Resolubilidade Semiglobal e Global para uma Classe de Campos Vetoriais Complexos em Variedades Diferenciáveis

Bruno de Lessa Victor

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Mestre em Ciências

Programa: Matemática Aplicada
Orientador: Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, março de 2017

Resolubilidade Semiglobal e Global para uma Classe de Campos Vetoriais Complexos em Variedades Diferenciáveis

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 03/03/2017. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof^{a}. Dr^{a}. Paulo Domingos Cordaro (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Alexandre Kirilov - UFPR
- Prof. Dr. Paulo Leandro Dattori da Silva - ICMC-USP

Agradecimentos

Gostaria primeiramente de agradecer aos meus pais, Denilson e Sandra, que sempre me deram antes de tudo liberdade para escolher meus objetivos e todo o suporte possível para que eu conseguisse alcançá-los. Sem eles com certeza não teria chegado até aqui.

Ao resto de minha família, em particular ao meu irmão Caio e à minha avó Darcila, que sempre tiveram e continuam tendo tremenda importância em minha vida.

Ao professor Cordaro, não só pela orientação dada neste trabalho, mas pela referência que rapidamente se tornou como pessoa, professor, orientador e pesquisador.

Aos meus colegas de orientação Luis Fernando Ragognette, Gabriel Cueva Candido Soares de Araújo, Nicholas Braun Rodrigues, Max Reinhold Jahnke e Antonio Victor da Silva Júnior; por todo o estudo e aprendizado em conjunto, além da formação do entrosado "time Cordaro".

Aos professores José Carlos Corrêa Eidam e Alexandre Kirilov: o primeiro por ter sido um ótimo orientador em minha graduação e ter me apresentado ao professor Cordaro, e o segundo por ter aceitado se tornar meu orientador daqui em diante.

E por fim aos meus amigos: Thalian, Rafael, Joana, Luciano, Rodrigo, Bruno, Carolina, Nilmara e Carolinne. Em especial à ultima, pela revisão ortográfica do trabalho.

Resumo

VICTOR, B. L. **Resolubilidade Semiglobal e Global para uma Classe de Campos Vetoriais Complexos em Variedades Diferenciáveis**. 2017. 120 f. Dissertação - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

Neste trabalho estudamos a resolubilidade C^∞ de campos vetoriais complexos suaves da forma $L = L_1 + iL_2$, em uma variedade suave M, com as seguintes propriedades: $\forall x \in M$, $L_1(x)$ e $L_2(x)$ são linearmente independentes e $[L_1, L_2](x)$ é uma combinação linear de $L_1(x)$ e $L_2(x)$. Para tratar da resolubilidade local, nos utilizamos da teoria dos espaços $B_{p,k}$ e operadores de força constante. Seguindo para a resolubilidade semiglobal, estudamos a folheação gerada por L_1 e L_2: mostramos que neste caso as folhas possuem estrutura de variedade complexa, o que nos permite obter um panorama bastante completo sobre o problema. Para encerrar, provamos que L é globalmente resoluvel se e somente se for semiglobalmente resolúvel e M for L-convexa; exibimos condições suficientes para que isto ocorra.

Palavras-chave: Folheação, Resolubilidade Semiglobal, Resolubilidade Global.

Abstract

VICTOR, B. L. **Semi-Global and Global Solvability for a Class of Complex Vector Fields in Differentiable Manifolds**. 2010. 120 f. Dissertação - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

In this work we shall study the smooth solvability of C^∞ complex vector fields $L = L_1 + iL_2$ on a smooth manifold M, assuming the following properties: $\forall x \in M$, $L_1(x)$ and $L_2(x)$ are linearly independent and $[L_1, L_2](x)$ is a linear combination de $L_1(x)$ and $L_2(x)$. Discussing local solvability, we shall employ the theory of $B_{p,k}$ Spaces and Operators of Constant Strength. Moving on to Semi-Global Solvability, we shall study the foliation that is generated by L_1 and L_2: we prove that in this case the leaves are actually complex manifolds, which allow us to obtain an wide comprehension of the problem. Finally, we show that L is globally solvable if and only if it is semi-globally solvable and M is L-convex; we then exhibit sufficient conditions in order to it occurs.

Keywords: Foliation, Semi-Global Solvability, Global Solvability.

Sumário

1 Introdução **1**

2 Preliminares **3**

2.1 Classe dos Operadores em Estudo 3

2.2 Resolubilidade Local 3

3 Operadores com Força Constante **7**

3.1 Os Espaços $B_{p,k}$ 7

3.2 Definição e Propriedades 11

4 Folheação associada a L **17**

4.1 Forma local do Operador 17

4.2 A Estrutura Complexa de Cada Folha 21

5 Uma Análise da Regularidade das Soluções **25**

5.1 A Função Regularidade 25

5.2 Propagação de Singularidades e de Suportes nas Folhas 34

6 A Topologia em $C^\infty(M)$ **37**

7 Resolubilidade Semiglobal **43**

8 Resolubilidade Global **49**

Referências Bibliográficas **57**

Capítulo 1

Introdução

Dado P um operador diferencial parcial linear, sabemos que Pu é uma função suave sempre que u também o for. Na grande maioria dos casos, porém, a recíproca não é verdadeira: um exemplo é o operador da onda $P = \partial_t^2 - \partial_x^2$, onde existem soluções do caso nulo ($Pu = 0$) que não são sequer funções. Os operadores para os quais a recíproca vale são chamados de hipoelípticos.

São conhecidos na literatura exemplos ainda mais intrincados: para os operadores de Hans Lewy e Mizohata-Grushin, existem funções de classe C^∞ que não possuem nem mesmo solução local no espaço das distribuições. Discorreremos um pouco mais sobre ambos adiante.

Analisando este contexto, percebe-se o porquê do interesse no estudo da resolubilidade C^∞ (soluções suaves para funções suaves) de um ODPL. Esta dissertação trata exatamente de um caso desta forma: um campo complexo $L = L_1 + iL_2$ definido em uma variedade real M, com as seguintes hipóteses sobre L_1, L_2:

- $[L_1, L_2](x)$ é combinação linear de $L_1(x)$ e $L_2(x)$, para todo $x \in M$.
- $L_1(x)$ e $L_2(x)$ são linearmente independentes, para cada $x \in M$.

O problema acima foi estudado por Duistermaat e Hörmander em [DH72], entre as páginas 242 e 248. Dito isto, o principal objetivo do trabalho é facilitar a compreensão do paper (cujos autores são famosos pela escrita extremamente concisa), desenvolvendo de modo mais detalhado as contas e a teoria matemática por trás de cada passo dado.

Iniciamos com a resolubilidade local, definindo o conceito tanto no contexto de funções suaves como no de distribuições. Em seguida, analisamos a importância das hipóteses assumidas inicialmente, fazendo comparações com importantes exemplos de campos vetoriais complexos não-resolúveis localmente.

Após aplicar o Teorema de Frobenius, obtemos uma forma local especial para o operador. Trazemos a teoria dos espaços $B_{p,k}$ e definimos os operadores de força constante. Provando que estes são sempre localmente resolúveis e que L é um operador do tipo, concluímos que L (com as hipóteses impostas) sempre será localmente resolúvel.

Nosso próximo passo é estudar a folheação gerada por L_1 e L_2. Em um primeiro momento, sabemos apenas que uma folha é uma variedade real, de dimensão 2. Verificamos que esta admite estrutura de variedade complexa, logo após a exibição de uma nova descrição local de L; obtemos que em cada folha L é localmente um múltiplo do operador del-barra. Introduzimos o que chamaremos de funções subharmônicas.

Com um resultado de subharmonicidade (como definido anteriormente) demonstrado para a função de regularidade

$$s_u(x) = \sup\big\{t \in \mathbb{R};\ u \in H^t \text{ em uma vizinhança de } x\big\},$$

conseguimos resultados sobre propagação de singularidades e de suportes nas folhas.

Tais resultados são fundamentais para chegarmos à seguinte conclusão: L será semiglobalmente resolúvel se e somente se nenhuma folha for relativamente compacta, além de outras três propriedades equivalentes à ambas.

Na prova da afirmação, aplicamos inúmeros fatos de topologia e análise funcional, mais modernos e sofisticados do que aqueles apresentados no artigo original, que são descritos de maneira minuciosa à medida que são utilizados.

Por fim, introduzimos o conceito de P-convexidade e provamos que M ser L-convexa aliado a L ser semiglobalmente resolúvel é equivalente à resolubilidade global do operador. Após alguns resultados, exibimos um exemplo em que $L(C^\infty(M)) = C^\infty(M)$: quando M for uma variedade pseudoconvexa, definição esta feita no texto.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Classe dos Operadores em Estudo

Em todo o trabalho, será denominada de M uma variedade real, C^∞, paracompacta e de dimensão n. Denotaremos por L um campo vetorial complexo suave em M, dado por $L = L_1 + iL_2$, onde L_1, L_2 são campos vetoriais reais de classe C^∞ e assumem as seguintes hipóteses:

$$[L_1, L_2](x) \text{ é combinação linear de } L_1(x) \text{ e } L_2(x), \text{ para todo } x \in M. \tag{2.1}$$

$$L_1(x) \text{ e } L_2(x) \text{ são linearmente independentes, para cada } x \in M. \tag{2.2}$$

Note que ambas as condições são invariantes se multiplicarmos por uma função C^∞ a valores complexos que nunca se anula.

Daqui em diante, assumiremos que f é função de classe C^∞ e estudaremos a existência de soluções suaves da equação

$$Lu = f. \tag{2.3}$$

Isto é, nosso objetivo será tratar da resolubilidade C^∞ do operador L, que dividiremos em três casos.

2.2 Resolubilidade Local

Definição 1. *Dado P um operador diferencial, dizemos que P é um* ***localmente resolúvel no caso*** *C^∞ se, fixado $x_0 \in M$ e dadas U vizinhança aberta de x_0, $f \in C^\infty(U)$, existem um aberto $V \ni x_0$ contido em U e $u \in C^\infty(V)$ tais que $Pu = f$ em V.*

Mostraremos ainda neste capítulo que as hipóteses 2.1 e 2.2 são suficientes para a existência local de uma solução suave. Antes disto, não obstante, faremos uma breve análise sobre a relevância de ambas as propriedades.

Se na Definição 1 trocamos $C^\infty(V)$ por $\mathcal{D}'(V)$, dizemos que P é apenas localmente resolúvel. É muito conhecido na literatura o fato de que nem todo ODPL com coeficientes de classe C^∞ é localmente resolúvel. No ano de 1957, Hans-Lewy mostrou em [Lew57] que

$$Q(x, y, w) = \frac{i}{2}D_x - \frac{1}{2}D_y + (x + iy)D_w \tag{2.4}$$

não é localmente resolúvel em nenhum ponto de $\mathbb{R}^3$.

Outro famoso exemplo é o operador de Mizohata-Grushin, que age em $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ da seguinte maneira:

$$M_k = \frac{\partial}{\partial t} - it^k \frac{\partial}{\partial x}, \tag{2.5}$$

onde $k \in \mathbb{N}$. É sabido que M_k é localmente resolúvel na origem se, e somente se, k é par.

Uma pergunta interessante que pode ser feita neste momento: quais das condições que implicam a resolubilidade local suave de L falham para Q e M_1?

Iniciando a análise com o operador Q, temos:

$$Q(x,y,w) = \frac{i}{2}D_x - \frac{1}{2}D_y + (x+iy)D_w = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial w}\right)}_{P_1} + i \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial w}\right)}_{P_2}$$

É fácil notar que P_1 e P_2 são linearmente independentes para qualquer (x,y,w) em $\mathbb{R}^3$. Por outro lado,

$$[P_1, P_2](x,y,w) = -\frac{\partial}{\partial w},$$

que claramente não é combinação linear de P_1 e P_2 em nenhum ponto do espaço.

Proposição 1. *A condição 2.2 não é suficiente para que haja resolubilidade local.*

Procedemos agora de modo análogo para M_1, M_2 e M_3:

$$M_1(t,x) = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)}_{R_1} + i \cdot \underbrace{\left(-t\frac{\partial}{\partial x}\right)}_{R_2}, \; M_2(t,x) = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)}_{R_3} + i \cdot \underbrace{\left(-t^2\frac{\partial}{\partial x}\right)}_{R_4}, \; M_3(t,x) = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)}_{R_5} + i \cdot \underbrace{\left(-t^3\frac{\partial}{\partial x}\right)}_{R_6}$$

Vemos aqui que os pares (R_1, R_2), (R_3, R_4) e (R_5, R_6), são linearmente independentes se e somente se $t \neq 0$. Calculando o colchete de Lie,

$$[R_1, R_2](t,x) = -\frac{\partial}{\partial x}, \quad [R_3, R_4](t,x) = -2t \cdot \frac{\partial}{\partial x}, \quad [R_5, R_6](t,x) = -3t^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x},$$

podemos verificar que $[R_1, R_2]$ é gerado por R_1, R_2 se e somente se $t \neq 0$. Em contrapartida, $[R_3, R_4]$ e $[R_5, R_6]$ são combinações lineares de (R_3, R_4) e (R_5, R_6) respectivamente em todo o plano.

Proposição 2. *A condição 2.2 não é necessária para que haja resolubilidade local.*

Demonstração. Basta ver que M_2 é resolúvel na origem, contudo a condição não é satisfeita neste caso. □

Proposição 3. *A propriedade 2.1 não é suficiente para que haja resolubilidade local.*

Demonstração. Sabemos que M_3 não é resolúvel em $(0,0)$, apesar de valer a propriedade referida no ponto. □

Proposição 4. *M_1, M_2 e M_3 são localmente resolúveis no caso C^∞ para todo $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ tal que $t \neq 0$.*

Para finalizar, note que em todos os casos em que sabíamos que não vale a resolubilidade local, a Propriedade 2.1 falhou. De fato, é possível demonstrar que esta é uma condição necessária. Para demonstração, verifique o Teorema 6.1.1 de [Hör03].

Assim, inferimos imediatamente que Q não é localmente resolúvel em nenhum elemento de $\mathbb{R}^3$ e M_1 não é localmente resolúvel nos pontos da forma $(0,x)$.

Voltamos agora ao objetivo inicial proposto. Unindo a condição 2.1 com o Teorema de Frobenius, obtemos a existência de um sistema coordenadas locais $y_1, \ldots, y_n$ em uma vizinhança da origem, denotada aqui por V, tal que:

$$L_1 = b_{n-1}\frac{\partial}{\partial y_{n-1}} + b_n\frac{\partial}{\partial y_n}, \qquad L_2 = c_{n-1}\frac{\partial}{\partial y_{n-1}} + c_n\frac{\partial}{\partial y_n}, \tag{2.6}$$

onde b_{n-1}, b_n, c_{n-1} e c_n são funções reais de classe C^∞. Como $L = L_1 + iL_2$, concluímos que

$$L = (b_{n-1} + ic_{n-1})\frac{\partial}{\partial y_{n-1}} + (b_n + ic_n)\frac{\partial}{\partial y_n} \doteq a_{n-1}\frac{\partial}{\partial y_{n-1}} + a_n\frac{\partial}{\partial y_n} \tag{2.7}$$

Proposição 5. *Tanto a_{n-1} quanto a_n não se anulam em nenhum ponto.*

Demonstração. Suponha por absurdo existir x_0 de maneira que $a_{n-1}(x_0) = 0$. Então temos que $b_{n-1}(x_0) = c_{n-1}(x_0) = 0$, e consequentemente

$$\begin{vmatrix} b_{n-1}(x_0) & b_n(x_0) \\ c_{n-1}(x_0) & c_n(x_0) \end{vmatrix} = 0, \tag{2.8}$$

o que contradiz o fato de L_1 e L_2 serem linearmente independentes. Para a_n, a prova é completamente análoga. □

Considere agora L como operador nas variáveis $y'' = (y_{n-1}, y_n)$, dependendo dos parâmetros $y' = (y_1, \ldots, y_{n-2})$.

Proposição 6. *Para cada parâmetro $w' = (w_1, \ldots, w_{n-2})$, L é um operador elíptico nas variáveis y''.*

Demonstração. Dado $\xi = (\xi_{n-1}, \xi_n) \in \mathbb{R}^2$, suponha que $a_{n-1}(w', y'')\xi_{n-1} + a_n(w', y'')\xi_n = 0$. Então

$$\begin{cases} b_{n-1}(w', x'')\xi_{n-1} + b_n(w', x'')\xi_n = 0 \\ c_{n-1}(w', x'')\xi_{n-1} + b_n(w', x'')\xi_n = 0 \end{cases}$$

Aplicando mais uma vez o fato de L_1, L_2 serem linearmente independentes, concluímos que $\xi = 0$ e portanto o operador é elíptico. □

Capítulo 3

Operadores com Força Constante

Para solucionar o problema local, temos a liberdade de supor M um aberto de R^n e L como em (2.7). Utilizando-nos de tal fato como ponto de partida, mostraremos que L é um operador de força constante em uma vizinhança de cada ponto e que todo ODPL deste tipo é localmente C^∞-resolúvel.

Este resultado requer uma considerável quantidade de pré-requisitos. Apresentaremos então somente um apanhado geral de tudo que será necessário para o teorema principal e o provaremos. As demonstrações restantes, entretanto, não serão exibidas e podem ser encontradas com detalhes em [Hör05].

3.1 Os Espaços $B_{p,k}$

Definição 2. *Uma função positiva k definida em $\mathbb{R}^n$ será chamada de* ***peso*** *se existirem constantes positivas C e N tais que*

$$k(\xi+\eta) \leq (1+C|\xi|)^N k(\eta), \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n \tag{3.1}$$

Denotaremos o espaço de todas as funções peso por $\mathscr{K}$. Um exemplo muito simples e importante é, para cada $s \in \mathbb{R}$:

$$h_s(\xi) = (1+|\xi|^2)^{s/2}. \tag{3.2}$$

Proposição 7. *Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$, então $(1+|\alpha+\beta|^2) \leq (1+|\alpha|^2)(1+|\beta|)^2$.*

Demonstração. Aplicando a desigualdade triangular,

$$1+|\alpha+\beta|^2 \leq (1+|\alpha|^2+|\beta|^2+2|\alpha||\beta|). \tag{3.3}$$

Por outro lado,

$$(1+|\alpha|^2)(1+|\beta|)^2 = 1+|\alpha|^2+|\beta|^2+|\alpha|^2|\beta|^2+2|\alpha|^2|\beta|+2|\beta|. \tag{3.4}$$

Analisando (3.3) e (3.4), concluímos que é suficiente demonstrar que

$$2(|\alpha|^2|\beta|+|\beta|) \geq 2(|\alpha||\beta|), \tag{3.5}$$

o que não é difícil de checar: basta verificar separadamente casos $|\alpha| \geq 1$ e $|\alpha| < 1$.

□

Corolário 1. *A função $h_s(\xi) = (1+|\xi|^2)^{s/2}$ é de fato um peso.*

Demonstração. Começamos com o caso onde $s > 0$. Pela Proposição 7, tomando $\alpha = \eta$ e $\beta = \xi$, segue que

$$(1+|\xi+\eta|^2) \leq (1+|\eta|^2)\cdot(1+|\xi|)^2 \Longrightarrow (1+|\xi+\eta|^2)^{s/2} \leq (1+|\eta|^2)^{s/2}\cdot(1+|\xi|)^s.$$

Isto é, obtemos a desigualdade (3.1) com $C = 1$ e $N = s$.

Como o caso $s = 0$ é trivial, só falta o verificarmos para $s < 0$. Nesta situação, escolhemos $\alpha = \xi+\eta, \beta = -\xi$. Logo,

$$(1+|\eta|^2) \leq (1+|\xi+\eta|^2)\cdot(1+|\xi|)^2 \Longrightarrow \frac{(1+|\eta|^2)}{(1+|\eta+\xi|^2)} \leq (1+|\xi|)^2 \tag{3.6}$$

Elevando à $s/2$ a última desigualdade em (3.6), obtemos:

$$\frac{(1+|\eta|^2)^{s/2}}{(1+|\eta+\xi|^2)^{s/2}} \geq (1+|\xi|)^s, \tag{3.7}$$

e portanto

$$(1+|\eta+\xi|^2)^{s/2} \leq (1+|\xi|)^{-s}\cdot(1+|\eta|^2)^{s/2}. \tag{3.8}$$

□

Considere agora P um polinômio na variável ξ e defina $P^\alpha \doteq \partial_\xi^\alpha P$.

