APROXIMAÇÃO UNIFORME POR

SPLINES POLINOMIAIS

SAULO RABELLO MACIEL DE BARROS

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E
ESTATÍSTICA DA UNIVERSIDA-
DE DE SÃO PAULO, PARA OBTEN
ÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
MATEMÁTICA APLICADA.

AREA DE CONCENTRAÇÃO: MATEMÁTICA APLICADA

ORIENTADOR: PROF. DR. JÖRG BLATTER

SÃO PAULO, MARÇO DE 1984

A meus pais
e à Karin

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. Jürg Blatter

pela orientação segura e dedicada, e pelo
incentivo revelado em inúmeras conversas
esclarecedoras e produtivas;

aos amigos e

a Luzia do Carmo Namiki pela excelente datilografia.

São Paulo, março de 84

Saulo

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, apresentamos um estudo sobre aproximação uniforme de funções contínuas por splines polinomiais com nós fixos, procurando reunir os principais resultados a respeito deste assunto, que encontram-se espalhados por diversos artigos de pesquisa. Diversos pesquisadores dedicaram sua atenção aos splines, ao longo dos últimos 25 anos, como podemos observar através das referências que se encontram no livro de Schumaker [23] (primeiro volume de uma série de três, cujos dois últimos encontram-se em elaboração). Dedicamos o Capítulo 0 à apresentação de definições e resultados básicos sobre splines e aproximação. Ao longo deste trabalho, usamos livremente a teoria geral sobre aproximação uniforme, procurando detalhar resultados específicos para splines. Em alguns casos, como no teorema 1.8, apresentamos demonstrações particulares para splines de resultados mais gerais.

O Capítulo 1 é dedicado ao estudo de unicidade e caracterização de aproximações ótimas de $f \in C[a,b]$ por splines polinomiais. Podemos identificar uma aproximação ótima através de um teorema obtido independentemente por Rice [20] e Schumaker [22]. Através de um teorema de Nürnberger e Singer [15] caracterizamos completamente, usando propriedades de alternância e de "achatamento" da função erro $f-g$, em que condições uma aproximação ótima g é ou não única. Outro teorema de Nürnberger [14], estabelece condições para uma aproximação ótima ser fortemente única. Apresentamos

tamos ainda resultados sobre unicidade e unicidade forte de aproximações ótimas em intervalos de nós. Resultados semelhantes aos de $f \in C[a,b]$ são obtidos para aproximação de $f \in C(D)$, D finito.

No Capítulo 2, discutimos a respeito da existência de seleções contínuas para a projeção métrica no caso de aproximação uniforme por splines. Nürnberger e Sommer [16] mostraram que existe seleção contínua se e somente se a ordem m dos splines é menor ou igual ao número k de nós. (No caso positivo, construíram uma seleção). Blatter e Schumaker [4] mostraram que, quando existe, uma tal seleção não é única. Mostraram ainda, no caso em que $k \leq m$, a existência de uma única aproximação, que possui propriedades maximais de alternância. Observaram também, que tal alternante maximal, apesar de não se constituir em uma seleção contínua para a projeção métrica, encontra-se sempre na imagem de f por alguma seleção contínua.

Ainda no capítulo 2, para o caso em que $f \in C(D)$ (D finito), descrevemos a construção de uma "aproximação estrita" para f por elementos de um subespaço de dimensão finita G e mostramos que a "aproximação estrita" é uma seleção contínua para a projeção métrica no caso de aproximação uniforme por G . Descloux [7] mostrou que a "aproximação estrita" é limite de aproximações de $f \in C(D)$ na norma p ($1 < p < \infty$) quando $p \rightarrow \infty$. Apresentamos uma caracterização da "aproximação estrita" para o caso em que G é o espaço de splines polinomiais e um teorema de Strauss [26] que mostra, para $f \in C[a,b]$ e $k \leq m$, que aproximações estritas de f em D_n (conjuntos finitos contidos em $[a,b]$) convergem para a aproximação ótima definida pela seleção contínua de Nürnberger e Sommer, des-

de que para $n \rightarrow \infty$, os conjuntos D_n se tornem densos em $[a,b]$. (Strauss mostra que ainda obtemos convergência, se a partir de um D inicial formos construindo os D_n , como no 1º algoritmo de Remez).

No Capítulo 3 nos preocupamos com a construção de aproximações ótimas para $f \in C[a,b]$ e $f \in C(D)$ por splines polinomiais. Para tal, apresentamos um algoritmo, que nos foi sugerido por J. Blatter, que vem desenvolvendo um estudo detalhado das propriedades práticas e teóricas do mesmo. O algoritmo foi implementado em linguagem ALGOL e processado em um computador Burroughs 6.900, produzindo exemplos, dos quais apresentamos alguns no final do Capítulo. Incluímos ainda uma listagem do programa utilizado.

ÍNDICE

	Pág.
CAPÍTULO 0	
Notação e definições básicas	1
CAPÍTULO 1	
Caracterização e unicidade de aproximações	7
CAPÍTULO 2	
Seleções contínuas para a projeção métrica	36
CAPÍTULO 3	
Cálculo de aproximações ótimas	78
APÊNDICE	
Discretização	128
BIBLIOGRAFIA	131

CAPÍTULO 0

NOTAÇÃO E DEFINIÇÕES BÁSICAS

Neste capítulo fixaremos algumas notações e enunciaremos definições e resultados básicos sobre splines e aproximação uniforme.

Definição 0.1 - Dada uma função $f \in C(X)$, X espaço métrico compacto e G um subespaço de dimensão finita de $C(X)$, definimos o conjunto das aproximações ótimas de f por G como:

$$P(f) = P_G(f) = \{g \in G : \|f - g\| = d(f)\} \quad \text{onde}$$

$$d(f) = d_G(f) = \inf_{g \in G} \|f - g\| \text{ e}$$

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

Temos que $P(f)$ é não vazio, fechado, limitado e convexo. (Ver p/ex. [5]).

Definição 0.2 - O conjunto dos pontos extremais comuns de $(f-A)$ onde $A \subset P(f)$, $A \neq \emptyset$ é definido como

$$E(f-A) = \{x \in X : |(f-g)(x)| = d(f) \text{ para todo } g \in A\}.$$

É sabido que $E(f-P(f)) \neq \emptyset$ (ver p/ex. [2]).

De agora em diante, por ser este o caso de nosso interesse, consideremos X compacto, $X \subset \mathbb{R}$.

O seguinte teorema caracteriza em que condições há unicidade de aproximações ótimas para todo $f \in C(X)$ por elementos de G , subespaço de dimensão finita.

Teorema 0.3 - Toda função $f \in C(X)$ possui uma única aproximação ótima por elementos de G , se e somente se, G é um espaço de Haar ou Chebyshev.

Definição 0.4 - Um subespaço N -dimensional G de $C(X)$ é de Haar ou Chebyshev se todo $g \in G (g \neq 0)$ possui no máximo $(N-1)$ zeros distintos.

Equivalentemente, podemos definir G de Chebyshev, se para qualquer base $\{g_1, g_2, \dots, g_N\}$ de G e quaisquer N pontos distintos $\{t_1, \dots, t_N\}$ ($t_i \in X$, $i=1, \dots, N$), temos que o determinante:

$$\det \begin{pmatrix} g_1(t_1) & \dots & g_N(t_1) \\ \vdots & & \vdots \\ g_1(t_N) & \dots & g_N(t_N) \end{pmatrix} = \det(g_i(t_j)) \text{ é diferente de zero.}$$

Definição 0.5 - Uma função $f \in C(X)$ é dita N -alternante se existem $(N+1)$ pontos de X : $t_1 < t_2 < \dots < t_{N+1}$ e $\delta \in \{-1, 1\}$ tal que:

$\delta(-1)^i f(t_i) = ||f||$, $i=1, \dots, N+1$. Os $N+1$ pontos são chamados de pontos extremais de alternância.

No caso em que G é de Chebyshev as aproximações ótimas são caracterizadas pelo:

Teorema 0.6 - Dado $f \in C(X)$ e G subespaço de Chebyshev de dimensões N de $C(X)$ temos que $g \in G$ é aproximação ótima de f por G se e somente se a função erro $(f-g)$ é N -alternante. (para os teoremas 0.3 e 0.6 e definições 0.4 e 0.5 ver p/ex.[5]).

O espaço de nosso interesse, splines polinomiais de ordem m com nós simples, não é um espaço de Chebyshev, não havendo portanto unicidade de aproximações ótimas para todo f . No entanto, ele possui algumas propriedades semelhantes às de Chebyshev. Vamos primeiramente definir precisamente o espaço de nosso interesse:

Definição 0.7 - Dados $[a,b]$ intervalo fechado, k inteiro positivo, $\Delta = \{a=x_0 < x_1 < \dots < x_{k+1}=b\}$ partição de $[a,b]$ e $m \geq 2$ definimos o espaço dos splines polinomiais de ordem m com nós simples $x_1, x_2, \dots, x_k$ como:

$$S_{m,k} = S_{m,k}(x_1, x_2, \dots, x_k) = \{ \text{SEC}^{m-2}[a,b] : S|_{[x_i, x_{i+1}]} \text{ é} \quad (1)$$

um polinômio de ordem m para todo $i=0, 1, \dots, k\}$

O espaço $S_{m,k}$ é um espaço Fraco-Chebyshev de dimensão $N=m+k$ (ver p/ex. [23]).

Definição 0.8 - Um subespaço N -dimensional G de $C(X)$ é Fraco-Chebyshev se todo $g \in G$ possui no máximo $(N-1)$ trocas de sinal, isto é, não existem $(N+1)$ pontos de X $t_1 < t_2 < \dots < t_{N+1}$ tal que: $g(t_i)g(t_{i+1}) < 0$ $i=1, \dots, N$ para algum $g \in G$.

Equivalentemente podemos definir G como Fraco-Chebyshev se para qualquer base $\{g_1, \dots, g_N\}$ de G e quaisquer $2N$ pontos de X $t_1 < t_2 < \dots < t_N$ e $p_1 < p_2 < \dots < p_N$ temos

$$\det(g_i(t_j)) \cdot \det(g_i(p_j)) \geq 0.$$

Em outra forma equivalente, definimos G como sendo Fraco-Chebyshev se dados $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N$ ($t_0 = \min\{t \in X\}$, $t_N = \max\{t \in X\}$, $t_i \in X$, $i=1, \dots, N-1$) existe $g \in G$, $g \neq 0$, tal que:

$$(-1)^{i+1} g(t) \geq 0, \quad t_{i-1} < t < t_i, \quad i=1, \dots, N \quad (t \in X).$$

(Ver p/ex. [10]).

Vamos agora fornecer duas bases para $S_{m,k}$ e apontar algumas propriedades de suas funções:

Definição 0.9 - Dada $\bar{\Delta} = \{y_1 \leq \dots \leq y_{m-1} < y_m = x_0 < y_{m+1} = x_1 < \dots < y_{m+k} = x_k < y_{m+k+1} = x_{k+1} < y_{m+k+2} \leq \dots \leq y_{2m+k}\}$ partição estendida de Δ , constrói-se, através da recursão:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_i^m(t) = \frac{(t-y_i)B_i^{m-1}(t) + (y_{i+m}-t)B_{i+1}^{m-1}(t)}{y_{i+m} - y_i} \\ B_i^1(t) = \begin{cases} 0 & \text{p/ } t \notin (y_i, y_{i+1}] \\ \frac{1}{y_{i+1}-y_i} & \text{p/ } t \in (y_i, y_{i+1}] \end{cases} \end{array} \right.$$

uma base $\{B_i^m, \dots, B_{m+k}^m\}$ para $S_{m,k}$.

As funções B_i^m são chamadas de B-splines, possuem o intervalo $[y_i, y_{i+m}]$ como suporte, são positivas para todo $t \in (y_i, y_{i+m})$ e, se $m \geq 2$, possuem um único ponto de máximo em $[a, b]$.

As funções $\bar{B}_i^m(t) = B_i^m(t) \cdot (y_{i+m} - y_i)$ são os B-splines normalizados e formam uma partição da unidade, ou seja, $\forall t \in [a, b]$ temos $\sum_{i=1}^{m+k} \bar{B}_i^m(t) = 1$. (Ver [23]).

Teorema 0.10 - Dada uma base de B-splines para $S_{m,k}$, $N=(m+k)$ pontos $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_N \leq b$ temos que $\det(B_i^m(t_j)) \geq 0$ e que $\det(B_i^m(t_j)) > 0$ se e somente se $t_i < x_i < t_{i+m}$ para $i=1, 2, \dots, k$. (Ver teorema 5.61 em [23]).

Observação 0.11 - Se $s \in S_{m,k}$ é tal que $s|_{[x_{\ell-1}, x_{\ell}]} \equiv 0$ e $s|_{[x_{r+1}, x_{r+2}]} \equiv 0$ com $1 \leq \ell \leq r \leq K-1$ e $(r-\ell) < m-1$, então $s|_{[x_{\ell-1}, x_{r+2}]} \equiv 0$. (ver lema 4.7 em [23]).

Observação 0.12 - As funções $\{1, t, t^2, \dots, t^{m-1}, (t-x_1)_+^{m-1}, \dots, (t-x_k)_+^{m-1}\}$ onde $(t-x_i)_+^{m-1} = \begin{cases} 0 & \text{se } t < x_i \\ (t-x_i)^{m-1} & \text{se } t \geq x_i \end{cases}$ também formam uma base para $S_{m,k}$, chamada base unilateral.

Teorema 0.13 - Seja $z_1 = x_i, z_2 = x_{i+1}, \dots, z_p = x_{i+p}$ ($i \geq 0, i+p \leq k+1$) e $t_1 < t_2 < \dots < t_p$.

O determinante $\det \begin{pmatrix} (t_1 - z_1)_+^{m-1} & \dots & (t_1 - z_p)_+^{m-1} \\ \vdots & & \vdots \\ (t_p - z_1)_+^{m-1} & \dots & (t_p - z_p)_+^{m-1} \end{pmatrix}$ é não nega-

tivo. É positivo se e somente se $z_i < t_i < z_{i+m}$, $i=1, \dots, p$ (a desigualdade da direita é ignorada se $i+m > p$).

(ver teorema 4.78 em [23]).

Teorema 0.14 - Se $s \in S_{m,k}$ é tal que s possui $m+k$ zeros (contados com multiplicidades de acordo com as definições 4.45 e 4.46 em [23]) então $s \equiv 0$. (Ver teorema 4.53 em [23]).

Vamos agora enunciar um teorema de Jones-Karlovitz (ver [10]) que relaciona espaços Fraco-Chebyshev com propriedades de alternância:

Teorema 0.15 - Seja G um subespaço N -dimensional de $C[a,b]$. Para todo $f \in C[a,b]$ existe pelo menos uma função $g \in P_G(f)$ tal que $(f-g)$ é N -alternante se e somente se G é Fraco-Chebyshev.

Deutsch, Nürnberger e Singer ([8]) mostraram que o teorema 0.15 ainda é válido para G subespaço N -dimensional de $C(X)$, X compacto, $X \in \mathbb{R}$.

CAPÍTULO 1

CARACTERIZAÇÃO E UNICIDADE DE APROXIMAÇÕES

Neste capítulo vamos caracterizar aproximações ótimas e estudar em que situações há unicidade de aproximações. Preliminarmente, vamos desenvolver dois lemas sobre splines, que serão utilizados nos teoremas referentes a unicidade.

Lema 1.1 - Seja $s \in S_{m,k}$ tal que $\delta(-1)^i s(t_i) \geq 0$, $i=1, \dots, p+1$ para $\delta \in \{-1, 1\}$ e $x_\ell \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{p+1} \leq x_{r+1}$ ($0 \leq \ell \leq r \leq k$). Se s só possui zeros isolados em $[x_\ell, x_{r+1}]$ então $z_{p+1}(s) \geq p$ (onde $z_{p+1}(s)$ é o número de zeros de s em $[t_1, t_{p+1}]$, sendo que os zeros contidos em (t_1, t_{p+1}) são contados com suas multiplicidades de acordo com [23] e t_1 e t_{p+1} são contados como zeros simples, se forem zeros de s).

Além disso, se $z_{p+1}(s) = p$ e $s(t_{p+1}) = 0$ então $\delta(-1)^p s(t) > 0$ para todo $t \in (t_p, t_{p+1})$.

Dem: A demonstraco  por induco sobre p . Vamos supor $\delta=1$ (para $\delta=-1$ a demonstraco  análoga). Para $p=1$ temos:

$-s(t_1) \geq 0$ e $s(t_2) \geq 0$. Logo, s se anula em algum ponto de $[t_1, t_2]$ e $z_2(s) \geq 1$.

Se $z_2(s)=1$ e $s(t_2)=0$ então s não se anula em nenhum ponto de $[t_1, t_2)$ e, por continuidade, $-s(t) > 0 \ \forall \ t \in (t_1, t_2)$.

Vamos agora supor o resultado válido para $p-1 \geq 1$ e demonstrá-lo para p .

Usando a hipótese de induco temos que $z_p(s) \geq p-1$ (em $[t_1, t_p]$).

Podemos ter:

a) $z_p(s) \geq p$ em $[t_1, t_p]$. Neste caso $z_{p+1}(s) \geq p$ em $[t_1, t_{p+1}]$ e se $s(t_{p+1})=0$ então $z_{p+1}(s) \geq p+1$.

b) $z_p(s) = p-1$ em $[t_1, t_p]$. Vamos analisar dois casos:

b₁) $(-1)^p s(t_p) > 0$. Como $(-1)^{p+1} s(t_{p+1}) \geq 0$ temos que s se anula em algum ponto de $(t_p, t_{p+1}]$. Portanto $z_{p+1}(s) \geq p$. Se $z_{p+1}(s) = p$ e $s(t_{p+1}) = 0$ então, por continuidade, $(-1)^p s(t) > 0 \ \forall \ t \in (t_p, t_{p+1})$.

b₂) $(-1)^p s(t_p) = 0$. Vamos separar novamente em dois casos:

b_{2.1}) s não se anula em nenhum ponto de $(t_p, t_{p+1}]$. Então temos $(-1)^{p+1} s(t) > 0 \ \forall \ t \in (t_p, t_{p+1}]$ e da hipótese de induco que $(-1)^{p-1} s(t) > 0 \ \forall \ t \in (t_{p-1}, t_p)$. Portanto t_p  pelo menos um zero duplo, que em $z_p(s)$ havia sido contado como simples. Logo, $z_{p+1}(s) \geq p$. (Notemos que $s(t_{p+1}) \neq 0$).

$b_{2.2}$) s se anula em algum ponto de $(t_p, t_{p+1}]$. Portanto $z_{p+1}(s) \geq p$. Se tivermos $z_{p+1}(s) = p$ e $s(t_{p+1}) = 0$ é por que t_p é um zero simples e como temos (da hipótese de indução) que $(-1)^{p-1} s(t) > 0 \quad \forall t \in (t_{p-1}, t_p)$ resulta que $(-1)^p s(t) > 0 \quad \forall t \in (t_p, t_{p+1})$.

Lema 1.2 - Se para $s \in S_{m,k}$ existem pontos $x_0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_p \leq x_{k+1}$ ($p \geq m+k+1$) tal que $\delta(-1)^i s(t_i) \geq 0$, $i=1, \dots, p$, $\delta \in \{-1, 1\}$ e se em cada intervalo:

$$[x_0, x_j), (x_{k+1-j}, x_{k+1}] \quad , \quad j=1, \dots, k \quad \text{e}$$

$$(x_1, x_{i+j+m-1}) \quad , \quad (j \geq 1) \quad , \quad (\text{se } k > m)$$

existem pelo menos $(j+1)$ pontos $(\bar{t}_1 < \bar{t}_2 < \dots < \bar{t}_{j+1})$ tal que $\bar{\delta}(-1)^i s(\bar{t}_i) \geq 0$, $i=1, \dots, j+1$; então $s=0$.

Dem: Se s só possui zeros isolados, segue do lema 1.1 que s possui $m+k$ zeros em $[x_0, x_{k+1}]$ e do teorema 0.14 que $s=0$.

Vamos então supor que s se anule identicamente nos seguintes intervalos: $[x_{\ell_1}, x_{r_1}], [x_{\ell_2}, x_{r_2}], \dots, [x_{\ell_q}, x_{r_q}]$ ($x_0 \leq x_{\ell_1} < x_{r_1} < \dots < x_{\ell_q} < x_{r_q} \leq x_{k+1}$) e que s não se anule identicamente em nenhum intervalo que não esteja contido em algum destes.

Cada intervalo $[x_{\ell_i}, x_{r_i}]$ é um zero de s de ordem pelo menos $(m-1+r_i-\ell_i)$ (ver [23]).

Se $x_{\ell_1} > x_0$ então s tem ℓ_1 zeros em $[x_0, x_{\ell_1})$ (pelo lema 1.1). Da mesma forma vemos que s tem pelo menos $(k+1-r_q)$ zeros em $(x_{r_q}, x_{k+1}]$, se $r_q < k+1$.

Em $(x_{r_i}, x_{\ell_{i+1}})$ há pelo menos $(\ell_{i+1} - r_i - m + 2)$ pontos $\bar{t}_j$ tal que $\bar{\delta}(-1)^j s(\bar{t}_j) \geq 0$, $j=1, \dots, \ell_{i+1} - r_i - m + 2$ e pelo lema 1.1 pelo menos $(\ell_{i+1} - r_i - m + 1)$ zeros de s . ($i=1, \dots, q-1$). (Notemos que, pela observação 0.11, $\ell_{i+1} - r_i \geq m$ pois s não é nula em $(x_{r_i}, x_{\ell_{i+1}})$).

Portanto, o número de zeros de s é pelo menos:

$$Z(s) = \ell_1 + (m-1+r_1-\ell_1) + (\ell_2-r_1-m+1) + \dots + (\ell_q-r_{q-1}-m+1) + (m-1+r_q-\ell_q) + k+1-r_q = m+k$$

Isto mostra que $s \equiv 0$ (teorema 0.14).

O teorema seguinte que caracteriza aproximações ótimas através de propriedades de alternância da função erro, é devido a Rice [20] e Schumaker [22] que o demonstraram por caminhos independentes.

Teorema 1.3 - Para $s \in S_{m,k}$ e $f \in C[a,b] - S_{m,k}$ temos que s é aproximação ótima de f por $S_{m,k}$ se e somente se existe um intervalo $[x_\ell, x_{r+1}]$ ($0 \leq \ell \leq r \leq k$) em que $f-s$ é $m+r-\ell$ alternante.

Dem: Seja $s \in S_{m,k}$ tal que $(f-s)$ alterna $m+r-\ell$ vezes em $[\bar{x}_\ell, x_{r+1}] \subset [\bar{x}_0, x_{k+1}]$. Suponhamos que exista $\tilde{s} \in S_{m,k}$ tal que $\|f-\tilde{s}\|_{[a,b]} < \|f-s\|_{[a,b]}$. Então, devido à alternância de $f-s$, $s-\tilde{s}$ se anula em pelo menos $m+r-\ell$ pontos de $[x_\ell, x_{r+1}]$, sendo que cada dois destes pontos não se encontram em um mesmo intervalo onde $s-\tilde{s}$ se anula identicamente. Portanto $s-\tilde{s}$ possui $m+r-\ell$ zeros em $[x_\ell, x_{r+1}]$ e como $(s-\tilde{s})|_{[x_\ell, x_{r+1}]} \in S_{m, r-\ell}(x_{\ell+1}, \dots, x_r)$, pelo teorema 0.14, $s=\tilde{s}$

em $[x_\ell, x_{r+1}]$. Portanto, $||f-\tilde{s}||_{[a,b]} \geq ||f-s||_{[x_\ell, x_{r+1}]} = ||f-s||_{[a,b]}$, contradizendo nossa suposição.

A outra implicação pode ser demonstrada diretamente, como em [22]. Aqui preferimos apresentar uma demonstração indutiva para a qual necessitaremos da seguinte proposição, também apresentada em [22].

Vamos introduzir a seguinte notação, que será usada na proposição:

$$d_{m,r-\ell}[x_\ell, x_{r+1}] = \inf_{s \in S_{m,r-\ell}(x_{\ell+1}, \dots, x_r)} ||f-s||_{[x_\ell, x_{r+1}]} \quad (0 \leq \ell \leq r \leq k)$$

Nesta notação temos $d(f) = d_{m,k}[x_0, x_{k+1}]$.

Proposição 1.4 - Seja $f \in C[a,b] - S_{m,k}$ tal que $d_{m,k}[x_0, x_{k+1}] > d_{m,k-1}[x_0, x_k]$ e $d_{m,k}[x_0, x_{k+1}] > d_{m,k-1}[x_1, x_{k+1}]$. Então f possui uma única aproximação ótima em $S_{m,k}$.

Dem: Pelo teorema 0.15 temos a existência de $s \in P(f)$ tal que $f-s$ é p alternante em $[a,b]$, com $p \geq m+k$.

$\therefore \delta(f-s)(t_i) = (-1)^i ||f-s||, \quad i=1, \dots, p+1 \quad \delta \in \{-1, 1\}$ onde

$a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{p+1} \leq b$ são os pontos extremais de alternância de f .

Afirmamos que $t_{i+1} \leq t_{p-m-k+1+i} < x_i < t_{i+m}, \quad i=1, \dots, k \quad (1)$

Verifiquemos:

Se para algum i ($1 \leq i \leq k$), $x_i < t_{p-m-k+1+i}$ então temos $(m+k-i+1)$ pontos extremais de alternância de $f-s$ em $[x_i, x_{k+1}]$. Pela implicação já demonstrada do teorema 1.3 resulta que $s|_{[x_i, x_{k+1}]}$ é aproximação ótima de f em $S_{m, k-i}(x_{i+1}, \dots, x_k)$ e portanto $d_{m, k-i}[x_i, x_{k+1}] = d_{m, k}[x_0, x_{k+1}]$. Como claramente $d_{m, k-i}[x_i, x_{k+1}] \leq d_{m, k-1}[x_1, x_{k+1}]$ obtemos que $d_{m, k-1}[x_1, x_{k+1}] = d_{m, k}[x_0, x_{k+1}]$ contradizendo as hipóteses. Analogamente verifica-se que $x_i < t_{i+m}$, $i=1, \dots, k$. Isto prova nossa afirmação.

Vamos agora supor que exista $\tilde{s} \in P(f)$, $\tilde{s} \neq s$. Temos:

$$||f-s|| = \delta(-1)^i (f-s)(t_i) \geq \delta(-1)^i (f-\tilde{s})(t_i), \quad i=1, \dots, p+1$$

$$\therefore \delta(-1)^i (\tilde{s}-s)(t_i) \geq 0, \quad i=1, \dots, p+1$$

Segue de (1) e do lema 1.2 que $s=\tilde{s}$.

Vamos agora mostrar a outra implicação do teorema 1.3. Tomemos $s \in P(f)$ e mostremos a existência de $[x_\ell, x_{r+1}]$ ($0 \leq \ell \leq r \leq k$) em que $(f-s)$ é $m+r-\ell$ alternante. A demonstração é por indução sobre k :

Se $k=0$ então $S_{m, k}$ é o espaço dos polinômios de ordem m e pelo teorema 0.6 $(f-s)$ é m -alternante em $[x_0, x_1]$.

Suponhamos verdadeiro o resultado para $k-1 \geq 0$ e mostremos para k :

Podemos ter:

a) $d(f) > d_{m,k-1}[x_0, x_k]$ e $d(f) > d_{m,k-1}[x_1, x_{k+1}]$. Neste caso estamos nas hipóteses da proposição 1.4 e portanto s é a única aproximação ótima. Pelo teorema 0.15 resulta que $(f-s)$ é $m+k$ alternante em $[x_0, x_{k+1}]$.

b) $d(f) = d_{m,k-1}[x_0, x_k]$ ou $d(f) = d_{m,k-1}[x_1, x_{k+1}]$. Suponhamos $d(f) = d_{m,k-1}[x_0, x_k]$ (o outro caso é análogo).

Temos então que $s|_{[x_0, x_k]}$ é aproximação ótima de f por $S_{m,k-1}(x_1, \dots, x_{k-1})$ em $[x_0, x_k]$ e pela hipótese de indução que $(f-s)$ é $m+r-1$ alternante em algum intervalo $[x_\ell, x_{r+1}] \subset [x_0, x_k] \subset [x_0, x_{k+1}]$.

Notemos que as condições para unicidade de aproximações ótimas dadas pela proposição 1.4 são suficientes, não sendo porém necessárias como mostra o exemplo:

Exemplo E.1 -

$$f = \begin{cases} 2 & \text{p/ } x=-2, x=0 \text{ e } x=2 \\ -2 & \text{p/ } x=-1, x=1 \text{ e } x=4 \\ 2-(x-2)^2 & \text{p/ } x \in [2, 4] \\ \text{linear nos outros pontos.} \end{cases}$$

$$f \in C[-2, 4], \quad x_1=0, \quad x_2=2$$

Notemos que 0 é aproximação ótima de f por $S_{2,2}(0,2)$ (teorema 1.3) e que $d(f) = d_{2,2}[x_0, x_3] = d_{2,1}[x_0, x_2] = d_{2,1}[x_1, x_3]$. Veremos no teorema 1.6 que 0 é a única aproximação ótima de f em $S_{2,2}$. No entanto, esta unicidade não pode ser deduzida da proposição 1.4.

A proposição 1.4, bem como outros resultados suficientes para unicidade de aproximações ótimas de Rice [20], Schumaker [22] e Strauss [25], é obtida através de propriedades de alternância da função erro. Nürnberger e Singer [15] observaram que além de alternância, propriedades de "achatamento" da função erro são necessárias para caracterizar em que condições há unicidade de aproximações.

As condições necessárias e suficientes para unicidade são dadas no próximo teorema, de Nürnberger e Singer, para o qual necessitamos da seguinte definição:

Definição 1.5 - Uma função $f \in C[a,b]$ é chamada de "plana de ordem m " ou " m -plana" pela direita (resp. pela esquerda) em um ponto $t_0 \in (a,b)$ se para cada $\epsilon > 0$ existir uma sequência (t_n) em (a,b) convergente para t_0 tal que $t_n > t_0$ (resp. $t_n < t_0$) e $|f(t_0) - f(t_n)| < \epsilon |t_0 - t_n|^m$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$.

Teorema 1.6 - Para $f \in C[a,b] \sim S_{m,k}$ e $s \in S_{m,k}$ as condições seguintes são equivalentes:

- (1) s é a única aproximação ótima de f por $S_{m,k}$.
- (2) (a) Existem pelo menos $m+k+1$ pontos extremais de alternância de $f-s$ em $[a,b]$.

- (b) Existem pelo menos $j+1$ pontos extremais de alternção de $f-s$ em cada intervalo:

$$[a, x_j], [x_{k+1-j}, b] \quad j=1, \dots, k, \quad [x_i, x_{i+j+m-1}] \subset [x_1, x_k], \quad j \geq 1 \quad (\text{se } k > m)$$

- (c) Se há apenas j pontos extremais de alternção de $f-s$ em algum intervalo

$$[a, x_j], \text{ resp. } [x_i, x_{i+j+m-1}] \quad (\text{resp. } [x_{k+1-j}, b], \text{ resp. } [x_i, x_{i+j+m-1}])$$

então $(f-s)$ é $m-1$ -plana pela esquerda em x_j ,
resp. $x_{i+j+m-1}$ (resp. pela direita em x_{k+1-j} , resp. x_i).

- (d) Se há apenas j pontos extremais de alternção de $f-s$ em algum intervalo $(x_i, x_{i+j+m-1}) \subset [x_1, x_k]$ e $j+2$ em $[x_i, x_{i+j+m-1}]$ então $f-s$ é $m-1$ plana pela esquerda em $x_{i+j+m-1}$ ou $m-1$ plana pela direita em x_i .

Dem: (1) $\implies$ (2a) Segue diretamente do teorema 0.15

(1) $\implies$ (2b)

Vamos supor que, para algum j ($1 \leq j \leq k$), não existam $j+1$ pontos extremais de alternção de $f-s$ em $[a, x_j]$. Aproximemos então $f-s$ em $[a, x_j]$ por $G = \langle (x_1-t)_+^{m-1}, \dots, (x_j-t)_+^{m-1} \rangle$. G é um espaço fraco-Chebyshev de dimensão j (teorema 0.13). Pelo teorema 0.15 existe $\tilde{s} \in P_G(f-s)$ tal que $f-s-\tilde{s}$ é j alternante em $[a, x_j]$. Se $\tilde{s}=0$ então $(f-s)$ possui $j+1$ pontos extremais de alternção em $[a, x_j]$ ou, se $\|f-s\|_{[a, x_j]} < d(f)$ temos que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno $s + \epsilon (x_1-t)_+^{m-1} \in P(f)$. Em ambos os casos temos uma contradição. Se $\tilde{s} \neq 0$ temos:

$$||f-s-\tilde{s}||_{[x_j, b]} = ||f-s||_{[x_j, b]} \leq ||f-s||_{[a, b]}$$

$$||f-s-\tilde{s}||_{[a, x_j]} \leq ||f-s-0||_{[a, x_j]} \leq ||f-s||_{[a, b]}$$

$\therefore s+\tilde{s} \in P_{S_{m,k}}(f)$, contrariando a unicidade de s . (Notemos que $G \subset S_{m,k}|_{[a, x_j]}$)

Para os intervalos $[x_{k+1-j}, b]$ e $[x_i, x_{i+j+m-1}]$ a demonstração é análoga, devendo ser escolhidos os conjuntos $G = \langle (t-x_{k+1-j})_+^{m-1}, \dots, (t-x_{k+1})_+^{m-1} \rangle$ e $G = \langle B_{i+m}^m, \dots, B_{i+j+m-1}^m \rangle$ respectivamente, onde os B_p^m são B-splines (ver definição 0.9).

(1) $\implies$ (2d) Já vimos que (1) $\implies$ (2a) e que (1) $\implies$ (2b). Suponhamos que $f-s$ possua apenas j pontos extremais de alternância em $(x_i, x_{i+j+m-1}) \subset [x_1, x_k]$ e $j+2$ em $[x_i, x_{i+j+m-1}]$, para algum $j \geq 1$ e que $f-s$ não seja $m-1$ plana pela esquerda em $x_{i+j+m-1}$ nem pela direita em x_i .

