PROPRIEDADES DE
CONJUNTOS-IGUALDADE DE CÓDIGOS

NAMI KOBAYASHI

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA APLICADA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: CIÊNCIA DE COMPUTAÇÃO

ORIENTADOR: PROF. DR. *IMRE SIMON*

- SÃO PAULO, ABRIL DE 1983 -

Aos meus pais

AGRADECIMENTOS

O meu muito obrigada

ao Professor Doutor Imre Simon,

pela excelente orientação, pelas críticas e sugestões construtivas, pela colaboração intensiva e valiosa em to das as fases da realização deste trabalho e também pela amizade, confiança e estímulo demonstrados durante todo esse tempo;

aos meus alunos, colegas e amigos,

pelo carinho, apoio e incentivo constantes, que foram im prescindíveis durante a elaboração deste trabalho;

ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq),
pelo auxílio financeiro;

às bibliotecárias do IME-USP, em especial à Edmarí G. Teixeira,
pela atenção, dedicação e colaboração na pesquisa bibliográfica;

à Luzia do Carmo Namiki e Regina Helena da Silva,
pelo paciente e esmerado trabalho de datilografia.

Nami Kobayashi

S U M Á R I O

PREFÁCIO	i-v
CAP. 1 - MORFISMOS E CONJUNTOS-IGUALDADE DE MORFISMOS DE MONÓIDES LIVRES	1
1. Morfismos de monóides livres	2
2. O conjunto-igualdade (minimal) de morfismos de monóides livres	7
CAP. 2 - MÁQUINAS DE TURING	17
1. Definição	18
2. Descrição do funcionamento	19
3. Máquina de Turing reversível	29
4. Simulação de uma máquina de Turing determi- nística por uma reversível e normalizada	34
5. Acoplamento de uma máquina de Turing rever- sível e normalizada com a sua reversa.	57
CAP. 3 - CASOS RESTRITOS DO PROBLEMA DE CORRESPONDÊNCIA DE POST	61
1. Introdução	62
2. Construção de morfismos associados a uma má- quina de Turing semi-normalizada	65
3. Codificação de uma computação	76
4. A indecidibilidade do Problema de Correspon- dência de Post para morfismos que são códigos de atraso um	82
5. A indecidibilidade do Problema de Correspon- dência de Post para códigos de atraso um per- tencentes a $PS \cap SP$	98

6. A condição de outras restrições do Problema de Correspondência de Post.	107
 CAP. 4 - REPRESENTAÇÃO DE LINGUAGENS RECURSIVAMENTE ENUMERÁVEIS.	109
1. Uma representação de linguagens recursivamente enumeráveis através de códigos de atraso em sentidos opostos.	110
2. Uma representação de linguagens recursivamente enumeráveis através de códigos de atraso em sentidos opostos e pertencentes a PS .	151
3. Outras representações de linguagens recursivamente enumeráveis	155
 CAP. 5 - A REGULARIDADE DE CONJUNTOS-IGUALDADE DE MORFISMOS	163
1. Restrições sobre os morfismos para que seus conjuntos-igualdade sejam regulares.	164
2. A não efetividade de alguns conjuntos-igualdade regulares	172
3. Conjuntos-igualdade não regulares	173
4. Restrições sobre os morfismos que representam as linguagens recursivamente enumeráveis através de conjuntos-igualdade.	175
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	177
 ÍNDICE DE SÍMBOLOS	180
 ÍNDICE DE DEFINIÇÕES	181

PREFÁCIO

O conjunto-igualdade de dois morfismos f e g de monóides livres, $f, g: \Gamma^* \longrightarrow \Delta^*$, consiste de todas as palavras em Γ^* que têm a mesma imagem por f e por g . Ou seja,

$$Eq(f, g) = \{w \in \Gamma^* / wf = wg\}.$$

Tais conjuntos têm tido importância relevante na solução de vários problemas da *Teoria de Linguagens Formais*.

Observamos inicialmente que um conjunto-igualdade de morfismos (a menos da palavra vazia) também pode ser interpretado como representando o conjunto de soluções de uma instância do *Problema de Correspondência de Post*, da seguinte forma.

Seja Γ um alfabeto com n símbolos, $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ e sejam duas n -uplas de palavras não vazias $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ sobre algum alfabeto Δ . Consideremos os morfismos $f, g: \Gamma^* \longrightarrow \Delta^*$, definidos por:

$$\gamma_i f = x_i \quad \text{e} \quad \gamma_i g = y_i, \quad \text{para cada } i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Então, $Eq(f, g) \setminus \{1\}$ é o conjunto de soluções da instância do Problema de Correspondência de Post com as n -uplas $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Como se sabe, o Problema de Correspondência de Post foi mostrado ser indecidível por *E.L.Post* (1946), ou seja, "*Não existe um algoritmo para decidir se o conjunto-igualdade de dois morfismos dados contém ou não alguma palavra não vazia*".

Mais tarde, *N. Chomsky e M.P.Schützenberger* (1963) mostraram que este problema permanece indecidível, mesmo restringindo um dos morfismos para ser injetor.

Posteriormente, *Y.Lecerf* (1963a e b) provou a indecidibilidade deste problema quando ambos os morfismos são injetores. Para isso, ele reduziu o Problema da Parada para o Problema de Correspondência de Post com morfismos injetores e, para fazê-lo associou dois morfismos a uma máquina de Turing e introduziu o conceito de *máquina de Turing reversível*.

Com o objetivo de escrever uma demonstração mais formal dos resultados obtidos por Lecerf, adotamos um formalismo para descrever as máquinas de Turing, inspirado no livro de *S.Eilenberg* (1974). Acreditamos que a utilização deste formalismo foi imprescindível para a obtenção dos resultados mais importantes deste trabalho.

Como primeira consequência desta formalização, fortalecemos o resultado de Lecerf mostrando que:

"O Problema de Correspondência de Post permanece indecidível, mesmo quando restrito a códigos de atraso um".

Chamamos de *código* a um morfismo injetor.

Mais recentemente, a investigação intensa de *Sistemas de Lindenmayer* possibilitou o uso de conjuntos-igualdade na solução de vários problemas de interesse nesta teoria. Por exemplo, na *decidibilidade do Problema da Equivalência da Sequência para os Sistemas DOL*. Estes resultados motivaram um estudo mais detalhado sobre a classe dos conjuntos-igualdade de morfismos, como se pode ver em A.Salomaa (1978), J.Engelfriet e G.Rozenberg (1979 e 1980) e G.Rozenberg e A.Salomaa (1980, capítulo III).

Por outro lado, B.Courcelle (1978), J.Karhumäki e I.Simon (1979) e G.Rozenberg e A.Salomaa (1980) tinham encontrado restrições sobre os morfismos para que seus conjuntos-igualdade fossem regulares. Embora as demonstrações efetuadas, via de regra, não fossem construtivas, não se sabia se era possível construir algorítmicamente os conjuntos-igualdade em questão.

Então, como consequência da indecidibilidade do Problema de Correspondência de Post para códigos de atraso um, mostramos que, em geral, os conjuntos-igualdade regulares mencionados acima não são *efetivamente regulares*. Mais precisamente, temos que:

"Se f e g são códigos de atraso um, então o conjunto-igualdade $Eq(f,g)$, apesar de ser regular, não é efetivamente regular".

Ao mesmo tempo, os conjuntos-igualdade de morfismos de monóides livres vinham sendo utilizados também em *representações de linguagens recursivamente enumeráveis*.

Por exemplo, A. Salomaa (1978) exibiu uma representação de linguagens recursivamente enumeráveis como imagens por uma função dgsm de conjuntos-igualdade de morfismos de monóides livres e, no ano seguinte, K. Culik (1979b) fortaleceu esse resultado restringindo a função dgsm para um morfismo e substituindo o conjunto-igualdade pelo seu conjunto-igualdade minimal, obtendo:

"Para cada linguagem recursivamente enumerável $L \subseteq \Sigma^*$, existem efetivamente um morfismo $h_\Sigma: \Gamma^* \longrightarrow \Sigma^*$, dois morfismos $h_1, h_2: \Gamma^* \longrightarrow \Delta^*$ tais que $L = (eq(h_1, h_2))h_\Sigma$ ".

O conjunto $eq(h_1, h_2)$ denota o conjunto-igualdade minimal de h_1 e h_2 , isto é,

$$eq(h_1, h_2) = \{w \in \Gamma^+ / wh_1 = wh_2 \text{ e se } w = uv \text{ para } u \text{ e } v \text{ em } \Gamma^+ \text{ então } uh_1 \neq uh_2\}.$$

Assim, utilizando as técnicas desenvolvidas anteriormente, fortalecemos o resultado de Culik demonstrando que:

"Para cada linguagem recursivamente enumerável L , existem efetivamente um morfismo h_0 e códigos h_1 e h_2 , com h_1 de atraso um da esquerda para a direita e h_2 da direita para a esquerda tais que $L = (eq(h_1, h_2))h_0$ ".

Desse modo, este trabalho é composto de cinco capítulos que descrevemos resumidamente a seguir.

No *Capítulo 1* apresentamos os conceitos básicos que serão utilizados no decorrer de todo o texto.

O *Capítulo 2* é dedicado inteiramente ao estudo das máquinas de Turing e chegamos a construir para cada máquina de Turing determinística uma outra máquina de Turing reversível e normalizada que é equivalente.

No *Capítulo 3* demonstramos a indecidibilidade do Problema de Correspondência de Post quando restrito a códigos de atraso um. Exibimos também alguns casos em que o Problema de Correspondência de Post foi provado ser indecidível, outros em que é decidível e alguns que ainda permanecem em aberto.

O objetivo do *Capítulo 4* é apresentar a representação de linguagens recursivamente enumeráveis como imagens homomórficas de conjuntos-igualdade minimais de códigos, sendo que um deles é de atraso um da esquerda para a direita e o outro de atraso um da direita para a esquerda. Além disso, exibimos algumas outras representações de linguagens recursivamente enumeráveis obtidas por A.Salomaa (1979), K.Culik e H.A.Maurer (1979) e J.Engelfriet e G.Rozenberg (1980).

Finalmente, no *Capítulo 5* apontamos algumas consequências dos resultados obtidos para conjuntos-igualdade de códigos, especialmente para aqueles que são regulares.

E, por último, apresentamos as *Referências Bibliográficas*, o *Índice de Símbolos* e o *Índice de Definições*.

CAPÍTULO 1

MORFISMOS E CONJUNTOS-IGUALDADE DE MORFISMOS DE MONÓIDES LIVRES

Neste trabalho, vamos supor que o leitor seja familiarizado com os conceitos de *relações*, *funções* (parciais), *monóides* (livres), *morfismos de monóides livres* e, em geral, com a *Teoria de Linguagens Formais*, principalmente no que se refere a *linguagens recursivamente enumeráveis* e *problemas de decidibilidade*, como exposto, por exemplo, por Imre Simon (1981), Salomaa (1973) e por Hopcroft e Ullman (1969).

Recordamos aqui a notação relativa a funções e composição de funções que utilizaremos neste texto.

Seja $f:A \longrightarrow B$ uma *função*. Então, para cada a em A , a *imagem de a por f* é denotada por af e se $af \in \{b\}$, para $a \in A$

gum b em B , escrevemos apenas $af=b$. Ou seja, no decorrer deste texto, não faremos distinção para denotar um conjunto unitário e seu único elemento.

Se $g:B \longrightarrow C$ é uma outra função, então a *composição de f com g* , denotada por fg , $fg:A \longrightarrow C$, é definida, para cada a em A , por

$$a(fg) = (af)g.$$

Assim, denotamos a imagem de a por fg simplesmente por afg .

O nosso objetivo neste capítulo é apresentar as definições e as propriedades de algumas restrições importantes de morfismos e introduzir os conjuntos-igualdade (minimais) de morfismos de monóides livres.

Em seguida, verificamos que a classe dos conjuntos-igualdade minimais de morfismos injetores está propriamente contida na classe dos conjuntos-igualdade minimais de morfismos quaisquer.

O estudo dos conjuntos-igualdade de morfismos de monóides livres que são regulares será feito no Capítulo 5.

1. MORFISMOS DE MONÓIDES LIVRES

Inicialmente, vamos enunciar a *propriedade fundamental dos monóides livres*:

"Seja M um monóide e seja $f: \Sigma \longrightarrow M$ uma função.

Existe uma única extensão de f a um morfismo $f^*: \Sigma^* \longrightarrow M$ ".

A demonstração pode ser encontrada em Lucchesi, Simon, Simon, Simon e Kowaltowski (1979 - capítulo D.I). Logo, devido a esta propriedade, sempre que for necessário construir um morfismo $f: \Sigma^* \longrightarrow M$, vamos somente especificar os valores de σf , para cada σ em Σ .

A seguir apresentamos algumas definições e notações de natureza mais específica.

Seja $h: \Gamma^* \longrightarrow \Delta^*$ um morfismo injetor. Nesse caso, chamamos h de *código*.

Dizemos então que o código h é de atraso k da esquerda para a direita (da direita para a esquerda) se existir um natural k tal que

para cada u em Γh , v em $(\Gamma h)^k$ e w em Δ^* ,

se $uvw \in (\Gamma h)^*$ ($wvu \in (\Gamma h)^*$)

então $vw \in (\Gamma h)^*$ ($wv \in (\Gamma h)^*$).

EXEMPLO 1 - Seja o morfismo $h: \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}^* \longrightarrow \{a, b\}^*$, definido por:

$$\sigma_1 h = a \quad , \quad \sigma_2 h = ba \quad \text{e} \quad \sigma_3 h = bb.$$

Então, h é de atraso zero da esquerda para a direita, mas não

é de atraso k da direita para a esquerda, para nenhum $k \geq 0$.

▲

Se um código h é de atraso k em ambos os sentidos, dizemos simplesmente que h é de atraso k .

EXEMPLO 2 - Seja o morfismo $h: \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}^* \rightarrow \{a, b\}^*$, definido por:

$$\sigma_1 h = ab, \quad \sigma_2 h = abb \quad \text{e} \quad \sigma_3 h = baab.$$

Nesse caso, h é de atraso um em ambos os sentidos.

▲

Dizemos que um código h é de atraso limitado (da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita) se ele for de atraso k (da direita para a esquerda ou vice-versa, respectivamente), para algum $k \geq 0$.

Um morfismo $h: \Gamma^* \rightarrow \Delta^*$ é dito *prefixo* (*sufixo*) se para cada x e y em Γ ,

$$\text{se } xh = (yh)z \quad (xh = z(yh)), \text{ para algum } z \text{ em } \Delta^*,$$

$$\text{então } x=y \quad \text{e} \quad z=1.$$

EXEMPLO 3 - O morfismo h do exemplo 1 é um prefixo.

Seja $f: \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\}^* \rightarrow \{a, b\}^*$ um morfismo dado por:

$$\sigma_1 f = aa, \quad \sigma_2 f = ab, \quad \sigma_3 f = baa, \quad \sigma_4 f = bab \quad \text{e} \quad \sigma_5 f = bb.$$

Então, f é um morfismo prefixo.

▲

EXEMPLO 4 - O morfismo $h:\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4\}^* \longrightarrow \{a,b,c\}^*$ definido por:

$$\sigma_1 h = b, \sigma_2 h = ba, \sigma_3 h = ca \text{ e } \sigma_4 h = c$$

é um sufixo. ▲

Se um morfismo h é simultaneamente prefixo e sufixo, dizemos que h é um *biprefixo*.

EXEMPLO 5 - Os morfismos $f:\{\sigma_1,\sigma_2\}^* \longrightarrow \{a,b\}^*$ e $g:\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}^* \longrightarrow \{a,b\}^*$ definidos, respectivamente, por:

$$\sigma_1 f = a \quad \text{e} \quad \sigma_2 f = b,$$

$$\sigma_1 g = a^2, \sigma_2 g = aba \text{ e } \sigma_3 g = b$$

são morfismos biprefixos. ▲

Podemos observar que:

- todo morfismo prefixo, sufixo ou biprefixo é injetor;
- todo morfismo prefixo (sufixo) é de atraso zero da esquerda para a direita (da direita para a esquerda);
- todo morfismo biprefixo é de atraso zero (em ambos os sentidos).

Vamos denotar por $P(S)$ a classe dos morfismos prefixos (sufixos). Então, $PS(SP)$ designa a classe dos morfismos que são composições de um prefixo (sufixo) com um sufixo (pre

fixo). Assim, $P \cap S$ representa a classe dos morfismos biprefixos e $PS \cap SP$ a classe dos morfismos que são tanto composições de um prefixo com um sufixo como de um sufixo com um prefixo.

Com relação aos morfismos prefixo, sufixo, biprefixo e de atraso limitado, uma referência importante é Perrin(1980).

Se h é um morfismo de Γ^* em Δ^* e Σ é um subconjunto de Γ , então dizemos que h *preserva* Σ sse

para cada σ em Σ , $\sigma h = \sigma$

e para cada σ em $\Gamma \setminus \Sigma$, $\sigma h = 1$.

Vamos denotá-lo por h_Σ .

O morfismo identidade sobre Γ^* será denotado por 1_{Γ^*} .

Chamamos um morfismo $h: \Gamma^* \rightarrow \Delta^*$ de *elementar* se não existem um alfabeto Σ , com $|\Sigma| < |\Gamma|$ e dois morfismos $f: \Gamma^* \rightarrow \Sigma^*$ e $g: \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ tais que $h = fg$.

EXEMPLO 6 - O morfismo $h: \{a, b, c, \alpha, \beta, \gamma\}^* \rightarrow \{a, b, c, d, e, f\}^*$, definido por:

$ah=de$, $bh=dfe$, $ch=dfte$, $\alpha h=a$, $\beta h=bc$ e $\gamma h=ba$

é elementar. ▲

Observemos que todo morfismo elementar é injetor.

Um resultado importante que relaciona morfismos elementares com códigos de atraso limitado é o seguinte.

PROPOSIÇÃO 1 - Todo morfismo elementar é um código de atraso limitado.

A demonstração pode ser encontrada em Courcelle(1978) ou em Rozenberg e Salomaa (1980).

2. O CONJUNTO-IGUALDADE (MINIMAL) DE MORFISMOS DE MONÓIDES LIVRES

Sejam os monóides livres Γ^* e Δ^* gerados, respectivamente, pelos alfabetos finitos Γ e Δ . Sejam os morfismos $f, g: \Gamma^* \longrightarrow \Delta^*$.

O conjunto-igualdade de f e g consiste de todas as palavras w em Γ^* que têm a mesma imagem por f e por g , ou seja,

$$Eq(f, g) = \{w \in \Gamma^* / wf = wg\}.$$

(A inclusão de $Eq(f, g)$ em Γ^* constitui o que se denomina *equalizador* em Teoria das Categorias. Mas, preferimos adotar o termo conjunto-igualdade já que este tem sido o padrão em todos os textos referentes a esse assunto.)

EXEMPLO 7 - Sejam os morfismos $f, g: \{a, b, c\}^* \longrightarrow \{a, b, c, d\}^*$, definidos pela tabela abaixo:

γ	a	b	c
γf	a	bc	bd
γg	ab	cb	d

Então, $\text{Eq}(f, g) = (ab^*c)^*$.

▲

EXEMPLO 8 - Sejam os morfismos f_1, g_1, f_2 e $g_2: \{a, b, c\}^* \longrightarrow \{a\}^*$, dados pelas tabelas abaixo:

γ	a	b
γf_1	a	aa
γg_1	aa	a

ou

γ	a	b
γf_2	a	1
γg_2	1	a

Então, é fácil ver que

$$\text{Eq}(f_1, g_1) = \{x \in \{a, b\}^* \mid |x|_a = |x|_b\} = \text{Eq}(f_2, g_2).$$

▲

EXEMPLO 9 - Sejam os morfismos $f, g: \{a, b, c\}^* \longrightarrow \{a, c\}^*$, definidos pela tabela abaixo:

γ	a	b	c
γf	a	a	c^2
γg	a^2	c	c

Logo, pode-se verificar que

$$\text{Eq}(f, g) = (\{a^n b^n c^n / n \geq 0\} \cup \{c^n b^n a^n / n \geq 0\})^*.$$

▲

Os conjuntos-igualdade de morfismos têm sido de grande importância na solução de alguns problemas da Teoria de Linguagens Formais. Por exemplo, a *decidibilidade do Problema da Equivalência da Seqüência para os Sistemas DOL* foi demonstrada originariamente por Culik e Fris (1977) e então, utilizando os conjuntos-igualdade, Ehrenfeucht e Rozenberg (1978) apresentaram uma demonstração mais simples desse resultado.

Mais recentemente, algumas representações de linguagens recursivamente enumeráveis, utilizando conjuntos-igualdade de morfismos de monóides livres, têm sido apresentadas.

Para maiores considerações sobre a *classe dos conjuntos-igualdade*, denotada por $\text{Eq}(\text{HOM})$, onde HOM é a classe dos morfismos, o leitor poderá consultar Salomaa (1978), Engelfriet e Rozenberg (1979 e 1980) e Rozenberg e Salomaa (1980, capítulo III).

Na seqüência, vamos definir o conjunto-igualdade minimal de dois morfismos de monóides livres.

Sejam os morfismos $f, g: \Gamma^* \longrightarrow \Delta^*$.

O *conjunto-igualdade minimal de f e g* consiste de todas as palavras w em Γ^* que têm a mesma imagem por f e por g , mas que não têm nenhum segmento inicial próprio com imagens iguais por f e por g , ou seja,

$$\text{eq}(f, g) = \{w \in \Gamma^+ \mid wf = wg \text{ e se } w = uv, \text{ para } u \text{ e } v \text{ em } \Gamma^+, \text{ então } uf \neq ug\}.$$

EXEMPLO 10 - Considerando-se os morfismos f e g do exemplo 7, temos que $\text{eq}(f,g) = ab^*c$.

Se f e g são os morfismos do exemplo 9, então

$$\text{eq}(f,g) = \{a^n b^n c^n / n > 0\} \cup \{c^n b^n a^n / n > 0\}.$$

Δ

Denotando-se por IHOM a classe dos morfismos injetores, seja $\text{Eq}(\text{IHOM})$ a classe dos conjuntos-igualdade de morfismos injetores. Engelfriet e Rozenberg (1979) mostraram o seguinte resultado.

TEOREMA 1 - $\text{Eq}(\text{IHOM}) \subsetneq \text{Eq}(\text{HOM})$.

A fim de demonstrá-lo, necessitamos de outros resultados conhecidos que apresentamos a seguir através de dois lemas.

LEMA 1 - Sejam as palavras x e y tais que $xy = yx$. Então, existe uma palavra z tal que x e y pertencem a z^* .

DEMONSTRAÇÃO - Por indução sobre $|x| + |y|$.

Se $|x| + |y| = 0$ então $x=y=1$ e o resultado é trivial.

Suponhamos que o resultado seja válido para palavras x e y , com $|x| + |y| \leq k$, para algum $k \geq 1$.

Sejam as palavras x e y tais que $|x| + |y| = k+1$ e $xy = yx$. Então, ou x é um segmento inicial de y ou y é um segmento inicial de x . Sem perda de generalidades, vamos supor

que x é um segmento inicial de y .

Se $x=1$, o resultado é trivial.

Suponhamos então que x é uma palavra não vazia. Logo, existe uma palavra u tal que $xu=y$ e $|u| < |y|$. Mas, de $xy=yx$ segue que $xxu = xux$ e, conseqüentemente, $xu = ux$. Como $|x| + |u| < |x| + |y|$, segue pela hipótese da indução que existe uma palavra não vazia z tal que x e u pertencem a z^* . Porém, $y=xu$. Portanto, y também pertence a z^* . ■

LEMA 2 - Sejam as palavras x , y e v .

- (i) Se $x \neq 1$ e existem infinitos inteiros não-negativos n tais que x^n é um segmento inicial de y^n então $x^{\mathbb{N}} = y^{\mathbb{N}}$.
- (ii) Se $x^{\mathbb{N}} = y^{\mathbb{N}}$ então existe uma palavra z tal que x e y pertencem a z^* .
- (iii) Se x pertence a $y^+ \cap v^+$ então existe uma palavra z tal que x , y e v pertencem a z^* .

DEMONSTRAÇÃO -

- (i) É óbvia.
- (ii) Se $x^{\mathbb{N}} = y^{\mathbb{N}}$ então ou x é um segmento inicial de y ou vice-versa. Sem perder a generalidade, podemos supor que x é um segmento inicial de y . Logo, existe uma palavra v tal que $xv=y$. Então, $x^{\mathbb{N}} = y^{\mathbb{N}} = (xv)^{\mathbb{N}}$. Logo, $x^{\mathbb{N}} = (vx)^{\mathbb{N}}$. Portanto, $(xv)^{\mathbb{N}} = (vx)^{\mathbb{N}}$ e assim, $xv=vx$. Pelo Lema 1 segue que existe uma palavra z tal que x

e v pertencem a z^* . Consequentemente, x e y pertencem a z^* .

- (iii) Se x pertence a $y^+ \cap v^+$ então x pertence a y^+ e a v^+ . Logo, $y^{\mathbb{N}} = v^{\mathbb{N}}$. Então, resulta de (ii) que existe uma palavra z tal que y e v pertencem a z^* . Assim, x , y e v pertencem a z^* .

■

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 1 -

Queremos mostrar que $\text{Eq}(\text{IHOM}) \subsetneq \text{Eq}(\text{HOM})$.

≠

Sejam α e $\beta: \{a,b,c,d\}^* \longrightarrow \{a,c\}^*$ os morfismos definidos pela tabela abaixo:

σ	a	b	c	d
$\sigma\alpha$	a	a	c^2	1
$\sigma\beta$	a^2	c	c	1

Então, $\text{Eq}(\alpha, \beta) = (\{(d^*ad^*)^n(d^*bd^*)^n(d^*cd^*)^n/n > 0\} \cup \{(d^*cd^*)^n(d^*bd^*)^n(d^*ad^*)^n/n > 0\})^* \cup d^*$.

Mas, α e β não são morfismos injetores.

Suponhamos, por absurdo, que existam morfismos f e g injetores tais que $\text{Eq}(f, g) = \text{Eq}(\alpha, \beta)$.

Como $d \in \text{Eq}(\alpha, \beta)$, segue que

$$df = dg. \quad (1)$$

Podemos observar que $df \neq 1$, pois, caso contrário, f e

g não seriam injetores.

Como $\{a^n b^n c^n / n > 0\} \subseteq \text{Eq}(\alpha, \beta)$, segue pelo Lema 2(i) que $(af)^{\mathbb{N}} = (ag)^{\mathbb{N}}$. Então, pelo Lema 2(ii) existe uma palavra não vazia z_1 tal que

$$af \text{ e } ag \in z_1^+. \quad (2)$$

Analogamente, porque $\{c^n b^n a^n / n > 0\} \subseteq \text{Eq}(\alpha, \beta)$, existe uma palavra não vazia z_2 tal que

$$cf \text{ e } cg \in z_2^+. \quad (3)$$

Como $af \neq ag$, pois $a \notin \text{Eq}(f, g)$, podemos supor, sem perder a generalidade, que

$$af \text{ é um segmento inicial de } ag. \quad (4)$$

Como $\{a^n d^m b^n c^n / n, m > 0\} \subseteq \text{Eq}(\alpha, \beta)$, resulta de (2) e Lema 2(i) que $(df)^{\mathbb{N}} = z_1^{\mathbb{N}}$. Então, pelo Lema 2(ii) existe uma palavra não vazia z_3 tal que $df \text{ e } z_1 \in z_3^+$. Logo, de (1) e (2) concluímos que

$$af, ag, df \text{ e } dg \in z_3^+. \quad (5)$$

Analogamente, porque $\{c^n d^m b^n a^n / n, m > 0\} \subseteq \text{Eq}(\alpha, \beta)$, segue que $(df)^{\mathbb{N}} = z_2^{\mathbb{N}}$ e pelo Lema 2(ii) existe uma palavra não vazia z_4 tal que $df \text{ e } z_2 \in z_4^+$. Logo, de (1) e (3) concluímos que

$$cf, cg, df \text{ e } dg \in z_4^+. \quad (6)$$

Então, de (5) e (6) e Lema 2(iii) resulta que existe uma palavra não vazia z_5 tal que

$$af, ag, cf, cg, df \text{ e } dg \in z_5^+. \quad (7)$$

Temos dois casos a considerar:

$$1^\circ) |cf| > |cg|.$$

De (4) e (7) temos que

$$ag = (af)z_5^k, \text{ para algum } k \geq 1$$

$$\text{e } cf = z_5^\ell(cg), \text{ para algum } \ell \geq 1.$$

Sejam $af = z_5^r$ e $cg = z_5^s$, para r e $s \geq 1$. Então,

$$(a^\ell c^k)_g = z_5^{(r+k)\ell+ks} = z_5^{r\ell+(\ell+s)k} = (a^\ell c^k)_f.$$

O que implica que $a^\ell c^k \in \text{Eq}(f,g) = \text{Eq}(\alpha,\beta)$; um absurdo.

$$2^\circ) |cf| < |cg|.$$

Como $\{a^n b^n c^n / n > 0\} \subseteq \text{Eq}(\alpha,\beta)$, de (4) e Lema 2(i) obtemos que $(bf)^\mathbb{N} = (ag)^\mathbb{N}$.

Então, pelo Lema 2(ii) existe uma palavra não vazia z_6 tal que bf e $ag \in z_6^+$ e, utilizando (7) e o Lema 2(iii) segue que existe uma palavra não vazia z_7 tal que ag, z_5 e $z_6 \in z_7^+$.

Logo, resulta de (7) que

$$af, ag, cf, cg, df, dg \text{ e } bf \in z_7^+. \quad (8)$$

Assim, para cada $n > 0$,

$$(a^n b^n c^n) f, a^n g \text{ e } c^n g \in z_7^+.$$

Como $(a^n b^n c^n) f = (a^n b^n c^n) g$, para cada $n > 0$, segue que $b^n g \in z_7^+$.

Conseqüentemente, $(bg)^{\mathbb{N}} = z_7^{\mathbb{N}}$ e pelo Lema 2(ii) existe uma palavra não vazia z tal que $bg \in z_7^+$.

Portanto, de (8) resulta que

$$af, bf, cf, df, ag, bg, cg \text{ e } dg \in z^+. \quad (9)$$

Podemos notar ainda que $|bf| > |bg|$, já que $|af| < |ag|$, $|cf| < |cg|$ e $(abc)f = (abc)g$.

Então, de (4) e (9) temos que

$$\begin{aligned} ag &= (af)z^k, \text{ para algum } k \geq 1 \\ \text{e } bf &= z^\ell(bg), \text{ para algum } \ell \geq 1. \end{aligned}$$

Sejam $af = z^r$ e $bg = z^s$, para r e $s \geq 1$. Logo,

$$(a^\ell b^k)g = z^{(r+k)\ell + sk} = z^{r\ell + (\ell + s)k} = (a^\ell b^k)f.$$

O que implica que $a^\ell b^k \in \text{Eq}(f, g) = \text{Eq}(\alpha, \beta)$; um absurdo.

Desse modo, temos provado que $\text{Eq}(\text{IHOM}) \subsetneq \text{Eq}(\text{HOM})$.

Esse resultado continua válido para a classe dos conjuntos-igualdade minimais, isto é,

COROLÁRIO 1 - $\text{eq}(\text{IHOM}) \subsetneq \text{eq}(\text{HOM})$.

DEMONSTRAÇÃO - Segue imediatamente do Teorema 1 e do fato que para cada par de morfismos f e g , $\text{eq}(f,g)$ é o único gerador minimal de $\text{Eq}(f,g)$, ou seja,

$$(\text{eq}(f,g))^* = \text{Eq}(f,g)$$

$$\text{e } \text{eq}(f,g) = (\text{Eq}(f,g) \setminus \{1\}) \setminus (\text{Eq}(f,g) \setminus \{1\})^2.$$

■

CAPÍTULO 2

MÁQUINAS DE TURING

Neste capítulo, apresentamos, inicialmente, uma definição de máquina de Turing e descrevemos o seu funcionamento, utilizando um formalismo inspirado no livro de Eilenberg (1974). O formalismo que adotamos foi fundamental para a demonstração dos resultados principais deste trabalho.

Em seguida, introduzimos máquinas de Turing (semi) normalizadas e reversíveis. E, então, para cada máquina de Turing determinística associamos uma máquina de Turing reversível e normalizada equivalente.

Finalmente, construímos o acoplamento de uma máquina de Turing reversível e normalizada com a sua reversa.

1. DEFINIÇÃO

Uma *máquina de Turing* A consiste de:

- duas fitas que serão referidas como *fita à esquerda* e *fita à direita*;
- um conjunto finito Q_A , cujos elementos são chamados de *estados*;
- um alfabeto finito T_A , chamado de *alfabeto de trabalho*;
- um subconjunto Σ_A de T_A , chamado de *alfabeto de entrada*;
- subconjuntos I_A e F_A de Q_A , cujos elementos são denominados, respectivamente, de *estados iniciais* e *finais*;
- um subconjunto A_A de $Q_A \times E_A \times D_A \times Q_A$, onde E_A (D_A) é o conjunto de *instruções* que agem sobre o conteúdo da fita à esquerda (direita) de A .

$$E_A = \{E_\sigma / \sigma \in T_A\} \cup \{E_\sigma^{-1} / \sigma \in T_A\} \cup \{V, N\}$$

e

$$D_A = \{D_\sigma / \sigma \in T_A\} \cup \{D_\sigma^{-1} / \sigma \in T_A\} \cup \{V, N\} .$$

Os elementos de A_A são chamados de *arestas*. Se $\alpha = (q, i_1, i_2, p)$ é uma aresta, então p e q são ditos a *origem* e o *término* de α , respectivamente.

Para cada q em Q_A , denotamos por $A_A(q)$ o subconjunto de A_A contendo todas as arestas com origem em q , ou seja,

$$A_A(q) = \{\alpha \in A_A / \alpha \text{ tem origem em } q\} .$$

As máquinas de Turing também podem ser representadas graficamente, como segue.

EXEMPLO 1

onde $Q_A = \{q_0, q_1, q_2\}$,

$T_A = \Sigma_A = \{a, b\}$,

$I_A = \{q_0\}$,

$F_A = \{q_2\}$

e $A_A = \{(q_0, E_a^{-1}, D_a, q_0), (q_0, E_a, D_b, q_1), (q_0, V, V, q_2),$
 $(q_1, E_a, D_b, q_1), (q_1, V, V, q_2)\}$.

