CARACTERIZAÇÃO DOS PARES DE PONTOS
CRÍTICOS ASSOCIADOS A f E A SUA
DERIVADA RADIAL

SÔNIA REGINA LEITE GARCIA

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
MATEMÁTICA APLICADA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: MATEMÁTICA APLICADA

ORIENTADOR: Prof. Dr. ÂNGELO BARONE NETTO

- São Paulo, Agosto de 1985 -

Ao mestre e amigo
Mário Barone Júnior

AGRADECIMENTOS (*)

A pretensão de que este trabalho fosse individual, isolado, é algo, pelo menos absurdo, assim:

Ao Instituto de Matemática e Estatística e em especial ao Departamento de Matemática Aplicada pela confiança em mim depositada.

Ao Professor Doutor Ivan de Queiroz Barros, meu pai em termos de formação matemática.

Ao Professor Doutor Mário Barone Jr., por tudo o que representou sua orientação segura na fase essencial de formação, tanto na graduação como no início do mestrado.

Ao Professor Doutor Mauro de Oliveira César e ao Professor Assistente Manuel V. P. Garcia, pelo incentivo e sugestões tanto no desenvolvimento como na redação desta dissertação.

Ao grupo de Sistemas Dinâmicos do I.M.E., pelos palpites e conselhos oportunos.

Ao Professor Doutor Ângelo Barone Netto, muito mais que um orientador, a mola desta dissertação, dada a paciência evidenciada nestes últimos dois anos.

Aos colegas e funcionários do I.M.E., pela boa vontade sempre reiterada.

Ao Raul pela mágica feita na datilografia deste trabalho, e em tempo record.

A todos os que contribuíram de algum modo neste trabalho.

Muito Obrigado

SÔNIA REGINA LEITE GARCIA

(*) A AUTORA AGRADECE AO CNPq DE QUEM RECEBEU AUXÍLIO FINANCEIRO DURANTE OS DOIS PRIMEIROS ANOS DE MESTRADO.

ABSTRACT

This work has four chapters. The first of them is here by didactic and historic purposes.

Inspired by [3] , the purpose of first chapter is to show a demonstration of Sard's Algebraic Theorem without using Tarski-Seidenberg theorem, moreover we make a geometrical description of following varieties using that result

$$V(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{grad}f(x) \text{ is radial}\}$$

$$V^\perp(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \text{grad}f(x) | x \rangle = 0\}$$

where f is a polynomial of n variables.

In chapter II we relate the behavior of a germ $f: (\mathbb{R}^n; 0) \xrightarrow{\mathbb{C}^1} (\mathbb{R}; 0)$ with the behavior or "radial derivative" of f , $f': (\mathbb{R}^n; 0) \longrightarrow (\mathbb{R}; 0)$ defined by $f'(x) = \langle \text{grad}f(x) | x \rangle$ [here $\langle | \rangle$ is the usual inner product of $\mathbb{R}^n$].

In chapter III we generalize the result of chapter II, considering a generic inner product of $\mathbb{R}^n$.

The Last chapter is an application to Liapunov's stability of Hamiltonian systems of two degree of freedom.

INTRODUÇÃO

CAPÍTULO I

- I-1 Introdução.
- I-2 As variedades algébricas $V(f)$ e $V^{\perp}(f)$.
- I-3 Decomposição de variedades algébricas.
- I-4 Algumas propriedades de $V(f)$ e de $V^{\perp}(f)$.

CAPÍTULO II

- II-1 Introdução
- II-2 A derivada radial.
- II-3 Propriedades de f' .
- II-4 Classificação dos pares (f, f') para $f: (\mathbb{R}^n; 0) \xrightarrow{C^1} (\mathbb{R}; 0)$.
- II-5 Uma classe em que os pares (f, f') são triviais.
- II-6 Estudo de alguns exemplos.

CAPÍTULO III

- III-1 Introdução.
- III-2 A derivada "radial" f'_A .
- III-3 Exemplos.
- III-4 Propriedades de f'_A .
- III-5 Classificação dos pares (f, f'_A) .

CAPÍTULO IV

- IV-1 Introdução.
- IV-2 Teorema de Liapunov para Instabilidade.
- IV-3 Comentários.

I N T R O D U Ç Ã O

Este trabalho compõe-se de quatro capítulos, dos quais o primeiro acha-se aqui por motivos históricos e didáticos.

Motivado pelos resultados apresentados em [3], o primeiro capítulo tem como objetivo apresentar uma demonstração do Teorema Algébrico de Sard sem lançar mão do Teorema de Tarski-Seidenberg, e usar o resultado para descrever geometricamente as variedades algébricas

$$V(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{grad}f(x) \text{ é radial}\} \quad e$$

$$V^{\perp}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \text{grad}f(x) \mid x \rangle = 0\} \quad ,$$

onde f é um polinômio em n variáveis.

Os resultados apresentados no §I-3 versam sobre Estratificação de variedades algébricas, e estão todos contidos em [5] e [6]. Foram apresentados aqui apenas com o intuito de tornar o texto, na medida do possível, auto-suficiente.

No capítulo II, relacionamos o comportamento de um germe $f: (\mathbb{R}^n; 0) \xrightarrow{C^1} (\mathbb{R}; 0)$ com o comportamento do germe $f': (\mathbb{R}^n; 0) \xrightarrow{C^0} (\mathbb{R}; 0)$ definido por $f'(x) = \langle \text{grad}f(x) \mid x \rangle$, onde $\langle \mid \rangle$ denota o produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$. Obtemos no final, uma classificação dos pares (f, f') relativamente aos pares de pontos críticos associados. Usando o conceito de k -decidibilidade apresentado em [3] determinamos uma classe de germes $f: (\mathbb{R}^n; 0) \xrightarrow{C^1} (\mathbb{R}; 0)$ para a qual f e f' têm o mesmo tipo de comportamento.

No capítulo III generalizamos os resultados obtidos no capítulo II, classificando os pares (f, f'_A) relativamente -

aos pares de pontos críticos associados, para $A \in M_n(\mathbb{R})$ simétrica, definida positiva, e $f'_A: (\mathbb{R}^n; 0) \longrightarrow (\mathbb{R}; 0)$ definida por $f'_A(x) = \langle \text{grad} f(x) | Ax \rangle$.

No último capítulo fazemos uma aplicação à Estabilidade de Liapunov. Apresentamos uma demonstração de um caso particular do Teorema de Liapunov para Instabilidade de sistemas mecânicos conservativos com dois graus de liberdade, - usando funções auxiliares do tipo Chetaev, que surgem naturalmente, motivadas pelos resultados dos capítulos II e III. Apresentamos também um exemplo com três graus de liberdade para mostrar a impossibilidade de generalizar tal demonstração para mais de dois graus de liberdade.

Usaremos, no texto, o símbolo ∇ no início e no final - de cada demonstração apresentada.

C A P Í T U L O I

Uma demonstração elementar do
Teorema Algébrico de Sard

I-1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo pretendemos apresentar alguns resultados já conhecidos sobre variedades algébricas, com o objetivo de aplicá-los ao estudo da geometria das seguintes variedades - algébricas particulares:

$$V(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{grad}f(x) \text{ é radial}\}$$

e

$$V^{\perp}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \text{grad}f(x) | x \rangle = 0\} \quad ,$$

onde f é um polinômio em n variáveis.

Usaremos frequentemente as seguintes notações:

$$S_{\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = \varepsilon\} \quad , \quad \varepsilon > 0$$

$$B_{\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < \varepsilon\} \quad , \quad \varepsilon > 0$$

$$B'_{\varepsilon} = B_{\varepsilon} - \{0\} \quad , \quad \varepsilon > 0$$

$f: (\mathbb{R}^n; 0) \longrightarrow (\mathbb{R}; 0)$ denotará um polinômio com $f(0)=0$.

I-2 AS VARIEDADES ALGÉBRICAS $V(f)$ E $V^{\perp}(f)$

Sejam: $f: (\mathbb{R}^n; 0) \longrightarrow (\mathbb{R}; 0)$ e $g: (\mathbb{R}^n; 0) \longrightarrow (\mathbb{R}; 0)$
 $x \longmapsto |x|^2$

Def.I-2-1: Chamaremos $V(f)$ ao conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^n$ em que $\text{grad}f$ é radial, isto é

$$\begin{aligned} V(f) &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \text{posto} \begin{bmatrix} \text{grad}f(x) \\ \text{grad}g(x) \end{bmatrix} < 2 \right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \text{grad}f(x) | x \rangle^2 = |\text{grad}f(x)| \cdot |x|^2\} \end{aligned}$$

Def. I-2-2: Chamaremos $V^\perp(f)$ ao conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^n$ em que $\text{grad} f$ tem componente radial nula, isto é

$$V^\perp(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \text{grad} f(x) | x \rangle = 0\}$$

Verifica-se imediatamente que $V(f) \cap V^\perp(f)$ é exatamente o conjunto dos pontos críticos de f .

Def. I-2-3: Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ diz-se uma variedade algébrica (de $\mathbb{R}^n$) se existe uma família $\{P_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, com

$$P_\alpha \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n], \text{ tal que}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid P_\alpha(x) = 0, \forall \alpha \in \Lambda\}$$

Observemos que $V(f)$ e $V^\perp(f)$ são variedades algébricas de $\mathbb{R}^n$ (contendo a origem) e assim, $V(f) \cap S_\epsilon$ e $V^\perp(f) \cap S_\epsilon$ são também variedades algébricas ($\epsilon > 0$).

Além disso, como $V(f) \cap S_\epsilon$ ($\epsilon > 0$) é exatamente o conjunto dos pontos críticos de $f|_{S_\epsilon}$, segue que a origem não é ponto isolado de $V(f)$.

Ao contrário, $V^\perp(f) - \{0\}$ nem sempre é aderente à origem. Pode mesmo ocorrer que $V^\perp(f) = \{0\}$, como mostra o seguinte

Exemplo I-2-1:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$V^\perp(f) = \{0\}$$

Apesar disto, quando $V^1(f) - \{0\}$ é não vazio e adere à origem, temos para $V(f)$ e para $V^1(f)$ a mesma descrição geométrica local, proveniente do fato de ambas serem variedades algébricas de $\mathbb{R}^n$. Isto ficará mais claro no decorrer deste capítulo.

I-3 DECOMPOSIÇÃO DE VARIEDADES ALGÉBRICAS

Def.I-3-1: Um anel A diz-se noetheriano se toda cadeia crescente de ideais de A é estacionária (isto é, é finalmente constante).

Teor.I-3-1: (Teorema da base de Hilbert)

Se um anel A é noetheriano, então $A[x]$ é noetheriano.

(para uma demonstração deste resultado, ver [2])

Corolário I-3-1a: Se A é um anel noetheriano, então $A[x_1, \dots, x_n]$ é noetheriano.

Corolário I-3-1b: Toda cadeia estritamente decrescente

$$\supset V_2 \supset \dots$$

de subvariedades algébricas de $\mathbb{R}^n$ é finita.

(pois $\mathbb{R}$ é noetheriano)

Seja $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma família em $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ e
 $V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_\alpha(x) = 0, \forall \alpha \in \Lambda\}$

Prop. I-3-1: Existem $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ tais que

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_j(x) = 0, 1 \leq j \leq m\}$$

⌘ Consideremos o ideal de $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ definido por

$$I(V) = \{f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \mid f(x) = 0, \forall x \in V\}$$

Segue do corolário I-3-1a que $I(V)$ é finitamente gerado como $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ -módulo.

Seja $f_1, \dots, f_m$ um conjunto de geradores de $I(V)$.
 Então

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) = 0, 1 \leq i \leq m\}$$

De fato: i) $V \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) = 0, 1 \leq i \leq m\}$

ii) Para cada $\alpha \in \Lambda$, como $f_\alpha \in I(V)$, existem

$$g_1, \dots, g_m \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \text{ tais que}$$

$$f_\alpha = g_1 f_1 + \dots + g_m f_m$$

Logo f_α se anula onde $f_1, \dots, f_m$ se anulam simultaneamente, donde

$$V \supset \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) = 0, 1 \leq i \leq m\} \quad \text{⌘}$$

Sejam $V \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade algébrica, $\{f_1, \dots, f_m\}$ e $\{g_1, \dots, g_k\}$ duas famílias de geradores de $I(V)$. Existem $a_{ij} \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq m$, tais que

$$g_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} f_j, \quad 1 \leq i \leq k$$

Como $f_j(x)=0 \quad \forall x \in V$, $1 \leq j \leq m$, segue a identidade -
matricial

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ij}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \end{bmatrix}, \quad \forall x \in V$$

Logo,

$$\text{posto} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) \end{bmatrix} \leq \text{posto} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \end{bmatrix}, \quad \forall x \in V$$

Isto mostra que, na verdade,

$$\text{posto} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) \end{bmatrix} = \text{posto} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \end{bmatrix}, \quad \forall x \in V$$

Este fato nos permite dar as seguintes definições:

Def.I-3-2: $\rho = \max_{x \in V} \left\{ \text{posto} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \end{bmatrix} \right\}$ é dito posto de $I(V)$.

Def.I-3-3: $x \in V$ é dito um ponto não singular (ou simples) de V se $\text{posto} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \end{bmatrix} = \rho$.

Caso contrário, x é dito um ponto singular de V .

Notação: $M_1 = M_1(V)$ é o conjunto dos pontos não singulares -
de V .

Teorema I-3-2: Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade algébrica e
 $\rho = \text{posto} (I(V))$.

Seja M o conjunto dos pontos não singulares
de V .

Então $V_1 = V - M_1$ é também uma variedade algébrica.

