**Estimativas das coordenadas de comprimento
para um espaço de papel furado**

Minoru Enrique Akiyama Figueroa

DISSERTAÇÃO/TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE/DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Doutorado em Matemática Aplicada
Orientador: Prof. Dr. André Salles de Carvalho

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CNPq

São Paulo, abril de 2018

Estimativas das coordenadas de comprimento para um espaço de papel furado

Esta é a versão original da dissertação/tese elaborada pelo
candidato (Minoru Enrique Akiyama Figueroa), tal como
submetida à Comissão Julgadora.

Estimativas das coordenadas de comprimento para um espaço de papel furado

Esta versão da dissertação/tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 05/06/2018. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. André Salles de Carvalho (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Sylvain Bonnot - IME-USP
- Prof. Dr. Salvador Addas Zanata - IME-USP
- Prof. Dr. Marcel Vinhas Bertolini - UFPA
- Prof. Dr. Zbigniew Nitecki - Tufts University

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a Adriana, por todo su amor, su apoyo y cariño conmigo, durante el tiempo que hemos estado junto y en particular durante el tiempo que hemos estado en São Paulo.

A mis padres María Helena Figueroa y Tamotsu Akiyama, a mi hermana Harumi Akiyama y mi cuñado Julien Lambert, a mis suegros Luz Elena Salcedo y Domingo Araujo, por su amor y por todo el apoyo que me han dado.

A todas las personas que he conocido aquí en São Paulo y que de una u otra manera me han ayudado durante estos años. En especial a Mirko, Catarina, Diego, Fernando, Segundo, Leticia, Eduardo, João, Felipe, Sylvain, Marcel, Raibel, Germán, Arcelino, Gerard, entre muchos otros.

Quiero agradecer de manera especial a mi orientador André Salle de Carvalho, por ser una gran persona que durante mi doctorado siempre estuvo dispuesto a enseñarme, aconsejarme y en general a ayudarme de cualquier forma y sin ninguna duda.

Resumo

SOBRENOME, A. B. C. **Estimativas das coordenadas de comprimento para um espaço de papel furado**. 2018. 120 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

Espaços de papel são quocientes métricos obtidos ao identificar num multipolígono $P \subset \mathbb{C}$, pares de subsegmentos do bordo de P por isometrias que revertem orientação. Tais espaços aparecem por exemplo em [dC05], onde mostra-se uma receita para construir, a partir de certos homeomorfismos definidos numa superfície compacta, um homeomorfismo chamado de pseudo-Anosov generalizado (pois generalizam os pseudo-Anosov clássicos definidos por Thurston), o qual está definido sobre um espaço de papel homeomorfo à superfície original. Por outro lado, um espaço de papel S tem uma estrutura complexa natural em todos seus pontos exceto, possivelmente, num conjunto fechado $\mathcal{Q} \subset S$ de pontos chamados irregulares. Neste trabalho será considerado a superfície hiperbólica S_∞ obtida a partir de uma esfera de papel S com m pontos irregulares, ao tirar dela seu conjunto de pontos irregulares junto com os pontos com curvatura positiva. Na esfera de papel furada S_∞ será descrita uma família Γ_∞ de curvas geodésicas que descompõem à S_∞ em calças e serão calculados estimativas para os comprimentos hiperbólicos dessas curvas.

Palavras-chave: Superfícies gaita de fole, espaços de papel, pontos cônicos, pontos irregulares.

Abstract

SOBRENOME, A. B. C. **Estimates of the length coordinates for a punctured paper space.** 2018. 120 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

Paper spaces are metric quotients obtained by identifying, given a multipolygon $P \subset \mathbb{C}$, pairs of subsegments of the edge of P by orientation reversing isometries. Such spaces appear for example in [dC05], where a recipe is given to construct, starting from certain homeomorphism on a compact surface, an homeomorphism called generalized pseudo-Anosov map (as these generalize the classical pseudo-Anosov defined by Thurston), which is defined on a paper space homeomorphic to the original surface. On the other hand a paper space S has a natural complex structure at each of its points except, possibly, on a closed set $\mathcal{Q} \subset S$ of points called irregular. In this work will be considerer the hyperbolic surface S_∞ obtained, from a paper sphere S with m irregularities, by taking from it the set of irregular points together with the positive curvature points. On the punctured paper sphere S_∞ will be described a family of geodesic curves Γ_∞ which decompose S_∞ into pairs of pants and will be also calculated stimates for the hyperbolic lengths of those curves.

Keywords: Bagpipes surfaces, paper spaces, conics points, irregular points.

Sumário

1	Preliminares	5
1.1	Espaços métricos	5
1.2	Grupos Fuchsianos	10
1.3	Curvas geodésicas em superfícies hiperbólicas	20
1.4	Superfícies flauta e superfícies gaita de fole	26
2	Espaços de papel	33
2.1	Ferradura justa	33
2.2	Espaços de papel	36
2.3	Esferas de papel	43
2.4	Pontos irregulares isolados	48
3	Esfera de papel furada	55
3.1	Decomposição de S_∞	55
3.2	Modelo base	57
3.3	Estimativas superiores das coordenadas de comprimento	65
3.4	Prova do Teorema 3.3.2	71
3.5	Estimativas inferiores das coordenadas de comprimento	78
3.6	A ferradura justa furada	84
	Referências Bibliográficas	89

Introdução

Este trabalho teve como origem uma pergunta em principio simple e um pouco inocente: Se numa esfera você tira uma sequência infinita de pontos especiais em algum sentido, que convergem à outro ponto especial, considera na nova superfície a métrica hiperbólica e olha para a sequência de geodésicas fechadas simples que separam um furo do seguinte, Qual é o comportamento assintótico dos comprimentos dessas geodésicas à medida que as curvas se “aproximam” ao limite da sequência dos pontos? Ficam eles limitados superiormente/inferiormente? Crescem para infinito? e nesse caso, Qual seria sua taxa de crescimento? Naturalmente a primeira pergunta, feita dessa forma, resulta muito vaga e pouco interessante. Assim, vou a precisar explicar com um pouco mais de detalhes os atores envolvidos e a motivação por trás dessa questão.

Em primeiro lugar a esfera a que me refiro não é uma esfera qualquer; é uma esfera de papel. Espaços de papel são quocientes obtidos ao identificar adequadamente pares de subsegmentos da fronteira de um polígono plano ou, mais geralmente de um multipolígono plano, de maneira que o espaço resultante seja, depois de tirar dele possivelmente alguns que outros pontos, uma superfície orientável com uma estrutura cônico-plana. Logo uma esfera de papel é um espaço de papel homeomorfo a uma esfera. Voltando ao caso geral dos espaços de papel, existem muitos exemplos deles na matemática, sendo o exemplo mais conhecido o caso do toro como quociente de um quadrado ao identificar pares de lados opostos; de maneira mais geral qualquer superfície fechada de gênero $g \geq 1$ pode ser realizada (Topologicamente) como um espaço de papel a partir de um $4g$ -ágono regular, colando pares de seus lados adequadamente. Outros exemplos de espaços de papel de grande importancia, em particular no estudo da teoria de bilhares, são as chamadas de superfície de translação, ver [Zor06], [Ran16].

Porém os exemplos que interessam principalmente nesta tese estão relacionados com uma classe especial de aplicações sobre superfícies chamados de homeomorfismos pseudo-Anosov generalizados, ver [dC05], [dCH10]. A definição formal de um homeomorfismo pseudo-Anosov generalizado será dada no começo do capítulo 2, embora estes não serão estudados com detalhes neste trabalho. Por enquanto posso antecipar que a diferença entre um pseudo-Anosov generalizado e um pseudo-Anosov normal é que o primeiro admite na suas folheações invariantes uma quantidade infinita de singularidades, só que estas acumulam-se num número finito de pontos. Uma maneira de construir homeomorfismos pseudo-Anosov generalizados consiste em usar um train track generalizado invariante por um certo endomorfismo e logo, usando a matríz de transição associada ao train track generalizado, construir a partir de um número finito de retângulo cujos tamanhos são determinados por informação vindo dessa matríz, um espaço de papel cujas identificações são também determinados pelo train track generalizado. A ação do endomorfismo sobre o train track generalizado estende-se agora sobre o espaço de papel num homeomorfismo que é pseudo-Anosov generalizado e que será um pseudo-Anosov comum no caso que o train track tenha finitas arestas. Este método inspirado claramente no artigo clássico de Bestvina-Handel, ver [BH95], no qual serve para construir homeomorfismos pseudo-Anosov também sobre espaços de papel, foi desenvolvido por A. Salles de Carvalho em [dC05]. Aquí, o espaço de papel além de ser homeomorfo a uma superfície de gênero finito, possui uma estrutura complexa natural definido em todos seus pontos fora do conjunto de pontos irregulares, isto é, do conjunto de pontos de acumulação das singularidades do homeomorfismo pseudo-Anosov generalizado associado, mas sem embargo neste caso, esta estrutura complexa estende-se de maneira única a cada um destes pontos irregulares. As folheações mensuradas trans-

versais do homeomorfismo correspondem à projeção das folheações verticais e horizontais naturais dos retângulos usados na construção antes (e muito vagamente) descritas, e correspondem a sua vez com as trajetórias verticais e horizontais de uma diferencial quadrática integrável cujo número de polos, todos de ordem um, são infinitos e são acumulados exatamente no conjunto de pontos irregulares.

Voltando à pergunta inicial feita ao começo desta introdução, esta tese começou analisando a esfera de papel associada a um homeomorfismo pseudo-Anosov generalizado particular chamado de ferradura justa, o qual têm infinitos 1-singularidades acumulando-se num único ponto fixo de tal homeomorfismo. A idéia foi tirar desta esfera de papel tanto o ponto irregular como os pontos 1-singulares das folheações transversais e olhar para o comportamento das geodésicas nessa superfície a medida que estas separam cada vez mais o furo associado ao ponto irregular dos furos associados à 1-singularidades que na esfera de papel estão menos próximo do ponto irregular. A idéia também consistiu em começar com este exemplo para logo fazer o mesmo análise com uma família infinita de esferas de papel descritas em [dCH10], associadas a uma família de endomorfismos unimodais definidos sobre um intervalo da reta real. No artigo mencionado pode-se ver três possíveis tipos de esferas de papel: O primeiro tipo só tem um ponto irregular e o conjunto de 1-singularidades conformam uma única órbita homoclínica desse ponto irregular; o segundo tipo têm $k+1$ pontos irregulares, sendo o conjunto de pontos 1-singulares também uma única órbita, só que esta converge no passado a um dos pontos irregulares e no futuro acumula-se nos outros k pontos irregulares, os quais conformam uma órbita periódica do homeomorfismo pseudo-Anosov generalizado; o tercer tipo não tem pontos irregulares, logo o homeomorfismo na esfera de papel corresponde a um homeomorfismo pseudo-Anosov mesmo. Sendo o objetivo do trabalho analisar os casos de esferas de papel furadas com infinitos furos, o tercer tipo acima mencionado não era de interés. Com respeito aos outros dos tipos a evidência conhecida no momento fizeram pensar que aconteceriam dois fenómenos diferentes em cada um dos tipo: No segundo tipo, que os comprimentos das curvas geodésicas ficariam uniformemente limitadas e, no primeiro tipo, que os comprimentos das geodésicas cresceriam para infinito; neste caso, interesaba saber qual era a taxa de crescimento. Porém depois de estudar a esfera de papel furada associada a ferradura justa (a qual corresponde a um papel do primeiro tipo na família unimodal), resultou que em ambos tipos de espaços de papel os comprimentos das curvas geodésicas ficam limitadas por constantes positivas.

Boa parte desta tese pretende explicar como se chegou a este resultado. De fato o abordagem da tese virou a um estudo puramente geométrico das superfícies hiperbólicas obtidas ao tirar de uma esfera de papel qualquer seus pontos irregulares e pontos 1-cônicos; a definição de tais pontos encontra-se no capítulo 2 da tese, porém no caso de esferas de papel associadas a pseudo-Anosov generalizados, os pontos 1-cônicos correspondem as 1-singularidades das folheações transversais invariantes pelo homeomorfismo. A única hipótese imposta no espaço de papel foi que o número de pontos irregulares seja sempre finito, isto para ter presente os espaços de papel associados aos Pseudo-Anosov generalizados. Uma vez fixada uma esfera de papel com finitas irregularidades e uma vez furada esta esfera, foi descrita uma decomposição em calças desta superfície e foram estimados os comprimentos das geodésicas que realizam tal decomposição.

Aquí é importante destacar que a pergunta sobre o comportamento asintótico dos comprimentos das geodésicas feita ao começo não é tão inocente como se pode perceber inicialmente. A razão disto é a seguinte: Você pode ter a esfera de papel descrita em detalhe, tirar os respectivos pontos irregulares e 1-cônicos dela, a superfície resultante é claramente uma superfície hiperbólica e em consequência será biholomorfa a um quociente do tipo $\mathbb{H}/G$, onde G é um grupo Fuchsiano, você até pode construir as curvas fechadas homotópicas as geodésicas que decompõem à esfera furada em calças. Mas daí a conhecer quais são exatamente as geodésicas da decomposição e conhecer quais são seus comprimentos hiperbólicos é outra história. Para isso é preciso conhecer com exactitude o grupo Fuchsiano G ou a função de uniformização $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}/G$. Ainda para o caso da esfera de Riemann menos um número finito de pontos isto não é um problema trivial, ver por exemplo [Hem], [ZT88]. Além disso, no caso de uma esfera de papel que seja biholomorfa à esfera de Riemann, a métrica

conhecida da esfera de papel e a métrica esférica da esfera de Riemann não são necessariamente comparáveis, com o qual também não pode-se fazer uso de estimativas conhecidas da métrica de Poincaré num domínio do plano complexo. O argumento usado nesta tese para fazer as estimativas das geodésicas está explicado no Lema 3.2.2; ainda o argumento seja bem simple, este depende de uma boa escolha de uma densidade Boreliana definido sobre um anel conveniente, assim que a parte difícil foi conseguir a densidade Boreliana certa de maneira que com ela, das estimativas de comprimento das geodésicas calculadas, pode-se extrair informação substancial. Acredito que a técnica desenvolvida para conseguir tais estimativas superiores dos comprimentos de geodésicas numa esfera de papel furada com finitas irregularidades sirva também para qualquer espaço de papel furado com finitos ou infinitos pontos irregulares.

Na procura de material bibliográfico que me ajuda-se com alguma idéia de como clacular os comprimentos de geodésicas numa esfera de papel furada, achei um artigo de A. Basmajian cujos desenhos se ajustaram à superfície associada à ferradura justa furada. As superfícies flauta estudadas no artigo [Bas93] a que me refiro, foi de muita ajuda para o entendimento da geometria envolvida nas esferas de papel furadas desta tese, ainda não forem de muita ajuda para o cálculo das estimativas procuradas. Para o estudo das esferas de papel furadas com um número finito qualquer de pontos irregulares foi necessário generalizar um pouco o conceito de superfície flauta desse artigo; assim nascem as superfícies gaita de fole as quais são definidas formalmente no final do capítulo 1 deste trabalho. Tanto as flautas como as gaitas de fole resultam muito úteis no estudo de propriedades e, na procura de contra-exemplos, na geometria de superfícies do tipo infinito respeito à teoria das superfícies hiperbólicas do tipo finito, em especial, em relação a teoria de Teichmüller neste tipo de superfícies. Convido ao leitor a revisar os artigos [Shi03], [ALP⁺11], [ALPS12b], [ALPS12a], [APLS11], [ALPS16], [BŠ17], [Sar15], [Kin11] e [Evr17], entre outros, onde são estudados diferentes aspectos relativos a teoria de Teichmüller em superfícies do tipo infinito; ainda nesta teses a teoria de Teichmüller é apenas rasgunhada, é importante ressaltar que na maioria dos artigos referidos uma característica desejável numa superfície do tipo infinito consiste em que exista uma decomposição em calças de uma superfície, onde os comprimentos da multicurva que realiza tal decomposição sejam uniformemente limitado por acima. Um dos objetivos deste trabalho tem que ver com conseguir condições para garantir a existencia de uma multicurva numa esfera de papel furada cujos comprimentos sejam limitados por uma constante positiva.

