \bar{c}_S \bar{\mu}$, $\bar{\mu} \leq \bar{\mu}'$ e, assim, fica bem definida

$$H\bar{\mu}: \overline{R} \times 2 \rightarrow \overline{S},$$

aplicação que preserva ordem, por $(x, \hat{0}) \mapsto \bar{\mu}x$ e $(x, \hat{1}) \mapsto \bar{\mu}'x$. Para todo espaço X , denote por $\varepsilon = \varepsilon^X: X \hookrightarrow X \times |2|$ a inclusão no equador, $x \mapsto (x, \frac{1}{2}\hat{0} + \frac{1}{2}\hat{1})$. Lembremos ainda que existe um homeomorfismo

$$\tau: |\bar{R}| \times |2| \xrightarrow{\approx} |\bar{R} \times 2|,$$

dada por I.2.1. Defina agora $\mathcal{E}\bar{\mu} = |H\bar{\mu}|\tau\varepsilon$.

Proposição 2.1. *Na notação acima,*

$$\mathcal{E}\bar{\mu}: |\bar{R}|, |\bar{c}_R| \rightarrow |\bar{S}|, |\bar{c}_S|$$

é equivariante.

Prova. Defina $\tau: 2 \rightarrow 2$ por $\hat{0} \mapsto \hat{1}$ e $\hat{1} \mapsto \hat{0}$. Veja Figura 1.

$$\begin{array}{ccccccc} |\bar{R}| & \xrightarrow{\varepsilon} & |\bar{R}| \times |2| & \xrightarrow{\tau} & |\bar{R} \times 2| & \xrightarrow{|H\bar{\mu}|} & |\bar{S}| \\ \downarrow |\bar{c}_R| & & \downarrow |\bar{c}_R| \times |\tau| & & \downarrow |\bar{c}_R \times \tau| & & \downarrow |\bar{c}_S| \\ |\bar{R}| & \xrightarrow{\varepsilon} & |\bar{R}| \times |2| & \xrightarrow{\tau} & |\bar{R} \times 2| & \xrightarrow{|H\bar{\mu}|} & |\bar{S}| \end{array}$$

Figura 1.

O quadrado a esquerda é trivialmente comutativo e o da direita o é a nível de ordens parciais,

$$\begin{aligned} \bar{c}_S H\bar{\mu}(x, i) &= H\bar{\mu}(\bar{c}_R \times \tau)(x, i) \\ &= \begin{cases} \bar{\mu}\bar{c}_R x, & \text{se } i = \hat{0} \text{ e} \\ \bar{c}_S \bar{\mu} x, & \text{se } i = \hat{1}. \end{cases} \end{aligned}$$

Resta observar que o quadrado central é comutativo devido à naturalidade de τ dada em I.2.1. ||

Teorema 2.2. *A associação*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}: \bar{R}, \bar{c}_R &\longmapsto |\bar{R}|, |\bar{c}_R| \\ \mathcal{E}: (\bar{R}, \bar{c}_R &\xrightarrow{\bar{\mu}} \bar{S}, \bar{c}_S) \longmapsto (|\bar{R}|, |\bar{c}_R| \xrightarrow{\mathcal{E}\bar{\mu}} |\bar{S}|, |\bar{c}_S|) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 |\bar{R}| & \xrightarrow{\epsilon} & |\bar{R}| \times |2| & \xrightarrow{\tau} & |\bar{R} \times 2| \xrightarrow{|H1_{\bar{R}}|} |\bar{R}| \\
 & & \downarrow |1_{\bar{R}}| \times |t| & & \downarrow |1_{\bar{R}} \times t| \nearrow |\pi_1| \\
 & & |\bar{R}| \times |1| & \xrightarrow{\tau} & |\bar{R} \times 1|
 \end{array}$$

Figura 2.

$$\begin{array}{ccccccc}
 |\bar{P}| & \xrightarrow{\epsilon} & & & & & \\
 \downarrow \epsilon & & & & & & \\
 |\bar{P}| \times |2| & \xrightarrow{\epsilon} & |\bar{P}| \times |2| \times |2| & \xrightarrow{|1_{\bar{P}}| \times \tau} & |\bar{P}| \times |2 \times 2| & \xrightarrow{|1_{\bar{P}}| \times \delta} & |\bar{P}| \times |2| \\
 \downarrow \tau & & \downarrow \tau \times 1_{|2|} & & \downarrow \tau & & \downarrow \tau \\
 |\bar{P} \times 2| & \xrightarrow{\epsilon} & |\bar{P} \times 2| \times |2| & \xrightarrow{\tau} & |\bar{P} \times 2 \times 2| & \xrightarrow{|1_{\bar{P}} \times \delta|} & |\bar{P} \times 2| \\
 \downarrow |H\bar{\alpha}| & & \downarrow |H\bar{\alpha}| \times 1_{|2|} & & \downarrow |H\bar{\alpha} \times 1_2| & & \downarrow H(\bar{\beta}\bar{\alpha}) \\
 |\bar{Q}| & \xrightarrow{\epsilon} & |\bar{Q}| \times |2| & \xrightarrow{\tau} & |\bar{Q} \times 2| & \xrightarrow{|H\bar{\beta}|} & |\bar{Q}|
 \end{array}$$

Figura 3.

é um funtor de $\overline{\text{OrtoR}}$ em Top_2 .

Prova. Que $\mathcal{E}$ está bem definida em ambos objetos e morfismos já foi estabelecido. Seja $\bar{R}, \bar{c}_R$ um objeto em $\overline{\text{OrtoR}}$, calculemos $\mathcal{E}(1_{\bar{R}})$. Defina $t: 2 \rightarrow 1$ a aplicação constante e $\pi_1: \bar{R} \times 1 \rightarrow \bar{R}$ a projeção na primeira coordenada. Veja Figura 2.

Note que o triângulo a direita comuta mesmo a nível de ordens parciais. O quadrado comuta pela naturalidade de τ (cf. I.2.1.) Note que a primeira linha é $\mathcal{E}(1_{\bar{R}})$ e, a segunda, $1_{|\bar{R}|}$. Sejam agora $\bar{\alpha}: \bar{P} \rightarrow \bar{Q}$, e $\bar{\beta}: \bar{Q} \rightarrow \bar{R}$ flechas em OrtoR . Considere a aplicação diagonal $\delta: 2 \rightarrow 2 \times 2$, $\hat{i} \mapsto (\hat{i}, \hat{i})$. Veja Figura 3.

É fácil verificar que $\tau: |2| \times |2| \rightarrow |2 \times 2|$ satisfaz $\tau(\frac{1}{2}\hat{0} + \frac{1}{2}\hat{1}, \frac{1}{2}\hat{0} + \frac{1}{2}\hat{1}) = \frac{1}{2}(\hat{0}, \hat{0}) + \frac{1}{2}(\hat{1}, \hat{1})$. Decorre que o pentágono 1 é comutativo. A comutatividade dos quadrados 2 e 3 são triviais da definição de ϵ . Também segue da naturalidade de τ que 4 e 5 são comutativos, simplesmente usamos

$$\begin{array}{ccc}
 |\bar{P}| \times |2| \times |2| & \xleftarrow{|1_{\bar{P}}| \times \tau^{-1}} & |\bar{P}| \times |2 \times 2| \\
 \uparrow \tau^{-1} \times 1_{|2|} & & \uparrow \tau^{-1} \\
 |\bar{P} \times 2| \times |2| & \xleftarrow{\tau^{-1}} & |\bar{P} \times 2 \times 2|
 \end{array}$$

Figura 4.

$1_{|\bar{P}|} = |1_{\bar{P}}|$ e analogamente para 2. Ademais, 6 é comutativo a nível de ordens parciais: para todo $(x, \hat{i}) \in \bar{P} \times 2$,

$$\begin{aligned}
 H\bar{\beta}(H\bar{\alpha} \times 1_2)(1_{\bar{P}} \times \delta)(x, \hat{i}) &= H\bar{\beta}(H\bar{\alpha} \times 1_2)(x, \hat{i}, \hat{i}) \\
 &= \begin{cases} H\bar{\beta}(\bar{\alpha}x, \hat{0}), & \text{se } \hat{i} = \hat{0} \text{ e} \\ H\bar{\beta}(\bar{\alpha}'x, \hat{1}), & \text{se } \hat{i} = \hat{1} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \bar{\beta}\bar{\alpha}x, & \text{se } \hat{i} = \hat{0} \text{ e} \\ \bar{\beta}'\bar{\alpha}'x, & \text{se } \hat{i} = \hat{1}, \end{cases}
 \end{aligned}$$

como $\bar{\beta}'\bar{\alpha}' = (\bar{c}_R\bar{\beta}\bar{c}_Q)(\bar{c}_Q\bar{\alpha}\bar{c}_P) = \bar{c}_R(\bar{\beta}\bar{\alpha})\bar{c}_P = \bar{\beta}\bar{\alpha}'$, segue a comutatividade desejada.

Resta-nos verificar 7. Lembre que a definição de τ^{-1} é particularmente simples (cf. I.2.1.), de fato, um cálculo simples mostra que o diagrama da Figura 4 é comutativo e, claramente, isto é suficiente.

Segue da comutatividade do diagrama da Figura 3 que $\mathcal{E}(\beta)\mathcal{E}(\alpha) = \mathcal{E}(\beta\alpha)$.

Temos, até o momento, a transformação $\mathcal{F}: \text{Graf} \rightarrow \overline{\text{OrtoR}}$ que comuta com as composições de flechas apenas a menos de uma desigualdade. Note que, entretanto, quando aplicamos o funtor $\mathcal{E}$ acima, esta comutação fraca é suficiente se exigimos apenas comutação a menos de homotopia na categoria de chegada Top_2 . De fato, lembre que a Proposição I.1.5. implica que se f e $g: P \rightarrow Q$ são duas aplicações que preservam ordem e tais que $f \leq g$, então $|f| \simeq |g|$. Esta propriedade se transfere para o funtor $\mathcal{E}$, a saber, se $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}: \bar{R}, \bar{c}_R \rightarrow \bar{S}, \bar{c}_S$ são flechas em $\overline{\text{OrtoR}}$ satisfazendo $\bar{\alpha} \leq \bar{\beta}$, então $\mathcal{E}\bar{\alpha} \simeq \mathcal{E}\bar{\beta}$. Para verificar tal fato, observe que $\mathcal{E}\bar{\alpha} \simeq |\bar{\alpha}|$ segue da comutatividade do diagrama da Figura 5, onde $b: |\bar{R}| \hookrightarrow |\bar{R}| \times |2|$ é dada por $x \mapsto (x, \hat{0})$. Note que $b \simeq \epsilon$ é trivial e a comutatividade do quadrado

$$\begin{array}{ccccc} |\overline{R}| \times |2| & \xleftarrow{\epsilon} & |\overline{R}| & \xrightarrow{|\bar{\alpha}|} & |\overline{S}| \\ & \searrow \text{id} & \downarrow b & & \uparrow |H\bar{\alpha}| \\ & & |\overline{R}| \times |2| & \xrightarrow{\tau} & |\overline{R} \times 2| \end{array}$$

Figura 5.

$$\begin{array}{ccccccc} |\overline{R}| & \xrightarrow{\epsilon} & |\overline{R}| \times |2| & \xrightarrow{1_{|\overline{R}|} \times 1_{|2|}} & |\overline{R}| \times |2| & \xrightarrow{\tau} & |\overline{R} \times 2| & \xrightarrow{|H_c|} & |\overline{S}| \\ \downarrow \Gamma_c & (5) & \downarrow \Gamma_c & (7) & \downarrow 1_{|\overline{R}|} \times |J_c| & (1) & \downarrow |1_{\overline{R}} \times J_c| & (3) & \parallel \\ |\overline{R}| \times I & \xrightarrow{\epsilon \times 1_I} & |\overline{R}| \times |2| \times I & \xrightarrow{1_{|\overline{R}|} \times F} & |\overline{R}| \times |4| & \xrightarrow{\tau} & |\overline{R} \times 4| & \xrightarrow{|\mu|} & |\overline{S}| \\ \downarrow |\bar{c}_R| \times 1_I & (6) & \downarrow |\bar{c}_R| \times |\tau| \times 1_I & (8) & \downarrow |\bar{c}_R| \times |s| & (2) & \downarrow |\bar{c}_R \times s| & (4) & \downarrow |\bar{c}_S| \\ |\overline{R}| \times I & \xrightarrow{\epsilon \times 1_I} & |\overline{R}| \times |2| \times I & \xrightarrow{1_{|\overline{R}|} \times F} & |\overline{R}| \times |4| & \xrightarrow{\tau} & |\overline{R} \times 4| & \xrightarrow{|\mu|} & |\overline{S}| \end{array}$$

Figura 6.

segue de

$$\tau(\sum_x \lambda_x x, \hat{0}) = \sum_x \lambda_x(x, \hat{0}),$$

para todo $\sum_x \lambda_x x \in |\overline{R}|$ e $H\bar{\alpha}(\cdot, 0) = \bar{\alpha}$. Valendo analogamente $\mathcal{E}\bar{\beta} \simeq |\bar{\beta}|$ e $\bar{\alpha} \leq \bar{\beta}$ implicando $|\bar{\alpha}| \simeq |\bar{\beta}|$, concluímos $\mathcal{E}\bar{\alpha} \simeq \mathcal{E}\bar{\beta}$.

O Teorema seguinte melhora consideravelmente esta última observação. Definimos inicialmente que se $\varphi, \psi: X, \tau \rightarrow Y, \rho$ são duas aplicações equivariantes, então φ e ψ são *equivariantemente homotópicas* sse elas pertencem a uma mesma família contínua de aplicações equivariantes $X \rightarrow Y$, i.e., sse existe uma homotopia *equivariante* $H: X \times I, \tau \times 1_I \rightarrow Y, \rho$ entre φ e ψ , $H: \varphi \simeq \psi$.

Teorema 2.3. *Suponha $\bar{\alpha}, \bar{\beta}: \overline{R}, \bar{c}_R \rightarrow \overline{S}, \bar{c}_S$ flechas em $\overline{\text{OrtoR}}$ tais que $\bar{\alpha} \leq \bar{\beta}$. Então as aplicações $\mathcal{E}\bar{\alpha}$ e $\mathcal{E}\bar{\beta}$ são equivariantemente homotópicas.*

Prova. Construímos uma homotopia equivariante

$$G: |\overline{R}| \times I, |\bar{c}_R| \times 1_I \rightarrow |\overline{S}|, |\bar{c}_S|,$$

com $G(\cdot, 0) = \mathcal{E}\bar{\alpha}$ e $G(\cdot, 1) = \mathcal{E}\bar{\beta}$. Começamos definindo uma homotopia $F: |2| \times I \rightarrow |4|$ de $|J_0|$ a $|J_1|$ onde $J_0: 2 \rightarrow 4$ é dado por $\hat{0} \mapsto \hat{0}$ e $\hat{1} \mapsto \hat{3}$ enquanto que $J_1: 2 \rightarrow 4$, por $\hat{0} \mapsto \hat{1}$ e $\hat{1} \mapsto \hat{2}$, $F(t\hat{0} + (1-t)\hat{1}, s) = (1-s)t\hat{0} + st\hat{1} + s(1-t)\hat{2} + (1-s)(1-t)\hat{3}$. Vale que $\bar{\alpha} \leq \bar{\beta} \leq \bar{c}_S \bar{\beta} \bar{c}_R \leq \bar{c}_S \bar{\alpha} \bar{c}_R$. Podemos portanto definir $\mu: R \times 4 \rightarrow S$ por $\mu(\cdot, \hat{0}) = \bar{\alpha}$, $\mu(\cdot, \hat{1}) = \bar{\beta}$, $\mu(\cdot, \hat{2}) = \bar{c}_S \bar{\beta} \bar{c}_R$ e $\mu(\cdot, \hat{3}) = \bar{c}_S \bar{\alpha} \bar{c}_R$, aplicação que preserva ordem. Defina ainda $\Gamma_c = \Gamma_c^X: X \hookrightarrow X \times I$ a inclusão $x \mapsto (x, c)$, para $c = 0, 1$ e X , um espaço arbitrário. Ainda para $c = 0, 1$, definimos $H_c: \bar{R} \times 2 \rightarrow \bar{S}$ por $H_0 = H\bar{\alpha}$ e $H_1 = H\bar{\beta}$. Lembre que $r: 2 \rightarrow 2$ é a aplicação tal que $\hat{0} \mapsto \hat{1}$ e $\hat{1} \mapsto \hat{0}$. Definimos ainda a involução $s: 4 \rightarrow 4$ tal que $\hat{0} \mapsto \hat{3}$ e $\hat{1} \mapsto \hat{2}$.

