DECOMPOSICAO DE
PROGRAMAS LINEARES HIERARQUICOS
ATRAVES DO ALGORITMO PRIMAL-DUAL

DÉCIO TEIXEIRA

DISSERTAÇÃO APRESENTADA

AÓ

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

EM

MATEMÁTICA APLICADA

ORIENTADOR:

Prof. Dr. CARLOS HUNES JR.

- SÃO PAULO, DEZEMBRO DE 1978 -

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Doutor Carlos Humes Junior, amigo e orientador, responsável direto pela realização deste trabalho.

À minha esposa, que, com dedicação e paciência, ajudou-me de forma inestimável. Aos meus pais, responsáveis pela minha formação. Aos meus sogros, pelo constante e valioso apoio.

Ao Professor Doutor Valdemar Waingort Setzer, que, com seus incentivos e conselhos, não me deixou desistir. Ao Professor Doutor Amílcar S. Gonçalves, pela valiosa orientação inicial. À Professora Doutora Ana Flora Pereira de Castro Humes, que me convenceu da viabilidade deste trabalho.

Aos amigos do Departamento de Processamento de Dados da Camargo Corrêa S.A. e do Departamento de Matemática Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, que através de críticas e incentivos, também contribuíram para este trabalho.

Aos amigos do Grupo de Estudos de Programação Matemática (hoje, infelizmente, inativo), com os quais aprendi uma boa parte do meu conhecimento em programação matemática.

Ao senhor João Baptista Esteves de Oliveira, pelo excelente trabalho de datilografia.

ABSTRACT

This work presents an application of the primal-dual simplex algorithm in order to solve hierarquical linear programs through decomposition. The approach presented here unifies two decomposition algorithms: one presented, in 1965, by Egon Balas, and the other, in 1971, by Amílcar S. Gonçalves. Those algorithms work by a price-adjusting procedure, much like a market mechanism.

After a brief introduction (chapter 1), we present some basic results in duality and linear programming (chapter 2). The Dantzig-Wolfe decomposition method is presented in chapter 3, and the primal-dual simplex algorithm in chapter 4.

In chapter 5, we present three important results that relate the hierarquical program to a family of subprograms, and induce us to apply the primal-dual algorithm. After that, we develop a conceptual form of a primal-dual decomposition algorithm that facilitates the proof of convergence and the understanding of the method. Moreover, through an equivalence manipulation, we introduce a modified form of the conceptual algorithm, with real advantages in decomposition.

At the end of chapter 5, we present and comment the works of Balas and Gonçalves, together with our conclusion.

Í N D I C E

CAP. 1 - INTRODUÇÃO.	1
1.1 - Apresentação.	1
1.2 - Sistema de numeração e referência	3
1.3 - Notação utilizada	4
CAP. 2 - DUALIDADE E PROGRAMAÇÃO LINEAR.	12
2.1 - Introdução.	12
2.2 - O Problema de Programação não-linear.	13
2.3 - Equivalência de Problemas	15
2.4 - Dualidade e Separação	21
2.5 - Dualidade em Programação Linear	26
2.6 - Resultados básicos de Programação Linear.	38
2.7 - O Método Simplex.	45
CAP. 3 - DECOMPOSIÇÃO DE DANTZIG-WOLFE	58
3.1 - Introdução.	58
3.2 - O Problema Original e o Problema Mestre	60
3.3 - Subproblemas e Geração de Colunas	65
3.4 - Algoritmo de Decomposição de Dantzig-Wolfe.	69
CAP. 4 - ALGORITMO PRIMAL-DUAL	74
4.1 - Introdução.	74
4.2 - O Problema Primal e os Problemas Associados	75
4.3 - Resultados básicos.	79
4.4 - O Algoritmo Primal-Dual	83
CAP. 5 - ALGORITMO PRIMAL-DUAL DE DECOMPOSIÇÃO	86
5.1 - Introdução.	86
5.2 - Resultados básicos.	87
5.3 - O Algoritmo Primal-Dual aplicado ao Problema Dual	94
5.4 - O Algoritmo Primal-Dual de Decomposição	109
5.5 - Os algoritmos de Balas e de Gonçalves	122
5.6 - Subproblemas Ilimitados e Interpretação	127
5.7 - Conclusão	136
BIBLIOGRAFIA	139
APÊNDICE - EXEMPLO NUMÉRICO.	141

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 - APRESENTAÇÃO

Sistemas constituídos de subsistemas que funcionam sob controle comum de outros subsistemas são chamados *sistemas hierárquicos*. Os problemas de otimização em sistemas hierárquicos são problemas (em geral) de programação matemática, cujas restrições apresentam-se de forma estruturada.

Tais problemas, além de possuírem estruturas especiais, possuem um grande número de restrições e de variáveis. Daí serem referidos, usualmente, como *problemas de grande porte*.

A dimensão desse tipo de problemas acarreta uma necessidade de grande quantidade de memória e de tempo de computador para sua solução. Muitas vezes, a solução, pelos métodos clássicos, torna-se impossível devido as limitações de tempo e memória. Assim, é importante o desenvolvimento de algoritmos especiais que reduzam esses requisitos computacionais, aproveitando-se das estruturas desses problemas.

Apesar de alguns trabalhos anteriores a 1960, podemos considerar essa data como o marco do grande interesse surgido por esse tipo de problemas. A partir daí, foram identi

1.1

ficadas muitas classes de problemas estruturados, e desenvolvidos muitos algoritmos para sua solução.

Essa fase iniciou-se com o trabalho [Dantzig-Wolfe, 60], onde os autores apresentam o método de decomposição conhecido como *Princípio de Decomposição de Dantzig-Wolfe*. No fim da década, a quantidade de trabalhos publicados é tão grande que chega a obscurecer o relacionamento entre os métodos.

Torna-se premente a unificação dos melhores trabalhos. Lasdon, com esse objetivo, publica um excelente livro [Lasdon, 70], onde podemos encontrar uma ótima exposição e unificação dos principais trabalhos publicados até a data.

O objetivo do nosso trabalho é uma unificação particular de dois algoritmos, um devido a Balas [Balas, 66], o outro devido a Gonçalves [Gonçalves, 71]. Os dois trabalhos procuram resolver programas lineares, cujas estruturas são blocos diagonais com blocos de ligação. O mesmo tipo de problemas tratado por Dantzig e Wolfe.

Neste trabalho, dois conceitos ocupam um papel muito importante: dualidade e equivalência de problemas. Através de dualidade, provamos alguns resultados de forma simples e compacta; através de equivalência, provamos a unificação mencionada. No capítulo 2, introduzimos esses dois conceitos, alguns resultados de dualidade em programação linear, os resultados básicos de programação linear, e o algoritmo primal-simplex.

O trabalho de Dantzig e Wolfe é apresentado no capítulo 3. Introduzimos, assim, o problema do qual nos ocupamos, e o método clássico de resolvê-lo por decomposição.

O algoritmo simplex primal-dual é a ferramenta básica de nosso trabalho. Ele é apresentado no capítulo 4, de uma forma que nos é particularmente útil.

Finalmente, no capítulo 5, o núcleo do trabalho, desenvolvemos o algoritmo primal-dual de decomposição. Inicialmente, numa forma conceitual; posteriormente, numa forma final, que mostramos ser equivalente as formas de Balas e de Gonçalves. Em seguida, após uma análise desses trabalhos, apresentamos a conclusão do nosso.

Apresentamos, também, um apêndice, contendo um exemplo numérico, onde mostramos as diferenças entre os algoritmos de Balas e de Gonçalves.

Ao final, temos a bibliografia. Nela procuramos citar apenas as obras referidas no texto, e aquelas que realmente utilizamos em nossa tarefa. Uma citação dos melhores trabalhos na área seria repetir [Lasdon, 70].

A seguir, neste capítulo, introduzimos o sistema de numeração e referência, e a notação utilizados.

1.2 - SISTEMA DE NUMERAÇÃO E REFERÊNCIA

Este trabalho está dividido em cinco capítulos numerados de 1 a 5, de um apêndice denotado pela letra A, e por

1.3

uma relação bibliográfica.

Cada capítulo (e o apêndice também) está dividido em seções numeradas sequencialmente, dentro de cada capítulo. Em cada seção, os itens (teoremas, definições, comentários, parágrafos, sentenças matemáticas, etc.) recebem um número sequencial, que é colocado ao lado, na margem esquerda.

As páginas recebem números sequências, independentes dos capítulos, que aparecem nas partes laterais inferiores das mesmas. Além disso, na parte superior direita, aparece o número da seção mais recente a qual a página pertence.

Os itens são referidos através duma identificação na forma a.b.c, onde a é o número do capítulo, b o número da seção, e c o número do item. Quando a referência é feita a um índice dentro da mesma seção, usamos somente o número do item. Alguns exemplos de referência são: "pela definição 2.5.1", "no parágrafo 3.2.5", "usando o lema 5", "substituindo 2 em 3.2.8", "na seção A.2", etc.

A bibliografia está organizada por ordem de sobrenome do autor e por ano de publicação. Assim, as referências bibliográficas são da forma [autor, ano]. Como exemplo, podemos dizer que o sistema de numeração e referência utiliza-se do seguinte "[Mangasarian, 69]".

1.3 - NOTAÇÃO UTILIZADA

A notação que utilizamos não foge dos padrões con-

vencionais da notação usada em álgebra, a menos de alguns casos, os quais explicitaremos a seguir. Em geral, os números reais e os elementos do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ são denotados por letras minúsculas. Conjuntos e matrizes reais, por letras maiúsculas.

1 Vetores

Não fazemos distinção entre "vetor linha" e "vetor coluna"; para nós, vetor é um elemento de $\mathbb{R}^n$. Denotamos os vetores por letras minúsculas, com ou sem índices superiores. Para vetores conhecidos, usamos letras do início do alfabeto; para variáveis vetoriais, letras do fim do alfabeto.

Muitas vezes, precisamos denotar valores atribuídos ou assumidos por determinadas variáveis vetoriais. Neste caso, denotamos esses valores pela mesma letra da variável vetorial com uma marca superior ($-$, $=$, $\wedge$, $\sim$, $\circ$, etc.).

As componentes dos vetores são denotadas pelas mesmas letras de seus vetores, com um índice inferior indicando a sua ordem. O vetor pode ser denotado, também, de uma forma explícita, enumerando suas componentes.

Exemplos de denotação de vetores são:

- (i) variáveis vetoriais, $u, v, x^1, y^0, w^{1,k}, (z_1, \dots, z_8), (x_i^0)_{i=1}^n$,
- (ii) vetores conhecidos: $a, b, c^1, \bar{d}^0, \hat{u}, (\hat{v}_1^1, \dots, \hat{v}_n^1), (a_i)_{i=1}^{10}$,

1.3

(iii) componentes: $a_1, v_1^0, \bar{x}_1, v_1^{1,2}$.

2 Vetores particionados

Frequentemente, precisamos trabalhar somente com um subconjunto das componentes de um vetor. Para obtermos uma notação compacta, tratamos esse subconjunto de componentes também como um vetor. Para tal, usamos as letras denotativas dos vetores, com índices inferiores denotando os subconjuntos das componentes utilizadas.

Por exemplo, sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e $I \subset \{1, \dots, n\}$ um subconjunto de índices. O vetor formado pelas componentes de x , cujos índices estão em I , é denotado por x_I . Notemos que a ordem das componentes em x_I é a mesma de seus índices em I .

Outras vezes, precisamos denotar um vetor cujas componentes são, também, componentes de outros vetores. Neste caso, as componentes do vetor em questão são tratadas como vetores.

Por exemplo, sejam $u^k \in \mathbb{R}^{m_k}$ ($k=1, \dots, n$). O vetor

$$v = (u_1^1, \dots, u_{m_1}^1, u_1^2, \dots, u_1^n, \dots, u_{m_n}^n) \in \mathbb{R}^m$$

com

$$m = \sum_{k=1}^n m_k$$

é denotado por

$$v = (u^1, \dots, u^n).$$

3

Vetores especiais

Utilizamos três classes de vetores com características especiais. Cumpre aqui, esclarecermos suas denotações e usos, a fim de não faltarmos com o rigor matemático em algumas sentenças matemáticas.

A primeira classe desses vetores é a dos vetores que possuem todas as componentes nulas. Todos os vetores dessa classe, independente do espaço ao qual pertencem, são denotados pelo símbolo 0 .

A segunda classe é a dos vetores que possuem todas as componentes iguais a 1. Independente do espaço ao qual pertencem, todos esses vetores são denotados pelo símbolo $\underline{1}$.

Finalmente, a terceira classe é a dos vetores que possuem uma componente igual a 1 e todas as outras nulas. Independentemente do espaço a que pertencem, todos os vetores que possuem a componente igual a 1 na mesma posição j são denotados pelo símbolo e^j .

As dimensões dos espaços Euclidianos, aos quais esses vetores pertencem, são obtidas pelo contexto das sentenças. Sejam, por exemplo, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ e A uma matriz $p \times n$. Então, nas sentenças

$$f(y) = \langle \underline{1}, y \rangle, \quad y \geq 0$$

1.3

$$Ax \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\langle x, e^2 \rangle + \langle y, e^2 \rangle = 0$$

os significados desses símbolos são os seguintes. O primeiro $\underline{1}$ pertence a $\mathbb{R}^m$ e o segundo a $\mathbb{R}^n$. O primeiro 0 pertence a $\mathbb{R}^m$, o segundo a $\mathbb{R}^p$, e o terceiro a $\mathbb{R}^n$. O primeiro e^2 pertence a $\mathbb{R}^n$, e o segundo a $\mathbb{R}^m$.

4 Desigualdades vetoriais

Distinguimos três tipos de desigualdades vetoriais, cujo significado é descrito pelos exemplos abaixo. Seja o vetor $x \in \mathbb{R}^n$; então

$x > 0$ significa que todas as componentes de x são positivas,

$x \geq 0$ significa que todas as componentes de x são maiores ou iguais a zero,

$x \geq 0$ significa que $x \geq 0$ e pelo menos uma componente de x é positiva.

5 Produto escalar

O produto escalar entre dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ é denotado por $\langle x, y \rangle$, e definido por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i.$$

6 Matrizes

No decorrer do trabalho, temos necessidade de denotar matrizes reais conhecidas. Para tal, utilizamos letras maiúsculas do início do alfabeto, com ou sem índices superiores.

Denotamos os elementos de uma matriz pela mesma letra denotativa da matriz, com dois índices inferiores que indiquem a linha e a coluna às quais o elemento pertence. Por exemplo, A_{jk}^1 denota o elemento da matriz A^1 que pertence a j-ésima linha e a k-ésima coluna.

Denotamos as colunas de uma matriz pela mesma letra denotativa da matriz, com um índice inferior que indica a posição da coluna dentro da matriz. Por exemplo, B_3^k denota a terceira coluna da matriz B^k .

7 Matrizes particionadas

Muitas vezes, precisamos trabalhar com matrizes cujas colunas pertencem a uma outra matriz. Usamos, em tais casos, uma notação análoga àquela usada em vetores particionados.

Sejam, por exemplo, uma matriz $B_{m \times n}$, e $I \subset \{1, \dots, n\}$ um subconjunto de índices de colunas de B . A matriz formada por essas colunas especificadas em I é denotada por B_I . Notemos, que a ordem em que as colunas comparecem em B_I é a mesma em

1.3

que seus índices aparecem em I.

8 Multiplicação de matrizes por vetores

Devido à frequente necessidade de utilizarmos símbolos de matrizes particionadas com índices superiores, procuramos não fazer uso de transposição de matrizes. Caso contrário, para evitar ambiguidades, teríamos uma notação um tanto complicada.

Essa decisão nos força a definir dois tipos de multiplicação de matriz por vetor: multiplicação à esquerda e multiplicação à direita. Em ambos os casos, o produto da multiplicação é considerado um vetor. Novamente, sem a distinção entre "vetor Linha" e "vetor coluna".

Sejam $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ e A uma matriz real $m \times n$. Definimos produto à esquerda da matriz A pelo vetor x como sendo o vetor $u \in \mathbb{R}^m$, dado por

$$u = \sum_{j=1}^n x_j A_j.$$

Definimos produto à direita da matriz A pelo vetor y , como sendo o vetor $v \in \mathbb{R}^n$, dado por

$$v = (\langle y, A_j \rangle)_{j=1}^n$$

Notemos que, em ambos os casos, devemos interpretar as colunas A_j de A , como vetores de $\mathbb{R}^n$.

9 Conjuntos

Denotamos os conjuntos por letras maiúsculas, com ou sem índices inferiores ou superiores.

O conjunto de todos os subconjuntos de um conjunto X (conjunto das partes de X) será denotado por

$$P(X).$$

Trabalhamos, frequentemente, com conjuntos de índices (números inteiros) finitos. Denotamos a cardinalidade de um conjunto J de índices por

$$|J|.$$

Algumas vezes, precisamos trabalhar com o ínfimo ou com o supremo de um conjunto de números reais. Nesses casos, consideramos o ínfimo e o supremo (de conjuntos de números reais) definidos no conjunto dos reais estendidos, isto é, em

$$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Além disso, para o caso de conjuntos vazios, usamos as duas definições abaixo. Seja X um conjunto de números reais. Então

$$\inf X = +\infty \iff X = \emptyset$$

$$\sup X = -\infty \iff X = \emptyset.$$

- n -

CAPÍTULO 2

DUALIDADE E PROGRAMAÇÃO LINEAR

2.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo, introduzimos algumas idéias e resultados básicos, que nos auxiliarão no desenvolvimento dos capítulos posteriores.

Inicialmente, apresentamos uma discussão resumida sobre os conceitos de equivalência e dualidade de problemas de programação matemática. Para tal, nos referimos a [Mangasarian, 69], [Humes, 72] e [Humes, 78].

Em seguida, discutimos o conceito de separação em programação matemática, e como dualidade pode ser aplicada para se obter separação. Basicamente, resumimos as idéias de [Geoffrion, 70], [Lasdon, 68] e [Humes, 78].

Posteriormente, particularizamos o conceito de dualidade para programação linear, provamos alguns resultados para este caso, apresentamos os resultados básicos de programação linear, e, encerrando o capítulo, apresentamos o algoritmo primal-simplex. Nesta fase, nos baseamos em [Dantzig, 69], [Simonnard, 66], [Simmons, 72] e [Mangasarian, 69].

2.2 - O PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR

Introduzimos nesta seção o *problema de programação não-linear*, bem como a nomenclatura associada. Esse problema será refletido como *problema primal*.

Seja X^0 um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$. Sejam, tam
bém, as funções

$$f: X^0 \longrightarrow \mathbb{R}$$

e

$$g: X^0 \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

1 Problema de minimização (primal)

Chamamos de problema de minimização ao problema

PM: "Minimize $f(x)$

sujeito a $g(x) \leq 0$

e a $x \in X^0$."

que pode ser reescrito como:

"Minimize $f(x)$

sujeito a $x \in X$

onde $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in X^0, g(x) \leq 0\}$."

2 Solução viável

Um ponto $x \in X^0$ é chamado *solução* de PM; *solução viável* se $x \in X$, e *solução inviável* se $x \notin X$.

O conjunto X é chamado *conjunto de soluções viáveis*, re-

2.2

gião viável ou, ainda, *conjunto das restrições* (definido pelas *restrições*).

Dizemos que PM não tem solução viável ou, simplesmente, que PM é *inviável* se X é vazio ou, de forma equivalente, se

$$\inf\{f(x) \mid x \in X\} = +\infty.$$

Se X não é vazio, dizemos que PM tem solução viável ou, simplesmente, que PM é *viável*.

3 Solução ótima

Um ponto $\bar{x} \in X$ que minimiza $f(x)$, isto é,

$$f(\bar{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in X,$$

é chamado *solução ótima* de PM.

Se existe solução ótima para PM, dizemos que ele *tem solução ótima* ou, simplesmente, que ele tem solução. Caso contrário, dizemos que PM não tem solução (ótima). É fácil ver que, PM tem solução se, e só se,

$$\inf\{f(x) \mid x \in X\} \in f(X).$$

4 Problema ilimitado e limitado

O problema PM é dito *ilimitado* se (e só se)

$$\inf\{f(x) \mid x \in X\} \in \mathbb{R}.$$

Notemos que, se PM é limitado e

$$\inf\{f(x) \mid x \in X\} \notin f(X),$$

então ele é viável, mas não tem solução. Nos casos em que essa possibilidade é descartada, dizer que PM é limitado significa dizer que ele tem solução.

É claro que os problemas de programação matemática não estão sempre na forma apresentada para o PM. Além disso, para aplicarmos determinados resultados teóricos, ou algoritmos para resolver um problema, é necessário que o mesmo esteja representado em formas bem determinadas (pelo resultado teórico ou pelo algoritmo). Surge, então, uma necessidade de transformar (*manipular*) os problemas em outras "*formas equivalentes*". Na seção seguinte procuramos discutir o conceito de equivalência.

Muitos problemas apresentam as funções f e g com características especiais, formando classes de problemas para a qual são desenvolvidos teorias e algoritmos particulares. Em nosso caso, estudaremos algoritmos para resolver uma classe específica de problemas dentro dos problemas de programação linear (isto é, quando f e g são afins).

2.3 - EQUIVALÊNCIA DE PROBLEMAS

O conceito de equivalência de problemas é um dos conceitos mais usados nos textos de programação matemática. Po

2.3

rêm, raros são aqueles que tentam dar uma noção, mesmo que informal, sobre o mesmo.

Discutiremos dois aspectos importantes sobre equivalência. O primeiro se refere ao conceito de equivalência usado em transformações de problemas, com o intuito de se aplicar técnicas especiais nos problemas transformados. Esta fase de transformação é citada em [Geoffrion, 70] como *manipulação*.

Uma discussão informal, porém importante, é encontrada em [Humes, 78]. No caso de dois problemas possuírem soluções ótimas, o autor fala de uma "definição" natural de equivalência. Ou seja, os dois problemas são equivalentes, se existem aplicações que nos permitam obter (com uma quantidade limitada de cálculo⁽¹⁾) o conjunto de soluções de qualquer um dos problemas, a partir do conjunto de soluções do outro.

Em seguida, ele analisa o caso em que os problemas não possuem soluções. Ele cita a idéia natural de se afirmar que, dados dois problemas equivalentes, o conjunto de soluções de um deles é vazio se, e só se, o conjunto de soluções do outro também é vazio. A partir daí, ele mostra as dificuldades encontradas com essa idéia, através de dois exem

---

(1) - A expressão "quantidade limitada de cálculo" é um tanto imprecisa. Por exemplo, não seria esse limite uma função das ferramentas disponíveis? Entretanto essa expressão procura evitar os problemas que ocorrerão devido as eventuais complexidades das aplicações mencionadas.

plos interessantes.

O primeiro exemplo se refere ao caso de dualidade em programação linear (ver seção 2.5). Resolver o problema primal "equivale" a resolver o dual, e vice-versa. A relação conjunto de soluções viáveis do primal vazio - conjunto de soluções viáveis do dual vazio é satisfeita no caso primal inviável - dual inviável. Mas não o é no caso primal ilimitado-dual inviável.

O segundo exemplo se refere ao algoritmo primal-simplex (ver seção 2.7). Na chamada "fase 1" (passo 1) desse algoritmo, nós resolvemos um problema auxiliar que sempre tem solução ótima. A viabilidade (inviabilidade) do problema primal "equivale" a um valor ótimo do problema auxiliar igual a (maior que) zero.

Podemos acrescentar, ainda, um terceiro exemplo. Resolver determinados problemas "equivale", muitas vezes, a resolver uma família de subproblemas. Nestes casos, temos outra dificuldade teórica, que é definir inviabilidade e limitação para a família de subproblemas.

O segundo aspecto que desejamos discutir é o que se refere a equivalência quando usada para a aplicação ou extensão de resultados teóricos. Achamos este aspecto mais importante que o primeiro, porque um descuido pode levar a dificuldades teóricas.

2.3

Analiseemos o caso de dualidade. Quando se define dualidade, apresenta-se um problema caracterizado como primal e, em seguida, define-se o seu dual. Posteriormente, ao precisar-se do dual de um problema que não está na forma em que foi apresentado o primal, transforma-se esse problema por equivalência para, em seguida, aplicar-se a definição do dual. A partir daí subentende-se que esse dual é o dual do problema original (antes da transformação).

É necessário que o conceito de equivalência utilizado neste caso seja bem definido, caso contrário podem surgir sérias dificuldades. Consideremos os três problemas definidos a seguir.

Sejam $c \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^m$ e A uma matriz real $m \times n$.

P1: "Minimize $\langle c, x \rangle$
 sujeito a $Ax \geq d$
 $x \geq 0$ com $x \in \mathbb{R}^n$."

P2: "Minimize $\langle c, x \rangle + c_0$
 sujeito a $Ax \geq d$
 $x \geq 0$ com $x \in \mathbb{R}^n$."

P3: "Maximize $\langle d, u \rangle$
 sujeito a $uA \leq c$
 $u \geq 0$ com $u \in \mathbb{R}^m$."

É claro, sob o primeiro aspecto de equivalência, que P1 e P2 são equivalentes. Por outro lado, sabemos, por dua-

lidade em programação linear (seção 2.5), que P3 é o dual de P1. Apesar da equivalência entre P1 e P2, não podemos tomar P3 como dual de P2, sob pena de invalidar, por exemplo, o teorema fraco de dualidade (ver teorema 2.5.3).

Em nosso trabalho, para evitarmos confusão sobre que aspecto de equivalência estamos utilizando, fazemos a seguinte distinção. Quando usamos o conceito de equivalência sob o primeiro aspecto, colocamos a palavra equivalência entre aspas. Sem essa ressalva, significa que estamos usando equivalência conforme a definição dada a seguir.

1 Definição de equivalência

Sejam os conjuntos não vazios $X^0 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ e $Y^0 \subset \mathbb{R}^{n_2}$. Sejam as funções

$$f_1: X^0 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f_2: Y^0 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Consideremos os problemas:

PE1: "Minimize $f_1(x)$
sujeito a $x \in X$
onde $X \subset X^0$.",

PE2: "Minimize $f_2(y)$
sujeito a $y \in Y$
onde $Y \subset Y^0$.",

2.3

PE1': "Maximize $f_1(x)$

sujeito a $x \in X$

onde $X \subset X^0$."

PE2': "Maximize $f_2(y)$

sujeito a $y \in Y$

onde $Y \subset Y^0$."

Dizemos que PE1 e PE2 (ou PE1' e PE2') são *equivalentes* se, e só se, existem duas funções

$$\phi: X^0 \longrightarrow P(Y^0) - \emptyset$$

e

$$\psi: Y^0 \longrightarrow P(X^0) - \emptyset$$

tais que as quatro sentenças abaixo são verdadeiras:

$$(i) \quad \phi(X) \triangleq \bigcup_{x \in X} \phi(x) = Y,$$

$$(ii) \quad \psi(Y) \triangleq \bigcup_{y \in Y} \psi(y) = X,$$

$$(iii) \quad \text{Se } y \in \phi(x), \text{ então } f_1(x) = f_2(y),$$

$$(iv) \quad \text{Se } x \in \psi(y), \text{ então } f_1(x) = f_2(y). \quad \blacksquare$$

A partir dessa definição podemos provar os seguintes resultados:

(a) PE1 (ou PE1') é viável, inviável, limitado ou ilimitado se, e só se, PE2 (ou PE2') é viável, inviável, limitado ou ilimitado, respectivamente.

(b) Se $\bar{x} \in X$ é solução ótima de PE1 (ou PE1'), então $\bar{y} \in \phi(\bar{x})$

é solução ótima de PE2 (ou PE2').

- (c) Se $\bar{y} \in Y$ é solução ótima de PE2 (ou PE2'), então $\bar{x} \in \psi(\bar{y})$ é solução ótima de PE1 (ou PE1').

Essa definição nos possibilita usar o conceito de equivalência com rigor na construção de problemas duais. Devemos notar, entretanto, que ela é muito restritiva. Por exemplo, os problemas

"Minimize $f(x)$ sujeito a $x \in X$."

e

"Maximize $-f(x)$ sujeito a $x \in X$."

não são equivalentes segundo essa definição.

2.4 - DUALIDADE E SEPARAÇÃO

Consideremos o problema primal PM, definido em 2.2.1. Chamamos de *problema dual* de PM ao seguinte problema.

1 Problema dual

D: "Maximize $F(u)$
 sujeito a $u \geq 0$
 e a $u \in U^0$

onde

$$U^0 = \{u \in \mathbb{R}^m \mid \inf\{f(x) + \langle u, g(x) \rangle \mid x \in X^0\} \in \mathbb{R}\},$$

$$F: U^0 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$F(u) = \inf\{f(x) + \langle u, g(x) \rangle \mid x \in X^0\}."$$

que pode ser reescrito como:

"Maximize $F(u)$

sujeito a $u \in U$

onde $U = \{u \in \mathbb{R}^m \mid u \in U^0, u \geq 0\}."$

Esta definição pode nos levar a seguinte conclusão: somente os problemas que estão na forma primal PM possuem dual. Ora, isso não é o que desejamos: gostaríamos que todo problema de programação matemática possuísse um dual associado.