Σ Sejam $f_1, \dots, f_m$ geradores de $I(V)$

Observemos que

$$\begin{aligned} V_1 &= \{x \in V \mid \text{posto} \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right] < \rho\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x) = \dots = f_m(x) = 0 \text{ e } \text{posto} \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right] < \rho \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x) = \dots = f_m(x) = 0 \text{ e } \frac{\partial(f_{i_1}, \dots, f_{i_\rho})(x)}{\partial(x_{\mu_1}, \dots, x_{\mu_\rho})} = 0 \right. \\ &\quad \left. 1 \leq i_j \leq m, \quad 1 \leq \mu_j \leq n \right\} \end{aligned}$$

$$\text{Como } \frac{\partial(f_{i_1}, \dots, f_{i_\rho})}{\partial(x_{\mu_1}, \dots, x_{\mu_\rho})} \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \text{ segue a tese } \Sigma$$

Nosso objetivo agora é demonstrar o seguinte

Teorema I-3-3: Se $V \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade algébrica tal que $\text{posto}(I(V)) = \rho$, então M_1 é uma subvariedade diferenciável analítica de $\mathbb{R}^n$, de codimensão ρ .

Para demonstrarmos este resultado precisaremos de alguns lemas que desenvolveremos a seguir.

Fixemos $p \in M_1$ e $f_1, \dots, f_m$ geradores de $I(V)$ tais - que $f_1, \dots, f_\rho$ tenham diferenciais linearmente independentes em p .

Lema I-3-3a: Existe um sistema de coordenadas $\xi: U \rightarrow U_0 \subset \mathbb{R}^n$ onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma vizinhança aberta de p , tal que

$$\xi_i = f_i - f_i(p) \quad \text{para } 1 \leq i \leq \rho$$

⌘ Como $df_1(p), \dots, df_\rho(p)$ são linearmente independentes, temos $\rho \leq n$,

Caso $\rho < n$, escolhemos vetores $w_{\rho+1}, \dots, w_n \in \mathbb{R}^n$ tais que $df_1(p), \dots, df_\rho(p), w_{\rho+1}, \dots, w_n$ sejam linearmente independentes e definimos

$$(*) \begin{cases} \xi_i(x) = f_i(x) - f_i(p) & , & 1 \leq i \leq \rho \\ \xi_i(x) = \langle w_i | x-p \rangle & , & \rho+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Segue imediatamente do Teorema da Função Inversa que (*) define um sistema de coordenadas analítico numa vizinhança aberta U de p sobre uma vizinhança aberta U_0 de $0 \in \mathbb{R}^n$. ⌘

Sejam $\xi: U \rightarrow U_0$ como no lema anterior

$$e \quad \Lambda = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{\rho+1}) \in \mathbb{N}^{\rho+1} \mid 1 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_{\rho+1} \leq n\}$$

Para $h: \mathbb{R}^n \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$, $\lambda \in \Lambda$ e $\mu \in \{1, \dots, m\}^\rho$ usaremos as notações

$$\frac{\partial(F_\mu, h)}{\partial x_\lambda} = \frac{\partial(f_{\mu_1}, \dots, f_{\mu_\rho}, h)}{\partial(x_{\lambda_1}, \dots, x_{\lambda_\rho}, x_{\lambda_{\rho+1}})} = \frac{\partial(F_\mu, h)}{\partial(x_{\lambda_1}, \dots, x_{\lambda_\rho}, x_{\lambda_{\rho+1}})}$$

$$e \quad \frac{\partial(F, h)}{\partial x_\lambda} = \frac{\partial(F_\mu, h)}{\partial x_\lambda} \quad \text{quando } \mu = (1, 2, \dots, \rho)$$

Para cada $\lambda \in \Lambda$ definimos o operador diferenciação

$$\Phi_\lambda: C^\omega(U) \longrightarrow C^\omega(U)$$

$$\Phi_\lambda h = \frac{\partial(F, h)}{\partial x_\lambda}$$

Lema I-3-3b: $\Phi_\lambda(I(V)) \subset I(V)$, $\forall \lambda \in \Lambda$.

∑ O resultado decorre imediatamente do fato de que se $h \in I(V)$, $df_1, \dots, df_\rho, dh$ são linearmente dependentes em cada ponto de V , pois posto $(I(V)) = \rho$. ∑

Observemos que, por aplicações iteradas do lema anterior, podemos concluir que se $h \in I(V)$ então

$$\begin{aligned} \Phi_{\lambda^s} \Phi_{\lambda^{s-1}} \dots \Phi_{\lambda^1} h &\in I(V) & \forall s \in \mathbb{N}^* \\ \forall (\lambda^1, \dots, \lambda^s) &\in \Lambda^s \end{aligned}$$

Fixemos $g \in I(V)$

Seja $Hg(U)$ o ideal de funções analíticas em U gerado pela família

$$\left\{ \Phi_{\lambda^s} \dots \Phi_{\lambda^1} g \right\}_{\substack{s \in \mathbb{N}^* \\ (\lambda^1, \dots, \lambda^s) \in \Lambda^s}}$$

Lema I-3-3c: $\Phi_\lambda(Hg(U)) \subset Hg(U)$, $\forall \lambda \in \Lambda$.

∑ Seja $h \in Hg(U)$. Então

$$h = \sum_{\lambda^1 \in \Lambda} \alpha_{\lambda^1} \Phi_{\lambda^1} g + \dots + \sum_{(\lambda^1, \dots, \lambda^s) \in \Lambda^s} \alpha_{\lambda^s \dots \lambda^1} \Phi_{\lambda^s} \dots \Phi_{\lambda^1} g$$

Onde $\alpha_{\lambda^j \dots \lambda^2 \lambda^1} \in C^\omega(U)$, $1 \leq j \leq s$

Como ϕ_λ é um operador derivação segue a tese. $\square$

Lema I-3-3d: Se $h \in Hg(U)$, então

$$\frac{\partial h}{\partial \xi_k} \in Hg(U) \quad , \quad \forall k \in \{\rho+1, \dots, n\}$$

$\square$ Lembremos que $\xi: U \longrightarrow U_0$ satisfaz

$$\xi_i = f_i - f_i(p) \quad , \quad 1 \leq i \leq \rho$$

Disto segue que, para $k \in \{\rho+1, \dots, n\}$

$$\frac{\partial h}{\partial \xi_k} = \det \begin{bmatrix} & & & \cdot & & \\ & I & & \cdot & 0 & \\ & & & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & * & \cdot & \frac{\partial h}{\partial \xi_k} & \end{bmatrix} = \frac{\partial(f_1, \dots, f_\rho, h)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_\rho, \xi_k)} \quad \text{em } U$$

Aplicando a identidade de Lagrange obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f_1, \dots, f_\rho, h)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_\rho, \xi_k)} &= \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{\partial(f_1, \dots, f_\rho, h)}{\partial x_\lambda} \frac{\partial x_\lambda}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_\rho, \xi_k)} \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} (\phi_\lambda h) \frac{\partial x_\lambda}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_\rho, \xi_k)} \end{aligned}$$

Como $\frac{\partial x_\lambda}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_\rho, \xi_k)}$ é analítico em U (pois ξ é um sistema de coordenadas analítico) temos $\frac{\partial h}{\partial \xi_k} \in Hg(U)$. $\square$

Segue do lema anterior que as derivadas parciais de g de qualquer ordem com respeito às coordenadas $(\xi_{p+1}, \dots, \xi_n)$ estão em $Hg(U)$.

Prova do Teorema I-3-3:

Σ Seja $M^* = \{q \in U \mid f_1(q) = \dots = f_\rho(q) = 0\}$

M^* é uma subvariedade diferenciável analítica de $\mathbb{R}^n$ de codimensão ρ , com sistema de coordenadas $(\xi_{\rho+1}, \dots, \xi_n)$, e $p \in M^*$.

Diminuindo U se necessário, podemos supor que M^* é conexa.

Seja $\tau = M_1 \cap U$.

Observemos que

$$\tau = M_1 \cap U = V \cap U = \{q \in U \mid f_1(q) = \dots = f_\rho(q) = \dots = f_m(q) = 0\} \subset M^*$$

Vamos provar que $\tau \supset M^*$, e, conseqüentemente, que $\tau = M_1 \cap U = M^*$, donde concluiremos a tese, pois $p \in M$ foi tomado arbitrariamente.

Para mostrar que $\tau \supset M^*$ é suficiente provar que $g|_{M^*} = 0$, pois g foi tomada arbitrariamente em $I(V)$. Por outro lado, como g é analítica em U e M^* é uma subvariedade diferenciável analítica, conexa, contida em U , com sistema de coordenadas $(\xi_{\rho+1}, \dots, \xi_n)$, se mostrarmos que as derivadas parciais de g de qualquer ordem com respeito a $\xi_{\rho+1}, \dots, \xi_n$ se anulam em $p \in M^*$ teremos $g|_{M^*} = 0$, pois $g(p) = 0$.

Pelo lema I-3-3d, é suficiente provar que se $h \in Hg(U)$ então $h(p)=0$.

Tomemos $h \in Hg(U)$

$$h = \sum_{s=1}^t \sum_{(\lambda^1, \dots, \lambda^s) \in \Lambda^s} \alpha_{\lambda^1 \dots \lambda^s} \phi_{\lambda^1}^s \dots \phi_{\lambda^1}^s g$$

onde $\alpha_{\lambda^1 \dots \lambda^s} \in C^\omega(U)$, $1 \leq s \leq t$

Como $\phi_{\lambda^1}^s \dots \phi_{\lambda^1}^s g \in I(V)$ (pelo lema I-3-3b)

e $p \in M_1$ temos $h(p)=0$

□

Teor. I-3-4: Se $V \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade algébrica, então

$$V = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k$$

onde a união é disjunta e $M_i (1 \leq i \leq k)$ é uma subvariedade diferenciável analítica de $\mathbb{R}^n$.

▽
△

Seja $\rho = \text{posto } (I(V))$

Se $\rho=0$ então $I(V) = 0$ e $V = \mathbb{R}^n$

Suponhamos então que $\rho > 0$

Chamando $V_0 = V$, definimos indutivamente, para $i \in \mathbb{N}^*$:

$$M_i = M_1(V_{i-1}) = \{x \in V_{i-1} \mid x \text{ é não singular}\}$$

$$V_i = V_{i-1} - M_i$$

(observemos que a definição acima tem sentido, pois segue do teorema I-3-2 que $V_i \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade algébrica, o que nos permite definir M_{i+1})

Obtemos assim uma cadeia decrescente de variedades algébricas

$$V_0 \supset V_1 \supset \dots \supset V_m \supset \dots$$

que deve ser estacionária, pelo corolário I-3-1b.

Seja $k \in \mathbb{N}^*$ satisfazendo

$$(i) \quad V_k = V_{k+1}$$

$$(ii) \quad V_{k-1} \neq \emptyset$$

Observemos que $V_k = \emptyset$, caso contrário teríamos

$$M_{k+1} = M_1(V_k) \neq \emptyset \quad \text{e consequentemente}$$

$$V_{k+1} = V_k - M_{k+1} \subsetneq V_k, \quad \text{contra a escolha de } k.$$

Logo,

$$V_j = \emptyset \quad \forall j \geq k \quad \text{e} \quad M_k = V_{k-1}$$

Mas então:

$$\begin{aligned} V = V_0 &= M_1 \cup (V_0 - M_1) = M_1 \cup V_1 \\ &= M_1 \cup M_2 \cup V_2 = \dots \\ &= M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k, \end{aligned}$$

sendo tal união disjunta.

Como $M_i = M_1(V_{i-1})$, $1 \leq i \leq k$, pelo teorema I-3-3 segue a tese. X

Passemos agora a desenvolver alguns resultados para demonstrar o

Teor. I-3-5: Se $V \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade algébrica, então V pode ser decomposta numa união finita de subvariedades diferenciáveis analíticas conexas, disjuntas, de $\mathbb{R}^n$.

A idéia é mostrar que $M_1 = M_1(V)$ tem um número finito de componentes conexas, e então usar o teorema I-3-4.

Lema I-3-5a: Sejam $g \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, $f_1, \dots, f_m$ geradores de $I(V)$ e $\rho = \text{posto}(I(V))$.

O conjunto Γ dos pontos críticos de $g|_{M_1}$ fica definido por

$$\Gamma = M_1 \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{\partial (F_\mu, g)}{\partial x_\lambda}(x) = 0, \forall \mu \in \{1, \dots, m\}^\rho, \forall \lambda \in \Lambda\}$$

Σ M_1 é uma subvariedade diferenciável de $\mathbb{R}^n$ de codimensão ρ , e $df_1(x), \dots, df_m(x)$ geram $(T_x M_1)^\perp$, $\forall x \in M_1$.

Como $x \in M_1$ é ponto crítico de $g|_{M_1} \iff dg(x) \in (T_x M_1)^\perp$

$$\iff \rho = \text{posto} \begin{bmatrix} df_1(x) \\ \vdots \\ df_m(x) \end{bmatrix} = \text{posto} \begin{bmatrix} df_1(x) \\ \vdots \\ df_m(x) \\ dg(x) \end{bmatrix}$$

segue a tese.

Σ

Lema I-3-5b: Se $f_1, \dots, f_m$ são geradores de $I(V)$ e em $x^0 \in V$ a matriz $\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]$ tem posto n , então $V - \{x^0\}$ é ainda uma variedade algébrica. Em particular, x^0 é um ponto isolado de V .

⌘ Sem perda de generalidade, podemos supor que $x^0=0$ e que $df_1(0), \dots, df_n(0)$ são linearmente independentes.