Proposição 8. *A função $\widetilde{P}(\xi)^2 \doteq \sum_{|\alpha|\geq 0} |P^\alpha(\xi)|^2$ é um peso.*

Demonstração. Fixamos um polinômio P com grau m. Pela fórmula de Taylor,

$$\partial_\xi^\alpha P(\xi+\eta) = \partial_\xi^\alpha P(\eta) + \sum_{1\leq|\beta|\leq m-|\alpha|} \partial_\xi^{\alpha+\beta} P(\eta)\cdot\frac{\xi^\beta}{\beta!}. \tag{3.9}$$

Segue de 3.9 que

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}(\xi+\eta)^2 &= \sum_{|\alpha|\leq m}\left|\partial_\xi^\alpha P(\eta) + \sum_{1\leq|\beta|\leq m-|\alpha|}\partial_\xi^{\alpha+\beta}P(\eta)\cdot\frac{\xi^\beta}{\beta!}\right|^2 \\
&\leq \sum_{|\alpha|\leq m}\left(\left|\partial_\xi^\alpha P(\eta)\right| + \left|\sum_{1\leq|\beta|\leq m-|\alpha|}\partial_\xi^{\alpha+\beta}P(\eta)\cdot\frac{\xi^\beta}{\beta!}\right|\right)^2 \\
&\leq \sum_{|\alpha|\leq m}\left[\left|\partial_\xi^\alpha P(\eta)\right|^2 + 2\left|\partial_\xi^\alpha P(\eta)\right|\cdot\left|\sum_{1\leq|\beta|\leq m-|\alpha|}\partial_\xi^{\alpha+\beta}P(\eta)\cdot\frac{\xi^\beta}{\beta!}\right|\right] + \\
&+ \sum_{|\alpha|\leq m}\left|\sum_{1\leq|\beta|\leq m-|\alpha|}\partial_\xi^{\alpha+\beta}P(\eta)\cdot\frac{\xi^\beta}{\beta!}\right|^2
\end{aligned}$$

Estimemos a segunda parcela da expressão dentro do somatório acima:

$$
\begin{aligned}
2\left|\partial_\xi^\alpha P(\eta)\right| \cdot \left|\sum_{1\le|\beta|\le m-|\alpha|} \partial_\xi^{\alpha+\beta} P(\eta)\cdot\frac{\xi^\beta}{\beta!}\right| &\le 2\left|\partial_\xi^\alpha P(\eta)\right| \cdot \sum_{1\le|\beta|\le m-|\alpha|} \left|\partial_\xi^{\alpha+\beta} P(\eta)\right| \cdot \frac{|\xi|^{|\beta|}}{\beta!} \\
&\le \left|\partial_\xi^\alpha P(\eta)\right| \cdot \sum_{|\gamma|\le m} \left|\partial_\xi^\gamma P(\eta)\right| \cdot C_{\alpha,1}\left(\sum_{j=1}^m |\xi|^j\right)
\end{aligned}
$$

Fazendo análise semelhante da última parcela,

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{1\le|\beta|\le m-|\alpha|} \partial_\xi^{\alpha+\beta} P(\eta)\cdot\frac{\xi^\beta}{\beta!}\right|^2 &\le \left(\sum_{1\le|\beta|\le m-|\alpha|} \left|\partial_\xi^{\alpha+\beta} P(\eta)\cdot\frac{\xi^\beta}{\beta!}\right|\right)^2 \\
&\le \left(\sum_{1\le|\beta|\le m-|\alpha|} \left|\partial_\xi^{\alpha+\beta} P(\eta)\right|\cdot\frac{|\xi|^{|\beta|}}{\beta!}\right)^2 \\
&\le C'_\alpha \left(\sum_{1\le|\beta|\le m-|\alpha|} \left|\partial_\xi^{\alpha+\beta} P(\eta)\right|^2\cdot\frac{|\xi|^{2|\beta|}}{\beta!^2}\right) \\
&\le \sum_{|\gamma|\le m} \left|\partial_\xi^\gamma P(\eta)\right|^2 \cdot C_{\alpha,2}\left(\sum_{j=1}^m |\xi|^{2j}\right)
\end{aligned}
$$

Desta forma, deduzimos que:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{P}(\xi+\eta)^2 &\le \sum_{|\alpha|\le m}\left[\left|\partial_\xi^\alpha P(\eta)\right|^2 + \left|\partial_\xi^\alpha P(\eta)\right|\cdot\sum_{|\gamma|\le m}\left|\partial_\xi^\gamma P(\eta)\right|\cdot C_{\alpha,1}\left(\sum_{j=1}^m|\xi|^j\right)\right] + \\
&+ \sum_{|\alpha|\le m}\left[\sum_{|\gamma|\le m}\left|\partial_\xi^\gamma P(\eta)\right|^2\cdot C_{\alpha,2}\left(\sum_{j=1}^m|\xi|^{2j}\right)\right] \\
&\le \widetilde{P}(\eta)^2 + C'\cdot\left(\sum_{|\gamma|\le m}\left|\partial_\xi^\gamma P(\eta)\right|\right)^2\cdot\left(\sum_{j=1}^m|\xi|^j\right) + C''\cdot\widetilde{P}(\eta)^2\cdot\left(\sum_{j=1}^m|\xi|^{2j}\right) \\
&\le \widetilde{P}(\eta)^2 + C_0\cdot\widetilde{P}(\eta)^2\cdot\left(\sum_{j=1}^m|\xi|^j\right) + C''\cdot\widetilde{P}(\eta)^2\cdot\left(\sum_{j=1}^m|\xi|^{2j}\right) \\
&\le \widetilde{P}(\eta)^2\cdot\left[1 + C_0\cdot\left(\sum_{j=1}^m|\xi|^j\right) + C''\cdot\left(\sum_{j=1}^m|\xi|^{2j}\right)\right] \\
&\le \widetilde{P}(\eta)^2\,(1+C|\xi|)^{2m},
\end{aligned}
$$

o que encerra a prova.

□

Neste trabalho, o polinômio P será o símbolo de um operador diferencial linear com coeficientes constantes. Este é um exemplo crucial de peso, sendo o alicerce fundamental da teoria de Hörmander.

Também é importante salientar que o conjunto das funções peso é fechado para soma, multiplicação e divisão. Estamos devidamente preparados para introduzir os espaços $B_{p,k}$.

Definição 3. *Se $k \in \mathscr{K}$ e $1 \leq p < \infty$, determinamos por $B_{p,k}$ o conjunto de todas as distribuições $u \in \mathscr{S}'$ tais que $\mathcal{F}u$ é uma função e*

$$\|u\|_{p,k} \doteq \frac{1}{(2\pi)^n} \left(\int |k(\xi)(\mathcal{F}u)(\xi)|^p d\xi \right)^{1/p} < \infty \tag{3.10}$$

Quando $p = \infty$, definimos $\|u\|_{\infty,k} \doteq ess\ \sup |k(\xi)\mathcal{F}(u)(\xi)|$.

Repare que se tomamos $k = h_s$ como definido em (3.2) e $p = 2$, temos os espaços H_s. Cada espaço com a norma $\|.\|_{p,k}$ é um espaço de Banach, e valem as inclusões $\mathscr{S} \subset B_{p,k} \subset \mathscr{S}'$.

Exibiremos agora resultados sobre a ação de operadores com coeficientes constantes em $B_{p,k}$, a relação entre estes com a suavidade de funções e uma versão da Desigualdade de Young.

Teorema 1. *Considere $P(D)$ um operador diferencial parcial linear com coeficientes constantes. Se $u \in B_{p,k\widetilde{P}}$, então $P(D)u \in B_{p,k}$. No caso em que u é uma distribuição com suporte compacto, também vale a recíproca.*

Teorema 2. *Sejam $k \in \mathscr{K}$ e j é um inteiro não-negativo tais que*

$$\frac{(1+|\xi|)^j}{k(\xi)} \in L^q, \ \ com\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{3.11}$$

Neste caso, $B_{p,k} \subset C^j$. Reciprocamente, se $B_{p,k} \cap \mathcal{E}'(X) \subset C^j$ para algum aberto X, então vale (3.11).

Teorema 3. *Suponha que $u_1 \in B_{p,k_1} \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $u_2 \in B_{\infty,k_2}$. Então $u_1 * u_2 \in B_{p,k_1k_2}$ e vale a estimativa*

$$\|u_1 * u_2\|_{p,k_1k_2} \leq \|u_1\|_{p,k_1} \|u_2\|_{\infty,k_2}. \tag{3.12}$$

Uma maneira clássica de constatar que uma certa distribuição é na realidade uma função suave seria demonstrar que ela pertence a todo espaço H^s_{loc}, com s real. Como tudo definido até o momento é uma generalização dos Espaços de Sobolev, surge naturalmente uma questão sobre a existência de espaços $B^{\text{loc}}_{p,k}$. Vejamos de que modo se pode definí-los.

Teorema 4. *Sejam $u \in B_{p,k}$ e $\varphi \in \mathscr{S}$. Então $\varphi u \in B_{p,k}$ e vale a desigualdade abaixo:*

$$\|\varphi u\|_{p,k} \leq C(\varphi) \|u\|_{p,k} \tag{3.13}$$

Teorema 5. *Seja $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int \varphi(x)dx = 1$. Denotamos $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$. Se $u \in B_{p,k}$ com $p < \infty$, então $u * \varphi_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} u$ em $B_{p,k}$.*

O Teorema 5 é uma consequência do Teorema 4, o qual nos mostra como as funções regularizantes podem ser aplicadas aqui como em outros casos já conhecidos. Já o Teorema 4 nos mostra que é viável discutir regularidade $B_{p,k}$ em vizinhanças de pontos. Reescrevendo de maneira mais formal:

Definição 4. *Um subespaço W de $\mathscr{D}'(X)$ é chamado de* ***semilocal*** *se $\varphi u \in W$ quando $u \in W$ e $\varphi \in C_c^\infty(X)$. Quando W for semilocal e contiver u sempre que $\varphi u \in W$ para toda $\varphi \in C_c^\infty(X)$, diremos que W será* ***local****.*

Note que já vimos que $B_{p,k}$ é semilocal. Isto é suficiente para induzir uma definição de $B_{p,k}^{\text{loc}}$, através do resultado abaixo:

Teorema 6. *Se W é semilocal, o menor espaço local contendo W é o espaço*

$$W^{loc} \doteq \{u;\ u \in \mathscr{D}(X), \varphi u \in W,\ \forall \varphi \in C_c^\infty(X)\}.$$

Para os espaços $B_{p,k}^{\text{loc}}$, temos versões análogas dos Teoremas 1 e 2, com ambas as voltas verdadeiras. O conjunto é fechado para multiplicação por funções suaves e tem estrutura de espaço de Frechét com a topologia induzida pelas seminormas $u \longrightarrow \|\varphi u\|_{p,k}$, $\varphi \in C_c^\infty(X)$.

Outro fato interessante e de bastante utilidade para a demonstração de nosso resultado, é que podemos estimar a regularidade de uma solução fundamental para um ODPL com coeficientes constantes.

Teorema 7. *Se $P(D)$ é um operador diferencial parcial linear com coeficientes constantes e não-nulo, então existe E uma solução fundamental $E \in B_{\infty,\widetilde{P}}^{loc}$.*

Afirmamos que o resultado acima é preciso, no seguinte sentido: o espaço $B_{\infty,\widetilde{P}}^{\text{loc}}$ é o "melhor" espaço do tipo que pode conter uma solução fundamental. Suponha existir uma distribuição E pertencendo $B_{p,k}^{loc}$ tal que $P(D)E = \delta$. Pelo que já discutimos previamente,

$$\delta = P(D)E \in B_{p,k/\widetilde{P}}^{loc} \tag{3.14}$$

Assim $\dfrac{k}{\widetilde{P}} \cdot \mathcal{F}(\delta) = \dfrac{k}{\widetilde{P}} \in L^p$.

Observe que se $u \in B_{\infty,\widetilde{P}}$, então $\|k \cdot \mathcal{F}(u)\|_p \leq \left\|\dfrac{k}{\widetilde{P}}\right\|_p \cdot \left\|\widetilde{P} \cdot \mathcal{F}(u)\right\|_\infty$. Ou seja,

$$B_{\infty,\widetilde{P}}^{\text{loc}} \subset B_{p,k}^{loc}. \tag{3.15}$$

3.2 Definição e Propriedades

Sejam agora $P_1(D), P_2(D)$ dois operadores diferenciais com coeficientes constantes. Sabemos que as funções induzidas $\widetilde{P_1}, \widetilde{P_2}$ são funções peso. Podemos nos questionar: comparando as funções peso, é possível de algum modo comparar os operadores em si?

Considere $P(x, D)$ um ODPL qualquer. Tomando y_1, y_2 quaisquer, é factível obter propriedades de P estudando as relações entre $\widetilde{P_{y_1}}$ e $\widetilde{P_{y_2}}$? A resposta é afirmativa para ambas as indagações; nosso objetivo será trazer um bom exemplo para a derradeira.

Definição 5. *Sejam $P(D)$, $Q(D)$ operadores com coeficientes constantes. Dizemos que Q é* ***mais fraco*** *que P, ou $Q < P$ se existe $C > 0$ tal que*

$$\frac{\widetilde{Q}(\xi)}{\widetilde{P}(\xi)} < C, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \tag{3.16}$$

Quando $Q < P < Q$, dizemos que ambos os operadores são ***igualmente fortes****.*

Definição 6. *Um operador diferencial $P(x, D)$ definido em X é dito de* ***força constante*** *em X se para $y_1, y_2 \in X$ arbitrários, os operadores de coeficientes constantes $P(y_1, D), P(y_2, D)$ possuem a seguinte propriedade:*

$$\frac{\widetilde{P}(y_1, \xi)}{\widetilde{P}(y_2, \xi)} \leq C(y_1, y_2), \quad C(y_1, y_2),\ \xi \in \mathbb{R}^n, . \tag{3.17}$$

Tome um operador de coeficientes constantes P, de ordem m. É fácil reparar que o conjunto de operadores mais fracos do que P tem estrutura de espaço vetorial e nenhum operador de ordem estritamente maior que m pertence a ele. Logo, a dimensão do espaço é finita.

Lema 1. *Suponha que $P(x, D)$ é um operador com coeficientes suaves e força constante. Fixado x_0, definimos $P_0(D) \doteq P(x_0, D)$. Seja $P_0, P_1, \ldots, P_r$ uma base do espaço de operadores de coeficientes constantes que são mais fracos que P_0. Então*

$$P(x, D) = P_0(D) + \sum_{j=1}^{r} c_j(x) P_j(D), \tag{3.18}$$

onde as funções c_j são unicamente determinadas, se anulam em x_0 e são de classe C^∞.

Temos agora todas as ferramentas para demonstrar o resultado principal.

Teorema 8. *Seja $P(x, D)$ um operador diferencial com coeficientes C^∞ e de força constante em uma vizinhança de $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Se X é uma vizinhança suficientemente pequena de x_0, existe uma transformação linear $E : \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ com as seguintes propriedades:*

$$P(x, D)Ef = f \text{ em } X, \text{ se } f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n). \tag{3.19}$$

$$\|Ef\|_{p, \widetilde{P_0} k} \leq C_k \|f\|_{p,k}, \quad \text{se } f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \cap B_{p,k} \text{ e } k \in \mathscr{K}. \tag{3.20}$$

Demonstração. Seja $X_\varepsilon = \{x; |x - x_0| < \varepsilon\}$. Pela hipótese, podemos encontrar ε_0 tal que $P(x, D)$ possui coeficientes suaves e é de força constante em X_{ε_0}. Escolha uma função de corte $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ de modo que $\chi \equiv 1$ em uma vizinhança de $\overline{B(0, 2\varepsilon_0)}$.

Considere a decomposição de P feita em (3.18) e seja $E_0 \in B^{\text{loc}}_{\infty,\widetilde{P_0}}$ uma solução fundamental de $P_0(D)$, cuja existência é garantida pelo Teorema 7. Escrevemos $F_0 \doteq \chi E_0$. Segue imediatamente que $F_0 \in B_{\infty,\widetilde{P_0}}$.

Além disto, $F_0 * f = E_0 * f$ em X_{ε_0} quando *supp* f está contido em X_{ε_0}, já que

$$E_0 * f = \underbrace{(\chi E_0 * f)}_{A} + \underbrace{[(1-\chi)E_0 * f]}_{B}$$

e $y \in$ *supp* B pode ser escrito como $y_1 + y_2$, onde $|y_1| > 2\varepsilon_0$ e $|y_2 - x_0| < \varepsilon_0$. Assim,

$$P_0(D)(E_0 * f) = P_0(D)(F_0 * f) = F_0 * (P_0(D)f) = f \text{ em } X_{\varepsilon_0}, \text{ se } f \in \mathcal{E}'(X_{\varepsilon_0}) \tag{3.21}$$

Tome $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi \equiv 1$ na bola unitária fechada, com suporte no conjunto $\{x; |x| \leq 2\}$. Como usual, escrevemos $\psi_\varepsilon \doteq \psi\left(\dfrac{x - x_0}{\varepsilon}\right)$. Suponha por um instante que existe $\varepsilon_1 > 0$ para o qual dado $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ existe uma única $g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$g + \sum_{j=0}^{r} \psi_\varepsilon c_j P_j(D)(F_0 * g) = \psi_\varepsilon f, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_1 < \varepsilon_0/2 \tag{3.22}$$

Determinamos então $Ef \doteq F_0 * g$. É imediato que E é linear e leva elementos de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Mais ainda, isolando g na equação (3.22), notamos que na verdade *supp* $g \subset$ *supp* ψ_ε e, consequentemente, $g \in \mathcal{E}'(X_{\varepsilon_0})$. Portanto,

$$\begin{aligned}
P(x,D)Ef &= P(x,D)(F_0 * g) \\
&= P_0(D)(F_0 * g) + \sum_{j=0}^{r} c_j P_j(x,D)(F_0 * g) \\
&= g + \sum_{j=1}^{r} c_j P_j(x,D)(F_0 * g) \\
&= g + \sum_{j=1}^{r} \psi_\varepsilon c_j P_j(x,D)(F_0 * g), \quad \text{em } X_\varepsilon \\
&= f, \quad \text{em } X_\varepsilon,
\end{aligned}$$

o que mostra (3.19). Precisamos provar ainda a unicidade de (3.22) e a desigualdade (3.20). Estudemos a seguinte função:

$$\begin{aligned}
A_\varepsilon : \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) &\to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \\
g &\to \sum_{j=0}^{r} \psi_\varepsilon c_j P_j(D)(F_0 * g).
\end{aligned}$$

Fixemos $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Sabemos que existe $k \in \mathscr{K}$ tal que $f \in B_{2,k}$. De forma mais geral, demonstraremos que A_ε leva $B_{p,k}$ em si mesmo. Logo em seguida, calcularemos sua norma. Mas antes, temos de enunciar dois lemas:

Lema 2. *Fixado $k \in \mathscr{K}$, podemos encontrar $\delta_0 > 0$ tal que para todo $0 < \delta < \delta_0$ existe uma função peso k_δ de modo que*

$$\|\varphi u\|_{p,k_\delta} \leq 2\,\|\varphi\|_{1,1}\,\|u\|_{p,k_\delta}\,, \qquad u \in B_{p,k_\delta} \tag{3.23}$$

onde $\varphi \in \mathscr{S}$ e $B_{p,k} = B_{p,k_\delta}$ (ou seja, os dois pesos são equivalentes).