Este trabalho está dividido da seguinte forma. O capítulo 1, como seu nome o indica, é um capítulo de preliminares. Nele são apresentados alguns conceitos e resultados básicos na literatura especializada que serão usados em maior ou menor medida no desenvolvimento da tese. Na seção 1.4 é apresentado o conceito de superfície flauta de A. Basmajian e algumas propriedades, para imediatamente depois introduzir o conceito de superfície gaita de fole e generalizar nelas propriedades válidas nas superfícies flauta. Ainda as superfícies gaita de fole sejam uma generalização natural das superfícies flautas, no meu conhecimento não existia uma definição formal delas nem um estudo sistemático das mesmas. Entre os resultados originais neste capítulo, além da definição de superfície gaita de fole, estão o Teorema 1.4.5 o qual garante a boa definição de gaita de fole, e o Teorema 1.4.6 o qual determina se a estrutura Fuchsiana de uma gaita de fole é um grupo Fuchsiano do primeiro ou de segundo tipo, dependendo se são satisfeitas certas hipóteses. Também está a Proposição 1.4.11 que caracteriza as superfícies gaita de fole em função do conjunto dos fins num domínio da esfera de Riemann.

No capítulo 2 é apresentado o conceito de espaço de papel. Este capítulo poderia ser considerado parte dos preliminares da tese pois tanto o conceito de espaço de papel como as propriedades deles mostradas no capítulo forem desenvolvidos em diferentes artigos como por exemplo [dCH12], [dCH10], [dCH13], [Ber12] e [dC05]. Porém, sendo os espaços de papel um protagonista principal desta tese, colocou-se a teoria dedicada aos espaços de papel como um capítulo aparte e forem feitos as demonstrações de algumas das suas propriedades para fazer o texto o mais auto-contido possível. Na seção 2.4 sim são apresentados dois resultados originais que são necessários para o desenvolvimento do capítulo 3. O primeiro destes resultados, a Proposição 2.4.2, caracteriza os

pontos irregulares num espaço de papel que não são pontos de acumulação de pontos cônicos; este resultado será importante pois, sob as suposições impostas sobre as esferas de papel do capítulo 3, permite descartar que esse fenómeno acontece. O segundo resultado, o Teorema 2.4.4, mostra que numa superfície de papel, um ponto irregular isolado não somente é ponto de acumulação de pontos cônicos, se não que em particular será ponto de acumulação de pontos 1-cônicos.

O capítulo 3 contém os principais resultados desta tese. Primeiramente serão identificadas as esferas de papel furadas com as superfícies gaita de fole justas definidas no final do capítulo 1, e será descrita uma decomposição relativamente natural desta superfície em calças. A seguir serão estimados por cima os comprimentos das curvas geodésicas da decomposição em calças num modelo simple de esfera de papel furada que foi chamado de modelo base. Os argumentos usados nas estimativas feitas no modelo base serão generalizadas para obter um método que permite calcular estimativas superiores dos comprimentos de todas exceto um número finito das geodésicas na decomposição em calças de uma esfera de papel furada qualquer. Este resultado, o Teorema 3.3.2, será o resultado principal de toda a tese; com ele pode-se calcular de maneira relativamente fácil as estimativas superiores dos comprimentos a partir de informação local na cicatriz de uma esfera de papel furada perto de um ponto irregular. A Proposição 3.3.5 será uma consequência imediata do Teorema 3.3.2 e do Teorema 1.4.6; este critério vai determinar sob certas hipóteses se a estrutura Fuchsiana de uma esfera de papel furada é do primeiro tipo. Que a estrutura Fuchsiana de uma superfície seja do primeiro tipo é uma característica desejável no caso particular de esferas de papel associadas a um homeomorfismo pseudo-Anosov generalizado pois, na procura de uma possível generalização do Teorema de hiperbolização de Thurston para estes homeomorfismos, isto facilitaria de maneiras diferentes o uso do Teorema de uniformização simultânea de Bers (Ver [Ota96], [Ber16] e [J.H06], Proposição 6.12.4, para mais detalhes). Na seção 3.5 consegue-se estimativas inferiores para os comprimentos das geodésicas na esfera furada do modelo base, ver Proposição 3.5.1. Nesta mesma seção consegue-se também uma estimativa superior para o comprimento de uma geodésica fechadas simple que separa dois furos escolhidos convenientemente do resto dos furos numa esfera de papel furada arbitraria; tal estimativa (Ver Proposição 3.5.4) permite a sua vez estimar por baixo os comprimentos das geodésicas que decompõem à uma esfera furada em calças. Achei apropriado finalizar com um análise do espaço de papel furado associado a ferradura justa, considerando que foi com este exemplo particular que a maioria das idéias desenvolvida na tese forem realizadas; assim na última seção são aplicados os resultados do capítulo 3 para conseguir estimativas dos comprimentos de diferentes geodésicas nesta superfície flauta.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo de preliminares serão apresentados algumas noções básicas necessárias em sua maioria para o desenvolvimento dos seguintes capítulos. O leitor pode se quiser passar este capítulo e voltar a ele quando considere necessário. Algumas das referencias principais usadas são as seguintes: Para a seção 1.1 o livro [Iva01], para as seções 1.2, 1.3 e 1.4, [Kat88], [Bus92], [Bon09], [Mas88], [J.H06], [YT92], [Bas93] e [FM11].

1.1 Espaços métricos

Definição 1.1.1. Uma *métrica* em um conjunto X é uma função $d_X : X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ que satisfaz as seguintes propriedades: Para quaisquer $x, y, z \in X$,

- i) Não-negatividade: $d_X(x, y) \geq 0$;
- ii) Simetria: $d_X(x, y) = d_X(y, x)$;
- iii) Desigualdade triangular: $d_X(x, z) \leq d_X(x, y) + d_X(y, z)$;
- iv) Identidade de indiscerníveis: $x = y$ se, e somente se, $d_X(x, y) = 0$.

Se a propriedade iv) é substituída pela seguinte:

- iv') $x = y \Rightarrow d_X(x, y) = 0$;

dize-se que d_X é uma *semi-métrica*.

O par (X, d_X) é dito um espaço métrico ou semi-métrico respectivamente. Se $x, y \in X$, o valor $d_X(x, y)$ é chamado de distância entre x e y . Toda métrica (semi-métrica) em X determina uma topologia no mesmo conjunto, a qual é gerada pela coleção dos conjunto chamados de bolas abertas $B_X(x, r) := \{y \in X \mid d_X(x, y) < r\}$, $x \in X$, $r > 0$. Se d_1 e d_2 são duas métricas no mesmo conjunto X , diz-se que d_1 e d_2 são topologicamente equivalentes se a topologia induzida por d_1 e a topologia induzida por d_2 são as mesmas.

Seja (X, d_X) um espaço métrico, $x \in X$ e $A, B \subset X$ não-vazios. A distância entre x e A é o valor:

$$d_X(x, A) := \inf_{a \in A} d_X(x, a)$$

A distância entre os conjuntos A e B é o valor:

$$d_X(A, B) := \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} d_X(a, b)$$

O diâmetro de A é o valor:

$$\text{diam}_X(A) := \sup_{x,y \in A} d_X(x,y)$$

Se $r > 0$, $B_X(A, r)$, $\bar{B}_X(A, r)$ e $\mathbb{S}_X(A, r)$ denotam os conjuntos:

$$B_X(A, r) := \{x \in X \mid d_X(x, A) < r\}$$

$$\bar{B}_X(A, r) := \{x \in X \mid d_X(x, A) \leq r\}$$

$$\mathbb{S}_X(A, r) := \{x \in X \mid d_X(x, A) = r\}$$

As vezes será escrito $B_{(X, d_X)}(A, r)$ ou $B_{d_X}(A, r)$ para denotar a bola aberta $B_X(A, r)$ quando seja conveniente resaltar a métrica do espaço X ; a mesma notação será adotada com bolas fechadas e esferas de centro A e raio r respectivamente. Por outro lado, para simplificar um pouco a notação, será escrito a métrica do espaço X como d em vez de d_X se não há perigo de confusão.

Definição 1.1.2. Uma aplicação $f : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$ entre espaços métricos diz-se que *preserva distância*, se para todo $x_1, x_2 \in X$, $d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$. Se além disso f é sobrejetora (logo bijetora), diz-se que f é uma *isometria*. Diz-se que f é uma *isometria local*, se para todo $x \in X$ existe $r_x > 0$ tal que a restrição $f : B_{d_X}(x, r_x) \longrightarrow B_{d_Y}(f(x), r_x)$ é uma isometria.

Definição 1.1.3. Dado um espaço métrico (X, d) qualquer, um *caminho em X* é uma aplicação contínua $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$. Seu *comprimento* é o valor:

$$|\gamma|_X := \sup \sum_i d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = b$ do intervalo $[a, b]$. Diz-se que o caminho γ é *retificável* se $|\gamma|_X < \infty$. A *métrica intrínseca induzida por d* é a função $\hat{d} : X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ definida, para todo $x, y \in X$, por:

$$\hat{d}(x, y) := \inf\{|\gamma|_X \mid \gamma \text{ é um caminho em } X \text{ conectando } x \text{ e } y\}$$

Observação 1.1.4. i) É fácil ver que a função $\hat{d}$ satisfaz as propriedades da definição 1.1.1. No caso que não exista um caminho conectando dois pontos $x, y \in X$, tem-se $\hat{d}(x, y) = \infty$. Esta é a razão de permitir na definição de métrica que a distância entre dois pontos estem a uma distância infinita.

ii) Em geral as métricas $\hat{d}$ e d não são topologicamente equivalentes (ver [Iva01], exercício 2.3.9.), mas a topologia induzida por $\hat{d}$ sempre é mais fina que a induzida pela métrica d ; em particular ambas topologias coincidem se (X, d) é um espaço métrico compacto. Por outro lado, se γ é um caminho em X , é fácil provar que o comprimento de γ não depende de qual das duas métricas, d ou $\hat{d}$, é usada; logo a métrica intrínseca induzida por $\hat{d}$ é a mesma métrica $\hat{d}$.

Definição 1.1.5. Uma métrica d em X diz-se que é *intrínseca*, e que (X, d) é um *espaço de comprimento*, se $d = \hat{d}$. Diz-se que a métrica d é *estritamente intrínseca* se ela é intrínseca e o infimo na definição de $\hat{d}$ for realizado, é dizer, dados $x, y \in X$, existe um caminho γ conectando x e y tal que $d(x, y) = |\gamma|_X$.

Proposição 1.1.6. *Toda métrica intrínseca compacta é estritamente intrínseca.*

□

Seja X um conjunto qualquer e $\mathcal{G}$ uma sub-coleção de subconjuntos de X . Dados $x, y \in X$, diz-se que x e y são identificados por $\mathcal{G}$ se $x = y$ ou existe $g \in \mathcal{G}$ tal que $x, y \in g$. Assim a coleção $\mathcal{G}$ determina em X uma relação $R_{\mathcal{G}}$ reflexiva, simétrica, mas não necessariamente transitiva; será transitiva se, e somente se, os elementos de $\mathcal{G}$ são dois a dois disjuntos: nesse caso a relação $R_{\mathcal{G}}$ é de equivalência e diz-se que $\mathcal{G}$ é uma partição. Em geral, se R é uma relação de equivalência em X , o conjunto quociente X/R é a coleção de R -clases de equivalência $R[x] := \{y \in X \mid xRy\}$, $x \in X$, a qual determina uma partição de X ; a aplicação $\pi_R : X \rightarrow X/R$, dada por $x \mapsto R[x]$, chama-se de R -projeção ou simplesmente de projeção, se não houver perigo de confusão. Se R é uma relação reflexiva e simétrica em X , um subconjunto U de X diz-se que é R -saturado se todo ponto R -relacionado com algum ponto de U deve estar em U .

Definição 1.1.7. Considere-se um espaço métrico (X, d) e uma relação R em X reflexiva e simétrica. Dados $x, y \in X$, Um R -itinerário de x à y é uma sequência finita $((p_i, q_i))_{i=0}^k$ em X^2 tal que xRp_0 , q_iRp_{i+1} , para cada $i = 0, 1, \dots, k-1$, e q_kRy . Seu d -custo define-se como a soma:

$$L^R((p_i, q_i)_{i=0}^k) := \sum_{i=0}^k d(p_i, q_i)$$

A ideia aqui é que, para moverse do ponto x ao ponto y via um R -itinerário $((p_i, q_i))_{i=0}^k$, cada passo de p_i à q_i tem custo $d(p_i, q_i)$, mas o passo de q_i à p_{i+1} , sendo ambos pontos R -relacionados, é gratuito.

A função $d^R(x, y) : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, definida para cada $x, y \in X$, por

$$d^R(x, y) := \inf \{L^R((p_i, q_i)) \mid ((p_i, q_i)) \text{ é um } R\text{-itinerário de } x \text{ a } y\}$$

é uma semi-métrica em X a qual, a sua vez, determina uma relação de equivalência $\sim_R$ no mesmo X , onde dois pontos são $\sim_R$ -relacionados se a d^R -semidistância entre eles é 0. A semi-métrica d^R em X projeta-se naturalmente numa métrica (a qual será denotada também por d^R) no conjunto quociente $X/\sim_R$.

Definição 1.1.8. Se (X, d) é um espaço métrico e R é uma relação em X reflexiva e simétrica, o quociente métrico de X por R define-se como o espaço métrico $(X/\sim_R, d^R)$. Por simplicidade, será denotado X/d^R a tal quociente métrico.

Observação 1.1.9. i) Se a relação em X é induzida por uma coleção $\mathcal{G}$ de subconjuntos de X , chama-se a um $R_{\mathcal{G}}$ -itinerário entre dois pontos de $\mathcal{G}$ -itinerário, e usa-se a notação $d^{\mathcal{G}}$ e $\sim_{\mathcal{G}}$ em vez de $d^{R_{\mathcal{G}}}$ e $\sim_{R_{\mathcal{G}}}$ respectivamente.

ii) Se R é uma relação de equivalência, o quociente métrico X/d^R e o conjunto quociente X/R não necessariamente coincidem como conjunto. Por exemplo se $X = \mathbb{R}$ e $\mathcal{G} = \{\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$, $\mathbb{R}/\mathcal{G}$ consiste em dois pontos enquanto que $X/d^{\mathcal{G}}$ só tem um ponto. Por outro lado, comparando o quociente métrico X/d^R com o quociente topológico $X/\sim_R$, a topologia do segundo é mais fina que a topologia do quociente métrico: Se $\pi_{d^R} : X \rightarrow X/d^R$ denota a projeção sobre o quociente métrico, então ela é continua pois $d^R(\pi_{d^R}(x), \pi_{d^R}(y)) = d^R(x, y) \leq d(x, y)$; sendo $\pi_{d^R} = id \circ \pi_{\sim_R}$, tem-se que $id : X/\sim_R \rightarrow X/d^R$ é continua. A seguinte proposição é consecüência imediata desta última observação.