Porém, podemos definir para cada tipo de problemas, o seu respectivo dual. Um modo (usual) de estender a definição acima é adicionar a ela as duas condições abaixo:

- (i) O problema dual de PM é o dual de todos os problemas e equivalentes a PM,
- (ii) Os problemas equivalentes do dual D, são duais de PM

Notemos que, agora, o nosso conceito de dualidade envolve o conceito de equivalência. Daí a nossa preocupação, na seção anterior, em estabelecer uma definição de equivalência.

Apesar das duas condições adicionais, ainda podemos ter problemas que não possuam equivalentes na forma primal PM. Neste caso, os duais desses problemas precisam ser

definidos de outro modo. Por exemplo, os problemas de maximização não possuem duais conforme a definição de equivalência adotada.

Notemos também, que a condição adicional (ii) possibilita a existência de múltiplos duais para o PM. Assim, é importante que, ao estabelecermos um resultado em dualidade, seja caracterizado, de forma bem clara, a que par primal-dual esse resultado se refere.

Podemos apresentar, agora, o conceito de separação em programação matemática, e como dualidade pode ser usada para se induzir separação.

O conceito de separação pode ser entendido facilmente pela seguinte manipulação. Consideremos o problema

$$\begin{aligned} 2 \quad \text{PS: "Minimize } & \sum_{i=1}^n f_i(x^i) \\ & \text{sujeito a } g^i(x^i) \leq 0 \quad (i=1, \dots, n) \\ & \text{e a } x^i \in X^i \quad (i=1, \dots, n) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} & x^i \in \mathbb{R}^{n_i}, \\ & f_i: X^i \longrightarrow \mathbb{R}, \\ & g^i: X^i \longrightarrow \mathbb{R}^{m_i}, \quad (i=1, \dots, n). \end{aligned}$$

Associemos a esse problema PS os n subproblemas.

2.4

$$\begin{aligned} 3 \quad \text{PS}_i: & \text{"Maximize } f_i(x^i) \\ & \text{sujeito a } g^i(x^i) \leq 0 \\ & x^i \in X^i." \quad (i=1, \dots, n). \end{aligned}$$

É fácil provar que $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ é solução ótima de PS se, e só se, $\bar{x}^i$ é solução ótima de PS_i ($i=1, \dots, n$).

Essa manipulação é o que [Geoffrion, 70] reconhece como *separação*.

A dualidade pode ser usada como uma manipulação em várias condições. Vejamos um exemplo, que induz separação, a apresentado em [Lasdon, 68].

Sejam $X^i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ ($i=1, \dots, n$) subconjuntos não vazios. Sejam as funções

$$\begin{aligned} f_i: X^i &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ g^i: X^i &\longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad (i=1, \dots, n). \end{aligned}$$

Consideremos o problema

$$\begin{aligned} 4 \quad \text{PDL: "Minimize } & \sum_{i=1}^n f_i(x^i) \\ & \text{sujeito a } \sum_{i=1}^n g^i(x^i) \leq d \\ & \text{e a } x^i \in X^i \quad (i=1, \dots, n) \\ & \text{onde } d \in \mathbb{R}^m. " \end{aligned}$$

Nos capítulos 3 e 5 estudamos algoritmos especiais para resolver este problema, no caso particular em que as funções f_i e g^i ($i=1, \dots, n$) são lineares.

O problema dual de PDL é

5 DDL: "Maximize $F(u)$
 sujeito a $u \in U$
 onde

$$U^0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \mid \inf \left\{ \sum_{i=1}^n f_i(x^i) + \langle u, \sum_{i=1}^n g^i(x^i) - d \rangle \mid x^i \in X^i, i=1, \dots, n \right\} \right\},$$

$$F: U^0 \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$F(u) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n f_i(x^i) + \langle u, \sum_{i=1}^n g^i(x^i) - d \rangle \mid x^i \in X^i, i=1, \dots, n \right\}$$

e

$$U = \left\{ u \in \mathbb{R}^m \mid u \in U^0, u \geq 0 \right\}."$$

Transformando $F(u)$ temos

$$F(u) = \langle -d, u \rangle + \sum_{i=1}^n F_i(u)$$

com

$$F_i(u) = \inf \{ f_i(x^i) + \langle u, g^i(x^i) \rangle \mid x^i \in X^i \}, \quad (i=1, \dots, n).$$

Notemos que no dual DDL podemos obter separação em termos da variável $(x^1, \dots, x^n)$. Isto é, dado um valor $\bar{u}$ para u , podemos calcular $F(\bar{u})$ através das soluções dos subproblemas

$$\text{"Minimize } f_i(x^i) + \langle \bar{u}, g^i(x^i) \rangle$$

$$\text{sujeito a } x^i \in X^i, \quad (i=1, \dots, n)."$$

Notemos, também, que esse par de problemas, PDL e DDL, modelam um problema de minimização de custos num sistema hierárquico. Por exemplo, uma indústria com n fábricas de seja minimizar seu custo global, para o qual cada fábrica contribui com uma parcela $f_i(x^i)$. Para manter seu "nível de produção" x^i , cada fábrica consome uma quantidade $g_k^i(x^i)$ do recurso k da indústria, cuja disponibilidade é d_k .

A administração da indústria pode ser descentralizada, vendendo-se a cada fábrica os recursos por um preço u . Cada fábrica teria então sob seu controle o problema de minimizar seus custos, independentemente das outras fábricas. Isto corresponde a resolver os subproblemas descritos acima. Notemos que o problema de controle central da indústria será, agora, o de escolher o preço u dos recursos de tal forma que os ótimos das fábricas correspondam ao ótimo da indústria.

2.5 - DUALIDADE EM PROGRAMAÇÃO LINEAR

Consideremos o problema PM definido em 2.2.1. Se as funções f e g são afins, PM é chamado *problema de programação linear*.

Esse problema pode se apresentar em várias formas "equivalentes". Não nos preocuparemos com o estudo específico das mesmas, mas sim com o estudo de uma forma geral, da qual derivamos uma série de formas equivalentes.

1 Problema de programação linear na forma geral

Sejam A^1 e A^2 matrizes reais $m_1 \times n$ e $m_2 \times n$ respectivamente, $c \in \mathbb{R}^n$, $d^1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $d^2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ e o subconjunto de índices $K \subset N = \{1, \dots, n\}$.

Definimos o problema de programação linear na forma geral como

PLG: "Minimize $f(x) = \langle c, x \rangle$

sujeito a $A^1 x \geq d^1$,

$A^2 x = d^2$,

$x_K \geq 0$

com $x \in \mathbb{R}^n$."

Construímos, a seguir, o dual de PLG, através de transformações equivalentes. Uma forma equivalente do PLG é

"Minimize $f(x) = \langle c, x \rangle$

sujeito a $d - Ax \leq 0$

$$\text{onde } A = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ -A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}, \quad A_j^3 = \begin{cases} e^j & \text{para } j \in K \text{ e} \\ 0 & \text{para } j \notin K \end{cases}$$

$$d = (d^1, d^2, -d^2, 0) \in \mathbb{R}^m,$$

$$m = m_1 + 2m_2 + n. "$$

Pela definição de dualidade 2.4.1, o dual desse pro

blema é

"Maximize $F(u)$

sujeito a $u \in U$

onde

$$U^0 = \{u \in \mathbb{R}^m \mid \inf\{\langle c, x \rangle + \langle u, d - Ax \rangle \mid x \in \mathbb{R}^n\} \in \mathbb{R}\},$$

$$F: U^0 \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$F(u) = \inf\{\langle c, x \rangle + \langle u, d - Ax \rangle \mid x \in \mathbb{R}^n\} \text{ e}$$

$$U = \{u \in \mathbb{R}^m \mid u \in U^0, u \geq 0\}."$$

A função $F(u)$ pode ser escrita como

$$F(u) = \inf\{\langle u, d \rangle + \langle c - uA, x \rangle \mid x \in \mathbb{R}^n\},$$

de onde é fácil ver que

(i) se $c - uA \neq 0$, então $u \notin U$,

(ii) se $c - uA = 0$, então $F(u) = \langle d, u \rangle$.

Logo, podemos dizer que o problema acima é equivalente a

"Maximize $F(u) = \langle d, u \rangle$

sujeito a $uA = c$

$$u \geq 0."$$

que pode ser escrito como

"Maximize $F(u) = \langle d, u \rangle$

$$\text{sujeito a } u^1 A^1 + v^1 A^2 - v^2 A^2 + v^3 A^3 = c$$

$$u = (u, v^1, v^2, v^3) \geq 0."$$

Fazendo $u^2 = v^1 - v^2$, temos uma forma equivalente que usaremos como o dual de PLG.

2 , Problema dual de PLG

DLG: "Maximize $\langle d^1, u^1 \rangle + \langle d^2, u^2 \rangle$

sujeito a $u^1 A_K^1 + u^2 A_K^2 \leq c_K$

$$u^1 A_L^1 + u^2 A_L^2 = c_L$$

$$u^1 \geq 0 \text{ com } u^1 \in \mathbb{R}^{m_1}, u^2 \in \mathbb{R}^{m_2}$$

e onde $L = N - K$." ■

Notemos que cada variável do primal PLG está associada a uma restrição do dual DLG e vice-versa.

A seguir, provamos alguns resultados básicos, que poderiam ser derivados de resultados conhecidos de dualidade em programação não-linear. Usamos para tal o par PLG-DLG como par primal-dual. Esses resultados valem para qualquer par primal-dual obtidos de PLG e DLG, respectivamente, pela supressão das matrizes A_1 ou A_2 (e de d^1 ou d^2), ou fazendo K igual ao vazio ou a N . Posteriormente, discutiremos o aspecto da reciprocidade entre o primal e o dual.

3 Teorema fraco de dualidade

Se $\bar{x}$ é solução viável do primal e $\bar{u}$ é solução viável do dual, então $\langle c, \bar{x} \rangle \geq \langle d, \bar{u} \rangle$.

2.5

PROVA - Devido a viabilidade de $\bar{x}$ e de $\bar{u}$ temos

$$d_1 \leq A^1 \bar{x}, \quad d^2 = A^2 \bar{x}, \quad x \geq 0$$

e

$$c_K \geq \bar{u}^1 A_K^1 + \bar{u}^2 A_K^2, \quad c_L = \bar{u}^1 A_L^1 + \bar{u}^2 A_L^2, \quad \bar{u}^1 \geq 0$$

com

$$A = \begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \end{bmatrix}, \quad d = (d^1, d^2) \quad \text{e} \quad \bar{u} = (\bar{u}^1, \bar{u}^2).$$

Podemos, então, escrever que

$$\langle c, \bar{x} \rangle \geq \langle \bar{u} A, \bar{x} \rangle = \langle A \bar{x}, \bar{u} \rangle =$$

$$\langle A^1 \bar{x}, \bar{u}^1 \rangle + \langle A^2 \bar{x}, \bar{u}^2 \rangle \geq$$

$$\langle d_1, \bar{u}^1 \rangle + \langle d_2, \bar{u}^2 \rangle = \langle \bar{d}, \bar{u} \rangle. \quad \blacksquare$$

Do teorema fraco de dualidade seguem três corolários descritos a seguir.

4 Corolário

Se $\bar{x}$ é solução viável do primal, $\bar{u}$ é solução viável do dual, e $\langle c, \bar{x} \rangle = \langle \bar{d}, \bar{u} \rangle$, então $\bar{x}$ é solução ótima do primal, e $\bar{u}$ solução ótima do dual.

PROVA - Para todo solução viável x do primal temos

$$\langle c, x \rangle \geq \langle c, \bar{x} \rangle.$$

De fato, pois se para $\hat{x}$ solução viável do primal tivéssemos

$$\langle c, \hat{x} \rangle < \langle c, \bar{x} \rangle,$$

então, pela hipótese,

$$\langle c, \bar{x} \rangle < \langle d, \bar{u} \rangle$$

contrariando o teorema fraco de dualidade. Logo $\bar{x}$ é solução ótima do primal. De modo análogo provamos que $\bar{u}$ é solução ótima do dual. ■

5 Corolário

Se o primal e o dual são viáveis, então ambos possuem soluções ótimas.

PROVA - Seja $\bar{u}$ uma solução viável do dual. Pelo teorema fraco de dualidade temos, para toda solução viável x do primal, que

$$\langle c, x \rangle \geq \langle d, \bar{u} \rangle.$$

Como a função objetivo $\langle c, x \rangle$ é contínua e limitada inferiormente por $\langle d, \bar{u} \rangle$, e o conjunto de soluções viáveis do primal é fechado, segue (de teorema de análise matemática) que o primal tem solução ótima. De modo análogo provamos que o dual tem solução ótima. ■

6 Corolário

Se o primal (dual) é ilimitado, então o dual (primal) é inviável.

PROVA - Provemos a primeira parte por contradição. Suponha-

2.5

mos que o dual tenha uma solução viável $\bar{u}$. Então, pelo teorema fraco de dualidade, a função $\langle c, x \rangle$ está limitada inferiormente pelo valor $\langle d, \bar{u} \rangle$, contrariando a hipótese. Logo o dual é inviável. A segunda parte prova-se de modo análogo. ■

A prova do resultado que apresentamos a seguir é uma consequência dum conhecido teorema de alternativas, o qual enunciamos abaixo.

7 Teorema de Farkas

Sejam A uma matriz real $m \times n$ e c um vetor de $\mathbb{R}^n$. Então ou

$$Ax \leq 0, \langle c, x \rangle > 0 \text{ tem solução } x \in \mathbb{R}^n,$$

ou

$$yA = c, y \geq 0 \text{ tem solução } y \in \mathbb{R}^m,$$

mas não ambos. ■

8 Teorema

Se o primal (dual) tem solução ótima, então o dual (primal) também tem.

PROVA - O conjunto de soluções viáveis do dual pode ser escrito como

$$Ax \leq d$$

com

$$d = (-d^1, -d^2, d^2, 0) \in \mathbb{R}^m, m = m_1 + 2m_2 + n$$

e

$$A = \begin{bmatrix} -A^1 \\ -A^2 \\ A^2 \\ -A^3 \end{bmatrix} \text{ com } A_j^3 = \begin{cases} e^j & \text{para } j \in K \\ 0 & \text{para } j \notin K. \end{cases}$$

Consideremos $c \neq 0$, pois, caso $c = 0$, segue trivialmente que $\bar{u} = 0$ é solução ótima do dual.

Seja $\bar{x}$ uma solução ótima do primal, e sejam I e J os conjuntos de índices das restrições ativas e inativas, respectivamente; isto é,

$$9 \quad I = \{i \in M \mid \langle \bar{x}, (A')_i \rangle = d_i\}$$

$$10 \quad J = \{i \in M \mid \langle \bar{x}, (A')_i \rangle < d_i\} \quad \text{e}$$

$$M = \{1, \dots, m\}.$$

Provemos, inicialmente, que I não é vazio.

De fato, se $I = \emptyset$, então $\bar{x}$ seria um ponto interior do conjunto de soluções viáveis e, portanto, não seria solução ótima.

Sendo I não vazio, provemos que o sistema

$$11 \quad x(A')_I \leq 0, \quad \langle -c, x \rangle > 0$$

não tem solução $x \in \mathbb{R}^n$. Suponhamos, por contradição, que $\hat{x}$ seja uma solução desse sistema. Então, de 11, temos para todo escalar $\lambda > 0$

2.5

$$12 \quad \lambda \hat{x}(A')_I \leq 0, \quad \lambda \langle c, \hat{x} \rangle < 0$$

De 9, 10 e 12 seguem

$$\langle c, \bar{x} + \lambda \hat{x} \rangle = \langle c, \bar{x} \rangle + \lambda \langle c, \hat{x} \rangle < \langle c, \bar{x} \rangle, \quad \forall \lambda > 0$$

$$(\bar{x} + \lambda \hat{x}) \cdot (A')_I - d_I = (\bar{x}(A')_I - d_I) + \lambda \hat{x}(A')_I \leq 0, \quad \forall \lambda > 0$$

$$(\bar{x} + \lambda \hat{x}) \cdot (A')_J - d_J = (\bar{x}(A')_J - d_J) + \lambda \hat{x}(A')_J \leq 0 \text{ para algum } \lambda > 0.$$

As sentenças acima mostram que $\bar{x} + \lambda \hat{x}$, para algum $\lambda > 0$, é solução viável do primal e fornece um valor para a função objetivo menor que o valor ótimo. Logo o sistema 11 não tem solução.

Pelo teorema de Farkas, concluímos que o sistema

$$(A')_I y = -c, \quad y \geq 0 \text{ tem solução } \bar{y} \in \mathbb{R}^p \text{ com } p = |I|.$$

Fazendo $\bar{v} \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\bar{v}_i = \begin{cases} \bar{y}_i & \text{para } i \in I \\ 0 & \text{para } i \notin I \end{cases}$$

temos

$$\bar{v}A = -c, \quad \bar{v} \geq 0$$

provando que o sistema

$$u^1 A^1 + v^1 A^2 - v^1 A^2 + v^3 A^3 = c$$

$$v = (u^1, v^1, v^2, v^3) \geq 0 \text{ tem solução } \bar{v} \in \mathbb{R}^m.$$

E, fazendo $u^2 = v^1 - v^2$, podemos dizer que o sistema

$$u^1 A_K^1 + u^2 A_K^2 \leq c_K$$

$$u^1 A_L^1 + u^2 A_L^2 = c_L$$

$$u^1 \geq 0 \text{ tem solução } \bar{u} = (\bar{u}^1, \bar{u}^2) \in \mathbb{R}^{m_1 + m_2}$$

Logo o dual é viável. Além disso, temos

$$\begin{aligned} \langle d, \bar{u} \rangle &= \langle d^1, \bar{u}^1 \rangle + \langle d^2, \bar{u}^2 \rangle = \langle d^1, \bar{u}^1 \rangle + \langle d^2, \bar{v}^1 \rangle + \\ &\quad - \langle d^2, \bar{v}^2 \rangle + \langle 0, \bar{v}^3 \rangle = \langle -d, \bar{v} \rangle = \\ &= \langle -d_I, \bar{y} \rangle = \langle -\bar{x}(A')_I, \bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, -(A')_I \bar{y} \rangle = \\ &= \langle c, \bar{x} \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, pelo corolário 4, segue que $\bar{u}$ é solução ótima do dual.

A segunda parte do teorema prova-se de modo análogo. ■

13 Corolário

Se o primal e o dual possuem soluções ótimas, então seus valores ótimos são iguais. ■

A seguir, mostramos um exemplo que prova a existência da relação primal inviável-dual inviável. Consideremos o problema

$$\text{"Minimize } 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{sujeito a } x_1 + x_2 = 2$$

$$x_1 + x_2 = 3."$$

e o seu dual

$$\text{"Maximize } 2u_1 + 3u_2$$

$$\text{sujeito a } u_1 + u_2 = 2$$

$$u_1 + u_2 = 3."$$

É fácil ver que os dois problemas são inviáveis.

Os resultados apresentados até agora implicam nos dois teoremas seguintes.

14 Teorema de existência

Seja o par de problemas primal (PLG)-dual (DLG). Então uma, e só uma, das sentenças abaixo é verdadeira:

- (i) o primal e o dual são inviáveis,
- (ii) o primal e o dual possuem soluções ótimas,
- (iii) o primal (dual) é ilimitado e o dual (primal) é inviável. ■

15 Teorema de dualidade

Uma solução viável $\bar{x}$ ($\bar{u}$) do primal (dual) é ótima se, e só se, existe uma solução viável $\bar{u}$ ($\bar{x}$) do dual (primal) tal que $\langle c, \bar{x} \rangle = \langle d, \bar{u} \rangle$. Além disso, $\bar{u}$ ($\bar{x}$) é solução ótima do dual (primal). ■

Finalmente, provamos a seguir o último resultado

desta seção.

16 Teorema fraco das folgas complementares

Sejam $\bar{x}$ e $\bar{u}$ soluções viáveis do primal e do dual, respectivamente. Então $\bar{x}$ e $\bar{u}$ são soluções ótimas se, e só se,

$$\begin{aligned} 17 \quad & \langle c - \bar{u}A, \bar{x} \rangle = 0 \\ & \langle A\bar{x} - d, \bar{u} \rangle = 0 \end{aligned}$$

com

$$A = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad d = (d^1, d^2).$$

PROVA - Devido a viabilidade de $\bar{x}$ e $\bar{u}$, temos

$$\begin{aligned} 18 \quad & \langle c - \bar{u}A, \bar{x} \rangle \geq 0 \\ & \langle A\bar{x} - d, \bar{u} \rangle \geq 0, \end{aligned}$$

que somadas membro a membro resultam em

$$19 \quad \langle c - \bar{u}A, \bar{x} \rangle + \langle A\bar{x} - d, \bar{u} \rangle = \langle c, \bar{x} \rangle - \langle d, \bar{u} \rangle \geq 0$$

Se $\bar{x}$ e $\bar{u}$ são soluções ótimas, então, de 13, 19 e 18 segue 17. Se 17 são verdadeiras, então, de 19 e 4, segue que $\bar{x}$ e $\bar{u}$ são solução ótimas. ■

Em boa parte dos textos de programação linear, encontramos a seguinte afirmação: o dual do dual é o primal.

2.6

Este resultado, conhecido por auto-dualidade, em geral não vale em programação não-linear.

Quando essa afirmação é demonstrada, esbarra-se no conceito de equivalência. Usando a definição de equivalência 2.3.1 e a definição de dualidade 2.4.1, não podemos prová-la. Poderíamos adicionar mais algumas condições na definição de dualidade a fim de provarmos essa afirmação. Porém, achamos desnecessária tal tarefa, pelo seguinte. Todos os resultados provados até aqui valem de um modo bilateral; isto é, se trocássemos as denominações de primal e dual, todos os resultados continuariam válidos. Então, basta definirmos o pri^{ma}l como sendo o dual do dual.

2.6 - RESULTADOS BÁSICOS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Nesta seção e na seção seguinte, apresentamos definições e resultados básicos para uma forma do problema de programação linear que chamamos de *forma padrão*. Esses resultados devem ser usados com cuidado para outras formas do problema de programação linear; muitas vezes, eles não são válidos, como mostraremos no fim da seção.

1 Problema de programação linear na forma padrão

Sejam A uma matriz real $m \times n$, $c \in \mathbb{R}^n$ e $d \in \mathbb{R}^m$. Chamamos forma padrão do problema de programação linear ao pro-

blema

PLP: "Minimize $f(x) = \langle c, x \rangle$

sujeito a $Ax = d, d \geq 0$

$x \geq 0$

com $x \in \mathbb{R}^n$."

Notemos que a forma padrão pode ser obtida da forma geral 2.5.1, eliminando-se A^1 e fazendo $A = A^2$ e $K = N$. Assim, todos os resultados da seção anterior valem para o PLP e seu dual, que será introduzido mais tarde.

Devemos notar, também, que alguns autores chamam o PLP de forma canônica. Nós preferimos deixar este nome para o problema de maximização

"Maximize $\langle d, u \rangle$

sujeito a $uA \leq c$

$u \geq 0$ com $u \in \mathbb{R}^m$."

Isto porque a simples adição de variáveis de folga transforma o sistema $uA \leq c$ num sistema canônico de equações. Entretanto, quando a matriz A do PLP está na forma reduzida (forma normal de Hermite [Monteiro, 69]) chamamos o PLP de *sistema canônico*.

Suporemos que o sistema $Ax = d$ é não-redundante e compatível, isto é, que a característica de A é igual a m . Estas hipóteses serão relaxadas na seção seguinte.

A seguir, apresentamos as definições relativas a soluções básicas.

2 Soluções básicas

Seja I um subconjunto do conjunto de índices das colunas da matriz A tal que $|I| = m$. Dizemos que A_I é uma base de PLP se, e só se, A_I é uma submatriz regular de A . Dizemos, de modo mais simples, que I é uma base de PLP.

As variáveis x_j tais que $j \in I$ são chamadas variáveis básicas; as outras ($j \notin I$) são ditas secundárias ou não-básicas.

A solução $\bar{x}$ definida por

$$3 \quad \bar{x}_I = (A_I)^{-1} \cdot d, \quad \bar{x}_J = 0$$

onde

$$4 \quad J = N - I \text{ e } N = \{1, \dots, n\},$$

é chamada solução básica associada à base I .

Se $\bar{x} \geq 0$, dizemos que $\bar{x}$ é solução básica viável, e I é dita uma base viável.

Se $\bar{x}_j = 0$ para algum $j \in I$, dizemos que $\bar{x}$ é solução básica degenerada. ■

A seguir, mostramos como o PLP pode ser transformado num sistema canônico.

5 O PLP como um sistema canônico

Seja I uma base viável do PLP e seja $\bar{x}$ a solução básica viável associada. De 1 e 4 podemos escrever

$$6 \quad A_I x_I + A_J x_J = d.$$

Definindo

$$7 \quad Y = (A_I)^{-1} \cdot A_J,$$

e usando 3, podemos escrever 6 como

$$x_I = \bar{x}_I - Y_J \cdot x_J$$

ou

$$8 \quad x_I = \bar{x}_I - \sum_{j \in J} x_j Y_j$$

Substituindo 8 na função objetivo do PLP, temos

$$\begin{aligned} f(x) &= \langle c_I, x_I \rangle + \langle c_J, x_J \rangle = \langle c_I, \bar{x}_I \rangle + \langle c_J, x_J \rangle + \\ &\quad - \sum_{j \in J} x_j \langle c_I, Y_j \rangle = \langle c_I, \bar{x}_I \rangle + \sum_{j \in J} (\bar{c}_j - \langle c_I, Y_j \rangle) x_j, \end{aligned}$$

que pode ser escrita como

$$9 \quad f(x) = \langle c, \bar{x} \rangle + \sum_{j \in J} \bar{c}_j \cdot x_j$$

onde

$$10 \quad \bar{c}_j = c_j - \langle c_I, Y_j \rangle, \quad j \in N$$

são chamados *fatores de custo relativo* associados as variáveis

2.6

x_j ($j \in N$).

Podemos escrever, agora, o PLP como um sistema canônico

$$\begin{aligned} 11 \quad & \text{"Minimize } f(x) = \langle c, \bar{x} \rangle + \langle \bar{c}_J, x_J \rangle \\ & \text{sujeito a } Y_J x_J \leq \bar{x}_I \\ & x_J \geq 0." \end{aligned}$$

Notemos que nesta forma temos somente as $n-m$ variáveis secundárias. Note-se, também, que as variáveis de folga associadas as desigualdades $Y_J x_J \leq \bar{x}_I$ são as variáveis básicas. O PLP escrito como um sistema canônico tem um papel crucial em nosso trabalho.

Devemos acrescentar, ainda, que de 7, temos

$$12 \quad A_j = A_I \cdot Y_j, \quad j \in N$$

e

$$13 \quad Y_j = e^{\underline{i}}, \quad j \in I \text{ e } \underline{i} \text{ a posição de } j \text{ em } I.$$

Além disso, para as variáveis básicas temos

$$14 \quad \bar{c}_j = 0.$$

Continuando, apresentamos, sem prova, alguns resultados básicos, necessários para o estabelecimento do algoritmo primal-simplex na seção seguinte. Estes resultados derivam-se de teoremas de convexidade e de sistemas de desi-

gualdades lineares, associados às características da função objetivo (contínua e linear) e do conjunto de soluções viáveis (convexo e fechado).

15   Teorema

Se o conjunto de soluções viáveis do PLP não é vazio, então ele possui pelo menos um vértice.

16   Teorema

Seja $\bar{x}$ uma solução viável do PLP. Então $\bar{x}$ é um vértice do conjunto de soluções viáveis se, e só se, $\bar{x}$ é uma solução básica viável.

17   Corolário

Se o PLP tem solução viável, então ele tem pelo menos uma solução básica viável.

18   Teorema

Se o PLP tem solução ótima, então o conjunto de todas as soluções ótimas é convexo.

19   Corolário

Qualquer combinação convexa de soluções ótimas do PLP é solução ótima do PLP.

2.6

20 Teorema

Se o PLP tem solução ótima, então ele tem pelo menos uma solução básica ótima.

21 Teorema

Seja $\bar{x}$ uma solução viável do PLP. Então $\bar{x}$ é solução básica (viável) se, e só se, as colunas da matriz A, associadas com as componentes não nulas de $\bar{x}$, são linearmente independentes. ■

O exemplo seguinte mostra como alguns desses resultados acima não valem para toda forma do problema de programação linear.

$$\text{"Minimize } f(x) = -2x_1 - x_2$$

$$\text{sujeito a } 2x_1 + x_2 \leq 2."$$

Geometricamente, podemos representar esse problema pela figura

Podemos ver, facilmente, que o conjunto de soluções

viáveis não é vazio, mas não possui vértices. Além disso, se transformássemos a restrição desse problema, adicionando uma variável de folga, teríamos a igualdade

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

Em $\mathbb{R}^3$, essa igualdade corresponde a um plano, que, portanto, também não tem vértices. Entretanto, temos três soluções básicas viáveis para esse problema:

$$\bar{x}^1 = (1, 0, 0), \bar{x}^2 = (0, 2, 0) \text{ e } \bar{x}^3 = (0, 0, 2).$$

2.7 - O MÉTODO SIMPLEX

Dos resultados da seção anterior (especificamente do teorema 2.6.20) podemos induzir um método de cálculo de uma solução ótima do PLP. De fato, como o número de bases viáveis é finito, poderíamos calcular essas bases e verificar qual a que fornece o menor valor para a função objetivo. Ora, esse método, além de outras dificuldades, traria consigo uma quantidade de cálculo muito grande, pois, mesmo para problemas pequenos, o número de bases viáveis, apesar de finito, pode ser muito grande.