Tomemos $x_i = t_0 < t_1 < \dots < t_j < t_{j+1} = x_{i+j+m-1}$, pontos em que $f-s$ é alternante e $G = \langle B_{i+m}^m, \dots, B_{i+j+m-1}^m \rangle$.

Vamos supor que $(f-s)(x_i) = -||f-s||$ (o outro caso é análogo).

Por $f-s$ não satisfazer às condições de "achatamento" requeridas, existem vizinhanças V_1 de $x_i (t_1 \notin V_1, x_{i+1} \notin V_1)$ e V_2 de $x_{i+j+m-1} (t_j \notin V_2, x_{i+j+m-2} \notin V_2)$, e $\epsilon > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} |(f-s)(x_i) - (f-s)(t)| &\geq \epsilon |x_i - t|^{m-1}, \quad \forall t \in V_1 \cap [x_i, b] \\ |(f-s)(x_{i+j+m-1}) - (f-s)(t)| &\geq \epsilon |x_{i+j+m-1} - t|^{m-1}, \quad \forall t \in V_2 \cap [a, x_{i+j+m-1}] \end{aligned} \quad (\Lambda)$$

Como $f-s$ possui apenas j pontos extremais de alternância em $[x_i, x_{i+j+m-1}] \sim \{V_1 \cup V_2\}$ podemos verificar que existem pontos $x_i = z_0 < t_1 < z_1 < \dots < z_{j-1} < t_j < z_j = x_{i+j+m-1}$ e $c > 0$ tal que:

$$(-1)^{\ell+1}(f-s)(t) \leq ||f-s|| - c, \quad t \in [z_\ell, z_{\ell+1}] \sim \{V_1 \cup V_2\}, \quad \ell=0,1,\dots,j-1 \quad (B)$$

e como G é fraco-Chebyshev de dimensão j , existe $g \in G$, $g \neq 0$ tal que $(-1)^\ell g(t) \geq 0$, $t \in [z_\ell, z_{\ell+1}]$, $\ell = 0,1,\dots,j-1$

$$\text{para } t \in V_1 \cap [z_0, z_1] \text{ temos } g = \alpha B_{i+m}^m, \quad \alpha > 0 \quad \text{e} \quad (C)$$

$$\text{para } t \in V_2 \cap [z_{j-1}, z_j] \quad g = \lambda B_{i+j+m-1}^m, \quad \lambda (-1)^{j-1} > 0.$$

Multiplicando g por um escalar, se necessário, podemos supor que:

$$||g|| \leq k, \quad \alpha B_{i+m}^m(t) \leq \epsilon |x_i - t|^{m-1} \quad \forall t \in V_1 \cap [z_0, z_1] \text{ e que} \quad (D)$$

$$\lambda B_{i+j+m-1}^m(t) (-1)^{j-1} \leq \epsilon |x_{i+j+m-1} - t|^{m-1} \quad \forall t \in V_2 \cap [z_{j-1}, z_j]$$

Usando (A), (B), (C) e (D) temos:

$$\text{para } 0 \leq \ell \leq j-1 \text{ e } t \in [z_\ell, z_{\ell+1}] \sim \{V_1 \cup V_2\}$$

$$-||f-s|| \leq (-1)^{\ell+1}(f-s)(t) \leq (-1)^{\ell+1}(f-s)(t) - (-1)^{\ell+1}g(t) \leq ||f-s|| - c + ||g|| \leq ||f-s||$$

Para $t \in V_1 \cap [z_0, z_1]$:

$$|(f-s-g)(t)| = |(f-s)(x_i) - (f-s)(t) + g(t) - (f-s)(x_i)| = \left| -|(f-s)(x_i) - (f-s)(t)| + \right. \\ \left. + \alpha B_{i+m}^m(t) + ||f-s|| \right| \leq ||f-s||$$

Para $t \in V_2 \cap [z_{j-1}, z_j]$

$$\begin{aligned} |(f-s-g)(t)| &= |(-1)^{j+1}((f-s)(x_{i+j+m-1}) - (f-s)(t)) + (-1)^{j+1}g(t) + (-1)^j(f-s)(x_{i+j+m-1})| = \\ &= \left| -|(f-s)(x_{i+j+m-1}) - (f-s)(t)| + (-1)^{j-1}B_{i+j-1}^m(t) + |f-s| \right| \leq ||f-s|| \end{aligned}$$

Portanto $||f-s-g||_{[x_i, x_{i+j+m-1}]} \leq ||f-s||$. Como $g=0$ em $[a, x_i]$ e em $[x_{i+j+m-1}, b]$ temos que $||f-s-g||_{[a, b]} \leq ||f-s||_{[a, b]}$, mostrando que $(s+g) \in P(f)$, contrariando a unicidade de s .

(1) $\implies$ (2c) A demonstração é análoga à de (1) $\implies$ (2d), sendo que os conjuntos G a serem tomados são:

$G = \langle (x_1-t)_+^{m-1}, \dots, (x_j-t)_+^{m-1} \rangle$ se há só j pontos extremais em $[a, x_j]$

$G = \langle (t-x_{k+1-j})_+^{m-1}, \dots, (t-x_k)_+^{m-1} \rangle$ se há só j pontos extremais em $(x_{k+1-j}, b]$ e

$G = \langle B_{i+m}^m, \dots, B_{i+j+m-1}^m \rangle$ se há só j pontos extremais em $[x_i, x_{i+j+m-1}]$ ou $(x_i, x_{i+j+m-1}]$.

(2) $\implies$ (1)

De 2a), usando o teorema 1.3, temos que $s \in P(f)$.

Separemos em dois casos:

A) $(f-s)$ tem pelo menos $j+1$ pontos extremais de alternância nos intervalos:

$$[a, x_j), (x_{k+1-j}, b], j=1, \dots, k, (x_i, x_{i+j+m-1}) = [x_1, x_k], j \geq 1$$

Por termos $s \in P(f)$, obtemos a unicidade de s do lema 1.2.

B) Existe ao menos um intervalo $[a, x_j), (x_{k+1-j}, b]$ ou

$(x_i, x_{i+j+m-1}) \subset [x_1, x_k]$ em que $f-s$ possui no máximo j pontos extremais de alternância. Para tais intervalos consideremos os nós correspondentes $x_{k_1}, \dots, x_{k_p}$ (resp. $x_{r_1}, \dots, x_{r_q}$) onde temos $f-s$ $m-1$ -plana pela direita (resp. pela esquerda). Suponhamos a existência de $\tilde{s} \in P(f)$, $\tilde{s} \neq s$.

Afirmamos que neste caso existe um índice i , $1 \leq i \leq p$ (ou $1 \leq i \leq q$) e uma vizinhança V de x_{k_i} (ou de x_{r_i}) tal que para $\forall t \in V \cap (x_{k_i}, b]$ (ou $t \in V \cap [a, x_{r_i})$) temos:

$$(f-s)(t) - (\tilde{s}-s)(t) < 0.$$

Antes de mostrar que nossa afirmação é verdadeira, verifiquemos que usando-a chegaremos a uma contradição.

Vamos supor que a vizinhança V seja de um nó x_{k_i} (a demonstração para x_{r_i} é análoga).

Inicialmente, vejamos que $(\tilde{s}-s)(x_{k_i}) = 0$:

Por continuidade temos que $(f-s)(x_{k_i}) \cdot (\tilde{s}-s)(x_{k_i}) \leq 0$. Vamos supor que $(f-s)(x_{k_i}) (\tilde{s}-s)(x_{k_i}) < 0$. Neste caso:

$$\begin{aligned} ||f-\tilde{s}|| &\geq |(f-s)(x_{k_i}) - (\tilde{s}-s)(x_{k_i})| = |(f-s)(x_{k_i})| + |(\tilde{s}-s)(x_{k_i})| = \\ &= ||f-s|| + |(\tilde{s}-s)(x_{k_i})| > ||f-s|| \end{aligned}$$

contrariando o fato de termos $\tilde{s} \in P(f)$. Portanto

$$(\tilde{s}-s)(x_{k_i}) = 0.$$

Podemos então, para $t \in V \cap (x_{k_i}, b]$, escrever que $(\tilde{s}-s)(t) = (x_{k_i} - t)^\ell \cdot p(t)$, onde $1 \leq \ell \leq m-1$ e $p(t)$ é um polinômio de ordem $m-\ell$ tal que $p(t) \neq 0$, $\forall t \in V \cap (x_{k_i}, b]$ (reduzindo V se necessário).

$$\therefore \exists \alpha > 0 \text{ tal que } |(\tilde{s}-s)(t)| = |(x_{k_i} - t)^\ell p(t)| \geq \alpha |x_{k_i} - t|^\ell, \forall t \in V \cap (x_{k_i}, b]$$

Como $(f-s)$ é $m-1$ -planapela direita em x_{k_i} existe uma sequência (t_j) convergente para x_{k_i} , $t_j > x_{k_i}$ e

$$|(f-s)(x_{k_i}) - (f-s)(t_j)| < \alpha |x_{k_i} - t_j|^{m-1} \text{ para todo } j > 0, j \in \mathbb{N}.$$

Portanto, existe um índice j para o qual:

$$\begin{aligned} ||f-\tilde{s}|| &\geq |(f-s)(t_j) - (\tilde{s}-s)(t_j)| = |(f-s)(t_j)| + |(\tilde{s}-s)(t_j)| \geq \\ &\geq |(f-s)(t_j)| + \alpha |x_{k_i} - t_j|^{\ell} \geq |(f-s)(t_j)| + \alpha |x_{k_i} - t_j|^{m-1} > \\ &> |(f-s)(t_j)| + |(f-s)(x_{k_i}) - (f-s)(t_j)| \geq |(f-s)(x_{k_i})| = ||f-s||. \end{aligned}$$

Como $\tilde{s} \in P(f)$, chegamos à contradição desejada.

Para finalizar nossa demonstração, resta mostrar que se $s \neq \tilde{s}$ nossa afirmação é verdadeira:

Suponhamos que não exista a vizinhança V requerida. Então existem sequências $t_{k_i, n} \rightarrow x_{k_i}$ ($i=1, \dots, p$) e $t_{r_i, n} \rightarrow x_{r_i}$ ($i=1, \dots, q$) tal que $t_{k_i, n} > x_{k_i}$ ($i=1, \dots, p$), $t_{r_i, n} < x_{r_i}$ ($i=1, \dots, q$), $(f-s)(t_{k_i, n}) \cdot (\tilde{s}-s)(t_{k_i, n}) \geq 0$ e $(f-s)(t_{r_i, n}) \cdot (\tilde{s}-s)(t_{r_i, n}) \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (*)

Verifica-se a existência de n tal que:

$$(f-s)(t_{k_i, n}) \cdot (f-s)(x_{k_i}) > 0 \quad (i=1, \dots, p) \text{ e } (f-s)(t_{r_i, n}) \cdot (f-s)(x_{r_i}) > 0$$

e tal que no conjunto:

$$H = \{ \{E(f-s) \sim \{x_{k_1}, \dots, x_{k_p}, x_{r_1}, \dots, x_{r_q}\}\} \cup \{t_{k_1, n}, \dots, t_{k_p, n}, t_{r_1, n}, \dots, t_{r_q, n}\} \}$$

há pelo menos $m+k+1$ pontos em que $f-s$ troca de sinal alternadamente, bem como há pelo menos $j+1$ pontos de H em que $f-s$ troca

de sinal alternadamente em cada intervalo: $[a, x_j)$, $(x_{k+1-j}, b]$, $j=1, \dots, k$ e $(x_i, x_{i+j+m-1})$ ($j \geq 1$).

Portanto, pelo lema 1.2, não existe $\tilde{s} \in S_{m,k}$, $\tilde{s} \neq s$, tal que para todo $t \in H$, $(f-s)(t) \cdot (\tilde{s}-s)(t) \geq 0$. Este fato e (*) implicam na existência de $\tilde{t} \in H \cap E(f-s)$ tal que $(f-s)(\tilde{t})(\tilde{s}-s)(\tilde{t}) < 0$.

Portanto, $||f-\tilde{s}|| \geq |(f-s)(\tilde{t}) - (\tilde{s}-s)(\tilde{t})| = |(f-s)(\tilde{t})| + |(\tilde{s}-s)(\tilde{t})| > ||f-s||$, contrariando o fato de termos $\tilde{s} \in P(f)$. Isto mostra nos a afirmação e portanto o teorema.

A versão original do teorema 1.6, de Nürnberger e Singer [15], não apresenta a condição (2d). O exemplo abaixo mostra que esta condição é necessária para unicidade:

Exemplo E.2 -

$$f = \begin{cases} -1, & \text{p/ } x=0, x=2, x=6 \text{ e } x=8 \\ 1, & \text{p/ } x=1, x=4 \text{ e } x=7 \\ \text{linear} & \text{nos outros pontos} \end{cases}$$

0 é aproximação ótima de f por $S_{2,3}(2,4,6)$ e para $s=0$ estão satisfeitas as condições 2a, 2b e 2c do teorema 1.6. Temos que $P(f) = \{\alpha \tilde{B}_3^2(t) : 0 \leq \alpha \leq 2\}$, não havendo portanto unicidade. A condição 2d não é satisfeita para o intervalo (x_1, x_3) pois $(f-0)$ não é 1-plana, nem em x_1 , nem em x_3 .

O próximo teorema caracteriza aproximações fortemente únicas. Vamos primeiramente defini-las.

Definição 1.7 - Dado $f \in C(X)$, X compacto e G subespaço N dimensional de $C(X)$, dizemos que $g_0 \in G$ é aproximação ótima fortemente única de f se existe um real $k_f > 0$ tal que para todo $g \in G$ temos que:

$$||f - g_0|| + k_f ||g - g_0|| \leq ||f - g||$$

O teorema (sobre unicidade forte) foi obtido por Nürnberg [14] como corolário de um resultado mais geral sobre aproximação. Aqui, preferimos demonstrá-lo diretamente, usando as particularidades dos splines.

Teorema 1.8 - Para $f \in C[a, b] \sim S_{m,k}$ e $s \in S_{m,k}$ as condições seguintes são equivalentes:

- (1) s é aproximação ótima fortemente única de f .
- (2) (a) Há pelo menos $m+k+1$ pontos extremais de alternância de $f-s$ em $[a, b]$.
 (b) Há pelo menos $j+1$ pontos extremais de alternância de $f-s$ em cada intervalo:

$$[a, x_j), (x_{k+1-j}, b], \quad j=1, \dots, k,$$

$$(x_i, x_{i+j+m-1}), \quad j \geq 1 \quad (\text{se } k > m)$$

Dem:

(1) $\implies$ (2)

Do teorema 1.6 resulta a parte (a) e que $f-s$ tem pelo menos $j+1$ pontos extremais de alternância em cada intervalo:

$$[a, x_j], [x_{k+1-j}, b], \quad j=1, \dots, k,$$

$$[x_i, x_{i+j+m-1}], \quad j \geq 1 \quad (\text{se } k > m).$$

Vamos supor que $f-s$ não seja j alternante em $[a, x_j]$ para algum j ($1 \leq j \leq k$) (a demonstração é análoga para os intervalos $(x_{k+1-j}, b]$ e $(x_i, x_{i+j+m-1})$).

Neste caso, temos que $|(f-s)(x_j)| = ||f-s||$. Sem perda de generalidade podemos supor que $(-1)^j (f-s)(x_j) = ||f-s||$.

Sejam $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_j < t_{j+1} = x_j$ pontos extremais de alternância de $f-s$ e k um real positivo:

Verifica-se a existência de $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ e de pontos $a = z_0 \leq t_1 < z_1 < \dots < t_j < z_j = t_{j+1} = x_j$ tais que:

$$t_j \notin (x_j - \epsilon, x_j + \epsilon), \quad \epsilon^{m-1} < k(x_j - x_{j-1})^{m-1} \quad \text{e} \quad (A)$$

$$(-1)^{i+1} (f-s)(t) \leq ||f-s|| - \delta \quad \forall t \in [z_i, z_{i+1}] \setminus (x_j - \epsilon, x_j + \epsilon), \quad i=0, 1, \dots, j-1$$

Tomemos $G = \langle (x_1 - t)_+^{m-1}, \dots, (x_j - t)_+^{m-1} \rangle$. Como G é fraco-Chebyshev de dimensão j existe $g \in G$, $g \neq 0$, tal que $(-1)^i g(t) \geq 0$ $\forall t \in [z_i, z_{i+1}]$, $i=0, 1, \dots, j-1$. (B)-

Multiplicando g por um escalar, se necessário, pode-

mos garantir que

$$||g|| \leq \delta \text{ e que } |\alpha| \leq \frac{||g||}{|x_j - x_{j-1}|^{m-1}} \quad (C), \text{ onde } \alpha \text{ é o coe}$$

ficiente de $(x_j - t)_+^{m-1}$ no desenvolvimento de g em função da base de G apresentada.

De (A), (B) e (C) temos:

para $t \in [z_i, z_{i+1}] \cap (x_j - \epsilon, x_j + \epsilon)$, $i=0, \dots, j-1$:

$$-||f-s|| \leq (-1)^{i+1} (f-s)(t) \leq (-1)^{i+1} (f-s)(t) - (-1)^{i+1} g(t) \leq ||f-s|| - \delta + ||g|| \leq ||f-s||$$

para $t \in [x_j, b]$, $|(f-s-g)(t)| = |(f-s)(t)| \leq ||f-s||$

Como s é a única aproximação ótima de f , resulta que

$$||f-s-g||_{[a,b]} = ||f-s-g||_{[z_{j-1}, z_j] \cap (x_j - \epsilon, x_j + \epsilon)}$$

$$\therefore ||f-s-g||_{[a,b]} = ||f-s-g||_{[x_j - \epsilon, x_j]} \leq ||f-s||_{[x_j - \epsilon, x_j]} + ||g||_{[x_j - \epsilon, x_j]} \leq$$

$$\leq ||f-s||_{[a,b]} + |\alpha| \epsilon^{m-1} < ||f-s||_{[a,b]} + k ||g||_{[a,b]}$$

Portanto, para qualquer $k > 0$ existe $(s+g) \in S_{m,k}$ tal que

$||f-(s+g)|| < ||f-s|| + k ||s-(s+g)||$, contrariando a unicidade forte de s .

(2) $\implies$ (1)

Supondo que s não é aproximação ótima fortemente uni-

de f temos que para

$$\forall k_n > 0 \exists s_n \in S_{m,k} (s_n \neq s) \text{ tal que } ||f-s|| - ||f-s_n|| > -k_n ||s-s_n|| \quad (A)$$

$$\text{Tomemos } k_n = 1/n \text{ e } h_n = \frac{s_n - s}{||s_n - s||}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Temos que $h_n \in S_{m,k}$ e $||h_n|| = 1$. Assim sendo, a sequência h_n é limitada e possui subsequência convergente $h_{n_q} \rightarrow h \in S_{m,k}$ ($||h|| = 1$).

Por (a) temos a existência de $m+k+1$ pontos $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{m+k+1} \leq b$ tal que $\delta(-1)^i (f-s)(t_i) = ||f-s||$, $i=1, \dots, m+k+1$ $\delta \in \{-1, 1\}$.

$$\therefore ||f-s|| - ||f-s_{n_q}|| \leq \delta(-1)^i (f-s)(t_i) - \delta(-1)^i (f-s_{n_q})(t_i) = \delta(-1)^i (s_{n_q} - s)(t_i), \\ i=1, \dots, m+k+1$$

de (A) resulta que:

$$\delta(-1)^i (s_{n_q} - s)(t_i) > \frac{-1}{n_q} ||s - s_{n_q}||, \quad i=1, \dots, m+k+1$$

$$\delta(-1)^i \frac{(s_{n_q} - s)(t_i)}{||s_{n_q} - s||} > \frac{-1}{n_q} \quad i=1, \dots, m+k+1$$

Tomando limites para $q \rightarrow \infty$ obtemos:

$$\delta(-1)^i h(t_i) \geq 0, \quad i=1, \dots, m+k+1 \quad (B)$$

De (b) temos a existência de $j+1$ pontos $\bar{t}_1 < \bar{t}_2 < \dots < \bar{t}_{j+1}$

em cada intervalo:

$$[a, x_j), (x_{k+1-j}, b] \quad , \quad j=1, \dots, k \quad , \quad (x_i, x_{i+j+m-1}), \quad j \geq 1 \quad (\text{se } k > m)$$

tal que $\bar{\delta}(-1)^\ell (f-s)(\bar{t}_\ell) = ||f-s|| \quad , \ell=1, \dots, j+1 \quad , \quad \bar{\delta} \in \{-1, 1\}$

Procedendo como fizemos para mostrar (B) obtemos

$$\bar{\delta}(-1)^\ell h(\bar{t}_\ell) \geq 0 \quad , \quad \ell=1, \dots, j+1 \quad (C).$$

Por (B) e (C), aplicando o lema 1.2, obtemos $h=0$, o que é uma contradição pois $||h|| = 1$.

Observações -

(1) Notemos que unicidade e unicidade forte de aproximações ótimas de $f \in C[a, b]$ por $S_{m,k}$ não são propriedades equivalentes, como podemos observar através do exemplo E.1 em que a aproximação ótima é única, mas não fortemente única.

(2) Para G subespaço de $C[a, b]$ de dimensão finita, Newman e Shapiro [13] mostraram que se G é um espaço de Chebyshev então unicidade e unicidade forte de aproximações ótimas são equivalentes. Mchaughlin e Somers [12] mostraram que se G não é de Chebyshev então existe $f \in C[a, b]$ possuindo uma aproximação ótima única que não é fortemente única.

(3) Nürnberger e Singer [15] mostraram, para G subespaço de dimensão finita de $C(X)$, X compacto, que $S_G = \{f \in C(X) : f \text{ possui aproximação ótima fortemente única por } G\}$ é denso em $U_G = \{f \in C(X) : f \text{ possui uma única aproximação ótima}\}$.

Vamos agora mostrar, mesmo para funções que não possuem aproximações únicas, a existência de intervalos de nós onde há unicidade e unicidade forte das aproximações ótimas, ou seja, todas as aproximações coincidem nestes intervalos. A proposição seguinte é devida a Nürnberger e Sommer [18].

Proposição 1.9 - Dada $f \in C[a,b] - S_{m,k}$, existe um intervalo $[x_\ell, x_{r+1}]$ ($0 \leq \ell \leq r \leq k$) tal que se $s \in P(f)$ então $s|_{[x_\ell, x_{r+1}]}$ é aproximação ótima fortemente única de f por $S_{m,r-\ell}(x_{\ell+1}, \dots, x_r)$ em $[x_\ell, x_{r+1}]$ e $f-s$ é $m+r-\ell$ alternante em $[x_\ell, x_{r+1}]$. Se $k \leq m$ existe um único intervalo maximal, que é o intervalo de unicidade forte, onde $s \in P(f)$ é fortemente única. (Qualquer outro intervalo em que s é fortemente única está contido neste).

Dem: Pelo teorema 0.15 sabemos que existe $s \in P(f)$ tal que $(f-s)$ alterna $m+k$ vezes em $[x_0, x_{k+1}]$. É clara a existência de um intervalo $[x_\ell, x_{r+1}]$ ($0 \leq \ell \leq r \leq k$) onde $f-s$ é $m+r-\ell$ alternante e tal que $f-s$ alterna no máximo $m+r_1-\ell_1$ vezes em cada intervalo $[x_{\ell_1}, x_{r_1+1}] \subsetneq [x_\ell, x_{r+1}]$. Verifiquemos que s é fortemente única em $[x_\ell, x_{r+1}]$:

Primeiramente, vejamos que $(f-s)$ é pelo menos j alternante em $[x_\ell, x_{\ell+j})$, $j=1, \dots, r-\ell$.

Suponhamos que exista algum j tal que esta condição não se verifique.

Como $f-s$ é $m+r-\ell$ alternante em $[x_\ell, x_{r+1}]$ existem pontos $x_\ell \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{m+r-\ell+1} \leq x_{r+1}$ tal que $\delta(-1)^i (f-s)(t_i) = \|f-s\|$ $i=1, \dots, m+r-\ell+1$. Como $f-s$ não é j alternante em $[x_\ell, x_{\ell+j})$

resulta que $x_{\ell+j} \leq t_{j+1}$ e consequentemente que $f-s$ é $m+r-\ell-j$ alternante em $[x_{\ell+j}, x_{r+1}]$, o que é uma contradição devido à maneira como escolhemos $[x_{\ell}, x_{r+1}]$. Analogamente verifica-se que $f-s$ é pelo menos j alternante em $(x_{r+1-j}, x_{r+1}]$, $j=1, \dots, r-\ell$ e em $(x_i, x_{i+j+m-1}) \subset [x_{\ell}, x_{r+1}]$, $j \geq 1$.

Portanto, pelo teorema 1.8, $s|_{[x_{\ell}, x_{r+1}]}$ é aproximação ótima fortemente única de f por $S_{m, r-\ell}(x_{\ell+1}, \dots, x_r)$.

Consideremos agora o caso em que $k \leq m$.

Vamos supor que $[x_{\ell_1}, x_{r_1+1}]$ e $[x_{\ell_2}, x_{r_2+1}]$ ($\ell_1 \leq \ell_2$ e $r_1 \leq r_2$) sejam intervalos onde $f-s$ é fortemente única e neste caso, mostremos que s é fortemente única em $[x_{\ell_1}, x_{r_2+1}]$.

$(f-s)$ possui $m+r_1-\ell_1+1$ pontos extremais de alternância em $[x_{\ell_1}, x_{r_1+1}]$ e $m+r_2-\ell_2+1$ em $[x_{\ell_2}, x_{r_2+1}]$.

Como $k \leq m$, há pelo menos r_2-r_1+1 pontos extremais de alternância em $(x_{r_1+1}, x_{r_2+1}]$ (se $\ell_2 \geq r_1+1$ então $m+r_2-\ell_2+1 \geq r_2-r_1+1$ e se $\ell_2 \leq r_1+1$ obtemos os pontos de alternância por termos s fortemente única em $[x_{\ell_2}, x_{r_2+1}]$) e consequentemente pelo menos $m+r_2-\ell_1+1$ em $[x_{\ell_1}, x_{r_2+1}]$. Temos ainda, pois $k \leq m$, $j+1$ pontos extremais de alternância em $[x_{\ell_1}, x_{\ell_1+j})$, $(x_{r_2+1-j}, x_{r_2+1}]$, $j=1, \dots, r_2+1-\ell_1$.

Do teorema 1.8 obtemos que s é fortemente única em $[x_{\ell_1}, x_{r_2+1}]$.

Escolhemos então $[x_{\ell}, x_{r+1}]$ como o menor intervalo de nós que contenha todos os intervalos de nós em que s é fortemente única. Como vimos acima, s é fortemente única em $[x_{\ell}, x_{r+1}]$ que é o intervalo de unicidade forte.

Proposição 1.10 ($k \leq m$) - Dada $f \in C[a, b] - S_{m, k}$ existe um único intervalo maximal $[x_\ell, x_{r+1}]$ ($0 \leq \ell \leq r \leq k$) onde todas as aproximações ótimas de f coincidem (qualquer outro está contido neste), que é o intervalo de unicidade das aproximações ótimas de f .

Dem: Consideremos a reunião dos intervalos onde todas as aproximações ótimas de f coincidem. Esta reunião é não vazia, pela proposição 1.9, e é um intervalo, pois $k \leq m$. (ver observação 0.11).

O exemplo seguinte mostra que o intervalo de unicidade e o intervalo de unicidade forte não são equivalentes:

Exemplo E.3

$$f = \begin{cases} 2 & p/ \ x=0 \\ 0 & p/ \ x=-2 \\ -2 & p/ \ x=1 \\ 2 - (x-2)^2 & p/x \in [2, 4] \\ \text{linear nos outros pontos} \end{cases}$$

Temos, para aproximação de f por $S_{2, 2}(0, 2)$, que o intervalo de unicidade é $I_u = [x_1, x_3] = [0, 4]$ e o intervalo de unicidade forte é $I_{uf} = [x_1, x_2] = [0, 2]$. Observemos que $I_u \neq I_{uf}$.

Notemos que no exemplo E.3 temos $K \leq m$, estando portanto bem definidos os intervalos de unicidade e unicidade forte. No

exemplo E.4, onde $k > m$, há unicidade de aproximações ótimas nos intervalos $[0,1]$ e $[4,5]$. Notemos que não podemos definir o intervalo de unicidade e nem o intervalo de unicidade forte. Apresentamos a seguir, duas caracterizações para o intervalo de unicidade:

Proposição 1.11 ($k \leq m$) - Dados $f \in C[a,b] \sim S_{m,k}$ e I , o intervalo de unicidade das aproximações ótimas de f temos que se $s \in P(f)$ então $f-s$ é no máximo $m+r-\ell-1$ alternante nos intervalos $[x_\ell, x_{r+1}]$ ($0 \leq \ell \leq r \leq k$) para os quais temos $(x_\ell, x_{r+1}) \cap I = \emptyset$.

Dem: Escolhamos $s \in P(f)$, tal que $f-s$ seja $m+r-\ell$ alternante em $[x_\ell, x_{r+1}]$ ($0 \leq \ell \leq r \leq k$). Pelo teorema 1.3 temos que $s|_{[x_\ell, x_{r+1}]} \in P_{S_{m, r-\ell}}(f)(x_{\ell+1}, \dots, x_r)$ e portanto $d_{m, r-\ell}[x_\ell, x_{r+1}] = d(f)$. Da proposição 1.10 temos um intervalo $[x_p, x_q]$ ($p < q$) onde as aproximações de f em $S_{m, r-\ell}(x_{\ell+1}, \dots, x_r)$ coincidem. Como temos $d(f) = d_{m, r-\ell}[x_\ell, x_{r+1}]$ resulta que, para todo $\bar{s} \in P(f)$, $\bar{s}|_{[x_\ell, x_{r+1}]} \in P_{S_{m, r-\ell}}(f)(x_{\ell+1}, \dots, x_r)$. Portanto, todas as aproximações ótimas de f em $S_{m,k}$ coincidem em $[x_p, x_q] \subset [x_\ell, x_{r+1}]$ e $(x_p, x_q) \subset ((x_\ell, x_{r+1}) \cap I)$.

A proposição seguinte é devida a Blatter e Schumaker [4]:

Proposição 1.12 ($K \leq m$) - Para $f \in C[a,b] \sim S_{m,k}$ temos que o intervalo I de unicidade das aproximações ótimas de f em $S_{m,k}$ é o menor intervalo de nós que contém $E(f-P(f))$.

Dem: Seja $I = [x_\ell, x_{r+1}]$. Suponhamos $r < k$. Neste caso, devemos mos

trar que $J = E(f - P(f)) \cap (x_{r+1}, b] = \emptyset$ (no caso em que $\ell > 0$ deve-se mostrar que $E(f - P(f)) \cap [a, x_\ell] = \emptyset$. A demonstração é análoga à do caso $r < k$).

Mostremos primeiramente que J possui no máximo $k - r - 1$ pontos e que se $J = \{t_1, \dots, t_p\}$ então $x_{r+1+j} < t_j$, $j = 1, \dots, p$ (1)

Tomemos $s \in P(f)$ e $\tilde{s} \in P(f)$ tal que $s \neq \tilde{s}$ em $[x_{r+1}, x_{r+2}]$ e fixemos j ($1 \leq j \leq k - r$).

Para $h = (s - \tilde{s})|_{[x_r, x_{r+j+1}]}$, temos que $h(t) = 0$ para todo $t \in J$, pois $P(f)$ é convexo.

O intervalo $[x_r, x_{r+1}]$ é um zero de ordem m de h . Por termos $k \leq m$, segue da observação 0.11, que h só possui zeros simples em $(x_{r+1}, x_{r+1+j}]$, pois $h \neq 0$ e ainda que h possui no máximo $j - 1$ zeros em $(x_{r+1}, x_{r+1+j}]$.

Mostremos agora que $J = \emptyset$. Tomemos s pertencente ao interior relativo de $P(f)$.

Então, se para $t \in (x_{r+1}, b]$, $|(f - s)(t)| = d(f)$ temos que $t \in J$.

Por (1), obtemos do teorema 0.13 que existe $g \in G = \langle (t - x_{r+2})_+^{m-1}, \dots, (t - x_{r+p+1})_+^{m-1} \rangle$ tal que $g(t_i) = \text{sgn}(f - s)(t_i)$ $i = 1, \dots, p$. Então, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, $\tilde{s} = s + \epsilon g \in P(f)$ e não possui pontos extremais em $(x_{r+1}, b]$, contrariando a definição de J . Portanto $J = \emptyset$.

Mostramos que I contém $E(f - P(f))$. Resta mostrar que I é o menor intervalo nestas condições. Para tal é suficiente verificar que $E(f - P(f)) \cap (x_r, x_{r+1}] \neq \emptyset$ e que $E(f - P(f)) \cap [x_\ell, x_{\ell+1}] \neq \emptyset$.

Suponhamos $E(f-P(f)) \cap (x_r, x_{r+1}] = \emptyset$ (o outro caso é análogo). Então, para s no interior relativo de $P(f)$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno a função $\bar{s}(t) = s(t) + \varepsilon(t - x_r)_+^{m-1} \in P(f)$, contradizendo a definição de I .

O CASO DISCRETO: Para a parte prática, de cálculo de aproximações ótimas, será necessário considerar uma versão discreta de aproximação por $S_{m,k}$.

Para tal tomamos $D = [a, b]$, D finito tal que $\dim S_{m,k}|_D = m+k$ e $S_{m,k}|_D \not\subset C[a, b]|_D$. (Estas duas últimas condições são equivalentes a termos pelo menos $m+k+1$ pontos em D e pelo menos um conjunto de $m+k$ pontos de interpolação para $S_{m,k}$ em D).