Proposição 1.1.10. Se (X, d) é um espaço métrico compacto e R é uma relação em X reflexiva e simétrica, o quociente métrico X/d^R e o quociente topológico $X/\sim_R$ são homeomorfos.

□

Referente ao quociente métrico de um espaço de comprimento tem-se o seguinte resultado, ver [Iva01], página 62-63.

Proposição 1.1.11. *Se (X, d) é um espaço de comprimento e R é uma relação em X reflexiva e simétrica, o quociente métrico $(X/d^R, d^R)$ é um espaço de comprimento.*

□

A continuação vai ser enunciado um teorema devido a R. L. Moore, que dá condições suficientes para que o quociente topológico de uma 2-esfera seja novamente uma 2-esfera. Antes disso, algumas definições.

Definição 1.1.12. Uma *separação* de um espaço topológico X é uma decomposição de X como união disjunta $X = A \sqcup B$ onde A e B são subconjuntos fechados e não vazios de X . Dize-se que X é *conexo* se não existe uma separação de X . Um subconjunto $C \subset X$ *separa dois pontos* $x, y \in X$ (dois subconjuntos $D, E \subset X$) se existir uma separação $X \setminus C = A \sqcup B$, com $x \in A$ e $y \in B$ ($D \subset A$ e $E \subset B$). Se X é conexo e $X \setminus C$ não é, dize-se que C *separa* X . Um *continuum* é um espaço de Hausdorff compacto e conexo.

Definição 1.1.13. Uma relação de equivalência R num espaço topológico X dize-se *fechada*, se R é fechado como subconjunto no espaço produto $X \times X$. Uma decomposição $\mathcal{G}$ de X é *semi-continua superiormente* se cada $g \in \mathcal{G}$ é compacto e a relação $R_{\mathcal{G}}$ é fechada; e é *monótona* se cada $g \in \mathcal{G}$ for conexo.

Observação 1.1.14. No caso que X seja um espaço métrico com métrica d , uma relação de equivalência R em X é fechada se, e somente se, $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ e $(x_n, y_n) \in R$ implica que $(x, y) \in R$.

Teorema 1.1.15 (Moore, [Moo25]). *O quociente topológico da 2-esfera por uma decomposição monótona e semi-continua superiormente cujos elementos não a separam é homeomorfa a 2-esfera.*

□

Definição 1.1.16. Um espaço métrico é um *dendrito* se é um continuum localmente conexo que não contém nenhuma curva fechada simples. Um *dendrito local* é um continuum tal que cada ponto tem uma vizinhança fechada a qual é um dendrito.

A seguinte proposição mostra algumas propriedades básicas dos dendritos, ver [Why63].

Proposição 1.1.17. *Se G é um dendrito, então:*

- i) *Quaisquer dois pontos de G são separados por um terceiro ponto de G . reciprocamente, um continuum com essa propriedade é um dendrito.*
- ii) *Se $x, y \in G$, $x \neq y$, existe um único arco em G os conectando.*
- iii) *G é contrátil.*
- iv) *Todo sub-continuum de G é um dendrito.*
- v) *Todo subconjunto conexo de G é conexo por caminhos, e a interseção de quaisquer dois conexos em G é conexa.*

□

Um ponto p em um continuum G chama-se de extremidade se possui vizinhanças arbitrariamente pequena cuja fronteira é um único ponto. O ponto $p \in G$ chama-se de ponto de corte, se $\{p\}$ separa G .

Proposição 1.1.18. *Um continuum G é um dendrito se, e somente se, todos seus pontos são ou extremidades ou pontos de corte.*

□

Definição 1.1.19. Uma coleção $\mathcal{G}$ de subconjuntos de um espaço topológico X é *não-separada*, se nenhum elemento de $\mathcal{G}$ separa dois pontos pertencentes a cada um dos outros elementos de $\mathcal{G}$. Dize-se que $\mathcal{G}$ é *dendrítica* se é não-separada e, dado $g \in \mathcal{G}$ e $y \in g$ existe $g' \in \mathcal{G}$ que separa g de y .

Teorema 1.1.20 (ver [Why63]). *Uma decomposição dendrítica $\mathcal{G}$ de um continuum X é semi-continua superiormente e o quociente topológico $X/\mathcal{G}$ é um dendrito.*

□

Para finalizar a seção, serão definidos os conceitos de cone métrico e superfície cônico-plana, o qual servirá para determinar uma estrutura conforme nos espaços de papel no próximo capítulo.

Definição 1.1.21. Considere-se um espaço métrico (X, d) . Define-se o *cone métrico sobre (X, d)* , denotado por $(\text{Cone}(X), d_c)$, como o quociente de $[0, +\infty) \times X$ pela relação de equivalência que identifica num mesmo ponto todos os pontos da forma $(0, x)$, $x \in X$, e deixa os outros intactos, dotado da métrica $d_c : \text{Cone}(X) \times \text{Cone}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ definida, para cada classe $[s, x], [t, y] \in \text{Cone}(X)$, por:

$$d_c([s, x], [t, y]) := \begin{cases} \sqrt{s^2 + t^2 - 2st \cos(d(x, y))} & , \text{ se } d(x, y) \leq \pi \\ s + t & , \text{ se } d(x, y) \geq \pi \end{cases}$$

Observação 1.1.22. i) A função d_c acima definida é em efeito uma métrica sobre o conjunto $\text{cone}(X)$; além disso, se d é uma métrica estritamente intrínseca no espaço X , é possível provar que d_c também é estritamente intrínseca em $\text{Cone}(X)$, ver [Iva01], Teorema 3.6.1.

ii) Para todo $x, y \in X$, $[0, x] = [0, y]$, pelo qual será denotado por $[0]$ à classe de equivalência $[0, x]$; este ponto será chamado de ápice do cone. É imediato da definição de d_c que, para todo $[t, x] \in \text{Cone}(X)$, $d_c([0], [t, x]) = t$. Isto implica que para $r > 0$, $B_{d_c}([0], r) = \{[t, x] \mid t < r\}$.

Seja $\mathbb{S}_\xi$ o círculo de raio $\xi > 0$, dotado da métrica intrínseca $d_{\mathbb{S}_\xi}$ e considere-se o cone métrico sobre $\mathbb{S}_\xi$, o qual denotaremos por simplicidade por $\text{Cone}(\xi)$ em vez de $\text{Cone}(\mathbb{S}_\xi)$. Para todo ξ , o cone métrico $\text{Cone}(\xi)$ é homeomorfo ao plano complexo $\mathbb{C}$: Tome o homeomorfismo $\phi_\xi : \text{Cone}(\xi) \rightarrow \mathbb{C}$, $\phi_\xi([t, \xi e^{i\theta}]) := t^{1/\xi} e^{i\theta}$. Por outro lado, é fácil provar que os cones $\text{Cone}(\xi_1)$ e $\text{Cone}(\xi_2)$ são isométricos se, e somente se, $\xi_1 = \xi_2$; sendo ϕ_1 além de um homeomorfismo uma isometria entre $\mathbb{C}$ e $\text{Cone}(1)$, o anterior implica que $\text{Cone}(\xi)$ nunca é isométrico ao plano quando $\xi \neq 1$. A função $\psi_\xi : \text{Cone}(\xi) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\psi_\xi([t, \xi e^{i\theta}]) := t e^{i\xi\theta}$ é uma isometria local em todos os pontos do cone diferente do ápice. Em efeito, dado $t_0 > 0$ e $\theta_0 \in \mathbb{R}$, considere-se $0 < r < \min\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2\xi}\}$ e a vizinhança $U(\theta_0, r)$ do $[t_0, \xi e^{i\theta_0}]$ das classes $[t, \xi e^{i\theta}]$ tais que $t > 0$ e $|\theta - \theta_0| < r$ (observe-se que r foi escolhido suficientemente pequeno de forma que $d_{\mathbb{S}_\xi}(\xi e^{i\theta_1}, \xi e^{i\theta_2}) = \xi \cdot |\theta_1 - \theta_2| < \pi$, para todo $\theta_1, \theta_2 \in (\theta_0 - r, \theta_0 + r)$). Para todo $x_1, x_2 \in U(\theta_0, r)$, suponha que $x_j = [t_j, \xi e^{i\theta_j}]$, onde $|\theta_j - \theta_0| < r$, para $j = 1, 2$, logo,

$$\begin{aligned}
|\psi_\xi(x_1) - \psi_\xi(x_2)| &= |t_1 e^{i\xi\theta_1} - t_2 e^{i\xi\theta_2}| \\
&= \left(t_1^2 + t_2^2 - 2\operatorname{Re}(t_1 \cdot t_2 e^{i\xi(\theta_1 - \theta_2)}) \right)^{1/2} \\
&= \left(t_1^2 + t_2^2 - 2t_1 \cdot t_2 \cos(\xi(\theta_1 - \theta_2)) \right)^{1/2} \\
&= d_c(x_1, x_2).
\end{aligned}$$

Assim ψ_ξ é uma isometria quando é restrito ao aberto $U(\theta_0, r)$. Naturalmente o homeomorfismo ϕ_ξ determina uma estrutura complexa no cone métrico $\operatorname{Cone}(\xi)$; o que é interessante aqui é que as cartas locais complexas $(U(\theta, r), \psi_\xi)$, com $\theta \in \mathbb{R}$ e $r > 0$ suficientemente pequeno são compatíveis com tal estrutura pois, para todo $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$\psi_\xi \circ \phi_\xi^{-1}(z) = \psi_\xi([\rho^\xi, \xi e^{i\theta}]) = \rho^\xi e^{i\theta\xi} = z^\xi$$

Definição 1.1.23. Uma *superfície cônico-plana* é um espaço métrico (X, d) tal que, para cada $x \in X$, existem $\xi, r > 0$ tais que a bola $B_X(x, r)$ é isométrica à $B_{\operatorname{Cone}(\xi)}([0], r)$.

Denote-se por $\mathcal{V}$ o conjunto de pontos em uma superfície cônico-plana (X, d) que satisfazem a seguinte propriedade: $x \in \mathcal{V}$ se existe uma isometria $f : B_X(x, r) \rightarrow B_{\operatorname{Cone}(\xi)}([0], r)$ tal que $f(x) = [0]$, para algum $r > 0$ e $\xi \neq 1$. Tais pontos são chamados de pontos cônicos de X enquanto que os pontos de $X \setminus \mathcal{V}$ são chamados de pontos planares de X . Observe-se que pelas propriedades dos cones métricos sobre um círculo, o conjunto de pontos cônicos $\mathcal{V}$ é discreto pois qualquer ponto perto de $x \in \mathcal{V}$ diferente de x tem uma vizinhança localmete isométrica a um aberto de $\mathbb{C}$, logo deve ser planar. Daí é fácil concluir que toda superfície cônico-plana admite uma estrutura complexa natural, a qual é localmente plana no subespaço $X \setminus \mathcal{V}$.

1.2 Grupos Fuchsianos

Nesta tese será considerado o modelo do semiplano superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im} z > 0\}$ como modelo do plano hiperbólico, equipado com a métrica Riemanniana de curvatura constante igual à -1 , $\lambda_{\mathbb{H}}(z)|dz|$ onde,

$$\lambda_{\mathbb{H}}(z)|dz| := \frac{|dz|}{\operatorname{Im} z}$$

Assim, se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, é uma curva parametrizada diferenciável por pedaços, o comprimento hiperbólico de γ é o valor,

$$\ell_{\mathbb{H}}(\gamma) := \int_{\gamma} \frac{|dz|}{\operatorname{Im} z} = \int_a^b \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt$$

Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$, a distância hiperbólica entre estes pontos define-se como,

$$d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) := \inf_{\gamma} \ell_{\mathbb{H}}(\gamma),$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as curvas $\gamma \subset \mathbb{H}$ diferenciável por pedaços que conectam ambos pontos. O bordo no infinito de $\mathbb{H}$, denotado por $\partial_{\infty} \mathbb{H}$, é a fronteira de $\mathbb{H}$ como subespaço da esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Assim $\partial_{\infty} \mathbb{H}$ é a reta real estendida $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$; $\overline{\mathbb{H}}$ denotará a união $\mathbb{H} \cup \partial_{\infty} \mathbb{H}$ com a topologia de subespaço de $\hat{\mathbb{C}}$. É importante resaltar que a topologia em $\mathbb{H}$ induzida

pela distância $d_{\mathbb{H}}$ coincide com a topologia de $\mathbb{H}$ como subespaço da esfera de Riemann, porém ambos espaços não são métricamente equivalentes pois $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ é completo em quanto que $(\mathbb{H}, d_{\hat{\mathbb{C}}})$ não é.

Definição 1.2.1. Um *arco geodésico* em $\mathbb{H}$ é uma curva $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{H}$ que realiza a distância hiperbólica entre os pontos que conecta. Uma *linha geodésica* ou simplesmente uma *geodésica* em $\mathbb{H}$, é um arco geodésico que não pode ser estendido a um arco geodésico maior.

Dados dois pontos $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ existe um único arco geodésico com extremidades estes pontos: tal arco será denotado por $[z_1, z_2]$. As geodésicas em $\mathbb{H}$ são semicírculos euclidianos que intersectam ortogonalmente o círculo no infinito $\hat{\mathbb{R}}$; igualmente, dados $a_1, a_2 \in \hat{\mathbb{R}}$ diferentes, existe uma única geodésica com extremidades no infinito a_1 e a_2 , a qual será denotada por $[a_1, a_2]$, ainda suas extremidades não são parte de $\mathbb{H}$ (Observe-se que $[a, \infty]$, $a \in \mathbb{R}$, é uma semireta ortogonal à $\mathbb{R}$ cuja base é a). Um conjunto $X \subset \overline{\mathbb{H}}$ diz-se que é convexo se para todo $z_1, z_2 \in X$, tem-se $[z_1, z_2] \subset X$.

Definição 1.2.2. Uma *sequência aninhada de geodésicas* é uma sequência $\{L_n\}_{n \geq 0}$ de linhas geodésicas em $\mathbb{H}$ mutuamente disjuntas em $\overline{\mathbb{H}}$ tais que, para cada $n \geq 1$, L_{n-1} e L_{n+1} estão em diferentes componentes de $\mathbb{H} \setminus L_n$. Diz-se que a sequência aninhada *converge à geodésica* L , se as extremidades de L_n convergem as extremidades de L , como sequência em $\hat{\mathbb{R}}$. Se em vez disso as extremidades de L_n convergem a um ponto, diz-se que a sequência *diverge ao bordo* de $\mathbb{H}$.

Observação 1.2.3. As vezes será considerado o primeiro elemento de uma sequência aninhada de geodésicas seja um horociclo como na figura 1.1.