Fixe $c = 0$ ou 1 e considere o diagrama da Figura 6. Note que os quadrados 1 e 2 são comutativos devido, novamente, à naturalidade de τ . Os quadrados 3 e 4 comutam mesmo a nível de ordens parciais. Ademais, é fácil mostrar por cálculo direto que 5 e 6 comutam. A comutatividade de 7 decorre de F ser uma homotopia $|J_0| \simeq |J_1|$. Em relação a 8, se $\xi \in |\bar{R}|$ e $a, b \in I$, então

$$\begin{aligned} & (|\bar{c}_R| \times |s|)(1_{|\bar{R}|} \times F)(\xi, a\hat{0} + (1-a)\hat{1}, b) \\ &= (|\bar{c}_R| \times |s|)(\xi, (1-b)a\hat{0} + ba\hat{1} + b(1-a)\hat{2} + (1-b)(1-a)\hat{3}) \\ &= (|\bar{c}_R| \xi, (1-b)a\hat{3} + ba\hat{2} + b(1-a)\hat{1} + (1-b)(1-a)\hat{0}) \\ &= (1_{|\bar{R}|} \times F)(\xi, a\hat{1} + (1-a)\hat{0}, b) \\ &= (1_{|\bar{R}|} \times F)(|\bar{c}_R| \times |\tau| \times 1_I)(\xi, a\hat{0} + (1-a)\hat{1}, b) \end{aligned}$$

Defina $G: |\bar{R}| \times I \rightarrow |\bar{S}|$ como a composta das quatro aplicações da última linha do diagrama da Figura 6. Note que a comutatividade de 2, 4, 6 e 8 implicam que G é uma homotopia equivariante de $G\Gamma_0$ a $G\Gamma_1$. Mas

$$\begin{aligned} G\Gamma_c &= 1_{|\bar{S}|} |H_c| \tau (1_{|\bar{R}|} \times 1_{|2|}) \varepsilon \\ &= |H_c| \tau \varepsilon \\ &= \begin{cases} \mathcal{E}\bar{\alpha}, & \text{se } c = 0 \text{ e} \\ \mathcal{E}\bar{\beta}, & \text{se } c = 1. \end{cases} \quad \parallel \end{aligned}$$

3. A Definição do Funtor

Começamos summarizando os resultados das duas última seções. Temos uma transformação $\mathcal{F}^*: \text{Graf} \rightarrow \overline{\text{OrtoR}}$ dada por $\mathcal{F}^* G = (\overline{\mathcal{F}G}, \nu G)$ para todo grafo G e por $\mathcal{F}^* f = \overline{\mathcal{F}f}: \overline{\mathcal{F}G_1}, \nu G_1 \rightarrow \overline{\mathcal{F}G_2}, \nu G_2$ para todo morfismo de grafos $f: G_1 \rightarrow G_2$. Vale que se $f: G_1 \rightarrow G_2$ e $g: G_2 \rightarrow G_3$ são morfismos de grafos, então

$$\mathcal{F}^*(gf) \leq (\mathcal{F}^*g)(\mathcal{F}^*f).$$

Temos ainda um funtor $\mathcal{E}: \overline{\text{OrtoR}} \rightarrow \text{Top}_2$ com a propriedade de que se $\bar{\alpha}, \bar{\beta}: \bar{R}, \bar{c}_R \rightarrow \bar{S}, \bar{c}_S$ são flechas em $\overline{\text{OrtoR}}$ com $\bar{\alpha} \leq \bar{\beta}$ então, $\mathcal{E}\bar{\alpha}$ e $\mathcal{E}\bar{\beta}$ são equivariantemente homotópicos. Basta então modificar levemente as flechas da categoria de chegada da transformação composta $\mathcal{E}\mathcal{F}^*: \text{Graf} \rightarrow \text{Top}_2$ para torná-lo um legítimo funtor. O funtor de Walker $\mathcal{W}: \text{Graf} \rightarrow \text{Top}_2^{\sim}$ é definido como a composta de $\mathcal{E}\mathcal{F}^*$ com $\text{Top}_2 \rightarrow \text{Top}_2^{\sim}$, a projeção da categoria dos espaços com involução e aplicações equivariantes na categoria dos espaços com involução e classes de homotopia aplicações equivariantes.

A aplicação combinatória fundamental é

Teorema 3.1. *Seja G um grafo com $2 \leq \omega = \omega G$ e $\chi = \chi G$. Então existem aplicações equivariantes φ e ψ ,*

$$S^{\omega-2} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{W}G \xrightarrow{\psi} S^{\chi-2}$$

onde $S^r \subseteq \{x \in \mathbb{R}^{r+1}: \|x\| = 1\}$ é a r -esfera munida de $a_r: S^r \rightarrow S^r$, a aplicação antípoda $x \mapsto -x$.

Prova. Mostramos abaixo que $\mathcal{W}K^{r+2} = (S^r, a_r)$, $r = 0, 1, \dots$, desta forma, basta aplicar o funtor $\mathcal{W}$ a $K^\omega \hookrightarrow G \xrightarrow{c} K^\chi$ onde c é uma χ -coloração qualquer. ||

Note que a prova de 3.1. não usa toda a functorialidade de $\mathcal{W}$. Um caso onde isto ocorre é:

Proposição 3.2. *Seja G um grafo com $\omega G = \chi G$. Então $\mathcal{W}G = (X, \tau)$ tem $\tilde{H}_{\omega-2}(X, R)$ não trivial.*

Prova. Defina $n = \omega G = \chi G$. Considere $K^n \hookrightarrow G \rightarrow K^n$ uma inclusão e uma n -coloração de G . Note que a composta é, necessariamente, a identidade $\text{id}: K^n = K^n$. Consequentemente, aplicando o funtor $\mathcal{W}$ seguido do funtor $\tilde{H}_{n-2}(\cdot, R)$ (aos espaços, desprezando as involuções) obtemos a aplicação identidade de $\tilde{H}_{n-2}(S^{n-2}, R) = R$ (cf. 3.3. abaixo) fatorada por $\tilde{H}_{n-2}(X, R)$. Assim, esta última homologia não pode ser trivial. $\parallel$

Fixe $r \geq 0$ e analisemos $\mathcal{W}K^{r+2}$. Denote $V = VK^{r+2}$, $\nu = \nu K^{r+2}$. Note que se $\emptyset \neq S \subset V$, então $S = \nu(V \setminus S)$, assim (cf. prova de 1.1.i.) $\mathcal{F}K^{r+2} = \{\emptyset, V\} \cup \text{im } \nu = \rho V$. Considere o simplexo Δ^V e observe que $\mathcal{F}K^{r+2} = \text{Face } \partial \Delta^V$, a ordem parcial das faces próprias do $(r+1)$ -simplexo. Concluímos que $|\mathcal{F}K^{r+2}| = |\text{Face } \partial \Delta^V| \approx |\partial \Delta^V| \approx S^r$. A proposição a seguir define $\mathcal{W}K^{r+2}$ completamente.

Proposição 3.3. $\mathcal{W}K^{r+2} \cong (S^r, a_r)$ como objetos de Top_2 .

Prova. Vamos construir um homeomorfismo equivariante $\pi_r: |\mathcal{F}K^{r+2}|, |\nu| \rightarrow S^r, a_r$. Para tanto, consideramos uma realização conveniente do complexo de cadeias da ordem $\mathcal{F}K^{r+2}$. Na verdade, associamos $x_T \in S^r \subseteq \mathbb{R}^{r+1}$ para cada $\emptyset \neq T \subset V$. Para definir x_T , inscrevemos um $(r+1)$ -simplexo em S^r . Para $r = 0$, defina $x_0^{(0)} = -1$ e $x_1^{(0)} = 1$. Para $r > 0$, suponha $x_0^{(r-1)}, \dots, x_r^{(r-1)}$ já definidos e seja

$$i_r: \mathbb{R}^r \hookrightarrow \mathbb{R}^{r+1}$$

a inclusão dada por $x \mapsto (-1/(r+1), \lambda_r x)$ onde $\lambda_r > 0$ é tal que $\lambda_r^2 + (1/(r+1))^2 = 1$. Note que $i_r S^{r-1} \subseteq S^r$. Defina então

$$x_i^{(r)} = \begin{cases} i_r x_i^{(r-1)}, & \text{se } 0 \leq i \leq r \\ (1, 0, 0, \dots), & \text{se } i = r+1 \end{cases}$$

Observamos que $\sum_i x_i^{(r)} = 0$ segue por indução.

Defina então, para todo $\emptyset \neq T \subset V$

$$x_T = \frac{\sum_i x_i^{(r)}}{\|\sum_i x_i^{(r)}\|} \in S^r,$$

onde a soma se estende sobre os $i \in T$. A realização geométrica de $C \overline{\mathcal{F}K^{r+2}}$ que nos interessa é

$$|C \overline{\mathcal{F}K^{r+2}}| = \bigcup_{\sigma} \text{conv}\{x_T : T \in \sigma\} \subseteq \mathbb{R}^{r+1}$$

onde a união se estende sobre todo $\sigma \in \text{Face } C \overline{\mathcal{F}K^{r+2}}$. O homeomorfismo π_r é simplesmente dado por $x \mapsto x/\|x\|$.

Em relação à equivariância, note inicialmente que $|\nu|x_T = x_{\nu T}$. Ainda $a_r \pi_r x = \pi_r |\nu|x$ vale para $x \in |C \overline{\mathcal{F}K^{r+2}}|$ e se $0 \in \mathbb{R}^{r+1}$ pertence ao segmento que liga x e $|\nu|x$. Porém,

$$x_T + |\nu|x_T = x_T + x_{\nu T} = 0$$

segue de $\sum x_i^{(r)} = 0$. Em geral, se $x = \sum_{T \in \sigma} \lambda_T x_T$, $\sigma \in \text{Face } C \overline{\mathcal{F}K^{r+2}}$, $\sum \lambda_T = 0$ e $\lambda_T \geq 0$,

$$\begin{aligned} x + |\nu|x &= \sum_T \lambda_T x_T + \sum_T \lambda_T |\nu|x_T \\ &= \sum_T \lambda_T (x_T + x_{\nu T}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

e, assim, $a_r \pi_r = \pi_r |\nu|$. ||

4. A Estrutura do Ortoreticulado dos Fechados

A proposição 3.2. ilustra um dos raros casos em que é possível calcular $\mathcal{W}G$ completamente. Mesmo a determinação de $\mathcal{F}G$ é freqüentemente um trabalho muito difícil. Quando estamos olhando apenas para a topologia de $|\overline{\mathcal{F}G}|$ a proposição que segue é muito útil, embora não seja mais que uma simples observação.

Proposição 4.1. $|\overline{\mathcal{F}G}| \simeq |\mathcal{N}G|$ para todo grafo G .

Prova. Basta notar que $(\nu G)^2$: $\text{Face } \mathcal{N}G \rightarrow \overline{\mathcal{F}G}$ é, a nível geométrico, uma equivalência de homotopia entre $|\text{Face } \mathcal{N}G| \approx |\mathcal{N}G|$ e $|\overline{\mathcal{F}G}|$, sendo a inversa de homotopia a inclusão $\overline{\mathcal{F}G} \hookrightarrow \text{Face } \mathcal{N}G$. Isto decorre imediatamente de 1.1.i.a., lembrando I.1.5. $\parallel$

Adiantamos que este último resultado motiva o estudo da topologia $\mathcal{N}G$, assunto central do Capítulo IV. Objetivamos nesta seção fazer uma análise da associação $G \mapsto \mathcal{F}G$, G um grafo. O primeiro resultado mostra que um certo tipo de vértice é irrelevante.

Lema 4.2. Se G é um grafo com um vértice $x \in VG$ tal que $\nu G(x) \subseteq \nu G(y)$ para algum $y \in VG \setminus \{x\}$, então

- i. caso $\nu G(x) = \nu G(y)$, então $\mathcal{F}G \cong \mathcal{F}(G - x)$ como ortoreticulados e, em geral,
- ii. $\overline{\mathcal{F}G} \simeq \overline{\mathcal{F}(G - x)}$.

Prova. i. Defina $\mu: \mathcal{F}(G - x) \rightarrow \mathcal{F}G$ por $S \mapsto S$ caso $y \notin S$ e $S \cup \{x\}$ caso $y \in S$. Como todo fechado $T \in \mathcal{F}G$ satisfaz $x \in T \iff y \in T$, μ acima é um isomorfismo de reticulados e como $x \in \nu T \iff y \in \nu T$, para todo $T \subseteq VG$, μ comuta com as complementações.

ii. Ponha $\nu = \nu G: \text{Face } \mathcal{N}G \rightarrow \text{Face } \mathcal{N}G$ e $\nu' = \nu(G - x): \text{Face } \mathcal{N}(G - x) \rightarrow \text{Face } \mathcal{N}(G - x)$. Defina

$$f: \overline{\mathcal{F}G} \rightarrow \overline{\mathcal{F}(G - x)}$$

pondo $fT = \nu'((\nu T) \setminus \{x\}) \in \overline{\mathcal{F}(G - x)}$. Note que f está bem definida já que $fT \in \overline{\mathcal{F}(G - x)}$ pois $\nu T \neq \{x\}$. Defina também

$$g: \overline{\mathcal{F}(G - x)} \rightarrow \overline{\mathcal{F}G}$$

pondo $gS = \nu(\nu' S)$. Neste caso,

$$\begin{aligned} gfT &= (\nu \nu')(\nu'((\nu T) \setminus \{x\})) \\ &= \nu((\nu T) \setminus \{x\}) \\ &\supseteq T \end{aligned}$$

para todo fechado próprio T de G , $T \in \overline{\mathcal{F}G}$, i.e., $gf \geq 1_{\overline{\mathcal{F}G}}$. Além disso,

$$\begin{aligned} fgS &= \nu'((\nu(\nu\nu'S)) \setminus \{x\}) \\ &= \nu'((\nu'S) \setminus \{x\}) \\ &= S \end{aligned}$$

para todo fechado próprio S de $G - x$, $S \in \overline{\mathcal{F}(G - x)}$, i.e., $fg = 1_{\overline{\mathcal{F}(G - x)}}$. Segue do Corolário I.1.6. que f e g são inversas de homotopia. ||

Note portanto que, toda vez que estejamos interessados no tipo de homotopia de $|\overline{\mathcal{F}G}|$, podemos admitir que as vizinhanças dos vértices de G são dois a dois incomparáveis. Dizemos que o subgrafo G' de G é um *retrato trivial*, ou simplesmente, um *t-retrato* de G caso $G' = G - x_1 - \dots - x_r$ com $x_i \in VG$ tais que se $G_i = G - x_1 - \dots - x_i$, então existe um vértice $y_i \in VG_i$ tal que $\nu G_i(y_i) \supseteq \nu G_i(x_{i+1})$. É corolário imediato de 4.2. que, neste caso, $\overline{\mathcal{F}G'} \simeq \overline{\mathcal{F}G}$.

Mais três fatos elementares sobre $\mathcal{F}G$ são observados na seguinte proposição.

Proposição 4.3. *Seja G um grafo. Então*

- i. *Se $G = G_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} G_r$, G_i componente conexa de G , então $\overline{\mathcal{F}G} = \overline{\mathcal{F}G_1} \dot{\cup} \dots \dot{\cup} \overline{\mathcal{F}G_r}$,*
- ii. *Suponha G sem vértices isolados. Neste caso, $|\overline{\mathcal{F}G}|$ é conexo se e só se G for conexo e não bipartido.*
- iii. *Caso G não tenha circuitos de comprimento quatro, $\dim C\overline{\mathcal{F}G} \leq 1$*

Prova. i. Claro.

ii. $C\overline{\mathcal{F}G}$ é conexo sse o seu 1-esqueleto o for, equivalentemente, sse todo par de vértices de $C\overline{\mathcal{F}G} = VG$ for ligado por um passeio de comprimento par.

iii. Suponha $\dim C\overline{\mathcal{F}G} \geq 2$ e escolha uma cadeia $\emptyset \neq \sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \sigma_2 \subset VG$, $\sigma_i \in \overline{\mathcal{F}G}$. Denote $\nu = \nu G$. Temos que $VG \supset \nu\sigma_0 \supset \nu\sigma_1 \supset \nu\sigma_2 \neq \emptyset$. Escolha $a \in \sigma_1 \setminus \sigma_0$, $b \in \sigma_0$, $c \in \nu\sigma_1 \setminus \nu\sigma_2$ e $d \in \nu\sigma_2$. Como $a, b \in \sigma_1$ e $c, d \in \nu\sigma_1$ e ainda $\sigma_1 \cap \nu\sigma_1 = \emptyset$, a, b, c e d são quatro vértices distintos.

Também é fácil ver que eles são os vértices de um circuito de comprimento quatro. ||

Caso conheçamos a decomposição em blocos de G , $G = B_1 \cup \dots \cup B_2$, é também possível analisar $\overline{\mathcal{F}G}$ em função dos $\overline{\mathcal{F}B_i}$, porém vamos nos restringir a estudar apenas as relações que existem entre as topologias dessas ordem. Isto será feito no Capítulo IV (cf. IV.2.2.) Deixamos observado aqui que os circuitos de comprimento quatro em um grafo G têm um papel importante na determinação de $|\overline{\mathcal{F}G}|$, veja 4.3.iii. acima. Tais circuitos ocorrerão freqüentemente no estudo de $\mathcal{N}G$ (cf. IV.1.5. e IV.2.4.)

Terminamos esta seção enunciando um resultado de classificação de grafos com um mesmo ortoreticulado de fechados. Para o enunciado, lembremos que a relação de ortogonalidade restrita à parte própria de um ortoreticulado, é simétrica e irreflexiva. Dado um ortoreticulado R e $A \subseteq \overline{R}$, defina o *grafo de ortogonalidade* de A em R , denotado $A_\perp$, como o grafo cujo conjunto de vértices é A e a relação de adjacência é simplesmente a relação de ortogonalidade restrita a A . Ainda, dizemos que $A \subseteq \overline{R}$ é *gerador* em R se todo elemento de R for sup de um subconjunto de A .

Teorema 4.4. *Sejam R um ortoreticulado e G um grafo com $\nu G(x) \neq \nu G(y)$ para todo par de vértices distintos $x, y \in VG$. São equivalentes:*

- i. $\mathcal{F}G \cong R$ como ortoreticulados e
- ii. $G \cong A_\perp$ para algum conjunto gerador $A \subseteq \overline{R}$.

