**Resolubilidade local de
equações semilineares
no plano**

Luís Cláudio Yamaoka

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE
EM
CIÊNCIAS

Área de Concentração: **Matemática Aplicada**
Orientador: **Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro**

*Durante a elaboração deste trabalho o autor
recebeu apoio financeiro da CAPES*

São Paulo, setembro de 2006.

**Resolubilidade local de
equações semilineares
no plano**

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e defendida por Luís Cláudio Yamaoka
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 29 de setembro de 2006.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro (orientador) - IME/USP
- Prof. Dr. Oscar Fortunato Vilcachagua Erazo - IME/USP
- Prof. Dr. Gerson Petronilho - DM/UFSCAR

*Ao meu pai Roberto,
à minha mãe Maria José e
à minha irmã Letícia.*

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro pelo dedicado trabalho de orientação, sem o qual seria impossível a realização desta monografia.

Aos professores Oscar Fortunato Vilcachagua Erazo e Gerson Petronilho pelas alterações sugeridas na versão preliminar, que contribuíram para a confecção da versão final desta monografia.

À Gleice e amigos.

Resumo

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto contendo a origem. Denotando as variáveis por (x, t) , provamos a resolubilidade local, em um disco D aberto centrado na origem, $D \subset \Omega$, de equações semilineares da forma

$$Pu = f(x, t, u);$$

onde

- $P = \partial_t + a(x, t)\partial_x$, $a \in C^2(\Omega)$, $\text{Im}\{a\} \neq 0$ e $f \in C^2(\Omega \times \mathbb{C})$, usando o princípio da contração;
- $P = \partial_t - it^k \partial_x$, k : número inteiro positivo par e $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C})$, usando o teorema de resolubilidade local de Hounie e Santiago.

Abstract

Let Ω be an open set of $\mathbb{R}^2$ containing the origin. Using the variables (x, t) , we prove the local solvability, on an open ball D centered at the origin, $D \subset \Omega$, of semilinear equations of the form

$$Pu = f(x, t, u);$$

where

- $P = \partial_t + a(x, t)\partial_x$, $a \in C^2(\Omega)$, $\text{Im}\{a\} \neq 0$ and $f \in C^2(\Omega \times \mathbb{C})$, using the principle of contracting mappings;
- $P = \partial_t - it^k\partial_x$, k : even positive integer number and $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C})$, using the local solvability theorem of Hounie and Santiago.

Índice

Agradecimentos	iv
Resumo	v
Abstract	vi
Introdução	1
Notações	3
1 Um campo elíptico em $\mathbb{R}^2$	5
1.1 Um operador de norma pequena	7
1.2 A desigualdade do valor médio em $C^\alpha(D)$	14
1.3 Procura do ponto fixo para o operador S	17
2 O operador $\partial_t - it^k \partial_x$	21
2.1 Um operador inverso à direita para a parte linear	22
2.2 Algumas reduções	33
2.3 Existência de um ponto fixo para um operador não-linear adequado .	42
2.3.1 Prova do teorema 2.1	42
A Apêndice	48
A.1 Espaços quocientes	48
A.2 Análise Funcional	50
A.3 Espaços de Sobolev	52

Índice

viii

Referências bibliográficas

56

Introdução

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre a resolubilidade local de equações semilineares para uma classe de operadores diferenciais de primeira ordem definidos em $\mathbb{R}^2$. Resolver uma equação diferencial parcial semilinear em um determinado espaço significa, para nós, encontrar um elemento pertencente a este espaço que satisfaça a equação semilinear.

Uma técnica comumente utilizada para se resolver, quando possível, uma equação a derivadas parciais, é obter uma transformação a partir da equação para, então, mostrar a existência de um ponto fixo dessa transformação em um espaço de Banach apropriadamente escolhido. Através desta perspectiva é desenvolvido o estudo.

A teoria geral das funções complexas, da qual é apenas exigido um conhecimento básico, é usada para a investigação do problema do capítulo 1: uma referência é o livro [12], onde o operador integral singular utilizado neste estudo tem suas propriedades exaustivamente estudadas; outras ferramentas, como a análise funcional e a teoria das distribuições, são amplamente empregadas na demonstração do teorema do capítulo 2: duas importantes exposições são os livros [5] e [11].

Os resultados aqui provados são os seguintes:

Teorema 0.1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto contendo a origem, $a \in C^2(\Omega)$ com $\text{Im}\{a\} \neq 0$ e $h \in C^2(\Omega \times \mathbb{C})$. Então dado $0 < \alpha < 1$ existem $R = R(\alpha) > 0$ e $u \in C^\alpha(D)$, $D = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + t^2 < R\} \subset \Omega$ tais que*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = h(x, t, u), \quad \text{em } D.$$

Corolário 0.1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ aberto e $0 \in \Omega$. Se $h \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{C})$, então existem $R > 0$ e $u \in C^\infty(D)$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\} \subset \Omega$ tais que*

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = h(z, u) \quad \text{em } D.$$

Teorema 0.2 *Seja k um número inteiro positivo par. Se $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C})$ e $s > 1$, então existem $\rho = \rho(s) > 0$ e $u \in H^s(\mathbb{R}^2)$ tais que*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - it^k \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t, u), \quad \text{em } |(x, t)| < \rho.$$

Corolário 0.2 *Seja k um número inteiro positivo par. Se $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C})$, então existem $\rho > 0$ e $u \in C^\infty(B_\rho)$ tais que*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - it^k \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t, u), \quad \text{em } |(x, t)| < \rho.$$

A ordem da exposição é a seguinte:

No capítulo 1 está demonstrado o teorema 0.1, usando a técnica do princípio da contração. O seguinte procedimento será adotado: após uma mudança de coordenadas locais, a equação diferencial parcial original é modificada a uma forma mais conveniente; é definida uma apropriada transformação, para a qual será provada a existência de um ponto fixo. O corolário 0.1 é provado por um processo de indução.

No capítulo 2 está demonstrado o teorema 0.2 apresentado acima. O estudo é feito, nesse capítulo, usando a técnica sugerida pelo trabalho de Hounie/Santiago [6], dado que o operador de Mizohata, para k par, satisfaz a condição $(\mathcal{P})$ de Nirenberg/Treves; merece atenção o lema 2.3.1.3, que culmina na resolução do teorema 0.2. O corolário 0.2 é demonstrado por um processo de indução.

Notações

As notações usadas neste trabalho são as habituais, que se encontram nos textos e artigos sobre equações a derivadas parciais.

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto não vazio, denotaremos por :

$C^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$ ou $m = +\infty$: espaço das funções definidas em Ω , a valores complexos, m -vezes continuamente diferenciáveis.

$C_c^\infty(\Omega)$: espaço das funções $u \in C^\infty(\Omega)$ tais que $\text{supp } u$ é compacto contido em Ω ($\text{supp } u = \text{suporte de } u$).

$L^p(\Omega)$: espaço de Lebesgue das funções mensuráveis f tais que a p -ésima potência do valor absoluto $|f|$ é integrável em Ω ($1 \leq p < \infty$), equipado com a norma $\|f\|_{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$. Usaremos $L^p(\mathbb{R}^n) = L^p$.

$L^\infty(\Omega)$: espaço de Lebesgue das funções mensuráveis f em Ω que são essencialmente limitadas, equipadas com a norma $\|f\|_{L^\infty(\Omega)}$, o *supremo essencial* de f .

$\mathcal{D}'(\Omega)$: espaço das distribuições definidas em Ω (dual de $C_c^\infty(\Omega)$).

$\mathcal{E}'(\Omega)$: espaço das distribuições $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ com suporte compacto contido em Ω .

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: espaço das funções $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ que decaem rapidamente no infinito.

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$: espaço das distribuições temperadas em $\mathbb{R}^n$ (dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$).

Denotaremos

$$\partial f \equiv \frac{\partial f}{\partial z} \equiv f_z : \text{derivada parcial de } f \text{ com respeito a } z,$$

$$\bar{\partial} f \equiv \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv f_{\bar{z}} : \text{derivada parcial de } f \text{ com respeito a } \bar{z}.$$

Se $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, denotaremos $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}, \quad D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad e \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}.$$

Usaremos, também, $\partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Se $P(x, \frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$ for um operador diferencial parcial linear ,

$a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, denotaremos

$${}^tP(x, \frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{|\alpha| \leq m} \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha a_\alpha(x) : \text{transposto (formal) de } P(x, \frac{\partial}{\partial x}).$$

Se $P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ for um operador diferencial parcial linear ,

$a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, denotaremos

$$P_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha : \text{símbolo principal de } P(x, D).$$

Por simplicidade, neste trabalho escrevemos P ao invés de $P(x, D)$, tP ao invés de ${}^tP(x, D)$ e P_m ao invés de $P_m(x, \xi)$.

Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $i = \sqrt{-1}$, denotaremos

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx : \text{transformada de Fourier de } f,$$

$$(\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(x) = f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi : \text{transformada inversa de Fourier de } f.$$

Um campo elíptico em $\mathbb{R}^2$

Consideraremos, aqui, o seguinte operador elíptico em um subconjunto aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, $(0, 0) \in \Omega$:

$$P = \frac{\partial}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial}{\partial x}, \quad \text{Im}\{a(x, t)\} \neq 0,$$

onde $a(x, t)$ é uma função a valores complexos de classe $C^2(\Omega)$.

Ao longo deste capítulo demonstraremos que a equação semilinear,

$$Pu = h(x, t, u),$$

é localmente solúvel numa vizinhança da origem, onde h é uma função complexa de classe $C^2(\Omega \times \mathbb{C})$.

Em termos mais rigorosos, provaremos o seguinte teorema:

Teorema 1.1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto contendo a origem, $a \in C^2(\Omega)$ com $\text{Im}\{a\} \neq 0$ e $h \in C^2(\Omega \times \mathbb{C})$. Então dado $0 < \alpha < 1$ existem $R = R(\alpha) > 0$ e $u \in C^\alpha(D)$, $D = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + t^2 < R\} \subset \Omega$ tais que*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = h(x, t, u), \quad \text{em } D. \quad (1.1)$$

O lema seguinte será de grande valia: permite transformar o operador elíptico, em questão, em um operador múltiplo do operador de Cauchy-Riemann numa vizinhança da origem.

Lema 1.1 *Seja um subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tal que $(0, 0) \in \Omega$ e seja $a \in C^2(\Omega)$ tal que $\text{Im}\{a(x, t)\} \neq 0$. Se $P = \partial_t + a(x, t)\partial_x$ em Ω , então existem coordenadas*

locais (x_1, x_2) , se anulando em $(0, 0)$, tais que P pode ser escrito, em uma vizinhança Ω_1 de $(0, 0)$, $\Omega_1 \subset \Omega$, como

$$P = g(x_1, x_2) \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right\} = 2g(z) \frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$

onde $z = x_1 + ix_2 \in \Omega_1$ e $g \in C^2(\Omega_1)$ nunca se anula.

Demonstração Ver [2] (Corollary 13.4, página 30)

Pelo lema 1.1, a equação semilinear (1.1) pode ser reescrita, em uma vizinhança Ω_1 da origem, como

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{h(z, u)}{2g(z)}, \quad g \in C^2(\Omega_1), \quad g(z) \neq 0, \quad \forall z = x_1 + ix_2 \in \Omega_1.$$

Redefinindo $h(z, u)/2g(z)$ por $h(z, u)$, bastará resolver a equação semilinear

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = h(z, u) \quad \text{em } \Omega_1, \quad (1.2)$$

onde a nova $h(z, u) \in C^2(\Omega_1 \times \mathbb{C})$.

Considerando um disco $D \subset \Omega_1$, de raio R arbitrariamente pequeno, a resolução de (1.2) consistirá em tomar, para uma função $f \in C^\alpha(D)$, o operador T inverso do operador de Cauchy-Riemann no disco (D) :

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi} \int \int_D \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta. \quad (1.3)$$

Em um momento apropriado, veremos que o operador T estará bem definido. Por enquanto, convém apenas traçar o caminho que nos conduzirá à solução.

Logo, se considerarmos o operador S , dado por

$$S(u) = T(h(z, u)), \quad (1.4)$$

e o situarmos num certo subespaço fechado Z do espaço de Banach $C^\alpha(D)$, mostraremos que S será uma contração em Z e, portanto, concluiremos a existência de um ponto fixo de (1.4) em Z . Teremos, então,

$$u = S(u) = T(h(z, u)) \quad \text{em } Z \quad (1.5)$$

e, aplicando o operador de Cauchy-Riemann a ambos membros de (1.5), seguirá que

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = h(z, u) \quad \text{em } D.$$

A demonstração está assim organizada:

Na seção 1.1 mostraremos que o operador T , definido em (1.3), aplica $C^\alpha(D)$ em $C^\alpha(D)$ e possui norma tão pequena quanto se queira. Na seção 1.2 demonstraremos que a função h , em (1.2), satisfaz a desigualdade do valor médio no espaço de Banach $C^\alpha(D)$. Finalmente, na seção 1.3, provaremos a existência de um ponto fixo para o operador S , definido em (1.4), em um subespaço fechado de $C^\alpha(D)$.

De agora em diante, denotaremos

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < R\}, \quad (1.6)$$

$$z = x_1 + ix_2, \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad \partial = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \bar{\partial} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right).$$

1.1 Um operador de norma pequena

O principal resultado desta seção é o Teorema 1.1.1, que permite estimar a norma de T em $C^\alpha(D)$. É importante, para a aplicação do princípio da contração, que T possua norma tão pequena quanto se queira.

Lema 1.1.1 *Se $\epsilon_1, \epsilon_2 \in (0, 1]$, $\epsilon_1 + \epsilon_2 \neq 2$ e $z_1, z_2 \in \bar{D}$ com $z_1 \neq z_2$, então*

$$I = \iint_D \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z_1|^{2-\epsilon_1} |\zeta - z_2|^{2-\epsilon_2}} \leq C(\epsilon_1, \epsilon_2) |z_2 - z_1|^{\epsilon_1 + \epsilon_2 - 2}.$$

A parte essencial deste lema é que $C(\epsilon_1, \epsilon_2)$ não depende de R .

Demonstração

A integral I existe, pois fazendo integração com coordenadas polares em torno de ambas singularidades, obtemos um integrando da ordem de $\rho^{\epsilon_i - 1}$.

Seja $\delta = \frac{|z_2 - z_1|}{2}$ e consideremos

$$D_1 = D_\delta(z_1), \quad D_2 = D_\delta(z_2), \quad D_3 = D \setminus (D_1 \cup D_2).$$

Então, temos $D \subseteq D_1 \cup D_2 \cup D_3$, donde

$$\iint_D \leq \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \iint_{D_3} .$$

Usando coordemadas polares e $|\zeta - z_2| \geq \delta$, temos

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\delta \frac{\rho d\rho d\theta}{\rho^{2-\epsilon_1} |\zeta - z_2|^{2-\epsilon_2}} \\ &\leq 2\pi \delta^{\epsilon_2-2} \int_0^\delta \frac{d\rho}{\rho^{1-\epsilon_1}} \\ &= 2\pi \delta^{\epsilon_2-2} \left. \frac{\rho^{\epsilon_1}}{\epsilon_1} \right|_0^\delta \\ &= \frac{2\pi \delta^{\epsilon_1+\epsilon_2-2}}{\epsilon_1} . \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\iint_{D_2} \leq \frac{2\pi \delta^{\epsilon_1+\epsilon_2-2}}{\epsilon_2} .$$

Se $\zeta \in D_3$, então $|\zeta - z_2| \geq \delta$. Assim,

$$\frac{|\zeta - z_1|}{|\zeta - z_2|} \leq \frac{|z_2 - z_1| + |\zeta - z_2|}{|\zeta - z_2|} \leq 1 + \frac{2\delta}{\delta} = 3 .$$

Logo,

$$\begin{aligned} \iint_{D_3} \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z_1|^{2-\epsilon_1} |\zeta - z_2|^{2-\epsilon_2}} &\leq 3^{2-\epsilon_2} \iint_{D_3} \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z_1|^{4-\epsilon_1-\epsilon_2}} \\ &\leq 3^{2-\epsilon_2} \iint_{D_1^c} \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z_1|^{4-\epsilon_1-\epsilon_2}} \\ &= 3^{2-\epsilon_2} 2\pi \int_\delta^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho^{3-\epsilon_1-\epsilon_2}} \\ &= 2\pi 3^{2-\epsilon_2} \left. \frac{\rho^{\epsilon_1+\epsilon_2-2}}{\epsilon_1 + \epsilon_2 - 2} \right|_\delta^{+\infty} \\ &= \frac{2\pi 3^{2-\epsilon_2}}{2 - \epsilon_1 - \epsilon_2} \delta^{\epsilon_1+\epsilon_2-2} . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_D \leq \frac{2\pi}{2^{\epsilon_1+\epsilon_2-2}} \left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} + \frac{3^{2-\epsilon_2}}{2 - \epsilon_1 - \epsilon_2} \right) |z_2 - z_1|^{\epsilon_1+\epsilon_2-2} . \quad \square$$

Consideremos, agora, $f \in C^\alpha(D)$, isto é, existem $M, K > 0$ tais que

$$\begin{cases} |f(z)| \leq M & , \forall z \in D, \\ |f(z_2) - f(z_1)| \leq K |z_2 - z_1|^\alpha & , \forall z_1, z_2 \in D. \end{cases}$$

Sejam

$$\begin{aligned} \omega(z) &= -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta \quad e \\ \sigma(z) &= -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{f(\zeta) - f(z)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta \quad . \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares, vemos que ω está bem definida. Quanto a σ , basta usar coordenadas polares e observar que $f \in C^\alpha(D)$.