Entretanto, essa é a idéia básica da qual se deriva a essência do método simplex. De fato, ao invés de calcularmos todas as bases viáveis, calculamos somente uma sequência de bases (a partir de uma base viável inicial), de tal

2.7

forma que os valores da função objetivo diminuam. Reduzimos, assim, sensivelmente, o número de bases pesquisadas.

Provamos, a seguir, os teoremas fundamentais do método simplex.

1 Teorema da troca de base

Sejam I uma base viável do PLP, $\bar{x}$ a solução básica viável associada e $r \notin I$. Se $\bar{c}_r < 0$ e $Y_{ir} > 0$ para algum $i \in M = \{1, \dots, m\}$, então a submatriz de A constituída pelas colunas com índices no conjunto

$$\hat{I} = I \cup \{r\} - \{j_p\},$$

onde j_p é o p -ésimo elemento de I , tal que

$$2 \quad \frac{\bar{x}_{j_p}}{Y_{pr}} = \min \left\{ \frac{\bar{x}_{j_i}}{Y_{ir}} \mid j_i \in I, i \in M, Y_{ir} > 0 \right\},$$

é uma base viável de PLP e a solução básica viável associada $\hat{x}$ é tal que

$$\langle c, \hat{x} \rangle \leq \langle c, \bar{x} \rangle.$$

PROVA - De 2.6.8, fazendo $\hat{x}_j = 0$ para $j \in J - \{r\}$, temos

$$\hat{x}_I = \bar{x}_I - \hat{x}_r Y_r.$$

Atribuindo a $\hat{x}_r$ o valor $\hat{x}_r = \frac{\bar{x}_{j_p}}{Y_{pr}}$, temos, devido a 2, que

$$\hat{x}_{j_p} = 0 \text{ e } \hat{x}_j \geq 0, \quad j \in I - \{j_p\}$$

A solução viável $\hat{x}$ tem, por construção, no máximo m componentes não nulas, que são aquelas cujos índices estão em $\hat{I}$. Provemos que as colunas de A associadas a essas variáveis são linearmente independentes.

De fato, de 2.6.12 temos

$$A_r = A_I Y_r = \sum_{i=1}^m Y_{ir} A_{j_i}, \quad j_i \in I.$$

Como I é base e $Y_{pr} \neq 0$, segue, de álgebra linear, que as colunas A_{j_i} , $j_i \in \hat{I}$ são linearmente independentes.

Logo, pelo corolário 2.6.21, segue que $\hat{I}$ é uma base viável e $\hat{x}$ é a solução básica viável associada.

Além disso, de 2.6.9, temos:

$$\langle c, \hat{x} \rangle = \langle c, \bar{x} \rangle + \bar{c}_r \cdot \hat{x}_r \leq \langle c, \bar{x} \rangle. \quad \blacksquare$$

Notemos que $\langle c, \hat{x} \rangle = \langle c, \bar{x} \rangle$ somente se, $\hat{x}_r = 0$, isto é, $x_{j_p} = 0$. Assim, o valor da função objetivo não diminuirá com a troca de base só se a solução $\bar{x}$ for degenerada.

A sentença 2 é referida como "critério de saída da base" do simplex. Pois é com ela que determinamos qual a variável que será substituída na base.

Por outro lado, pelo teorema da troca de base, vemos que qualquer variável secundária com custo relativo negativo é uma candidata a substituir x_{j_p} na nova base. Os cri

2.7

térios para essa escolha caracterizam variantes do simplex, cujo critério (chamado "critério de entrada na base") é

$$3 \quad \bar{c}_r = \min\{\bar{c}_j \mid j \in J, \bar{c}_j < 0\}$$

Antes de provarmos o próximo resultado, vamos introduzir o dual do PLP.

4 Problema dual do PLP

De 2.5.2 podemos obter o dual do PLP::

DLP: "Maximize $\langle d, u \rangle$
 sujeito a $uA \leq c$
 com $u \in \mathbb{R}^m$."

5 Teorema de otimalidade

Sejam I uma base viável do PLP e $\bar{x}$ a solução básica viável associada. Se

$$6 \quad \bar{c}_j \geq 0, \quad j \in J,$$

então $\bar{x}$ é solução ótima do PLP.

PROVA - Pela definição do fator de custo relativo 2.6.10 temos

$$\bar{c}_j = c_j - \langle c_I, Y_j \rangle, \quad j \in N$$

Usando a definição 2.6.7 de Y , segue

$$\bar{c}_j = c_j - \langle c_I, (A_I)^{-1} \cdot A_j \rangle, \quad j \in N$$

ou

$$\bar{c}_j = c_j - \langle c_I, (A_I)^{-1} \cdot A_j \rangle; \quad j \in N,$$

que, junto com 2.6.14 e 6, fornece

$$\langle c_I, (A_I)^{-1} \cdot A_j \rangle \leq c_j, \quad j \in N$$

Portanto o vetor definido por

$$\bar{u} = c_I \cdot (A_I)^{-1}$$

é solução viável do dual DLP. Além disso,

$$\begin{aligned} \langle d, \bar{u} \rangle &= \langle d, c_I \cdot (A_I)^{-1} \rangle = \langle c_I, (A_I)^{-1} \cdot d \rangle = \\ &= \langle c_I, \bar{x}_I \rangle = \langle c, \bar{x} \rangle \end{aligned}$$

Logo, pelo corolário 2.5.4, segue que $\bar{x}$ é solução ótima do PLP. ■

O vetor $\bar{u}$ é chamado *multiplicador do simplex*. Notemos que o multiplicador do simplex é solução viável do dual se, e só se, os fatores de custo relativo são não-negativos.

Notemos, também, que se $\bar{x}$ é uma solução básica ótima não degenerada, então os fatores de custo relativo são não-negativos (ou o multiplicador do simplex é solução viável do dual).

De fato, se $\bar{c}_r < 0$ para um $r \in J$, poderíamos atribuir um valor $\epsilon > 0$ a x_r tal que em 2.6.8 e 2.6.9, fazendo $x_j = 0$ pa-

2.7

ra $j \in J - \{r\}$, teríamos

$$8 \quad x_I = \bar{x}_I - \epsilon \cdot Y_r \geq 0$$

e

$$9 \quad \langle c, x \rangle = \langle c, \bar{x} \rangle + \epsilon \cdot \bar{c}_r.$$

De 8 e 9 vemos que a nova solução obtida seria viável e o valor da função objetivo seria menor do que o valor ótimo. Logo $\bar{c}_r \geq 0$.

Outra nota importante diz respeito ao caso de soluções ótimas múltiplas. Se o fator de custo relativo de alguma variável não-básica for nulo, decorre de 8 e 9 que essa variável pode ser colocada na base sem alterar o valor da função objetivo. A nova solução obtida é uma outra solução ótima.

Podemos afirmar então que uma condição para a existência de soluções ótimas múltiplas é

$$10 \quad \bar{c}_j = 0 \text{ para algum } j \in J.$$

11 Teorema da ilimitação

Seja I uma base viável e $\bar{x}$ a solução básica viável associada. Se, para algum $r \in J$, $\bar{c}_r < 0$ e $Y_r \leq 0$, então o PLP é ilimitado.

PROVA - De 2.6.8, fazendo $x_j = 0$ para $j \in J - \{r\}$, teremos.

$$x_I = \bar{x}_I + x_r Y_r$$

Como $\bar{y}_r \leq 0$, segue que

$$12 \quad x_I \geq 0 \text{ para qualquer } x_r > 0$$

Como $\bar{c}_r < 0$, segue de 2.6.9 e 12, que

$$\lim_{x_r \rightarrow +\infty} \langle c, x \rangle = \langle c, \bar{x} \rangle + \lim_{x_r \rightarrow +\infty} \bar{c}_r x_r = -\infty$$

Antes de provarmos os dois últimos resultados, nós apresentamos abaixo um problema, associado do PLP, o qual chamamos problema auxiliar.

$$13 \quad \text{PLA: "Minimize } \langle \underline{1}, y \rangle$$

$$\text{sujeito a } Ax + y = d$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$\text{com } x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m."$$

As componentes de y são chamadas variáveis artificiais. É fácil ver que $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, d)$ é solução viável do PLA. Além disso, o PLA sempre tem solução ótima, pois $\langle \underline{1}, y \rangle$ é limitada inferiormente pelo valor 0 e continua no conjunto fechado das soluções viáveis.

14 Teorema da inviabilidade

Se o valor ótimo do PLA é positivo, então o PLP é inviável.

2.7

PROVA - Suponhamos que o PLP tenha uma solução viável $\bar{x}$. Então $(\bar{x}, 0)$ é solução viável do PLA, com valor da função objetivo igual a 0, contrariando a hipótese. Logo o PLP é inviável. ■

15. Teorema da viabilidade

Se o PLA tem valor ótimo nulo, então existe uma base ótima de PLA que é base viável do PLP.

PROVA - Seja I uma base ótima do PLA e $(\bar{x}, 0)$ a solução básica associada. Se I não contém índices de variáveis artificiais, então I é base viável de PLP. Consideremos o caso em que I possui índices de variáveis artificiais.

Se pudermos substituir uma variável artificial em I por uma variável real, os valores das variáveis e da função objetivo não se alteram, e obtemos uma nova base, ótima do PLA e viável do PLP.

Provemos, então, que toda variável artificial em I pode ser substituída por uma variável real. Suponhamos que I possua q variáveis artificiais que não possam ser substituídas por variáveis reais.

De 2.6.12 temos

$$16 \quad A_j = \sum_{i=1}^m Y_{ij} \bar{A}_{j_i}, \quad j \notin I, \quad j_i \in I$$

onde $\bar{A}_{j_i} = A_{j_i}$ se j_i é índice de variável real e

$\bar{A}_{j_i} = e^{j_i}$ se j_i é índice de variável artificial.

Como as variáveis artificiais não podem ser substituídas pelas reais, segue, devido a teorema de álgebra linear, que em 16

$y_{ij} = 0$ se j_i é índice de variável artificial ou de outra forma

$A_j = \sum_{j_i \in I_a} y_{ij} A_{ji}$ onde $I_a \subset I$ é o conjunto dos índices das variáveis reais que estão em I . Como $|I_a| = m - q$, segue que toda coluna de A é combinação linear de $m - q$ colunas de A , cujos índices estão em I . Ora, a característica de A é igual a m (hipótese em 2.6.1), logo devemos ter $q = 0$. ■

Podemos, agora, estabelecer os passos do algoritmo primal-simplex.

17 Algoritmo primal-simplex

Passo 1 - Teste de inviabilidade. Cálculo da base viável inicial.

Resolver o PLA, utilizando-se dos passos 2 a 4. Se o valor ótimo do PLA é positivo, então o PLP é inviável. Se o valor ótimo do PLA é nulo, o PLP é viável; se a base de PLA possuir variáveis artificiais, troque-as por variáveis reais, substitua a função objetivo pela função objetivo do PLP, recalcule os fatores de custo relativo e vá para o passo 2.

Passo 2 - Teste de solução ótima. Critério de entrada na base.

2.7

Calcule $\bar{c}_r = \min \{\bar{c}_j \mid j \in J\}$.

Se $\bar{c}_r \geq 0$ a base é ótima. Se $\bar{c}_r < 0$, vá para o passo 3 (x_r é a variável que entrará na base).

Passo 3 - Teste de ilimitação. Critério de saída da base.

Se $Y_r \leq 0$, o PLP é ilimitado. Caso contrário, calcule o índice j_p da variável que sairá da base através de

$$\frac{\bar{x}_{j_p}}{Y_{pr}} = \min \left\{ \frac{\bar{x}_{j_i}}{Y_{ir}} \mid j_i \in I, i \in M, Y_{ir} > 0 \right\},$$

e vá para o passo 4.

Passo 4 - Troca de base

Toque de base, substituindo x_{j_p} por x_r . Calcule os novos valores da função objetivo, das variáveis básicas, dos fatores de custo relativo e da matriz Y . Para tal, use a operação de pivotação de matriz em torno do elemento Y_{pr} . Volte para o passo 2.

18

Comentário

Não nos preocupamos em apresentar as fórmulas de mudança de base, porque elas podem ser encontradas em qualquer texto de programação linear.

Com pequenas modificações no algoritmo, podemos relaxar a hipótese de a característica da matriz A ser igual a

m. No caso de incompatibilidade no sistema $Ax = d$, não há necessidade de nenhuma modificação, pois incompatibilidade implica em inviabilidade, que já é detectada pelo algoritmo. Temos que considerar somente o caso de redundância no sistema $Ax = d$.

Neste caso, pela prova do teorema da viabilidade ¹⁵, teremos variáveis artificiais na base que não podem ser substituídas por variáveis reais. As modificações necessárias são:

- (a) No cálculo da base viável inicial (passo 0), encontrando uma base ótima com valor ótimo nulo, passamos ao passo 2, sem substituir as possíveis variáveis artificiais que estejam na base.
- (b) No critério de saída da base (passo 3), as variáveis artificiais, que estão na base e não correspondem a restrições redundantes, são candidatas (em alguma iteração) a sair da base. Basta, então, no critério de saída, darmos preferência de saída à essas variáveis artificiais.
- (c) No teste de solução ótima (passo 2), encontrando base ótima, as possíveis variáveis artificiais que estejam na base corresponderão a restrições redundantes.

Na troca de base (passo 4) nós calculamos a matriz

2.7

Y inteira. Entretanto, em cada iteração, nós precisamos somente da coluna de Y que está associada à variável que vai entrar na base. Ora, essa coluna pode ser calculada pelo produto da inversa da base pela correspondente coluna da matriz A. Assim, podemos modificar o algoritmo, guardando a inversa da base, ao invés da matriz Y. Na troca de base, atualizamos essa inversa, também por pivotação.

O algoritmo simplex na forma como foi estabelecido é conhecido como "algoritmo primal-simplex na forma padrão". O algoritmo com a modificação acima é conhecido como "forma revisada" do simplex.

O passo de cálculo da base viável inicial é conhecido como "fase 1" do simplex, e os passos restantes como "fase 2" do simplex.

De 2.6.8 e 2.6.9, podemos perceber que, após encontrarmos uma solução básica ótima, se alguma variável não-básica possuir custo relativo nulo, podemos obter outras soluções ótimas (básicas ou não, dependendo da correspondente coluna de Y) atribuindo valores positivos a essa variável. Note-se que o método simplex se presta, com algumas modificações, ao problema de encontrar soluções ótimas múltiplas.

19

Convergência

Suponhamos, inicialmente, que não exista degeneres

cência. Então, a cada iteração do simplex, o valor da função objetivo diminui. Logo as bases nunca se repetem. Como temos um número finito de bases, concluímos que, após um número finito de iterações, o algoritmo pára ou no teste de solução ótima, ou no teste de ilimitação.

No caso de degenerescência, podemos ter uma sequência de iterações na qual o valor da função objetivo permanece igual. Poderemos, assim, ter uma repetição de bases. Existe uma regra, chamada lexicográfica ([Dantzig, 63]), que, introduzida no critério de saída da base, evita a repetição de bases no caso de degenerescência.

Com essa regra implementada, garantimos a convergência do algoritmo primal-simplex.

CAPÍTULO 3

DECOMPOSIÇÃO DE DANTZIG-WOLFE

3.1 - INTRODUÇÃO

O método de decomposição de problemas que apresentamos neste capítulo foi desenvolvido por Dantzig e Wolfe [Dantzig-Wolfe, 60]. Foi um trabalho pioneiro no estudo de problemas de programação de grande porte. A idéia básica desse método se tornou conhecida como Princípio de Decomposição de Dantzig-Wolfe.

O método se aplica, de preferência, a problemas de programação linear, cujas matrizes dos coeficientes apresentam estruturas especiais, conhecidas por estruturas "bloco diagonais com bloco de ligação". Essas estruturas são também chamadas "bloco angulares". A figura a seguir, representa graficamente essas estruturas. A matriz A é formada por três blocos diagonais (A^1, A^2 e A^3) e um bloco de ligação (B).

Entretanto, o método pode ser aplicado a qualquer programa linear, considerando sua matriz dos coeficientes como uma estrutura com um único bloco diagonal e o correspondente bloco de ligação. Além disso, o método se mostra par-

ticularmente eficiente quando os blocos diagonais da estrutura constituem, por sua vez, estruturas especiais (por exemplo, problemas de transporte).

O princípio se baseia, principalmente, em dois procedimentos. O primeiro transforma, através de resultados sobre conjuntos convexos, o problema original num outro problema equivalente, o qual também possui estrutura bloco angular. A característica principal deste problema (chamado problema mestre) é possuir um número menor de restrições e um número maior de variáveis que o problema original. A principal vantagem dessa transformação ocorre quando a diminuição no número de restrições é elevada.

O segundo procedimento consiste em usar um procedimento de geração de colunas para resolver o problema mestre, não havendo, assim, necessidade de se tabular todas as suas colunas. Para tanto, este procedimento resolve subproblemas associados a cada um dos blocos diagonais e cujas funções objetivas possuem custos que dependem dos custos do problema original, do bloco de ligação e das variáveis duais do pro-

3.2

blema mestre.

Nas seções seguintes, apresentamos o relacionamen-
to entre os problemas original e mestre; em seguida apresen-
tamos os subproblemas; e finalmente apresentamos o algorit-
mo de Dantzig-Wolfe.

3.2 - O PROBLEMA ORIGINAL E O PROBLEMA MESTRE

Sejam as matrizes reais A^k e B^k , $m_k \times n_k$ e $m_0 \times n_k$
($k=1, \dots, n$) respectivamente, e os vetores $c^k \in \mathbb{R}^{n_k}$ ($k=1, \dots, n$)
e $d^k \in \mathbb{R}^{m_k}$ ($k=0, 1, \dots, n$).

1 Problema original

$$\begin{aligned} \text{PMO: } & \text{"Minimize } \sum_{k \in N} \langle c^k, x^k \rangle \\ & \text{sujeito a } \sum_{k \in N} B^k x^k = d^0, \quad d^0 \geq 0, \\ & A^k x^k = d^k, \quad d^k \geq 0, \quad k \in N \\ & x^k \geq 0; \quad k \in N. \\ & \text{com } x^k \in \mathbb{R}^{n_k}, \quad k \in N \\ & \text{e } N = \{1, \dots, n\}." \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Notemos que as hipóteses $d^0 \geq 0$, $d^k \geq 0$ ($k \in N$) não im-
plicam em perda de generalidade, pois nos casos de essas hi-
póteses não valerem, basta multiplicarmos por -1 os coefi-
cientes das restrições tais que $d_i^k < 0$ ($k \in N \cup \{0\}, i=1, \dots, m_k$).

Notemos, também, que o problema original tem a es-
trutura típica citada na seção 3.1, onde as matrizes A^k ($k \in N$)

constituem os blocos diagonais e a matriz $B = (B^1, \dots, B^n)$ constitui o bloco de ligação. Além disso, esse problema é uma particularização, para o caso linear, do problema PDL de finido em 2.4.4.

Notemos, ainda, que o número de restrições desse problema é $m_0 + \sum_{k \in N} m_k$ e o número de variáveis $\sum_{k \in N} n_k$. Além disso, desprezando os possíveis elementos nulos nas matrizes A^k e B^k ($k \in N$), o número de elementos nulos devido à estrutura é dado por

$$\sum_{k \in N} m_k \cdot \sum_{k \in N} n_k - \sum_{k \in N} m_k \cdot n_k$$

Eventualmente o problema original poderia ser resolvido diretamente pelo algoritmo primal-simplex, caso as limitações do sistema (de computação) o permitam. Neste caso, é conveniente implementar o simplex com métodos algébricos de decomposição (decomposição L-U, por exemplo), aproveitando, assim, a quantidade de elementos nulos.

Consideremos os conjuntos convexos definidos por

$$2 \quad X^k = \{x^k \in \mathbb{R}^{n_k} \mid A^k x^k = d^k, x^k \geq 0\}, \quad k \in N.$$

Esses conjuntos serão supostos, daqui em diante, não vazios. Esta hipótese também não implica em perda de generalidade, pois, como veremos mais adiante, detectaremos, facilmente, pelo simplex, quando algum desses conjuntos é vazio.

3.2

Neste caso, é claro que o problema original é inviável.

Um conhecido teorema sobre convexidade nos permite enunciar o seguinte resultado.

3 Lema

Sejam X^k não vazios e $x^k \in \mathbb{R}^{n_k}$ ($k \in N$). Então $x^k \in X^k$ ($k \in N$) se, e só se, existem $v^k \in \mathbb{R}^{q_k}$ ($k \in N$) tais que

$$4 \quad \begin{cases} x^k = \sum_{j \in Q_k} v_j^k \bar{x}^{k,j}, \\ \sum_{j \in L_k} v_j^k = 1, \\ v_j^k \geq 0, \quad j \in Q_k \quad v_j^k \geq 0, \quad j \in Q_k, \end{cases}$$

onde

$$L_k = \{1, \dots, l_k\},$$

$$Q_k = \{1, \dots, l_k, \dots, q_k\},$$

$\bar{x}^{k,1}, \dots, \bar{x}^{k,l_k}$ são os vértices de X^k ,

e $\bar{x}^{k,l_k+1}, \dots, \bar{x}^{k,q_k}$ são os vetores que geram os raios extremos de X^k .

A cada conjunto X^k ($k \in N$), associemos o vetor $c^k \in \mathbb{R}^{q_k}$ e a matriz B^k $m_0 \times q_k$ ($k \in N$), definidos por

$$5 \quad \begin{aligned} c_j^k &= \langle c^k, \bar{x}^{k,j} \rangle, & j \in Q_k, \quad k \in N \\ B_j^k &= B^k \bar{x}^{k,j}, & j \in Q_k, \quad k \in N. \end{aligned}$$

Podemos, agora, definir o problema mestre.

6

Problema mestre

$$\begin{aligned} \text{PMM: } & \text{"Minimize } \sum_{k \in N} \langle \bar{c}^k, v^k \rangle \\ & \text{sujeito a } \sum_{k \in N} \bar{b}^k v^k = d^0, \\ & \quad \langle \bar{1}, v_{L_k}^k \rangle = 1, \quad k \in N, \\ & \quad v^k \geq 0, \quad k \in N, \\ & \quad \text{com } v^k \in \mathbb{R}^{q_k}, \quad k \in N." \end{aligned}$$

Notemos que este problema possui $m_0 + n$ restrições e $\sum_{k \in N} q_k$ variáveis. Comparando com o problema original podemos perceber que o número de restrições diminuiu de $\sum_{k \in N} (m_k - 1)$, e o número de variáveis cresceu bastante (já notamos anteriormente que, mesmo para problemas pequenos, o número total de bases viáveis pode ser bem grande).

Quanto a memória necessária para armazenarmos a inversa da base, os requisitos do problema mestre são bem menores. O contrário se dá no que tange a memória necessária para armazenar a matriz dos coeficientes. Além disto, a matriz dos coeficientes do problema mestre não é conhecida a priori. Isto é, precisamos calcular todos os vértices e raios extremos dos conjuntos X^k ($k \in N$) para obtê-la. Usando um processo de geração de colunas (calcular a coluna só quando precisarmos dela) para esta matriz, as vantagens do problema

3.2

mestre, quanto ao uso de memória tornam-se indiscutíveis.

Notemos, ainda, que o problema mestre possui, também, uma estrutura bloco angular. Além disso, os blocos angulares apresentam a característica de ter uma única linha da forma (111...1000...0).

Provemos o resultado que relaciona o problema mestre e o problema original.

7 Lema

Se X_k ($k \in \mathbb{N}$) não são vazios, então os problemas original e mestre são equivalentes..

PROVA - Se X^k não são vazios ($k \in \mathbb{N}$), então podemos construir o problema mestre associado ao problema original através de 5. Notemos que se $X^k = \emptyset$ para algum $k \in \mathbb{N}$, nós não poderíamos construir o problema mestre e não teria sentido falarmos em equivalência.

Usando 4 e 5 podemos escrever

$$\begin{aligned} 8 \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} B^k \cdot v^k &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in Q_k} v_j^k B_j^k = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in Q_k} v_j^k B^{k-k, j} = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} B^k \sum_{j \in Q_k} v_j^{k-k, j} = \sum_{k \in \mathbb{N}} B^k \cdot x^k \end{aligned}$$

e

$$9 \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle c^k, x^k \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle c^k, \sum_{j \in Q_k} v_j^{k-k, j} \rangle =$$

$$= \sum_{k \in N} \sum_{j \in Q_k} v_j^k \langle c^k, \bar{x}^k, j \rangle = \sum_{k \in N} \langle \bar{c}^k, v^k \rangle$$

As sentenças 8 e 9, e o lema 5 garantem a equivalência de PMO e PMM conforme a definição de equivalência

2.3.1. ■

3.3 - SUBPROBLEMAS E GERAÇÃO DE COLUNAS

Pela seção 3.2, vemos que resolver o problema mestre é equivalente a resolver o problema original. Vemos, também, as vantagens quanto ao uso de memória. Resta-nos agora introduzir um modo de gerar as colunas da matriz dos coeficientes do problema mestre. Notemos que, usando o algoritmo primal-simplex na forma revisada, precisamos somente da coluna que deve entrar na base.

Para tanto, introduzimos n problemas auxiliares (referidos como subproblemas) associados ao problema mestre e ao problema original. Seja $\bar{u} = (\bar{u}^0, \bar{u}^1)$, $\bar{u}^0 \in \mathbb{R}^{m_0}$, $\bar{u}^1 \in \mathbb{R}^n$ os multiplicadores do simplex associados a uma base viável do problema mestre. Associamos a $\bar{u}^0$ os seguintes problemas

1 Subproblemas

$$\begin{aligned} P_k(\bar{u}^0): \quad & \text{"Minimize } \langle c^k - \bar{u}^0 B^k, x^k \rangle \\ & \text{sujeito a } A^k x^k = d^k \\ & x^k \geq 0 \end{aligned}$$

3.3

com $x^k \in \mathbb{R}^{n_k}$." ($k \in N$).

Notemos que os conjuntos de soluções viáveis de $P_k(\bar{u}^0)$ são os conjuntos X^k ($k \in N$). Assim, se algum subproblema é inviável, segue trivialmente que o problema original é inviável.

Notemos, também, que $\bar{u}$ é uma solução viável do dual de PMM, mas não necessariamente viável. Se $\bar{u}$ é viável, então a correspondente base associada é base ótima do PMM. O resultado seguinte nos mostra como testar a viabilidade de $\bar{u}$, ou otimalidade da base, através das soluções dos subproblemas.

2. Lema

Sejam I uma base viável do problema mestre, e $\bar{u} = (\bar{u}^0, \bar{u}^1)$ os multiplicadores do simplex associados. Então I é uma base ótima se, e só se,

$$3 \quad \langle c^k - \bar{u}^0 \cdot B^k, \bar{x}^k \rangle - \bar{u}_k^1 \geq 0, \quad k \in N$$

onde

$\bar{x}^k$ ($k \in N$) são soluções básicas ótimas dos subproblemas $P_k(\bar{u}_0)$ ($k \in N$).

PROVA - Os fatores de custo relativo do problema mestre, associados a base I , podem ser escritos na forma abaixo, devido a 3.2.5.

$$\begin{aligned}
 4 \quad \dot{c}_j^k - \langle \bar{u}, (B_j^k, e^k) \rangle &= \langle c^k, \bar{x}^k, j \rangle - \langle \bar{u}^0, B^k \bar{x}^k, j \rangle - \bar{u}_k^1 = \\
 &= \langle c^k - \bar{u}^0 B^k, \bar{x}^k, j \rangle - \bar{u}_k^1, \quad j \in Q_k, \quad k \in N.
 \end{aligned}$$

Pelo teorema da otimalidade 2.7.5 segue de 4 que I é base se, e só se,

$$5 \quad \langle c^k - \bar{u}^0 B^k, \bar{x}^k, j \rangle - \bar{u}_k^1 \geq 0, \quad j \in Q_k, \quad k \in N.$$

Como $\bar{x}^k$ é solução básica ótima de $P_k(\bar{u}^0)$ ($k \in N$), segue, pelo teorema 2.6.11, que existe um $s_k \in Q_k$ ($k \in N$) tal que

$$6 \quad \bar{x}^k = \bar{x}^k, s_k, \quad k \in N,$$

$$7 \quad \langle c^k - \bar{u}^0 B^k, \bar{x}^k \rangle \leq \langle c^k - \bar{u}^0 B^k, \bar{x}^k, j \rangle, \quad j \in Q_k, \quad k \in N.$$

De 5 e 6 segue 3; de 3 e 7 segue 5. Logo a tese é verdadeira. ■

É importante notar que o lema 2 supõe que todos os n subproblemas possuem soluções ótimas. E, neste caso, o lema 2 nos oferece um critério de parada para solução ótima. Se a condição 3 não for válida, temos, então o seguinte critério de entrada na base do problema mestre.

$$8 \quad \langle c^r - \bar{u}^0 B^r, \bar{x}^r \rangle - \bar{u}_r^1 = \min \{ \langle c^k - \bar{u}^0 B^k, \bar{x}^k \rangle - \bar{u}_k^1 \mid k \in N \}$$

Se algum problema $P_k(\bar{u}^0)$ é ilimitado, $P_s(\bar{u}^0)$ por exemplo, então a condição 8 não serve como critério de entrada, pois não existe a solução ótima $\bar{x}^s$. Neste caso o resul-

tado seguinte nos mostra como encontrar um vetor $\bar{x}^{s,j}$, geratriz de um raio extremo de X^s , cuja variável v_j^s pode entrar na base do problema mestre.