2. DESCRIÇÃO DO FUNCIONAMENTO

A seguir, descrevemos informalmente o funcionamento de uma máquina de Turing (em termos de suas computações)

e, ao mesmo tempo, introduzimos formalmente alguns conceitos .

Uma máquina de Turing A possui um controle finito que se encontra, a cada instante, num dos estados q em Q_A e cada uma de suas fitas contém uma palavra s_j em T_A^* , $j=1$ e 2 . Assim, denotamos a *configuração das fitas* de A pelo par (s_1, s_2) , onde $s_1(s_2)$ é o conteúdo da fita $\tilde{a}$ esquerda (direita) e descrevemos a *configuração instantânea* de A por $\epsilon s_1 q s_2 \epsilon$, onde ϵ é um símbolo não pertencente a T_A .

A execução de uma instrução em D_A (E_A) pode retirar ou acrescentar uma letra na extremidade esquerda (direita) da fita $\tilde{a}$ direita (esquerda) ou não alterar o seu conteúdo.

Cada instrução em $E_A \cup D_A$ define uma função parcial de T_A^* em T_A^* como segue: para cada s em T_A^* e σ em T_A ,

$$sN = s$$

isto é, a instrução N deixa o conteúdo da fita ($\tilde{a}$ esquerda ou $\tilde{a}$ direita) *inalterado*; N é a função identidade $1_{T_A^*}$ sobre T_A^* ;

$$- sV = \begin{cases} 1, & \text{se } s = 1 \\ \emptyset & \text{caso contrário} \end{cases}$$

isto é, a instrução V também não altera o conteúdo da fita (à esquerda ou à direita), mas só pode ser executada se a fita estiver *vazia*;

$$- sD_{\sigma} = \begin{cases} t, & \text{se } s = \sigma t, \text{ para algum } t \text{ em } T_A^* \\ \emptyset, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$- sE_{\sigma} = \begin{cases} t, & \text{se } s = t\sigma, \text{ para algum } t \text{ em } T_A^* \\ \emptyset, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

isto é, a instrução D_{σ} (E_{σ}) lê o símbolo σ se este for a primeira letra da extremidade esquerda (direita) do conteúdo da fita à direita (esquerda); caso contrário, ela não pode ser executada;

$$- sD_{\sigma}^{-1} = \sigma s$$

$$- sE_{\sigma}^{-1} = s\sigma$$

ou seja, a instrução D_{σ}^{-1} (E_{σ}^{-1}) grava o símbolo σ na extremidade esquerda (direita) da fita à direita (esquerda).

Os domínios e as imagens das funções parciais descritas acima são dados por:

$$\text{dom } N = T_A^* \quad \text{im } N = T_A^*$$

$$\text{dom } V = \{1\} \quad \text{im } V = \{1\}$$

$$\text{para cada } \sigma \text{ em } T_A, \quad \text{dom } D_\sigma = \sigma T_A^* \quad \text{im } D_\sigma = T_A^*$$

$$\text{dom } E_\sigma = T_A^* \sigma \quad \text{im } E_\sigma = T_A^*$$

$$\text{dom } D_\sigma^{-1} = T_A^* \quad \text{im } D_\sigma^{-1} = \sigma T_A^*$$

$$\text{dom } E_\sigma^{-1} = T_A^* \quad \text{im } E_\sigma^{-1} = T_A^* \sigma.$$

Observemos que E_σ e E_σ^{-1} (D_σ e D_σ^{-1}) são relações inversas.

Também são válidas as seguintes identidades:

$$VV^{-1} = V^{-1}V = V = V^{-1} \quad \text{e} \quad NN^{-1} = N^{-1}N = N = N^{-1}.$$

E, para cada σ em T_A ,

$$D_\sigma^{-1}D_\sigma = 1_{T_A^*} \quad \text{e} \quad E_\sigma^{-1}E_\sigma = 1_{T_A^*}.$$

Além disso, para cada s em T_A^* e σ em T_A , se s começa com σ (termina com σ), é fácil ver que

$$sD_\sigma D_\sigma^{-1} = s \quad (sE_\sigma E_\sigma^{-1} = s).$$

A cada aresta $\alpha = (q, i_1, i_2, p)$ de A associamos o seu rótulo $|\alpha|$, que é a função parcial

$$|\alpha| = i_1 \times i_2 : T_A^* \times T_A^* \longrightarrow T_A^* \times T_A^*$$

e que pode ser interpretada como um par de instruções, sendo que a primeira (segunda) componente age sobre a fita à esquerda (direita) de A ; isto é, para cada par (s_1, s_2) em $T_A^* \times T_A^*$,

$$(s_1, s_2)|\alpha| = (s_1 i_1, s_2 i_2),$$

se a aresta α for executável; caso contrário, $(s_1, s_2)|\alpha| = \emptyset$.

Também podemos associar a α uma função parcial

$$||\alpha|| : CI_A \longrightarrow CI_A ,$$

onde $CI_A = \epsilon T_A^* Q_A T_A^* \epsilon$ é o conjunto das configurações instantâneas de A, de modo que para cada configuração instantânea u de A, u em CI_A , $u||\alpha||$ representa a *configuração instantânea de A após a execução da aresta α* . Ou seja, se

$$u = \epsilon s_1 q s_2 \epsilon \text{ em } CI_A , \text{ então}$$

$$u||\alpha|| = (\epsilon s_1 q s_2 \epsilon) ||(q, i_1, i_2, p)|| = \epsilon s_1 i_1 p s_2 i_2 \epsilon,$$

se a aresta α for executável; caso contrário, $u||\alpha|| = \emptyset$.

EXEMPLO 2 - Consideremos a máquina de Turing A do exemplo 1.

Sejam $u_0 = \epsilon a q_0 a b b \epsilon$ em CI_A e as arestas

$$\alpha_1 = (q_0, E_a^{-1}, D_a, q_0) \text{ e } \alpha_2 = (q_0, E_a, D_b, q_1). \text{ Então,}$$

$$u_0 ||\alpha_1|| = \epsilon a E_a^{-1} q_0 (a b b) D_a \epsilon = \epsilon a a q_0 b b \epsilon = u_1 ,$$

$$u_1 ||\alpha_1|| = \epsilon (a a) E_a^{-1} q_0 (b b) D_a \epsilon = \emptyset \text{ e}$$

$$u_1 ||\alpha_2|| = \epsilon (a a) E_a q_1 (b b) D_b \epsilon = \epsilon a q_1 b \epsilon .$$

Uma computação de uma máquina de Turing A é realizada por passos. Cada passo consiste na escolha e execução (se possível) de uma aresta em A_A .

Em cada instante, o controle finito de A encontra-se num estado q em Q_A e com a configuração das fitas (s_1, s_2) , s_1 e s_2 em T_A^* . A correspondente configuração instantânea de A é $\epsilon s_1 q s_2 \epsilon$.

Um *passo da computação* começa selecionando uma aresta α com origem em q , por exemplo $\alpha = (q, i_1, i_2, p)$, que poderá ser executada somente se cada instrução i_j puder ser executada sobre cada palavra s_j ($j=1$ e 2); caso seja, o controle finito transfere para o estado p e a nova configuração das fitas será (t_1, t_2) , onde cada palavra t_j é obtida de s_j pela execução da instrução i_j ($j=1$ e 2).

A correspondente configuração instantânea de A após executar a aresta α é $\epsilon t_1 p t_2 \epsilon$. Caso a aresta α não seja executável, esta computação é suspensa e se não existir uma aresta em A_A , com origem em q , que seja executável, a máquina pára.

Um *passo não degenerado* c numa máquina de Turing é uma sequência finita de arestas

$$c = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \quad (k \geq 1),$$

onde para cada j ($1 \leq j < k$), o término de α_j é igual a origem de α_{j+1} . A *origem* de c é a origem de α_1 e o *término* de c é o término de α_k . O natural k é chamado de *comprimento* do

passeio c .

Ao passeio c também podemos associar um *rótulo* $|c|$, que é a composição dos rótulos das arestas $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, isto é,

$$|c| = |\alpha_1| |\alpha_2| \dots |\alpha_k| .$$

Vamos denotar um passeio c com origem em q e término em p por

$$c: q \longrightarrow p .$$

A função configuração instantânea de A após a execução de uma aresta α em A_A também pode ser estendida para o passeio c em A , como segue.

$$||c|| = ||\alpha_1|| ||\alpha_2|| \dots ||\alpha_k|| .$$

Assim para cada u em CI_A , $u||c||$ representa a *configuração instantânea de A após a execução do passeio c* .

Definimos também, para cada estado q em Q_A , o *passeio degenerado* ou *trivial* 1_q , que não contém arestas e tem origem e término em q . O comprimento desse passeio é zero e seu rótulo $|1_q|$ é a função $1_{T_A^*} \times 1_{T_A^*}$ ou $N \times N$. Nesse caso, $||1_q|| = 1_{CI_A}$, isto é, a função identidade sobre CI_A .

EXEMPLO 3 - Consideremos a máquina de Turing A do exemplo 1.

Sejam $u = \epsilon q_0 a b \epsilon$ em CI_A e o passeio $c = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, com

$\alpha_1 = (q_0, E_a^{-1}, D_a, q_0)$, $\alpha_2 = (q_0, E_a, D_b, q_1)$ e $\alpha_3 = (q_1, V, V, q_2)$. Então,

temos que

$$(1, ab) |c| = (1, ab) |\alpha_1| |\alpha_2| |\alpha_3| = (a, b) |\alpha_2| |\alpha_3|$$

$$= (1, 1) |\alpha_3| = (1, 1)$$

$$(\epsilon q_0 a b \epsilon) ||c|| = (\epsilon q_0 a b \epsilon) ||\alpha_1|| ||\alpha_2|| ||\alpha_3|| = (\epsilon a q_0 b \epsilon) ||\alpha_2|| ||\alpha_3||$$

$$= (\epsilon q_1 \epsilon) ||\alpha_3|| = \epsilon q_2 \epsilon$$

▲

Dados dois passeios $c = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k$ ($k \geq 0$) e

$d = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_\ell$ ($\ell \geq 0$) em A , tal que a origem de d é igual ao término de c , definimos o *produto* cd dos passeios c e d por concatenação, isto é,

$$cd = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \beta_1 \beta_2 \dots \beta_\ell.$$

É claro que o produto de passeios é uma operação associativa e que, para todo passeio c com origem em q e término em p ,

$$1_q c = c = c 1_p.$$

Seja s uma palavra em Σ_A^* . Dizemos que a máquina de Turing A *reconhece* s se existir um passeio c em A , com origem q_- em I_A e término q_+ em F_A , tal que

$$(1, s) |c| \in T_A^* \times 1$$

ou, de modo equivalente,

$$(\epsilon q_- s \epsilon) ||c|| = \epsilon t q_+ \epsilon, \text{ para algum } t \text{ em } T_A^*.$$

Ou seja, dizemos que a palavra s é reconhecida por A se existir um passeio c em A , com origem num estado inicial q_- , tal que iniciando a máquina de Turing A no estado q_- e com a configuração das fitas $(1, s)$, cada aresta de c é executável e a execução do passeio c transfere A para algum estado final q_+ e com a configuração das fitas $(t, 1)$, para algum t em T_A^* .

O conjunto das palavras reconhecidas por A determina a *língua reconhecida* por A , que denotamos por $|A|$. Assim,

$$|A| = \{s \in \Sigma_A^* / \text{existe } c: q \longrightarrow p, \text{ com } q \in I_A \text{ e } p \in F_A \text{ tal que}$$

$$(1, s) | c | \in T_A^* \times 1\}$$

ou, de modo equivalente,

$$|A| = \{s \in \Sigma_A^* / \text{existe } c: q \longrightarrow p, \text{ com } q \in I_A \text{ e } p \in F_A \text{ tal que}$$

$$(\epsilon q s \epsilon) ||c|| = \epsilon t p \epsilon, \text{ para algum } t \text{ em } T_A^*\}.$$

No caso do exemplo 1, temos que $|A| = \{a^n b^n / n \geq 0\}$.

Dizemos que duas *máquinas de Turing* A e B são *equivalentes* se $|A| = |B|$.

Passamos a definir agora alguns tipos especiais de

máquinas de Turing.

Dizemos que uma *máquina de Turing* A é *determinística* se ela tiver no máximo um estado inicial e, para cada estado q em Q_A , os domínios dos rótulos das arestas com origem em q forem dois a dois disjuntos.

Uma máquina de Turing A é *semi-normalizada* se o rótulo de cada aresta em A_A tiver pelo menos uma das componentes igual a N . Se, além de A ser semi-normalizada, tiver $|I_A| = |F_A| = 1$ e o estado inicial (final) não for término (origem) de nenhuma aresta em A_A , dizemos que A é *normalizada*.

Agora, verificamos, para cada estado q de uma máquina de Turing determinística, como são os rótulos das arestas com origem em q .

PROPOSIÇÃO 1 - Seja A uma máquina de Turing determinística. Então, para cada estado q em Q_A ou existe no máximo uma aresta com origem em q ou todas as primeiras (segundas) componentes dos rótulos das arestas com origem em q pertencem a $\{E_\sigma / \sigma \in T_A\} \cup \{V\}$ ($\{D_\sigma / \sigma \in T_A\} \cup \{V\}$).

DEMONSTRAÇÃO - Segue imediatamente da definição de máquina de Turing determinística e do fato que se X e Y são dois conjuntos não vazios então $X \cap T_A^*$ e $T_A^* \cap Y$ não são disjuntos.

Como uma consequência direta dessa proposição temos:

COROLÁRIO 1 - Seja A uma máquina de Turing determinística e semi-normalizada. Então, para cada q em Q_A , existe uma componente em que os rótulos de todas as arestas com origem em q apresentam N nessa componente.

3. MÁQUINA DE TURING REVERSÍVEL

As máquinas de Turing reversíveis, que foram introduzidas por Lecerf (1963a), constituem uma das ferramentas básicas na demonstração dos dois resultados principais deste trabalho.

Seja A uma máquina de Turing determinística.

Seja A' a máquina de Turing com

$$T_{A'} = T_A ,$$

$$\Sigma_{A'} = \Sigma_A ,$$

$$Q_{A'} = \{q' / q \in Q_A\} ,$$

$$I_{A'} = \{q' / q \in F_A\} ,$$

$$F_{A'} = \{q'_0\}, \text{ onde } \{q_0\} = I_A$$

$$\text{e } A_{A'} = \{(p', i_1^{-1}, i_2^{-1}, q') / (q, i_1, i_2, p) \in A_A\}.$$

Chamamos a máquina de Turing A' de *reversa* da máquina

quina de Turing A e dizemos que A é *reversível* se A e A' forem ambas determinísticas.

Denominamos a aresta $\alpha' = (p', i_1^{-1}, i_2^{-1}, q')$ em A_A , de *reversa da aresta* $\alpha = (q, i_1, i_2, p)$ em A_A e se c é um passeio em A , $c = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k$, com $k \geq 1$ e $\alpha_i \in A_A$ ($1 \leq i \leq k$), dizemos que o passeio $c' = \alpha'_k \alpha'_{k-1} \dots \alpha'_1$ em A' é o *reverso do passeio* c . Se $c = 1_q$, para algum q em Q_A , então $c' = 1_{q'}$.

EXEMPLO 4 - Seja a máquina de Turing determinística

Então, a reversa de A é a máquina de Turing

Neste caso, como A' não é determinística, resulta que A não é reversível. Δ

No Exemplo 6, no final da seção 4 deste capítulo, apresentamos uma máquina de Turing reversível e normalizada, que é equivalente a A .

Examinamos então a relação existente entre os passeios numa máquina de Turing reversível A e os passeios na sua máquina reversa A' .

PROPOSIÇÃO 2 - Sejam A uma máquina de Turing reversível e A' a sua reversa. Para cada passeio $c:q \longrightarrow p$ em A e palavras s e t em T_A^* , se $(\epsilon sqt\epsilon) ||c|| = \epsilon upv\epsilon$, para u e v em T_A^* então, sendo $c':p' \longrightarrow q'$ o reverso de c em A' , resulta que $(\epsilon up'v\epsilon) ||c'|| = \epsilon sq't\epsilon$.

DEMONSTRAÇÃO - Seja A uma máquina de Turing reversível e seja A' a reversa de A .

Sejam $c:q \longrightarrow p$ um passeio em A e palavras s e t em T_A^* tais que

$$(\epsilon sqt\epsilon) ||c|| = \epsilon upv\epsilon, \text{ para } u \text{ e } v \text{ em } T_A^*. \quad (1)$$

Demonstramos, por indução no comprimento do passeio c , que se $c':p' \longrightarrow q'$ é o reverso de c em A' , então

$$(\epsilon up'v\epsilon) ||c'|| = \epsilon sq't\epsilon.$$

Se c é um passeio degenerado, então $c = 1_q$ e $p = q$. Nesse caso, segue de (1) que $u = s$ e $v = t$. Assim, o passeio $c' = 1_{p'}$, onde $p' = q'$, é o reverso de c em A' e

$$(\epsilon u p' v \epsilon) ||c'|| = -\epsilon u p' v \epsilon = \epsilon s q' t \epsilon.$$

Se $c \in A_A$, então $c = (q, i, j, p)$, para algum i em E_A e j em D_A . Logo, segue de (1) que

$$u = si \quad e \quad v = tj.$$

Portanto, a aresta $c' = (p', i^{-1}, j^{-1}, q')$ em $A_{A'}$ é a reversa de c e

$$(\epsilon u p' v \epsilon) ||c'|| = \epsilon u i^{-1} q' v j^{-1} \epsilon = \epsilon s i i^{-1} q' t j j^{-1} \epsilon = \epsilon s q' t \epsilon.$$

Suponhamos então que a proposição seja válida para passeios em A de comprimento menor do que k , para $k \geq 1$ e palavras quaisquer w e z em T_A^* ; vamos prová-la para um passeio c de comprimento k e palavras s e t em T_A^* .

Seja o passeio $c: q \longrightarrow p$, $c = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k$, com α_i em A_A ($1 \leq i \leq k$) e sejam s e t em T_A^* tal que a condição (1) seja válida. Sendo r em Q_A a origem de α_k , temos que o passeio $d = \alpha_1 \dots \alpha_{k-1}$ tem origem em q e término em r . Logo, existem palavras x e y em T_A^* tais que

$$(\epsilon s q t \epsilon) ||d|| = \epsilon x r y \epsilon \quad e \quad (\epsilon x r y \epsilon) ||\alpha_k|| = \epsilon u p v \epsilon.$$

E pela hipótese da indução, aplicada ao passeio d , segue que o passeio $d': r' \longrightarrow q'$ é o reverso de d em A' e

$$(\epsilon x r' y \epsilon) || d' || = \epsilon s q' t \epsilon .$$

Além disso, a aresta $\alpha'_k : p' \longrightarrow r'$, reversa de α_k , pertence a $A_{A'}$ e

$$(\epsilon u p' v \epsilon) || \alpha'_k || = \epsilon x r' y \epsilon .$$

Mas, $c' = \alpha'_k d'$ é um passeio em A' com origem em p' e término em q' , onde $d' = \alpha'_{k-1} \dots \alpha'_1$. Então, $c' = \alpha'_k \alpha'_{k-1} \dots \alpha'_1$ é o reverso de c em A' e

$$(\epsilon u p' v \epsilon) || c' || = (\epsilon u p' v \epsilon) || \alpha'_k || || d' || = (\epsilon x r' y \epsilon) || d' || = \epsilon s q' t \epsilon .$$

Desse modo, temos demonstrado a Proposição 2. ■

EXEMPLO 5 - Sejam as máquinas de Turing A e A' como no Exemplo 4 e consideremos a configuração instantânea $\epsilon q_0 a b \epsilon$ de A e o passeio $c = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ em A , com $\alpha_1 = (q_0, E_a^{-1}, D_a, q_0)$, $\alpha_2 = (q_0, E_a, D_b, q_1)$ e $\alpha_3 = (q_1, V, V, q_2)$ tais que

$$(\epsilon q_0 a b \epsilon) || c || = \epsilon q_2 \epsilon .$$

Seja c' em A' , o passeio reverso de c . Então, $c' = \alpha'_3 \alpha'_2 \alpha'_1$, com $\alpha'_3 = (q'_2, V, V, q'_1)$, $\alpha'_2 = (q'_1, E_a^{-1}, D_b^{-1}, q'_0)$ e $\alpha'_1 = (q'_0, E_a, D_a^{-1}, q'_0)$. Assim,

$$\begin{aligned} (\epsilon q'_2 \epsilon) || c' || &= (\epsilon q'_2 \epsilon) || \alpha'_3 || || \alpha'_2 || || \alpha'_1 || \\ &= (\epsilon q'_1 \epsilon) || \alpha'_2 || || \alpha'_1 || \\ &= (\epsilon a q'_0 b \epsilon) || \alpha'_1 || \\ &= \epsilon q'_0 a b \epsilon \end{aligned}$$

▲

4. SIMULAÇÃO DE UMA MÁQUINA DE TURING DETERMINÍSTICA POR UMA REVERSÍVEL E NORMALIZADA

Enunciamos agora o resultado principal deste capítulo que assegura que cada linguagem recursivamente enumerável é o comportamento de alguma máquina de Turing reversível e normalizada.

TEOREMA 1 - Cada máquina de Turing determinística é equivalente a alguma máquina de Turing reversível e normalizada.

Com a finalidade de demonstrá-lo, apresentamos dois lemas.

LEMA 1 - Cada máquina de Turing determinística é equivalente a alguma máquina de Turing determinística e semi-normalizada.

DEMONSTRAÇÃO - Seja A uma máquina de Turing determinística. Construimos uma máquina de Turing B com

$$T_B = T_A ,$$

$$\Sigma_B = \Sigma_A ,$$

$$Q_B = Q_A \cup \hat{Q}_1 \cup Q_2 \times (T_B \cup \{\epsilon\}) ,$$

onde $\hat{Q}_1 = \{\hat{q} / q \in Q_A \text{ e } |A_A(q)| = 1\}$

e $Q_2 = \{q \in Q_A / |A_A(q)| > 1\} ;$

$$I_B = I_A ,$$

$$F_B = F_A$$

e A_B é constituído por:

- para cada q em Q_A , com $|A_A(q)| = 1$, seja $\alpha = (q, i, j, p)$ em $A_A(q)$. Então, as arestas

$$\beta_1 = (q, i, N, \hat{q}) \text{ e } \beta_2 = (\hat{q}, N, j, p)$$

pertencem a A_B e é claro que

$$|\alpha| = |\beta_1| |\beta_2|. \quad (2)$$

Graficamente, se em A ocorrer

então B terá

- para cada q em Q_A , com $|A_A(q)| > 1$, resulta pela Proposição 1 que ou todas as arestas em $A_A(q)$ têm as primeiras componentes

tes de seus rótulos em $\{E_\sigma/\sigma \in T_A\} \cup \{V\}$ ou todas elas têm as segundas componentes de seus rótulos em $\{D_\sigma/\sigma \in T_A\} \cup \{V\}$.

Consideremos, então, os dois casos separadamente.

CASO 1 - Todas as arestas em $A_A(q)$ têm as primeiras componentes de seus rótulos em $\{E_\sigma/\sigma \in T_A\} \cup \{V\}$.

Então, para cada aresta $\alpha = (q, i, j, p)$ em $A_A(q)$, sendo $\gamma = \epsilon$ se $i = V$ ou $\gamma = \sigma$ em T_A se $i = E_\sigma$, as arestas

$$\beta_1 = (q, i, N, (q, \gamma)) \text{ e } \beta_2 = ((q, \gamma), N, j, p)$$

pertencem a A_B . Novamente, é claro que

$$|\alpha| = |\beta_1| |\beta_2|. \quad (3)$$

Graficamente, se a máquina de Turing A apresentar o trecho abaixo, com $|A_A(q)| = k$.

então, o correspondente trecho em B será

onde, para cada ℓ , $1 \leq \ell \leq k$, $\gamma_\ell = \sigma$ se $i_\ell = E_\sigma$ para σ em T_A ou $\gamma_\ell = \epsilon$ se $i_\ell = V$.

CASO 2 - Todas as arestas em $A_A(q)$ têm as segundas componentes de seus rótulos em $\{D_\sigma/\sigma \in T_A\} \cup \{V\}$. Então, para cada aresta $\alpha = (q, i, j, p)$ em $A_A(q)$, sendo $\gamma = \epsilon$ se $j = V$ ou $\gamma = \sigma$ em T_A se $j = D_\sigma$, as arestas

$$\beta_1 = (q, N, j, (q, \gamma)) \quad \text{e} \quad \beta_2 = ((q, \gamma), i, N, p)$$

pertencem a A_B . Também é claro que

$$|\alpha| = |\beta_1| |\beta_2|. \quad (4)$$

Para vermos graficamente o que acontece, considere mos o seguinte trecho na máquina de Turing A , com $|A_A(q)| = k$.

Então, o trecho correspondente em B será

onde, para cada ℓ , $1 \leq \ell \leq k$, $\gamma_\ell = \epsilon$ se $j_\ell = V$ ou $\gamma_\ell = \sigma$ se $j_\ell = D_\sigma$ para σ em T_A .

Assim, de (2), (3) e (4) resulta que $|A| = |B|$ e podemos verificar pelas arestas em A_B que B é determinística e semi-normalizada. Finalizamos, portanto, a demonstração do Lema 1.

LEMA 2 - Cada máquina de Turing determinística é equivalente a alguma máquina de Turing determinística e normalizada.

DEMONSTRAÇÃO - Seja A uma máquina de Turing determinística . Pelo Lema 1 existe uma máquina de Turing determinística e semi-normalizada C tal que $|C| = |A|$.

Definimos, então, uma máquina de Turing B com

$$T_B = T_C ,$$

$$\Sigma_B = \Sigma_C ,$$

$$Q_B = Q_C \cup \{p_-, p_+\} \cup Q_1 \times T_C \cup \hat{Q}_1 ,$$

onde $\{p_-, p_+\} \cap Q_C = \emptyset$,

$$Q_1 = \{q \in F_C / \text{ existe alguma aresta em } A_C \text{ com origem em } q\}$$

e $\hat{Q}_1 = \{\hat{q} / q \in Q_1\} ;$

$$I_B = \{p_-\} , F_B = \{p_+\}$$

e A_B é constituído pelas arestas:

- (p_-, N, N, q_-) , onde $\{q_-\} = I_C$;

- para cada estado q em F_C , a aresta (q, N, V, p_+) pertence a A_B ;

- para cada q em Q_1 e para cada σ em T_C , as arestas

$$(q, N, D_\sigma, (q, \sigma)) \text{ e } ((q, \sigma), N, D_\sigma^{-1}, \hat{q})$$

pertencem a A_B ;

- para cada aresta (q,i,j,p) em A_C , com $q \in Q_1$, a aresta

$(\hat{q},i,j,p)$

pertence a A_B ;

- cada aresta em A_C que não tem origem em F_C também pertence a A_B .

Para um melhor entendimento da construção da máquina de Turing B , observemos graficamente o que ocorre.

Consideremos a seguinte máquina de Turing C , com

$$T_C = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\} .$$

Lembremos que, como C é determinística e semi-normalizada, resulta pelo Corolário 1 que para cada q em Q_C existe uma componente (escolhemos a primeira) em que os rótulos de todas as arestas com origem em q apresentam N nessa componente.

Nesse caso, uma máquina de Turing determinística, normalizada e equivalente a C é dada por:

Prosseguindo a demonstração, é fácil ver que B é determinística e normalizada. Mostramos agora que $|B| = |C|$.

Seja $s \in |C|$. Então, existe um passeio $c: q_- \rightarrow q_+$ em C , com q_+ em F_C tal que

$$(1, s)|c| \in T_C^* \times 1.$$

Se c é um passeio degenerado, então $c = 1_{q_-}$, $q_- = q_+$ está em F_C e $s = 1$. Logo,

$$d = (p_-, N, N, q_-)(q_-, N, V, p_+)$$

é um passeio em B de p_- a p_+ tal que

$$(1, s)|d| \in T_B^* \times 1.$$

Ou seja, $s \in |B|$.

Caso contrário, o passeio c tem uma decomposição

$$c = c_1 c_2 \dots c_k, \text{ para algum } k > 0,$$

tal que c_1 é o passeio de comprimento minimal com término em F_C e para cada ℓ , $2 \leq \ell \leq k$, c_ℓ é um passeio não degenerado minimal com origem e término em F_C . (5)

Observemos que no passeio c_1 não ocorrem arestas com origem em F_C . Resulta, então, que c_1 também é um passeio em B .

Seja i ($1 \leq i \leq k$) o menor índice tal que

$$(1, s)|c_1 c_2 \dots c_i| = (t, 1), \text{ para algum } t \text{ em } T_C^*. \quad (6)$$

Suponhamos que $i = 1$ e seja r o término de c_1 . Como r está em F_C , a aresta (r, N, V, p_+) pertence a Λ_B .

Assim, B tem o passeio $d: p_- \longrightarrow p_+$,

$$d = (p_-, N, N, q_-) c_1 (r, N, V, p_+),$$

$$\text{tal que } (1, s) |d| = (1, s) | (p_-, N, N, q_-) | |c_1| | (r, N, V, p_+) |$$

$$= (1, s) |c_1| | (r, N, V, p_+) |$$

$$= (t, 1) | (r, N, V, p_+) |$$

$$= (t, 1) \in T_B^* \times 1.$$

Suponhamos agora que $i \geq 2$. De (5) segue que, para cada j , $2 \leq j \leq i$, existe uma aresta $\alpha_j = (q_j, j_1, j_2, p_j)$ em A_C e um passeio m_j em C , com origem em p_j tal que $c_j = \alpha_j m_j$; além disso, m_j é um passeio em B , já que nele não ocorrem arestas com origem em F_C .

Logo, correspondendo a cada passeio c_j , $2 \leq j \leq i$, existe algum σ em T_B (dependendo de s , ou seja, σ é o símbolo na extremidade esquerda da fita à direita quando C for executar a aresta α_j) tal que

$$d_j = (q_j, N, D_\sigma, (q_j, \sigma)) ((q_j, \sigma), N, D_\sigma^{-1}, \hat{q}_j) (\hat{q}_j, j_1, j_2, p_j) m_j$$

é um passeio em B .

Está claro que, para cada configuração das fitas (x, y) de C , se $y = \sigma w$, para algum w em T_C^* , então

$$(x, y) |c_j| = (x, y) |d_j|. \quad (7)$$

Assim, existe em B o passeio $d: p_- \longrightarrow p_+$,

$$d = (p_-, N, N, q_-) c_1 d_2 \dots d_i (q, N, V, p_+) ,$$

onde q é o término de d_i e $q \in F_C$.

Portanto, utilizando (6) e (7), temos que

$$(1, s) |d| = (1, s) | (p_-, N, N, q_-) | |c_1| |d_2| \dots |d_i| | (q, N, V, p_+) |$$

$$= (1, s) |c_1| |d_2| \dots |d_i| | (q, N, V, p_+) |$$

$$= (t, 1) | (q, N, V, p_+) |$$

$$= (t, 1) \in T_B^* \times 1.$$

Logo, $s \in |B|$ e, portanto, $|C| \subseteq |B|$. Analogamente, demonstra-se que $|B| \subseteq |C|$. E como $|A| = |C|$, concluímos que $|A| = |B|$.

Desse modo, temos provado o Lema 2. ■

Estamos agora em condições de demonstrar o Teorema 1 que enunciamos novamente a seguir.

TEOREMA 1 - Cada máquina de Turing determinística é equivalente a alguma máquina de Turing reversível e normalizada.

DEMONSTRAÇÃO - Seja A uma máquina de Turing determinística. Pelo Lema 2, existe uma máquina de Turing determinística e normalizada C tal que $|A| = |C|$.

Definimos então uma máquina de Turing B com

$$T_B = T_C \cup \{\$, \xi\} \cup X,$$

onde $\{\$, \xi\} \cap T_C = \emptyset$

e $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ tal que $k = |A_C|$ e $X \cap (T_C \cup \{\$, \xi\}) = \emptyset$.

Para cada i , $1 \leq i \leq k$, o i -ésimo símbolo x_i está associado à i -ésima aresta de C (supondo-se uma enumeração qualquer das arestas em A_C).

Seja (s_0, t_0) uma configuração inicial das fitas de C , com s_0 e t_0 em T_C^* . A máquina B será construída de modo que, para cada configuração das fitas (s, t) de C , com s e t em T_C^* , atingível a partir de (s_0, t_0) , a correspondente configuração das fitas de B , partindo de (s_0, t_0) , será $(s\xi x, t)$, onde $x \in X^*$ representa a seqüência dos símbolos associados às arestas utilizadas por C partindo de (s_0, t_0) até atingir a configuração (s, t) .

$$\Sigma_B = \Sigma_C,$$

$$Q_B = Q_C \cup \{t_-\} \cup Q_1 \times H_1 \cup Q_2 \times (\{\sigma_1, \sigma_2\} \cup X) \cup$$

$$\cup Q_3 \times (\{\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\} \cup X) \times H_3,$$

onde $t_- \notin Q_C$,

$$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\} \cap (X \cup T_C) = \emptyset,$$

$Q_1 = \{p \in Q_C / C \text{ tem alguma aresta com término em } p \text{ e rótulo } N \times i_2, \text{ para algum } i_2 \text{ em } D_C\},$

$$H_1 = \{i \in \mathbb{N} / 1 \leq i \leq k \text{ e a } i\text{-ésima aresta de } C \text{ tem rótulo } N \times i_2, \text{ para algum } i_2 \text{ em } D_C\} ,$$

$$Q_2 = \{q \in Q_C / C \text{ tem alguma aresta com origem em } q \text{ e rótulo } i_1 \times N, \text{ para algum } i_1 \text{ em } E_C\} ,$$

$$Q_3 = \{p \in Q_C / C \text{ tem alguma aresta com término em } p \text{ e rótulo } i_1 \times N, \text{ para algum } i_1 \text{ em } E_C\} \text{ e}$$

$$H_3 = \{i \in \mathbb{N} / 1 \leq i \leq k \text{ e a } i\text{-ésima aresta de } C \text{ tem rótulo } i_1 \times N, \text{ para algum } i_1 \text{ em } E_C\} ;$$

$$I_B = \{t_-\} ,$$

$$F_B = F_C$$

e A_B consiste

- da aresta $(t_-, E_{\xi}^{-1}, N, q_-)$, onde $\{q_-\} = I_C$;
- para cada aresta α em A_C , se α é a i -ésima aresta de C e $\alpha = (q, N, i_2, p)$, com $i_2 \in D_C$, então as arestas

$$(q, N, i_2, (p, i)) \quad \text{e} \quad ((p, i), E_{x_i}^{-1}, N, p)$$

pertencem a A_B .