Lema 3. *Suponha $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e seja $\psi_\varepsilon(x) = \psi\left(\dfrac{x - x_0}{\varepsilon}\right)$. Se $h(x)$ é suave em uma vizinhança de x_0 e $h(x_0) = 0$, segue que $\|\psi_\varepsilon h\|_{1,1} = O(\varepsilon)$, quando ε é suficientemente pequeno.*

Agora, lembre-se que $F_0 \in B_{\infty,\widetilde{P_0}}$. Logo, existe $C > 0$ tal que $|P_0(\xi)\mathscr{F}(F_0)(\xi)| \leq C$, para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$. Como cada P_j é mais fraco do que P_0, podemos tomar C de modo que

$$|P_j(\xi)\mathscr{F}(F_0)(\xi)| \leq C, \quad j = 0, 1, \ldots, r. \tag{3.24}$$

Suponha que $g \in B_{p,k_\delta}$, para δ suficientemente pequeno onde vale o Lema 2. Pelo Teorema 3, obtemos:

$$\begin{aligned}
\|A_\varepsilon g\|_{p,k_\delta} &\leq \sum_{j=0}^{r} \|\psi_\varepsilon c_j P_j(D)(F_0 * g)\|_{p,k_\delta} \\
&\leq \sum_{j=0}^{r} \|\psi_\varepsilon c_j (P_j(D)F_0 * g)\|_{p,k_\delta} \\
&\leq 2\sum_{j=0}^{r} \|\psi_\varepsilon c_j\|_{1,1}\,\|(P_j(D)F_0 * g)\|_{p,k_\delta} \\
&\leq 2\sum_{j=0}^{r} \|\psi_\varepsilon c_j\|_{1,1}\,\|P_j(D)F_0\|_{\infty,1}\,\|g\|_{p,k_\delta} \\
&\leq 2C\sum_{j=0}^{r} \|\psi_\varepsilon c_j\|_{1,1}\,\|g\|_{p,k_\delta}\,.
\end{aligned}$$

Utilizando o Lema 3, é possível selecionar ε_1 de maneira que $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0/2$ e

$$\sum_{j=0}^{r} \|\psi_\varepsilon c_j\|_{1,1} < \frac{1}{4C}, \quad \text{quando } 0 < \varepsilon < \varepsilon_1. \tag{3.25}$$

Como a escolha de ε_1 vale para qualquer peso k, concluímos que A_ε pode ser visto como um operador de B_{1,k_δ}, e juntando a desigualdade (3.25) com a estimativa anterior, notamos que

$$\|A_\varepsilon g\|_{p,k_\delta} \leq \frac{1}{2}\,\|g\|_{p,k_\delta}\,. \tag{3.26}$$

Isto é, sua norma é menor ou igual a $\dfrac{1}{2}$.

Resumindo, temos um operador linear $A_\varepsilon : B_{2,k_\delta} \to B_{2,k_\delta}$ que possui norma menor do que 1. Logo, $I + A_\varepsilon$ é inversível, o que nos permite concluir a existência de uma única solução da equação (3.22), considerando à primeira vista apenas o espaço B_{2,k_δ} e portanto $B_{2,k}$.

Não obstante, a unicidade é mais geral, valendo para $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. De fato, suponha existirem g_1, g_2 soluções distintas, sendo a primeira a encontrada acima. Logo $g_1, f \in B_{2,k_1}$ e $g_2 \in B_{2,k_2}$. Por podermos encontrar k de modo que $B_{2,k_1}, B_{2,k_2} \subset B_{2,k}$, teríamos duas soluções distintas em $B_{2,k}$ de f. Contradição.

Finalizamos a prova com a estimativa prometida. De (3.26),

$$2\left\|\psi_\varepsilon f\right\|_{p,k_\delta} = 2\left\|A_\varepsilon g + g\right\|_{p,k_\delta} \geq 2\left\|g\right\|_{p,k_\delta} - 2\left\|A_\varepsilon g\right\|_{p,k_\delta} \geq \left\|g\right\|_{p,k_\delta} \tag{3.27}$$

Portanto,

$$\left\|Ef\right\|_{p,\widetilde{P_0}k_\delta} \leq \left\|F_0\right\|_{\infty,\widetilde{P_0}} \left\|g\right\|_{p,k_\delta} \leq 2\left\|F_0\right\|_{\infty,\widetilde{P_0}} \left\|\psi_\varepsilon f\right\|_{p,k_\delta} \leq 4\left\|F_0\right\|_{\infty,\widetilde{P_0}} \left\|\psi_\varepsilon\right\|_{1,1} \left\|f\right\|_{p,k_\delta}, \tag{3.28}$$

aplicando o Teorema 3, a desigualdade (3.27) e o Lema 2. O resultado como enunciado segue novamente do fato das normas $\|.\|_{p,k}$ e $\|.\|_{p,k_\delta}$ serem equivalentes.

□

Corolário 2. *Seja $P(x,D)$ e X como no Teorema 8. Então a equação $P(x,D)u = f$ possui (em X) solução $u \in C^\infty(X)$ para cada $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Seja f um elemento de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Tomamos $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi \equiv 1$ em X. Repare que $\varphi f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \cap H^s(\mathbb{R}^n)$ para $s \in \mathbb{R}$ arbitrário. Por (3.19), $P(x,D)E(\varphi f) = \varphi f = f$ em X. Segue de (3.20) que $Ef \doteq u$ pertence a H^s para cada s; logo de classe C^∞. □

Teorema 9. *Dado $x \in M$, existe uma vizinhança $V \ni x$ tal que L é um operador de força constante em V.*

Demonstração. Fixe $x_0 \in M$, e considere um aberto U que contém x_0 tal que

$$L\big|_U = a_{n-1}\frac{\partial}{\partial y_{n-1}} + a_n\frac{\partial}{\partial y_n}.$$

Tomando $V \ni x_0$ um aberto compactamente contido em U, existem $C_1, C_2 > 0$ de modo que

$$C_1 \leq |a_{n-1}(x)|, |a_n(x)| \leq C_2, \quad \forall x \in V \tag{3.29}$$

pois já vimos na Proposição 5 que ambos os coeficientes nunca se anulam. Portanto, dados x_1, x_2 em V,

$$\begin{aligned}\widetilde{L}(x_j,\xi)^2 &= |a_{n-1}(x_j)\cdot\xi_{n-1} + a_n(x_j)\cdot\xi_n|^2 + |a_{n-1}(x_j)|^2 + |a_n(x_j)|^2 \\ &\leq |a_{n-1}(x_j)|^2(1+2|\xi_{n-1}|^2) + |a_n(x_j)|^2(1+2|\xi_n|^2), \\ &\leq 2\cdot C_2^2(1+|\xi_{n-1}|^2+|\xi_n|^2), \quad j=1,2.\end{aligned}$$

Reciprocamente, aplicando a Proposição 6 com possivelmente uma redução de V, constatamos que existe $c_1 > 0$ de maneira que:

$$\begin{aligned}\widetilde{L}(x_j,\xi)^2 &= |a_{n-1}(x_j)\cdot\xi_{n-1} + a_n(x_j)\cdot\xi_n|^2 + |a_{n-1}(x_j)|^2 + |a_n(x_j)|^2\\ &\geq 2\cdot {c_1}^2(|\xi_{n-1}|^2 + |\xi_n|^2) + |a_{n-1}(x_j)|^2 + |a_n(x_j)|^2\\ &\geq 2\cdot {c_1}^2(|\xi_{n-1}|^2 + |\xi_n|^2) + 2C_1^2\\ &\geq 2\cdot c_2^2(1 + |\xi_{n-1}|^2 + |\xi_n|^2), \quad j = 1,2;\end{aligned}$$

onde $c_2 = \min\{C_1, c_1\}$.

Ou seja, $\dfrac{|\widetilde{L}(x_2,\xi)|}{|\widetilde{L}(x_1,\xi)|} \leq \dfrac{C_2}{c_2}$, o que finaliza a prova.

□

Corolário 3. *L é um operador localmente C^∞-resolúvel.*

Capítulo 4

Folheação associada a L

Pelo fato dos operadores reais L_1 e L_2 formarem uma estrutura involutiva, existe uma folheação de M de modo que cada uma das folhas tem o espaço tangente gerado por tais campos. Para mais detalhes sobre folheações, recomendamos [CLN85].

A priori, uma folha neste caso é somente uma variedade real de dimensão 2, que localmente pode ser descrita como um subconjunto de M cujas primeiras $n-2$ variáveis são fixas.

Complexificando seu fibrado tangente e definindo $\overline{L} = L_1 - iL_2$, segue que

$$L_1 = \frac{L+\overline{L}}{2}, \quad L_2 = \frac{L-\overline{L}}{2i}. \tag{4.1}$$

Consequentemente, L e $\bar{L}$ são linearmente independentes e também formam um conjunto gerador. Isto é, em cada folha o subfibrado gerado por L forma uma estrutura complexa, como descrito em [BCH08].

4.1 Forma local do Operador

Apresentaremos agora uma nova caracterização local do operador L, que será de suma importância no decorrer deste trabalho.

Teorema 10. *Para cada ponto de M, existe um sistema local de coordenadas de forma que $L = a\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$, onde a é função de classe C^∞ e $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_{n-1}} + i\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$*

Demonstração. Primeiramente, fixamos um ponto em M que será a origem, e recordamos que podemos considerar $L = a_{n-1}\dfrac{\partial}{\partial y_{n-1}} + a_n\dfrac{\partial}{\partial y_n}$ em um sistema local de coordenadas $y_1, \ldots, y_n$ definido em uma vizinhança U deste ponto, de maneira que as funções a_{n-1} e a_n não se anulam em U.

Considere então $L' \doteq L/a_{n-1}$. Note que provar o resultado para L' é equivalente a provar para L. Portanto, podemos supor que

$$L = \frac{\partial}{\partial y_{n-1}} + b_n\frac{\partial}{\partial y_n}, \tag{4.2}$$

onde $b_n \doteq \beta_n + i\gamma_n$ é uma função que nunca se anula.

Considere o seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_{n-1}}{\partial t} = 1, \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial t} = \beta_n(y_1, \ldots, y_{n-2}, y_{n-1}, y_n) \\ y_{n-1}(y_1, \ldots, y_{n-2}, 0, \zeta) = 0 \\ y_n(y_1, \ldots, y_{n-2}, 0, \zeta) = \zeta \end{cases}$$

Com uma conta simples, conseguimos provar que $(y_1, \ldots, y_{n-2}, t, \zeta) \longmapsto (y_1, \ldots, y_{n-2}, y_{n-1}, y_n)$ é um difeomorfismo em torno da origem, e consequentemente $(y_1, \ldots, y_{n-2}, t, \zeta)$ é sistema local de coordenadas.

Verifiquemos a forma do campo L neste novo sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial y_{n-1}} \cdot \frac{\partial y_{n-1}}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial y_n}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial y_{n-1}} + \frac{\partial f}{\partial y_n} \cdot \beta_n \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y_{n-1}} + \beta_n \cdot \frac{\partial}{\partial y_n} \right) f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \zeta} &= \frac{\partial f}{\partial y_{n-1}} \cdot \frac{\partial y_{n-1}}{\partial \zeta} + \frac{\partial f}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial y_n}{\partial \zeta} \\ &= \frac{\partial f}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial y_n}{\partial \zeta} \\ &= \left(\frac{\partial y_n}{\partial \zeta} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y_n} \right) f, \end{aligned}$$

visto que $y_{n-1} = t$, pela unicidade de solução do problema de Cauchy. Concluímos assim que

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + i\varphi \frac{\partial}{\partial \zeta}, \tag{4.3}$$

com $\varphi \in C^\infty(U)$ e assumindo apenas valores reais. Note que, como L e $\overline{L}$ são linearmente independentes, a função φ é diferente de 0 em cada ponto.

Considere $f \doteq -i\varphi_\zeta$. Visto termos demonstrado que L é localmente C^∞-resolúvel, a menos de uma redução de U, existe v de maneira que

$$Lv = v_t + i\varphi v_\zeta = f = -i\varphi_\zeta \tag{4.4}$$

Posto isto, definimos a seguinte função:

$$u(y', t, \zeta) \doteq \int_0^\zeta e^{v(y', t, \theta)} d\theta. \tag{4.5}$$

Aplicando L em u, obtemos:

$$
\begin{aligned}
Lu(y',t,\zeta) &= \int_0^\zeta v_t(y',t,\theta).e^{v(y',t,\theta)}\ d\theta + i\varphi(y',t,\zeta)e^{v(y',t,\zeta)} \\
&= \int_0^\zeta \left[-i\varphi_\zeta - i\varphi v_\zeta\right](y',t,\theta).e^{v((y',t,\theta)}\ d\theta + i\varphi(y',t,\zeta)e^{v(y',t,\zeta)} \\
&= -i\int_0^\zeta \left[\varphi_\zeta + \varphi v_\zeta\right](y',t,\theta).e^{v(y',t,\theta)}\ d\theta + i\varphi(y',t,\zeta)e^{v(y',t,\zeta)} \\
&= -i\int_0^\zeta \left[\varphi e^{v(y',t,\theta)}\right]_\zeta (y',t,\theta)d\theta + i\varphi(y',t,\zeta)e^{v(y',t,\zeta)} \\
&= i\varphi(y',t,0).e^{v(y',t,0)}
\end{aligned}
$$

Escrevemos agora

$$
Z(y',t,\zeta) \doteq u(y',t,\zeta) - i\int_0^t \varphi(y',\xi,0)e^{v(y',\xi,0)}d\xi \tag{4.6}
$$

e afirmamos que $LZ = 0$, $Z_\zeta \neq 0$ em U. De fato,

$$
\begin{aligned}
LZ(y',t,\zeta) &= Lu(y',t,\zeta) - iL\left[\int_0^t \varphi(y',\xi,0)e^{v(y',\xi,0)}d\xi\right] \\
&= i\varphi(y',t,0).e^{v(y',t,0)} - iL\left[\int_0^t \varphi(y',\xi,0)e^{v(y',\xi,0)}d\xi\right] \\
&= i\varphi(y',t,0).e^{v(y',t,0)} - i\left\{\frac{\partial}{\partial t} + i\varphi\frac{\partial}{\partial x}\right\}\left[\int_0^t \varphi(y',\xi,0)e^{v(y',\xi,0)}d\xi\right] \\
&= i\varphi(y',t,0).e^{v(y',t,0)} - i\varphi(y',t,0).e^{v(y',t,0)} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Além disso, $Z_\zeta(y',t,\zeta) = u_\zeta(y',t,\zeta) = e^{v(y',t,\zeta)} \neq 0$. Ou seja, $dZ \neq 0$.

Daqui em diante tomaremos y' apenas como parâmetro fixado. Repare que esta atitude poderia ter sido tomada desde o início, pois em nenhum momento houve qualquer alteração nas primeiras $n-2$ coordenadas. Mas a opção feita aqui teve exatamente o fim didático de explicitar esse fato.

Para prosseguir com a demonstração, necessitamos do resultado a seguir:

Proposição 9. *As formas $dZ, d\bar{Z}$ são linearmente independentes.*

Demonstração. Sejam a_1, a_2 funções suaves tais que $a_1 dZ + a_2 d\bar{Z} = 0$. Aplicando em L,

$$
a_1 dZ(L) + a_2 d\bar{Z}(L) = a_2 d\bar{Z}(L) = a_2 L(\bar{Z}) = a_2\overline{\bar{L}(Z)} = 0 \tag{4.7}
$$

Em contrapartida,

$$\begin{aligned}
\bar{L}Z(y',t,\zeta) &= \bar{L}u(y',t,\zeta) - i\bar{L}\left[\int_0^t \varphi(y',\xi,0)e^{v(y',\xi,0)}d\xi\right] \\
&= -i\int_0^\zeta \left[\varphi e^{v(y',t,\theta)}\right]_\zeta (y',t,\theta)\ d\theta - i\varphi(y',t,\zeta)e^{v(y',t,\zeta)} - \\
&- i\left\{\frac{\partial}{\partial t} - i\varphi\frac{\partial}{\partial x}\right\}\left[\int_0^t \varphi(y',\xi,0)e^{v(y',\xi,0)}d\xi\right] = \\
&= -2i\varphi(y',t,\zeta)e^{v(y',t,\zeta)} + i\varphi(y',t,0).e^{v(y',t,0)} - i\varphi(y',t,0).e^{v(y',t,0)} = \\
&= -2i\varphi(y',t,\zeta)e^{v(y',t,\zeta)},
\end{aligned}$$

que nunca se anula. Logo, $a_2 \equiv 0$. Analogamente, aplicando em $\bar{L}$ obteremos que $a_1 \equiv 0$, encerrando a prova.

□

Repare que a Proposição 9 nos permite inferir que $d(\mathrm{Re}Z)$ e $d(\mathrm{Im}Z)$ são linearmente independentes. Determinando

$$Z(y',\zeta,t) = x_{n-1}(y',\zeta,t) + ix_n(y',\zeta,t), \tag{4.8}$$

segue que (x_{n-1}, x_n) é um sistema de coordenadas. Calculemos L neste sistema. Como $LZ = 0$;

$$\frac{\partial x_{n-1}}{\partial t} + i\frac{\partial x_n}{\partial t} + i\varphi\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \zeta} + i\varphi\left(i\frac{\partial x_n}{\partial \zeta}\right) = 0 \tag{4.9}$$

Da equação (4.9) extraímos duas igualdades:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial t} = \varphi\dfrac{\partial x_n}{\partial \zeta} \\[2ex] \dfrac{\partial x_n}{\partial t} = -\varphi\dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \zeta} \end{cases}$$

Tomamos $f \in C^\infty(U)$ arbitrária e aplicamos L:

$$\begin{aligned}
Lf &= \frac{\partial f}{\partial t} + i\varphi\frac{\partial f}{\partial \zeta} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t}\right) + i\varphi\left(\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \zeta} + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \zeta}\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\left[\frac{\partial x_{n-1}}{\partial t} + i\varphi\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \zeta}\right] + \frac{\partial f}{\partial x_n}\left[\frac{\partial x_n}{\partial t} + i\varphi\frac{\partial x_n}{\partial \zeta}\right] \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\left[\frac{\partial x_{n-1}}{\partial t} - i\frac{\partial x_n}{\partial t}\right] + i\frac{\partial f}{\partial x_n}\left[-i\frac{\partial x_n}{\partial t} + \frac{\partial x_{n-1}}{\partial t}\right] \\
&= \left[\frac{\partial x_{n-1}}{\partial t} - i\frac{\partial x_n}{\partial t}\right]\left(\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} + i\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)
\end{aligned}$$

Se denotamos $\psi \doteq \left[\dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial t} - i\dfrac{\partial x_n}{\partial t}\right]$,

$$L = \psi \left(\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} + i \frac{\partial}{\partial x_n} \right) , \tag{4.10}$$

o que estabelece o término da demonstração do Teorema 10.

□

Como pode notar o leitor familiarizado com a teoria de estruturas formalmente integráveis, o que acabamos de provar decorre imediatamente do Teorema de Newlander-Nirenberg, que afirma que toda estrutura complexa é localmente integrável. Uma demonstração do resultado e a teoria geral podem ser vistas em [BCH08].

4.2 A Estrutura Complexa de Cada Folha

Provemos por fim que cada folha tem estrututura de variedade complexa. Fixamos um ponto x_0 da variedade M, denominamos de $\mathcal{L}$ a folha que passa por ele e escolhemos $(y_1, \ldots, y_n)$ sistema de coordenadas em um aberto $W_1 \ni x_0$ da variedade como no Teorema 10.

Logo, existe $V_1 \ni x_0$ aberto da folha tal que $g \doteq y_{n-1} + iy_n$ é um homeomorfismo de V_1 em um aberto de $\mathbb{C}$. Suponha $(x_1, \ldots, x_n)$ outro sistema de coordenadas para o qual L é caracterizado da mesma maneira, definido em um aberto W_2 tal que $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$.