Como $f_j(0)=0$, $1 \leq j \leq n$, existem $g_{ji} \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, $1 \leq i, j \leq n$, tais que

$$f_j(x) = g_{j1}(x)x_1 + g_{j2}(x)x_2 + \dots + g_{jn}(x)x_n, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Seja $W \subset V$ a variedade algébrica definida por

$$\begin{cases} f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_m(x) = 0 \\ \det [g_{jk}(x)] = 0 \end{cases}$$

$x^0=0 \notin W$, pois a matriz

$$\left[\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(0) \right]_{1 \leq j, k \leq n} = [g_{jk}(0)] \quad \text{é não singular}$$

Por outro lado, se $x \in V$ é não nulo, temos

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(x) \\ \vdots \\ g_{n1}(x) \end{bmatrix} x_1 + \dots + \begin{bmatrix} g_{1n}(x) \\ \vdots \\ g_{nn}(x) \end{bmatrix} x_n$$

e portanto, as colunas da matriz $[g_{jk}(x)]$ são linearmente dependentes, donde $x \in W$. Logo, $W = V - \{x^0\}$

⌘

Corolário: Se V tem dimensão zero, então V é finito.

∑ Podemos supor que $V \neq \emptyset$

Sejam $f_1, \dots, f_m$ geradores de $I(V)$ e
 $\rho = \text{posto}(I(V))$.

É claro que $\rho=n$, caso contrário, pelo teorema I-3-3 V conteria uma subvariedade diferenciável de dimensão $n-\rho \geq 1$, contra o fato de V ter dimensão zero.

Seja $x^0 \in M_1 = M_1(V)$

Então a matriz $\begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) \end{bmatrix}$ tem posto $\rho=n$, donde segue do lema anterior, que $W_1 = V - \{x^0\}$ é uma variedade algébrica.

Notemos que, como $W_1 \subset V$, W_1 tem também dimensão zero.

Chamando $W_0 = V$, podemos repetir o raciocínio anterior para construir uma cadeia estritamente decrescente de variedades algébricas, a saber:

Se $W_i \neq \emptyset$, como W_i tem dimensão zero, existe $x^i \in W_i$ tal que

$W_{i+1} = W_i - \{x^i\}$ é novamente uma variedade algébrica de dimensão zero.

Pelo corolário I-3-1b, $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $W_{k+1} = \emptyset$

Logo,

$$V = \{x^0, x^1, \dots, x^k\}$$

∑

Lema I-3-5c: Se $M_1 = M_1(V)$ coincide com V , então V tem no máximo um número finito de componentes conexas.

§ Um lema de Andreotti e Frankel garante que para quase toda escolha de $a \in \mathbb{R}^n$, a função

$$\begin{aligned} r_a: V=M_1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow r_a(x) = |x-a|^2 \end{aligned}$$

tem somente pontos críticos não degenerados.

Fixemos um tal $a \in \mathbb{R}^n$.

Seja

$$\tau = \{x \in V \mid x \text{ é um ponto crítico de } r_a\}$$

Tomemos $f_1, \dots, f_m$ geradores de $I(V)$ e seja $\rho = \text{posto}(I(V))$.

Pelo lema I-3-5a,

$$\tau = M_1 \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{\partial (F_\mu, r_a)}{\partial x_\lambda}(x) = 0, \forall \mu \in \{1, \dots, m\}^\rho, \forall \lambda \in \Lambda\}$$

Como $M_1 = V$ temos

$$\tau = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_j(x) = 0, 1 \leq j \leq m, \\$$

$$\text{e } \frac{\partial (F_\mu, r_a)}{\partial x_\lambda}(x) = 0, \forall \mu \in \{1, \dots, m\}^\rho, \forall \lambda \in \Lambda\}$$

Assim, τ é uma variedade algébrica.

Como pontos críticos não degenerados são sempre isola

dos, segue que τ tem dimensão zero, e portanto, pelo corolário do lema I-3-5b, τ é finito.

Agora observemos que cada componente conexa V^i de V é um fechado (pois $M_1=V$ é uma subvariedade diferenciável de $\mathbb{R}^n$ fechada). Mais ainda, V^i é uma subvariedade diferenciável conexa, fechada, sem bordo. Logo, $r_a|_{V^i}$ assume mínimo num ponto $x^i \in V^i$ e este ponto é ponto crítico de $r_a|_V$.

Portanto, o número de componentes conexas de V é menor ou igual a $\# \tau$. X

Corolário: Sejam $V \subset \mathbb{R}^n$ e $W \subset \mathbb{R}^n$ variedades algébricas tais que os pontos singulares de V pertencem a W . Então $V-W$ tem um número finito de componentes conexas, cada uma das quais é uma subvariedade diferenciável analítica de $\mathbb{R}^n$.

X Sejam $g_1, \dots, g_k$ geradores de $I(W)$

Definimos

$$s(x) = g_1^2(x) + \dots + g_k^2(x)$$

Observemos que $s(x) = 0 \iff x \in W$.

Consideremos agora a função racional

$$g = \frac{1}{s} : V-W \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto g(x) = \frac{1}{s(x)}$$

g está bem definida e é contínua.

Seja G o gráfico de g . Temos:

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in V-W \text{ e } y = \frac{1}{s(x)}\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in V \text{ e } s(x)y = 1\}$$

Tomemos $f_1, \dots, f_m$ geradores de $I(V)$, e seja $\rho = \text{posto}(I(V))$

Definindo

$$F_i : \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ por}$$

$$F_i(x,y) = f_i(x), \quad 1 \leq i \leq m$$

$$F_{m+1}(x,y) = s(x)y - 1$$

temos

$$F_i \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n, y], \quad 1 \leq i \leq m+1 \quad \text{e}$$

G é definido por

$$F_1(x,y) = F_2(x,y) = \dots = F_{m+1}(x,y) = 0$$

Logo, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma variedade algébrica

Como $V-W \subset M_1(V)$, a matriz $\begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{bmatrix}$ tem posto constante em $V-W$.

Por outro lado, $\forall (x,y) \in G$ temos

$$A(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_j}(x,y) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x) & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ * & \vdots & s(x) \end{bmatrix}$$

Logo, A tem posto constante $\rho+1$ em G (pois se $(x,y) \in G$ então $x \in V-W$ e $s(x) \neq 0$).

Assim, $M_1(G) = G$ e segue do lema I-3-5c que G tem um número finito de componentes conexas.

Como a 'projeção'

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

é um difeomorfismo de G sobre $V-W$, segue a tese: $\square$

Prova do Teor. I-3-5:

$\square$ Consideremos a decomposição

$$V = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k$$

de V fornecida pelo teorema I-3-4.

Da definição de M_i , $1 \leq i \leq k$, segue do corolário anterior que M_i tem um número finito de componentes conexas.

$\square$

Teor. I-3-6: Dadas duas variedades algébricas $W \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^n$, a diferença $V-W$ tem um número finito de componentes conexas, sendo cada uma reunião finita disjunta de subvariedades diferenciáveis conexas de $\mathbb{R}^n$.

$\square$ Consideremos a decomposição de V

$$V = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k$$

dada pelo teorema I-3-4.

Temos

$$V-W = (M_1-W) \cup \dots \cup (M_k-W) \quad \text{e} \quad M_i-W = V_{i-1} - (V_i \cup W)$$

Logo, $M_i - W$ é a diferença entre duas variedades algébricas V_{i-1} e $V_i \cup W$, sendo que $V_i \cup W$ contém os pontos singulares de V_{i-1} . Segue do corolário do lema I-3-5c que $M_i - W$ tem um número finito de componentes conexas, sendo cada uma subvariedade diferenciável analítica de $\mathbb{R}^n$. $\square$

I-4 ALGUMAS PROPRIEDADES DE $V(f)$ E DE $V^\perp(f)$

Teor. I-4-1 (Teorema Algébrico de Sard):

Se $V \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade algébrica e $g \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, então o conjunto dos valores críticos $g|_V$ é finito.

$\square$ Seja $\Gamma \subset V$ o conjunto dos pontos críticos de $g|_V$, e

(1) $V = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k$ decomposição de V dada pelo teorema I-3-4.

(2) $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_k$ onde $\Gamma_i = \Gamma \cap M_i$, $1 \leq i \leq k$

Temos $c(\Gamma) \leq c(\Gamma_1) + c(\Gamma_2) + \dots + c(\Gamma_k)$, onde $c(\Gamma)$ é o número de componentes conexas de Γ e $c(\Gamma_i)$ é o número de componentes conexas de Γ_i , $1 \leq i \leq k$

Fixemos $i \in \{1, \dots, k\}$.

Vamos mostrar que $c(\Gamma_i)$ é finito

Observemos que, decorre de (1) e (2) que Γ_i é o conjunto dos pontos críticos de $g|_{M_i}$, e M_i é o conjunto

dos pontos não singulares de uma variedade algébrica $V_{i-1} \subset \mathbb{R}^n$ (ver prova do teorema I-3-4).

Sejam $f_1, \dots, f_m$ geradores de $I(V_{i-1})$ e $\rho = \text{posto } (I(V_{i-1}))$

Pelo lema I-3-5a

$$\Gamma_i = M_i \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{\partial (F_\mu, g)}{\partial x_\lambda}(x) = 0, \forall \mu \in \{1, \dots, m\}^\rho, \forall \lambda \in \Lambda_\rho \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid f_j(x) = 0 \text{ e } \frac{\partial (F_\mu, g)}{\partial x_\lambda}(x) = 0, \forall j \in \{1, \dots, m\}, \forall \lambda \in \Lambda_{\rho_i}, \forall \mu \in \{1, \dots, m\}^\rho \right\} - V_i$$

(onde $V_i = V_{i-1} - M_i$)

Pelo teorema I-3-6, como Γ_i é a diferença de duas variedades algébricas de $\mathbb{R}^n$, segue que $c(\Gamma_i)$ é finito e que cada componente conexa de Γ_i é uma reunião finita disjunta de subvariedades diferenciáveis analíticas conexas de $\mathbb{R}^n$.

Assim, $c(\Gamma)$ é finito e Γ é a reunião finita disjunta de variedades diferenciáveis conexas, em cada uma das quais g é constante.

∧

Prop. I-4-1: Se $f: (\mathbb{R}^n; 0) \longrightarrow (\mathbb{R}; 0)$ for um polinômio, então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $V(f)$ é transversal a S_ε , $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

⌘ Seja $g: (\mathbb{R}^n; 0) \longrightarrow (\mathbb{R}; 0)$ o polinômio definido por $g(x) = |x|^2$.

Como $V(f)$ é uma variedade algébrica de $\mathbb{R}^n$, segue do Teorema Algébrico de Sard que $g|_{V(f)}$ tem um número finito de valores críticos. Seja r o menor valor crítico estritamente positivo de $g|_{V(f)}$, e tomemos $\varepsilon_0 = \sqrt{r}$.

Então, se $x \in V(f) \cap S_\varepsilon$ (para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$) temos que x não é ponto crítico de $g|_{V(f)}$. Isto significa que a componente conexa da decomposição feita em I-3 para $V(f)$ que contém x é uma variedade diferenciável que não tangencia S_ε em x , ou seja, que é transversal a S_ε em x . ⌘

Com um raciocínio análogo concluímos:

Prop. I-4-2: Se $f: (\mathbb{R}^n; 0) \longrightarrow (\mathbb{R}; 0)$ for um polinômio, então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $V^1(f)$ é transversal a S_ε , $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Decorre da proposição I-4-1 que $V(f) \cap B'_{\varepsilon_0}$ tem um número finito de componentes conexas, cada uma das quais é transversal às esferas S_ε , $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Da proposição I-4-2 decorre resultado análogo para $V^1(f) \cap B'_{\varepsilon_0}$.

Prop.I-4-3: Se $V^{\perp}(f) - \{0\}$ não adere à origem, então a origem é ponto de extremo estrito de f .

Esta proposição voltará a ser mencionada no capítulo II de maneira mais geral, quando será demonstrada.

Agora vamos obter um resultado sobre separação

Prop.I-4-4: Seja $f: (\mathbb{R}^n; 0) \longrightarrow (\mathbb{R}; 0)$ um polinômio.

Se $x, y \in V(f)$ satisfazem

$$\langle \text{grad} f(x) | x \rangle \langle \text{grad} f(y) | y \rangle < 0,$$

então $V^{\perp}(f)$ separa x de y .

Σ Para toda curva $\eta: [0,1] \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}^n$ tal que $\eta(0)=x$ e $\eta(1)=y$, a função

$$F_{\eta}: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \longmapsto \langle \text{grad} f(\eta(t)) | \eta(t) \rangle$$

é contínua e satisfaz

$$F_{\eta}(0) \cdot F_{\eta}(1) < 0$$

Logo existe $\bar{t} \in (0,1)$ tal que $F_{\eta}(\bar{t})=0$

Como $F_{\eta}(\bar{t}) = \langle \text{grad} f(\eta(\bar{t})) | \eta(\bar{t}) \rangle$ segue que

$$\eta(\bar{t}) \in V^{\perp}(f)$$

Da arbitrariedade de η segue a tese.

Σ

Corolário: Seja $f: (\mathbb{R}^n; 0) \longrightarrow (\mathbb{R}; 0)$ um polinômio.

Se σ_1 e σ_2 são duas componentes de $V(f) \cap B'_{\varepsilon_0}$

(onde ε_0 é dado pela prop.I-4-1) tais que

$$\langle \text{grad} f(x) | x \rangle < 0 \quad , \quad \forall x \in \sigma_1 \quad , \quad \text{e}$$

$$\langle \text{grad} f(x) | x \rangle < 0 \quad , \quad \forall x \in \sigma_2 \quad ,$$

então $V^1(f)$ separa σ_1 de σ_2 .