Graficamente, se

é a i -ésima aresta de C , então em B existirão as arestas

- para cada aresta α em A_C , se α é a i -ésima aresta de C e $\alpha = (q, i_1, N, p)$, com $i_1 \in E_C$, então as arestas

$$(q, N, D_{\S}^{-1}, (q, \sigma_1)) ,$$

$$((q, \sigma_1), E_a, N, (q, a)) \text{ e } ((q, a), N, D_a^{-1}, (q, \sigma_1)), \text{ para cada } a \text{ em } X,$$

$$((q, \sigma_1), E_{\xi}, N, (q, \sigma_2)) ,$$

$$((q, \sigma_2), i_1, N, (p, \sigma_3, i)) ,$$

$$((p, \sigma_3, i), E_{\xi}^{-1}, N, (p, \sigma_4, i)) ,$$

$$((p, \sigma_4, i), N, D_a, (p, a, i)) \text{ e } ((p, a, i), E_a^{-1}, N, (p, \sigma_4, i)), \text{ para cada } a \text{ em } X,$$

$$((p, \sigma_4, i), N, D_{\S}, (p, \sigma_5, i)) \text{ e}$$

$$((p, \sigma_5, i), E_{x_i}^{-1}, N, p)$$

pertencem a A_B .

Graficamente, seja o seguinte trecho em C ,

onde (q, i_1, N, p) é a i -ésima aresta de C

e (q, j_1, N, r) é a j -ésima aresta de C ,

para $1 \leq i, j \leq k$, $i \neq j$ e i_1 e j_1 em E_C .

Então B terá as arestas que apresentamos na *Figura 1*, onde utilizamos um $\square$ ao invés de representar todos os k estados que correspondem a cada um dos x_ℓ em X , $1 \leq \ell \leq k$.

Figura 1

Pode-se verificar que B é uma máquina de Turing reversível, bastando para isso examinar que B e a sua reversa são ambas determinísticas.

Resta-nos provar que $|A| = |B|$. Inicialmente, vamos mostrar que $|C| \subseteq |B|$. Com esta finalidade, demonstramos antes o seguinte resultado.

PROPOSIÇÃO 3 - Seja q em Q_C e $\{q_-\} = I_C$. Para cada passeio $c: q_- \longrightarrow q$ em C e para cada s em Σ_C^* , se $(1, s) |c| = (y_1, y_2)$, para y_1 e y_2 em T_C^* , então existe um passeio $d: t_- \longrightarrow q$ em B , onde $\{t_-\} = I_B$, tal que $(1, s) |d| = (y_1 \xi x, y_2)$, onde $x \in X^*$.

DEMONSTRAÇÃO - Seja um passeio $c: q_- \longrightarrow q$ em C e seja s uma palavra em Σ_C^* tal que

$$(1, s) |c| = (y_1, y_2), \text{ para } y_1 \text{ e } y_2 \text{ em } T_C^*. \quad (8)$$

Queremos mostrar que existe um passeio $d: t_- \longrightarrow q$ em B tal que $(1, s) |d| = (y_1 \xi x, y_2)$, onde $x \in X^*$.

Procedemos por indução no comprimento do passeio c .

Se c é o passeio trivial $c = 1_{q_-}$, então $(1, s) |c| = (1, s)$, ou seja, $y_1 = 1$ e $y_2 = s$.

Logo, $d = (t_-, E_{\xi}^{-1}, N, q_-)$ é um passeio em B de t_- a q_- tal que

$$(1, s) |d| = (\xi, s), \text{ com } x = 1.$$

Suponhamos agora que $c: q_- \longrightarrow q$ é um passeio não degenerado. Neste caso, existem arestas $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ em Λ_C , para algum $m \geq 1$, tais que $c = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m$ e existem u_1 e u_2 em T_C^* tais que

$$(1, s) |c_1| = (u_1, u_2),$$

onde $c_1 = \alpha_1 \dots \alpha_{m-1}$ tem término em algum $p \in Q_C$ e de (8) segue que

$$(u_1, u_2) |\alpha_m| = (y_1, y_2). \quad (9)$$

Então pela hipótese da indução aplicada ao passeio c_1 , existe em B um passeio $d_1: t_- \longrightarrow p$ tal que

$$(1, s) |d_1| = (u_1 \xi x, u_2), \quad (10)$$

onde $x \in X^*$.

Analisamos a seguir cada uma das duas possibilidades para α_m em Λ_C .

- se α_m é a i -ésima aresta de C , $\alpha_m = (p, N, i_2, q)$, para algum i_2 em D_C , então existe em B o passeio $d: t_- \longrightarrow q$,

$$d = d_1 \beta_1 \beta_2,$$

com $\beta_1 = (p, N, i_2, (q, i))$ e $\beta_2 = ((q, i), E_{x_i}^{-1}, N, q)$.

Assim, utilizando (10) segue que

$$\begin{aligned} (1, s) |d| &= (1, s) |d_1| |\beta_1| |\beta_2| \\ &= (u_1 \xi x, u_2) |\beta_1| |\beta_2|. \end{aligned}$$

Mas, de (9) temos que $u_1 = y_1$ e $u_2 i_2 = y_2$.

$$\text{Logo, } (1, s) |d| = (y_1 \xi x, y_2) |\beta_2|$$

$$= (y_1 \xi x x_i, y_2),$$

onde $x x_i \in X^*$.

- se α_m é a i -ésima aresta de $\mathcal{C}$, $\alpha_m = (p, i_1, N, q)$, para algum i_1 em $E_{\mathcal{C}}$ e $x = z_1 z_2 \dots z_{m-1}$, com z_j em X ($1 \leq j \leq m-1$), então sendo

$$d_2 = (p, N, D_{\S}^{-1}, (p, \sigma_1)) ,$$

$$d_3 = ((p, \sigma_1), E_{z_{m-1}}, N, (p, z_{m-1})) ((p, z_{m-1}), N, D_{z_{m-1}}^{-1}, (p, \sigma_1)) \dots$$

$$\dots ((p, \sigma_1), E_{z_1}, N, (p, z_1)) ((p, z_1), N, D_{z_1}^{-1}, (p, \sigma_1)) ,$$

$$d_4 = ((p, \sigma_1), E_{\xi}, N, (p, \sigma_2)) ,$$

$$d_5 = ((p, \sigma_2), i_1, N, (q, \sigma_3 i)) ,$$

$$d_6 = ((q, \sigma_3, i), E_{\xi}^{-1}, N, (q, \sigma_4, i)) ,$$

$$d_7 = ((q, \sigma_4, i), N, D_{z_1}, (q, z_1, i)) ((q, z_1, i), E_{z_1}^{-1}, N, (q, \sigma_4, i)) \dots$$

$$\dots ((q, \sigma_4, i), N, D_{z_{m-1}}, (q, z_{m-1}, i)) ((q, z_{m-1}, i), E_{z_{m-1}}^{-1}, N, (q, \sigma_4, i)) ,$$

$$d_8 = ((q, \sigma_4, i), N, D_{\S}, (q, \sigma_5, i))$$

$$\text{e } d_9 = ((q, \sigma_5, i), E_{x i}^{-1}, N, q) ,$$

resulta que

$$d = d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 d_7 d_8 d_9$$

é um passeio em B de t_- a q e usando (10) e as definições dos passeios d_2 , d_3 e d_4 , obtemos que

$$\begin{aligned} (1,s)|d| &= (1,s)|d_1|\dots|d_9| \\ &= (u_1\xi x, u_2)|d_2|\dots|d_9| \\ &= (u_1\xi x, \$u_2)|d_3|\dots|d_9| \\ &= (u_1\xi, x\$u_2)|d_4|\dots|d_9| \\ &= (u_1, x\$u_2)|d_5|\dots|d_9| \quad . \end{aligned}$$

Mas, de (9) segue que $u_1 i_1 = y_1$ e $u_2 = y_2$.

Então,

$$\begin{aligned} (s,1)|d| &= (y_1, x\$y_2)|d_6|\dots|d_9| \\ &= (y_1\xi, x\$y_2)|d_7||d_8||d_9| \\ &= (y_1\xi x, \$y_2)|d_8||d_9| \\ &= (y_1\xi x, y_2)|d_9| \\ &= (y_1\xi x x_i, y_2) \quad , \end{aligned}$$

onde $xx_i \in X^*$. Assim, temos demonstrado a Proposição 3. ■

Retornando à demonstração do Teorema 1, seja $s \in |C|$. Então, existe em C um passeio $c: q_- \longrightarrow q_+$, onde $\{q_-\} = I_C$ e $q_+ \in F_C$ tal que

$(1,s)|c|=(y,1)$, para algum y em T_C^* .

Logo, pela proposição que acabamos de demonstrar segue que existe em B um passeio $d:t_- \longrightarrow q_+$, onde $\{t_-\} = I_B$ tal que

$(1,s)|d| = (y\xi x,1)$, com $x \in X^*$.

Mas, por construção de B , o estado q_+ pertence a F_B e $y\xi x \in T_B^*$. Portanto, $s \in |B|$ e $|C| \subseteq |B|$. Analogamente, demonstra-se que $|B| \subseteq |C|$. Assim, $|B|=|C|=|A|$ e completamos a demonstração do Teorema 1.

■

EXEMPLO 6 - Consideremos a seguinte máquina de Turing determinística

Pelo Lema 1 obtemos uma máquina de Turing determinística e se

mi-normalizada B tal que $|A| = |B|$.

Utilizando o Lema 2 e red denominando os estados $(q_0, a), (q_0, b), (q_0, \epsilon), (q_1, b)$ e (q_1, ϵ) por q_3, q_4, q_5, q_6 e q_7 , respectivamente, obtemos uma máquina de Turing determinística e normalizada C tal que $|C| = |B|$.

Os números envolvidos por um $\square$ representam uma enumeração das arestas de C .

Aplicando-se o Teorema 1 à máquina de Turing C , obtemos uma máquina de Turing reversível e normalizada $\mathcal{D}$ tal que $|C| = |\mathcal{D}|$.

Na representação gráfica da máquina de Turing $\mathcal{D}$ utilizamos um $\square$ ao invés de exibir todos os 12 estados, sendo que cada estado corresponde a um dos x_i , $1 \leq i \leq 12$.

5. ACOPLAMENTO DE UMA MÁQUINA DE TURING REVERSÍVEL E NORMALIZADA COM A SUA REVERSA.

A máquina de Turing que construímos a seguir será essencial na demonstração dos dois resultados principais desta dissertação.

Seja A uma máquina de Turing reversível e normalizada; seja A' a reversa de A . Está claro que A' também é reversível e normalizada. Denotemos o estado final de A por q_+ . Então, o *acoplamento de A com A'* é a máquina de Turing B com

$$T_B = T_A ,$$

$$\Sigma_B = \Sigma_A ,$$

$$Q_B = Q_A \cup Q_{A'} ,$$

$$I_B = I_A ,$$

$$F_B = F_{A'} ,$$

$$\text{e} \quad A_B = A_A \cup A_{A'} \cup \{(q_+, N, V, q'_+)\} .$$

É imediato que B também é reversível e normalizada. Esquemáticamente, a máquina de Turing B pode ser representada como segue.

Através da próxima proposição descrevemos a relação existente entre as máquinas A e B, ou seja, se (s_0, t_0) , com s_0, t_0 em T_A^* , é uma configuração inicial para A então a cada passeio $d: q_- \rightarrow q_+$ em A está associado o passeio $c: q_- \rightarrow q'_-$ em B tal que $c = d(q_+, N, V, q'_+)d'$ e $(s_0, t_0) \mid c = (s_0, t_0)$; reciprocamente, para cada passeio $c: q_- \rightarrow q'_-$ em B existe um passeio $d: q_- \rightarrow q_+$ em A tal que $c = d(q_+, N, V, q'_+)d'$.

PROPOSIÇÃO 4 - Seja A uma máquina de Turing reversível e normalizada, com $I_A = \{q_-\}$. Seja B o acoplamento de A com a sua reversa A'. Então, para cada palavra s em Σ_A^* , $s \in |A|$ sse B tem um passeio $c: q_- \rightarrow q'_-$ tal que $(\varepsilon q_- s \varepsilon) \mid |c| = \varepsilon q'_- s \varepsilon$.

DEMONSTRAÇÃO - Seja A uma máquina de Turing reversível e normalizada com $I_A = \{q_-\}$ e $F_A = \{q_+\}$; seja A' a reversa de A. Consideremos a máquina de Turing B como sendo o acoplamento de A com A' e seja s uma palavra em Σ_A^* .

Inicialmente, suponhamos que $s \in |A|$. Então, A tem

um passeio $d:q_- \longrightarrow q_+$ tal que

$$(\epsilon q_- s \epsilon) ||d|| = \epsilon t q_+ \epsilon, \text{ para algum } t \text{ em } T_A^*.$$

E pela Proposição 2, o passeio $d':q'_+ \longrightarrow q'_-$ é o reverso de d em A' e

$$(\epsilon t q'_+ \epsilon) ||d'|| = \epsilon q'_- s \epsilon.$$

Mas, os passeios d e d' também são passeios em B . Além disso, a aresta $\alpha = (q_+, N, V, q'_+) \in A_B$. Logo, $c = d\alpha d'$ é um passeio em B com origem em q_- e término em q'_- tal que

$$\begin{aligned} (\epsilon q_- s \epsilon) ||c|| &= (\epsilon q_- s \epsilon) ||d|| ||\alpha|| ||d'|| \\ &= (\epsilon t q_+ \epsilon) ||\alpha|| ||d'|| \\ &= (\epsilon t q'_+ \epsilon) ||d'|| \\ &= \epsilon q'_- s \epsilon. \end{aligned}$$

Reciprocamente, seja s em Σ_A^* e suponhamos que B tem um passeio $c:q_- \longrightarrow q'_-$ tal que

$$(\epsilon q_- s \epsilon) ||c|| = \epsilon q'_- s \epsilon. \quad (11)$$

Mas, por construção de B resulta que existem passeios $d:q_- \longrightarrow q_+$ em A e $d':q'_+ \longrightarrow q'_-$ em A' tais que $c = d\alpha d'$, onde

$\alpha = (q_+, N, V, q'_+) \in A_B$. Logo, de (11) e da Proposição 2 segue que existem palavras x e y em T_A^* tais que

$$(\epsilon q_- s \epsilon) ||d|| = \epsilon x q_+ y \epsilon,$$

$$(\epsilon x q_+ y \epsilon) || \alpha || = \epsilon x q'_+ \epsilon \quad \text{e } y = 1$$

$$\text{e } (\epsilon x q'_+ \epsilon) || d' || = \epsilon q'_- s \epsilon.$$

Assim, A tem um passeio $d: q_- \longrightarrow q_+$ tal que

$$(\epsilon q_- s \epsilon) || d || = \epsilon x q_+ \epsilon, \text{ para algum } x \text{ em } T_A^*, \text{ ou seja,}$$

$$s \in |A|.$$

Concluimos então a demonstração da Proposição 4.

■

CAPÍTULO 3

CASOS RESTRITOS DO PROBLEMA DE CORRESPONDÊNCIA DE POST

Inicialmente, construímos dois morfismos associados a cada máquina de Turing semi-normalizada e provamos que se a máquina é reversível então os morfismos associados são códigos de atraso um. Em seguida, definimos a codificação de uma computação associada a um passeio não degenerado. Esses conceitos são de importância vital para o restante deste trabalho.

Assim, demonstramos o resultado principal deste capítulo que é a indecidibilidade do Problema de Correspondência de Post quando restrito a códigos de atraso um. Além disso, provamos que esses códigos pertencem a $PS \cap SP$.

Podemos observar que as demonstrações de algumas proposições poderiam ser simplificadas, mas o nosso objetivo é

apresentá-las de modo que possam ser utilizadas também na prova do teorema principal do capítulo seguinte.

Finalizando, expomos a condição (decidível, indecidível ou em aberto) de outros casos restritos do Problema de Correspondência de Post.

1. INTRODUÇÃO

Inicialmente vamos enunciar o

Problema de Correspondência de Post:

"Dados morfismos h_1 e h_2 de monóides livres, $h_1, h_2: \Gamma^* \longrightarrow \Delta^*$, determinar se existe ou não uma palavra não vazia w em Γ^* tal que $wh_1 = wh_2$ ".

Alternativamente, o Problema de Correspondência de Post pode ser descrito como segue.

Seja Γ um alfabeto com n símbolos, $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$. Sejam duas n -uplas de palavras não vazias $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ sobre algum alfabeto Δ , de modo que para cada i , $1 \leq i \leq n$, os morfismos h_1 e h_2 são tais que $x_i = \gamma_i h_1$ e $y_i = \gamma_i h_2$. Então, para cada w em Γ^+ , $w = \gamma_{i_1} \gamma_{i_2} \dots \gamma_{i_k}$, com $k \geq 1$ e $1 \leq i_j \leq n$ ($1 \leq j \leq k$), temos que

$$wh_1 = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \quad \text{e} \quad wh_2 = y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_k}.$$

Assim, o Problema de Correspondência de Post consiste em determinar se existe ou não uma sequência de inteiros $i_1, i_2, \dots, i_\ell$ ($\ell \geq 1$), com $1 \leq i_j \leq n$, para cada j ($1 \leq j \leq \ell$), tal que

$$x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_\ell} = y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_\ell}.$$

Podemos observar que o conjunto de soluções da instância do Problema de Correspondência de Post com as n -uplas $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ representa o conjunto $\text{Eq}(h_1, h_2) \setminus \{1\}$.

Este problema, quando h_1 e h_2 são morfismos quaisquer, foi mostrado ser indecidível por *Post* (1946).

Chomsky e Schützenberger (1963) mostraram que este problema permanece indecidível quando um dos morfismos é injetor e *Schützenberger* conjecturou que, mesmo considerando ambos os morfismos injetores, este problema permaneceria indecidível.

Assim, *Lecerf* (1963b) provou que a conjectura de *Schützenberger* é válida ou seja:

TEOREMA 1 - *Lecerf*

O Problema de Correspondência de Post é indecidível mesmo quando restrito a morfismos injetores.

Com a finalidade de demonstrá-lo, *Lecerf* introduziu o conceito de máquinas de Turing reversíveis. Em seguida, pa

ra uma dada linguagem recursivamente enumerável $L \subseteq \Sigma^*$ associou uma máquina de Turing reversível A tal que $|A| = L$ e construiu uma outra máquina de Turing reversível B que é a "concatenação" de A com a sua reversa A' . Então, associou a B dois morfismos injetores h_1 e h_2 e reduziu o Problema da Parada para o Problema de Correspondência de Post com esses morfismos, demonstrando que para cada palavra s em Σ^* , a máquina de Turing A pára com entrada s sse existe uma palavra x na imagem de h_1 tal que $x = xh$, onde $h = h_1^{-1}h_2$; ou seja, Lecerf determinou uma palavra x que fosse igual a sua imagem por h , ao invés de encontrar uma palavra y cujas imagens por h_1 e h_2 fossem iguais. O Teorema segue então do fato de que o Problema da Parada é indecidível. ■

Nós estendemos o resultado de Lecerf, mostrando que o Problema de Correspondência de Post permanece indecidível mesmo quando restringimos ambos os morfismos h_1 e h_2 para serem códigos de atraso um.

Este é o resultado principal deste capítulo; vamos apenas enunciá-lo aqui e demonstrá-lo-emos mais tarde.

TEOREMA 2 - O Problema de Correspondência de Post é indecidível mesmo quando restrito a códigos de atraso um.

2. CONSTRUÇÃO DE MORFISMOS ASSOCIADOS A UMA MÁQUINA DE TURING SEMI-NORMALIZADA

O objetivo desta seção é associar dois morfismos a uma máquina de Turing semi-normalizada e investigar quais são as propriedades apresentadas por esses morfismos caso a máquina de Turing considerada seja reversível.

Seja A uma máquina de Turing semi-normalizada e sejam os alfabetos

$$\Gamma = T_A \cup \{\epsilon, \# \} \cup A_A \cup \bar{T}_A \cup \{\bar{\epsilon}, \bar{\#} \} \cup \bar{Q}_A$$

$$\text{e} \quad \Delta = T_A \cup \{\epsilon, \# \} \cup Q_A \cup \bar{T}_A \cup \{\bar{\epsilon}, \bar{\#} \} \cup \bar{Q}_A,$$

onde ϵ e $\#$ são símbolos distintos que não pertencem a $T_A \cup Q_A$.

Consideremos os morfismos f e $g: \Gamma^* \longrightarrow \Delta^*$, definidos pela Tabela 1, onde σ denota um símbolo em T_A , q e r são elementos de Q_A e (q, i, j, r) , com $i \in E_A$ e $j \in D_A$, representa uma aresta em A_A .

Na verdade, a cada máquina de Turing semi-normalizada A basta considerar o morfismo g , pois o morfismo f corresponde (a menos de "barras" e "linhas") ao morfismo g' associado a máquina de Turing A' , que é a reversa de A . É o que vamos verificar a seguir.

Seja A' a máquina de Turing reversa de A e sejam os alfabetos

γ	γf	γg
σ	$\bar{\sigma}$	σ
$\bar{\sigma}$	σ	$\bar{\sigma}$
ϵ	$\bar{\epsilon}$	ϵ
$\bar{\epsilon}$	ϵ	$\bar{\epsilon}$
$\#$	$\bar{\#}$	$\#$
$\bar{\#}$	$\#$	$\bar{\#}$
(q, E_{σ}, N, r)	$\bar{r}$	σq
(q, N, D_{σ}, r)	$\bar{r}$	$q\sigma$
(q, V, N, r)	$\bar{\epsilon}\bar{r}$	ϵq
(q, N, V, r)	$\bar{r}\bar{\epsilon}$	$q\epsilon$
$(q, E_{\sigma}^{-1}, N, r)$	$\bar{\sigma}\bar{r}$	q
$(q, N, D_{\sigma}^{-1}, r)$	$\bar{r}\bar{\sigma}$	q
(q, N, N, r)	$\bar{r}$	q
$\bar{q}$	q	$\bar{q}$

Tabela 1 - Definição dos morfismos associados a uma máquina de Turing semi-normalizada.

$$\Gamma' = T_A \cup \{\epsilon, \# \} \cup \Lambda_{A'} \cup \bar{T}_A \cup \{\bar{\epsilon}, \bar{\#} \} \cup \bar{Q}_{A'}$$

e
$$\Delta' = T_A \cup \{\epsilon, \# \} \cup Q_{A'} \cup \bar{T}_A \cup \{\bar{\epsilon}, \bar{\#} \} \cup \bar{Q}_{A'}.$$

Consideremos o morfismo $g':(\Gamma')^* \longrightarrow (\Delta')^*$, definido pela *Tabela 2*, onde σ denota um símbolo em T_A , q' e r' são elementos de $Q_{A'}$, e (r', i, j, q') com $i \in E_A$ e $j \in D_A$, representa uma aresta em $\Lambda_{A'}$.

$\gamma \in \Gamma'$	$\gamma g'$
σ	σ
$\bar{\sigma}$	$\bar{\sigma}$
ϵ	ϵ
$\bar{\epsilon}$	$\bar{\epsilon}$
$\#$	$\#$
$\bar{\#}$	$\bar{\#}$
$(r', E_{\sigma}^{-1}, N, q')$	r'
$(r', N, D_{\sigma}^{-1}, q')$	r'
(r', V, N, q')	$\epsilon r'$
(r', N, V, q')	$r' \epsilon$
(r', E_{σ}, N, q')	$\sigma r'$
(r', N, D_{σ}, q')	$r' \sigma$
(r', N, N, q')	r'
$\bar{q}'$	$\bar{q}'$

Tabela 2 - Definição do morfismo g' associado à reversa de uma máquina de Turing semi-normalizada.

Sejam ainda os morfismos:

$$\phi: \Gamma^* \longrightarrow (\Gamma')^*,$$

definido pela *Tabela 3*, onde σ é um símbolo em $T_A \cup \bar{T}_A \cup \{\epsilon, \#, \bar{\epsilon}, \bar{\#}\}$, q é um elemento de Q_A e (q, i, j, r) , com $i \in E_A$ e $j \in D_A$, representa uma aresta em A_A

e $\psi: (\Delta')^* \longrightarrow \Delta^*$,

dado pela *Tabela 4*, onde σ representa um símbolo em $T_A \cup \{\epsilon, \#\}$ e q' é um elemento de $Q_{A'}$.

$\gamma \in \Gamma$	$\gamma\phi$
σ	σ
$\bar{q}$	$\bar{q}'$
(q, i, j, r)	(r', i^{-1}, j^{-1}, q')

Tabela 3 - Definição do morfismo ϕ .

$\delta \in \Delta'$	$\delta\psi$
σ	$\bar{\sigma}$
$\bar{\sigma}$	σ
q'	$\bar{q}$
$\bar{q}'$	q

Tabela 4 - Definição do morfismo ψ

Observemos que ϕ e ψ são bijeções.

Assim, temos imediatamente o próximo resultado.

PROPOSIÇÃO 1 - $f = \phi g' \psi$.

É importante ressaltarmos a dualidade existente entre os morfismos f e g , o que simplificará algumas demonstrações referentes às propriedades de f e g .

A seguir, temos duas observações acerca dos morfismos f e g .

OBSERVAÇÃO 1 - Pode-se verificar que se a máquina de Turing A não for determinística, então o morfismo g poderá não ser injetor. Por exemplo, se A_A contiver as arestas $\alpha_1 = (q, E_\sigma, N, r_1)$ e $\alpha_2 = (q, E_\sigma, N, r_2)$, com $r_1 \neq r_2$, então $\alpha_1 g = \alpha_2 g = \sigma q$ ou se as arestas $\beta_1 = (q, E_\sigma, N, r)$ e $\beta_2 = (q, E_\sigma^{-1}, N, r)$ pertencerem a A_A então $\beta_1 g = (\sigma \beta_2) g = \sigma q$.

OBSERVAÇÃO 2 - Se a máquina de Turing A não for reversível, então A' poderá não ser determinística. Neste caso, o morfismo g' poderá não ser injetor e, conseqüentemente, o morfismo f poderá não ser injetor.

Na Proposição 2 mostramos a recíproca, ou seja, se A é uma máquina de Turing reversível (e, portanto, determinística) e semi-normalizada, então os morfismos f e g são injetores.

Uma outra observação é com relação ao formalismo que adotamos para definirmos uma máquina de Turing. Podemos veri-

ficar que as imagens das arestas por f e por g não precisam indicar se o movimento da cabeça da fita é para a esquerda ou para a direita ou ainda se permanece inalterado, como seria necessário caso estivéssemos utilizando o formalismo usual.

A proposição a seguir apresenta-nos as propriedades dos morfismos associados a uma máquina de Turing reversível e semi-normalizada.

PROPOSIÇÃO 2 - Seja A uma máquina de Turing reversível e semi-normalizada. Então, ambos os morfismos associados a A são códigos de atraso um.

DEMONSTRAÇÃO - Seja A uma máquina de Turing reversível e semi-normalizada. Sejam os alfabetos

$$\Gamma = T_A \cup \{\epsilon, \# \} \cup A_A \cup \bar{T}_A \cup \{\bar{\epsilon}, \bar{\#} \} \cup \bar{Q}_A$$

$$\text{e} \quad \Delta = T_A \cup \{\epsilon, \# \} \cup Q_A \cup \bar{T}_A \cup \{\bar{\epsilon}, \bar{\#} \} \cup \bar{Q}_A.$$

Consideremos os morfismos f e $g: \Gamma^* \longrightarrow \Delta^*$ associados a A e definidos como na Tabela 1.

A demonstração da Proposição 2 segue então das quatro proposições a seguir.

PROPOSIÇÃO 2a - O morfismo g é injetor sobre Γ .

PROPOSIÇÃO 2b - O morfismo g é um código de atraso um.

PROPOSIÇÃO 2c - O morfismo f é injetor sobre Γ .

PROPOSIÇÃO 2d - O morfismo f é um código de atraso um.

Demonstração da Proposição 2a

Queremos mostrar que g é injetor sobre Γ .

Sejam x e y em Γ tais que $xg = yg$.

- Se $xg \in T_A \cup \bar{T}_A \cup \{\epsilon, \bar{\epsilon}, \#, \bar{\#}\} \cup \bar{Q}_A$
segue pela definição de g que $x=y$.
- Se $xg=q$, $q \in Q_A$,
então x é uma das arestas, (q, E_σ^{-1}, N, r) ou (q, N, D_σ^{-1}, r) ou (q, N, N, r) , e x pertence a A_A . Suponhamos que $y \neq x$. Nesse caso, $y = (q, E_\tau^{-1}, N, t)$ ou $y = (q, N, D_\tau^{-1}, t)$ ou $y = (q, N, N, t)$, e y pertence a A_A . Mas, como A é determinística, x e y não podem ocorrer simultaneamente em A_A . Logo, $x=y$.
- Seja $xg = \sigma q$, com σ em T_A e q em Q_A .
Então, $x = (q, E_\sigma, N, r) \in A_A$. Se $y \neq x$, segue que $y = (q, E_\sigma, N, t) \in A_A$ para algum $t \neq r$. O que é um absurdo, pois A é determinística. Logo, $x=y$.
- A demonstração é análoga à anterior quando $xg = \epsilon q$ ou $xg = q\sigma$ ou $x = q\epsilon$, para q em Q_A e σ em T_A .

Assim, g é um morfismo injetor sobre Γ .

Demonstração da Proposição 2b

Queremos mostrar que o morfismo g é um código de atraso um.

Como pela Proposição 2a g é injetor sobre Γ , é suficiente demonstrarmos que g é de atraso um.

Vamos, inicialmente, provar que g é de atraso um da direita para a esquerda.

Sejam u e v em Γg e w em Δ^* tais que $wvu \in (\Gamma g)^*$. Então, existe $k \geq 1$ e $z_1, z_2, \dots, z_k$ em Γg tais que

$$wvu = z_k z_{k-1} \dots z_1. \quad (1)$$

Precisamos mostrar que wv também pertence a $(\Gamma g)^*$. Com esta finalidade, analisamos cada uma das possibilidades para u em Γg .

- Seja $u \in \bar{T}_A \cup \{\bar{e}, \bar{a}, \bar{b}\} \cup \bar{Q}_A$.

Nesse caso, é imediato verificar que $z_1 = u$, pois pela definição de g não existe uma palavra t em Δ^+ tal que $z_1 = tu \in \Gamma g$. Logo, de (1) segue que $wv = z_k \dots z_2 \in (\Gamma g)^*$.

- Seja $u = \sigma$ em T_A .

Suponhamos que $z_1 \neq u$. Então, pela definição de g temos que $z_1 = q\sigma$, para algum q em Q_A e a aresta $\alpha = (q, N, D_\sigma, r) \in A_A$, com $\alpha g = z_1$. E de (1) segue que pode ocorrer um dos seguintes casos:

(i) $v = q$.

Nesse caso, uma das arestas $\beta = (q, E_\delta^{-1}, N, t)$ ou

$\beta=(q,N,D_{\delta}^{-1},t)$ ou $\beta=(q,N,N,t)$ pertence a Λ_A e $\beta g=v$.

(ii) $v=\tau q$, para algum τ em T_A .

Então, a aresta $\beta=(q,E_{\tau},N,t) \in \Lambda_A$ e $\beta g=v$.

(iii) $v=\epsilon q$.

Então, a aresta $\beta=(q,V,N,t) \in \Lambda_A$ e $\beta g=v$.

Mas, qualquer um desses casos contradiz a hipótese de que A é determinística. Logo, $z_1=u$ e de (1) segue que $wv \in (rg)^*$.

- Seja $u=\epsilon$.

A demonstração é obtida de modo análogo a anterior.

- Seja $u=\sigma q$, σ em T_A e q em Q_A .

Então, a aresta $\alpha=(q,E_{\sigma},N,r) \in \Lambda_A$ e $\alpha g=u$. Se $z_1 \neq u$, resulta pela definição de g que $z_1=q$ e uma das arestas $\beta=(q,E_{\tau}^{-1},N,t)$ ou $\beta=(q,N,D_{\tau}^{-1},t)$ ou $\beta=(q,N,N,t)$ pertence a Λ_A , com $\beta g=z_1$. Porém, como A é determinística, é impossível que isto ocorra. Logo, $z_1=u$ e de (1) segue que $wv \in (rg)^*$.

- Seja $u=\epsilon q \in \epsilon Q_A$.

A demonstração é análoga a anterior.

- Seja $u=q \in Q_A$.

Nesse caso, uma das arestas $\alpha=(q,E_{\sigma}^{-1},N,r)$ ou $\alpha=(q,N,D_{\sigma}^{-1},r)$ ou $\alpha=(q,N,N,r)$ pertence a Λ_A e $\alpha g=u$. Suponhamos que $z_1 \neq u$. Então, pela definição de g segue que $z_1=\tau q$, para algum τ em T_A ou $z_1=\epsilon q$. Logo, resulta, respectivamente, que a aresta $\beta=(q,E_{\tau},N,t)$ ou $\beta=(q,V,N,t)$ pertence a Λ_A e $\beta g=z_1$. 0

que contradiz a hipótese de que A é determinística. Portanto, $z_1 = u$ e de (1) segue que $wv \in (rg)^*$.

- Seja $u = q\sigma$, q em Q_A e σ em T_A .

Então, a aresta $\alpha = (q, N, D_\sigma, r) \in A_A$ e $\alpha g = u$. Supondo-se que $z_1 \neq u$, segue pela definição de g e de (1) que $z_1 = \sigma$ e as possibilidades para z_2 são:

(i) $z_2 = q$.

Então, uma das arestas $\beta = (q, E_\delta^{-1}, N, t)$ ou $\beta = (q, N, D_\delta^{-1}, t)$ ou $\beta = (q, N, N, t)$ pertence a A_A e $\beta g = z_2$.

(ii) $z_2 = \tau q$, para algum τ em T_A .

Nesse caso, a aresta $\beta = (q, E_\tau, N, t) \in A_A$ e $\beta g = z_2$.

(iii) $z_2 = \varepsilon q$.

Então, a aresta $\beta = (q, V, N, t) \in A_A$ e $\beta g = z_2$.