Analogamente, existirá $V_2 \subset \mathcal{L}$ aberto de modo que $V = V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ e $h \doteq x_{n-1} + ix_n$ é homeomorfismo de V_2 em um aberto de $\mathbb{C}$. Afirmamos agora que $y' = (y_1, \ldots, y_{n-2})$ é uma função apenas de $x' = (x_1, \ldots, x_{n-2})$ e vice-versa. De fato,

$$\begin{aligned} Lf &= a \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} + i \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \\ &= b \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_{n-1}} + i \frac{\partial f}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_{n-1}} \right) \\ &= c \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y_{n-1}} + i \frac{\partial f}{\partial y_n} \right). \end{aligned}$$

Ou seja, $\dfrac{\partial y_j}{\partial x_{n-1}} = \dfrac{\partial y_j}{\partial x_n} = 0$ para $j = 1, 2, \ldots, n-2$. O raciocínio para mostrar que x' só depende de y' é totalmente análogo.

Resumindo: quando ocorre a troca de sistema de coordenadas e as variáveis x' são fixadas, o mesmo acontece para y'. Falta-nos mostrar que a função de transição em $\mathcal{L}$ dada por $g \circ h^{-1}$ é holomorfa.

Fazendo uma simples conta, deduzimos que $Lf = Lg = 0$ e, em $V_1 \cap V_2$, segue que:

$$\frac{\partial g}{\partial x_{n-1}} + i \frac{\partial g}{\partial x_n} = 0. \tag{4.11}$$

Mas isto é o mesmo que afirmar que

$$\left[\frac{\partial(g\circ f^{-1})}{\partial x}+i\frac{\partial(g\circ f^{-1})}{\partial y}\right]\circ f=0, \tag{4.12}$$

onde x, y são coordenadas em $\mathbb{C}$. Ou seja, $\dfrac{\partial(g\circ f^{-1})}{\partial \bar{z}}=0$ e assim concluímos que a função é holomorfa.

Temos portanto um atlas para M que induz uma estrutura de variedade complexa em cada folha, o que nos permite introduzir o seguinte conceito:

Definição 7. *Seja $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}\cup\{\infty,-\infty\}$, onde Ω é um aberto de uma folha da L-folheação. Diremos que a função será subharmônica se for semicontínua superiormente e $\partial\overline{\partial}\varphi\geq 0$, no sentido de distribuições (ou $\varphi\equiv-\infty$). Quando φ for de classe C^2, diremos que será estritamente subharmônica no caso de a desigualdade ser estrita.*

Definição 8. *Se φ é definida em M, diremos que será subharmônica se for semicontínua superiormente e a restrição a cada folha for subharmônica.*

Definição 9. *Diremos que φ será superharmônica quando $-\varphi$ for subharmônica.*

Relacionaremos agora a subharmonicidade de uma função com a ação dos operadores L e $\bar{L}$ sobre a mesma. Com tal intuito, calculemos o colchete de Lie dos campos:

De (4.1),

$$\begin{aligned}\left[L,\bar{L}\right]&=[L_1+iL_2,L_1-iL_2]\\&=-i[L_1,L_2]+i[L_2,L_1]\\&=2i\,[L_2,L_1]\\&=2i(\alpha_1L_1+\alpha_2L_2)\\&=(\alpha_2+i\alpha_1)L-((\alpha_2-i\alpha_1))\bar{L}\\&=\lambda L-\bar{\lambda}\bar{L},\end{aligned}$$

onde $\lambda\in C^\infty(M)$.

Proposição 10. *$\partial\overline{\partial}\varphi\geq 0$ se e somente se $(\bar{L}+\lambda)L\varphi\geq 0$ em cada folha.*

Demonstração. Para iniciar, a afirmação é local. De fato, precisamos somente provar que para cada ponto da variedade existe uma vizinhança na qual a distribuição $\partial\bar{\partial}\varphi$ é não-negativa.

Por isso, podemos considerar $L=a\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}}$, $\bar{L}=\bar{a}\dfrac{\partial}{\partial z}$ e encontrar a função λ explicitamente:

$$L\bar{L}=a\bar{a}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}+a\overline{\left(\frac{\partial a}{\partial z}\right)}\frac{\partial}{\partial z} \tag{4.13}$$

$$\bar{L}L=a\bar{a}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}+\bar{a}\left(\frac{\partial a}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial\bar{z}} \tag{4.14}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\left[L, \bar{L}\right] &= a\overline{\left(\frac{\partial a}{\partial z}\right)}\frac{\partial}{\partial z} - \bar{a}\left(\frac{\partial a}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \\
&= \overline{\left(\frac{\bar{a}}{a}\frac{\partial a}{\partial z}\right)}\bar{a}\frac{\partial}{\partial z} - \left(\frac{\bar{a}}{a}\frac{\partial a}{\partial z}\right)a\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \\
&= -\left(\frac{\bar{a}}{a}\frac{\partial a}{\partial z}\right)L + \overline{\left(\frac{\bar{a}}{a}\frac{\partial a}{\partial z}\right)}\bar{L}.
\end{aligned}
$$

Concluímos deste modo que $\lambda = -\left(\frac{\bar{a}}{a}\frac{\partial a}{\partial z}\right)$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
\left(\bar{L} + \lambda\right)L\varphi &= \left(\bar{L} + \lambda\right)a\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \\
&= \bar{L}\left(a\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}\right) - \bar{a}\frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \\
&= \bar{L}(a)\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} + a\bar{a}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \bar{z}} - \bar{a}\frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \\
&= |a|^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \bar{z}}.
\end{aligned}
$$

□

Capítulo 5

Uma Análise da Regularidade das Soluções

5.1 A Função Regularidade

Aqui usaremos das ferramentas obtidas até o momento a fim de obter melhor descrição das singularidades e dos suportes de $Lu = f$. Para medir a regularidade de uma distribuição em M, definimos

$$s_u(x) = \sup\left\{t \in \mathbb{R};\ u \in H^t \text{ em uma vizinhança de } x\right\}. \tag{5.1}$$

Proposição 11. *A função s_u é semicontínua inferiormente.*

Demonstração. Considere $A_c = \{x \in M; s_u(x) > c\}$. Se $x \in A_c$, existe uma vizinhança V de x tal que $u\Big|_V \in H^r$, com $r > c$. Dado $y \in V$, temos pela definição que $s_u(y) \geq r > c$. Logo A_c é aberto. □

O restante desta seção será dedicado à demonstração do resultado abaixo.

Teorema 11. *Se $u \in \mathcal{D}'(M)$ e $Lu = f$, então $\min\{s_u, s\}$ é uma função superharmônica se s é superharmônica e $s_f \geq s$.*

Demonstração. Pelo que foi discutido na demonstração da Proposição 10, podemos assumir que M é um aberto de $\mathbb{R}^n$ e

$$L = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} + i\frac{\partial}{\partial x_n},$$

pois a é uma função suave que nunca se anula.

Pela Definição 8, precisamos apenas atestar que a função é superharmônica em cada folha. Cada uma destas é uma superfície de Riemann (variedade complexa de dimensão 1), que podemos considerar localmente definida em $\{w\} \times \mathbb{C}$, com $w \in \mathbb{R}^{n-2}$.

Sem perda de generalidade, vamos supor que $w = 0$ e considerar um disco de raio r centrado em $z = 0$. Com isto, $\min(s_u, s)(0, z)$ será superharmônica se, e somente se, para qualquer h harmônica em $\{|z| < r\}$ de modo que $\min(s_u, s)(0, z) \geq h(z)$ se $|z| = r$, então $\min(s_u, s)(0, z) \geq h(z)$ quando $|z| < r$.

Proposição 12. *Tomando h uma função como definido logo acima, são equivalentes:*

1. $\min(s_u, s)(0, z)$ *é superharmônica.*
2. *Se* $\min(s_u, s)(0, z) > h(z)$ *para* $|z| = r$, *então* $\min(s_u, s)(0, z) > h(z)$ *quando* $|z| < r$.
3. *Se* $\min(s_u, s)(0, z) > h(z)$ *para* $|z| = r$, *então* $\min(s_u, s)(0, z) \geq h(z)$ *quando* $|z| < r$.

Demonstração.

1 ⇒ 2. Suponha que $\min(s_u, s)(0, z) - h(z) > 0$ em $\{|z| = r\}$. Como o conjunto é compacto e $\min(s_u, s) - h$ é semicontínua inferiormente, esta assume mínimo. Ou seja, existe $\varepsilon > 0$ de modo que $\min(s_u, s)(0, z) - h(z) \geq \varepsilon$ em $\{|z| = r\}$.

Pela hipótese, deduzimos que $\min(s_u, s)(0, z) - h(z) \geq \varepsilon$ quando $|z| < r$, e consequentemente $\min(s_u, s)(0, z) > h(z)$ em $\{|z| < r\}$.

2 ⇒ 3. Trivial.

3 ⇒ 1. Consideramos que $\min(s_u, s)(0, z) \geq h(z)$ quando $|z| = r$. Para todo $\varepsilon > 0$, obtemos $\min(s_u, s)(0, z) > h(z) - \varepsilon$ no mesmo conjunto. Aplicando a hipótese, $\min(s_u, s)(0, z) \geq h(z) - \varepsilon$ em $\{|z| < r\}$. Como ε é arbitrário, inferimos que $\min(s_u, s)(0, z) \geq h(z)$ para $|z| \leq r$, o que comprova a afirmação.

□

Voltamos à prova do Teorema 11 com a hipótese de que vale

$$\min(s_u, s)(0, z) > h(z), \quad |z| = r, \tag{5.2}$$

e demonstraremos que a desigualdade estrita continua valendo para $|z| < r$.

Visto que s é superharmônica por definição, precisamos demonstrar a propriedade apenas para s_u. Defina

$$v = \chi_1 \chi_2 u, \quad \chi_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-2}),\ \chi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{C}); \tag{5.3}$$

onde $\chi_1(0) = 1$, enquanto que $\chi_2 \equiv 1$ em $\{|z| \leq r\}$. Neste caso,

$$\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = \chi_1 \chi_2 f + \chi_1 \frac{\partial \chi_2}{\partial \bar{z}} u \doteq g. \tag{5.4}$$

Proposição 13. $s_g(x', z) > h(z)$, *para todo* $(x', z) \in M$.

Demonstração. Como a função $\min\{s_u, s\}$ é semicontínua inferiormente e $\min\{s_u, s\}(0, z) > h(z)$ para $|z| = r$, existem $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ de modo que

$$\min\{s_u, s\}(x', z) > h(z), \quad \forall\ |x'| < \varepsilon_1,\ r - \varepsilon_2 < |z| < r + \varepsilon_2. \tag{5.5}$$

Pela superharmonicidade de s,

$$s(x', z) > h(x), \quad \forall\ |x'| < \varepsilon_1,\ |z| < r + \varepsilon_2. \tag{5.6}$$

Analisamos a equação (5.4): $\dfrac{\partial \chi_2}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ no conjunto $\{|z| \leq r\}$, o que nos mostra que $s_g(x', z) \geq s_f(x', z)$ para $|z| \leq r$. Assim, unindo (5.6) com a hipótese de que $s_f \geq s$,

$$s_g(x', z) > h(z), \quad \forall\ |x'| < \varepsilon_1,\ |z| \leq r. \tag{5.7}$$

Note bem: (5.5) implica que $\min\{s_u, s_f\}(x', z) > h(z)$ para $|x'| < \varepsilon_1$ e $r < |z| < r + \varepsilon_2$. Juntando o fato de que $s_g \geq \min\{s_u, s_f\}$ com (5.7),

$$s_g(x', z) > h(z), \quad \forall\ |x'| < \varepsilon_1,\ |z| < r + \varepsilon_2. \tag{5.8}$$

Por fim, escolhemos χ_1 e χ_2 que se anulem quando $|x'| \geq \varepsilon_1/2$ e $|z| \geq r + \varepsilon_2/2$ respectivamente. □

A seguir, usaremos as notações usuais para o cálculo de operadores pseudodiferenciais. O espaço de símbolos de tipo (ρ, δ) e ordem m será denotado por $S^m_{(\rho,\delta)}$. Enquanto que a classe de operadores pseudodiferenciais de mesmo tipo e ordem será denotada por $\Psi^m_{(\rho,\delta)}$. Recomendamos [Hör71] e [Trè80] como referências para a teoria.

Tome uma função F holomorfa em $\mathbb{C}$ de modo que $Re\ F = h$ e defina como Q o operador pseudo-diferencial cujo símbolo é dado por

$$Q(x, \xi) = (1 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2)^{\frac{F(z)}{2}} = (1 + |\xi|^2)^{\frac{F(z)}{2}} \tag{5.9}$$

Proposição 14. $\dfrac{\partial (Qv)}{\partial \bar{z}} = Qg.$

Demonstração. Se $w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos:

$$Q(w)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\int e^{i.\langle x-y,\xi\rangle} (1 + |\xi|^2)^{\frac{F(z)}{2}} w(y)\ dy\ d\xi \tag{5.10}$$

Derivando sob o sinal da integral,

$$\frac{\partial (Qw)}{\partial x_{n-1}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\int \left[e^{i.\langle x-y,\xi\rangle} (1 + |\xi|^2)^{\frac{F(z)}{2}} w(y)\right] \left[i\xi_{n-1} + \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} \log(1 + |\xi|^2)\right]\ dy\ d\xi$$

$$\frac{\partial (Qw)}{\partial x_n}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\int \left[e^{i.\langle x-y,\xi\rangle} (1 + |\xi|^2)^{\frac{F(z)}{2}} w(y)\right] \left[i\xi_n + \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_n} \log(1 + |\xi|^2)\right]\ dy\ d\xi$$

Fazendo a multiplicação da segunda equação por i, a soma das duas e aplicando o fato de F ser holomorfa, segue que

$$\frac{\partial (Qw)}{\partial \bar{z}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\int \left[e^{i.\langle x-y,\xi\rangle} (1 + |\xi|^2)^{\frac{F(z)}{2}} w(y)\right] \cdot \frac{1}{2}\left[i\xi_{n-1} - \xi_n\right]\ dy\ d\xi. \tag{5.11}$$

Em contrapartida,

$$
\begin{aligned}
Q\left(\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right)(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int\int e^{i.\langle x-y,\xi\rangle}(1+|\xi|^2)^{\frac{F(z)}{2}}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{\partial w}{\partial y_{n-1}}+i\frac{\partial w}{\partial y_n}\right](y)\ dy\ d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{i.\langle x,\xi\rangle}(1+|\xi|^2)^{\frac{F(z)}{2}}\int e^{i.\langle -y,\xi\rangle}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{\partial w}{\partial y_{n-1}}+i\frac{\partial w}{\partial y_n}\right](y)\ dy\ d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{i.\langle x,\xi\rangle}(1+|\xi|^2)^{\frac{F(z)}{2}}\cdot\frac{1}{2}\int e^{i.\langle -y,\xi\rangle}\left(\frac{\partial w}{\partial y_{n-1}}\right)(y)\ dy\ d\xi\ + \\
&+ \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{i.\langle x,\xi\rangle}(1+|\xi|^2)^{\frac{F(z)}{2}}\cdot\frac{i}{2}\int e^{i.\langle -y,\xi\rangle}\left(\frac{\partial w}{\partial y_n}\right)(y)\ dy\ d\xi
\end{aligned}
$$

.

Não obstante,

$$
\int e^{i.\langle -y,\xi\rangle}\left(\frac{\partial w}{\partial y_{n-1}}(y)\right)dy = i\xi_{n-1}\int e^{i.\langle -y,\xi\rangle}w(y)dy \quad \text{e}
$$

$$
\int e^{i.\langle -y,\xi\rangle}\left(\frac{\partial w}{\partial y_n}(y)\right)dy = i\xi_n\int e^{i.\langle -y,\xi\rangle}w(y)dy.
$$

Logo,

$$
Q\left(\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\int\left[e^{i.\langle x-y,\xi\rangle}(1+|\xi|^2)^{\frac{F(z)}{2}}w(y)\right]\cdot\frac{1}{2}\left[i\xi_{n-1}-\xi_n\right]dy\ d\xi. \tag{5.12}
$$

Por extensão, a igualdade também segue para v, como queríamos provar.

□

Proposição 15. *Para todo x e todo $0<\rho<1$, $Q\in\Psi^t_{(\rho,1-\rho)}$ em uma vizinhança de x se $h(x'')<t$, com $x''=(x_{n-1},x_n)$.*

Demonstração. Nosso ponto de partida é obter a estimativa sem qualquer derivada.

$$
Q(x,\xi) = (1+|\xi|^2)^{\frac{F(z)}{2}} = exp\left[\tfrac{F(z)}{2}\log\left(1+|\xi|^2\right)\right].
$$

Assim,

$$
|Q(x,\xi)| = \left|exp\left[\tfrac{F(z)}{2}\log\left(1+|\xi|^2\right)\right]\right| = exp\left[\tfrac{h(z)}{2}\log\left(1+|\xi|^2\right)\right] = (1+|\xi|^2)^{\frac{h(z)}{2}} < (1+|\xi|^2)^{\frac{t}{2}}
$$

e consequentemente

$$
|Q(x,\xi)| \leq C\left(1+|\xi|\right)^t. \tag{5.13}
$$

Vejamos o que acontece quando derivamos em ξ:

$$
\partial_{\xi_j}Q(x,\xi) = Q(x,\xi)\left[\frac{F(z)}{2}.\frac{2\xi_j}{1+|\xi|^2}\right] \implies \left|\partial_{\xi_j}Q(x,\xi)\right| \leq C\left(1+|\xi|\right)^{t-1}.
$$

Generalizemos este resultado: afirmamos que $\left|D_\xi^\alpha Q(x,\xi)\right| \leq C(1+|\xi|)^{t-|\alpha|},\ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

Provaremos por indução em $|\alpha|$. Já demonstramos o caso em que $|\alpha| = 0$ e supomos verdadeiro para $|\alpha| \leq j$. Se $|\alpha| = j+1$,

$$\begin{aligned}\partial_\xi^\alpha Q(x,\xi) &= \partial_\xi^\beta \partial_{\xi_i}(Q(x,\xi)) = F(z).\partial_\xi^\beta \left[Q(x,\xi)\left(\frac{\xi_i}{1+|\xi|^2}\right)\right] \\ &= F(z).\sum_{\gamma\leq\beta}\begin{pmatrix}\beta\\ \gamma\end{pmatrix}\partial_\xi^{\beta-\gamma}\left(Q(x,\xi)\right).\partial_\xi^\gamma\left(\frac{\xi_i}{1+|\xi|^2}\right).\end{aligned}$$

Note que $p_1(\xi) = 1+|\xi|^2 \in S^2_{(1,0)} \implies p_2(\xi) = \dfrac{\xi_i}{1+|\xi|^2} \in S^{-1}_{(1,0)}$. Portanto,

$$\begin{aligned}|\partial_\xi^\alpha Q(x,\xi)| &\leq C_1 \sum_{\gamma\leq\beta}\begin{pmatrix}\beta\\ \gamma\end{pmatrix}\left|\partial_\xi^{\beta-\gamma}\left(Q(x,\xi)\right)\right|.\left|\partial_\xi^\gamma\left(\frac{\xi_i}{1+|\xi|^2}\right)\right| \\ &\leq C_1 \sum_{\gamma\leq\beta}\begin{pmatrix}\beta\\ \gamma\end{pmatrix} C_2\left(1+|\xi|\right)^{t-|\beta|+|\gamma|}.C_3\left(1+|\xi|\right)^{-1-|\gamma|} \\ &\leq C\left(1+|\xi|\right)^{t-1-|\beta|} \\ &\leq C\left(1+|\xi|\right)^{t-|\alpha|}.\end{aligned}$$

O próximo passo é verificar o comportamento de $D_x^\beta Q(x,\xi)$:

$$\partial_{x_j} Q(x,\xi) = \log(1+|\xi|^2)\cdot Q(x,\xi)\cdot\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_j}(x)$$

$$\partial_{x_k}\partial_{x_j} Q(x,\xi) = \log(1+|\xi|^2)\cdot Q(x,\xi)\cdot\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial_k}(x) + \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_j}(x)\cdot\frac{\partial F}{\partial x_k}(x)\log(1+|\xi|^2)\right].$$

Para seguir com a prova da Proposição 15, nos utilizaremos do lema a seguir:

Lema 4. *Para $\beta \neq 0$, $\partial_x^\beta Q(x,\xi) = \log(1+|\xi|^2)\cdot Q(x,\xi)\left[\sum_{j=0}^{|\beta|-1} G_{\beta,j}(x)\left(\log(1+|\xi|^2)\right)^j\right]$, onde cada $G_{\beta,j}$ é uma função de classe C^∞.*

Demonstração. Provaremos por indução em $|\beta| = n$. Os casos $n = 1, 2$ são exibidos logo acima. Consideramos então que vale para $n = p$, e provaremos que vale para $n = p+1$.

$$
\begin{aligned}
\partial_x^\beta Q(x,\xi) &= \partial_{x_k}\partial_x^\gamma(Q(x,\xi)) = \\
&= \partial_{x_k}\left[\log(1+|\xi|^2)\cdot Q(x,\xi)\cdot\left(\sum_{j=0}^{|\gamma|-1} G_{\gamma,j}(x)\left(\log(1+|\xi|^2)\right)^j\right)\right] = \\
&= \left[\log(1+|\xi|^2)\cdot Q(x,\xi)\cdot\left(\sum_{j=0}^{|\gamma|-1} \frac{\partial G_{\gamma,j}}{\partial_{x_k}}(x)\left(\log(1+|\xi|^2)\right)^j\right)\right] + \\
&+ \left[\log(1+|\xi|^2)\cdot\left(\log(1+|\xi|^2)\cdot Q(x,\xi)\cdot\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_k}(x)\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{|\gamma|-1} G_{\gamma,j}(x)\left(\log(1+|\xi|^2)\right)^j\right)\right].
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\partial_x^\beta Q(x,\xi) &= \log(1+|\xi|^2)Q(x,\xi)\left\{\sum_{j=1}^{|\gamma|-1}\left[\left(\frac{\partial G_{\gamma,j}}{\partial_{x_k}}(x)+\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_k}(x)\cdot G_{\gamma,(j-1)}(x)\right)\left(\log(1+|\xi|^2)\right)^j\right]\right\} + \\
&+ \log(1+|\xi|^2)Q(x,\xi)\cdot\left(\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_k}(x)\cdot G_{\gamma,(|\gamma|-1)}(x)\cdot\left(\log(1+|\xi|^2)\right)^{|\gamma|}\right) + \\
&+ \log(1+|\xi|^2)Q(x,\xi)\cdot\left(\frac{\partial G_{\gamma,0}}{\partial_{x_k}}(x)\right).
\end{aligned}
$$

Se $G_{\beta,0} \doteq \dfrac{\partial G_{\gamma,0}}{\partial_{x_k}}$, $G_{(\beta,|\beta|-1)} \doteq \left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial x_k}\cdot G_{\gamma,(|\gamma|-1)}\right)$ e $G_{\beta,j} \doteq \left(\dfrac{\partial G_{\gamma,j}}{\partial_{x_k}}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial x_k}\cdot G_{\gamma,(j-1)}\right)$ para $1 \le j \le |\beta|-2$, concluímos a prova.