9   Lema

Seja s um índice de N . Se $P_s(\bar{u}^0)$ é ilimitado, então podemos construir, a partir do quadro simplex de $P_s(\bar{u}^0)$, um vetor $\bar{x}^{s,j}$, geratriz de um raio extremo de X^s , cuja variável associada v_j^s pode entrar na base do problema mestre.

PROVA - Seja I_s a base viável de $P_s(\bar{u}^0)$ na qual foi detectada sua ilimitação. Seja r o índice da variável cujo custo relativo é negativo e $Y_r^s \leq 0$.

Do quadro simplex podemos construir o vetor $\bar{x}^{s,j}$ definido por

$$10 \quad \bar{x}_i^{s,j} = \begin{cases} 1 & \text{para } i = r \\ 0 & \text{para } i \notin I_s \cup \{r\} \\ -Y_{h_i r}^s & \text{para } i \in I_s \end{cases}$$

onde h_i é a posição de i em I , e

$$Y_r^s = (A_{I_s}^s)^{-1} \cdot A_r^s.$$

Se 2.6.8 podemos ver que esse vetor é a geratriz do raio extremo

$$x^S = \bar{x}^S + \lambda \bar{x}^{S,j}, \quad \lambda \geq 0$$

onde $\bar{x}^S$ é a solução básica viável associada a I_S .

Para o custo relativo de x_r^S temos:

$$11 \quad -\langle (c^S - \bar{u}^0 \cdot B^S)_{I_S}, Y_r \rangle + (c_r^S - \bar{u}^0 \cdot B_r^S) < 0$$

O custo relativo da variável v_j^S associada a $\bar{x}^{S,j}$ é

dado por

$$\begin{aligned} -\langle \bar{u}, (\bar{B}_j^S, 0) \rangle + \bar{c}_j^S &= \bar{c}_j^S - \langle \bar{u}^0, \bar{B}_j^S \rangle = \\ &= \langle c^S, \bar{x}^{S,j} \rangle - \langle \bar{u}^0, B^S \bar{x}^{S,j} \rangle = \\ &= \langle c^S - \bar{u}^0 \cdot B^S, \bar{x}^{S,j} \rangle \end{aligned}$$

E, pela definição de $\bar{x}^{S,j}$, segue

$$\bar{c}_j^S - \langle \bar{u}, (\bar{B}_j^S, 0) \rangle = \langle (c^S - \bar{u}^0 \cdot B^S)_{I_S}, Y_r \rangle + (c_r^S - \bar{u}^0 \cdot B_r^S)$$

que, devido a 11, resulta em

$$\bar{c}_j^S - \langle \bar{u}, (\bar{B}_j^S, 0) \rangle < 0.$$

Logo v_j^S pode entrar na base do problema auxiliar. ■

3.4 - ALGORITMO DE DECOMPOSIÇÃO DE DANTZIG-WOLFE

Com base nas definições e nos resultados das seções anteriores, podemos escrever o algoritmo de decomposição de Dantzig-Wolfe.

3.4

1 Algoritmo

Suponhamos que I seja uma base viável inicial para o problema mestre, e que $\bar{u} = (\bar{u}^0, \bar{u}^1)$ sejam os multiplicadores do simplex associados.

Passo 1 - Resolução dos subproblemas

Resolva os subproblemas $P_k(\bar{u}^0)$ definidos em 3.1.1. Se algum deles for inviável, então o problema mestre (e o original também) é inviável. Se algum deles for ilimitado vá para o passo 4.

Passo 2 - Teste de solução ótima. Critério de entrada na base

Calcular o escalar ξ dado por

$$\xi = \min\{ \langle c^k - \bar{u}^0 B^k, \bar{x}^k \rangle - \bar{u}_k^1 \mid k \in N \}$$

onde $\bar{x}^k$ é solução ótima de $P_k(\bar{u}^0)$ ($k \in N$). Se $\xi \geq 0$, então a base I é uma base ótima do problema mestre. Se $\xi < 0$, faça r igual ao índice k que corresponde ao valor mínimo ξ , vá para o passo 3.

Passo 3 - Geração de coluna associada a um vértice

Calcule a coluna $(\bar{B}_j^r, e^r)$ cujo fator de custo relativo é ξ . Vá para o passo 5.

Passo 4 - Geração de coluna associada a um raio extremo

Escolha um problema $P_s(\bar{u}^0)$ ilimitado. Calcule o ve

tor $\bar{x}^{s,j}$ conforme 3.3.10; calcule a coluna $(\bar{B}_j^s, 0)$ e o fator de custo relativo associado $\bar{c}_j^s - \langle \bar{u}^0, \bar{B}_j^s \rangle$. Vá para o passo 5.

Passo 5 - Teste de ilimitação. Critério de saída da base

Calcule o vetor Y_h (do problema mestre) associado à variável que vai entrar na base (cuja coluna foi calculada no passo 4). Se $Y_h \leq 0$, então o problema mestre (e o problema original também) é ilimitado. Caso contrário, calcule, como no algoritmo primal-simplex, a variável que deve sair da base. Vá para o passo 6.

Passo 6 - Troca de base

Substitua na base I, a variável calculada no passo 5, pela variável calculada no passo 3 ou no passo 4. A inversa dessa nova base e os novos multiplicadores do simplex $\bar{u} = (\bar{u}^0, \bar{u}^1)$ podem ser calculados por pivotação com base no vetor Y_h calculado no passo 5. Volte para o passo 1.

2 Convergência

O algoritmo apresentado pode ser considerado como um algoritmo simplex em dois níveis. No segundo nível (resolução dos subproblemas) a convergência é garantida pelo próprio simplex.

No primeiro nível, em caso de degenerescência, precisamos adicionar o critério de saída da base do problema

3.4

mestre (passo 5) a regra léxicográfica. Assim, como o número de bases viáveis do problema mestre é limitado, segue que o algoritmo termina, após um número finito de iterações, no passo 2 ou no passo 5.

3 Comentário

A base inicial do problema mestre pode ser calculada pelo próprio algoritmo de decomposição, de forma análoga à fase 1 do algoritmo simplex. De fato, podemos adicionar variáveis artificiais nas restrições do problema mestre e criamos um problema mestre auxiliar como no simplex. Teríamos assim uma base artificial viável inicial. (para esse problema auxiliar).

A diferença entre este processo e a fase 1 do simplex é que aqui temos que calcular as colunas que vão entrar na base, também por um processo de geração de colunas. Devemos notar que, como a função objetivo do problema mestre auxiliar é diferente da função objetivo do problema mestre, as funções objetivos dos subproblemas também serão diferentes. No mais, todas as observações feitas na fase 1 do simplex valem para este processo.

Devemos notar que, no passo de resolução dos subproblemas, não há necessidade de se resolver todos os subproblemas a cada iteração. Após a primeira iteração, as bases ótimas de uma iteração serão bases viáveis quase-ótimas

para a iteração seguinte. Isto porque as variações nos custos unitários das funções objetivos não afetam as bases, mas somente os custos relativos e o valor da função objetivo. Além disso, muitas vezes, as bases ótimas em uma iteração continuam ótimas na iteração seguinte.

A eficiência do algoritmo de decomposição em relação a uma solução direta do problema original é consequência direta da diferença entre o número de restrições dos dois problemas. Eventualmente podem ser usadas outras técnicas e variações que poderão aumentar a eficiência em casos específicos. Podemos citar a técnica de limite inferior para a função objetivo ([Lasdon, 70]), introdução de mais de uma coluna na base na mesma iteração, solução dos subproblemas em grupo ([Simonnard, 66]) e solução do problema auxiliar pelo primal-dual ([Lasdon, 70]).

CAPÍTULO 4

ALGORITMO PRIMAL-DUAL

4.1 - INTRODUÇÃO

O algoritmo simplex primal-dual [Dantzig-Ford-Fulkerson, 56]) ocupa um papel muito importante em nosso trabalho. No capítulo seguinte, nós usamos esse algoritmo de modo a obter decomposição.

Como vários outros algoritmos de programação linear, o primal-dual possui a característica básica de trabalhar com soluções inviáveis para o problema primal, porém, associadas a soluções viáveis para o problema dual. Ele parte de uma solução inviável e "melhora" essa solução iterativamente, mantendo a viabilidade no dual e as folgas complementares. Quando essa solução "melhorada" se torna viável, ela é a solução ótima procurada.

De um modo geral, o algoritmo primal-dual funciona como o algoritmo dual. Porém, existe uma diferença interessante entre os dois. O dual trabalha com soluções inviáveis no que tange a não negatividade das variáveis, isto é, as soluções possuem componentes negativas, mas satisfazem as res

trições de igualdade (considerando o primal na forma padrão). Com o primal-dual se dá o contrário: as soluções inviáveis são sempre não-negativas.

O primal-dual apresenta a vantagem de não precisar de uma solução primal-viável inicial, não havendo assim necessidade da fase 1 do simplex. Entretanto, ele precisa de uma solução dual-viável inicial. Quando esta solução não for conhecida, ele exigirá procedimentos "equivalentes" a fase 1 do simplex.

Para alguns tipos de problemas, essa solução dual-viável ou é conhecida a priori, ou é fácil de ser calculada. Nestes casos, a aplicação do primal-dual se torna vantajosa.

Nas seções seguintes, introduzimos o problema primal, o seu dual e alguns problemas auxiliares; em seguida apresentamos os resultados básicos para, no final, estabelecermos o algoritmo.

4.2 - O PROBLEMA PRIMAL E OS PROBLEMAS ASSOCIADOS

Sejam A uma matriz $m \times n$, $c \in \mathbb{R}^n$ e $d \in \mathbb{R}^m$. Definimos o problema primal como sendo o problema de programação linear na forma padrão.

1 Problema primal

P: "Minimize $\langle c, x \rangle$

4.2

$$\begin{aligned} &\text{sujeito a } Ax = d, \quad d \geq 0 \\ &\quad \quad \quad x \geq 0 \\ &\quad \quad \quad \text{com } x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Associado ao primal, introduzimos o problema usado na fase 1 do simplex, o qual é chamado problema primal associado.

2 Problema primal associado

$$\begin{aligned} \text{PA: } &\text{"Minimize } \langle \underline{1}, y \rangle \\ &\text{sujeito a } Ax + y = d, \quad d \geq 0 \\ &\quad \quad \quad x \geq 0 \\ &\quad \quad \quad y \geq 0 \\ &\quad \quad \quad \text{com } x \in \mathbb{R}^n \\ &\quad \quad \quad \text{e } y \in \mathbb{R}^m. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Valem, aqui, as mesmas observações feitas no capítulo 2. Ou seja, PA é viável e tem solução ótima não-negativa.

Os problemas duais dos dois primais definidos acima são:

3 Problema dual

$$\begin{aligned} \text{D: } &\text{"Maximize } \langle d, u \rangle \\ &\text{sujeito a } uA \leq c \\ &\quad \quad \quad \text{com } u \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

4 Problema dual associado

DA: "Maximize $\langle d, u \rangle$

sujeito a $uA \leq 0$

$$u \leq \underline{1}$$

com $u \in \mathbb{R}^m$." ■

Do fato de PA ter solução ótima segue, pelo teorema de dualidade 2.5.15, que DA tem solução ótima.

Suponhamos, agora, que o dual D tenha solução viável. Doravante, $\bar{u}$ representará uma solução viável de D, a menos de especificação em contrário.

5 Conjunto das restrições duais ativas

Associado a cada solução dual viável $\bar{u}$, definimos o conjunto de índices

$$S(\bar{u}) = \{j \in N \mid \langle \bar{u}, A_j \rangle - c_j = 0\}$$

onde

$$N = \{1, \dots, n\},$$

e que chamamos conjunto das restrições duais ativas.

Quando o valor de $\bar{u}$ estiver subentendido no contexto, denotaremos esse conjunto, simplesmente, por S. ■

Definimos, a seguir, dois problemas associados ao primal (e ao dual também) através de $\bar{u}$. Esses problemas são

4.2

chamados, simplesmente, primal restrito e dual restrito. Entretanto, fica implícito que eles dependem da solução dual viável $\bar{u}$.

6 Problema primal restrito

PR($\bar{u}$): "Minimize $\langle \underline{1}, y \rangle$
 sujeito a $A_S \cdot x_S + y = d$
 $x_S \geq 0$
 $y \geq 0$
 com $y \in \mathbb{R}^m$
 e $x \in \mathbb{R}^p$, $p = |S|$."

7 Problema dual restrito

DR($\bar{u}$): "Maximize $\langle d, u \rangle$
 sujeito a $u A_S \leq 0$
 $u \leq \underline{1}$
 com $u \in \mathbb{R}^m$."

Notemos que PR($\bar{u}$) é viável e sempre tem solução ótima não-negativa. Além disso, pelo teorema de dualidade 2.5.15, o DR($\bar{u}$) sempre tem solução ótima.

Notemos, também, que, se $(\bar{x}_S, \bar{y})$ é solução viável de PR($\bar{u}$), então a solução $(\bar{\bar{x}}, \bar{y})$, com $\bar{\bar{x}}_S = \bar{x}_S$ e $\bar{\bar{x}}_j = 0$ para $j \notin S$, é solução viável de PA. Além disso, se $\bar{y} = 0$, então $\bar{\bar{x}}$ é solução viável de P.

4.3 - RESULTADOS BÁSICOS

Provamos, nesta seção, três resultados que constituem a base do algoritmo primal-dual.

O primeiro resultado, bastante simples, nos diz quando uma solução ótima de $PR(\bar{u})$ deriva uma solução ótima para o primal P .

1 Lema

Seja $\bar{u}$ solução viável do dual e S o conjunto das restrições duais associado a $\bar{u}$. Seja $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\hat{x}_j = 0$ para $j \in N-S$. Se $(\hat{x}_S, 0)$ é solução ótima de $PR(\bar{u})$, então $\hat{x}$ é solução ótima do primal.

PROVA - Sendo $(\hat{x}_S, 0)$ solução ótima de $PR(\bar{u})$, é fácil ver, pelas definições 4.2.6, 4.2.2 e 4.2.1 que $(\hat{x}, 0)$ é solução viável do primal.

Por outro lado, segue da definição de S e da hipótese que

$$(\langle \bar{u}, A_j \rangle - c_j) \cdot \hat{x}_j = 0, \quad j \in N.$$

Logo, pelo teorema fraco das folgas complementares 2.5.16, segue a

O segundo resultado nos oferece um critério de inviabilidade do primal, através de uma solução viável de $DR(\bar{u})$.

4.3

2   Lema

Sejam $\bar{u}$ solução viável do dual e S o conjunto das restrições duais ativas associado a $\bar{u}$. Seja $\hat{u} \in \mathbb{R}^m$ uma solução viável de $DR(\bar{u})$. Se $\langle d, \hat{u} \rangle > 0$ e $\langle \hat{u}, A_j \rangle \leq 0$ para $j \in N-S$, então o primal é inviável.

PROVA - Consideremos o vetor $\bar{u}^\theta \in \mathbb{R}^m$ definido por

$$3 \quad \bar{u}^\theta = \bar{u} + \theta \cdot \hat{u}, \quad \theta > 0$$

Como $\hat{u}$ é viável para $DR(\bar{u})$, segue da hipótese que

$$4 \quad \langle \hat{u}, A_j \rangle \leq 0, \quad j \in N$$

Por outro lado, como $\bar{u}$ é viável para o dual, temos

$$5 \quad \langle \bar{u}, A_j \rangle - c_j \leq 0, \quad j \in N$$

De 3, 4 e 5 podemos escrever que

$$\langle \bar{u}^\theta, A_j \rangle - c_j = (\langle \bar{u}, A_j \rangle - c_j) + \theta \langle \hat{u}, A_j \rangle \leq 0, \quad j \in N, \theta > 0,$$

isto é $\bar{u}^\theta$ é solução viável do dual para todo $\theta > 0$.

Como $\langle \hat{u}, d \rangle > 0$ temos

$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \langle d, \bar{u}^\theta \rangle = \langle d, \bar{u} \rangle + \langle d, \hat{u} \rangle \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \theta = +\infty.$$

Logo o dual é ilimitado e, pelo teorema de dualidade de 2.5.15, o primal é inviável. ■

Notemos que, se $\langle d, \bar{u} \rangle = 0$, então

$$\langle d, \bar{u}^\theta \rangle = \langle d, \bar{u} \rangle \text{ para todo } \theta > 0.$$

Os dois resultados apresentados até agora nos fornecem o critério de parada do algoritmo primal-dual. De fato, como admitimos a existência de solução viável para o dual, forçamos o primal a ser limitado. Em outras palavras, se o primal for ilimitado, o algoritmo não se aplica. Ora, as outras duas condições possíveis (primal ótimo e primal inviável) são detectadas pelos lemas 1 e 2.

Precisamos agora, de um processo que nos permita mudar de solução dual viável $\bar{u}$, de tal modo que o valor ótimo do novo problema $PR(\bar{u})$ não aumente. O terceiro resultado desta seção nos fornece esse processo.

6

Lema

Sejam $\bar{u}$ solução viável do dual e S o conjunto das restrições duais ativas associado a $\bar{u}$. Seja $\hat{u} \in \mathbb{R}^m$ uma solução ótima de $DR(\bar{u})$ tal que $\langle \hat{u}, A_j \rangle > 0$ para algum $j \in N - S$. Então existe um escalar $\bar{\theta} > 0$ tal que $\bar{u}^\theta = \bar{u} + \theta \hat{u}$ é solução viável do dual para $0 < \theta \leq \bar{\theta}$. Além disso, o conjunto das restrições duais $S(\bar{u}^{\bar{\theta}})$ contém os índices das variáveis básicas que pertencem a S e, pelo menos, mais um índice que não pertence a S .

PROVA - Seja $\bar{u}^\theta = \bar{u} + \theta \hat{u}$ para $\theta > 0$. Para $\bar{u}^\theta$ ser viável devemos

4.3

ter

$$7 \quad \langle \bar{u}^\theta, A_j \rangle - c_j = (\langle \bar{u}, A_j \rangle - c_j) + \theta \langle \hat{u}, A_j \rangle \leq 0, \quad j \in N.$$

Como $\bar{u}$ é dual viável temos

$$8 \quad \langle \bar{u}, A_j \rangle - c_j \leq 0, \quad j \in N$$

Definindo $\bar{\theta}$ como

$$\bar{\theta} = \min \left\{ \frac{c_j - \langle \bar{u}, A_j \rangle}{\langle \hat{u}, A_j \rangle} \mid j \in N-S, \langle \hat{u}, A_j \rangle > 0 \right\}$$

temos de 7 e 8 que $\bar{u}^\theta$ é solução viável dual para $0 < \theta \leq \bar{\theta}$.

Seja $s \in N$ o índice tal que

$$\bar{\theta} = \frac{c_s - \langle \bar{u}, A_s \rangle}{\langle \hat{u}, A_s \rangle}$$

Então, $s \notin S$, pois $\langle \hat{u}, A_j \rangle \leq 0$ para $j \in S$. Além disso,

$$\langle \bar{u}^{\bar{\theta}}, A_s \rangle - c_s = (\langle \bar{u}, A_s \rangle - c_s) + \bar{\theta} \langle \hat{u}, A_s \rangle = 0,$$

isto é, $s \in S(\bar{u}^{\bar{\theta}})$.

Para as variáveis básicas cujos índices pertencem a S , temos

$$\langle \bar{u}, A_j \rangle - c_j = 0$$

E como essas variáveis constituem uma solução básica ótima de $PR(\bar{u})$ temos, de dualidade, que

$$\langle \hat{u}, A_j \rangle = 0.$$

Logo, para essas variáveis

$$\langle \bar{u}^{\bar{\theta}}, A_j \rangle - c_j = (\langle \bar{u}, A_j \rangle - c_j) + \bar{\theta} \langle \hat{u}, A_j \rangle = 0$$

isto é, seus índices estão em $S(\bar{u}^{\bar{\theta}})$. ■

4.4 - O ALGORITMO PRIMAL-DUAL

Com base nos resultados das seções anteriores podemos estabelecer o algoritmo primal-dual.

1 Algoritmo

Seja $\bar{u}$ uma solução viável do problema dual D.

Passo 1 - Construção do problema primal restrito

Calcule o conjunto das restrições duais ativas $S(\bar{u})$.

Com base nesse conjunto, construa o problema $PR(\bar{u})$. Vá para o passo 2.

Passo 2 - Resolução do problema primal restrito. Teste de solução ótima

Ache as soluções ótimas $\bar{x}_s$ de $PR(\bar{u})$ e $\hat{u}$ de $DR(\hat{u})$, resolvendo o $PR(\bar{u})$ pelo algoritmo simplex. Use como base inicial a base ótima do $PR(\bar{u})$ da iteração anterior.

Se o valor da função objetivo é nulo, então o vetor $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que

4.4

$$\bar{x}_j = \begin{cases} \hat{x}_j & \text{para } j \in S \\ 0 & \text{para } j \in N-S, \end{cases}$$

é solução ótima do primal.

Se o valor da função objetivo é positivo, vá para o passo 3.

Passo 3 - Teste de inviabilidade

Calcule

$$\bar{\theta} = \inf \left\{ \frac{c_j - \langle \bar{u}, A_j \rangle}{\langle \hat{u}, A_j \rangle} \mid j \in N-S, \langle \hat{u}, A_j \rangle > 0 \right\}$$

Se $\bar{\theta} = +\infty$, então o primal é inviável. Se $\bar{\theta} \in \mathbb{R}$, vá para o passo 4.

Passo 4 - Cálculo da nova solução dual viável

Calcule a nova solução dual viável através de

$$\bar{u} \leftarrow \bar{u} + \bar{\theta} \hat{u}$$

onde $\hat{u}$ é a solução ótima de $DR(\bar{u})$ obtida no passo 2. Volte para o passo 1.

2

Convergência

Como, na resolução do primal restrito $PR(\bar{u})$, a base ótima da iteração anterior é a base viável inicial da iteração seguinte, segue que o valor ótimo de $PR(\bar{u})$ diminui

ou fica igual de iteração a iteração.

Usando a regra lexicográfica no critério de saída da base, garantimos que, numa sequência de iterações com valor da função objetivo de $PR(\bar{u})$ constante, não há repetição de bases. Como o número de bases é finito, segue que, após um número finito de iterações, o algoritmo pára no teste de solução ótima (passo 2) ou no teste de inviabilidade (passo 3).

3 Comentário

Na resolução do problema restrito $PR(\bar{u})$ (passo 2) nós podemos usar como base viável inicial a base ótima da iteração anterior, devido a segunda parte do lema 4.3.6. Contudo, na primeira iteração, nós podemos usar, como base inicial, a base formada pelas variáveis artificiais.

Notemos que, na primeira iteração, se $\bar{u}$ for um ponto interior do conjunto de soluções viáveis do dual, então S será vazio. Na iteração seguinte a nova solução $\bar{u}$, já será um ponto de fronteira.

A função objetivo de $PR(\bar{u})$ "mede" a inviabilidade da solução $\hat{x}_s$. Em toda iteração que alguma variável artificial (não degenerada) deixa a base, essa "medida" diminui. Quando ela chega no zero, significa que estamos no ponto de ótimo.

CAPÍTULO 5

ALGORITMO PRIMAL-DUAL DE DECOMPOSIÇÃO

5.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo, desenvolvemos um algoritmo primal-dual de decomposição a partir dos resultados do capítulo 4 e dos trabalhos [Balas, 66] e [Gonçalves, 71].

Esse desenvolvimento constitui uma unificação dos algoritmos propostos por Balas e Gonçalves com uma aplicação direta do algoritmo primal-dual em decomposição.

Inicialmente, provamos alguns resultados que constituem a base para esse desenvolvimento, usando, para tanto, subproblemas semelhantes àqueles usados por Dantzig-Wolfe (capítulo 3). Em seguida, estabelecemos o algoritmo numa forma conceitual que facilita o seu entendimento e a prova de convergência. Depois, através de um resultado de equivalência, chegamos a sua forma final, com reais vantagens em termos de decomposição.

Com o algoritmo elaborado, fazemos então uma comparação com os trabalhos de Balas e de Gonçalves. Em seguida, fazemos uma análise do caso de subproblema ilimitado, apre-

sentamos as interpretações geométrica e econômica, e encerramos o capítulo com a conclusão de nosso trabalho.

5.2 - RESULTADOS BÁSICOS

Consideremos, novamente, o problema de programação linear com estrutura bloco angular definido em 3.2.1. Ele será referido daqui em diante como problema primal.

1. Problema primal

$$\begin{aligned}
 P: \quad & \text{"Minimize } \sum_{k \in N} \langle c^k, x^k \rangle \\
 & \text{sujeito a } \sum_{k \in N} B^k x^k = d^0, \quad d^0 \geq 0 \\
 & \quad A^k x^k = d^k, \quad d^k \geq 0, \quad k \in N \\
 & \quad x^k \geq 0, \quad k \in N \\
 & \quad \text{com } x^k \in \mathbb{R}^{n_k}, \quad k \in N \\
 & \quad \text{e } N = \{1, \dots, n\}." \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Valem aqui todas as observações citadas na seção 3.2. Consideremos, também, os conjuntos convexos definidos por

$$2 \quad X^k = \{x^k \in \mathbb{R}^{n_k} \mid A^k x^k = d^k, x^k \geq 0\}, \quad k \in N.$$

Admitiremos que esses conjuntos são não vazios e limitados. Caso algum X^k é vazio segue que o primal é inviável. A ocorrência de algum X^k vazio é detectada, facilmente,

na primeira iteração do algoritmo. O caso de algum x^k ilimitado é um pouco mais complexo, e será analisado na seção 5.6.

O dual do problema primal é definido conforme 2.5.2

3 Problema dual

$$\begin{aligned} D: \quad & \text{"Maximize } \langle d^0, u^0 \rangle + \sum_{k \in N} \langle d^k, u^k \rangle. \\ & \text{sujeito a } u^0 B^k + u^k A^k \leq c^k, \quad k \in N \\ & \text{com } u^k \in \mathbb{R}^{m_k}, \quad k \in N \cup \{0\}." \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Associados ao primal e ao dual definimos n pares de subproblemas, primais-duais. Esses pares de problemas constituem, na realidade, famílias de subproblemas associadas a um vetor $\mu \in \mathbb{R}^{m_0}$.

4 Subproblemas primais

$$\begin{aligned} P_k(\mu): \quad & \text{"Minimize } \langle c^k - \mu B^k, x^k \rangle \\ & \text{sujeito a } A^k x^k = d^k \\ & \quad x^k \geq 0 \\ & \text{com } x^k \in \mathbb{R}^{n_k}, \quad (k \in N). \end{aligned}$$

5 Subproblemas duais

$$\begin{aligned} DR(\mu): \quad & \text{"Maximize } \langle d^k, \mu^k \rangle \\ & \text{sujeito a } \mu^k A^k \leq c^k - \mu B^k \\ & \text{com } \mu^k \in \mathbb{R}^{m_k}, \quad (k \in N). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Notemos que a cada valor de μ está associada uma família de n pares $(P_k(\mu), D_k(\mu))$ ($k \in N$).

Notemos, também, que o conjunto X^k de soluções viáveis de $P_k(\mu)$ não depende de μ . Assim, se X^k é vazio, o subproblema $P_k(\mu)$ é inviável para qualquer valor de μ .

Podemos, agora, provar o primeiro resultado que relaciona os subproblemas ao dual.

6 Lema

Seja $\bar{u}^0 \in \mathbb{R}^{m_0}$. Se $(\bar{x}^k, \bar{u}^k)$ são soluções ótimas de $P_k(\bar{u}^0)$ e $D_k(\bar{u}^0)$ ($k \in N$), então $(\bar{u}^0, \bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n)$ é solução viável do dual D.