Mas, como A é determinística, nenhum dos casos acima pode ocorrer. Logo, $z_1 = u$ e $wv \in (rg)^*$.

- Seja $u = q\varepsilon \in Q_A\varepsilon$.

A demonstração é análoga a anterior.

Assim, provamos que g é de atraso um da direita para a esquerda. De modo análogo, podemos demonstrar que g é de atraso um da esquerda para a direita. Concluimos, então, que o morfismo g é um código de atraso um.

■

Demonstração da Proposição 2c

Queremos mostrar que f é injetor sobre r .

Como a máquina de Turing A é reversível, segue que A' também é reversível; então, pela Proposição 2a o morfismo g' é injetor sobre r' . Mas, como pela Proposição 1 $f = \phi g' \psi$, com ϕ e ψ morfismos bijetores, resulta que f é injetor sobre r . ■

Demonstração da Proposição 2d

Queremos mostrar que o morfismo f é um código de atraso um.

Já que a máquina de Turing A é reversível, segue que A' também é reversível; logo, pela Proposição 2b o morfismo g' é um código de atraso um.

Assim, pela Proposição 1 e por um resultado que apresentamos em seguida, concluímos que f é um código de atraso um. ■

PROPOSIÇÃO 3 - Seja $g: r_2^* \longrightarrow r_3^*$ um código de atraso um. Sejam dois morfismos bijetores $g_1: r_1^* \longrightarrow r_2^*$ e $g_2: r_3^* \longrightarrow r_4^*$. Então, o morfismo $g_1 g g_2$ é um código de atraso um.

DEMONSTRAÇÃO - É suficiente mostrarmos que $g_1 g$ e $g g_2$ são de atraso um.

Vamos demonstrar inicialmente que $g_1 g$ é de atraso um.

Sejam u e v em $r_1 g_1 g$ e w em r_3^* tais que $uvw \in (r_1 g_1 g)^*$.

Como g_1 é sobrejetor segue que $r_1 g_1 = r_2$. Então, u e v pertencem a $r_2 g$ e $uvw \in (r_2 g)^*$.

Mas, como g é de atraso um da esquerda para a direita, concluímos que $vw \in (r_2 g)^* = (r_1 g_1 g)^*$.

Portanto, $g_1 g$ é de atraso um da esquerda para a direita.

Analogamente, demonstra-se que $g_1 g$ é de atraso um da direita para a esquerda.

Agora, demonstramos que gg_2 é de atraso um.

Sejam u e v em $r_2 gg_2$ e w em r_4^* tais que $uvw \in (r_2 gg_2)^*$. Então, $uvw \in (r_2 g)^* g_2$.

Como g_2 é bijetor, segue que $(uvw)g_2^{-1} \in (r_2 g)^*$; ou seja, $(ug_2^{-1})(vg_2^{-1})(wg_2^{-1}) \in (r_2 g)^*$. Além disso, ug_2^{-1} e vg_2^{-1} pertencem a $r_2 g$.

Mas, como g é de atraso um da esquerda para a direita, concluímos que $(vg_2^{-1})(wg_2^{-1}) \in (r_2 g)^*$, isto é, $(vw)g_2^{-1} \in (r_2 g)^*$. Logo, $vw \in (r_2 gg_2)^*$.

Assim, gg_2 é de atraso um da esquerda para a direita.

Analogamente, demonstra-se que gg_2 é de atraso um da direita para a esquerda.

3. CODIFICAÇÃO DE UMA COMPUTAÇÃO

Nesta seção formalizamos um dos conceitos que será

essencial para o restante deste trabalho.

Seja A uma máquina de Turing e sejam os conjuntos $CI_A = \epsilon T_A^* Q_A T_A^* \epsilon$ e $Y_A = \{1, \epsilon\} T_A^* \Lambda_A T_A^* \{1, \epsilon\}$. Lembremos que CI_A é o conjunto das configurações instantâneas de A .

Para cada aresta α de A , $\alpha = (q, i, j, p)$, com $i \in E_A$ e $j \in D_A$, seja

$$[\alpha]: CI_A \longrightarrow Y_A,$$

uma função parcial denominada *função configuração intermediária associada à aresta α* .

Essa configuração intermediária consiste em considerar, para cada uma das fitas de A , a configuração mais curta entre as configurações antes e depois de executar a aresta α .

Assim, para cada configuração instantânea u de A , $u = \epsilon s q t \epsilon$, com $q \in Q_A$ e $s, t \in T_A^*$, de modo que a aresta α seja executável,

$$u[\alpha] = (\epsilon s) \ell_1 \alpha (t \epsilon) \ell_2,$$

onde ℓ_1 e ℓ_2 são funções que dependem de i e de j ,

$$\ell_1: \epsilon T_A^* \longrightarrow \{1, \epsilon\} T_A^* \quad \text{e} \quad \ell_2: T_A^* \epsilon \longrightarrow T_A^* \{1, \epsilon\},$$

dadas por

$$(\epsilon s)^{\ell_1} = \begin{cases} \epsilon(s_i) & , \text{ se } i=E_\sigma, \text{ para algum } \sigma \text{ em } T_A; \\ 1 & , \text{ se } i=V \text{ e } s=1; \\ \epsilon s & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

e

$$(t\epsilon)^{\ell_2} = \begin{cases} (tj)\epsilon, & \text{ se } j=D_\sigma, \text{ para algum } \sigma \text{ em } T_A; \\ 1 & , \text{ se } j=V \text{ e } t=1; \\ t\epsilon & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Se a aresta α não for executável sobre u , então $u[\alpha]=\emptyset$.

A proposição que apresentamos a seguir mostra-nos que, se f e g são os morfismos associados a A , então a imagem por f da configuração intermediária associada a uma aresta α é a configuração instantânea após a execução de α , ao passo que, por g , é a configuração instantânea antes da execução de α .

PROPOSIÇÃO 4 - Seja A uma máquina de Turing semi-normalizada e sejam f e g os morfismos associados a A . Então, para cada aresta α em A_A e para cada configuração instantânea u em CI_A tal que α seja executável, são válidas as identidades:

$$(i) \quad u[\alpha]g = u$$

$$(ii) \quad u[\alpha]f = \overline{u[|\alpha|]}.$$

DEMONSTRAÇÃO - Sejam A uma máquina de Turing semi-normalizada e f e g os morfismos associados a A e definidos como na Tabela 1 (pág.66).

Seja u em CI_A , $u = \epsilon s q t \epsilon$, com $q \in Q_A$, $s = \sigma_1 \dots \sigma_k$, $\sigma_i \in T_A$ ($1 \leq i \leq k$) e $t = \tau_1 \dots \tau_\ell$, $\tau_i \in T_A$ ($1 \leq i \leq \ell$).

Examinamos cada uma das possibilidades para uma aresta α em A_A que seja executável para u , a fim de demonstrarmos que $u[\alpha]g = u$.

- Seja $\alpha = (q, E_\gamma, N, r)$, onde $\gamma = \sigma_k$.

$$\text{Então, } u[\alpha]g = (\epsilon \sigma_1 \dots \sigma_{k-1} (q, E_\gamma, N, r) t \epsilon)g$$

$$= \epsilon \sigma_1 \dots \sigma_{k-1} \sigma_k q t \epsilon$$

$$= \epsilon s q t \epsilon = u.$$

- Seja $\alpha = (q, N, D_\gamma, r)$, onde $\gamma = \tau_1$.

A demonstração é análoga a anterior.

- Seja $\alpha = (q, V, N, r)$.

Nesse caso, $s=1$ e temos que

$$u[\alpha]g = ((q, V, N, r) t \epsilon)g$$

$$= \epsilon q t \epsilon = u.$$

- Seja $\alpha = (q, N, V, r)$.

Nesse caso, $t=1$ e a demonstração segue de modo análogo a anterior.

- Seja $\alpha = (q, N, D_Y^{-1}, r)$, para algum γ em T_A .

$$\text{Então, } u[\alpha]g = (\epsilon s(q, N, D_Y^{-1}, r) t \epsilon)g$$

$$= \epsilon s q t \epsilon = u .$$

- Seja $\alpha = (q, E_Y^{-1}, N, r)$, para algum γ em T_A .

A demonstração é análoga a anterior.

- Seja $\alpha = (q, N, N, r)$.

$$\text{Então, } u[\alpha]g = (\epsilon s(q, N, N, r) t \epsilon)g$$

$$= \epsilon s q t \epsilon = u .$$

A demonstração de que $u[\alpha]f = \overline{u[|\alpha|]}$ segue pela Proposição 1, pelo item (i) aplicado ao morfismo g' e pela Proposição 2 (Capítulo 2).

■

Na seqüência, consideramos para cada aresta α em Λ_A , $\alpha = (q, i, j, p)$, com $i \in E_A$ e $j \in D_A$, uma função que a cada configuração instantânea u de A tal que a aresta α seja executável, associa uma codificação da computação da máquina A a partir da configuração instantânea u e segundo a aresta α .

Vamos formalizar essa definição da *função codificação da computação associada à aresta α* ,

$$[\alpha]: CI_A \longrightarrow Y_A \# \overline{CI}_A ,$$

da seguinte forma. Para cada configuração instantânea u de A tal que a aresta α seja executável,

$$u[\alpha] = u[\alpha] \# u || \alpha || ;$$

caso contrário, $u[\alpha] = \emptyset$.

Podemos estender essa função para cada passeio não de gerado c em A , $c = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m$, com $m \geq 2$ e α_k em Λ_A ($1 \leq k \leq m$), obtendo-se assim a função parcial

$$[c]: CI_A \longrightarrow (Y_A \# \overline{CI_A} \#) * Y_A \# \overline{CI_A} ,$$

de modo que para cada configuração instantânea u de A tal que o passeio c seja executável,

$$u[c] = u[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m] = u_0[\alpha_1] \# u_1[\alpha_2] \# u_2[\alpha_3] \# \dots \# u_{m-1}[\alpha_m],$$

onde $u_0 = u$ e para cada k , ($1 \leq k \leq m-1$), $u_k = u_{k-1} || \alpha_k ||$; caso contrário, $u[c] = \emptyset$.

Denominamos $[c]$ de *função codificação da computação associada ao passeio c* .

EXEMPLO 1 - Seja a máquina de Turing A do Exemplo 1 (Capítulo 2) e consideremos a configuração instantânea $u = \epsilon q_0 abc$ de A e o passeio $c = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ em A , com $\alpha_1 = (q_0, E_a^{-1}, D_a, q_0)$, $\alpha_2 = (q_0, E_a, D_b, q_1)$ e $\alpha_3 = (q_1, V, V, q_2)$. Então, temos que

$$u[c] = u[\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3] = u_0[\alpha_1] \# u_1[\alpha_2] \# u_2[\alpha_3].$$

$$\text{Mas, } u_0[\alpha_1] = u_0[\alpha_1] \# u_0 || \alpha_1 ||$$

$$= (\epsilon q_0 abc) \# (q_0, E_a^{-1}, D_a, q_0) \# (\epsilon q_0 abc) || (q_0, E_a^{-1}, D_a, q_0) ||$$

$$= \epsilon(q_0, E_a^{-1}, D_a, q_0) b \epsilon \bar{a} \bar{q}_0 \bar{b} \bar{\epsilon} ;$$

$$\begin{aligned} u_1[\alpha_2] &= u_1[\alpha_2] \overline{u_1} ||\alpha_2|| \\ &= (\epsilon a q_0 b \epsilon) \overline{((q_0, E_a, D_b, q_1) \# (\epsilon a q_0 b \epsilon) ||(q_0, E_a, D_b, q_1)||)} \\ &= \epsilon(q_0, E_a, D_b, q_1) \epsilon \bar{a} \bar{q}_1 \bar{\epsilon} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e \quad u_2[\alpha_3] &= u_2[\alpha_3] \overline{u_2} ||\alpha_3|| \\ &= (\epsilon q_1 \epsilon) \overline{((q_1, V, V, q_2) \# (\epsilon q_1 \epsilon) ||(q_1, V, V, q_2)||)} \\ &= (q_1, V, V, q_2) \# \bar{\epsilon} \bar{q}_2 \bar{\epsilon}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } u[c] &= \epsilon(q_0, E_a^{-1}, D_a, q_0) b \epsilon \bar{a} \bar{q}_0 \bar{b} \bar{\epsilon} \epsilon(q_0, E_a, D_b, q_1) \epsilon \bar{a} \bar{q}_1 \bar{\epsilon} \# \\ &\quad (q_1, V, V, q_2) \# \bar{\epsilon} \bar{q}_2 \bar{\epsilon}. \end{aligned}$$

Δ

4. A INDECIDIBILIDADE DO PROBLEMA DE CORRESPONDÊNCIA DE POST PARA MORFISMOS QUE SÃO CÓDIGOS DE ATRASO UM

Nesta seção, o nosso objetivo é demonstrar o Teorema 2 que enunciamos no início deste capítulo e o faremos reduzindo o Problema da Pertinência para Linguagens Recursivamente Enumeráveis, que é conhecido ser indecidível, para o Problema de Correspondência de Post restrito a morfismos que são códigos de atraso um. Essa redução é obtida pelo seguinte lema.

LEMA 1 - Para cada máquina de Turing determinística A e para cada palavra s em Σ_A^* , existem efetivamente alfabetos r e Δ e morfismos h_1 e $h_2: r^* \longrightarrow \Delta^*$, ambos sendo códigos de atraso um tais que

$$s \in |A| \quad \text{sse} \quad wh_1 = wh_2, \quad \text{para algum } w \text{ em } r^+.$$

Para demonstrarmos o Lema 1 precisamos antes de alguns resultados auxiliares que apresentamos a seguir através de duas proposições.

PROPOSIÇÃO 5 - Seja A uma máquina de Turing semi-normalizada e sejam f e g os morfismos associados a A . Para cada passeio não degenerado $c: q \longrightarrow r$ em A e para cada configuração instantânea $z = \epsilon sqt \epsilon$ de A , se $(\epsilon sqt \epsilon) || c || = \epsilon urv \epsilon$, para u e v em T_A^* , então $\epsilon sqt \epsilon \# (\epsilon sqt \epsilon) [c] f = (\epsilon sqt \epsilon) [c] g \# \epsilon urv \epsilon$.

DEMONSTRAÇÃO - Sejam A uma máquina de Turing semi-normalizada e f e g os morfismos associados a A .

Sejam $c: q \longrightarrow r$ um passeio não degenerado em A e $z = \epsilon sqt \epsilon$ uma configuração instantânea de A tal que

$$(\epsilon sqt \epsilon) || c || = \epsilon urv \epsilon, \quad \text{para } u \text{ e } v \text{ em } T_A^*. \quad (2)$$

Vamos provar por indução no comprimento do passeio c que

$$\epsilon sqt \epsilon \# (\epsilon sqt \epsilon) [c] f = (\epsilon sqt \epsilon) [c] g \# \epsilon urv \epsilon. \quad (3)$$

Inicialmente, suponhamos que c pertence a Λ_A . Então,

$$(\epsilon sqt \epsilon)[c] = \overline{(\epsilon sqt \epsilon)[c] \# (\epsilon sqt \epsilon) ||c||}$$

e, da Proposição 4 e de (2), obtemos que

$$(\epsilon sqt \epsilon)[c]f = \overline{(\epsilon qst \epsilon) ||c|| \# (\epsilon qst \epsilon) ||c||}$$

$$= \bar{\epsilon} \bar{u} \bar{r} \bar{v} \bar{\epsilon} \bar{H} \epsilon_{ur v \epsilon}$$

$$e \quad (\epsilon sqt \epsilon)[c]g = \overline{\epsilon qst \epsilon \# (\epsilon qst \epsilon) ||c||}$$

$$= \epsilon qst \epsilon \# \bar{\epsilon} \bar{u} \bar{r} \bar{v} \bar{\epsilon} .$$

Logo, a igualdade (3) é válida.

Suponhamos agora que c seja um passeio de comprimento $k \geq 2$, $c = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k$, com $\alpha_i \in \Lambda_A$ ($1 \leq i \leq k$). Seja $d = \alpha_1 \dots \alpha_{k-1}$ e p o término do passeio d . Então, de (2) segue que existem palavras x e y em T_A^* tais que

$$(\epsilon sqt \epsilon) ||d|| = \epsilon x p y \epsilon$$

$$e \quad (\epsilon x p y \epsilon) ||\alpha_k|| = \epsilon_{ur v \epsilon} . \quad (4)$$

Logo, pela hipótese da indução aplicada ao passeio d , obtemos que

$$\epsilon sqt \epsilon \# (\epsilon sqt \epsilon)[d]f = (\epsilon sqt \epsilon)[d]g \bar{H} \epsilon x p y \epsilon . \quad (5)$$

Assim, utilizando (4), (5) e a Proposição 4, obtemos que

$$\begin{aligned}
 \text{esqte}\#(\text{esqte})[c]f &= \\
 &= \text{esqte}\#((\text{esqte})[d]\bar{H}(\text{expye})[\alpha_k])f \\
 &= \text{esqte}\#(\text{esqte})[d]f\#(\text{expye})||\alpha_k||\bar{H}(\text{expye})||\alpha_k|| \\
 &= (\text{esqte})[d]g\bar{H}\text{expye}\#(\text{expye})||\alpha_k||\bar{H}(\text{expye})||\alpha_k|| \\
 &= ((\text{esqte})[d]\bar{H}(\text{expye})[\alpha_k])g\bar{H}(\text{expye})||\alpha_k|| \\
 &= (\text{esqte})[c]g\bar{H}\text{expye}.
 \end{aligned}$$

Ou seja, a igualdade (3) é válida.

Desse modo, concluímos a demonstração da Proposição

5. ■

PROPOSIÇÃO 6 - Sejam A uma máquina de Turing semi-normalizada e f e $g: \Gamma^* \longrightarrow \Delta^*$ os morfismos associados a A , com $\Delta = XU\bar{X}$. Sejam ainda os morfismos

$\underline{b}: \Delta^* \longrightarrow X^*$, definido por $\delta \underline{b} = \bar{\delta} \underline{b} = \delta$, para cada δ em X

e $h_{A_A}: \Gamma^* \longrightarrow A_A^*$, que preserva A_A .

Se existem uma configuração instantânea u de A e palavras w em Γ^* e v em X^+ tais que

$$u\#(w\underline{b}) = (w\underline{b})v,$$

então existem palavras s e t em $(X \setminus \{\#\})^*$ tais que

$$(i) \quad v = s\#t,$$

(ii) ts é uma configuração instantânea de A

e (iii) existe um passeio c em A com $c = wh_A$, se $wh_A \neq 1$; caso contrário, $c = 1_q$, onde q é o estado do controle finito de A quando na configuração instantânea u . Além disso, $u || c || = ts$.

DEMONSTRAÇÃO - Seja A uma máquina de Turing semi-normalizada.

Seja $X = T_A \cup \{\epsilon, \# \} \cup Q_A$ e sejam os alfabetos $\Gamma = T_A \cup \{\epsilon, \# \} \cup \Lambda_A \cup \bar{X}$ e $\Delta = X \cup \bar{X}$.

Consideremos f e $g: \Gamma^* \longrightarrow \Delta^*$ os morfismos associados a A .

Sejam u uma configuração instantânea de A e as palavras w em Γ^* e v em X^+ tais que

$$u\#(wfb) = (wgb)v. \quad (6)$$

Demonstraremos, por indução no comprimento n de w , que existem palavras s e t em $(X \setminus \{\#\})^*$ tais que as condições (i), (ii) e (iii) estejam verificadas.

No decorrer desta demonstração, escrevemos simplesmente h para o morfismo h_A .

Se $n=0$ então $w=1$ e (6) fica reduzido a $u\# = v$. Logo, considerando $s=u$ e $t=1$, as condições (i) (ii) e (iii) ficam trivialmente verificadas.

Suponhamos então que a proposição seja válida para as palavras w de comprimento $n>0$ e vamos provar para uma palavra w de comprimento $n+1$.

Assim, seja $w = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{n+1}$, com γ_i em r ($1 \leq i \leq n+1$). De (6) segue que

$$u\#(\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{n+1})\underline{fb} = (\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{n+1})\underline{gb}v_{n+1}, \quad (7)$$

com $v_{n+1} = v$.

Por outro lado, pelas definições de f e g , também existe alguma palavra v_n em X^+ tal que

$$u\#(\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n)\underline{fb} = (\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n)\underline{gb}v_n. \quad (8)$$

Então, pela hipótese da indução, existem palavras s_n e t_n em $(X \setminus \{\#\})^*$ tais que

$$(i) \quad v_n = s_n \# t_n, \quad (9)$$

$$(ii) \quad t_n s_n \text{ é uma configuração instantânea de } A \quad (10)$$

e

(iii) existe um passeio c_n em A , com

$c_n = (\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n)h$, se $(\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n)h \neq 1$;

caso contrário $c_n = 1_q$, onde q é o es

tado do controle finito de A quando

na configuração instantânea u . Além

$$\text{disso, } u||c_n|| = t_n s_n. \quad (11)$$

Mas, de (7) e (8) resulta que

$$v_n(\gamma_{n+1}\underline{fb}) = (\gamma_{n+1}\underline{gb})v_{n+1}$$

e, utilizando (9) vem que

$$s_n \# t_n(\gamma_{n+1} \underline{fb}) = (\gamma_{n+1} \underline{gb}) v_{n+1}. \quad (12)$$

A seguir, investigamos as várias possibilidades para γ_{n+1} em Γ .

Seja γ_{n+1} em $\Gamma \setminus \{\#, \bar{\#}\}$. Então, $\gamma_{n+1} \underline{gb}$ e $\gamma_{n+1} \underline{fb} \in (X \setminus \{\#\})^+$. Logo, de (12) segue que

$$s_n = (\gamma_{n+1} \underline{gb}) s_{n+1}, \text{ para algum } s_{n+1} \text{ em } (X \setminus \{\#\})^*$$

e considerando $t_{n+1} = t_n(\gamma_{n+1} \underline{fb})$, temos que $t_{n+1} \in (X \setminus \{\#\})^*$.
(13)

Então, utilizando (8), (9) e (13), obtemos que

$$\begin{aligned} u\#(\gamma_1 \dots \gamma_n \gamma_{n+1}) \underline{fb} &= u\#(\gamma_1 \dots \gamma_n) \underline{fb} (\gamma_{n+1} \underline{fb}) \\ &= (\gamma_1 \dots \gamma_n) \underline{gb} v_n (\gamma_{n+1} \underline{fb}) \\ &= (\gamma_1 \dots \gamma_n) \underline{gb} s_n \# t_n(\gamma_{n+1} \underline{fb}) \\ &= (\gamma_1 \dots \gamma_n) \underline{gb} (\gamma_{n+1} \underline{gb}) s_{n+1} \# t_{n+1} \\ &= (\gamma_1 \dots \gamma_{n+1}) \underline{gb} s_{n+1} \# t_{n+1}. \end{aligned}$$

Assim, de (7) segue que a condição (i) está verificada, ou seja, $v_{n+1} = s_{n+1} \# t_{n+1}$.

A seguir, vamos provar que

(ii) $t_{n+1}s_{n+1}$ é uma configuração instantânea de Λ (14)

e (iii) existe um passeio c_{n+1} em Λ , com $c_{n+1}=wh$, se $wh \neq 1$; caso contrário, $c_{n+1}=1_q$, onde q é o estado de controle finito de Λ quando na configuração instantânea u . Além disso,

$$u||c_{n+1}|| = t_{n+1}s_{n+1}. \quad (15)$$

Inicialmente, suponhamos que $\gamma_{n+1} \in \Gamma \setminus (\Lambda_A \cup \{\#,\bar{\#}\})$. Nesse caso, é fácil ver que $\gamma_{n+1}gb = \gamma_{n+1}fb$ e que $\gamma_{n+1}h=1$. Logo, verificamos (14), pois utilizando (10) e (13) obtemos que

$$t_{n+1}s_{n+1} = t_n(\gamma_{n+1}fb)s_{n+1} = t_n(\gamma_{n+1}gb)s_{n+1} = t_ns_n.$$

E, como $(\gamma_1 \dots \gamma_n \gamma_{n+1})h = (\gamma_1 \dots \gamma_n)h$, resulta de (11) que o passeio $c_{n+1}=c_n$ satisfaz (15). De fato, se $wh \neq 1$ então $(\gamma_1 \dots \gamma_n)h \neq 1$ e, conseqüentemente,

$$c_{n+1} = c_n = (\gamma_1 \dots \gamma_n)h = wh;$$

se $wh=1$ então $(\gamma_1 \dots \gamma_n)h=1$ e $c_{n+1}=c_n=1_q$. Além disso, temos que

$$u||c_{n+1}|| = u||c_n|| = t_ns_n = t_{n+1}s_{n+1}.$$

Agora, vamos examinar cada uma das possibilidades para γ_{n+1} em Λ_A , onde q e p denotam elementos de Q_A e σ é um símbolo em T_A .

- Seja $\gamma_{n+1} = (q, E_\sigma, N, p)$. Então,

$$\gamma_{n+1} \underline{gb} = \sigma q \quad \text{e} \quad \gamma_{n+1} \underline{fb} = p.$$

Logo, utilizando (13) obtemos que

$$t_n s_n = t_n (\gamma_{n+1} \underline{gb}) s_{n+1} = t_n \sigma q s_{n+1}$$

$$\text{e} \quad t_{n+1} s_{n+1} = t_n (\gamma_{n+1} \underline{fb}) s_{n+1} = t_n p s_{n+1}.$$

- Seja $\gamma_{n+1} = (q, N, D_\sigma, p)$.

A demonstração é análoga a anterior.

- Seja $\gamma_{n+1} = (q, V, N, p)$. Então,

$$\gamma_{n+1} \underline{gb} = \varepsilon q \quad \text{e} \quad \gamma_{n+1} \underline{fb} = \varepsilon p.$$

Logo, de (13) temos que

$$t_n s_n = t_n (\gamma_{n+1} \underline{gb}) s_{n+1} = t_n \varepsilon q s_{n+1}$$

$$\text{e} \quad t_{n+1} s_{n+1} = t_n (\gamma_{n+1} \underline{fb}) s_{n+1} = t_n \varepsilon p s_{n+1}.$$

Mas, pela hipótese da indução, $t_n s_n$ é uma configuração instantânea de A ; então $t_n = 1$.

- Seja $\gamma_{n+1} = (q, N, V, p)$.

A demonstração é análoga a anterior.

- Seja $\gamma_{n+1} = (q, E_\sigma^{-1}, N, p)$. Então,

$$\gamma_{n+1} \underline{gb} = q \quad \text{e} \quad \gamma_{n+1} \underline{fb} = \sigma p.$$

E, utilizando (13) segue que

$$t_n s_n = t_n(\gamma_{n+1} \underline{gb}) s_{n+1} = t_n q s_{n+1}$$

$$e \quad t_{n+1} s_{n+1} = t_n(\gamma_{n+1} \underline{fb}) s_{n+1} = t_n \sigma p s_{n+1}.$$

- Seja $\gamma_{n+1} = (q, N, D_\sigma^{-1}, p)$

A demonstração é análoga a anterior.

- Seja $\gamma_{n+1} = (q, N, N, p)$. Então,

$$\gamma_{n+1} \underline{gb} = q \quad e \quad \gamma_{n+1} \underline{fb} = p.$$

Logo, de (13) resulta que

$$t_n s_n = t_n(\gamma_{n+1} \underline{gb}) s_{n+1} = t_n q s_{n+1}$$

$$e \quad t_{n+1} s_{n+1} = t_n(\gamma_{n+1} \underline{fb}) s_{n+1} = t_n p s_{n+1}.$$

Mas, em cada um dos casos que acabamos de considerar temos que

$$t_{n+1} s_{n+1} = (t_n s_n) || \gamma_{n+1} || \quad e \quad \gamma_{n+1}^h = \gamma_{n+1}.$$

Assim, segue de (11) que o passeio $c_{n+1} = c_n \gamma_{n+1}$ é tal que se $(\gamma_1 \dots \gamma_n)^h = 1$ então $c_{n+1} = 1_q \gamma_{n+1} = \gamma_{n+1} = (\gamma_1 \dots \gamma_{n+1})^h = 1_{wh}$ e se $(\gamma_1 \dots \gamma_n)^h \neq 1$ então $c_{n+1} = (\gamma_1 \dots \gamma_n)^h \gamma_{n+1} = 1_{wh}$. Além disso, $u || c_{n+1} || = u || c_n || || \gamma_{n+1} || = (t_n s_n) || \gamma_{n+1} || = t_{n+1} s_{n+1}$. Portanto, (14) e (15) estão satisfeitas para s_{n+1} e t_{n+1} obtidas em (13).

Finalmente, suponhamos que $\gamma_{n+1} \in \{\#, \bar{\#}\}$. Então ,
 $\gamma_{n+1}gb = \gamma_{n+1}fb = \#$.

Logo, resulta de (12) que $s_n = 1$. E, considerando
 $s_{n+1} = t_n$ e $t_{n+1} = 1$ segue que s_{n+1} e $t_{n+1} \in (X \setminus \{\#\})^*$. (16)

Então, utilizando (8), (9) e (16) obtemos que

$$\begin{aligned} u\#(\gamma_1 \dots \gamma_{n+1})fb &= u\#(\gamma_1 \dots \gamma_n)fb(\gamma_{n+1}fb) \\ &= (\gamma_1 \dots \gamma_n)gbv_n(\gamma_{n+1}fb) \\ &= (\gamma_1 \dots \gamma_n)gb s_n \# t_n (\gamma_{n+1}fb) \\ &= (\gamma_1 \dots \gamma_n)gb \# s_{n+1} \# \\ &= (\gamma_1 \dots \gamma_n \gamma_{n+1})gb s_{n+1} \# t_{n+1}. \end{aligned}$$

Assim, segue de (7) que $v_{n+1} = s_{n+1} \# t_{n+1}$ e a condição (i) está verificada.

Além disso, resulta de (16) que

$$t_{n+1}s_{n+1} = s_{n+1} = t_n = t_n s_n, \text{ verificando (14).}$$

E segue de (11) que o passeio $c_{n+1} = c_n$ satisfaz (15), já que
 $wh = (\gamma_1 \dots \gamma_n)h$.

Desse modo, finalizamos a demonstração da Proposição

6. ■

Estamos agora em condições de demonstrar o Lema 1 ,
 que enunciamos novamente.

LEMA 1 - Para cada máquina de Turing determinística A e para cada palavra s em Σ_A^* , existem efetivamente alfabetos Γ e Δ e códigos $h_1, h_2: \Gamma^* \longrightarrow \Delta^*$, de atraso um, tais que

$$s \in |A| \iff s s e \quad w h_1 = w h_2, \text{ para algum } w \text{ em } \Gamma^+.$$

DEMONSTRAÇÃO - Seja A uma máquina de Turing determinística e seja s uma palavra em Σ_A^* .

Pelo Teorema 1 (Capítulo 2) existe uma máquina de Turing reversível e normalizada B tal que $|A| = |B|$.

Seja B' a reversa de B e seja C o acoplamento de B com B' . Lembremos que a máquina de Turing C também é reversível e normalizada.

Então, pela Proposição 2 resulta que os morfismos f e g associados a C são códigos de atraso um.

Sejam Γ_1 e Δ_1 os alfabetos tais que $f, g: \Gamma_1^* \longrightarrow \Delta_1^*$. Lembremos que $\Gamma_1 = T_C \cup \{\epsilon, \# \} \cup A_C \cup \bar{T}_C \cup \{\bar{\epsilon}, \bar{\#} \} \cup \bar{Q}_C$ e $\Delta_1 = T_C \cup \{\epsilon, \# \} \cup Q_C \cup \bar{T}_C \cup \{\bar{\epsilon}, \bar{\#} \} \cup \bar{Q}_C$.

Consideremos então os alfabetos

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \{ \vdash, \dashv \} \quad \text{e} \quad \Delta = \Delta_1 \cup \{ \vdash, \dashv \}$$

e os morfismos $h_1, h_2: \Gamma^* \longrightarrow \Delta^*$ definidos pela *Tabela 5*, onde $\{q_{-}\} = I_C = I_B$.

$\gamma \in \Gamma$	γh_1	γh_2
$\vdash$	$\vdash \in q_- s \in \mathbb{H}$	$\vdash$
$\dashv$	$\dashv$	$\bar{H} \in q'_- s \in \dashv$
$\gamma_1 \in \Gamma_1$	$\gamma_1 f$	$\gamma_1 g$

Tabela 5 - Definição dos morfismos h_1 e h_2 .

Pelo fato dos morfismos f e g serem códigos de atraso um e ainda dos símbolos $\vdash$ e $\dashv$ não pertencerem a Γ_1 nem a Δ_1 , resulta que os morfismos h_1 e h_2 são códigos de atraso um.

Podemos observar que o morfismo h_1 depende da palavra s que representa a entrada para a máquina de Turing B , mas h_2 não depende do conteúdo da fita à esquerda no instante em que B , eventualmente, pára com a entrada s . Ou seja, h_1 e h_2 dependem apenas de s , porque estamos considerando a máquina de Turing C , onde $(1, s)$ é a configuração inicial e final de suas fitas, caso $s \in |A| = |B|$; daí a importância dessa máquina C , que é o acoplamento de B com B' .

Resta-nos mostrar então que $s \in |A|$ sse $wh_1 = wh_2$, para algum w em Γ^+ .

Inicialmente, suponhamos que $s \in |A|$. Como $|A| = |B|$, então $s \in |B|$. Mas, C é o acoplamento de B com B' ; então pela Proposição 4 (Capítulo 2) segue que C tem um passeio $c: q_- \longrightarrow q'_-$, onde $\{q_-\} = I_C = I_B$, tal que

$$(\epsilon q_{-s\epsilon})[|c|] = \epsilon q'_{s\epsilon}.$$

Logo, pela Proposição 5 resulta que

$$\epsilon q_{-s\epsilon} \# (\epsilon q_{-s\epsilon})[c]f = (\epsilon q_{-s\epsilon})[c]g \bar{\#} \epsilon q'_{s\epsilon}.$$

Então,

$$\vdash \epsilon q_{-s\epsilon} \# (\epsilon q_{-s\epsilon})[c]f \dashv = \vdash (\epsilon q_{-s\epsilon})[c]g \bar{\#} \epsilon q'_{s\epsilon} \dashv.$$

Mas, pelas definições dos morfismos h_1 e h_2 temos que

$$\vdash \epsilon q_{-s\epsilon} \# = \vdash h_1,$$

$$(\epsilon q_{-s\epsilon})[c]f = (\epsilon q_{-s\epsilon})[c]h_1$$

$$\text{e} \quad \dashv = \dashv h_1;$$

$$\vdash = \vdash h_2,$$

$$(\epsilon q_{-s\epsilon})[c]g = (\epsilon q_{-s\epsilon})[c]h_2$$

$$\text{e} \quad \bar{\#} \epsilon q'_{s\epsilon} \dashv = \dashv h_2.$$

Portanto,

$$(\vdash (\epsilon q_{-s\epsilon})[c] \dashv) h_1 = (\vdash (\epsilon q_{-s\epsilon})[c] \dashv) h_2.$$

Assim, existe $w = \vdash (\epsilon q_{-s\epsilon})[c] \dashv$ em Γ^+ tal que $wh_1 = wh_2$.