Na versão discreta os resultados de caracterização e unicidade são quase que os mesmos do caso contínuo, necessitando porém de algumas adaptações:

Teorema 1.3 D - Sejam $f \in C[a, b]|_D \sim S_{m,k}|_D$ e $s \in S_{m,k}$. s é aproximação ótima de f em D se e somente se existe um intervalo $[x_\ell, x_{r+1}]$ ($0 \leq \ell \leq r \leq k$) tal que $(f-s)$ é $m+r-\ell$ alternante em $D \cap [x_\ell, x_{r+1}]$.

A demonstração é análoga à do teorema 1.3.

Para darmos a versão da prop. 1.4 damos a notação:

$$d_{D^{m,r-\ell}[x_\ell, x_{r+1}]} = \inf_{s \in S_{m,r-\ell}(x_{\ell+1}, \dots, x_r)} \|f-s\|_{D \cap [x_\ell, x_{r+1}]}$$

Nesta notação $d_{S(f)} = d_{D^{m,k}[x_0, x_{k+1}]}$.

Proposição 1.4 D - Seja $f \in C[a, b] \mid_D \sim S_{m,k} \mid_D$ tal que $d_{D^{m,k}}[x_0, x_{k+1}] > d_{D^{m,k-1}}[x_0, x_k]$ e $d_{D^{m,k}}[x_0, x_{k+1}] > d_{D^{m,k-1}}[x_1, x_{k+1}]$. Então f possui uma única aproximação ótima em D por $S_{m,k}$.

Ao fazermos aproximação por $S_{m,k}$ no caso discreto, perdemos a distinção entre unicidade e unicidade forte. A versão dos teoremas 1.6 e 1.8 é a seguinte:

Teorema 1.6 D - Seja $f \in C[a, b] \mid_D \sim S_{m,k} \mid_D$ e $s \in S_{m,k}$. São equivalentes:

- (1) s é aproximação ótima fortemente única de f em D por $S_{m,k}$.
- (2) s é a única aproximação ótima de f em D por $S_{m,k}$.
- (3) a) $f-s$ tem pelo menos $m+k+1$ pontos extremais de alternância em D ,
 b) $f-s$ tem pelo menos $j+1$ pontos extremais de alternância em cada um dos conjuntos:

$$[a, x_j) \cap D, (x_{k+1-j}, b] \cap D, j=1, \dots, k \text{ e } (x_i, x_{i+j+m-1}) \cap D, j \geq 1$$

(se $k > m$).

Dem: (1) $\implies$ (2) é imediato.

(2) $\implies$ (3). Supondo-se que (3) não seja satisfeito, mostra-se que existe outra aproximação ótima para f , contradizendo a unicidade de s , como foi feito em (1) $\implies$ 2b e (1) $\implies$ 2d e (1) $\implies$ 2c do teorema 1.6 (Notemos que neste caso é possível construir outra aproximação ótima para f , mesmo que $f-s$ seja " $m-1$ plana" em alguns nós, devido ao fato de estarmos aproximando em um conjunto finito D).

(3) $\implies$ (2) A demonstração é essencialmente a mesma de (2) $\implies$ (1) no teorema 1.8.

Devido ao fato de não haver mais distinção entre unicidade e unicidade forte, as proposições 1.9 e 1.10 também se transformam em uma única.

Proposição 1.9 D - Seja $f \in C[a,b] \big|_D \sim S_{m,k} \big|_D$. Existem ℓ e r ($0 \leq \ell \leq r \leq k$) tal que toda aproximação ótima s de f em D por $S_{m,k}$ é aproximação ótima (fortemente) única de f em $D \cap [x_\ell, x_{r+1}]$ por $S_{m,r-\ell}(x_{\ell+1}, \dots, x_r)$ e $f-s$ é $m+r-\ell$ alternante em $[x_\ell, x_{r+1}] \cap D$. Se $k \leq m$ existe um único intervalo maximal $[x_\ell, x_{r+1}]$ tal que s é (fortemente) única em $D \cap [x_\ell, x_{r+1}]$. (Se existir algum outro intervalo em que isto ocorra, tal intervalo estará contido em $[x_\ell, x_{r+1}]$). Este intervalo é chamado de intervalo de unicidade (forte).

A demonstração é análoga à demonstração da proposição 1.9, usando o teorema 1.6 D para as equivalências entre unicidade e unicidade forte.

No caso discreto, ainda mantemos caracterizações para o intervalo de unicidade.

Proposição 1.11 D ($k \leq m$) - Seja $f \in C[a,b] \big|_D \sim S_{m,k} \big|_D$ e I o intervalo de unicidade (proposição 1.9D). Para toda aproximação ótima s de f em D por $S_{m,k}$, temos que $f-s$ é no máximo $m+r-\ell-1$ alternante em $[x_\ell, x_{r+1}] \cap D$ ($0 \leq \ell \leq r \leq k$) se $(x_\ell, x_{r+1}) \cap I = \emptyset$.

A demonstração é análoga à da proposição 1.11.

Proposição 1.12 D ($k \leq m$). Seja $f \in C[a,b] \big|_D \sim S_{m,k} \big|_D$. O intervalo I de unicidade das aproximações ótimas de f em D por $S_{m,k}$ é o menor intervalo de nós que contém $E(f - P_{S_{m,k} \big|_D}(f))$.

A demonstração é análoga à da proposição 1.12.

CAPÍTULO 2

SELEÇÕES CONTÍNUAS PARA A PROJEÇÃO MÉTRICA

Neste capítulo, discutiremos sobre existência de seleções contínuas para a projeção métrica. Analisaremos ainda se há unicidade de seleções contínuas no caso em que existem. Vamos inicialmente, dar a definição de seleções contínuas:

Definição 2.1 - Uma aplicação contínua $S:C(X) \rightarrow C(X)$, tal que $S(f) \in P_G(f)$ para todo $f \in C(X)$ é chamada de seleção contínua para a projeção métrica P_G .

Nürnberg e Sommer [16] conseguiram caracterizar, para aproximação por $S_{m,k}$, em que condições existe seleção contínua para a projeção métrica, através do seguinte teorema:

Teorema 2.2 - Em aproximação por splines polinomiais, existe uma seleção contínua $S:C[a,b] \rightarrow S_{m,k}$ para a projeção métrica P se e

somente se $k \leq m$.

Dem: Primeiramente, vamos mostrar que não há seleção contínua quando $k > m$.

Vamos construir duas seqüências $f_{1,n}$ e $f_{2,n}$, ambas convergentes para $f \in C[a,b]$, $(f_{i,n} \in C[a,b], i=1,2, n \in \mathbb{N}^*)$ tal que $P(f_{1,n}) = s_1$ e $P(f_{2,n}) = s_2$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $s_1 \neq s_2$.

Através destas duas seqüências, vemos que não há seleção contínua para a projeção métrica pois por um lado teríamos que ter $S(f) = s_1$ e por outro que $S(f) = s_2$. As seqüências descritas acima são dadas no:

Exemplo E.4 - Consideremos $S_{m,k}(x_1, \dots, x_k)$ onde $x_i = 2i, i=0, \dots, k+1$. Definimos $B(t) = \frac{B_{m+1}^m(t)}{\|B_{m+1}^m\|}$, onde $B_{m+1}^m(t)$ é um B-spline (ver de finição 0.9).

Construimos $f \in C[a,b]$ tal que

$$f(t) = \begin{cases} B(t) - 1 & , \quad x_1 \leq t \leq \bar{x} \\ 1 - B(t) & , \quad \bar{x} \leq t \leq x_{m+1} \end{cases} \quad , \quad \text{onde } \bar{x} \text{ é o ponto de}$$

máximo de $B(t)$. ($\bar{x}$ é único).

Vamos ainda requerer que f seja m -alternante em cada um dos intervalos: $[a, x_1], [x_{m+1}, x_{m+2}], [x_{m+2}, x_{m+3}], \dots, [x_k, b]$.

Podemos observar, pelo teorema 1.3, que $P(f) = \{\alpha B : -1 \leq \alpha \leq 1\}$

Definimos então as seqüências $f_{1,n}(t) \in C[a,b]$ e $f_{2,n}(t) \in C[a,b]$:

$$f_{1,n}(t) = \begin{cases} f(t) & , \quad t \in [a,b] - (x_{m+1}^{-2/n}, x_{m+1}^{-1/n}) \\ 1 + B(t) & , \quad t \in [x_{m+1}^{-1/n}, x_{m+1}] \\ \text{linear em } [x_{m+1}^{-2/n}, x_{m+1}^{-1/n}] \end{cases}$$

$$f_{2,n}(t) = \begin{cases} f(t) & , t \in [a, b] \setminus (x_1, x_1 + 2/n) \\ -1-B(t) & , t \in [x_1, x_1 + 1/n] \\ \text{linear em } [x_1 + 1/n, x_1 + 2/n] \end{cases}$$

É de fácil verificação que $f_{1,n} \rightarrow f$ e que $f_{2,n} \rightarrow f$,
sendo $P(f_{1,n}) = \{B\}$ e $P(f_{2,n}) = \{-B\}$ para todo n .

Observemos que se $k \leq m$ não existe $s \in S_{m,k}$ tal que:

$s|_{[a,x_1]} \equiv 0$, $s|_{[x_k,b]} \equiv 0$ e $s|_{[x_1,x_k]} \neq 0$, não sendo portanto possível construir um exemplo como o apresentado acima.

Vamos agora supor $k \leq m$ e construir uma seleção contínua para a projeção métrica:

Tomemos $s_0 \in P(f)$ e $[x_\ell, x_{\ell+1}]$ ($0 \leq \ell \leq k$) um intervalo onde as aproximações ótimas de f coincidem (a existência deste intervalo é garantida pela proposição 1.9).

Inicialmente aproximamos $f-s_0$ em $[x_{\ell+1}, b]$ por elementos de $G_{\ell+1} = \langle (t-x_{\ell+1})_+^{m-1}, \dots, (t-x_k)_+^{m-1} \rangle$ (se $\ell < k$)

Como $G_{\ell+1}$ é um subespaço fraco-Chebyshev de $S_{m,k}$ de dimensão $k-\ell$ existe uma função $s_1 \in P_{G_{\ell+1}}(f-s_0)$ tal que $(f-s_0-s_1)$ é $k-\ell$ alternante em $[x_{\ell+1}, b]$ (pelo teorema 0.15).

Temos:

$$\|f-s_0-s_1\|_{[a,x_{\ell+1}]} = \|f-s_0\|_{[a,x_{\ell+1}]} \leq \|f-s_0\|_{[a,b]}$$

$$\|f-s_0-s_1\|_{[x_{\ell+1},b]} \leq \|f-s_0\|_{[x_{\ell+1},b]} \leq \|f-s_0\|_{[a,b]}$$

Portanto $s_0+s_1 \in P(f)$

A seguir aproximamos $(f-s_0-s_1)$ em $[x_{\ell+2}, b]$ por elementos de $G_{\ell+2} = \langle (t-x_{\ell+2})_+^{m-1}, \dots, (t-x_k)_+^{m-1} \rangle$ (se $\ell+2 \leq k$) obtendo uma função $s_2 \in P_{G_{\ell+2}}(f-s_0-s_1)$ tal que $(f-s_0-s_1-s_2)$ é $k-\ell-1$ alternante em $[x_{\ell+2}, b]$ e tal que $(s_0+s_1+s_2) \in P(f)$.

Continuamos este processo até obtermos

$\bar{s}_0 = (s_0+s_1+\dots+s_{k-\ell}) \in P(f)$, sendo que $s_{k-\ell} \in P_{G_{\ell+k}}(f-s_0-\dots-s_{k-\ell-1})$

e $(f-s_0-\dots-s_{k-\ell})$ é ℓ -alternante em $[x_k, b]$.

Aproximamos então $f-\bar{s}_0$ em $[a, x_\ell]$ por elementos de $G'_\ell = \langle (x_1-t)_+^{m-1}, \dots, (x_\ell-t)_+^{m-1} \rangle$ (se $\ell > 0$) obtendo $s_{-1} \in P_{G'_\ell}(f-\bar{s}_0)$ tal que $(f-\bar{s}_0-s_{-1})$ é ℓ -alternante em $[a, x_\ell]$ e $(s_{-1}+\bar{s}_0) \in P(f)$.

Continuamos este processo até obtermos

$g = (s_{-\ell} + \dots + s_{-1} + \bar{s}_0) \in P(f)$, sendo que para cada i ($i=1, \dots, \ell$)

$s_{-i} \in G'_{\ell+1-i} = \langle (x_1-t)_+^{m-1}, \dots, (x_{\ell+1-i}-t)_+^{m-1} \rangle$,

$s_{-i} \in P_{G'_{\ell+1-i}}(f-s_{-i+1}-\dots-s_{-1}-\bar{s}_0)$ e $(f-s_{-i}-\dots-s_{-1}-\bar{s}_0)$ é $\ell+1-i$ -alternante em $[a, x_{\ell+1-i}]$.

Definimos então a seguinte seleção para a projeção métrica: $s_f = g$.

Antes de verificar a continuidade de s_f vamos mostrar que esta seleção está bem definida, ou seja, que não depende da escolha de s_i ($i=-\ell, -\ell+1, \dots, 0, \dots, k-\ell$) e nem do intervalo $[x_\ell, x_{\ell+1}]$.

Para tal, verifiquemos primeiramente alguns fatos:

a) Aproximamos $f-s_0$ por $G_{\ell+1}$ e obtivemos $s_1 \in P_{G_{\ell+1}}(f-s_0)$ tal que $(f-s_0-s_1)$ é $k-\ell$ -alternante em $[x_{\ell+1}, b]$ e $(s_0+s_1) \in P(f)$. Se $\tilde{s}_1 \in G_{\ell+1}$, $\tilde{s}_1 \neq s_1$, possui as mesmas propriedades de s_1 , às quais acabamos de descrever, então $\tilde{s}_1|_{[x_{\ell+1}, x_{\ell+2}]} = s_1|_{[x_{\ell+1}, x_{\ell+2}]}$.

Vejamos:

Suponhamos que $s_1 \neq \tilde{s}_1$ em $[x_{\ell+1}, x_{\ell+2}]$. Neste caso $(s_1-\tilde{s}_1)$ só possui zeros isolados em $[x_{\ell+1}, b]$ pois $(s_1-\tilde{s}_1)=0$ em $[a, x_{\ell+1}]$ e $k \leq m$ (ver observação 0.11).

Devido às propriedades de alternância de $(f-s_0-s_1)$ e de

$(f-s_0-\tilde{s}_1)$ temos a existência de pontos:

$$x_{\ell+1} \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{k-\ell+1} \leq b \quad \text{tal que}$$

$$\delta(-1)^i (f-s_0-s_1)(t_i) = ||f-s_0-s_1||, \quad i=1, \dots, k-\ell+1, \quad \delta \in \{-1, 1\}$$

e

$$x_{\ell+1} \leq \tilde{t}_1 < \tilde{t}_2 < \dots < \tilde{t}_{k-\ell+1} \leq b \quad \text{tal que}$$

$$\tilde{\delta}(-1)^i (f-s_0-\tilde{s}_1)(\tilde{t}_i) = ||f-s_0-\tilde{s}_1||, \quad i=1, \dots, k-\ell+1, \quad \tilde{\delta} \in \{-1, 1\}$$

Temos;

$$\delta(-1)^i (f-s_0-s_1)(t_i) = ||f-s_0-s_1|| = ||f-s_0-\tilde{s}_1|| \geq \tilde{\delta}(-1)^i (f-s_0-\tilde{s}_1)(\tilde{t}_i), \quad i=1, \dots, k-\ell+1$$

$$\text{e portanto: } \delta(-1)^i (\tilde{s}_1-s_1)(t_i) \geq 0, \quad i=1, \dots, k-\ell+1 \quad (1)$$

$$\text{analogamente obtemos: } \tilde{\delta}(-1)^i (\tilde{s}_1-s_1)(\tilde{t}_i) \leq 0, \quad i=1, \dots, k-\ell+1 \quad (2)$$

Se $\tilde{t}_1 > x_{\ell+1}$ ou $t_1 > x_{\ell+1}$, pelo lema 1.1 verificamos que $\tilde{s}_1-s_1$ possui $k-\ell$ zeros em $(x_{\ell+1}, b]$.

Se $\tilde{t}_1 = t_1 = x_{\ell+1}$ também obtemos o mesmo número de zeros de $\tilde{s}_1-s_1$ em $(x_{\ell+1}, b]$. Verifiquemos: Por termos $\tilde{t}_1 = t_1$ obtemos que $\delta = \tilde{\delta}$. Se $t_i = \tilde{t}_i$, $i=2, \dots, k-\ell+1$ temos de (1) e (2) que $(\tilde{s}_1-s_1)(t_i) = 0$, $i=2, \dots, k-\ell+1$ mostrando o desejado, caso contrário existe um menor índice q tal que $t_q \neq \tilde{t}_q$. Vamos supor, sem perda de generalidade que $t_q < \tilde{t}_q$. Escolhemos:

$$w_i = t_i, \quad i=1, \dots, q \quad \text{e} \quad w_i = \tilde{t}_{i-1}, \quad i=q+1, \dots, k-\ell+2.$$

Por (1) e (2) temos que $\delta(-1)^i (\tilde{s}_1-s_1)(w_i) \geq 0$, $i=1, \dots, k-\ell+2$ e pelo lema 1.1 concluimos que $\tilde{s}_1-s_1$ possui $k-\ell$ zeros em $(x_{\ell+1}, b]$.

Como $s_1 = \tilde{s}_1$ em $[a, x_{\ell+1}]$ resulta que $[a, x_{\ell+1}]$ é um zero de ordem $m+\ell$ de $\tilde{s}_1 - s_1$ e portanto que $\tilde{s}_1 - s_1$ possui $m+k$ zeros em $[a, b]$. Pelo teorema 0.14 temos que $\tilde{s}_1 = s_1$ em $[a, b]$ contradizendo nossa suposição de que $\tilde{s}_1 \neq s_1$ em $[x_{\ell+1}, x_{\ell+2}]$.

- b) Se tivermos $g_0 \in P(f)$, $g_0 \neq s_0$, e $g_1 \in P_{G_{\ell+1}}(f - g_0)$ com $(f - g_0 - g_1)^{k-\ell}$ alternante em $[x_{\ell+1}, b]$ então $g_0 + g_1 = s_0 + s_1$ em $[x_{\ell}, x_{\ell+2}]$. Veja mos:

Temos $g_0 = s_0$ em $[x_{\ell}, x_{\ell+1}]$ (pela forma como foi escolhido $[x_{\ell}, x_{\ell+1}]$) e portanto a função

$$\tilde{g}_0(t) = \begin{cases} g_0(t) - s_0(t) & , t \in [x_{\ell+1}, b] \\ 0 & , t \in [a, x_{\ell+1}] \end{cases} \text{ pertence a } G_{\ell+1}. \text{ As}$$

funções $(f - s_0 - s_1)$ e $(f - g_0 - g_1) = f - s_0 - (g_1 + \tilde{g}_0)$ são $k-\ell$ alternantes em $[x_{\ell+1}, b]$ e $g_1 + \tilde{g}_0 \in G_{\ell+1}$. Segue de (a) que $s_1 = g_1 + \tilde{g}_0 = g_1 + g_0 - s_0$ em $[x_{\ell+1}, x_{\ell+2}]$.

Usando (a) e (b) vemos que a função $(s_0 + s_1)|_{[x_{\ell}, x_{\ell+2}]}$ independe da escolha de s_0 e s_1 . Procedendo do mesmo modo verifica-se que $(s_0 + s_1 + s_2)|_{[x_{\ell}, x_{\ell+3}]}$ independe da escolha de s_0, s_1 e s_2 . Continuando, vê-se então que $s_f = s_{-\ell} + s_{-\ell+1} + \dots + s_0 + \dots + s_{k-\ell}$ é independente da escolha das funções s_i ($i = -\ell, \dots, k-\ell$). Note mos que para s_{f_1} e s_{f_2} construídas a partir de intervalos distintos temos que $s_{f_1} = s_{f_2}$ no intervalo de unicidade (que existe pois $k \leq m$, conforme a proposição 1.10). Deste fato e da liberdade de escolha das funções intermediárias na construção de s_{f_1} e s_{f_2} decorre que $s_f = s_{f_1} = s_{f_2}$, mostrando que s_f está bem definida, pois não depende do intervalo $[x_{\ell}, x_{\ell+1}]$ escolhido.

Vamos agora mostrar que a seleção definida é contínua.

Tomemos uma sequência (f_n) em $C[a,b]$ tal que $f_n \rightarrow f$ e $s_{f_n} \rightarrow g \in S_{m,k}$. (Notemos que $S_{m,k}$ é um espaço de dimensão finita) e verifiquemos que $g = s_f$. Como há somente um número finito de intervalos de nós em $[a,b]$, podemos supor recorrendo a uma subsequência se necessário, que os intervalos de unicidade forte I_{f_n} das aproximações ótimas de f_n sejam iguais a I para todo n .

Mostremos que existe um intervalo de nós

$[x_\ell, x_{\ell+1}] \subset (I \cap I_u)$, onde I_u é o intervalo de unicidade das aproximações ótimas de f .

Pela proposição 1.9 temos que $f_n - s_{f_n}$ é $m+r-q$ alternante em $I = [x_q, x_{r+1}] \forall n$.

Portanto, existem pontos $x_q \leq t_{1,n} < t_{2,n} < \dots < t_{m+r-q+1,n} < x_{r+1}$ tal que:

$$\delta(-1)^i (f_n - s_{f_n})(t_{i,n}) = \|f_n - s_{f_n}\|, \quad i=1, \dots, m+r-q+1, \quad \delta \in \{-1, 1\}$$

Existe uma subsequência de $(t_{i,n})$ ($i=1, \dots, m+r-q+1$) que ainda denotaremos por $(t_{i,n})$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_{i,n} = t_i$, $i=1, \dots, m+r-q+1$.

Obtemos:

$$\begin{aligned} \delta(-1)^i \|f - g\| &= \delta(-1)^i \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - s_{f_n}\| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(t_{i,n}) - f(t_{i,n}) + f(t_{i,n}) - g(t_{i,n}) + g(t_{i,n}) - s_{f_n}(t_{i,n})) = \\ &= f(t_i) - g(t_i), \quad i=1, \dots, m+r-q+1 \end{aligned}$$

Assim sendo, $f-g$ é $m+r-q$ alternante em $I = [x_q, x_{r+1}]$ e portanto, pela proposição 1.11 existe um intervalo

$$[x_\ell, x_{\ell+1}] \subset (I \cap I_u).$$

Tomemos então este intervalo para iniciar a construção de s_f e de s_{f_n} .

Sejam $s_f = s_{-\ell} + \dots + s_0 + \dots + s_{k-\ell}$ e $s_{f_n} = s_{-\ell, n} + \dots + s_{0, n} + \dots + s_{k-\ell, n}$.

Tomando nova subsequência se necessário, podemos supor que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{i, n} = \tilde{s}_i$ $i = -\ell, \dots, k-\ell$ (pois as sequências são limitadas) e portanto $g = \tilde{s}_{-\ell} + \dots + \tilde{s}_0 + \dots + \tilde{s}_{k-\ell}$. Ainda obtemos que $\tilde{s}_0 \in P(f)$, $\tilde{s}_i \in P_{G_{\ell+i}}(f - \tilde{s}_0 - \dots - \tilde{s}_{i-1})$, $i = 1, \dots, k-\ell$ e $\tilde{s}_{-i} \in P_{G'_{\ell+1-i}}(f - \tilde{s}_{-i+1} - \dots - \tilde{s}_0 - \dots - \tilde{s}_{k-\ell})$, $i = 1, \dots, \ell$.

Mais ainda, como $(f_n - s_{0, n} - \dots - s_{i, n})$ é $k-\ell-i+1$ alternante em $[x_{\ell+i}, b]$ ($i = 1, \dots, k-\ell$), obtemos, através de novas subsequências se necessário, que $(f - \tilde{s}_0 - \dots - \tilde{s}_i)$ é $k-\ell-i+1$ alternante em $[x_{\ell+i}, b]$. Analogamente, vemos que $(f - \tilde{s}_{-i} - \dots - \tilde{s}_0 - \dots - \tilde{s}_{k-\ell})$ é $\ell+1-i$ alternante em $[a, x_{\ell+1-i}]$ ($i = 1, \dots, \ell$). Isto mostra que na construção de s_f podemos escolher $s_i = \tilde{s}_i$ ($i = -\ell, \dots, k-\ell$) e que portanto $g = s_f$ mostrando a continuidade da seleção s_f .

(A construção de s_f está ilustrada nos exemplos E.5, E.6 e E.7)

Observação - Blatt, Nürnberger e Sommer [1], mostraram que a seleção contínua s_f é pontualmente Lipschitz e quasi-linear. (*)

Vamos agora discutir sobre unicidade de seleções contínuas. Quando existe uma seleção contínua para a projeção mé-

(*) Uma seleção $S: C[a, b] \rightarrow S_{m, k}$ para a projeção métrica P é pontualmente Lipschitz se para todo $f \in C[a, b]$ existe $k_f > 0$ tal que para todo $\tilde{f} \in C[a, b]$ temos $\|s(f) - s(\tilde{f})\| \leq k_f \|f - \tilde{f}\|$. A seleção é quasi-linear se para cada $f \in C[a, b]$ e cada $g \in S_{m, k}$ e constantes c e d temos $s(cf + dg) = cs(f) + dg$.

trica, podemos construir de maneira indutiva, utilizando um resultado geral sobre seleções contínuas de Blatter e Schumaker[3], o conjunto: $P^*(f) = \{S(f) : S \text{ é uma seleção contínua para a projeção métrica } P\}$ para todo $f \in C[a, b]$.

Tomemos $K \leq m$ (neste caso existe seleção contínua, como vimos no teorema 2.2), $f \in C[a, b]$ e descrevamos a construção de $P^*(f)$, para a qual utilizaremos a seleção s_f definida no teorema 2.2.

Tomamos $P_0 = P(f)$ e indutivamente definimos uma sequência de intervalos $I_0, I_1, \dots$ e uma sequência de conjuntos $P_1, \dots$ da seguinte maneira:

I_j = o menor intervalo de nós contendo $E(f - P_j)$ em seu interior relativo (com respeito a $[a, b]$) e

$P_{j+1} = \{g \in P_j : g \text{ coincide com } s_f \text{ em } I_j\}$, $j = 0, 1, \dots$.

Claramente, existe um menor índice i , tal que todos os elementos de P_i coincidem com s_f em I_i . Para este índice i , $E(f - P_i)$ está contido no interior relativo de I_i e temos que $P^*(f) = P_i$. Denominamos $I^*(f) = I_i$. (Os exemplos E.5, E.6 e E.7 ilustram esta construção).

A construção apresentada aqui é uma natural adaptação da construção efetuada em [3] por Blatter e Schumaker, usando o fato de estarmos aproximando $f \in C[a, b]$ por splines polinomiais. Esta adaptação foi também utilizada pelos autores em [4], onde também responderam à questão sobre unicidade de seleções contínuas, através do teorema seguinte.

Teorema 2.3 - Em aproximação por splines polinomiais, nunca há uma única seleção contínua para a projeção métrica P .

Dem: Obtemos do teorema 2.2 que se $k > m$ não há seleção contínua. Suponhamos então $1 \leq k \leq m$. Tomemos $f \in C[a, b]$ m alternante em $[a, x_1]$ e identicamente nula em $[x_1, b]$ e tal que $\|f\| = 1$. Utilizando o teorema 1.3 vemos que $d(f) = 1$ e que qualquer spline da forma $\alpha(t - x_1)_+^{m-1} \in P(f)$, desde que $|\alpha(b - x_1)_+^{m-1}| \leq 1$. Como $E(f - P(f)) = [a, x_1]$ resulta que $I^*(f) = [a, x_1]$ e $P^*(f) = P(f)$, mostrando que não temos unicidade de seleções contínuas no caso $k \leq m$.

Vamos a seguir, apresentar dois resultados sobre aproximações ótimas que alternam um número máximo de vezes, que posteriormente usaremos para selecionar uma aproximação ótima à qual relacionaremos com seleções contínuas. O teorema seguinte é bem conhecido (ver p/ex. [21]) e o lema que o segue foi apresentado em [4].

Teorema 2.4 - Dada $f \in C[a, b] \sim S_{m, k}$ existe $s \in P(f)$ tal que $f - s$ é pelo menos $m + k$ alternante e tal que $f - \tilde{s}$ alterna no máximo o mesmo número de vezes que $f - s$, $\forall \tilde{s} \in P(f)$.

Dem: É suficiente mostrarmos que o número de vezes que $f - \tilde{s}$ alterna é limitado por um número c (independente de $\tilde{s}$) para todo $\tilde{s} \in P(f)$. Temos que em cada intervalo de nós o número de alterações de $f - \tilde{s}$ ou é limitado por m ou pelo número de alterações de $f - \tilde{s}$ neste intervalo (onde $\tilde{s} \in P(f)$ e $f - \tilde{s}$ alterna mais que m vezes neste intervalo. Notemos que, $\forall \tilde{s} \in P(f)$, teremos que $\tilde{s}$ e $\tilde{s}$ coin-

cidem neste intervalo), para todo $\tilde{s} \in P(f)$. Portanto, existe o número c que limita o número de alternações de $f-\tilde{s}$, $\forall \tilde{s} \in P(f)$ e consequentemente a função s desejada, a qual chamamos de alternante maximal.

Pelo teorema 0.15, $f-s$ alterna pelo menos $m+k$ vezes.

Lema 2.5 ($K \leq m$) - Dados $f \in C[a,b] \sim S_{m,k}$ e $s \in P(f)$ alternante maximal, temos que para quaisquer inteiros r e ℓ tal que $0 \leq \ell \leq r \leq k$ os conjuntos $A_r = \{t: a \leq t \leq x_{r+1} \text{ e } |(f-s)(t)| = d(f)\}$ e $B_\ell = \{t: x_\ell \leq t \leq b \text{ e } |(f-s)(t)| = d(f)\}$ são não vazios. Mais ainda, se $\ell > 0$, existem pontos $a \leq t_1 < \dots < t_\ell < x_\ell$ tal que:

$$(-1)^i (f-s)(t_i) = (-1)^{\ell-1} (f-s)(\underline{t}), \quad i=1, \dots, \ell \quad \text{onde } \underline{t} = \inf\{t \in B_\ell\} \quad (1)$$

e se $r < k$ existem pontos $x_{r+1} < t_{r+1} < \dots < t_k \leq b$ tal que:

$$(-1)^i (f-s)(t_i) = (-1)^r (f-s)(\bar{t}), \quad i=r+1, \dots, k \quad \text{onde } \bar{t} = \sup\{t \in A_r\} \quad (2)$$

Dem: Vamos inicialmente supor $A_r \neq \emptyset$ ($0 \leq r \leq k$) e $B_\ell \neq \emptyset$ ($0 \leq \ell \leq k$) e mostrar (1) e (2).

Vamos supor $r < k$ e que (2) não se verifique. Neste caso vamos mostrar que existe $\tilde{s} \in P(f)$ tal que $f-\tilde{s}$ alterna mais vezes que $f-s$, contradizendo as hipóteses.

Para $\bar{t} = \sup\{t \in A_r\}$ podemos ter:

a) $\bar{t} = x_{r+1}$

Neste caso, aproximamos $f-s$ em $[x_{r+1}, b]$ por elementos de

$$G = \langle (t-x_{r+1})_+^{m-1}, \dots, (t-x_k)_+^{m-1} \rangle.$$

Como G é fraco-Chebyshev de dimensão $k-r$, pelo teorema 0.15, existe $g \in G$ tal que $(f-s-g)$ é $k-r$ alternante em $[x_{r+1}, b]$. Co-

mo $|(f-s-g)(x_{r+1})| = |(f-s)(x_{r+1})| = d(f)$ obtemos que

$\|f-s-g\|_{[x_{r+1}, b]} = d(f)$. Assim sendo, existem pontos

$x_{r+1} = t_r < t_{r+1} < \dots < t_k \leq b$ tal que $(-1)^r (f-s)(\bar{t}) = (-1)^i (f-s-g)(t_i)$,

$i=r, \dots, k$ e portanto $\tilde{s} = s+g \in P(f)$ e $f-\tilde{s}$ alterna mais que $f-s$.

b) $\bar{t} < x_{r+1}$

Neste caso $\delta = d(f) - |(f-s)(x_{r+1})| > 0$. Tomamos

$$c = \sup \left\{ c_{r+1} : \left\| \sum_{i=r+1}^k c_i (t-x_i)_+^{m-1} \right\|_{[x_{r+1}, b]} \leq 2d(f) \right\} \text{ e } 0 < \epsilon < x_{r+2} - x_{r+1}$$

tal que $c\epsilon^{m-1} < \delta/2$ e $|(f-s)(t)| < d(f) - \delta/2$ para todo

$$t \in I_\epsilon = [x_{r+1}, x_{r+1} + \epsilon].$$

$$\text{Definimos: } u(t) = \begin{cases} (f-s)(\bar{t}) & , t = x_{r+1} \\ \text{linear} & , t \in I_\epsilon \\ (f-s)(t) & , x_{r+1} + \epsilon \leq t \leq b \end{cases}, \quad u(t) \in C[x_{r+1}, b]$$

Pelo teorema 0.15 existe $g \in G$ tal que $u-g$ é $k-r$ alternante em

$[x_{r+1}, b]$. Como $|u(x_{r+1})| = |(f-s)(\bar{t})| = d(f)$ existem pontos

$x_{r+1} = t_r < t_{r+1} < \dots < t_k \leq b$ tal que $(-1)^r (u-g)(x_{r+1}) = (-1)^i (u-g)(t_i)$,

$i=r, \dots, k$.

Pela escolha de ϵ temos que $\|g\|_{I_\epsilon} \leq \delta/2$ e para $t \in I_\epsilon$:

$$u(t) > -d(f) + \delta/2 \quad \text{se } (f-s)(\bar{t}) > 0$$

ou

$$u(t) < d(f) - \delta/2 \quad \text{se } (f-s)(\bar{t}) < 0$$

Portanto $x_{r+1} + \epsilon \leq t_{r+1}$ e por termos $u(t) = (f-s)(t)$ para

$x_{r+1} + \epsilon \leq t \leq b$ e $\|g\|_{I_\epsilon} \leq \delta/2$ obtemos que $\tilde{s} = s+g \in P(f)$ e que $f-\tilde{s}$

alterna mais que $f-s$.