Lema 1.1.2 *As derivadas ω_z e $\omega_{\bar{z}}$ existem e, além disso, $\omega_z = \sigma$ e $\omega_{\bar{z}} = f$.*

Demonstração

Fixemos $z_0 \in D$ e consideremos $g(z) = \omega(z) - f(z_0)\bar{z}$. A passagem mais importante da demonstração consiste em mostrar que g tem derivada complexa no ponto z_0 .

Inicialmente deduziremos uma expressão integral para $\bar{z}$. A fórmula de Cauchy não homogênea é

$$p(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{p(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{p_{\bar{z}}(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \quad p \in C^1(\bar{D}) \quad , \forall z \in D.$$

Tomando $p(z) = \bar{z}$, temos

$$\bar{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{\bar{\zeta}}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{1}{\zeta - z} d\xi d\eta.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \int_{|\zeta|=R} \frac{\bar{\zeta}}{\zeta - z} d\zeta &= \int_{|\zeta|=R} \frac{R^2}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta \\ &= 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{R^2}{\zeta(\zeta - z)}, \zeta = 0 \right) + 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{R^2}{\zeta(\zeta - z)}, \zeta = z \right) \\ &= 2\pi i \left(-\frac{R^2}{z} + \frac{R^2}{z} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\bar{z} = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{1}{\zeta - z} d\xi d\eta, \quad \forall z \in D.$$

Agora, calcularemos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(z_0 + h) - g(z_0)}{h}, \quad z_0 + h \in D.$$

Observamos que

$$g(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z} d\xi d\eta.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \frac{g(z_0 + h) - g(z_0)}{h} &= -\frac{1}{\pi h} \iint_D (f(\zeta) - f(z_0)) \left(\frac{1}{\zeta - z_0 - h} - \frac{1}{\zeta - z_0} \right) d\xi d\eta \\ &= -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{(\zeta - z_0 - h)(\zeta - z_0)} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

O objetivo é mostrar que

$$\exists \quad g'(z_0) = \sigma(z_0) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{(\zeta - z_0)^2} d\xi d\eta.$$

Para $h \neq 0$,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \left| \iint_D \left[-\frac{f(\zeta) - f(z_0)}{(\zeta - z_0 - h)(\zeta - z_0)} + \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{(\zeta - z_0)^2} \right] d\xi d\eta \right| = \\ &= \frac{1}{\pi} \left| \iint_D \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} \left(\frac{1}{\zeta - z_0} - \frac{1}{\zeta - z_0 - h} \right) d\xi d\eta \right| \\ &\leq \frac{|h|}{\pi} \iint_D \frac{|f(\zeta) - f(z_0)|}{|\zeta - z_0 - h| |\zeta - z_0|^2} d\xi d\eta \\ &\leq \frac{K|h|}{\pi} \iint_D \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z_0|^{2-\alpha} |\zeta - z_0 - h|}, \text{ pois } f \in C^\alpha(D) \\ &\leq \frac{K|h|}{\pi} C(\alpha, 1) |z_0 + h - z_0|^{\alpha+1-2}, \text{ pelo lema 1.1.1} \\ &= \frac{K}{\pi} C(\alpha, 1) |h|^\alpha \longrightarrow 0 \quad \text{quando } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Assim, g tem derivada complexa em z_0 e $g'(z_0) = \sigma(z_0)$. Portanto, da definição de g , segue-se que

$$\omega_z(z_0) = g_z(z_0) = \sigma(z_0) \quad e \quad 0 = g_{\bar{z}}(z_0) = \omega_{\bar{z}}(z_0) - f(z_0). \quad \square$$

Lema 1.1.3 *Valem as seguintes desigualdades em D :*

$$|\omega(z)| \leq 4R \sup_{\zeta \in D} |f(\zeta)| \quad e \quad |\sigma(z)| \leq \frac{2^{\alpha+1}}{\alpha} R^\alpha \sup_{\zeta \in D} \left\{ \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|^\alpha} \right\}.$$

Demonstração

Como ω é dada por

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta,$$

temos

$$\begin{aligned} |\omega(z)| &\leq \frac{M}{\pi} \iint_D \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z|} \\ &\leq \frac{M}{\pi} \iint_{D_{2R}(z)} \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z|} \\ &= \frac{M}{\pi} 2\pi \int_0^{2R} d\rho \\ &= 4RM. \end{aligned}$$

A função σ , por sua vez, é

$$\sigma(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{f(\zeta) - f(z)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |\sigma(z)| &\leq \frac{K}{\pi} \iint_D \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z|^{2-\alpha}} \\ &\leq \frac{K}{\pi} \iint_{D_{2R}(z)} \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z|^{2-\alpha}} \\ &= \frac{K}{\pi} 2\pi \int_0^{2R} \rho^{\alpha-1} d\rho \\ &= 2K \frac{\rho^\alpha}{\alpha} \Big|_0^{2R} \\ &= \frac{2^{\alpha+1}}{\alpha} K R^\alpha. \quad \square \end{aligned}$$

Consideremos, ainda, a seguinte norma em $C^\alpha(D)$, $0 < \alpha < 1$:

$$u \in C^\alpha(D) \Leftrightarrow \|u\|_\alpha = \sup_{z \in D} |u(z)| + \sup_{z_1 \neq z_2} \left\{ \frac{|u(z_2) - u(z_1)|}{|z_2 - z_1|^\alpha} \right\} < \infty.$$

Denotemos

$$\|u\|_\infty = \sup_{z \in D} |u(z)|, \quad \|u\|_H = \sup_{z_1 \neq z_2} \left\{ \frac{|u(z_2) - u(z_1)|}{|z_2 - z_1|^\alpha} \right\},$$

observando que $\|\cdot\|_H$ é uma seminorma. Assim,

$$u \in C^\alpha(D) \Leftrightarrow \|u\|_\alpha = \|u\|_\infty + \|u\|_H < \infty. \quad (1.7)$$

Lema 1.1.4 *O espaço $C^\alpha(D)$ é completo com a norma $\|\cdot\|_\alpha$.*

Demonstração

Seja $(f_j) \subset C^\alpha(D)$ seqüência de Cauchy. Então, $\exists f : D \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f_j \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$. Devemos mostrar que $f \in C^\alpha(D)$. Uma vez que (f_j) é seqüência de Cauchy em $C^\alpha(D)$ e portanto limitada, segue que $\exists C > 0$ (independente de j) tal que

$$|f_j(z_2) - f_j(z_1)| \leq C|z_2 - z_1|^\alpha, \quad \forall j, \quad \forall z_1, z_2 \in D.$$

Dessa forma,

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq C|z_2 - z_1|^\alpha, \quad \forall z_1, z_2 \in D.$$

Provaremos, agora, que $f_j \xrightarrow{\|\cdot\|_\alpha} f$. Para isso, basta verificar que $f_j \xrightarrow{\|\cdot\|_H} f$. Como, para cada $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|(f_j - f_i)(z_2) - (f_j - f_i)(z_1)| \leq \epsilon|z_2 - z_1|^\alpha, \quad \forall i, j \geq n_0, \quad \forall z_1, z_2 \in D,$$

fazendo $i \rightarrow \infty$ e usando a convergência pontual de $(f_i)_i$, temos

$$|(f_j - f)(z_2) - (f_j - f)(z_1)| \leq \epsilon|z_2 - z_1|^\alpha, \quad \forall j \geq n_0, \quad \forall z_1, z_2 \in D.$$

Logo, $\|f_j - f\|_H \leq \epsilon, \quad \forall j \geq n_0. \quad \square$

Teorema 1.1.1 *O operador linear T , definido por*

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta,$$

aplica $C^\alpha(D)$ em $C^\alpha(D)$ e é contínuo com a norma definida em (1.7).

Demonstração

Pelo lema 1.1.2, temos

$$\bar{\partial}Tf = f \Rightarrow \|\bar{\partial}Tf\|_{\infty} = \|f\|_{\infty} \stackrel{(1.7)}{\leq} \|f\|_{\alpha}. \quad (1.8)$$

Pelo lema 1.1.3,

$$\|Tf\|_{\infty} \leq 4R \|f\|_{\infty} \stackrel{(1.7)}{\leq} 4R \|f\|_{\alpha}, \quad (1.9)$$

$$\|\partial Tf\|_{\infty} \leq \frac{2^{\alpha+1}}{\alpha} \|f\|_H R^{\alpha} \stackrel{(1.7)}{\leq} \frac{2^{\alpha+1}}{\alpha} \|f\|_{\alpha} R^{\alpha}. \quad (1.10)$$

Estimaremos

$$\begin{aligned} \|Tf\|_H &= \sup_{z_1 \neq z_2} \frac{|Tf(z_2) - Tf(z_1)|}{|z_2 - z_1|^{\alpha}}. \text{ Isto é,} \\ \sup_{z_1 \neq z_2} \frac{|Tf(z_2) - Tf(z_1)|}{|z_2 - z_1|^{\alpha}} &= \sup_{z_1 \neq z_2} |z_2 - z_1|^{1-\alpha} \frac{|Tf(z_2) - Tf(z_1)|}{|z_2 - z_1|} \\ &\leq 2^{1-\alpha} R^{1-\alpha} \sup_{z_1 \neq z_2} \frac{|Tf(z_2) - Tf(z_1)|}{|z_2 - z_1|}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Consideremos, para $s \in [0, 1]$,

$$\lambda(s) = Tf(sz_2 + (1-s)z_1).$$

Assim,

$$\lambda'(s) = (z_2 - z_1) \frac{\partial Tf}{\partial z}(sz_2 + (1-s)z_1) + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1) \frac{\partial Tf}{\partial \bar{z}}(sz_2 + (1-s)z_1).$$

Daí,

$$\begin{aligned} Tf(z_2) - Tf(z_1) &= \lambda(1) - \lambda(0) = \int_0^1 \lambda'(s) ds = \\ &= (z_2 - z_1) \int_0^1 \frac{\partial Tf}{\partial z}(sz_2 + (1-s)z_1) ds + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1) \int_0^1 \frac{\partial Tf}{\partial \bar{z}}(sz_2 + (1-s)z_1) ds. \end{aligned}$$

Logo, usando (1.8) e (1.10), temos

$$\begin{aligned} |Tf(z_2) - Tf(z_1)| &\leq |z_2 - z_1| \int_0^1 \left| \frac{\partial Tf}{\partial z}(sz_2 + (1-s)z_1) \right| ds \\ &\quad + |z_2 - z_1| \int_0^1 \left| \frac{\partial Tf}{\partial \bar{z}}(sz_2 + (1-s)z_1) \right| ds \\ &\leq |z_2 - z_1| \frac{2^{\alpha+1}}{\alpha} \|f\|_{\alpha} R^{\alpha} + |z_2 - z_1| \|f\|_{\alpha} \\ &= \left(\frac{2^{\alpha+1}}{\alpha} R^{\alpha} + 1 \right) |z_2 - z_1| \|f\|_{\alpha} \end{aligned}$$

e, então, para $z_1, z_2 \in D$ e $z_1 \neq z_2$, temos

$$\frac{|Tf(z_2) - Tf(z_1)|}{|z_2 - z_1|} \leq \left(\frac{2^{\alpha+1}}{\alpha} R^\alpha + 1 \right) \|f\|_\alpha. \quad (1.12)$$

Portanto, de (1.11) e (1.12), segue-se que

$$\|Tf\|_H \leq 2^{1-\alpha} R^{1-\alpha} \left(\frac{2^{\alpha+1}}{\alpha} R^\alpha + 1 \right) \|f\|_\alpha. \quad (1.13)$$

Estamos, agora, em condições de calcular $\|T\|_\alpha$ e, ao mesmo tempo, mostrar que T aplica $C^\alpha(D)$ em $C^\alpha(D)$. Por (1.9) e (1.13), temos

$$\begin{aligned} \|Tf\|_\alpha &= \|Tf\|_\infty + \|Tf\|_H \\ &\leq 4R \|f\|_\alpha + \frac{4}{\alpha} R \|f\|_\alpha + 2^{1-\alpha} R^{1-\alpha} \|f\|_\alpha \\ &= \left(4R + \frac{4}{\alpha} R + 2^{1-\alpha} R^{1-\alpha} \right) \|f\|_\alpha, \end{aligned}$$

de onde concluímos que $\|T\|_\alpha \leq M_\alpha R^{1-\alpha}$, para $0 < R < 1$. $\square$

1.2 A desigualdade do valor médio em $C^\alpha(D)$

O principal resultado desta seção é o lema 1.2.3 que, juntamente com o teorema 1.1.1, são cruciais para a resolução do problema na seção 1.3.

Lema 1.2.1 $A, u \in C^\alpha(D) \Rightarrow A(z)u(z) \in C^\alpha(D)$ e $\|Au\|_\alpha \leq 3 \|A\|_\alpha \|u\|_\alpha$.