Reciprocamente, suponhamos que $wh_1 = wh_2$, para algum w em Γ^+ . Observamos inicialmente que para cada γ em Γ , $\gamma h_1 \neq \gamma h_2$; então $|w| \geq 2$.

Além disso, $\vdash(-)$ é o único elemento de r tal que $\vdash h_1$ e $\vdash h_2$ ($\vdash h_1$ e $\vdash h_2$) são segmentos iniciais (finais) de uma mesma palavra. Logo, $w = \vdash w_1 \vdash$, para algum w_1 em r^+ , já que $(\vdash -)h_1 \neq (\vdash -)h_2$.

Podemos supor ainda, sem perda de generalidade, que nenhum dos dois símbolos, $\vdash$ ou $\vdash$, ocorre em w_1 .

De fato, suponhamos que $\vdash$ ocorra em w_1 ; então w_1 tem uma fatoração $w_1 = w_2 \vdash w_3$, onde $\vdash$ não ocorre em w_2 . Isto implica que

$$(\vdash w_2 \vdash w_3 -)h_1 = (\vdash w_2 \vdash w_3 -)h_2 ,$$

ou seja,

$$\vdash \in q_{-} s \in \#(w_2 h_1) \vdash (w_3 h_1) \vdash = \vdash (w_2 h_2) \# \in q_{-} s \in \vdash (w_3 h_2) \# \in q_{-} s \in \vdash .$$

Mas, como $\vdash$ não ocorre em w_2 , segue que $\vdash$ não ocorre nem em $w_2 h_1$ nem em $w_2 h_2$. Logo,

$$\vdash \in q_{-} s \in \#(w_2 h_1) \vdash = \vdash (w_2 h_2) \# \in q_{-} s \in \vdash .$$

Portanto, $(\vdash w_2 \vdash)h_1 = (\vdash w_2 \vdash)h_2$ e $\vdash$ não ocorre em w_2 .

Analogamente, se $\vdash$ ocorre em w_2 , então w_2 tem um segmento final w_4 tal que nem $\vdash$ e nem $\vdash$ ocorre em w_4 e $(\vdash w_4 \vdash)h_1 = (\vdash w_4 \vdash)h_2$.

Assim, podemos supor que nenhum dos dois símbolos $\vdash$ ou $\vdash$, ocorre em w_1 (isto é, $w_1 \in r_1^+$).

Então, de $(\neg w_1 \rightarrow)h_1 = (\neg w_1 \rightarrow)h_2$ segue que

$$\vdash eq_se \# (w_1 h_1) \rightarrow = \vdash (w_1 h_2) \# eq'_se \rightarrow.$$

Logo,

$$eq_se \# (w_1 f) = w_1 g \# eq'_se.$$

E, pela Proposição 6 resulta que existe um passeio c em C tal que

$$(eq_se) || c || = eq'_se.$$

Como C é o acoplamento de B com B' , obtemos pela Proposição 4 (Capítulo 2) que $s \in |B|$. Mas, $|B| = |A|$. Portanto, $s \in |A|$.

Assim, completamos a demonstração do Lema 1. ■

Finalmente, vamos demonstrar o Teorema 2 que representa o resultado principal deste capítulo.

TEOREMA 2 - O Problema de Correspondência de Post é indecidível mesmo quando restrito a códigos de atraso um.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que o Problema de Correspondência de Post para códigos de atraso um seja decidível.

Sejam A uma máquina de Turing determinística e s uma palavra em Σ_A^* .

Pelo Lema 1, existem alfabetos Γ e Δ e morfismos h_1 e $h_2: \Gamma^* \rightarrow \Delta^*$, ambos sendo códigos de atraso um tais que $s \in |A|$ sse $wh_1 = wh_2$, para algum w em Γ^+ .

Além disso, os morfismos h_1 e h_2 podem ser obtidos efetivamente a partir de A e de s .

Então, existe um algoritmo para determinar se uma palavra pertence ou não a uma linguagem reconhecida por uma máquina de Turing determinística dada. O que é um absurdo, pois o Problema da Pertinência para Linguagens Recursivamente Enumeráveis é indecidível.

Assim, concluímos que o Problema de Correspondência de Post restrito a códigos de atraso um é indecidível.

5. A INDECIDIBILIDADE DO PROBLEMA DE CORRESPONDÊNCIA DE POST PARA CÓDIGOS DE ATRASO UM PERTENCENTES A $PS \cap SP$

Nesta seção fortalecemos o Teorema 2, obtendo o resultado que enunciamos a seguir.

TEOREMA 3 - O Problema de Correspondência de Post permanece indecidível mesmo quando restrito a códigos de atraso um pertencentes a $PS \cap SP$.

Para demonstrá-lo precisamos fortalecer também outros resultados já vistos.

Inicialmente, vamos mostrar que os morfismos construídos na Proposição 2 pertencem a $PS \cap SP$, ou seja:

PROPOSIÇÃO 7 - Seja A é uma máquina de Turing reversível e se mi-normalizada. Então, ambos os morfismos associados a A são códigos de atraso um e pertencem a $PS \cap SP$.

DEMONSTRAÇÃO - É suficiente mostrarmos que os morfismos f e g construídos na demonstração da Proposição 2 pertencem a $PS \cap SP$.

Os morfismos $f, g: \Gamma^* \longrightarrow \Delta^*$,

onde $\Gamma = T_A \cup \{\epsilon, \# \} \cup A_A \cup \bar{T}_A \cup \{\bar{\epsilon}, \bar{\#} \} \cup \bar{Q}_A$

e $\Delta = T_A \cup \{\epsilon, \# \} \cup Q_A \cup \bar{T}_A \cup \{\bar{\epsilon}, \bar{\#} \} \cup \bar{Q}_A$,

estão definidos pela Tabela 1 (pág.66).

Com a finalidade de mostrarmos que $g \in PS$, considere mos o alfabeto

$\theta_1 = T_A \cup \{\epsilon, \# \} \cup Q_1 \cup K_1 \cup K_2 \cup \bar{T}_A \cup \{\bar{\epsilon}, \bar{\#} \} \cup \bar{Q}_A$,

onde $Q_1 = \{q \in Q_A / \text{não existem em } A \text{ arestas com origem em } q \text{ e r\^o-} \text{tulo } E_\sigma \times N, \text{ para algum } \sigma \text{ em } T_A \text{ ou } V \times N\}$,

$K_1 = \{(\sigma, q) \in T_A \times Q_A / \text{ existem em } A \text{ arestas com origem em } q \text{ e r\^o-} \text{tulo } E_\sigma \times N\}$

e $K_2 = \{(\epsilon, q) \in \epsilon \times Q_A / \text{ existem em } A \text{ arestas com origem em } q \text{ e r\^o-} \text{tulo } V \times N\}$.

Sejam os morfismos

$p_1: \Gamma^* \longrightarrow \theta_1^*$ e $s_1: \theta_1^* \longrightarrow \Delta^*$,

definidos pela *Tabela 6*, onde σ denota um símbolo em T_A ; q e r são elementos de Q_A ; (q, i, j, r) , com $i \in E_A$ e $j \in D_A$, representa uma aresta em A_A e (σ, q) e (ϵ, q) pertencem a K_1 e K_2 , respectivamente.

É fácil verificar que o morfismo $p_1(s_1)$ é um prefixo (sufixo) e que $g = p_1 s_1$.

$\gamma \in \Gamma$	γp_1
σ	σ
$\bar{\sigma}$	$\bar{\sigma}$
ϵ	ϵ
$\bar{\epsilon}$	$\bar{\epsilon}$
$\#$	$\#$
$\bar{\#}$	$\bar{\#}$
(q, E_σ, N, r)	(σ, q)
(q, N, D_σ, r)	$q\sigma$
(q, V, N, r)	(ϵ, q)
(q, N, V, r)	$q\epsilon$
(q, E_σ^{-1}, N, r)	q
(q, N, D_σ^{-1}, r)	q
(q, N, N, r)	q
$\bar{q}$	$\bar{q}$

$\theta \in \Theta_1$	θs_1
σ	σ
$\bar{\sigma}$	$\bar{\sigma}$
ϵ	ϵ
$\bar{\epsilon}$	$\bar{\epsilon}$
$\#$	$\#$
$\bar{\#}$	$\bar{\#}$
$q \in Q_1$	q
(σ, q)	σq
(ϵ, q)	ϵq
$\bar{q}$	$\bar{q}$

Tabela 6 - Definição dos morfismos p_1 e s_1 associados a g .

A fim de mostrarmos que g também pertence a SP , consideremos o alfabeto

$$\Theta_2 = T_A \cup \{\epsilon, \bar{\epsilon}\} \cup Q_2 \cup K_3 \cup K_4 \cup \bar{T}_A \cup \{\bar{\epsilon}, \bar{\bar{\epsilon}}\} \cup \bar{Q}_A,$$

onde $Q_2 = \{q \in Q_A / \text{não existem em } A \text{ arestas com origem em } q \text{ e rótulo } N \times D_\sigma, \text{ para algum } \sigma \text{ em } T_A \text{ ou } N \times V\},$

$$K_3 = \{(q, \sigma) \in Q_A \times T_A / \text{ existem em } A \text{ arestas com origem em } q \text{ e rótulo } N \times D_\sigma\}$$

$$\text{e } K_4 = \{(q, \epsilon) \in Q_A \times \epsilon / \text{ existem em } A \text{ arestas com origem em } q \text{ e rótulo } N \times V\}.$$

Sejam os morfismos

$$s_2: \Gamma^* \longrightarrow \Theta_2^* \quad \text{e} \quad p_2: \Theta_2^* \longrightarrow \Delta^*,$$

definidos pela *Tabela 7*, onde σ denota um símbolo em T_A ; q e r são elementos de Q_A ; (q, i, j, r) , com $i \in E_A$ e $j \in D_A$, representa uma aresta em A_A e (q, σ) e (q, ϵ) pertencem a K_3 e K_4 , respectivamente.

Pode-se verificar também que o morfismo $p_2(s_2)$ é um prefixo (sufixo) e que $g = s_2 p_2$.

Desse modo, concluímos que g pertence a $PS \cap SP$.

Precisamos demonstrar ainda que o morfismo f também pertence a $PS \cap SP$. Mas, como A é reversível segue que A' também é reversível e o morfismo g' associado a A' pertence a $PS \cap SP$ (como acabamos de mostrar).

Assim, pela Proposição 1 e pelas Proposições 8 e 9 que apresentamos a seguir, concluímos que f pertence a $PS\Omega SP$.

■

$\gamma \in \Gamma$	γs_2
σ	σ
$\bar{\sigma}$	$\bar{\sigma}$
ϵ	ϵ
$\bar{\epsilon}$	$\bar{\epsilon}$
$\#$	$\#$
$\bar{\#}$	$\bar{\#}$
(q, E_σ, N, r)	σq
(q, N, D_σ, r)	(q, σ)
(q, V, N, r)	ϵq
(q, N, V, r)	(q, ϵ)
(q, E_σ^{-1}, N, r)	q
(q, N, D_σ^{-1}, r)	q
(q, N, N, r)	q
$\bar{q}$	$\bar{q}$

$\theta \in \theta_2$	θp_2
σ	σ
$\bar{\sigma}$	$\bar{\sigma}$
ϵ	ϵ
$\bar{\epsilon}$	$\bar{\epsilon}$
$\#$	$\#$
$\bar{\#}$	$\bar{\#}$
$q \in Q_2$	q
(q, σ)	$q\sigma$
(q, ϵ)	$q\epsilon$
$\bar{q}$	$\bar{q}$

Tabela 7 - Definição dos morfismos s_2 e p_2 associados a g .

PROPOSIÇÃO 8 - Seja $f: r_1^* \longrightarrow r_2^*$ um morfismo bijetor e seja $h: r_2^* \longrightarrow r_3^*$ um prefixo (sufixo). Então, fh é um prefixo (sufixo).

DEMONSTRAÇÃO - Sejam x e y em r_1 tais que

$$xfh = (yfh)z \quad (xfh = z(yfh)), \text{ para algum } z \text{ em } r_3^*.$$

Então,

$$(xf)h = (yf)hz \quad ((xf)h = z(yf)h).$$

Como h é um prefixo (sufixo) e para cada γ em r_1 , $\gamma f \in r_2$, segue que $xf=yf$ e $z=1$.

Mas, f é injetor, logo, $x=y$.

Portanto, fh é um prefixo (sufixo). ■

PROPOSIÇÃO 9 - Seja $h: r_1^* \longrightarrow r_2^*$ um prefixo (sufixo) e seja $f: r_2^* \longrightarrow r_3^*$ um morfismo bijetor. Então, hf é um prefixo (sufixo).

DEMONSTRAÇÃO - Sejam x e y em r_1 tais que

$$xhf = (yhf)z \quad (xhf = z(yhf)), \text{ para algum } z \text{ em } r_3^*.$$

Como f é bijetor, podemos escrever

$$(xh)f = ((yh)(zf^{-1}))f \quad ((xh)f = ((zf^{-1})(yh))f);$$

ou seja,

$$xh = (yh)(zf^{-1}) \quad (xh = (zf^{-1})(yh)) .$$

Mas, como h é um prefixo (sufixo) segue que $x=y$ e $zf^{-1}=1$. Logo, $x=y$ e $z=1$.

Portanto, hf é um prefixo (sufixo). ■

Podemos demonstrar também que os morfismos h_1 e h_2 , dados pelo Lema 1, pertencem a $PS\tilde{N}SP$. Obtemos assim o seguinte resultado.

LEMA 2 - Para cada máquina de Turing determinística A e para cada palavra s em Σ_A^* , existem efetivamente alfabetos Γ e Δ e morfismos $h_1, h_2: \Gamma^* \rightarrow \Delta^*$, que são códigos de atraso um e pertencem a $PS\tilde{N}SP$, tais que

$$s \in |A| \quad \text{sse} \quad wh_1 = wh_2, \text{ para algum } w \text{ em } \Gamma^+.$$

DEMONSTRAÇÃO - Basta mostrarmos que os morfismos h_1 e h_2 , construídos na demonstração do Lema 1, pertencem a $PS\tilde{N}SP$.

Como foi visto, os morfismos h_1 e h_2 são extensões, respectivamente, dos morfismos f e g associados à máquina de Turing C que é o acoplamento de B com B' , onde B é a máquina de Turing reversível e normalizada equivalente a A .

Os morfismos f e g estão definidos em Γ_1^* com valores em Δ_1^* , onde

$$\Gamma_1 = T_C \cup \{e, \# \} \cup A_C \cup \bar{T}_C \cup \{\bar{e}, \bar{\#} \} \cup \bar{Q}_C$$

$$e \quad \Delta_1 = T_C \cup \{\varepsilon, \bar{\varepsilon}\} \cup Q_C \cup \bar{T}_C \cup \{\bar{\varepsilon}, \bar{\bar{\varepsilon}}\} \cup \bar{Q}_C .$$

Pela Proposição 7 segue que os morfismos f e g pertencem a $PS \cap SP$. Nesse caso, existem alfabetos $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ e θ_4 , morfismos prefixos

$$p_1: \Gamma_1^* \longrightarrow \theta_1^*, \quad p_2: \theta_2^* \longrightarrow \Delta_1^*, \quad p_3: \Gamma_1^* \longrightarrow \theta_3^* \text{ e } p_4: \theta_4^* \longrightarrow \Delta_1^*$$

e morfismos sufixos

$$s_1: \theta_1^* \longrightarrow \Delta_1^*, \quad s_2: \Gamma_1^* \longrightarrow \theta_2^*, \quad s_3: \theta_3^* \longrightarrow \Delta_1^* \text{ e } s_4: \Gamma_1^* \longrightarrow \theta_4^*$$

tais que $f = p_1 s_1 = s_2 p_2$ e $g = p_3 s_3 = s_4 p_4$.

Os morfismos h_1 e h_2 estão definidos em Γ^* com valores em Δ^* , onde

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \{\vdash, \dashv\} \quad \text{e} \quad \Delta = \Delta_1 \cup \{\vdash, \dashv\} .$$

Consideremos então os alfabetos

$$\Xi_i = \theta_i \cup \{\vdash, \dashv\} \quad , \text{ para cada } i \quad , \quad 1 \leq i \leq 4$$

e os morfismos

$$\begin{aligned} \phi_1: \Gamma^* &\longrightarrow \Xi_1^* & , & & \psi_1: \Xi_1^* &\longrightarrow \Delta^* & , \\ \psi_2: \Gamma^* &\longrightarrow \Xi_2^* & , & & \phi_2: \Xi_2^* &\longrightarrow \Delta^* & , \\ \phi_3: \Gamma^* &\longrightarrow \Xi_3^* & , & & \psi_3: \Xi_3^* &\longrightarrow \Delta^* & , \\ \text{e } \psi_4: \Gamma^* &\longrightarrow \Xi_4^* & , & & \phi_4: \Xi_4^* &\longrightarrow \Delta^* & , \end{aligned}$$

definidos pelas Tabelas 8 a 12 .

$\gamma \in \Gamma$	$\gamma\phi_1$	$\gamma\psi_2$	$\gamma\phi_3$	$\gamma\psi_4$
$\vdash$	$\vdash \varepsilon q_s \varepsilon \#$	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$
$\dashv$	$\dashv$	$\dashv$	$\dashv$	$\bar{w} \varepsilon q'_s \varepsilon \dashv$
$\gamma_1 \in \Gamma_1$	$\gamma_1 p_1$	$\gamma_1 s_2$	$\gamma_1 p_3$	$\gamma_1 s_4$

Tabela 8 - Definição dos morfismos ϕ_1 , ψ_2 , ϕ_3 e ψ_4 .

$\theta \in \Xi_1$	$\theta\psi_1$
$\vdash$	$\vdash$
$\dashv$	$\dashv$
$\theta_1 \in \Theta_1$	$\theta_1 s_1$

Tabela 9 - Definição do morfismo ψ_1

$\theta \in \Xi_2$	$\theta\phi_2$
$\vdash$	$\vdash \varepsilon q_s \varepsilon \#$
$\dashv$	$\dashv$
$\theta_2 \in \Theta_2$	$\theta_2 p_2$

Tabela 10 - Definição do morfismo ϕ_2 .

$\theta \in \Xi_3$	$\theta\psi_3$
$\vdash$	$\vdash$
$\dashv$	$\bar{w} \varepsilon q'_s \varepsilon \dashv$
$\theta_3 \in \Theta_3$	$\theta_3 s_3$

Tabela 11 - Definição do morfismo ψ_3 .

$\theta \in \Xi_4$	$\theta\phi_4$
$\vdash$	$\vdash$
$\dashv$	$\dashv$
$\theta_4 \in \Theta_4$	$\theta_4 p_4$

Tabela 12 - Definição do morfismo ϕ_4 .

Pode-se verificar que os morfismos ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 e ϕ_4 (ψ_1, ψ_2, ψ_3 e ψ_4) são prefixos (sufixos) e que $h_1 = \phi_1 \psi_1 = \psi_2 \phi_2$ e $h_2 = \phi_3 \psi_3 = \psi_4 \phi_4$. Portanto, h_1 e h_2 pertencem a $PS \cap SP$. ■

Demonstração do Teorema 3

É análoga à demonstração do Teorema 2, utilizando-se o Lema 2 no lugar do Lema 1. ■

6. A CONDIÇÃO DE OUTRAS RESTRICÇÕES DO PROBLEMA DE CORRESPONDÊNCIA DE POST

O Problema de Correspondência de Post quando um dos morfismos é um prefixo foi mostrado ser indecidível por Cousineau (comunicação pessoal) e quando ambos os morfismos são prefixos também foi provado que é indecidível por Cousineau e Vidal-Naquet (comunicação pessoal). Por dualidade, o resultado segue para morfismos sufixos.

Porém, outras questões ainda permanecem em aberto, como por exemplo, o Problema de Correspondência de Post quando restrito a morfismos biprefixos ou quando os morfismos são elementares.

Por outro lado, o Problema de Correspondência de Post foi mostrado ser decidível em mais dois casos.

TEOREMA 4 - Karhumäki e Simon (1979).

O Problema de Correspondência de Post é decidível quando um dos morfismos é periódico.

Obs.: Dizemos que um morfismo $h:A^* \rightarrow B^*$ é *periódico* se

$Ah \subseteq z^*$ para alguma palavra z em B^* .

TEOREMA 5 - Ehrenfeucht, Karhumäki e Rozenberg (1982).

O Problema de Correspondência de Post com listas consistindo de duas palavras é decidível.

CAPÍTULO 4

REPRESENTAÇÃO DE LINGUAGENS RECURSIVAMENTE ENUMERÁVEIS

A finalidade deste capítulo é apresentar um dos resultados principais deste trabalho que é a representação de uma linguagem recursivamente enumerável como a imagem homomórfica de um conjunto-igualdade minimal de dois códigos h_1 e h_2 , sendo que h_1 é de atraso um da esquerda para a direita e h_2 é de atraso um da direita para a esquerda. Em seguida, verificamos que h_1 e h_2 pertencem a PS .

Além disso, apresentamos também outras representações de linguagens recursivamente enumeráveis.

1. UMA REPRESENTAÇÃO DE LINGUAGENS RECURSIVAMENTE ENUMERÁVEIS ATRAVÉS DE CÓDIGOS DE ATRASO UM EM SENTIDOS OPOSTOS

Recentemente, várias representações de linguagens recursivamente enumeráveis, utilizando conjuntos-igualdade de morfismos de monóides livres, têm sido apresentadas. Um primeiro resultado neste sentido é o de Salomaa (1978).

TEOREMA 1 - Salomaa

Para cada linguagem recursivamente enumerável $L \subseteq \Sigma^*$, existem efetivamente morfismos $h_1, h_2: \Gamma^* \longrightarrow \Delta^*$ e uma função $g: \Gamma^* \longrightarrow \Sigma^*$ computada por uma dgsm (máquina sequencial generalizada determinística) tais que $L = (Eq(h_1, h_2))g$.

■

Culik (1979b) fortaleceu essa representação, mostrando que a dgsm g pode ser restrita a um morfismo h_Σ que preserve Σ se o conjunto-igualdade de h_1 e h_2 for substituído pelo conjunto-igualdade minimal de h_1 e h_2 .

TEOREMA 2 - Culik

Para cada linguagem recursivamente enumerável $L \subseteq \Sigma^*$, existem efetivamente um morfismo $h_\Sigma: \Gamma^* \longrightarrow \Sigma^*$, que preserva Σ e dois morfismos $h_1, h_2: \Gamma^* \longrightarrow \Delta^*$ tais que $L = (eq(h_1, h_2))h_\Sigma$.

Apresentamos a seguir uma idéia geral da demonstração feita por Culik.

São construídos dois morfismos h_1 e $h_2: \Gamma^* \longrightarrow \Delta^*$ tais

que uma palavra w em Γ^* pertence a $eq(h_1, h_2)$ sse w é uma codificação de uma derivação de alguma palavra s em $L \subseteq \Sigma^*$. Então, aplica-se o morfismo h_Σ a w , obtendo-se s .

Podemos notar a diferença fundamental de h_1 e h_2 com relação aos morfismos construídos para a demonstração da indecidibilidade do Problema de Correspondência de Post (Lema 1 - Capítulo 3):

h_1 e h_2 são independentes de qualquer palavra s em L .

Seja $G=(N, \Sigma, S, P)$ uma gramática do tipo 0 tal que $L=L(G)$, onde N é o conjunto de não-terminais, Σ é o conjunto de terminais, $P \subseteq (N \cup \Sigma)^* N (N \cup \Sigma)^* \times (N \cup \Sigma)^*$ é o conjunto de produções e $S \in N$ é o símbolo inicial.

Para que toda palavra em $L(G)$ tenha uma derivação de comprimento ímpar, supomos que P tenha a produção (S, S) .

Sejam $\Xi = \{\#\} \cup N \cup \Sigma \cup \{ \langle \alpha, \beta \rangle / (\alpha, \beta) \in P \}$,

$$\bar{\Xi} = \{ \bar{\sigma} / \sigma \in \Xi \} \text{ e } \hat{\Xi} = \{ \hat{\sigma} / \sigma \in \Sigma \}.$$

Considere os alfabetos

$$\Gamma = \Xi \cup \bar{\Xi} \cup \hat{\Xi} \cup \{ \vdash, \$, a, c, d \}$$

e

$$\Delta = \Xi \cup \bar{\Xi} \cup \{ a, b, c, d, \vdash, \dashv \}$$

e dois morfismos $h_1, h_2: \Gamma^* \longrightarrow \Delta^*$ definidos pela Tabela 1.

$\gamma \in \Gamma$	γh_1	γh_2
$\left. \begin{array}{l} \vdash \\ \sigma \\ \bar{\sigma} \end{array} \right\} \sigma \in N \cup \Sigma \cup \{H\}$	$\begin{array}{l} \vdash SH \\ \bar{\sigma} \\ \sigma \end{array}$	$\begin{array}{l} \vdash \\ \sigma \\ \bar{\sigma} \end{array}$
$\left. \begin{array}{l} \langle \alpha, \beta \rangle \\ \overline{\langle \alpha, \beta \rangle} \end{array} \right\} (\alpha, \beta) \in P$	$\begin{array}{l} \bar{\beta} \\ \beta \end{array}$	$\begin{array}{l} \alpha \\ \bar{\alpha} \end{array}$
$\$$	$\neg b$	H
$\hat{\sigma}, \sigma \in \Sigma$	ab	$\bar{\sigma}$
a	1	ba
c	c	$\neg$
d	d	bcd

Tabela 1 - Definição dos morfismos h_1 e h_2

Seja o morfismo $h_0: \Gamma^* \longrightarrow \Sigma^*$ definido por

$\hat{\sigma} h_0 = \sigma$, para cada σ em Σ

e $\sigma h_0 = 1$, para cada σ em $\Gamma \setminus \hat{\Sigma}$.

Se $s \in L$, a gramática G tem uma derivação de comprimento n para s , com n ímpar,

$$S = s_0 \xRightarrow{G} s_1 \xRightarrow{G} s_2 \xRightarrow{G} \dots \xRightarrow{G} s_n = s,$$

onde, para cada i ($0 \leq i \leq n-1$), $s_i \Rightarrow s_{i+1}$ é obtida usando uma produção $p_{k_i} = (\alpha_i, \beta_i)$ de $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$.

Então, existem u_i e v_i tais que

$$s_i = u_i \alpha_i v_i \quad (0 \leq i \leq n-1)$$

$$e \quad s_{i+1} = u_i \beta_i v_i \quad (0 \leq i \leq n-1) .$$

Seja então a palavra w em Γ^+ da forma

$$w = \vdash \langle S, \beta_0 \rangle \# \bar{u}_1 \langle \bar{\alpha}_1, \beta_1 \rangle \bar{v}_1 \# u_2 \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle v_2 \# \bar{u}_3 \langle \bar{\alpha}_3, \beta_3 \rangle \bar{v}_3 \# \dots \\ \dots \# u_{n-1} \langle \alpha_{n-1}, \beta_{n-1} \rangle v_{n-1} \$ \hat{s}_n ca^{|s_n|}_d .$$

Portanto, como mostrado na *Figura 1* temos que

$wh_1 = wh_2$ e para cada u em Γ^+ , se $w = uv$, para v em Γ^+ , então $uh_1 \neq uh_2$.

Além disso, $wh_0 = s$. Assim, $L \subseteq (eq(h_1, h_2))h_0$.

Reciprocamente, se $w \in eq(h_1, h_2)$ então w deve ser da forma $w = \vdash z \$ \hat{s} ca^{|s|}_d$, para algum z em $(\Xi \cup \bar{\Xi})^*$ e s em Σ^* tal que $S \xRightarrow[G]{*} s$. Logo, $(eq(h_1, h_2))h_0 \subseteq L$.

Na demonstração acima, trocando-se Σ por $\hat{\Sigma}$ e vice-versa, podemos utilizar o morfismo h_{Σ} do enunciado, ao invés do morfismo h_0 .

■

Dado o resultado de Lecerf quanto à indecidibilidade do Problema de Correspondência de Post para morfismos injetores, era natural investigar se o Teorema 2 continuaria válido

Figura 1 - Uma palavra w em $eq(h_1, h_2)$ e as imagens correspondentes por h_1 e h_2

do mesmo quando h_1 e h_2 fossem injetores. Ou seja,

"para cada linguagem recursivamente enumerável L existem efetivamente um morfismo h_0 e dois morfismos injetores h_1 e h_2 tais que $L = (eq(h_1, h_2))h_0$?"

Uma resposta afirmativa para esta pergunta constitui um dos resultados principais desta dissertação e o objetivo deste capítulo é demonstrá-lo. Porém, faremos antes breves considerações sobre algumas tentativas que realizamos e as dificuldades encontradas que, de certa forma, justificam a solução que adotamos na demonstração desse problema.

Inicialmente, utilizamos uma idéia semelhante ao acoplamento de uma máquina de Turing com a sua reversa, considerando para a gramática $G = (N, \Sigma, S, P)$, que gera L , a gramática análoga correspondente $G' = (N, \Sigma, S, P')$ tal que

$L = L(G') = \{x \in \Sigma^* / x \xRightarrow{G'} *S\}$. Porém, os morfismos que obtivemos ainda não eram injetores.

Quando utilizamos gramáticas o ponto crucial é que podem existir ambas as produções (α, β) e (α, γ) , com $\beta \neq \gamma$ ou (α, β) e (γ, β) , com $\alpha \neq \gamma$, fazendo com que os morfismos h_2 e h_1 , respectivamente, não sejam injetores.

Assim, sem o emprego de gramáticas, obtivemos uma demonstração que apresentamos a seguir.

Seja L uma linguagem recursivamente enumerável e seja A uma máquina de Turing determinística que reconhece L , is

to $\tilde{e}$, $|A| = L$. Então, pelo Teorema 1 (Capítulo 2) existe uma máquina de Turing reversível e normalizada B , equivalente a A , com $I_B = \{z_-\}$.

Seja C o acoplamento de B com a sua reversa B' .

Lembremos que C também é reversível e normalizada, e observemos que $\Sigma_A = \Sigma_B = \Sigma_C = \Sigma$.

Podemos, então, associar à máquina de Turing C dois códigos f e g . Com isto, para cada palavra s em Σ^* , existem dois códigos h_1 e h_2 que são extensões de f e g , respectivamente (como no Lema 1 do Capítulo 3). Mas, estamos interessados em morfismos h_0, h_1 e h_2 tais que qualquer que seja a palavra s em Σ^* (isto é, a entrada para a máquina C),

$s \in L$ sse $s = wh_0$, para algum w em $\text{eq}(h_1, h_2)$.

Ou seja, h_1 e h_2 não devem depender de nenhuma palavra s em Σ^* . Para isso devemos construir uma máquina de Turing que seja capaz de gerar cada uma das palavras em Σ^* , a partir da palavra vazia como entrada.

Consideremos então uma máquina de Turing reversível e semi-normalizada $\mathcal{D}$, com $I_{\mathcal{D}} = \{q_-\}$, $F_{\mathcal{D}} = \{q_+\}$ e que enumera as palavras de Σ^* de modo que, partindo com a configuração inicial de suas fitas igual a $(1,1)$, sempre que o seu controle finito se encontrar no estado q_+ , a configuração correspondente de suas fitas será $(1,s)$, para alguma palavra s em Σ^* . Além disso, $\mathcal{D}$ pode ser construída de modo a apresentar apenas uma aresta com origem em q_+ e cujo rótulo seja $N \times N$. As palavras

enumeradas por $\mathcal{D}$ são as reversas daquelas obtidas em ordem lexicográfica.

Denotando-se os elementos do alfabeto Σ por $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, para algum $n \geq 1$, podemos representar graficamente a máquina de Turing $\mathcal{D}$ e a sua reversa $\mathcal{D}'$ através da *Figura 2*.

Figura 2 - A máquina de Turing reversível e semi-normalizada $\mathcal{D}$ que enumera Σ^* e a sua reversa $\mathcal{D}'$

É imediato verificar que $\mathcal{D}$ apresenta as propriedades descritas

Desse modo, uma computação cuja codificação tenha como imagem por h_0 uma palavra s em L , consistirá em, inicialmente, processar a máquina $\mathcal{D}$ com a configuração inicial de suas fitas igual a $(1,1)$ até gerar alguma palavra s em Σ^* , isto é, até que a configuração de suas fitas seja $(1,s)$. Então, executa-se a máquina $\mathcal{C}$, com $(1,s)$ como a configuração inicial de suas fitas. $\mathcal{C}$ atingirá o seu estado final com a configuração de suas fitas igual a inicial sse s pertencer a L . Se isto ocorrer, executa-se a máquina $\mathcal{D}'$ partindo-se com a configuração de suas fitas igual a $(1,s)$. $\mathcal{D}'$ efetuará a computação reversa daquela executada por $\mathcal{D}$, atingindo o seu estado final tendo $(1,1)$ como a configuração de suas fitas.

Assim, com esse objetivo, construímos uma máquina de Turing S , "concatenando-se" as máquinas $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}'$ através de três novas arestas. Então, a extensão dos morfismos associados a S não mais dependerão de nenhuma palavra s em Σ^* , já que a entrada para S é a palavra vazia.