Figura 1.1: Uma sequência aninhada de geodésicas que converge à geodésica L

Proposição 1.2.4 (ver [Bas93]). Se uma sequência aninhada de geodésicas $\{L_n\}_{n \geq 0}$ converge à geodésica L , então

$$\sum_{n \geq 0} d_{\mathbb{H}}(L_n, L_{n+1}) < +\infty$$

□

Suponha que as geodésicas de uma sequência aninhada $\{L_n\}_{n \geq 0}$ estão orientadas de maneira que L_{n+1} fica na direita de L_n , para $n \geq 0$. Dado qualquer $n \geq 0$, existe um único arco geodésico O_n ortogonal à L_n e L_{n+1} que conecta ambas curvas; denote-se por z_n^- o ponto de interseção de L_n com O_{n-1} , e por z_n^+ o ponto de interseção de L_n com O_n , ver figura 1.2. Considere-se os números reais s_n , $n \geq 1$, definidos por $s_n := \epsilon_n \cdot d_{\mathbb{H}}(z_n^-, z_n^+)$, onde $\epsilon_n = +1$ se z_n^- está na esquerda de z_n^+ e $\epsilon_n = -1$ se z_n^- está na direita de z_n^+ , isto relativo à orientação da geodésica L_n . A sequência $(s_n)_{n \geq 1}$ será chamada de coordenadas de torção da sequência aninhada $\{L_n\}_{n \geq 0}$.

Figura 1.2: Torção de uma sequência de geodésica. Observe-se que no desenho $s_1 > 0$, $s_2 < 0$, $s_3 < 0$.

Proposição 1.2.5 (ver [Bas93]). Seja $\{L_n\}_{n \geq 0}$ uma sequência aninhada de geodésicas com coordenadas de torção $(s_n)_{n \geq 1}$. A sequência $\{L_n\}_{n \geq 0}$ converge a uma geodésica se,

$$\sum_{n \geq 0} d_{\mathbb{H}}(L_n, L_{n+1}) < +\infty \quad e \quad \sum_{n \geq 1} |s_n| < +\infty$$

□

Denote-se por $\text{Isom}^+(\mathbb{H})$ ao grupo de isometria de $\mathbb{H}$ que preservam orientação. $\text{Isom}^+(\mathbb{H})$ consiste nas transformações lineares fraccionárias $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ tais que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc = 1$. Assim, identifica-se este grupo com $\text{PSL}_2(\mathbb{R}) := \text{SL}_2(\mathbb{R}) / \{\pm \text{Id}\}$.

Definição 1.2.6. Seja $f \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$ diferente da identidade e suponha que $A \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ representa à f . Dize-se que f é:

- i) *Parabólico*, se $|\text{Tra } A| = 2$
- i) *Hiperbólico*, se $|\text{Tra } A| > 2$
- i) *Elítico*, se $|\text{Tra } A| < 2$

Observação 1.2.7. Lembre-se que toda transformação linear fraccionária diferente da identidade tem no máximo dois pontos fixos. Os elementos parabólicos correspondem as isometrias com um único ponto fixo o qual está em $\mathbb{R}$; éstos são conjugados com a transformação $z \mapsto z - 1$ ou $z \mapsto z + 1$. Um elemento f é hiperbólico quando tem dois pontos fixos em $\mathbb{R}$. Neste caso a geodésica com extremidades os pontos fixos de f chama-se o *eixo de f* e será denotado por $\mathcal{E}_f$: O eixo de f é a única geodésica invariante pela ação de f . É fácil ver que um elemento hiperbólico é conjugado em $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ a uma transformação $z \mapsto \lambda \cdot z$, para algum $\lambda > 1$. Os elementos elíticos são os únicos que tem um ponto fixo em $\mathbb{H}$ (O seu segundo ponto fixo está no complemento de $\mathbb{H}$); eles são conjugados a transformações da forma $z \mapsto e^{i\theta} \cdot z$, com $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. A figura 1.3 mostra os pontos fixos de cada uma das classes de isometrias anteriores e a ação delas sobre $\mathbb{H}$.

Definição 1.2.8. Um grupo Fuchsiano é um subgrupo discreto de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Proposição 1.2.9. $G < \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ é Fuchsiano se, e somente se, G age descontinuamente em $\mathbb{H}$, isto é, para todo $z \in \mathbb{H}$, existe uma vizinhança U de z tal que o conjunto $\{g \in G \mid g \cdot U \cap U \neq \emptyset\}$ é finito.

Figura 1.3: Isometrias do tipo parabólico, hiperbólico e elítico respectivamente.

Na proposição acima, basta mostrar que G age descontinuamente em algum $z \in \mathbb{H}$ para concluir que este grupo age descontinuamente em cada ponto de $\mathbb{H}$, ver [Kat88]. Como consequência da proposição acima, dado um grupo Fuchsiano G e um ponto $z \in \mathbb{H}$, a G -órbita de z , $Gz := \{g(z) / g \in G\}$ não pode acumular-se em nenhum ponto de $\mathbb{H}$. Porém, se G é infinito, a G -órbita de um ponto de $\mathbb{H}$ como subespaço em $\hat{\mathbb{C}}$ deve ter pelo menos um ponto de acumulação em $\hat{\mathbb{C}}$; sendo $\mathbb{H}$ invariante por G , os pontos de acumulação de Gz estão contidos no bordo $\hat{\mathbb{R}}$, para qualquer $z \in \mathbb{H}$. É fácil ver que o conjunto de pontos limite das G -órbitas de pontos de $\mathbb{H}$ é o mesmo indiferentemente do ponto de $\mathbb{H}$ escolhido, pelo qual a notação na seguinte definição tem sentido.

Definição 1.2.10. Seja G um grupo Fuchsiano. O *conjunto limite* de G , denotado por Λ_G , consiste nos pontos de acumulação (como subespaço de $\hat{\mathbb{C}}$) da órbita Gz , para algum $z \in \mathbb{H}$.

Proposição 1.2.11. Se $G < \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ é um grupo Fuchsiano, o conjunto limite Λ_G é G -invariante. Além disso, uma das seguintes três possibilidades é satisfeita:

- i) Λ_G tem máximo dois pontos.
- ii) $\Lambda_G = \hat{\mathbb{R}}$.
- iii) Λ_G é um conjunto de Cantor.

□

Quando Λ_G tem 0, 1 ou 2 pontos somente, é dizer, no caso i) da proposição acima, diz-se que o grupo é elementar. Todo grupo Fuchsiano elementar, ou é um grupo cíclico ou é conjugado com o grupo gerado pelas transformações $z \mapsto \lambda \cdot z$, $\lambda > 1$, e $z \mapsto -\frac{1}{z}$, ver [Bea83], Teorema 8.1.2. Em particular um grupo Fuchsiano elementar e sem elementos elíticos é cíclico infinito. Nesta tese serão considerados somente grupos Fuchsianos sem elementos elíticos e, salvo em alguns casos específicos, grupos não-elementares. Observe-se que G não tem elementos elíticos se, e somente se, G é livre de torção, é dizer, se $g^n = \text{Id}$ para $g \in G$ e $n \geq 1$, então $g = \text{Id}$. Quando o grupo Fuchsiano é não-elementar, este deve conter uma família infinita de elementos hiperbólicos nenhum dos quais tem um ponto fixo común. Cabe resaltar também que todo grupo Fuchsiano não-elementar é não-Abeliano.

Definição 1.2.12. Um grupo Fuchsiano não elementar G chama-se *do primeiro tipo* se $\Lambda_G = \hat{\mathbb{R}}$ e chama-se *do segundo tipo* se Λ_G é um conjunto de Cantor.

Suponha que G é um grupo Fuchsiano do segundo tipo, então $\hat{\mathbb{R}} \setminus \Lambda_G$ é a união disjunta de uma coleção enumerável de intervalos abertos do círculo no infinito; cada um destes intervalos será chamado de *intervalo de descontinuidade* de G . O semi-plano aberto limitado por um intervalo de descontinuidade e pela geodésica cujas extremidades são as extremidades desse intervalo será chamado de *semi-espaco de bordo* de G . Se existe um elemento $g \in G$ cujo eixo limita um semi-espaco de bordo de G , diz-se que g é um *elemento hiperbólico de bordo* de G . Dado $X \subset \hat{\mathbb{H}}$ e G um subgrupo de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$, denota-se por $\text{Sta}_G(X)$ ao estabilizador de X relativo à ação de G , isto é, $\text{Sta}_G(X) := \{g \in G / gX = X\}$.

Definição 1.2.13. Seja $X \subset \overline{\mathbb{H}}$ um conjunto não-vazio, G um grupo Fuchsiano e G_0 um subgrupo de G . Dize-se que X é precisamente invariante pelo G_0 em G se,

- i) $G_0 = \text{Sta}_G(X)$.
- ii) $gX \cap X = \emptyset$, se $g \in G \setminus G_0$.

Proposição 1.2.14 (Ver [Mas88], pagina 106). *Seja G um grupo Fuchsiano do segundo tipo e $I \subset \hat{\mathbb{R}}$ um intervalo de descontinuidade de G . Denote-se por L a linha geodésica que limita o intervalo I e por H o semiplano limitado por $I \cup L$. Então $G_0 = \text{Sta}_G(I) = \text{Sta}_G(L) = \text{Sta}_G(H)$ é trivial ou é um grupo cíclico gerado por um elemento hiperbólico de G . Além disso, I , L e H são precisamente invariantes pelo G_0 em G .*

□

O seguinte lema resulta útil para determinar se um grupo Fuchsiano é do segundo tipo; observe-se que este é quase um recíproco da proposição anterior.

Lema 1.2.15. *Seja G um grupo Fuchsiano não-elementar e $I \subset \hat{\mathbb{R}}$ um intervalo aberto. Se I é precisamente invariante por $\text{Sta}_G(I)$ em G , então G é um grupo Fuchsiano do segundo tipo e I está contido num intervalo de descontinuidade de G .*

Demonstração. Basta provar que $I \cap \Lambda_G = \emptyset$. Suponha por redução ao absurdo que existe $x \in I \cap \Lambda_G = \emptyset$. Não há perda de generalidade em supor que x é um ponto fixo de um elemento hiperbólico $g \in G$, ver Corolário 2.3.5 em [J.H06]. $g \notin \text{Sta}_G(I)$ pois nesse caso fixaria, além do ponto x , as extremidades de I , logo seria a identidade. Sendo I precisamente invariante por $\text{Sta}_G(I)$, tem-se $gI \cap I = \emptyset$ o qual é uma contradição pois $x = g(x) \in I \cap g(I)$. □

Observe-se que na proposição acima, se $\text{Sta}_G(I)$ é um subgrupo não trivial, então o intervalo I será um intervalo de descontinuidade do grupo G pois nesse caso qualquer elemento em $\text{Sta}_G(I)$ diferente da identidade deve fixar as extremidades de I , logo será um elemento de bordo de G e as extremidades de I pertencem ao conjunto limite de G . Se em cambio $\text{Sta}_G(I)$ é trivial, pode acontecer que I seja um subconjunto próprio de um intervalos de descontinuidade de G .

Definição 1.2.16. Considere-se um grupo Fuchsiano não-elementar G . A *região de Nielsen* de G , denotado por $\mathcal{N}(G)$, define-se como o menor subespaço de $\mathbb{H}$ não-vazio, fechado, convexo e G -invariante.

Observação 1.2.17. i) Se G é do primeiro tipo claramente $\mathcal{N}(G) = \mathbb{H}$. Se G é do segundo tipo e $\{H_n\}_n$ denota a coleção dos semiplanos de bordo de G , então $\mathcal{N}(G) = \mathbb{H} \setminus \cup_n H_n$. Observe-se que $\mathcal{N}(G)$ é o menor convexo em $\mathbb{H}$ que contém todas as linhas geodésicas cujas extremidades estão em Λ_G .

- ii) Suponha que G é um grupo Fuchsiano e G_0 um subgrupo de G (logo também Fuchsiano), então $\Lambda_{G_0} \subset \Lambda_G$ com o qual $\mathcal{N}(G_0) \subset \mathcal{N}(G)$.

Se G é um subgrupo de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ e $X, Y \subset \overline{\mathbb{H}}$, dize-se que X e Y são G -conjugados se os estabilizadores de X e de Y relativos à G são G -conjugados, é dizer, se existe $g \in G$ tal que $g \cdot \text{Sta}_G(X) \cdot g^{-1} = \text{Sta}_G(Y)$. Um elemento $g \in G$ é *primitivo* em G , se não existe $h \in G$ e $n \geq 2$ tal que $h^n = g$.

Proposição 1.2.18 (Ver [Mas88]). *Sejam G_1 e G_2 dois grupos Fuchsianos, $g_0 \in G_1 \cap G_2$ um elemento hiperbólico primitivo de bordo tanto para G_1 como para G_2 , tais que,*

$$\mathcal{N}(G_1) \cap \mathcal{N}(G_2) = \mathcal{E}_{g_0}$$

então,

- i) $\langle G_1, G_2 \rangle$ é um grupo Fuchsiano.
- ii) $\mathcal{N}(G_i)$ é precisamente invariante por G_i em $\langle G_1, G_2 \rangle$, para $i = 1, 2$.
- iii) Se $I \subset \hat{\mathbb{R}}$ é um intervalo de descontinuidade de G_2 o qual não é G_2 -conjugado ao intervalo de descontinuidade de G_2 limitado por $\mathcal{E}(g_0)$, então I é um intervalo de descontinuidade de $\langle G_1, G_2 \rangle$.

Demonstração. Pode-se assumir, depois de fazer uma conjugação, que o eixo de g_0 coincide com a geodésica $[0, \infty]$. Suponha que $\mathcal{N}(G_1)$ está na componente "esquerda" e $\mathcal{N}(G_2)$ está na componente "direita" de $\mathbb{H} \setminus \mathcal{E}_{g_0}$, como mostra a figura 1.4. Sejam I_1 e I_2 os intervalos de descontinuidade de G_1 e G_2 respectivamente limitados por $\mathcal{E}_{g_0}$, isto é $I_1 = [0, +\infty]$ e $I_2 = [-\infty, 0]$ (Como subconjuntos de $\hat{\mathbb{R}}$); denote-se por H_1 e H_2 os respectivos semiplanos de bordo limitados por $I_1 \cup \mathcal{E}_{g_0}$ e $I_2 \cup \mathcal{E}_{g_0}$, logo $\mathcal{N}(G_1) \subset H_2 \cup \mathcal{E}_{g_0}$, $\mathcal{N}(G_2) \subset H_1 \cup \mathcal{E}_{g_0}$. Observe-se que $\langle g_0 \rangle = \text{Sta}_{G_i}(I_i)$, para $i = 1, 2$.

Figura 1.4: O eixo $\mathcal{E}_{g_0}$ e alguns dos semiespaços de $\mathcal{N}(G_1)$ e $\mathcal{N}(G_2)$

Mostraremos primeiro que $\mathcal{N}(G_1)$ é precisamente invariante por G_1 em $\langle G_1, G_2 \rangle$. Pela definição da região de Nielsen, $g\mathcal{N}(G_1) = \mathcal{N}(G_1)$, quando $g \in G_1$, logo basta mostrar que para todo $g \in G_2 \setminus G_1$, $g\mathcal{N}(G_1) \cap \mathcal{N}(G_1) = \emptyset$, para concluir que $\mathcal{N}(G_1)$ é precisamente invariante por G_1 em $\langle G_1, G_2 \rangle$. Em efeito, se $g \in G_2 \setminus G_1$, em particular $g \in \langle g_0 \rangle = \text{Sta}_{G_2}(I_2)$, logo pela Proposição 1.2.14, $gH_2 \cap H_2 = \emptyset$ e $g\mathcal{E}_{g_0} \cap \mathcal{E}_{g_0} = \emptyset$. Como $\mathcal{N}(G_1) \subset H_2 \cup \mathcal{E}_{g_0}$, então $g\mathcal{N}(G_1) \cap \mathcal{N}(G_1) = \emptyset$. Similarmente, prova-se que $\mathcal{N}(G_2)$ é precisamente invariante por G_2 em $\langle G_1, G_2 \rangle$. Isto termina a prova de ii).