Demonstração

Sejam

$$A \in C^\alpha(D) \Leftrightarrow \|A\|_\alpha = \sup_{z \in D} |A(z)| + \sup_{z_1 \neq z_2} \left\{ \frac{|A(z_2) - A(z_1)|}{|z_2 - z_1|^\alpha} \right\} < \infty,$$

$$u \in C^\alpha(D) \Leftrightarrow \|u\|_\alpha = \sup_{z \in D} |u(z)| + \sup_{z_1 \neq z_2} \left\{ \frac{|u(z_2) - u(z_1)|}{|z_2 - z_1|^\alpha} \right\} < \infty.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|Au\|_\alpha &= \sup_{z \in D} |A(z)u(z)| + \sup_{z_1 \neq z_2} \left\{ \frac{|A(z_2)u(z_2) - A(z_1)u(z_1)|}{|z_2 - z_1|^\alpha} \right\} \\
&\leq \sup_{z \in D} |A(z)| \sup_{z \in D} |u(z)| \\
&\quad + \sup_{z_1 \neq z_2} \left\{ \frac{|A(z_2)(u(z_2) - u(z_1)) + u(z_1)(A(z_2) - A(z_1))|}{|z_2 - z_1|^\alpha} \right\} \\
&\leq \sup_{z \in D} |A(z)| \sup_{z \in D} |u(z)| + \sup_{z \in D} |A(z_2)| \sup_{z_1 \neq z_2} \left\{ \frac{|u(z_2) - u(z_1)|}{|z_2 - z_1|^\alpha} \right\} \\
&\quad + \sup_{z \in D} |u(z_1)| \sup_{z_1 \neq z_2} \left\{ \frac{|A(z_2) - A(z_1)|}{|z_2 - z_1|^\alpha} \right\} \\
&\leq 3 \|A\|_\alpha \|u\|_\alpha < \infty. \quad \square
\end{aligned}$$

Lema 1.2.2 *Seja $\vec{u} : D \longrightarrow \mathbb{C}^N$, com componentes em $C^\alpha(D)$. Se $H \in C^1(D \times \mathbb{C}^N)$, então $H(z, \vec{u}(z)) \in C^\alpha(D)$. Ademais, dado $M > 0$, existe $C > 0$ tal que*

$$\|\vec{u}\|_\alpha \leq M \Rightarrow \|H(z, \vec{u}(z))\|_\alpha \leq C.$$

Demonstração

Recordemos que $H \in C^1(D \times \mathbb{C}^N)$ implica a existência de $C' > 0$ tal que

$$|H(z_2, \vec{u}(z_2)) - H(z_1, \vec{u}(z_1))| \leq C'(|z_2 - z_1| + |\vec{u}(z_2) - \vec{u}(z_1)|), \quad (1.14)$$

$\forall z_1, z_2 \in D$. A desigualdade (1.14) é consequência imediata da aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo à função

$$\lambda(s) = H(sz_2 + (1-s)z_1, s\vec{u}(z_2) + (1-s)\vec{u}(z_1)).$$

De fato,

$$\lambda(1) - \lambda(0) = \int_0^1 \lambda'(s) ds = H(z_2, \vec{u}(z_2)) - H(z_1, \vec{u}(z_1)).$$

Então

$$\begin{aligned}
H(z_2, \vec{u}(z_2)) - H(z_1, \vec{u}(z_1)) &= \left(\int_0^1 \frac{\partial H}{\partial z}(\cdots) ds \right) (z_2 - z_1) \\
&\quad + \left(\int_0^1 \frac{\partial H}{\partial \bar{z}}(\cdots) ds \right) (\bar{z}_2 - \bar{z}_1) \\
&\quad + \left(\int_0^1 \frac{\partial H}{\partial \eta}(\cdots) ds \right) (\vec{u}(z_2) - \vec{u}(z_1)) \\
&\quad + \left(\int_0^1 \frac{\partial H}{\partial \bar{\eta}}(\cdots) ds \right) (\overline{\vec{u}(z_2)} - \overline{\vec{u}(z_1)}).
\end{aligned}$$

Notando que $z_1, z_2 \in D$ e u tem componentes em $C^\alpha(D)$ então, em valores absolutos, as derivadas parciais de H com respeito a $z, \bar{z}, \eta, \bar{\eta}$ são limitadas e, portanto, encontramos $C' > 0$ tal que (1.14) é verificada.

Seja $\vec{u} : D \longrightarrow \mathbb{C}^N$ dada por

$$\vec{u}(z) = (u_1(z), \dots, u_N(z)), \quad \text{onde } u_j(z) \in C^\alpha(D), \quad j = 1, \dots, N.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \sup_{z_1 \neq z_2} \left\{ \frac{|\vec{u}(z_2) - \vec{u}(z_1)|}{|z_2 - z_1|^\alpha} \right\} &= \sup_{z_1 \neq z_2} \left\{ \frac{|(u_1(z_2) - u_1(z_1), \dots, u_N(z_2) - u_N(z_1))|}{|z_2 - z_1|^\alpha} \right\} \\ &\leq \sup_{z_1 \neq z_2} \left\{ \frac{|u_1(z_2) - u_1(z_1)| + \dots + |u_N(z_2) - u_N(z_1)|}{|z_2 - z_1|^\alpha} \right\} \\ &= \sup_{z_1 \neq z_2} \left\{ \frac{|u_1(z_2) - u_1(z_1)|}{|z_2 - z_1|^\alpha} \right\} + \dots \\ &\quad + \sup_{z_1 \neq z_2} \left\{ \frac{|u_N(z_2) - u_N(z_1)|}{|z_2 - z_1|^\alpha} \right\} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Se $H \in C^1(D \times \mathbb{C}^N)$, então

$$\begin{aligned} \|H\|_\alpha &= \sup_{z \in D} |H(z, \vec{u}(z))| + \sup_{z_1 \neq z_2} \left\{ \frac{|H(z_2, \vec{u}(z_2)) - H(z_1, \vec{u}(z_1))|}{|z_2 - z_1|^\alpha} \right\} \\ &\stackrel{(1.14)}{\leq} \sup_{z \in D} |H(z, \vec{u}(z))| + C' \sup_{z_1 \neq z_2} \left\{ \frac{|\vec{u}(z_2) - \vec{u}(z_1)|}{|z_2 - z_1|^\alpha} \right\} \\ &\quad + C' \sup_{z_1 \neq z_2} \left\{ \frac{|z_2 - z_1|}{|z_2 - z_1|^\alpha} \right\} \\ &\leq \sup_{z \in D} |H(z, \vec{u}(z))| + C' \|\vec{u}\|_\alpha + C' 2^{1-\alpha} R^{1-\alpha} < \infty. \end{aligned}$$

Além do mais, como H é de classe C^1 no domínio limitado ($|z| < R$, $\|\vec{u}\|_\alpha \leq M$), então H é limitada e, daí, existe $C > 0$ tal que $\|H(z, \vec{u}(z))\|_\alpha \leq C$. $\square$

Lema 1.2.3 *Seja $h \in C^2(D \times \mathbb{C})$. Dado $M > 0$, existe $\beta > 0$ tal que*

$$\|u\|_\alpha, \|v\|_\alpha \leq M \quad \Rightarrow \quad \|h(z, u(z)) - h(z, v(z))\|_\alpha \leq \beta \|u - v\|_\alpha.$$

Demonstração

Sejam $h \in C^2(D \times \mathbb{C})$ e $\|u\|_\alpha, \|v\|_\alpha \leq M$. Consideremos, para $s \in [0, 1]$,

$$\lambda(s) = h(z, s\zeta_1 + (1-s)\zeta_2).$$

Assim,

$$\lambda'(s) = (\zeta_1 - \zeta_2) \frac{\partial h}{\partial \zeta}(z, s\zeta_1 + (1-s)\zeta_2) + (\bar{\zeta}_1 - \bar{\zeta}_2) \frac{\partial h}{\partial \bar{\zeta}}(z, s\zeta_1 + (1-s)\zeta_2).$$

Daí,

$$\begin{aligned} h(z, \zeta_1) - h(z, \zeta_2) &= \lambda(1) - \lambda(0) = \int_0^1 \lambda'(s) ds = \\ &= (\zeta_1 - \zeta_2) \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial \zeta}(z, s\zeta_1 + (1-s)\zeta_2) ds}_{F(z, \zeta_1, \zeta_2)} + (\bar{\zeta}_1 - \bar{\zeta}_2) \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial \bar{\zeta}}(z, s\zeta_1 + (1-s)\zeta_2) ds}_{G(z, \zeta_1, \zeta_2)}, \end{aligned}$$

onde $F, G \in C^1(D, \mathbb{C}^2)$. Logo,

$$h(z, u(z)) - h(z, v(z)) = (u - v)F(z, u, v) + (\bar{u} - \bar{v})G(z, u, v), \quad \forall z \in D.$$

Pelo lema 1.2.2, temos $F(z, u(z), v(z)), G(z, u(z), v(z)) \in C^\alpha(D)$ e

$$\begin{aligned} \|h(z, u(z)) - h(z, v(z))\|_\alpha &\leq \| (u - v)F(z, u, v) \|_\alpha + \| (\bar{u} - \bar{v})G(z, u, v) \|_\alpha \\ &\stackrel{(\text{Lema 1.2.1})}{\leq} 3 \| (u - v) \|_\alpha \| F(z, u, v) \|_\alpha \\ &\quad + 3 \| (\bar{u} - \bar{v}) \|_\alpha \| G(z, u, v) \|_\alpha \\ &\stackrel{(\text{Lema 1.2.2})}{\leq} 6C \| (u - v) \|_\alpha. \end{aligned}$$

Segue-se o resultado tomando $\beta = 6C$. $\square$

1.3 Procura do ponto fixo para o operador S

Estamos agora em condições de procurar um ponto fixo para o operador S , definido em (1.4), em um subespaço fechado de $C^\alpha(D)$.

Lema 1.3.1 *Sejam um subconjunto aberto $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$ tal que $(0, 0) \in \Omega_1$ e $h \in C^2(\Omega_1 \times \mathbb{C})$. Dado $\rho > 0$, existe $R > 0$ suficientemente pequeno tal que o operador $S : \overline{B}_\rho(0) \rightarrow \overline{B}_\rho(0)$, dado por $S(u) = T(h(z, u))$, é uma contração, onde R é o raio do disco D centrado na origem e $\overline{B}_\rho(0) \subset C^\alpha(D)$.*

Demonstração

Seja $h \in C^2(\Omega_1 \times \mathbb{C})$. Fixemos $R_0 > 0$, onde R_0 é o raio de um disco $D_0 \subset \Omega_1$ centrado na origem.

Primeiramente mostraremos que, dado $\rho > 0$, existe $R > 0$ tal que o operador S , dado por $S(u) = T(h(z, u))$, aplica $\overline{B}_\rho(0)$ em $\overline{B}_\rho(0)$.

De fato, dado $\rho > 0$, existe $C = C(\rho) > 0$ tal que, para $\|u\|_\alpha \leq \rho$, temos

$$\begin{cases} |h(z, u(z))| \leq C & , \forall |z| \leq R_0, \\ |\partial h(z, u(z))| + |\bar{\partial} h(z, u(z))| \leq C & , \forall |z| \leq R_0. \end{cases}$$

Daí, para um disco D de raio R centrado na origem, com $R \leq R_0$, e usando o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\begin{aligned} \|h(z, u)\|_\alpha &= \sup_{z \in D} |h(z, u(z))| + \sup_{z_1 \neq z_2} \left\{ \frac{|h(z_1, u(z_1)) - h(z_2, u(z_2))|}{|z_2 - z_1|^\alpha} \right\} \\ &\leq C + 2C(2R)^{1-\alpha} + 2C\rho. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|S(u)\|_\alpha &\leq \|T\|_\alpha \|h(z, u)\|_\alpha \\ &\leq M_\alpha R^{1-\alpha} (C + 2C(2R)^{1-\alpha} + 2C\rho) \\ &\leq \rho, \quad \text{para um } R \text{ apropriado.} \end{aligned}$$

Provaremos, agora, que S é uma contração para R suficientemente pequeno.

Sejam $u, v \in \overline{B}_\rho(0)$. Temos

$$\begin{aligned} \|S(u) - S(v)\|_\alpha &= \|T(h(z, u)) - T(h(z, v))\|_\alpha \\ &\leq \|T\|_\alpha \|h(z, u) - h(z, v)\|_\alpha \\ &\leq M_\alpha R^{1-\alpha} \beta \|u - v\|_\alpha, \quad 0 < R < 1 \end{aligned}$$

e, daí, concluimos que se R for suficientemente pequeno, então

$$\begin{cases} R < 1, \\ R \leq R_0, \\ M_\alpha R^{1-\alpha} (C + 2C(2R)^{1-\alpha} + 2C\rho) \leq \rho, \\ M_\alpha R^{1-\alpha} \beta < 1. \end{cases}$$

□

Como $S : \overline{B}_\rho(0) \rightarrow \overline{B}_\rho(0)$ é uma contração, então existe $u \in \overline{B}_\rho(0)$ tal que

$$u = S(u) = T(h(z, u)).$$

Aplicando o operador de Cauchy-Riemann a ambos membros da igualdade, segue que

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = h(z, u) \quad \text{em } D,$$

resolvendo (1.2).

Iremos um pouco adiante em nosso estudo e provaremos, agora, o corolário 0.1 mencionado na introdução.

Lema 1.3.2 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ aberto e $0 < \alpha < 1$. Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é tal que $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \in C_{loc}^\alpha(\Omega)$, então $u \in C_{loc}^{1,\alpha}(\Omega)$.*

Demonstração

Ver [5] (Theorem 7.9.7, página 246).

Do lema 1.3.2, provaremos a seguinte afirmação:

“Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é tal que $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \in C_{loc}^{m,\alpha}(\Omega)$, então $u \in C_{loc}^{m+1,\alpha}(\Omega)$.”

De fato, se D é o operador de derivação de ordem m , então se $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \in C_{loc}^{m,\alpha}(\Omega)$ temos

$$D \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial(Du)}{\partial \bar{z}} \in C_{loc}^\alpha(\Omega) \Rightarrow Du \in C_{loc}^{1,\alpha}(\Omega). \quad \text{Portanto, } u \in C_{loc}^{m+1,\alpha}(\Omega). \quad \square$$

Corolário 1.3.1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ aberto e $0 \in \Omega$. Se $h \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{C})$, então existem $R > 0$ e $u \in C^\infty(D)$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\} \subset \Omega$ tais que*

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = h(z, u) \quad \text{em } D. \tag{1.15}$$

Demonstração

Provaremos por indução que $u \in C_{loc}^{m,\alpha}(D)$, $\forall m \geq 0$, onde u é a solução obtida anteriormente em $C^\alpha(D)$.

- $m = 0$

Vimos que se Ω_1 é um aberto de $\mathbb{R}^2$ e $h \in C^\infty(\Omega_1 \times \mathbb{C})$, então a equação

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = h(z, u)$$

admite uma solução $u \in C^\alpha(D)$, $D \subset \Omega_1$, $0 < \alpha < 1$.

- Suponhamos o processo de indução válido para um $m > 0$

Então

$$u \in C_{loc}^{m,\alpha}(D) \Rightarrow h(z, u) \in C_{loc}^{m,\alpha}(D) \Rightarrow u \in C_{loc}^{m+1,\alpha}(D), \quad \forall m \geq 0.$$

Logo, $u \in C^\infty(D)$. $\square$

O operador $\partial_t - it^k \partial_x$

Consideraremos o seguinte operador em $\mathbb{R}^2$:

$$L = \partial_t - it^k \partial_x \quad ,$$

onde k é um inteiro positivo par, $i = \sqrt{-1}$ e as variáveis são denotadas por (x, t) .

Neste capítulo provaremos a resolubilidade local da equação semilinear

$$Lu = f(x, t, u) \quad , \tag{2.1}$$

onde f é uma função complexa de classe C^∞ .

Mais precisamente, provaremos o seguinte teorema:

Teorema 2.1 *Seja k um número inteiro positivo par. Se $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C})$ e $s > 1$, então existem $\rho = \rho(s) > 0$ e $u \in H^s(\mathbb{R}^2)$ tais que u verifica*

$$\partial_t u - it^k \partial_x u = f(x, t, u),$$

em $|(x, t)| < \rho$.

Neste capítulo denotaremos $H^s(\mathbb{R}^2)$ por H^s .

A demonstração está organizada da seguinte maneira:

Na seção 2.1 construiremos um operador inverso à direita, denotado por T , para a parte linear da equação, cuja norma em um espaço de codimensão finita seja tão pequena quanto se queira. Na seção 2.2 modificaremos a equação (2.1) a uma forma mais conveniente para, finalmente, na seção 2.3, mostrarmos a existência de um ponto fixo para um operador não linear adequado.

2.1 Um operador inverso à direita para a parte linear

Definição 2.1.1 Dizemos que o Operador Diferencial Parcial Linear $L(x, D)$ satisfaz a condição $(\mathcal{P})$ no ponto $(x_0, \xi_0) \in \Omega \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ se existirem uma vizinhança aberta $(\mathcal{O})$ de (x_0, ξ_0) em $\Omega \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ e um número complexo z tais que:

1. $\nabla_{\xi} \operatorname{Re}(zP_m)(x, \xi) \neq 0, \quad \forall (x, \xi) \in \mathcal{O}.$
2. A restrição de $\operatorname{Im}(zP_m)$ a qualquer bicaracterística nula de $\operatorname{Re}(zP_m)$ em $(\mathcal{O})$ não muda de sinal.