Descrevemos a seguir a máquina de Turing S :

$$T_S = T_{\mathcal{D}} \cup T_{\mathcal{C}} ,$$

$$\Sigma_S = \Sigma ,$$

$$Q_S = Q_{\mathcal{D}} \cup Q_{\mathcal{C}} \cup Q_{\mathcal{D}'} \cup \{\lambda\} ,$$

onde $Q_{\mathcal{D}} \cap Q_{\mathcal{C}} = \emptyset$ e λ é um novo estado;

$$I_S = I_D = \{q_-\} ,$$

$$F_S = F_{D'} = \{q'_-\}$$

$$e \quad E_S = E_D \cup E_C \cup E_{D'} \cup \{\eta, \mu, \nu\} ,$$

$$\text{com } \eta = (q_+, N, N, z_-) , \text{ onde } \{q_+\} = F_D \text{ e } \{z_-\} = I_C ,$$

$$\mu = (z'_-, N, N, \lambda) , \text{ onde } \{z'_-\} = F_C$$

$$e \quad \nu = (\lambda, N, N, q'_+) , \text{ onde } \{q'_+\} = I_{D'} .$$

Esquemáticamente, podemos representar a máquina de Turing S como segue (*Figura 3*).

Figura 3 - Um esquema da máquina de Turing S .

Podemos observar que S é uma máquina de Turing semi-normalizada, mas não é determinística e nem reversível. O não determinismo de S resulta da existência em A_S das arestas $\eta = (q_+, N, N, z_-)$ e (q_+, N, N, p) , que é a única aresta de D com origem em q_+ , para algum p em Q_D . S não é reversível, pois existem em A_S as arestas $\nu = (\lambda, N, N, q'_+)$ e (p', N, N, q'_+) .

Agora, vamos associar a S dois morfismos e examinar quais são as propriedades que eles apresentam.

Sejam os alfabetos

$$\Gamma_1 = T_S \cup \{\epsilon, \# \} \cup A_S \cup \bar{T}_S \cup \{\bar{\epsilon}, \bar{\#} \} \cup \bar{Q}_S$$

$$\text{e} \quad \Delta_1 = T_S \cup \{\epsilon, \# \} \cup Q_S \cup \bar{T}_S \cup \{\bar{\epsilon}, \bar{\#} \} \cup \bar{Q}_S,$$

onde $\{\epsilon, \# \} \cap T_S = \emptyset$.

Consideremos os morfismos f e $g: \Gamma_1 \longrightarrow \Delta_1^*$, associados a S e definidos como no Capítulo 3.

Devemos ressaltar que as restrições de f e g a cada uma das máquinas $\mathcal{D}, \mathcal{C}$ ou $\mathcal{D}'$ correspondem exatamente aos morfismos associados a cada uma delas. Portanto, embora f e g não sejam injetores, resulta pela Proposição 2 (Capítulo 3) que f e g restritos a $\mathcal{D}$, a $\mathcal{C}$ ou a $\mathcal{D}'$ são códigos de atraso um.

Sejam os alfabetos $\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \{\vdash, \dashv\}$ e $\Delta_2 = \Delta_1 \cup \{\vdash, \dashv\}$ e os morfismos f_1 e $g_1: \Gamma_2^* \longrightarrow \Delta_2^*$, extensões dos morfismos f e g , respectivamente. Definimos f_1 e g_1 pela Tabela 2, na qual σ denota um símbolo em T_S , q e r são elementos de Q_S e (q, i, j, r) representa uma aresta em A_S .

Observemos também a importância fundamental da máquina de Turing $\mathcal{D}$, fazendo com que os morfismos f_1 e g_1 independam de qualquer palavra em Σ^* ; o que não ocorria com os morfismos h_1 e h_2 na demonstração do Lema 1 (Capítulo 3).

Como já vimos, a máquina de Turing S não é determi-

$\gamma \in \Gamma_2$	γf_1	γg_1
σ	$\bar{\sigma}$	σ
$\bar{\sigma}$	σ	$\bar{\sigma}$
ε	$\bar{\varepsilon}$	ε
$\bar{\varepsilon}$	ε	$\bar{\varepsilon}$
$\#$	$\bar{\#}$	$\#$
$\bar{\#}$	$\#$	$\bar{\#}$
(q, E_σ, N, r)	$\bar{r}$	σq
(q, N, D_σ, r)	$\bar{r}$	$q\sigma$
(q, V, N, r)	$\bar{\varepsilon}\bar{r}$	εq
(q, N, V, r)	$\bar{r}\bar{\varepsilon}$	$q\varepsilon$
(q, E_σ^{-1}, N, r)	$\bar{\sigma}\bar{r}$	q
(q, N, D_σ^{-1}, r)	$\bar{r}\bar{\sigma}$	q
(q, N, N, r)	$\bar{r}$	q
$\bar{q}$	q	$\bar{q}$
$\vdash$	$\vdash \varepsilon q _ \varepsilon \#$	$\vdash$
$\dashv$	$\dashv$	$\bar{\#} \varepsilon q _ \varepsilon \dashv$

Tabela 2 - Definição dos morfismos f_1 e g_1 , extensões ,
respectivamente, dos morfismos f e g associaa
dos a S .

nística e nem reversível, e, de fato, os morfismos f_1 e g_1 não são injetores. Então, sem efetuar alterações em S , vamos construir, a partir dos morfismos f_1 e g_1 , dois novos morfismos h_1 e h_2 , respectivamente, que sejam injetores.

Sejam os alfabetos

$$\Gamma = \Gamma_2 \cup \bar{\Sigma} \cup \bar{\Sigma} \cup \{\bar{\epsilon}, \bar{H}, \bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}, \bar{H}\}$$

e
$$\Delta = \Delta_2 \cup \{\phi, \phi\},$$

onde ϕ e ϕ são símbolos distintos entre si e não pertencem a Δ_2 .

Sejam os morfismos h_1 e $h_2: \Gamma^* \longrightarrow \Delta^*$, definidos pela *Tabela 3*, onde σ denota um símbolo em T_S ; $q, r, \lambda, z_-, z_+, q_+$ e q'_+ são elementos de Q_S e (q, i, j, r) , com $i \in E_S$ e $j \in D_S$ representa uma aresta em A_S .

Precisamos mostrar então que os morfismos h_1 e h_2 são injetores, sendo que h_1 é de atraso um da esquerda para a direita e h_2 da direita para a esquerda.

Além disso, devemos provar que $L = (eq(h_1, h_2))h_0$, onde $h_0: \Gamma^* \longrightarrow \Sigma^*$ é um morfismo definido como segue: se $\gamma = \bar{\sigma}$, com σ em Σ , então $\gamma h_0 = \sigma$; caso contrário, $\gamma h_0 = 1$.

Obtemos assim o seguinte resultado.

TEOREMA 3 - Para cada linguagem recursivamente enumerável $L \subseteq \Sigma^*$, existem efetivamente alfabetos Γ e Δ , um morfismo $h_0: \Gamma^* \longrightarrow \Sigma^*$ e códigos $h_1, h_2: \Gamma^* \longrightarrow \Delta^*$, com $h_1(h_2)$ de a-

$\gamma \in \Gamma$	γh_1	γh_2
$\vdash$	$\vdash \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} q \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} H \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}}$	$\vdash$
$\neg$	$\neg$	$\text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} \bar{H} \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} q \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} \neg$
σ	$\bar{\sigma} \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}}$	$\text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} \sigma$
$\bar{\sigma}$	$\sigma \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}}$	$\text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} \bar{\sigma}$
ε	$\bar{\varepsilon} \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}}$	$\text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} \varepsilon$
$\bar{\varepsilon}$	$\varepsilon \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}}$	$\text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} \bar{\varepsilon}$
H	$\bar{H} \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}}$	$\text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} H$
$\bar{H}$	$H \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}}$	$\text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} \bar{H}$
(q, E_σ, N, r)	$\bar{r} \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}}$	$\text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} \sigma \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} q$
(q, N, D_σ, r)	$\bar{r} \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}}$	$\text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} q \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} \sigma$
(q, V, N, r)	$\bar{\varepsilon} \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} \bar{r} \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}}$	$\text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} \varepsilon \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} q$
(q, N, V, r)	$\bar{r} \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} \bar{\varepsilon} \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}}$	$\text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} q \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} \varepsilon$
(q, E_σ^{-1}, N, r)	$\bar{\sigma} \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} \bar{r} \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}}$	$\text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} q$
(q, N, D_σ^{-1}, r)	$\bar{r} \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} \bar{\sigma} \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}}$	$\text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} q$
$(q, N, N, r) \in A_S \setminus \{\eta, \mu, \nu\}$	$\bar{r} \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}}$	$\text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} q$
$\eta = (q_+, N, N, z_-)$	$\bar{z}_- \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}}$	$\text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} q_+ \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}}$
$\mu = (z'_-, N, N, \lambda)$	$\bar{\lambda} \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}}$	$\text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} z'_- \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}}$
$\nu = (\lambda, N, N, q'_+)$	$\text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} \bar{q}'_+ \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}}$	λ
$\bar{q}, q \in Q_S \setminus \{z_-, \lambda\}$	$q \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}}$	$\text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} \bar{q}$
$\bar{z}_-$	$\text{\textcircled{\tiny $}} z_- \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}}$	$\text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} \bar{z}_-$
$\bar{\lambda}$	λ	$\text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} \bar{\lambda} \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}}$
$\bar{\sigma}, \sigma \in \Sigma$	$\text{\textcircled{\tiny $}} \bar{\sigma} \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}}$	$\text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} \sigma \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}}$
$\bar{\varepsilon}$	$\text{\textcircled{\tiny $}} \bar{\varepsilon} \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}}$	$\text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} \varepsilon \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}}$
$\bar{H}$	$\text{\textcircled{\tiny $}} \bar{H} \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}}$	$\text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} H \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}}$
$\bar{\varepsilon}$	$\text{\textcircled{\tiny $}} \varepsilon \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}}$	$\text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} \bar{\varepsilon} \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}}$
$\bar{\varepsilon}$	$\text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} \bar{\varepsilon}$	$\varepsilon \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}}$
$\bar{\sigma}, \sigma \in \Sigma$	$\text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} \sigma$	$\bar{\sigma} \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}}$
$\bar{\varepsilon}$	$\text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} \varepsilon$	$\bar{\varepsilon} \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}}$
$\bar{H}$	$\text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}} H$	$\bar{H} \text{\textcircled{\tiny $}} \text{\textcircled{\tiny $}}$

Tabela 3 - Definição dos morfismos h_1 e h_2 , obtidos a partir de f_1 e g_1 , respectivamente.

traso um da esquerda para a direita (da direita para a esquerda) tais que $L = (\text{eq}(h_1, h_2))h_0$.

A demonstração do Teorema 3 fica completa com os seis lemas apresentados a seguir.

LEMA 1 - O morfismo h_2 é injetor sobre Γ .

LEMA 2 - O morfismo h_2 é um código de atraso um da direita para a esquerda.

LEMA 3 - O morfismo h_1 é injetor sobre Γ .

LEMA 4 - O morfismo h_1 é um código de atraso um da esquerda para a direita.

LEMA 5 - $L \subseteq (\text{eq}(h_1, h_2))h_0$.

LEMA 6 - $(\text{eq}(h_1, h_2))h_0 \subseteq L$.

■

Vamos demonstrar então cada um dos lemas.

Para isso definimos inicialmente dois morfismos

$h_e: \Delta_1^* \longrightarrow (\mathcal{C}\mathcal{S}\Delta_1)^*$ e $h_d: \Delta_1^* \longrightarrow (\Delta_1\mathcal{C}\mathcal{S})^*$, tais que, para cada δ em Δ_1 ,

$$\delta h_e = \mathcal{C}\mathcal{S}\delta \quad \text{e} \quad \delta h_d = \delta\mathcal{C}\mathcal{S}.$$

Desse modo, se $\delta \in \Delta_1^*$, com $\delta = \delta_1\delta_2\cdots\delta_n$, δ_i em Δ_1 ($1 \leq i \leq n$),

então,

$$\delta h_e = \phi \delta_1 \phi \delta_2 \dots \phi \delta_n \quad e \quad \delta h_d = \delta_1 \phi \delta_2 \phi \dots \delta_n \phi$$

Demonstração do Lema 1

Queremos mostrar que h_2 é injetor sobre Γ .

Sejam x e y em Γ tais que $xh_2 = yh_2$.

- Se xh_2 pertence a $\{\vdash, (\bar{H} \in q' \varepsilon \dashv) h_e\} \cup (T_S \cup \bar{T}_S \cup \{\varepsilon, \bar{\varepsilon}, \# , \bar{\#}\} \cup \bar{Q}_S \setminus \{\bar{z}_-, \bar{\lambda}\}) h_e \cup \{\phi \bar{z}_-, \phi \bar{\lambda} \phi\} \cup \{\phi (\Sigma \cup \{\varepsilon, \bar{\varepsilon}, \# \}) \phi \cup (\bar{\Sigma} \cup \{\varepsilon, \bar{\varepsilon}, \bar{\#}\}) h_d \cup \{\phi q_+ \phi, \lambda\}$

segue pela definição de h_2 que $x = y$.

- Se $xh_2 = \phi z'_-$, então $x = \mu = (z'_-, N, N, \lambda)$ que é a única aresta de S com origem em z'_- . Logo, pela definição de h_2 segue que $x = y$.
- Se xh_2 pertence a $(Q_S \setminus \{z'_-\} \cup (T_S \cup \{\varepsilon\}) Q_S \cup Q_S (T_S \cup \{\varepsilon\})) h_e$, então de $xh_2 = yh_2$ segue que $xgh_e = ygh_e$; logo, $xg = yg$. Lembremos que g é um dos morfismos associados a S .

Mas, por construção de S e pela definição de h_2 , x é uma aresta que pertence a exatamente uma das máquinas $\mathcal{D}$, C ou $\mathcal{D}'$ e y também é uma aresta que pertence à mesma máquina a qual x pertence.

Por outro lado, a restrição de g a cada uma das máquinas D, C ou D' é exatamente o correspondente morfismo associado a cada uma delas e que pela Proposição 2a (Capítulo 3) é injetor sobre o seu respectivo domínio, já que D, C e D' são determinísticas.

Portanto, concluímos que $x = y$.

Assim, h_2 é um morfismo injetor sobre Γ .

Demonstração do Lema 2

Queremos mostrar que o morfismo h_2 é um código de atraso um da direita para a esquerda.

Como pelo Lema 1 o morfismo h_2 é injetor sobre Γ , é suficiente demonstramos que h_2 é de atraso um da direita para a esquerda.

Sejam u e v em Γh_2 e w em Δ^* tais que $wvu \in (\Gamma h_2)^*$. Então, existe $m \geq 1$ e $z_1, z_2, \dots, z_m$ em Γh_2 tais que

$$wvu = z_m z_{m-1} \dots z_1. \quad (1)$$

Precisamos mostrar que wv também pertence a $(\Gamma h_2)^*$. Com esta finalidade, vamos examinar cada uma das possibilidades para u em Γh_2 .

- Se u pertence a $\{\vdash, (\bar{H} \in q' \vdash \vdash) h_e\} \cup (\bar{T}_S \cup \{\bar{e}, \#, \bar{\#}, \bar{\cdot}\} \cup \bar{Q}_S \setminus \{\bar{z}_-, \bar{\lambda}\}) h_e \cup$

$$U \{ \phi \phi q_+ \phi \} \cup \{ \phi \bar{z}_-, \phi \phi \bar{\lambda} \phi \phi \} \cup \{ (\Sigma \cup \{ \epsilon, \bar{c}, \bar{H} \}) \phi \cup \\ \cup (\bar{\Sigma} \cup \{ \epsilon, \bar{c}, \bar{H} \}) h_d ,$$

então, pela definição de h_2 , não existe uma palavra t em Δ^+ tal que $z_1 = tu$ ou que $u = tz_1$. Logo, $z_1 = u$. Portanto, de (1) temos que $wv = z_m z_{m-1} \dots z_2 \in (\Gamma h_2)^*$.

- Se $u = \phi \phi z'_-$ então, pela definição de h_2 e pelo fato de $\mu = (z'_-, N, N, \lambda)$ ser a única aresta de S com origem em z'_- , segue que $z_1 = u$. Logo, de (1) temos que $wv \in (\Gamma h_2)^*$.
- Se $u = \lambda$ resulta pela definição de h_2 e pelo fato de $v = (\lambda, N, N, q'_+)$ ser a única aresta de S com origem em λ que $z_1 = u$. Logo, de (1) $wv = z_m z_{m-1} \dots z_2 \in (\Gamma h_2)^*$.
- Se $u = \phi \phi \sigma$, σ em T_S e $z_1 \neq u$, segue pela definição de h_2 e de (1) que $z_1 = \phi \phi q \phi \phi \sigma$, para algum q em Q_S ($q \neq \lambda$, pois $v = (\lambda, N, N, q'_+)$ é a única aresta de S com origem em λ), e a aresta $\alpha = (q, N, D_0, r)$ tal que $\alpha h_2 = z_1$, pertence a exatamente uma das máquinas $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{D}'$. Então, de (1) resulta que ocorre um dos seguintes casos:

(i) $v = \phi \phi q$.

O que implica que uma das arestas $\beta = (q, E_\delta^{-1}, N, r)$ ou $\beta = (q, N, D_\delta^{-1}, r)$ ou $\beta = (q, N, N, r)$ pertence a A_S , com $\beta h_2 = v$ e $\beta \notin \{\eta, \mu, v\}$.

(ii) $v = \epsilon \epsilon q$.

Nesse caso, a aresta $\beta = (q, V, N, r)$ pertence a A_S e $\beta h_2 = v$.

(iii) $v = \tau \epsilon q$, para algum τ em T_S .

Então, a aresta $\beta = (q, E_\tau, N, r)$ pertence a A_S e $\beta h_2 = v$.

Mas, em qualquer um desses casos, β deve pertencer à mesma máquina a qual α pertence. Isto contradiz o fato de que $\mathcal{D}$, C ou $\mathcal{D}'$ é determinística. Portanto, $z_1 = u$ e de (1) segue que $wv \in (\Gamma h_2)^*$.

- Se $u = \epsilon$, a demonstração é análoga a anterior.
- Se $u = \epsilon q$, com q em $Q_S \setminus \{z_1\}$, então uma das arestas $\alpha = (q, E_\sigma^{-1}, N, r)$ ou $\alpha = (q, N, D_\sigma^{-1}, r)$ ou $\alpha = (q, N, N, r)$, tal que $\alpha \notin \{\eta, \mu, v\}$ e $\alpha h_2 = u$, pertence a exatamente uma das máquinas $\mathcal{D}$, C ou $\mathcal{D}'$.

Suponhamos que $z_1 \neq u$. Então, pela definição de h_2 e de (1) segue que $z_1 = \epsilon \epsilon q$ ou $z_1 = \tau \epsilon q$, para algum τ em T_S . Logo, resulta, respectivamente, que a aresta $\beta = (q, V, N, t)$ ou $\beta = (q, E_\tau, N, t)$ pertence à mesma máquina a qual α pertence e $\beta h_2 = z_1$. Mas, isto é um absurdo, pois $\mathcal{D}, C$ e $\mathcal{D}'$ são determinísticas. Portanto, $z_1 = u$ e $wv \in (\Gamma h_2)^*$.

- Seja $u = \epsilon q \epsilon \sigma$, com q em Q_S e σ em T_S . (Observemos que $q \neq \lambda$.)

Então, a aresta $\alpha=(q, N, D_{\sigma}, r)$ pertence a exatamente uma das máquinas $\mathcal{D}, C$ ou $\mathcal{D}'$ e $\alpha h_2 = u$.

Se $z_1 \neq u$, segue pela definição de h_2 e de (1) que $z_1 = \phi \dagger \sigma$ e ocorre para z_2 uma das possibilidades abaixo:

$$(i) \quad z_2 = \phi \dagger q.$$

Então, uma das arestas $\beta=(q, E_Y^{-1}, N, t)$ ou $\beta=(q, N, D_Y^{-1}, t)$ ou $\beta=(q, N, N, t)$ pertence a A_S , com $\beta h_2 = z_2$ e $\beta \notin \{n, u, v\}$.

$$(ii) \quad z_2 = \phi \dagger \epsilon \phi \dagger q.$$

Nesse caso, a aresta $\beta=(q, V, N, t)$ pertence a A_S e $\beta h_2 = z_2$.

$$(iii) \quad z_2 = \phi \dagger \tau \phi \dagger q, \text{ para algum } \tau \text{ em } T_S.$$

Então, a aresta $\beta=(q, E_{\tau}, N, t)$ pertence a A_S e $\beta h_2 = z_2$.

Porém, em qualquer um dos casos acima, β deve pertencer à mesma máquina a qual α pertence. O que contradiz o fato de $\mathcal{D}, C$ ou $\mathcal{D}'$ ser determinística. Portanto, $z_1 = u$ e de (1) $wv \in (\Gamma h_2)^*$.

- Se $u = \phi \dagger q \phi \dagger \epsilon$, com q em Q_S , a demonstração é análoga a anterior.

- Seja $u = \phi \phi \sigma \phi \phi q$, com q em Q_S e σ em T_S . (Observemos que $q \neq \lambda$.)
Então, a aresta $\alpha = (q, E_\sigma, N, r)$ pertence a exatamente uma das máquinas $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{D}'$ e $\alpha h_2 = u$.

Se $z_1 \neq u$, resulta pela definição de h_2 e de (1) que $z_1 = \phi \phi q$. Consequentemente, uma das arestas $\beta = (q, E_\tau^{-1}, N, t)$ ou $\beta = (q, N, D_\tau^{-1}, t)$ ou $\beta = (q, N, N, t)$ pertence à mesma máquina a qual α pertence e $\beta h_2 = z_1$. Porém, é impossível que isto aconteça, já que $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}'$ são determinísticas. Logo, $z_1 = u$ e de (1) segue que $wv \in (\Gamma h_2)^*$.

- Se $u = \phi \phi \epsilon \phi \phi q$, com q em Q_S , a demonstração é análoga a anterior.

Assim, concluímos que o morfismo h_2 é um código de atraso um da direita para a esquerda.

■

Observação - O morfismo h_2 não é de atraso limitado da esquerda para a direita.

Suponhamos, por absurdo, que exista um inteiro $n \geq 0$ tal que h_2 seja de atraso n da esquerda para a direita. Ou seja, para quaisquer palavras u em Γh_2 , v em $(\Gamma h_2)^n$, com $v = v_1 v_2 \dots v_n$, v_i em Γh_2 ($1 \leq i \leq n$) e w em Δ^* , se $uvw \in (\Gamma h_2)^*$ então $vw \in (\Gamma h_2)^*$.

Sejam $u = \phi \phi q_+$ e para cada i ($1 \leq i \leq n$), $v_i = \phi \phi \sigma_i$, com σ_i em T_S . Então, $v = v_1 v_2 \dots v_n \in (\Gamma h_2)^n$. Seja $w = \phi$. Logo,

$$uvw = \phi \phi q_+ \phi \phi \sigma_1 \phi \phi \sigma_2 \dots \phi \phi \sigma_n \phi \in (\Gamma h_2)^*. \quad (2)$$

Basta observarmos que $uvw = w_0 w_1 \dots w_n$, onde

$w_0 = \phi \phi q_+ \phi \in \Gamma h_2$ e para cada i ($1 \leq i \leq n$), $w_i = \phi \phi \sigma_i \phi \in \Gamma h_2$.

Mas, $vw = \phi \phi \sigma_1 \phi \phi \sigma_2 \dots \phi \phi \sigma_n \phi \notin (\Gamma h_2)^*$.

Portanto, concluímos de (2) que h_2 não é de atraso limitado da esquerda para a direita. ■

Demonstração do Lema 3

Queremos mostrar que o morfismo h_1 é injetor sobre Γ .

Sejam x e y em Γ tais que $xh_1 = yh_1$.

- Se xh_1 pertence a $\{(\vdash \varepsilon q_- \varepsilon H)h_d, \vdash\} \cup (T_S \cup \bar{T}_S \cup \{\varepsilon, \bar{\varepsilon}, H, \bar{H}\} \cup Q_S \setminus \{z_-, \lambda\})h_d \cup \{\phi \phi \phi_-, \lambda\} \cup \phi(\bar{\Sigma} \cup \{\varepsilon, \bar{\varepsilon}, \bar{H}\})\phi \cup U(\Sigma \cup \{\varepsilon, \bar{\varepsilon}, H\})h_e \cup \{\bar{z}_-, \phi, \phi \phi \bar{q}_+ \phi \phi\}$

segue pela definição de h_1 que $x = y$.

- Se $xh_1 = \bar{\lambda}\phi\phi$, então $x = \mu = (z'_-, N, N, \lambda)$ que é a única aresta de S com término em λ . Logo, pela definição de h_1 resulta que $x = y$.

- Se xh_1 pertence a $(\bar{Q}_S \setminus \{\bar{\lambda}\}) \cup (\bar{T}_S \cup \{\bar{\varepsilon}\})\bar{Q}_S \cup \bar{Q}_S(\bar{T}_S \cup \{\bar{\varepsilon}\})h_d$,

então de $xh_1 = yh_1$ segue que $xfh_d = yfh_d$; logo, $xf = yf$.

Mas, por construção de S e pela definição de h_1 , x é uma aresta pertencente a exatamente uma das máquinas $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{D}'$ e y também é uma aresta que pertence à mesma máquina a qual x pertence.

Por outro lado, a restrição de f a cada uma das máquinas $\mathcal{D}, \mathcal{C}$ ou $\mathcal{D}'$ é exatamente o correspondente morfismo associado a cada uma delas e que pela Proposição 2c (Capítulo 3) é injetor sobre o seu respectivo domínio, já que $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}'$ são reversíveis.

Portanto, resulta que $x = y$.

Assim, o morfismo h_1 é injetor sobre Γ .

■

Demonstração do Lema 4

Queremos mostrar que o morfismo h_1 é um código de atraso um da esquerda para a direita.

Como pelo Lema 3 o morfismo h_1 é injetor sobre Γ , é suficiente demonstrarmos que h_1 é de atraso um da esquerda para a direita.

Sejam u e v em Γh_1 e w em Δ^* tais que $uvw \in (\Gamma h_1)^*$. Então, existe $m \geq 1$ e $z_1, z_2, \dots, z_m$ em Γh_1 tais que

$$uvw = z_1 z_2 \dots z_m. \quad (3)$$

Precisamos mostrar que vw também pertence a $(\Gamma h_1)^*$.

Com esta finalidade, vamos analisar cada uma das possibilidades para u em Γh_1 .

- Se u pertence a $\{(\vdash \varepsilon q_- \varepsilon \mathbb{H})h_d, \vdash\} \cup (T_S \cup \{\varepsilon, \mathbb{H}, \bar{\mathbb{H}}\} \cup Q_S \setminus \{z_-, \lambda\})h_d \cup$
 $\cup \{\vdash \vdash \bar{q}_+ \vdash\} \cup \{\vdash \vdash \vdash \vdash, \lambda\} \cup \{\vdash (\bar{\Sigma} \cup \{\varepsilon, \bar{\varepsilon}, \bar{\mathbb{H}}\})\vdash \cup (\Sigma \cup \{\varepsilon, \bar{\varepsilon}, \mathbb{H}\})h_e$,

então, pela definição de h_1 não existe uma palavra t em Δ^+ tal que $z_1 = ut$ ou que $u = z_1 t$. Logo, $z_1 = u$.

Portanto, de (3) temos que $vw = z_2 \dots z_m \in (\Gamma h_1)^*$.

- Se $u = \bar{\lambda} \vdash \vdash$ então, pela definição de h_1 e mais o fato de $\mu = (z_+, N, N, \lambda)$ ser a única aresta de S com término em λ , segue que $z_1 = u$. Logo, de (3) temos que $vw \in (\Gamma h_1)^*$.
- Se $u = \bar{z}_- \vdash$ resulta pela definição de h_1 e pelo fato de $\eta = (q_+, N, N, z_-)$ ser a única aresta de S com término em z_- que $z_1 = u$. Logo, de (3) $vw = z_2 \dots z_m \in (\Gamma h_1)^*$.
- Se $u = \bar{\sigma} \vdash \vdash$, com σ em T_S e $z_1 \neq u$, segue pela definição de h_1 e de (3) que $z_1 = \bar{\sigma} \vdash \vdash \bar{r} \vdash \vdash$, para algum r em Q_S ($r \neq z_-$, pois $\eta = (q_+, N, N, z_-)$ é a única aresta de S com término em z_-) e a aresta $\alpha = (q, E_\sigma^{-1}, N, r)$ pertence a exatamente uma das máquinas $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{D}'$, com $\alpha h_1 = z_1$. Então, de (3) segue que ocorre um dos seguintes casos:

$$(i) \quad v = \bar{r}\phi\$.$$

Então, uma das arestas $\beta=(t, E_\delta, N, r)$ ou $\beta=(t, N, D_\delta, r)$ ou $\beta=(t, N, N, r)$ pertence a A_S tal que $\beta h_1 = v$ e $\beta \notin \{\eta, \mu, v\}$.

$$(ii) \quad v = \bar{r}\phi\$\bar{\epsilon}\phi\$.$$

Nesse caso, a aresta $\beta=(t, N, V, r)$ pertence a A_S e $\beta h_1 = v$.

$$(iii) \quad v = \bar{r}\phi\$\bar{\tau}\phi\$, \text{ para algum } \tau \text{ em } T_S.$$

Então, a aresta $\beta=(t, N, D_\tau^{-1}, r)$ pertence a A_S e $\beta h_1 = v$.

Mas, em qualquer um desses casos, β deve pertencer à mesma máquina a qual α pertence. Isto contradiz o fato de que $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{D}'$ é reversível. Portanto, $z_1 = u$ e de (3) segue que $vw \in (\Gamma h_1)^*$.

- Se $u = \bar{\epsilon}\phi\$$, a demonstração é análoga a anterior.
- Se $u = \bar{r}\phi\$$, com r em $Q_S \setminus \{\lambda\}$, então uma das arestas $\alpha=(q, E_\sigma, N, r)$ ou $\alpha=(q, N, D_\sigma, r)$ ou $\alpha=(q, N, N, r)$ pertence a exatamente uma das máquinas $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{D}'$, com $\alpha h_1 = u$ e $\alpha \notin \{\eta, \mu, v\}$.

Suponhamos que $z_1 \neq u$. Então, pela definição de h_1 e de (3) segue que $z_1 = \bar{r}\phi\$\bar{\tau}\phi\$$, para algum τ em T_S ou $z_1 = \bar{r}\phi\$\bar{\epsilon}\phi\$$. Logo, resulta, respectivamente, que a aresta $\beta=(t, N, D_\tau^{-1}, r)$ ou $\beta=(t, N, V, r)$ pertence à mesma máquina a

qual α pertence e $\beta h_1 = z_1$. Mas, isto é um absurdo, pois $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}'$ são reversíveis. Portanto, $z_1 = u$ e de (3) $vw \in (\Gamma h_1)^*$.

- Seja $u = \bar{r}\phi\bar{\sigma}\phi$, com r em Q_S e σ em T_S . (Observemos que $r \neq z_-$.) Então, a aresta $\alpha = (q, N, D_\sigma^{-1}, r)$ pertence a exatamente uma das máquinas $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{D}'$ e $\alpha h_1 = u$.

Se $z_1 \neq u$, segue pela definição de h_1 e de (3) que $z_1 = \bar{r}\phi$ e, neste caso, uma das arestas $\beta = (t, E_\tau, N, r)$ ou $\beta = (t, N, D_\tau, r)$ ou $\beta = (t, N, N, r)$ pertence à mesma máquina a qual α pertence e $\beta h_1 = z_1$. Porém, é impossível que isto ocorra, já que $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}'$ são reversíveis. Logo, $z_1 = u$ e de (3) resulta que $vw \in (\Gamma h_1)^*$.

- Se $u = \bar{r}\phi\bar{e}\phi$, com r em Q_S , a demonstração é análoga a anterior.
- Se $u = \bar{\sigma}\phi\bar{r}\phi$, com σ em T_S e r em Q_S ($r \neq z_-$), a aresta $\alpha = (q, E_\sigma^{-1}, N, r)$ pertence a exatamente uma das máquinas $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{D}'$ e $\alpha h_1 = u$.

Suponhamos que $z_1 \neq u$. Pela definição de h_1 e de (3) segue que $z_1 = \bar{\sigma}\phi$ e ocorre uma das possibilidades abaixo para z_2 :

(i) $z_2 = \bar{r}\phi$.

O que implica que uma das arestas $\beta = (t, E_\delta, N, r)$ ou

$\beta=(t,N,D_\delta,r)$ ou $\beta=(t,N,N,r)$ pertence a Λ_S , com $\beta h_1=z_2$ e $\beta \notin \{\eta,\mu,\nu\}$.

(ii) $z_2=\bar{r}\phi\bar{r}\phi$, para algum τ em T_S .

Então, a aresta $\beta=(t,N,D_\tau^{-1},r)$ pertence a Λ_S e $\beta h_1=z_2$.

(iii) $z_2=\bar{r}\phi\bar{e}\phi$.

Nesse caso, a aresta $\beta=(t,N,N,r)$ pertence a Λ_S e $\beta h_1=z_2$.

Porém, em qualquer um desses casos, β deve pertencer à mesma máquina a qual α pertence. Isto contradiz o fato de que $\mathcal{D}$, C ou $\mathcal{D}'$ é reversível. Portanto, $z_1=u$ e de (3) segue que $vw \in (\Gamma h_1)^*$.

- Se $u=\bar{e}\phi\bar{r}\phi$, com r em Q_S , a demonstração é análoga a anterior.

Assim, concluímos que o morfismo h_1 é um código de atraso um da esquerda para a direita.

Observação - O morfismo h_1 não é de atraso limitado da direita para a esquerda.

Suponhamos, por absurdo, que exista um inteiro $n \geq 0$ tal que h_1 seja de atraso n da direita para a esquerda. Ou seja, para quaisquer palavras u em Γh_1 , v em $(\Gamma h_1)^n$, com $v = v_n v_{n-1} \dots v_1$, v_i em Γh_1 ($1 \leq i \leq n$) e w em Δ^* , se $wvu \in (\Gamma h_1)^*$ então $wv \in (\Gamma h_1)^*$.