Analogamente, mostra-se que (1) é satisfeito se $\ell > 0$.

Resta-nos mostrar que $B_\ell \neq \emptyset$ para $\ell = 0, \dots, k$ e que $A_r \neq \emptyset$ para $r = 0, \dots, k$.

Vamos supor que $B_k = \emptyset$. Neste caso, $A_{k-1} \neq \emptyset$, pois caso contrário não existiria $t \in [a, b]$ tal que $|(f-s)(t)| = d(f)$, e verifica-se a existência de $\tilde{s} = s + c(t - x_k)_+^{m-1}$ tal que $f - \tilde{s}$ alterna mais que $f - s$ chegando-se a uma contradição. Portanto $B_k \neq \emptyset$ e consequentemente $B_\ell \neq \emptyset$ para $\ell = 0, \dots, k$. Analogamente mostra-se que $A_r \neq \emptyset$ para $r = 0, \dots, k$.

Blatter e Schumaker [4] caracterizaram em que condições há uma única aproximação alternante maximal para $f \in C[a, b] \sim S_{m, k}$. Nürnberger e Sommer [18] chegaram ao mesmo resultado, de maneira independente.

Teorema 2.6 - Todo $f \in C[a, b] \sim S_{m, k}$ possui uma única aproximação alternante maximal se e somente se $k \leq m$.

Dem: Suponhamos que para $k \leq m$ exista $f \in C[a, b] \sim S_{m, k}$, $s \in P(f)$ e $\tilde{s} \in P(f)$ ($s \neq \tilde{s}$) tal que s e $\tilde{s}$ sejam alternantes maximais.

Seja $I = [x_\ell, x_{r+1}]$ o maior intervalo de nós em que s e $\tilde{s}$ coincidem (I é não vazio, pela proposição 1.10). Se $I = [a, b]$ nada há a mostrar. Suponhamos então que $I \neq [a, b]$. Neste caso, a função $s - \tilde{s}$ só possui zeros simples em $[a, b] \sim I$ (ver observação 0.11). Devido ao lema 2.5, se $\ell > 0$, existem pontos $a \leq t_1 < \dots < t_\ell < x_\ell$, $a \leq \tilde{t}_1 < \dots < \tilde{t}_\ell < x_\ell$ e $\delta \in \{-1, 1\}$ tal que:

$$\delta(-1)^i(f-s)(t_i) = ||f-s||, \quad i=1, \dots, \ell \quad \text{e} \quad \delta(-1)^i(f-\tilde{s})(\tilde{t}_i) = ||f-\tilde{s}||, \\ i=1, \dots, \ell.$$

Mostremos que $s-\tilde{s}$ possui ℓ zeros em $[a, x_\ell)$. Se $t_i = \tilde{t}_i$ ($i=1, \dots, \ell$) a conclusão é imediata, senão escolhemos q como o menor índice tal que $t_q \neq \tilde{t}_q$. Sem perda de generalidade supomos $t_q < \tilde{t}_q$ e escolhemos:

$$w_i = t_i, \quad i=1, \dots, q, \quad , \quad w_i = \tilde{t}_{i-1}, \quad i=q+1, \dots, \ell+1$$

Obtemos que $\delta(-1)^i(\tilde{s}-s)(w_i) \geq 0$, $i=1, \dots, \ell+1$ e portanto, pelo lema 1.1, que $s-\tilde{s}$ possui ℓ zeros em $[a, x_\ell)$. Analogamente verifica-se que $(s-\tilde{s})$ possui $(k-r)$ zeros em $(x_{r+1}, b]$ (se $r < k$). Como $[x_\ell, x_{r+1}]$ é um zero de ordem $m+r-\ell$ de $s-\tilde{s}$, o número de zeros de $s-\tilde{s}$ em $[a, b]$ é pelo menos $m+k$, o que mostra, pelo teorema 0.14, que $s=\tilde{s}$ em $[a, b]$.

Tomemos agora $k > m$.

Consideremos a função f apresentada no exemplo E.4, para a qual temos $P(f) = \{\alpha B : -1 \leq \alpha \leq 1\}$ e que $f-\alpha B$ alterna o mesmo número de vezes para $\forall -1 \leq \alpha \leq 1$. Este exemplo, mostra que não há unicidade de alternantes maximais quando $k > m$.

As funções alternantes maximais estão ilustradas nos três exemplos a seguir, nos quais aproximamos funções em $C[0, 3]$ por $S_{2,2}(1,2)$ (notemos que $k \leq m$).

Exemplo E.5

$$f = \begin{cases} 1, & t=0, t=1 \\ 0, & t \in [2, 3] \\ -1, & t=1/2 \\ \text{Linear nos outros pontos} \end{cases} \quad M_f = S_f = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1] \\ 1, & t=2 \\ -1, & t=3 \\ \text{linear nos outros pontos} \end{cases}$$

M_f = alternante maximal

S_f = seleção contínua definida no teorema 2.2

Temos $P_0 = P(f) = \{\alpha(x-1)_+ + \beta(x-2)_+ : -1 \leq \alpha \leq 1, -1 \leq 2\alpha + \beta \leq 1\}$,

$I^*(f) = I_2 = [0, 3]$ e $P^*(f) = P_2 = \{S_f\}$

Exemplo E.6

$$f = \begin{cases} 0, & t=0, t \in [2, 3] \\ 1, & t=1, t=7/4 \\ -1, & t=3/2 \\ \text{linear nos outros pontos} \end{cases} \quad S_f = \begin{cases} 0, & t \in [1, 3] \\ 1, & t=0 \\ \text{linear nos outros pontos} \end{cases} \quad M_f = \begin{cases} 1, & t=0, t=3 \\ 0, & t \in [1, 2] \\ \text{linear nos outros pontos} \end{cases}$$

$P_0 = P(f) = \{\alpha(1-x)_+ + \beta(x-2)_+ : -1 \leq \alpha, \beta \leq 1\}$, $I^*(f) = I_1 = [0, 2]$ e

$P^*(f) = P_1 = \{(1-x)_+ + \beta(x-2)_+ : -1 \leq \beta \leq 1\}$.

Exemplo E.7 -

$$f = \begin{cases} 1 & , t=0, t=3/4 \\ -1 & , t=1/2 \\ 0 & , t \in [1, 3] \\ \text{linear nos outros pontos} \end{cases} \quad S_f = 0 \quad M_f = \begin{cases} 0 & , t \in [0, 1] \\ 1 & , t=2 \\ -1 & , t=3 \\ \text{linear nos outros pontos.} \end{cases}$$

$$P_O = P(f) = \{ \alpha(x-1)_+ + \beta(x-2)_+ : -1 \leq \alpha \leq 1 \text{ e } -1 \leq 2\alpha + \beta \leq 1 \} , \quad I^*(f) = I_O = [0, 1] \quad e$$

$$P^*(f) = P_O = P(f).$$

Os exemplos E.5, E.6 e E.7 foram apresentados em [4].

Sabendo que quando $k \leq m$ a projeção métrica possui mais de uma seleção contínua e que a alternante maximal é única, é natural definir a seguinte seleção para a projeção métrica:

$$M: C[a, b] \longrightarrow S_{m,k} \quad (\text{para } k \leq m).$$

$$M(f) = \begin{cases} f & , \text{ se } f \in S_{m,k} \\ M_f & , \text{ c.c.} \end{cases} \quad , \text{ onde } M_f \text{ é a alternante maximal.}$$

No entanto, como mostra o seguinte exemplo de Nürnberger e Sommer, esta seleção não é contínua:

Exemplo E.8

$$f = \begin{cases} 0, & t=1 \\ -1, & t=0, \quad t=-1/2 \\ 1, & t=-1, \quad t=-1/4 \\ \text{linear nos outros pontos} \end{cases}$$

$$M_f(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-1, 0] \\ -t, & t \in [0, 1] \end{cases}$$

$$f_n = \begin{cases} 0, & t=1 \\ -1+1/n, & t=0 \\ -1, & t=-1/2 \\ 1, & t=-1, \quad t=-1/4 \\ \text{linear nos outros pontos} \end{cases}$$

$$M_{f_n}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-1, 0] \\ t, & t \in [0, 1] \end{cases}$$

Temos que $f_n \rightarrow f$ mas $M_{f_n} \not\rightarrow M_f$.

O próximo teorema, devido a Blatter e Schumaker [4], mostra que a alternante maximal, apesar de não se constituir numa seleção contínua para a projeção métrica, guarda relações estreitas com estas.

Teorema 2.7 ($k \leq m$) - A alternante maximal associada a cada $f \in C[a, b] \sim S_{m, k}$ é imagem de f por alguma seleção contínua para a projeção métrica.

Dem: Temos que mostrar que $M_f \in P^*(f)$, $\forall f \in C[a, b] \sim S_{m, k}$. Pela construção de $P^*(f)$, basta mostrar que $M_f \in P_i^*$, $i=0, 1, \dots$, o que é

equivalente a mostrar que se $M_f \in P_i$ então $M_f \in P_{i+1}$, pois certamente $M_f \in P_0$.

Suponhamos então que $M_f \in P_i$. Os elementos de P_i coincidem no intervalo de unicidade de f e portanto, como $k \leq m$, existe um intervalo maximal $[x_\ell, x_{r+1}]$ ($0 \leq \ell \leq r \leq k$) onde todos os elementos de P_i coincidem. Da mesma maneira como fizemos na proposição 1.12 verifica-se que $E(f-P_i) \subset [x_\ell, x_{r+1}]$ e como $M_f \in P_i$ temos que $M_f = s_f$ em $[x_\ell, x_{r+1}]$. Para mostrar que $M_f \in P_{i+1}$ resta verificar que $M_f = s_f$ em uma vizinhança de $E(f-P_i)$. Se $r < k$ e $x_{r+1} \in E(f-P_i)$, temos do lema 2.5 que $f-M_f$ é $k-r$ alternante em $[x_{r+1}, b]$ e portanto, pela construção de s_f temos que $M_f = s_f$ em $[x_{r+1}, x_{r+2}]$. Analogamente, se $\ell > 0$ e $x_\ell \in E(f-P_i)$ concluímos que $M_f = s_f$ em $[x_{\ell-1}, x_\ell]$. Isto mostra que $M_f \in P_{i+1}$.

Vamos agora passar ao caso em que aproximamos $f \in C(D)$, $D \subset [a, b]$, D finito, por $S_{m,k}$. Neste caso, vamos mostrar a existência de uma seleção contínua para a projeção métrica. Rice [19] introduziu uma maneira de selecionarmos uma aproximação ótima de $f \in C(D)$, D finito, por elementos de um subespaço de dimensão finita G de $C(D)$. Esta aproximação, também estudada por Descloux ([6], [7]), é chamada de aproximação estrita. Vamos inicialmente descrever como construí-la:

2.8 - Construção da aproximação estrita - Dados um conjunto finito D , G subespaço de dimensão finita de $C(D)$ e $f \in C(D) - G$, fixamos:

$$G_0 = G, \quad D_0 = D, \quad P_0 = P_G(f), \quad g_0 \in P_0, \quad E_0 = E(f-P_0) \text{ e } d_0 = d(f)$$

e definimos recursivamente:

$$G_i = \{g \in G_{i-1} : g|_{E_{i-1}} = 0\}, \quad Y_i = \{x \in D_{i-1} : g(x) = 0, \forall g \in G_i\}, \quad D_i = D_{i-1} - Y_i,$$

$$P_i = \{g \in G_i : g \text{ é aprox. ótima de } (f - g_0 - \dots - g_{i-1}) \text{ em } D_i\}, \quad E_i = E((f - g_0 - \dots - g_{i-1}) - P_i) \\ (\text{em } D_i), \quad g_i \in P_i, \quad d_i = \|f - g_0 - g_i\|_{D_i}, \quad i=1, 2, \dots$$

O processo termina quando $D_{\ell+1} = \emptyset$ (o que ocorre pois a cada i , tal que $D_i \neq \emptyset$, temos que $E_i \neq \emptyset$ e que $Y_{i+1} \neq \emptyset$ e portanto $D_0 \supsetneq D_1 \supsetneq \dots \supsetneq D_{\ell+1} = \emptyset$).

A aproximação estrita é definida então como

$$g^* = g_0 + g_1 + \dots + g_\ell.$$

Mostremos que g^* está bem definida, ou seja, que independe da escolha das funções g_i , $i=0, \dots, \ell$.

Tomemos $\tilde{g}$ e $\bar{g}$ construídas conforme descrevemos acima e verifiquemos que $\tilde{g} = \bar{g}$, onde $\tilde{g} = \tilde{g}_0 + \dots + \tilde{g}_{\ell_1}$ e $\bar{g} = \bar{g}_0 + \dots + \bar{g}_{\ell_2}$.

Temos $D = \bigcup_{i=1}^{\ell_1+1} \tilde{Y}_i$. Vamos mostrar, por indução sobre i que $\tilde{Y}_i = \bar{Y}_i$, $\tilde{E}_{i-1} = \bar{E}_{i-1}$, $\tilde{G}_i = \bar{G}_i$ e que $g = \tilde{g}$ em $\bigcup_{j=1}^i \tilde{Y}_j$.

Seja $i=1$.

$$\tilde{E}_0 = \bar{E}_0 = E(f - P(f)), \quad \tilde{G}_1 = \bar{G}_1 = \{g \in G : g|_{\tilde{E}_0} = 0\} \quad \text{e}$$

$$\tilde{Y}_1 = \bar{Y}_1 = \{x \in D : g(x) = 0, \forall g \in \tilde{G}_1\}.$$

$$\tilde{g}_0 \in P(f) \quad \text{e} \quad \bar{g}_0 \in P(f) \quad \therefore \quad \tilde{g}_0 = \bar{g}_0 \text{ em } E_0 \Rightarrow \tilde{g}_0 - \bar{g}_0 \in \tilde{G}_1 \Rightarrow \tilde{g}_0 = \bar{g}_0 \text{ em } \tilde{Y}_1$$

$$\text{Como } \tilde{g}|_{\tilde{Y}_1} = \tilde{g}_0 \quad \text{e} \quad \bar{g}|_{\tilde{Y}_1} = \bar{g}_0 \quad \text{obtemos } \tilde{g} = \bar{g} \text{ em } \tilde{Y}_1.$$

Suponhamos o resultado válido para $1 \leq j \leq i-1$ e mostremos para i :

Pela hipótese de indução temos que $\tilde{G}_{i-1} = \bar{G}_{i-1}$ e que $\tilde{D}_{i-1} = \bar{D}_{i-1}$ e que $\tilde{g}_{i-1}$ é aproximação ótima de $(f - \tilde{g}_0 - \dots - \tilde{g}_{i-2})$ em $\tilde{D}_{i-1}$ por $\tilde{G}_{i-1}$ e $\bar{g}_{i-1}$ é aproximação ótima de $(f - \bar{g}_0 - \dots - \bar{g}_{i-2})$ em $\bar{D}_{i-1}$ por $\bar{G}_{i-1}$.

Seja $s = \tilde{g}_0 + \dots + \tilde{g}_{i-2} - \bar{g}_0 - \dots - \bar{g}_{i-2}$. Pela hipótese de indução temos $s = 0$ em $\bigcup_{j=1}^{i-1} \tilde{Y}_j$ e portanto $s \in \tilde{G}_{i-1}$.

Obtemos:

$$\tilde{d}_{i-1} = \|f - \tilde{g}_0 - \dots - \tilde{g}_{i-1}\|_{\tilde{D}_{i-1}} = \|f - \tilde{g}_0 - \dots - \tilde{g}_{i-2} - (s + \tilde{g}_{i-1})\|_{\tilde{D}_{i-1}} \geq \bar{d}_{i-1}$$

$$\bar{d}_{i-1} = \|f - \bar{g}_0 - \dots - \bar{g}_{i-1}\|_{\bar{D}_{i-1}} = \|f - \bar{g}_0 - \dots - \bar{g}_{i-2} - (\bar{g}_{i-1} - s)\|_{\bar{D}_{i-1}} \geq \tilde{d}_{i-1}$$

Portanto $\bar{d}_{i-1} = \tilde{d}_{i-1}$ e $\bar{g}_{i-1} = s + \tilde{g}_{i-1}$ em $\tilde{E}_{i-1} \Rightarrow \bar{g}_{i-1} = s + \tilde{g}_{i-1}$ em $\tilde{Y}_i$.

Isto e mais a hipótese de indução mostram que $\bar{g} = \tilde{g}$ em $\bigcup_{j=1}^i \tilde{Y}_j$ (pois $\bar{g} \Big|_{\bigcup_{j=1}^i \tilde{Y}_j} = \bar{g}_0 + \dots + \bar{g}_{i-1}$ e $\tilde{g} \Big|_{\bigcup_{j=1}^i \tilde{Y}_j} = \tilde{g}_0 + \dots + \tilde{g}_{i-1}$).

Notemos que: $\forall g \in \tilde{P}_{i-1}$ e $\bar{t} \in \tilde{E}_{i-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow |(f - \tilde{g}_0 - \dots - \tilde{g}_{i-2} - g)(\bar{t})| = |(f - \tilde{g}_0 - \dots - \tilde{g}_{i-2} - (s + g))(\bar{t})| = \bar{d}_{i-1} = \tilde{d}_{i-1}$$

$$\text{e } \forall g \in \bar{P}_{i-1} \text{ e } \bar{t} \in \bar{E}_{i-1} \Rightarrow |(f - \bar{g}_0 - \dots - \bar{g}_{i-2} - g)(\bar{t})| = |(f - \bar{g}_0 - \dots - \bar{g}_{i-2} - (g - s))(\bar{t})| = \tilde{d}_{i-1} = \bar{d}_{i-1}$$

Portanto $\tilde{E}_{i-1} = \bar{E}_{i-1}$, $\tilde{G}_i = \bar{G}_i$ e $\tilde{Y}_i = \bar{Y}_i$, concluindo a indução e consequentemente mostrando que g^* está bem definida.

Observações -

(1) Notemos que $d_0 > d_1 > \dots > d_\ell$

Vejamos:

Vamos supor que para algum i $d_i = d_{i-1}$ e que portanto

$$\|f - g_0 - \dots - g_{i-1}\|_{D_{i-1}} = d_{i-1} = d_i$$

Para $g \in P_{i-1}$ temos que $\|f - g_0 - \dots - g_{i-1} - (g - g_{i-1})\|_{D_{i-1}} = d_i$

e portanto $\|f - g_0 - \dots - g_{i-1} - (g - g_{i-1})\|_{D_i} \leq d_i$.

$(g - g_{i-1})|_{E_{i-1}} = 0$ e assim sendo $(g - g_{i-1}) \in G_i$ e $g - g_{i-1} \in P_i$.

Se $\bar{t} \in E_i$, $|(f - g_0 - \dots - g_{i-2} - g)(\bar{t})| = |(f - g_0 - \dots - g_{i-1} - (g - g_{i-1}))(\bar{t})| = d_i = d_{i-1}$

e portanto $\bar{t} \in E_{i-1}$ e assim sendo $\bar{t} \notin D_i$, o que é uma contradição.

(2) Observemos que:

$(g_i + g_{i+1} + \dots + g_j)$ é aproximação ótima de $(f - g_0 - \dots - g_{i-1})$ em D_i por G_i , $i=1, \dots, \ell$ $j=i, \dots, \ell$ e que $g^* \in P(f)$.

(3) Se g é aproximação ótima de $f - g_0 - \dots - g_{i-1}$ em D_i por G_i então $g = g_i$ em Y_i , ou seja, g_i é a única aproximação ótima de $(f - g_0 - \dots - g_{i-1})$ em Y_i .

O exemplo seguinte ilustra a construção da aproximação estrita:

Exemplo E.9 - $D = \{x: x = i/4, i = 0, 1, \dots, 12\}$, $G = S_{2,2}(1,2)|_D$
 $(x_0 = 0, x_{k+1} = 3)$

$$f = \begin{cases} 1 & , x=0, x=1 \\ -1 & , x=1/2 \\ 0 & , x \in [2, 3] \end{cases} \quad \text{apr. estrita } g^* = \frac{3}{5} (x-1)_+ - \frac{39}{25} (x-2)_+$$

linear nos outros pontos de $[0, 3]$

Temos $g_0 = 0$, $E_0 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ e $d_0 = 1$,

$$P_0 = \{\alpha (x-1)_+ + \beta (x-2)_+ : -1 \leq \alpha \leq 1 \text{ e } -1 \leq 2\alpha + \beta \leq 1\}, G_1 = \{\alpha (x-1)_+ + \beta (x-2)_+ : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

$$Y_1 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}, \{D_1 = x: x = \frac{i}{4}, i = 5, \dots, 12\}.$$

$$P_1 = \{\frac{3}{5}(x-1)_+ + \beta (x-2)_+ : -\frac{9}{5} \leq \beta \leq -\frac{3}{5}\}, E_1 = \{\frac{5}{4}, 2\}, d_1 = \frac{3}{5}, Y_2 = \{\frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2\},$$

$$D_2 = \{\frac{9}{4}, \frac{5}{2}, \frac{11}{4}, 3\}, g_1 = \frac{3}{5}(x-1)_+ - \frac{3}{5}(x-2)_+, P_2 = \{-\frac{24}{5}(x-2)_+\},$$

$$E_2 = \{\frac{9}{4}, 3\}, d_2 = \frac{9}{25}, Y_3 = \{\frac{9}{4}, \frac{5}{2}, \frac{11}{4}, 3\}, D_3 = \emptyset, g_2 = -\frac{24}{5}(x-2)_+,$$

$$g^* = g_0 + g_1 + g_2 = 0 + \frac{3}{5} (x-1)_+ - \frac{3}{5} (x-2)_+ - \frac{24}{5} (x-2)_+ = \frac{3}{5} (x-1)_+ - \frac{39}{25} (x-2)_+$$

O teorema seguinte estabelece a continuidade da seguinte seleção para a projeção métrica:

$$S(f) = \begin{cases} f & , \text{ se } f \in G \\ g_f^* & , \text{ c.c.} \end{cases} \quad \text{, à qual chamamos de seleção estrita e denotamos por } g^*.$$

Teorema 2.9 - Seja D um conjunto finito de pontos e G subespaço de dimensão finita de $C(D)$. A seleção estrita, definida a partir da aproximação estrita, é contínua.

Dem: Seja (f_n) uma sequência de funções em $C(D)$ tal que $f_n \rightarrow f \in C(D) \setminus G$ (depois veremos o caso $f \in G$). Vamos mostrar que todo ponto de acumulação g^1 da sequência $g_{f_n}^*$ é igual a g_f^* , o que é suficiente para estabelecer a continuidade de g^* pois a sequência $g_{f_n}^*$ é limitada.

Tomemos então uma subsequência, que ainda chamaremos de $g_{f_n}^*$, tal que $g_{f_n}^* \rightarrow g^1$. A cada elemento da sequência estão associados conjuntos $E_{i,n}$ (conforme a definição da estrita). Observemos que o número de combinações possíveis dos pontos de D para formação de $E_{i,n}$ é finito pois D é finito. Assim sendo, podemos supor, recorrendo a nova subsequência se necessário, que os conjuntos $E_{i,n} = E_i^1$ ($i=1, \dots, p$) independem de n . Consequentemente, os conjuntos $D_{i,n} = D_i^1$ e $G_{i,n} = G_i^1$ também independem de n .

Temos que: $g_{f_n}^* = g_{0,n} + g_{1,n} + \dots + g_{p,n}$ e

$$\|f_n - g_{f_n}^*\|_{D_i^1} = d_{i,n}^1 (d_{0,n} > d_{1,n} > \dots > d_{p,n})$$

Tomando limites obtemos: $\|f - g^1\|_{D_i^1} = d_i^1$ e

$$d_0^1 \geq d_1^1 \geq \dots \geq d_p^1$$

Definimos: $d_0^2 = d_0^1 = \dots = d_{i_1}^1 > d_{i_1+1}^1 = d_1^2 = \dots = d_{i_2}^1 > d_{i_2+1}^1 = d_2^2, \dots, d_{i_J+1}^1 = d_J^2 = \dots = d_p^1$

$$i_0 = -1, \quad E_j^2 = \bigcup_{k=i_{j-1}+1}^{i_{j+1}} E_k^1, \quad j=0, \dots, J$$

$$G_0^2 = G_0 = G, \quad G_j^2 = \{g \in G_{j-1}^2 : g|_{E_{j-1}^2} = 0\}, \quad j=1, \dots, J+1$$

Tomando nova subsequência, se necessário, obtemos:

$$g_i^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{i,n} \quad (\text{pois as sequências } g_{i,n} \text{ são limitadas})$$

definimos:
$$g_j^2 = g_{i_{j-1}+1}^1 + \dots + g_{i_j+1}^1, \quad j=0, \dots, J.$$

Notemos que $g^1 = g_0^2 + \dots + g_J^2$, $d_0^2 = d(f)$, $g_0^2 \in P(f)$, $g^1 \in P(f)$.

Vamos mostrar que:

$G_j^2 = G_j$, $j=0, \dots, I$ e que g_j^2 é aproximação ótima de $(f - g_0^2 - \dots - g_{j-1}^2)$ em D_j por G_j (onde G_j , D_j , E_j e d_j são definidos na construção de g_f^*).

Para $j=0$ nada há a mostrar. Suponhamos então o resultado verdadeiro para $j-1 \geq 0$ e mostremos para j .

Primeiramente verifiquemos que $G_j^2 \subset G_j$. Suponhamos que não: neste caso existe $g \in G_j^2$ e $t_j \in E_{j-1}$ tal que $g(t_j) \neq 0$ e portanto $t_j \in D_{i_{j-1}+1}^1$ temos que

$$|(f_{n,n} - g_{0,n} - \dots - g_{i_{j-1},n} - g_{i_{j-1}+1,n})(t_j)| \leq d_{i_{j-1}+1,n}$$

tomando limites:

$$|(f - g_0^2 - \dots - g_{j-1}^2 - g_{i_{j-1}+1}^1)(t_j)| \leq d_{i_{j-1}+1}^1 = d_j^2 < d_{j-1}^2 = d_{j-1} \quad (1)$$

Notemos que:

$$||f - g_0^2 - \dots - g_{j-2}^2 - (g_{j-1}^2 + g_{i_j+1}^1)||_{D_{j-1} \sim D_{i_j+1}^1} = ||f - g_0^2 - \dots - g_{j-1}^2||_{D_{j-1} \sim D_{i_j+1}^1} \leq d_{j-1}$$

(devido à hipótese de indução e a termos $g_{i_j+1}^1 = 0$ em $D_{j-1} \sim D_{i_j+1}^1$)
e $||f - g_0^2 - \dots - g_{j-2}^2 - (g_{j-1}^2 + g_{i_j+1}^1)||_{D_{i_j+1}^1} = d_{i_j+1}^1 = d_j^2 < d_{j-1}^2 = d_{j-1}$

assim, $(g_{j-1}^2 + g_{i_j+1}^1)$ é aproximação ótima de $(f - g_0^2 - \dots - g_{j-2}^2)$ em D_{j-1} por G_{j-1} (notemos que $g_{i_j+1}^1 \in G_{i_j+1}^1 \subset G_{j-1}^2 = G_{j-1}$). Portanto, $|(f - g_0^2 - \dots - g_{j-1}^2 - g_{i_j+1}^1)(t)| = d_{j-1}$, $\forall t \in E_{j-1}$ e de (1) chegamos a uma contradição.

Mostremos agora que $G_j \subset G_j^2$. Suponhamos que não:

Então existe um menor índice k ($i_{j-1}+1 \leq k \leq i_j$) para o qual existe $s_j \in G_j$ e $t_j \in E_k^1$ tal que $s_j(t_j) \neq 0$ e portanto $t_j \in D_j$. Se $k > i_{j-1}+1$ então temos para todo $s \in G_j$ que

$$S \Big|_{\bigcup_{\ell=i_{j-1}+1}^{k-1} E_\ell^1}^{k-1} = 0 \quad (\text{lembremos que } E_{j-1}^2 = \bigcup_{\ell=i_{j-1}+1}^{i_j} E_\ell^1)$$

Tomemos a aproximação ótima de $(f - g_0^2 - \dots - g_{j-1}^2)$ em D_j por elementos de G_j .

$$\text{Assim, } ||f - g_0^2 - \dots - g_{j-1}^2 - s||_{D_j} = d_j$$

Além disso,

$$||f_{n, g_0, n} - \dots - g_{i_j, n} - s||_{D_j} \leq ||f_n - f||_{D_j} + ||f - g_0, n - \dots - g_{i_j, n} - s||_{D_j}$$

Logo, existe $\epsilon > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$ temos:

$$\|f_n - g_{0,n} - \dots - g_{i_j,n} - s\|_{D_j} \leq d_j + \varepsilon < d_{j-1} - \varepsilon < d_{k,n} \quad (2)$$

(notemos que $d_{k,n} \rightarrow d_{j-1}$)

Ainda para $n \geq n_0$ obtemos:

$$\|f_n - g_{0,n} - \dots - g_{i_j,n} - s\|_{D_k^1 \cap (D_{j-1} \sim D_j)} = \|f_n - g_{0,n} - \dots - g_{i_j,n}\|_{D_k^1 \cap (D_{j-1} \sim D_j)} \leq d_{k,n}$$

(Notemos que $D_{j-1} \sim D_j = \{x \in D_{j-1} : g(x) = 0, \forall g \in G_j\}$ e que portanto $s = 0$ em $D_{j-1} \sim D_j$. A desigualdade é obtida da observação 2, na construção da estrita).

De (2) temos que $\|f_n - g_{0,n} - \dots - g_{i_j,n} - s\|_{D_k^1 \cap D_j} < d_{k,n}$. Como, pela hipótese de indução, temos que $D_k^1 \subset D_{j-1}$ obtemos que $(g_{k,n} + \dots + g_{i_j,n} + s)$ é aproximação ótima de $(f_n - g_{0,n} - \dots - g_{k-1,n})$ em D_k^1 por elementos de

$$G_k^1 = \{g \in G_{k-1}^1 : g|_{E_{k-1}} = 0\} = \{g \in G_{j-1} : g|_{\bigcup_{\ell=i_{j-1}+1}^{k-1} E_\ell^1} = 0\}$$

(notemos que $s \in G_k^1$).

Portanto, $|(f_n - g_{0,n} - \dots - g_{i_j,n} - s)(t)| = d_{k,n}$ para todo $t \in E_k^1$. Notemos que $t_j \in D_j$ e $t_j \in E_k^1$ e que, assim sendo, obtemos uma contradição de (2). Isto mostra que $G_j = G_j^2$.

Como consequência obtemos que $D_j = D_{i_j+1}^1$.

Tomemos g aproximação ótima de $(f - g_0^2 - \dots - g_{j-1}^2)$ em D_j por G_j .

Assim

$$\|f_n - g_{0,n} - \dots - g_{i_j,n} - g_{i_j+1,n} - \dots - g_{i_{j+1},n}\|_{D_j} = d_{i_j+1,n} \leq \|f_n - g_{0,n} - \dots - g_{i_j,n} - g\|_{D_j} \quad (3)$$

(A igualdade decorre da observação 2 da construção da estrita e de termos $D_j = D_{i_j+1}^1$. A desigualdade é consequência de $(g_{i_j+1,n} + \dots + g_{i_j+1,n})$ ser aproximação ótima de $(f_n - g_{0,n} - \dots - g_{i_j,n})$ em $D_{i_j+1}^1 = D_j$ por $G_{i_j+1} \subset G_{j-1}$ e de termos $g \in G_j \subset G_{j-1}$).

Tomando limites em (3), temos:

$$||f - g_0^2 - \dots - g_j^2||_{D_j} = d_j^2 \leq d_j \quad \text{e portanto } g_j^2 \text{ é aproximação}$$

ótima de $(f - g_0^2 - \dots - g_{j-1}^2)$ em D_j por G_j . Isto conclui a indução.

Portanto, na construção de g_f^* podemos tomar g_i^2 ($i=0, \dots, J$) a cada passo, o que mostra que $g_f^* = g^1$, mostrando a continuidade da seleção estrita para $f \in C(D) \sim G$. Se $f \in G$, a continuidade é consequência de termos $d(f_n) \rightarrow 0$ para qualquer sequência $f_n \rightarrow f$.

Vamos agora apresentar um teorema de Descloux [7], relacionando a aproximação estrita de $f \in C(D)$ com as aproximações de f na norma p em D (D finito). (*)

Teorema 2.10 - Dados D , conjunto finito, G , subespaço de dimen-

(*) Para $1 < p < \infty$ e $D = \{t_1, \dots, t_n\}$ a norma p de $C(D)$ é definida como:
 $||f||_p = (\sum_{i=1}^n |f(t_i)|^p)^{1/p}$ para $f \in C(D)$. É conhecido que
 $\lim_{p \rightarrow \infty} ||f||_p = ||f||_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |f(t_i)|$ (norma uniforme) e que existe uma única aproximação ótima para f por G na norma p , onde G é subespaço de dimensão finita de $C(D)$. Continuaremos a denotar a norma uniforme simplesmente por $||\cdot||$ ou $||\cdot||_D$, quando for necessário explicitar a que conjunto nos referimos. Denotaremos a norma p por $||\cdot||_p$ por $||\cdot||_{p,D}$ respectivamente. (ver p/ex. [5]).

são finita de $C(D)$ e $f \in C(D) \sim G$ temos que $\lim_{p \rightarrow \infty} g_p = g_f^*$, onde g_p é a aproximação ótima de f em X por G na norma p ($1 < p < \infty$), e g_f^* é a aproximação estrita de f .

Dem: É suficiente mostrar que todo ponto de acumulação de uma sequência g_{p_n} ($p_n \rightarrow \infty$) coincide com g_f^* , pois a sequência g_{p_n} é limitada.