Lembremos que o símbolo principal do operador L é a função

$$L_1(x, t, \xi, \tau) = i(\tau - it^k \xi).$$

Assim $L_1(x_0, t_0, \xi_0, \tau_0) = 0, (\xi_0, \tau_0) \neq 0$ se, e somente se, $t_0 = \tau_0 = 0, \xi_0 \neq 0$.

Tomemos $z = -i (= -\sqrt{-1})$. Então

$$\nabla_{(\xi, \tau)} \operatorname{Re}(-iL_1) = \nabla_{(\xi, \tau)} \operatorname{Re}(-ii(\tau - it^k \xi)) = \nabla_{(\xi, \tau)} \operatorname{Re}(\tau - it^k \xi) = \nabla_{(\xi, \tau)} \tau = (0, 1)$$

e a condição 1 está satisfeita.

As curvas bicaracterísticas de $\operatorname{Re}(-iL_1) = \tau$ são soluções das equações de Hamilton

$$\begin{cases} (\dot{x}, \dot{t}) = \nabla_{(\xi, \tau)} \operatorname{Re}(-iL_1) = (0, 1) \\ (\dot{\xi}, \dot{\tau}) = -\nabla_{(x, t)} \operatorname{Re}(-iL_1) = (0, 0). \end{cases}$$

A bicaracterística nula de $\operatorname{Re}(-iL_1) = \tau$ que passa por $(x_0, 0, \xi_0, 0)$ é dada por

$$s \longmapsto (x_0, s, \xi_0, 0)$$

e a restrição de $\operatorname{Im}(-iL_1)$ a esta curva é a função

$$s \longmapsto -s^k \xi_0,$$

que muda de sinal em $s = 0$ se, e somente se, k é ímpar.

Proposição 2.1.1 *Se K é um compacto $\subset \mathbb{R}^2$, s e s' são números reais e k é um inteiro positivo par, então existem constantes $C > 0$ e $C' = C'(s, s', K) > 0$ tais que*

$$\|u\|_{s+\frac{1}{k+1}} \leq C \|Lu\|_s + C' \|u\|_{s'} \quad , \quad u \in C_c^\infty(K).$$

Demonstração Ver [3] (Proposição 2.1, página 44)

Lema 2.1.1 (Desigualdade de Gagliardo) *Se l, l', l'' são números reais, $l > l' \geq l''$, então, para cada $\epsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que*

$$\|u\|_{l'} \leq \epsilon \|u\|_l + M \|u\|_{l''} \quad , \quad u \in H_c^s(K).$$

Proposição 2.1.2 *Seja K um compacto $\subset \mathbb{R}^2$. Para todo $s \in \mathbb{R}$ e todo $\epsilon > 0$, existe $C = C(s, \epsilon, K) > 0$ tal que*

$$\|u\|_s \leq \epsilon \|{}^tLu\|_s + C \|u\|_{s-1} \quad , \quad u \in C_c^\infty(K).$$

Demonstração

Sejam $\epsilon' > 0$ e um compacto $K \subset \mathbb{R}^2$.

Pela proposição 2.1.1, se s é um número real, existem C' e $C'' = C''(s, K)$ tais que, para $\forall u \in C_c^\infty(K)$,

$$\|u\|_{s+\frac{1}{k+1}} \leq C' \|Lu\|_s + C'' \|u\|_s \quad . \quad (2.2)$$

Por outro lado, pela desigualdade de Gagliardo, existe $M > 0$ tal que

$$\|u\|_s \leq \epsilon' \|u\|_{s+\frac{1}{k+1}} + M \|u\|_{s-1} \quad . \quad (2.3)$$

Substituindo (2.2) em (2.3) segue que

$$\begin{aligned} \|u\|_s &\leq \epsilon' (C' \|{}^tLu\|_s + C'' \|u\|_s) + M \|u\|_{s-1} \\ &= \epsilon' C' \|{}^tLu\|_s + \epsilon' C'' \|u\|_s + M \|u\|_{s-1} \quad , \end{aligned}$$

o que implica, para ϵ' suficientemente pequeno, que

$$\|u\|_s \leq \underbrace{\frac{\epsilon' C'}{1 - \epsilon' C''}}_{\epsilon} \|{}^tLu\|_s + \underbrace{\frac{M}{1 - \epsilon' C''(s, K)}}_{C(s, \epsilon, K)} \|u\|_{s-1} \quad . \quad \square$$

Proposição 2.1.3 *Sejam um compacto $K \subset \mathbb{R}^2$ e $Q_1(x, t), Q_2(x, t) \in C_c^\infty(K)$. Consideremos o operador diferencial $L'u = Lu + Q_1(x, t)u + Q_2(x, t)\bar{u}$. Para todo $s \in \mathbb{R}$ e todo $\epsilon > 0$, existe $C = C(s, \epsilon, K) > 0$ tal que*

$$\|u\|_s \leq \epsilon \|{}^tL'u\|_s + C\|u\|_{s-1}, \quad u \in C_c^\infty(K). \quad (2.4)$$

Evidenciamos que o operador diferencial L' é linear real.

Demonstração

Sejam $\epsilon > 0$, $s \in \mathbb{R}$ e $K \subset \mathbb{R}^2$ um compacto dados.

Sabemos que

$$\begin{aligned} \|Q_1u\|_s &\leq C_1\|u\|_s, \\ \|Q_2\bar{u}\|_s &\leq C_2\|\bar{u}\|_s = C_2\|u\|_s. \end{aligned}$$

Assim, seja $C' = C_1 + C_2$. Então

$$\|Q_1u\|_s + \|Q_2\bar{u}\|_s \leq (C_1 + C_2)\|u\|_s = C'\|u\|_s.$$

Tomemos $\epsilon' > 0$ tal que $2\epsilon' \leq \epsilon$ e $\epsilon'C' < \frac{1}{2}$.

Segue da proposição 2.1.2 que existe $C = C(s, \epsilon', K) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|u\|_s &\leq \epsilon' \|{}^tLu\|_s + C\|u\|_{s-1} \\ &\leq \epsilon' \|{}^tL'u\|_s + \epsilon' \|Q_1u\|_s + \epsilon' \|Q_2\bar{u}\|_s + C\|u\|_{s-1} \\ &\leq \epsilon' \|{}^tL'u\|_s + \underbrace{\epsilon'C'}_{< 1/2} \|u\|_s + C\|u\|_{s-1}, \quad u \in C_c^\infty(K). \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\|u\|_s \leq \epsilon' \|{}^tL'u\|_s + C\|u\|_{s-1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|u\|_s &\leq \underbrace{2\epsilon'}_{\leq \epsilon} \|{}^tL'u\|_s + 2C\|u\|_{s-1} \\ &\leq \epsilon \|{}^tL'u\|_s + C''\|u\|_{s-1}, \quad C'' = 2C. \quad \square \end{aligned}$$

Consideraremos, agora, o subespaço Δ de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ gerado pela medida de Dirac δ e suas derivadas de todas as ordens. Escrevamos

$$\Delta_s = \Delta \cap H^s.$$

Lema 2.1.2 *A dimensão N_s de Δ_s é finita para todo $s \in \mathbb{R}$ e é zero se $s \geq -1$.*

Demonstração

1º caso : $s \geq -1$

Sejam $u \in \Delta$, u de ordem m qualquer e $s \geq -1$. Já vimos na proposição A.3.1 que

$$u \in H^s \Leftrightarrow s + m < -1. \quad (2.5)$$

No entanto, por (2.5), $s \geq -1$ implica $m < 0$. Como a ordem não pode ser negativa, segue-se que a dimensão N_s é zero.

2º caso : $s < -1$

Dado $s < -1$, encontramos um inteiro m finito não negativo satisfazendo $m < -1 - s$. Assim, existe $u \in \Delta_s$ que se escreve como

$$u = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \delta^{(\alpha)} \quad , \quad c_\alpha \in \mathbb{C} \quad ,$$

onde $\delta^{(\alpha)}$ representa a derivada parcial de ordem α do δ . $\square$

No lema seguinte consideraremos funções teste ortogonais a Δ_s com respeito ao produto interno de H^s .

Lema 2.1.3 *Para todo $s \in \mathbb{R}$ e todo $\epsilon > 0$, existe $\rho > 0$ tal que*

$$\| u \|_{s-1} \leq \epsilon \| u \|_s \quad , \quad u \in C_c^\infty(B_\rho) \quad , \quad u \perp \Delta_s \quad .$$

Demonstração

Provaremos por contradição. Então

$$\exists s \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0 : \forall \nu \in \mathbb{N}, \exists v_\nu \in C_c^\infty(B_{1/\nu}), \quad v_\nu \perp \Delta_s$$

tal que

$$\| v_\nu \|_{s-1} > \epsilon \| v_\nu \|_s \quad .$$

Definindo $u_\nu = v_\nu / \|v_\nu\|_s$, obtemos

$$\|u_\nu\|_{s-1} > \epsilon, \quad \|u_\nu\|_s = 1, \quad u_\nu \in C_c^\infty(B_{1/\nu}), \quad u_\nu \perp \Delta_s.$$

Pela proposição A.3.2, a injeção de H^s em H^{s-1} é compacta e, como as u_ν são limitadas em H^s , há uma subsequência delas que converge fracamente em H^s , tendo em vista uma propriedade geral dos espaços de Hilbert. Pelo teorema A.2.1 e do fato de que $\|u_\nu\|_{s-1} > \epsilon$, esta subsequência deve convergir fortemente para algum elemento $u \in H^{s-1}$ tal que $\|u\|_{s-1} > \epsilon$, cujo suporte é a origem. Isto é, u é combinação linear finita da medida de Dirac δ e suas derivadas na origem, mas isto contradiz a hipótese de que $u \perp \Delta_s$. $\square$

Combinando a proposição 2.1.3 e o lema 2.1.3 obtemos a seguinte proposição:

Proposição 2.1.4 *Seja L' o operador diferencial linear definido na proposição 2.1.3. Para todo $s \in \mathbb{R}$ e todo $\epsilon > 0$, existe $\rho > 0$ tal que*

$$\|u\|_s \leq \epsilon \|{}^tL'u\|_s, \quad u \in C_c^\infty(B_\rho), \quad u \perp \Delta_s. \quad (2.6)$$

Utilizaremos o lema 2.1.4 a seguir para demonstrar o lema 2.1.5:

Lema 2.1.4 *Seja*

$$P(x, \frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \quad \text{tal que} \quad a_\alpha \in C^\infty \quad e \quad \sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha(0)| \neq 0.$$

Se $\text{supp } u \subset \{0\}$ e $Pu = 0$, então $u = 0$.

Demonstração Ver [8] (Lemma 1.1, página 469)

Lema 2.1.5 *Para $s \in \mathbb{R}$, todo ponto $x_0 \in \mathbb{R}^2$ tem uma vizinhança $\bar{\Omega}_s$ tal que, para alguma constante $C = C(s) > 0$,*

$$\|u\|_s \leq C \|{}^tL'u\|_s, \quad u \in C_c^\infty(\bar{\Omega}_s).$$

Demonstração

Suponhamos que existe $s \in \mathbb{R}$ e x_0 , o qual vamos supor ser a origem, tais que para qualquer $j \in \mathbb{N}$ exista $v_j \in C_c^\infty(B_{1/j}(0))$ tal que

$$\|v_j\|_s > j \|{}^tL'v_j\|_s.$$

Definindo $u_j = v_j / \|v_j\|_s$, obtemos

$$u_j \in C_c^\infty(B_{1/j}(0)), \quad \|u_j\|_s = 1, \quad \|{}^tL'u_j\|_s < 1/j.$$

Como a injeção de $H^s(\overline{B_1(0)})$ em $H^{s-1}(\overline{B_1(0)})$ é compacta, então a sequência limitada u_j em $H^s(\overline{B_1(0)})$ é levada em uma sequência u_j em $H^{s-1}(\overline{B_1(0)})$ que tem subsequência convergente, isto é, $u_{j_k} \rightarrow u$ em $H^{s-1}(\overline{B_1(0)})$.

Por outro lado, ${}^tL'u_{j_k} \rightarrow 0$ em H^s implica ${}^tL'u = 0$ tal que $\text{supp } u = \{0\}$; logo, pelo lema 2.1.4, temos $u = 0$.

Portanto, de (2.4),

$$\|u_{j_k}\|_s = 1 \leq \epsilon \|{}^tL'u_{j_k}\|_s + C \|u_{j_k}\|_{s-1},$$

com $\|{}^tL'u_{j_k}\|_s \rightarrow 0$, $\|u_{j_k}\|_{s-1} \rightarrow 0$, o que é uma contradição. $\square$

A proposição que enunciaremos a seguir é um dos principais passos na prova do teorema 2.1.

Proposição 2.1.5 *Seja L' o operador diferencial linear definido na proposição 2.1.3. Para todo $s \in \mathbb{R}$ e todo $\epsilon > 0$, existem $\rho > 0$, um subespaço fechado $F^s \subset H^s$, de codimensão¹ finita, e um operador linear limitado (contínuo) $T : H^s \rightarrow H^s$ tais que*

1. $L'Tu = u$ em B_ρ , $u \in H^s$,
2. $\|Tu\|_s \leq \epsilon \|u\|_s$, $u \in F^s$.

Demonstração

Como, pelo lema 2.1.2, o subespaço Δ_s tem dimensão finita em H^s , então ele é fechado em H^s . Isto nos permite escrever

$$H^s = \Delta_s \oplus \Delta_s^\perp.$$

Seja $u \in C_c^\infty(B_\rho)$. Como $C_c^\infty(B_\rho) \subset H^s$, então

$$u = v + w, \tag{2.7}$$

¹Recordemos que a codimensão de um subespaço F de um espaço vetorial H é a dimensão do espaço quociente H/F . Adiante usaremos codim para designar codimensão.

onde $v \in \Delta_s$ e $w \in \Delta_s^\perp$. A equação (2.7) nos permite definir a seguinte aplicação linear:

$$\begin{aligned} p : C_c^\infty(B_\rho) &\longrightarrow \Delta_s \\ u &\longmapsto v = p(u) \quad . \end{aligned}$$

Consideramos, agora, o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} C_c^\infty(B_\rho) & \xrightarrow{p} & \Delta_s \\ \downarrow & \nearrow \bar{p} & \\ \frac{C_c^\infty(B_\rho)}{C_c^\infty(B_\rho) \cap \Delta_s^\perp} & & \end{array}$$

Observamos que:

- $\text{Ker } p = \{u \in C_c^\infty(B_\rho) : p(u) = 0\} = C_c^\infty(B_\rho) \cap \Delta_s^\perp$.

A aplicação $\bar{p}[u] = pu$ está bem definida e é injetora. De fato,

$$\text{se } [u] = u + \text{Ker } p, \quad [u'] = u' + \text{Ker } p \in C_c^\infty(B_\rho) / (C_c^\infty(B_\rho) \cap \Delta_s^\perp),$$

então

$$\begin{aligned} [u] = [u'] &\Leftrightarrow u + \text{Ker } p = u' + \text{Ker } p \\ &\Leftrightarrow u - u' \in \text{Ker } p \\ &\Leftrightarrow p(u - u') = 0 \\ &\Leftrightarrow pu = pu' \\ &\Leftrightarrow \bar{p}[u] = \bar{p}[u']. \end{aligned}$$

Da injetividade da aplicação $\bar{p}$ e da definição de codimensão, segue que $C_c^\infty(B_\rho) \cap \Delta_s^\perp$ tem codimensão finita $n_s \leq N_s$ em $C_c^\infty(B_\rho)$, isto é,

$$\dim \left(C_c^\infty(B_\rho) / (C_c^\infty(B_\rho) \cap \Delta_s^\perp) \right) = n_s \leq N_s \quad . \quad (2.8)$$

De (2.8), e do fato de que ${}^t L'$ é uma aplicação sobrejetora de $C_c^\infty(B_\rho)$ em ${}^t L' C_c^\infty(B_\rho)$, o teorema A.1.2 nos permite deduzir que

$$\dim \left({}^t L' C_c^\infty(B_\rho) / {}^t L' (C_c^\infty(B_\rho) \cap \Delta_s^\perp) \right) = n_s \quad . \quad (2.9)$$

Em outras palavras, ${}^tL'(C_c^\infty(B_\rho) \cap \Delta_s^\perp)$ tem codimensão n_s em ${}^tL'C_c^\infty(B_\rho)$.