CAPÍTULO II

A derivada radial

II-1 INTRODUÇÃO

No presente capítulo abordaremos o problema de relacionar o tipo de ponto crítico de uma função

$$f: U \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$$

(onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma vizinhança aberta de $0 \in \mathbb{R}^n$ e 0 é o ponto crítico de f) com o tipo de ponto crítico de sua derivada radial f' , definida abaixo.

Sob este aspecto, obteremos, no final, uma classificação completa dos pares (f, f') .

$f: (\mathbb{R}^n; 0) \xrightarrow{C^k} (\mathbb{R}^m; 0)$ denotará germe de função C^k na origem, e, como é usual, denotaremos também por f um representante do germe.

Def.II-1-1: $f: (\mathbb{R}^n; 0) \xrightarrow{C^0} (\mathbb{R}; 0)$.

Diremos que f tem máximo forte (mínimo forte) - na origem se a origem for ponto de máximo (mínimo) estrito de f .

Diremos que f tem máximo brando (mínimo brando) na origem se a origem for ponto de máximo (mínimo) não estrito de f .

Diremos que f tem sela na origem se a origem não for ponto nem de máximo nem de mínimo de f .

Def.II-1-2: $f: (\mathbb{R}^n; 0) \longrightarrow (\mathbb{R}; 0)$

Diremos que o germe f admite jato punctual de

ordem k na origem se existir um polinômio

$$P: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

de grau menor ou igual a k tal que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - P(x)}{|x|^k} = 0$$

Observemos que P , quando existir, é único, e no caso de f admitir polinômio de Taylor de ordem k , P coincide com tal polinômio.

Denotaremos tal polinômio por $j^k f$ e o chamaremos de jato k da f (em 0).

Def.II-1-3: $f: (\mathbb{R}^n; 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m; 0)$

Diremos que o germe f admite jato puntual de ordem k na origem se cada coordenada

$$f_i: (\mathbb{R}^n; 0) \longrightarrow (\mathbb{R}; 0), \quad 1 \leq i \leq m,$$

de f admite jato puntual de ordem k na origem.

Em tal caso, chamaremos de jato k da f (em 0) e denotaremos por $j^k f$ a m -upla de polinômios $(j^k f_1, \dots, j^k f_m)$.

Notações:

$$G^k(n, m) = \{f: (\mathbb{R}^n; 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m; 0) \mid f \text{ admite } j\text{ato } k\}$$

$$G^k(n) = G^k(n, 1)$$

Segue imediatamente que $G^{k+1}(n, m) \subset G^k(n, m)$.

Def.II-1-4: $f: (\mathbb{R}^n; 0) \xrightarrow{C^0} (\mathbb{R}; 0)$

Diremos que a origem é ponto crítico de f se $f \in G^1(n)$ e $j^1 f = 0$.

II-2 A DERIVADA RADIAL

Def.II-2-1: $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $0 \in U$ ponto crítico de $f: U \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$

Chamaremos de derivada radial de f e denotaremos por f' a função

$$\begin{aligned} f': U &\xrightarrow{C^0} \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \langle \text{grad} f(x) | x \rangle \end{aligned}$$

Def.II-2-2: $f: (\mathbb{R}^n; 0) \xrightarrow{C^1} (\mathbb{R}; 0)$

Chamaremos de derivada radial do germe f (ou apenas de derivada radial de f) e denotaremos por f' ao germe de funções C^0 na origem

$$f': (\mathbb{R}^n; 0) \longrightarrow (\mathbb{R}; 0)$$

cujos representantes são as derivadas radiais dos representantes do germe f .

Para obtermos os resultados que nos levarão a uma classificação dos pares (f, f') relativamente aos pares de pontos críticos associados, enunciaremos inicialmente um lema que será utilizado ao longo de todo o capítulo.

Lema II-2-1: Seja $f: U \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$, onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma vizinhança aberta da origem e $f(0)=0$.

Se para algum $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon \subset U$ existe $x_\epsilon \in B'_\epsilon$ satisfazendo $f(x_\epsilon) > 0$ (respect. $f(x_\epsilon) < 0$, $f(x_\epsilon) = 0$) então existe $\tilde{x}_\epsilon \in B'_\epsilon$ tal que $f'(\tilde{x}_\epsilon) > 0$ (respect. $f'(\tilde{x}_\epsilon) < 0$, $f'(\tilde{x}_\epsilon) = 0$).

⌘ A função

$$\begin{aligned} \tilde{f}: [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \tilde{f}(t) = f(tx_\epsilon) \end{aligned}$$

está bem definida, é C^1 e satisfaz

$$\tilde{f}(0) = 0, \quad \tilde{f}(1) = f(x_\epsilon)$$

Logo pelo Teorema do Valor Médio,

$$f(x_\epsilon) = \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0) = \frac{d\tilde{f}(\bar{t})}{d\bar{t}} \quad \text{para algum } \bar{t} \in (0,1).$$

Como

$$f'(tx_\epsilon) = \langle \text{grad} f(tx_\epsilon) | tx_\epsilon \rangle = t \langle \text{grad} f(tx_\epsilon) | x_\epsilon \rangle = t \frac{d\tilde{f}(t)}{dt}$$

temos

$$f'(\bar{t}x_\epsilon) = \bar{t} f'(x_\epsilon),$$

donde segue a tese para $\tilde{x}_\epsilon = \bar{t}x_\epsilon$

⌘

Observemos que na demonstração anterior, tudo o que fizemos foi parametrizar o segmento de reta Γ que liga a origem do $\mathbb{R}^n$ a x_ϵ , restringir f a esse segmento e usar o Teorema do Valor Médio.

É importante notar que não foi relevante a parametriza

ção de Γ escolhida. Foi natural, neste caso, a parametrização escolhida, mas refaremos abaixo a demonstração do lema anterior usando uma outra parametrização que se mostrará - mais sugestiva no capítulo III, quando enunciaremos um resultado mais geral.

⌘ Seja Γ o segmento de reta de extremidades x_ϵ e $0 \in \mathbb{R}^n$. Parametrizemos $\Gamma - \{0\}$ por

$$\begin{aligned} x: (-\infty, 0] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto x(t) = e^{tI} x_\epsilon \end{aligned}$$

onde $I \in M_n(\mathbb{R})$ é a matriz identidade.

A função

$$\begin{aligned} \tilde{f}: (-\infty, 0] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f \circ x(t) \end{aligned}$$

fica bem definida, pois $\Gamma \subset B_\epsilon \subset U$, e é C^1 .

Como $\tilde{f}(0) = f(x_\epsilon)$ e $\lim_{t \downarrow -\infty} \tilde{f}(t) = 0$, existe $\bar{t} \in (-\infty, 0)$ tal que $\frac{d\tilde{f}}{dt}(\bar{t})$ tem mesmo sinal que $f(x_\epsilon)$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{f}}{dt}(\bar{t}) &= \langle \text{grad} f(x(\bar{t})) | \dot{x}(\bar{t}) \rangle = \\ &= \langle \text{grad} f(x(\bar{t})) | x(\bar{t}) \rangle = f'(x(\bar{t})) \end{aligned}$$

Portanto, tomando-se $\bar{x}_\epsilon = x(\bar{t})$ segue a tese. ⌘

Para $f: U \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$, onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma vizinhança aberta da origem, temos

$$V^1(f) = \{x \in U \mid f'(x) = 0\}$$

Em vista disto, a proposição I-4-3 é um corolário do resultado abaixo, que por sua vez é consequência imediata do lema II-2-1.

Prop.II-2-1: Seja $f: (\mathbb{R}^n; 0) \xrightarrow{C^1} (\mathbb{R}; 0)$

Se f' tem extremo forte na origem, então f também tem extremo forte na origem, e este é do mesmo tipo que o de f' .

II-3 PROPRIEDADES DE f'

A proposição II-2-1 nos informa que se f' tem máximo forte (respect. mínimo forte) na origem, o mesmo ocorre com f . Em vista disto surgiu naturalmente interesse por uma recíproca desta proposição.

A pergunta nos surgiu originariamente sob a forma: "Se $f: (\mathbb{R}^n; 0) \xrightarrow{C^1} (\mathbb{R}; 0)$ tiver extremo forte na origem, podemos concluir que f' também terá extremo forte na origem?".

A resposta a essa pergunta inicialmente nos surpreendeu, por ser negativa mesmo no mundo dos polinômios.

Exemplo II-3-1:

$$\begin{aligned} P(x,y) &= 36x^2 - 48xy^2 + 17y^4 \\ &= (6x - 4y^2)^2 + y^4 \quad \text{tem mínimo forte na origem} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P'(x,y) &= 72x^2 - 144xy^2 + 68y^4 \\ &= 72(x-y^2)^2 - 4y^4 \quad \text{tem sela na origem} \end{aligned}$$

No caso de polinômios de uma variável, P e P' tem sempre o mesmo tipo de extremo, como é simples observar.

As proposições a seguir têm como objetivo caracterizar os pares (f, f') relativamente aos correspondentes pares de pontos críticos associados.

$$f: (\mathbb{R}^n; 0) \xrightarrow{C^1} (\mathbb{R}; 0)$$

Prop. II-3-1: Se f tem mínimo forte (respect. máximo forte) na origem, então a origem é ponto de mínimo forte, mínimo brando ou sela (respect. máximo forte, máximo brando ou sela) para f' , e efetivamente cada uma dessas possibilidades se concretiza.

⌘ Se f tem mínimo forte na origem, segue do Lema II-2-1 que existe uma sequência $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^n - \{0\}$ convergindo para a origem tal que $f'(x_k) > 0$ para k suficientemente grande. Logo, f' não pode ter máximo na origem.

Os exemplos II-3-1, II-3-1a, II-3-2, II-3-2a e II-3-3 mostram que efetivamente cada uma das possibilidades mencionadas se concretiza.

Analogamente conclui-se o resultado respectivo caso f tenha máximo forte na origem. ⌘

Exemplo II-3-1a:

Consideremos uma função $f: \mathbb{R} \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$ com mínimo iso-

lado forte na origem e tal que a origem seja ponto de acumulação de pontos críticos de inflexão.

Neste caso, $f'(x) = x \frac{df(x)}{dx}$ tem mínimo brando.

Exemplo II-3-2:

$$P(x,y) = 36x^2 - 48xy^2 + 18y^4$$

$$= (6x - 4y^2)^2 + 2y^4 \quad \text{tem mínimo forte na origem}$$

$$P'(x,y) = 72(x - y^2)^2 \quad \text{tem mínimo brando na origem}$$

Exemplo II-3-2a:

Seja $f: \mathbb{R} \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$ com mínimo forte na origem, tal que a origem não seja ponto de mínimo local isolado.

Então $f'(x) = x \frac{df(x)}{dx}$ tem sela na origem.

Exemplo II-3-3:

$$P(x,y) = x^2 + y^2 \quad \text{tem mínimo forte na origem}$$

$$P'(x,y) = 2(x^2 + y^2) \quad \text{tem mínimo forte na origem}$$

Prop.II-3-2: Se f tem mínimo brando (respect. máximo brando) na origem, então a origem é ponto de mínimo - brando ou sela (respect. máximo brando ou sela) para f' , e cada uma dessas possibilidades de fato ocorre.

⌘ Se f tem mínimo brando na origem, segue do Lema II-2-1 que existem sequências $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^n - \{0\}$, am

bas convergentes para a origem, tais que $f'(x_k) > 0$ e $f'(y_k) = 0$ para k suficientemente grande.

Logo, f' não pode ter nem mínimo forte nem máximo na origem.

Caso f tenha máximo brando na origem, um raciocínio análogo leva ao resultado respectivo.

Os exemplos II-3-4, II-3-4a, II-3-5 e II-3-5a completam a prova. X

Exemplo II-3-4:

$$P(x,y) = x^2$$

tem mínimo brando na origem

$$P'(x,y) = 2x^2$$

tem mínimo brando na origem

Exemplo II-3-4a:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ x^2 & , x > 0 \end{cases}$$

tem mínimo brando na origem

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ 2x^2 & , x > 0 \end{cases}$$

tem mínimo brando na origem

Exemplo II-3-5:

$$P(x,y) = x^2 - 2xy^2 + y^4$$

$$= (x - y^2)^2$$

tem mínimo brando na origem

$$P'(x,y) = 2x^2 - 6xy^2 + 4y^4$$

$$= 2 \left(x - \frac{3}{2}y^2 \right)^2 - \frac{1}{2}y^4$$

tem sela na origem

Exemplo II-3-5a:

$$f(x) = x^4 \sin^2 \frac{1}{x} \quad \text{tem m\u00ednimo brando na origem}$$

$$f'(x) = 2x^3 \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) \sin \frac{1}{x} \quad \text{tem sela na origem}$$

Prop.II-3-3: Se f tem sela na origem, ent\u00e3o f' tem sela na origem.

⌘ Segue do Lema II-2-1 que existem sequ\u00eancias $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^n - \{0\}$, ambas convergentes para a origem, tais que $f'(x_k) > 0$ e $f'(y_k) < 0$ para todo k suficientemente grande. ⌘

Prop.II-3-4: Se f tem ponto cr\u00edtico na origem, ent\u00e3o f' tem ponto cr\u00edtico na origem.