PROVA - Sendo $\bar{u}^k$ solução ótima de $D_k(\bar{u}^0)$ ($k \in N$), temos

$$\bar{u}^k \cdot A^k \leq c^k - \bar{u}^0 \cdot B^k, \quad k \in N$$

ou de outra forma

$$\bar{u}^0 \cdot B^k + \bar{u}^k \cdot A^k \leq c^k, \quad k \in N$$

Logo, $(\bar{u}^0, \bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n)$ é solução viável do dual D. ■

Notemos que este lema resolve o problema de base inicial para todo algoritmo que necessite de uma base dual viável inicial para resolver o problema primal. Como vimos no capítulo anterior, este é o caso do algoritmo primal-dual. Para tanto, bastaria resolver pelo simplex os subproblemas

5.2

$P_k(\mu)$ para $\mu = 0$, por exemplo.

O resultado seguinte torna mais estreita a relação entre o par primal-dual e os subproblemas.

7

Lema

Sejam $\bar{u}^0 \in \mathbb{R}^{m_0}$ e $(\bar{x}^k, \bar{u}^k)$ soluções ótimas de $P_k(\bar{u}^0)$ e $D_k(\bar{u}^0)$ ($k \in \mathbb{N}$). Se $\sum_{k \in \mathbb{N}} B^k \bar{x}^k = d^k$, então $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ é solução ótima do primal P e $(\bar{u}^0, \bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n)$ é solução ótima do dual D .

PROVA - Pelo lema anterior temos que $(\bar{u}^0, \bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n)$ é solução viável do dual. Por outro lado, da hipótese segue que $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ é solução viável do primal.

Além disso, devido a otimalidade dos pares $(\bar{x}^k, \bar{u}^k)$ temos, pelo teorema de dualidade 2.5.15,

$$\langle c^k - \bar{u}^0 \cdot B^k, \bar{x}^k \rangle = \langle d^k, \bar{u}^k \rangle, \quad k \in \mathbb{N}$$

ou

$$\langle c^k, \bar{x}^k \rangle = \langle d^k, \bar{u}^k \rangle + \langle B^k \bar{x}^k, \bar{u}^0 \rangle, \quad k \in \mathbb{N}$$

Somando as n igualdades acima, membro a membro, resulta

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle c^k, \bar{x}^k \rangle &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle d^k, \bar{u}^k \rangle + \langle \sum_{k \in \mathbb{N}} B^k \bar{x}^k, \bar{u}^0 \rangle \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle d^k, \bar{u}^k \rangle + \langle d^0, \bar{u}^0 \rangle \end{aligned}$$

Logo, pelo teorema de dualidade (aplicado agora ao par P-D) segue a tese. ■

Notemos que se $(\bar{x}^k, \bar{u}^k)$ são soluções ótimas de $P_k(\bar{u}^0)$ e $D_k(\bar{u}^0)$ ($k \in N$), então a solução $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ do primal (não necessariamente viável) e a solução $(\bar{u}^0, \dots, \bar{u}^n)$ do dual (viável pelo lema 6), satisfazem as folgas complementares. Isto decorre imediatamente do fato de cada par $(\bar{x}^k, \bar{u}^k)$ satisfazer as folgas complementares para o par $P_k(\bar{u}^0)$ e $D_k(\bar{u}^0)$, isto é,

$$\langle \bar{x}^k, c^k - \bar{u}^0 \cdot B^k - \bar{u}^k \cdot A^k \rangle = 0, \quad k \in N.$$

Essa propriedade poderia ter sido usada para provar o lema 6.

Os dois resultados apresentados acima nos convidam a trabalhar com um método primal-dual para resolver o problema primal, dentro de um esquema de decomposição.

Resolvendo uma família de subproblemas para um certo valor de μ , encontramos, sempre, uma solução viável para o dual e outra inviável para o primal, mas satisfazendo as folgas complementares. Se encontrarmos um μ , tal que as soluções ótimas de $P_k(\mu)$ formam uma solução viável para o primal, então essa solução será ótima para o primal.

Restam-nos dois problemas a resolver. O primeiro é saber se existe um valor de μ que fornece o resultado do parágrafo anterior. O segundo é construir um processo de variar μ de forma a convergirmos para a solução. O resultado

5.2

provado a seguir resolve o primeiro problema. O segundo será visto na seção seguinte.

Antes de provarmos o terceiro resultado desta seção, vamos introduzir dois problemas associados ao dual e ao primal. Através deles, a prova do lema seguinte será bem fácil.

8 Problema dual restrito a $u^0 = \bar{u}^0$

Seja $\bar{u}^0 \in \mathbb{R}^{m_0}$. Fixando a variável u^0 com o valor $\bar{u}^0$, podemos obter do problema dual o seguinte problema associado:

$$\begin{aligned} \text{DR}(\bar{u}^0): \quad & \text{"Maximize } \sum_{k \in N} \langle d^k, u^k \rangle \\ & \text{sujeito a } u^k A^k \leq c^k - \bar{u}^0 B^k, \quad k \in N \\ & \text{com } u^k \in \mathbb{R}^{m_k}, \quad k \in N." \quad \blacksquare \end{aligned}$$

O problema primal cujo dual é $\text{DR}(\bar{u}^0)$ é definido abaixo

9 Problema primal do $\text{DR}(\bar{u}^0)$

$$\begin{aligned} \text{PDR}(\bar{u}^0): \quad & \text{"Minimize } \sum_{k \in N} \langle c^k - \bar{u}^0 B^k, x^k \rangle \\ & \text{sujeito a } A^k x^k = d^k, \quad k \in N \\ & x^k \geq 0, \quad k \in N \\ & \text{com } x^k \in \mathbb{R}^{n_k}, \quad k \in N." \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Notemos que ambos os problemas $DR(\bar{u}^0)$ e $PDR(\bar{u}^0)$ são separáveis (conforme o conceito de separação apresentado na seção 2.4), respectivamente, nos subproblemas $D_k(\bar{u}^0)$ ($k \in N$) e $P_k(\bar{u}^0)$ ($k \in N$). Logo são verdadeiras as duas proposições seguintes.

10. $(\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n)$ é solução ótima de $DR(\bar{u}^0)$ se, e só se $\bar{u}^k$ é solução ótima de $D_k(\bar{u}^0)$ para todo $k \in N$.

11. $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ é solução ótima de $PDR(\bar{u}^0)$ se, e só se $\bar{x}^k$ é solução ótima de $P_k(\bar{u}^0)$ para todo $k \in N$.

12. Lema

Sejam $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ e $(\bar{u}^0, \bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n)$ soluções ótimas do primal P e do dual D , respectivamente. Então $\bar{x}^k$ é solução ótima de $P_k(\bar{u}^0)$ e $\bar{u}^k$ é solução ótima de $D_k(\bar{u}^0)$ ($k \in N$).

PROVA - Da hipótese e das definições de P , D , $DR(\bar{u}^0)$ e $PDR(\bar{u}^0)$ segue que $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ é solução viável de $PDR(\bar{u}^0)$ e $(\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n)$ é solução viável de $DR(\bar{u}^0)$. Além disso, pelo teorema de dualidade 2.5.15 aplicado ao par P - D , temos

$$\sum_{k \in N} \langle c^k, \bar{x}^k \rangle = \sum_{k \in N} \langle d^k, \bar{u}^k \rangle + \langle d^0, \bar{u}^0 \rangle.$$

E como $d^0 = \sum_{k \in N} B^k \bar{x}^k$

resulta

$$\sum_{k \in N} \langle c^k, \bar{x}^k \rangle = \sum_{k \in N} \langle d^k, \bar{u}^k \rangle + \sum_{k \in N} \langle \bar{u}^0 \cdot B^k, \bar{x}^k \rangle$$

5.3

ou ainda

$$\sum_{k \in N} \langle c^k - \bar{u}^0 \cdot B^k, \bar{x}^k \rangle = \sum_{k \in N} \langle d^k, \bar{u}^k \rangle.$$

Logo, pelo teorema de dualidade aplicado ao par $PDR(\bar{u}^0)$ e $DR(\bar{u}^0)$, segue que $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ é solução ótima de $PDR(\bar{u}^0)$ e $(\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n)$ é solução ótima de $DR(\bar{u}^0)$.

De 10 e 11 segue a tese. $\square$

Do lema 12 vemos claramente que existe o valor procurado para μ , que nada mais é do que o multiplicador dual ótimo $\bar{u}^0$ associado às restrições do bloco de ligação do problema primal.

5.3 - O ALGORITMO PRIMAL-DUAL APLICADO AO PROBLEMA PRIMAL

Nesta seção, aplicamos os resultados do capítulo 4 ao problema primal e obtemos uma versão conceitual do algoritmo primal-dual de decomposição.

1 Problema primal associado

Definimos o problema primal associado como

PA: "Minimize $\langle \underline{1}, y^1 + y^2 \rangle$

sujeito a $\sum_{k \in N} B^k x^k + y^1 - y^2 = d^0$

$$A^k x^k = d^k, \quad k \in N$$

$$x^k \geq 0, \quad k \in N$$

$$\begin{aligned}
 & y^1, y^2 \geq 0 \\
 & \text{com } x^k \in \mathbb{R}^{n_k}, \quad k \in N \\
 & \text{e } y^1, y^2 \in \mathbb{R}^{m_0}.
 \end{aligned}$$

Notemos que as variáveis artificiais foram introduzidas somente nas restrições do bloco de ligação para termos, sempre, a viabilidade nos subproblemas, isto é, se $\bar{x}^k$ ($k \in N$) faz parte de uma solução viável de PA, então $\bar{x}^k$ é solução viável de $P_k(\mu)$ para $k \in N$. Por outro lado, sendo os subproblemas viáveis, segue imediatamente que PA é viável.

A introdução do par de vetores não-negativos y^1 e y^2 se deve ao fato de a inviabilidade de uma solução $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ ocorrer tanto por

$$\sum_{k \in N} B^k \bar{x}^k \neq d^0 \text{ ou por } \sum_{k \in N} B^k \bar{x}^k \neq d^0.$$

Notemos que $\langle y^1, y^2 \rangle = 0$, pois não podemos ter duas colunas linearmente dependentes na base.

2. Problema dual associado

O problema dual de PA será chamado problema dual associado.

$$\begin{aligned}
 \text{DA: } & \text{"Maximize } \langle d^0, u^0 \rangle + \sum_{k \in N} \langle d^k, u^k \rangle \\
 & \text{sujeito a } u^0 B^k + u^k A^k \leq 0, \quad k \in N \\
 & u^0 \leq \underline{1}
 \end{aligned}$$

5.3

$$u^0 \geq -1$$

com $u^k \in \mathbb{R}^{m_k}, k \in N \cup \{0\}$." ■

Daqui em diante, $\bar{u}$ denotará uma solução viável do problema dual, a menos de especificações em contrário. Entretanto, $\bar{u}$ terá uma característica toda especial. Sua estrutura será

$$\bar{u} = (\bar{u}^0, \dots, \bar{u}^n)$$

onde $\bar{u}^0$ é uma variável (vetorial) à qual procuramos atribuir valores convenientes, e $\bar{u}^k$ ($k \in N$) são os multiplicadores do simplex associados às bases ótimas dos subproblemas $P_k(\bar{u}^0)$ ($k \in N$). Vemos assim que $\bar{u}$ é "função" de $\bar{u}^0$. Notemos que o lema 5.2.6 garante a viabilidade de $\bar{u}$.

3 Conjuntos das restrições duais ativas

Associados a $\bar{u}^0$ definimos os seguintes conjuntos de índices das restrições ativas no problema dual.

$$S_k(\bar{u}^0) = \{j \in N_k \mid \langle \bar{u}^0, B_j^k \rangle + \langle \bar{u}^k, A_j^k \rangle - c_j^k = 0\}, \quad k \in N$$

com

$$N_k = \{1, \dots, n_k\}, \quad k \in N. \quad \blacksquare$$

Quando o valor de $\bar{u}^0$ estiver subentendido denotaremos $S_k(\bar{u}^0)$ por S_k . Notemos que, a rigor, S_k é função de $\bar{u}$; po-

rêm como fizemos $\bar{u}$ uma "função" de $\bar{u}^0$, segue a dependência de S_k em relação a $\bar{u}^0$. Notemos que, no caso de $P_k(\bar{u}^0)$ ter múltiplas soluções básicas ótimas, podemos ter valores diferentes de $\bar{u}$ associados ao mesmo $\bar{u}^0$. Porém, mesmo assim, o conjunto $S_k(\bar{u})$ é o mesmo para todos esses valores de $\bar{u}$. Daí de notarmos $S_k(\bar{u})$ por $S_k(\bar{u}^0)$.

Notemos, ainda, que sendo I_k uma base ótima de $P_k(\bar{u}^0)$, então

$$4 \quad I_k \subset S_k, \quad k \in \mathbb{N}$$

Com base nos conjuntos S_k , definimos a seguir os dois problemas associados restritos, como no capítulo anterior.

5 Problema primal associado restrito

$$\begin{aligned} \text{PAR}(\bar{u}^0): \quad & \text{"Minimize } \langle \bar{1}, y^1 + y^2 \rangle \\ & \text{sujeito a } \sum_{k \in \mathbb{N}} B_{S_k}^k x_{S_k}^k + y^1 - y^2 = d^0, \\ & \quad A_{S_k}^k x_{S_k}^k = d^k, \quad k \in \mathbb{N} \\ & \quad x_{S_k}^k \geq 0, \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\text{com } x_{S_k}^k \in \mathbb{R}^{p_k}, \quad p_k = |S_k|, \quad k \in \mathbb{N}."$$

6 Problema dual associado restrito

$$\text{DAR}(\bar{u}^0): \quad \text{"Maximize } \langle d^0, u^0 \rangle + \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle d^k, u^k \rangle$$

sujeito a $u^0 B_{s_k}^k + u_{s_k}^k A_{s_k}^k \leq 0, k \in N$

$$u^0 \leq \underline{1}$$

$$u^0 \geq -\underline{1}$$

com $u^k \in \mathbb{R}^{m_k}, k \in N \cup \{0\}$." ■

Assumindo a hipótese de X^k não vazio para $k \in N$, vemos, facilmente, de 5. que $PAR(\bar{u}^0)$ é viável. Como a função objetivo é limitada inferiormente pelo valor 0, segue que $PAR(\bar{u}^0)$ tem valor ótimo não negativo. Pelo teorema de dualidade 2.5.15, segue que $DAR(\bar{u}^0)$ tem valor ótimo não-negativo.

Os resultados básicos demonstrados na seção 4.3 continuam válidos, desde que alteremos seus enunciados como segue.

7 Lema

Sejam $\hat{x}^k \in \mathbb{R}^{n_k}$ tais que $\hat{x}_j^k = 0$ para $j \in N_k - S_k$ ($k \in N$). Se $(\hat{x}_{s_1}^1, \dots, \hat{x}_{s_n}^n, 0)$ é solução ótima de $PAR(\bar{u}^0)$, então $(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^n)$ é solução ótima do primal P.

8 Lema

Seja $(\hat{u}^0, \hat{u}^1, \dots, \hat{u}^n)$ uma solução viável de $DAR(\bar{u}^0)$. Se $\langle \hat{d}^0, \hat{u}^0 \rangle + \sum_{k \in N} \langle \hat{d}^k, \hat{u}^k \rangle > 0$ e $\langle \hat{u}^0, B_j^k \rangle + \langle \hat{u}^k, A_j^k \rangle \leq 0$ para $j \in N_k - S_k$ e $k \in N$, então o primal é inviável.

9

Lema

Seja $\hat{u} = (\hat{u}^0, \hat{u}^1, \dots, \hat{u}^n)$ uma solução ótima de $DAR(\bar{u}^0)$ tal que $\langle \hat{u}^0, B_j^k \rangle + \langle \hat{u}^k, A_j^k \rangle > 0$ para algum $j \in N_k - S_k$ e para algum $k \in K$. Então existe um escalar $\bar{\theta} > 0$ tal que $u(\theta) = \bar{u} + \theta \hat{u}$ é solução viável do dual para $0 < \theta \leq \bar{\theta}$. Além disso, o conjunto $\{(j, k) | j \in S_k(u^0(\bar{\theta})), k \in N\}$ contém os índices das variáveis básicas que pertencem a $S = \{(j, k) | j \in S_k, k \in N\}$ e, no mínimo, mais um índice que não pertence a S . ■

O valor de $\bar{\theta}$, dado pela demonstração desse lema, é

$$10 \quad \bar{\theta} = \min \left\{ \frac{c_j^k - \langle \bar{u}^0, B_j^k \rangle - \langle \bar{u}^k, A_j^k \rangle}{\langle \bar{u}^0, B_j^k \rangle + \langle \bar{u}^k, A_j^k \rangle} \mid j \in N_k - S_k, k \in N, \langle \bar{u}^0, B_j^k \rangle + \langle \bar{u}^k, A_j^k \rangle > 0 \right\}$$

Antes de provarmos mais alguns resultados importantes, vamos fixar uma nomenclatura (como fizemos para $\bar{u}$) a fim de facilitar os enunciados dos mesmos.

11 Consideremos um vetor $\bar{u}^0 \in \mathbb{R}^{m_0}$. Sejam:

- a) I_k uma base ótima de $P_k(\bar{u}^0)$ ($k \in N$),
- b) $\bar{x}_k$ a solução básica associada a I_k ($k \in N$),
- c) $\bar{u} = (\bar{u}^0, \bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n)$ solução viável do dual D , tal que $\bar{u}^k$ é o multiplicador do simplex associado a I_k ($k \in N$),
- d) S_k ($k \in N$) os conjuntos das restrições duais ativas,
- e) $\hat{u} = (\hat{u}^0, \hat{u}^1, \dots, \hat{u}^n)$ uma solução ótima de $DAR(\bar{u}^0)$ tal que as condições de otimalidade (lema 8) e de inviabili-

5.3

dade (lema 9) para o primal P não estejam satisfeitas.

- f) $(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^n)$ uma solução viável do primal associado PA, tal que $\hat{x}_j^k = 0$ (para $j \in N_k - S_k$ e $k \in N$) e $(\hat{x}_{s_1}^1, \dots, \hat{x}_{s_n}^n, \hat{y}^1, \hat{y}^2)$ é solução básica ótima de $PAR(\bar{u}^0)$ associada à solução $\bar{u}$,
- g) $\hat{I}_k$ o conjunto de índices das variáveis x_j^k que estão na base do problema $PAR(\bar{u}^0)$ associada às soluções básicas definidas em (e) e (f),
- h) $\tilde{u} = (\tilde{u}^0, \dots, \tilde{u}^n)$ solução viável do dual tal que $\tilde{u} = \bar{u} + \bar{\theta} \hat{u}$, onde $\bar{\theta}$ é calculado por 10,
- i) K o conjunto dos subproblemas cujas bases ótimas I_k ($k \in N$) não estão contidas na base ótima de $PAR(\bar{u}^0)$ associada às soluções definidas em (e) e (f), isto é;

$$12 \quad K = \{k \in N \mid I_k - \hat{I}_k \neq \emptyset\}^{(1)}$$

13 Lema

Seja uma matriz A com estrutura bloco angular e com característica igual ao seu número de linhas. Então toda base de A possui uma base de cada bloco diagonal, como submatrizes.

(1) - Notemos que $I_k - \hat{I}_k = \{j \in N_k \mid j \in I_k, j \notin \hat{I}_k\}$, isto é, $I_k - \hat{I}_k$ é o conjunto das variáveis x_j^k que estão na base do subproblema $P_k(\bar{u}^0)$, mas não estão na base do $PAR(\bar{u}^0)$.

PROVA - Seja A^k um bloco diagonal de A . Toda base de A , após uma reordenação de suas colunas, possui um conjunto de linhas que pode ser escrito como uma submatriz da forma

$$(0, A_{T_k}^k, 0).$$

Isto decorre da hipótese de a característica de A ser igual ao seu número de linhas.

Ora, se $A_{T_k}^k$ não for base de A^k , a base de A , em questão, possuirá linhas linearmente dependentes. Logo, $A_{T_k}^k$ é base de A^k . ■

14 Corolário

Se algum bloco diagonal, de uma matriz com estrutura bloco angular, não possuir base, então a matriz também não tem base. ■

Este corolário nos diz que se há redundância ou incompatibilidade nos subproblemas, então também há no problema primal.

Notemos que o problema associado restrito $PAR(\bar{u}^0)$ também tem estrutura bloco angular. Assim, do lema 13 obtemos o seguinte resultado.

15 Corolário

O conjunto $\hat{I}_k$ possui pelo menos m_k componentes de

5.3

x^k ($k \in \mathbb{N}$). ■

Estamos em condições de provar dois importantes resultados.

16 Lema

Se o conjunto K é vazio, então

- a) $\tilde{u}^k$ é o multiplicador do simplex de $P_k(\tilde{u}^0)$ associado a base I_k ($k \in \mathbb{N}$),
- b) $\bar{x}^k$ é solução ótima de $P_k(\tilde{u}^0)$ ($k \in \mathbb{N}$),
- c) $\hat{x}^k$ é solução ótima de $P_k(\tilde{u}^0)$ ($k \in \mathbb{N}$).

PROVA - a) Como $K = \emptyset$, segue $I_k \subset \hat{I}_k$ ($k \in \mathbb{N}$) e, portanto,

$$17 \quad \langle \tilde{u}^0, B_j^k \rangle + \langle \hat{u}^k, A_j^k \rangle = 0, \quad j \in I_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

De 11.(h) e da definição do multiplicador do simplex (2.7.7) segue:

$$\tilde{u}^k = \bar{u}^k + \bar{\theta} \hat{u}^k = (c_{I_k}^k - \bar{u}^0 \cdot B_{I_k}^k) \cdot (A_{I_k}^k)^{-1} + \bar{\theta} \cdot \hat{u}^k$$

ou

$$18 \quad \tilde{u}^k \cdot A_{I_k}^k = c_{I_k}^k - \bar{u}^0 \cdot B_{I_k}^k + \bar{\theta} \hat{u}^k \cdot A_{I_k}^k$$

Através de 17, podemos escrever 18 como

$$\tilde{u}^k \cdot A_{I_k}^k = c_{I_k}^k - \bar{u}^0 \cdot B_{I_k}^k - \bar{\theta} \hat{u}^0 \cdot B_{I_k}^k = c_{I_k}^k - \tilde{u}^0 \cdot B_{I_k}^k$$

ou

$$\tilde{u}^k = (c_{I_k}^k - \tilde{u}^0 \cdot B_{I_k}^k) (A_{I_k})^{-1}$$

que prova a tese.

b) Como $\tilde{u}$ é solução viável do dual D, temos

$$\langle \tilde{u}^0, B_j^k \rangle + \langle \tilde{u}^k, A_j^k \rangle \leq c_j^k, \quad j \in N_k, \quad k \in N.$$

ou

$$(c_j^k - \langle \tilde{u}^0, B_j^k \rangle) - \langle \tilde{u}^k, A_j^k \rangle \geq 0, \quad j \in N_k, \quad k \in N$$

Logo, de (a) e do teorema da otimalidade 2.7.5, segue que I_k é base ótima de $P_k(\tilde{u}^0)$ e $\tilde{x}^k$ a correspondente solução básica ($k \in N$).

c) É fácil ver que $\tilde{x}^k$ é solução viável de $P_k(\tilde{u}^0)$ ($k \in N$).

Por outro lado, como $\tilde{u}$ é solução viável do dual segue que $\tilde{u}^k$ é solução viável de $D_k(\tilde{u}^0)$.

Sabemos que $\hat{I}_k \in S_k(\tilde{u}^0)$ pelo lema 5.3.9, ou de outro modo

$$19 \quad c_j^k - \langle \tilde{u}^0, B_j^k \rangle - \langle \tilde{u}^k, A_j^k \rangle = 0, \quad j \in \hat{I}_k, \quad k \in N$$

De 19 e 11.(f), podemos escrever:

$$(c_j^k - \langle \tilde{u}^0, B_j^k \rangle - \langle \tilde{u}^k, A_j^k \rangle) \cdot \tilde{x}_j^k = 0, \quad j \in N_k, \quad k \in N$$

Logo, pelo teorema fraco das folgas complementares

2.5.16, segue a tese. $\square$

5.3

Sejam $r \in N$ e $s \in N_r - S_r$ os índices que fornecem o valor mínimo $\bar{\theta}$ em 10. Isto é,

$$\bar{\theta} = \frac{c_s^r - \langle \bar{u}^0, B_s^r \rangle - \langle \bar{u}^r, A_s^r \rangle}{\langle \hat{u}^0, B_s^r \rangle + \langle \hat{u}^r, A_s^r \rangle}$$

Então o fator de custo relativo da variável x_s^r em $P_r(\bar{u}^0)$ será:

$$c_s^r - \langle \bar{u}^0, B_s^r \rangle - \langle \bar{u}^r, A_s^r \rangle = (c_s^r - \langle \bar{u}^0, B_s^r \rangle - \langle \bar{u}^r, A_s^r \rangle) + \\ - \bar{\theta} \cdot (\langle \hat{u}^0, B_s^r \rangle + \langle \hat{u}^r, A_s^r \rangle) = 0.$$

Notemos, portanto, que o lema 9 e o lema 6 nos mostram que a variação de $\bar{u}^0$ para $\bar{u}^0$ no parâmetro μ provocou o aparecimento de soluções múltiplas para o problema $P_r(\bar{u}^0)$.

20 Lema

Se K não é vazio, então existe uma base ótima $\hat{I}_k$ de $P_k(\bar{u}^0)$ ($k \in K$) tal que

- a) $\hat{I}_k \subset \hat{I}_k$, $\hat{I}_k \supset I_k \cap \hat{I}_k$ ($k \in K$)
- b) $S_k(\bar{\bar{u}}) = S_k(\bar{u})$, $k \in K$, onde: $\bar{\bar{u}} = (\bar{u}^0, \bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n)$ e $\bar{u}^k$ é o multiplicador do simplex associado a $\hat{I}_k$ ($k \in N$).

PROVA - Pelo corolário 15, temos

$$21 \quad |\hat{I}_k| \geq |I_k| = m_k, \quad k \in N.$$

Fazendo

$$J_k = I_k - \hat{I}_k = I_k - I_k \cap \hat{I}_k, \quad k \in K$$

e

$$L_k = \hat{I}_k - I_k = \hat{I}_k - I_k \cap \hat{I}_k, \quad k \in K$$

segue de 21 que $|L_k| \geq |J_k|$, $k \in K$.

Logo, pelo lema 13, existem, em L_k , $|J_k|$ variáveis que podem substituir em I_k as variáveis de J_k , de modo que o novo conjunto de variáveis $\hat{I}_k$ obtido é uma base de $P_k(\bar{u}^0)$, ($k \in K$).

Como $L_k \subset \hat{I}_k \subset S_k(\bar{u})$, todas as variáveis de L_k possuem fatores de custo relativo nulos. Assim, os fatores de custo relativo não se alteram com a troca de I_k por $\hat{I}_k$. Logo, $\hat{I}_k$ é uma base ótima, ($k \in K$).

O item (a) segue por construção de $\hat{I}_k$ ($k \in K$). O item (b) segue do fato de os fatores de custo relativo não se alterarem com a troca de I_k por $\hat{I}_k$. Pois se

$$(c_j^k - \langle \bar{u}^0, B_j^k \rangle) - \langle \bar{u}^k, A_j^k \rangle = (c_j^k - \langle \bar{u}^0, B_j^k \rangle) - \langle \bar{u}^k, A_j^k \rangle, \quad j \in N_k, k \in N$$

então $S(\bar{u}) = S(\bar{u})$. ■

Notemos que o item (b) do lema acima nos diz que, apesar das trocas de bases, o novo problema $PAR(\bar{u}^0)$ obtido é igual ao problema $PAR(\bar{u}^0)$ anterior.

Podemos agora, com base nos resultados anteriores, estabelecer o seguinte algoritmo.

Passo 1 - Resolução dos subprodutos

Resolva os subproblemas $P_k(\bar{u}^0)$ ($k \in N$) para algum valor dado arbitrariamente a $\bar{u}^0$ (valor 0, por exemplo), achando as bases ótimas I_k , as soluções básicas $\bar{x}^k$ associadas, e os multiplicadores do simplex $\bar{u}^k$ associados ($k \in N$). Se encontrar algum subproblema inviável, então o primal é inviável. Caso contrário vá para o passo 2.

Passo 2 - Construção e resolução do $PAR(\bar{u}^0)$

Calcule os conjuntos S_k associados a $\bar{u}$, construa o $PAR(\bar{u}^0)$ correspondente e ache sua solução ótima $(\hat{x}_1^1, \dots, \hat{x}_n^n)$, a solução $(\hat{u}^0, \dots, \hat{u}^n)$ do dual $DAR(\bar{u}^0)$, e os conjuntos $\hat{I}_k$ ($k \in N$).

Passo 3 - Teste de solução ótima

Se o valor ótimo de $PAR(\bar{u}^0)$ é nulo, então o primal é ótimo; o vetor $(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^n)$ tal que $\hat{x}_{s_k}^k = \hat{x}_{s_k}^k$ e $\hat{x}_j^k = 0$ ($j \in N_k - S_k$) para $k \in N$, é a solução ótima do primal. Caso contrário vá para o passo 4.