Escrevemos, agora, $X = \overline{{}^tL'C_c^\infty(B_\rho)}$ e $Y = \overline{{}^tL'(C_c^\infty(B_\rho) \cap \Delta_s^\perp)}$, onde o fecho é tomado em H^s .

Os dois lemas seguintes nos mostrarão que Y tem codimensão n_s em X e, assim, poderemos encontrar, pelo teorema A.1.3, um complemento ortogonal B de Y em X , de dimensão n_s , tal que $X = Y \oplus B$.

Lema 2.1.6 *Sejam os espaços vetoriais V e W tais que $V = {}^tL'C_c^\infty(B_\rho) \supset W = {}^tL'(C_c^\infty(B_\rho) \cap \Delta_s^\perp)$. Consideremos a aplicação linear $\pi : V \longrightarrow V/W$. Se $x_n \in V$ é tal que $\pi(x_n) \rightarrow 0$, então $\exists y_n \in V$ tal que $y_n \rightarrow 0$, $\pi(y_n) = \pi(x_n)$.*

Demonstração

Definiremos a seguinte norma em V/W :

$$\|\pi(x)\|_s = \inf_{z \in W} \|x - z\|_s, \quad x \in V.$$

Como $0 \in W$, segue-se que $\|\pi(x)\|_s \leq \|x\|_s$; logo, π é contínua em V .

Seja $x_n \in V$ tal que $\pi(x_n) \rightarrow 0$. Então

$$\|\pi(x_n)\|_s = \inf_{z \in W} \|x_n - z\|_s = a_n \rightarrow 0.$$

Pela definição de ínfimo, existe $z_n \in W$ tal que $\|x_n - z_n\|_s < a_n + 1/n$. Portanto,

$$\begin{cases} y_n = x_n - z_n \rightarrow 0 \\ z_n = x_n - y_n \in W \Leftrightarrow x_n + W = y_n + W \Leftrightarrow \pi(x_n) = \pi(y_n). \end{cases}$$

Observamos que $W = \text{Ker}\pi$. $\square$

Lema 2.1.7 *Sejam V e W definidos no lema 2.1.6. Então $V/W \sim \overline{V}/\overline{W} = X/Y$, onde " $\sim$ " significa isomorfo a.*

Demonstração

Seja π a aplicação linear dada no lema 2.1.6. De (2.9), temos

$$\pi : V \longrightarrow V/W \sim \mathbb{C}^{n_s}, \quad W = \text{Ker}\pi.$$

Como π é uma aplicação linear contínua em V , existe uma única $\bar{\pi}$, aplicação linear contínua em $\bar{V}$, dada por

$$\bar{\pi} : \bar{V} \longrightarrow \bar{V}/\text{Ker}\bar{\pi} \sim \mathbb{C}^{n_s}.$$

Basta, então, mostrar que $\bar{W} = \text{Ker}\bar{\pi}$, e obteremos o isomorfismo desejado.

$$(\Rightarrow) \quad \bar{W} \subset \text{Ker}\bar{\pi}.$$

Seja $x \in \bar{W}$. Logo, existe $x_n \in W$, isto é, $\pi(x_n) = 0$ tal que $x_n \rightarrow x$. Pela continuidade da $\bar{\pi}$, segue-se que

$$x_n \rightarrow x \implies \pi(x_n) = \bar{\pi}(x_n) \rightarrow \bar{\pi}(x), \quad \bar{\pi}(x) = 0.$$

Isto implica que $x \in \text{Ker}\bar{\pi}$.

$$(\Leftarrow) \quad \text{Ker}\bar{\pi} \subset \bar{W}.$$

Seja $x \in \bar{V}$ tal que $x \in \text{Ker}\bar{\pi}$, isto é, $\bar{\pi}(x) = 0$. Logo, existe $x_n \in V$ tal que $x_n \rightarrow x$. Pela continuidade da $\bar{\pi}$, segue-se que

$$x_n \rightarrow x \implies \bar{\pi}(x_n) \rightarrow \bar{\pi}(x) = 0.$$

Como $x_n \in V$, então $\pi(x_n) = \bar{\pi}(x_n) \rightarrow 0$. Daí, pelo lema 2.1.6, existe $y_n \in V$, $y_n \rightarrow 0$, $\pi(x_n) = \pi(y_n)$. Entretanto,

$$\pi(x_n) = \pi(y_n) \iff W = \text{Ker}\pi \ni (x_n - y_n) \rightarrow x.$$

Portanto, $x \in \bar{W}$ e, com isto, o lema fica demonstrado. $\square$

Fim da demonstração da proposição 2.1.5

Pelo lema 2.1.5, segue que para $s \in \mathbb{R}$, para um pequeno $\rho = \rho(s) > 0$ e um certo $C = C(s) > 0$, temos

$$\|u\|_s \leq C \|{}^tL'u\|_s, \quad u \in C_c^\infty(B_\rho). \quad (2.10)$$

Notamos, de (2.10), que ${}^tL'$ é uma aplicação injetora de $C_c^\infty(B_\rho)$ em ${}^tL'C_c^\infty(B_\rho)$ e, como já sabemos que ${}^tL'$ é sobrejetora de $C_c^\infty(B_\rho)$ em ${}^tL'C_c^\infty(B_\rho)$, podemos escrever a sua aplicação linear inversa contínua da seguinte forma:

$$G' : {}^tL'C_c^\infty(B_\rho) \longrightarrow C_c^\infty(B_\rho) \subset H^s, \quad \|G'u\|_s \leq C \|u\|_s ;$$

porém, por ser imediata, omitimos a verificação da linearidade de G' . Existe, então, uma única aplicação linear contínua (ver [7] (2.7 – 11 Theorem, página 100))

$$G : X = \overline{{}^t L' C_c^\infty(B_\rho)} \longrightarrow H^s, \quad \|Gu\|_s \leq C \|u\|_s \quad (2.11)$$

tal que, para toda $\phi \in C_c^\infty(B_\rho)$,

$$G({}^t L' \phi) = G'({}^t L' \phi) = \phi.$$

Usando (2.6) e, de maneira análoga, provamos que ${}^t L'$ é uma aplicação bijetora de $C_c^\infty(B_\rho) \cap \Delta_s^\perp$ em ${}^t L'(C_c^\infty(B_\rho) \cap \Delta_s^\perp)$; daí, a aplicação linear inversa contínua

$$G'' : {}^t L'(C_c^\infty(B_\rho) \cap \Delta_s^\perp) \longrightarrow C_c^\infty(B_\rho) \cap \Delta_s^\perp \subset H^s, \quad \|G''u\|_s \leq \epsilon \|u\|_s,$$

se estende unicamente à aplicação linear contínua

$$G|_Y : Y = \overline{{}^t L'(C_c^\infty(B_\rho) \cap \Delta_s^\perp)} \longrightarrow H^s, \quad \|Gu\|_s \leq \epsilon \|u\|_s. \quad (2.12)$$

Agora, estendemos G para $H^s = X \oplus X^\perp$, anulando-a em $X^\perp$, mantendo a notação G para esta extensão. De (2.11) e (2.12), a nova $G : H^s \longrightarrow H^s$ verifica

$$\|Gu\|_s \leq C \|u\|_s, \quad u \in H^s, \quad (2.13)$$

$$\|Gu\|_s \leq \epsilon \|u\|_s, \quad u \in Y.$$

Como G é uma aplicação linear contínua de H^s em H^s , então a observação A.2.1 e o teorema A.3.1 nos permitem afirmar que a transposta da G , denotada por T , é dada por:

$$T : H^{-s} \longrightarrow H^{-s}.$$

Seja $u \in H^{-s}$. Logo, $Tu \in H^{-s} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, pelo exemplo A.2.1. Da definição A.2.1 e da observação A.2.1 temos, para qualquer $\phi \in C_c^\infty(B_\rho)$,

$$\langle L'Tu, \phi \rangle = \langle Tu, {}^t L' \phi \rangle = \langle u, G^t L' \phi \rangle = \langle u, \phi \rangle,$$

e isto prova a parte 1., após trocar s por $-s$.

Antes de prosseguir com a demonstração da parte 2., provaremos a seguinte afirmação:

“Para $s \in \mathbb{R}$, seja $F_{-s} = G(B)^0 \subset H^{-s}$ o anulador de $G(B) \subset H^s$. Então F_{-s} é fechado em H^{-s} e $\text{codim}(F_{-s}) = \dim(B) \leq N_s$.”

É fato conhecido, da análise funcional, que $G(B)^0$ é fechado em H^{-s} .

Passaremos a demonstrar, então, que $\text{codim}(F_{-s}) = \dim(B) \leq N_s$.

Seja $u \in G(B)^0 = \{u \in H^{-s} : u(\phi) = 0, \phi \in G(B)\}$. Como $u \in (H^s)'$ é um funcional linear contínuo, então, pelo teorema de representação de Riesz, podemos escrever $G(B)^0 = \{u \in H^{-s} : (u, \phi)_s = 0, \phi \in G(B)\}$. Isto é,

$$u \in G(B)^0 \iff u \in G(B)^\perp. \quad (2.14)$$

Por outro lado, pelos teoremas A.1.2 e A.1.3, temos

$$B \sim X/Y \sim G(X)/G(Y) \sim G(X/Y) \sim G(B), \quad (2.15)$$

onde “ $\sim$ ” significa isomorfo a. Como, por (2.15), $G(B)$ é finito dimensional, então $G(B)$ é fechado em H^s . Assim, H^s pode ser escrito como $H^s = G(B) \oplus G(B)^\perp$; logo,

$$\dim(G(B)) = \text{codim}(G(B)^\perp) \quad (2.16)$$

e, portanto,

$$\text{codim}(G(B)^0) \stackrel{(2.14)}{=} \text{codim}(G(B)^\perp) \stackrel{(2.16)}{=} \dim(G(B)) = \dim(B) \leq N_s.$$

Retornemos à demonstração da parte 2..

Sejam $u \in F_{-s} = G(B)^0$, $v \in H^s = Y \oplus B \oplus X^\perp$ e $v = y \oplus b \oplus x^\perp$, com $y \in Y$, $b \in B$ e $x^\perp \in X^\perp$. Então, pela observação A.2.1 e pela forma bilinear (A.2), temos

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, Gv \rangle = \langle u, Gy + Gb \rangle = \langle u, Gy \rangle + \langle u, Gb \rangle = \langle u, Gy \rangle$$

e, usando (2.13),

$$|\langle Tu, v \rangle| = |\langle u, Gy \rangle| \leq \|u\|_{-s} \|Gy\|_s \leq \|u\|_{-s} \epsilon \|y\|_s \leq \epsilon \|u\|_{-s} \|v\|_s$$

e mostra que a restrição de T a F_{-s} tem norma do operador limitada por ϵ . Isto prova a parte 2., após mudar $-s$ por s . $\square$

2.2 Algumas reduções

Assumiremos algumas reduções para a equação

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - it^k \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t, u), \quad (2.17)$$

a fim de resolvê-la localmente em H^s , para algum $s > 1$.

Consideremos a função λ dada por

$$\lambda(p) = f(x, t, p\zeta), \quad p \in [0, 1].$$

Pelo teorema fundamental do cálculo, temos

$$\lambda(1) = \lambda(0) + \int_0^1 \lambda'(p) dp, \quad (2.18)$$

onde $\lambda'(p) = \frac{\partial f}{\partial \zeta}(x, t, p\zeta)\zeta + \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(x, t, p\zeta)\bar{\zeta}$. Para resolver a equação (2.17) em uma vizinhança da origem, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $f(x, t, \zeta) = 0$ se $|(x, t)| \geq 1$ e, então, de (2.18),

$$f(x, t, \zeta) = \underbrace{f(x, t, 0)}_{\phi(x, t)} + \underbrace{\int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta}(x, t, p\zeta)\zeta + \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(x, t, p\zeta)\bar{\zeta} \right) dp}_{f_1(x, t, \zeta)}, \quad (2.19)$$

onde

$$\phi \in C_c^\infty(B_1) \quad e \quad f_1(x, t, 0) = 0.$$

Como o coeficiente de $L = \partial_t - it^k \partial_x$ é diferente de 0 na origem, podemos determinar uma solução formal de (2.17) expressa por meio de uma série de potências formal. Consideremos, então, a série de potências formal

$$u(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_j(x)}{j!} t^j, \quad (2.20)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_j \in C_c^\infty(B_1)$$

e a função f dada por

$$f(x, t, u) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} f_{pl}(x) t^p u^l, \quad (2.21)$$

$$f_{pl} \in C_c^\infty(B_1).$$

Notamos que

$$0 = u(x, 0) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_j(x)}{j!} 0^j = u_0(x).$$

Resta encontrar, para $j \geq 1$, as funções suaves com suporte compacto $u_j(x)$. Isto é feito substituindo (2.20) e (2.21) na equação (2.17), de onde resulta a igualdade

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_{j+1}(x)}{j!} t^j - i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u'_j(x)}{j!} t^{j+k} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} f_{pl}(x) t^p \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_j(x)}{j!} t^j \right)^l. \quad (2.22)$$

Para um certo q , inteiro não negativo, $u_{q+1}(x)$ fica determinada, como função de $u_0(x), \dots, u_q(x)$, igualando os coeficientes de t^q de ambos membros de (2.22). É preciso, para tanto, considerar dois casos:

1º caso : $q \geq k$

Omitindo os passos intermediários, chegamos a

$$\frac{u_{q+1}(x)}{q!} - i \frac{u'_{q-k}(x)}{(q-k)!} = \sum_{p=0}^q \sum_{l=1}^q f_{pl}(x) C(u_0, \dots, u_{q-p}) + f_{q0}.$$

2º caso : $q < k$

$$\frac{u_{q+1}(x)}{q!} = \sum_{p=0}^q \sum_{l=1}^q f_{pl}(x) C(u_0, \dots, u_{q-p}) + f_{q0}.$$

Portanto, a série de potências formal de u está bem definida.

Proposição 2.2.1 *Sejam $u_j \in C_c^\infty(B_1)$ e Ψ uma função de classe C^∞ tal que*

$$\begin{cases} \Psi(t) = 1, & |t| \leq \frac{1}{2}, \\ \Psi(t) = 0, & |t| \geq 1. \end{cases}$$

Consideremos a função

$$U(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_j(x)}{j!} t^j \Psi(r_j t). \quad (2.23)$$

Então $U \in C_c^\infty(B_1)$ para r_j suficientemente grande.

Demonstração

Inicialmente mostraremos que, para r_j suficientemente grande, a série

$$\partial^\alpha U(x, t) = \partial_x^{\alpha_1} \partial_t^{\alpha_2} U(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \partial_x^{\alpha_1} \partial_t^{\alpha_2} \left(\frac{u_j(x)}{j!} t^j \Psi(r_j t) \right) \quad (2.24)$$

é uniformemente convergente em $C_c^\infty(B_1)$ para todo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, onde α_1 e α_2 são inteiros não negativos.