Tomemos então uma subsequência de g_{p_n} , à qual continuaremos chamando assim, tal que $g_{p_n} \rightarrow \tilde{g}$. Mostremos que $\tilde{g} = g_f^*$.

Vamos mostrar por indução que $\tilde{g} = g_f^*$ em Y_i , $i=1, 2, \dots, \ell$ ($\bigcup_{i=1}^{\ell} Y_i = D$), onde os Y_i são definidos na construção de g_f^* .

Para ver que $\tilde{g} \in P(f)$ ($\tilde{g} \in G$ que é de dimensão finita) basta tomar limites para $n \rightarrow \infty$ na desigualdade $\|f - g_{p_n}\|_{p_n} \leq \|f - g_f^*\|_{p_n}$. Portanto $\tilde{g} - g_f^* = 0$ em $E(f - P(f))$ e consequentemente $\tilde{g} - g_f^* = 0$ em Y_1 .

Vamos agora supor que $g_f^* = \tilde{g}$ em $\bigcup_{i=1}^{k-1} Y_i$ e mostrar que $\tilde{g} = g_f^*$ em Y_k .

Como $g_f^* = \tilde{g}$ em $\bigcup_{i=1}^{k-1} Y_i$ podemos escrever $g_f^* = \tilde{g} + g_k + \dots + g_{\ell}$, onde $g_j \in G_j$ é aproximação ótima de $(f - \tilde{g} - g_k - \dots - g_{j-1})$ em D_j ($k \leq j \leq \ell$) (Em particular, g_k é aproximação ótima de $f - \tilde{g}$ em D_k por G_k).

Como $g_k \in G_k$ temos que $g_k \Big|_{\bigcup_{i=1}^{k-1} Y_i} = 0$.

Mostremos que $\|f - \tilde{g}\|_{D_k} \leq \|f - \tilde{g} - g_k\|_{D_k}$.

Vamos supor que $\|f - \tilde{g}\|_{D_k} > \|f - \tilde{g} - g_k\|_{D_k}$ (1)

Temos :

$$\begin{aligned}
 | |f-g_{p_n}| |_{P_n, D_k} - | |f-\tilde{g}| |_{D_k} | &\leq | |f-g_{p_n}| |_{P_n, D_k} - | |f-\tilde{g}| |_{P_n, D_k} | + | |f-\tilde{g}| |_{P_n, D_k} - | |f-\tilde{g}| |_{D_k} | \leq \\
 &\leq | |g_{p_n}-\tilde{g}| |_{P_n, D_k} + | |f-\tilde{g}| |_{P_n, D_k} - | |f-\tilde{g}| |_{D_k} | \leq \\
 &\leq L | |g_{p_n}-\tilde{g}| |_{D_k} + | |f-\tilde{g}| |_{P_n, D_k} - | |f-\tilde{g}| |_{D_k} | \quad (\text{existe um tal } L)
 \end{aligned}$$

Portanto, para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que para $n \geq n_0$ temos :

$$| |f-g_{p_n}| |_{P_n, D_k} - | |f-\tilde{g}| |_{D_k} | < \epsilon \quad (2)$$

Notemos ainda que:

$$\begin{aligned}
 | |f-g_{p_n}-g_k| |_{P_n, D_k} - | |f-\tilde{g}-g_k| |_{D_k} | &\leq | |f-g_{p_n}-g_k| |_{P_n, D_k} - | |f-\tilde{g}-g_k| |_{P_n, D_k} | + \\
 &+ | |f-\tilde{g}-g_k| |_{P_n, D_k} - | |f-\tilde{g}-g_k| |_{D_k} | \leq \\
 &\leq | |g_{p_n}-\tilde{g}| |_{P_n, D_k} + | |f-\tilde{g}-g_k| |_{P_n, D_k} - | |f-\tilde{g}-g_k| |_{D_k} | \leq \\
 &\leq L | |g_{p_n}-\tilde{g}| |_{D_k} + | |f-\tilde{g}-g_k| |_{P_n, D_k} - | |f-\tilde{g}-g_k| |_{D_k} |
 \end{aligned}$$

e portanto $\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_1$ tal que para $n \geq n_1$ temos

$$||f - g_{p_n} - g_k||_{P_n, D_k} - ||f - \tilde{g} - g_k||_{D_k} < \varepsilon \quad (3)$$

Por (1), (2) e (3) vemos que existe n_2 tal que para $n \geq n_2$

$$||f - g_{p_n}||_{P_n, D_k} > ||f - g_{p_n} - g_k||_{P_n, D_k} \text{ e como } g_k|_{D \sim D_k} = 0 \text{ obtemos que}$$

$$||f - g_{p_n}||_{P_n, D} > ||f - g_{p_n} - g_k||_{P_n, D}, \text{ contradizendo o fato}$$

de g_{p_n} ser aproximação ótima de f na norma P_n . Isto mostra que $||f - \tilde{g}||_{D_k} \leq ||f - \tilde{g} - g_k||_{D_k}$ e conseqüentemente que 0 é aproximação ótima de $(f - \tilde{g})$ em X_k . Assim, podemos escrever $g_f^* = \tilde{g} + 0 + \tilde{g}_{k+1} + \dots + \tilde{g}_\ell$ (onde $\tilde{g}_j \in G_j$, $j = k+1, \dots, \ell$) e concluímos que $g_f^*|_{Y_k} = \tilde{g}|_{Y_k}$, finalizando a indução.

$$\text{Assim, } g_f^* = \tilde{g}.$$

Observação:

- (1) Descloux [7] mostrou que nem sempre há convergência das aproximações na norma p de funções contínuas definidas em conjuntos não finitos, através de um exemplo, que trata da aproximação de uma função $f \in C[-2, 2]$ por funções do tipo ax , $a \in \mathbb{R}$.

Vamos agora usar das particularidades de $S_{m,k}$ e fornecer uma caracterização da aproximação estrita para o caso em que $k \leq m$.

2.11 - Caracterização da Aproximação estrita para $S_{m,k} (k \leq m)$ -

Fixemos D finito, $D = [a, b]$ tal que $\dim S_{m,k}|_D = m+k$ e $f \in C(D) - S_{m,k}|_D$

Escolhemos g_0 aproximação ótima de f em D por $G - S_{m,k}$ e chamamos de $[x_{\ell_1}, x_{r_1+1}]$ ao intervalo de unicidade (forte) das aproximações ótimas de f em D (ver prop. 1.9D).

Temos que $E_0 = E(f - P(f)) \subset [x_{\ell_1}, x_{r_1+1}]$ (pela prop. 1.12D) e que $g|_{[x_{\ell_1}, x_{r_1+1}]} = 0$ para todo $g \in G$ tal que $g|_{E_0} = 0$. (Por termos $g|_{E_0} = 0$, segue da prop. 1.9D que estamos nas hipóteses do lema 1.2 e portanto que $g|_{[x_{\ell_1}, x_{r_1+1}]} = 0$).

Vamos usar a mesma notação, para os conjuntos E_i , D_i , Y_i , G_i e para d_i , que usamos na construção da estrita.

Temos então

$$Y_1 = D \cap [x_{\ell_1}, x_{r_1+1}] \quad , \quad D_1 = D - Y_1 = D \cap ([x_0, x_{\ell_1}) \cup (x_{r_1+1}, x_{k+1}])$$

$$\text{e } \{G_1 = g \in G : g|_{E_0} = 0\} = \langle (x_1 - t)_+^{m-1}, \dots, (x_{\ell_1} - t)_+^{m-1}, (t - x_{r_1+1})_+^{m-1}, \dots, (t - x_k)_+^{m-1} \rangle$$

$$\text{Denominamos: } G'_1 = \langle (t - x_{r_1+1})_+^{m-1}, \dots, (t - x_k)_+^{m-1} \rangle \quad \text{e}$$

$$G'_{-1} = \langle (x_1 - t)_+^{m-1}, \dots, (x_{\ell_1} - t)_+^{m-1} \rangle$$

Vamos agora mostrar que a função $g = g_-^* + g_0 + g_+^*$ é igual a g_f^* , onde

$g_-^* = g_{-1} + \dots + g_{-q}$ é a aproximação estrita de $f - g_0$ em $D'_1 = (D_1 \cap [x_0, x_{\ell_1}))$

por G'_{-1} , $g_+^* = g_1 + \dots + g_n$ é a aproximação estrita de $f - g_0$ em

$D'_1 = (D_1 \cap (x_{r_1+1}, x_{k+1}])$ por G'_1 e g_f^* é a aproximação estrita de f em D . (Chamamos de $E'_1, D'_1, \dots$ (resp. $E'_{-1}, D'_{-1}, \dots$) aos conjuntos envolvidos no cálculo de g_+^* (resp. g_-^*)).

A demonstração será feita por indução. Preliminarmente vamos estabelecer as seguintes notações:

$$d_0^* = d(f) = d'_0 = d_0, \quad d_i^* = \max(d'_{J_i}, d'_{-I_i}), \quad i=1, \dots, \ell \quad (d_\ell^* = \min(d'_p, d'_{-q}), \quad d'_{p+1} = d'_{-q-1} = 0)$$

$$E_0^* = E_0, \quad E_i^* = \bigcup_{\substack{j=-q \\ j \neq 0}}^p \{E'_j : d'_j = d_i^*\}, \quad i=1, \dots, \ell$$

$$G_0^* = G_0, \quad G_i^* = \{g = g_J + g_I : g_J \in G'_{J_i} \text{ e } g_I \in G'_{-I_i}\}, \quad i=1, \dots, \ell+1$$

$$D_0^* = D_0 = D, \quad D_i^* = \{D'_{J_i} \cup D'_{-I_i}\}, \quad i=1, \dots, \ell+1$$

$$Y_0^* = \emptyset, \quad Y_i^* = \bigcup_{\substack{j=-q \\ j \neq 0}}^p \{Y'_j : d'_j = d_i^*\}, \quad i=1, \dots, \ell+1$$

$$\text{onde} \quad \begin{cases} J_1 = I_1 = 1 \\ J_{i+1} = \begin{cases} J_i + 1, & \text{se } d_i^* = d'_{J_i} \\ J_i, & \text{c.c.} \end{cases} \\ I_{i+1} = \begin{cases} I_i + 1, & \text{se } d_i^* = d'_{I_i} \\ I_i, & \text{c.c.} \end{cases} \end{cases}$$

É claro que $g \in P(f)$.

Por indução sobre i , mostraremos que 0 é aproximação ótima de $(f-g)$ em D_i por G_i . Além disso mostraremos que $E_i = E_i^*$,

$$G_{i+1}=G_{i+1}^*, D_{i+1}=D_{i+1}^* \text{ e } Y_{i+1}=Y_{i+1}^*, i=0, \dots, \ell.$$

Para $i=0$ nada há a mostrar. Suponhamos o resultado válido para $i-1 \geq 0$ e mostremos para i . Pela hipótese de indução, $G_i=G_i^*$ e $D_i=D_i^*$. Mostremos que 0 é aproximação ótima de $f-g$ por G_i em D_i . Suponhamos que exista $s \in G_i$ ($s=s_1+s_2: s_1 \in G'_{J_i}, s_2 \in G'_{-I_i}$) tal que $\|f-g-s\|_{D_i} < \|f-g\|_{D_i} = d_i^*$

$$\text{temos que: } \|f-g-s\|_{D'_{J_i}} = \|f-g-s_1\|_{D'_{J_i}} = \|f-g_0-g_+^*-s_1\|_{D'_{J_i}} \geq \|f-g_0-g_+^*\|_{D'_{J_i}} = d'_{J_i}$$

$$\text{e } \|f-g-s\|_{D'_{-I_i}} = \|f-g-s_2\|_{D'_{-I_i}} = \|f-g_0-g_-^*-s_2\|_{D'_{-I_i}} \geq \|f-g_0-g_-^*\|_{D'_{-I_i}} = d'_{-I_i}$$

$\therefore \|f-g-s\|_{D_i} \geq \max\{d'_{J_i}, d'_{-I_i}\} = d_i^*$, contradizendo nossa suposição. Isto mostra que 0 é aproximação ótima e que, portanto, $d_i^*=d_i$.

Verifiquemos então que $E_i=E_i^*$.

Se $d'_{J_i}=d'_{-I_i}=d_i^*$ temos que $E_i^*=E'_{J_i} \cup E'_{-I_i}$

Para todo $s=(s_1+s_2) \in G_i^*$, tal que s é aproximação ótima de $f-g$ em D_i , temos que $s|_{D'_{J_i}}=s_1$ é aproximação ótima de $f-g$ em D'_{J_i} e que $s|_{D'_{-I_i}}=s_2$ é aproximação ótima de $f-g$ em D'_{-I_i} . Isto mostra que $E_i^* \subseteq E_i$. Por outro lado, para todo $s_1 \in G'_{J_i}$ aproximação ótima de $f-g$ em D'_{J_i} e todo $s_2 \in G'_{-I_i}$ aproximação ótima de $f-g$ em D'_{-I_i} temos que s_1+s_2 é aproximação ótima de $f-g$ em D_i , mostrando que $E_i \subseteq E_i^*$ e portanto, $E_i^*=E_i$.

Se $d_i^*=d'_{J_i} > d'_{-I_i}$ temos $E_i^*=E'_{J_i}$. Para $(s=s_1+s_2) \in G_i$ aproxi-

mação ótima de $f-g$ em D_i temos que s_1 é aproximação ótima de $f-g$ em D'_{J_i} , o que mostra que $E_i^* \subseteq E_i$. Para $s_1 \in G'_{J_i}$ aproximação ótima de $f-g$ em D'_{J_i} e s_2 aproximação ótima de $f-g$ em D'_{-I_i} temos que s_1+s_2 é aproximação ótima de $f-g$ em D_i , mostrando que $E_i \subseteq E_i^*$.

Analogamente, verifica-se que $E_i^* = E_i$ quando $d_i^* = d'_{-I_i} > d'_{J_i}$.

A partir de que $E_i^* = E_i$ é de fácil verificação que

$G_{i+1} = G_{i+1}^*$, $D_{i+1} = D_{i+1}^*$ e $Y_{i+1} = Y_{i+1}^*$. Isto conclui a indução e mostra que:

$$g_f^* = g_-^* + g_0 + g_+^*$$

Vamos agora analisar algumas propriedades de $g_f^* = g_-^* + g_0 + g_+^*$, onde $g_+^* = g_1 + \dots + g_p$.

Temos que g_1 é aproximação ótima de $f-g_0$ em D'_1 por $G'_1 = \{(t-x_{r_1+1})_+^{m-1}, \dots, (t-x_k)_+^{m-1}\}$, $P'_1 = \{s \in G'_1 : s \text{ é aprox. ótima de } f-g_0 \text{ em } D'_1\}$, $E'_1 = E(f-P'_1)$ e $G'_2 = \{g \in G'_1 : g|_{E'_1} = 0\}$.

Vamos mostrar que existe $r_2 > r_1$ tal que $G'_2 = \langle (t-x_{r_2+1})_+^{m-1}, \dots, (t-x_k)_+^{m-1} \rangle$.

Primeiramente verifiquemos que existe $r_2 > r_1$ tal que todo $g \in G'_2$ se anula em $[x_{r_1+1}, x_{r_2+1}]$.

Tomemos $s_1 \in P'_1$ tal que $(f-g_0-s_1)$ alterne $k-r_1$ vezes (do teorema 0.15 vemos que tal função existe). Existem pontos $x_{r_1+1} < t_1 < \dots < t_{k-r_1+1} \leq b$ tal que para todo $s_2 \in P'_1$ temos que:

$$\delta(-1)^i (f-g_0-s_1)(t_i) = \|f-g_0-s_1\|_{D'_1} \geq \delta(-1)^i (f-g_0-s_2)(t_i),$$

$$i=1, \dots, k-r_1+1, \quad \delta \in \{-1, 1\}$$

$$\delta(-1)^i (s_2 - s_1)(t_i) \geq 0, \quad i=1, \dots, k-r_1+1$$

Verifiquemos que $s_1 = s_2$ em $[x_{r_1+1}, x_{r_1+2}]$. Se $s_1 - s_2$ se anula em algum intervalo, por termos $k \leq m$, obtemos que $s_1 - s_2$ se anula em $[x_{r_1+1}, x_{r_1+2}]$. Vamos então supor que $s_1 = s_2$ só possua zeros simples em $[x_{r_1+1}, x_{k+1}]$. Neste caso, $s_1 - s_2$ possui $k - r_1$ zeros em $(x_{r_1+1}, x_{k+1}]$ (pelo lema 1.1) e como $[x_0, x_{r_1+1}]$ é um zero de ordem $m + r_1$ de $s_1 - s_2$ obtemos que $s_1 - s_2$ possui $m + k$ zeros em $[a, b]$ e que portanto $s_1 = s_2$ em $[a, b]$ (pelo teorema 0.14). Isto mostra a existência de um maior índice $r_2 > r_1$ tal que $s = s_2$ em $[x_{r_1+1}, x_{r_2+1}]$; $\forall s, s_2 \in P'_1$.

Vamos agora supor que exista $g \in G'_2$ tal que $g|_{[x_{r_1+1}, x_{r_2+1}]}$ não seja nula. Então, se tomarmos s no interior relativo de P'_1 e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno obtemos que $s + \epsilon g \in P'_1$ e, como mostramos acima, $s + \epsilon g = s$ em $[x_{r_1+1}, x_{r_2+1}]$, o que é uma contradição. Lembremos que r_2 foi escolhido como o maior possível e mostremos que $J = E'_1 \cap (x_{r_2+1}, b] = \emptyset$. Inicialmente verifiquemos que J possui no máximo $k - r_2 - 1$ pontos e que se $J = \{t_1, \dots, t_\ell\}$ então $x_{r_2+1+j} < t_j$, $j=1, \dots, \ell$. (A)

Para $s, \tilde{s} \in P'_1$ tal que $s \neq \tilde{s}$ em $[x_{r_2+1}, x_{r_2+2}]$ e j fixo ($1 \leq j \leq k - r_2$) temos que $h = (s - \tilde{s})|_{[x_{r_2+1}, x_{r_2+1+j}]}$ se anula em todo $t \in J \cap [x_{r_2+1}, x_{r_2+1+j}]$, pois P'_1 é convexo. Como $k \leq m$, h só possui zeros simples em $(x_{r_2+1}, x_{r_2+1+j}]$ (observação 0.11) e como $[x_{r_2}, x_{r_2+1}]$ é um zero de ordem m de h , há no máximo $j - 1$ zeros de h em $(x_{r_2+1}, x_{r_2+1+j}]$ (teorema 0.14). Vejamos que $J = \emptyset$. Se s pertence ao interior relativo de P'_1 e $|(f - s)(t)| = d'_1$ para $t \in (x_{r_2+1}, b]$

então $t \in J$. De (A) e do teorema 0.13 temos que existe

$$g \in G = \langle (t - x_{r_2+2})_+^{m-1}, \dots, (t - x_{r_2+\ell+1})_+^{m-1} \rangle \quad \text{tal que } g(t_i) = \text{sgn}(f-s)(t_i), \\ i=1, \dots, \ell.$$

Então $\tilde{s} = s + \varepsilon g \in P'_1$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e não possui pontos extremais em $(x_{r_2+1}, b]$, contrariando a definição de J . Assim sendo, $J = \emptyset$ e consequentemente,

$$G'_2 = \langle (t - x_{r_2+1})_+^{m-1}, \dots, (t - x_k)_+^{m-1} \rangle.$$

Analogamente, verifica-se que $G'_j = \langle (t - x_{r_j+1})_+^{m-1}, \dots, (t - x_k)_+^{m-1} \rangle$ e $D'_j = D \cap (x_{r_j+1}, b]$, $j=1, \dots, p$ ($r_1 < r_2 < \dots < r_p$) e que $G'_{-j} = \langle (x_1 - t)_+^{m-1}, \dots, (x_{\ell_j} - t)_+^{m-1} \rangle$ e $D'_{-j} = D \cap [a, x_{\ell_j}]$, $j=1, \dots, q$ ($\ell_q < \ell_{q-1} < \dots < \ell_1$).

Tomemos agora $[x_{\ell_0}, x_{r_0+1}] \subset [x_{\ell_1}, x_{r_1+1}]$:

Na construção de g_f^* as funções g_i ($-q \leq i \leq p$) podem ser escolhidas de forma a satisfazer:

- (1) $(f - g_0 - \dots - g_i)$ é $(k - r_{i+1} + j)$ alternante em $D \cap (x_{r_{i+1}+1-j}, b]$, $j=1, \dots, r_{i+1} - r_i$, $i=0, \dots, p$ (se $r_{i+1} > r_i$)
- (2) $(f - g_0 - \dots - g_{-i})$ é $(\ell_{i+1} + j)$ alternante em $D \cap [a, x_{\ell_{i+1}+j}]$, $j=1, \dots, \ell_i - \ell_{i+1}$, $i=0, \dots, q$ (se $\ell_i > \ell_{i+1}$)
- (3) 0 é aproximação ótima de $(f - g_0 - \dots - g_i)$ em $D \cap (x_{r_{i+1}+1-j}, b]$ por $G = \langle (t - x_{r_{i+1}+1-j})_+^{m-1}, \dots, (t - x_k)_+^{m-1} \rangle$, $j=1, \dots, r_1 - r_0$ (se $i=0$ e $r_1 \neq r_0$) e $j=1, \dots, r_{i+1} - r_i - 1$ ($i=1, \dots, p$, se $r_{i+1} - r_i > 1$).
- (4) 0 é aproximação ótima de $(f - g_0 - \dots - g_{-i})$ em $D \cap [a, x_{\ell_{i+1}+j}]$ por $G = \langle (x_1 - t)_+^{m-1}, \dots, (x_{\ell_{i+1}+j} - t)_+^{m-1} \rangle$, $j=1, \dots, \ell_0 - \ell_1$ (se $i=0$ e $\ell_1 \neq \ell_0$) e $j=1, \dots, \ell_i - \ell_{i+1} - 1$ ($i=1, \dots, q$, se $\ell_i - \ell_{i+1} > 1$).

Vamos mostrar (2) para $i=0$.

Tomemos $g_0 \in P_0$ e suponhamos $\ell_0 > \ell_1$.

Existe s_1 aproximação ótima de $(f-g_0)$ em $[x_0, x_{\ell_0}] \cap D$ por $G = \langle (x_1-t)_+^{m-1}, \dots, (x_{\ell_0}-t)_+^{m-1} \rangle$ tal que $(f-g_0-s_1)$ é ℓ_0 alternante em $[a, x_{\ell_0}] \cap D$ e $\|f-g_0-s_1\|_{[a, x_{\ell_0}] \cap D} = \|f-g_0-s_1\|_D = d_0$ pois $[x_{\ell_1}, x_{r_1+1}]$ é o intervalo de unicidade e $x_{\ell_1} < x_{\ell_0}$.

Suponhamos agora que tenhamos $s_0 \in P_0$ satisfazendo (1) para $j = \ell_0 - \ell_1, \ell_0 - \ell_1 - 1, \dots, \ell_0 - \ell_1 - \ell + 1 > 1$.

Mostremos a existência de $s \in P_0$ que satisfaz (1) para $j = \ell_0 - \ell_1, \ell_0 - \ell_1 - 1, \dots, \ell_0 - \ell_1 - \ell > 0$.

Se $f-s_0$ é $\ell_1 + \ell$ alternante em $[a, x_{\ell_1 + \ell}] \cap D$ nada há a mostrar. Senão, temos que $f-s_0$ é $\ell_0 - j - \ell_1 - \ell$ alternante em $[x_{\ell_1 + \ell}, x_{\ell_0 - j}]$, $j = 0, \dots, \ell_0 - \ell_1 - \ell - 1$. Aproximando $f-s_0$ em $[a, x_{\ell_1 + \ell}] \cap D$ por $G = \langle (x_1-t)_+^{m-1}, \dots, (x_{\ell_1 + \ell}-t)_+^{m-1} \rangle$ obtemos s_ℓ tal que $(f-s_0-s_\ell)$ é $(\ell_1 + \ell)$ alternante em $[a, x_{\ell_1 + \ell}] \cap D$. Temos que $\|f-s_0-s_\ell\|_{[a, x_{\ell_1 + \ell}] \cap D} = \|f-s_0-s_\ell\|_D$ pois $x_{\ell_1} < x_{\ell_1 + \ell}$ e $[x_{\ell_1}, x_{r_1+1}]$ é o intervalo de unicidade.

Assim, $(f-s_0-s_\ell)$ possui $\ell_1 + \ell + 1$ pontos extremais de alternância em $[a, x_{\ell_1 + \ell}] \cap D$ e $(\ell_0 - j - \ell_1 - \ell + 1)$ em $[x_{\ell_1 + \ell}, x_{\ell_0 - j}] \cap D$. Descartando o primeiro ou o último dos pontos de alternância em $[a, x_{\ell_1 + \ell}]$, obtemos que $f-s_0-s_\ell$ possui $\ell_0 - j + 1$ pontos extremais de alternância em $[a, x_{\ell_0 - j}]$ $j = 0, \dots, \ell_0 - \ell_1 - \ell$, o que é o mesmo que ser $\ell_1 + j$ alternante em $[a, x_{\ell_1 + j}]$, $j = \ell, \dots, \ell_0 - \ell_1$. $s = s_0 + s_\ell$ é a função desejada.

A demonstração de (1) e de (2) para $i = 1, \dots, q$ é análoga

ga e (3) e (4) são de fácil verificação.

Vamos agora, a partir da caracterização da aproximação estrita em $S_{m,k}$, apresentar um teorema de Strauss [26] que relaciona aproximações estritas em $S_{m,k}$ com a seleção contínua definida no teorema 2.2.

Teorema 2.12 ($k \leq m$) - Para $f \in C[a,b] \setminus S_{m,k}$ e para cada uma das sequências de conjuntos:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad (D_n) : \quad & D_n \subset [a,b], D_n \text{ finito}, C(D_n) \not\subset S_{m,k} \Big|_{D_n} \text{ e } d(D_n, [a,b]) = \\ & = \sup_{t \in [a,b]} (\inf_{p \in D_n} |p-t|) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad (D_n) : \quad & D_n \subset [a,b], D_n \text{ finito}, C(D_0) \not\subset S_{m,k} \Big|_{D_0}, D_{i+1} = D_i \cup \\ & \cup \{t_{i,0}, t_{i,1}, \dots, t_{i,k}\}, \quad i=0,1,\dots \end{aligned}$$

onde $|(f-g_i^*)(t_{i,j})| = \|f-g_i^*\|_{[x_j, x_{j+1}]}$ para g_i^* aproximação estrita de f em D_i e $j=0, \dots, k$.

temos que a sequência g_n^* das aproximações estritas de f em D_n convergem para a aproximação ótima s_f de f em $[a,b]$, definida pela seleção contínua do teorema 2.2.

Dem: Vamos primeiramente demonstrar o teorema para a sequência D_n (definida em a). Na construção de cada g_n^* fica definida, conforme a caracterização da aproximação estrita em 2.11, uma partição de $[a,b]$ $a \leq x_{\ell_q} < \dots < x_{\ell_1} < x_{r_1+1} < \dots < x_{r_p+1} \leq b$. O número de partições de $[a,b]$ deste tipo é finito, e portanto, recorrendo

a uma subsequência podemos supor que a partição independa de n .

Escrevemos então cada g_n^* como: $g_n^* = g_{-q,n}^+ \dots + g_{0,n}^+ \dots + g_{p,n}^+$.

Tomemos $\tilde{g}$ ponto de acumulação de g_n^* . Pelo teorema A.1 (ver apêndice) obtemos que $\tilde{g} \in P(f)$.

Em $[x_{\ell_1}, x_{r_1+1}] \cap D_n$, g_n^* é $m+r_1-\ell_1$ alternante (prop. 1.9D). Recorrendo a nova subsequência se necessário, obtemos a convergência dos pontos extremais de alternância de g_n^* e portanto, que $\tilde{g}$ é $m+r_1-\ell_1$ alternante em $[x_{\ell_1}, x_{r_1+1}]$. Assim, existe um intervalo $[x_{\ell_0}, x_{\ell_0+1}] \subset [x_{\ell_1}, x_{r_1+1}]$ tal que $\tilde{g} = g$ em $[x_{\ell_0}, x_{\ell_0+1}]$ para todo $g \in P(f)$. (Teorema 1.11).

Tomamos $r_0 = \ell_0$. Podemos então supor que as funções $g_{i,n}$ ($-q \leq i \leq p$) satisfazem as condições (1), (2), (3) e (4) da caracterização da aproximação estrita em 2.11.

Recorrendo a nova subsequência podemos supor que $g_{i,n} \rightarrow \tilde{g}_i$ (pois as funções $g_{i,n}$ são limitadas. Ver apêndice) e obtemos do teorema A.1 do apêndice e da caracterização da estrita que:

i) $\tilde{g}_i$ é aproximação ótima de $(f - \tilde{g}_0 - \dots - \tilde{g}_{i-1})$ em $[x_{r_i+1}, b]$ por

$$G = \langle (t - x_{r_i+1})_+^{m-1}, \dots, (t - x_k)_+^{m-1} \rangle, \quad i = 1, \dots, p$$

ii) $\tilde{g}_{-i}$ é aproximação ótima de $(f - \tilde{g}_0 - \dots - \tilde{g}_{-i+1})$ em $[a, x_{\ell_i}]$ por

$$G = \langle (x_1 - t)_+^{m-1}, \dots, (x_{\ell_i} - t)_+^{m-1} \rangle, \quad i = 1, \dots, q$$

iii) 0 é aproximação ótima de $(f - \tilde{g}_0 - \dots - \tilde{g}_i)$ em $[x_{r_{i+1}+1-j}, b]$ por

$$G = \langle (t - x_{r_{i+1}+1-j})_+^{m-1}, \dots, (t - x_k)_+^{m-1} \rangle, \quad j = 1, \dots, r_1 - r_0$$

(se $i=0$ e $r_1 \neq r_0$) e $j = 1, \dots, r_{i+1} - r_i - 1$ ($i = 1, \dots, p$, se $r_{i+1} - r_i > 1$).

- iv) 0 é aproximação ótima de $(f - \tilde{g}_0 - \dots - \tilde{g}_{-i})$ em $[a, x_{\ell_{i+1}+j}]$ por $G = \langle (x_1 - t)_+^{m-1}, \dots, (x_{\ell_{i+1}+j} - t)_+^{m-1} \rangle$, $j=1, \dots, \ell_0 - \ell_1$ (se $i=0$ e $\ell_0 \neq \ell_1$) e $j=1, \dots, \ell_i - \ell_{i+1} - 1$ ($i=1, \dots, q$, se $\ell_i - \ell_{i+1} > 1$).
- v) $(f - \tilde{g}_0 - \dots - \tilde{g}_i)$ é $(k - r_{i+1} + j)$ alternante em $[x_{r_{i+1}}, b]$, $j=1, \dots, r_{i+1} - r_i$, $i=0, \dots, p$ (se $r_{i+1} - r_i > 0$).
- vi) $(f - \tilde{g}_0 - \dots - \tilde{g}_{-i})$ é $(\ell_{i+1} + j)$ alternante em $[a, x_{\ell_{i+1}+j}]$, $j=1, \dots, \ell_i - \ell_{i+1}$, $i=0, \dots, q$ (se $\ell_i - \ell_{i+1} > 0$).

Vemos então, usando de i) a vi), que a seleção contínua s_f pode ser escrita como $s_f = \tilde{g}_{-q} + \dots + \tilde{g}_0 + \dots + \tilde{g}_p = \tilde{g}$. Isto mostra que s_f é o único ponto de acumulação da sequência g_n^* e portanto, como g_n^* é limitada, que $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n^* = s_f$.

Para a sequência D_n definida em b) a demonstração é análoga, sendo que devemos usar o teorema A.2 do apêndice para mostrar que $\tilde{g} \in P(f)$ e as implicações (i) a (iv), ao invés do teorema A.1.

Observações -

- (1) A seleção contínua s_f definida no teorema 2.2 pode ser considerada, de certa forma, como uma aproximação estrita para f no caso contínuo (aproximação em $[a, b]$).

Neste caso, na definição dos conjuntos P_i (ver 2.8 e 2.11) deveríamos substituir aproximações ótimas por aproximações ótimas que alternam um certo número de vezes. No caso em

que $k > m$ esta construção nem sempre é possível, em virtude de não podermos definir o intervalo de unicidade.

- (2) Recentemente, Sommer [24] mostrou que, se $k \leq m$, a seleção contínua s_f é limite de aproximações ótimas de $f \in C[a, b]$ por $S_{m, k}$ na norma p ($1 < p < \infty$) quando p tende a infinito. Além disso, Sommer conjectura que tal limite nem sempre existe se $k > m$.
- (3) O Algoritmo de Polya (ver p/ex. [5]), no qual tomamos uma sequência de aproximações ótimas g_{p_n} para $f \in C(X)$ na norma p_n ($1 < p_n < \infty$) tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty$, nem sempre é convergente. Nos casos conhecidos em que a sequência g_{p_n} converge, temos que o limite se constitui em uma seleção contínua para a projeção métrica (ver teoremas 2.2, 2.9, 2.10 e 2.12), inclusive em aproximação por subespaços de Haar ou Chebyshev (ver p/ ex. [5]). Juntando esta observação ao teorema 2.2 obtemos uma indicação de que não deve haver convergência do algoritmo de Polya, quando $k > m$ em aproximação por $S_{m, k}$ em um intervalo. Esta indicação está de acordo com a conjectura de Sommer.

CAPÍTULO 3

CÁLCULO DE APROXIMAÇÕES ÓTIMAS

Este capítulo é dedicado ao cálculo de aproximações ótimas por $S_{m,k}$ de funções contínuas definidas em intervalos ou em conjuntos discretos. Usaremos algoritmos, para os quais é fundamental o conceito de admissibilidade, que apresentamos a se-
guir.