□

Estamos preparados para estimar $D_x^\beta D_\xi^\alpha Q(x,\xi)$. Com tal finalidade, temos de estudar a função $\varphi(\xi) \doteq \log(1+|\xi|^2)$. Da regra de L'Hospital, segue que

$$
\lim_{|\xi|\to\infty}\frac{(\varphi(\xi))^r}{|\xi|^a} = 0,\ \forall a>0,\ \forall r\in\mathbb{N}. \tag{5.14}
$$

Derivando em ξ apenas uma vez, decorre que $\partial_{\xi_j}\varphi(\xi) = \dfrac{\xi_j}{1+|\xi|^2}$, que já temos ciência de pertencer a $S^{-1}_{(1,0)}$. Destas afirmações inferimos que

$$
\varphi(\xi)\in S^a_{(1,0)},\ \forall a>0. \tag{5.15}
$$

Outro ponto a ser observado é que (5.15) também vale claramente para potências naturais de $\varphi(\xi)$. Assim, se $|\beta|\ge 1$,

$$
\begin{aligned}
\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha Q(x,\xi) &= \partial_\xi^\alpha \left[\log(1+|\xi|^2)\cdot Q(x,\xi)\cdot \left(\sum_{j=0}^{|\beta|-1} G_{\beta,j}(x)\left(\log(1+|\xi|^2)\right)^j \right)\right] \\
&= \partial_\xi^\alpha \left[Q(x,\xi)\cdot \left(\sum_{j=0}^{|\beta|-1} G_{\beta,j}(x)\left(\log(1+|\xi|^2)\right)^{j+1} \right)\right] \\
&= \sum_{\lambda\le\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \lambda \end{pmatrix} \left(\partial_\xi^\lambda Q(x,\xi)\right)\cdot \partial_\xi^{\alpha-\lambda} \left(\sum_{j=0}^{|\beta|-1} G_{\beta,j}(x)\left(\log(1+|\xi|^2)\right)^{j+1} \right) \\
&= \sum_{\lambda\le\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \lambda \end{pmatrix} \left(\partial_\xi^\lambda Q(x,\xi)\right)\cdot \left(\sum_{j=0}^{|\beta|-1} G_{\beta,j}(x)\cdot \partial_\xi^{\alpha-\lambda}\left[\left(\log(1+|\xi|^2)\right)^{j+1}\right] \right).
\end{aligned}
$$

Consequentemente, fixando $K \subset M$ compacto, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ e $a > 0$:

$$
\begin{aligned}
|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha Q(x,\xi)| &\le \sum_{\lambda\le\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \lambda \end{pmatrix} \left|\partial_\xi^\lambda Q(x,\xi)\right| \cdot \left(\sum_{j=0}^{|\beta|-1} |G_{\beta,j}(x)|\cdot \left|\partial_\xi^{\alpha-\lambda}\left[\left(\log(1+|\xi|^2)\right)^{j+1}\right]\right| \right) \\
&\le \sum_{\lambda\le\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \lambda \end{pmatrix} C_\lambda (1+|\xi|)^{t-|\lambda|}\cdot \left(\sum_{j=0}^{|\beta|-1} C_{\beta,j}\cdot C_{\alpha-\lambda,j}\cdot (1+|\xi|)^{a-|\alpha|+|\lambda|} \right) \\
&\le C\cdot (1+|\xi|)^{t+a-|\alpha|} \\
&\le C\cdot (1+|\xi|)^{t+a-\rho\cdot|\alpha|}, \qquad 0<\rho<1.
\end{aligned}
$$

Selecionando $a = (1-\rho)|\beta|$, alcançamos êxito na estimativa desejada para $|\beta| \ge 1$. Por já haver mostrado que ela também é válida no caso nulo, encerramos a prova da Proposição 15.

□

Voltemos à demonstração do Teorema 11. Associando a Proposição 15 (para $\rho > 1/2$) com a Proposição 13, obtemos que $Qg \in H^0_{\text{loc}} \Rightarrow Qg \in L^2_{\text{loc}}$. Se $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é identicamente 1 em uma vizinhança de *supp* v, escrevemos $w \doteq \chi Q v$ e

$$
\frac{\partial w}{\partial \bar z} = \frac{\partial \chi}{\partial \bar z} Qv + \chi \frac{\partial (Qv)}{\partial \bar z} = \frac{\partial \chi}{\partial \bar z} Qv + \chi Q g,
$$

utilizando a Proposição 14. Mas Q é pseudolocal, isto é,

$$
\textit{supp sing}(Qv) \ \subset \textit{supp sing}(v).
$$

Por $\dfrac{\partial \chi}{\partial \bar z}$ se anular no suporte de v, deduzimos que $\dfrac{\partial \chi}{\partial \bar z} Qv \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, e particularmente em L^2. Logo $\dfrac{\partial w}{\partial \bar z} \in L^2$, dado que $\chi Q g$ também é L^2.

Afirmamos que $w \in L^2$; reiteramos que w é uma distribuição cujo suporte é compacto, e recorremos ao Teorema 1. Se $P(D) = \dfrac{\partial}{\partial \bar z}$ e $P(D)w \in L^2$, isto nos diz que $P(D)w \in B_{2,k}$ com $k \equiv 1$. Assim $w \in B_{2,\widetilde{P}}$, com $\widetilde{P}(\xi) = \sqrt{2 + {\xi_{n-1}}^2 + {\xi_n}^2}$. Como consequência,

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int (2+{\xi_{n-1}}^2+{\xi_n}^2)|\mathcal{F}(w)(\xi)|^2 d\xi < \infty \ \Rightarrow \mathcal{F}(w)\in L^2 \ \Rightarrow w\in L^2,$$

pelo Teorema de Plancherel.

Escrevemos assim $Qv = \chi Qv + (1-\chi)Qv = \underbrace{w}_{\in L^2} + \underbrace{(1-\chi)Qv}_{\in C^\infty}$, o que comprova que $Qv \in L^2_{\text{loc}}$.

Proposição 16. *$v \in H^\tau$ em uma vizinhança de x sempre que $\tau < h(x'')$.*

Demonstração. Seja $\widetilde{Q}$ o operador pseudo-diferencial cujo símbolo é

$$\widetilde{Q}(x,\xi) = (1+\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2)^{\frac{-F(z)}{2}} = (1+|\xi|^2)^{\frac{-F(z)}{2}}. \tag{5.16}$$

Com argumentos análogos aos que foram feitos na Proposição 15, temos para todo x e todo $0<\rho<1$, $\widetilde{Q}\in\Psi^\sigma_{(\rho,1-\rho)}$ em uma vizinhança de x se $\sigma > -h(x'')$. Estudemos então a composição $\widetilde{Q}\circ Q$; denominando por $q(x,\xi)$ seu símbolo,

$$\begin{aligned} q(x,\xi) &\approx \sum_{|\alpha|\geq 0}\frac{1}{\alpha!}\left(\partial_\xi^\alpha \widetilde{Q}(x,\xi)\right)\cdot(D_x^\alpha Q(x,\xi)) \\ &\approx 1+\sum_{|\alpha|\geq 1}\frac{1}{\alpha!}\left(\partial_\xi^\alpha \widetilde{Q}(x,\xi)\right)\cdot(D_x^\alpha Q(x,\xi)). \end{aligned}$$

Lema 5. *Dado $\alpha\in\mathbb{Z}^n_+$, $\frac{1}{\alpha!}\left(\partial_\xi^\alpha \widetilde{Q}(x,\xi)\right)\cdot(D_x^\alpha Q(x,\xi))$ pertence a $S^{a-|\alpha|}_{(1,0)}$, para cada $a>0$.*

Demonstração. Provaremos o resultado através da seguinte indução em $n=|\alpha|$: dado $a>0$,

- $D_x^\alpha Q(x,\xi) = \underbrace{G_\alpha(x,\xi)}_{\in S^{a/2}_{(1,0)}}\cdot exp\left[\frac{F(z)}{2}\log\left(1+|\xi|^2\right)\right]$
- $\partial_\xi^\alpha \widetilde{Q}(x,\xi) = \underbrace{H_\alpha(x,\xi)}_{\in S^{a/2-|\alpha|}_{(1,0)}}\cdot exp\left[\frac{-F(z)}{2}\log\left(1+|\xi|^2\right)\right]$

Quando $n=0$, $G_\alpha(x,\xi)=H_\alpha(x,\xi)\equiv 1$ que é um elemento de $S^0_{(1,0)}$. Suponha a afirmação verdadeira para $n=k$. Se $|\alpha|=k+1$ e $b>0$,

$$
\begin{aligned}
D_x^\alpha Q(x,\xi) &= D_x^{e_j} D_x^\beta Q(x,\xi) \\
&= D_x^{e_j}\left[G_\beta(x,\xi)\cdot\ e^{\left(\frac{F(z)}{2}\log\left(1+|\xi|^2\right)\right)}\right] \\
&= D_x^{e_j} G_\beta(x,\xi)\cdot\ e^{\left(\frac{F(z)}{2}\log\left(1+|\xi|^2\right)\right)} + G_\beta(x,\xi)\cdot D_x^{e_j}\left[e^{\left(\frac{F(z)}{2}\log\left(1+|\xi|^2\right)\right)}\right] \\
&= \left[\underbrace{D_x^{e_j}\left(G_\beta(x,\xi)\right)}_{\in S^{b/2}_{(1,0)}} + \underbrace{G_\beta(x,\xi)}_{\in S^{b/2}_{(1,0)}}\cdot \underbrace{D_x^{e_j}\left(\frac{F(z)}{2}\right)\cdot\log\left(1+|\xi|^2\right)}_{\in S^{b/2}_{(1,0)}}\right]\cdot\ e^{\left(\frac{F(z)}{2}\log\left(1+|\xi|^2\right)\right)}.
\end{aligned}
$$

Assim, $G_\alpha(x,\xi) = \left[D_x^{e_j}\left(G_\beta(x,\xi)\right) + G_\beta(x,\xi)\cdot D_x^{e_j}\left(\frac{F(z)}{2}\right)\cdot\log\left(1+|\xi|^2\right)\right] \in S^b_{(1,0)}$. Analogamente,

$$
\begin{aligned}
\partial_\xi^\alpha \widetilde{Q}(x,\xi) &= \partial_\xi^{e_j}\partial_\xi^\beta \widetilde{Q}(x,\xi) \\
&= \partial_\xi^{e_j}\left[H_\beta(x,\xi)\cdot\ e^{\left(\frac{-F(z)}{2}\log\left(1+|\xi|^2\right)\right)}\right] \\
&= \partial_\xi^{e_j} H_\beta(x,\xi)\cdot\ e^{\left(\frac{-F(z)}{2}\log\left(1+|\xi|^2\right)\right)} + H_\beta(x,\xi)\cdot\partial_\xi^{e_j}\left[e^{\left(\frac{-F(z)}{2}\log\left(1+|\xi|^2\right)\right)}\right] \\
&= \left[\underbrace{\partial_\xi^{e_j}\left(H_\beta(x,\xi)\right)}_{\in S^{b/2-|\beta|-1}_{(1,0)}} + \underbrace{H_\beta(x,\xi)}_{\in S^{b/2-|\beta|}_{(1,0)}}\cdot \underbrace{\left(\frac{-F(z)}{2}\right)\cdot\partial_\xi^{e_j}\left(\log\left(1+|\xi|^2\right)\right)}_{\in S^{b/2-1}_{(1,0)}}\right] e^{\left(\frac{-F(z)}{2}\log\left(1+|\xi|^2\right)\right)}.
\end{aligned}
$$

Portanto, $H_\alpha(x,\xi) = \left[\partial_\xi^{e_j}\left(H_\beta(x,\xi)\right) + H_\beta(x,\xi)\cdot\left(\frac{-F(z)}{2}\right)\cdot\partial_\xi^{e_j}\log\left(1+|\xi|^2\right)\right] \in S^{b-|\alpha|}_{(1,0)}$.

Finalizamos a indução se estabelecemos $b = a/2$. Para provar o Lema, basta checar que

$$
\frac{1}{\alpha!}\left(\partial_\xi^\alpha \widetilde{Q}(x,\xi)\right)\cdot\left(D_x^\alpha Q(x,\xi)\right) = \frac{1}{\alpha!}G_\alpha(x,\xi)\cdot H_\alpha(x,\xi).
$$

□

Retornamos à prova da Proposição 16. Pelo Lema 5, podemos escrever

$$
\widetilde{Q}\circ Q = I + P, \tag{5.17}
$$

onde I é a identidade e $P \in \Psi^{-1/2}_{(1,0)}$. Fixe agora $\tau < h(x'')$.

Repare que $\widetilde{Q} \in \Psi^{-\tau}_{(\rho,1-\rho)}$ e v tem suporte compacto. Assim, existe $s \in \mathbb{R}$ de modo que $v \in H^s$.

Como $Qv \in L^2_{\text{loc}}$, por continuidade obtemos que $\widetilde{Q}Qv \in H^{\tau}_{\text{loc}}$. Recorrendo a (5.17),

$$v = \underbrace{\widetilde{Q}Qv}_{\in H^{\tau}_{\text{loc}}} - \underbrace{Pv}_{\in H^{s+1/2}_{\text{loc}}} . \tag{5.18}$$

Se $s + \frac{1}{2} < \tau$, então $v \in H^{s+1/2}$. Repetimos o processo até o momento em que $s + \frac{1}{2}$ for maior do que τ. Deduzimos por fim que $v \in H^{\tau}$, o que completa a prova da Proposição 16.

□

Finalmente, estamos prontos para concluir a demonstração do Teorema 11. Para isto, baste verificar que a proposição acima comprova que $s_u(0, z) \geq h(z)$ quando $|z| \leq r$.

□

Observação I: Se $a \in C^{\infty}(M)$ e $(L + a)u = f$, a mesma conclusão do Teorema 11 é válida. De fato, a afirmação é local e se b é função suave tal que $Lb = a$ em uma vizinhança, podemos utilizar o resultado com $v = e^b u$ e $g = e^b f$. Afinal,

$$L(v) = e^b \cdot L(u) + L(e^b) \cdot u = e^b \left(L(u) + uL(b)\right) = e^b(L + a)u = fe^b = g$$

e a regularidade de u, v e f, g são as mesmas para todo ponto.

Observação II: Quando f é C^{∞}, podemos tomar $s \equiv +\infty$ e consequentemente s_u é superharmônica.

5.2 Propagação de Singularidades e de Suportes nas Folhas

Nas duas proposições a seguir, a é um elemento de $C^{\infty}(M)$.

Proposição 17. *Seja $u \in \mathcal{D}'(M)$ e $(L+a)u = f$. Então $(\textit{sing supp } u) \cap \complement(\textit{sing supp } f)$ é invariante sob a L-folheação em $\complement(\textit{sing supp } f)$. Isto é, se $x \in (\textit{sing supp } u) \cap \complement(\textit{sing supp } f)$, a componente conexa da folha que passa por x em $\complement(\textit{sing supp } f)$ está contida em sing supp u.*

Demonstração. Inicialmente, recordamos o seguinte fato: em um aberto conexo, se f é uma função subharmônica e não é identicamente igual $+\infty$, o conjunto $\{y; f(y) = +\infty\}$ possui medida nula.

Sejam $x \in \textit{sing supp } u \cap \complement(\textit{sing supp } f)$, $\mathcal{L}_x$ a folha da L-folheação que passa por x e C_x a componente conexa de $\mathcal{L}_x \cap \complement(\text{sing supp } f)$ que contém x. Como $\complement(\text{sing supp } f)$ é aberto, os conjuntos $\mathcal{L}_x \cap \complement(\text{sing supp } f)$ e C_x são abertos de $\mathcal{L}_x$.

Definindo $M_1 = \complement(\text{sing supp } f)$, segue que $f\big|_{M_1} \in C^{\infty}(M_1)$. Pelo Teorema 11, s_u é uma função superharmônica em C_x. Suponha, por contradição, existir $y_0 \in \complement(\text{sing supp } u)$ pertencente a $\mathcal{C}_x$. Teríamos assim um aberto U em C_x tal que $s_u(y) = \infty$ para todo $y \in U$, o que contradiz o fato de que $s_u(x) \neq \infty$.

□

Proposição 18. *Seja $u \in \mathcal{D}'(M)$ e $(L + a)u = f$. Então supp $u \cap \complement(\textit{supp } f)$ é invariariante sob a L-folheação em $\complement(\textit{supp } f)$.*

Demonstração. Sejam $x \in supp\ u\ \cap \complement(supp\ f)$, $\mathcal{F}_x$ a folha da L-folheação que passa por x e C_x a componente conexa de $\mathcal{F}_x \cap \complement(\text{supp } f)$ que contém x.

Considere, por contradição, a existência de $w \in C_x$ tal que $w \in \complement(supp\ u)$; inferimos da Proposição 17 que $s_u = \infty$ em C_x, e portanto u é uma função em um aberto $\mathcal{U} \subset M$ que contém C_x.