Sejam $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ e r_j suficientemente grande para $j = 1, 2, \dots$. Então, temos

$$\sum_{j=0}^{\alpha_2} \partial_x^{\alpha_1} \partial_t^{\alpha_2} \left(\frac{u_j(x)}{j!} t^j \Psi(r_j t) \right) < \infty,$$

pois é a soma de um número finito de termos, e

$$g_j(x, t) = \frac{u_j(x)}{j!} t^j \Psi(r_j t) \in C_c^\infty(B_1).$$

É suficiente verificar, pelo teste-M de Weierstrass, que para $r_j \rightarrow \infty$ quando $j \rightarrow \infty$, tenhamos

$$\sum_{j=\alpha_2+1}^{\infty} \partial_x^{\alpha_1} \partial_t^{\alpha_2} \left(\frac{u_j(x)}{j!} t^j \Psi(r_j t) \right) \leq \sum_{j=\alpha_2+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} . \quad (2.25)$$

Para $|t| \geq \frac{1}{r_j}$, temos $\Psi(r_j t) = 0$ a partir de um determinado j e, daí,

$$\sum_{j=\alpha_2+1}^{\infty} \partial_x^{\alpha_1} \partial_t^{\alpha_2} \left(\frac{u_j(x)}{j!} t^j \Psi(r_j t) \right) < \infty.$$

Apliquemos o teste-M em (2.25) para $|t| \leq \frac{1}{r_j}$, $j \geq \alpha_2 + 1$. Lembrando que $u_j \in C_c^\infty(B_1)$, então

$$\begin{aligned} \left| \partial_x^{\alpha_1} \partial_t^{\alpha_2} \left(\frac{u_j(x)}{j!} t^j \Psi(r_j t) \right) \right| &= \left| \frac{u_j^{(\alpha_1)}(x)}{j!} \sum_{l=0}^{\alpha_2} \binom{\alpha_2}{l} \partial_t^l (t^j) \partial_t^{\alpha_2-l} (\Psi(r_j t)) \right| \\ &= \left| \frac{u_j^{(\alpha_1)}(x)}{j!} \sum_{l=0}^{\alpha_2} \binom{\alpha_2}{l} \frac{j!}{(j-l)!} t^{j-l} r_j^{\alpha_2-l} \Psi^{(\alpha_2-l)}(r_j t) \right| \\ &\leq A_j \sum_{l=0}^{\alpha_2} \binom{\alpha_2}{l} \frac{j!}{(j-l)!} \frac{1}{r_j^{j-l}} r_j^{\alpha_2-l} |\Psi^{(\alpha_2-l)}(r_j t)| \\ &\leq C_{j,\alpha} \left(\frac{1}{r_j} \right)^{j-\alpha_2}. \end{aligned}$$

Como $j \geq \alpha_2 + 1$,

$$\left| \partial_x^{\alpha_1} \partial_t^{\alpha_2} \left(\frac{u_j(x)}{j!} t^j \Psi(r_j t) \right) \right| \leq C_{j,\alpha} \frac{1}{r_j} \leq \frac{1}{2^j}.$$

Tomando $r_j \geq C_{j,\alpha} 2^j$, a desigualdade (2.25) fica verificada e, portanto, (2.24) é uniformemente convergente em $C_c^\infty(B_1)$, para todo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Mas, como

$$g_j(x, t) \in C_c^\infty(B_1) \text{ e } \sum \partial_x^{\alpha_1} \partial_t^{\alpha_2} g_j \text{ converge uniformemente em } B_1, \forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2),$$

então $U \in C_c^\infty(B_1)$. $\square$

Lema 2.2.1 *Sejam $U \in C_c^\infty(B_1)$ e u definidas, respectivamente, na proposição 2.2.1 e em (2.20). Então, para quaisquer α_1, α_2 inteiros não negativos, temos*

$$\partial_x^{\alpha_1} \partial_t^{\alpha_2} u(x, 0) = \partial_x^{\alpha_1} \partial_t^{\alpha_2} U(x, 0) = \partial_x^{\alpha_1} u_{\alpha_2}(x).$$

Em particular, $u(x, 0) = U(x, 0)$.

Demonstração

Sejam α_1, α_2 inteiros não negativos e $u(x, t)$ como em (2.20). Então

$$\partial_t^{\alpha_2} u(x, t) = \sum_{j=\alpha_2}^{\infty} \frac{u_j(x)}{j!} \frac{j!}{(j-\alpha_2)!} t^{j-\alpha_2} = \sum_{j=\alpha_2}^{\infty} \frac{u_j(x)}{(j-\alpha_2)!} t^{j-\alpha_2}.$$

Agora,

$$\partial_x^{\alpha_1} \partial_t^{\alpha_2} u(x, t) = \partial_t^{\alpha_2} \partial_x^{\alpha_1} u(x, t) = \sum_{j=\alpha_2}^{\infty} \frac{\partial_x^{\alpha_1} u_j(x)}{(j-\alpha_2)!} t^{j-\alpha_2}$$

e, em $t = 0$, temos

$$\partial_x^{\alpha_1} \partial_t^{\alpha_2} u(x, 0) = \partial_x^{\alpha_1} u_{\alpha_2}(x).$$

Calculemos $\partial_x^{\alpha_1} \partial_t^{\alpha_2} U(x, 0)$, onde $U \in C_c^\infty(B_1)$ está definida na proposição 2.2.1.

$$\partial_x^{\alpha_1} \partial_t^{\alpha_2} U(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\partial_x^{\alpha_1} u_j(x)}{j!} \sum_{l=0}^{\alpha_2} \binom{\alpha_2}{l} (\partial_t^l t^j) (\partial_t^{\alpha_2-l} \Psi(r_j t)) \right) = I_1 + I_2 + I_3, \quad (2.26)$$

onde

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{j=0}^{\alpha_2-1} \left(\frac{\partial_x^{\alpha_1} u_j(x)}{j!} \sum_{l=0}^{\alpha_2} \binom{\alpha_2}{l} (\partial_t^l t^j) (\partial_t^{\alpha_2-l} \Psi(r_j t)) \right), \\
I_2 &= \frac{\partial_x^{\alpha_1} u_{\alpha_2}(x)}{\alpha_2!} \sum_{l=0}^{\alpha_2} \binom{\alpha_2}{l} (\partial_t^l t^{\alpha_2}) (\partial_t^{\alpha_2-l} \Psi(r_{\alpha_2} t)), \\
I_3 &= \sum_{j=\alpha_2+1}^{\infty} \left(\frac{\partial_x^{\alpha_1} u_j(x)}{j!} \sum_{l=0}^{\alpha_2} \binom{\alpha_2}{l} (\partial_t^l t^j) (\partial_t^{\alpha_2-l} \Psi(r_j t)) \right).
\end{aligned}$$

Cálculo de I_1 em $t = 0$

Para $l < \alpha_2$, temos $\partial_t^{\alpha_2-l} \Psi(r_j t) \Big|_{t=0} = 0$. Logo,

$$I_1 = \sum_{j=0}^{\alpha_2-1} \left(\frac{\partial_x^{\alpha_1} u_j(x)}{j!} \underbrace{(\partial_t^{\alpha_2} t^j)}_{=0} (\Psi(r_j t)) \right) = 0. \quad (2.27)$$

Cálculo de I_2 em $t = 0$

Para $l < \alpha_2$, temos $\partial_t^{\alpha_2-l} \Psi(r_{\alpha_2} t) \Big|_{t=0} = 0$. Daí,

$$I_2 = \frac{\partial_x^{\alpha_1} u_{\alpha_2}(x)}{\alpha_2!} (\partial_t^{\alpha_2} t^{\alpha_2}) (\Psi(r_{\alpha_2} t)) = \partial_x^{\alpha_1} u_{\alpha_2}(x) (\Psi(r_{\alpha_2} t)).$$

Logo,

$$I_2 \Big|_{t=0} = \partial_x^{\alpha_1} u_{\alpha_2}(x). \quad (2.28)$$

Cálculo de I_3 em $t = 0$.

Para $l < \alpha_2$, temos $\partial_t^{\alpha_2-l} \Psi(r_j t) \Big|_{t=0} = 0$. Logo,

$$I_3 \Big|_{t=0} = \sum_{j=\alpha_2+1}^{\infty} \left(\frac{\partial_x^{\alpha_1} u_j(x)}{j!} (\partial_t^{\alpha_2} t^j) (\Psi(r_j t)) \right) \Big|_{t=0} = 0, \quad (2.29)$$

pois $(\partial_t^{\alpha_2} t^j) \Big|_{t=0} = 0$ para $j \geq \alpha_2 + 1$.

Fazendo $t = 0$ e substituindo (2.27), (2.28) e (2.29) em (2.26), o lema fica demonstrado. $\square$

Lema 2.2.2 *Sejam $U \in C_c^\infty(B_1)$ e f definidas, respectivamente, na proposição 2.2.1 e em (2.19). Consideremos a equação*

$$LU - f(x, t, U) = -\eta. \quad (2.30)$$

Então $\eta \in C_c^\infty(B_1)$ e se anula de ordem infinito na origem.

Demonstração

Conforme vimos, $f(x, t, \zeta) = 0$ se $|(x, t)| \geq 1$ e $U \in C_c^\infty(B_1)$ pela proposição 2.2.1. Daí, por (2.30), segue-se que $\eta \in C_c^\infty(B_1)$.

Para mostrar que η se anula de ordem infinito na origem vemos que, dado $\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, onde α_1, α_2 são inteiros não negativos,

$-\eta = LU - f(x, t, U) \Rightarrow -\partial_x^{\alpha_1} \partial_t^{\alpha_2} \eta(x, 0) = \partial_x^{\alpha_1} \partial_t^{\alpha_2} \left\{ LU - f(x, t, U) \right\} \Big|_{t=0}$. E, de acordo com o lema 2.2.1 e (2.17),

$$-\partial_x^{\alpha_1} \partial_t^{\alpha_2} \eta(x, 0) = \partial_x^{\alpha_1} \partial_t^{\alpha_2} \left\{ Lu - f(x, t, u) \right\} \Big|_{t=0} = 0.$$

Portanto, o lema está demonstrado. $\square$

Segue, em vista de (2.19) e (2.30), que

$$\begin{aligned} LU - f_1(x, t, U) &= LU - f(x, t, U) + \phi \\ &= \phi - \eta \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \phi_0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Proposição 2.2.2 *Seja $\rho \in C_c^\infty(B_1)$ tal que $\rho(x, t) = 1$ se $|(x, t)| \leq \frac{1}{2}$. Sejam também ϕ e η , respectivamente, definidas em (2.19) e (2.30). Então, para $0 < \delta < 1$, a função*

$$\begin{aligned} \phi_\delta(x, t) &= \phi_0(x, t) + \rho(x/\delta, t/\delta) \eta(x, t) \\ &\stackrel{(2.31)}{=} \phi(x, t) + (\rho(x/\delta, t/\delta) - 1) \eta(x, t) \end{aligned} \quad (2.32)$$

assume as seguintes propriedades :

1. $\phi_\delta \in C_c^\infty(B_1)$;
2. $\phi_\delta(x, t) = \phi(x, t) + (\rho(x/\delta, t/\delta) - 1) \eta(x, t) = \phi(x, t)$, se $|(x, t)| \leq \delta/2$;

3. $\|\phi_\delta - \phi_0\|_s = \|\rho(\cdot/\delta)\eta\|_s \rightarrow 0$ quando $\delta \rightarrow 0$, porque η se anula de ordem infinito na origem.

1. Demonstração

Para $|(x, t)| \geq 1$, temos $\phi(x, t) = 0$ e $\eta(x, t) = 0$, respectivamente, por (2.19) e pelo lema 2.2.2. Daí, por (2.32), segue-se que $\phi_\delta(x, t) = 0$ para $|(x, t)| \geq 1$. Agora, como ϕ, ρ e η são funções de classe C^∞ , então ϕ_δ também é C^∞ e, portanto, $\phi_\delta \in C_c^\infty(B_1)$.

2. Demonstração

Este resultado é imediato, pois $\rho(x/\delta, t/\delta) = 1$ se $|(x, t)| \leq \delta/2$.

3. Demonstração

Sejam $0 < \delta < 1$, $s \in \mathbb{R}$ e seja $\rho \in C_c^\infty(B_1)$ tal que $\rho(x, t) = 1$ se $|(x, t)| \leq \frac{1}{2}$. Para $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{F}\rho(\cdot/\delta))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \rho(x/\delta, t/\delta) e^{-i(x, t) \cdot (\xi_1, \xi_2)} dx dt \\
 &\stackrel{((x, t)/\delta = (y_1, y_2))}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \rho(y_1, y_2) e^{-i(\delta y_1, \delta y_2) \cdot (\xi_1, \xi_2)} \delta^2 dy_1 dy_2 \\
 &= \delta^2 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \rho(y_1, y_2) e^{-i(y_1, y_2) \cdot (\delta \xi_1, \delta \xi_2)} dy_1 dy_2 \\
 &= \delta^2 \hat{\rho}(\delta \xi).
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

E,

$$\begin{aligned}
 \|\rho(\cdot/\delta)\|_s^2 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} [1 + |\xi|^2]^s |(\mathcal{F}\rho(\cdot/\delta))(\xi)|^2 d\xi_1 d\xi_2 \\
 &\stackrel{(2.33)}{=} \frac{\delta^4}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} [1 + |\xi|^2]^s |\hat{\rho}(\delta \xi)|^2 d\xi_1 d\xi_2.
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Efetuada a mudança de variáveis $\delta \xi = \eta$, isto é, $\delta(\xi_1, \xi_2) = (\eta_1, \eta_2)$, temos $d\eta = \delta^2 d\xi$.

Assim, (2.34) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\| \rho(\cdot/\delta) \|_s^2 &= \frac{\delta^2}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left[1 + |\eta/\delta|^2 \right]^s |\hat{\rho}(\eta)|^2 d\eta_1 d\eta_2 \\
&= \frac{\delta^2}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\left[1 + |\eta/\delta|^2 \right]^s}{\left[1 + |\eta|^2 \right]^s} \left[1 + |\eta|^2 \right]^s |\hat{\rho}(\eta)|^2 d\eta_1 d\eta_2 \\
&= \frac{\delta^{2-2s}}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\left[\delta^2 + |\eta|^2 \right]^s}{\left[1 + |\eta|^2 \right]^s} \left[1 + |\eta|^2 \right]^s |\hat{\rho}(\eta)|^2 d\eta_1 d\eta_2 \\
&\leq \frac{\delta^{2-2s}}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\left[1 + |\eta|^2 \right]^s}{\left[1 + |\eta|^2 \right]^s} \left[1 + |\eta|^2 \right]^s |\hat{\rho}(\eta)|^2 d\eta_1 d\eta_2 \\
&= \frac{\delta^{2-2s}}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left[1 + |\eta|^2 \right]^s |\hat{\rho}(\eta)|^2 d\eta_1 d\eta_2 \\
&= \delta^{2-2s} \|\rho\|_s^2.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Seja $\Theta \in C_c^\infty$, $\text{supp}\Theta \subseteq \{|(x, t)| \leq \delta\}$, $\Theta = 1$ se $|(x, t)| \leq \delta/2$.

Para η dada como no lema 2.2.2, $\exists$ um inteiro não negativo $m \geq |s|$ (ver [10] (Remark 25.1, página 225)) tal que

$$\begin{aligned}
\|\rho(\cdot/\delta)\Theta\eta\|_s &\leq C_s \|\rho(\cdot/\delta)\|_m \sup_{|\alpha| \leq m} \|\partial_x^{\alpha_1} \partial_t^{\alpha_2}(\Theta\eta)\|_{L^\infty} \\
&\stackrel{(2.35)}{\leq} C_{s,m} \delta^{1-m} \|\rho\|_m \sup_{|\alpha| \leq m} \|\partial_x^{\alpha_1} \partial_t^{\alpha_2}(\Theta\eta)\|_{L^\infty}.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Como η se anula de ordem infinito na origem, então, dado p , inteiro não negativo, existe $K_{\alpha,p} > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
|\partial_x^{\alpha_1} \partial_t^{\alpha_2}(\Theta\eta)(x, t)| &\leq K_{\alpha,p} |(x, t)|^p \\
&\leq K_{\alpha,p} \delta^p.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Tomando p positivo tal que $p > m$, e substituindo (2.37) em (2.36), obtemos

$$\|\rho(\cdot/\delta)\Theta\eta\|_s \leq C\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0. \quad \square$$

Para resolver (2.17) em uma vizinhança da origem, é suficiente resolver a equação modificada

$$Lu = \phi_\delta + f_1(x, t, u).$$

Escrevendo $u = U + v$ e levando em conta (2.31), temos

$$\begin{aligned}
 Lv &= \phi_\delta + f_1(x, t, U + v) - LU \\
 &= \phi_\delta + f_1(x, t, U + v) - f_1(x, t, U) + f_1(x, t, U) - LU \\
 &= \phi_\delta + f_1(x, t, U + v) - f_1(x, t, U) - \phi_0 \\
 &= \phi_\delta - \phi_0 + f_1(x, t, U + v) - f_1(x, t, U) \\
 &= \psi_\delta + f_2(x, t, v),
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

onde $\|\psi_\delta\|_s = \|\phi_\delta - \phi_0\|_s \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$ e $f_2(x, t, 0) = f_1(x, t, U) - f_1(x, t, U) = 0$.