⌘ f \u00e9 C^1 , portanto $\text{grad} f$ \u00e9 C^0 , e como a origem \u00e9 ponto cr\u00edtico de f temos $\text{grad} f(0) = 0 \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{Como } \frac{|f'(x)|}{|x|} = \left| \left\langle \text{grad} f(x), \frac{x}{|x|} \right\rangle \right| \leq |\text{grad} f(x)| \quad \forall x \neq 0$$

segue que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{|x|} = 0$$

$$\text{Logo, } f' \in G^1(n) \quad \text{e} \quad j^1 f' = 0 \quad \text{⌘}$$

II-4 CLASSIFICAÇÃO DOS PARES (f, f') PARA $f: (\mathbb{R}^n; 0) \xrightarrow{C^1} (\mathbb{R}; 0)$

Singularidade de f na origem	Singularidade de f' na origem	Exemplo ($n \geq 2$)
Sela	Sela	$f(x, y) = x^2 - y^2$
Mínimo forte	Mínimo forte Mínimo brando Sela	$f(x, y) = x^2 + y^2$ $f(x, y) = (6x - 4y^2)^2 + 2y^4$ $f(x, y) = (6x - 4y^2)^2 + y^4$
Mínimo brando	Mínimo brando Sela	$f(x, y) = x^2$ $f(x, y) = (x - y^2)^2$
Máximo brando	Máximo brando Sela	
Máximo forte	Máximo forte Máximo brando Sela	
e não existem outras possibilidades		

II-5 UMA CLASSE EM QUE OS PARES (f, f') SÃO TRIVIAIS

Estamos interessados, neste parágrafo, em determinar - uma classe de funções C^1 para a qual f e f' tenham o mesmo tipo de ponto crítico. Já sabemos que na classe dos polinômios a uma variável isto ocorre. Tentaremos captar a essência desse fenômeno nessa classe, para podermos chegar a uma classe mais ampla.

Dado um polinômio $P: (\mathbb{R}; 0) \longrightarrow (\mathbb{R}; 0)$ não identicamente nulo, o monômio de menor grau de P determina seu comportamento na origem. Como o monômio de menor grau de P' é, a menos de constante multiplicativa positiva, igual ao de P , segue que P' tem mesmo tipo de comportamento na origem que P .

Essencialmente, essa é a idéia que nos permitirá ampliar a classe em que f e f' têm mesmo tipo de ponto crítico.

É imediato o seguinte resultado:

Prop. II-5-1: $f: (\mathbb{R}^n; 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m; 0)$

f tem jato puntual de ordem k na origem se e somente se existem polinômios

$$P_j: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq j \leq m$$

de grau menor ou igual a k , tais que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - (P_1(x), \dots, P_m(x))|}{|x|^k} = 0$$

Observemos agora que para $f: (\mathbb{R}^n; 0) \xrightarrow{C^1} (\mathbb{R}; 0)$ com ponto crítico na origem, se $f \in G^k(n)$ e $\text{grad} f \in G^{k-1}(n, n)$, então

$$\text{grad} \cdot j^k f = j^{k-1} \text{grad} f$$

É imprescindível, para o resultado acima, que $\text{grad} f \in G^{k-1}(n, n)$.

O exemplo seguinte mostra que isso não é decorrência das outras hipóteses, e servirá para motivar a colocação das próximas proposições.

Exemplo II-5-1:

$$f: (\mathbb{R}; 0) \xrightarrow{C^1} (\mathbb{R}; 0)$$

$$f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$$

$$f \in G^2(1), \quad j^2 f = 0$$

$$\frac{df(x)}{dx} = 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} \notin G^1(1, 1) = G^1(1)$$

Prop. II-5-2: Seja $F: (\mathbb{R}^n; 0) \xrightarrow{C^0} (\mathbb{R}^n; 0)$, $F \in G^{k-1}(n, n)$, $j^{k-1} F = 0$. Então

$$g: (\mathbb{R}^n; 0) \longrightarrow (\mathbb{R}; 0)$$

definida por

$$g(x) = \int_0^1 \langle F(tx) | tx \rangle dt$$

é um elemento de $G^k(n)$ e $j^k g = 0$

$$\begin{aligned} \sum \quad \frac{g(x)}{|x|^k} &= \int_0^1 \frac{t^k}{|tx|^k} \langle F(tx) | tx \rangle dt \\ &= \int_0^1 t^k \left\langle \frac{F(tx)}{|tx|^{k-1}} \middle| \frac{tx}{|tx|} \right\rangle dt \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{|g(x)|}{|x|^k} &\leq \frac{1}{k+1} \sup_{t \in (0,1)} \frac{|F(tx)|}{|tx|^{k-1}} \\ &\leq \frac{1}{k+1} \sup_{y \in B'_{|x|}} \frac{|F(y)|}{|y|^{k-1}} \end{aligned}$$

Como $j^{k-1}F=0$ temos $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|F(x)|}{|x|^{k-1}} = 0$, donde

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sup_{y \in B'_{|x|}} \frac{|F(y)|}{|y|^{k-1}} = 0$$

$$\text{Logo,} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{|x|^k} = 0$$

$\sum$

Corolário II-5-2a: Se $f: (\mathbb{R}^n; 0) \xrightarrow{C^1} (\mathbb{R}; 0)$ é tal que
 $\text{grad} f \in G^{k-1}(n, n)$ e $j^{k-1} \text{grad} f = 0$, então
 $f \in G^k(n)$ e $j^k f = 0$

$\sum$ Basta tomar

$$F(x) = \text{grad} f(x)$$

e observar que $g(x) = \int \langle F(tx) | tx \rangle dt = f(x)$

$\sum$

Corolário II-5-2b: Se $f: (\mathbb{R}^n; 0) \xrightarrow{C^1} (\mathbb{R}; 0)$ é tal que $\text{grad} f \in G^{k-1}(n, n)$, então $f \in G^k(n)$ e $\text{grad } j^k f = j^{k-1} \text{grad} f$

⌘ Basta tomar

$$F(x) = \text{grad} f(x) - j^{k-1} \text{grad} f(x)$$

e observar que

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^1 \langle \text{grad} f(tx) | tx \rangle dt - \langle j^{k-1} \text{grad} f(tx) | tx \rangle dt \\ &= f(x) - \int \langle j^{k-1} \text{grad} f(tx) | tx \rangle dt. \end{aligned}$$

Então, como $j^{k-1} \text{grad} f(tx)$ é uma n -upla de polinômios em $(t, x_1, \dots, x_n)$, todos de grau menor ou igual a $k-1$ em $(x_1, \dots, x_n)$, segue que

$$P(x) = \int_0^1 \langle j^{k-1} \text{grad} f(tx) | tx \rangle dt$$

é um polinômio de grau menor ou igual a k em $(x, \dots, x_n)$.

Logo, como

$$g = f - P \in G^k(n) \quad \text{e} \quad j^k g = 0,$$

segue que $f \in G^k(n)$ e $j^k f = P$.

A observação que segue a proposição II-5-1 completa a prova

⌘

Def. II-5-1: Dizemos que $f \in G^r(n)$ é k -decidível ($k \leq r$) se, a partir de $j^k f$, é possível concluir que $0 \in \mathbb{R}^n$ é ponto de mínimo, máximo ou sela de f .

Denotemos por $A^k(n)$ o conjunto dos germes

$$f: (\mathbb{R}^n; 0) \xrightarrow{C^1} (\mathbb{R}; 0)$$

com ponto crítico na origem, tais que $\text{grad} f \in G^{k-1}(n, n)$.

Pelo corolário II-5-2b, $A^k(n) \subset G^k(n)$.

Prop. II-5-3: Se $f \in A^k(n)$ é k -decidível e $j^{k-1}f=0$, então $f' \in G^k(n)$, f' é k -decidível e tem mesmo tipo de ponto crítico, na origem, que f .

$$\S \quad f \in A^k(n) \subset G^k(n)$$

$$\implies f = j^k f + R \quad , \quad \text{com } R \in A^k(n) \text{ e } j^k R = 0 .$$

$$\text{Portanto } f'(x) = \langle \text{grad} f(x) | x \rangle$$

$$= \langle \text{grad} j^k f(x) | x \rangle + \langle \text{grad} R(x) | x \rangle$$

Como $j^{k-1}f=0$ temos que $j^k f$ é um polinômio homogêneo de grau k , donde

$\langle \text{grad} j^k f(x) | x \rangle = k j^k f$ é um polinômio de grau $\leq k$ que é k -decidível (pois $j^k f$ é k -decidível).

$$h(x) = \langle \text{grad} R(x) | x \rangle \in G^k(n) \text{ e } j^k h = 0 , \text{ pois}$$

$$\frac{|h(x)|}{|x|^k} = \left| \left\langle \frac{\text{grad} R(x)}{|x|^{k-1}} \middle| \frac{x}{|x|} \right\rangle \right| \leq \frac{|\text{grad} R(x)|}{|x|^{k-1}} \quad e$$

$$j^{k-1} \text{grad} R = \text{grad} j^k R = 0 .$$

Logo,

$$f' = k j^k f + h \in G^k(n) \quad e \quad \text{é } k\text{-decidível.}$$

\S

Corolário II-5-3a: Se $f \in A^k(1)$ e $j^{k-1} \frac{df}{dx} \neq 0$, então f' tem mesmo tipo de ponto crítico que f .

⌘ Seja $s \leq k$ mínimo tal que $j^{s-1} \frac{df}{dx} \neq 0$

Então $f \in A^s(1)$ e $\frac{d}{dx}(j^s f) = j^{s-1} \frac{df}{dx} \neq 0$

Logo, $j^s f \neq 0$, donde f é s -decidível (pois é função de uma variável).

Além disso, $\frac{d}{dx}(j^{s-1} f) = j^{s-2} \frac{df}{dx} = 0$, pela escolha de s .

Logo, $j^{s-1} f$ é constante, e como $f(0)=0$, $j^{s-1} f=0$.

Pela proposição anterior, $f' \in G^s(1)$, f' é s -decidível e tem mesmo tipo de ponto crítico, na origem, que f . ⌘

Exemplo II-5-2:

Os polinômios a 1-variável com ponto crítico na origem não identicamente nulos satisfazem as hipóteses do corolário II-5-3a.

Exemplo II-5-3:

Se $P: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é um polinômio não identicamente nulo com ponto crítico na origem e o primeiro jato não nulo de P é decidível, então P e P' têm o mesmo tipo de ponto crítico na origem.

II-6 ESTUDO DE ALGUNS EXEMPLOS

Exemplo II-6-1:

$$P(x,y) = (x - 6y^2)^2 + 4y^4$$

$$= x^2 - 12xy^2 + 40y^4 \quad \text{tem m\u00ednimo forte na origem}$$

$$P'(x,y) = 2(x^2 - 18xy^2 + 80y^4)$$

$$= (x - 8y^2)(x - 10y^2) \quad \text{tem sela na origem}$$

Fixemos $K > 0$

A curva de n\u00edvel $4K^4$ de P fica definida por

$$x = 6y^2 \pm 2\sqrt{K^4 - y^4}, \quad |y| \leq K$$

Estudemos as fun\u00e7\u00f5es x_+ e x_- definidas por

$$x_{\pm}(y) = 6y^2 \pm 2\sqrt{K^4 - y^4}, \quad |y| \leq K$$

Temos:

$$x'_{\pm}(y) = 4y \left(3 \pm \frac{y^2}{\sqrt{K^4 - y^4}} \right), \quad |y| < K$$

$$x_{\pm}''(y) = 12 \pm \frac{4y^2(y^4 - 3K^4)}{(\sqrt{K^4 - y^4})}, \quad |y| < K$$

Sinal de $x_{\pm}$ e $x'_{\pm}$

y	0	$(0; \frac{K}{\sqrt[4]{10}})$	$\frac{K}{\sqrt[4]{10}}$	$(\frac{K}{\sqrt[4]{10}}; \sqrt[4]{\frac{9}{10}}K)$	$\sqrt[4]{\frac{9}{10}}K$	$(\sqrt[4]{\frac{9}{10}}K; K)$	K
$x_+(y)$	$2K^2$	$\uparrow$		$\uparrow$	$\frac{19K^2}{\sqrt{10}}$	$\downarrow$	$6K^2$
$x'_+(y)$	0	+	+	+	0	-	
$x_-(y)$	$-2K^2$	$\uparrow$	0	$\uparrow$	$\frac{17K^2}{\sqrt{10}}$	$\uparrow$	$6K^2$
$x'_-(y)$	0	+	+	+	+	+	

x_+ e x_- são funções pares

$$\lim_{y \uparrow K} x'_-(y) = +\infty \qquad \lim_{y \uparrow K} x'_+(y) = -\infty$$

$$\lim_{y \downarrow -K} x'_-(y) = -\infty \qquad \lim_{y \downarrow -K} x'_+(y) = +\infty$$

Concavidade de x_+ e x_-

$$x''_{\pm} = 12 \pm \frac{4y^2 (y^4 - 3K^4)}{(\sqrt{K^4 - y^4})^3}, \quad |y| < K$$

Logo,

$$x''_-(y) > 0, \quad \forall y \quad (|y| < K)$$

Para $|y| < K$ temos

$$x''_+(y) = 0 \iff 9K^{12} - 36K^8 y^4 + 33K^4 y^8 - 10y^{12} = 0$$

Seja

$$g(\lambda) = 10\lambda^3 - 33K^4\lambda^2 + 36K^8\lambda, \quad \lambda \geq 0$$

Observemos que

$$x''_+(y) = 0 \iff g(y^4) = 9K^{12}$$

$$\text{Como } g'(\lambda) = 30\left(\lambda - \frac{6}{5}K^4\right)(\lambda - K^4), \quad \lambda \geq 0, \quad \text{e}$$

$$g\left(\frac{6}{5}K^4\right) = 12,96K^{12}$$

$$g(K^4) = 13K^{12}$$

$$g(0) = 0$$

temos:

Logo, $\exists! \bar{\lambda} \in (0, K^4)$ tal que $g(\bar{\lambda}) = 9K^{12}$

Assim, x_+'' tem uma única raiz positiva $\bar{y} \in (0, K)$, e consequentemente, $\bar{y}$ e $-\bar{y}$ são suas únicas raízes (em $(-K, K)$).