Prova. Omitimos. ||

Obs. Caso admitamos em 4.4. que as vizinhanças dos vértices de G são dois a dois incomparáveis e que em R todos os elementos são sup de átomos, então ii. acima pode ser substituído por :

- iii. $G \cong (\text{at } R)_\perp$, onde $\text{at } R$ denota o conjunto de átomos de R .

Esta observação é relevante, pois sabemos de 4.2.ii. que os grafos que realmente "interessam" são aqueles que gozam da propriedade acima e, também, se $S \subseteq \overline{R}$ é conjunto dos sup's dos átomos de R , então $\overline{S} \simeq \overline{R}$ ($\mu: \overline{R} \rightarrow \overline{S}$, $\mu x = \bigvee \{y: y \leq x\}$ é uma equivalência de homotopia, cuja inversa é a inclusão.)

Notas Bibliográficas

Os ortoreticulados $\mathcal{F}G$ foram primeiro definidos por Dörfler [Dö] que fez uma boa análise da associação $G \mapsto \mathcal{F}G$. Em particular, Dörfler prova uma versão fraca do Teorema 4.4. A versão que enunciamos pode ser encontrada em [Wa1]. Aliás, não há diferença significativa entre [Wa1] e este capítulo, exceto talvez na ênfase dos vários passos da construção de $\mathcal{W}$. Os passos técnicos centrais da prova da functorialidade de $\mathcal{W}$ são os Teoremas 2.2. e 2.3., cujas provas são exatamente aquelas de Walker.

Capítulo III

O Teorema de Walker Generalizado

Este é o capítulo onde colhemos os frutos da construção do funtor $\mathcal{W}$. Vamos apresentar aqui uma prova da Conjectura de Kneser devido a Walker: provaremos o Teorema A da Introdução, $\chi KG_{k,r} \geq k+2$. O estratagema é calcular $\mathcal{W}KG_{k,r}$ e então provar que não existe flecha $\mathcal{W}KG_{k,r} \rightarrow \mathcal{W}K^{k+1}$ em $\text{Top}_2^\sim$. Uma vez provado tal fato, concluímos que não pode haver flecha $KG_{k,r} \rightarrow K^{k+1}$ em Graf , i.e., $KG_{k,r}$ não é $(k+1)$ -colorável. Lembre que já sabemos que $\mathcal{W}K^{t+2} = (S^t, a_t)$, cf. Proposição II.3.2. Ainda precisamos entender como é $\mathcal{W}KG_{k,r}$.

Felizmente, o estudo da existência ou não de aplicações equivariantes em esferas já é bastante clássico. Basta lembrar o Teorema de Borsuk-Ulam e suas várias generalizações. Incidentalmente, dedicamos a primeira seção deste capítulo a uma nova generalização daquele teorema. Tal resultado prova imediatamente o Teorema E da Introdução. Já comentamos que este último resultado é o melhor possível em um certo sentido; precisamos tal afirmativa na seção 2, onde provamos o Teorema F. A seção seguinte completa a prova da Conjectura de Kneser; calculamos lá $\mathcal{W}KG_{k,r}$ e, aplicando o Teorema E, concluímos a demonstração.

1. Uma Generalização do Teorema de Borsuk-Ulam

O problema fundamental em que estamos interessados na categoria Top_2 é o problema da existência ou não de morfismos entre dois objetos $E = (X, \tau)$ e $F = (Y, \rho)$ dados. Tal problema neste grau de generalidade é, certamente, muito difícil, mas um caso particular já bastante interessante é quando, ou X , ou Y é uma esfera. O clássico Teorema de Borsuk-Ulam resolve o problema para o caso onde ambos X e Y são esferas e, naturalmente, as involuções são as respectivas aplicações antípodas. De fato, aquele resultado diz que existe aplicação equivariante de uma r -esfera em uma t -esfera se e só se $r \leq t$. O resultado principal desta seção fornece uma condição necessária sobre a homologia de um espaço X com involução τ que admite tanto uma aplicação equivariante em uma esfera como de uma esfera.

Teorema 1.1. *Seja X um espaço topológico e τ uma involução sobre X . Se existem aplicações equivariantes*

$$S^m, a_m \xrightarrow{\varphi} X, \tau \xrightarrow{\psi} S^n, a_n$$

com $m \leq n$ então

ou i. $\exists \beta \in \tilde{H}_n(X, \mathbb{Z}_2)$ com $\tau_* \beta = \beta$ e $\psi_* \beta \neq 0$

ou ii. $\exists \beta \in \tilde{H}_q(X, \mathbb{Z}_2)$ com $\tau_* \beta = \beta \neq 0$ para algum q , $m \leq q < n$.

Observe que denotamos por a_r a aplicação antípoda $x \mapsto -x$ em $S^r = \{x \in \mathbb{R}^{r+1} : \|x\| = 1\}$, $r = 0, 1, 2, \dots$ e por $\mathbb{Z}_2$ os inteiros módulo 2.

Obs.1. O teorema acima generaliza o resultado de Borsuk-Ulam. Se pomos $m = 0$, $X = S^r$ e $Y = S^t$, então concluímos que a existência da aplicação ψ implica que $r \leq t$.

Obs.2. Das hipóteses de 1.1. é bastante fácil concluir que existe um inteiro q com $m \leq q \leq n$ tal que $\pi_q(X)$ é não trivial, se fazemos uso do Teorema de Borsuk-Ulam. De fato, basta observar que se $\mu: S^r \rightarrow X$ é equivariante, então, ou μ é homotopicamente não trivial, ou existe uma extensão equivariante $\bar{\mu}: S^{r+1}, a_{r+1} \rightarrow X, \tau$ de μ : se μ é homotopicamente trivial,

estenda μ ao cone $CS^r = S^r \times I/S^r \times \{1\}$ obtendo $\mu': CS^r \rightarrow X$ e, em seguida, defina a extensão $\bar{\mu}$ por

$$\bar{\mu}(x, t) = \begin{cases} \mu'(x, t) & \text{se } t \geq 0 \text{ e} \\ \tau\mu'(a_r x, -t) & \text{se } t \leq 0, \end{cases}$$

onde identificamos S^{r+1} com o duplo quociente $S^r \times [-1, 1]/S^r \times \{-1\}/S^r \times \{1\}$ munido da antípoda $(x, t) \mapsto (a_r x, -t)$.

A prova de 1.1. é uma versão algébrica da segunda observação acima que, entretanto, *não* usa o Teorema de Borsuk-Ulam. O resultado será demonstrado através de homologia singular.

Começamos por definir algumas cadeias especiais h_r na esfera S^r , os *hemisférios*. Denotamos por $i_r: S^{r-1} \rightarrow S^r$ a inclusão $x \mapsto (x, 0)$. Para $r = 0$, h_r é a aplicação constante em $1 \in S^0 \subseteq \mathbb{R}$. Para $r \geq 1$, admitimos que

a. $(1 + a_{r\parallel})h_r$ gera $\tilde{H}_r(S^r, \mathbb{Z}_2)$ e que

b. $\partial h_r = i_{r\parallel}(1 + a_{r-1\parallel})h_{r-1}$.

Uma construção explícita para tais h_r pode ser encontrada no final desta seção.

Prova de 1.1. Começamos definindo as aplicações de cadeia:

$$\alpha_r = (1 + a_{r\parallel}): C_*(S^r, \mathbb{Z}_2) \rightarrow C_*(S^r, \mathbb{Z}_2)$$

$$\text{e} \quad \theta = (1 + \tau_{\parallel}): C_*(X, \mathbb{Z}_2) \rightarrow C_*(X, \mathbb{Z}_2).$$

Note as seguintes propriedades:

$$\alpha_r^2 = \theta^2 = 0,$$

se $z_q \in Z_q(X, \mathbb{Z}_2)$ então

$$[\theta z_q] = 0 \iff \tau_*[z_q] = [z_q]$$

($[\cdot]$ denota a classe de homologia) e, ainda,

$$\alpha_n \psi_{\parallel} = \psi_{\parallel} \theta$$

$$\text{e} \quad \theta \varphi_{\parallel} = \varphi_{\parallel} \alpha_m$$

Suponha que a conclusão ii. do Teorema seja falsa, i.e., se $m \leq q < n$,

$$(*) \quad \forall z_q \in Z_q(X, \mathbb{Z}_2) : \theta z_q \text{ bordo} \Rightarrow z_q \text{ bordo.}$$

Defina $c_m = \varphi_{\#} h_m \in C_m(X, \mathbb{Z}_2)$. Como $\alpha_m h_m \in Z_m(S^m, \mathbb{Z}_2)$, $\theta c_m = \varphi_{\#}(\alpha_m h_m) \in Z_m(X, \mathbb{Z}_2)$. Como $\theta(\theta c_m) = \theta^2 c_m = 0$, de (*), existe $c_{m+1} \in C_{m+1}(X, \mathbb{Z}_2)$ tal que $\partial c_{m+1} = \theta c_m$. Para $j \geq m+1$, suponha definidas cadeias c_j e c_{j-1} satisfazendo $\partial c_j = \theta c_{j-1}$. Como $\partial \theta c_j = \theta^2 c_j = 0$, $\theta c_j \in Z_j(X, \mathbb{Z}_2)$; segue de (*) que existe $c_{j+1} \in C_{j+1}(X, \mathbb{Z}_2)$ tal que $\partial c_{j+1} = \theta c_j$.

Defina $\rho_m = \psi \varphi$. Suponha que $\rho_j: S^j, a_j \rightarrow S^n, a_n$ já está definida para algum $j < n$; usando a j -conexidade de S^n defina $\rho_{j+1}: S^{j+1}, a_{j+1} \rightarrow S^n, a_n$ estendendo ρ_j equivariantemente à $(j+1)$ -esfera (cf. a Obs.2. que precede esta Prova).

Definimos agora $e_m, e_{m+1}, \dots, e_n$ cadeias em S^n , $e_r \in C_r(S^n, \mathbb{Z}_2)$, tais que

$$\psi_{\#} c_r + \rho_{r\#} h_r + \alpha_n e_r \in Z_r(S^n, \mathbb{Z}_2),$$

$r = m, \dots, n$. Já que

$$\psi_{\#} c_m + \rho_{m\#} h_m = \psi_{\#} \varphi_{\#} h_m + \rho_{m\#} h_m = 0,$$

tome $e_m = 0$. Definidos $e_m, \dots, e_r$, $r < n$, observe que como $\tilde{H}_r(S^n, \mathbb{Z}_2)$ é trivial, existe $d_{r+1} \in C_{r+1}(S^n, \mathbb{Z}_2)$ tal que

$$\partial d_{r+1} = \psi_{\#} c_r + \rho_{r\#} h_r + \alpha_n e_r,$$

então

$$\begin{aligned} \partial \alpha_n d_{r+1} &= \psi_{\#} \theta c_r + \rho_{r\#} \alpha_r h_r \\ &= \psi_{\#} \partial c_{r+1} + \rho_{r+1\#} \partial h_{r+1}, \end{aligned}$$

logo

$$\partial(\psi_{\#} c_{r+1} + \rho_{r+1\#} h_{r+1} + \alpha_n d_{r+1}) = 0$$

e, assim, podemos tomar $e_{r+1} = d_{r+1}$.

Lembrando que $\rho_n: S^n \rightarrow S^n$ é equivariante, pelo Lema 1.2. abaixo, $\rho_{n\#} \alpha_n h_n \in Z_n(S^n, \mathbb{Z}_2)$ gera $\tilde{H}_n(S^n, \mathbb{Z}_2)$. Veja agora que

$$[\psi_{\#} c_n + \rho_{n\#} h_n + \alpha_n e_n] = \begin{cases} 0, \\ [\rho_{n\#} \alpha_n h_n]. \end{cases} \quad \text{ou,}$$

Em qualquer caso, aplicando α_n em ambos os lados, posto que $\alpha_n^2 = 0$, concluímos

$$[\alpha_n \psi_{\#} c_n] = [\alpha_n \rho_n \# h_n],$$

logo

$$\begin{aligned} \psi_*[\theta c_n] &= [\psi_{\#} \theta c_n] \\ &= [\alpha_n \psi_{\#} c_n] \\ &= [\rho_n \# \alpha_n h_n] \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

e, como $\theta^2 = 0$, $\tau_*[\theta c_n] = [\theta c_n]$. Concluimos que

$$\beta = [\theta c_n] \in \tilde{H}_n(X, \mathbb{Z}_2)$$

é como exigido em i. ||

Lema 1.2. Se $\rho: S^n \rightarrow S^n$ comuta com a antípoda,

$$\rho_{*n}: \tilde{H}_n(S^n, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \tilde{H}_n(S^n, \mathbb{Z}_2)$$

é não trivial.

Prova. Considere novamente os hemisférios $h_r \in C_r(S^r, \mathbb{Z}_2)$, mas será mais conveniente desta vez considerá-los em S^n . Para tanto, lembre que $i_r: S^{r-1} \hookrightarrow S^r$ é a inclusão canônica e defina

$$\hat{h}_r = (i_n \dots i_{r+1})_{\#} h_r \in C_r(S^n, \mathbb{Z}_2).$$

Neste caso, $\partial \hat{h}_r = \alpha_n \hat{h}_{r-1}$ e lembre ainda que $\alpha_n \hat{h}_n$ é homologicamente não trivial.

Vamos construir, como na demonstração de 1.1., $e_0, \dots, e_n$ cadeias em S^n , $e_r \in C_r(S^n, \mathbb{Z}_2)$, tais que

$$\hat{h}_r + \rho_{\#} \hat{h}_r + \alpha_n e_r$$

seja um ciclo em S^n . Observe que o caso $n = 0$ deste lema é trivial e assim assumimos $n > 0$. Neste caso, S^n é conexo por caminhos, logo podemos

2 O Teorema de Walker Generalizado

tomar $e_0 = 0$. Para $0 < r \leq n$, admita $e_{r-1} \in C_{r-1}(S^n, \mathbb{Z}_2)$ já definido como exigido. Como $\tilde{H}_{r-1}(S^n, \mathbb{Z}_2)$ é trivial, existe $c_r \in C_r(S^n, \mathbb{Z}_2)$ tal que

$$\partial c_r = \hat{h}_{r-1} + \rho_{\parallel} \hat{h}_{r-1} + \alpha_n e_{r-1}$$

então

$$\begin{aligned} \partial \alpha_n c_r &= \alpha_n \hat{h}_{r-1} + \rho_{\parallel} \alpha_n \hat{h}_{r-1} \\ &= \partial \hat{h}_r + \partial \rho_{\parallel} \hat{h}_r, \end{aligned}$$

assim, podemos tomar $e_r = c_r$.

Sabemos que

$$[\hat{h}_n + \rho_{\parallel} \hat{h}_n + \alpha_n e_n] = \begin{cases} 0 \\ [\alpha_n \hat{h}_n] \end{cases} \quad \text{ou,}$$

e, aplicando $1 + a_{n*}$ em ambos os lados,

$$\begin{aligned} [\alpha_n \hat{h}_n + \alpha_n \rho_{\parallel} \hat{h}_n] &= 0 \\ [\rho_{\parallel} \alpha_n \hat{h}_n] &= [\alpha_n \hat{h}_n] \\ \text{e assim,} \quad \rho_{*} [\alpha_n \hat{h}_n] &\neq 0, \end{aligned}$$

e isto completa a prova. ||

Terminamos esta seção construindo os hemisférios h_r de que fizemos uso na demonstração do Teorema 1.1. Vamos usar Σ^r , o fecho convexo dos elementos da base canônica $\{e_0, \dots, e_r\}$ de $\mathbb{R}^{r+1}$, como o domínio de nossos complexos singulares. Defina

$$Q^{r+1} = \{\sigma = (\alpha_0^\sigma, \dots, \alpha_r^\sigma) : \alpha_i^\sigma = 1 \text{ ou } -1\}.$$

Se $\sigma = (\alpha_0^\sigma, \dots, \alpha_r^\sigma) \in Q^{r+1}$, $\hat{\sigma} : \Sigma^r \rightarrow S^R$ denota a composta da aplicação linear que mapeia Σ^r no fecho convexo de $\{\alpha_i^\sigma e_i\}$, levando e_i em $\alpha_i^\sigma e_i$, com a aplicação $x \mapsto x/\|x\|$. Defina $h_r \in C_r(S^r, \mathbb{Z}_2)$, o hemisfério (norte) de S^r , por

$$h_r = \sum_{\sigma} \hat{\sigma} \text{ cadeia em } C_r(S^r, \mathbb{Z}_2),$$

onde a soma se estende sobre todo $\sigma = (\alpha_0^\sigma, \dots, \alpha_r^\sigma) \in Q^{r+1}$ com $\alpha_r^\sigma = 1$. Note que $\alpha_r h_r = (1 + a_{r\parallel})h_r = \sum_\sigma \hat{\sigma}$, onde σ percorre todo o Q^{r+1} , e também que $\partial \alpha_r h_r = \partial \sum_\sigma \hat{\sigma} = \sum_\sigma \partial \hat{\sigma} = 0$ pois estamos em característica 2. É igualmente fácil mostrar que $\partial h_r = i_{r\parallel}(1 + a_{r-1\parallel})h_{r-1}$.