Passo 4 - Cálculo do conjunto K. Troca de bases dos subproblemas

Calcule o conjunto K. Se K não é vazio, para todo $k \in K$, elimine de I_k as variáveis que pertencem a $I_k - \hat{I}_k$, substituindo-as por variáveis que pertencem a $\hat{I}_k - I_k$. Vá para o passo 5.

Passo 5 - Cálculo de $\bar{\theta}$. Teste de inviabilidade

Calcule $\bar{\theta}$ por

$$\bar{\theta} = \inf \left\{ \frac{c_j^k - \langle \bar{u}^0, B_j^k \rangle - \langle \bar{u}^k, A_j^k \rangle}{\langle \bar{u}^0, B_j^k \rangle + \langle \bar{u}^k, A_j^k \rangle} \mid \langle \bar{u}^0, B_j^k \rangle + \langle \bar{u}^k, A_j^k \rangle > 0, j \in N_k - S_k, k \in N \right\}$$

Se $\bar{\theta} = +\infty$, o primal é inviável. Caso contrário vá para o passo 6.

Passo 6 - Cálculo da nova solução dual viável

Calcule a nova solução dual viável por

$$\bar{u} \leftarrow \bar{u} + \bar{\theta} \cdot \hat{u}.$$

Atualize os custos reduzidos dos subproblemas e volte para o passo 2.

23 Convergência

A sequência de valores ótimos de $\text{PAR}(\bar{u}^0)$, obtidos a cada iteração do algoritmo, é monótona decrescente. Isto decorre do lema 9 e do lema 20, que garantem que o valor ótimo do problema primal associado $\text{PAR}(\bar{u}^0)$ diminui ou permanece constante.

Nos casos em que valor ótimo diminui, as bases mudam de uma iteração para outra. No caso de uma sequência de iterações com o mesmo valor ótimo, usando a regra lexicográfica na solução de $\text{PAR}(\bar{u}^0)$, garantimos que as bases não se

5.3

repetem. Como o número de bases é finito, concluímos que, após um número finito de iterações, o algoritmo acima pára no teste de solução ótima ou no teste de inviabilidade.

A convergência na fase de resolução dos subproblemas é garantida pela própria convergência do simplex.

24

Comentário

Notemos que no passo de resolução dos subproblemas não aparece a condição de ilimitação. Isto porque fizemos a hipótese de X^k ($k \in N$) serem não-vazios e limitados. A condição de $X^k \neq \emptyset$ é relaxada nesse passo; a condição de ilimitação será discutida no fim do capítulo.

O algoritmo descrito em 2.2 nada mais é que o algoritmo primal-dual com um passo adicional; o passo de cálculo do conjunto K e de troca de base. Notemos que esse passo adicional tem por objetivo introduzir no algoritmo as idéias da seção 5.2. Isto é, procurarmos a solução ótima do primal através de soluções ótimas dos subproblemas.

É de se esperar que a eficiência desse algoritmo seja comparável a do primal-dual. Porém, ele não nos trouxe nenhuma vantagem em termos de decomposição. De fato, o número de restrições do primal associado restrito é igual ao do problema primal; e, ainda, o número de restrições do dual associado restrito é $\sum_{k \in N} |S_k| \geq \sum_{k \in N} m_k$ excluindo as $2m_0$ restrições de limitação nas variáveis u_1^0 .

É importante notar que o algoritmo 22 é o arcabouço para uma versão final do primal-dual. Versão esta que nos trará vantagens reais em termos de decomposição. Para tal, na seção seguinte definimos dois problemas ditos de ligação e provamos que os mesmos são equivalentes aos problemas primal e dual associados restritos. As vantagens em termos de decomposição ficarão evidentes.

5.4 - O ALGORITMO PRIMAL-DUAL DE DECOMPOSIÇÃO

Consideremos o vetor $\bar{u}^0 \in \mathbb{R}^{m_0}$ e os supproblemas $P_k(\bar{u}^0)$ ($k \in N$). Sejam $\bar{x}^k$ solução básica viável de $P_k(\bar{u}^0)$, I_k a base associada a $\bar{x}^k$, e $\bar{u}^k$ o multiplicador do simplex associado a I_k , para $k \in N$.

Antes de introduzirmos os problemas de ligação vamos definir as duas matrizes e os dois vetores abaixo:

- 1 $Y^k = (A_{I_k})^{-1} A^k, k \in N,$
- 2 $F^k = B^k - B_{I_k}^k \cdot Y^k, k \in N,$
- 3 $\bar{d}^0 = d^0 - \sum_{k \in N} B_{I_k}^k \bar{x}^k, \quad e$
- 4 $f^k = (f_j^k)_{j \in N_k}, \quad f_j^k = \sum_{i=1}^{m_0} F_{ij}^k, \quad k \in N.$

Denotemos, para $k \in N$, por T_k o conjunto das variáveis x_j^k que estão fora da base I_k , mas que possuam fatores de custo relativo nulos. Podemos escrever que

$$T_k = S_k - I_k, \quad k \in N$$

5.4

ou

$$S_k = I_k \cup T_k, \quad k \in N$$

Podemos, agora, definir os problemas de ligação

6 Problema primal de Ligação

$$\begin{aligned} PL(\bar{u}^0): \quad & \text{"Minimize } \langle \underline{1}, y^1 + y^2 \rangle \\ & \text{sujeito a } \sum_{k \in N} F_{T_k}^k \cdot x_{T_k}^k + y^1 - y^2 = \bar{d}^0 \\ & Y_{T_k}^k \cdot x_{T_k}^k + x_{I_k}^k = \bar{x}_{I_k}^k, \quad k \in N \\ & x_{T_k}^k \geq 0 \\ & x_{I_k}^k \geq 0 \\ & y^1, y^2 \geq 0." \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Notemos que $PL(\bar{u}^0)$ é um sistema canônico. Na realidade, como provamos a seguir, $PL(\bar{u}^0)$ é o $PAR(\bar{u}^0)$ escrito como um sistema canônico.

7 Problema dual de Ligação

$$\begin{aligned} DL(\bar{u}^0): \quad & \text{"Minimize } \langle \underline{1}, \bar{d}^0 \rangle - \langle \bar{d}^0, v^0 \rangle - \sum_{k \in N} \langle \bar{x}_{I_k}^k, v^k \rangle \\ & \text{sujeito a } v^0 \cdot F_{T_k}^k + v^k \cdot Y_{T_k}^k \geq f_{T_k}^t, \quad k \in N \\ & v^0 \leq 2 \cdot \underline{1} \\ & v^k \geq 0, \quad k \in N \cup \{0\}." \quad \blacksquare \end{aligned}$$

É fácil ver que $DL(\bar{u}^0)$ é uma forma equivalente do dual de $PL(\bar{u}^0)$ fazendo a seguinte transformação de variáveis

$$8 \quad v^0 = \underline{1} - u^0$$

$$9 \quad v^k = -u^k$$

Notemos que esta transformação traz a vantagem de diminuir o número de restrições de limitação no vetor u^0 (agora v^0), e transformar todas as variáveis de modo a serem não-negativas.

10 Lema

Os problemas de ligação $PL(\bar{u}^0)$ e $DL(\bar{u}^0)$ são equivalentes aos problemas associados restritos $PAR(\bar{u}^0)$ e $DAR(\bar{u}^0)$, respectivamente.

PROVA - Devido a dualidade entre $PAR(\bar{u}^0)$ e $DAR(\bar{u}^0)$ e entre $PL(\bar{u}^0)$ e $DL(\bar{u}^0)$, basta provarmos a equivalência entre $DAR(\bar{u}^0)$ e $DL(\bar{u}^0)$. Entretanto, faremos a prova direta para os dois casos com o intuito de visualizarmos mais facilmente outros resultados e apresentarmos a construção do problema de ligação.

Provemos, inicialmente, a equivalência entre $PAR(\bar{u}^0)$ e $PL(\bar{u}^0)$.

Devido a 5, podemos afirmar que

5.4

$$11 \quad x_{s_k}^k \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}$$

é equivalente a

$$12 \quad x_{I_k}^k \geq 0, \quad x_{T_k}^k \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}$$

e que

$$13 \quad A_{s_k}^k \cdot x_{s_k}^k = d^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

é equivalente a

$$A_{I_k}^k \cdot x_{I_k}^k + A_{T_k}^k \cdot x_{T_k}^k = d^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

que multiplicada pela inversa da base resulta em

$$14 \quad x_{I_k}^k + Y_{T_k}^k = \bar{x}_{I_k}^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

Usando 14, podemos escrever as restrições de ligação do PAR($\bar{u}^0$)

$$15 \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} B_{s_k}^k \cdot x_{s_k}^k + y^1 - y^2 = d^0$$

como:

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} B_{I_k}^k \cdot \bar{x}_{I_k}^k + \sum_{k \in \mathbb{N}} B_{T_k}^k \cdot Y_{T_k}^k \cdot x_{T_k}^k + \sum_{k \in \mathbb{N}} B_{T_k}^k \cdot x_{T_k}^k + y^1 - y^2 = d^0$$

que, devido a 2 e 3 resulta em

$$16 \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} r_{T_k}^k \cdot x_{T_k}^k + y^1 - y^2 = \bar{d}^0$$

A equivalência entre (11,13,15) e (12,14,16), e a

igualdade entre as funções objetivos de $PAR(\bar{u}^0)$ e $PL(\bar{u}^0)$ prova a equivalência entre os dois problemas.

Provemos agora a equivalência entre $DAR(\bar{u}^0)$ e $DL(\bar{u}^0)$.

Consideremos a seguinte transformação de variáveis:

$$17 \quad v^0 = \underline{1} - u^0$$

$$18 \quad v^k = -u^0 \cdot B_{I_k}^k - u^k \cdot A_{I_k}^k, \quad k \in N$$

Substituindo 17 e 18 na função objetivo do $DL(\bar{u}^0)$

temos:

$$19 \quad \begin{aligned} & \langle \underline{1}, \bar{d}^0 \rangle - \langle \bar{d}^0, v^0 \rangle - \sum_{k \in N} \langle \bar{x}_{I_k}^k, v^k \rangle = \\ & \quad \cdot \langle \bar{d}^0, u^0 \rangle + \sum_{k \in N} \langle B_{I_k}^k \cdot \bar{x}_{I_k}^k, u^0 \rangle + \sum_{k \in N} \langle A_{I_k}^k \cdot \bar{x}_{I_k}^k, u^k \rangle = \\ & \quad \langle \bar{d}^0 + \sum_{k \in N} B_{I_k}^k \cdot \bar{x}_{I_k}^k, u^0 \rangle + \sum_{k \in N} \langle d^k, u^k \rangle = \\ & \quad \langle d^0, u^0 \rangle + \sum_{k \in N} \langle d^k, u^k \rangle \end{aligned}$$

Substituindo 1, 3, e, 17 e 18 em

$$20 \quad v^0 \cdot F_{T_k}^k + v^k \cdot Y_{T_k}^k \geq f_{T_k}^k, \quad k \in N,$$

obtemos

$$21 \quad u^0 \cdot B_{T_k}^k + v^k \cdot A_{T_k}^k \leq 0, \quad k \in N.$$

Substituindo 17 e 18 em

$$22 \quad v^k \geq 0, \quad k \in N \cup \{0\}$$

5.4

resulta

$$23 \quad u^0 \cdot B_{I_k}^k + u^k \cdot A_{I_k}^k \leq 0, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$24 \quad u^0 \leq \underline{1}$$

De 5, 21 e 23 podemos escrever

$$25 \quad u^0 \cdot B_{S_k}^k + v^k \cdot A_{S_k}^k \leq 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Finalmente, substituindo 17 em

$$26 \quad v^0 \leq 2 \cdot \underline{1}$$

obtemos

$$27 \quad u^0 \geq -\underline{1}$$

As sentenças 19, 25, 24 e 27 reconstituem o problema $DAR(\bar{u}^0)$ a partir de $DL(\bar{u}^0)$. Usando as transformações inversas de 17 e 18:

$$28 \quad u^0 = 1 - v^0$$

$$29 \quad u^k = -v^k \cdot (A_{I_k}^k)^{-1} + u^0 \cdot B_{I_k}^k \cdot (A_{I_k}^k)^{-1} - f_{I_k}^k \cdot (A_{I_k}^k)^{-1}$$

provamos analogamente que $DL(\bar{u}^0)$ pode ser reescrito a partir de $DAR(\bar{u}^0)$. Provando, assim, a equivalência. ■

Notemos que, devido a equivalência entre $PAR(\bar{u}^0)$ e $PL(\bar{u}^0)$, entre $DAR(\bar{u}^0)$ e $DL(\bar{u}^0)$, podemos transformar o algo-

ritmo 5.3.22, trocando o par de problemas associados restritos pelo par de problemas de ligação. É fácil ver que, neste caso, as matrizes F^k e Y^k e os vetores $\bar{d}^0$ e f^k só se alterarão quando houver uma troca de base.

Antes de enunciarmos os passos do algoritmo transformado, vejamos algumas relações e definições que facilitam essa tarefa.

Definindo o vetor t^k ($k \in N$) como:

$$30 \quad t^k = (t_j^k)_{j=1}^{n_k} \text{ com } t_j^k = f_j^k - \langle \hat{v}^0, F_j^k \rangle - \langle \hat{v}^k, Y_j^k \rangle, \quad k \in N$$

onde $\hat{v} = (\hat{v}^0, \dots, \hat{v}^n)$ é solução ótima de $DL(\bar{u}^0)$, podemos ver, através da equivalência entre $DL(\bar{u}^0)$ e $DAR(\bar{u}^0)$, que:

$$31 \quad t_j^k = \langle \hat{u}^0, B_j^k \rangle + \langle \hat{u}^k, A_j^k \rangle, \quad j \in N_k, \quad k \in N$$

onde $\hat{u} = (\hat{u}^0, \dots, \hat{u}^n)$ é a correspondente solução ótima de $DAR(\bar{u}^0)$.

Aplicando o teorema fraco das folgas complementares 2.5.16 ao par $(PL(\bar{u}^0)$ e $DL(\bar{u}^0))$, podemos escrever

$$\langle \hat{x}_{I_k}^k, \hat{v}^k \rangle = 0, \quad k \in N$$

onde $(\hat{x}_{s_k}^k)_{k=1}^n$ é solução ótima de $PL(\bar{u}^0)$ e $(\hat{v}^k)_{k=1}^n$ é a correspondente solução ótima de $DL(\bar{u}^0)$.

Se $\hat{v}_j^k > 0$, para algum $j \in N_k$ e algum $k \in N$, então $\hat{x}_j^k = 0$. Isto é, a variável x_j^k não está na base de $PL(\bar{u}^0)$. Podemos,

5.4

então, calcular o conjunto K através de:

$$32 \quad K = \{k \in N | \hat{v}^k \neq 0\}$$

Denotando os fatores de custo relativo associados às bases ótimas de $P_k(\bar{u}^0)$ por $\bar{c}^k(\bar{u}^0)$, temos:

$$33 \quad \bar{c}_j^k(\bar{u}^0) = c_j^k - \langle \bar{u}^0, B_j^k \rangle - \langle \bar{u}^k, A_j^k \rangle, \quad j \in N_k, \quad k \in N$$

$$34 \quad \bar{c}_j^k(\bar{u}^0) = c_j^k - \langle \bar{u}^0, B_j^k \rangle - \langle \bar{u}^k, A_j^k \rangle, \quad j \in N_k, \quad k \in N$$

com

$$35 \quad \bar{u}^0 = \bar{u}^0 + \bar{\theta} \hat{u}^0$$

$$36 \quad \bar{u}^k = \bar{u}^k + \bar{\theta} \hat{u}^k, \quad k \in N.$$

Substituindo 35 e 36 em 34, resulta:

$$\bar{c}_j^k(\bar{u}^0) = c_j^k - \langle \bar{u}^0, B_j^k \rangle - \langle \bar{u}^k, A_j^k \rangle - \bar{\theta} (\langle \hat{u}^0, B_j^k \rangle + \langle \hat{u}^k, A_j^k \rangle), \quad j \in N_k, \quad k \in N$$

que, devido a 31 e 33, fornece

$$37 \quad \hat{c}_j^k(\bar{u}^0) = \bar{c}_j^k(\bar{u}^0) - \bar{\theta} \cdot t_j^k, \quad j \in N_k, \quad k \in N$$

Notemos, ainda, que

$$38 \quad t_j^k = f_j^k - \langle \hat{v}^0, F_j^k \rangle, \quad j \in N_k, \quad k \in N$$

para $v^k = 0$, $k \in N$.

Considerando 32, 37 e 38, podemos escrever os passos do algoritmo transformado.

Algoritmo

Passo 1 - Resolução dos subproblemas

Resolva os subproblemas $P_k(\bar{u}^0)$ ($k \in N$) para algum valor (arbitrário) de $\bar{u}^0$ (valor 0, por exemplo), achando as bases ótimas I_k , as soluções básicas x^k associadas, e os multiplicadores do simplex $\bar{u}^k$ associados ($k \in N$). Se encontrar algum subproblema inviável, então o problema primal é inviável. Caso contrário, calcule as matrizes F^k ($k \in N$) e os vetores f^k ($k \in N$) e $\bar{d}^0$; vá para o passo 2.

Passo 2 - Construção e resolução do $DL(\bar{u}^0)$

Calcule os conjuntos T_k ($k \in N$) associados a $\bar{u}$, construa o $DL(\bar{u}^0)$ correspondente e ache sua solução ótima $\hat{v} = (\hat{v}^0, \dots, \hat{v}^n)$.

Passo 3 - Teste de solução ótima

Se o valor ótimo de $DL(\bar{u}^0)$ é nulo, então o primal é ótimo; o vetor $\bar{u} = (\bar{u}^0, \dots, \bar{u}^1)$ é solução ótima do dual D e a solução ótima do primal pode ser obtida do quadro simplex de $DL(\bar{u}^0)$. Caso contrário vá para o passo 4.

Passo 4 - Cálculo do conjunto K . Troca de bases de subproblemas

Calcule o conjunto K . Se K não é vazio, então, para todo $k \in K$, elimine de I_k as variáveis associadas às componentes positivas de $\hat{v}^k$, substituindo-as por variáveis x_j^k

5.4

tais que $j \in T_k$ e $t_j^k = 0$, faça $v^k = 0$ e recalcule F^k , f^k e $\bar{d}^0$.
Vá para o passo 5.

Passo 5 - Cálculo de $\bar{\theta}$. Teste de inviabilidade

Calcule $\bar{\theta}$ por

$$\bar{\theta} = \inf \left\{ \frac{\bar{c}_j^k(\bar{u}^0)}{t_j^k} \mid t_j^k > 0, j \in N_k - S_k, k \in N \right\}.$$

Se $\bar{\theta} = +\infty$, o primal é inviável. Caso contrário vá para o passo 6.

Passo 6 - Cálculo do novo valor de $\bar{u}^0$ e dos novos custos reduzidos

Calcule o novo valor de $\bar{u}^0$ e os novos custos reduzidos por

$$\bar{u}^0 \leftarrow \bar{u}^0 + \bar{\theta} \cdot (1 - \hat{v}^0)$$

$$\bar{c}_j^k(\bar{u}^0) \leftarrow \bar{c}_j^k(\bar{u}^0) - \bar{\theta} \cdot t_j^k, \quad j \in N_k, k \in N.$$

40 Convergência

A convergência do algoritmo acima decorre imediatamente da convergência do algoritmo 5.3.22 e do lema de equivalência 10.

41 Comentário

Quando ocorre uma troca de base, vimos, pelo lema

5.3.9, que o $PAR(\bar{u}^0)$ continua o mesmo. Consequentemente, o $PL(\bar{u}^0)$ continua o mesmo, porém, escrito como um sistema canônico em função da nova base. Notemos que, entretanto, o dual $DL(\bar{u}^0)$ se altera de modo que a nova solução seja tal que $\hat{v}^k = 0$. Isto decorre da mudança de variáveis básicas.

Notemos que o passo 6 não nos preocupamos em calcular os novos multiplicadores do simplex; isto porque com os novos custos reduzidos, nós podemos calcular os novos conjuntos T_k ($k \in N$) no passo 2. Entretanto, se estivermos usando o simplex na forma revisada, é melhor atualizar os multiplicadores do simplex através da relação $\tilde{u}^k = \bar{u}^k + \bar{\theta} \hat{u}^k$ ($k \in N$) do que através da inversa da base.

Notemos, também, que, com a alteração introduzida, o algoritmo funciona com reais vantagens em termos de decomposição. Resolvemos os subproblemas somente uma vez, e, somente nas iterações em que o passo de troca de bases é executado, precisamos efetuar algumas operações de pivotação em alguns desses subproblemas. A cada iteração, resolvemos um problema de ligação com um número variável e reduzido (em relação ao primal) de restrições.

O problema de ligação $DL(\bar{u}^0)$ possui um número de restrições igual a $m_0 + \sum_{k \in N} |T_k|$. Porém, m_0 dessas restrições são restrições de limites superiores nas variáveis v_i^0 . Ora, usando técnicas de variáveis limitadas no simplex, essas restri-

5.4

ções não afetam sensivelmente a eficiência de resolução do problema de ligação.

O número de restrições efetivas (aquelas que não são da forma $u_i^0 \leq 2$) varia de iteração para iteração. Em geral, esse número cresce, a partir de zero, de uma restrição por iteração, até atingir o valor m_0 , quando (frequentemente) ele estabiliza.

Uma explicação para esse comportamento pode ser obtido através dos seguintes fatos que enumeramos a seguir:

- a) Na primeira iteração, $\sum_{k \in N} |T_k|$ está ligado à multiplicidade de soluções ótimas nos subproblemas. Cada conjunto T_k contém as variáveis candidatas a entrar na base do subproblema $P_k(\bar{u}^0)$ formando uma nova solução básica. Esse número, em geral, é pequeno e, não raramente, é igual a zero.
- b) Em cada iteração, o algoritmo resolve um problema $PL(\bar{u}^0)$ (através do seu dual), o qual é constituído pelas variáveis que estão em I_k ($k \in N$), pelas variáveis artificiais e pelas variáveis que estão em T_k ($k \in N$). As variáveis que estão em I_k ($k \in N$) e m_0 variáveis artificiais formam uma base viável para $PL(\bar{u}^0)$.
- c) No final de cada iteração, as variáveis de T_k que estão na base ótima de $PL(\bar{u}^0)$ farão parte do T_k da iteração seguinte (pois possuem folga t_j^k nula e portan-

to conforme 37 seus custos relativos não se alteram). As variáveis de T_k , que não estão na base ótima, e as de I_k , que saíram da base, não farão parte do T_k da iteração seguinte (a menos que possuem folga t_j^k nula, o que não é frequente).

- d) Em cada iteração, as variáveis não-básicas dos subproblemas, que não estavam no T_k anterior, são candidatas a entrar no T_k atual (desde que possuam folga $t_j^k > 0$). Várias dessas variáveis podem entrar em T_k , mas, frequentemente, entra só uma (no cálculo de $\bar{\theta}$, em geral, o mínimo do conjunto é único).

Podemos, agora, explicar o comportamento citado acima. O item (a) explica o fato de $\sum_{k \in N} |T_k|$ ser zero no início do algoritmo. Quando $\sum_{k \in N} |T_k|$ é menor que m_0 , é bem provável que as variáveis T_k substituam as variáveis artificiais, a menos que ocorra troca de bases. Então, de (c) e (d), vemos que $\sum_{k \in N} |T_k|$ crescerá de uma variável por iteração (em geral).

Se $\sum_{k \in N} |T_k|$ for maior do que m_0 e no final da iteração não tivermos solução ótima, concluímos, através de (c), que no máximo $m_0 - 1$ variáveis de T_k ($k \in N$) entraram na base ótima de $PL(\bar{u}^0)$. Assim, se as variáveis que não entraram na base possuírem folga t_j^k não nula (que é frequente), segue, devido a (d), que, na próxima iteração, provavelmente $\sum_{k \in N} |T_k| = m_0$.

5.5

Um caso interessante é quando o problema primal apresenta o bloco de ligação com restrições de desigualdade. Ao transformarmos essas desigualdades em igualdades, pela adição de variáveis de folga, estas não aparecerão em nenhum bloco diagonal. Logo em algum dos blocos, aparecerá uma coluna nula, que, portanto, terá fator de custo relativo nulo no correspondente subproblema. Apesar de essa variável (de folga no bloco de ligação) não poder entrar na base do subproblema, (porque sua coluna é nula) ela é uma candidata a entrar na base do problema de ligação. Desta forma, na primeira iteração, já temos $\sum_{k \in N} |T_k| \geq m_0$.

5.5 - OS ALGORITMOS DE BALAS E DE GONÇALVES

Nesta seção, apresentamos os resultados finais dos trabalhos de Balas e de Gonçalves, comparando-os com o algoritmo da seção anterior.

1 O trabalho de Egon Balas

Egon Balas publicou um trabalho em 1965 [Balas,66] onde ele apresenta um algoritmo de decomposição, que chamou método de decomposição quase-primal-dual (ou "infeasibility-pricing method"). Aí ele desenvolve o algoritmo 5.4.39 de forma quase independente do primal-dual, dizendo na introdução que o seu algoritmo "usa algumas idéias do algoritmo pri-

mal-dual de Dantzig, Ford e Fulkerson".

De fato, o tratamento dado por Balas não permite a percepção do forte relacionamento com o algoritmo primal-dual. Além do que, a prova de convergência e a justificação do algoritmo se tornam trabalhosas, principalmente no caso do lema 5.3.20. Num trecho do texto ele chega a dizer "o procedimento de ajuste de preço é sob certos aspectos parecido com aquele do método primal-dual".

Balas desenvolve os problemas de ligação de um modo direto, chegando em duas formas equivalentes de $PL(\bar{u}^0)$ e $DL(\bar{u}^0)$. Essas formas, após uma normalização de nomenclatura são:

$$\begin{aligned} L(\bar{u}^0): \quad & \text{"Minimize } \langle \underline{1}, y^1 + y^2 \rangle \\ & \text{sujeito a } F_{T_k}^k \cdot x_{T_k}^k + y^1 - y^2 = \bar{d}^0 \\ & y_{T_k}^k \cdot x_{T_k}^k \leq \bar{x}_{I_k}^k, \quad k \in N \\ & x_{T_k}^k \geq 0, \quad k \in N \\ & y^1, y^2 \geq 0." \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(\bar{u}^0): \quad & \text{"Maximize } -\langle \bar{d}^0, w^0 \rangle - \sum_{k \in N} \langle \bar{x}_{I_k}^k, v^k \rangle \\ & \text{sujeito a } v^0 \cdot F_{T_k}^k + v^k \cdot Y_{T_k}^k \geq 0, \quad k \in N \\ & -1 \leq w^0 \leq 1 \\ & v^k \geq 0, \quad k \in N." \end{aligned}$$

5.5

Fazendo a transformação $w^0 = v^0 - \underline{1}$ em $D(\bar{u}^0)$ e adicionando as variáveis de folga $x_{I_k}^k$ nas restrições de desigualdade de $L(\bar{u}^0)$; teremos, facilmente, a equivalência entre o par $(L(\bar{u}^0), D(\bar{u}^0))$ e o par $(PL(\bar{u}^0), DL(\bar{u}^0))$. Com essas transformações, o algoritmo proposto por Balas é igual ao algoritmo 5.4.39.

O desenvolvimento realizado até agora neste capítulo unifica o algoritmo de Balas ao algoritmo primal-dual aplicado em decomposição. Daí damos ao algoritmo 5.4.39 o nome de "algoritmo primal-dual de decomposição".

2 O trabalho de Amílcar S. Gonçalves

Amílcar S. Gonçalves publicou um trabalho em 1971 [Gonçalves, 71] onde ele apresenta um algoritmo de decomposição, o qual chamou "infeasibility-pricing primal-dual decomposition method". Nesse trabalho ele mostra o algoritmo como um caso especial do algoritmo primal-dual generalizado para programação linear na forma paramétrica [Gonçalves, 69].