Expandiremos $f_2(x, t, \zeta)$ em série de Taylor com respeito a ζ . Denotemos $\zeta = y + iw = (y, w)$, onde $i = \sqrt{-1}$ e $f_2(x, t, \zeta) = g(\zeta) = g(y, w)$. Então

$$\begin{aligned}
 g(y, w) &= g(0, 0) + \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0)y + \frac{\partial g}{\partial w}(0, 0)w + f_3(y, w) \\
 &= g(0, 0) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) - i \frac{\partial g}{\partial w}(0, 0) \right] \zeta + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) + i \frac{\partial g}{\partial w}(0, 0) \right] \bar{\zeta} \\
 &\quad + f_3(y, w),
 \end{aligned}$$

isto é,

$$f_2(x, t, \zeta) = \underbrace{f_2(x, t, 0)}_{=0} + Q_1(x, t)\zeta + Q_2(x, t)\bar{\zeta} + f_3(x, t, \zeta), \tag{2.39}$$

onde

$$\begin{aligned}
 Q_1(x, t) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f_2}{\partial y}(x, t, 0) - i \frac{\partial f_2}{\partial w}(x, t, 0) \right] \in C_c^\infty(B_1), \\
 Q_2(x, t) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f_2}{\partial y}(x, t, 0) + i \frac{\partial f_2}{\partial w}(x, t, 0) \right] \in C_c^\infty(B_1).
 \end{aligned}$$

Notamos que $f_3(x, t, 0) = 0$.

Retornando à equação (2.38), temos

$$Lv - f_2(x, t, v) = \psi_\delta \stackrel{(2.39)}{\Leftrightarrow} Lv - Q_1(x, t)v - Q_2(x, t)\bar{v} - f_3(x, t, v) = \psi_\delta.$$

Portanto,

$$L'v = Lv - Q_1(x, t)v - Q_2(x, t)\bar{v} = \psi_\delta + f_3(x, t, v). \tag{2.40}$$

Agora faremos uso da nossa suposição $s > 1$. Utilizando as estimativas para a composição e produto de funções nos espaços de Sobolev (ver [1]) para a forma quadrática f_3 , obtemos

$$\|f_3(x, t, w)\|_s \leq C \|w\|_s^2, \quad w \in H^s, \quad \|w\|_s \leq 1. \quad (2.41)$$

2.3 Existência de um ponto fixo para um operador não-linear adequado

2.3.1 Prova do teorema 2.1

Para simplificar a notação, escreveremos $\psi = \psi_\delta$ e $f = f_3$ em (2.40) e resolveremos a equação

$$L'v = \psi + f(x, t, v). \quad (2.42)$$

Já vimos que $\|\psi\|_s$ pode ser convenientemente pequena e que, por (2.41),

$$\|f(x, t, w)\|_s \leq C \|w\|_s^2, \quad w \in H^s, \quad \|w\|_s \leq 1. \quad (2.43)$$

Também, pelo teorema do valor médio, temos

$$\|f(x, t, w) - f(x, t, w')\|_s \leq C \|w - w'\|_s; \quad w, w' \in H^s; \quad \|w\|_s, \|w'\|_s \leq 1. \quad (2.44)$$

Agora aplicamos a proposição 2.1.5 a L' , escolhendo $\epsilon > 0$ tal que $\sqrt{2}C\epsilon < 1$, onde C é a constante em (2.44). Logo, há uma decomposição ortogonal $H^s = F_s \oplus F_s^\perp$ e um operador linear limitado $T : H^s \rightarrow H^s$, tal que a restrição $T|_{F_s}$ tem norma $\leq \epsilon$, $\dim F_s^\perp < \infty$ e $L'Tu = u$ em B_ρ , para todo $u \in H^s$. Será conveniente usar em H^s a norma equivalente $\|u\|_s = \max(\|u_1\|_s, \|u_2\|_s)$, $u = u_1 + u_2 \in H^s$, $u_1 \in F_s$, $u_2 \in F_s^\perp$, de modo que a bola de raio r para a norma $\|\cdot\|_s$ seja o produto cartesiano das bolas usuais de F_s e $F_s^\perp$ de mesmo raio e $\|u\|_s \leq \sqrt{2} \|u\|_s$.

Consideremos a aplicação $\Phi : H^s \rightarrow H^s$ definida por

$$\Phi(u)(x) = \psi(x) + f(x, t, Tu), \quad u \in H^s.$$

Para u_1 e $u'_1 \in F_s$ e $u_2 \in F_s^\perp$, com $\|u_1\|_s \leq 1$, $\|u'_1\|_s \leq 1$, $\|u_2\|_s \leq 1$, temos

$$\Phi(u_1 + u_2) - \Phi(u'_1 + u_2) = f(x, t, Tu_1 + Tu_2) - f(x, t, Tu'_1 + Tu_2)$$

e, em vista de (2.44),

$$\begin{aligned} |\Phi(u_1 + u_2) - \Phi(u'_1 + u_2)|_s &= |f(x, t, Tu_1 + Tu_2) - f(x, t, Tu'_1 + Tu_2)|_s \\ &\leq \|f(x, t, Tu_1 + Tu_2) - f(x, t, Tu'_1 + Tu_2)\|_s \\ &\leq C \|T(u_1 - u'_1)\|_s \\ &= C\epsilon \|u_1 - u'_1\|_s, \text{ pela prop. 2.1.5} \\ &\leq \sqrt{2}C\epsilon |(u_1 - u'_1)|_s. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Portanto, a escolha de $\epsilon > 0$ e (2.45) mostram que a aplicação $u_1 \rightarrow \Phi(u_1 + u_2)$ é uma contração, uniformemente em u_2 , no espaço de codimensão finita F_s . Além do mais, em vista de (2.43), temos:

se $\|u_1\|_s \leq r$, $\|u_2\|_s \leq r$, $r \leq 1$, $u = u_1 + u_2$, então

$$\begin{aligned} |\Phi(u_1 + u_2)|_s &\leq |\psi|_s + |f(x, t, Tu)|_s \\ &\leq |\psi|_s + \|f(x, t, Tu)\|_s \\ &\leq |\psi|_s + C \|Tu\|_s^2, \text{ para } s > 1 \\ &\leq |\psi|_s + 2C |Tu|_s^2 \\ &\leq |\psi|_s + C' |u|_s^2, T \text{ limitada} \\ &\leq |\psi|_s + C'r^2 \end{aligned}$$

e mostra que, para $s > 1$, Φ aplica a bola $B_r = \{u \in H^s; |u|_s \leq r\}$ nela própria, contanto que $C'r \leq 1/2$ e $|\psi|_s \leq r/2$.

Porém, Φ não é, necessariamente, uma contração de H^s em H^s e, sendo assim, precisamos ainda dos seguintes lemas para concluir o teorema.

Lema 2.3.1.1 *Sejam $s \in \mathbb{R}$ e $B_r = \{u \in H^s; |u|_s \leq r\}$. Então $F_{-s} = G(B)^0 = \{u \in H^{-s} : (u, \phi)_s = 0, \phi \in G(B)\}$ é um espaço métrico completo e $F_s^\perp \cap B_r$ é um conjunto convexo compacto.*

Demonstração

Primeiramente, mostraremos que $G(B)^0 = G(B)^\perp$ é um espaço métrico completo. De fato, se $u \in \overline{G(B)^\perp}$, há uma seqüência (u_j) em $G(B)^\perp$ tal que $u_j \rightarrow u$. Para

toda $g \in G(B)$, temos $(u_j, g)_s = 0$ e $(u, g)_s = 0$, então $u \in G(B)^\perp$; portanto, $G(B)^0 = G(B)^\perp$ é fechado. Mas, como $G(B)^0$ é um subespaço fechado de H^{-s} , segue que $G(B)^0$ é completo.

$F_s^\perp \cap B_r$ é convexo, pois dados $u_1, u_2 \in F_s^\perp \cap B_r$, para todo $v \in F_s \cap B_r$ e $0 \leq t \leq 1$, temos

$$(tu_1 + (1-t)u_2, v)_s = (tu_1, v)_s + ((1-t)u_2, v)_s = t \underbrace{(u_1, v)_s}_0 + (1-t) \underbrace{(u_2, v)_s}_0 = 0$$

e, portanto, $(tu_1 + (1-t)u_2) \in F_s^\perp \cap B_r$. De maneira análoga, mostramos que F_s é também convexo.

$F_s^\perp \cap B_r$ é fechado, pois $F_s^\perp$ tem dimensão finita em H^s ; e é limitado, uma vez que $\|u\|_s \leq r$. Portanto, $F_s^\perp \cap B_r$ é compacto. $\square$

Lema 2.3.1.2 *Sejam (E, d_E) um espaço métrico completo e F um espaço métrico. Se existe $0 < c < 1$ tal que $\Psi : E \times F \longrightarrow E$ satisfaz*

$$d_E(\Psi(x, b), \Psi(y, b)) \leq c d_E(x, y), \quad \forall x, y \in E, \quad \forall b \in F,$$

então existe um único $\lambda(b)$ tal que $\Psi(\lambda(b), b) = \lambda(b)$. Além disso, $\lambda : F \longrightarrow E$ é contínua.

Demonstração

Fixemos $x_0 \in E$.

Definimos $\lambda_n : F \longrightarrow E$ por

$$\lambda_n(b) = \Psi(\lambda_{n-1}(b), b), \quad \lambda_0(b) = x_0, \quad \forall n \geq 0. \quad (2.46)$$

Observamos que, para cada $n \geq 0$, λ_n é contínua em F . Temos

$$\begin{aligned} d_E(\lambda_{n+1}(b), \lambda_n(b)) &\leq c^n d_E(\lambda_1(b), x_0) \\ &= c^n d_E(\Psi(x_0, b), x_0), \quad \forall b \in F. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Seja

$$F_r = \{b \in F : d_E(\Psi(x_0, b), b) \leq r\}, \quad \forall r > 0. \quad (2.48)$$

Segue que $\bigcup F_r = F$.

Logo, por (2.47) e (2.48), temos

$$d_E(\lambda_{n+1}(b), \lambda_n(b)) \leq rc^n, \quad \forall b \in F_r.$$

Afirmamos que (λ_n) converge uniformemente em F_r .

De fato,

$$d_E(\lambda_{n+p}(b), \lambda_n(b)) \leq r \sum_{j=n}^{n+p} c^j \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \forall p, \forall b \in F_r.$$

Logo, pelo critério de Cauchy, (λ_n) converge uniformemente em F_r . Como E é completo,

$$\lambda_n \xrightarrow{u} \lambda \text{ em } F_r, \quad \lambda \text{ é contínua em } F_r, \quad \lambda \text{ independe de } r. \quad (2.49)$$

Por (2.46) e (2.49) segue que

$$\lambda(b) = \Psi(\lambda(b), b), \quad \forall b \in F_r. \quad \square$$

Lema 2.3.1.3 *Para $s > 1$, sejam $(F_s \cap B_r, d)$ e $F_s^\perp \cap B_r$, respectivamente, o espaço métrico completo e o conjunto convexo compacto de H^s definidos no lema 2.3.1.1. Então, as aplicações $\Phi_1 : F_s \cap B_r \times F_s^\perp \cap B_r \rightarrow F_s \cap B_r$ e $\Phi_2 : F_s \cap B_r \times F_s^\perp \cap B_r \rightarrow F_s^\perp \cap B_r$ satisfazem, para algum $0 < k < 1$:*

1. $d(\Phi_1(m, b), \Phi_1(m', b)) \leq k \, d(m, m'), \quad m, m' \in F_s \cap B_r, \quad \forall b \in F_s^\perp \cap B_r;$
2. $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) : F_s \cap B_r \times F_s^\perp \cap B_r \rightarrow F_s \cap B_r \times F_s^\perp \cap B_r$ tem um ponto fixo.

Demonstração

A parte 1. está satisfeita, por causa de (2.45) e da escolha de ϵ .

Para provar a parte 2., utilizaremos novamente os resultados do lema 2.3.1.1 e invocaremos o Teorema do Ponto Fixo de Schauder: “Uma aplicação contínua de um conjunto convexo compacto C , em um espaço linear normado X , nele próprio tem pelo menos um ponto fixo.”

Seja $b \in F_s^\perp \cap B_r$ e consideremos a aplicação $\Phi'_1 = \Phi_1(., b) : F_s \cap B_r \rightarrow F_s \cap B_r$. Como $F_s \cap B_r$ é um subconjunto convexo fechado de H^s e Φ'_1 é uma contração, então, pelo lema 2.3.1.2, Φ'_1 tem precisamente um ponto fixo $\lambda(b) \in F_s \cap B_r$. Sabemos,

então, que $\Phi_1(\lambda(b), b) = \lambda(b)$, para todo $b \in F_s^\perp \cap B_r$. Por outro lado, a aplicação contínua Φ_2 , dada por

$$\begin{aligned} F_s^\perp \cap B_r &\longrightarrow F_s^\perp \cap B_r \\ b &\longmapsto \Phi_2(\lambda(b), b) \end{aligned} \quad (2.50)$$

aplica o conjunto convexo compacto $F_s^\perp \cap B_r$ nele próprio, logo, pelo Teorema do Ponto Fixo de Schauder, existe $b_0 \in F_s^\perp \cap B_r$ tal que $\Phi_2(\lambda(b_0), b_0) = b_0$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda(b_0), b_0) &= (\Phi_1(\lambda(b_0), b_0), \Phi_2(\lambda(b_0), b_0)) \\ &= (\lambda(b_0), b_0) \end{aligned} \quad (2.51)$$

e $(\lambda(b_0), b_0) \in F_s \cap B_r \times F_s^\perp \cap B_r$ é um ponto fixo de Φ cuja existência queríamos demonstrar. $\square$

Retornando à *prova do teorema 2.1* e usando a parte 2. do lema 2.3.1.3, concluímos que existe, para $s > 1$, $w \in H^s$ tal que $w = \psi + f(x, t, Tw)$. Denotando $v = Tw \in H^s$, segue que

$$v = T(\psi + f(x, t, Tw)) = T\psi + Tf(x, t, Tw).$$

Aplicando L' a ambos membros da igualdade, temos

$$L'v = L'T\psi + L'Tf(x, t, Tw) = L'T\psi + L'Tf(x, t, v),$$

a qual, em B_ρ , devido à parte 1. da proposição 2.1.5, pode ser escrita como

$$L'v = \psi + f(x, t, v),$$

resolvendo a equação (2.42). A prova do teorema 2.1 está agora completa. $\square$

Lema 2.3.1.4 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $s \in \mathbb{R}$. Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é tal que $Lu \in H_{loc}^s(\Omega)$, então $u \in H_{loc}^{s+\frac{1}{k+1}}(\Omega)$.*

Demonstração Ver [3] (páginas 100,101).

Corolário 2.3.1.1 *Seja k um número inteiro positivo par. Se $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C})$, então existem $\rho > 0$ e $u \in C^\infty(B_\rho)$ tais que*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - it^k \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t, u), \quad \text{em } |(x, t)| < \rho. \quad (2.52)$$

Demonstração

Demonstraremos pelo processo de indução que

$$u|_{B_\rho} \in H_{loc}^{s+\frac{m}{k+1}}(B_\rho), \quad \forall m \geq 0,$$

onde u é a solução obtida anteriormente:

$$\exists u \in H^s(\mathbb{R}^2), \quad s > 1, \quad \text{tal que } Lu = f(x, t, u) \text{ em } B_\rho.$$

Logo, $u|_{B_\rho} \in H_{loc}^s(B_\rho) \subset \mathcal{D}'(B_\rho)$ e o processo está verificado para $m = 0$.

Suponhamos o processo de indução verdadeiro para um $m > 0$.