Finalmente, observamos que $\alpha_r h_r$ gera $\tilde{H}_r(S^r, \mathbb{Z}_2)$. De fato, considere o complexo simplicial K sobre $\{\pm e_0, \dots, \pm e_r\}$ cujas faces maximais são os conjuntos da forma $\{\alpha_0 e_0, \dots, \alpha_r e_r\}$, onde $(\alpha_0, \dots, \alpha_r) \in Q^{r+1}$. Uma realização geométrica conveniente de K é aquela obtida encarando-se $|K|$ como o bordo (geométrico) do fecho convexo dos $2(r+1)$ pontos $\{\pm e_i\} \subseteq \mathbb{R}^{r+1}$. Neste caso,

$$\begin{aligned} \pi_r: |K| &\longrightarrow S^r \\ x &\longmapsto x/\|x\| \end{aligned}$$

define uma triangulação da esfera. Ainda,

$$z_r = \sum \tau \in Z_r(K, \mathbb{Z}_2),$$

onde a soma se estende sobre todas as faces maximais de K , é o ciclo gerador (da homologia simplicial) $\tilde{H}_r(K, \mathbb{Z}_2)$. Resta-nos observar que se

$$j_r: \tilde{H}_r(K, \mathbb{Z}_2) \cong \tilde{H}_r(|K|, \mathbb{Z}_2)$$

é o isomorfismo canônico ligando as homologias simplicial e singular,

$$\alpha_r h_r = \pi_{r*} j_r(z_r).$$

2. Uma Generalização do Teorema de Lovász-Walker

A aplicação combinatória mais importante até o momento do funtor de Walker é o Teorema II.3.1. que leva informações do número cromático de um grafo para a categoria Top_2 . A saber, se G é um grafo com $\omega = \omega G \leq \chi G = \chi$, então $\mathcal{W}G = (X, \tau)$ satisfaz as hipóteses do Teorema 1.1. com $m = \omega - 2$ e $n = \chi - 2$. A generalização do resultado de Walker (Teorema B' da Introdução) é:

Teorema 2.1. Para todo grafo G , existe q inteiro com $\omega G \leq q + 2 \leq \chi G$, tal que $\tilde{H}_q(G)$ é não trivial. ||

Convenção: aqui e no que segue $\tilde{H}_*(G)$ denota $\tilde{H}_*(|C\overline{\mathcal{F}}G|) \cong \tilde{H}_*(|NG|)$. Embora um grafo possa ser visto como um complexo simplicial e, portanto, esta notação possa ser ambígua, lembramos que o espaço associado a um grafo será sempre $|NG| \simeq |C\overline{\mathcal{F}}G|$.

Construímos, a seguir, grafos que mostram ser o resultado acima “o melhor possível” no seguinte sentido:

Teorema 2.2. Suponha $\omega, \hat{q}$ e χ inteiros com $2 \leq \omega \leq \hat{q} + 2 \leq \chi$ tais que $2 = \omega = \hat{q} + 2 \Rightarrow \chi = 2$. Então existe um grafo G com $\omega G = \omega$ e $\chi G = \chi$ satisfazendo:

$$\tilde{H}_q(G) \neq (0) \iff q = \hat{q}.$$

Para a demonstração deste resultado, vamos fazer uso de duas construções bem conhecidas da Teoria dos Grafos. Dados grafos G_1 e G_2 , definimos a *junção* $G_1 * G_2$ de G_1 e G_2 como o grafo obtido pelo acréscimo de $|VG_1||VG_2|$ arestas à união disjunta $G_1 \cup G_2$, cada aresta ligando um par distinto de vértices $(v_1, v_2) \in VG_1 \times VG_2$. Quando G_2 tem um único vértice z , denotamos $z * G_1 = G_1 * G_2$. Observe que $z * G$ é simplesmente o grafo obtido juntando-se um novo vértice a G , ligando-o a todos os vértices de G . Ainda, $K^n * G$ é obtida iterando-se este processo n vezes. A segunda construção é a *operação de Mycielski* que pode ser definida da seguinte maneira. Dado um grafo G , comece por “duplicar” os vértices de G , criando para cada $x \in VG$, uma “cópia” x' , ligando-o exatamente aos vizinhos de x ; junte, então um novo vértice z ligado a todos os x' , $x \in VG$. Denote por $\text{Myc } G$ o grafo assim obtido. Por exemplo, $\text{Myc } K^2 = C^5$, o circuito de comprimento 5, cf. Figura 1. É bem conhecido que $\omega \text{Myc } G = \omega G$ e que $\chi \text{Myc } G = \chi G + 1$. Definimos indutivamente $\text{Myc}^0 G = G$ e $\text{Myc}^{k+1} G = \text{Myc } \text{Myc}^k G$, $k \geq 0$.

Também precisamos do seguinte resultado:

Proposição 2.3. Para todo inteiro $\chi \geq 3$, existem grafos G_1 e G_2 com $\chi G = \chi$, $i = 1, 2$ e

- i. a cintura de G_1 é pelo menos 6.

$\text{Myc } K^2 = C^5$:

$\text{Myc } C^5$:

Figura 1.

ii. $\omega G = 3$, mas G_2 não tem circuitos de comprimento l , $l = 4, 5$. ||

Prova de 2.2. O caso $2 = \omega = \hat{q} + 2 = \chi$ é fácil, basta tomar $G = K^2$.

Caso $2 = \omega < \hat{q} + 2 \leq \chi$. Defina $\chi_1 = \chi - \hat{q} + 1 \geq 3$. Seja G_1 um grafo conexo dado pela Proposição 2.3. satisfazendo $\chi G_1 = \chi_1$, e o item 2.3.i. Segue de II.4.3 que $\tilde{H}_q(G_1)$ é trivial se $q = 0$ ou $q \geq 2$. Segue de 2.1. acima que nenhum grafo pode ter seu complexo de vizinhanças acíclico, logo $\tilde{H}_1(G_1)$ é não trivial. Defina agora $G = \text{Myc}^{\hat{q}-1} G_1$. Neste caso, $\omega G = 2$, $\chi G = \chi$ e

$$\begin{aligned} |\overline{C \mathcal{F} G}| &\simeq |\mathcal{N} G| \\ &\simeq \sum^{\hat{q}-1} |\mathcal{N} G_1| \end{aligned}$$

onde a segunda passagem decorre de IV.2.7.ii. ($\sum^k$ denota, naturalmente, a iteração da suspensão por k vezes). Concluimos que

$$\tilde{H}_q(G) \neq (0) \iff q = \hat{q}.$$

Caso $2 < \omega \leq \hat{q} + 2 \leq \chi$. Defina, desta vez, $\chi_2 = \chi - \hat{q} + 1 \geq 3$ e seja G_2 conexo dado por 2.3.ii., i.e., G_2 sem circuitos de comprimento 4 nem 5 e com $\chi G_2 = \chi_2$ e $\omega G_2 = 3$. Como no caso anterior, sabemos que $\tilde{H}_q(G_2) \neq (0) \iff q = 1$. Defina $G'_2 = K^{\omega-3} * G_2$. Claramente $\omega G'_2 = \omega$

e $\chi G'_2 = \chi + \omega - \hat{q} - 2$. Ainda,

$$\begin{aligned} |\overline{C \mathcal{F} G'_2}| &\simeq |\mathcal{N} G'_2| \\ &\simeq \sum^{\omega-3} |\mathcal{N} G_2| \end{aligned}$$

por IV.2.7.i. Definimos agora $G = \text{Myc}^{\hat{q}-\omega+2} G'_2$. Temos então $\omega G = \omega$, $\chi G = \chi$ e, novamente por IV.2.7.ii., $|\overline{C \mathcal{F} G}| \simeq \sum^{\hat{q}-1} |\mathcal{N} G_2|$. Assim,

$$\tilde{H}_q(G) \neq (0) \iff q = \hat{q} \quad \parallel$$

O único caso excluído em 2.2., $2 = \omega = \hat{q} + 2 < \chi$, o foi por boa razão. De fato, basta observar que $\chi G > 2$ implica que $\tilde{H}_0(G') \cong (0)$ para qualquer componente não bipartida de G (cf. II.4.3.ii.), logo, embora possa acontecer que $\tilde{H}_0(G) \neq (0)$, necessariamente $\tilde{H}_q(G) \neq (0)$ para algum $q > 0$. basta lembrar que $\tilde{H}_*(G')$ é um somando direto de $\tilde{H}_*(G)$ por II.4.3.i.

O resultado acima sugere definir para todo grafo G ,

$$\chi^r G = \min\{q + 2: \tilde{H}_q(G, \mathbb{Z}_2) \neq (0)\}$$

e, também, $\chi_\omega^r G = \min\{q + 2: q + 2 \geq \omega G \text{ e } \tilde{H}_q(G, \mathbb{Z}_2) \neq (0)\}$

Neste caso, 2.2. diz que

$$\chi^r G \leq \chi_\omega^r G \leq \chi G.$$

Dualmente, podemos definir

$$\lambda \dim G = \max\{q: \tilde{H}_q(G, \mathbb{Z}_2) \neq (0)\},$$

a *dimensão homológica* (sobre $\mathbb{Z}_2$) de G . Então 2.2. diz que

$$2 + \lambda \dim G \geq \omega G.$$

Estabelecemos mais alguns fatos básicos sobre este último parâmetro no Capítulo IV. Fazemos uma observação final sobre $\chi^r G$ e $\chi_\omega^r G$. É preciso tomar cuidado e não superestimar a limitação $\chi_\omega^r G \leq \chi G$ em relação a

$\chi^r G \leq \chi G$, pelo menos do ponto de vista algorítmico. De fato, se queremos calcular $\chi_\omega^r G$, precisamos conhecer ωG e é bem conhecido que a determinação de tal parâmetro é *NP*-completo. Entretanto, há situações onde ωG é conhecido de antemão e, nestes casos, temos informações substancialmente novas na desigualdade $\chi_\omega^r G \leq \chi G$. Considere, por exemplo, o problema de classificação gerado pelo Teorema de Vizing. Para enunciarmos tal problema, definimos o índice cromático de um grafo G , denotado $\chi' G$, como o número cromático do seu grafo linha, i.e., do grafo LG cujo conjunto de vértices é o conjunto de arestas de G , sendo dois deles adjacentes em LG sse eles o forem (como arestas) em G . O Teorema de Vizing afirma que para todo grafo G , ou $\chi' G = \Delta G$, ou $\chi' = \Delta G + 1$. O problema então é caracterizar quais grafos satisfazem a primeira igualdade e quais, a segunda.

Corolário 2.4. Para todo grafo G ,

$$\tilde{H}_{\Delta G - 2}(LG) \cong (0) \Rightarrow \chi' G = \Delta G + 1 \quad ||$$

3. A Prova da Conjectura de Kneser

Seja $k, r \geq 1$ e $U = \{x_1, \dots, x_{k+2r}\}$ um conjunto de cardinalidade $k+2r$. Defina o Grafo de Kneser $KG_{k,r}$ pondo $V KG_{k,r} = \{X \subseteq U: |X| = r\}$ e X e Y adjacentes em $KG_{k,r}$ sse $X \cap Y = \emptyset$. A Conjectura de Kneser equivale a $\chi KG_{k,r} \geq k+2$. Vamos mostrar aqui que, na verdade, consideravelmente mais é verdade:

Teorema 3.1. $\chi^r KG_{k,r} \geq k+2$.

Prova. Vamos calcular $\mathcal{F} KG_{k,r}$, o reticulado dos fechados de $KG_{k,r}$. Para tanto, vamos calcular $(\nu KG_{k,r})^2 S$, o fecho de um $S \subseteq V KG_{k,r}$ arbitrário. Defina $\check{S} = \bigcup \{X: X \in S\}$. Caso $|\check{S}| > k+r$, então $(\nu KG_{k,r})S = \emptyset$ e $(\nu KG_{k,r})^2 S = V KG_{k,r}$. Caso $|\check{S}| \leq k+r$, é fácil ver que $(\nu KG_{k,r})S \neq \emptyset$

e que $(\nu KG_{k,r})^2 S = \{X \subseteq \check{S} : |X| = r\}$. Desta forma, $\overline{\mathcal{F}KG_{k,r}}$ é a ordem parcial dos $X \subseteq U$ tais que $r \leq |X| \leq k+r$. Note agora que

$$R = \{X \subseteq U : X = U \text{ ou } |X| \leq k+r\}$$

é um reticulado semimodular, logo, de I.3.3., $\tilde{H}_q(C\bar{R})$ é não trivial sse $q = k+r-1$. Para obter $\overline{\mathcal{F}KG_{k,r}}$ a partir de R , vamos retirando os elementos de $\bar{R}$ um a um, primeiro os conjuntos unitários, depois os pares, as triplas, etc; onde a ordem de retirada entre os elementos de mesma cardinalidade é arbitrária. Mostramos que todas as ordens parciais que surgem neste processo têm homologia trivial a qualquer nível $q < k$. Inicialmente, $\bar{R}$ tem esta propriedade (admitimos $r \geq 2$). Suponha agora que já retiramos alguns elementos e obtivemos P com $\tilde{H}_q(CP)$ trivial para $q < k$. Suponha também que o próximo elemento a ser retirado é um conjunto $T \subseteq U$ com cardinalidade l , $1 \leq l < r$. Defina $P' = P \setminus \{T\}$, ordem parcial. Neste caso, $CP = T *_L CP'$ onde $L = CQ$,

$$Q = \{X \subseteq U : T \subset X, |X| \leq k+r\}.$$

Novamente, por I.3.3., $\tilde{H}_q(L)$ é não trivial sse $q = k+r-l-1$. A sequência de Mayer-Vietoris é

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_q(L) \rightarrow \tilde{H}_q(CP') \rightarrow \tilde{H}_q(CP) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(L) \rightarrow \dots$$

Resta observar que se $q < k$, então $\tilde{H}_q(L) \cong (0)$ (pois $q < k \leq k+r-l-1$) e $\tilde{H}_q(CP) \cong (0)$ por hipótese de indução. ||

Notas Bibliográficas

O Teorema 1.1. foi provado numa versão mais fraca por Walker [Wa2], a saber, no caso onde $m = 0$. Cabe entretanto mencionar que a demonstração que apresentamos é uma modificação simples da prova daquele caso.

A Proposição 2.3., devido a Lovász, pode ser encontrada em [Lo5]. Ou ainda, o leitor pode se divertir tentando achar uma construção sua para provar aquele resultado: isto é um exercício clássico e bastante interessante da Teoria dos Grafos [BD].

Lovász pergunta em [Lo1] se é verdade que todo grafo com grupo de homotopia trivial em dimensão n tem número cromático diferente de n . Walker [Wa1] constrói contra-exemplos através de sua observação que registramos na Proposição 4.3. do capítulo anterior (item iii.) Os Teoremas 2.1. e 2.2. esclarecem a situação.

A prova apresentada de que $\overline{\mathcal{F}KG_{k,r}}$ tem homologia trivial em dimensões $q = 0, 1, \dots, k-1$ é devida a Lovász, exceto que sua prova não usa o Teorema 1.3.1., seu cálculo das homologias das partes próprias de reticulados semimodulares é outra, cf. [Lo3]. Na verdade, há certamente pelo menos três formas bastante diferentes de se mostrar que $\overline{\mathcal{F}KG_{k,r}}$ é $(k-1)$ -acíclico. Uma delas é através do conceito de *descascabilidade (lexicográfica)* introduzida por Björner [Bj1]. Uma outra é mais algébrica e envolve o conceito de ordens parciais Cohen-Macaulay, cf. [BGS] e [Ba2]. A prova que apresentamos é, talvez, a mais direta.

Capítulo IV

O Funtor Revisitado

Concluimos no capítulo anterior a prova do Teorema A — a Conjectura de Kneser. Uma parte crucial da demonstração foi o cálculo de $\mathcal{W}K_{k,r}$. Tal cálculo envolveu o Teorema I.3.1. que descreve a topologia da parte própria de um reticulado semimodular.

Quando consideramos a possibilidade de utilizar o funtor de Walker em outras situações, um problema imediatamente se põe: como podemos, em geral, calcular $\mathcal{W}G$, onde G é um grafo arbitrário? Tentamos neste capítulo iniciar o estudo de algumas técnicas gerais neste sentido. A primeira observação é que vamos nos restringir ao estudo da homologia de $\mathcal{F}G$. Na verdade, como $\mathcal{F}G \simeq \mathcal{N}G$, trataremos apenas da homologia do complexo de vizinhanças.

Grafólogos gostam de fazer provas por indução através da remoção de vértices e/ou arestas e também através da contração de arestas. A primeira seção deste capítulo estuda o efeito daquelas operações na topologia do complexo de vizinhanças. É também uma técnica comum tentar tirar informações sobre um grafo a partir de eventuais informações que tenhamos de seus subgrafos próprios. A seção 2 está nesta linha. Através

dos resultados da seção 1, analisamos, na seção seguinte, o complexo de vizinhanças de grafos triangulados. O assunto da seção 4 é $\mathcal{N}G$ para G planar. Terminamos este capítulo por uma observação sobre a conjectura do número cromático do produto (categórico) de grafos.

1. Remoções de Vértices e Arestas de um Grafo

Existem três operações muito simples sobre grafos que são extremamente úteis nas provas por indução, a saber, a remoção de vértices e a remoção e contração de arestas. É natural perguntarmos qual é o efeito destas operações sobre a imagem do grafo pelo funtor de Walker. À luz da Proposição II.4.1., que afirma terem o complexo das vizinhanças de um grafo e o complexo das cadeias da ordem parcial de seus fechados não triviais o mesmo tipo de homotopia, podemos tentar responder a pergunta acima analisando o efeito daquelas sobre o primeiro complexo que, do ponto de vista combinatório, é mais fácil de se tratar.