Seja b uma solução local de $Lb = a$. Como já argumentado anteriormente, $L(e^b u) = e^b f$. Assim, fixado $y \in C_x$, existe uma vizinhança $\mathcal{V} \ni y$ de M de maneira que $\dfrac{\partial e^b u}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ em $\mathcal{V}$. Ou seja, $e^b u\big|_{\mathcal{V} \cap C_x}$ é holomorfa.

Quando y pertence ao suporte de u, deduzimos por continuação analítica que $\mathcal{V} \cap C_x \subset supp\ u$, já que $supp\ e^b u = supp\ u$. Isto é, $C_x \cap supp\ u$ é um conjunto aberto e fechado. Temos deste modo um absurdo, visto que $x \in supp\ u$, $w \in \complement(supp\ u)$ e C_x é conexo. Portanto $C_x \subset supp\ u$.

□

Uma consequência imediata da Proposição 17 é o caso em que $f \in C^\infty(M)$. Em tal situação, $\complement sing\ supp\ f = M$ e $C_x = \mathcal{F}_x$, pois toda folha é um conjunto conexo. Analogamente, se $f = 0$ e $x \in supp\ u$, inferimos da Proposição 18 que $\mathcal{F}_x$ está inteiramente contida em $supp\ u$.

Capítulo 6

A Topologia em $C^\infty(M)$

Após mostrar que L é sempre um operador *"resolúvel em cada ponto de M"*, nossos próximos passos serão estudar a resolubilidade do campo em subconjuntos compactos e finalmente na variedade toda.

Para tal objetivo, existe a necessidade de se impor uma topologia no conjunto das funções $f : M \to \mathbb{C}$ de classe C^∞. A questão de analisar quando o campo é globalmente resolúvel no caso suave, por exemplo, passa por verificar a sobrejetividade do operador linear $L : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$.

Com um enorme arsenal de resultados da Análise Funcional em nossas mãos para os mais diversos tipos de espaços de funções, colocar uma topologia adequada em $C^\infty(M)$ facilitará imensamente nosso trabalho. Seguimos para a construção.

Tome uma sequência g_j de funções em $C^\infty(M)$ cujo suporte é compacto, de maneira que:

- Para cada $j \in \mathbb{Z}^+$, temos: $supp\ g_j \subset\ \Omega_{j+1}$
- $\Omega_0 \subset \Omega_1 \subset \ldots \Omega_n\ \subset \ldots \nearrow M$,

onde $\Omega_j \doteq \operatorname{int}\{x \in M; g_j(x) = 1\}$.

A topologia de $C^\infty(M)$ será dada então pela seguinte família de seminormas:

$$f \longmapsto \|g_k f\|_k\,, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+; \tag{6.1}$$

onde $\|.\|_k$ é a norma de Sobolev de ordem k. Para calcular a norma acima, escolhemos um conjunto finito de cartas $(\varphi_{ij}, U_{ij}),\ i = 1, \ldots, m$ tal que $supp\ g_j \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{ij}$ e tomamos uma partição da unidade χ_{ij} subordinada à cobertura. Portanto

$$\|g_j f\|_k \doteq \sum_{i=1}^{m} \left\| (\chi_{ij} \cdot g_j f) \circ \varphi_{ij}^{-1} \right\|_j \tag{6.2}$$

Supondo outro conjunto de cartas $(\psi_{lj}, V_{lj}),\ l = 1, \ldots, q$ tal que $supp\ g_j \subset \bigcup_{l=1}^{q} V_{lj}$ e uma partição da unidade μ_{lj} subordinada, afirmamos que a norma analogamente construída, que denominaremos $\|.\|_j^{'}$, é equivalente à primeira.

De fato,

$$\begin{aligned}
\|g_j f\|_j^{'} &= \sum_{l=1}^{q} \left\| (\mu_{lj} \cdot g_j f) \circ \psi_{lj}^{-1} \right\|_j \\
&= \sum_{l=1}^{q} \left\| \sum_{i=1}^{m} (\chi_{ij} \cdot \mu_{lj} \cdot g_j f) \circ \psi_{lj}^{-1} \right\|_j \\
&\leq \sum_{l=1}^{q} \sum_{i=1}^{m} \left\| (\chi_{ij} \cdot \mu_{lj} \cdot g_j f) \circ \psi_{lj}^{-1} \right\|_j \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{q} C_{il} \left\| (\chi_{ij} \cdot \mu_{lj} \cdot g_j f) \circ \varphi_{ij}^{-1} \right\|_j \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{q} C_{il} \left\| (\chi_{ij} \cdot g_j f) \circ \varphi_{ij}^{-1} \right\|_j \\
&\leq C_1 \sum_{i=1}^{m} \left\| (\chi_{ij} \cdot g_j f) \circ \varphi_{ij}^{-1} \right\|_j \\
&\leq C_1 \|g_j f\|_j .
\end{aligned}$$

Por um processo semelhante, exibimos a existência de $C_2 > 0$ tal que $\|g_j f\|_j \leq C_2 \|g_j f\|_j^{'}$, o que nos permite verificar que as normas são equivalentes. Assim, a topologia dada é bem definida.

Teorema 12. *Com a topologia dada acima, $C^\infty(M)$ é um espaço de Fréchet. Isto é, um espaço vetorial topológico localmente convexo, metrizável e completo.*

Demonstração. A fim de provar a afirmação, temos de encontrar uma norma que gere a mesma topologia e mostrar que o espaço é completo com esta. Definimos

$$\|f\|_* \doteq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \left(\frac{\|g_k f\|_k}{1 + \|g_k f\|_k} \right). \tag{6.3}$$

Precisamos somente verificar que $C^\infty(M)$ é completo com relação a métrica induzida, visto que as outras propriedades desejadas decorrem trivialmente da escolha de $\|.\|_*$. Note bem: f_n é uma sequência de Cauchy com relação a $\|.\|_*$ se e somente se é de Cauchy com relação a toda seminorma $\|g_k.\|_k$.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, suponha existir n_0 tal que $\|f_m - f_n\|_* < \varepsilon,\ \forall m, n \geq n_0$. Repare que

$$\left(\frac{\|g_k(f_m - f_n)\|_k}{1 + \|g_k(f_m - f_n)\|_k} \right) = 1 - \left(\frac{1}{1 + \|g_k(f_m - f_n)\|_k} \right) \leq 2^k \cdot \|f_m - f_n\|_* < 2^k \cdot \varepsilon.$$

Consequentemente,

$$1 - 2^k \varepsilon < \left(\frac{1}{1 + \|g_k(f_m - f_n)\|_k} \right).$$

Quando $\varepsilon < 2^{-(k+1)}$, obtemos

$$1 + \|g_k(f_m - f_n)\|_k < \frac{1}{1 - 2^k \varepsilon},$$

o que nos permite concluir que

$$\|g_k(f_m - f_n)\|_k < \frac{2^k\varepsilon}{1-2^k\varepsilon} < 2^{k+1}\varepsilon. \tag{6.4}$$

Ou seja, f_n é sequência de Cauchy com relação a $\|g_k.\|_k$, para qualquer $k \in \mathbb{Z}^+$.

Em contrapartida, se g_n é uma sequência de Cauchy para cada norma $\|g_k.\|_k$, fixado $\varepsilon > 0$, existem $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\sum_{k=m_0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \left(\frac{\|g_k(f_m - f_n)\|_k}{1 + \|g_k f\|_k} \right) < \sum_{k=m_0}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_{k=0}^{m_0-1} \frac{1}{2^k} \cdot \left(\frac{\|g_k(f_m - f_n)\|_k}{1 + \|g_k f\|_k} \right) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{se } m, n \geq n_0. \tag{6.5}$$

E assim deduzimos que g_n é Cauchy em relação à norma $\|.\|_*$.

Para finalizar, seja h_n uma sequência de Cauchy para $\|.\|_*$. Pelo que provamos acima, fixado $x_0 \in M$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $g_k = 1$ em uma vizinhança coordenada $\mathcal{V}$ de x_0 para todo $k \geq j$. Decorre disto que $\partial^\alpha f_n$ é de Cauchy em $\mathcal{V}$ para qualquer $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ e portanto f_n converge para f, função de classe C^∞ em $\mathcal{V}$.

Através da arbitrariedade de x_0, deduzimos que $f_n \to f$ em $C^\infty(M)$, tal qual desejávamos. □

Verificar que $C^\infty(M)$ é espaço de Fréchet é importante para nossas pretensões, porém ainda não suficiente. Para continuar progredindo, trazemos duas novas definições:

Definição 10. *Um espaço E de Fréchet é chamado **Fréchet-Montel** se todo subconjunto fechado e limitado de E é compacto.*

Seja F um espaço de Fréchet, com topologia dada por uma família crescente de seminormas p_n. Isto é, $p_n(x) \leq p_{n+1}(x),\ \forall\ x \in F, n \in \mathbb{Z}^+$.

Definição 11. *Diremos que F é **Fréchet-Schwartz** se dados $\varepsilon > 0$ e n natural, a n-bola unitária $V_n = \{x \in F; p_n(x) < 1\}$ pode ser coberta com um número finito de $(n-1)$-bolas de raio ε.*

Uma outra topologia usualmente imposta no espaço das funções suaves é dada do seguinte modo: fixamos uma sequência crescente de compactos K_n que exaure a variedade e escolhemos a subsequente família de seminormas:

$$\kappa_n(\psi) = \sup_{j;\ U_j \cap K_n \neq \emptyset} \ \sup_{x \in U_i \cap K_n} \ \sum_{|\beta| \leq n} |D^\beta \psi|, \tag{6.6}$$

onde os conjuntos U_i são abertos coordenados que cobrem M.

Na parte 6 do artigo [AV65], os autores provam que $C^\infty(M)$ é Fréchet-Schwartz com a topologia descrita logo acima. Extraímos ainda do mesmo trabalho as seguintes afirmações:

Proposição 19. *Seja E um espaço de Fréchet-Schwartz. Então:*

- *E é Fréchet-Montel.*
- *Se N é subespaço fechado de E, tanto N como E/N serão Fréchet-Schwartz com respeito à topologia naturalmente induzida em ambos os casos.*

Seja F_1 o espaço de Fréchet do conjunto $C^\infty(M)$ com a topologia definida no início da seção. Considere F_2 o espaço dado pelo mesmo conjunto com a topologia imposta em [AV65].

Proposição 20. *F_1 e F_2 são isomorfos como espaços de Fréchet.*

Demonstração. Definimos a identidade $I : F_1 \to F_2$. Como ambos espaços são Fréchet, existe um teorema da aplicação aberta (Teorema 17.1 de [Trè67b]). Mas a função é trivialmente sobrejetora, sendo assim suficiente verificar que I é contínua.

Fixamos $r_0 \in \mathbb{Z}^+$. Sem perda de generalidade, podemos escolher K_n em 6.6 como $\overline{\Omega_n}$. Decorre disto que

$$C_{r_0} \cdot \|g_{r_0} f\|_{r_0} \leq \kappa_{r_0}(f). \tag{6.7}$$

Em contra partida, pelo Teorema do Mergulho de Sobolev, encontramos s_0 suficientemente grande tal que

$$\kappa_{r_0}(f) = \kappa_{r_0}(g_{r_0} f) \leq C_{s_0} \cdot \|g_{r_0} f\|_{s_0} \leq C_{s_0} \cdot \|g_{s_0} f\|_{s_0}, \tag{6.8}$$

o que completa a prova. □

De agora em diante, iremos nos referir a $C^\infty(M)$ como o espaço de Fréchet-Schwartz (e consequentemente Montel) dado pelas seminormas como em (6.1). Seu dual forte será denotado por $\mathcal{E}'(M)$, podendo ser visto como o espaço das distribuições cujo suporte é compacto.

Retornamos novamente a [AV65]: denotando por p_n a seminorma $f \longmapsto \|g_n f\|_n$, definimos

$$N_n = \{g \in C^\infty(M);\ p_n(g) = 0\}, \tag{6.9}$$

isto é, o núcleo de p_n. Tomando o quociente $\Delta_n \doteq \dfrac{C^\infty(M)}{N_n}$, é fácil notar que

$$\begin{aligned} P_n : \Delta_n &\to \mathbb{R} \\ g &\to p_n(g) \end{aligned}$$

é uma norma neste espaço. Denominaremos por F_n o espaço de Banach dado pelo completamento de Δ_n com a norma P_n.

Um resultado provado no artigo é de que a existem aplicações $\alpha_{n+1} : F_{n+1} \mapsto F_n$ compactas com imagem densa, de modo que $C^\infty(M) \cong \varprojlim F_n$. Ou seja, é o limite projetivo desta sequência de espaços de Banach. Mais ainda, seu dual pode ser descrito como o limite indutivo abaixo:

$$\mathcal{E}'(M) = \varinjlim F'_n, \tag{6.10}$$

onde as aplicações $\alpha'_n : F'_n \mapsto F'_{n+1}$ são compactas e injetoras.

Apesar de interessante do ponto de vista teórico, esta caracterização do dual forte de $C^\infty(M)$ obtida por Andreotti e Vesentini ainda se mostra difícil de trabalhar, pela dificuldade em obter uma boa caracterização dos espaços F'_n.

Por outro lado, se tomamos uma exaustão crescente por compactos K_n, temos ciência de que como conjuntos

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} F'_n = \mathcal{E}'(M) = \bigcup_{n=0}^{\infty} H^{-n}(K_n). \tag{6.11}$$

Observe também que as inclusões $I_n : H^{-n}(K_n) \hookrightarrow H^{-(n+1)}(K_{n+1})$ são injetoras e compactas, pelo Teorema de Rellich.

Se $\mathcal{G} \doteq \varinjlim H^{-n}(K_n)$, segue do Teorema 17 de [Kom67] que $\mathcal{G}$ é um espaço DFS. Em outras palavras, um dual de um espaço Fréchet-Schwartz. Sabendo que $\mathcal{G}$ e $\mathcal{E}'(M)$ são espaços DFS e iguais como conjuntos, uma pergunta natural a se fazer é se são de fato isomorfos.

Teorema 13. $\mathcal{E}'(M) \cong \varinjlim H^{-n}(K_n)$

Demonstração. Analogamente ao que já fizemos na demonstração da Proposição 20, provaremos que a aplicação identidade

$$I : \varinjlim H^{-n}(K_n) \to \varinjlim F'_n \tag{6.12}$$

é um isomorfismo, com o conhecimento prévio de que é bijetora.

Como o Teorema da Aplicação Aberta também é válido para espaços DFS (basta associar o Corolário A.6.4 de [Mor93] com o Corolário da Proposição 17.2 de [Trè67b]), temos apenas de comprovar a continuidade de I.

A fim de mostrar que a função é contínua, basta mostrar que para todo $q \in \mathbb{Z}^+$, a aplicação restrição

$$I\big|_{H^{-q}(K_q)} : H^{-q}(K_q) \to \varinjlim F'_n \tag{6.13}$$

é contínua.

Ou seja, se dado $q \in \mathbb{Z}^+$, encontrarmos $r \in \mathbb{Z}^+$ de modo que $H^{-q}(K_q) \subset F'_r$ e a inclusão for contínua, concluiremos que I também o é. Lembramos que

$$F'_r = N_r^\circ = \left\{\mu \in \mathcal{E}'(M);\ \mu(f) = 0, \forall f \in C^\infty(M) \text{ de modo que } p_r(f) = 0\right\}. \tag{6.14}$$

Fixado $n_0 \in \mathbb{Z}^+$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $K_{n_0} \subset \Omega_{j_0}$ e $n_0 \leq j_0$. Tomados $\mu \in H^{-n_0}(K_{n_0})$ e $f \in C^\infty(M)$ tal que $p_{j_0}(f) = 0$, obtemos:

$$|\langle \mu, f\rangle| = |\langle \mu, g_{j_0} f\rangle| \leq \|\mu\|_{-n_0} \cdot \|g_{j_0} f\|_{n_0} \leq \|\mu\|_{-n_0} \cdot \|g_{j_0} f\|_{j_0} = 0, \tag{6.15}$$

e logo verificamos que $H^{-n_0}(K_{n_0}) \subset F'_{j_0}$.

Finalmente, considere uma sequência $(x_n, I(x_n)) \to (x, y)$ em $H^{-n_0}(K_{n_0}) \times F'_{j_0}$. Por valer a convergência no espaço das distribuições, segue que $I(x) = y$ e portanto o gráfico da aplicação é fechado. Pelo Teorema do Gráfico Fechado segue a continuidade de I, o que encerra a prova.

$\square$

Capítulo 7

Resolubilidade Semiglobal

Trataremos nesta seção da resolubilidade C^∞ do operador L em um subconjunto K, compacto arbitrário de M. Com o intuito de definir isto de forma rigorosa, precisamos introduzir os espaços $C^\infty(K)$.

Definição 12. *Dados $U \subset \mathbb{R}^m$ e $w \in U$, dizemos que $f \in C^\infty(U)$ se anula de ordem infinita em w se $\partial^\alpha(f(w)) = 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{Z}^m_+$.*

Proposição 21. *A definição 12 é invariante por difeomorfismos.*

Demonstração. Sejam U, V abertos de $\mathbb{R}^m$, $f \in C^\infty(U)$ que se anula de ordem infinita em y_0 e $g : V \to U$ um difeomorfismo. Afirmamos que $f \circ g$ se anula de ordem infinita em $g^{-1}(y_0)$.

Escrevendo $h(x) \doteq (f \circ g)(x)$ e $g(x_0) = y_0$, é fácil notar que $h(x_0) = f(y_0) = 0$, por hipótese. Fixamos agora $\gamma \in \mathbb{Z}^n_+$ diferente de 0 e aplicamos a fórmula de Faà di Bruno (para ver uma demonstração, checar Proposição 4.3 de [BM04]:

$$\frac{1}{\gamma!} \cdot \partial^\gamma h(x_0) = \sum \frac{\alpha!}{k_1! \cdots k_l!} \cdot \left(\frac{1}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha f(y_0)\right) \cdot \left(\frac{1}{\delta_1!} \cdot \partial^{\delta_1} g(x_0)\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{1}{\delta_l!} \cdot \partial^{\delta_l} g(x_0)\right)^{k_l}, \tag{7.1}$$

onde $\alpha = k_1 + \ldots + \ k_l$, a soma é tomada sobre todos os conjuntos $\{\delta_1, \ldots \delta_l\}$ com l elementos distintos de $\mathbb{N}^n \setminus \{0\}$ e todas as l-uplas ordenadas $(k_1, \ldots, k_l)$ pertencentes a $(\mathbb{N}^n \setminus \{0\})^l$, e l varia nos naturais, de modo que

$$\gamma = \sum_{i=1}^{l} |k_i| \delta_i.$$

Como a suposição é de que f se anula de ordem infinita em y_0, decorre imediatamente de (7.1) que o mesmo acontece para h em x_0.

□

Definição 13. *Dada $f \in C^\infty(M)$, dizemos que a função se anula de ordem infinita em x_0 se existe carta (ϕ, U) tal que $x_0 \in U$ e $\partial^\alpha(f \circ \phi^{-1})(\phi(x_0)) = 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{Z}^n_+$*

Proposição 22. *$E(x_0) \doteq \{f \in C^\infty(M);\ f$ se anula de ordem infinita em $x_0\}$ é fechado na topologia de $C^\infty(M)$.*

Demonstração. Como $C^\infty(M)$ é metrizável, é suficiente atestar que o conjunto é sequencialmente fechado. Considere $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E(x_0)$ uma sequência que converge para g em $C^\infty(M)$.

Segue diretamente da definição que $\partial^\beta g_n$ converge pontualmente para $\partial^\beta g$ para qualquer vizinhança coordenada relativamente compacta de x_0 e qualquer β, o que nos leva a concluir que g se anula de ordem infinita em x_0. □

Definição 14. *Dado $K \subset M$ compacto, definimos $E(K) \doteq \bigcap_{x\in K} E(x)$.*

Definição 15. *Definimos o espaço das funções suaves em K como o seguinte quociente:*

$$C^\infty(K) \doteq C^\infty(M)/E(K). \tag{7.2}$$

Daremos ao conjunto definido a topologia quociente. Já vimos na Proposição 22 que $E(K)$ é subconjunto fechado de $C^\infty(M)$; obtemos da Proposição 19 que é um espaço de Fréchet-Schwartz.