3.1-Admissibilidade - Dizemos que um conjunto $T=\{t_1, t_2, \dots, t_{N+1}\}$ ($a \leq t_1 < \dots < t_{N+1} \leq b$), onde $N=m+k$ é a dimensão de $S_{m,k}$, é admissível (em relação a $S_{m,k}$) se o determinante:

$$D(T) = \det \begin{pmatrix} B_1^m(t_1) & \dots & B_N^m(t_1) & (-1)^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ B_1^m(t_{N+1}) & \dots & B_N^m(t_{N+1}) & (-1)^{N+1} \end{pmatrix} \text{ é diferente de zero.}$$

$\{B_1^m, B_2^m, \dots, B_N^m\}$ é uma base de B-splines para $S_{m,k}$.

Um tal conjunto T é também chamado de referência admissível.

Para estabelecermos condições sobre a admissibilidade de uma referência T , analisaremos os determinantes:

$$D_i(T) = \det \begin{pmatrix} B_1^m(t_1) & \dots & B_N^m(t_1) \\ \vdots & & \vdots \\ B_1^m(t_{i-1}) & \dots & B_N^m(t_{i-1}) \\ B_1^m(t_{i+1}) & \dots & B_N^m(t_{i+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ B_1^m(t_{N+1}) & \dots & B_N^m(t_{N+1}) \end{pmatrix} \quad i=1, \dots, N+1$$

Fazendo a identificação $\tilde{t}_p = \begin{cases} t_p, & 1 \leq p < i \\ t_{p+1}, & i \leq p \leq N \end{cases}$ para cada

i ($1 \leq i \leq N+1$), vemos que $D_i(T) \neq 0$ se e somente se $\tilde{t}_j < x_j < \tilde{t}_{j+m}$, $j=1, \dots, k$ (ver teorema 0.10).

Em outra forma temos:

$$D_i(T) \neq 0 \iff \text{para } 1 \leq j \leq k \begin{cases} t_j < x_j < t_{j+m}, & \text{se } j < i-m & (1_i) \\ t_j < x_j < t_{j+m+1}, & \text{se } i-m \leq j < i & (2_i) \quad (C_i) \\ t_{j+1} < x_j < t_{j+m+1}, & \text{se } j \geq i & (3_i) \end{cases}$$

Usando, no cálculo de $D(T)$, o desenvolvimento de Laplace pela última coluna, obtemos $D(T) = (-1)^{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} D_i(T)$. Como $D_i(T) \geq 0$, $i=1, \dots, N+1$ (pelo teorema 0.10) resulta que $D(T) \neq 0 \iff \exists i (1 \leq i \leq N+1)$ tal que $D_i(T) \neq 0$.

Vamos agora mostrar que as condições que apresentamos

a seguir são equivalentes (ver p/ ex. [17]):

- a) T é admissível
- b) $\exists \ell \text{ e } r \ (0 \leq \ell \leq r \leq k)$ tal que $D_i(T) \neq 0 \iff \ell+1 \leq i \leq r+m+1$
- c) $\exists \ell \text{ e } r \ (0 \leq \ell \leq r \leq k)$ tal que:
 - (i) $x_\ell \leq t_{\ell+1}$ e $t_{r+m+1} \leq x_{r+1}$
 - (ii) $t_{j+1} < x_j < t_{j+m}$, se $\ell+1 \leq j \leq r$
 - (iii) $t_1 < x_j$ se $1 \leq j \leq \ell$ e $x_j < t_{j+m+1}$ se $r+1 \leq j \leq k$
 - (iv) $x_j < t_{j+m}$ se $1 \leq j \leq \ell-m$ e $t_{j+1} < x_j$ se $r+1+m \leq j \leq k$
- d) $\exists \ell \text{ e } r \ (0 \leq \ell \leq r \leq k)$ tal que:
 - (i) $[x_\ell, x_{r+1}]$ contém pelo menos $r+m-\ell+1$ pontos de T .
 - (ii) $[x_\ell, x_j)$ contém pelo menos $j-\ell+1$ pontos de T , $\ell+1 \leq j \leq r$
 $(x_j, x_{r+1}]$ contém pelo menos $r-j+2$ pontos de T
 - (iii) $[x_0, x_j)$ contém pelo menos j pontos de T , $1 \leq j \leq \ell$
 $(x_j, x_{k+1}]$ contém pelo menos $k+1-j$ pontos de T , $r+1 \leq j \leq k$
 - (iv) $(x_j, x_{k+1}]$ contém pelo menos $k+2-j$ pontos de T , $1 \leq j \leq \ell-m$
 $[x_0, x_j)$ contém pelo menos $j+1$ pontos de T , $r+m+1 \leq j \leq k$

Obs: O intervalo $[x_\ell, x_{r+1}]$ (definido por b), c) e d)) é chamado de intervalo de admissibilidade.

Dem:

- a) $\Rightarrow$ b) - Já vimos que se T é admissível então existe $i \ (1 \leq i \leq N+1)$ tal que $D_i(T) \neq 0$. Tomemos $\alpha = \min \{i : 1 \leq i \leq N+1 \text{ e } D_i(T) \neq 0\}$.
 Mostremos primeiramente que $D_{\alpha+p}(T) \neq 0$, $p=1, \dots, m$ (verificaremos também que $\alpha+m \leq N+1$).

As condições necessárias e suficientes para termos $D_{\alpha+p}(T) \neq 0$ são:

$$\begin{cases} t_j < x_j < t_{j+m}, & \text{se } 1 \leq j < \alpha+p-m & (1_{\alpha+p}) \\ t_j < x_j < t_{j+m+1}, & \text{se } \alpha+p-m \leq j < \alpha+p & (2_{\alpha+p}) \\ t_{j+1} < x_j < t_{j+m+1}, & \text{se } \alpha+p \leq j \leq k & (3_{\alpha+p}) \end{cases} \quad (C_{\alpha+p})$$

Como $D_{\alpha}(T) \neq 0$ as condições (C_{α}) são satisfeitas, o que implica que $(2_{\alpha+p})$ e $(3_{\alpha+p})$ são satisfeitas, devido a (2_{α}) e (3_{α}) ($1 \leq p \leq m$, supondo $\alpha+m \leq N+1$).

Supondo que $D_{\alpha+p}(T) = 0$ (para algum p entre 1 e m) teremos então que $x_j \geq t_{j+m}$ para algum j tal que $\alpha-m \leq j \leq \alpha+p-m-1$ (De (1_{α}) temos $(1_{\alpha+p})$ para $1 \leq j < \alpha-m$ e de (2_{α}) que $t_j < x_j$ para $\alpha-m \leq j \leq \alpha+p-m-1$).

Se $\alpha=1$ então $t_{\alpha} \geq x_{\alpha-1} = x_0$. Se $\alpha > 1$ então $D_{\alpha-1}(T) = 0$ (devido à escolha de α). Por termos $D_{\alpha}(T) \neq 0$ as condições $(1_{\alpha-1})$ e $(2_{\alpha-1})$ são satisfeitas, o que mostra que $(3_{\alpha-1})$ não se verifica. Por (3_{α}) vemos então que $t_{\alpha} \geq x_{\alpha-1}$.

Temos então que (para $\alpha-m \leq j \leq \alpha+p-m-1$): $x_j \leq x_{\alpha-1} \leq t_{\alpha} \leq t_{j+m}$ mostrando que não podemos ter $D_{\alpha+p}(T) = 0$ para $1 \leq p \leq m$ (supondo $\alpha+m \leq N+1$).

Vamos agora mostrar que $\alpha+m \leq N+1$. Suponhamos que $\alpha+m > N+1$. Neste caso temos que $D_{N+1}(T) \neq 0$ (pois $\alpha+p = N+1$, para algum p tal que $0 \leq p < m$). Assim sendo, as condições (C_{N+1}) se verificam. Mostremos que as condições (C_{N+1-m}) também são verificadas neste caso. De (1_{N+1}) obtemos (1_{N+1-m}) e (2_{N+1-m}) e por termos $N+1-m = m+k+1-m = k+1$ a condição (3_{N+1-m}) é automaticamente satisfeita. Assim, $D_{N+1-m}(T) \neq 0$ e portanto, devido à escolha de α , não podemos ter $\alpha+m > N+1$.

Tomemos agora $A = \{i: \alpha < i \leq N \text{ e } D_i(T) \neq 0 \text{ e } D_{i+1}(T) = 0\}$. Se $A \neq \emptyset$ escolhemos $\beta = \min A$, caso contrário, $\beta = N+1$ (notemos que $\beta \geq \alpha + m$). Mostremos então que $D_{\beta+q} = 0$ se $1 \leq q \leq N+1-\beta$. Se $\beta = N+1$ nada há a mostrar. Se $\beta < N+1$ temos $D_{\beta+1} = 0$ e $D_\beta \neq 0$ e portanto $x_{\beta-m} \geq t_\beta$, o que implica em não termos a condição $(1_{\beta+q})$ satisfeita para todo q tal que $1 \leq q \leq N+1-\beta$.

Assim, $D_{\beta+q} = 0$ para $1 \leq q \leq N+1-\beta$. Basta tomarmos $\ell = \alpha - 1$ e $r = \beta - m - 1$ e observarmos que $0 \leq \ell \leq r \leq k$ (pois $\beta \geq \alpha + m$) para encerrar a demonstração.

b) $\implies c)$ -

Obtemos (i) por termos $D_\ell(T) = 0$ (se $\ell > 0$) e $D_{r+m+2}(T) = 0$ (se $r < k$). Se $\ell = 0$ temos $x_\ell \leq t_{\ell+1}$ trivialmente e se $r = k$ temos $t_{r+m+1} \leq x_{r+1}$. A condição (ii) é obtida de $(3_{\ell+1})$ e (1_{r+m+1}) , a (iii) segue de $((1_{\ell+1}) \text{ e } (2_{\ell+1}))$ e $((2_{r+m+1}) \text{ e } (3_{r+m+1}))$ e a (iv) é consequência de $(1_{\ell+1})$ e (3_{r+m+1}) .

c) $\iff d)$ -

Estas duas condições são claramente equivalentes.

c) $\implies a)$

Vamos mostrar que $D_{\ell+1}(T) \neq 0$, o que é suficiente para termos $D(T) \neq 0$.

De (iv) e (iii) obtemos $(1_{\ell+1})$ e $(2_{\ell+1})$ segue de (i) e (iii). Para a condição $(3_{\ell+1})$ usamos (ii) para $\ell+1 \leq j \leq r$, (i) e (iii) para $r+1 \leq j \leq r+m$ e (iii) e (iv) para $r+m+1 \leq j \leq k$.

Assim $(C_{\ell+1})$ é satisfeita e portanto T é admissível.

Veremos agora como calcular aproximações ótimas em uma referência admissível, como um primeiro passo para calcularmos aproximações em intervalos e conjuntos discretos.

3.2 - Cálculo de uma aproximação ótima em uma referência admissível - Dada uma referência $T=\{t_1, \dots, t_{N+1}\}$ ($a \leq t_1 < \dots < t_{N+1} \leq b$) admissível e $f \in C[a, b] \sim S_{m,k}$, calculamos uma aproximação ótima s_T para f em T por $S_{m,k}$ através da resolução do seguinte sistema linear:

$$\begin{pmatrix} B_1^m(t_1) & \dots & B_N^m(t_1) & (-1)^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ B_1^m(t_{N+1}) & \dots & B_N^m(t_{N+1}) & (-1)^{N+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t_1) \\ \vdots \\ f(t_{N+1}) \end{pmatrix},$$

onde $\{B_1^m, \dots, B_N^m\}$ é uma base de B-splines para $S_{m,k}$ e $N=m+k$.

Vejamos:

Como T é admissível, o sistema possui solução única. Tomemos então $s_T = \sum_{i=1}^N \gamma_i B_i^m$.

Observemos através do sistema que:

$$s_T(t_i) + (-1)^i \gamma_{N+1} = f(t_i), \quad i=1, \dots, N+1$$

$\therefore f(t_i) - s_T(t_i) = (-1)^i \gamma_{N+1}$, $i=1, \dots, N+1$. Portanto,

$\|f - s_T\|_T = |\gamma_{N+1}|$ e $f - s_T$ é N alternante em T (se $\gamma_{N+1} \neq 0$). Temos então, pelo teorema 1.3D, que s_T é aproximação ótima de f em T , se $\gamma_{N+1} \neq 0$. Se $\gamma_{N+1} = 0$ é claro que s_T é aproximação ótima.

Observemos então que, devido às condições de admissibilidade e ao teorema 1.6D, que em $T \cap [x_\ell, x_{r+1}]$ ($[x_\ell, x_{r+1}]$ é o intervalo de admissibilidade de T) s_T é a única aproximação ótima de f por $S_{m,k}$, ou seja, qualquer outra aproximação de f em T coincide com s_T em $T \cap [x_\ell, x_{r+1}]$ e, mais que isso, devido ao lema 1.2, coincide com s_T em $[x_\ell, x_{r+1}]$.

Vamos observar ainda que, para cada T admissível, $\exists m_T = (\nu_1, \dots, \nu_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+1}$ tal que $\sum_{i=1}^{N+1} \nu_i s(t_i) = 0 \quad \forall s \in S_{m,k}$ e $\sum_{i=1}^{N+1} (-1)^i \nu_i = 1$. Além disso, $\nu_i \neq 0 \iff \ell+1 \leq i \leq r+m+1$ (onde ℓ e r são definidos pelas condições de admissibilidade de T). Para verificar estes fatos notemos que $m_T = (\nu_1, \dots, \nu_{N+1})$ é solução do seguinte sistema:

$$\begin{pmatrix} B_1^m(t_1) & \dots & B_1^m(t_{N+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ B_N^m(t_1) & \dots & B_N^m(t_{N+1}) \\ (-1)^1 & \dots & (-1)^{N+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_N \\ \nu_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e portanto, que:}$$

$$\nu_i = (-1)^{N+1+i} \frac{D_i(T)}{D(T)} = (-1)^i \frac{D_i(T)}{|D(T)|}, \quad i=1, \dots, N+1. \quad \text{Para ver que}$$

$\nu_i \neq 0 \iff \ell+1 \leq i \leq r+m+1$ basta olharmos para a forma b) das equivalências sobre admissibilidade. Ainda, pelo fato dos ν_i possuírem sinal alternante, temos que $\sum_{i=1}^{N+1} |\nu_i| = 1$.

Relacionemos agora m_T com a aproximação s_T . Para $s \in S_{m,k}$ temos:

$$\left| \sum_{i=1}^{N+1} \nu_i f(t_i) \right| = \left| \sum_{i=1}^{N+1} \nu_i (f(t_i) - s(t_i)) \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=\ell+1}^{r+m+1} \mu_i (f(t_i) - s(t_i)) \right| \leq \sum_{i=\ell+1}^{r+m+1} |\mu_i| |f(t_i) - s(t_i)| \leq$$

$\sup_{\ell+1 \leq i \leq r+m+1} |f(t_i) - s(t_i)|$. Verificam-se as igualdades se para $\ell+1 \leq i \leq r+m+1$ tivermos $|f(t_i) - s(t_i)| = \sup_{\ell+1 \leq i \leq r+m+1} |f(t_i) - s(t_i)|$ com sinais alternantes. Isto mostra que $\|f - s_T\|_T = \gamma_{N+1} = \left| \sum_{i=1}^{N+1} \mu_i f(t_i) \right|$

Vamos apresentar a seguir um algoritmo para o cálculo de aproximações em conjuntos discretos:

3.3 - Cálculo de uma aproximação ótima em um conjunto finito (O Algoritmo Discreto) - Para $D=[a,b]$, D finito tal que

$\dim S_{m,k}|_D = m+k = N$ e $C(D) \not\subset S_{m,k}|_D$, e $f \in C(D) \sim S_{m,k}|_D$ vamos calcular uma aproximação ótima de f em D por $S_{m,k}$. Observemos inicialmente que existe uma referência admissível $T_0 = \{t_{0,1}, t_{0,2}, \dots, t_{0,N+1}\} \subset D$ (T_0 pode ser construída tomando-se N pontos de interpolação para $S_{m,k}$ em D , que existem pois $\dim S_{m,k}|_D = N$ e juntando-se a eles mais um ponto de D , que existe pois $C(D) \not\subset S_{m,k}|_D$). Denominemos por $[x_{\ell_0}, x_{r_0+1}]$ ao intervalo de admissibilidade de T_0 .

Vamos agora descrever o algoritmo para o cálculo da aproximação ótima, através de um diagrama de blocos, que será explicado com mais detalhes em seguida. Os dados de entrada para o algoritmo são os seguintes:

$m \geq 2$ (ordem dos splines), $k \geq 1$ (nº de nós), $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} = b$ (nós e extremos do intervalo), $D=[a,b]$ conjunto finito, $f \in C(D) \sim S_{m,k}|_D$, $N=m+k$, $\{B_1^m, \dots, B_N^m\}$ base de B-splines para $S_{m,k}$, T_0 admissível, ℓ_0 e r_0 . (O conjunto D satisfaz às condições descritas anteriormente).

O cálculo de aproximações ótimas em referências admis

síveis já foi descrito anteriormente, faltando portanto, para clareza do algoritmo, explicar a construção de T_{i+1} a partir de T_i . Como já dissemos, T_{i+1} é obtido através da troca de um ponto de T_i por t'_i . A troca é efetuada segundo a seguinte regra:

3.4 - Regra de Troca - Substituindo um ponto de T_i por t'_i obtemos T_{i+1} admissível, $T_{i+1} = \{t_{i+1,1}, \dots, t_{i+1,N+1}\}$

($a \leq t_{i+1,1} < \dots < t_{i+1,N+1} \leq b$). O ponto a ser trocado por t'_i depende da posição de t'_i em relação aos pontos de T_i e do sinal da função erro $h = f - s_i$, onde $\text{sgn } p = \begin{cases} 1, & \text{se } p \geq 0 \\ -1, & \text{se } p < 0 \end{cases}$. Em cada um dos casos seguintes indicamos o ponto a ser trocado por t'_i :

1) se $t_{i,j} < t'_i < t_{i,j+1}$ e $\ell_i + 1 \leq j \leq r_i + m + 1$, troca-se $\begin{cases} t_{i,j}, & \text{se } \text{sgn } h(t'_i) = \text{sgn } h(t_{i,j}) \\ t_{i,j+1}, & \text{c.c.} \end{cases}$

1L) se $x_\ell < t'_i < t_{i,\ell+1}$, troca-se $\begin{cases} t_{i,\ell+1}, & \text{se } \text{sgn } h(t'_i) = \text{sgn } h(t_{i,\ell+1}) \\ t_{i,r+m+1}, & \text{c.c.} \end{cases}$

1R) se $t_{i,r+m+1} < t'_i < x_{r+1}$, troca-se $\begin{cases} t_{i,r+m+1}, & \text{se } \text{sgn } h(t'_i) = \text{sgn } h(t_{i,r+m+1}) \\ t_{i,\ell+1}, & \text{c.c.} \end{cases}$

2L) se $t_{i,\ell} < t'_i < x_\ell$, troca-se $\begin{cases} t_{i,\ell}, & \text{se } \text{sgn } h(t'_i) = \text{sgn } h(t_{i,\ell}) \\ t_{i,\ell+1}, & \text{c.c.} \end{cases}$

2R) se $x_{r+1} < t'_i < t_{i,r+m+2}$, troca-se $\begin{cases} t_{i,r+m+2}, & \text{se } \text{sgn } h(t'_i) = \text{sgn } h(t_{i,r+m+2}) \\ t_{i,r+m+1}, & \text{c.c.} \end{cases}$

3L) se $t_{i,j} < t'_i < t_{i,j+1}$ e $1 \leq j \leq \ell-1$.

$$\text{troca-se} \begin{cases} t_{i,j+1} & \text{se } \text{sgn } h(t'_i) = \text{sgn } h(t_{i,j+1}) \text{ e } (j+1-m \geq 1, t'_i > x_{j+1-m}) \\ t_{i,r+m+1} & \text{se } \text{sgn } h(t'_i) = \text{sgn } h(t_{i,j+1}) \text{ e } (j+1-m \geq 1 \text{ e } t'_i < x_{j+1-m}) \\ t_{i,r+m+1} & \text{se } \text{sgn } h(t'_i) \neq \text{sgn } h(t_{i,j+1}) \text{ e } t'_i > x_j \\ t_{i,j} & \text{se } \text{sgn } h(t'_i) \neq \text{sgn } h(t_{i,j+1}) \text{ e } t'_i < x_j \end{cases}$$

3R) se $t_{i,j} < t'_i < t_{i,j+1}$ e $r+m+2 \leq j \leq N$,

$$\text{troca-se} \begin{cases} t_{i,j} & \text{se } \text{sgn } h(t'_i) = \text{sgn } h(t_{i,j}) \text{ e } (j-1 \leq k, t'_i < x_{j-1}) \\ t_{i,\ell+1} & \text{se } \text{sgn } h(t'_i) = \text{sgn } h(t_{i,j}) \text{ e } (j-1 \leq k \text{ e } t'_i > x_{j-1}) \\ t_{i,\ell+1} & \text{se } \text{sgn } h(t'_i) \neq \text{sgn } h(t_{i,j}) \text{ e } t'_i < x_{j-m} \\ t_{i,j+1} & \text{se } \text{sgn } h(t'_i) \neq \text{sgn } h(t_{i,j}) \text{ e } t'_i > x_{j-m} \end{cases}$$

$$4L) \text{ se } t'_i < t_{i,1} < x_\ell, \text{ troca-se} \begin{cases} t_{i,1}, & \text{se } \text{sgn } h(t'_i) = \text{sgn } h(t_{i,1}) \\ t_{i,r+m+1}, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$4R) \text{ se } x_{r+1} < t_{i,N+1} < t'_i, \text{ troca-se} \begin{cases} t_{i,N+1}, & \text{se } \text{sgn } h(t'_i) = \text{sgn } h(t_{i,N+1}) \\ t_{i,\ell+1}, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Vamos agora estabelecer relações entre $I_{T_i} = [x_{\ell_i}, x_{r_i+1}]$, $I_{T_{i+1}} = [x_{\ell_{i+1}}, x_{r_{i+1}+1}]$, em cada caso da troca. Estas relações nos serão úteis para a implementação do algoritmo.

Em cada caso, daremos o ponto trocado por t'_i e veremos se t'_i pertence ou não a $I_{T_{i+1}}$.

$$1) \begin{cases} t_{i,j} : & t'_i \in I_{T_{i+1}}, \ell_i \leq \ell_{i+1} \text{ e } r_i = r_{i+1} \\ t_{i,j+1} : & t'_i \in I_{T_{i+1}}, \ell_i = \ell_{i+1} \text{ e } r_{i+1} \leq r_i \end{cases}$$

$$1L) \quad \begin{cases} t_{i,\ell+1} : t'_i \in I_{T_{i+1}} = I_{T_i} \\ t_{i,r+m+1} : t'_i \in I_{T_{i+1}}, \ell_i = \ell_{i+1} \text{ e } r_{i+1} \leq r_i \end{cases}$$

$$1R) \quad \begin{cases} t_{i,r+m+1} : t'_i \in I_{T_{i+1}} = I_{T_i} \\ t_{i,\ell+1} : t'_i \in I_{T_{i+1}}, \ell_i \leq \ell_{i+1} \text{ e } r_i = r_{i+1} \end{cases}$$

$$2L) \quad \begin{cases} t_{i,\ell} : t'_i \notin I_{T_{i+1}} = I_{T_i} \\ t_{i,\ell+1} : t'_i \in I_{T_{i+1}}, \ell_{i+1} \leq \ell_i - 1 \text{ e } r_i = r_{i+1} \end{cases}$$

$$2R) \quad \begin{cases} t_{i,r+m+2} : t'_i \notin I_{T_{i+1}} = I_{T_i} \\ t_{i,r+m+1} : t'_i \in I_{T_{i+1}}, \ell_i = \ell_{i+1} \text{ e } r_{i+1} \geq r_i + 1 \end{cases}$$

$$3L) \quad \begin{cases} t_{i,j+1} : t'_i \notin I_{T_{i+1}} = I_{T_i} \\ t_{i,r+m+1} : t'_i \in I_{T_{i+1}}, \ell_{i+1} \leq \ell_i \text{ e } r_{i+1} = j-m \text{ (} t_{i,j} < t'_i \leq x_{j+1-m} < t_{i,j+1} \text{ e } \\ \quad \text{sgn } h(t'_i) = \text{sgn } h(t_{i,j+1})) \\ t_{i,r+m+1} : t'_i \in I_{T_{i+1}}, \ell_{i+1} = j \text{ e } r_{i+1} \leq r_i \text{ (} t_{i,j} < x_j \leq t'_i < t_{i,j+1} \text{ e } \\ \quad \text{sgn } h(t'_i) \neq \text{sgn } h(t_{i,j+1})) \\ t_{i,j} : t'_i \notin I_{T_{i+1}} = I_{T_i} \end{cases}$$

$$3R) \quad \begin{cases} t_{i,j} : t'_i \notin I_{T_{i+1}} = I_{T_i} \\ t_{i,\ell+1} : t'_i \in I_{T_{i+1}}, \ell_{i+1} = j-1 \text{ e } r_{i+1} \geq j-1 \text{ (} t_{i,j} < x_{j-1} \leq t'_i < t_{i,j+1} \text{ e } \\ \quad \text{sgn } h(t'_i) = \text{sgn } h(t_{i,j})) \\ t_{i,\ell+1} : t'_i \in I_{T_{i+1}}, \ell_i \leq \ell_{i+1} \text{ e } r_{i+1} = j-m-1 \text{ (} t_{i,j} < t'_i \leq x_{j-m} < t_{i,j+1} \text{ e } \\ \quad \text{sgn } h(t'_i) \neq \text{sgn } h(t_{i,j})) \\ t_{i,j+1} : t'_i \notin I_{T_{i+1}} = I_{T_i} \end{cases}$$

$$4L) \quad \begin{cases} t_{i,1} : t'_i \notin I_{T_{i+1}} = I_{T_i} \\ t_{i,r+m+1} : t'_i \in I_{T_{i+1}}, \ell_{i+1}=0 \text{ e } r_{i+1} \leq r_i \end{cases}$$

$$4R) \quad \begin{cases} t_{i,N+1} : t'_i \notin I_{T_{i+1}} = I_{T_i} \\ t_{i,\ell+1} : t'_i \in I_{T_{i+1}}, \ell_i \leq \ell_{i+1} \text{ e } r_{i+1}=k \end{cases}$$

As relações apresentadas são de fácil verificação, com possíveis excessões para 3L) e 3R). Vamos mostrar que as de 3L) são válidas (as de 3R) verificam-se analogamente):

É de verificação imediata que, quando o ponto trocado é $t_{i,j+1}$ ou $t_{i,j}$, temos $t'_i \in I_{T_{i+1}} = I_{T_i}$.

Analisemos então os casos em que o ponto trocado é

$t_{i,r+m+1}$:

a) $t_{i,j} < t'_i \leq x_{j+1-m} < t_{i,j+1}$ ($1 \leq j \leq \ell_i - 1$). Como T_i é admissível temos que $t'_i > x_{j-m}$. Mostremos que $t'_i \in I_{T_{i+1}}$. Observemos que $t'_i = t_{i+1,j+1} \leq x_{j+1-m}$ (devido à troca) e que $D_{j+1}(T_{i+1}) = D_{r+m+1}(T_i) \neq 0$, mostrando que $t'_i \in I_{T_{i+1}}$. Supondo $r_{i+1} \geq j-m+1$, obtemos de c)(ii) das equivalências sobre admissibilidade que $t_{i+1,j+1} > x_{j+1-m}$, o que é uma contradição. Portanto $r_{i+1} \leq j-m$. Como $D_{j+1}(T_{i+1}) \neq 0$ e $x_{j-m} < t_{i+1,j} < t_{i+1,j+1}$ obtemos $r_{i+1} = j-m$. Ao mostrarmos que $t'_i \in I_{T_{i+1}}$, automaticamente temos que $\ell_{i+1} \leq \ell_i$.

b) $t_{i,j} < x_j \leq t'_i < t_{i,j+1}$ ($1 \leq j \leq \ell_i - 1$). Como T_i é admissível temos $t_{i,j+1} < x_{j+1}$. Notemos que $t'_i = t_{i+1,j+1} \geq x_j$ e que $D_{j+1}(T_{i+1}) = D_{r+m+1}(T_i) \neq 0$ e portanto $t'_i \in I_{T_{i+1}}$. Supondo $\ell_{i+1} \leq j-1$ obtemos

de c) (ii) das equivalências sobre admissibilidade que $t_{i+1,j+1} < x_j$ o que é uma contradição. Assim, $\ell_{i+1} \geq j$ e como $D_{j+1}(T_{i+1}) \neq 0$ e $t_{i+1,j+1} < x_{j+1}$ temos $\ell_{i+1} = j$.
Claramente se vê que $r_{i+1} \leq r_i$.

Resta-nos mostrar que o algoritmo funciona. Para tanto veremos que ele é finito e que realmente produz uma aproximação ótima para f em D por $S_{m,k}$.

Observemos que o algoritmo só termina se para algum i tivermos $\|f-s_i\|_D = \|f-s_i\|_{T_i}$. Neste caso, obtemos que:
 $\delta(-1)^i (f-s_i)(t_{i,j}) = \|f-s_i\|_{T_i} = \|f-s_i\|_D$, $j=1, \dots, N+1$ e $\delta \in \{-1, 1\}$ e pelo teorema 1.3D que s_i é aproximação ótima de f em D , sendo única (teorema 1.5D e lema 1.2) em $[x_{\ell_i}, x_{r_{i+1}}]$.

Isto mostra, que só nos resta verificar que o algoritmo é finito. Para tanto, vamos desenvolver dois lemas:

Lema 3.5 - Para $f, s_i, t'_i, T_i, T_{i+1}$, $I_{T_i} = [x_{\ell_i}, x_{r_{i+1}}]$, $I_{T_{i+1}} = [x_{\ell_{i+1}}, x_{r_{i+1}+1}]$, d_i, d_{i+1} e $m_{T_{i+1}} = (\mu_{i+1,1}, \dots, \mu_{i+1,N+1})$ definidos como no algoritmo discreto temos:

(i) $(f-s_i)$ é alternante em $T_{i+1} \cap I_{T_{i+1}}$

(ii) $d_{i+1} \geq d_i$

(iii) $t'_i \notin I_{T_{i+1}} \iff d_{i+1} = d_i$, Neste caso, $I_{T_i} = I_{T_{i+1}}$ e

$$\begin{cases} \text{se } t'_i > x_{r_{i+1}} \text{ então: } r_i + m + 2 \leq i_a \leq N+1, \text{sgn}(f-s_i)(t'_i) = \text{sgn}(f-s_i)(t_{i,i_a}) \text{ e} \\ \quad t_{i+1,i_a} = t'_i. \\ \text{se } t'_i < x_{\ell_i} \text{ então: } 1 \leq i_a \leq \ell_i, \text{sgn}(f-s_i)(t'_i) = \text{sgn}(f-s_i)(t_{i,i_a}) \text{ e} \\ \quad t_{i+1,i_a} = t'_i. \text{ (nos dois casos } t_{i,i_a} \text{ é o ponto trocado por } t'_i). \end{cases} \quad (A)$$

$$(iv) \quad t_i' \in I_{T_{i+1}} \Leftrightarrow d_{i+1} \geq d_i + \inf_{\ell_{i+1}+1 \leq j \leq r_{i+1}+m+1} |\nu_{i+1,j}| \cdot (||f-s_i||_D - d_i)$$

Dem:

(i) Segue diretamente da construção de T_{i+1} .

(ii), (iii) e (iv):

De 3.2 temos que:

$$\begin{aligned} d_{i+1} &= \left| \sum_{j=1}^{N+1} \nu_{i+1,j} f(t_{i+1,j}) \right| = \left| \sum_{j=\ell_{i+1}+1}^{r_{i+1}+m+1} \nu_{i+1,j} (f(t_{i+1,j}) - s_i(t_{i+1,j})) \right| = \\ &= \sum_{j=\ell_{i+1}+1}^{r_{i+1}+m+1} |\nu_{i+1,j}| |f(t_{i+1,j}) - s_i(t_{i+1,j})| \end{aligned}$$

(a última igualdade é obtida de (i)).

$$\begin{aligned} d_i &= d_i \left(\sum_{j=1}^{N+1} |\nu_{i+1,j}| \right) = \sum_{j=\ell_{i+1}+1}^{r_{i+1}+m+1} |\nu_{i+1,j}| d_i \\ \therefore d_{i+1} - d_i &= \sum_{j=\ell_{i+1}+1}^{r_{i+1}+m+1} |\nu_{i+1,j}| (|f(t_{i+1,j}) - s_i(t_{i+1,j})| - d_i) \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

se $t_i' \notin I_{T_{i+1}}$ então temos $|f(t_{i+1,j}) - s_i(t_{i+1,j})| = d_i$ para todo j tal que $\ell_{i+1}+1 \leq j \leq r_{i+1}+m+1$ e por (1) temos $d_i = d_{i+1}$.

se $t_i' \in I_{T_{i+1}}$ então existe J ($\ell_{i+1}+1 \leq J \leq r_{i+1}+m+1$) tal que $|f(t_{i+1,J}) - s_i(t_{i+1,J})| = ||f-s_i||_D$ e de (1) obtemos

$$d_{i+1} = d_i + |\nu_{i+1,J}| (||f-s_i||_D - d_i) \geq d_i + \inf_{\ell_{i+1}+1 \leq j \leq r_{i+1}+m+1} |\nu_{i,j}| \cdot (||f-s_i||_D - d_i).$$

As condições em (A) são obtidas através da regra de troca.

Lema 3.6 - Suponha que $d_{i+1} = d_i < \|f - s_i\|_D$. Então temos que

$$\gamma_{i+1, N+1} = \gamma_{i, N+1} \text{ e}$$

(A) se $t'_i < x_{\ell_i}$: $(-1)^j \text{sgn} \gamma_{i, N+1} (\gamma_{i+1, j} - \gamma_{i, j}) \geq 0$ para $i \leq j \leq \ell_i$ e $\gamma_{i+1, j} = \gamma_{i, j}$,

$$\forall \ell_{i+1} \leq j \leq N,$$

(B) se $t'_i > x_{r_{i+1}}$: $\gamma_{i+1, j} = \gamma_{i, j}$ para $1 \leq j \leq r_{i+1}$ e

$$(-1)^{j+1} \text{sgn} \gamma_{i, N+1} (\gamma_{i+1, j} - \gamma_{i, j}) \geq 0 \text{ para } r_{i+1} + 1 \leq j \leq N.$$

(Os γ são definidos como no algoritmo).