Começamos lembrando que se G é um grafo, denotamos por $\mathcal{N}G$ o seu complexo de vizinhanças, i.e., o complexo simplicial sobre os vértices não isolados de G cujas faces são os conjuntos não vazios de vértices contidos em alguma vizinhança $\nu G(x)$, $x \in VG$. Note que se x é um vértice isolado de G , então $\mathcal{N}G = \mathcal{N}(G - x)$. Vamos passar a considerar o problema de relacionar $\mathcal{N}G$ e $\mathcal{N}(G - x)$ em geral e, naturalmente, admitimos x de grau pelo menos um. Definimos K e L subcomplexos de $\mathcal{N}G$ por

$$K = \mathcal{N}G - x$$

$$\text{e} \quad L = \lg_{\mathcal{N}G} x,$$

$$\text{de forma que} \quad \mathcal{N}G = x *_L K$$

e se comparamos K com $\mathcal{N}(G - x)$, percebemos que, enquanto

$$\text{Face } \mathcal{N}(G - x) = \{\sigma \subseteq VG \setminus \{x\} : \emptyset \neq \sigma \subseteq \nu G(y) \text{ algum } y \in VG \setminus \{x\}\},$$

vale

$$\text{Face } K = \{\sigma \subseteq VG \setminus \{x\} : \emptyset \neq \sigma \subseteq \nu G(y) \text{ algum } y \in VG\}.$$

Assim, basta acrescentar a face $\nu G(x)$ em $\mathcal{N}(G - x)$ para se obter K , i.e.,

$$VK = V\mathcal{N}(G - x) \cup \nu G(x)$$

$$\text{e Face } K = \text{Face } \mathcal{N}(G - x) \cup \{\nu G(x)\}.$$

Defina agora $K' = (\mathcal{N}(G - x))[\nu G(x)]$, subcomplexo de $\mathcal{N}(G - x)$.

Teorema 1.1. *Seja G um grafo e $x \in VG$, com $gG(x) > 0$. Se $\mathcal{N}G = x *_L K$ e $K' = (\mathcal{N}(G - x))[\nu G(x)]$ então*

i. $L \simeq K'$ e

São exatas :

ii.

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_q(L) \rightarrow \tilde{H}_q(K) \rightarrow \tilde{H}_q(G) \xrightarrow{\alpha} \tilde{H}_{q-1}(L) \rightarrow \dots,$$

iii.

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_q(K') \rightarrow \tilde{H}_q(G - x) \rightarrow \tilde{H}_q(K) \xrightarrow{\beta} \tilde{H}_{q-1}(K') \rightarrow \dots$$

onde, a menos dos morfismos conectores α e β , todos os morfismos são induzidos pelas respectivas inclusões.

Convenção: $\tilde{H}_*(G) = \tilde{H}_*(\mathcal{N}G) = \tilde{H}_*(C\overline{\mathcal{F}G})$ para todo grafo G . Embora um grafo possa ser visto como um complexo simplicial de dimensão 1, esta notação não acarreta confusão, já que o espaço topológico associado a um grafo é sempre, para nós, a realização geométrica do seu complexo de vizinhanças. Continuamos também omitindo o anel de coeficientes das homologias.

Prova de 1.1.

i. Note que

$$VL = \{y \in VG \setminus \{x\} : \exists z \in VG \text{ tal que } \{x, y\} \subseteq \nu G(z)\}$$

$$\text{e que Face } L = \{\sigma \subseteq VL : \emptyset \neq \sigma \text{ e } \exists z \in VG, \sigma \cup \{x\} \subseteq \nu G(z)\}.$$

 Figura 1. O grafo B

Ainda,

$$VK' = \nu G(x) \cap V \mathcal{N}(G - x) = \{z \in \nu G(x) : gG(z) \geq 2\}$$

e $\text{Face } K' = \{\tau \subseteq VK' : \emptyset \neq \tau \text{ e } \exists y \in VG \setminus \{x\}, \tau \subseteq \nu G(y)\}.$

Monte o grafo bipartido B com $VB = VL \dot{\cup} VK'$ e $y \in VL$ e $z \in VK'$ adjacentes em B sse y e z são adjacentes em G , veja Figura 1.

Pelo Teorema do Nervo I.4.1. aplicado a B , $L \simeq K'$.

ii. É a sequência de Mayer-Vietoris aplicada à $\mathcal{N}G = (x * L) \cup K$. Note que $x * L$, sendo um cone, é contraível.

iii. Analogamente, devido à decomposição de K discutida anteriormente, K é a união de $\mathcal{N}(G - x)$ com o simplexo de vértices $\nu G(x)$. $\parallel$

Corolário 1.2. Seja G um grafo e $x \in VG$ um vértice com $gG(x) = g$. Então

ou i. existe $y \in VG$ com $\nu G(x) \subseteq \nu G(y)$ e $\mathcal{N}(G - x) \simeq \mathcal{N}G$

ou ii. $\tilde{H}_q(G - x) \rightarrow \tilde{H}_q(G)$ induzida pela inclusão é uma injeção para $q = g - 1$ e um isomorfismo para $q \geq g$.

Prova. Lembre que se existe y como em i., $G - x$ é um t -retrato de G , logo G e $G - x$ têm as respectivas partes próprias dos reticulados de fechados $\mathcal{F}G$ e $\mathcal{F}(G - x)$ homotópicas (cf. II.4.2.) Mas então $\mathcal{N}G \simeq C\overline{\mathcal{F}G} \simeq C\overline{\mathcal{F}(G - x)} \simeq \mathcal{N}(G - x)$. Em geral, observe que se $K' = (\mathcal{N}(G - x))[\nu G(x)]$, como $gG(x) =$

g , $\dim K' \leq g - 1$ com igualdade sse K' é um simplexo, i.e., sse existe y como em i. Admita então $\dim K' \leq g - 2$. Combinando com $L \simeq K'$, temos que $\tilde{H}_q(L) \cong \tilde{H}_q(K') \cong (0)$, $\forall q \geq g - 1$ e, assim, das seqüências exatas i. e ii. de 1.1., $\tilde{H}_q(G) \cong \tilde{H}_q(K) \cong \tilde{H}_q(G - x)$, $\forall q \geq g$. $\parallel$

Naturalmente, também segue de 1.1. que se $L \simeq K'$ são contraíveis, então $\tilde{H}_*(G) \cong \tilde{H}_*(G - x)$. Em geral, entretanto, se queremos tirar conclusões de 1.1., faz-se necessário entender as aplicações que ocorrem nas seqüências exatas. Um pequeno lema nessa direção é o seguinte. Considere as ordens parciais das faces de K' , $\mathcal{N}(G - x)$, L e de K . Denote por i' a inclusão $\text{Face } K' \hookrightarrow \text{Face } \mathcal{N}(G - x)$ e por j' , $\text{Face } L \hookrightarrow \text{Face } K$. Defina $\mu_1: \text{Face } K' \rightarrow \text{Face } L$ por $\mu_1(\tau) = \nu G(\tau) \setminus \{x\}$, $\forall \tau \in \text{Face } K'$ e $\mu_2: \text{Face } \mathcal{N}(G - x) \rightarrow \text{Face } K$ também por $\mu_2(\sigma) = \nu G(\sigma) \setminus \{x\}$, $\forall \sigma \in \text{Face } \mathcal{N}(G - x)$. Neste caso, $\mu_2 i' = j' \mu_1$.

$$\begin{array}{ccc} \text{Face } K' & \xrightarrow{i'} & \text{Face } \mathcal{N}(G - x) \\ \downarrow \mu_1 & & \downarrow \mu_2 \\ \text{Face } L & \xrightarrow{j'} & \text{Face } K \end{array}$$

Ainda, se $i: K' \hookrightarrow \mathcal{N}(G - x)$ e $j: L \hookrightarrow K$ são as inclusões e se identificamos $|H|$ e $|C \text{ Face } H|$ para os quatro complexos simpliciais acima, $|i| \simeq |i'|$ e $|j| \simeq |j'|$. Ademais,

$$|\mu_2||i| \simeq |\mu_2||i'| = |j'||\mu_1| \simeq |j||\mu_1|$$

como aplicações $|C \text{ Face } K'| = |K'| \rightarrow |C \text{ Face } K| = |K|$, concluímos então,

Proposição 1.3. *Sejam $i: K' \hookrightarrow \mathcal{N}(G - x)$ e $j: L \hookrightarrow K$ as inclusões, então se $|i|$ é homotopicamente trivial, $|j|$ também o é.*

Prova. Basta observar que se $\mu'_1: \text{Face } L \rightarrow \text{Face } K'$ é definida por $\mu'_1(\sigma) = \nu G(\sigma) \cap \nu G(x)$ então $\mu_1 \mu'_1 \sigma \supseteq \sigma$, para toda face $\sigma \in \text{Face } L$, logo $|\mu_1 \mu'_1| \simeq 1_{|\text{Face } L|}$. Assim, novamente identificando $|H|$ e $|C \text{ Face } H|$ para todos os complexos,

$$|\mu_2||i| \simeq |j||\mu_1|$$

implica

$$|\mu_2||i||\mu'_1| \simeq |j|1_{|\text{Face } L|} \simeq |j|$$

||

Passaremos agora ao problema da remoção de arestas. Seja G um grafo e $\alpha \in aG$ uma de suas arestas. Sejam $x, y \in VG$ seus extremos. Comparemos $\mathcal{N}G$ e $\mathcal{N}(G - \alpha)$. Note inicialmente que como o caso onde um dos extremos de α tem grau 1 é trivial (se $gG(x) = 1$ então $\mathcal{N}(G - x) = \mathcal{N}(G - \alpha)$), admitimos $gG(x), gG(y) \geq 2$. Lembre ainda que se $\nu G(r) \subseteq \nu G(s)$ para algum $r, s \in VG$, $r \neq s$, então $G - r$ é um t-retrato de G e, assim, $\mathcal{N}G \simeq \mathcal{N}(G - r)$. Admitimos daqui para frente que $\nu G(r)$ e $\nu G(s)$ são incomparáveis para todo par de vértices distintos $r, s \in VG$. Lembramos que Δ^S denota o simplexo cujo conjunto de vértices é S .

A Figura 2 ilustra o subgrafo de G que nos interessa no processo de retirada da aresta α . Denotamos $G' = G - \alpha$.

Figura 2.

Observe que a única diferença entre $\mathcal{N}G'$ e $\mathcal{N}G$ é que a face maximal de $\mathcal{N}G$, $\nu G(x)$ (resp. $\nu G(y)$), não existe em $\mathcal{N}G'$, mas existe $\nu G'(x) = \nu G(x) \setminus \{y\}$ (resp. $\nu G'(y) = \nu G(y) \setminus \{x\}$). Assim, $\mathcal{N}G = \mathcal{N}G' \cup \Delta^{\nu G(x)} \cup \Delta^{\nu G(y)}$. Defina

$$K_x = \mathcal{N}G' \cup \Delta^{\nu G(x)}$$

e

$$K_y = \mathcal{N}G' \cup \Delta^{\nu G(y)}.$$

De forma que

$$\mathcal{N}G = K_x \cup K_y$$

e que

$$\mathcal{N}G' = K_x \cap K_y.$$

O Funtor Revisitado

Por Mayer-Vietoris aplicado a esta decomposição de $\mathcal{N}G$,

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_q(G') \rightarrow \tilde{H}_q(K_x) \oplus \tilde{H}_q(K_y) \rightarrow \tilde{H}_q(G) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(G') \rightarrow \cdots$$

é exata. Tentemos entender K_x e K_y . Defina, para tanto,

$$L_x = (\mathcal{N}G')[\nu G(x)] = \mathcal{N}G' \cap \Delta^{\nu G(x)}$$

$$e \quad L_y = (\mathcal{N}G')[\nu G(y)] = \mathcal{N}G' \cap \Delta^{\nu G(y)}.$$

Note que

$$\nu G(x) \setminus \{y\} = \nu G'(x)$$

$$\nu G(y) \setminus \{x\} = \nu G'(y)$$

são faces em L_x e L_y respectivamente. Logo, pelo Lema I.3.6, tomando $W = \{y\}$ e $K = L_x$ num caso e $W = \{x\}$ e $K = L_y$ no outro, concluímos que

$$L_x \simeq \sum \lg_{L_x} y$$

$$e \quad L_y \simeq \sum \lg_{L_y} x.$$

Defina $L'_x = \lg_{L_x} y$ e $L'_y = \lg_{L_y} x$. Observe que

$$VL'_x = \{x' \in \nu G'(x) : \exists y' \in VG; \{x', y'\} \subseteq \nu G(y')\}$$

$$e \quad VL'_y = \{y' \in \nu G'(y) : \exists x' \in VG; \{x, y'\} \subseteq \nu G(x')\},$$

$$\text{Face } L'_x = \{\sigma \subseteq \nu G'(x) : \emptyset \neq \sigma \text{ e } \exists y' \in VG; \sigma \cup \{y\} \subseteq \nu G(y')\}$$

$$e \quad \text{Face } L'_y = \{\tau \subseteq \nu G'(y) : \emptyset \neq \tau \text{ e } \exists x' \in VG; \tau \cup \{x\} \subseteq \nu G(x')\}.$$

Monte o grafo B bipartido com bipartição $VB = VL'_x \dot{\cup} VL'_y$ e ligando $x' \in VL'_x$ a $y' \in VL'_y$ sse x' e y' são ligados em G . Veja Figura 3.

Novamente, pelo Teorema do Nervo I.4.1. aplicado a B , $L'_x \simeq L'_y$. Conseqüentemente, $L_x \simeq L_y$. Sumarizamos nossas conclusões no seguinte:

Teorema 1.4. *Seja G um grafo e $\alpha \in aG$ uma aresta de extremos $x, y \in VG$ com $gG(x), gG(y) \geq 2$. Considere $G' = G - \alpha$. Defina*

$$K_x = \mathcal{N}G' \cup \Delta^{\nu G(x)} \quad \text{com inclusão } i: \mathcal{N}G' \hookrightarrow K_x$$

$$e \quad K_y = \mathcal{N}G' \cup \Delta^{\nu G(y)} \quad \text{com inclusão } j: \mathcal{N}G' \hookrightarrow K_y,$$

 Figura 3. O grafo B

e também

$$L_x = (\mathcal{N}G')[\nu G(x)]$$

e

$$L_y = (\mathcal{N}G')[\nu G(y)].$$

Temos então as seguintes seqüências exatas longas:

- i. $\dots \rightarrow \tilde{H}_q(G') \xrightarrow{\beta} \tilde{H}_q(K_x) \oplus \tilde{H}_q(K_y) \rightarrow \tilde{H}_q(G) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(G') \rightarrow \dots$
- ii. $\dots \rightarrow \tilde{H}_q(L_x) \rightarrow \tilde{H}_q(G') \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_q(K_x) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(L_x) \rightarrow \dots$
- iii. $\dots \rightarrow \tilde{H}_q(L_y) \rightarrow \tilde{H}_q(G') \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_q(K_y) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(L_y) \rightarrow \dots$

onde $\beta(\xi) = (i_*(\xi), j_*(\xi)), \forall \xi \in \tilde{H}_q(G')$.

Ademais, $L_x \simeq L_y$.

||

Note que o resultado acima nada mais é que uma aplicação simples da seqüência de Mayer-Vietoris, mas também cabe lembrar que $L_x \simeq L_y$ faz com que as seqüências exatas i., ii., e iii. sejam razoavelmente úteis. Se conseguirmos provar que um de L_x ou L_y é, por exemplo, contraível, obtemos as seguintes seqüências exatas curtas:

$$0 \rightarrow \tilde{H}_q(G') \xrightarrow{\beta} \tilde{H}_q(K_x) \oplus \tilde{H}_q(K_y) \rightarrow \tilde{H}_q(G) \rightarrow 0,$$

para todo $q \geq 0$, onde β é a aplicação diagonal $\xi \mapsto (\xi, \xi)$, logo $\tilde{H}_q(G) \cong \tilde{H}_q(G'), \forall q \geq 0$.

Lembre que provamos em II.4.3.iii. que se G não tem circuitos de comprimento 4, então $\dim C\overline{\mathcal{F}G} \leq 1$. Vemos novamente no resultado seguinte que tais circuitos têm um papel decisivo na determinação da topologia de $|\mathcal{N}G|$.

Proposição 1.5. *Seja G um grafo e $\alpha \in aG$ uma aresta que não esteja em nenhum circuito de comprimento 4. Então,*

- i. $\tilde{H}_q(G) \cong \tilde{H}_q(G - \alpha)$, para todo $q \geq 2$,
- ii. Se $G - \alpha$ é conexo e não bipartido, então

$$\tilde{H}_1(G, R) \cong \tilde{H}_1(G - \alpha, R) \oplus R^2.$$

Prova. Podemos assumir os extremos de α com grau pelo menos 2. Por α não estar em nenhum circuito de comprimento 4, $L_x \simeq L_y \simeq S^0$ (Notação de 1.4.) Conseqüentemente, temos as seguintes seqüências exatas curtas derivadas de i. em 1.4.,

$$0 \rightarrow \tilde{H}_q(G - \alpha) \xrightarrow{\beta_q} \tilde{H}_q(K_x) \oplus \tilde{H}_q(K_y) \rightarrow \tilde{H}_q(G) \rightarrow 0$$

para todo $q \geq 2$, basta notar que β_q é injetor para $q \geq 1$. Como β_q é a aplicação diagonal para $q \geq 2$, $\tilde{H}_q(G) \cong \tilde{H}_q(G - \alpha)$.