Considere-se z um ponto interior de $\mathcal{N}(G_1)$. Sendo G_1 um grupo Fuchsiano, existe uma vizinhança $U \subset \mathcal{N}(G_1)$ de z tal que $\{g \in G_1 \mid gU \cap U \neq \emptyset\}$ é finito. Como $\mathcal{N}(G_1)$ é precisamente invariante por G_1 em $\langle G_1, G_2 \rangle$, então $gU \cap U \neq \emptyset$ para finitos $g \in \langle G_1, G_2 \rangle$, com o qual $\langle G_1, G_2 \rangle$ age descontinuamente no ponto $z \in \mathbb{H}$, logo em cada ponto de $\mathbb{H}$. Assim $\langle G_1, G_2 \rangle$ é Fuchsiano.

Resta provar a afirmação iii). Observe-se que $I \subsetneq I_1$ e por hipótese, para $g \in G_2$, $\text{Sta}_{G_2}(gI) = g \cdot \text{Sta}_{G_2}(I) \cdot g^{-1} \neq \text{Sta}_{G_2}(I_2) = \langle g_0 \rangle$, com o qual $gI \neq I_2$, para todo $g \in G_2$. Denote-se por K ao subgrupo $\text{Sta}_{G_2}(I)$. Procuramos demonstrar que I é precisamente invariante por K em $\langle G_1, G_2 \rangle$, pois nesse caso, pelo Lema 1.2.15, I seria um intervalo de descontinuidade de $\langle G_1, G_2 \rangle$.

Se $g \in G_2 \setminus K$, $gI \cap I = \emptyset$ pela Proposição 1.2.14. Se $g \in G_1 \setminus K$, suponha que $g \notin \langle g_0 \rangle$ (pois nesse caso $g \in G_2 \setminus K$), logo $g \notin \text{Sta}_{G_1}(I_1)$. Pela Proposição 1.2.14, $gI \subset gI_1 \subset \hat{\mathbb{R}} \setminus I_1 \subset \hat{\mathbb{R}} \setminus I$, logo $gI \cap I = \emptyset$. Em geral, se $g \in \langle G_1, G_2 \rangle \setminus K$, pode-se supor que $g = a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_k b_k$, $k \geq 1$, onde para cada $1 \leq i \leq k$, $a_i \in G_1 \setminus \langle g_0 \rangle$ e $b_i \in G_2$. Como I e I_2 não são G_2 -conjugados, b_k transforma o intervalo I num intervalo de descontinuidade de G_2 diferente de I_2 . a_k transforma $b_k(I)$ num intervalo contido num intervalo de descontinuidade J_0 de G_1 diferente de I_1 pois $a_k \notin \langle g_0 \rangle$, com o qual $a_k b_k(I) \cap I = \emptyset$. Como $b_{k-1}(J_0) \subset b_{k-1}(I_2) \neq I$, tem-se que $b_{k-1} a_k b_k(I) \cap I = \emptyset$. Agora, se $b_{k-1}(I_2) \subset I_1$, como $a_{k-1} \notin \langle g_0 \rangle = \text{Sta}_{G_1}(I_1)$, então $a_{k-1} b_{k-1}(I_2) \subset I_2$ e, se $b_{k-1}(I_2) = I_2$, então como $\Lambda_{G_1} \cap I_1 = \emptyset$ e Λ_{G_1} é G_1 -invariante, $a_{k-1} b_{k-1} a_k b_k(I_2) \subset I_2$; em qualquer dos dois casos, $a_{k-1} b_{k-1} a_k b_k(I) \cap I = \emptyset$. Repetendo o argumento uma e outra vez conclui-se que $gI \cap I = \emptyset$ e com isto termina a prova da parte *iii*). $\square$

Corolário 1.2.19. *Se $G_1, G_2 < \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ são Fuchsianos, g_0 um elemento hiperbólico de bordo para G_1 e G_2 tal que $\mathcal{N}(G_1) \cap \mathcal{N}(G_2) = \mathcal{E}(g_0)$ e $h \in G_2$ é um elemento hiperbólico primitivo de bordo de G_2 tal que $\langle h \rangle$ e $\langle g_0 \rangle$ não são G_2 -conjugados, então h é um elemento hiperbólico de bordo de $\langle G_1, G_2 \rangle$.*

$\square$

Lembre-se que uma superfície de Riemann é uma variedade complexa de dimensão complexa igual a um. Se $f : S_1 \rightarrow S_2$ é uma aplicação entre superfícies de Riemann, diz-se que f é um biholomorfismo se f é holomorfa e bijetora (nesse caso a inversa de f também é holomorfa pelo Teorema da função inversa). Duas superfícies de Riemann são conformemente equivalentes se existe um biholomorfismo entre as superfícies. Pelo Teorema de uniformização, toda superfície de Riemann simplesmente conexa é conformemente equivalente a $\hat{\mathbb{C}}$ ou a $\mathbb{C}$ ou ao plano hiperbólico $\mathbb{H}$, com o qual o recobridor universal de qualquer superfície de Riemann pode-se assumir que uma das três superfícies anteriores. A esfera de Riemann recobre somente a ela mesma, logo qualquer 2-esfera topológica com alguma estrutura complexa será conformemente equivalente a $\hat{\mathbb{C}}$. O plano $\mathbb{C}$ recobre somente a $\mathbb{C}$, ao plano furado e aos toros. Todas as demais superfícies são recobertas pelo plano hiperbólico $\mathbb{H}$; nesse caso diz-se que a superfície é hiperbólica. Assim, se S é uma superfície hiperbólica e se $\pi : \mathbb{H} \rightarrow S$ denota a aplicação recobridora de S , é bem conhecido que a superfície S é conformemente equivalente ao quociente $\mathbb{H}/G$, sendo G o grupo de biholomorfismo $g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ tais que $\pi \circ g = \pi$; além disso G é isomorfo ao grupo fundamental $\pi_1(S)$ da superfície e age descontinuamente no espaço $\mathbb{H}$, logo G é um grupo Fuchsiano que não contém elementos elíticos pois $\pi_1(S)$ é livre de torsão.

Definição 1.2.20. Seja S uma superfície hiperbólica. Um grupo $G < \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ chama-se de um *modelo Fuchsiano de S* , se G é um grupo Fuchsiano e S é conformemente equivalente ao quociente $\mathbb{H}/G$. Denote-se por $\pi_G : \mathbb{H} \rightarrow S$ a correspondente aplicação quociente. Se G não é elementar, o *núcleo de Nielsen de S* define-se como $\pi_G(\mathcal{N}(G)) = \mathcal{N}(G)/G$.

Observação 1.2.21. i) O modelo Fuchsiano de uma superfície hiperbólica não é única, porém, se G e G' são grupos Fuchsianos, eles são conjugados se, e somente se, as superfícies $\mathbb{H}/G$ e $\mathbb{H}/G'$ são conformemente equivalentes.

ii) Uma curva $\gamma \subset S = \mathbb{H}/G$ é uma geodésica em S se um π_G -levantamento de γ é uma geodésica em $\mathbb{H}$; neste caso qualquer componente de $\pi_G^{-1}(\gamma)$ será uma linha geodésica de $\mathbb{H}$. Se $g \in G$ é um elemento hiperbólico primitivo, o eixo $\mathcal{E}_g$ é precisamente invariante pelo grupo $\langle g \rangle$, logo $\pi_G(\mathcal{E}_g)$ coincide com o quociente $\mathcal{E}_g/\langle g \rangle$ o qual é uma geodésica em S fechada e simples. Reciprocamente, se γ é uma geodésica fechada e simples em S , cada componente de $\pi_G^{-1}(\gamma)$ será o eixo de um elemento hiperbólico primitivo de G e, se $\mathcal{E}_{g_1}$ e $\mathcal{E}_{g_2}$ são duas componentes de $\pi_G^{-1}(\gamma)$, então os grupos $\langle g_1 \rangle$ e $\langle g_2 \rangle$ são G -conjugados.

- iii) Se $g \in G$ é um elemento parabólico, conjugando adequadamente G pode-se assumir que $g(z) = z \pm 1$. O aberto $U = \{z \in \mathbb{H} \mid \text{Im } z > c\}$ é um horodisco precisamente invariante pelo grupo $\langle g \rangle$ para c suficientemente grande, logo $\pi_G(U) = U/\langle g \rangle$, o qual é conformemente equivalente a um disco furado $\mathbb{D}^* = \{0 < |z| < 1\}$. Isto implica que se G tem elementos parabólicos, S tem furos.
- iv) Dize-se que a superfície S é do tipo finito se seu grupo fundamental é finitamente gerado; caso contrario a superfície é do tipo infinito. Observe-se que tanto $\hat{\mathbb{C}}$ como $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$ e qualquer toro são todos do tipo finito, logo uma superfície do tipo infinito só pode ser uma superfície hiperbólica e em consequência deve ser realizado por algum modelo Fuchsiano. Uma superfície de Riemann S do tipo finito dize-se que é do tipo conforme (g, n, b) , se é conformemente equivalente à uma superfície fechada de gênero g menos n pontos e menos b discos fechados (dize-se coloquialmente que S têm n "furos" e b "buracos"). Observe-se que uma superfície do tipo (g, n, b) é hiperbólica se $2g + n + b > 2$.
- v) Se $S = \mathbb{H}/G$ seu núcleo de Nielsen $K = \mathcal{N}(G)/G$ resulta ser o menor subespaço fechado e convexo de S tal que a inclusão $K \hookrightarrow S$ é uma equivalência homotópica. De fato, K é uma subsuperfície de S possivelmente com bordo: Se G é do primeiro tipo, então $K = S$; quando G é do segundo tipo, o eixo de cada elemento hiperbólico primitivo de bordo de G projeta-se sobre uma componente de bordo da subsuperfície K . Em qualquer caso, K contém todas as curvas geodésicas fechadas de S . A figura 1.5 mostra um desenho de uma superfície cujo núcleo de Nielsen tem dois componentes de bordo.

Figura 1.5: Núcleo de nielsen de uma superfície. Este têm duas geodésicas como componentes de bordo

Definição 1.2.22. A métrica de Poincaré ou métrica hiperbólica de uma superfície $S = \mathbb{H}/G$, a qual será denotada por $\lambda_S(z)|dz|$, define-se em cada ponto $z \in S$ por,

$$\lambda_S(z) := \frac{\lambda_{\mathbb{H}}(w)}{|\pi'_G(w)|},$$

onde $w \in \mathbb{H}$ é um ponto qualquer tal que $\pi_G(w) = z$.

É fácil ver que na definição acima o valor $\lambda_S(z)$ independe da escolha do ponto $w \in \pi_G^{-1}(z)$. Uma vez conhecida a métrica de Poincaré de uma superfície S é possível calcular o comprimento hiperbólico de uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow S$; denotaremos por $\ell_S(\gamma)$ ao comprimento hiperbólico da curva γ . De maneira similar a como foi definido a distância $d_{\mathbb{H}}$, a métrica de Poincaré de S determina uma distância d_S na superfície S fazendo que a projeção $\pi_G : (\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}}) \rightarrow (S, d_S)$ seja uma isometria local. A seguinte proposição, ainda que seja um resultado simple, revela-se de grande importância no desenvolvimento desta tese (ver o Lema 3.2.2)

Proposição 1.2.23. Considere-se uma superfície hiperbólica com sua métrica de Poincaré $\lambda_S(z)|dz|$, e suponha que $S_0 \subset S$ é uma subsuperfície de S com métrica de Poincaré $\lambda_{S_0}(z)|dz|$. Então $\lambda_{S_0}(z) \geq \lambda_S(z)$, para todo $z \in S_0$. Em particular, se $\gamma : [a, b] \rightarrow S_0$ é uma curva parametrizada, então $\ell_{S_0}(\gamma) \geq \ell_S(\gamma)$.

□

O seguinte resultado devido a A. Basmajian (Ver [Bas93]), Teorema 3, permite colar uma sequência de superfícies hiperbólicas até obter uma nova superfície mais complexa. Referimo-nos ao artigo acima mencionado para ver a demonstração deste teorema.

Teorema 1.2.24. *Seja $\{G_n\}_{n \geq 0}$ uma família de grupos Fuchsianos que satisfazem as seguintes propriedades para cada $n \geq 0$:*

- 1) g_n e g_{n+1} são elementos hiperbólicos primitivos de bordo do grupo G_n .
- 2) Os grupos cíclicos $\langle g_n \rangle$ e $\langle g_{n+1} \rangle$ não são G_n -conjugados.
- 3) $\mathcal{N}(G_n) \cap \mathcal{N}(G_{n+1}) = \mathcal{E}_{g_{n+1}}$.

Se $G := \langle G_n \rangle_{n=0}^{+\infty}$, então,

- a) G é um grupo Fuchsiano.
- b) $\{\pi_G(\mathcal{E}_{g_n})\}$ é uma família de geodésicas fechadas, simples, duas a duas disjuntas, cada uma das quais separa a superfície $\mathbb{H}/G$.
- c) $\mathcal{N}(G)/G$ é a união topológica dos núcleos de Nielsen $\{\mathcal{N}(G_n)/G_n\}_{n \geq 0}$, os quais são colados consecutivamente no longo das curvas $\pi_G(\mathcal{E}_{g_n})$.
- d) Cada superfície $\mathcal{N}(G_n)/G_n$ está isométricamente mergulhada na superfície $\mathcal{N}(G)/G$.

□

Da mesma forma como Basmajian usa este teorema para definir suas superfícies flauta, usaremos este resultado na seção 1.4 para definir as superfícies que chamaremos de *gaita de fole*. Antes de passar para a próxima seção, consideraremos um tipo especial de superfície hiperbólica chamadas de calças (alguns autores chaman-lhe de *Y-peças* ou de *trouser*)

Definição 1.2.25. Uma *calça* é uma superfície de Riemann do tipo conforme $(0, n, b)$, onde $n+b = 3$ e $b \geq 1$. Se $b \neq 3$, diz-se que a *calça* é *justa*.

Observação 1.2.26. i) Topologicamente uma calça é o domínio do plano

$$\{|z| < 2\} \setminus \left(\{|z-1| < \frac{1}{2}\} \cup \{|z+1| < \frac{1}{2}\} \right)$$

Na literatura usual uma calça é definido como uma superfície com bordo; isto corresponde ao núcleo de Nielsen de uma calça como está definida acima. Nesta tese não faremos diferença entre a calça e seu núcleo a menos que isto seja necessario.