Dem: Notemos primeiramente que se $d_{i+1} = d_i$ então, pelo lema 3.5,

temos que $t'_i < x_{\ell_i}$ ou $t'_i > x_{r_{i+1}}$. Suponhamos $t'_i < x_{\ell_i}$. Como

$B_j^m \Big|_{[x_{\ell_i}, x_{K+1}]} = 0$ para $1 \leq j \leq \ell_i$, obtemos que $\gamma_{i, \ell_i+1}, \dots, \gamma_{i, N+1}$ é a

única solução do sistema:

$$\begin{pmatrix} B_{\ell_i+1}^m(t_{i, \ell_i+1}) & \dots & B_N^m(t_{i, \ell_i+1}) & (-1)^{\ell_i+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ B_{\ell_i+1}^m(t_{i, N+1}) & \dots & B_N^m(t_{i, N+1}) & (-1)^{N+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_{i, \ell_i+1} \\ \vdots \\ \gamma_{i, N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t_{i, \ell_i+1}) \\ \vdots \\ f(t_{i, N+1}) \end{pmatrix}$$

(Ver 3.2)

e como pelo lema 3.5 (iii), $t_{i+1, j} = t_{i, j}$ para $\ell_i+1 \leq j \leq N+1$ temos que $\gamma_{i+1, \ell_i+1}, \dots, \gamma_{i+1, N+1}$ também é solução. Ainda pelo lema 3.5

(iii) temos a existência de i_a ($1 \leq i_a \leq \ell_i$) tal que $t'_i = t_{i+1, i_a}$,

$t_{i+1, j} = t_{i, j}$ para $j \neq i_a$, $1 \leq j \leq \ell_i$ e $\text{sgn}(f - s_i)(t'_i) = \text{sgn}(f - s_i)(t_{i, i_a})$.

Portanto:

$$(s_{i+1}-s_i)(t_{i+1,j})=(f-s_i)(t_{i+1,j})-(f-s_{i+1})(t_{i+1,j})=\begin{cases} 0 & \text{se } 1 \leq j \leq \ell_i \text{ e } j \neq i_a \\ (-1)^{i_a \operatorname{sgn} \gamma_{i,N+1}} (||f-s_i||_D^{-d_i}) & \text{se } j=i_a \end{cases}$$

(Notemos que já vimos que $\gamma_{i,N+1}=\gamma_{i+1,N+1}$).

Como $\gamma_{i+1,j}=\gamma_{i,j}$ para $\ell_i+1 \leq j \leq N$ temos que

$(\gamma_{i+1,1}-\gamma_{i,1}), \dots, (\gamma_{i+1,\ell_i}-\gamma_{i,\ell_i})$ é a única solução de:

$$\begin{pmatrix} B_1^m(t_{i+1,1}) & \dots & B_{\ell_i}^m(t_{i+1,1}) \\ B_1^m(t_{i+1,i_a}) & \dots & B_{\ell_i}^m(t_{i+1,i_a}) \\ B_1^m(t_{i+1,\ell_i}) & \dots & B_{\ell_i}^m(t_{i+1,\ell_i}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_{i+1,1}-\gamma_{i,1} \\ \gamma_{i+1,i_a}-\gamma_{i,i_a} \\ \gamma_{i+1,\ell_i}-\gamma_{i,\ell_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (-1)^{i_a \operatorname{sgn} \gamma_{i,N+1}} (||f-s_i||_D^{-d_i}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

e portanto:

$$\gamma_{i+1,j}-\gamma_{i,j} = \frac{1}{D(M)} \cdot (-1)^{i_a+j} D_{i_a,j} \cdot (-1)^{i_a \operatorname{sgn} \gamma_{i,N+1}} (||f-s_i||_D^{-d_i}),$$

onde $D(M)$ é o determinante da matriz de B-splines do sistema (1) e $D_{i_a,j}$ é o determinante da matriz obtida a partir desta, suprimindo-se a linha i_a e a coluna j . Notemos que $D(M) \geq 0$ e $D_{i_a,j} \geq 0$, pelo teorema 0.10, e que portanto, $(-1)^j (\gamma_{i+1,j}-\gamma_{i,j}) \cdot \operatorname{sgn} \gamma_{i,N+1} \geq 0$, para $1 \leq j \leq \ell_i$. Isto mostra (A).

Suponhamos $t'_i > x_{r_i+1}$ e mostremos (B). Como $B_j^m|_{[x_0, x_{r_i+1}]} = 0$

para $r_i+m+1 \leq j \leq N$, temos que $\gamma_{i,1}, \dots, \gamma_{i,r_i+m}, \gamma_{i,N+1}$ é a única solução do sistema:

$$\begin{pmatrix} B_1^m(t_{i,1}) & \dots & B_{r_i+m}^m(t_{i,1}) & (-1)^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ B_1^m(t_{i,r_i+m}) & \dots & B_{r_i+m}^m(t_{i,r_i+m}) & (-1)^{r_i+m} \\ B_1^m(t_{i,r_i+m+1}) & \dots & B_{r_i+m}^m(t_{i,r_i+m+1}) & (-1)^{r_i+m+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{r_i+m} \\ \gamma_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t_{i,1}) \\ \vdots \\ f(t_{i,r_i+m}) \\ f(t_{i,r_i+m+1}) \end{pmatrix}$$

e como pelo lema 3.5(iii), $t_{i+1,j} = t_{i,j}$ para $1 \leq j \leq r_i + m + 1$, temos que $\gamma_{i+1,1}, \dots, \gamma_{i+1,r_i+m}, \gamma_{i+1,N+1}$ também é solução. Do lema 3.5 (iii) vemos que existe i_a ($r_i + m + 2 \leq i_a \leq N + 1$) tal que $t'_i = t_{i+1,i_a}$, $t_{i+1,j} = t_{i,j}$ para $j \neq i_a, r_i + m + 2 \leq j \leq N + 1$ e $\text{sgn}(f - s_i)(t'_i) = \text{sgn}(f - s_i)(t_{i,i_a})$. Portanto (notemos que $\gamma_{i,N+1} = \gamma_{i+1,N+1}$) obtemos:

$$(s_{i+1} - s_i)(t_{i+1,j}) = (f - s_i)(t_{i+1,j}) - (f - s_{i+1})(t_{i+1,j}) = \begin{cases} 0 & \text{se } r_i + m + 2 \leq j \leq N + 1 \text{ e } j \neq i_a \\ (-1)^{i_a} \text{sgn}_{\gamma_{i,N+1}}(|f - s_i| - d_i) & \text{se } j = i_a \end{cases}$$

Como $\gamma_{i+1,j} = \gamma_{i,j}$ para $1 \leq j \leq r_i + m$, obtemos que

$(\gamma_{i+1,r_i+m+1} - \gamma_{i,r_i+m+1}), \dots, (\gamma_{i+1,N} - \gamma_{i,N})$ é a única solução do sistema:

$$\begin{pmatrix} B_{r_i+m+1}^m(t_{i,r_i+m+2}) \dots B_N^m(t_{i,r_i+m+2}) \\ B_{r_i+m+1}^m(t_{i,i_a}) \dots B_N^m(t_{i,i_a}) \\ B_{r_i+m+1}^m(t_{i,N+1}) \dots B_N^m(t_{i,N+1}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_{i+1,r_i+m+1} - \gamma_{i,r_i+m+1} \\ \gamma_{i+1,i_a} - \gamma_{i,i_a} \\ \gamma_{i+1,N} - \gamma_{i,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (-1)^{i_a} \text{sgn}_{\gamma_{i,N+1}}(|f - s_i| - d_i) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\therefore \gamma_{i+1,j} - \gamma_{i,j} = \frac{1}{D(M)} \cdot (-1)^{i_a - (r_i + m + 1) + j - (r_i + m)} \cdot D_{i_a,j} \cdot (-1)^{i_a} \cdot \text{sgn}_{\gamma_{i,N+1}}(|f - s_i| - d_i),$$

onde $D(M)$ é determinante da matriz de B-splines do sistema (2) e $D_{i_a,j}$ é determinante da matriz obtida a partir desta, suprimindo-se a linha $i_a - (r_i + m + 1)$ e a coluna $j - (r_i + m)$. Notemos que $D(M) \geq 0$ e $D_{i_a,j} \geq 0$ devido ao teorema 0.10, e que portanto

$$(-1)^{j+1}(\gamma_{i+1,j} - \gamma_{i,j}) \text{sgn}_{\gamma_{i,N+1}} \geq 0 \text{ para } r_i + m + 1 \leq j \leq N.$$

Podemos agora mostrar que o algoritmo discreto é finito. Suponhamos que o algoritmo não seja finito. Primeiramente,

lembramos que pelo lema 3.5 temos $d_{i+1} \geq d_i$, para todo i e observamos que não pode haver uma subsequência s_{i_q} de s_i tal que $d_{i_{q+1}} > d_{i_q}$, $q=1,2,\dots$, pois o número de referências admissíveis contidas em D é finito (pois D é finito).

Então, supondo o algoritmo infinito, deve haver um índice p tal que: $d_p = d_{p+1} = d_{p+2} = \dots$ e que $d_p < d_D(f) \leq \|f - s_p\|_D$ (pois caso contrário o algoritmo termina). Neste caso, temos que $s_p \rightarrow s \in S_{m,k}$ uniformemente em $[a,b]$. (Pelo lema 3.6 as sequências de coeficientes são monótonas. Além disso, as sequências de coeficientes são limitadas pois há um número finito de referências admissíveis em D). Escolhemos então uma subsequência tal que $t'_{p_q} \rightarrow t \in D$.

Obtemos:

$$\|(f - s_{p_q})(t'_{p_q})\| = \|f - s_{p_q}\|_D \rightarrow \|f - s\|_D \quad (1)$$

$$\|(f - s_{p_{q+1}})(t'_{p_q})\| = d_{p_{q+1}} = d_p < d_D(f) \quad (2)$$

$$\|(f - s_{p_q})(t'_{p_q})\| \rightarrow \|(f - s)(t)\| \quad \text{e} \quad \|(f - s_{p_{q+1}})(t'_{p_q})\| \rightarrow \|(f - s)(t)\| \quad (3)$$

De (1), (2) e (3) obtemos que $d_p = d_D(f) = \|f - s\|_D$, contradizendo o fato de termos $d_p < d_D(f)$. Isto mostra que o algoritmo é finito e portanto, que calcula uma aproximação ótima para f em D por $S_{m,k}$.

Observação - O Algoritmo discreto aqui apresentado é uma adaptação do "Algoritmo de troca de Remez" para aproximação por es-

espaços de Haar, ao caso de aproximação por splines, usando para tanto o conceito de "referências admissíveis". A organização da troca e o lema 3.6 são devidos a Nürnberger e Sommer [17].

Vamos apresentar agora um algoritmo para o cálculo de aproximações ótimas de $f \in C[a,b]$ por $S_{m,k}$. Este algoritmo é o "1º algoritmo de Remez", (ver Apêndice), no qual usamos o algoritmo discreto.

3.7 - Cálculo de uma aproximação ótima em $[a,b]$ - Para $f \in C[a,b] \sim S_{m,k}$ vamos descrever um algoritmo para o cálculo de uma aproximação ótima para f em $[a,b]$ por $S_{m,k}$.

Os dados de entrada para o algoritmo são os seguintes: $m \geq 2$ (ordem dos splines), $k \geq 1$ (número de nós), $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k+1} = b$ (conjunto de nós e extremos do intervalo), $D_0 \subset [a,b]$ conjunto finito tal que $\dim S_{m,k}|_{D_0} = m+k$ e $C(D_0) \neq S_{m,k}|_{D_0}$, $f \in C[a,b] \sim S_{m,k}$, $N = m+k$, $\{B_1^m, \dots, B_N^m\}$ base de B-splines para $S_{m,k}$, T_0 referência admissível em D_0 e $\epsilon > 0$ (precisão desejada).

Este algoritmo é uma versão de "1º algoritmo de Remez" para aproximação por splines polinomiais. Portanto, (ver teorema A.2 no apêndice) a sequência de funções geradas pelo algoritmo é tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} d(s_i, P(f)) = 0$ e $\lim_{i \rightarrow \infty} d_i = d(f)$.

Assim, todo ponto de acumulação da sequência s_i é uma aproximação ótima.

3.8 - Implementação do algoritmo e exemplos - Programamos o algoritmo 3.7 em linguagem ALGOL e o testamos, em um computador Burroughs 6.900, através de diversos exemplos, dos quais selecionamos alguns para apresentação. Os exemplos que apresentaremos, já foram calculados por Esch e Eastman [9] que afirmam que a localização dos nós, a menos dos casos em que $m=2$ e $k \geq 1$ onde enfrentaram dificuldades computacionais, é optimal. Os exemplos tratam de aproximação uniforme em $[0,1]$ de $f=\sqrt{x}$ e de $f=e^x$ por $S_{m,k}$, para diversos valores de m e k , englobando os casos $k > m$ e $k \leq m$. Estas funções foram escolhidas de forma a representar funções "bem-comportadas", no caso em que aproximamos a função analítica $f=e^x$, e funções com propriedades que "dificultam" a aproximação, como $f=\sqrt{x}$, cuja derivada tende a ∞ com x tendendo a 0. Na aproximação de e^x , nota-se que é vantajoso aumentar a ordem dos splines, enquanto que para $\sqrt{x}$ é preferível um maior número de nós. (Em ambos os casos, considerando um número igual de parâmetros).

O algoritmo também é usado no caso em que $k=0$, quando se reduz ao algoritmo de Remez para polinômios. Nos exemplos, apresentamos gráficos de função erro $f-g$ (que obedece a proprie

dades de alternância), onde g é a aproximação calculada. Em dois exemplos, fornecemos também gráficos comparativos de f e g . Em todos os casos usamos um conjunto discreto inicial de 101 pontos distribuídos uniformemente em $[0,1]$ e usamos a precisão $\epsilon=10^{-8}$ no cálculo de $d(f)$. Após os exemplos, apresentaremos uma listagem do programa utilizado.

Exemplo E.10 - Aproximação de e^x em $[0,1]$ por polinômios de ordem 2

Referência inicial: 0.0 0.5 1.0

Erro discreto na primeira aproximação: 0.1066555

Referência final: 0.0 0.541 1.0

$d(f) = 0.10593342$ número de iterações: 2

Exemplo E.11 - Aproximação de e^x em $[0, 1]$ por elementos de $S_{2,5}(0.2, 0.4, 0.55, 0.7, 0.85)$.

Ref. inicial: 0.0 0.1 0.3 0.48 0.63 0.78 0.93 1.0

($\ell=0, r=5$) Erro discreto na primeira aproximação: 0.01303458

Ref. final: 0.088 0.2 0.304 0.55 0.77 0.85 0.926 1.0

($\ell=5, r=5$) $d(f) = 0.003548595$ número de iterações: 4

Notemos que, pelo teorema 1.8, a aproximação ótima é fortemente única.

Exemplo E.12 - Aproximação de e^x em $[0,1]$ por elementos de $S_{4,2}(0.3833, 0.6748)$.

Ref.inicial: 0.0 0.19 0.3 0.41 0.53 0.84 1.0 ($\ell=0, r=2$)

Erro discreto na primeira aproximação: 0.00004859

Ref. final: 0.066 0.225 0.38 0.528 0.673 0.81 0.945 ($\ell=0, r=2$)

$d(f) = 0.000015995$ número de iterações: 5

Exemplo E.13 - Aproximação de e^x em $[0,1]$ por polinômios de ordem 6

Ref. inicial: 0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 1.0

Erro discreto na primeira aproximação: 0.00002181

Ref. final: 0.0 0.07 0.26 0.51 0.76 0.93 1.0

$d(f) = 0.00000113$ número de iterações: 1

Notemos que, pelo teorema 1.8, a aproximação ótima é fortemente única.

Exemplo E.14 - Aproximação de e^x em $[0,1]$ por $S_{6,2}(0.41,0.67)$.

Ref. inicial: 0.0 0.21 0.28 0.35 0.42 0.49 0.54 0.84 1.0

($\ell=0, r=2$) Erro discreto na primeira aproximação: 0.00000043

Ref. final: 0.0 0.04 0.13 0.26 0.42 0.55 0.69 0.94 1.0

($\ell=0, r=2$) $d(f) = 0.00000002$ número de iterações: 1

Notemos que, pelo teorema 1.8, a aproximação ótima é fortemente única.

Exemplo E.15 - Aproximação de e^x em $[0,1]$ por elementos de $S_{4,5}(0.2085, 0.3733, 0.5314, 0.6836, 0.8302)$.

Referência inicial: $(\ell=0, r=5)$

0.0 0.1 0.29 0.45 0.5 0.55 0.61 0.76 0.92 1.0

Erro discreto na primeira aproximação: 0.00000469

Referência final: $(\ell=0, r=5)$

0.0356 0.12 0.21 0.29 0.3726 0.61 0.6830 0.7566 0.97 1.0

$d(f) = 0.00000128$ número de iterações: 5

Exemplo E.16 - Aproximação de $\sqrt{x}$ em $[0,1]$ por polinômios de ordem 2

Ref. inicial: 0.0 0.5 1.0

Erro discreto na primeira aproximação: 0.1464466

Ref. final: 0.0 0.25 1.0

$d(f) = 0.12500000$ número de iterações: 1

Exemplo E.17 - Aproximação de $\sqrt{x}$ em $[0,1]$ por $S_{2,4}(0.2,0.4,0.6,0.8)$

Ref. inicial: 0.0 0.1 0.3 0.5 0.7 0.9 1.0 ($\ell=0, r=4$)

Erro discreto na primeira aproximação: 0.1414243

Ref. final: 0.0 0.05 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0 ($\ell=0, r=0$)

$d(f) = 0.05590170$ número de iterações: 1

Exemplo E.18 - Aproximação de $\sqrt{x}$ em $[0,1]$ por elementos de $S_{3,3}(0.00385, 0.04144, 0.2381)$.

Ref. inicial: 0.0 0.01 0.03 0.1 0.2 0.5 1.0

($\ell=1, r=3$) Erro discreto na primeira aproximação: 0.00669893

Ref. final: 0.0 0.0338 0.0795 0.1984 0.3706 0.7625 1.0

($\ell=2, r=3$) $d(f) = 0.00434755$ número de iterações: 8

Exemplo E.19 - Aproximação de $\sqrt{x}$ em $[0,1]$ por $S_{4,2}(0.00645, 0.1076)$

Ref. inicial: 0.0 0.01 0.05 0.1 0.2 0.5 1.0

($\ell=1, r=2$) Erro discreto na primeira aproximação: 0.02228813

Ref. final: 0.0039 0.0167 0.0652 0.1672 0.453 0.826 1.0

($\ell=1, r=2$) $d(f) = 0.00493236$ número de iterações: 9

Exemplo E.20 - Aproximação de $\sqrt{x}$ em $[0,1]$ por polinômios de ordem 4

Ref. inicial: 0.0 0.17 0.34 0.5 1.0

Erro discreto na primeira aproximação: 0.08200962

Ref. final: 0.0 0.038 0.328 0.800 1.0

$d(f) = 0.04592906$ número de iterações: 4

Notemos que, pelo teorema 1.8, a aproximação ótima é fortemente única.

Exemplo E.21 - Aproximação de $\sqrt{x}$ em $[0,1]$ por $S_{6,1}(0.023)$.

Referência inicial: $(\ell=0, r=1)$

0.0 0.01 0.05 0.1 0.2 0.3 0.5 1.0

Erro discreto na primeira aproximação: 0.5183398

Referência final: $(\ell=0, r=1)$

0.0 0.0098 0.0421 0.1694 0.4073 0.6888 0.9141 1.0

$d(f) = 0.00688715$ número de iterações: 7

```

BEGIN
  ILE CR(KIND=REMOTE), IMP(KIND=PRINTER);
  INTEGER M, K, D, I, L, F, NEX, N, ICUT, IIN, J, INC, IND1, IND2, INC3, IND4, IND5, ESQ;
  REAL A, B, T, FAD, EPS, EPS1, DELT, FMAX;
  ARRAY X[1:40], REF[1:40], ASE[1:40, 1:40], BS[1:40], AUX[1:40, 1:40],
        BSP[1:40], PEX[1:20], XSC[1:40];
  XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
  XXX  PROCEDIMENTO PARA RESOLUCAO DE SISTEMAS LINEARES PELO  XXXXX
  XXX  METODO DE CROUT  XXXXX
  XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
  XX  PARAMETROS DE ENTRADA  XXXXX
  XX  N - INTEIRO >= 1 , A - MATRIZ N X N , B - VETOR N X 1  XXXXX
  XX  PARAMETROS DE SAIDA  XXXXX
  XX  IND  IND=0 SE DET A = 0  XXXXX
  XX  IND=1 SE DET A DIFERENTE DE 0  XXXXX
  XX  X - VETOR N X 1 , SOLUCAO DO SISTEMA AX=B  XXXXX
  XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
  PROCEDURE CROUT(A, X, B, N, IND); REAL ARRAY A[*,*], B[1:], X[1:]; INTEGER N, IND;
  BEGIN
    REAL AUX, S; LABEL FIM; INTEGER I, J, K, L;
    INTEGER ARRAY IMA[1:100];
    IND:=1;
    FOR K:=1 STEP 1 UNTIL N DO
      BEGIN
        FOR I:=K STEP 1 UNTIL N DO
          BEGIN
            S:=0;
            FOR L:=1 STEP 1 UNTIL K-1 DO
              S:=S+A[I, L]*A[L, K];
              A[I, K]:=A[I, K]-S;
            END;
            IMA[K]:=K;
          END
        FOR I:=K+1 STEP 1 UNTIL N DO
          IF ABS(A[I, K])>ABS(A[IMA[K], K]) THEN IMA[K]:=I;
          IF A[IMA[K], K]=0 THEN BEGIN
            IND:=0;
            GO TO FIM;
          END;
        END
        IF IMA[K] NEG K THEN
          FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO
            BEGIN
              AUX:=A[IMA[K], I];
              A[IMA[K], I]:=A[K, I];
              A[K, I]:=AUX;
            END;
          END
        FOR J:=K+1 STEP 1 UNTIL N DO
          BEGIN
            S:=0;
            FOR L:=1 STEP 1 UNTIL K-1 DO
              S:=S+A[K, L]*A[L, J];
              A[K, J]:=(A[K, J]-S)/A[K, K];
            END;
          END;
        FOR K:=1 STEP 1 UNTIL N DO X[K]:=B[K];
        FOR K:=1 STEP 1 UNTIL N DO
          BEGIN
            AUX:=X[IMA[K]];

```

```
X[IMA[K]]:=X[K];
```

```
X[K]:=AUX
```

```
END;
```

```
FOR K:=1 STEP 1 UNTIL N DO
```

```
  BEGIN
```

```
    S:=0;
```

```
    FOR L:=1 STEP 1 UNTIL K-1 DO
```

```
      S:=S+A[K,L]*X[L];
```

```
    X[K]:=(X[K]-S)/A[K,K]
```

```
  END;
```

```
FOR I:=N STEP -1 UNTIL 1 DO
```

```
  BEGIN
```

```
    S:=0;
```

```
    FOR J:=I+1 STEP 1 UNTIL N DO S:=S+A[I,J]*X[J];
```

```
  X[I]:=X[I]-S
```

```
  END;
```

```
M:=END;
```

```
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
```

```
XXX                                PROCECIMENTO          SITUA          XXXXX
```

```
XXX                                XXXXX
```

```
XXX PARAMETROS DE ENTRADA          XXXXX
```

```
XXX REF - VETOR REAL , T - REAL , I - INTEIRO , J - INTEIRO XXXXX
```

```
XXX PARAMETRO DE SAIDA          XXXXX
```

```
XXX ESQ - INTEIRO          XXXXX
```

```
XXX                                DESCRICAO          XXXXX
```

```
XXX DAOS I E J TAL QUE REF[I] <= T < REF[J] O PROCECIMENTO XXXXX
```

```
XXX DETERMINA ESQ TAL QUE REF[ESQ] <= T < REF[ESQ+1] XXXXX
```

```
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
```

```
OCEDURE SITUA(REF,T,I,J,ESQ);VALUE T,I,J;INTEGER I,J,ESQ;
```

```
AL T;ARRAY REF[*];
```

```
GIN
```

```
TEGER L;
```

```
ILE J > I+1 DO
```

```
  BEGIN
```

```
    L:=(I+J) DIV 2;
```

```
    IF T < REF[L] THEN J:=L
```

```
      ELSE I:=L;
```

```
  END;
```

```
Q:=I;
```

```
D;
```

```
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
```

```
AL PROCEDURE F(T);VALUE T;REAL T;
```

```
=SQRT(T);
```

```
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
```

```
XXX                                PROCEDIMENTO          BSPLINE          XXXXX
```

```
XXX PARAMETROS DE ENTRADA          XXXXX
```

```
XXX M - INTEIRO (ORDEM DOS SPLINES) XXXXX
```

```
XXX X - VETOR DE NOS (PARTICAO ESTENDIDA) XXXXX
```

```
XXX ESQ - INTEIRO , T - REAL , TAL QUE X[ESQ] <= T <= X[ESQ+1] XXXXX
```

```
XXX PARAMETRO DE SAIDA          XXXXX
```

```
XXX BSP - VETOR M X 1 , TAL QUE BSPL[I] ASSUME O VALOR DO XXXXX
```

```
XXX                                M          XXXXX
```

```
XXX B-SPLINE B          NO PONTO T          XXXXX
```

```
XXX                                ESQ+I          XXXXX
```

```
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
```

```
OCEDURE BSPLINE(T,X,M,ESQ,BSP);VALUE M,ESQ,T;
```

```
TEGER M,ESQ;
```

```
AL T;
```

```
RAY XI[*],BSPL[*];
```

```
GIN
```



```

INTEGER I, J, K;
AL S, S1;
RAY DL[1:40], DR[1:40];
=1;
PC[1]=1;
ILE J < M
DO BEGIN
  K:=J+1;
  DR[J]:=X[ESQ+J]-T;
  DL[J]:=T-X[ESQ+1-J];
  S:=0;
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL J DO
    BEGIN
      S1:=BSPC[I]/(DR[I]+DL[K-I]);
      BSPC[I]:=S+DR[I]*S1;
      S:=DL[K-I]*S1;
    END;
  BSPE[K]:=S;
  J:=K;
END;
D;
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
XXZ                                     FUNCAO          SP                                     XXXXX
XXZ PARAMETROS                                                                XXXXX
XXZ M , X , ESQ , T , BSP - COMO NO PROCEDIMENTO BSPLINE                     XXXXX
XXZ XS - VETOR DE COEFICIENTES DE UM SPLINE EM RELACAO A BASE                 XXXXX
XXZ      DE B-SPLINES                                                         XXXXX
XXZ      DESCRICAO                                                            XXXXX
XXZ CALCULA O VALOR DO SPLINE DE COEFICIENTES DADOS POR XS                   XXXXX
XXZ      NO PUNTO T                                                            XXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
AL PROCEDURE SP(T,XS,X,M,ESQ,BSP);VALUE M,ESQ,T;
RAY XS[*],X[*],BSPL[*];
INTEGER M,ESQ;
AL T;
IN
INTEGER I;
AL S,S:=0;
BSPLINE(T,X,M,ESQ,BSP);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO
  S:=S+XS[ESQ+I]*BSPC[I];
  S:=S;
;
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
XXZ                                     FUNCAO          H                                     XXXXX
XXZ PARAMETROS                                                                XXXXX
XXZ T , XS , X , M , ESQ - COMO NA FUNCAO SP                                  XXXXX
XXZ      DESCRICAO                                                            XXXXX
XXZ CALCULA O VALOR DA FUNCAO ERRO F-SP NO PUNTO T                           XXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
L PROCEDURE H(T,XS,X,M,ESQ);VALUE M,ESQ,T;
EGER M,ESQ;
L T;
AY XS[*],X[*];
IN
AY BSPL[1:40];
F(T)-SP(T,XS,X,M,ESQ,BSP);
;
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
XXZ                                     PROCEDIMENTO    INIREF                                     XXXXX

```



```

XXX PARAMETROS DE ENTRADA                                XXXXX
XXX X - VETOR DE NOS (PARTICAO EXTENDIDA)                XXXXX
XXX K - NUMERO DE NOS , M - ORDEM DOS SPLINES            XXXXX
XXX N - DIMENSAO DE S , D - FATOR DE DISCRETIZACAO      XXXXX
XXX                                     M,K                  XXXXX
XXX PARAMETRO DE SAIDA                                     XXXXX
XXX REF - VETOR N+1 X 1 , REPRESENTANDO UMA REFERENCIA   XXXXX
XXX               ADMISSIVEL NO CONJUNTO DISCRETO         XXXXX
XXX               (P :  $P = X[0] + I * (X[K+1] - X[0]) / D$  ,  $I = 0, \dots, D$ ) XXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
OCEDURE INIREF(REF,X,N,M,K,D); ARRAY REF[*],X[*]; INTEGER N,M,K,D;
GIN
TEGER I,J,I1,MD;
AL L;
=X[K+1]-X[0];
F[1]:=X[0];
=(X[0]+X[1])/2*D/L;
F[2]:=I*L/D;
F[N+1]:=X[K+1];
=(X[K+1]+X[K])/2*D/L;
F[N]:=I*L/D;
K>1
THEN BEGIN
MD:=(K+1) DIV 2;
FOR J:=3 STEP 1 UNTIL MD+1 DO
BEGIN
I:=(X[J-1]+X[J-2])/2*D/L;
REF[J]:=I*L/D;
END;
FOR J:=3 STEP 1 UNTIL K+2-MD DO
BEGIN
I:=(X[K+3-J]+X[K+2-J])/2*D/L;
REF[K+2-J]:=I*L/D;
END;
END;
M>2
THEN BEGIN
MD:=(K+1) DIV 2;
I:=REF[MD+1]*D/L;
I1:=REF[MD+M]*D/L;
I1:=(I1-I)/(M-1);
FOR J:=MD+2 STEP 1 UNTIL MD+M-1 DO
BEGIN
I:=I+I1;
REF[J]:=I*L/D;
END
END
);
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
XX               PROCEDIMENTO      MUDAREF                XXXXX
XX PARAMETROS                                XXXXX
XX N - DIMENSAO DE S , M - ORDEM DOS SPLINES            XXXXX
XX                                     M,K                  XXXXX
XX X - VETOR DE NOS (PARTICAO EXTENDIDA)                XXXXX
XX T - NOVO PONTO A SER INCLUIDO NA REFERENCIA REF      XXXXX
XX IIN - INDICE DE T NA NOVA REFERENCIA                 XXXXX
XX AS , BS - MATRIZ E VETOR USADOS NO SISTEMA LINEAR PARA CAL- XXXXX
XX               CULO DE UMA APROXIMACAO CTIMA NA REFERENCIA REF XXXXX
XX               DESCRICAO                                XXXXX
XX DADO O PONTO REF[ROUT] A SER TROCADO POR T , O PROCEDIMENTO XXXXX

```

```

XXX PRODUZ UMA NOVA REFERENCIA ADMISSIVEL REF E ATUALIZA A MA- XXXXX
XXX TRIZ AS E O VETOR BS QUE SERAO USADOS PARA CALCULO DE UMA XXXXX
XXX APROXIMACAO OTIMA NA NOVA REFERENCIA REF XXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
OCEDURE MUDAREF(CAS,BS,REF,IOUT,IIN,N,T,M,X);VALUE IOUT,IIN,N,T,M;
TEGER IOUT,IIN,N,M;
AL T;
RAY AS[*],BS[*],REF[*],X[*];
GIN
TEGER I,J;
RAY BSP[1:40];
IOUT < IIN
THEN FOR I:=IOUT STEP 1 UNTIL IIN-1 DO
BEGIN
REF[I]:=REF[I+1];
BS[I]:=BS[I+1];
FOR J:= 1 STEP 1 UNTIL N DO
AS[I,J]:=AS[I+1,J];
END
ELSE IF IIN < IOUT
THEN FOR I:=IOUT STEP -1 UNTIL IIN+1 DO
BEGIN
REF[I]:=REF[I-1];
BS[I]:=BS[I-1];
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL N DO
AS[I,J]:=AS[I-1,J];
END;
F[IIN]:=T;
[IIN]:=F(T);
TUAC(X,I,0,N-M+1,I);
PLINE(I,X,M,I,BSP);
R J:=1 STEP 1 UNTIL N DO AS[IIN,J]:=0;
R J:=1 STEP 1 UNTIL M DO
[IIN,J+1]:=BSP[J];
D;
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
XXX PROCEDIMENTO MAXDISC XXXXX
XXX PARAMETROS DE ENTRADA XXXXX
XXX N - DIMENSAO DE S XXXXX
XXX M,K XXXXX
XXX XS , X , M - COMO NA FUNCAO H XXXXX
XXX A , B - EXTREMOS DO INTERVALO [A,B] XXXXX
XXX D - FATOR DE DISCRETIZACAO , NEX - INTEIRO XXXXX
XXX PEX - VETOR REAL NEX X 1 , CUJOS ELEMENTOS ESTAO EM [A,B] XXXXX
XXX PARAMETROS DE SAIDA XXXXX
XXX PM - PONTO DO CONJUNTO (P : P=A+I*(B-A)/D , I=0,...,D) U XXXXX
XXX U (P : F=PEX[I] , I=1,...,NEX) , TAL QUE O MODULO DA XXXXX
XXX FUNCAO ERRO H E MAXIMO EM PM XXXXX
XXX MD - VALOR DA FUNCAO ERRO H EM PM XXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
OCEDURE MAXDISC(A,B,D,PEX,NEX,XS,X,M,N,MD,PM);
LUE A,B,D,NEX,M,N;
RAY PEX[*],X[*],XS[*];
TEGER D,NEX,M,N;
AL A,B,MD,PM;
GIN
AL C,M1,PM1;
TEGER E,L,DI;
=0;
:=H(A,XS,X,M,E);