Suponha agora $G - \alpha$ não bipartido e conexo (na verdade, basta que $G - \alpha$ sem os vértices isolados seja conexo.) As seqüências de 1.4., a nível $q = 1$ são (anel de coeficientes R):

$$0 \rightarrow \tilde{H}_1(G') \xrightarrow{\beta} \tilde{H}_1(K_x) \oplus \tilde{H}_1(K_y) \rightarrow \tilde{H}_1(G) \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow \tilde{H}_1(G') \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_1(K_x) \rightarrow R \rightarrow 0$$

e
$$0 \rightarrow \tilde{H}_1(G') \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_1(K_y) \rightarrow R \rightarrow 0,$$

onde $G' = G - \alpha$. Sejam respectivamente $\bar{i}$ e $\bar{j}$ as cisões das duas últimas seqüências. Desta forma,

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1(K_x) &= \bar{i}R \oplus i_*\tilde{H}_1(G') \\ \tilde{H}_1(K_y) &= \bar{j}R \oplus j_*\tilde{H}_1(G') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{H}_1(G) &\cong \frac{\tilde{H}_1(K_x) \oplus \tilde{H}_1(K_y)}{\beta \tilde{H}_1(G')} \\
 &\cong \frac{i_* \tilde{H}_1(G') \oplus j_* \tilde{H}_1(G')}{\beta \tilde{H}_1(G')} \oplus R^2
 \end{aligned}$$

assim, lembrando que $\beta(\xi) = (i_*(\xi), j_*(\xi))$, $\forall \xi \in \tilde{H}_1(G')$, concluímos que $\tilde{H}_1(G') \cong \tilde{H}_1(G') \oplus R^2$. $\parallel$

Passamos finalmente à operação de contração de arestas. Restringiremo-nos apenas à redução deste problema a dois subproblemas envolvendo os Teoremas 1.1. e 1.4. Seja G um grafo e $\alpha \in aG$ uma aresta de G de extremos $x, y \in VG$. Seja $\bar{G}$ o grafo obtido de G acrescentando-se um novo vértice $z \notin VG$ a G ligando-o a $v \in VG$ sse $v \neq x, y$ e v for adjacente ou a x ou a y . Note então que $G' = G/\alpha \cong \bar{G} - \{x, y\}$ canonicamente, z é o vértice obtido pela contração de α (cf. Figura 4).

Figura 4: O grafo $\bar{G}$

O nosso primeiro passo é comparar $\tilde{H}_*(G)$ e $\tilde{H}_*(\bar{G})$ através do Teorema 1.1. Observe ainda que G' é t-retrato de ambos $\bar{G} - x$ e $\bar{G} - y$, logo, nosso segundo passo é analisar $\mathcal{N}G' \simeq \mathcal{N}(\bar{G} - x) \simeq \mathcal{N}(\bar{G} - y)$ ou através de 1.1. ou de 1.4. Um caso interessante é quando a aresta α está em algum triângulo mas não esté em nenhum circuito de comprimento 5 (portanto sua contração não cria circuitos de comprimento 4). De fato, quando aplicamos 1.1. a $G' = \bar{G} - z$, temos, na notação de 1.1.,

$$K' = (\mathcal{N}G) \setminus ((\nu G(x) \cup \nu G(y)) \setminus \{x, y\}).$$

Note agora que as hipóteses sobre α implicam que K' é contraível, de fato, K' é a união dos simplexos $\Delta^{\nu G(x) \setminus \{y\}}$ e $\Delta^{\nu G(y) \setminus \{x\}}$ com intersecção $\Delta^{\nu G(x) \cap \nu G(y)}$. Concluímos de 1.1. que $\tilde{H}_*(G) \cong \tilde{H}_*(\overline{G})$. Neste caso, portanto, o primeiro passo descrito acima é trivial.

2. Algumas Decomposições Úteis de Grafos

Uma pergunta extremamente natural é se existe alguma descrição razoável para $\mathcal{N}G$ em função de $\mathcal{N}B_1, \mathcal{N}B_2, \dots$, onde os B_i 's são os blocos de G . Nesta linha, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.1. *Seja G um grafo e $x \in VG$ um vértice de corte. Considere os subgrafos G_1 e G_2 de G com $G = G_1 \cup G_2$ e $VG_1 \cap VG_2 = \{x\}$. Então*

- i. $\tilde{H}_q(G, R) \cong \tilde{H}_q(G_1, R) \oplus \tilde{H}_q(G_2, R)$, para todo $q \geq 2$,
- ii. Admitindo ambos G_1 e G_2 conexos e não bipartidos,

$$\tilde{H}_1(G, R) \cong R \oplus \tilde{H}_1(G_1, R) \oplus \tilde{H}_1(G_2, R).$$

Prova. Basta notar que $\mathcal{N}G = \mathcal{N}G_1 \cup \mathcal{N}G_2 \cup \Delta^{\nu G(x)}$. De fato, se $\sigma \in \text{Face } \mathcal{N}G$, mas σ não está contido em $\nu G(x)$, então $x \notin \nu G(\sigma) \neq \emptyset$. Seja $y \in \nu G(\sigma)$, então se $y \in VG_i$, então $\sigma \in \text{Face } \mathcal{N}G_i$. Observe agora que $V\mathcal{N}G_1 \cap V\mathcal{N}G_2 = \{x\}$, assim, pela sequência de Mayer-Vietoris, segue o item i. acima.

Afirmamos que $(\mathcal{N}G_1 \cup \mathcal{N}G_2) \cap \Delta^{\nu G(x)} \simeq S^0$. Basta perceber que a intersecção é, na verdade, $\Delta^{\nu G_1(x)} \cup \Delta^{\nu G_2(x)}$. Novamente, por Mayer-Vietoris a nível $q = 1$,

$$0 \rightarrow \tilde{H}_1(\mathcal{N}G_1 \cup \mathcal{N}G_2, R) \rightarrow \tilde{H}_1(G, R) \rightarrow R \rightarrow 0,$$

pois admitimos G_1 e G_2 conexos e não bipartidos, logo $\mathcal{N}G_1$ e $\mathcal{N}G_2$ são conexos e, como $\mathcal{N}G_1 \cap \mathcal{N}G_2 \neq \emptyset$, $\mathcal{N}G_1 \cup \mathcal{N}G_2$ é conexo. Como a sequência cinde, concluímos ii. acima. ||

Caso na proposição acima eliminemos as hipóteses de serem ambos G_1 e G_2 não bipartidos, a conclusão i. vale para todo $q \geq 1$. De fato, admita G_1 bipartido. A sequência de Mayer-Vietoris para $\mathcal{N}G = (\mathcal{N}G_1 \cup \mathcal{N}G_2) \cup \Delta^{\nu G(x)}$ para homologia não reduzida termina com

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_1(\mathcal{N}G_1 \cup \mathcal{N}G_2) \rightarrow H_1(G) \rightarrow \\ \rightarrow H_0((\mathcal{N}G_1 \cup \mathcal{N}G_2) \cap \Delta^{\nu G(x)}) \xrightarrow{\rho} H_0(\mathcal{N}G_1 \cup \mathcal{N}G_2) \rightarrow H_0(G) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Lembre que

$$(\mathcal{N}G_1 \cup \mathcal{N}G_2) \cap \Delta^{\nu G(x)} = \Delta^{\nu G_1(x)} \cup \Delta^{\nu G_2(x)}$$

e $\Delta^{\nu G_1(x)}$, subcomplexo de $\mathcal{N}G_1$, não está na componente de x em $\mathcal{N}G_1$. Como $\mathcal{N}G_1 \cap \mathcal{N}G_2 = \{x\}$, vem que $\Delta^{\nu G_1(x)}$ e $\Delta^{\nu G_2(x)}$ estão em componentes distintas de $\mathcal{N}G_1 \cup \mathcal{N}G_2$. Assim, ρ da sequência acima é injetor. Concluimos que

$$\tilde{H}_1(G) \cong \tilde{H}_1(G_1) \oplus \tilde{H}_1(G_2).$$

Sumarizando,

Teorema 2.2. *Seja G um grafo conexo. Então*

i.

$$\tilde{H}_0(G, R) \cong \begin{cases} R, & \text{se } G \text{ é bipartido e} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

ii. Se $B_1, \dots, B_r$ são os blocos de G ,

a. $\tilde{H}_q(G, R) \cong \tilde{H}_q(B_1, R) \oplus \dots \oplus \tilde{H}_q(B_r, R)$ para todo $q \geq 2$ e

b. Se t blocos de G são não bipartidos, então

$$\tilde{H}_1(G, R) \cong \begin{cases} \tilde{H}_1(B_1, R) \oplus \dots \oplus \tilde{H}_1(B_r, R), & \text{se } t \leq 1 \\ R^{t-1} \oplus \tilde{H}_1(B_1, R) \oplus \dots \oplus \tilde{H}_1(B_r, R), & \text{se } t \geq 2. \end{cases}$$

Prova. i. decorre de $\mathcal{N}G$ ser conexo sse G menos os vértices isolados ser conexo e não bipartido. Para ii., basta fazer indução em r , levando em conta 2.1. e a observação imediatamente acima. ||

Figura 1

Este resultado permite-nos restringir nossa atenção a grafos 2-conexos no que concerne ao cálculo da homologia do complexo de vizinhanças. Uma possível generalização desta técnica é, naturalmente, supor G não 3-conexo e tentar descrever $\tilde{H}_*(G)$ em função dos $\tilde{H}_*(G')$, G' subgrafo maximal 3-conexo de G . Este estratagema parece, entretanto, difícil de se cumprir sem hipóteses adicionais. Temos, porém:

Lema 2.3. *Admita que um grafo G possa ser decomposto em $G = G_1 \cup G_2$, G_1 e G_2 conexos com $VG_1 \cap VG_2 = \{x, y\}$, x e y não adjacentes em G . Admita que todo circuito de comprimento 4 que contenha ambos x e y esteja contido ou em G_1 ou em G_2 . Então*

- i. $\tilde{H}_q(G, R) \cong \tilde{H}_q(G_1, R) \oplus \tilde{H}_q(G_2, R)$, para todo $q \geq 2$ e
- ii. Suponha G_1 ou G_2 não bipartido, então

$$\tilde{H}_1(G, R) \cong \begin{cases} R^3 \oplus \tilde{H}_1(G_1, R) \oplus \tilde{H}_1(G_2, R), & \text{se ambos } G_1 \text{ e } G_2 \\ & \text{são não bipartidos,} \\ R^2 \oplus \tilde{H}_1(G_1, R) \oplus \tilde{H}_1(G_2, R), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Prova. Defina $X_i = \nu G(x) \cap VG_i$. Introduza dois novos vértices em G , $x_1, x_2 \notin VG$, ligando x_i exatamente a X_i , $i = 1, 2$. O grafo G' assim obtido tem o seu complexo de vizinhanças homotópico ao complexo de G , cf. II.4.2.ii. Veja Figura 1.

Na notação de 1.1., $K' = (\mathcal{N}(G' - x))[\nu G'(x)]$ (tomando G de 1.1. = G'). Observe que $K' \simeq S^0$, devido a hipótese sobre os 4-circuitos. Segue

que

$$\tilde{H}_q(G) \cong \tilde{H}_q(G') \cong \tilde{H}_q(G' - x),$$

para todo $q \geq 2$. Note agora que, $G' - x$ sendo não bipartido, segue de 1.1. que

$$\tilde{H}_1(G') \cong R^2 \oplus \tilde{H}_1(G' - x)$$

Aplicamos, agora, 2.1.ii. ao grafo $G' - x$ com vértice de corte y e concluímos a prova. ||

O argumento acima generaliza-se para provar:

Proposição 2.4. *Suponha que G seja um grafo com decomposição $G = G_1 \cup G_2$, G_1 e G_2 subgrafos induzidos de G com $F = G_1 \cap G_2$ uma floresta. Admita que todo circuito de comprimento 4 contendo pelo menos dois vértices de F esteja contido ou em G_1 ou em G_2 . Então*

- i. $\tilde{H}_q(G, R) \cong \tilde{H}_q(G_1, R) \oplus \tilde{H}_q(G_2, R)$, para todo $q \geq 2$ e,
- ii. $\tilde{H}_1(G, R) \cong R^{2 \cdot cF - 1} \oplus \tilde{H}_1(G_1, R) \oplus \tilde{H}_1(G_2, R)$ se ambos G_1 e G_2 são conexos e não bipartidos e cF denota o número de componentes da floresta F . ||

Uma outra decomposição de grafos bastante útil é aquela obtida separando-se o grafo num dado corte de arestas. Mais formalmente, seja G um grafo e $VG = X \dot{\cup} Y$ uma partição dos vértices de G . Assim, G pode ser obtido da união disjunta dos subgrafos induzidos $G[X]$ e $G[Y]$ de G , acrescentando-se algumas arestas ligando alguns vértices em X com alguns em Y , a saber, as arestas

$$\delta(X, Y) = \{\alpha \in aG: \alpha \text{ tem um extremo em } X \text{ e outro em } Y\}.$$

No caso particular em que nem todo vértice de X (resp. de Y) é ligado a algum de Y (resp. de X), podemos tirar alguma informação sobre $\mathcal{N}G$ a partir de uma seqüência exata longa que liga $\tilde{H}_*(G)$, $\tilde{H}_*(G[X \cup Y_1])$ e $\tilde{H}_*(G[Y \cup X_1])$, onde

$$X_1 = \{x \in X: x \text{ é ligado a algum } y \in Y\}$$

e

$$Y_1 = \{y \in Y: y \text{ é ligado a algum } x \in X\}.$$

Figura 2.

Teorema 2.5. Seja G um grafo e $VG = X \dot{\cup} Y$. Defina X_1 e Y_1 como acima. Então existe uma seqüência exata longa

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \tilde{H}_q(G_X \cap G_Y) \rightarrow \tilde{H}_q(G_X) \oplus \tilde{H}_q(G_Y) \rightarrow \\ \rightarrow \tilde{H}_q(G) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(G_X \cap G_Y) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

onde

$$G_X = G[X \cup Y_1]$$

e

$$G_Y = G[Y \cup X_1]$$

Prova. Afirmamos que $\mathcal{N}G = \mathcal{N}G_X \cup \mathcal{N}G_Y$. Basta notar que se $\sigma \in \text{Face } \mathcal{N}G$, então $\sigma \subseteq X \cup Y_1$ ou $\sigma \subseteq Y \cup X_1$; na verdade, se $z \in \nu G(\sigma)$, então $z \in X \Rightarrow \sigma \subseteq X \cup Y_1$ e $z \in Y \Rightarrow \sigma \subseteq Y \cup X_1$. No primeiro caso, $\sigma \in \text{Face } \mathcal{N}G_X$ e, no segundo, $\sigma \in \text{Face } \mathcal{N}G_Y$.

Ainda, σ é uma face de $\mathcal{N}G_X \cap \mathcal{N}G_Y$ só se $\sigma \subseteq X_1 \cup Y_1$ e $\nu G(\sigma) \cap (X_1 \cup Y_1) \neq \emptyset$. De fato, se, por exemplo, $\sigma \cap X_1 \neq \emptyset$ então $\nu G(\sigma) \subseteq X \cup Y_1$, mas $\sigma \in \text{Face } \mathcal{N}G_Y$ implica $\emptyset \neq \nu G_Y(\sigma) = \nu G(\sigma) \cap (Y \cup X_1)$, logo $\nu G(\sigma) \cap (X_1 \cup Y_1) \neq \emptyset$. A recíproca sendo igualmente simples, concluímos que $\text{Face } \mathcal{N}G_X \cap \text{Face } \mathcal{N}G_Y = \text{Face } \mathcal{N}(G_X \cap G_Y)$. Basta então aplicar a seqüência de Mayer-Vietoris a $\mathcal{N}G = \mathcal{N}G_X \cup \mathcal{N}G_Y$. $\parallel$

Como um exemplo de aplicação deste último resultado, calculamos a homologia $\tilde{H}_*(T_\ell, R)$, onde T_ℓ é um dos grafos construídos por Toft para

Figura 3.

provar a existência de grafo 4-cromáticos aresta-críticos com muitas arestas (i.e., com uma fração positiva de arestas). Vamos ver que T_ℓ é um grafo para o qual vale a desigualdade estrita $3 = \chi^r T_\ell < \chi T_\ell = 4$, para todo $\ell \geq 1$. T_ℓ pode ser descrito da seguinte forma: defina inicialmente H_ℓ como a união disjunta de dois circuitos ímpares $C^{2\ell+1}$ e um grafo bipartido completo $K_{2\ell+1, 2\ell+1}$. Adicione $2(2\ell+1)$ arestas novas a H_ℓ formando um emparelhamento, tais arestas ligando vértices do primeiro circuito aos da primeira classe do $K_{2\ell+1, 2\ell+1}$ e os do segundo, aos da segunda classe. O grafo assim obtido é T_ℓ , cf. Figura 3.a.