O desenvolvimento do algoritmo lembra em parte a construção do $PL(\bar{u}^0)$ a partir do problema primal. Gonçalves chega a dois problemas de ligação RP'' e RD'' apresentados somente com dois blocos diagonais. Esses dois problemas, colocados na forma geral de n blocos diagonais e fazendo uma normalização de nomenclatura são:

$$\begin{aligned}
 \text{RP}''(\bar{u}^0): \quad & \text{"Minimizar } \langle \underline{1}, \bar{d}^0 \rangle - \sum_{k \in N} f_{T_k}^k \cdot x_{T_k}^k \\
 & \text{sujeito a } \sum_{T_k} F_{T_k}^k \cdot \bar{x}_{T_k}^k + y = \bar{d}^0 \\
 & Y_{T_k}^k \cdot \bar{x}_{T_k}^k + x_{T_k}^k = \bar{x}_{I_k}^k, \quad k \in N \\
 & x_{T_k}^k \geq 0 \\
 & x_{I_k}^k \geq 0 \\
 & y \geq 0."
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{RD}''(\bar{u}^0): \quad & \text{"Minimize } \langle \underline{1}, \bar{d}^0 \rangle - \langle \bar{d}^0, v^0 \rangle - \sum_{k \in N} \langle \bar{x}_{I_k}^k, v^k \rangle \\
 & \text{sujeito a } v^0 \cdot F_{T_k}^k + v^k \cdot Y_{T_k}^k - w_{T_k}^k = f_{T_k}^k, \quad k \in N \\
 & v^0 \geq 0 \\
 & v^k, w^k \geq 0, \quad k \in N."
 \end{aligned}$$

Comparando os problemas $\text{RP}''(\bar{u}^0)$ e $\text{RD}''(\bar{u}^0)$ com $\text{PL}(\bar{u}^0)$ e $\text{DL}(\bar{u}^0)$ vemos quatro diferenças:

- A função objetivo de $\text{RP}''(\bar{u}^0)$ está escrita em função das variáveis $x_{T_k}^k$ ($k \in N$),
- As restrições de $\text{RD}''(\bar{u}^0)$ estão escritas com variáveis de folga $w_{T_k}^k$,
- Em $\text{RP}''(\bar{u}^0)$ aparece somente uma variável artificial (vetorial) y , ao invés do par y^1, y^2 como em $\text{PL}(\bar{u}^0)$,
- Em $\text{RP}''(\bar{u}^0)$ não aparecem as restrições de limite nas

5.5

variáveis u_i^0 .

As diferenças (a) e (b) são irrelevantes e a (d) é decorrência da diferença (c), que é a mais importante. Note-mos que com um único vetor y , o problema $RP''(\bar{u}^0)$ está mais próximo do problema primal associado restrito do primal-dual 4.3.6 do que o $PL(\bar{u}^0)$.

Essa diferença provoca uma alteração no algoritmo. Se $\bar{x}^k$ ($k \in N$) são soluções ótimas dos subproblemas tais que $\sum_{k \in N} B^k \bar{x}^k \neq d^0$, então não existe $y \geq 0$ tal que $\sum_{k \in N} B^k \bar{x}^k + y = d^0$. Para solucionar esta dificuldade, o algoritmo de Gonçalves tem a seguinte diferença com o algoritmo 5.4.39. Ao calcular $\bar{d}^0$ (nos passos 1 e 4), multiplica-se por -1 as componentes $\bar{d}_i^0 < 0$ e as linhas das matrizes F^k associadas a essas componentes.

Gonçalves diz no texto que seu algoritmo "pode ser considerado como um aperfeiçoamento do algoritmo de Ballas, no sentido que as restrições de limite de variáveis foram eliminadas do problema dual de ligação, o que pode acelerar a convergência do algoritmo".

Sem dúvida, o fato de o problema dual de ligação não ter as restrições de limite nas variáveis u_i^0 é uma vantagem no que se refere a solução desse problema. Porém essa vantagem pode ser atenuada utilizando técnicas de limitação de variáveis no simplex.

Notemos, entretanto, que essa diferença força toda solução $\hat{x}$ obtida pela resolução de $RD''(\bar{u}^0)$ a ficar do "mes-

mo lado" que a solução $\bar{x}$ (formada pelas soluções básicas $\bar{x}^k$ ($k \in N$) dos subproblemas) em relação aos hiperplanos $\sum_{k \in N} B^k x^k = d^0$. Assim, o valor ótimo do problema $DL(\bar{u}^0)$ pode, em alguma iteração estar mais próximo do zero do que o valor ótimo do correspondente problema $RD''(\bar{u}^0)$. Este resultado pode (não necessariamente) anular a vantagem da eliminação das restrições de limite nas variáveis u_i^0 .

Pelo exposto acima, vimos que a possível melhoria apresentada por Gonçalves não se deve a aplicação de resultados teóricos diferentes, mas, sim a um processo de manipulação, isto é, a introdução de uma variável artificial, ao invés de duas. Além disso, esse procedimento está mais próximo do algoritmo primal-dual.

Podemos afirmar que os algoritmos de Balas e de Gonçalves são duas implementações distintas de um mesmo algoritmo; o algoritmo primal-dual de decomposição.

5.6- SUBPROBLEMAS ILIMITADOS E INTERPRETAÇÕES

Nesta seção apresentamos, conforme Balas, uma análise da relaxação da hipótese de limitação dos conjuntos de soluções viáveis dos subproblemas. Em seguida, apresentamos uma interpretação geométrica do algoritmo e, também, sua interpretação econômica.

1 Subproblemas ilimitados

Se algum problema $P_k(\bar{u}^0)$ possuir o conjunto de so-

5.6

soluções viáveis x^k ilimitado, então para certos valores $\bar{u}^0$, o subproblema poderá ser ilimitado. Assim, não poderemos usar o algoritmo pela falta de solução ótima $\bar{x}^k$ e inviabilidade de $D_k(\bar{u}^0)$.

Balas sugere "regularizar" esses subproblemas conforme [Charnes-Cooper, 61], introduzindo-se uma restrição adicional (para cada $P_k(\bar{u}^0)$ ilimitado) na forma:

$$\langle \underline{1}, x^k \rangle + x_0^k = U$$

onde x_0^k é uma variável adicional (não-negativa) que não aparece na função objetivo, e U é um escalar arbitrariamente grande.

O novo problema primal obtido (P') é resolvido então pelo algoritmo 5.4.39. Se P' for inviável, então o problema P também será. Caso contrário, seja

$$(\hat{x}_0^1, \hat{x}^1, \dots, \hat{x}_0^n, \hat{x}^n)$$

a solução ótima de P' . Temos os seguintes casos:

- Nenhuma componente de $\hat{x}^k$ ($k \in N$) é função explícita de U . Neste caso, $(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^n)$ é solução ótima de P .
- alguma componente de $\hat{x}^k$ ($k \in N$) é função explícita de U e $\sum_{k \in N} \langle c^k, \hat{x}^k \rangle$ é independente de U . Então o problema P tem solução ótima e, para algum valor finito de U , $(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^n)$ é solução ótima de P .

c) O valor ótimo de P' , $\sum_{k \in N} \langle c^k, \hat{x}^k \rangle$ é dependente de U . Neste caso, o problema P é ilimitado.

Este esquema é tradicional e pode ser comparado à fase de cálculo de uma solução viável inicial para o algoritmo dual simplex, onde as restrições introduzidas são chamadas "restrições artificiais".

2 Interpretação geométrica

Representemos por β_i^k ($i=1, \dots, m_0$) e α_i^k ($i=1, \dots, n_k$) as linhas das matrizes B^k e A^k ($k \in N$) respectivamente. Consideremos os hiperplanos

$$H_1^0: \langle (\beta_1^1, \dots, \beta_1^{n_1}), (x^1, \dots, x^{n_1}) \rangle = d_1^0; \quad (i=1, \dots, m_0) \\ \text{com } (x^1, \dots, x^{n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_1}$$

$$H_i^k: \langle \alpha_i^k, x_i^k \rangle = d_i^k, \quad (i=1, \dots, m_k), \quad (k=1, \dots, n) \\ \text{com } x_i^k \in \mathbb{R}^{n_k}, \quad (k \in N)$$

e os semi-espacos fechados

$$E_j^k: \langle e^j, x^k \rangle \geq 0, \quad (j \in N_k) \quad (k \in N).$$

O algoritmo primal-dual de decomposição gera subproblemas $P_k(\bar{u}^0)$ com soluções ótimas $\hat{x}^k$, obtidas através da solução ótima de $DL(\bar{u}^0)$. Estas soluções pertencem aos semi-espacos E_j^k e aos hiperplanos H_i^j ($k \neq 0$), mas $\hat{x} = (\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^n)$ não pertence a todos hiperplanos H_i^0 (a menos da última ite

ração, se o primal tiver solução ótima).

Notemos que, devido a $y^1 - y^2$ corresponder a uma variável (vetorial) y livre de sinal, essas soluções $\hat{x}$ podem estar de ambos os "lados" de cada hiperplano H_i^0 . Com o decorrer das iterações, a "distância" dessas soluções aos hiperplanos H_i^0 diminui e as soluções vão pertencendo a um número maior de hiperplanos H_i^0 . Se o primal tem solução ótima, então num número finito de iterações, essas soluções $\hat{x}$ pertencerão a todos os hiperplanos H_i^0 e constituirão a solução ótima do primal.

Usando o algoritmo na versão de Gonçalves, o comportamento das soluções $\hat{x}$ é um tanto diferente. Ou seja, toda solução ótima $\hat{x}$, gerada a partir das mesmas soluções básicas $\bar{x}$ dos subproblemas, estão do mesmo "lado" dos hiperplanos H_i^0 ; lado este em que também está a solução $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$.

Esta interpretação geométrica está explicitada no exemplo numérico apresentado no apêndice.

3 Interpretação econômica

O algoritmo primal-dual de decomposição pode ser interpretado economicamente como uma ferramenta para planejamento descentralizado através de fixação de preços. Esta interpretação é análoga a do algoritmo de Dantzig-Wolfe e àquela introduzida na seção 2.4 para a obtenção de separação

a partir de dualidade.

A seguir, apresentamos essa interpretação com maiores detalhes, através de uma tradução direta de Balas.

Na interpretação usual, nosso modelo representa uma economia com n fábricas (correspondendo aos n subproblemas $P_k(\bar{u}^0)$), dirigidas por um centro. A atividade de cada fábrica é condicionada por sua capacidade de produção e por vários recursos que ela tem com exclusiva disponibilidade e que podem não ser conhecidos pelo centro. Esta condição é expressa pelas restrições dos blocos diagonais, que são chamadas *divisionais*. Por outro lado, enquanto produz vários bens, cada fábrica consome bens e recursos comuns às outras fábricas. Os consumos líquidos destes bens e recursos precisam ser iguais a quantidades fixas, que representam os recursos disponíveis fora do sistema e as necessidades da comunidade como um todo, supostas serem conhecidas pelo centro. Essas condições são representadas pelas restrições do bloco de ligação, que são chamadas *globais*. Nós chamaremos também de *globais* os recursos e necessidades aos quais essas restrições se referem.

De modo a otimizar a distribuição dos recursos globais e atribuição das tarefas (necessidades) às fábricas, o centro procede como segue:

Primeiro, as fábricas são convidadas a otimizar seus

5.6

planos de produção em relação às funções objetivos divisionais com os mesmos coeficientes de custo que os da função objetivo global. O plano de produção global resultante desses ótimos divisionais seria obviamente um plano ótimo se fosse viável, isto é, se ele satisfizesse as restrições globais. Mas como, frequentemente, esse não é o caso, o centro toma a seu cargo calcular os *preços de inviabilidade* ($\bar{u}^0$) para os recursos e necessidades globais, um para cada restrição global. Esses preços de inviabilidade são usados então para ajustar os coeficientes de custo das funções objetivos divisionais a fim de induzir as fábricas submeterem outros planos, ótimos em relação às funções objetivos divisionais corrigidas, e ao mesmo tempo tais que, quando combinados com alguns dos planos submetidos anteriormente (aqueles cuja otimalidade não foi afetada pela correção dos coeficientes de custo), produzem um plano global menos inviável que o anterior em relação as restrições globais.

Desse novo plano global, outro conjunto de preços de inviabilidade é derivado pelo centro, que é usado novamente para corrigir os coeficientes de custos divisionais, e assim por diante, até que um plano global viável seja obtido. Então esse plano global viável é ótimo em relação à função objetivo global inicial, enquanto seus componentes divisionais correspondentes aos n subproblemas são planos di-

visionais viáveis, ótimos em relação às últimas funções objetivas divisionais corrigidas. Entretanto, esses planos divisionais ótimos são geralmente soluções ótimas não-básicas dos respectivos subproblemas, isto é, combinações convexas de um número de soluções básicas. Os pesos dessas soluções básicas nas soluções não-básicas que constituem o plano global ótimo não podem ser determinados pelos procedimentos de otimização divisionais: eles são determinados pelo centro (pela resolução do problema de ligação).

Esta interpretação é bem próxima daquela do algoritmo de Dantzig-Wolfe. Porém, existem algumas diferenças básicas.

No método de Dantzig-Wolfe, os planos divisionais ótimos submetidos durante o procedimento de otimização fornecem planos globais que não são ótimos até a última iteração. No início (fase 1) eles podem mesmo não serem viáveis em relação às restrições globais, mas depois essa possível inviabilidade é eliminada. A partir desse instante, o propósito do mecanismo de ajuste de preços é induzir as fábricas a submeterem novos planos divisionais tais que suas inclusões na combinação convexa de planos divisionais que constitui o plano global devam causar o máximo aumento no valor da função objetivo global.

No método apresentado, os planos ótimos divisionais

5.6

submetidos durante o procedimento de otimização fornecem planos globais "ótimos" em relação a função objetivo global inicial no sentido de que eles satisfazem o critério de otimalidade do simplex, mas são inviáveis em relação às restrições globais até a última iteração. O propósito do mecanismo de ajuste de preços é induzir as fábricas a submeterem novos planos divisionais que tragam os planos globais mais próximos da viabilidade quanto possível, mantendo sua "otimalidade".

A interpretação econômica dos preços de inviabilidade é o seguinte: $\hat{u}_i^0 = 1 - \hat{v}_i^0$ representa a quantidade pela qual a "inviabilidade global" seria aumentada se o recurso i fosse aumentado de uma unidade. Portanto $\langle \hat{u}_i^0, F_j^k \rangle$ representa a redução líquida na "inviabilidade global" que pode ser conseguida por um aumento unitário na variável x_j^k .

Agora, os novos preços ajustados $\bar{u}_j^0$ fixados pelo centro, que entrarão nas funções objetivos divisionais na forma $c_j^k - \langle \bar{u}_i^0, B_j^k \rangle$ não são os preços de inviabilidade $\hat{u}_i^0$, mas uma soma ponderada deste último com os preços $\bar{u}_i^0$ da última iteração, para o qual o plano global corrente é "ótimo" mas inviável: $\bar{u}_i^0 = \bar{u}_i^0 + \bar{\theta} \cdot \hat{u}_i^0$. Se o centro desejasse mover com a máxima velocidade em direção a viabilidade, sem preocupar-se com a otimalidade, ele orientaria as fábricas para mudar em seus planos com base exclusivamente nos preços de inviabilidade.

A soma ponderada dos dois conjuntos de preços $\bar{u}_i^0$ e $\hat{u}_i^0$ é um meio de induzir um movimento em direção a viabilidade, preservando a "otimalidade"; e o peso $\bar{\theta}$ é escolhido de modo a induzir um passo em direção a viabilidade tão grande quanto possível, sem abandono da otimalidade.

Os preços finais $\bar{u}_i^0$, obtidos ou pelo método de Dantzig-Wolfe ou pelo primal-dual, tem a importante propriedade de equilíbrio tal que, se um plano global $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ é ótimo em relação a função objetivo global $\sum_{k \in N} \langle c^k, x^k \rangle$, então suas componentes divisionais $\bar{x}^k$ são ótimas em relação às funções objetivos divisionais corrigidas $\langle c^k - \bar{u}^0 B^k, x^k \rangle$ (lema 5.2.12). Além disso, o plano global é também ótimo em relação à função objetivo global corrigida $\sum_{k \in N} \langle c^k - \bar{u}^0 B^k, x^k \rangle$. Como vemos, tais preços de equilíbrio podem ser obtidos demais de um modo, através de mais de um mecanismo de ajuste de preços.

A última propriedade citada por Balas é evidente quando escrevemos o dual do nosso problema primal na forma max inf apresentada na seção 2.4 para obtermos separação. Esse dual é

$$\max_{u^0 \in R^{m_0}} \inf \left\{ \sum_{k \in N} \langle c^k, x^k \rangle + \langle u^0, d^0 \rangle - \sum_{k \in N} B^k x^k \mid x^k \in X^k, k \in N \right\}$$

que pode ser escrito como

$$\max_{u^0 \in R^{m_0}} \left\{ \langle d^0, u^0 \rangle + \sum_{k \in N} \inf \{ \langle c^k - u^0 B^k, x^k \rangle \mid x^k \in X^k, k \in N \} \right\}$$

5.7

O ponto de sela desse problema $(\tilde{u}^0, \bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ é tal que

$$\sum_{k \in N} \langle c^k - \tilde{u}^0 \cdot B^k, \bar{x}^k \rangle \leq \sum_{k \in N} \langle c^k - \tilde{u}^0 \cdot B^k, x^k \rangle, \quad x^k \in X^k, k \in N.$$

5.7 - CONCLUSÃO

Nos capítulos 2 a 4 deste trabalho, discutimos alguns conceitos importantes em programação matemática (equivalência, dualidade e separação) e apresentamos alguns resultados clássicos de programação linear e de decomposição de programas lineares hierárquicos. Esses capítulos serviram de base para o desenvolvimento do capítulo 5.

Inicialmente, na seção 5.2, apresentamos três resultados que nos orientaram para a aplicação do algoritmo primal-dual em decomposição. Em seguida, baseados nos lemas apresentados no capítulo 4 e em outros dois na seção 5.3, desenvolvemos o algoritmo primal dual de decomposição em uma forma conceitual; a qual nos facilitou a prova de convergência e o desenvolvimento de uma forma final.

Na seção seguinte, escrevendo o problema primal associado restrito como um sistema canônico, derivamos a forma final do algoritmo, a qual possui reais vantagens em termos de decomposição.

Finalmente apresentamos os resultados finais dos

trabalhos de Balas e Gonçalves, e mostramos que os dois algoritmos desses autores são duas implementações do algoritmo primal-dual e que possuem uma pequena diferença decorrente de um artifício de manipulação com finalidades computacionais.

Achamos a aplicação do algoritmo primal-dual em de composição de programas lineares hierárquicos muito proveitosa e, infelizmente, não nos foi possível investigar alguns aspectos dessa aplicação, os quais apresentamos como duas perspectivas de estudo futuro.

A primeira se refere à procura de um algoritmo que resolva com eficiência o problema dual de ligação. Como os subproblemas são resolvidos uma única vez (provavelmente pelo simplex), achamos que a eficiência do método deve estar bem relacionada com a eficiência de solução desse problema. Sob esse ponto de vista temos alguns aspectos a analisar. Primeiro, precisamos verificar até que ponto o artifício do algoritmo de Gonçalves traz vantagens para essa eficiência. Segundo, precisamos pesquisar até onde podemos aproveitar as características especiais do problema dual de ligação: restrições de limites de variáveis com o lado direito sempre igual a 2, todas as restrições de desigualdade e custos das variáveis v^k sempre positivos. Terceiro precisamos verificar se a vantagem de uma base ótima do primal de ligação ser

5.7

base viável na iteração seguinte não pode ser aproveitada para a solução do dual de ligação.

A segunda perspectiva é a aplicação do algoritmo primal-dual de decomposição para resolver o problema mestre de Dantzig-Wolfe. Já trabalhamos um pouco em cima dessa idéia e nos pareceu que obteríamos um algoritmo semelhante a um outro apresentado por Balas na segunda parte de seu trabalho.

- n -

- Lasdon, L.S. - "Duality and Decomposition in Mathematical Programming",
IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics, 48 (1968).
- Lasdon, L.S. - *Optimization Theory for Large Systems*, The MacMillan Comppany, N. York, 1970.
- Mangasarian, O.L. - *Non Linear Programming*, McGraw-Hill Book Company,
N. York, 1969.
- Monteiro, L.H.J. - *Algebra Linear*, Livraria Nobel S.A., 1969.
- Rudin, W. - *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1964.
- Simmons, D.M. - *Linear Programming for Operations Research*, Holden-Day,
Inc., 1972.
- Simomard, M. - *Linear Programming*, Prentice-Hall, Inc., 1966.

- n -

APÊNDICE

EXEMPLO NUMÉRICO

A.1 - O PROBLEMA EXEMPLO

Neste Apêndice resolvemos o problema exemplo apresentado na página 142. Notemos que, como esse problema possui o bloco de ligação com restrições de desigualdade, vão a parecer colunas nulas no subproblema $P_3(\bar{u}^0)$, as quais são candidatas a entrar na base de PL($\bar{u}^0$) logo na primeira iteração.

Na seção A.2 nós apresentamos a solução pelo algoritmo de Balas, e na seção A.3 pelo algoritmo de Gonçalves. Na seção A.4 apresentamos um quadro comparativo das duas soluções.

Após adicionarmos variáveis de folga temos:

$$c^1 = (-3, -5, 5, -4, 3, 0, 0) \quad c^2 = (-2, -3, -1, -2, -4, 0, 0)$$

$$c^3 = (-6, -8, -5, -7, -9, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$B^1 = B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad d^0 = \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \\ 31 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

A.1

$$\text{Maximize } 3x_1^1 + 5x_2^1 - 5x_3^1 + 4x_4^1 - 3x_5^1 + 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 + 4x_5^2 + 6x_1^3 + 8x_2^3 + 5x_3^3 + 7x_4^3 + 9x_5^3$$

$$x_1^1 + 2x_2^1 - x_3^1 - x_5^1 \leq 6$$

$$-2x_1^1 - x_2^1 + 5x_4^1 + 3x_5^1 \leq 8$$

$$-2x_2^1 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_4^2 - x_5^2 \leq 10$$

$$5x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 - 3x_4^2 + 3x_5^2 \leq 6$$

$$x_1^3 + 3x_2^3 - x_3^3 + 3x_4^3 \leq 8$$

$$-x_1^3 + 2x_3^3 - 2x_4^3 + 4x_5^3 \leq 12$$

$$+x_1^3 \leq 17$$

$$+x_2^3 \leq 12$$

$$+x_3^3 \leq 31$$

$$+x_4^3 \leq 8$$

$$+x_5^3 \leq 10$$

$$x^1 \geq 0$$

$$x^2 \geq 0$$

$$x^3 \geq 0$$

Problema Exemplo

$$\Lambda^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 5 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad d^1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \Lambda^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & -3 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d^2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad d^3 = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

A.2 - SOLUÇÃO PELO ALGORITMO DE BALAS

Passo 1 - Resolução dos subproblemasSubproblema $P_1(0)$

		x_1^1	x_2^1	x_3^1	x_4^1	x_5^1	x_6^1	x_7^1
x_1^1	0	1	2	-1	0	-1	1	0
x_4^1	4	0	3/5	-2/5	1	1/5	2/5	1/5
	-34	0	-17/5	-2/5	0	-4/5	-23/5	-4/5

$$\bar{x}^1 = (6, 0, 0, 4, 0, 0, 0)$$

$$I_1 = \{1, 4\}$$

Subproblema $P_2(0)$

		x_1^2	x_2^2	x_3^2	x_4^2	x_5^2	x_6^2	x_7^2
x_2^2	26	1	1	0	1	1	0	1
x_3^2	16	3	0	1	-1	2	1	1
	-78	-4	0	0	0	-1	-7	-4

$$\bar{x}^2 = (0, 26, 16, 0, 0, 0, 0)$$

$$I_2 = \{2, 3\}$$

A.2

Subproblema $P_3(0)$

		x_1^3	x_2^3	x_3^3	x_4^3	x_5^3	x_6^3	x_7^3	x_8^3	x_9^3	x_{10}^3	x_{11}^3	x_{12}^3
x_1^3	29	1	6	0	4	4	2	1	0	0	0	0	0
x_3^3	20	0	3	1	1	4	1	1	0	0	0	0	0
	-268	0	-43	0	-22	-35	-17	-11	0	0	0	0	0

$$\bar{x}^3 = (28, 0, 20, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$I_3 = \{1, 3\}$$

$$F^1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/5 & 2/5 & 0 & -1/5 & -2/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f^1 = (0 \ -8/5 \ 12/5 \ 0 \ 9/5 \ -7/5 \ -1/5)$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f^2 = (-3, 0, 0, 1, -2, -3, -2)$$

$$F^3 = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 0 & -4 & -4 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & -4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{d}^0 = \begin{bmatrix} -17 \\ -14 \\ -5 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$f^3 = (0, -8, 0, -4, -7, -3, -2, 1, 1, 1, 1, 1) \quad \langle \bar{1}, \bar{d}^0 \rangle = -22$$

Iteração 1

Passo 2: $T_1 = \emptyset$ $T_2 = \{4\}$ $T_3 = \{8,9,10,11,12\}$

$$\text{Maximize } W = 22 + 17v_1^0 + 14v_2^0 + 5v_3^0 - 4v_4^0 - 10v_5^0 - 6v_1^1 - 4v_2^1 - 26v_1^2 - 16v_2^2 - 28v_1^3 - 20v_2^3$$

$$\begin{array}{ll} \text{sujeito a} & -v_2^0 + v_3^0 + v_4^0 & v_1^2 - v_2^2 \geq 1 \\ & v_1^0 & \geq 1 \\ & v_2^0 & \geq 1 \\ & v_3^0 & \geq 1 \\ & v_4^0 & \geq 1 \\ & v_5^0 & \geq 0 \\ & v_i^0 & \leq 2, \quad i=1, \dots, 5 \\ & v^k & \leq 0, \quad k=0, 1, 2, 3 \end{array}$$

$$\hat{v}^0 = (2, 2, 2, 1, 1) \quad \hat{v}^1 = \hat{v}^2 = \hat{v}^3 = 0 \quad \hat{W} = 36$$

$$\hat{x}^1 = (6, 0, 0, 4, 0, 0, 0)$$

$$\hat{x}^2 = (0, 22, 20, 4, 0, 0, 0)$$

$$\hat{x}^3 = (28, 0, 20, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

Passo 3: solução não é ótima

Passo 4: $K = \emptyset$

Passo 5: $t^1 = (0, 1, -2, 0, -1, 1, 0)$

$$t^2 = (3, 0, 0, 0, 3, 3, 2)$$

$$t^3 = (0, 8, 0, 5, 8, 3, 2, -1, -1, -1, 0, 0)$$

A.2

$$\bar{\theta} = \min \left\{ \frac{17}{5}, \frac{24}{5}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{2}, \frac{43}{8}, \frac{22}{5}, \frac{35}{8}, \frac{17}{3}, \frac{11}{2} \right\} = \frac{1}{3}$$

Passo 6: $\bar{u}^0 = (-1/3, -1/3, -1/3, 0, 0)$

$$-\bar{c}^1(\bar{u}^0) = (0, -46/15, -16/15, 0, -17/15, -64/15, -4/5)$$

$$-\bar{c}^2(\bar{u}^0) = (-3, 0, 0, 0, 0, -6, -10/3)$$

$$-\bar{c}^3(\bar{u}^0) = (0, -121/3, 0, -61/3, -97/3, -16, -31/3, -1/3, -1/3, -1/3, 0, 0)$$

Iteração 2

Passo 2: $T_1 = \emptyset$ $T_2 = \{4, 5\}$ $T_3 = \{11, 12\}$

Maximize $W = -22 + 17v_1^0 + 14v_2^0 + 5v_3^0 - 4v_4^0 - 10v_5^0 - 6v_1^1 - 4v_2^1 - 26v_1^2 - 16v_2^2 - 28v_1^3 - 20v_2^3$

sujeito a

$$\begin{aligned} -v_0^2 + v_3^0 + v_4^0 & & +v_1^2 - v_2^2 & \geq 1 \\ -v_2^0 - 2v_3^0 & + v_5^0 & +v_1^2 + 2v_2^2 & \geq -2 \\ & & v_4^0 & \geq 1 \\ & & v_5^0 & \geq 1 \\ & & & \leq \\ & & v_i^0 & \leq 2, \quad i=1, \dots, 5 \\ & & v^k & \geq 0, \quad k=0, 1, 2, 3 \end{aligned}$$

$$\hat{v}^0 = (2, 5/3, 2/3, 2, 1) \quad \hat{v}^1 = \hat{v}^2 = \hat{v}^3 = 0 \quad \hat{W} = 62/3$$

$$\hat{x}^1 = (6, 0, 0, 4, 0, 0)$$

$$\hat{x}^2 = (0, 12, 11, 23/3, 19/3, 0, 0)$$

$$\hat{x}^3 = (28, 0, 20, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 11/3)$$

Passo 3: solução não é ótima

Passo 4: $K = \emptyset$

Passo 5: $t^1 = (0, 29/2, -16/15, 0, -4/5, 7/5, 1/5)$

$$t^2 = (-4/3, 0, 0, 0, 0, 1, 1/3)$$

$$t^3 = (0, 13/3, 0, 8/3, 8/3, 5/3, 2/3, -1, -2/3, 1/3, -1, 0)$$

$$\theta_1 = \min\{46/29, 64/21, 4, 6, 10, 121/13, 61/8, 97/8, 48/5, 31/2, 1\} = 1$$

Passo 6: $\bar{u}^0 = (-4/3, -1, 0, -1, 0)$

$$-\bar{c}^1(\bar{u}^0) = (0, -17/15, -32/15, 0, -29/15, -43/15, -3/5)$$

$$-\bar{c}^2(\bar{u}^0) = (-13/3, 0, 0, 0, 0, -5, -3)$$

$$-\bar{c}^3(\bar{u}^0) = (0, -36, 0, -15/3, -89/3, -43/3, -29/3, -4/3, -1, 0, -1, 0)$$