- ii) Dado qualquer terna de números reais positivos (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) , existe uma única calça, a menos de isometria, cujas componentes de bordo (do seu núcleo de Nielsen) são geodésicas de comprimento ℓ_1 , ℓ_2 e ℓ_3 respectivamente. Este mesmo resultado é ainda válido quando a calça é justa; neste caso considera-se que um furo tem comprimento $\ell_i = 0$. A figura 1.6 mostra o desenho de três calças, sendo as dois da direita calças justas.
- iii) Numa calça S pode-se escolher o modelo Fuchsiano de S como o grupo G gerado pelos elementos $g_0, g_1 \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ de maneira que:

Figura 1.6

1. Se S é do tipo $(0,0,3)$, g_0 e g_1 são elementos hiperbólicos primitivos de bordo que representam duas das componentes de bordo da calça e g_0g_1 é um elemento hiperbólico que representa a terceira componente de bordo da calça.
2. Se S é do tipo $(0,1,2)$, g_0 e g_1 são elementos hiperbólicos como acima, mas g_0g_1 é um elemento parabólico que representa o furo da calça.
3. Se S é do tipo $(0,2,1)$, g_0 é um elemento parabólico representando um furo de S , g_1 é um elemento hiperbólico primitivo de bordo que representa uma das componentes de bordo de S e g_0g_1 é um elemento parabólico que representa o segundo furo de S .

Em qualquer dos três casos acima diz-se que (g_0, g_1) é um *par de geradores estándar da calça*.

As calças são importantes pois elas são consideradas as peças fundamentais na construção de superfícies hiperbólicas no seguinte sentido: Se S é uma superfície hiperbólica do tipo finito, é possível escolher uma família finita Γ de curvas geodésicas em S fechadas e simples tal que $S \setminus \Gamma$ é uma união disjunta de calças; na figura 1.7 mostra-se um exemplo de decomposição em calças de uma superfície do tipo $(2,4,2)$.

Figura 1.7: Decomposição de uma superfície em 8 calças, 3 delas sendo calças justas

Porém, numa superfície do tipo infinito pode acontecer que não exista uma multicurva Γ que decompõe a superfície somente em calças (ver por exemplo a superfície na figura 3.6.3 do [J.H06]). O que sim é possível é decompor qualquer superfície em peças básicas que são, ou calças ou peças simplesmente conexas.

Proposição 1.2.27 (Ver [J.H06]). *Seja S uma superfície hiperbólica diferente de $\mathbb{H}$, de um cilindro ou de um disco furado. Existe em S uma família Γ de geodésicas fechadas simples as quais não são homotópicas entre si, tal que, se $\bar{\Gamma}$ denota o fecho da união dessas curvas, então cada componente de $S \setminus \bar{\Gamma}$ é conformemente equivalente ou a uma calça ou a um semiplano. Aliás, as peças equivalentes a semiplanos são limitados por componentes de $\bar{\Gamma} \setminus \Gamma$.*

□

Abusando um pouco do idioma chamaremos de decomposição em calças de uma superfície a uma multicurva como na Proposição 1.2.27, ainda alguns das componentes do complementar da multicurva seja um semiplano. É importante mencionar que as peças na decomposição em calças serão calças mesmas, por exemplo quando o modelo Fuchsiano da superfície é do primeiro tipo.

1.3 Curvas geodésicas em superfícies hiperbólicas

Considere-se uma superfície hiperbólica S . Uma curva fechada $\gamma \subset S$ é *primitivo* se a classe de homotopia $c = [\gamma]$ não é potencia de um elemento diferente de $\pi_1(S)$. Observe-se que se $S = \mathbb{H}/G$ e $g \in G$ representa a classe de homotopia de γ , então γ é primitivo se, e somente se, g é primitivo como um elemento em G . Dize-se que uma curva fechada γ é *essencial*, se γ não é homotópica a um ponto nem homotópica a um furo de S . Se um elemento hiperbólico $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc = 1$, representa uma classe de homotopia de uma geodésica fechada $\gamma \subset S$, o traço de γ é $\text{Tra}(\gamma) := a + d$. Suponha que a e b são duas classes de homotopia de curvas fechadas simples em S . O *número de interseção (geométrica) entre a e b* , que será denotado por $i(a, b)$, é o mínimo número de interseções entre um representante na classe a e um representante na classe b . Observe-se que $i(a, b) = i(b, a)$ e que $i(a, a) = 0$. Por outro lado se um representante de a separa a superfície em dois componentes conexas, então para qualquer classe b , tem-se que $i(a, b)$ é um número par. A seguinte observação lista uma serie de propriedades bem conhecidas

Proposição 1.3.1 (Ver [Bea83, Bus92, FM11, J.H06]). *i) Se $\gamma \subset S$ é uma curva fechada simples não homotópica a um ponto, então γ é primitivo.*

ii) Se $\gamma \subset S$ é uma curva geodésica fechada homotópica a uma curva fechada simples, então γ também é simples.

iii) Na classe de homotopia de uma curva fechada essencial em S existe uma única curva geodésica fechada γ . Além disso $\ell_S(\gamma)$ realiza o mínimo dos comprimentos hiperbólicos das curvas na classe $[\gamma]$.

iv) Se γ é uma geodésica fechada em S , então $\text{Tra}^2(\gamma) = 4 \cosh^2\left(\frac{\ell_S(\gamma)}{2}\right)$

v) Sejam a e b classes de homotopia diferentes de duas curvas fechadas simples em S e suponha que α e β são as geodésicas em a e b respectivamente. Então $i(a, b)$ coincide com o número de interseções entre as curvas α e β .

□

Observe-se que em particular a Proposição 1.3.1 v) implica o seguinte: Se α_1, β_1 são duas curvas fechadas e simples que não são homotópicas, e se α e β são as geodésicas nas classes de homotopia de α_1 e β_1 respectivamente então, $\alpha_1 \cap \beta_1 = \emptyset$ implica que $\alpha \cap \beta = \emptyset$.

A continuação serão mostrados alguns resultados relativos a certas superfícies hiperbólicas simples que fazem um papel importante no desenvolvimento do capítulo 3

Definição 1.3.2. Um *domínio anular* ou simplesmente um *anel* é uma superfície de Riemann cujo grupo fundamental é cíclico infinito.

Se A é um anel qualquer, então acontece somente uma das seguintes possibilidades, ver [J.H06], Proposição 3.2.1.

i) A é conformemente equivalente a $\mathbb{C}^*$.

- i) A é conformemente equivalente à $\mathbb{D}^*$.
- i) A é conformemente equivalente à A_M , para algum $M > 0$, onde

$$A_M := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < e^{2\pi M}\}$$

Nos primeiros dois casos diz-se que o anel tem módulo infinito, enquanto que no caso *iii*), o *módulo do anel* A , denotado por $\text{Mod } A$, define-se como o número real positivo M . É fácil ver que dois aneis de módulo finito são biholomorfos se, e somente se, têm o mesmo módulo.

Proposição 1.3.3. *Num anel A de módulo finito existe uma única geodésica fechada que denotaremos por γ_A , a qual é simples e separa as duas componentes de fronteira de A . Além disso, o comprimento hiperbólico de γ_A é:*

$$\ell_A(\gamma_A) = \frac{\pi}{\text{Mod } A}$$

□

Determinar se um anel tem módulo finito é uma tarefa fácil, porém conhecer qual é seu módulo, salvo em casos excepcionais, é difícil pois em princípio precisa-se conseguir o biholomorfismo entre o anel e o respectivo anel A_M . A teoria dos comprimentos extremais permite estimar o módulo de um anel arbitrário e, em consequência, estimar o comprimento de sua curva geodésica. Suponha que A é um anel. Uma densidade Boreliana em A é uma função Borel-mensurável $\rho : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\rho \geq 0$ e a ρ -área de A , definida por

$$\mathcal{A}_\rho(A) := \iint_A \rho(z)^2 dx dy,$$

seja positivo. Denote-se por m_A a coleção de todas as densidades Borelianas de A . Se Γ_A é a família de todas as curvas no anel A que conectam as duas componentes de fronteira do A , a ρ -distância entre essas componentes para algum $\rho \in m_A$ define-se como,

$$\mathcal{L}_\rho(A) := \inf_{\gamma \in \Gamma_A} \int_\gamma \rho(z) |dz|$$

O seguinte teorema (ver [Ahl73], capítulo 4) determina o módulo de um anel usando as densidades Borelianas dele.

Teorema 1.3.4. *Seja A um anel, então*

$$\text{Mod } A = \sup_{\rho \in m_A} \frac{\mathcal{L}_\rho(A)^2}{\mathcal{A}_\rho(A)}$$

□

Seja γ uma geodésica fechada simples numa superfície hiperbólica S . Dado $r > 0$, a vizinhança $\mathbb{A}(\gamma, r) := \{x \in S \mid d_S(x, \gamma) < r\}$ chama-se de colar de γ se $\mathbb{A}(\gamma, r)$ é um anel mergulhado em S ; nesse caso o raio r é a largura do colar. Considere-se a função decrescente $\eta : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ onde, para cada $\ell > 0$,

$$\eta(\ell) := \log \left(1 + \frac{2}{e^{\ell/2} - 1} \right)$$

A função η será chamada simplesmente de função colar. O seguinte resultado, chamado o lema do colar, é devido a L. Keen, ver [Kee74].

Teorema 1.3.5. *Seja γ uma geodésica fechada simples em S , então o subconjunto $\mathbb{A}_\gamma := \mathbb{A}(\gamma, \eta(\ell_S(\gamma)))$ é um colar. Além disso, se γ_1 e γ_2 são duas curvas geodésicas fechadas simples diferentes, os respectivos colares $\mathbb{A}_{\gamma_1}$ e $\mathbb{A}_{\gamma_2}$ de largura $\eta(\ell_S(\gamma_1))$ e $\eta(\ell_S(\gamma_2))$ respectivamente, são disjuntos.*

□

Observação 1.3.6. Em diante $\mathbb{A}_\gamma$ denotará o colar da curva γ de largura $\eta(\ell_S(\gamma))$. Claramente $\mathbb{A}(\gamma, r)$ é um colar para todo $0 < r \leq \eta(\ell_S(\gamma))$ e, é possível que ainda seja para algum $r > \eta(\ell_S(\gamma))$, sem embargo a função colar é maximal em geral no sentido que dá o máximo valor que garante as conclusões do teorema acima. Por exemplo, numa calça justa do tipo $(0, 1, 2)$, se γ_1 e γ_2 são as geodésicas do bordo de seu núcleo de Nielsen, então a distância hiperbólica entre γ_1 e γ_2 é exatamente $\eta(\ell_S(\gamma_1)) + \eta(\ell_S(\gamma_2))$.

Corolário 1.3.7. *Sejam γ e β duas geodésicas fechadas, simples e diferentes numa superfície hiperbólica S . Se $\beta \cap \mathbb{A}_\gamma \neq \emptyset$, então $\beta \cap \gamma \neq \emptyset$.*

□

Considere-se agora uma superfície hiperbólica S conformemente equivalente a um domínio de $\hat{\mathbb{C}}$ diferente da esfera menos três pontos, com o qual não há perda de generalidade em supor que $S = \hat{\mathbb{C}} \setminus X$, onde X é um fechado com pelo menos quatro pontos. Suponha que X é a união disjunta de dois subconjuntos fechados D e E , cada um dos quais têm pelo menos dois pontos. Em geral podem existir diferentes geodésicas fechadas e simples em S que separam os conjuntos D e E , é dizer, tais que o complemento em $\hat{\mathbb{C}}$ da curva tenha duas componentes, uma contendo à D e a outra à E . Uma condição suficiente para garantir a unicidade da geodésica que satisfaz a propriedade anterior é a seguinte.

Proposição 1.3.8 (Ver [Com11], Teorema 1.5). *Se $S = \hat{\mathbb{C}} \setminus (D \cup E)$, onde D e E são fechados que contém pelo menos dois pontos cada um e onde D é um subconjunto conexo, então existe uma única curva geodésica fechada simples $\gamma \subset S$ que separa D de E .*

□

Proposição 1.3.9 (Ver [Com11]). *Seja $S = \hat{\mathbb{C}} \setminus X$, onde $X = D_1 \cup E_1 = D_2 \cup E_2$, D_i, E_i são fechados e com pelo menos dois pontos cada um, para $i = 1, 2$, e D_1 é conexo, propriamente contido em D_2 . Sejam γ_1 e γ_2 curvas geodésicas fechadas simples que separam D_1 de E_1 e D_2 de E_2 , respectivamente. Então γ_1 está contido na componente de $\hat{\mathbb{C}} \setminus \gamma_2$ que contém D_2 . Em particular γ_1 e γ_2 são disjuntos.*

□

Um caso especial é quando a superfície S é do tipo conforme $(0, n, b)$ com $n + b = 4$. Alguns autores chamam a tal superfície de X -peça (Naturalmente os mesmos autores que chamam de Y -peças as calças!). Observe-se que esta superfície é obtida ao colar duas calças como mostra a figura 1.8. No núcleo de Nielsen de S existem cinco geodésicas simples quando $n = 0$: quatro delas são as componentes de bordo de comprimento ℓ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, e a outra, de comprimento hiperbólico ℓ é a geodésica que decompõe S em duas calças.

A superfície S fica determinada por os comprimentos ℓ , ℓ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, e por um parâmetro adicional τ chamado de torção o qual corresponde à torção feita ao colar ambas calças ao longo da geodésica central de comprimento ℓ ; os seis parâmetros anteriores correspondem com as coordenadas de Fenchel-Nielsen da superfície S , ver [J.H06] ou [YT92] para mais detalhes sobre estas coordenadas

Figura 1.8: Desenho de duas superfícies, uma do tipo $(0,0,4)$ e a outra do tipo $(0,2,2)$

em qualquer superfície hiperbólica. O mesmo vale quando $n \geq 1$ mas nesse caso o número de coordenadas de comprimento é menor; ainda assim toma-se o valor $\ell_i = 0$ quando este corresponda a um furo. Uma maneira simple de definir a coordenada de torção é a seguinte: Se γ , γ_1 e γ_2 são as geodésicas de comprimento ℓ , ℓ_1 e ℓ_2 respectivamente, podem-se levantar para $\mathbb{H}$ a três linhas geodésicas L , L_1 e L_2 as quais estão aninhadas como mostra a figura 1.9.

Figura 1.9

Considere-se z^- o ponto de interseção entre a geodésica ortogonal à L e L_1 com a linha L , e z^+ o ponto de interseção entre a geodésica ortogonal à L e L_2 com a linha L . Então $\tau := \pm d_{\mathbb{H}}(z^-, z^+)$, onde o sinal será positivo se o segmento geodésico $[z^-, z^+]$ tem a mesma orientação da geodésica L , e será negativo no caso contrario. Suponha agora que β é uma geodésica fechada e simples como mostra a figura 1.10. Em [Oka93] é escrito uma fórmula que expressa o comprimento hiperbólico da curva β em função das coordenadas de Fenchel-Nielsen anteriormente descritas para o caso $n = 0$; em [APLS11] prova-se que a mesma fórmula vale no caso $n > 0$ tomando os respectivos parâmetros de comprimento igual à 0.