Claramente, T_ℓ é 4-cromático (e, também aresta-crítico). Na notação de 2.5., defina X como os vértices do primeiro circuito e os da primeira classe de $K_{2\ell+1, 2\ell+1}$. Neste caso, X_1 (resp. Y_1) são os vértices da primeira (resp., segunda) classe de $K_{2\ell+1, 2\ell+1}$. Concluímos que $G_X \cong G_Y$ e que eles têm como t-retrato o grafo G_ℓ definido da seguinte forma: comece com uma união disjunta de uma estrela $K_{1, 2\ell+1}$ com o circuito $C^{2\ell+1}$ e junte a ela $2\ell+1$ arestas formando um emparelhamento, cada aresta ligando uma ponta da estrela com um vértice do circuito (cf. Figura 3.b.) Note que $G_X \cap G_Y = K_{2\ell+1, 2\ell+1}$, logo, por 3.2., $\tilde{H}_q(G) \cong \tilde{H}_q(G_X) \oplus \tilde{H}_q(G_Y) \cong \tilde{H}_q(G_\ell) \oplus \tilde{H}_q(G_\ell)$ para $q \geq 2$ e, para $q = 1$, temos

$$0 \rightarrow \tilde{H}_1(G_X) \oplus \tilde{H}_1(G_Y) \rightarrow \tilde{H}_1(G) \rightarrow R \rightarrow 0,$$

pois $G_X \cong G_Y$ são conexos e não bipartidos. Pela cisão da sequência acima,

$$\tilde{H}_1(G) \cong R \oplus \tilde{H}_1(G_X) \oplus \tilde{H}_1(G_Y)$$

A homologia de $\mathcal{N}G_\ell$ é fácil de se calcular, usamos 1.1. Tome como x (na notação de 1.1.) o centro da estrela. Neste caso, K' é o espaço discreto formado por $2\ell + 1$ pontos. Combinando 1.1.i. e 1.1.ii.,

$$\begin{aligned} \tilde{H}_q(G_\ell) &\cong \tilde{H}_q(G_\ell - x), & \text{para todo } q \geq 2 \\ \text{e} \quad \tilde{H}_1(G_\ell) &\cong R^{4\ell} \oplus \tilde{H}_1(G_\ell - x). \end{aligned}$$

Como o circuito $C^{2\ell+1}$ é um t-retrato de $G_\ell - x$ e $\mathcal{N}C^{2\ell+1} \approx S^1$, concluímos

$$\tilde{H}_q(T_\ell, R) \cong \begin{cases} 0, & \text{se } q \neq 1 \text{ e} \\ R^{8\ell+3}, & \text{se } q = 1. \end{cases}$$

Observamos que este último resultado também pode ser obtido através de 1.5.

Note que se $X = X_1$ ou $Y = Y_1$ em 2.5. acima, então $G_X = G$ ou $G_Y = G$ e a seqüência exata torna-se trivial, não obtemos nenhuma informação a partir dela. Entretanto, no caso extremo onde $X = X_1$, $Y = Y_1$ e, ainda, todo vértice de X é adjacente a todo vértice de Y , podemos usar o resultado seguinte. Definimos a *junção* de dois grafos G_1 e G_2 , denotado $G_1 * G_2$, como o grafo obtido pelo acréscimo de $|VG_1||VG_2|$ arestas à união disjunta $G_1 \cup G_2$, cada uma delas ligando um par distinto de vértices $x \in VG_1$ e $y \in VG_2$.

Proposição 2.6. Para quaisquer grafos G_1 e G_2 com $aG_1, aG_2 \neq \emptyset$,

- i. $G_1[aG_1] * G_2[aG_2]$ é t-retrato de $G_1 * G_2$,
- ii. $\mathcal{F}(G_1 * G_2) \cong \mathcal{F}G_1 \times \mathcal{F}G_2$ como ortoreticulados e
- iii. $\mathcal{N}(G_1 * G_2) \simeq \sum(\mathcal{N}G_1 * \mathcal{N}G_2)$.

Prova. i. é imediato. Para verificar iii., observe que $\overline{\mathcal{F}G_1 \times \mathcal{F}G_2} \cong \sum(\overline{\mathcal{F}G_1} * \overline{\mathcal{F}G_2})$ decorre de uma aplicação direta de II.2.2. e, como $X_1 * Y_1 \simeq X_2 * Y_2$ decorre de $X_1 \simeq X_2$ e $Y_1 \simeq Y_2$ para espaços X_i e Y_i trianguláveis, vale que $|\overline{\mathcal{F}G_1}| * |\overline{\mathcal{F}G_2}| \simeq |\mathcal{N}G_1| * |\mathcal{N}G_2|$. Resta-nos, portanto, verificar ii. Para tanto, defina

$$\lambda: \mathcal{F}(G_1 * G_2) \rightarrow \mathcal{F}G_1 \times \mathcal{F}G_2$$

por $\sigma \mapsto (\sigma \cap VG_1, \sigma \cap VG_2)$. Note que $S \subseteq VG_1 \dot{\cup} VG_2$ é fechado em $G_1 * G_2$ sse $S \cap VG_i$ for fechado em G_i , $i = 1, 2$. Assim, λ está bem definida e é uma bijeção. Ainda,

$$\nu(G_1 * G_2)(S) = \nu G_1(S \cap VG_1) \cup \nu G_2(S \cap VG_2),$$

logo λ é um isomorfismo de ortoreticulados. ||

Os casos excluídos da hipótese de 2.6. são triviais. Basta observar que se $aG_1 = aG_2 = \emptyset$ então $\mathcal{N}(G_1 * G_2) \simeq S^0$ e se $aG_1 \neq \emptyset$, mas $aG_2 = \emptyset$, então $G_1 * G_2$ tem como t-retrato o grafo $G' = z * G_1$ ($z \notin VG_1$), i.e., o grafo com $VG' = \{z\} \dot{\cup} VG_1$ e $aG' = aG_1 \dot{\cup} \{zx: x \in VG_1\}$. A próxima proposição liquida este caso. Note também que o item ii. do resultado abaixo foi fundamental na prova do Teorema III.2.2.

Proposição 2.7. *Seja G um grafo e $z \notin VG$, então*

- i. $\mathcal{N}(z * G) \simeq \sum \mathcal{N}G$ e, também,
- ii. $\mathcal{N}(\text{Myc } G) \simeq \sum \mathcal{N}G$, onde $\text{Myc } G$ denota o grafo obtido pela aplicação da operação de Mycielski em G .

Prova. Que ambos $\mathcal{N}(z * G)$ e $\mathcal{N}(\text{Myc } G)$ são suspensões homológicas de $\mathcal{N}G$, decorre imediatamente de 1.1. Para a versão mais forte acima, lembremos I.3.6.

- i. Tome, na notação de I.2.6., $K = \mathcal{N}(z * G)$ e $W = \{z\}$. Então, $K - W = \Delta^{VG} \simeq *$ e, assim, $K \simeq \sum \lg_K z$. Note agora que $\sigma \cup \{z\}$ é face de $\mathcal{N}(z * G)$ para todo σ face de $\mathcal{N}G$, logo $\lg_K z = \mathcal{N}G$.
- ii. Tome neste caso $K = \mathcal{N}(\text{Myc } G)$ e $W = \{z\}$, onde $z \in V \text{ Myc } G$ é o centro de $\text{Myc } G$, i.e., aquele vértice introduzido na operação de Mycielski ligado a todas as duplicações x' , $x \in VG$, cf. as observações que precedem a demonstração do Teorema III.2.2. É fácil ver que $\lg_K z = \mathcal{N}G$. Para concluirmos a prova, basta verificar que $K - W$ é contraível e então aplicar I.3.6. Defina $V = VG$, $V' = \{x': x \in VG\}$ e seja a face $\hat{\sigma}$ de $K - W$ definida por

$$\hat{\sigma} = \begin{cases} \sigma, & \text{se } \sigma \subseteq V' \text{ e} \\ \{x: x \in \sigma \text{ ou } x' \in \sigma\} \cup \{x': x \in \sigma \text{ ou } x' \in \sigma\}, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para todo $\sigma \in \text{Face}(K - W)$. Defina agora a aplicação simplicial $\rho: K - W \longrightarrow K - W$ por $x \mapsto x'$ e $x' \mapsto x'$. Note que para toda face $\sigma \in \text{Face}(K - W)$,

$$\sigma \cup \rho\sigma \subseteq \hat{\sigma}.$$

Mas então a aplicação identidade de $K - W$ é homotópica a ρ por I.1.3. Concluimos que $\Delta^{V'} \simeq *$ é um retrato forte de $K - W$. ||

3. Grafos Triangulados

Analizamos nesta seção o complexo de vizinhanças de grafos triangulados. O resultado é:

Teorema 3.1. *Seja G um grafo triangulado e $\omega = \omega G$. Então*

- i. $\tilde{H}_{\omega-2}(G, R) \neq (0)$ e
- ii. $\tilde{H}_q(G, R) \cong (0)$ para $q > \omega - 2$.

Podemos tirar o item i. acima como corolário de II.3.2., de fato, basta lembrar que todo grafo triangulado é perfeito, logo $\omega G = \chi G$. A prova que damos aqui para este resultado é direta, não usamos a perfeição de G . Por outro lado, o segundo item parece não decorrer do funtor de Walker. A demonstração que damos para ambos os itens é baseada em uma caracterização de grafos triangulados devido a Frank e Kas. Para um grafo G e um vértice $x \in VG$, dizemos que x é *simplicial* (em G) sse quaisquer dois de seus vizinhos são adjacentes entre si.

Teorema 3.2. *São equivalentes para um grafo G :*

- i. G é triangulado,
- ii. Ou G é completo, ou existem dois vértices simpliciais em G não adjacentes. ||

Prova de 3.1. Fazemos indução em $|VG|$. Sendo o caso $|VG| = 1$ trivial, prosseguimos admitindo $|VG| \geq 2$. Caso G seja um grafo completo, o

resultado segue, pois $\mathcal{N}K^r \approx S^{r-2}$. Considere então $x, y \in VG$ dois vértices de G simpliciais não adjacentes, dados por 3.2.ii. Claramente, $gG(x) \leq \omega - 1$, logo, de 1.2.ii., $\tilde{H}_q(G, R) \cong \tilde{H}_q(G - x, R)$, para $q \geq \omega - 1$. Como $\omega(G - x) \leq \omega$, provamos que $\tilde{H}_q(G, R)$ é trivial para $q \geq \omega - 1$ através da hipótese de indução. Em relação a i., note que se $gG(x) < \omega - 1$, então $\omega(G - x) = \omega$ e $\tilde{H}_{\omega-2}(G, R) \cong \tilde{H}_{\omega-2}(G - x, R)$ segue de 1.2.ii. e, pela hipótese de indução, segue ii. acima. Admita, então, $gG(x) = gG(y) = \omega - 1$. Neste caso, $\omega(G - x) = \omega$, pois x e y não são adjacentes e y está num clique de tamanho ω . Descartamos a possibilidade de existir $x' \in VG$ com $\nu G(x) \subseteq \nu G(x')$, pois neste caso $G - x$ é t-retrato de G e, assim, $\mathcal{N}G \simeq \mathcal{N}(G - x)$ e o resultado segue por indução. Portanto, na notação de 1.1., K' é o bordo de $\Delta^{\nu G(x)}$, i.e., $K' \approx S^{\omega-3}$. As seqüências de 1.1. são (homologias sobre R):

$$0 \rightarrow \tilde{H}_{\omega-2}(K) \rightarrow \tilde{H}_{\omega-2}(G) \rightarrow R$$

$$\text{e} \quad 0 \rightarrow \tilde{H}_{\omega-2}(G - x) \rightarrow \tilde{H}_{\omega-2}(K) \rightarrow R$$

logo, segue da hipótese de indução que $\tilde{H}_{\omega-2}(K)$ e, conseqüentemente, $\tilde{H}_{\omega-2}(G)$ são não triviais. ||

O Teorema 3.2. acima mostra duas propriedades bastante particulares de grafos triangulados. Já mencionamos que o item i. é válido para todo grafo G com $\omega G = \chi G$. Observamos agora que o item ii. não é verdade nem para grafos perfeitos. De fato, basta notar que qualquer complexo simplicial (conexo) pode ser uma das componentes do complexo de vizinhanças de um grafo bipartido (conexo). Assim, existe G bipartido com $\tilde{H}_p(G)$ não trivial para algum $p \geq \omega G - 1 = 1$, p arbitrário. A partir deste exemplo bipartido, podemos construir grafos G' $(n + 2)$ -cromáticos perfeitos com $\tilde{H}_p(G')$ não trivial para algum $p \geq \omega G' - 1$, p arbitrário: basta tomar $G' = K^n * G$ e usar 2.7.i. Defina o parâmetro

$$\lambda \dim_R G = \sup\{q: \tilde{H}_q(G, R) \neq (0)\},$$

a *dimensão homológica* do grafo G sobre R . Sabemos que $\omega G \leq 2 + \lambda \dim_R G \leq |VG|$, a primeira desigualdade devido ao Teorema III.2.1., e a segunda sendo trivial. O resultado 3.1.ii. pode ser reenunciado dizendo que $2 + \lambda \dim_R G \leq \omega G$ para todo grafo triangulado G . Terminamos esta seção com mais duas pequenas observações sobre o parâmetro $\lambda \dim_R G$. Note que elas são análogas a alguns fatos básicos sobre números cromáticos de grafos.

Proposição 3.3. Para todo grafo G , se $g_1 \geq g_2 \geq \dots \geq g_n$ é a sequência decrescente dos graus dos vértices de G ($|VG| = n$), então

$$2 + \lambda \dim_R G \leq \max_i \min\{i, g_i + 1\} \quad ||$$

Note que o lado direito da desigualdade acima nada mais é que o maior índice k tal que $k \leq g_k + 1$. Denote por $\overline{G}$ o complemento do grafo G , i.e., o grafo com exatamente os mesmos vértices de G , mas tal que dois vértices (distintos) são adjacentes em $\overline{G}$ sse não o forem em G .

Proposição 3.4. Para todo grafo G com n vértices,

$$\lambda \dim_R G + \lambda \dim_R \overline{G} \leq n - 3 \quad ||$$

As provas são simples, bastando usar o Corolário 1.2.

4. Grafos Planares

Definimos no fim da última seção a dimensão homológica de um grafo G sobre um anel R , $\lambda \dim_R G$. Vamos, nesta seção, estudar tal parâmetro para grafos planares. Fixamos o anel de coeficientes R e continuamos a omiti-lo da notação. Estamos particularmente interessados em:

$$\begin{aligned} \dim^{\text{grf}} S^2 &= \dim_R^{\text{grf}} S^2 \\ &= \sup\{\lambda \dim_R(G) : G \text{ grafo planar}\}, \end{aligned}$$

i.e., a dimensão homológica máxima possível para um grafo planar. Em vista do Teorema III.3.1, qualquer grafo planar G com $\omega G \geq 4$ mostra que $\dim^{\text{grf}} S^2 \geq 2$. Por outro lado, 1.2. implica que $\dim^{\text{grf}} S^2 \leq 4$: basta lembrar que todo grafo planar G tem pelo menos um vértice x de grau no máximo 5, logo a homologia a nível $q \geq 5$ de $\mathcal{N}G$ coincide com a de $\mathcal{N}G'$, $G' = G - x$ subgrafo próprio G . Iterando este processo, provamos esta observação. Um argumento um pouco mais cuidadoso prova a seguinte proposição.

Proposição 4.1. $\dim^{\text{grf}} S^2 \leq 3$.

Prova. Admita o contrário e seja G um contra-exemplo minimal, i.e., G planar com $\lambda \dim_R(G) > 3$ e para todo subgrafo G' , $\lambda \dim_R(G') \leq 3$. Seja $x \in VG$ um vértice de grau no máximo 5. Afirmamos que $K' = (NG)[\nu G(x)]$ tem homologia trivial em dimensões $q = 3, 4, \dots$. Isto implica por 1.1. que $\tilde{H}_q(G) \cong \tilde{H}_q(G - x) \cong (0)$, $\forall q \geq 4$, e isto é uma contradição.

Para provar a afirmação, note inicialmente que $|VK'| = gG(x) \leq 5$, logo, se $\dim K' = 4$ então K' é um simplexo e se $\dim K' < 3$ então a afirmação é trivial. Resta considerar o caso $\dim K' = 3$ ($gG(x) = 5$) e, observando que se K' não for o bordo de $\Delta^{\nu G(x)}$, então $\tilde{H}_3(K')$ é trivial, admitimos $K' = \partial \Delta^{\nu G(x)}$. Isto significa que para todo $\sigma \subseteq \nu G(x)$ com σ de cardinalidade 4, necessariamente $\nu G(\sigma) \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Fixe arbitrariamente um $y_\sigma \in \nu G(\sigma) \setminus \{x\}$ para cada $\sigma \subseteq \nu G(x)$ com $|\sigma| = 4$. Caso ocorra $y_\sigma = y_\tau$ para $\sigma \neq \tau$, então $\nu G(x) \subseteq \nu G(y_\sigma)$, logo $K' = \Delta^{\nu G(x)}$. Admitimos, portanto, todos os y_σ 's distintos. Caso todos os cinco y_σ 's forem adjacentes a x , então os y_σ 's são adjacentes dois a dois e eles geram um K^5 como subgrafo de G , planar; absurdo. Suponha então y_σ não adjacente a x . Considere $\tau \neq \sigma$. Afirmamos que

$$G[(\sigma \cap \tau) \cup \{x, y_\sigma, y_\tau\}] \cong K_{3,3}.$$

De fato, note que $|\sigma \cap \tau| = 3 = |\{x, y_\sigma, y_\tau\}|$ e se $v \in \sigma \cap \tau$, então $\nu G(v) \supseteq \{x, y_\sigma, y_\tau\}$. Achamos um $K_{3,3}$ como subgrafo G , planar; absurdo. $\parallel$

Conjecturamos ainda que o resultado acima pode ser melhorado para $\dim^{\text{grf}} S^2 \leq 2$, ou, equivalentemente não existem grafos planares G com homologia não trivial em dimensão três. A prova acima não se estende, em princípio, a uma demonstração daquele fato, pois K' acima pode ser um S^2 . Veja na Figura 1 um x de grau quatro num grafo planar com $K' \approx S^2$. Podemos mudar de estratégia e tentar aplicar o Teorema 1.4. De fato, usaremos o seguinte corolário daquele resultado para estabelecer uma estrutura bastante rígida dos eventuais contra-exemplos a nossa conjectura (veja 4.3.) Usaremos a notação de 1.4.