Como

$$x_+''\left(+\sqrt[4]{\frac{9}{10}} K\right) < 0 \quad \text{e} \quad x_+''\left(+\frac{K}{\sqrt[4]{10}}\right) > 0$$

segue que $\bar{y} \in \left(\frac{K}{\sqrt[4]{10}}, \sqrt[4]{\frac{9}{10}} K\right)$

Assim

$$\exists \bar{y} \in \left(\frac{K}{\sqrt[4]{10}}, \sqrt[4]{\frac{9}{10}} K\right) \quad \text{tal que}$$

$$x_+''(\pm\bar{y}) = 0$$

$$x_+''(y) > 0 \quad \text{se} \quad -\bar{y} < y < \bar{y}$$

$$x_+''(y) < 0 \quad \text{se} \quad -K < y < -\bar{y} \quad \text{ou} \quad \bar{y} < y < K$$

Exemplo II-6-2:

$$P(x,y) = 36x^2 - 48xy^2 + 18y^4$$

$$= (6x - 4y^2)^2 + 2y^4 \quad \text{tem m\u00ednimo forte na origem}$$

$$P'(x,y) = 72 (x - y^2)^2 \quad \text{tem m\u00ednimo brando na origem}$$

Fixemos $K > 0$

A curva de n\u00edvel $2K^4$ de P fica definida por

$$x = \frac{4y^2 \pm \sqrt{2} \sqrt{K^4 - y^4}}{6}, \quad |y| \leq K$$

Estudemos as fun\u00e7\u00f5es $x_{\pm}(y) = \frac{4y^2 \pm \sqrt{2} \sqrt{K^4 - y^4}}{6}$:

$$x'_{\pm}(y) = \frac{y}{3} \left[4 \mp \frac{\sqrt{2} y^2}{\sqrt{K^4 - y^4}} \right], \quad |y| < K$$

$$x''_{\pm}(y) = \frac{1}{3} \left[4 \mp \frac{\sqrt{2} y^2 (3K^4 - y^4)}{(\sqrt{K^4 - y^4})^3} \right], \quad |y| < K$$

Sinal de $x_{\pm}$ e $x'_{\pm}$

y	0	$(0; \frac{K}{\sqrt[4]{8}})$	$\frac{K}{\sqrt[4]{8}}$	$(\frac{K}{\sqrt[4]{8}}; \sqrt[4]{\frac{8}{9}}K)$	$\sqrt[4]{\frac{8}{9}}K$	$(\sqrt[4]{\frac{8}{9}}K; K)$	K
$x_+(y)$	$\frac{\sqrt{2}}{6}K^2$	↑		↑	$\frac{\sqrt{2}}{2}K^2$	↓	$\frac{2}{3}K^2$
$x'_+(y)$	0	+		+	0	-	
$x_-(y)$	$-\frac{\sqrt{2}}{6}K^2$	↑		↑		↑	$\frac{2}{3}K^2$
$x'_-(y)$	0	+		+		+	

x_+ e x_- são funções pares

$\lim_{y \uparrow K} x'_-(y) = +\infty$
 $\lim_{y \uparrow K} x'_+(y) = -\infty$

$\lim_{y \downarrow -K} x'_-(y) = -\infty$
 $\lim_{y \downarrow -K} x'_+(y) = +\infty$

Concavidade de x_+ e x_-

$$x''_{\pm}(y) = \frac{1}{3} \left[4 \mp \frac{\sqrt{2} y^2 (3K^4 - y^4)}{(\sqrt{K^4 - y^4})^3} \right] ; |y| < K$$

Logo,

$$x''_{\pm}(y) > 0 , \quad \forall y \quad (|y| < K)$$

Para $|y| < K$ temos

$$x_+''(y) = 0 \iff 3y^{12} - 10K^4y^8 + 11K^8y^4 - \frac{8}{3}K^{12} = 0$$

Seja

$$g(\lambda) = 3\lambda^3 - 10K^4\lambda^2 + 11K^8\lambda, \quad \lambda \geq 0$$

Temos:

$$x_+''(y) = 0 \iff g(y^4) = \frac{8}{3}K^{12}$$

Como

$$\begin{aligned} g'(\lambda) &= 9\lambda^2 - 20K^4\lambda + 11K^8 \\ &= 9\left(\lambda - K^4\right)\left(\lambda - \frac{11}{9}K^4\right), \quad \lambda \geq 0, \quad e \end{aligned}$$

$$g\left(\frac{11}{9}K^4\right) = \frac{968}{243}K^{12} > \frac{8}{3}K^{12}$$

$$g(K^4) = 4K^{12} > \frac{8}{3}K^{12}$$

$$g(0) = 0$$

temos

Logo, $\exists! \quad \bar{\lambda} \in (0, K^4)$ tal que $g(\bar{\lambda}) = \frac{8}{3}K^{12}$.

Portanto, as raízes de x_+'' em $(-K, K)$ são exatamente $\pm \bar{y}$,
onde $\bar{y} = \sqrt[4]{\lambda}$

Como $x_+''\left(\sqrt[4]{\frac{1}{3}} K\right) = 0$

segue que $\boxed{\bar{y} = \sqrt[4]{\frac{1}{3}} K}$

Assim:

$$\begin{aligned} x_+''\left(\pm \sqrt[4]{\frac{1}{3}} K\right) &= 0 \\ x_+''(y) &> 0 \quad \text{se} \quad -\sqrt[4]{\frac{1}{3}} K < y < \sqrt[4]{\frac{1}{3}} K \\ x_+''(y) &< 0 \quad \text{se} \quad -K < y < -\sqrt[4]{\frac{1}{3}} K \quad \text{ou} \quad \sqrt[4]{\frac{1}{3}} K < y < K \end{aligned}$$

C A P Í T U L O I I I

A derivada radial relativa a um
produto interno

III-1 INTRODUÇÃO

No capítulo anterior, a partir do produto interno usual do $\mathbb{R}^n$, definimos canonicamente uma aplicação do espaço dos germes de funções C^1 na origem, no espaço dos germes de funções C^0 na origem, associando a cada $f: (\mathbb{R}^n; 0) \xrightarrow{C^1} (\mathbb{R}; 0)$ sua derivada radial $f': (\mathbb{R}^n; 0) \xrightarrow{C^0} (\mathbb{R}; 0)$, e obtivemos algumas propriedades de tal aplicação.

Neste capítulo, faremos um estudo análogo tomando em $\mathbb{R}^n$ um produto interno arbitrário.

III-2 A DERIVADA "RADIAL" f'_A

No que segue, $A \in M_n(\mathbb{R})$ será uma matriz simétrica, definida positiva.

Def.III-2-1: $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $0 \in U$, $f: U \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$, $f(0)=0$.

Chamaremos de derivada radial de f com respeito a A e denotaremos por f'_A a função

$$\begin{aligned} f'_A: U &\xrightarrow{C^0} \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'_A(x) = \langle \text{grad} f(x) | Ax \rangle \end{aligned}$$

Def.III-2-2: $f: (\mathbb{R}^n; 0) \xrightarrow{C^1} (\mathbb{R}; 0)$

Chamaremos de derivada radial de f com respeito a A e denotaremos por f'_A ao germe de funções C^0 na origem

$$f'_A: (\mathbb{R}^n; 0) \xrightarrow{C^0} (\mathbb{R}; 0)$$

cujos representantes são as derivadas radiais com respeito a A dos representantes de f.

Def.III-2-3: $f: \mathbb{R}^n \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$, $f(0)=0$, $\text{grad}f(0) = 0$
 $V_A^1(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f'_A(x) = 0\}$

III-3 EXEMPLOS

Na maioria dos exemplos que apresentaremos neste parágrafo, precisaremos de uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ satisfazendo certas propriedades, o que nos será fornecido pelo

Lema III-3-1: Seja $(V, \langle \mid \rangle)$ um espaço vetorial real de dimensão finita, com produto interno.

Se $\psi: V \longrightarrow V$ é uma aplicação linear simétrica, definida positiva, então todos os autovalores de ψ são reais, positivos, e existe uma base ortonormal $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V formada por autovetores de ψ .

⌘ (a) Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ um autovalor de ψ e $v \in V$ um autovetor associado a λ .

Como $v \neq 0$ e ψ é definida positiva, temos

$$0 < \langle \psi v \mid v \rangle = \lambda \langle v \mid v \rangle$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda > 0$

Isto prova a primeira afirmação da tese.

(b) (Indução sobre $\dim V$)

Se $\dim V = 1$ nada há a demonstrar.

Suponhamos a tese válida para espaços vetoriais com dimensão $n-1$ ($n \geq 2$).

Se $\dim V = n$, tomemos um subespaço vetorial V_1 de V , de dimensão $n-1$, e consideremos em V_1 o produto interno $\langle | \rangle = \langle | \rangle|_{V_1 \times V_1}$

Seja $\tilde{\psi} = \psi|_{V_1}$

$\tilde{\psi}$ é uma aplicação linear simétrica, definida positiva, e $\dim V_1 = n-1$. Pela hipótese de indução, existe uma base ortonormal (com respeito a $\langle | \rangle$), $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ de V_1 formada por autovetores de $\tilde{\psi}$ associados a autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$.

Da definição de $\langle | \rangle$ e de $\tilde{\psi}$ segue imediatamente que $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ é um subconjunto ortonormal de V formado por autovetores de ψ associados aos autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$.

Completemos $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ a uma base ortonormal $\{v_1, \dots, v_{n-1}, v_n\}$ de V .

Para $1 \leq j \leq n-1$ temos

$$\langle \psi v_n | v_j \rangle = \langle v_n | \psi v_j \rangle = \lambda_j \langle v_n | v_j \rangle = 0$$

Logo, $\psi v_n = \lambda_n v_n$ para algum $\lambda_n \in \mathbb{R}$

Isto completa a prova.

⋈

Corolário: Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ simétrica, definida positiva.

Existe uma base ortonormal $\{v_1, \dots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores de A , associados a autovalores positivos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Fixemos $A \in M_n(\mathbb{R})$ simétrica, definida positiva.

Nos exemplos a seguir, $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ serão tomados como no corolário anterior.

Só apresentaremos exemplos para dimensão $n \geq 2$, pois no caso $n=1$ os exemplos apresentados no Cap.II se adaptam sem dificuldades ao contexto tratado aqui.

Exemplo III-3-1:

$$P(x_1, \dots, x_n) = P(x) = x_1^2 - x_2^2 \quad \text{tem sela na origem}$$

$$P'_A(x) = 2 \langle (x_1, -x_2, 0, \dots, 0) | Ax \rangle$$

Portanto

$$P'_A(x_1 e_1) = 2x_1^2 \langle e_1 | Ae_1 \rangle > 0 \quad \forall \quad x_1 \neq 0 \quad e$$

$$P'_A(x_2 e_2) = -2x_2^2 \langle e_2 | Ae_2 \rangle < 0 \quad \forall \quad x_2 \neq 0$$

Logo,

$$P'_A \quad \text{tem sela na origem}$$

Exemplo III-3-2:

$$P(x) = \langle x | v_1 \rangle^2 \quad \text{tem m\u00ednimo brando na origem}$$

$$\begin{aligned} P'_A(x) &= \langle 2 \langle x | v_1 \rangle v_1 | Ax \rangle \\ &= 2 \langle x | v_1 \rangle \langle v_1 | Ax \rangle \\ &= 2\lambda_1 \langle x | v_1 \rangle^2 \end{aligned}$$

Logo ,

$$P'_A \quad \text{tem m\u00ednimo brando na origem}$$

Exemplo III-3-3: Seja $m \in \mathbb{N}^*$, $m > 2 \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

$$P(x) = (\langle x | v_1 \rangle - \langle x | v_2 \rangle^m)^2 \quad \text{tem m\u00ednimo brando na origem}$$

$$\begin{aligned} P'_A(x) &= \langle 2(\langle x | v_1 \rangle - \langle x | v_2 \rangle^m) (v_1 - m \langle x | v_2 \rangle^{m-1} v_2) | Ax \rangle \\ &= 2(\langle x | v_1 \rangle - \langle x | v_2 \rangle^m) (\lambda_1 \langle x | v_1 \rangle - m \lambda_2 \langle x | v_2 \rangle^m) \end{aligned}$$

Portanto $P'_A(tv_1) = 2\lambda_1 t^2 > 0$ se $t \neq 0$, e

$$P'_A(2t^m v_1 + tv_2) = 2t^{2m} (2\lambda_1 - m\lambda_2) < 0 \quad \text{se } t \neq 0 \quad (\text{pois } m > 2 \frac{\lambda_1}{\lambda_2}) .$$

Logo ,

$$P'_A \quad \text{tem sela na origem}$$

Exemplo III-3-4:

$$P(x) = \sum_{j=1}^n \langle x | v_j \rangle^2 \text{ tem m\u00ednimo forte na origem}$$

$$\begin{aligned} P'_A(x) &= \langle 2 \sum_{j=1}^n \langle x | v_j \rangle v_j | Ax \rangle \\ &= 2 \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle x | v_j \rangle^2 \end{aligned}$$

Logo,

$$P'_A \text{ tem m\u00ednimo forte na origem}$$

Exemplo III-3-5:

$$\text{Sejam } m \in \mathbb{N}^* \text{ , } m \neq \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \text{ e } a = \frac{(\lambda_1 - m\lambda_2)^2}{4m\lambda_1\lambda_2}$$

$$Q(x) = (\langle x | v_1 \rangle - \langle x | v_2 \rangle^m)^2 + a \langle x | v_2 \rangle^{2m}$$

$$R(x) = \sum_{j=3}^n \langle x | v_j \rangle^2 \quad (\text{caso } n=2 \text{ tomamos } R=0)$$

$$P(x) = Q(x) + R(x) \text{ tem m\u00ednimo forte na origem (pois } a > 0)$$

$$P'_A(x) = Q'_A(x) + R'_A(x)$$

$$R'_A(x) = 2 \sum_{j=3}^n \lambda_j \langle x | v_j \rangle^2 \geq 0 \text{ e s\u00f3 se anula no subespa\u00e7o}$$

gerado por $\{v_1, v_2\}$.

$$\begin{aligned}
 Q'_A(x) &= 2(\langle x|v_1 \rangle - \langle x|v_2 \rangle^m) (\lambda_1 \langle x|v_1 \rangle - m\lambda_2 \langle x|v_2 \rangle^m) + \\
 &\quad + 2am\lambda_2 \langle x|v_2 \rangle^{2m} \\
 &= 2 \left[\left(\sqrt{\lambda_1} \langle x|v_1 \rangle - \frac{(\lambda_1 + m\lambda_2)}{2\sqrt{\lambda_1}} \langle x|v_2 \rangle^m \right)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \left(m(a+1)\lambda_2 - \frac{(\lambda_1 + m\lambda_2)^2}{4\lambda_1} \right) \langle x|v_2 \rangle^{2m} \right]
 \end{aligned}$$

Como $a = \frac{(\lambda_1 - m\lambda_2)^2}{4m\lambda_1\lambda_2}$ temos

$$Q'_A(x) = 2 \left(\sqrt{\lambda_1} \langle x|v_1 \rangle - \frac{(\lambda_1 + m\lambda_2)}{2\sqrt{\lambda_1}} \langle x|v_2 \rangle^m \right)^2$$

Portanto Q'_A tem mínimo brando na origem e ainda tem mínimo brando quando restrito ao subespaço vetorial gerado por $\{v_1, v_2\}$.