Proposição 23. *O dual forte de $C^\infty(K)$, que denotaremos por $\mathcal{E}'(K)$, pode ser visto como o espaço das distribuições com suporte em K.*

Demonstração. Lembramos que $\mathcal{E}'(K) = \{\mu \in \mathcal{E}'(M); \mu(f) = 0, \forall f \in C^\infty(M) \cap E(K)\}$. Dada distribuição μ em $\mathcal{E}'(K)$, decorre facilmente da definição que

$$\langle \mu, \varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(M \cap \complement K), \tag{7.3}$$

e assim *supp* $\mu \subset K$.

Em contra partida, se u é uma distribuição cujo suporte está contido em K e g um elemento de $C^\infty(M) \cap E(K)$, segue do Teorema 1.5.4 de [Hör76] que

$$\langle u, g \rangle = 0,$$

o que encerra a prova. □

Proposição 24. *L está bem definido como operador em $C^\infty(K)$.*

Demonstração. Sejam $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ tais que $f_1 - f_2$ se anula de ordem infinita em K. Dado $x_0 \in K$, tome um sistema de coordenadas centrado em x_0 de maneira que $L = a\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ na vizinhança do ponto.

Neste caso, fazendo uma simples conta fica claro que $L(f_1 - f_2)$ se anula de ordem infinita em x_0, o que finaliza a prova, pela arbitrariedade de x_0.

□

Portanto, dizer que L é resolúvel em K (ou $L(C^\infty(K)) = C^\infty(K)$) é equivalente a afirmar que dada $f \in C^\infty(M)$, existe $u \in C^\infty(M)$ de modo que

$$Lu - f \text{ se anula de ordem infinita em } K.$$

Encontraremos agora condições necessárias e suficientes para a resolubilidade de L em K.

Teorema 14. *Fixado $K \subset M$ compacto, as seguintes condições são equivalentes:*

1. $LC^\infty(K) = C^\infty(K)$.
2. $(L+a)C^\infty(K) = C^\infty(K)$, $\forall a \in C^\infty(K)$.
3. $LC^\infty(K)$ *e* $(L+\bar{\lambda})C^\infty(K)$ *são densos em* $C^\infty(K)$, *onde* $\left[L, \bar{L}\right] = \lambda L - \bar{\lambda}\bar{L}$.
4. *Existe uma função* $\varphi \in C^\infty(K)$ *estritamente subharmônica em* K.
5. *Nenhuma folha da* L*-folheação está contida em* K.

Demonstração.

1 ⇒ 2: Dada $f \in C^\infty(K)$, queremos encontrar $u \in C^\infty(K)$ tal que $(L+a)u = f$. Tome b e w tais que $L(b) = a$ e $L(w) = e^b f$. Definindo $u \doteq e^{-b}w$, temos

$$L(w) = L(e^b u) = e^b L(u) + u \cdot L(b)e^b = e^b(L(u) + au) = e^b f \quad \Rightarrow (L+a)u = f.$$

2 ⇒ 3: Imediata. Basta escolher $a \equiv 0$ e $a = \bar{\lambda}$.

3 ⇒ 4: Selecione $f \in C^\infty(K)$ de maneira que $(L+\bar{\lambda})\bar{f}$ é suficientemente próxima de 1, para que

$$Re\ \left[(\bar{L}+\lambda)f)\right] = Re\ \left[(L+\bar{\lambda})\bar{f})\right] > \frac{1}{2} \text{ em } K.$$

Como $f \in C^\infty(K)$, existe $\psi \in C^\infty(K)$ tal que $L(\psi)$ aproxima f e $Re\left[(\bar{L}+\lambda)L\psi\right] > 0$ em K. Basta então recorrer à Proposição 10, com a função $\varphi \doteq Re\ \psi$.

4 ⇒ 5: Demonstraremos por contradição. Suponha a afirmação 4 válida e seja $\mathcal{L}$ uma folha da L-folheação. Se $\mathcal{L} \subset K$, então $\overline{\mathcal{L}} \subset K$. Logo, $\bar{\mathcal{L}}$ é compacto e existe $y_0 \in \bar{\mathcal{L}}$ onde a função φ atinge máximo.

Afirmamos que $\overline{\mathcal{L}}$ contém cada folha que passa por algum de seus pontos; isto segue imediatamente do Teorema 2 da Seção 1 do Capítulo 3 de [CLN85]. Assim, φ possui máximo local na folha $\mathcal{L}_{y_0}$, o que contradiz o fato de φ ser estritamente subharmônica.

O restante desta seção será dedicado à prova da implicação 5 ⇒ 1.

5 ⇒ 1: Iniciamos a demonstração com duas proposições. Na primeira, faremos uso do transposto do operador L, definido em relação a uma medida fixada sobre M que em um sistema de coordenadas $(x_1, \dots x_n)$ assume a expressão $f(x)\ dx$, com f de classe C^∞ e positiva.

Proposição 25. *Se* $v \in \mathcal{E}'(K)$ *e* $L^t v = 0$, *então* $v = 0$.

Demonstração. Pela expansão assintótica, é possível checar que o operador diferencial $(L+L^t)$ tem ordem 0 (visto que L e L^t são operadores de ordem 1). Concluímos assim que a soma de L com o seu transposto é uma função suave e portanto $L^t = -(L+b)$, onde $b \in C^\infty(M)$.

Supondo por absurdo que $(L+b)v = 0$ e $v \neq 0$, existe $x_0 \in K$ de modo que $x_0 \in supp\ v$. Pela Proposição 18, $\mathcal{F}_{x_0} \subset supp\ u \subset K$, o que contradiz a hipótese.

□

Proposição 26. *Se $v \in \mathcal{E}'(K)$, $L^t v = f$ e $s_f \geq t \in \mathbb{R}$, então $s_v \geq t$.*

Demonstração. Pelo Teorema 11, como $s_f \geq t$, temos que $S = \min\{s_v, t\}$ é superharmônica. É claro que $S \equiv t$ em $\complement K$ e que $S \leq t$. Por ser semicontínua inferiormente, assume mínimo em algum ponto $x \in K$.

Neste caso, S será constante em $\mathcal{F}_x$, que por hipótese não está contida em K. Concluímos que $S \equiv t$ em $\mathcal{F}_x$ e consequentemente em M, o que nos mostra que $s_v \geq t$.

□

Perceba que a Proposição 26 nos mostra que $L^t v \in H^\sigma(K)$ implica dizer que $v \in H^{\sigma-\varepsilon}(K)$, para qualquer $\varepsilon > 0$. E note que afirmar que $L(C^\infty(K)) = C^\infty(K)$ é equivalente a dizer que $L : C^\infty(M) \to C^\infty(K)$ é uma aplicação sobrejetora. Recorremos agora à análise funcional:

Teorema 15. *Sejam E, F espaços localmente convexos e $u : E \to F$ uma transformação linear contínua. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *$u(E)$ é densa em F.*
2. *u^t é uma aplicação injetora.*

Demonstração. Seguem diretamente do Teorema de Hahn-Banach os seguintes resultados:

- M é um subespaço denso em F se dado $f \in F'$ que se anula em M, f se anula em F.
- Se M é um subespaço próprio e fechado de F, existe $g \in F'$ não-nulo que se anula em M.

Provemos então a ida. Suponha $u(E)$ densa em F e que $u^t(f) \equiv 0$, com $f \in F'$. Como $u^t(f) = f \circ u$, constatamos que f se anula em $u(E)$ e portanto $f \equiv 0$.

Demonstremos a volta pela contrapositiva. Se $u(E)$ não é denso em F, existe $g \in F'$ não-nulo tal que $g \equiv 0$ em $\overline{u(E)}$. Neste caso, $u^t(g) = g \circ u \equiv 0$, o que prova que u^t não é injetor.

□

Teorema 16. *Sejam E, F espaços Fréchet-Montel e seja $u : E \to F$ uma aplicação linear contínua, com imagem densa em F. As seguintes propriedades são equivalentes:*

- $u(E) = F$
- *Para toda sequência $\{y'_n\}$ em F', tal que $\left\{u^t(y'_n)\right\}$ é fortemente limitada, temos que $\{y'_n\}$ é fortemente limitada.*

Para aplicar os resultados acima, tomamos $E = C^\infty(M)$, $F = C^\infty(K)$, $u = L$, $E' = \mathcal{E}'(M)$ e $F' = \mathcal{E}'(K)$. Combinando a Proposição 25 com o Teorema 15, concluímos que $L(C^\infty(M))$ é densa em $C^\infty(K)$, obtendo assim as hipóteses para utilizar o Teorema 16.

Seja $\{\mu_n\}$ uma sequência em $\mathcal{E}'(K)$, tal que $\left\{L^t(\mu_n)\right\}$ é uma sequência limitada. Por uma propriedade dos Espaços DFS (ver Teorema $A.5.7$ de [Mor93]) e aplicando o Teorema 13 , existem $s, C \in \mathbb{R}$ de modo que:

$$L^t(\mu_n) \in H^s(K), \quad \left\|L^t(\mu_n)\right\|_s \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{7.4}$$

Como já vimos, podemos fixar $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e inferir de (7.4) que para todo n natural $\mu_n \in H^{s-\varepsilon}(K)$. Nos falta apenas uma estimativa do tipo $\|\mu_n\|_{s-\varepsilon} \leq C' \left\|L^t(\mu_n)\right\|_s$.

Definimos $E \doteq \left\{u \in H^{s-1}(K);\ L^t u \in H^s(K)\right\}$ e $\|.\|_1 = \|.\|_{H^{s-1}} + \left\|L^t.\right\|_{H^s}$ uma norma neste espaço. Mostremos que E com a norma $\|.\|_1$ é um espaço de Banach. Se u_n é uma sequência de Cauchy no espaço, então

$$\begin{aligned} u_n &\to u \text{ em } H^{s-1}(K) \\ L^t u_n &\to v \text{ em } H^s(K) \end{aligned}$$

Mas $L^t u_n \to L^t u$ em $\mathcal{D}'$. Assim, $L^t u = v$, o que nos mostra que o espaço é completo. Seja

$$\begin{aligned} T : E &\to H^{s-\varepsilon}(K) \\ v &\mapsto v. \end{aligned}$$

T é uma aplicação bem definida, como visto logo após a Proposição 26. Provaremos que é contínua, através Teorema do Gráfico Fechado. Suponha que

$$\begin{aligned} x_n &\to x \text{ em } E \\ T(x_n) &\to y \text{ em } H^{s-\varepsilon}(K). \end{aligned}$$

Segue assim que:

$$\begin{aligned} x_n &\to x \text{ em } H^{s-1}(K) \\ x_n &\to y \text{ em } H^{s-\varepsilon}(K). \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Rellich, a inclusão $H^{s-\varepsilon}(K) \hookrightarrow H^{s-1}(K)$ é compacta, e portanto contínua. Então, $x = y$ e T é contínua. Ou seja,

$$\|v\|_{s-\varepsilon} \leq C_1 \left(\left\|L^t v\right\|_s + \|v\|_{s-1}\right), \quad \forall v \in E. \tag{7.5}$$

Proposição 27. *Existe $C_2 > 0$ de maneira que*

$$\|v\|_{s-\varepsilon} \leq C_2 \left(\left\|L^t v\right\|_s\right), \quad \forall v \in E. \tag{7.6}$$

Demonstração. Provaremos por redução ao absurdo. Supondo que a Proposição 27 não vale para nenhum $C_2 > 0$, segue que para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $w_j \in E$ tal que

$$\|w_j\|_{s-\varepsilon} > j \left(\left\|L^t w_j\right\|_s\right). \tag{7.7}$$

Estabelecemos $v_j = \dfrac{w_j}{\|w_j\|_{s-\varepsilon}}$. Logo, $\|v_j\|_{s-\varepsilon} = 1$ para qualquer j natural e $\left\|L^t v_j\right\|_s \to 0$, por (7.7).

Como $H^{s-\varepsilon}(K)$ é um espaço reflexivo, existe uma subsequência v_{jk} fracamente convergente. Pelo Teorema de Rellich, v_{jk} é fortemente convergente em H^{s-1} e denominamos por v seu limite.

Neste caso, $L^t v = 0$, o que nos permite deduzir que $v = 0$. Isto é, para k suficientemente grande,

$$\left\|L^t v_{jk}\right\|_s \leq \frac{1}{4C_1}, \quad \|v_{jk}\|_{s-1} \leq \frac{1}{4C_1}. \tag{7.8}$$

Portanto, por 7.5, $\|v_{jk}\|_{s-\varepsilon} \leq \dfrac{1}{2}$ por 7.5, o que é contradição. Está provada a afirmação.

□

Estamos prontos para finalizar a prova da implicação 5 ⇒ 1: associando a hipótese 7.4 com a Proposição 27 e atentando ao fato de que $\mu_n \in E$ para qualquer n, concluímos que:

$$\mu_n \in H^{s-\varepsilon}(K), \quad \|\mu_n\|_{s-\varepsilon} \leq C.C_2, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{7.9}$$

Então a sequência é limitada e aplicando o Teorema 16, atingimos finalmente o resultado desejado.

□

Definição 16. *Dizemos que L é semiglobalmente resolúvel se $L(C^\infty(K) = C^\infty(K))$ para todo $K \subset M$ compacto.*

Corolário 4. *A resolubilidade semiglobal de L é equivalente ao fato de nenhuma folha da L-folheação ser relativamente compacta em M.*

Demonstração. L é semiglobalmente resolúvel se e somente se nenhuma folha está contida em qualquer compacto, pelo Teorema 14. Mas isto é o mesmo que dizer que nenhuma folha é relativamente compacta em M. □

Uma observação a ser feita é de que a definição de resolubilidade em compactos dada no trabalho é um pouco diferente do conceito usual. Neste, L é resolúvel em K se para cada $f \in C^\infty(M)$, existe aberto $V \supset K$ e $u \in C^\infty(M)$ tal que $Lu = f$ em V.

Capítulo 8

Resolubilidade Global

Nosso objetivo nesta seção será estudar a resolubilidade suave global de L. Em outras palavras, encontrar condições suficientes para que dada $f \in C^\infty(M)$, exista $u \in C^\infty(M)$ de forma que $Lu = f$. Com tal intuito, começamos com a definição a seguir:

Definição 17. *Seja Ω uma variedade C^∞ e P um operador diferencial em Ω. Diremos que um aberto $X \subset \Omega$ é P-convexo se para cada $K \subset X$ compacto e $s \in \mathbb{R}$, existe um compacto $K' \subset X$ tal que:*

$$\mu \in \mathcal{E}'(X),\ P^t\mu \in H^s(X),\ supp\ P^t\mu\ \subset K \implies supp\ \mu \subset K'.$$

Veremos pouco à frente que o conceito de P-convexidade está diretamente ligado à resolubilidade global de L. Antes, não obstante, enunciamos um teorema:

Teorema 17. *Sejam E, F espaços de Fréchet-Schwartz, $u : E \to F$ uma transformação linear contínua com imagem $u(E)$ densa em F. Considere $E' = lim\ ind(E'_p)$, $F' = lim\ ind(F'_p)$ seus respectivos duais, onde cada E'_p, F'_p é Espaço de Banach e as inclusões $E'_p \hookrightarrow E'_{p+1}$, $F'_p \hookrightarrow F'_{p+1}$ são compactas para todo p natural. As seguintes proposições são equivalentes:*

- *u é sobrejetora*
- *Para cada $p \in \mathbb{N}$, existe $q \in \mathbb{N}$ de modo que se $\mu \in F'$ e $u^t(\mu) \in E'_p$, então $\mu \in F'_q$.*

Teorema 18. *$LC^\infty(M) = C^\infty(M)$ se e somente se para cada compacto $K \subset M$ temos $LC^\infty(K) = C^\infty(K)$ e M um conjunto L-convexo.*

Demonstração.

$\Rightarrow$ Se admitimos resolubilidade global, precisamos apenas provar que M é L-convexo. Fixando $K \subset M$ compacto e considerando $E = F = C^\infty(M)$, tome $\mu \in \mathcal{E}'(M)$ de maneira que $L^t\mu \in H^s(K)$.

Pela construção de $\mathcal{E}'(M)$ feita no Teorema 13, existe $j \in \mathbb{N}$ de modo que $L^t(\mu) \in H^{-j}(K_j)$ e aplicando Teorema 17 encontramos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mu \in H^{-m}(K_m)$. É suficiente tomar $K' = K_m$.

$\Leftarrow$ Por hipótese, nenhuma folha da L-folheação é relativamente compacta em M. Segue imediatamente da Proposição 25 que L^t é injetora, e pelo Teorema 15 inferimos que $L(C^\infty(M))$ é denso em $C^\infty(M)$.

Note que a L-convexidade nos garante que dada $\mu \in \mathcal{E}'(M)$ tal que $L^t(\mu) \in H^s(K)$, existe um $K' \subset M$ compacto de forma que supp $\mu \subset K'$. Já a resolubilidade semiglobal, através da Proposição 26, nos permite concluir que $\mu \in H^{s-1}$. Como existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $K' \subset K_q$ e $s-1 \geq -q$, constatamos que $\mu \in H^{-q}(K_q)$ e aplicamos o Teorema 17.

□

Quando estudamos o caso semiglobal, encontramos uma propriedade geométrica equivalente ao problema: basta analisar as folhas da L-folheação. Suponha que esta condição já foi checada; a fim de alcançar objetivo análogo para resolubilidade global, o Teorema 18 nos mostra que é suficiente encontrar propriedades que estabeleçam L-convexidade.

Baseados nisto, encontraremos algumas condições suficientes para haver resolubilidade C^∞ global.

Teorema 19. *Suponha verdadeiras as seguintes propriedades:*

1. *Nenhuma folha da L-folheação é relativamente compacta em M.*
2. *Para cada compacto $K \subset M$, existe $K' \subset M$ compacto de maneira que se $\mathcal{L}$ é uma folha da L-folheação e C é uma componente conexa de $\mathcal{L} \cap \complement K$, que é relativamente compacta na topologia de M, então $C \subset K'$.*

Então $LC^\infty(M) = C^\infty(M)$.

Demonstração. Como a condição *1* nos dá resolubilidade semiglobal, é necessário mostrar somente que M é L-convexa. Mais uma vez fixamos $K \subset M$ compacto, $s \in \mathbb{R}$ e tomamos $\mu \in \mathcal{E}'(M)$ tal que $L^t(\mu) \in H^s(K)$.

Perceba que apenas precisamos provar que $\big(supp\ \mu \cap \complement\ supp\ L^t(\mu)\big)$ é subconjunto de um compacto fixo. De fato, se o conjunto sempre estiver contido em K', teremos que $supp\ \mu \subset K'' \doteq K \cup K'$, que é claramente um compacto de M.

Seja $x \in \big(supp\ \mu \cap \complement\ supp\ L^t(\mu)\big)$. Denotamos por $\mathcal{L}_x$ a folha que passa por x e por C_x a componente conexa de $\mathcal{L}_x \cap \complement K$ que passa por x na topologia da folha. Através da Proposição 18 deduzimos que $C_x \subset supp\ \mu \cap \complement K$. Isto é, C_x é relativamente compacto.

Concluímos da Propriedade 2 que $C_x \subset K'$, para x arbitrário. Logo, $\big(supp\ \mu \cap \complement\ supp\ L^t(\mu)\big)$ é subconjunto de K', o que fecha a prova. □

Veremos agora propriedades que são equivalentes à Condição 2 do Teorema 19 quando já temos ciência de que L é semiglobalmente resolúvel.

No próximo enunciado, designaremos por $\mathcal{F}(M)$ a classe das funções contínuas em M que tem a seguinte propriedade: dado qualquer sistema de coordenadas em M, definido para $(x_1, \ldots, x_{n-2})$ em I, (x_{n-1}, x_n) em J, onde I e J são intervalos respectivamente em $\mathbb{R}^{n-2}$ e $\mathbb{R}^2$, de maneira que a intersecção das folhas da L-folheação com $I \times J$ são definidas por $\{x_0\} \times J$, então $u\big|_{I\times J}$ pertence a $C(I; C^\infty(J))$.