```

```

:=B-A;
1:=A;
DO I:=1 STEP 1 UNTIL C DO
  BEGIN
    PM1:=A+I*C/O;
    L:=E;
    DI:=E+2;
    SITUA(X,PM1,L,DI,E);
    M1:=H(PM1,XS,X,M,E);
    IF ABS(M0) < ABS(M1)
      THEN BEGIN
        M0:=M1;
        PM:=PM1;
      END;
  END;
DO I:=1 STEP 1 UNTIL NEX DO
  BEGIN
    SITUA(X,PEX[I],0,N-M+1,E);
    M1:=H(PEX[I],XS,X,M,E);
    IF ABS(M0) < ABS(M1)
      THEN BEGIN
        M0:=M1;
        PM:=PEX[I];
      END;
  END;
DO
  XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
  XXX          FUNCAO          MAXFIB          XXXXX
  XXX PARAMETROS DE ENTRADA          XXXXX
  XXX N - DIMENSAO DE S          XXXXX
  XXX          M,K          XXXXX
  XXX XS , X , M - CMC NA FUNCAO H          XXXXX
  XXX A , B - EXTREMOS DE UM INTERVALO [A,B]          XXXXX
  XXX SG - SG=1 OU SG=-1 , E - REAL          XXXXX
  XXX          DESCRICAO          XXXXX
  XXX A FUNCAO MAXFIB CALCULA COM PRECISAO E , O PONTO DE MAXIMO XXXXX
  XXX (SE SG=1) OU DE MINIMO (SE SG=-1) DA FUNCAO ERFC H NUM XXXXX
  XXX INTERVALO [A,B]. O ALGORITMO AGUI UTILIZADO SUPOE QUE H SEJA XXXXX
  XXX UNIMODAL(POSSUA UM UNICO VALOR DE MAXIMO,SE SG=1,OU DE MI- XXXXX
  XXX NIMO,SE SG=-1, NO INTERVALO [A,B]) E E DEVICO A KIEFER XXXXX
  XXX (VER [11])          XXXXX
  XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
  REAL PROCEDURE MAXFIB(A,B,E,SG,XS,X,M,N);
    VALUE A,B,E,SG,M,N;
    INTEGER K,N;
    REAL A,B,E,SG;
    ARRAY X[*],XS[*];
    BEGIN
      INTEGER F1,F2,F3,K,N1,I,E1,E2,I1,I2;
      REAL C,X1,X2;
      C:=B-A;
      F2:=F3:=K:=1;
      SITUA(X,A,0,N-M+1,I1);
      SITUA(X,B,0,N-M+1,I2);
      DO BEGIN
        F1:=F2;
        F2:=F3;
        F3:=F1+F2;
        K:=K+1;
      END
    END
  END

```



```

UNTIL E*F3 > C;
N1:=F3;
IF I1 NEG I2 THEN I2:=I2+1;
THRU K-2 DO
  BEGIN
    X1:=A+F1*C/N1;
    X2:=A+F2*C/N1;
    SITUAC(X,X1,I1,I2,E1);
    SITUAC(X,X2,I1,I2,E2);
    IF SG*H(X1,XS,X,M,E1) < SG*H(X2,XS,X,M,E2)
      THEN A:=X1
      ELSE B:=X2;
    F1:=F2-F1;
    F2:=F3-F2;
    F3:=F1+F2;
  END;
MAXFIB:=(A+B)/2;
END;

```

```

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
XXX          FUNCAO          DIST          XXXXX
XXX PARAMETROS          XXXXX
XXX T = REAL , N = INTEIRO , REF = VETOR REAL N X 1          XXXXX
XXX          DESCRICAO          XXXXX
XXX A FUNCAO CALCULA MIN ( ABS(T-REF[I]) , I=1,...,N)          XXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
REAL PROCEDURE DIST(T,REF,N);

```

```

  VALUE T,N;
  INTEGER N;
  REAL T;
  ARRAY REF[*];
  BEGIN
    INTEGER I;
    REAL D,AUX;
    D:=ABS(T-REF[1]);
    FOR I:=2 STEP 1 UNTIL N+1 DO
      BEGIN
        AUX:=ABS(T-REF[I]);
        IF AUX < D
          THEN D:=AUX;
      END;
    DIST:=D;
  END;

```

```

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
XXX          PROCEDIMENTO          MAXGER          XXXXX
XXX PARAMETROS DE ENTRADA          XXXXX
XXX A , B - EXTREMOS DO INTERVALO [A,B]          XXXXX
XXX REF - VETOR REAL REPRESENTANDO UMA REFERENCIA ADMISSIVEL          XXXXX
XXX D - FATOR DE DISCRETIZACAO          XXXXX
XXX EPS , DELT - REAIS          XXXXX
XXX PARAMETROS DE SAIDA          XXXXX
XXX MAX - PONTO DE MODULO MAXIMO , COM PRECISAO DELT, DA FUNCAO XXXXX
XXX          H EM [A,B] CENTRE DOIS PONTOS CANDIDATOS A MAXIMO DE XXXXX
XXX          H, TAL QUE O MODULO DE H NOS DOIS PONTOS DIFIRA DE XXXXX
XXX          MENOS QUE EPS, E ESCOLHIDO O PONTO MAIS PROXIMO DA XXXXX
XXX          REFERENCIA REF. A FUNCAO F E SUPOSTA UNIVOCAL EM CADA XXXXX
XXX          INTERVALO [A+(B-A)*I/D, A+(B-A)/D*(I+2)] , I=0,...,D-2 XXXXX
XXX FMAX - VALOR DA FUNCAO H EM MAX          XXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
PROCEDURE MAXGER(A,B,REF,XS,X,P,N,D,EPS,MAX,DELT,FMAX);
  VALUE A,B,EPS,N,M,D,DELT;

```

```

INTEGER N,M,D;
REAL A,B,EPS,MAX,DELT,FMAX;
ARRAY REF[*],XSI[*],XC[*];
BEGIN
  INTEGER I,IND,E1,E2,EZ;
  REAL SG,C,X1,Y,Z,FX,FY,FZ,FM,FB,MD,DM,DMAX;
  X1:=MAX:=A;
  C:=B-A;
  Y:=A+C/C;
  E1:=EZ:=0;
  FX:=FMAX:=H(X1,XS,X,M,0);
  FY:=H(Y,XS,X,M,0);
  DMAX:=DIST(A,REF,N);
  FOR I:=2 STEP 1 UNTIL D DO
    BEGIN
      Z:=A+I*C/D;
      E1:=EZ;
      E2:=EZ+2;
      SITUA(X,Z,E1,E2,EZ);
      FZ:=H(Z,XS,X,M,EZ);
      IND:=0;
      IF (FZ-FY)*(FY-FX) <= 0
        THEN BEGIN
          IF FZ-FY > 0 OR FX-FY > 0
            THEN IF FY < 0
              THEN BEGIN
                SG:=-1;
                MD:=MAXFIB(X1,Z,DELT,SG,XS,X,M,N);
              END
            ELSE IND:=1
          ELSE IF FY > 0
            THEN BEGIN
                SG:=1;
                MD:=MAXFIB(X1,Z,DELT,SG,XS,X,M,N);
              END
            ELSE IND:=1;
          IF IND = 0
            THEN BEGIN
              SITUA(X,MD,EZ-1,EZ+1,E2);
              FM:=H(MD,XS,X,M,E2);
              DM:=DIST(MD,REF,N);
              IF ABS(FM) > ABS(FMAX)+EPS
                THEN BEGIN
                  MAX:=MD;
                  FMAX:=FM;
                  DMAX:=DM;
                END
              ELSE IF ABS(FM) > ABS(FMAX)+EPS AND
                DM < DMAX
                THEN BEGIN
                  MAX:=MD;
                  FMAX:=FM;
                  DMAX:=DM;
                END;
            END;
        END;
      X1:=Y;
      FX:=FY;
      Y:=Z;
      FY:=FZ;
    END;
  END;

```



```

END;
FB:=FZ;
IF ABS(FB) > ABS(FMAX)+EPS
  THEN BEGIN
    MAX:=B;
    FMAX:=FB;
  END
ELSE IF ABS(FB) > ABS(FMAX)-EPS AND DISTCE,FEF,A) < DMAX
  THEN BEGIN
    MAX:=B;
    FMAX:=FB;
  END;
END;

```

```

END;
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
XXX          PROCEDIMENTO NEHLR                                     XXXXX
XXX PARAMETROS                                                         XXXXX
XXX REF - VETOR REPRESENTANDO REFERENCIA ADMISSIVEL                 XXXXX
XXX X - VETOR DE NOS (PARTICAO EXTENDIDA)                             XXXXX
XXX INDL , INDR - VALEM 0 OU 1                                         XXXXX
XXX NL , NR - INTEIROS                                                 XXXXX
XXX          DESCRICAO                                                 XXXXX
XXX O PROCEDIMENTO DETERMINA O INTERVALO [X(NL),X(NR+1)] DE          XXXXX
XXX ADMISSIBILIDADE DA REFERENCIA REF. O PROCEDIMENTO USA COMO      XXXXX
XXX VALOR CONHECIDO NR , SE INDL=0,OU NL , SE INDL=1, DETERMINANDO   XXXXX
XXX O VALOR DO OUTRO                                                  XXXXX

```

```

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
OCEDURE NEHLR(REF,X,INDL,INDR,NL,NR); ARRAY REF(*),X(*);
TEGER INDL,INDR,NL,NR;

```

```

GIN
TEGER IND,J;
D:=0;
INDL=0
  THEN BEGIN
    J:=NR;
    WHILE IND=0 DO
      BEGIN
        IF REF[J+1] >= X[J] THEN IND:=1;
        J:=J-1;
      END;
    NL:=J+1
  END
ELSE BEGIN
  J:=NL;
  WHILE IND=0 DO
    BEGIN
      IF REF[J+1] <= X[J+1] THEN IND:=1;
      J:=J+1;
    END;
  NR:=J-1
  END

```

```

0;
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
XXX          PROCEDIMENTO TROCA                                       XXXXX
XXX PARAMETROS                                                         XXXXX
XXX AS , BS , REF , N , X , IOUT , IIN -COMO NO PROCEDIMENTO        XXXXX
XXX          MUDAREF                                                  XXXXX
XXX XS - COMO NA FUNCAO H                                             XXXXX
XXX L , R - TAIS QUE [X(L),X(R+1)] E O INTERVALO DE ADMISSIBI-     XXXXX
XXX          LIDADE DE REF                                           XXXXX
XXX M - ORDEM DOS SPLINES , K - NUMERO DE NOS                       XXXXX

```

```

XXXX T - PONTO A SER COLOCADO NA REFERENCIA NO LUGAR DE OUTRO      XXXXX
XXXX DESCRICAO                                                         XXXXX
XXXX O PROCEDIMENTO PRODUZ EM REF UMA NOVA REFERENCIA DE ACORDO     XXXXX
XXXX COM A REGRA DE TROCA, ATUALIZA OS VALORES DE L E R PARA A      XXXXX
XXXX NOVA REFERENCIA, BEM COMO A MATRIZ AS E O VETOR ES             XXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
PROCEDURE TROCACAS,BS, XS,PEF,N,X,IOUT,IIN,L,R,T,M,K);
  LOCAL N,T,M,K; INTEGER N,IOUT,IIN,L,R,M,K;
  LOCAL T; ARRAY REF[*],X[*],AS[*,*],BS[*],XS[*];
BEGIN
  INTEGER SG,ESQ,E,I;
  ARRAY ER[1:40];
  TUA(X,T,0,K+1,E);
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N+1 DO
    TUA(X,REF[I],I-M-1,I,ER[I]);
    H(T,XS,X,M,E)>=0 THEN SG:=1
                      ELSE SG:=-1;
  T < X[I];
  THEN IF T > REF[I]
    THEN IF SG*H(REF[I],XS,X,M,ER[I]) > 0 OR
          (H(REF[I],XS,X,M,ER[I])=0 AND SG=1)
    THEN BEGIN
      IOUT:=IIN:=L;
      MUDAREF(CAS,BS,REF,IOUT,IIN,N,T,M,X);
      END
    ELSE BEGIN
      IOUT:=IIN:=L+1;
      MUDAREF(CAS,BS,REF,IOUT,IIN,N,T,M,X);
      NEWLR(REF,X,0,1,L,R);
      END
  ELSE IF T < REF[I]
    THEN IF SG*H(REF[I],XS,X,M,ER[I]) > 0 OR
          (H(REF[I],XS,X,M,ER[I])=0 AND SG=1)
    THEN BEGIN
      IOUT:=IIN:=1;
      MUDAREF(CAS,BS,REF,IOUT,IIN,N,T,M,X);
      END
    ELSE BEGIN
      IOUT:=R+M+1;
      IIN:=1;
      L:=0;
      MUDAREF(CAS,BS,REF,IOUT,IIN,N,T,M,X);
      NEWLR(REF,X,1,0,L,R);
      END
  ELSE BEGIN
    SITUA(REF,T,1,L,ESQ);
    IF SG*H(REF[ESQ+1],XS,X,M,ER[ESQ+1]) > 0 OR
      (H(REF[ESQ+1],XS,X,M,ER[ESQ+1])=0 AND SG=1)
    THEN IF ESQ+1-M >= 1
      THEN IF T <= X[ESQ+1-M]
        THEN BEGIN
          IOUT:=R+M+1;
          IIN:=ESQ+1;
          R:=ESQ-M;
          MUDAREF(CAS,BS,REF,IOUT,IIN,N,T,M,X);
          NEWLR(REF,X,0,1,L,R);
          END
        ELSE BEGIN
          IOUT:=IIN:=ESQ+1;
          MUDAREF(CAS,BS,REF,IOUT,IIN,N,T,M,X)

```

```

                                END
ELSE BEGIN
    IOUT:=IIN:=ESQ+1;
    MUDAREF(CAS,BS,REF,ICUT,IIN,N,T,M,X);
    END
ELSE IF T >= X[ESQ]
    THEN BEGIN
        IOUT:=R+M+1;
        IIN:=ESQ+1;
        L:=ESQ;
        MUDAREF(CAS,BS,REF,ICUT,IIN,N,T,M,X);
        NEWLR(REF,X,1,0,L,R);
        END
    ELSE BEGIN
        IOUT:=IIN:=ESQ;
        MUDAREF(CAS,BS,REF,ICUT,IIN,N,T,M,X);
        END;
    END
ELSE IF T <= X[R+1]
    THEN IF T > REF[R+M+1]
        THEN IF SG*(H(REF[R+M+1],XS,X,M,ER[R+M+1])) > 0 OR
            (H(REF[R+M+1],XS,X,M,ER[R+M+1])=0 AND SG=1)
            THEN BEGIN
                IOUT:=IIN:=R+M+1;
                MUDAREF(CAS,BS,REF,ICUT,IIN,N,T,M,X);
                END
            ELSE BEGIN
                IOUT:=L+1;
                IIN:=R+M+1;
                MUDAREF(CAS,BS,REF,ICUT,IIN,N,T,M,X);
                NEWLR(REF,X,0,1,L,R);
                END
        ELSE IF T < REF[L+1]
            THEN IF SG*(H(REF[L+1],XS,X,M,ER[L+1])) > 0 OR
                (H(REF[L+1],XS,X,M,ER[L+1])=0 AND SG=1)
                THEN BEGIN
                    IOUT:=IIN:=L+1;
                    MUDAREF(CAS,BS,REF,ICUT,IIN,N,T,M,X);
                    END
                ELSE BEGIN
                    IOUT:=R+M+1;
                    IIN:=L+1;
                    MUDAREF(CAS,BS,REF,ICUT,IIN,N,T,M,X);
                    NEWLR(REF,X,1,0,L,R);
                    END
            ELSE BEGIN
                SITUA(REF,T,L+1,R+M+1,ESQ);
                IF SG*(H(REF[ESQ],XS,X,M,ER[ESQ])) > 0 OR
                    (H(REF[ESQ],XS,X,M,ER[ESQ])=0 AND SG=1)
                    THEN BEGIN
                        IOUT:=IIN:=ESQ;
                        MUDAREF(CAS,BS,REF,ICUT,IIN,N,T,M,X);
                        NEWLR(REF,X,0,1,L,R);
                        END
                    ELSE BEGIN
                        IOUT:=IIN:=ESQ+1;
                        MUDAREF(CAS,BS,REF,ICUT,IIN,N,T,M,X);
                        NEWLR(REF,X,1,0,L,R);
                        END
            END
        END
    END
END

```

```

ELSE IF T < REFIR+M+2]
  THEN IF SG*H(REFIR+M+2],XS,X,M,ERIR+M+2]) > 0 OR
    (H(REFIR+M+2],XS,X,M,ERIR+M+2])=0 AND SG=1)
    THEN BEGIN
      ICUT:=IIN:=R+M+2;
      MUDAREF(CAS,BS,REF,ICUT,IIN,N,T,M,X)
    END
  ELSE BEGIN
    ICUT:=IIN:=R+M+1;
    MUDAREF(CAS,BS,REF,ICUT,IIN,N,T,M,X);
    NEWLR(REF,X,1,0,L,R);
  END
ELSE IF T > REFIR+1]
  THEN IF SG*H(REFIR+1],XS,X,M,ERIR+1]) > 0 OR
    (H(REFIR+1],XS,X,M,ERIR+1])=0 AND SG=1)
    THEN BEGIN
      ICUT:=IIN:=N+1;
      MUDAREF(CAS,BS,REF,ICUT,IIN,
        N,T,M,X);
    END
  ELSE BEGIN
    ICUT:=L+1;
    IIN:=N+1;
    R:=K;
    MUDAREF(CAS,BS,REF,ICUT,IIN,
      N,T,M,X);
    NEWLR(REF,X,0,1,L,R);
  END
ELSE BEGIN
  SITLA(REF,T,R+M+2,N+1,ESQ);
  IF SG*H(REF[ESQ],XS,X,M,ERIESQ]) > 0 OR
    (H(REF[ESQ],XS,X,M,ERIESQ])=0 AND SG=1)
    THEN IF ESQ-1 <= K
      THEN IF T >= X[ESQ-1]
        THEN BEGIN
          ICUT:=L+1;
          IIN:=ESQ;
          L:=ESQ-1;
          MUDAREF(CAS,BS,REF,ICUT,
            IIN,N,T,M,X);
          NEWLR(REF,X,1,0,L,R);
        END
        ELSE BEGIN
          ICUT:=IIN:=ESQ;
          MUDAREF(CAS,BS,REF,ICUT,
            IIN,N,T,M,X);
        END
      ELSE BEGIN
        ICUT:=IIN:=ESQ;
        MUDAREF(CAS,BS,REF,ICUT,
          IIN,N,T,M,X);
      END
    ELSE IF T <= X[ESQ-1]
      THEN BEGIN
        ICUT:=L+1;
        IIN:=ESQ;
        R:=ESQ-K-1;
        MUDAREF(CAS,BS,REF,ICUT,
          IIN,N,T,M,X);
        NEWLR(REF,X,0,1,L,R);
      END

```



```

END
ELSE BEGIN
  IOUT:=IIN:=ESQ+1;
  MODAREF(CAS,BS,REF,IOUT,
          IIN,N,T,M,X);
END

```

```

END

```

```

D;
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
XXXXXX
XXXXXXXXX
PROGRAMA PRINCIPAL
XXXXXX
XXXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
AD(CR, //, M, K, D, A, B, EPS, EPS1, DELT, IND1);
ITE(IMP, <"ORDEM DOS SPLINES = ", I3, X6, "NUMERO DE NCS = ", I3>, M, K);
ITE(IMP, <"APROXIMACAO NO INTERVALO [", F5.2, ", ", F5.2, "]">, A, B);
ITE(IMP, <"NUMERO DE PONTOS DO CONJUNTO DISCRETO ", I8>, C);
  K > 0 THEN
GIN
AD(CR, //, FOR I:=1 STEP 1 UNTIL K DO X(I));
ITE(IMP, <"CONJUNTO DE NDS">);
ITE(IMP, //, FOR I:=1 STEP 1 UNTIL K DO X(I));
D;
=M+K;
D1:=A; X(K+1):=B;
R I:=1 STEP 1 UNTIL M DO
BEGIN
  X(-I):=X(-I+1)-1;
  X(K+1+I):=X(K+I)+1;
END;
D1:=A;
K+1:=B;
=0;
=K;
  IND1=0
WHEN INIREF(REF, X, N, M, K, D)
  USE READ(CR, //, FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N+1 DO REF(I), L, R);
ITE(IMP, <"          REFERENCIA INICIAL ">);
ITE(IMP, //, FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N+1 DO REF(I));
X:=0;
D:=0;
D1:=IND4:=IND5:=1;
R I:=1 STEP 1 UNTIL N+1 DO
R J:=1 STEP 1 UNTIL N DO AS(I, J):=0;
R I:=1 STEP 1 UNTIL N+1 DO
BEGIN
  SITUA(X, REF(I), I-M-1, I, ESQ);
  BSPLINE(REF(I), X, P, ESQ, BSP);
  FOR J:=1 STEP 1 UNTIL M DO
    AS(I, ESQ+J):=BSP(J);
  AS(I, N+1):=(-1)**I;
  BS(I):=F(REF(I));
END;
BEGIN
  IND2:=IND3:=1;
DO BEGIN
  IF IND=0 THEN IND:=1
  ELSE TRCCACAS(BS, XS, REF, N, X, IOUT, IIN, L, R, T, M, K);
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N+1 DO
    FOR J:=1 STEP 1 UNTIL N+1 DO AUX(I, J):=AS(I, J);

```



```

WRITE(IMP, <"REFERENCIA CASO DISCRETO">);
WRITE(IMP, //, FOR J:=1 STEP 1 UNTIL N+1 DO REF(J));
WRITE(IMP, <"L= ", J2, "      R= ", J2, L, R);
WRITE(IMP, <"      SISTEMA LINEAR      ">);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N+1 DO
WRITE(IMP, <6F10.4>, FOR J:=1 STEP 1 UNTIL N+1 DO ASC(I, J), BS(I));
CROUT(AUX, XS, BS, N+1, INC1);
MAXDISC(A, B, D, PEX, NEX, XS, X, H, N, MAD, T);
WRITE(IMP, <"MAXIMO DISCRETO = ", F13.9>, MAD);
WRITE(IMP, <"MAXIMO NA REFERENCIA = ", F13.9>, XSIN+1);
WRITE(IMP, <"COEFICIENTES DA APROXIMACAO NA REFERENCIA">);
WRITE(IMP, //, FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO XS(I));
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N+1 DO
  IF T=REF(I) THEN IND2:=0;
  IF ABS(MAD) - ABS(XSIN+1) < EPS THEN IND3:=0;
END

```

```

UNTIL IND1=0 OR IND2=0 OR IND3=0;
MAXGER(A, B, REF, XS, X, T, N, D, EPS1, T, DELT, FMAX);
WRITE(IMP, <"MAXIMO GERAL = ", F12.8>, FMAX);
WRITE(IMP, <"PONTO DE MAXIMO = ", F12.8>, T);
NEX:=NEX+1;
PEX(NEX):=T;
J:=(T-A)*D/(B-A);
IF ABS(T-J*(B-A)/(D-A)) < EPS1
  THEN IND4:=0;

```

```

FOR J:=1 STEP 1 UNTIL NEX-1 DO
  IF ABS(T-PEX(J)) < EPS1 THEN IND4:=0;
IF ABS(FMAX) - ABS(MAD) < EPS THEN IND5:=0;
WRITE(IMP, <"NOVA ITERACAO">);
END

```

```

TIL IND1=0 OR IND4=0 OR IND5=0;
IND1=0 THEN WRITE(IMP, <"DETERMINANTE NULO">);
IND4=0 AND IND5 NEQ 0
THEN WRITE(IMP, <"PONTO NOVO PERTENCE AO CONJUNTO DISCRETO">);
ITE(IMP, <"REFERENCIA FINAL">);
ITE(IMP, //, FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N+1 DO REF(I));
IND5=0

```

```

THEN WRITE(IMP, <"COEFICIENTES DA APROXIMACAO OTIMA">);
ELSE WRITE(IMP, <"COEFICIENTES DO ULTIMO SPLINE CALCULADO">);
ITE(IMP, //, FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO XS(I));
ITE(IMP, <"ERRO CALCULADO PELO SISTEMA", F12.8>, XS(N+1));
IND5=0
THEN WRITE(IMP, <"D(F) = ", F12.8>, FMAX);
ELSE WRITE(IMP, <"ULTIMO ERRO GERAL CALCULADO", F12.8>, FMAX);
ITE(IMP, <"ULTIMO ERRO DISCRETO CALCULADO", F12.8>, MAD);
ITE(IMP, <"IND1=", J2, "IND2=", J2, "IND3=", J2>, INC1, IND2, IND3);
ITE(IMP, <"IND4=", J2, "IND5=", J2>, IND4, IND5);
D.

```

```

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
      COMENTARIOS SOBRE O USO DO PROGRAMA                                XX
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
PARA O USO DO PROGRAMA DEVEM SER FORNECIDOS OS SEGUINTE DADOS: XX
M- ORDEM DOS SPLINES , K- NUMERO DE NOS , D- FATOR DE DISCRETI- XX
ZACAO (SERA TOMADO UM CONJUNTO DISCRETO INICIAL DE C+1 PONTOS XX
DISTRIBUIDOS UNIFORMEMENTE NO INTERVALO DE APROXIMACAO) XX
A, B- EXTREMOS DO INTERVALO DE APROXIMACAO , EPS- REAL QUE INDICA XX
A PRECISAO DESEJADA CO ALGORITMO TERMINA QUANDO A DIFERENCA EN- XX
TRE O ERRO DE APROXIMACAO NO INTERVALO E NO CONJUNTO DISCRETO XX
FOR MENOR QUE EPS) , EPS1- REAL UTILIZADO NA ROTINA MAXGER XX

```


APÊNDICE (Discretização)

Enunciaremos dois teoremas relacionando aproximações ótimas de funções contínuas em um espaço métrico compacto X e aproximações em subconjuntos não vazios de X , por funções de um subespaço de dimensão finita de $C(X)$.

Inicialmente vamos estabelecer alguns fatos preliminares e fixar notações.

Para cada subconjunto não vazio $D \subseteq X$ definimos sua densidade em relação a X como: $|D| = \sup_{x \in X} \inf_{y \in D} d(x, y)$.

Para cada base $B = \{g_1, \dots, g_n\}$ de G , subespaço de $C(X)$ de dimensão n , definimos o módulo comum de continuidade de B :

$$\omega(B, \delta) = \sup_{1 \leq i \leq n} \omega(g_i, \delta) \quad , \quad \text{para } \delta > 0 \quad , \quad \text{onde}$$

$$\omega(g, \delta) = \sup_{d(x, y) \leq \delta} |g(x) - g(y)| \quad \text{é o } \underline{\text{módulo de continuidade de } g}, \quad g \in C(X).$$

Definimos também:

$$\gamma(B) = \inf_{\substack{n \\ \sum_{i=1}^n |c_i| = 1}} \left\| \sum_{i=1}^n c_i g_i \right\| > 0$$

Observação 1 - Notemos que $\omega(B, \delta) \rightarrow 0$ quando $\delta \rightarrow 0$ e que

$$\gamma(B) \sum_{i=1}^n |c_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^n c_i g_i \right\|, \quad \forall (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$$

Lema A.0 - Para X espaço métrico compacto, $f \in C(X)$, G subespaço de dimensão finita de $C(X)$, $B = \{g_1, \dots, g_n\}$ base de G , D subconjunto não vazio de X e $\delta > 0$ tais que $\omega(B, \delta) < \gamma(B)$ e $|D| < \delta$ temos que:

- (1) $\|g\| \leq \left(1 + \frac{\omega(B, \delta)}{\gamma(B) - \omega(B, \delta)}\right) \|g\|_D, \forall g \in G$ (Notemos que a expressão entre parênteses tende a 1 com δ tendendo a 0).
- (2) $0 \leq \|f - g\| - \|f - g\|_D \leq \omega(f, \delta) + \frac{\omega(B, \delta)}{\gamma(B)} \|g\|, \forall g \in G$ (O segundo membro da desigualdade tende a 0 com δ tendendo a 0).
- (3) $0 \leq \|f - g\| - d(f) \leq \omega(f, \delta) + 2 \frac{\omega(B, \delta)}{\gamma(B)} \left(1 + \frac{\omega(B, \delta)}{\gamma(B) - \omega(B, \delta)}\right) \|f\|, \forall g \in P_{G|_D}(f)$. (O segundo membro da segunda desigualdade tende a 0 com δ).

Teorema A.1 - Para todo $f \in C(X)$ e $\epsilon > 0$ existe $\delta(f, \epsilon) > 0$ tal que se $D \subset X$ ($D \neq \emptyset$) é tal que $|D| < \delta(f, \epsilon)$ então $\sup_{g \in P_{G|_D}(f)} d(g, P(f)) < \epsilon$.

Demonstrações para o lema A.0 e teorema A.1 encontram-se em Cheney ([5], capítulo 3, seção 6).

Teorema A.2 - (O 1º algoritmo de Remez)

Dados X espaço métrico compacto, G subespaço de dimensão n de $C(X)$, $f \in C(X)$, D finito tal que $D \subset X$ e $\dim G|_D = n$ construímos as seguintes sequências de funções e subconjuntos finitos de D :

$g_i \in P_{G|_{D_i}}(f)$, $i=0,1,\dots$ e $D=D_0 \subset D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset X$ tal que, para cada $i=0,1,\dots$ existe um ponto $t_i \in D_{i+1}$ tal que

$$|(f-g_i)(t_i)| = \|f-g_i\|_{D_i}.$$

A sequência $d_i = \|f-g_i\|_{D_i}$ converge monotonicamente a $d(f)$ e todos os pontos de acumulação da sequência g_i , que é limitada, encontram-se em $P(f)$.

Uma demonstração para o teorema A.2 encontra-se em Cheney ([5], capítulo 3, seção 8).

Observemos que se G é um espaço de Haar ou Chebyshev, a sequência g_i é convergente para a aproximação ótima de f em G .

BIBLIOGRAFIA

1. BLATT, H.P.; NÜRNBERGER, G. e SOMMER, M. ; "A characterization of pointwise-Lipschitz-continuous selections for the metric projection", Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 4 (1981), 101-121.
2. BLATTER, J.; MORRIS, P.P. e WULBERT, D.E., "Continuity of the set-valued metric projection", Math. Ann. 178 (1968) , 12-24.
3. BLATTER, J. e SCHUMAKER, L.L., "The Set of Continuous Selections of a Metric Projection in $C(X)$ ", J.Approx. Theory 36 (1982), 141-155.
4. BLATTER, J. e SCHUMAKER, L.L., "Continuous selections and maximal alternators for spline approximation", J.Approx. Theory 38 (1983), 71-80.
5. CHENEY, E.W., "Introduction to Approximation Theory", McGraw Hill, New York, 1966.
6. DESCLOUX, J., "Contribution au Calcul des Approximations de Tschebyscheff", Thesis, École Polytechnique Fédérale, Zurich, 1961.
7. DESCLOUX, J., "Approximations in L^P and Chebyshev approximations", J. Soc. Indust. Appl. Math. 11 (1963), 1017-1026.
8. DEUTSCH, F.; NÜRNBERGER, G. e SINGER, I., "Weak Chebyshev Subspaces and alternation", Pacific J. Math. 89 (1980) , 9-31.
9. ESCH, R.E. e EASTMAN, W.L., "Computational methods for best spline function approximation", J.Approx.Theory 2 (1969), 85-96.

10. JONES, R.C. e KARLOVITZ, L.A., "Equioscillation under non-uniqueness in the approximation of continuous functions", J. Approx. Theory 3 (1970), 138-145.
11. KIEFER, J., "Sequential minimax search for a maximum", Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), 503-506.
12. McLAUGHLIN, H.W. e SOMERS, K.B., "Another characterization of Haar Subspaces", J. Approx. Theory 14 (1975), 93-102.
13. NEWMAN, D.J. e SHAPIRO, H.S., "Some theorems on Chebyshev approximation", Duke Math. J. 30 (1963), 673-684.
14. NÜRNBERGER, G., "A local version of Haar's theorem in approximation theory", Numer. Funct. Anal. Optimiz. 5 (1982), 21-46.
15. NÜRNBERGER, G. e SINGER, I., "Uniqueness and Strong Uniqueness of best approximations by splines subspaces and other subspaces", J.Math. Anal. Appl. 90 (1982), 171-184.
16. NÜRNBERGER, G. e SOMMER, M., "Characterization of continuous selections of the metric projection for spline functions", J.Approx. Theory 22 (1978), 320-330.
17. NÜRNBERGER, G. e SOMMER, M., "A Remez type algorithm for spline functions", Numer. Math. 41 (1983), 117-146.
18. NÜRNBERGER, G. e SOMMER, M., "Alternation for best spline approximations", Numer. Math. 41 (1983), 207-221.
19. RICE, J.R., "Tchebysheff approximation in several variables", Trans. Amer. Math. Soc. 109 (1963), 444-466.
20. RICE, J.R., "Characterization of Chebyshev approximation by splines", SIAM J.Numer. Anal. 4 (1967), 557-565.

21. SCHUMAKER, L.L., "Uniform approximation by Tchebycheffian spline functions I: fixed knots", MRC # 768, Univ. of Wis., 1967.
22. SCHUMAKER, L.L., "Uniform approximation by Tchebycheffian spline functions", J. Math. and Mech. 18 (1968), 369-378.
23. SCHUMAKER, L.L., "Spline Functions: Basic Theory", Wiley-Interscience, New York, 1981.
24. SOMMER, M., " L_p -approximations and Chebyshev approximations in subspaces of spline functions", a preprint.
25. STRAUSS, H., "Eindeutigkeit bei der Gleichmassigen Approximation mit Tschebyscheffschen Splinefunktionen", J. Approx. Theory 15 (1975), 78-82.
26. STRAUSS, H., "Chebyshev approximations in subspaces of spline functions", Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 5 (1982-83), 421-448.