Logo,

$P'_A = Q'_A + R'_A \quad \text{tem mínimo brando na origem}$

Exemplo III-3-6:

Sejam $m \in \mathbb{N}^*$, $m \neq \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ e $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a < \frac{(\lambda_1 - m\lambda_2)^2}{4m\lambda_1\lambda_2}$, e

Q e R como no exemplo III-3-5.

$P(x) = Q(x) + R(x) \quad \text{tem mínimo forte na origem}$

Já vimos no exemplo III-3-5 que $R'_A(x) \geq 0$ e se anula exatamente no subespaço vetorial gerado por $\{v_1, v_2\}$ e que

$$Q'_A(x) = 2 \left[\left(\sqrt{\lambda_1} \langle x | v_1 \rangle - \frac{(\lambda_1 + m\lambda_2)}{2\sqrt{\lambda_1}} \langle x | v_2 \rangle^m \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(m(a+1)\lambda_2 - \frac{(\lambda_1 + m\lambda_2)^2}{4\lambda_1} \right) \langle x | v_2 \rangle^{2m} \right]$$

Como $a < \frac{(\lambda_1 - m\lambda_2)^2}{4m\lambda_1\lambda_2}$ temos $m(a+1)\lambda_2 - \frac{(\lambda_1 + m\lambda_2)^2}{4\lambda_1} < 0$

Assim, Q'_A terá sela na origem, e terá sela também quando restrito ao subespaço vetorial gerado por $\{v_1, v_2\}$.

Logo,

$P'_A = Q'_A + R'_A \text{ tem sela na origem}$

III-4 PROPRIEDADES DE f'_A

$A \in M_n(\mathbb{R})$ simétrica, definida positiva.

Lema III-4-1: Seja $f: U \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$ onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma vizinhança aberta de origem e $f(0)=0$.

Se para algum $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon \subset U$ existe $x_\epsilon \in B'_\epsilon$ satisfazendo $f(x_\epsilon) > 0$ (respect. $f(x_\epsilon) < 0$, $f(x_\epsilon) = 0$) então existe $\tilde{x}_\epsilon \in B'_\epsilon$ tal que $f'_A(\tilde{x}_\epsilon) > 0$ (respect. $f'_A(\tilde{x}_\epsilon) < 0$, $f'_A(\tilde{x}_\epsilon) = 0$).

∑ Consideremos a curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ cujos extremos são a origem e x_ϵ , e que intercepta ortogonalmente as curvas de nível da função

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \langle x | Ax \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Seja } x: (-\infty, 0] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto x(t) = e^{tA} x_\epsilon \end{aligned}$$

x é uma parametrização C^1 de $\Gamma - \{0\}$.

$\Gamma \subset B_\epsilon$, portanto fica bem definida a função

$$\begin{aligned} \tilde{f}: (-\infty, 0] &\xrightarrow{C^1} \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f \circ x(t) \end{aligned}$$

Como $\tilde{f}(0)=f(x_\epsilon)$ e $\lim_{t \rightarrow -\infty} \tilde{f}(t)=0$, existe $\bar{t} \in (-\infty, 0)$ tal que $\frac{d\tilde{f}}{dt}(\bar{t})$ tem mesmo sinal que $f(x_\epsilon)$.

Por outro lado,

$$f'_A(x(\bar{t})) = \langle \text{grad} f(x(\bar{t})) | Ax(\bar{t}) \rangle = \frac{df(\bar{t})}{d\bar{t}}$$

Logo, para $\tilde{x}_\varepsilon = x(\bar{t})$ segue a tese

∑

A seguir enunciaremos, para f'_A , proposições análogas -
àquelas enunciadas no capítulo II para f' . Elas decorrem, to-
das, do Lema III-4-1 (que é uma generalização do Lema II-2-1,
e desempenha, aqui, o mesmo papel desempenhado no capítulo II
por este).

No que se segue, consideraremos $f: (\mathbb{R}^n; 0) \xrightarrow{C^1} (\mathbb{R}; 0)$

Prop. III-4-1: Se f'_A tem extremo forte na origem, então f tam-
bém tem extremo forte na origem, e este é do
mesmo tipo que o de f'_A .

Prop. III-4-2: Se f tem mínimo forte (respect. máximo forte)
na origem, então a origem é ponto de mínimo -
forte, mínimo brando ou sela (respect. máximo
forte, máximo brando ou sela) para f'_A , e efeti-
vamente cada uma dessas possibilidades se con-
cretiza.

Prop. III-4-3: Se f tem mínimo brando (respect. máximo brando)
na origem, então a origem é ponto de mínimo -
brando ou sela (respect. máximo brando ou sela)
para f'_A , e cada uma dessas possibilidades de -
fato ocorre.

Prop.III-4-4: Se f tem sela na origem, então f'_A tem sela na origem.

III-5 CLASSIFICAÇÃO DOS PARES $(f; f'_A)$

Os resultados do parágrafo anterior nos permitem classificar completamente os pares (f, f'_A) relativamente aos pares de pontos críticos associados, para $A \in M_n(\mathbb{R})$ simétrica, definida positiva, e

$$f: (\mathbb{R}^n; 0) \xrightarrow{C^1} (\mathbb{R}; 0)$$

com ponto crítico na origem.

Apresentamos tal classificação na tabela seguinte.

Relembramos que, nos exemplos, $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores de A associados a autovalores (positivos) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Ponto crítico na origem		Exemplo ($n \geq 2$) $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
de f	de f'_A	
Sela	Sela	$x_1^2 - x_2^2$
Mínimo brando	Mínimo brando	$\langle x v_1 \rangle^2$
	Sela	$(\langle x v_1 \rangle - \langle x v_2 \rangle^m)^2 \quad m \in \mathbb{N} \quad , \quad m > 2 \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$
Mínimo forte	Mínimo forte	$\sum_{j=1}^n \langle x v_j \rangle^2$
	Mínimo brando	$(\langle x v_1 \rangle - \langle x v_2 \rangle^m)^2 + a \langle x v_2 \rangle^{2m} + \sum_{j=3}^n \langle x v_j \rangle^2$ $m \in \mathbb{N}^* \quad , \quad m \neq \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad , \quad a = \frac{(\lambda_1 - m\lambda_2)^2}{4m\lambda_1\lambda_2}$
	Sela	$(\langle x v_1 \rangle - \langle x v_2 \rangle^m)^2 + a \langle x v_2 \rangle^{2m} + \sum_{j=3}^n \langle x v_j \rangle^2$ $m \in \mathbb{N}^* \quad , \quad m \neq \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad , \quad a < \frac{(\lambda_1 - m\lambda_2)^2}{4m\lambda_1\lambda_2}$
e não ocorrem outras possibilidades		

CAPÍTULO IV

Uma aplicação à Estabilidade

IV-1 INTRODUÇÃO

Há na literatura vários resultados clássicos relativos ao estudo da estabilidade de Liapunov de um ponto de equilíbrio de um sistema mecânico conservativo. Em parte desses resultados utilizam-se funções auxiliares que evidenciam o comportamento particular de todos ou de alguns dos movimentos - com condições iniciais próximas do ponto de equilíbrio a ser estudado. Exemplos clássicos disto são o Teorema de Direchlet-Lagrange (ver [4]) e o Teorema de Chetaev (ver §IV-2).

Na demonstração do Teorema de Direchlet-Lagrange utiliza-se a energia mecânica H como função de Liapunov para estabilidade. Na demonstração do Teorema de Chetaev utiliza-se a função auxiliar $V = -\langle q|p \rangle H$ como função de Chetaev.

Estas funções auxiliares são bastante sugestivas: H - por ser uma integral primeira, V porque informa que algumas soluções de certos sistemas mecânicos são "arrastadas" para longe da origem.

Já para o Teorema de Liapunov para Instabilidade (ver §IV-2) as demonstrações que têm sido apresentadas não utilizam função de Chetaev.

Nossa pretensão neste capítulo é apresentar uma demonstração de um caso particular desse teorema para sistemas mecânicos com dois graus de liberdade, usando duas funções auxiliares: uma que nos permitirá garantir a invariância de uma certa região no espaço de fase e outra que fará o papel

de função "expelente". Tal demonstração assemelhar-se-á muito à do Teorema de Chetaev, já que as duas funções mencionadas desempenharão papel análogo ao que a função $V = -\langle g|p \rangle H$ desempenha na demonstração desse teorema.

IV-2 TEOREMA DE LIAPUNOV PARA INSTABILIDADE

No que segue, $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ denotará uma vizinhança aberta da origem. Como é usual em mecânica, usaremos também as notações:

Energia potencial

$$\begin{aligned} \pi: \Lambda &\xrightarrow{C^2} \mathbb{R} \\ q &\longmapsto \pi(q) \end{aligned}, \quad j^1\pi(0) = 0$$

Energia cinética

$$\begin{aligned} T: \Lambda \times \mathbb{R}^n &\xrightarrow{C^2} \mathbb{R} \\ (q,p) &\longmapsto T(q,p) = {}^t_p D(q)p \end{aligned}$$

onde $D \in C^2(\Lambda, M_n(\mathbb{R}))$ e $D(q)$ é simétrica, definida positiva, $\forall q \in \Lambda$.

Hamiltoniano

$$\begin{aligned} H: \Lambda \times \mathbb{R}^n &\xrightarrow{C^2} \mathbb{R} \\ (q,p) &\longmapsto H(q,p) = T(q,p) + \pi(q) \end{aligned}$$

Sistema mecânico conservativo de energia potencial π e energia cinética T

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

onde $\frac{\partial H}{\partial q}$ e $\frac{\partial H}{\partial p}$ denotam o gradiente de H com respeito a q e a p respectivamente.

Teorema de Liapunov para Instabilidade:

Se π não tem mínimo em $q=0$ e este fato é 2-decidível, então a origem do sistema mecânico (1) é instável. (ver [4])

Teorema de Chetaev:

Se existe $\epsilon > 0$ (com $\bar{B}_\epsilon \subset \Lambda$) tal que para

$\theta = \{q \in B_\epsilon \mid \pi(q) < 0\}$ temos

(i) $0 \in \partial\theta$

(ii) $\langle \frac{\partial \pi}{\partial q} | q \rangle < 0 \quad \forall q \in \theta$

então a origem do sistema mecânico (1) é instável.

Observação: Este teorema é um caso particular do teorema que será demonstrado a seguir, com a função natural $V = -\langle q | p \rangle H$ desempenhando o papel de W.

Apesar do próximo resultado ser enunciado para um sistema de equações diferenciais particular -um sistema mecânico conservativo- é relevante notar que é um resultado geral, com a mesma demonstração, bastando para isto substituir H no enunciado por uma integral primeira.

Teor.IV-2-1: Seja $\Omega = \{(q,p) \in \Lambda \times \mathbb{R}^n \mid H(q,p) < 0\}$

Se existirem um aberto $\omega \subset \Omega$ não vazio, aderente à origem e uma função

$$W: \Lambda \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

tais que, para algum $\varepsilon > 0$ (com $\bar{B}_\varepsilon \subset \Lambda \times \mathbb{R}^n$)

$$(i) \quad W > 0 \quad \text{em} \quad \omega_\varepsilon = \omega \cap \bar{B}_\varepsilon$$

$$(ii) \quad \dot{W} > 0 \quad \text{em} \quad \Omega_\varepsilon = \Omega \cap \bar{B}_\varepsilon$$

então a origem do sistema mecânico (1) é instável.