Então

$$u|_{B_\rho} \in H_{loc}^{s+\frac{m}{k+1}}(B_\rho) \subset \mathcal{D}'(B_\rho) \Rightarrow f(x, t, u) \in H_{loc}^{s+\frac{m}{k+1}}(B_\rho) \Rightarrow u \in H_{loc}^{s+\frac{m+1}{k+1}}(B_\rho).$$

Como $u \in H_{loc}^{s+\frac{m+1}{k+1}}(B_\rho), \quad \forall m \geq 0$ e usando o item d) do lema A.3.2, segue o resultado. $\square$

Apêndice

Neste apêndice estão expostos alguns resultados básicos dos espaços quocientes, de análise funcional e dos espaços de Sobolev utilizados no capítulo 2.

A.1 Espaços quocientes

Nesta seção indicamos por F o conjunto dos números reais ou o conjunto dos números complexos.

Teorema A.1.1 *Sejam V e Z espaços vetoriais sobre o corpo F . Suponhamos que T seja uma transformação linear de V sobre Z . Se W é o núcleo de T , então Z é isomorfo a V/W .*

Demonstração Ver [4] (Teorema, página 505)

Teorema A.1.2 *Seja V um subespaço de um espaço vetorial E sobre o corpo F . Suponhamos que T seja uma transformação linear de E sobre $T(E)$. Então E/V é isomorfo a $T(E)/T(V)$. Além disso, $T(E)/T(V)$ pode ser entendido como $T(E/V)$.*

Demonstração

É fato conhecido que, se W é subespaço de um espaço vetorial U sobre o corpo F , então a adição de vetores e uma multiplicação escalar sobre U/W como segue:

$$(u + W) + (u' + W) = (u + u') + W, \quad u, u' \in U,$$

$$\lambda(u + W) = \lambda u + W, \quad \lambda \in F, \quad u, u' \in U,$$

estão bem definidas e tornam U/W um espaço vetorial sobre o corpo F .

Vamos definir

$$\begin{aligned}\bar{T} : E/V &\longrightarrow T(E)/T(V) \\ \{e + V : e \in E\} &\longmapsto \bar{T}(e + V) = \{T(e) + T(V) : T(e) \in T(E)\}\end{aligned}$$

Primeiramente mostraremos que $\bar{T}$ está bem definida.

De fato,

sejam $e + V, e' + V \in E/V$. Então,

$$\begin{aligned}e + V = e' + V &\Leftrightarrow e - e' \in V \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow T(e - e') \in T(V) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow T(e) - T(e') \in T(V) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow T(e) + T(V) = T(e') + T(V) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \bar{T}(e + V) = \bar{T}(e' + V).\end{aligned}$$

Isto mostra não só que $\bar{T}$ está bem definida, mas também que $\bar{T}$ é injetora.

Resta verificar que $\bar{T}$ é linear e sobrejetora.

$\bar{T}$ é linear pois,

sejam $\lambda \in F, e + V, e' + V \in E/V$. Assim,

$$\begin{aligned}\bar{T}\big((e + V) + (e' + V)\big) &= \bar{T}\big((e + e') + V\big) \\ &= T(e + e') + T(V) \\ &= \big(T(e) + T(e')\big) + T(V) \\ &= T(e) + T(V) + T(e') + T(V) \\ &= \bar{T}(e + V) + \bar{T}(e' + V).\end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned}\bar{T}\big(\lambda(e + V)\big) &= \bar{T}(\lambda e + V) \\ &= T(\lambda e) + T(V) \\ &= \lambda T(e) + T(V) \\ &= \lambda\big(T(e) + T(V)\big) \\ &= \lambda\bar{T}(e + V).\end{aligned}$$

$\bar{T}$ é sobrejetora.

De fato, dado $\bar{t} \in T(E)/T(V)$, então

$$\bar{t} = T(e) + T(V) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{T}(e + V) \text{ para algum } e + V \in E/V.$$

A última afirmação segue do fato de que

$$T(E)/T(V) = \{T(e) + T(V), e \in E\} = \{T(e + V), e \in E\} = T(E/V). \quad \square$$

Teorema A.1.3 *Seja Y um subespaço de um espaço vetorial X sobre um corpo F . Se X/Y tem dimensão finita, existe um subespaço B de X tal que $X = Y \oplus B$ e $\pi : X \longrightarrow X/Y$ induz um isomorfismo linear de B sobre X/Y (isto é, π restrita a B é um isomorfismo linear de B sobre X/Y).*

Demonstração Ver [9] (Proposition 4.10, página 97)

A.2 Análise Funcional

Teorema A.2.1 *Sejam X e Y espaços de Hilbert. Um operador linear $T : X \longrightarrow Y$ é compacto se, e somente se, T levar qualquer seqüência fracamente convergente em X numa seqüência fortemente convergente em Y .*

Observação A.2.1 *Sejam E e F espaços vetoriais topológicos e G uma aplicação linear contínua de E em F . Então (ver mais detalhes no capítulo 23 de [11]) tG , transposta de G , é uma aplicação linear de F' em E' .*

Se $x \in E$ e $y' \in F'$, ao usar os "brackets" para expressar a dualidade entre E e E' , F e F' respectivamente, temos a fórmula de transposição:

$$\langle y', G(x) \rangle = \langle {}^tG(y'), x \rangle.$$

Lema A.2.1 *Sejam E, F espaços vetoriais topológicos, $u : E \longrightarrow F$, ${}^tu : F' \longrightarrow E'$ aplicações lineares contínuas. As seguintes condições são equivalentes:*

- (a) $Im(u)$ é densa em F ;
- (b) tu é injetora.

Demonstração Ver [11] (Corollary 5, página 188).

Observação A.2.2 (Injeções de duais) *Consideremos aqui um procedimento para imbutir o dual de um espaço Hausdorff localmente convexo, E , no dual de um outro,*

F . O ponto de partida é uma injeção contínua j de E em F . Assumiremos também que $j(E)$ é densa em F . Então, pelo lema A.2.1, ${}^tj : F' \longrightarrow E'$ é uma aplicação linear injetora. Além disso, se munirmos ambas E' e F' com a topologia dual forte (ou ambas com a topologia dual fraca), tj é contínua. Em particular, podemos considerar F' como um subespaço vetorial de E' .

Exemplo A.2.1 É fato conhecido que

$$j : C_c^\infty(\mathbb{R}^2) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}^2) \quad (\text{A.1})$$

é uma injeção contínua e densa.

Como podemos identificar, pelo teorema A.3.1, $(H^s(\mathbb{R}^2))'$ com $H^{-s}(\mathbb{R}^2)$, então, transpondo (A.1), temos

$${}^tj : H^{-s}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),$$

que é uma aplicação linear contínua e injetora pela observação A.2.2.

Desde que $H^{-s}(\mathbb{R}^2)$ e $H^s(\mathbb{R}^2)$ são isométricos, segue que $H^s(\mathbb{R}^2)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Definição A.2.1 A transposta da aplicação linear contínua de $C_c^\infty(\Omega)$ em $C_c^\infty(\Omega)$,

$$\phi \longrightarrow {}^tP(x, \frac{\partial}{\partial x})\phi,$$

é uma aplicação linear contínua do espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\Omega)$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, que será denotada por

$$T \longrightarrow P(x, \frac{\partial}{\partial x})T.$$

Também podemos expressar isso da seguinte forma:

$$\langle P(x, \frac{\partial}{\partial x})\psi, \phi \rangle = \langle \psi, {}^tP(x, \frac{\partial}{\partial x})\phi \rangle.$$

As motivações para a definição A.2.1 podem ser vistas no capítulo 23 de [11].

Definição A.2.2 (Cálculo do Transposto Formal) O operador diferencial

$$\sum_p b_p(x) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p,$$

com coeficientes b_p dados por

$$b_p(x) = \sum_{r \geq p} (-1)^{|r|} \binom{r}{p} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{r-p} a_r(x), \quad a_r \in C^\infty,$$

é chamado o transposto formal do operador diferencial

$$\sum_p a_p(x) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^p.$$

A.3 Espaços de Sobolev

A definição formal do espaço de Sobolev $H^s = H^s(\mathbb{R}^n)$, para um dado número real s , é a seguinte:

Definição A.3.1 Dizemos que uma distribuição temperada u em $\mathbb{R}^n$ pertence a $H^s(\mathbb{R}^n)$ se $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ com respeito à medida $[1 + |\xi|^2]^s d\xi$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Isto é,

$$\xi \longmapsto \hat{u}(\xi)[1 + |\xi|^2]^{s/2}$$

é uma função em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Se $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$, as expressões

$$(u, v)_s = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} [1 + |\xi|^2]^s d\xi$$

$$\|u\|_s^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 [1 + |\xi|^2]^s d\xi$$

definem um produto interno e uma norma que tornam $H^s(\mathbb{R}^n)$ em um espaço de Hilbert.

Observamos que $H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$, pois

$$\|u\|_0^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 dx = \|u\|_{L^2}^2, \quad \forall u \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Na igualdade intermediária acima aplicamos a identidade de Parseval.

Lema A.3.1 a) $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R}^n)$: densamente e topologicamente.

b) $H^s(\mathbb{R}^n) \subset H^{s'}(\mathbb{R}^n)$, para $s \geq s'$, sendo a inclusão contínua.

Consideremos a forma bilinear

$$H^{-s}(\mathbb{R}^n) \times H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(u, v) \longmapsto \langle u, v \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{-s/2} \hat{u}(-\xi) (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{v}(\xi) d\xi. \quad (\text{A.2})$$

Por Cauchy-Schwarz, $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|_{-s} \|v\|_s$.

Teorema A.3.1 *Dado um número real s , o dual de $H^s(\mathbb{R}^n)$ é canonicamente isomorfo a $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$. Isto permite identificar $(H^s(\mathbb{R}^n))'$ com $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.*

Com a identificação entre $(H^s(\mathbb{R}^n))'$ e $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ dada pelo teorema A.3.1, existe uma isometria (isomorfismo) definida da seguinte forma:

$$T^{2s} : H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{-s}(\mathbb{R}^n)$$

$$\bar{u} \longmapsto \mathcal{F}^{-1} \left\{ [1 + |\xi|^2]^s \mathcal{F} \bar{u} \right\}.$$

Proposição A.3.1 *A medida de Dirac δ pertence a $H^{-\frac{n}{2}-\epsilon}$ para todo $\epsilon > 0$. Nenhuma distribuição com suporte contido na origem pertence a $H^{-\frac{n}{2}}$, a menos que ela seja identicamente nula.*

Demonstração

Dado que a transformada de Fourier de δ é 1 ($\hat{\delta} = 1$), temos:

$$\|\delta\|_s^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} [1 + |\xi|^2]^s d\xi = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \int_0^\infty (1 + r^2)^s r^{n-1} dr,$$

que é finito se e somente se $s < -\frac{n}{2}$, uma vez que ω_n é a área da esfera de raio unitário em $\mathbb{R}^n$ e o integrando é aproximadamente r^{2s+n-1} para r grande. Daí, $\delta \in H^s$ se, e somente se, $s < -\frac{n}{2}$. Isto prova a primeira afirmação.

É fato conhecido que todas as distribuições com suporte na origem são da forma $P(D)\delta$, onde $P(\xi)$ é um polinômio. A transformada de Fourier de $P(D)\delta$ é precisamente $P(\xi)$. Suponhamos que o grau de P seja m . Então $P(\xi)[1 + |\xi|^2]^{s/2} d\xi$ pertence a L^2 se, e somente se, $s + m < -\frac{n}{2}$, da qual nós obtemos a segunda afirmação.

Seja K um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $H^s(K)$ o subespaço de H^s consistindo das u 's que se anulam em $\mathbb{R}^n \setminus K$, equipadas com a norma $\|\cdot\|_s$. $H^s(K)$ é um subespaço linear fechado de H^s , portanto, é um espaço de Hilbert.

Proposição A.3.2 *Seja K um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Se s, s' são dois números reais tais que $s' < s$, então a injeção natural de $H^s(K)$ em $H^{s'}(K)$ é compacta.*

Definição A.3.2 *Dado um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, denotaremos por*

$$H_c^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in H^s(\mathbb{R}^n) \quad : \quad \text{supp } u \subset K \right\}$$

com a topologia induzida por $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Definição A.3.3 *Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, denotaremos por $H_c^s(\Omega)$ o limite indutivo dos espaços $H_c^s(K)$ quando K percorre os compactos de Ω .*

Definição A.3.4 *Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, denotaremos por*

$$H_{loc}^s(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega) \quad : \quad \phi u \in H^s(\mathbb{R}^n), \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega) \right\}$$

munido da topologia localmente convexa menos fina que torna as aplicações $u \in H_{loc}^s(\Omega) \mapsto \phi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, contínuas.

Os espaços $H_c^s(K)$ são subespaços fechados de $H^s(\mathbb{R}^n)$ e, portanto, espaços de Hilbert. Temos, ainda, que $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $H_c^s(\Omega)$ e em $H_{loc}^s(\Omega)$.

Lema A.3.2 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto.*

- a) Se $s \geq s'$, então $H_c^s(\Omega) \subset H_c^{s'}(\Omega)$ e $H_{loc}^s(\Omega) \subset H_{loc}^{s'}(\Omega)$.
- b) Se $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, então $u|_\Omega \in H_{loc}^s(\Omega)$.
- c) $C^\infty(\Omega) \subset H_{loc}^s(\Omega)$, $\forall s \in \mathbb{R}$.
- d) $H_{loc}^s(\Omega) \subset C^m(\Omega)$, para $s > m + \frac{n}{2}$.

Proposição A.3.3 *A multiplicação $(\phi, u) \mapsto \phi u$ é uma aplicação bilinear de $\mathcal{S} \times H^s$ em H^s tal que*

$$\|\phi u\|_s \leq \|u\|_s \int (1 + |\eta|)^{|s|} |\hat{\phi}(\eta)| d\eta, \quad (\text{A.3})$$

onde $\hat{\phi}$ é a transformada de Fourier de ϕ .

Observação A.3.1 *A estimativa (A.3), em alguns casos, não é a melhor possível. Por exemplo, quando $s = m$, um número inteiro não negativo, temos uma melhor estimativa:*

$$\|\phi u\|_m \leq \text{const } \|u\|_m \sup_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \phi\|_L^\infty. \quad (\text{A.4})$$

Existe uma generalização de (A.4) para H^s , com $|s| \leq m$.

A observação seguinte será utilizada na proposição 2.1.3.

Observação A.3.2 *Se $u \in H^s$, então $\|u\|_s = \|\bar{u}\|_s$.*

Referências Bibliográficas

- [1] Alvarez, J., and Hounie, J. *Spectral invariance and tameness of pseudo-differential operators on weighted Sobolev spaces* , J. of Operator Theory, 30, (1993), 41-67
- [2] Berhanu, S., Cordaro, P., and Hounie J. *An introduction to involutive structures* , to appear, 30
- [3] Cordaro, P.D. *Hipoelipticidade de uma classe de operadores diferenciais com características duplas* , Dissertação de mestrado, USP, (1979), 43-56
- [4] Hoffman, K., and Kunze, R. *Álgebra linear* , Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, (1979)
- [5] Hörmander, L. *The analysis of linear partial differential operators* , Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York and Tokyo, Volume 1, 1.ed., (1983)
- [6] Hounie, J., and Santiago, P. *On the local solvability of semilinear equations* , Commun. in Partial Differential Equations, 20 (9/10), (1995), 1777-1789
- [7] Kreyszig, E. *Introductory functional analysis with applications* , John Wiley and Sons, New York, (1978)
- [8] Nirenberg, L., and Treves, F. *On local solvability of linear partial differential equations, II: Sufficient conditions* , Comm. Pure Applied Math., 23, (1970), 459-510
- [9] Nomizu, K. *Fundamentals of linear algebra* , McGraw Hill, (1966)
- [10] Treves, F. *Basic linear partial differential equations*, Academic Press, New York, San Francisco and London, 2.ed., (1975), 224-236

- [11] Treves, F. *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Academic Press, New York and London, 1.ed., (1967)
- [12] Vekua, I.N. *Generalized analytic functions*, Pergamon Press, London, Paris and Frankfurt, 3.ed., (1962)