Sejam $u = \bar{q}_+! \phi \phi$ e para cada i ($1 \leq i \leq n$), $v_i = \sigma_i \phi \phi$, com σ_i em T_S . Então, $v = v_n v_{n-1} \dots v_1 \in (\Gamma h_1)^n$. Seja $w = \phi \phi$. Logo,

$$wvu = \phi \phi \sigma_n \phi \phi \sigma_{n-1} \phi \phi \dots \sigma_2 \phi \phi \sigma_1 \phi \phi \bar{q}_+! \phi \phi \in (\Gamma h_1)^*. \quad (4)$$

Basta considerarmos $wvu = w_n w_{n-1} \dots w_1 w_0$, onde

$$w_0 = \phi \phi \bar{q}_+! \phi \phi \in \Gamma h_1 \text{ e para cada } i \text{ } (1 \leq i \leq n), w_i = \phi \phi \sigma_i \in \Gamma h_1.$$

$$\text{Mas, } wv = \phi \phi \sigma_n \phi \phi \sigma_{n-1} \phi \phi \dots \sigma_2 \phi \phi \sigma_1 \phi \phi \notin (\Gamma h_1)^*.$$

Portanto, resulta de (4) que h_1 não é de atraso limitado da direita para a esquerda. ■

Demonstração do Lema 5

Seja s uma palavra em L .

Queremos provar que existe em $\text{eq}(h_1, h_2)$ uma palavra w tal que $wh_0 = s$. Essa palavra w será uma codificação da computação da máquina S para a palavra s .

Como $s \in \Sigma^*$ existe em $\mathcal{D}$ um passeio $c: q_- \longrightarrow q_+$ tal que

$$(\epsilon q_- \epsilon) ||c|| = \epsilon q_+ s \epsilon. \quad (5)$$

Mas, $\mathcal{D}$ é reversível; então, pela Proposição 2 (Capítulo 2) o passeio $c': q'_+ \longrightarrow q'_-$ é o reverso de c em $\mathcal{D}'$ e

$$(\epsilon q'_+ s \epsilon) ||c'|| = \epsilon q'_- \epsilon. \quad (6)$$

Por outro lado, como $s \in L = |B|$ e mais o fato de B ser reversível e normalizada e de C ser o acoplamento de B com B' , resulta pela Proposição 4 (Capítulo 2) que C tem um passeio $d: z_- \longrightarrow z'_-$ tal que

$$(\epsilon z_- s \epsilon) ||d|| = \epsilon z'_- s \epsilon. \quad (7)$$

Utilizando-se da Proposição 5 (Capítulo 3) e pelas definições dos morfismos f e g associados à máquina de Turing S , segue de (5), (6) e (7), respectivamente, que

$$\epsilon q_- \epsilon \# (\epsilon q_- \epsilon) [c] f = (\epsilon q_- \epsilon) [c] g \bar{H} \epsilon q_+ s \epsilon, \quad (8)$$

$$\epsilon q'_+ s \epsilon \# (\epsilon q'_+ s \epsilon) [c'] f = (\epsilon q'_+ s \epsilon) [c'] g \bar{H} \epsilon q'_- \epsilon \quad (9)$$

$$e \quad \epsilon z_- s \epsilon \# (\epsilon z_- s \epsilon) [d] f = (\epsilon z_- s \epsilon) [d] g \bar{H} (\epsilon z'_- s \epsilon). \quad (10)$$

Assim, pelas definições de h_1 e h_2 , segue de (8), (9) e (10), respectivamente, que

$$\begin{aligned}
 (\epsilon q_- \epsilon) h_e \phi \# \phi \phi (\epsilon q_- \epsilon) [c] h_1 &= \\
 &= (\epsilon q_- \epsilon) [c] h_2 \phi \# \phi \phi (\epsilon q_+ s \epsilon) h_d, \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\epsilon q_+ s \epsilon) h_e \phi \# \phi \phi (\epsilon q_+ s \epsilon) [c'] h_1 &= \\
 &= (\epsilon q_+ s \epsilon) [c'] h_2 \phi \# \phi \phi (\epsilon q_- \epsilon) h_d \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e \quad (\epsilon z_- s \epsilon) h_e \phi \# \phi \phi (\epsilon z_- s \epsilon) [d] h_1 &= \\
 &= (\epsilon z_- s \epsilon) [d] h_2 \phi \# \phi \phi (\epsilon z_- s \epsilon) h_d. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Seja a seguinte palavra w em Γ^+ ,

$$\begin{aligned}
 w = & \vdash (\epsilon q_- \epsilon) [c] \# \epsilon \eta \bar{s} \bar{\epsilon} \bar{H} \bar{\epsilon} \bar{z} \bar{s} \bar{\epsilon} \bar{H} (\epsilon z_- s \epsilon) [d] \# \epsilon \mu s \epsilon \bar{H} \bar{\epsilon} \bar{\lambda} \bar{s} \bar{\epsilon} \bar{H} \bar{\epsilon} \bar{v} s \epsilon \bar{H} \bar{\epsilon} q_+ \bar{s} \bar{\epsilon} \bar{H} \\
 & (\epsilon q_+ s \epsilon) [c'] \vdash.
 \end{aligned}$$

Logo, resulta de (11), (12), (13) e das definições de h_1 e h_2 que $wh_1 = wh_2$ e para cada palavra u em Γ^+ , se $w=uv$, para algum v em Γ^+ , então $uh_1 \neq uh_2$. (Observe a *Figura 4*.)

Além disso, pela definição de h_0 temos que $wh_0 = s$.

Assim, cada palavra s em L pertence a $(eq(h_1, h_2))h_0$.
Portanto, $L \subseteq (eq(h_1, h_2))h_0$. ■

Figura 4 - Uma palavra w em $\text{eq}(h_1, h_2)$ e as imagens correspondentes por h_1 e h_2

Demonstração do Lema 6

Seja w uma palavra em $\text{eq}(h_1, h_2)$.

Queremos provar que wh_0 pertence a L .

Como $w \in \text{eq}(h_1, h_2)$, $wh_1 = wh_2$ e para cada u em Γ^+ , se $w = uv$, para algum v em Γ^+ , então $uh_1 \neq uh_2$.

Mas, $|w| \geq 2$, pois, para cada γ em Γ , $\gamma h_1 \neq \gamma h_2$.

Além disso, $\vdash (\neg)$ é o único elemento de Γ tal que $\vdash h_1$ e $\vdash h_2$ ($\neg h_1$ e $\neg h_2$) são ambos segmentos iniciais (finais) de uma mesma palavra. Logo, $w = \vdash w_1 \neg$, para algum w_1 em Γ^+ , já que $(\vdash \neg)h_1 \neq (\vdash \neg)h_2$. Podemos supor ainda que nenhum dos dois símbolos, $\vdash$ ou $\neg$, ocorre em w_1 , já que $w \in \text{eq}(h_1, h_2)$.

A seguir, vamos definir dois morfismos que nos auxiliarão a relacionar os morfismos h_1 e h_2 com os morfismos f_1 e g_1 , respectivamente.

Já vimos que os morfismos f_1 e $g_1: \Gamma_2^* \longrightarrow \Delta_2^*$ são extensões dos morfismos associados à máquina de Turing S e que os morfismos h_1 e h_2 estão definidos sobre Γ^* com valores em Δ^* , sendo que

$$\Gamma = \Gamma_2 \cup \tilde{\Sigma} \cup \tilde{\bar{\Sigma}} \cup \{\tilde{\epsilon}, \tilde{\#}, \tilde{\bar{\epsilon}}, \tilde{\bar{\epsilon}}, \tilde{\bar{\epsilon}}, \tilde{\bar{\#}}\}$$

$$\Delta = \Delta_2 \cup \{\phi, \$\}.$$

Seja $h_{\Delta_2}: \Delta^* \longrightarrow \Delta_2^*$ o morfismo que preserva Δ_2 , isto é,

$$\phi h_{\Delta_2} = \phi h_{\Delta_2} = 1$$

e $\delta h_{\Delta_2} = \delta$, para cada δ em $\Delta \setminus \{\phi, \phi\} = \Delta_2$.

Seja $a: \Gamma^* \longrightarrow \Gamma_2^*$ um morfismo dado por

$$\gamma a = \gamma, \text{ para cada } \gamma \text{ em } \Gamma_2;$$

$$\text{se } \gamma = \bar{\sigma}, \text{ para } \sigma \text{ em } \Sigma \cup \{\epsilon, \#\}, \text{ então } \gamma a = \sigma;$$

$$\text{se } \gamma = \bar{\epsilon}, \text{ então } \gamma a = \bar{\epsilon};$$

$$\text{se } \gamma = \bar{\epsilon}, \text{ então } \gamma a = \epsilon$$

e se $\gamma = \bar{\bar{\sigma}}, \text{ para } \sigma \text{ em } \Sigma \cup \{\epsilon, \#\}, \text{ então } \gamma a = \bar{\sigma}.$

Assim, é fácil verificar que o seguinte diagrama é comutativo, isto é, $h_1 h_{\Delta_2} = a f_1$ e $h_2 h_{\Delta_2} = a g_1$.

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^* & \xrightarrow{h_1(h_2)} & \Delta^* \\ a \downarrow & & \downarrow h_{\Delta_2} \\ \Gamma_2^* & \xrightarrow{f_1(g_1)} & \Delta_2^* \end{array}$$

Seja ainda $h_{A_S}: \Gamma^* \longrightarrow (A_S)^*$ o morfismo que preserva

A_S .

Retornando à demonstração, de $wh_1 = wh_2$ segue que

$$(\vdash w_1 \dashv) h_1 = (\vdash w_1 \dashv) h_2. \quad (14)$$

Então, $(\vdash w_1 \dashv) h_1 h_{\Delta_2} = (\vdash w_1 \dashv) h_2 h_{\Delta_2}$; o que implica que

$$(\vdash w_1 \dashv) a f_1 = (\vdash w_1 \dashv) a g_1.$$

Logo,

$$\vdash \varepsilon q_- \varepsilon \# (w_1 a f_1) \dashv = \vdash (w_1 a g_1) \# \varepsilon q'_- \varepsilon \dashv.$$

Portanto,

$$\varepsilon q_- \varepsilon \# (w_1 a) f_1 \underline{b} = (w_1 a) g_1 \underline{b} \# \varepsilon q'_- \varepsilon.$$

(Lembremos que $\underline{b}$ é o morfismo que "elimina" a "barra".)

Assim, pela Proposição 6 (Capítulo 3) existe um passeio c em S tal que

$$(\varepsilon q_- \varepsilon) || c || = \varepsilon q'_- \varepsilon \quad \text{e} \quad w_1 h_{A_S} = c.$$

Como o passeio c tem origem em q_- e término em q'_- , segue, por construção da máquina de Turing S , que existem passeios não degenerados

$$c_1: q_- \longrightarrow q_+ \quad \text{em } \mathcal{D}, \tag{15}$$

$$c_2: z_- \longrightarrow z'_- \quad \text{em } \mathcal{C}, \tag{16}$$

$$\text{e} \quad c'_1: q'_+ \longrightarrow q'_- \quad \text{em } \mathcal{D}',$$

onde c'_1 é o reverso de c_1 , tais que

$$c = c_1 \eta c_2 \mu \nu c'_1.$$

Mas, como $w_1 h_{A_S} = c$, existem palavras w_2, w_3, w_4 e w_5 em Γ^* tais que

$$w_1 = w_2 \eta w_3 \mu w_4 \nu w_5, \quad (17)$$

$$w_2 h_{A_S} = c_1, \quad (18)$$

$$w_3 h_{A_S} = c_2, \quad (19)$$

$$w_4 h_{A_S} = 1 \quad (20)$$

e $w_5 h_{A_S} = c'_1.$

Além disso, $w_2 \in (\Gamma a)^+ = \Gamma_2^+.$

De fato, suponhamos por absurdo que exista um símbolo σ em $\Sigma \cup \{\epsilon, \# \}$ tal que $w_2 = x \sigma y$, para algum x em $(\Gamma a)^*$ e algum y em Γ^* . Então, pelas definições de h_1 e h_2 existe uma palavra z em Δ^+ tal que

$$(\vdash x) h_1 = (\vdash x) h_2 z \quad \text{e} \quad z = \phi \dagger (z_1 h_d), \text{ para algum } z_1 \text{ em } \Delta_2^+.$$

Logo, de (14) e (17) segue que

$$z(\tilde{\sigma} \eta w_3 \mu w_4 \nu w_5^{-1}) h_1 = (\tilde{\sigma} \eta w_3 \mu w_4 \nu w_5^{-1}) h_2.$$

Então,

$$\phi s(z_1 h_d) \dagger \tilde{\sigma} \phi(\eta w_3 \mu w_4 \nu w_5^{-1}) h_1 = \dagger \sigma \phi(\eta w_3 \mu w_4 \nu w_5^{-1}) h_2,$$

o que é um absurdo.

Analogamente, chegamos a um absurdo se $w_2 = xoy$, com x em $(\Gamma a)^*$, σ em $\{\bar{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon}, \hat{\varepsilon}, \# \} \cup \bar{\Sigma}$ e y em Γ^* . Portanto, $w_2 \in (\Gamma a)^+$.

Assim, pelas definições de h_1 e h_2 e de (14) e (17), existe uma palavra v_1 em Δ_2^+ tal que

$$(\vdash w_2)h_1 = (\vdash w_2)h_2(v_1h_e)\dagger \quad (21)$$

$$\Rightarrow (\vdash w_2)h_1h_{\Delta_2} = (\vdash w_2)h_2h_{\Delta_2}v_1$$

$$\Rightarrow (\vdash w_2)af_1 = (\vdash w_2)ag_1v_1$$

$$\Rightarrow \vdash \varepsilon q_{-} \varepsilon \# (w_2 f_1) = \vdash (w_2 g_1) v_1$$

$$\Rightarrow \varepsilon q_{-} \varepsilon \# (w_2 f_1 \underline{b}) = (w_2 g_1 \underline{b})(v_1 \underline{b}) .$$

Então, pela Proposição 6 (Capítulo 3) existem palavras s_1 e t_1 em $(\Delta_2 \underline{b} \setminus \{\#\})^*$ tais que

$$v_1 \underline{b} = s_1 \# t_1 , \quad (22)$$

$t_1 s_1$ é uma configuração instantânea de S

e existe um passeio r_1 em S tal que

$$(\varepsilon q_{-} \varepsilon) || r_1 || = t_1 s_1 \quad e \quad r_1 = w_2 h_{A_S} .$$

Mas, de (15) e (18) resulta que $r_1 = c_1$ é um passeio de q_- a q_+ em $\mathcal{D}$.

Logo, por construção da máquina $\mathcal{D}$, concluímos que

$$t_1 s_1 = \epsilon q_+ s \epsilon, \quad \text{para alguma palavra } s \text{ em } \Sigma^*. \quad (23)$$

Por outro lado, como $(\vdash w_1 \dashv) h_1 = (\vdash w_1 \dashv) h_2$ segue de (17) e (21) que

$$(v_1 h_{e_-}) \phi \phi (nw_3 \mu w_4 \nu w_5 \dashv) h_1 \underline{b} = (nw_3 \mu w_4 \nu w_5 \dashv) h_2 \underline{b}.$$

E, utilizando (22) e as definições de h_1 e h_2 temos que

$$\phi \phi (s_1 h_d) \# \phi \phi (t_1 h_d) z_- \phi (w_3 \mu w_4 \nu w_5 \dashv) h_1 \underline{b} = \phi \phi q_+ \phi (w_3 \mu w_4 \nu w_5 \dashv) h_2 \underline{b}.$$

Então, de (23) $s_1 = q_+ s \epsilon$ e $t_1 = \epsilon$. Logo,

$$\phi (s \epsilon) h_d \# \phi \phi \epsilon \phi \phi z_- \phi (w_3 \mu w_4 \nu w_5 \dashv) h_1 \underline{b} = (w_3 \mu w_4 \nu w_5 \dashv) h_2 \underline{b}. \quad (24)$$

Como $\mu h_2 \underline{b} = \phi \phi z'_-$ e $z'_- \in Q_S$, segue que

$$w_3 h_2 \underline{b} = \phi (s \epsilon) h_d \# \phi \phi \epsilon \phi \phi z_- (y_3 h_2 \underline{b}), \quad (25)$$

para algum y_3 em Γ^* .

Então, pela definição de h_2 , temos que

$$w_3 \underline{b} = \tilde{s} \tilde{\epsilon} \tilde{\#} \tilde{\epsilon} z_- (y_3 \underline{b}). \quad (26)$$

E, de (24), (25), (26) e da definição de h_1 segue que

$$\phi\$(s\varepsilon)h_d\#\phi\$(\phi\$(z_{-}\phi\$(y_3\mu w_4\nu w_5^{-1})h_1b) = (y_3\mu w_4\nu w_5^{-1})h_2b. \quad (27)$$

E, analogamente, obtemos que

$$y_3h_2b = \phi\$(s\varepsilon)h_d\#(u_3h_2b) \quad , \text{ para algum } u_3 \text{ em } \Gamma^* \quad (28)$$

e, conseqüentemente,

$$y_3b = s\varepsilon\#(u_3b). \quad (29)$$

Então, de (27), (28), (29) e da definição de h_1 segue que

$$\phi\$(\varepsilon\phi\$(z_{-}\phi\$(s\varepsilon)h_d\#\phi\$(u_3\mu w_4\nu w_5^{-1})h_1b) = (u_3\mu w_4\nu w_5^{-1})h_2b. \quad (30)$$

Além disso, podemos verificar sem dificuldades que u_3 também pertence a $(\Gamma a)^*$.

Assim, pelas definições de h_1 e h_2 , segue de (30) que existe uma palavra v_2 em Δ_2^+ tal que

$$\phi\$(\varepsilon\phi\$(z_{-}\phi\$(s\varepsilon)h_d\#\phi\$(u_3h_1b) = (u_3h_2b)(v_2h_eb)\phi\$ \quad (31)$$

$$\Rightarrow \varepsilon z_{-}s\varepsilon\#(u_3h_1h_{\Delta_2})b = (u_3h_2h_{\Delta_2})b(v_2b)$$

$$\Rightarrow \varepsilon z_{-}s\varepsilon\#(u_3af_1)b = (u_3ag_1)b(v_2b)$$

$$\Rightarrow \varepsilon z_{-}s\varepsilon\#(u_3f_1b) = (u_3g_1b)(v_2b) .$$

Então pela Proposição 6 (Capítulo 3) existem pala-

vras s_2 e t_2 em $(\Delta_2 b \setminus \{\#\})^*$ tais que

$$v_2 b = s_2 \# t_2, \quad (32)$$

$t_2 s_2$ é uma configuração instantânea de S

e existe um passeio r_2 em S tal que

$$(\varepsilon z_s \varepsilon) || r_2 || = t_2 s_2 \quad \text{e} \quad r_2 = u_3^h A_S.$$

Mas, de (26) e (29) temos que

$$w_3 b = \tilde{s} \tilde{\varepsilon} \tilde{\#} \tilde{\varepsilon} z_s \varepsilon \# (u_3 b);$$

então $w_3^h A_S = u_3^h A_S$.

Logo, de (16) e (19) vem que $r_2 = c_2$ é um passeio de z_- a z'_+ em C . Então, por construção da máquina de Turing C existem passeios

$$d: z_- \longrightarrow z_+ \quad \text{em } B, \quad \text{onde } \{z_+\} = F_B$$

$$\text{e} \quad d': z'_+ \longrightarrow z'_- \quad \text{em } B', \quad \text{reverso de } d$$

tais que $c_2 = d \alpha d'$, com $\alpha = (z_+, N, V, z'_+)$.

Então, de $(\varepsilon z_s \varepsilon) || c_2 || = t_2 s_2$ segue que

$$(\varepsilon z_s \varepsilon) || d || || \alpha || || d' || = t_2 s_2.$$

Logo, existem palavras ℓ_1 e ℓ_2 em T_C^* tais que

$$(\epsilon z_- s \epsilon) ||d|| = \epsilon \ell_1 z_+ \ell_2 \epsilon,$$

$$(\epsilon \ell_1 z_+ \ell_2 \epsilon) ||\alpha|| = \epsilon \ell_1 z'_+ \epsilon \quad \text{e} \quad \ell_2 = 1$$

e, utilizando a Proposição 2 (Capítulo 2) temos que

$$(\epsilon \ell_1 z'_+ \epsilon) ||d'|| = \epsilon z'_- s \epsilon.$$

Portanto,

$$s \in |B| = |A| = L. \quad (33)$$

$$\text{Além disso, resulta que } t_2 s_2 = \epsilon z'_- s \epsilon. \quad (34)$$

Assim, de (30) e (31) obtemos que

$$(v_2 h_e b) \# (\mu w_4 \vee w_5 \neg) h_1 b = (\mu w_4 \vee w_5 \neg) h_2 b.$$

Então, utilizando (32) e as definições de h_1 e h_2 vem que

$$\#(s_2 h_d) \# (\mu w_4 \vee w_5 \neg) h_1 b = \#z'_- (\mu w_4 \vee w_5 \neg) h_2 b.$$

E de (34) segue que $s_2 = z'_- s \epsilon$ e $t_2 = \epsilon$. Logo,

$$\#(s \epsilon) h_d \# \epsilon \# (\mu w_4 \vee w_5 \neg) h_1 b = (\mu w_4 \vee w_5 \neg) h_2 b. \quad (35)$$

Examinando-se a definição de h_2 temos que

$$w_4 h_2 b = (s \epsilon) h_e \# \epsilon \# (\mu w_4 \vee w_5 \neg) (y_4 h_2 b), \text{ para algum } y_4 \text{ em } \Gamma^*$$

$$e \quad w_4 \underline{b} = s \epsilon \# \epsilon \lambda (y_4 \underline{b}) . \quad (36)$$

Então, de (35), (36) e da definição de h_1 segue que

$$(s \epsilon) h_d \# \epsilon \epsilon \epsilon \lambda (y_4 \vee w_5 \neg) h_1 \underline{b} = (y_4 \vee w_5 \neg) h_2 \underline{b} . \quad (37)$$

E, novamente, examinando-se a definição de h_2 e utilizando (20) e (36) resulta que

$$(y_4 \vee) h_2 \underline{b} = (s \epsilon) h_d \# \epsilon \epsilon \epsilon \lambda$$

$$e \quad y_4 \underline{b} = \tilde{s} \epsilon \tilde{\#} \tilde{\epsilon} . \quad (38)$$

Assim, usando (37) e a definição de h_1 temos que

$$(s \epsilon) h_e \epsilon \# \epsilon \epsilon \epsilon q'_+ \epsilon (w_5 \neg) h_1 \underline{b} = (w_5 \neg) h_2 \underline{b} . \quad (39)$$

Como $\neg h_2 \underline{b} = \epsilon \# \epsilon \epsilon \epsilon q'_- \epsilon \neg$, segue que, para algum y_5 em Γ^* ,

$$w_5 h_2 \underline{b} = (s \epsilon) h_e \epsilon \# (y_5 h_2 \underline{b}) .$$

E, pela definição de h_2 temos que

$$w_5 \underline{b} = s \epsilon \# (y_5 \underline{b}) . \quad (40)$$

Logo, de (39) e da definição de h_1 segue que

$$\epsilon \epsilon \epsilon q'_+ \epsilon (s \epsilon) h_d \# \epsilon \epsilon (y_5 \neg) h_1 \underline{b} = (y_5 \neg) h_2 \underline{b} .$$

Além disso, podemos verificar que $y_5 \in (\Gamma a)^*$.

Portanto, de (14), (17), (26), (29), (36), (38) e (40), concluímos que

$$wb = \vdash (w_2 \underline{b}) \eta \tilde{s} \tilde{\epsilon} \tilde{H} \tilde{\epsilon} z _ s \epsilon H (u_3 \underline{b}) \mu s \epsilon H \epsilon \lambda \tilde{s} \tilde{\epsilon} \tilde{H} \tilde{\epsilon} v s \epsilon H (y_5 \underline{b}) \dashv,$$

com w_2 , u_3 e y_5 em $(\Gamma a)^*$.

Então, pela definição do morfismo h_0 e de (33) segue que $wh_0 = s \in L$. Logo, $(eq(h_1, h_2))h_0 \subseteq L$.

2. UMA REPRESENTAÇÃO DE LINGUAGENS RECURSIVAMENTE ENUMERÁVEIS ATRAVÉS DE CÓDIGOS DE ATRASO UM EM SENTIDOS OPOSTOS E PERTENCENTES A PS.

Podemos demonstrar que os morfismos h_1 e h_2 construídos na demonstração do Teorema 3 pertencem a PS.

Assim, obtemos um resultado mais forte que apresentamos a seguir.

TEOREMA 4 - Para cada linguagem recursivamente enumerável $L \subseteq \Sigma^*$, existem efetivamente alfabetos Γ e Δ , um morfismo $h_0: \Gamma^* \longrightarrow \Sigma^*$ e códigos $h_1, h_2: \Gamma^* \longrightarrow \Delta^*$ pertencentes a PS, com $h_1(h_2)$ de atraso um da esquerda para a direita (da direita para a esquerda) tais que $L = (eq(h_1, h_2))h_0$.

DEMONSTRAÇÃO - É suficiente demonstrarmos que os morfismos

$h_1, h_2: \Gamma^* \longrightarrow \Delta^*$, construídos na demonstração do Teorema 3, pertencem a PS .

Inicialmente, para mostrarmos que o morfismo h_1 pertence a PS , consideremos o alfabeto

$$\Xi_1 = T_S \cup Q_S \cup \bar{T}_S \cup \bar{Q}_1 \cup \bar{K}_1 \cup \bar{K}_2 \cup \bar{\Sigma} \cup \{\eta\} \cup \{*, \vdash, \dashv\} \cup \{\epsilon, \# , \bar{\epsilon}, \bar{\#}, \bar{\epsilon}, \bar{\#}, \bar{\epsilon}\} ,$$

onde $Q_1 = \{r \in Q_S / \text{nas existem em } S \text{ arestas com término em } r \text{ e rótulo } E_\sigma^{-1} \times N, \text{ para algum } \sigma \text{ em } T_S \text{ ou } V \times N\}$,

$$K_1 = \{(\sigma, r) \in T_S \times Q_S / \text{existem em } S \text{ arestas com término em } r \text{ e rótulo } E_\sigma^{-1} \times N\} ,$$

$$K_2 = \{(\epsilon, r) \in \epsilon \times Q_S / \text{existem em } S \text{ arestas com término em } r \text{ e rótulo } V \times N\}$$

e $*$ é um novo símbolo.

Sejam os morfismos

$$p_1: \Gamma^* \longrightarrow \Xi_1^* \quad \text{e} \quad s_1: \Xi_1^* \longrightarrow \Delta^* ,$$

definidos pela Tabela 4 onde σ denota um símbolo em T_S ; $q, r, \lambda, z_-, z'_-, q_+$ e q'_+ são elementos de Q_S ; (q, i, j, r) , com $i \in E_S$ e $j \in D_S$, representa uma aresta em A_S e (σ, r) e (ϵ, r) são elementos de K_1 e K_2 , respectivamente.

Pode-se verificar que o morfismo $p_1(s_1)$ é um prefixo (sufixo).

Além disso, podemos observar que

$\gamma \in \Gamma$	γp_1	$\delta \in \Xi_1$	δs_1
$\vdash$	$\vdash * \varepsilon * q_- * \varepsilon * H *$	$\vdash$	$\vdash$
$\dashv$	$\dashv$	$\dashv$	$\dashv$
σ	$\bar{\sigma} *$	σ	σ
$\bar{\sigma}$	$\sigma *$	$\bar{\sigma}$	$\bar{\sigma}$
ε	$\bar{\varepsilon} *$	ε	ε
$\bar{\varepsilon}$	$\varepsilon *$	$\bar{\varepsilon}$	$\bar{\varepsilon}$
$\#$	$\bar{\#} *$	$\#$	$\#$
$\bar{\#}$	$\# *$	$\bar{\#}$	$\bar{\#}$
(q, E_σ, N, r)	$\bar{r} *$	$q \in Q_S \setminus \{z_-\}$	q
(q, N, D_σ, r)	$\bar{r} *$	z_-	$\$ z_-$
(q, V, N, r)	$(\bar{\varepsilon}, \bar{r}) *$	$\bar{q}, q \in Q_1$	$\bar{q}$
(q, N, V, r)	$\bar{r} * \bar{\varepsilon} *$	$(\bar{\sigma}, \bar{r})$	$\bar{\sigma} \phi \$ \bar{r}$
(q, E_σ^{-1}, N, r)	$(\bar{\sigma}, \bar{r}) *$	$(\bar{\varepsilon}, \bar{r})$	$\bar{\varepsilon} \phi \$ \bar{r}$
(q, N, D_σ^{-1}, r)	$\bar{r} * \bar{\sigma} *$	$\eta = (q_+, N, N, z_-)$	$\bar{z}_- \phi$
$(q, N, N, r) \in A_S \setminus \{\eta, \mu, \nu\}$	$\bar{r} *$	$\bar{\sigma}, \sigma \in \Sigma$	$\$ \bar{\sigma} \phi$
$\eta = (q_+, N, N, z_-)$	η	$\bar{\varepsilon}$	$\$ \bar{\varepsilon} \phi$
$\mu = (z'_-, N, N, \lambda)$	$\bar{\lambda} *$	$\bar{\#}$	$\$ \bar{\#} \phi$
$\nu = (\lambda, N, N, q'_+)$	$* \bar{q}'_+ *$	ε	$\$ \varepsilon \phi$
$\bar{q}, q \in Q_S \setminus \{\lambda\}$	$q *$	$*$	$\phi \$$
$\bar{\lambda}$	λ		
$\bar{\sigma}, \sigma \in \Sigma$	$\bar{\sigma}$		
$\bar{\varepsilon}$	$\bar{\varepsilon}$		
$\bar{\#}$	$\bar{\#}$		
$\bar{\varepsilon}$	$\bar{\varepsilon}$		
$\bar{\sigma}, \sigma \in \Sigma$	$* \bar{\varepsilon}$		
$\bar{\varepsilon}$	$* \sigma$		
$\bar{\#}$	$* \varepsilon$		
	$* \#$		

Figura 4-Definição dos morfismos p_1 e s_1 associados a h_1 .

- (i) a aresta $\mu = (z'_-, N, N, \lambda)$ é a única aresta de S com término em λ e tem rótulo $N \times N$; então $\lambda \in Q_1$;
- (ii) construímos a máquina de Turing S , mais precisamente $\mathcal{D}$, de modo que a única aresta de $\mathcal{D}$ com origem em q_+ tivesse rótulo $N \times N$. Então, $\mathcal{D}'$ tem apenas uma aresta com término em q'_+ e esta aresta tem rótulo $N \times N$; isto implica que $q'_+ \in Q_1$.

Assim, de (i), (ii) e pelas definições de h_1, p_1 e s_1 , é fácil ver que $h_1 = p_1 s_1$. Portanto, h_1 pertence a PS .

A fim de mostrarmos que o morfismo h_2 também pertence a PS , consideremos o alfabeto

$$E_2 = T_S \cup \bar{T}_S \cup \bar{Q}_S \cup Q_2 \cup K_3 \cup K_4 \cup \bar{\Sigma} \cup \{\eta\} \cup \{*, \vdash, \dashv\} \cup \{\varepsilon, \# , \bar{\varepsilon}, \bar{\#}, \bar{\varepsilon}, \bar{\#}, \bar{\varepsilon}\},$$

onde $Q_2 = \{q \in Q_S / \text{não existem em } S \text{ arestas com origem em } q \text{ e rótulo } E_\sigma \times N, \text{ para algum } \sigma \text{ em } T_S \text{ ou } V \times N\}$,

$$K_3 = \{(\sigma, q) \in T_S \times Q_S / \text{existem em } S \text{ arestas com origem em } q \text{ e rótulo } E_\sigma \times N\}$$

$$\text{e } K_4 = \{(\varepsilon, q) \in \varepsilon \times Q_S / \text{existem em } S \text{ arestas com origem em } q \text{ e rótulo } V \times N\}.$$

Sejam os morfismos

$$p_2: \Gamma^* \longrightarrow E_2^* \quad \text{e} \quad s_2: E_2^* \longrightarrow \Delta^*,$$

definidos pela *Tabela 5*, onde σ denota um símbolo em T_S ; $q, r, \lambda, z_-, z'_-, q_+$ e q'_+ são elementos de Q_S ; (q, i, j, r) , com i em E_S e j em D_S , representa uma aresta em Λ_S e (σ, q) e (ϵ, q) são elementos de K_3 e K_4 , respectivamente.

Pode-se verificar também que o morfismo $p_2(s_2)$ é um prefixo (sufixo). Além disso, podemos observar que a aresta $\mu = (z'_-, N, N, \lambda)$ é a única aresta de S com origem em z'_- e tem rótulo $N \times N$; então $z'_- \in Q_2$. Analogamente para a aresta $v = (\lambda, N, N, q'_+)$; então $\lambda \in Q_2$.

Portanto, pelas observações acima e pelas definições de h_2, p_2 e s_2 , é fácil ver que $h_2 = p_2 s_2$. Assim, h_2 pertence a PS .

Logo, completamos a demonstração do Teorema 4. ■

3. OUTRAS REPRESENTAÇÕES DE LINGUAGENS RECURSIVAMENTE ENUMERÁVEIS

Nesta seção apresentamos algumas outras representações de linguagens recursivamente enumeráveis, representações estas feitas em termos de outras linguagens mais simples.

Inicialmente, consideramos um dos primeiros resultados desse tipo obtido para linguagens livres de contexto.