⌘ (a) Para cada $\delta > 0$, o fechado

$$\Omega^\delta = \{(q,p) \in \Omega \mid H(q,p) \leq -\delta\}$$

é invariante, pois H é constante ao longo das trajetórias do sistema mecânico (1).

$$(b) \quad W > 0 \quad \text{em} \quad \omega_\varepsilon.$$

$$(c) \quad \text{Se } \Omega_\varepsilon^\delta = \Omega^\delta \cap \bar{B}_\varepsilon \text{ for não vazio, temos } \dot{W} > 0 \text{ em } \Omega_\varepsilon^\delta.$$

Assim, se um movimento tem condição inicial $(q_0, p_0) \in \omega_\varepsilon$, tomando-se $\delta = \frac{W(q_0, p_0)}{2} > 0$ segue de (a), (b) e (c) que tal movimento tem que abandonar o compacto $\Omega_\varepsilon^\delta$ por um ponto - de sua fronteira que esteja em S_ε ⌘

Enunciaremos agora uma versão mais fraca do Teorema de Liapunov para Instabilidade, versão esta que pretendemos demonstrar usando o resultado anterior.

Teor. IV-2-2: Seja $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ vizinhança aberta de $0 \in \mathbb{R}^2$.

Se $\pi: \Lambda \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}$ tem sela 2-decidível em 0 então a origem do sistema mecânico (1) é instável.

Por recair nas hipóteses do teorema IV-2-1, desenvolveremos dois lemas.

Lema IV-2-2a: Seja $f: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}$, $f(0)=0$.

Se (i) f tem sela 2-decidível na origem.

(ii) $j^2 f$ se anula exatamente nas retas
 $y = \pm ax \quad (a > 0)$

(iii) $j^2 f(0, y) < 0$ se $y \neq 0$,

então existem $A \in M_2(\mathbb{R})$ diagonal, tão perto da identidade quanto se queira, e $\epsilon_0 > 0$ tais que

$$\left. \begin{array}{l} (x, y) \in B'_{\epsilon_0} \\ f(x, y) \leq 0 \end{array} \right\} \implies f'_A(x, y) < 0$$

⌘ Por (ii) e (iii) temos que $P = j^2 f$ é dado por

$$P(x, y) = (ax - y)(ax + y) = a^2 x^2 - y^2$$

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha > 0$$

$$\begin{aligned} P'_A(x, y) &= \langle \text{grad } P(x, y) | (\alpha^2 x, y) \rangle \\ &= 2(a^2 \alpha^2 x^2 - y^2) \end{aligned}$$

$$\text{Por outro lado, } P'_A = j^2 f'_A$$

Assim, $f=P+R$, $f'=P'_A+\tilde{R}$, $j^2R=j^2\tilde{R}=0$

Seja $\alpha \in (0,1)$ arbitrário. Fixemos $b \in (a\alpha, a)$.

$$(a) \quad \exists \quad \varepsilon_1 > 0 \text{ tal que } \left. \begin{array}{l} (x,y) \in B'_{\varepsilon_1} \\ b^2x^2 \geq y^2 \end{array} \right\} \Longrightarrow f(x,y) > 0$$

De fato:

Se $(x,y) \neq 0 \in \mathbb{R}^2$ e $b^2x^2 \geq y^2$ temos

$$\frac{b^2x^2 - y^2}{|(x,y)|^2} \geq 0 \quad \text{e} \quad |(x,y)|^2 \leq (b^2+1)x^2 ,$$

e como $0 < b < a$ segue que

$$\begin{aligned} \frac{f(x,y)}{|(x,y)|^2} &= \frac{b^2x^2 - y^2}{|(x,y)|^2} + \frac{(a^2 - b^2)x^2}{|(x,y)|^2} + \frac{R(x,y)}{|(x,y)|^2} \geq \\ &\geq \frac{a^2 - b^2}{b^2 + 1} + \frac{R(x,y)}{|(x,y)|^2} \end{aligned}$$

Logo, tomando-se $\varepsilon_1 > 0$ tal que

$$\frac{R(x,y)}{|(x,y)|^2} < \frac{a^2 - b^2}{2(b^2 + 1)} , \quad \forall (x,y) \in B'_{\varepsilon_1} , \text{ segue (a).}$$

Com um raciocínio análogo ao anterior concluímos que

$$(b) \quad \exists \quad \varepsilon_2 > 0 \text{ tal que } \left. \begin{array}{l} (x,y) \in B'_{\varepsilon_2} \\ b^2x^2 \leq y^2 \end{array} \right\} \Longrightarrow f'_A(x,y) < 0$$

Logo, tomando-se $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$

temos, para $(x,y) \in B'_{\varepsilon_0}$:

$$f(x,y) \leq 0 \xrightarrow{(a)} b^2x^2 - y^2 \xrightarrow{(b)} f'_A(x,y) < 0$$

∇

Lema IV-2-2b: Seja $\pi: \Lambda \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}$ ($\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ vizinhança aberta de 0) uma energia potencial com sela 2-decidível na origem.

Suponhamos que $j^2\pi$ se anula exatamente nas retas $q_2 = \pm a q_1$ (para algum $a > 0$) e que $j^2\pi(0, q_2) < 0$ se $q_2 \neq 0$.

Seja $\Omega = \{(q, p) \in \Lambda \times \mathbb{R}^2 \mid H(q, p) < 0\}$

Então existem $A \in M_2(\mathbb{R})$ definida positiva, um aberto não vazio $\omega \subset \Omega$ aderente à origem e $\varepsilon > 0$ (com $\bar{B}_\varepsilon \subset \Lambda \times \mathbb{R}^2$) tais que a função

$$W: \Lambda \times \mathbb{R}^2 \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$$

$$(q, p) \longmapsto W(q, p) = -\langle q | A p \rangle H$$

$$\text{satisfaz } \begin{cases} \text{(i)} & W > 0 \quad \text{em } \omega_\varepsilon = \omega \cap \bar{B}_\varepsilon \\ \text{(ii)} & \dot{W} > 0 \quad \text{em } \Omega_\varepsilon = \Omega \cap \bar{B}_\varepsilon \end{cases}$$

∑ Pelo lema IV-2-2a, existem $A = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & \bar{0} \\ 0 & \bar{\beta} \end{bmatrix}$ definida positiva tão perto da identidade quanto se queira e $\bar{\epsilon}_0 > 0$ (podemos supor que $B_{\bar{\epsilon}_0} \subset \Lambda$) tais que

$$\left. \begin{array}{l} q \in B_{\bar{\epsilon}_0} \\ \pi(q) \leq 0 \end{array} \right\} \implies \pi'_A(q) < 0$$

Seja $\omega = \{(q,p) \in \Lambda \times \mathbb{R}^n \mid W(q,p) > 0\} \cap \Omega$.

(a) ω é aberto, não vazio, aderente à origem.

De fato, arbitrariamente perto da origem de $\mathbb{R}^2$ existe $\bar{q} \neq 0$ tal que $\pi(\bar{q}) < 0$. Para $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $|p|$ é suficientemente pequena, $H(\bar{q}, p) < 0$. Em particular, se $\lambda > 0$ é suficientemente pequeno e $\bar{p} = \lambda q$ temos $(\bar{q}, \bar{p}) \in \omega$.

(b) Para uma escolha conveniente de A , existe $\epsilon > 0$ tal que W satisfaz (i) e (ii).

$$\psi: \Lambda \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$\psi(q, p, \alpha, \beta) = 2 \langle p | B(q) \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & \bar{0} \\ 0 & \bar{\beta} \end{bmatrix} p \rangle - \langle q | \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & \bar{0} \\ 0 & \bar{\beta} \end{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial q} \rangle$$

ψ é contínua e para cada $\bar{p} \in S^1$, $\psi(0, \bar{p}, 1, 1) > 0$

Da compacidade de S^1 e da continuidade de ψ segue que existe $\delta > 0$ (com $B_\delta \subset \Lambda$) tal que se

$$|q| < \delta, \quad |\alpha - 1| < \delta, \quad |\beta - 1| < \delta \quad \text{e} \quad p \in S^1$$

então $\psi(q, p, \alpha, \beta) > 0$

Fixemos $A = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha} & 0 \\ 0 & \tilde{\beta} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ com a restrição suplementar $|\tilde{\alpha}-1| < \delta$ e $|\tilde{\beta}-1| < \delta$ e consideremos o $\tilde{\varepsilon}_0$ correspondente.

Temos então

$$\psi(q, p, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) > 0 \quad \text{em} \quad B_\delta \times S^1 \subset \Lambda \times \mathbb{R}^2$$

$$\text{Como} \quad \psi(q, tp, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = t^2 \psi(q, p, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \quad \forall \quad t \in \mathbb{R}$$

segue que

$$\psi(q, p, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta},) > 0 \quad \forall \quad q \in B_\delta, \quad \forall \quad p \neq 0$$

$$\text{Sejam } \varepsilon < \min\{\delta, \tilde{\varepsilon}_0\} \quad (\varepsilon > 0),$$

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \cap \bar{B}_\varepsilon \quad \text{e} \quad \omega_\varepsilon = \omega \cap \bar{B}_\varepsilon.$$

$$(i) \quad \dot{W}(q, p) > 0 \quad \forall \quad (q, p) \in \omega_\varepsilon,$$

pois $H < 0$ em Ω , $\langle q | A p \rangle > 0$ em ω e $\omega_\varepsilon \subset \Omega \cap \omega$

$$(ii) \quad \dot{W}(q, p) > 0 \quad \forall \quad (q, p) \in \Omega_\varepsilon \quad \text{com} \quad p \neq 0$$

De fato

$$\begin{aligned} \dot{W}(q, p) &= -H(\langle \dot{q} | A p \rangle + \langle q | A \dot{p} \rangle) \\ &= -H\left(\left\langle \frac{\partial H}{\partial p} \right| A p \right\rangle - \left\langle q \left| A \frac{\partial H}{\partial q} \right\rangle\right) \\ &= -H\left(2\langle p | B(q) A p \rangle - \left\langle q \left| A \frac{\partial T}{\partial q} \right\rangle - \left\langle q \left| A \frac{\partial \pi}{\partial q} \right\rangle\right)\right) \\ &= -H(\psi(q, p, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) - \pi'_A(q)) \end{aligned}$$

Agora, como $\forall (q, p) \in \Omega_\varepsilon$ temos $\pi(q) \leq H(q, p) < 0$ segue que $\pi'_A(q) < 0$, $\forall (q, p) \in \Omega_\varepsilon$. Além disso, $\psi(q, p, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \geq 0 \quad \forall (q, p) \in \Omega_\varepsilon$.

Logo, $\dot{W} > 0$ em Ω_ε

⌘

Prova do Teorema IV-2-2:

⌈ Se $\pi: \Lambda \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}$ tem sela 2-decidível na origem ($\Lambda \subset \mathbb{R}^2$), fazendo-se uma escolha conveniente do sistema de coordenadas de $\mathbb{R}^2$, podemos supor que $j^2\pi$ se anula exatamente sobre as retas $q_2 = \pm a q_1$ e que $j^2\pi(0, q_2) < 0$ se $q_2 \neq 0$ ($a > 0$).

A instabilidade da origem decorre imediatamente do Teorema IV-2-1 usando-se o Lema IV-2-2b. ⌋

IV-3 COMENTARIOS

Não pudemos apresentar uma demonstração "tipo Chetaev" para o Teorema IV-2-2 no caso de n graus de liberdade para $n \geq 3$, seguindo a linha da apresentação feita quando $n=2$. Isso não foi decorrência de dificuldades técnicas menos elementares; encontramos, sim, uma barreira intransponível: o resultado do Lema IV-2-2a, que é o suporte da nossa demonstração, não se estende para dimensão $n \geq 3$.

O exemplo seguinte justificará a afirmação que acabamos de fazer:

Exemplo IV-3-1:

Seja $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$
 $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^4$.

f tem sela 2-decidível na origem.

Para $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \delta & \sigma \\ \gamma & \sigma & \eta \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ definida positiva

temos

$$f'_A = 2x(\alpha x + \beta y + \gamma z) - 2y(\beta x + \delta y + \sigma z) + 4z^3(\gamma x + \sigma y + \eta z)$$

Portanto

$$f(0, z^2, z) = 0 \quad e$$

$$\begin{aligned} f'_A(0, z^2, z) &= 2\delta z^4 - 2\sigma z^3 + 4\sigma z^5 + 4\eta z^4 \\ &= -2\sigma z^3 + 2(2\eta - \delta)z^4 + 4\sigma z^5 \end{aligned}$$

Para termos a implicação

$$\begin{aligned} "f(x, y, z) \leq 0 \implies f'_A(x, y, z) < 0" \\ 0 < |(x, y, z)| < \delta \end{aligned}$$

seria necessario

$$a) \sigma = 0 \quad e$$

$$b) 2\eta - \delta = 0$$

Mas a condição b) implicaria em não podermos escolher A suficientemente próxima da identidade.

BIBLIOGRAFIA:

- 1 - ANDREOTTI, Aldo & FRANKEL, Theodore. 1959. The lefschetz theorem on hyperplane sections. *Annals of Mathematics* , 69(3): 713-7.
- 2 - ATIYAH, M.F. & MACDONALD, I.G. 1969. Introduction to commutative algebra. London , Addison-Wesley. 128p.
- 3 - BARONE NETTO, Angelo. 1980. Extremos detectáveis por jatos. São Paulo, 21p. Tese (Livre-Docência) IME-USP.
- 4 - LALOY, M.; HABBETS, P. & ROUCHE, N. 1977. Stability theory by Liapunov's Direct Method. New York, Springer Verlag. 395p. (Applied Mathematical Sciences, 22).
- 5 - MILNOR, John. 1968. Singular points of complex hypersurfaces. Princeton, University Press. 122p. (*Annals of Mathematics Studies*, 61).
- 6 - WHITNEY, Hassler. 1957. Elementary structure of real algebraic varieties. *Annals of Mathematics*, 66(3): 545-54.