Proposição 1.3.10 (Ver [Oka93], [APLS11]). *Nas superfícies S mostrada na figura 1.10, se $\ell_i = \ell_S(\gamma_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, $\ell = \ell_S(\gamma)$, $\ell^* = \ell_S(\beta)$ e τ é a coordenada de torção relativo a curva γ , então,*

Figura 1.10

$$\begin{aligned}
\cosh\left(\frac{\ell^*}{2}\right) \cdot \sinh^2\left(\frac{\ell}{2}\right) &= \cosh\left(\frac{\ell_1}{2}\right) \cdot \cosh\left(\frac{\ell_2}{2}\right) + \cosh\left(\frac{\ell_3}{2}\right) \cdot \cosh\left(\frac{\ell_4}{2}\right) \\
&+ \cosh\left(\frac{\ell}{2}\right) \cdot \left[\cosh\left(\frac{\ell_1}{2}\right) \cdot \cosh\left(\frac{\ell_3}{2}\right) + \cosh\left(\frac{\ell_2}{2}\right) \cdot \cosh\left(\frac{\ell_4}{2}\right) \right] \\
&+ \cosh(\tau) \cdot \left[\cosh^2\left(\frac{\ell}{2}\right) + 2 \cosh\left(\frac{\ell_1}{2}\right) \cdot \cosh\left(\frac{\ell_4}{2}\right) \cdot \cosh\left(\frac{\ell}{2}\right) \right. \\
&+ \cosh^2\left(\frac{\ell_1}{2}\right) + \cosh^2\left(\frac{\ell_4}{2}\right) - 1 \left. \right]^{1/2} \times \left[\cosh^2\left(\frac{\ell}{2}\right) \right. \\
&+ 2 \cosh\left(\frac{\ell_2}{2}\right) \cdot \cosh\left(\frac{\ell_3}{2}\right) \cdot \cosh\left(\frac{\ell}{2}\right) + \cosh^2\left(\frac{\ell_2}{2}\right) + \cosh^2\left(\frac{\ell_3}{2}\right) - 1 \left. \right]^{1/2}
\end{aligned}$$

□

Quando S é do tipo $(0, 2, 2)$ como na figura 1.8 à direita, tomando $\ell_3 = \ell_4 = 0$ a fórmula acima simplifica-se consideravelmente. Neste caso tem-se:

Corolário 1.3.11. *Nas condições acima, onde S é do tipo conforme $(0, 2, 2)$, tem-se,*

$$\begin{aligned}
\cosh\left(\frac{\ell^*}{2}\right) \cdot \sinh^2\left(\frac{\ell}{2}\right) &= 1 + \cosh\left(\frac{\ell_1}{2}\right) \cdot \cosh\left(\frac{\ell_2}{2}\right) + \cosh\left(\frac{\ell}{2}\right) \cdot \left[\cosh\left(\frac{\ell_1}{2}\right) + \cosh\left(\frac{\ell_2}{2}\right) \right] \\
&+ \cosh(\tau) \cdot \left[\cosh\left(\frac{\ell}{2}\right) + \cosh\left(\frac{\ell_1}{2}\right) \right] \cdot \left[\cosh\left(\frac{\ell}{2}\right) + \cosh\left(\frac{\ell_2}{2}\right) \right]
\end{aligned}$$

Em consequência,

$$1 + \cosh(\tau) = \frac{\sinh^2\left(\frac{\ell}{2}\right) \cdot \left[\cosh\left(\frac{\ell^*}{2}\right) + 1 \right]}{\left[\cosh\left(\frac{\ell}{2}\right) + \cosh\left(\frac{\ell_1}{2}\right) \right] \cdot \left[\cosh\left(\frac{\ell}{2}\right) + \cosh\left(\frac{\ell_2}{2}\right) \right]} \quad (1.1)$$

Para finalizar a seção, alguns comentários sobre o espaço de Teichmüller de uma superfície hiperbólica, ainda este não seja um tema central no desenvolvimento da tese. Fixando uma superfície

de Riemann S , a qual assumimos que seja hiperbólica, considere-se a coleção dos pares (R, f) , onde R é outra superfície de Riemann e $f : S \rightarrow R$ é um homeomorfismo quaseconforme. O *espaço de Teichmüller quaseconforme* $\mathcal{T}(S)$ é o quociente desta coleção pela relação de equivalência onde dois pares (R_1, f_1) e (R_2, f_2) são equivalentes se $f_2 \circ f_1^{-1} : R_1 \rightarrow R_2$ é homotópica a um biholomorfismo.

A *distância de Teichmüller*, denotada por $d_{\mathcal{T}}$, define-se da seguinte maneira: Se $[R_1, f_1]$ e $[R_2, f_2]$ são duas classes em $\mathcal{T}(S)$, então

$$d_{\mathcal{T}}([R_1, f_1], [R_2, f_2]) := \inf_f \log K(f),$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos os homeomorfismos quaseconformes $f : R_1 \rightarrow R_2$ homotópicos à $f_2 \circ f_1^{-1}$ e $K(f)$ denota a dilatação máxima da aplicação f . Com a distância de Teichmüller o espaço $(\mathcal{T}(S), d_{\mathcal{T}})$ resulta completo (Ver [ALPS12b]).

Outra distância em $\mathcal{T}(S)$ é a chamada *distância de comprimento espectral*: Denote-se por Σ_S a coleção de todas as geodésicas fechadas na superfície S , então a distância de comprimento espectral que denotamos por $d_{\mathcal{L}}$ define-se como,

$$d_{\mathcal{L}}([R_1, f_1], [R_2, f_2]) := \log \max_{\gamma \in \Sigma_S} \left\{ \frac{\ell_{S_1}[f_1(\gamma)]}{\ell_{S_2}[f_2(\gamma)]}, \frac{\ell_{S_2}[f_2(\gamma)]}{\ell_{S_1}[f_1(\gamma)]} \right\},$$

onde $\ell_{S_i}[f_i(\gamma)]$ denota o comprimento hiperbólico na superfície S_i da geodésica na classe de homotopia da curva $[f_i(\gamma)]$.

Se S é uma superfície do tipo finito as duas métricas são topologicamente equivalentes; este resultado foi conjecturado por T. Sorvali e foi provado em 1999 por L. Liu em [Lix99]; ele a sua vez conjecturou que o mesmo resultado é válido para superfícies do tipo infinito. Em [Shi03], H. Shiga constroi em cambio uma superfície de tipo infinito onde ambas métricas não são topologicamente equivalentes; além disso no mesmo artigo ele dá o seguinte teorema.

Teorema 1.3.12 ([Shi03]). *Seja S uma superfície hiperbólica tal que $S = \bigcup_{k \geq 1} P_k$, onde cada P_k é uma calça (Algumas das quais podem ser justa). Se existe $M > 0$ tal que, para toda curva γ que seja uma componente de bordo de alguma das calças P_k , tem-se,*

$$\frac{1}{M} < \ell_S(\gamma) < M,$$

então as distâncias $d_{\mathcal{T}}$ e $d_{\mathcal{L}}$ geram a mesma topologia em $\mathcal{T}(S)$.

□

Por outro lado uma condição necessária para que estas métricas definam a mesma topologia em $\mathcal{T}(S)$ é a seguinte.

Proposição 1.3.13 ([LSW08]). *Se existe uma sequência de curvas geodésicas $(\gamma_k)_{k \geq 1}$ em S tais que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \ell_S(\gamma_k) = 0$, então as métricas $d_{\mathcal{T}}$ e $d_{\mathcal{L}}$ não são topologicamente equivalentes.*

□

Existem outros resultados referentes a teoria de Teichmüller em superfícies do tipo infinito, alguns deles generalizam os dois resultados acima (Ver por exemplo [Kin11]), alguns estudam outros espaços de Teichmüller como por exemplo o espaço de Teichmüller do comprimento espectral ou o espaço de Teichmüller com coordenadas de Fenchel-Nielsen, etc (Ver [ALP⁺11], [ALPS12b], [ALPS16]).

1.4 Superfícies flauta e superfícies gaita de fole

De maneira simple uma superfície flauta consiste em uma sequência infinita de calças conectadas uma seguida da outra como mostram as figuras 1.11 e 1.12 abaixo.

Figura 1.11: *Superfície flauta*

Figura 1.12: *Superfície flauta justa*

Estas superfícies aparecem estudadas com detalhe pela primeira vez no artigo [Bas93] onde são consideradas como as superfícies do tipo infinito mais simples, embora com propriedades muito interessantes. Uma superfície gaita de fole é uma generalização do conceito de flauta cuja motivação reside no estudo das chamadas esferas de papel furadas que serão tratadas no capítulo 3. O desenho na figura 1.13 mostra um exemplo de gaita de fole. Este é obtido ao colar flautas numa esfera com um número finito de buracos, daí seu nome.

Figura 1.13: *Gaita de fole de ordem 4.*

Esta seção começa com a definição de superfície flauta e algumas propriedades delas. Logo serão definidos as superfícies gaita de fole e serão generalizadas algumas das propriedades válidas para flautas.

Definição 1.4.1 ([Bas93]). Uma *superfície flauta* é uma superfície hiperbólica S cujo modelo Fuchsiano G é gerado por uma sequência de grupos Fuchsianos $\{G_n\}_{n \geq 0}$, sendo cada G_n a sua vez o modelo Fuchsiano de uma calça com geradores estándar (g_n, g_{n+1}) e tal que para cada $n \geq 1$ é satisfeita a seguinte propriedade:

$$\mathcal{N}(G_n) \cap \mathcal{N}(G_{n+1}) = \mathcal{E}_{g_{n+1}}$$

Dize-se que a superfície S é uma *flauta justa* (Ver a figura 1.12) quando cada calça $\mathbb{H}/G_n$ é uma calça justa.

Observe-se que o conceito de flauta fica bem definido em virtude do Teorema 1.2.24. Os eixos dos geradores g_n , $n \geq 0$ (No caso de uma flauta justa o eixo de g_0 que é parabólico corresponde com um horociclo, pois a primeira calça tem dois furos) determinam uma sequência aninhada de geodésicas $\{\mathcal{E}_{g_n}\}$ em $\mathbb{H}$ que são projetadas na flauta em curvas geodésicas fechadas que a decompõem em calças. A sequência $\{\mathcal{E}_{g_n}\}$ a sua vez determina um par de sequências $d = (d_n)_{n \geq 1}$ e $\tau = (\tau_n)_{n \geq 1}$, onde d_n corresponde à distância entre os eixos $\mathcal{E}_{g_{n-1}}$ e $\mathcal{E}_{g_n}$, e τ corresponde com as coordenadas de torção da sequência aninhada de geodésica $\{\mathcal{E}_{g_n}\}_{n \geq 0}$. Os seguintes são alguns das propriedades das superfícies flautas que aparecem em [Bas93]. Outras propriedades encontram-se em [BK08], [BŠ17], [Evr17], [Haa96], [HS07], [PRT⁺11], etc.

Proposição 1.4.2. *Dada uma sequência de números reais positivos $d = (d_n)_{n \geq 1}$ e uma sequência de números reais $\tau = (\tau_n)_{n \geq 1}$, existe uma superfície flauta com coordenadas (d, τ) .*

□

Proposição 1.4.3. *Considere-se uma flauta justa com modelo Fuchsiano G como na definição 1.4.1 e coordenadas (d, τ) .*

i) Se $\sum_{n \geq 1} d_n = +\infty$, então G é um grupo Fuchsiano do primeiro tipo.

ii) Se $\sum_{n \geq 1} d_n < +\infty$ e $\sum_{n \geq 1} |\tau_n| < +\infty$, então G é um grupo Fuchsiano do segundo tipo.

□

Numa flauta S , sejam $\gamma_n := \pi_G(\mathcal{E}_{g_n})$, logo γ_n e γ_{n+1} são as geodésicas de bordo na calça $\mathbb{H}/G_n$, sendo γ_n a geodésica común com a calça $\mathbb{H}/G_{n-1}$ e γ_{n+1} a geodésica común com a calça $\mathbb{H}/G_{n+1}$. d_n é por definição a distância hiperbólica entre γ_n e γ_{n+1} como é mostrado na figura 1.14. Em particular quando a flauta seja justa observe-se que $d_n = \eta(\ell_s(\gamma_n)) + \eta(\ell_s(\gamma_{n+1}))$, ver [Bas90], pelo qual a serie $\sum_{n \geq 1} d_n$ diverge se, e somente se, a serie $\sum_{n \geq 1} \eta(\ell_s(\gamma_n))$ diverge.

Generalizemos agora a definição 1.4.1 para definir as superfícies gaita de fole. Fixemos em principio um inteiro $m \geq 3$. A ideia é começar com uma esfera S_0 com m discos fechados disjuntos removidos, para colar depois uma flauta S^j , $1 \leq j \leq m$, em cada buraco de S_0 , ver figura 1.15. Chamaremos de semiflauta justa a uma flauta obtido colando somente calças justas do tipo $(0, 1, 2)$ (Observe-se que numa flauta justa a primeira calça deve ser do tipo $(0, 2, 1)$).

Definição 1.4.4. Uma *superfície gaita de fole de ordem $m \geq 3$* é uma superfície hiperbólica S com modelo Fuchsiano $G = \langle G^0, G^1, \dots, G^m \rangle$, onde:

Figura 1.14: Coordenadas d_n de uma flauta justa e curvas geodésicas γ_n

Figura 1.15: Construção de uma gaita de fole com 4 semiflautas justas.

1. G^0 é o modelo Fuchsiano de uma superfície do tipo conforme $(0, 0, m)$ com m elementos hiperbólicos $g_0^1, g_0^2, \dots, g_0^m \in G^0$ que satisfazem o seguinte:
 - i) Se $j_1 \neq j_2$, então $\langle g_0^{j_1} \rangle$ e $\langle g_0^{j_2} \rangle$ não são G_0 -conjugados.
 - ii) Se $g \in G_0$ é um elemento hiperbólico de bordo de G_0 , então $\langle g \rangle$ e $\langle g_0^j \rangle$ são G_0 -conjugados para algum $1 \leq j \leq m$.
2. Para $j = 1, \dots, m$, $G^j = \langle G_n^j \rangle_{n=1}^{+\infty}$, sendo cada G_n^j o modelo Fuchsiano de uma calça com geradores estándar (g_{n-1}^j, g_n^j) , onde cada g_n^j é um elemento hiperbólico primitivo.
3. $\mathcal{N}(G^0) \cap \mathcal{N}(G_1^j) = \mathcal{E}_{g_0^j}$, para $j = 1, \dots, m$.
4. $\mathcal{N}(G_n^j) \cap \mathcal{N}(G_{n+1}^j) = \mathcal{E}_{g_n^j}$, para todo $n \geq 1$ e $j = 1, \dots, m$.

Se $S^j = \mathbb{H}/G^j$ é uma semiflauta justa para todo $1 \leq j \leq m$, diz-se-se que S é uma *gaita de fole justa*.

Teorema 1.4.5. *O grupo G da definição 1.4.4 é Fuchsiano. Além disso, se para cada $k \geq 1$ e $1 \leq j \leq m$, $G(k, j)$ e $G(k)$ denotam os grupos:*

$$G(k, j) := \langle G_1^j, G_2^j, \dots, G_k^j \rangle,$$

$$G(k) := \langle G^0, G(k, 1), \dots, G(k, m) \rangle,$$

então,

i) S^j é uma superfície flauta.

ii) $g_k^1, g_k^2, \dots, g_k^m$ são elementos hiperbólicos primitivos de bordo de $G(k)$ tais que $\langle g_k^{j_1} \rangle$ e $\langle g_k^{j_2} \rangle$ não são $G(k)$ -conjugados se $j_1 \neq j_2$.

Demonstração. Tome-se $j = 1$. Da definição 1.4.4, o grupo $G(j = 1) := \langle G^0, G_1^1, G_2^1, G_3^1 \dots \rangle$ satisfaz as hipótese do Teorema 1.2.24, logo é Fuchsiano. Tome-se agora $j = 2$ e usando novamente o Teorema 1.2.24 tem-se que o grupo $G(j = 1, 2) := \langle G(j = 1), G_1^2, G_2^2, G_3^2, \dots \rangle$ é Fuchsiano. Repetindo o argumento até $j = m$, conclui-se que $G = G(j = 1, 2, \dots, m)$ é Fuchsiano. O item 2. e o item 4. da definição 1.4.4 implicam a afirmação i).