$\gamma \in \Gamma$	γp_2	$\delta \in \Xi_2$	δs_2
$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$
$\dashv$	$\dashv$	$\dashv$	$\dashv$
σ	$*\sigma$	σ	σ
$\bar{\sigma}$	$*\bar{\sigma}$	$\bar{\sigma}$	$\bar{\sigma}$
ε	$*\varepsilon$	ε	ε
$\bar{\varepsilon}$	$*\bar{\varepsilon}$	$\bar{\varepsilon}$	$\bar{\varepsilon}$
$\mathbb{H}$	$*\mathbb{H}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H}$
$\bar{\mathbb{H}}$	$*\bar{\mathbb{H}}$	$\bar{\mathbb{H}}$	$\bar{\mathbb{H}}$
(q, E_σ, N, r)	$*(\sigma, q)$	$\bar{q}, q \in Q_S \setminus \{z_-\}$	$\bar{q}$
(q, N, D_σ, r)	$*q * \sigma$	$\bar{z}_-$	$\bar{z}_-$
(q, V, N, r)	$*(\varepsilon, q)$	$q \in Q_2$	q
(q, N, V, r)	$*q * \varepsilon$	(σ, q)	$\sigma \dashv q$
(q, E_σ^{-1}, N, r)	$*q$	(ε, q)	$\varepsilon \dashv q$
(q, N, D_σ^{-1}, r)	$*q$	$\eta = (q_+, N, N, z_-)$	$q_+ \dashv$
$(q, N, N, r) \in A_S \setminus \{\eta, \mu, \nu\}$	$*q$	$\bar{\sigma}, \sigma \in \Sigma$	$\bar{\sigma} \dashv$
$\eta = (q_+, N, N, z_-)$	$*\eta$	$\bar{\varepsilon}$	$\bar{\varepsilon} \dashv$
$\mu = (z'_-, N, N, \lambda)$	$*z'_-$	$\bar{\mathbb{H}}$	$\bar{\mathbb{H}} \dashv$
$\nu = (\lambda, N, N, q'_+)$	λ	$\bar{\varepsilon}$	$\bar{\varepsilon} \dashv$
$\bar{q}, q \in Q_S \setminus \{z_-, \lambda\}$	$*\bar{q}$	$*$	$\dashv$
$\bar{z}_-$	$\bar{z}_-$		
λ	$*\bar{\lambda} *$		
$\bar{\sigma}, \sigma \in \Sigma$	$\bar{\sigma}$		
$\bar{\varepsilon}$	$\bar{\varepsilon}$		
$\bar{\mathbb{H}}$	$\bar{\mathbb{H}}$		
$\bar{\varepsilon}$	$\bar{\varepsilon}$		
$\bar{\varepsilon}$	$\varepsilon *$		
$\bar{\sigma}, \sigma \in \Sigma$	$\bar{\sigma} *$		
$\bar{\varepsilon}$	$\bar{\varepsilon} *$		
$\bar{\mathbb{H}}$	$\bar{\mathbb{H}} *$		

Tabela 5 - Definição dos morfismos p_2 e s_2 associados a h_2

TEOREMA 5 - Chomsky e Schützenberger

Para cada linguagem livre de contexto L existem uma linguagem de Dyck D , uma linguagem regular R e um morfismo h tais que $L = (D \cap R)h$. ■

Na demonstração desse teorema a linguagem D depende de L . Então, obteve-se uma versão mais forte desse teorema, considerando-se uma linguagem de Dyck que dependa apenas do alfabeto Σ tal que $L \subseteq \Sigma^*$.

TEOREMA 6 -

Seja Σ um alfabeto com n letras. Existem um alfabeto Γ com $2n + 4$ letras, uma linguagem de Dyck D sobre Γ e um morfismo h de Γ^* em Σ^* tais que para cada linguagem livre de contexto L sobre Γ existe uma linguagem regular R sobre Γ com a propriedade $L = (D \cap R)h$. ■

Com relação às linguagens recursivamente enumeráveis, Salomaa (1973-Capítulo III) estabeleceu alguns resultados nesse sentido, os quais apresentamos a seguir.

TEOREMA 7 - Salomaa

Para cada linguagem recursivamente enumerável L , existem linguagens livres de contexto L_1 e L_2 e um morfismo h tais que $L = (L_1 \cap L_2)h$. ■

Nesse caso, as linguagens L_1 e L_2 e o morfismo h dependem da linguagem L . Esse resultado foi fortalecido considerando-se as linguagens L_1 e L_2 e o morfismo h dependendo apenas do alfabeto Σ tal que $L \subseteq \Sigma^*$.

TEOREMA 8 - Salomaa

Para cada linguagem recursivamente enumerável $L \subseteq \Sigma^*$, existem linguagens livres de contexto L_1 e L_2 sobre $\bar{\Sigma} \cup \{a,b\}$ e um morfismo $h: (\bar{\Sigma} \cup \{a,b\})^* \longrightarrow \Sigma^*$ tais que $L = (L_1 \cap L_2)h$. ■

Outras representações envolvendo linguagens regulares são dadas a seguir.

TEOREMA 9 - Salomaa

Seja Σ um alfabeto, com $|\Sigma| = n$. Existem alfabetos Γ_1 e Γ_2 , com $|\Gamma_1| = n+2$ e $|\Gamma_2| = 2n+8$, morfismos $h_1: \Gamma_1^* \longrightarrow \Sigma^*$ e $h_2: \Gamma_2^* \longrightarrow \Gamma_1^*$ e uma linguagem de Dyck $D \subseteq \Gamma_2^*$ satisfazendo a seguinte condição:

para cada linguagem recursivamente enumerável $L \subseteq \Sigma^*$, existem linguagens regulares R_1 e $R_2 \subseteq \Gamma_2^*$ tais que

$$L = ((D \cap R_1)h_2 \cap (D \cap R_2)h_2)h_1.$$

Esse resultado segue dos Teoremas 6 e 7. ■

O próximo Teorema é uma versão mais forte do ante-

rior, onde a linguagem L depende apenas de uma linguagem regular R .

TEOREMA 10 - Salomaa

Seja um alfabeto Σ e $\Gamma = \bar{\Sigma} \cup \{a,b\}$. Existem linguagens livres de contexto L_1 e $L_2 \subseteq \Gamma^*$ e um morfismo $h: \Gamma^* \longrightarrow \Sigma^*$ com a seguinte propriedade:

para cada linguagem recursivamente enumerável $L \subseteq \Sigma^*$, existe uma linguagem regular $R \subseteq \Gamma^*$ tal que $L = (L_1 \cap L_2 \cap R)h$. ■

Recentemente, depois dos resultados de Salomaa (1978) e de Culik (1979b) que estabeleceram representações de linguagens recursivamente enumeráveis como imagens homomórficas (ou por dgsm) de conjuntos-igualdade de morfismos de monóides livres, várias outras representações têm sido apresentadas por Culik (1979a), Culik e Maurer (1979) e Engelfriet e Rozenberg (1980).

A seguir, expomos os resultados mais significativos, dando antes algumas definições.

Seja f uma função sobre Σ^* . Então, o *conjunto-ponto-fixo* de f , denotado por $Fp(f)$, é constituído pelas palavras que são iguais à sua imagem por f . Ou seja,

$$Fp(f) = \{x \in \Sigma^* / xf = x\}.$$

Dado um alfabeto Σ , L_Σ denota o conjunto de todas

as palavras w em $(\Sigma \cup \bar{\Sigma})^*$ tais que $\overline{(wh_{\Sigma})} = wh_{\bar{\Sigma}}$, onde h_{Σ} ($h_{\bar{\Sigma}}$) é o morfismo que preserva Σ ($\bar{\Sigma}$).

Ou seja, $L_{\Sigma} = \bigcup_{x \in \Sigma^*} x \sqcup \bar{x}$, onde a operação $\sqcup$ é definida da seguinte forma. Sejam s e t em Σ^* , então

$$s \sqcup t = \{s_1 t_1 s_2 t_2 \dots s_n t_n \mid s_i, t_i \in \Sigma^* (1 \leq i \leq n), s_1 s_2 \dots s_n = s \text{ e } t_1 t_2 \dots t_n = t\}.$$

TEOREMA 11 - Engelfriet e Rozenberg

Para cada linguagem recursivamente enumerável $L \subseteq \Sigma^*$, existe uma função dgs g tal que $L = (Fp(g))h_{\Sigma}$, onde h_{Σ} é o morfismo que preserva Σ .

TEOREMA 12 - Engelfriet e Rozenberg

Para cada linguagem recursivamente enumerável L , existem morfismos h_0, h_1 e h_2 e uma linguagem regular R tais que $L = (Eq(h_1, h_2) \cap R)h_0$.

TEOREMA 13 - Engelfriet e Rozenberg

Para cada linguagem recursivamente enumerável L , existem uma substituição finita f , um morfismo h e uma linguagem regular R tais que $L = (Fp(f) \cap R)h$.

TEOREMA 14 - Engelfriet e Rozenberg

Para cada linguagem recursivamente enumerável L , existem um alfabeto Δ , uma linguagem linear determinística $M \subseteq \Delta^+ \bar{\Delta}^+$ e um morfismo tais que

$$L = (\{w(\bar{w}\rho)/w \in \Delta^+\} \cap M)h.$$

A função reversão $\rho: \Delta^* \longrightarrow \Delta^*$ é definida por

$$1\rho = 1$$

e $\forall x \in \Delta^+, x = x_1 \dots x_n$, com $x_i \in \Delta$ ($1 \leq i \leq n$),

$$x\rho = (x_1 \dots x_n)\rho = x_n \dots x_1.$$

■

TEOREMA 15 - Engelfriet e Rozenberg

Para cada linguagem recursivamente enumerável L , tem-se que:

- (i) existem um alfabeto Σ , um morfismo h e uma linguagem regular R tal que $L = (L_\Sigma \cap R)h$;
- (ii) existem morfismos f e h e uma linguagem regular R tais que $L = (L_{\{a,b\}}^{f^{-1}} \cap R)h$;
- (iii) existe uma função dgs g tal que $L = L_{\{a,b\}}^g$.

■

É interessante notar que a representação dada em (i) é análoga ao Teorema de Chomsky e Schützenberger para lin-

guagens livres de contexto.

TEOREMA 16 - Culik e Maurer

Existe uma linguagem recursivamente enumerável $U \subseteq \{a,b\}^*$ tal que para cada linguagem recursivamente enumerável $L \subseteq \Sigma^*$ existe um morfismo h e um morfismo f_Σ , que preserva Σ , tais que $L = (Uh^{-1})f_\Sigma$.

■

TEOREMA 17 - Culik e Maurer

Existe uma linguagem recursivamente enumerável $U \subseteq \{a,b\}^*$ tal que toda linguagem recursivamente enumerável L pode ser escrita como $L = Uh^{-1}$, para algum morfismo h .

■

CAPÍTULO 5

A REGULARIDADE DE CONJUNTOS-IGUALDADE DE MORFISMOS

O fato de conjuntos-igualdade de morfismos elementares serem regulares foi de importância fundamental na solução apresentada por Ehrenfeucht e Rozenberg (1978) da decidibilidade do Problema da Equivalência da Sequência para os Sistemas DOL. E isto motivou a investigação de outras restrições sobre os morfismos para que seus conjuntos-igualdade fossem regulares, o que contribuiu para a solução de novos problemas na Teoria de Sistemas de Lindenmayer, como se pode ver em Engelfriet e Rozenberg (1979) e Rozenberg e Salomaa (1980).

Assim, estudamos inicialmente alguns resultados conhecidos em que o conjunto-igualdade $Eq(f,g)$ é regular.

Em seguida, como consequência da indecidibilidade do

Problema de Correspondência de Post para códigos de atraso um, concluímos que alguns dos conjuntos-igualdade regulares não são efetivamente regulares.

Além disso, com relação à representação homomórfica de linguagens recursivamente enumeráveis, que obtivemos no Capítulo 4, concluímos que não se pode considerar os morfismos h_1 e h_2 como sendo ambos códigos de atraso limitado no mesmo sentido ou um deles sendo código de atraso limitado, porque nesses casos $\text{Eq}(h_1, h_2)$ é regular.

1. RESTRICÇÕES SOBRE OS MORFISMOS PARA QUE SEUS CONJUNTOS-IGUALDADE SEJAM REGULARES

Um tópico importante no estudo dos conjuntos-igualdade de morfismos de monóides livres é encontrar restrições sobre os morfismos f e g de modo que o conjunto-igualdade $\text{Eq}(f, g)$ seja regular.

Apresentamos, a seguir, alguns resultados conhecidos nesse sentido e que podem ser encontrados em Courcelle (1978) ou Karhumäki e Simon (1979) ou Rozenberg e Salomaa (1980).

TEOREMA 1 - Sejam f um morfismo periódico e g um morfismo injetor. Então, existe efetivamente uma palavra w (possivelmente vazia) tal que $\text{Eq}(f, g) = w^*$.

Lembremos que um morfismo $h: \Gamma^* \rightarrow \Delta^*$ é periódico se existir

algum z em Δ^* tal que para cada γ em Γ , γh pertence a z^* . ■

TEOREMA 2 - Sejam f e g códigos de atraso limitado no mesmo sentido. Então, o conjunto-igualdade $Eq(f,g)$ é regular.

TEOREMA 3 - Sejam f e g morfismos. Se f é um código de atraso limitado então o conjunto-igualdade $Eq(f,g)$ é regular.

O próximo resultado segue do Teorema 2 ou do Teorema 3.

COROLÁRIO 1 - Sejam f e g códigos de atraso limitado. Então, o conjunto-igualdade $Eq(f,g)$ é regular. ■

Com a finalidade de demonstrarmos os Teoremas 2 e 3, provamos inicialmente dois lemas.

LEMA 1 - Para cada $k \geq 0$ e morfismos f e g , o conjunto $Eq_k(f,g) = \{w/wf=wg \text{ e para cada segmento inicial próprio } u \text{ de } w, |uf| - |ug| \leq k\}$ é regular e pode ser construído efetivamente.

DEMONSTRAÇÃO - Vamos supor que $Eq_k(f,g) \subseteq \Sigma^*$.

A afirmação é verdadeira para $k=0$ porque, neste caso, $Eq_k(f,g)$ é $\{1\}$ ou Σ_1^* , para algum subconjunto Σ_1 de Σ .

Suponhamos então que $k \geq 1$ e vamos construir um autômato finito determinístico A como segue, utilizando o formalismo de Simon (1981).

O número de fitas de A é um; os alfabetos de trabalho e de entrada são iguais a Σ ; o conjunto de estados de A é dado por

$$Q = \{p, r\} \cup Q_1,$$

onde $Q_1 = \{x_+, x_- / x \in \Sigma^+ \text{ e } |x| \leq k\}$

e p é o estado inicial e final de A ; o conjunto E das arestas de A é a união dos conjuntos E_1 e E_2 que descrevemos a seguir. Para cada σ em Σ e para cada y em Σ^+ , com $|y| \leq k$,

se $\sigma f = \sigma g$ então $(p, L_\sigma, p) \in E_1$;

se $\sigma f = (\sigma g)x$ e $|x| \leq k$ então $(p, L_\sigma, x_+) \in E_1$;

se $\sigma g = (\sigma f)x$ e $|x| \leq k$ então $(p, L_\sigma, x_-) \in E_1$;

se $\sigma g = y(\sigma f)$ então $(y_+, L_\sigma, p) \in E_1$;

se $y(\sigma f) = (\sigma g)z$ e $|z| \leq k$ então $(y_+, L_\sigma, z_+) \in E_1$;

se $\sigma g = y(\sigma f)z$ e $|z| \leq k$ então $(y_+, L_\sigma, z_-) \in E_1$;

se $\sigma f = y(\sigma g)$ então $(y_-, L_\sigma, p) \in E_1$;

se $\sigma f = y(\sigma g)z$ e $|z| \leq k$ então $(y_-, L_\sigma, z_+) \in E_1$;

se $y(\sigma g) = (\sigma f)z$ e $|z| \leq k$ então $(y_-, L_\sigma, z_-) \in E_1$.

O conjunto E_2 é constituído pelas arestas (q, L_σ, r) tais que não existem em E_1 arestas em que a primeira componente é q e a segunda é L_σ , para algum σ em Σ .

É fácil verificar que o autônato A reconhece $Eq_k(f,g)$, ou seja, que $w \in Eq_k(f,g)$ sse existe um passeio $c: p \longrightarrow p$ em A tal que $w|c|=1$. Porque, sempre que A está num estado $x_+ \in Q_1$ (x_-), significa que a palavra w lida até aquele instante satisfaz $wf=(wg)x$ ($wg=(wf)x$) e quando A se encontra no estado p significa que a palavra w lida até aquele instante satisfaz $wf=wg$.

■

LEMA 2 - Sejam h_1 e $h_2: \Sigma^* \longrightarrow \Delta^*$ dois códigos de atrasos k_1 e k_2 , respectivamente, da esquerda para a direita. Sejam $k=\max\{k_1, k_2\}$ e $m=\max\{|\sigma h_i| / \sigma \in \Sigma, i=1,2\}$. Seja z em Δ^* , com $|z| \geq (k+1)m$ tal que $(u_0 h_1)z = u_0 h_2$, para algum segmento inicial u_0 de uma palavra em $Eq(h_1, h_2)$. Então, existe uma palavra w em Σ^* tal que $(wh_1)y = z(wh_2)$, com $|y| < (k+1)m$ e para cada $u \in \Sigma^*$ tal que $(uh_1)z = uh_2$, se $uv \in Eq(h_1, h_2)$ então w é um segmento inicial de v .

DEMONSTRAÇÃO - Seja u em Σ^* tal que $(uh_1)z = uh_2$.

Podemos observar que $uv \in Eq(h_1, h_2)$ sse $vh_1 = z(vh_2)$.

Afirmamos que existe no máximo um σ em Σ tal que $u\sigma$ é um segmento inicial de $uv \in Eq(h_1, h_2)$.

De fato, suponhamos que $u\sigma x$ e $u\tau y \in Eq(h_1, h_2)$. Então, $uh_2 = (uh_1)z$ é um segmento inicial de $(u\sigma x)h_1$ e $(uh_1)z$ também é um segmento inicial de $(u\tau y)h_1$.

Logo, z é um segmento inicial de ambos $(\sigma x)h_1$ e

$(\tau y)h_1$. Como $|z| \geq (k+1)m$ e $u\sigma x \in \text{Eq}(h_1, h_2)$ segue que existe um segmento inicial t de x tal que $(\sigma t)h_1$ é um segmento inicial de z e $|(\sigma t)h_1| > mk$.

Por outro lado, $(\sigma t)h_1$ é um segmento inicial de $(\tau y)h_1$. Mas, h_1 é um código de atraso k_1 da esquerda para a direita; portanto, resulta que $\sigma = \tau$.

Um tal σ em Σ existe porque u_0 é um segmento inicial de $u_0 v_0$ em $\text{Eq}(h_1, h_2)$ e σ não depende de u .

Se $||(\sigma u)h_1| - |(\sigma u)h_2|| < (k+1)m$, podemos considerar $w = \sigma$ e, nesse caso, existe uma palavra y em Δ^+ tal que

$$(\sigma u)h_1 y = (\sigma u)h_2 = (u h_2)(\sigma h_2) = (u h_1)z(\sigma h_2).$$

Logo,

$$(\sigma h_1)y = z(\sigma h_2) \quad \text{e} \quad |y| < (k+1)m.$$

Caso contrário, consideramos σ como a primeira letra de w e determinamos a seguinte de modo análogo com $u\sigma$ para u e z_1 , tal que $(u\sigma)h_1 z_1 = (u\sigma)h_2$, para z .

O fato de u_0 ser um segmento inicial de uma palavra $u_0 v_0$ em $\text{Eq}(h_1, h_2)$ garante a existência da palavra w que satisfaça as condições do enunciado. ■

Vamos então demonstrar o Teorema 2 que enunciamos novamente.

TEOREMA 2 - Sejam f e g códigos de atraso limitado no mesmo

sentido. Então, o conjunto-igualdade $E_q(f,g)$ é regular.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que f e $g: \Sigma^* \longrightarrow \Delta^*$ sejam códigos de atrasos k_1 e k_2 , respectivamente, da esquerda para a direita. Sejam $k = \max\{k_1, k_2\}$ e $m = \max\{|\sigma f|, |\sigma g| \mid \sigma \in \Sigma\}$.

Para mostrarmos que $E_q(f,g)$ é regular basta provarmos que existe um $n \geq 0$ tal que para cada u em Σ^+ que seja segmento inicial de alguma palavra em $E_q(f,g)$, $||uf| - |ug|| \leq n$.

Para cada palavra u em Σ^* , dizemos que $u\beta = ||uf| - |ug||$ é o *balanço* de u .

Seja $v \in E_q(f,g)$ e u um segmento inicial de v tal que

$$(uf)x = ug \quad \text{e} \quad |x| \geq (k+1)m.$$

Então, existem duas palavras mais curtas v_1 e v_3 tais que

$$u = v_1 v_2,$$

$$v = v_1 v_2 v_3 v_4,$$

$$(v_1 h_1)z = v h_2, \quad \text{com} \quad (k+1)m \leq |z| \leq (k+2)m$$

$$\text{e} \quad (v_1 v_2 v_3) h_1 y = (v_1 v_2 v_3) h_2, \quad \text{para algum } y \text{ tal que} \\ |y| < (k+1)m.$$

Logo, pelo Lema 2 resulta que a palavra w associada a z é $w = v_2 v_3$ e para determiná-la temos calculado todos os $(v_1 s)\beta$ tais que $v_1 s$ é um segmento inicial de $v_1 v_2 v_3$. Então,

temos computado também $(v_1 v_2)^\beta = u^\beta$.

Mas, existe um número finito de palavras z nas condições acima e portanto, também das correspondentes palavras w . Logo, existe um número finito de valores para os balanços das palavras s que são segmentos iniciais de palavras em $\text{Eq}(f, g)$ tal que sf é um segmento inicial de sg e, portanto, podemos determinar o seu máximo. Vamos denotá-lo por n_1 . Desse modo, $|x| \leq n_1$.

Analogamente, se a palavra u é tal que

$$(uf) = (ug)x \quad \text{e} \quad |x| \geq (k+1)m,$$

existe uma constante n_2 tal que $|x| \leq n_2$.

Assim, sendo $n = \max\{n_1, n_2\}$ temos que

$$\max\{u^\beta / u \text{ é um segmento inicial de } v \in \text{Eq}(f, g)\} = n.$$

Portanto, como $\text{Eq}(f, g) = \text{Eq}_n(f, g)$, segue pelo Lema 1 que $\text{Eq}(f, g)$ é regular.

OBSERVAÇÃO - Se f e g são códigos de atraso limitado da direita para a esquerda, a demonstração é análoga, utilizando o dual do Lema 2.

■

A seguir, demonstramos o Teorema 3 cujo enunciado reproduzimos a seguir.

TEOREMA 3 - Sejam f e g morfismos. Se f é um código de atraso limitado então o conjunto-igualdade $Eq(f,g)$ é regular.

DEMONSTRAÇÃO - Sejam os morfismos f e $g: \Sigma^* \longrightarrow \Delta^*$.

Suponhamos que f é um código de atraso k e seja $m = \max\{|\sigma f|, |\sigma g| \mid \sigma \in \Sigma\}$.

Como na demonstração do Teorema 2 é suficiente mostrarmos que, para cada u em Σ^+ que é um segmento inicial de alguma palavra em $Eq(f,g)$ e

$$ug = (uf)x \quad \text{ou} \quad uf = (ug)x, \quad \text{com} \quad |x| \geq (k+1)m,$$

existe um único $\sigma \in \Sigma$ tal que $u\sigma y \in Eq(f,g)$.

Se $ug = (uf)x$ e $|x| \geq (k+1)m$, segue que existe um único σ nas condições acima, pois f é de atraso limitado.

Consideremos então uma palavra u tal que u seja um segmento inicial de uv em $Eq(f,g)$ e $uf = (ug)x$, com $|x| \geq (k+1)m$.

Seja $u\sigma y$ em $Eq(f,g)$.

Como $|uf| - |ug| \geq (k+1)m$ segue que $|yg| - |yf| \geq (k+1)m$, pois $(u\sigma y)g = (u\sigma y)f = (ug)x(\sigma y)f$; o que implica que $(\sigma g)(yg) = x(\sigma f)(yf)$.

Mas, yf é um segmento final de yg e como f é de atraso limitado, segue que tal σ é único.

■

2. A NÃO EFETIVIDADE DE ALGUNS CONJUNTOS-IGUALDADE REGULARES

Na seção anterior verificamos a existência de alguns conjuntos-igualdade de morfismos de monóides livres que são regulares.

Agora, vamos estudar a efetividade desses conjuntos. Isto é, dizemos que um conjunto L é *efetivamente regular* se é possível construir algoritmicamente um autômato finito que reconheça L .

Assim, como consequência da indecidibilidade do Problema de Correspondência de Post para códigos de atraso um, obtemos os resultados que apresentamos a seguir.

TEOREMA 4 - Sejam f e g códigos de atraso um. Então, o conjunto-igualdade $Eq(f,g)$ é regular, mas não é efetivamente regular. Em particular, não é decidível se $Eq(f,g) \setminus \{1\} = \emptyset$.

DEMONSTRAÇÃO - Sejam f e g códigos de atraso um.

Vamos considerar uma instância do Problema de Correspondência de Post com os códigos f e g . Então, o seu conjunto de soluções é $Eq(f,g) \setminus \{1\}$.

Por outro lado, segue pelo Corolário 1 que $Eq(f,g)$ é regular.

Suponhamos, por absurdo, que $Eq(f,g)$ possa ser construído efetivamente. Então, é decidível se $Eq(f,g) \setminus \{1\}$ é infi

nito ou não (ou se $\text{Eq}(f,g) \setminus \{1\}$ é vazio ou não).

Assim, é possível decidir se o Problema de Correspondência de Post com os códigos f e g tem solução ou não; o que contradiz o Teorema 2 (Capítulo 3), pois os morfismos f e g são códigos de atraso um.

Portanto, $\text{Eq}(f,g)$ não é efetivamente regular. ■

COROLÁRIO 2 - Sejam f e g códigos de atraso um no mesmo sentido. Então, o conjunto-igualdade $\text{Eq}(f,g)$ não é efetivamente regular.

DEMONSTRAÇÃO - É uma consequência imediata dos Teoremas 2 e 4. ■

COROLÁRIO 3 - Sejam f e g morfismos. Se f é um código de atraso um então o conjunto-igualdade $\text{Eq}(f,g)$ não é efetivamente regular.

DEMONSTRAÇÃO - Segue imediatamente dos Teoremas 3 e 4. ■

3. CONJUNTOS-IGUALDADE NÃO REGULARES

Analizamos agora os conjuntos-igualdade de morfismos que são códigos de atraso limitado em sentidos opostos.

Vamos considerar o seguinte exemplo de Karhumäki e Simon (1979).

EXEMPLO - Sejam f e $g: \{a,b,c,d,e,f\}^* \rightarrow \{0,2,3,4,5\}^*$ morfismos definidos pela tabela abaixo:

σ	a	b	c	d	e	f
σf	0234	2323	4	24	32	5
σg	0	23	4	42	3232	4325

A palavra $w = abcb^2de^2cef$ está em $Eq(f,g)$ pois

$$\begin{aligned}
 w &= a \quad b \quad c \quad b \quad b \quad d \quad e \quad e \quad c \quad e \quad f \\
 wf = wg &= \begin{array}{cccccccccccc} \boxed{0} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{2} & \boxed{4} & \boxed{3} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{2} & \boxed{4} & \boxed{3} & \boxed{2} & \boxed{5} \end{array} \\
 w &= a \quad b \quad c \quad b \quad b \quad d \quad e \quad e \quad c \quad e \quad f
 \end{aligned}$$

Pode-se verificar que f é um prefixo; então f é um código de atraso zero da esquerda para a direita. Porém, f não é de atraso limitado da direita para a esquerda.

Também, pode-se verificar que g é um sufixo; logo, g é um código de atraso zero da direita para a esquerda. Mas, g não é de atraso limitado da esquerda para a direita.

Além disso, pode-se ver que

$$Eq(f,g) = (\{abcb^2cb^4c \dots cb^{2^n}de^{2^n}c \dots ce^{2^n}cef/n \geq 0\} \cup \{c\})^* .$$

Portanto, $Eq(f,g)$ não é nem livre de contexto.

Assim, concluímos que existem morfismos f e g , sendo que f é um código de atraso zero da esquerda para a direita e g da direita para a esquerda, de modo que o conjunto $Eq(f,g)$ não é regular.

Por outro lado, a existência de códigos f e g de atraso um em sentidos opostos, tal que $Eq(f,g)$ não é regular, segue imediatamente do Teorema 3 (Capítulo 4) e do fato de que a imagem homomórfica de um conjunto regular é regular.

▲

4. RESTRIÇÕES SOBRE OS MORFISMOS QUE REPRESENTAM AS LINGUAGENS RECURSIVAMENTE ENUMERÁVEIS ATRAVÉS DE CONJUNTOS-IGUALDADE

Vamos considerar a representação de linguagens recursivamente enumeráveis dada pelo Teorema 3 do Capítulo 4; ou seja, se L é uma linguagem recursivamente enumerável então $L = (eq(h_1, h_2))h_0$, onde h_0, h_1 e h_2 são morfismos tais que h_1 é um código de atraso um da esquerda para a direita e h_2 da direita para a esquerda.

Essa representação descreve cada linguagem recursivamente enumerável como a imagem homomórfica de um conjunto-igualdade minimal pertencente a uma classe mais restrita de conjuntos do que a considerada por Culik no Teorema 2 (Capítulo 4) porque, pelo Corolário 1 (Capítulo 1), $eq(IHOM) \subsetneq eq(HOM)$.

Além disso, com relação aos morfismos h_1 e h_2 , pode

mos concluir que:

- (1º) eles não podem ser simultaneamente códigos de atraso limitado no mesmo sentido;
- (2º) nenhum deles pode ser um código de atraso limitado.

De fato, porque em cada um desses casos, respectivamente, pelos Teoremas 2 e 3, o conjunto-igualdade $E_q(h_1, h_2)$ seria regular e, conseqüentemente $eq(h_1, h_2)$ também seria regular. Então, como a família das linguagens regulares é fechada sob morfismo, $(eq(h_1, h_2))_{h_0} = L$ seria regular; o que contradiz o Teorema 3 (Capítulo 4).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CHOMSKY, N. & SCHÜTZENBERGER, M.P. 1963. The algebraic theory of context-free languages. In: BRAFFORT, P. & HIRSCHBERG, D., eds. *Computer programming and formal systems*. Amsterdam, North-Holland. p.118-161. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics)
- COURCELLE, B. 1978. Problemes d'equivalence pour les systemes de Lindenmayer de type DOL. In: SÉMINAIRE D'INFORMATIQUE THÉORIQUE, 1977-78, S.L.p., s.c.p. p.1-16.
- CULIK, K. 1979a. On the homomorphic characterizations of families of languages. In: MAURER, H.A., ed. *Automata, languages and programming*. Berlin, Springer. p.161-170. (Lecture Notes in Computer Science, 71)
- CULIK, K. 1979b. A purely homomorphic characterization of recursively enumerable sets. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 26(2):345-350.
- CULIK, K. & FRIS, I. 1977. The decidability of the equivalence problem for DOL-systems. *Information and Control*, 35(1):20-39.
- CULIK, K. & MAURER, H.A. 1979. On simple representations of language families. *R.A.I.R.O. Informatique Théorique*, 13(3):241-250.

- EHRENFEUCHT, A. & ROZENBERG, G. 1978. Elementary homomorphisms and a solution of the DOL sequence equivalence problem. *Theoretical Computer Science*, 7(2):169-183.
- EHRENFEUCHT, A.; KARHUMÄKI, J.; ROZENBERG, G. 1982. The (generalized) Post correspondence problem with lists consisting of two words is decidable. *Theoretical Computer Science*, 21(2):119-144.
- EILENBERG, S. 1974. *Automata, languages, and machines*. New York, Academic Press. v.1. (Pure and Applied Mathematics, 59)
- ENGELFRIET, J. & ROZENBERG, G. 1979. Equality languages and fixed point languages. *Information and Control*, 43(1):20-49.
- ENGELFRIET, J. & ROZENBERG, G. 1980. Fixed point languages, equality languages, and representation of recursively enumerable languages. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 27(3):499-518.
- HOPCROFT, J.E. & ULLMAN, J.D. 1969. *Formal languages and their relation to automata*. Reading, Addison-Wesley. 242p.
- KARHUMÄKI, J. & SIMON, I. 1979. A note on elementary homomorphisms and the regularity of equality sets. *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science*, 9:16-24.
- LECERF, M.Y. 1963a. Machines de Turing réversibles. Récursive insolubilité en $n \in \mathbb{N}$ de l'équation $u = \theta^n u$, où θ est un <<isomorphisme de codes>>. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 257:2597-2600.

- LECERF, M.Y. 1963b. Récursive insolubilité de l'équation générale de diagonalisation de deux monomorphismes de monoides livres $\phi x = \psi x$. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 257:2940-2943.
- LUCCHESI, C.L. et alii. 1979. *Aspectos teóricos da computação*. Rio de Janeiro, IMPA. 292p. (Projeto Euclides)
- PERRIN, D., ed. 1980. *Théorie des codes*. In: ECOLE DE PRINTEMPS D'INFORMATIQUE THÉORIQUE, 7^a, Paris, 1979. *Actes*. Paris, Laboratoire D'Informatique Théorique et Programmation. 280p.
- POST, E.L. 1946. A variant of a recursively unsolvable problem. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 52: 264-268.
- ROZENBERG, G. & SALOMAA, A. 1980. *The mathematical theory of L systems*. New York, Academic Press. 352p.
- SALOMAA, A. 1973. *Formal languages*. New York, Academic Press. 322p. (ACM Monograph Series)
- SALOMAA, A. 1978. Equality sets for homomorphisms of free monoids. *Acta Cybernetica*, 4:127-139.
- SIMON, I. 1981. *Linguagens formais e autômatos*. Campinas, IMECC-UNICAMP. 200p. Trab. apres. à 2^a Escola de Computação, Campinas, 1981.

ÍNDICE DE SÍMBOLOS

$Eq(f, g)$	7	A	18
$eq(f, g)$	9		
$Eq_k(f, g)$	165	$Q_A, T_A, \Sigma_A, I_A, A_A$	18
$Eq(HOM)$	9	E_A, D_A	18
$Eq(IHOM)$	10	$E_\sigma, D_\sigma, E_\sigma^{-1}, D_\sigma^{-1}, V, N$	18
$eq(HOM)$	16		
$eq(IHOM)$	16	$A_A(q)$	18
		CI_A	23
$Fp(f)$	159		
		$ \alpha , c $	22, 25
P, S, PS, SP	5	$ \alpha , c $	23, 25
		$[\alpha]$	77
$\underline{b}$	85	$[\alpha], [c]$	80, 81
h_e, h_d	124		
h_Σ	6	$ A $	27
		A'	29
L_Σ	160		
$\mathbb{W}$	160		

ÍNDICE DE DEFINIÇÕES

acoplamento	57
alfabeto	
de entrada	18
de trabalho	18
aresta	18
balanço	169
codificação de uma computação	80
código	3
de atraso limitado	4
de atraso k da direita para a esquerda	3
de atraso k da esquerda para a direita	3
de atraso k (em ambos os sentidos)	4
comprimento	24
computação	24
configuração	
das fitas de A	20
instantânea de A	20
intermediária de A	77
conjunto-	
-igualdade de morfismos de monóides livres	7
-igualdade minimal de morfismos de monóides livres	9
-ponto-fixo de uma função	159

reversa(o)	
da aresta	30
da máquina de Turing.	29
do passeio.	30
 rótulo	 22,25
 término.	 18,24