Lema 4.2. *Seja G um grafo tal que todo subgrafo próprio $G' \subset G$ satisfaz $\tilde{H}_3(G) \cong (0)$. Então*

Figura 1.

- i. Caso exista um vértice $x \in VG$ com grau no máximo três, então $\tilde{H}_3(G) \cong (0)$.
- ii. Caso exista uma aresta $\alpha \in aG$ de extremos $x, y \in VG$, ambos de grau pelo menos dois, e tais que (na notação de 1.4.) $\tilde{H}_1(L'_x) \cong (0)$, então $\tilde{H}_3(G) \cong (0)$.

||

Prova. O item i. decorre trivialmente de 1.2. Para ii., fazemos uma análise simples das seqüências exatas de 1.4. Lembrando que $L_x \simeq \sum L'_x \simeq \sum L'_y \simeq L_y$, as seqüências 1.4.ii. e 1.4.iii. são

$$0 \rightarrow \tilde{H}_2(G - \alpha) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_2(K_x) \rightarrow \dots$$

e
$$0 \rightarrow \tilde{H}_2(G - \alpha) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_2(K_y) \rightarrow \dots$$

logo $\alpha_2 = (i_*, j_*)$ é injetor e a seqüência 1.4.i. é

$$0 \rightarrow \tilde{H}_3(K_x) \oplus \tilde{H}_3(K_y) \rightarrow \tilde{H}_3(G) \rightarrow \tilde{H}_2(G - \alpha) \xrightarrow{\alpha_2} \dots$$

logo $\tilde{H}_3(G) \cong \tilde{H}_3(K_x) \oplus \tilde{H}_3(K_y)$. Entretanto, nas seqüências 1.4.ii. e iii., $\tilde{H}_3(K_x)$ e $\tilde{H}_3(K_y)$ ficam entre dois zeros, logo $\tilde{H}_3(G) \cong (0)$ ||

A condição $\tilde{H}_1(K) \cong (0)$ é particularmente fácil de se testar para qualquer complexo simplicial K , pois ela decorre de

(*) Todo circuito $(v_0, v_1, \dots, v_n = v_0)$ admite um i tal que $\{v_{i-1}, v_i, v_{i+1}\}$ é face de K , (índices módulo n),

este último implicando trivialmente que todo laço em $|K|$ é homotopicamente trivial. Combinando esta última observação e o Lema 4.2., obtemos o seguinte resultado para grafos planares:

Proposição 4.3. *Seja G um grafo planar com todo subgrafo próprio $G' \subset G$ satisfazendo $\tilde{H}_3(G') \cong (0)$. Então:*

ou i. $\tilde{H}_3(G) \cong (0)$,

ou ii. a. $\forall x \in VG, gG(x) \geq 4$ e

b. Para toda aresta $\alpha \in aG$ de extremos $x, y \in VG$, existem $v_0, v_1, v_2, v_3 \in VG$ tais que o grafo H da Figura 2 é subgrafo de $G[x, y, v_0, v_1, v_2, v_3]$.

Figura 2. O grafo H

Prova. Admita i. falso. Neste caso, ii.a. decorre de 4.2.i.. Para ii.b., fixamos uma aresta $\alpha = xy \in aG$. Suponha G representado na esfera S^2 . Fixamos uma orientação da esfera, de forma que temos as noções de direita, esquerda, horário e anti-horário. Seja $\nu G(x) = \{x_1, \dots, x_r\}$, $r = gG(x)$, onde ajustamos a notação de forma a termos $x_1 = y$ e $1 \leq i < j \leq r$ então encontramos x_i antes de x_j quando percorremos os vizinhos de x no sentido anti-horário (cf. Figura 3).

Como $\tilde{H}_3(G)$ é não trivial, segue de 4.2.ii. que existe um circuito $C = (w_0, w_1, \dots, w_t = w_0)$, $t \geq 3$, em L'_x (notação de 1.4.) tal que para todo i , $\{w_{i-1}, w_i, w_{i+1}\} \notin \text{Face } L'_x$ ($w_{-1} = w_{t-1}$, $w_{t+1} = w_1$). Defina

Figura 3.

$v_1 = x_{\bar{i}}$ onde $\bar{i} = \min\{i: x_i \in VC\}$. Defina ainda $v_2 = x_{\bar{j}}$ onde $\bar{j} = \min\{j: x_j = w_{\bar{i}-1} \text{ ou } w_{\bar{i}+1}\}$. Como $\{v_1, v_2\} \in \text{Face } L'_x$, $\exists v_0 \in \nu G(y) \setminus \{x\}$ tal que $\{v_1, v_2\} \subseteq \nu G(v_0)$. Defina agora $v_3 = \{w_{i-1}, w_{i+1}\} \setminus \{v_2\}$.

Caso $v_0 \neq v_3$. satisfazemos ii.b. De fato, $\{v_1, v_3\} \in \text{Face } L'_x$ implica que existe um $y' \in \nu G(y) \setminus \{x\}$ com $\{v_1, v_3\} \subseteq \nu G(y')$. Considere, entretanto, o circuito $C' = (x, v_2, v_0, y, x)$ em G e a curva de Jordan Γ correspondente a C' na representação de G . Note que v_1 e v_3 estão em componentes distintas de $S^2 \setminus \Gamma$. Desta forma, concluímos que $y' \in \Gamma$. Como $y \neq x$, y e, ainda, $y \neq v_0$ (pelo fato de $\{w_{i-1}, w_i, w_{i+1}\} \notin \text{Face } L'_x$), temos que $y = v_2$.

Caso $v_0 = v_3$. Neste caso, existe $y' \in \nu G(y)$ com $\{v_0, v_1\} \subseteq \nu G(y')$ e, claramente, $y' \neq x, y, v_1$ e v_0 . Observe que se Γ é a curva de Jordan que representa o circuito (x, v_1, v_0, x) de G , então v_2 e y estão em componentes distintas de $S^2 \setminus \Gamma$. Concluimos que $y' \neq v_2$. Note agora que se denotamos $v'_0 = y', v'_1 = v_1, v'_2 = v_0$ e $v'_3 = v_2$, fica claro que acabamos de satisfazer ii.b. ||

5. A Conjectura do Produto

Dados dois grafos G_1 e G_2 , definimos o *produto* de G_1 por G_2 , denotado $G_1 \times G_2$, como o grafo cujo conjunto de vértices é $VG_1 \times VG_2$ e tal que (x_1, x_2) é adjacente a (y_1, y_2) sse x_i e y_i o forem em G_i para ambos

$i = 1, 2$. Note que este é o produto categórico em *Graf*. É imediato que

$$\chi(G_1 \times G_2) \leq \min\{\chi G_1, \chi G_2\}$$

para dois grafos arbitrários G_1 e G_2 e a conjectura devida a Lovász e a Hedetniemi é que a igualdade sempre vale. É bastante fácil verificar esta conjectura nos casos onde um dos grafos é completo ou bipartido. O primeiro caso não trivial é aquele onde o mínimo do lado direito é quatro, caso particular recentemente estabelecido por M. El-Zahar e N. W. Sauer.

Apenas observamos nesta seção que

Teorema 5.1. Se G_1 e G_2 são grafos satisfazendo $\chi^r G_i = \chi G_i$, $i = 1, 2$, então

$$\chi(G_1 \times G_2) = \min\{\chi G_1, \chi G_2\}.$$

A prova é imediata quando percebemos que

Teorema 5.2. Para dois grafos arbitrários G_1 e G_2 ,

$$|\mathcal{N}(G_1 \times G_2)| \simeq |\mathcal{N}G_1| \times |\mathcal{N}G_2|.$$

Prova de 5.1. De fato, assumindo 5.2., lembrando que definimos

$$\chi^r G = \min\{q + 2: \tilde{H}_q(G, \mathbb{Z}_2) \neq (0)\},$$

temos, pela formula de Künneth, que

$$\begin{aligned} \chi(G_1 \times G_2) &\geq \chi^r(G_1 \times G_2) \\ &= \min\{q + 2: \tilde{H}_q(G_1 \times G_2, \mathbb{Z}_2) \neq (0)\} \\ &= \min\{q + 2: \tilde{H}_q(G_1, \mathbb{Z}_2) \neq (0) \text{ ou } \tilde{H}_q(G_2, \mathbb{Z}_2) \neq (0)\} \\ &= \min\{\chi^r G_1, \chi^r G_2\} \\ &= \min\{\chi G_1, \chi G_2\}. \end{aligned}$$

||

Claramente, bastava termos admitido

$$\min\{\chi^r G_1, \chi^r G_2\} \geq \min\{\chi G_1, \chi G_2\}$$

ou, equivalentemente, bastava valer $\chi^r G_i = \chi G_i$ para i tal que $\chi G_i \leq \chi G_{3-i}$. Também é simples:

Prova de 5.2. Observe que as faces maximais de $\mathcal{N}(G_1 \times G_2)$ são da forma $\sigma_1 \times \sigma_2$, onde σ_i é uma face maximal de $\mathcal{N}G_i$. Assim, $\mathcal{N}(G_1 \times G_2)$ nada mais é que o produto simplicial $\mathcal{N}G_1 \Delta \mathcal{N}G_2$. Lembrando que a realização geométrica do produto simplicial de um par de complexos é homotópica ao espaço produto das realizações, segue o resultado. $\parallel$

Notas Bibliográficas

Os grafos T_ℓ foram definidos por Toft [To]. A construção de Mycielski já é hoje bastante clássica, cf. [BM]. A caracterização de grafos triangulados devido a Frank e Kas que usamos na seção 3 pode ser encontrada em [Du]. A Conjectura do Produto é devido a Hedetniemi [He] e Lovász [Lo]. Um recente survey foi feito por Duffus [Df]. A solução de El-Zahar e Sauer do caso particular mencionado na seção 5 pode ser vista em [ZS]. Interessantes generalizações tem sido estudadas por Häggkvist et. al. [Hä].

Referências Bibliográficas

- [Ba1] K. Baclawski, Galois Connection and the Leray Spectral Sequence, *Adv. in Math.* **25** (1977), 191–215.
- [Ba2] K. Baclawski, Cohen-Macaulay Ordered Sets, *J. Algebra* **63** (1980), 226–258.
- [BB1] K. Baclawski e A. Björner, Fixed Points in Partially Ordered Sets, *Adv. in Math.* **31** (1979), 263–287
- [BB2] K. Baclawski e A. Björner, Fixed Points and Complements in Finite Lattices, *J. of Combinatorial Theory A* **30** (1981), 335–338
- [BD] Blanche Descartes, Solução ao Problema Avançado N^o. 4526, proposto por P. Ungar, *Amer. Math. Monthly* **61** (1954), 352.
- [Bi] G. Birkhoff, "Lattice Theory", 3^a. ed., Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1967.
- [Bj1] A. Björner, Shellable and Cohen-Macaulay Partially Ordered Sets, *Trans. Amer. Math. Soc.* **260** (1980), 159–183.
- [Bj2] A. Björner, Homotopy Type of Posets and Lattice Complementation, *J. of Combinatorial Theory A* **30** (1981), 90–100.

- [BGS] A. Björner, A. M. Garsia e R. P. Stanley, An Introduction to Cohen-Macaulay Partially Ordered Sets em "Ordered Sets", ed. I. Rival (1982), 583-615.
- [BW] A. Björner e J. Walker, A Homotopy Complementation Formula for Partially Ordered Sets, *Europ. Jour. of Combinatorics* 4 (1983), 11-19.
- [Bo] B. Bollobás, "Graph Theory: An Introductory Course", Graduate Texts in Mathematics 63, Springer-Verlag, New York 1979.
- [BT] B. Bollobás e a. Thomason, Set Colouring of Graphs, *Discrete Math.* 25 (1979), 21-26.
- [BM] J. A. Bondy e U. S. R. Murty, "Graph Theory with Applications", MacMillan Press, London, 1976.
- [CF] J. Constantin e G. Fournier, Ordonnes Escamotable et Point Fixes, *Discrete Math.* 53 (1985), 21-33.
- [Cr] F. Croom, "Basic Concepts of Algebraic Topology", Springer-Verlag, New York, 1978.
- [Dö] W. Dörfler, A Complete Lattice in Graph Theory, em "Combinatorics" Vol. I, 257-269, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, Keszthely, Hungary, 1976.
- [Du] Pierre Duchet, Classical Perfect Graphs em "Topics on Perfect Graphs", C. Berge e V. Chvátal ed., *Annals of Discrete Math* 21 (1984), 67-96.
- [Df] D. Duffus, B. Sands e R. E. Woodrow, On the Chromatic Number of the Product of Graphs, *J. of Graph Theory* 9 (1985), 487-495.
- [ES] S. Eilenberg e N. Steenrod, "Foundations of Algebraic Topology", Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1952.
- [Fo] J. Folkman, The Homology Groups of a Lattice, *J. of Math. Mech.* 15 (1966), 631-636.
- [Fü] Z. Füredi, An Extremal Problem Concerning Knesers Conjecture, *Studia Scien. Math. Hungarica* 18 (1983), 353-341.
- [GJ] M. Garey e Johnson, The Complexity of Near-Optimal Graph Colouring, *J. of the Assoc. Comput. Mach.* 23 (1976), 61-99.

- [Ge] D. P. Geller, r -tuple Colouring of Uniquely Colourable Graphs, *Discrete Math.* **16** (1976), 9–12.
- [GS] D. P. Geller e S. Stahl, The Chromatic Number and other Functions of the Lexicographic Product of Graphs, *J. of Combinatorial Theory* **19** (1975), 87–95.
- [Gr] M. J. Greenberg e J. R. Harper, "Algebraic Topology, A First Course", The Benjamin-Cummings Pub. Comp., Reading, Massachusetts, 1981.
- [Hä] R. Häggkvist, P. Hell, D. J. Miller e V. N. Lara, On Multiplicative Graphs and the Product Conjecture, Technical Report No. 11 (1985), Stockholms Universitet.
- [Kn] M. Kneser, Aufgabe 300, *Jber. Deutsch. Math. Verein.* **58** (1955).
- [La] H. Lakser, The Homology of A Lattice, *Discrete Math.* **2** (1971), 187–192.
- [Lo1] L. Lovász, Kneser's Conjecture, Chromatic Number and Homotopy, *J. of Combinatorial Theory A* **25** (1978), 319–324.
- [Lo1] L. Lovász, Topological and Algebraic Methods in Graph Theory, em "Graph Theory and Related Topics", 1–14, J. A. Bondy e U. S. R. Murty ed., Academic Press, New York, 1979.
- [Lo3] L. Lovász, Notas Mimeografadas da Universidade de Waterloo, 1982.
- [Lo4] L. Lovász, A Homology Theory for Spanning Trees of a Graph, *Acta Math. Acad. Scien. Hungaricae* **30** (1977), 241–251.
- [Lo5] L. Lovász, "Combinatorial Problems and Exercises", North-Holland, Amsterdam (1979).
- [Lu] C. Luchessi, et. al. "Aspectos Teóricos da Computação", Projeto Euclides, 1979.
- [Ma] J. Mather, Invariance of the Homology of a Lattice, *Proc. Am. Math. Soc.* **17** (1966), 1120–1124.
- [Po] S. Poljak, A Pultr e V. Rödl, On the Dimension of Kneser Graphs, em "Algebraic Methods in Graph Theory", 631–646, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, Szeged, Hungary, 1978.

- [Qu] D. Quillen, Homotopy Properties of the Poset of Non-trivial p -subgroups of a Group, *Adv. in Math.* 28 (1978), 101–128.
- [Ro] G.-C. Rota, On the Foundations of Combinatorial Theory I: Theory of Möbius Functions, *Z. Warscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* 2 (1964), 340–368.
- [Sc] A. Schrijver, Vertex Critical Subgraphs of Kneser Graphs, *Nieuw Archief Voor Wiskunde* 16 (1978), 454–461.
- [Si] M. Simonovits, On Colour-Critical Graphs, *Studia Scien. Math. Hungaricae* 7 (1972), 67–81.
- [Sp] E. H. Spanier, “Algebraic Topology”, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [Sth] S. Stahl, n -tuple Colourings and Associated Graphs, *J. of Combinatorial Theory B* 20 (1976), 185–203.
- [St] R. P. Stanley, “Combinatorics and Commutative Algebra”, Progress in Mathematics Vol 41, Birkhäuser, Boston, 1983.
- [To] B. Toft, Two Theorems on Critical 4-chromatic Graphs, *Studia Scien. Math. Hungaricae* 7 (1972), 83–99.
- [Wa1] J. W. Walker, From Graphs to Ortholattices and Equivariant Maps, *J. of Combinatorial Theory B* 35 (1983), 171–192.
- [Wa2] J. W. Walker, A Homology Version of the Borsuk-Ulam Theorem, *Amer. Math. Monthly* 90 (1983), 466–468.
- [Wr] A. H. Wright, Graph Colouring and Homology, a aparecer.
- [ZS] M. El-Zahar e N. W. Sauer, The Chromatic Number of the Product of two 4-chromatic Graphs is 4, *Combinatorica* 5 (1985), 121–126.