Teorema 20. *Suponha que $LC^\infty(K) = C^\infty(K)$ para cada $K \subset M$ compacto. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *Para cada compacto $K \subset M$, existe $K' \subset M$ compacto de maneira que se $\mathcal{L}$ é uma folha da L-folheação e C é uma componente conexa de $\mathcal{L} \cap \complement K$, que é relativamente compacta na topologia de M, então $C \subset K'$.*

2. *Para cada compacto $K \subset M$, existe um compacto $K' \subset M$ tal que para cada $x \notin K'$, existe uma solução $f \in C^\infty(M)$ de $Lf = 0$ com a seguinte propriedade:*

$$|f(x)| > \underset{y \in K}{sup} |f(y)|.$$

3. *Existe uma função φ em $\mathcal{F}(M)$ subharmônica tal que $\{x; \varphi(x) \leq c\}$ é compacto em M para cada $c \in \mathbb{R}$.*

Demonstração.

1 $\Rightarrow$ 2: A demonstração será feita por contradição. Sejam K, K' como no enunciado de 1. e suponha existir $x \notin K'$ de maneira que

$$|f(x)| \leq \sup_{y \in K} |f(y)|, \tag{8.1}$$

para toda $f \in C^\infty(M)$ tal que $Lf = 0$. Considere agora o conjunto $E \doteq \{f \in C^\infty(M); Lf = 0\}$.

Note que E pode ser considerado um subespaço de $C(K)$, o espaço das funções contínuas em K com a topologia do supremo; basta considerar suas restrições a K. Definimos então o seguinte funcional linear:

$$\begin{array}{rcl} \Lambda : E & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Por (8.1), Λ é contínuo. Pelo Teorema de Hahn-Banach, Λ pode ser estendido a um funcional $\Lambda' : C(K) \to \mathbb{C}$ contínuo. Trazemos agora um resultado.

Teorema 21. (Representação de Riesz) *Seja X um espaço topológico Hausdorff compacto. Então $C(X)^*$ é isometricamente isomorfo a $M(X)$, o espaço das medidas complexas de Radon em X.*

Demonstração. Corolário 7.18 de [Fol99]. □

Do Teorema 21, existe uma medida μ suportada em K de modo que

$$\mu(f) = \Lambda'(f) = \Lambda(f) = f(x), \tag{8.2}$$

para toda $f \in E$. Ou seja, $\delta_x - \mu$ é ortogonal ao kernel de L em $C^\infty(M)$. Fazemos uso dos seguintes teoremas auxiliares:

Teorema 22. *Sejam E, F dois espaços localmente convexos Hausdorff e $u : E \to F$ uma aplicação linear contínua. Então o ortogonal de Ker u é o fecho fraco da imagem de u^t.*

Demonstração. Proposição 35.4 de [Trè67b]. □

Teorema 23. *Considere u, E, F como no Teorema 22. Neste caso, são equivalentes as condições abaixo:*

- *$u(E)$ é fechada em F.*
- *$u^t(F')$ é fracamente fechada em E'.*

Demonstração. Ler a demonstração do Lema 37.4 de [Trè67b]. □

Do Teorema 22, segue que $\delta_x - \mu$ está no fecho de $Im\ L^t$ em $\mathcal{E}'(M)$. Como já valem a resolubilidade semiglobal e a afirmação 1, empregando o Teorema 19 obtemos resolubilidade global. Pelo Teorema 23, notamos que $\delta_x - \mu$ pertence de fato a $Im\ L^t$. Portanto, existe $\omega \in \mathcal{E}'(M)$ tal que

$$L^t\omega = \delta_x - \mu. \tag{8.3}$$

Seja $\mathcal{L}$ a folha que passa por x e C a componente conexa de x em $\mathcal{L} \cap \complement K$ na topologia da folha. Pela hipótese e por $x \notin K'$, C não é relativamente compacta em M. Então $C \setminus \{x\}$ não é relativamente compacta e é componente conexa de $\mathcal{L} \cap \complement (K \cup \{x\})$.

Proposição 28. *$supp\ \omega \cap (C \setminus \{x\}) = \emptyset$*

Demonstração. Note que $(supp\ L^t\omega) \cap (C \setminus \{x\}) = \emptyset$ e $supp\ \omega$ é um conjunto compacto. Suponha por contradição que existe $y_1 \in (supp\ \omega) \cap (C \setminus \{x\})$. Pela Proposição 18, teríamos que

$$(C \setminus \{x\}) \subset supp\ \omega,$$

o que contradiz a compacidade do suporte de ω.

□

Finalmente, estamos prontos para provar que 1 $\Rightarrow$ 2. A Proposição 28 mostra que existe uma vizinhança κ de x de modo que $L^t\omega = \delta_x$ em κ e

$$(supp\ \omega) \cap \kappa = \{x\}.$$

Tomando κ suficientemente pequena, de modo que seja uma vizinhança coordenada, teríamos que:

$$\omega = \sum_{|\alpha|=0}^{m} c_\alpha \cdot \partial^\alpha \delta_x, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + a\right)\omega = -\delta_x. \tag{8.4}$$

Lembrando o leitor que se $\sum_{\beta=0}^{p} b_\beta \cdot \partial^\beta \delta_x = 0$, então $b_\beta = 0$ para qualquer β, concluímos claramente que (8.4) é uma contradição, o que encerra a prova da afirmação.

2 $\Rightarrow$ 3: Começamos fazendo a ressalva de que $K \subset K'$, se como em 2. Tome uma sequência K_n de compactos em M satisfazendo as seguintes propriedades:

- $K_j \nearrow M$.
- $K'_j \subset \text{int}\ K_{j+1},\ \forall j \in \mathbb{N}$.

Fixaremos também abertos ω_j tais que

$$K_j \subset K'_j \subset \omega_j \subset K_{j+1},\ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Proposição 29. *Para cada $j \in \mathbb{N}$, podemos tomar f_{jk}, com $k = 1, \ldots, n_j$ soluções C^∞ de L de maneira que*

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n_j} |f_{jk}|^2 < \frac{1}{2^j}$ *em* K_j.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n_j} |f_{jk}|^2 > j$ *em* $K_{j+2} \cap (\complement\omega_j)$

Demonstração. Dado $x_0 \in K_{j+2} \cap (\complement\omega_j)$, existe por hipótese $g \in C^\infty(M)$ solução de L tal que $|g(x_0)| > \sup\limits_{K_j} |g|$.

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$; $|g(x_0)| > \lambda > \sup\limits_{K_j} |g|$. Definindo $h \doteq \dfrac{g}{\lambda}$, verificamos que h continua sendo uma solução suave, $|h(x_0)| > 1$ e $\sup\limits_{K_j} |h| < 1$. Além disso, existe $U_0 \ni x_0$ aberto para o qual $h(x)| > 1,\ \forall x \in U_0$.

Por $K_{j+2} \cap (\complement\omega_j)$ ser compacto, é possível encontrar $f_{j1}, \ldots, f_{jq} \in C^\infty(M)$ soluções de L tais que:

- $\sup\limits_{K_j} |f_{jk}| < 1$, para $k = 1, 2, \ldots, q$.
- $\max\limits_{1 \le k \le q} |f_{jk}| > 1$ em $K_{j+2} \cap (\complement\omega_j)$.

Como o conjunto de soluções de um campo é fechado por multiplicação, basta elevarmos as funções f_{jk} a potências suficientemente grandes. Neste caso continuarão sendo suaves, soluções de L e valerão ambas as estimativas.

□

Proposição 30. *Se $f \in \mathcal{F}(M)$ e $Lf = 0$, então $|f|^2$ é subharmônica.*

Demonstração. Recorremos à Proposição 10:

$$\begin{aligned}
(\bar{L} + \lambda)[L(f\bar{f})] &= (\bar{L} + \lambda)[f \cdot L(\bar{f})] \\
&= \lambda f \cdot L(\bar{f}) + \bar{L}[f \cdot L(\bar{f})] \\
&= \lambda f \cdot L(\bar{f}) + \bar{L}(f) \cdot L(\bar{f}) + f \cdot \bar{L}L\bar{f} \\
&= \lambda f \cdot L(\bar{f}) + |\bar{L}(f)|^2 + f \cdot (L\bar{L} - \left[L, \bar{L}\right])\bar{f} \\
&= \lambda f \cdot L(\bar{f}) + |\bar{L}(f)|^2 + f \cdot (L\bar{L})\bar{f} - f \cdot \left[L, \bar{L}\right] \bar{f} \\
&= \lambda f \cdot L(\bar{f}) + |\bar{L}(f)|^2 - f \cdot \left[L, \bar{L}\right] \bar{f} \\
&= \lambda f \cdot L(\bar{f}) + |\bar{L}(f)|^2 - \lambda f \cdot L(\bar{f}) + f \cdot \bar{\lambda} \cdot \bar{L}\bar{f} \\
&= |\bar{L}(f)|^2 \ge 0.
\end{aligned}$$

□

Definimos então $\varphi \doteq \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n_j}|f_{jk}|^2$. Por definição, segue que $\varphi \in \mathcal{F}(M)$. Mostremos que é de exaustão, isto é, $\{x; \varphi(x) \leq c\}$ é compacto em M para cada $c \in \mathbb{R}$.

Proposição 31. *Para cada j natural, temos $\varphi > j$ em $\complement\omega_j$.*

Demonstração. Se $x \in K_{j+1} \cap \complement\omega_j$, pela Proposição 29 segue que $\sum_{k=1}^{n_j}|f_{jk}(x)|^2 > j$ e portanto $\varphi(x) > j$. Caso contrário, seja $p = \max\{s;\ x \notin K_s\}$; neste caso, $x \notin \omega_{p-1}$ e $x \in K_{p+1}$.

Logo, $\sum_{k=1}^{n_{p-1}}|f_{(p-1,k)}(x)|^2 > p-1 \geq j$. Assim, concluímos que $\varphi(x) > j$ em ambos os casos, o que encerra a prova. □

Corolário 5. *$\{x;\ \varphi(x) \leq c\}$ é compacto em M para cada $c \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Dado $c \in \mathbb{R}$, existe $j \in \mathbb{N};\ j \geq c$. Logo, o conjunto acima é fechado e contido em ω_j, que por sua vez é subconjunto de K_{j+1}, sendo assim compacto. □

Está completa a prova de que 2 ⇒ 3.

3 ⇒ 1: Sejam φ uma função subharmônica pertencente a $\mathcal{F}(M)$, de exaustão e $K \subset M$ um compacto arbitrário. Definimos

$$\sup\{\varphi(x); x \in K\} \doteq c, \quad K' \doteq \{x \in M; \varphi(x) \leq c\} \tag{8.5}$$

Por hipótese, K' é um conjunto compacto. Se C é como no enunciado, seu fecho $\overline{C}$ na topologia de M também é compacto.

Denotamos por $\partial' C$ a fronteira de C na topologia das folhas. Pelo que acabamos de discutir e por nenhuma folha ser relativamente compacta em M (resolubilidade semiglobal), este conjunto é não-vazio. Neste caso, temos que $\partial' C \subset K$.

Afirmamos que

$$\sup_{x\in\bar{C}}\varphi(x) = \sup_{x\in\partial' C}\varphi(x). \tag{8.6}$$

Lema 6. *Se $K \subset M$ é compacto e ψ é uma função subharmônica em uma vizinhança de K, então*

$$\sup_{x\in K}\psi(x) = \sup_{x\in\partial' K}\psi(x), \tag{8.7}$$

onde $\partial' K$ é a fronteira de K na topologia das folhas.

Demonstração. Tome $y \in K$ um ponto tal que $\sup_{x\in K}\psi(x) = \psi(y)$ e denote por $\mathcal{L}_y$ a folha que passa por y. Se y estiver na fronteira de $\mathcal{L}_y \cap K$, não há o que fazer. Caso contrário, ψ é constante na componente conexa do interior de $\mathcal{L}_y \cap K$ que contém y.

O argumento logo acima nos prova que a igualdade proposta vale quando ψ for estritamente subharmônica (perceba que podemos usar esta definição pois ψ é de classe C^∞ em cada folha). Mais do que isto: neste caso o supremo é atingido somente em $\partial' K$.

Suponha finalmente por contradição que $\psi(y) > \sup_{x\in\partial' K} \psi(x)$. Pelo Teorema 14, podemos encontrar $\eta \in C^\infty(M)$ estritamente subharmônica em K. Então $\eta(y) < \sup_{x\in K} \eta(x)$ e a igualdade (8.7) vale para $\psi + \varepsilon\eta$, para qualquer $\varepsilon > 0$.

Escolhemos $\varepsilon = \dfrac{1}{4} \cdot \left[\dfrac{\psi(y) - \sup_{x\in\partial' K} \psi(x)}{\sup_{x\in K} \eta(x) - \eta(y)} \right]$. Se $w \in \partial' K$, segue que

$$\begin{aligned}
[\psi(w) + \varepsilon\eta(w) - \psi(y) - \varepsilon\eta(y)] &= [\psi(w) - \eta(y)] + \varepsilon\,[\eta(w) - \eta(y)] \\
&\leq \left[\sup_{x\in\partial' K} \psi(x) - \psi(y)\right] + \varepsilon \left[\sup_{x\in K} \eta(x) - \eta(y)\right] \\
&\leq \frac{1}{2} \cdot \left[\sup_{x\in\partial' K} \psi(x) - \psi(y)\right] \\
&< 0,
\end{aligned}$$

o que é absurdo, já que vale para todo $w \in \partial' K$. □

Retornando à demonstração, a igualdade 8.6 segue imediatamente do Lema 6. Se a aplicamos, junto ao fato de $\partial' C$ estar contido em K, obtemos que $C \subset K'$, como queríamos provar.

□

Analisando os Teoremas 19 e 20, notamos que a existência de uma função suave, subharmônica e de exaustão, associada com resolubilidade semiglobal, implica em resolubilidade global. Por outro lado. o Teorema 14 exibe a equivalência entre a existência de uma função estritamente subharmônica e a resolubilidade C^∞ em compactos.

Lembramos agora do seguinte resultado de Análise Complexa: um aberto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ é pseudoconvexo se e somente se admite uma função ρ de exaustão, suave e estritamente plurisubharmônica. Inspirados nisto, fixando um campo L e a folheação gerada por ele, definimos:

Definição 18. *M é dita **pseudoconvexa com relação a** L se existir $\rho \in C^\infty(M)$ estritamente subharmônica (no sentido da Definição 8) de modo que para cada $c \in \mathbb{R}$*

$$\{x; \rho(x) \leq c\} \subset\subset M. \tag{8.8}$$

Teorema 24. *M é uma variedade pseudoconvexa com relação a L se, e somente se, existe $\varphi \in C^\infty(M)$ subharmônica, de exaustão, e L é semiglobalmente resolúvel.*

Demonstração. Se M é pseudoconvexa, existe ρ função suave, estritamente subharmônica e de exaustão. Dado $K \subset M$ compacto, a mesma é estritamente subharmônica em K. Recorrendo ao Teorema 14, segue que $L(C^\infty(K)) = C^\infty(K)$.

Reciprocamente, como já comentado logo após a prova do Teorema 20, deduzimos das hipóteses que $L(C^\infty(M)) = C^\infty(M)$. Não é difícil ver que as implicações $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$ do Teorema 14 permanecem válidas quando trocamos K por M. Isto é, existe $\psi \in C^\infty(M)$ estritamente subharmônica.

Definimos então $\rho \doteq \varphi + e^\psi$. Obviamente $\rho \in C^\infty(M)$. Observe também que o conjunto $\{x; \rho(x) \leq c\} \subset \{x; \varphi(x) \leq c\}$, visto que e^ψ é estritamente positiva; logo é de exaustão. Nos falta verificar que é estritamente subharmônica:

$$\begin{aligned}
(\bar{L}+\lambda)[L(\varphi+e^\psi)] &= (\bar{L}+\lambda)[L(\varphi)] + (\bar{L}+\lambda)[L(e^\psi)] \\
&= (\bar{L}+\lambda)[L(\varphi)] + (\bar{L}+\lambda)[L(\psi)\cdot e^\psi] \\
&= (\bar{L}+\lambda)[L(\varphi)] + \lambda\cdot e^\psi\cdot L(\psi) + (\bar{L}L\psi)\cdot e^\psi + L(\psi)\cdot\bar{L}(\psi)\cdot e^\psi \\
&= (\bar{L}+\lambda)[L(\varphi)] + (\bar{L}+\lambda)[L(\psi)]\cdot e^\psi + L(\psi)\cdot\bar{L}(\psi)\cdot e^\psi \\
&= \underbrace{(\bar{L}+\lambda)[L(\varphi)]}_{\geq 0} + \underbrace{(\bar{L}+\lambda)[L(\psi)]\cdot e^\psi}_{>0} + \underbrace{|L(\psi)|^2\cdot e^\psi}_{\geq 0}.
\end{aligned}$$

Está demonstrado o resultado.

□

Corolário 6. *Quando M é pseudoconvexa com relação a L, este operador é globalmente resolúvel.*

Referências Bibliográficas

[AV65] Aldo Andreotti e Edoardo Vesentini. Carleman Estimates for the Laplace-Beltrami Equation on Complex Manifolds. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 25:81–130, 1965. 39, 40

[BCH08] Shiferaw Berhanu, Paulo D Cordaro e Jorge Hounie. *An Introduction to Involutive Structures*, volume 6. Cambridge University Press, 2008. 17, 21

[BM04] Edward Bierstone e Pierre D Milman. Resolution of Singularities in Denjoy-Carleman Classes. *Selecta Mathematica*, 10(1):1–28, 2004. 43

[Bou07] Nicolas Bourbaki. *Espaces Vectoriels Topologiques*. Springer, 2007.

[CLN85] C Camacho e A Lins Neto. *Geometric Theory of Foliations*, volume 1. Birkhäuser Boston, 1985. 17, 45

[DH72] Johannes J Duistermaat e Lars Hörmander. Fourier Integral Operators II. *Acta mathematica*, 128(1):183–269, 1972. 1

[Fol99] Gerald B Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, volume 2. Wiley-Interscience, 1999. 51

[Hör71] Lars Hörmander. Fourier Integral Operators I. *Acta mathematica*, 127(1):79–183, 1971. 27

[Hör76] Lars Hörmander. *Linear Partial Differential Operators*, volume 116. Springer - Verlag, 1976. 44

[Hör90] Lars Hörmander. *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, volume 7. Elsevier, 1990.

[Hör03] Lars Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators. I.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. Distribution theory and Fourier analysis, Reprint of the second (1990) edition [Springer, Berlin; MR1065993 (91m:35001a)]. 5

[Hör05] Lars Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators II: Differential Operators with Constant Coefficients*, volume 257. Springer Science & Business Media, 2005. 7

[Hör07] Lars Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III: Pseudo-differential Operators*, volume 274. Springer Science & Business Media, 2007.

[Kom67] Hikosaburo Komatsu. Projective and Injective Limits of Weakly Compact Sequences of Locally Convex Spaces. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 19(3):366–383, 1967. 41

[Kre89] Erwin Kreyszig. *Introductory Functional Analysis With Applications*, volume 81. Wiley New York, 1989.

[Lee03] John M Lee. Smooth manifolds. Em *Introduction to Smooth Manifolds*, páginas 1–29. Springer, 2003.

[Lew57] Hans Lewy. An Example of a Smooth Linear Partial Differential Equation Without Solution. *Annals of Mathematics*, páginas 155–158, 1957. 3

[Mor93] Mitsuo Morimoto. *An Introduction to Sato's Hyperfunctions*, volume 129. American Mathematical Soc., 1993. 41, 46

[Tre67a] François Treves. *Locally Convex Spaces and Linear Partial Differential Equations*. Springer, 1967.

[Trè67b] François Trèves. *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, volume 25. Courier Corporation, 1967. 40, 41, 51, 52

[Trè80] François Trèves. *Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators Volume 1: Pseudodifferential Operators*, volume 2. Springer Science & Business Media, 1980. 27