Iteração 3

Passo 2: $T_1 = \emptyset$ $T_2 = \{4, 5\}$ $T_3 = \{10, 12\}$

$$\text{Maximize } W = -22 + 17v_1^0 + 14v_2^0 + 5v_3^0 - 4v_4^0 - 10v_5^0 - 6v_1^1 - 4v_2^1 - 26v_1^2 - 16v_2^2 - 28v_1^3 - 20v_2^3$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a} \quad & -v_0^2 + v_3^0 + v_4^0 & +v_1^2 - v_2^2 & \geq 1 \\ & -v_2^0 - 2v_3^0 & +v_5^0 & +v_1^2 + 2v_2^2 & \geq -2 \\ & v_3^0 & & \geq 1 \\ & v_5^0 & & \geq 1 \\ & v_i^0 & & \leq 2, \quad i=1, \dots, 5 \\ & v^k & & \geq 0, \quad k=0, 1, 2, 3 \end{aligned}$$

$$\hat{v}^0 = (2, 1, 1, 1, 1) \quad \hat{v}^1 = \hat{v}^2 = \hat{v}^3 = 0 \quad \hat{W} = 17$$

$$\hat{x}^1 = (6, 0, 0, 4, 0, 0, 0)$$

$$\hat{x}^2 = (0, 12, 0, 4, 10, 0, 0)$$

$$\hat{x}^3 = (28, 0, 20, 0, 0, 0, 0, 0, 11, 0, 0)$$

A.2

Passo 3: solução não é ótima

Passo 4: $K = \emptyset$

Passo 5: $t^1 = (0, 2, -1, 0, -1, 1, 0)$

$$t^2 = (-1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$t^3 = (0, 6, 0, 4, 4, 2, 1, -1, 0, 0, 0, 0)$$

$$\theta_1 = \min\{17/20, 43/15, 6, 53/12, 89/15, 43/6, 29/3\} = 17/30$$

Passo 6: $\bar{u}^0 = (-19/10, -1, 0, -1, 0)$

$$-\bar{c}^1(\bar{u}^0) = (0, 0, -27/10, 0, -25/6, -23/5, -3/5)$$

$$-\bar{c}^2(\bar{u}^0) = (-49/10, 0, 0, 0, 0, -5, -3)$$

$$-\bar{c}^3(\bar{u}^0) = (0, -16/5, 0, -77/5, -137/5, -66/5, -91/10, -19/10, -1, 0, -1, 0)$$

Iteração 4

Passo 2: $T_1 = \{2\}$ $T_2 = \{4, 5\}$ $T_3 = \{10, 12\}$

$$\text{Maximize } W = -22 + 17v_1^0 + 14v_2^0 + 5v_3^0 - 4v_4^0 - 10v_5^0 - 6v_1^1 - 4v_2^1 - 26v_1^2 - 16v_2^2 - 28v_1^3 - 20v_2^3$$

$$\text{sujeito a} \quad -v_1^0 + v_2^0 - \frac{3}{5}v_4^0 + 2v_1^1 + \frac{3}{5}v_2^1 \geq -8/5$$

$$-v_2^0 + v_3^0 + v_4^0 + v_1^2 - v_2^2 \geq 1$$

$$-v_2^0 - 2v_3^0 + v_5^0 + v_1^2 + 2v_2^2 \geq -2$$

$$v_3^0 \geq 1$$

$$v_5^0 \leq 1$$

$$v_i^0 \leq 2, \quad i=1, \dots, 5$$

$$v^k \geq 0, \quad k=0, 1, 2, 3$$

$$\hat{v}^0 = (2, 2, 1, 2, 2) \quad \hat{v}^1 = (4/5, 0) \quad \hat{v}^2 = \hat{v}^3 = 0 \quad \hat{W} = 61/5$$

$$\hat{x}^1 = (0, 3, 0, 11/5, 0, 0, 0)$$

$$\hat{x}^2 = (0, 51/5, 9/5, 29/5, 10, 0, 0)$$

$$\hat{x}^3 = (28, 0, 20, 0, 0, 0, 0, 0, 46/5, 0, 0)$$

Passo 3: solução não é ótima

Passo 4: $K \neq 0$

x_1^1	6	1	2	-1	0	-1	1	0
x_4^1	4	0	3/5	-2/5	1	1/5	2/5	1/5
		0	0	-27/10	0	-22/5	-23/5	-3/5

x_2^1	3	1/2	1	-1/2	0	-1/2	1/2	0
x_4^1	11/5	-3/10	0	-1/10	1	1/2	1/10	1/5
		0	0	-27/10	0	-22/5	-23/5	-3/5

$$\bar{x}^1 = (0, 3, 0, 11/5, 0, 0, 0)$$

$$I_1 = \{2, 4\} \quad T_1 = \{1\}$$

$$F^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/10 & 0 & 1/10 & 0 & -1/2 & -1/10 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{d}^0 = \begin{bmatrix} -11 \\ -17 \\ -5 \\ 29/5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$f^1 = (4/5, 0, 3/5, 0, 1, -3/5, -1/5)$$

$$\langle \underline{1}, \bar{d}^0 \rangle = -17 \frac{1}{5}$$

$$\hat{v}^1 = 0$$

Passo 5: $t^1 = (-4/5, 0, -8/5, 0, -1, 3/5, 1/5)$

$$t^2 = (0, 0, 0, 0, 0, 2, 1)$$

$$t^3 = (0, 5, 0, 3, 3, 2, 1, -1, -1, 0, -1, -1)$$

A.2

$$\bar{\theta} = \min\{23/3, 3, 5/2, 3, 163/25, 154/25, 154/30, 161/18, 66/10, 91/10\} = \frac{5}{2}$$

Passo 6: $\bar{u}^0 = (-22/5, -7/2, 0, -7/2, -5/2)$

$$-\bar{c}^1(\bar{u}^0) = (-2, 0, 5, -20/3, 31/10, -1/10)$$

$$-\bar{c}^2(\bar{u}^0) = (-49/10, 0, 0, 0, 0, -1/2)$$

$$-\bar{c}^3(\bar{u}^0) = (0, -201/10, 0, -79/10, -199/10, -41/5, -66/10, -22/5, -7/2, 0, -7/2, -5/2).$$

Iteração 5

Passo 2: $T_1 = \emptyset \quad T_2 = \{4, 5, 6\} \quad T_3 = \{10\}$

$$\text{Maximize } W = \frac{86}{5} + 11v_1^0 + 17v_2^0 + 5v_3^0 - \frac{29}{5}v_4^0 - 10v_5^0 - 3v_1^1 - \frac{11}{5}v_2^1 - 26v_1^2 - 16v_2^2 - 28v_1^3 - 20v_2^3$$

sujeito a $-v_2^0 + v_3^0 + v_4^0 + v_1^2 - v_2^2 \geq 1$

$$-v_2^0 - 2v_3^0 + v_5^0 + v_1^2 + 2v_2^2 \geq -2$$

$$-2v_2^0 - v_3^0 + 2v_1^2 + v_2^2 \geq -3$$

$$v_3^0 \geq 1$$

$$v_i^0 \leq 2, \quad i=1, \dots, 5$$

$$v^k \geq 0, \quad k=0, 1, 2, 3$$

$$\hat{v}^0 = (2, 1, 1, 1, 1) \quad \hat{v}^1 = \hat{v}^2 = \hat{v}^3 = 0 \quad \hat{W} = 11$$

$$\hat{x}^1 = (0, 3, 0, 11/5, 0, 0, 0)$$

$$\hat{x}^2 = (0, 9, 6/5, 29/5, 10, 3/5, 0)$$

$$\hat{x}^3 = (28, 0, 20, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 49/5, 0, 0)$$

Passo 3: solução não é ótima

Passo 4: $K = \emptyset$

Passo 5: $t^1 = (-1, 0, -1, 0, 0, 0, 0)$

$t^2 = (-1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$

$t^3 = (0, 6, 0, 4, 4, 2, 1, -1, 0, 0, 0, 0)$

$\bar{\theta} = \min\{67/20, 79/40, 199/40, 41/40, 66/10\} = 79/40$

Passo 6: $\bar{u}^0 = (-51/8, -7/2, 0, -7/2, -5/2)$

$-\bar{c}^1(\bar{u}^0) = (-159/40, 0, -347/40, 0, -20/3, -31/10, -1/10)$

$-\bar{c}^2(\bar{u}^0) = (-55/8, 0, 0, 0, 0, 0, -1/2)$

$-\bar{c}^3(\bar{u}^0) = (0, -33/4, 0, 0, -12, -17/4, -37/8, -167/40, -7/2, 0, -7/2, -5/2)$

Iteração 6

Passo 2: $T_1 = \emptyset$ $T_2 = \{4, 5, 6\}$ $T_3 = \{4, 10\}$

Maximize $W = -\frac{86}{5} + 11v_1^0 + 17v_2^0 + 5v_3^0 - \frac{29}{5}v_4^0 - 10v_5^0 - 3v_1^1 - \frac{11}{5}v_2^1 - 26v_1^2 - 16v_2^2 - 28v_1^3 - 20v_2^3$

sujeito a $-v_2^0 + v_3^0 + v_4^0 + v_1^2 - v_2^2 \geq 1$

$-v_2^0 - 2v_3^0 + v_5^0 + v_1^2 + 2v_2^2 \geq 2$

$-2v_2^0 - v_3^0 + 2v_1^2 + v_2^2 \geq -3$

$-4v_1^0 - v_3^0 + v_4^0 + 4v_1^3 + v_2^3 \geq -4$

$v_3^0 \geq 1$

$v_i^0 \leq 2, i=1, \dots, 5$

$v^k \geq 0, k=0, 1, 2, 3$

$\hat{v}^0 = (5/4, 4/3, 1, 2, 0)$ $\hat{v}^1 = \hat{v}^3 = 0$ $\hat{v}^2 = (0, 2/3)$ $\hat{W} = 39/20$

$\hat{x}^1 = (0, 3, 0, 11/5, 0, 0, 0)$

$\hat{x}^2 = (0, 9, 0, 5, 10, 1, 0)$

$\hat{x}^3 = (17, 0, 69/4, 11/4, 0, 0, 0, 0, 0, 55/4, 0, 0)$

A.2

Passo 3: solução não é ótima

Passo 4: $K \neq \emptyset$

x_2^2	26	1	1	0	1	1	2	1
x_3^2	16	3	0	1	-1	2	1	1
	-55/8	0	0	0	0	0	0	-1/2

x_2^2	18	-1/2	1	-1/2	3/2	0	3/2	1/2
x_5^2	8	3/2	0	1/2	-1/2	1	1/2	1/2
	-55/8	0	0	0	0	0	0	-1/2

$$\bar{x}^2 = (0, 18, 0, 0, 8, 0, 0) \quad I_2 = \{2, 5\}$$

$$F^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & -3/2 & 0 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3/2 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \quad \bar{d}^0 = \begin{bmatrix} -11 \\ -9 \\ 11 \\ 29/5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$f^2 = (0, 0, 1, 0, 0, -2, -1) \quad \hat{v}^2 = 0$$

Passo 5: $t^1 = (-23/60, 0, -19/15, 0, 4/3, 4/15, 1/5)$

$$t^2 = (-23/12, 0, -2/3, 0, 0, 0, -1/3)$$

$$t^3 = (0, 7/6, 0, 0, 2, 1/2, 1/4, -1/4, -1/3, 0, -1, 1)$$

$$\bar{\theta} = \min\{207/40, 93/8, 1/2, 99/14, 6, 17/2, 37/2, 5/2\} = 1/2$$

Passo 6: $\bar{u}^0 = (-13/2, -11/3, 0, -4, -2)$

$$-\bar{c}^1(\bar{u}^0) = (-25/6, 0, -429/40, 0, -6, -89/30, 0)$$

$$-\bar{c}^2(\bar{u}^0) = (-47/6, 0, -1/3, 0, 0, -2/3)$$

$$-\bar{c}^3(\bar{u}^0) = (0, -23/3, 0, 0, -11, -4, -9/2, -43/10, -11/3, 0, -4, -2)$$

Iteração 7

Passo 2: $T_1 = \{7\}$ $T_2 = \{4, 6\}$ $T_3 = \{4, 10\}$

$$\text{Maximize } W = -\frac{6}{5} + 11v_1^0 + 9v_2^0 - 11v_3^0 - \frac{29}{5}v_4^0 - 2v_5^0 - 3v_1^1 - \frac{11}{5}v_2^1 - 18v_1^2 - 8v_2^2 - 28v_1^3 - 20v_2^3$$

$$\text{sujeito a} \quad -\frac{1}{5}v_4^0 + \frac{1}{5}v_2^1 \geq -1$$

$$-\frac{3}{2}v_2^0 + v_4^0 + \frac{1}{2}v_5^0 + \frac{3}{2}v_1^2 - \frac{1}{2}v_2^2 \geq 0$$

$$-\frac{3}{2}v_2^0 - \frac{1}{2}v_5^0 + \frac{3}{2}v_1^2 + \frac{3}{2}v_2^2 \geq -2$$

$$-4v_1^0 - v_3^0 + v_4^0 + 4v_1^3 + v_2^3 \geq -4$$

$$v_3^0 \geq 1$$

$$v_i^0 \leq 2, \quad i=1, \dots, 5$$

$$v^k \geq 0, \quad k=0, 1, 2, 3$$

$$\hat{v}^0 = (1, 1, 1, 1, 1) \quad \hat{v}^1 = \hat{v}^2 = \hat{v}^3 = 0 \quad \hat{W} = 0$$

$$\hat{x}^1 = (0, 3, 0, 1/4, 0, 0, 39/4)$$

$$\hat{x}^2 = (0, 9, 0, 5, 10, 1, 0)$$

$$\hat{x}^3 = (17, 0, 69/4, 11/4, 0, 0, 0, 0, 55/4, 0, 0)$$

Passo 3: solução ótima.

A.3 - SOLUÇÃO PELO ALGORITMO DE GONÇALVES

Passo 1: Resolução dos subproblemas

A solução dos subproblemas é a mesma que em A.2, a menos do cálculo das matrizes F^k e dos vetores f^k e $\bar{d}^0$.

A.3

$$F^1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/5 & 2/5 & 0 & -1/5 & -2/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f^1 = (0, 2/5, -8/5, 0, -1/5, 3/5, -1/5) \quad f^2 = (3, 0, 0, 1, 4, 3, 2)$$

$$F^3 = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 4 & 4 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{d}^0 = \begin{bmatrix} 17 \\ 14 \\ 5 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$f^3 = (0, 8, 0, 6, 9, 3, 2, -1, -1, -1, 1, 1)$$

Iteração 1

Passo 2: $T_1 = \emptyset$ $T_2 = \{4\}$ $T_3 = \{8, 9, 10, 11, 12\}$

Maximize $W = 50 - 17v_1^0 - 14v_2^0 - 5v_3^0 - 4v_4^0 - 10v_5^0 - 6v_1^1 - 4v_2^1 - 26v_1^2 - 16v_2^2 - 28v_1^3 - 20v_2^3$

sujeito a

$$\begin{array}{rcl} v_2^0 - v_3^0 + v_4^0 & + v_1^2 - v_1^2 & \geq 1 \\ -v_1^0 & & \geq -1 \\ -v_2^0 & & \geq -1 \\ -v_3^0 & & \geq -1 \\ v_4^0 & & \geq 1 \\ v_5^0 & & \geq 1 \\ v^k & \geq 0, & k=0, 1, 2, 3 \end{array}$$

$$\hat{v}^0 = (0, 0, 0, 1, 1) \quad \hat{v}^1 = \hat{v}^2 = \hat{v}^3 = 0 \quad \hat{W} = 36$$

$$\hat{x}^1 = (6, 0, 0, 4, 0, 0, 0)$$

$$\hat{x}^2 = (0, 22, 20, 4, 0, 0, 0)$$

$$\hat{x}^3 = (28, 0, 20, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

Os passos seguintes são iguais aos da iteração 1 em 5.2.

Iteração 2

Passo 2: $T_1 = \emptyset \quad T_2 = \{4, 5\} \quad T_3 = \{11, 12\}$

$$\text{Maximize } W = 50 - 17v_1^0 - 14v_2^0 - 5v_3^0 - 4v_4^0 - 10v_5^0 - 6v_1^1 - 4v_2^1 - 26v_1^2 - 16v_2^2 - 28v_1^3 - 20v_2^3$$

sujeito a

$$v_2^0 - v_3^0 + v_4^0 + v_1^2 - v_2^2 \geq 1$$

$$v_2^0 + 2v_3^0 + v_5^0 + v_1^2 + 2v_2^2 \geq 4$$

$$v_4^0 \geq 1$$

$$v_5^0 \geq 1$$

$$v^k \geq 0, \quad k=0, 1, 2, 3$$

$$\hat{v}^0 = (0, 0, 3/2, 5/2, 1) \quad \hat{v}^1 = \hat{v}^2 = \hat{v}^3 = 0 \quad \hat{W} = 45/2$$

$$\hat{x}^1 = (6, 0, 0, 4, 0, 0, 0)$$

$$\hat{x}^2 = (0, 35/2, 11, 4, 9/2, 0, 0)$$

$$\hat{x}^3 = (28, 0, 20, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 11/2)$$

Passo 3: solução não é ótima

Passo 4: $K = \emptyset$

Passo 5: $t^1 = (0, 19/10, -11/10, 0, -7/10, 8/5, 3/10)$

$$t^2 = (-3/2, 0, 0, 0, 0, 3/2, 1/2)$$

A.3

$$t^3 = (0, 7/2, 0, 2, 2, 3/2, 1/2, -1, -1, 1/2, -3/2, 0)$$

$$\bar{\theta} = \{92/57, 8, 8/3, 4, 20/3, 242/21, 61/6, 97/6, 32/3, 62/3, 2/3\} = 2/3$$

Passo 6: $\bar{u}^0 = (1, 1, 0, -1, 0)$

$$-\bar{c}^1(\bar{u}^0) = (0, -9/5, -9/5, 0, -8/5, -16/5, -3/5)$$

$$-\bar{c}^2(\bar{u}^0) = (-4, 0, 0, 0, 0, -5, -3)$$

$$-\bar{c}^3(\bar{u}^0) = (0, -38, 0, -19, -31, -15, -10, -1, -1, 0, -1, 0)$$

Iteração 3

Passo 2: $T_1 = \emptyset$ $T_2 = \{4, 5\}$ $T_3 = \{10, 12\}$

$$\text{Maximize } W = 50 - 15v_1^0 - 14v_2^0 - 5v_3^0 - 4v_4^0 - 10v_5^0 - 6v_1^1 - 4v_2^1 - 26v_1^2 - 16v_2^2 - 28v_1^3 - 20v_2^3$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a} \quad & v_2^0 - v_3^0 + v_4^0 + v_1^2 - v_2^2 \geq 1 \\ & v_2^0 + 2v_3^0 + v_5^0 + v_1^2 + 2v_2^2 \geq 4 \\ & -v_3^0 \geq -1 \\ & v_5^0 \geq 1 \\ & v^k \geq 0, \quad k=0, 1, 2, 3 \end{aligned}$$

$$\hat{v}^0 = (0, 0, 1, 2, 2) \quad \hat{v}^1 = \hat{v}^2 = \hat{v}^3 = 0 \quad \hat{W} = 17$$

$$\hat{x}^1 = (6, 0, 0, 4, 0, 0, 0)$$

$$\hat{x}^2 = (0, 12, 0, 4, 10, 0, 0)$$

$$\hat{x}^3 = (28, 0, 20, 0, 0, 0, 0, 0, 11, 0, 0)$$

Os passos seguintes são iguais a iteração 3 em 5.2.

Iteração 4

Passo 2: $T_1 = \{2\}$ $T_2 = \{4, 5\}$ $T_3 = \{10, 12\}$

$$\text{Maximize } W = 50 - 17v_1^0 - 14v_2^0 - 5v_3^0 - 4v_4^0 - 10v_5^0 - 6v_1^1 - 4v_2^1 - 26v_1^2 - 16v_2^2 - 28v_1^3 - 20v_2^3$$

$$\text{sujeito a } 2v_1^0 - v_2^0 - \frac{3}{5}v_4^0 + 2v_1^1 + \frac{3}{5}v_2^1 \geq 2/5$$

$$v_2^0 + v_3^0 + v_1^2 - v_2^2 \geq 1$$

$$v_2^0 + 2v_3^0 + v_5^0 + v_1^2 + 2v_2^2 \geq 4$$

$$-v_3^0 \geq -1$$

$$v_5^0 \geq 1$$

$$v^k \geq 0, k=0,1,2,3$$

$$\hat{v}^0 = (0,0,1,2,2) \quad \hat{v}^1 = (4,5,0) \quad \hat{v}^2 = \hat{v}^3 = 0 \quad \hat{W} = 61/5$$

$$\hat{x}^1 = (0,3,0,11/15,0,0,0)$$

$$\hat{x}^2 = (0,51/15,9/5,29/5,0,0,0)$$

$$\hat{x}^3 = (28,0,20,0,0,0,0,0,0,46/5,0,0)$$

Passo 4: $K \neq 0$

$$F^1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/10 & 0 & 1/10 & 0 & -1/2 & -1/10 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{d}^0 = \begin{bmatrix} 11 \\ 17 \\ 5 \\ 29/5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$f^1 = (-1/5, 0, -7/5, 0, 0, 1, 2/5, -1/5)$$

Os passos seguintes são iguais a iteração 4 em 5.2.

Iteração 5:

$$\text{Passo 2: } T_1 = \emptyset \quad T_2 = \{4,5,6\} \quad T_3 = \{10\}$$

1.3

$$\begin{aligned} \text{maximize } W &= \frac{244}{5} - 11v_1^0 - 17v_2^0 - 5v_3^0 - \frac{29}{5}v_4^0 - 10v_5^0 - 3v_1^1 - \frac{11}{5}v_2^1 - 26v_1^2 - 16v_2^2 - 28v_1^3 - 20v_2^3 \\ \text{sujeito a} \quad & v_2^0 - v_3^0 + v_4^0 + v_1^2 + v_2^2 \geq 1 \\ & v_2^0 + 2v_3^0 + v_5^0 + v_1^2 + 2v_2^2 \geq 4 \\ & 2v_2^0 + v_3^0 + 2v_1^2 + v_2^2 \geq 3 \\ & -v_3^0 \geq -1 \\ & v^k \geq 0, \quad k=0,1,2,3 \end{aligned}$$

$$\hat{v}^0 = (0,1,1,1,1) \quad \hat{v}^1 = \hat{v}^2 = \hat{v}^3 = 0 \quad \hat{W} = 11$$

$$\hat{x}^1 = (0,3,0,11/5,0,0,0)$$

$$\hat{x}^2 = (0,9,6/5,29/5,10,3/5,0)$$

$$\hat{x}^3 = (28,0,20,0,0,0,0,49/5,0,0)$$

Iteração 6

$$\text{Passo 2: } T_1 = \emptyset \quad T_2 = \{4,5,6\} \quad T_3 = \{4,10\}$$

$$\begin{aligned} \text{Maximize } W &= \frac{244}{5} - 11v_1^0 - 17v_2^0 - 5v_3^0 - \frac{29}{5}v_4^0 - 10v_5^0 - 3v_1^1 - \frac{11}{5}v_2^1 - 26v_1^2 - 16v_2^2 - 28v_1^3 - 20v_2^3 \\ \text{sujeito a} \quad & v_2^0 - v_3^0 + v_4^0 + v_1^2 - v_2^2 \geq 1 \\ & v_2^0 + 2v_3^0 + v_5^0 + v_1^2 + 2v_2^2 \geq 4 \\ & 2v_2^0 + v_3^0 + 2v_1^2 + v_2^2 \geq 3 \\ & 4v_1^0 + v_3^0 + v_4^0 + 4v_1^3 + v_2^3 \geq 6 \\ & -v_3^0 \geq -1 \\ & v^k \geq 0, \quad k=0,1,2,3 \end{aligned}$$

$$\hat{v}^0 = (3/4, 2/3, 1, 2, 0) \quad \hat{v}^1 = \hat{v}^3 = 0 \quad \hat{v}^2 = (0, 2/3) \quad \hat{W} = 39/20$$

$$\hat{x}^1 = (0, 3, 0, 11/5, 0, 0, 0)$$

$$\hat{x}^2 = (0, 9, 0, 61/20, 161/20, 59/20, 0)$$

$$\hat{x}^3 = (17, 0, 69/4, 11/4, 0, 0, 0, 55/4, 0, 0)$$

Passo 3: solução não é ótima

Passo 4: $k \neq 0$

$$F^1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/10 & 0 & 1/10 & 0 & -1/2 & -1/10 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f^1 = (-1/5, 0, 3/5, 0, 1, 2/5, -1/5)$$

$$F^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 & 3/2 & 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3/2 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$f^2 = (-3, 0, 1, 3, 0, 1, 0)$$

$$F^3 = \begin{bmatrix} 0 & +6 & 0 & +4 & +4 & +2 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & -4 & -1 & -1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{d}^0 = \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \\ 11 \\ 29/5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{v}^2 = (0, 0)$$

Os passos seguintes são iguais a iteração 6 em 5.2.

A.4

Iteração 7

Passo 2: $T_1 = \{7\}$ $T_2 = \{4,6\}$ $T_3 = \{4,10\}$

$$\text{Maximize } W = 28\frac{4}{5} - 11v_1^0 - 9v_2^0 - 11v_3^0 - \frac{29}{5}v_4^0 - 3v_1^1 - \frac{11}{5}v_2^1 - 18v_1^2 - 8v_2^2 - 28v_1^3 - 20v_2^3$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a} \quad & -\frac{1}{5}v_4^0 + \frac{1}{5}v_2^1 \geq -\frac{1}{5} \\ & \frac{3}{2}v_2^0 + v_4^0 + \frac{1}{2}v_5^0 + \frac{3}{2}v_1^2 - \frac{1}{2}v_2^2 \geq 3 \\ & \frac{3}{2}v_2^0 - \frac{1}{2}v_5^0 + \frac{3}{2}v_1^2 + \frac{1}{2}v_2^2 \geq 1 \\ & 4v_1^0 - v_3^0 + v_4^0 + 4v_1^3 + v_2^3 \geq 4 \\ & v_3^0 \geq 1 \\ & v^k \geq 0, k=0,1,2,3 \end{aligned}$$

$$\hat{v}^0 = (1,1,1,1,1) \quad \hat{v}^1 = \hat{v}^2 = \hat{v}^3 = \hat{0} \quad \hat{W} = 0$$

$$\hat{x}^1 = (0,3,0,1/4,0,0,39/4)$$

$$\hat{x}^2 = (0,9,0,5,10,1,0)$$

$$\hat{x}^3 = (17,0,69/4,11/4,0,0,0,0,55/4,0,0)$$

Passo 3: solução ótima

A.4 - COMPARAÇÃO ENTRE AS DUAS SOLUÇÕES

O quadro abaixo mostra, iteração a iteração, os valores das inviabilidades em cada uma das restrições de ligação. Notemos que quando há uma mudança de lado em relação ao hiperplano definido pela restrição, o sinal da inviabilidade é contrário ao da inviabilidade para as soluções básicas dos subproblemas (coluna marcada com *).

Na 2.^a iteração a solução obtida pelo método de Con

çalves tem valor ótimo maior que o de Balas; isto porque ela não pode mudar de lado do hiperplano. Porém na iteração seguinte ela já encontra a solução de Balas novamente. Na 6.^a iteração a solução do método de Gonçalves não pode mudar de lado, mas existe uma solução diferente da de Balas que produz o mesmo valor ótimo.

iteração → inviab. ↓	*	1. ^a	2. ^a	3. ^a	4. ^a	*	5. ^a	6. ^a	*	7. ^a
$y_1^1 -y_1^2$	-17	-17	-17	-17	-11	-11	-11	0	-17	0
$y_2^1 -y_2^2$	-14	-10	0	0	-6/5	-17	0	0	-9	0
$y_3^1 -y_3^2$	-5	-9	0	0	0	-5	0	0	11	0
$y_4^1 -y_4^2$	4	0	-11/3	0	0	29/5	0	-39/20	29/5	0
$y_5^1 -y_5^2$	10	10	0	0	0	10	0	0	2	0
$\langle \underline{1}, y^1 + y^2 \rangle$		26	62/5	17	61/5		11	39/20		0
$y_1^1 -y_1^2$	-17	-17	-17	-17	-11	-11	-11	0	-11	0
$y_2^1 -y_2^2$	-14	-10	-11/2	0	-6/5	-17	0	0	-9	0
$y_3^1 -y_3^2$	-5	-9	0	0	0	-5	0	0	11	0
$y_4^1 -y_4^2$	4	0	0	0	0	29/5	0	0	29/5	0
$y_5^1 -y_5^2$	10	10	0	0	0	10	0	39/20	2	0
$\langle \underline{1}, y^1 + y^2 \rangle$		26	45/2	17	61/5		11	39/20		0