Considere-se o grupo $\langle G^0, G_1^1 \rangle$. Pelo item 3. da definição 1.4.4 tem-se $\mathcal{N}(G^0) \cap \mathcal{N}(G_1^1) = \mathcal{E}_{g_1^0}$, logo pelo Lema 1.2.18 g_1^1 é um elemento de bordo de $\langle G^0, G_1^1 \rangle$. Observe-se que, se I_1^1 é o intervalo de descontinuidade de G^0 limitado por $\mathcal{E}_{g_1^0}$ e se I_1^1 é o intervalo de descontinuidade de G_1^1 limitado por $\mathcal{E}_{g_1^1}$, então $I_1^0 \supset I_1^1$. Logo, pelo item 1. da definição 1.4.4, $\langle g_1^1 \rangle$ não pode ser $\langle G^0, G_1^1 \rangle$ -conjugado como qualquer $\langle g_0^j \rangle$, $j \neq 1$.

Tome-se $\langle G^0, G_1^1, G_1^2 \rangle$. Como $\mathcal{N}(G^0) \cap \mathcal{N}(G_1^2) = \mathcal{E}_{g_1^2}$, então a convexidade dos núcleos de Nielsen implicam que $\mathcal{N}(\langle G^0, G_1^1 \rangle) \cap \mathcal{N}(G_1^2) = \mathcal{E}_{g_1^2}$, logo pelo Lema 1.2.18, g_1^2 é um elemento de bordo de $\langle G^0, G_1^1, G_1^2 \rangle$. Igual que acima, $\langle g_1^2 \rangle$ não é $\langle G^0, G_1^1, G_1^2 \rangle$ -conjugado com $\langle g_0^j \rangle$, $j \neq 2$ nem com $\langle g_1^1 \rangle$. Repetindo o argumento e adicionando em cada etapa o grupo G_1^j , conclui-se que $g_1^1, g_1^2, \dots, g_1^m$ são elementos de bordo de $G(1) = \langle G^0, G_1^1, \dots, G_1^m \rangle$, e que os grupos cíclicos gerados por estes elementos não são $G(1)$ -conjugados entre si. Sigue-se a afirmação ii) ao repetir o argumento acima e usando hipótese de indução nos inteiros k . $\square$

Figura 1.16: Processo de construção da superfície $\mathbb{H}/G(3)$ a partir de $\mathbb{H}/G(2)$.

A proposição anterior, ao garantir que G seja um grupo Fuchsiano, mostra que as superfícies gaita de fole estão bem definidas. Observe-se que do Teorema 1.2.24 tem-se que cada calça $\mathcal{N}(G_n^j)/G_n^j$ está isométricamente mergulhada na superfície S , de fato, pode-se ver que cada flauta S^j também está isométricamente mergulhada em S . Denote-se por γ_n^j a geodésica fechada simples em S dada por $\pi_G(\mathcal{E}_{g_n^j})$, $1 \leq j \leq m$, $n \geq 0$. Ao tomar Γ como a união de $\{\gamma_n^j / 1 \leq j \leq m, n \geq 0\}$ e uma multicurva que decompõe em calças a $S_0 = \mathbb{H}/G^0$, obtemos uma multicurva que decompõe em calças a superfície gaita de fole S . Por outro lado, sendo cada S^j uma flauta, esta tem associada um par de coordenadas $d^j = (d_n^j)_{n \geq 0}$ e $\tau^j = (\tau_n^j)_{n \geq 0}$ onde $d_n^j > 0$ e $\tau_n^j \in \mathbb{R}$, para todo j, n .

Procuramos à continuação generalizar a Proposição 1.4.3 para os casos das superfícies gaita de fole de ordem $m \geq 3$.

Teorema 1.4.6. *Seja S uma gaita de fole justa de ordem m com modelo Fuchsiano $G = \langle G^0, G^1, \dots, G^m \rangle$ como na definição 1.4.4, e com coordenadas $(d^1, d^2, \dots, d^m, \tau^1, \tau^2, \dots, \tau^m)$.*

- i) *Se para cada $1 \leq j \leq m$, $\sum_{n=0}^{+\infty} d_n^j$ diverge, então G é um grupo Fuchsiano do primeiro tipo.*
- ii) *Se para algum $1 \leq j \leq m$, $\sum_{n=0}^{+\infty} d_n^j$ converge e $\sum_{n=0}^{+\infty} |\tau_n^j|$ converge, então G é um grupo Fuchsiano do segundo tipo.*

Antes de fazer a demonstração da proposição acima, precisaremos dos dois seguintes lemas que são a versão para gaitas do lema 1 e 2 da seção 6 de [Bas93].

Lema 1.4.7. *Com as notações anteriores suponha que para algum $1 \leq j \leq m$, $\{\mathcal{E}_{h_n^j}\}_{n \geq 0}$, sendo cada $h_n^j \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ um elemento hiperbólico, é uma sequência aninhada de geodésicas que converge à geodésica L , onde para cada $n \geq 0$, $\langle h_n^j \rangle$ é $G(n)$ -conjugado com $\langle g_n^j \rangle$. Se $I \subset \mathbb{R}$ é o intervalo aberto limitado pela geodésica L , então I é um intervalo de descontinuidade de G .*

Demonstração. É suficiente provar que I é precisamente invariante pela identidade em G pois sendo as extremidades no infinito de cada geodésica $\mathcal{E}_{h_n^j}$ pontos limites de Λ_G , pelo Lema 1.2.15, I deve ser intervalo de descontinuidade do grupo G .

Seja $g \in G$, $g \neq \text{Id}$. Tomando n suficientemente grande pode-se assumir sem perda de generalidade que $g \in G(n) \setminus \bigcup_{f \in G(n)} f \cdot \langle g_n^j \rangle \cdot f^{-1}$. Como $\langle g_n^j \rangle$ é $G(n)$ -conjugado à $\langle h_n^j \rangle$, então o intervalo I_n limitado por $\mathcal{E}_{h_n^j}$ é um intervalo de descontinuidade de $G(n)$. Assim, pela Proposição 1.2.14, I_n é precisamente invariante por $\langle h_n^j \rangle$ em $G(n)$. Como $g \notin \langle h_n^j \rangle$, então $gI_n \cap I_n = \emptyset$. Portanto $gI \cap I = \emptyset$ pois $I \subset I_n$. $\square$

Lema 1.4.8. *Com as notações anteriores, se I é um intervalo de descontinuidade de G , então ou I é limitado pelo eixo de um elemento hiperbólico de bordo de G , ou I está limitado por uma geodésica limite de uma sequência aninhada de eixos $\{\mathcal{E}_{h_n^j}\}_{n \geq 1}$ para algum $1 \leq j \leq m$, onde $\langle h_n^j \rangle$ é G^j -conjugado à $\langle g_n^j \rangle$ para todo $n \geq 0$.*

Demonstração. Suponha que I não é o intervalo de descontinuidade de um elemento hiperbólico de bordo de G . Como $G(n) < G$ para todo $n \geq 0$, então pela observação 1.2.17 ii), I está contido num intervalo de descontinuidade de $G(n)$ o qual, pelo Teorema 1.4.5 ii) deve ser $G(n)$ -conjugado à algum $\langle g_n^j \rangle$, sendo o superíndice $j = 1, \dots, m$ o mesmo. Assim, existem intervalos I_n tais que $I \subsetneq I_n$, sendo I_n um intervalo de descontinuidade de $G(n)$ limitado pelo eixo h_n^j , onde $\langle h_n^j \rangle$ é $G(n)$ -conjugado com $\langle g_n^j \rangle$. Como $G(n) < G(n+1)$, então $I_{n+1} \subsetneq I_n$. Por outro lado $\mathcal{E}_{h_n^j}$ e $\mathcal{E}_{h_{n+1}^j}$ não tem uma extremidade común (Ver Lema 2.20 em [YT92]). Em consequência a sequência de eixos acima é em efeito uma sequência aninhada e, além disso, existe uma linha geodésica L que limita o intervalo aberto $I' = \bigcap_{n \geq 1} I_n \supset I$ tal que a sequência aninhada $\{\mathcal{E}_{h_n^j}\}_{n \geq 0}$ converge à L .

Pelo Lema 1.4.7, I' é um intervalo de descontinuidade de G , mas como I também é intervalo de descontinuidade tem-se necessariamente que $I = I'$. $\square$

Demonstração da Proposição 1.4.7. i). Suponha que G é do segundo tipo e seja $I \subset \hat{\mathbb{R}}$ um intervalo de descontinuidade de G . Como S é uma gaita justa, G não têm elementos hiperbólicos de bordo, logo pelo Lema 1.4.8 a geodésica L que limita à I é o limite de uma sequência aninhada de eixos $\{\mathcal{E}_{h_n^j}\}_{n \geq 0}$ para algum $1 \leq j \leq m$, sendo $\langle h_n^j \rangle$ G^j -conjugado com $\langle g_n^j \rangle$. Observe-se que $d_n^j \leq d_{\mathbb{H}}(\mathcal{E}_{h_n^j}, \mathcal{E}_{h_{n+1}^j})$ para todo $n \geq 0$. Assim, pela Proposição 1.2.4, $\sum_{n \geq 0} d_n^j < +\infty$.

ii). Suponha que $\sum_{n \geq 0} d_n^j < +\infty$ e $\sum_{n \geq 0} |\tau_n^j| < +\infty$ para algum $1 \leq j \leq m$. Pela Proposição 1.2.5

a sequência aninhada $\{\mathcal{E}_{g_n^j}\}_{n \geq 0}$ converge a uma geodésica L que limita um intervalo aberto $I \subset \hat{\mathbb{R}}$. Pelo Lema 1.4.7 conclui-se que G é do segundo tipo. $\square$

Definição 1.4.9. Uma *superfície gaita de fole de ordem 1* é uma flauta. Uma *superfície gaita de fole de ordem 2* é uma superfície S com modelo Fuchsiano $G = \langle G^0, G^1, G^2 \rangle$, como na definição 1.4.4, onde o item 1. é substituído pelo seguinte:

1'. G^0 é o modelo Fuchsiano de uma calça do tipo $(0, 1, 2)$.

Se as calças $S^j = \mathbb{H}/G^j$, $j = 1, 2$, são todas justas, diz-se que a gaita é justa.

O Teorema 1.4.5 e a Proposição 1.4.6 valem também para uma gaita de fole de ordem 2. A figura 1.17 mostra o desenho de uma 2-gaita de fole a qual também podem chamar-lhe de biflauta.

Figura 1.17: Superfície gaita de fole de ordem 2 ou biflauta

Para finalizar vamos a considerar uma caracterização alternativa e de fato mais simple para as superfícies gaita de fole. A caracterização é baseada no conceito de fin de uma superfície e foi dada por A. Haas e P. Susskind para o caso das superfícies flauta, ver [HS07]. Começamos com a definição do espaços dos fins. Considere-se uma superfície de Riemann S (A verdade basta que S seja um espaço hemicompacto) e uma sequência crescente de compactos $K_1 \subset K_2 \subset \dots$ tais que $\bigcup_{n \geq 1} K_n = S$; chama-se de *exaustão* à sequência $\{K_n\}_{n \geq 1}$. Seja $E_1 \supset E_2 \supset \dots$, uma sequência

decrecente de subconjuntos de S , sendo cada E_n uma componente conexa de $S \setminus K_n$. Denote-se por $\mathcal{F}_0(S)$ a coleção de sequências $\{E_n\}_{n \geq 1}$ como acima para alguma exaustão $\{K_n\}_{n \geq 1}$ de S e considere-se a seguinte relação de equivalência em $\mathcal{F}_0(S)$: $\{E_n\}_{n \geq 1} \sim \{E'_n\}_{n \geq 1}$ se existem $N \geq 1$ e $k \geq 0$ tal que $E_{n+k} \subset E'_n$, $n \geq k$, e vice-versa.

Definição 1.4.10. O *espaço dos fins da superfície S* define-se como o quociente $\mathcal{F}(S) := \mathcal{F}_0(S)/\sim$, dotado da topologia induzida pela seguinte coleção de vizinhanças: Dado um conjunto aberto $U \subset S$, U^* consiste em todos os fins $[E_n]_{n \geq 1}$ tais que $E_n \subset U$ para n grande. Um fin $[E_n]_{n \geq 1}$ é um *furo* se para algum representante $\{E_n\}_{n \geq 1}$ existe E_N conformemente equivalente a um disco furado; diz-se em cambio que é um *buraco* se para algum representante $\{E_n\}_{n \geq 1}$ existe $N \geq 1$ tal que E_n é um anel de módulo finito para todo $n \geq N$. Um fin chama-se *do tipo finito* se é um furo ou um buraco, caso contrario chama-se *do tipo infinito*.

Proposição 1.4.11. *S é uma superfície gaita de fole de ordem m se, e somente se, S é conformemente equivalente a um domínio de $\hat{\mathbb{C}}$ com m fins infinitos.*

Demonstração. A implicação direta é consequência do Teorema de planaridade de Koebe pois numa superfície gaita toda curva fechada simples separa a superfície em dois componentes conexos. Suponha-se que S é conformemente equivalente a um domínio de $\hat{\mathbb{C}}$ com m fins infinitos; suponha por simplicidade que $m \geq 3$. Não há perda de generalidade em supor que $S = \hat{\mathbb{C}} \setminus X$, onde X é um subespaço fechado de $\hat{\mathbb{C}}$. Por outro lado, em qualquer superfície, o espaço dos fins é homeomorfo a um subespaço fechado de um conjunto de Cantor, assim que no caso da superfície S que têm m fins infinitos, estes correspondem com m componentes $X^1, \dots, X^m$ de X nos quais acumulam-se o resto das componentes de X que a sua vez correspondem com fins de S do tipo finito (Logo são pontos se o fin é um furo e são continuos não triviais se o fin é um buraco). Usando uma versão fraca da Proposição 1.3.8 pode-se escolher m geodésicas fechadas simples $\gamma_0^1, \dots, \gamma_0^m \subset S$ que separem a $\hat{\mathbb{C}}$ em $m+1$ componentes onde X^j e infinitas componentes de X que se acumulam neste fin do tipo infinito estão contidos no disco limitado por γ_0^j , $1 \leq j \leq m$ e, uma única componente de $\hat{\mathbb{C}} \setminus \cup_j \gamma_0^j$ que não contém o conjunto X ; observe-se que esta última componente é um domínio conformemente equivalente a uma esfera com m buracos, enquanto que as outras m componentes são conformemente equivalentes a um domínio de um disco aberto com um único fin infinito.

Seja U^j , $1 \leq j \leq m$, a componente de $S \setminus \cup_{1 \leq j \leq m} \gamma_0^j$ que contém a X^j . Para finalizar a prova basta mostrar que cada U^j é uma flauta; isto segue-se da Proposição 1 do [HS07], porém será reproduzida a prova para fazer o texto o mais auto-contido possível. Os fins finitos de X "contidos" em U^j podem-se ordenar como uma sequência $\{X_n^j\}_{n \geq 1}$, por exemplo tomando $d_{\hat{\mathbb{C}}}(X_n^j, X^j) \geq d_{\hat{\mathbb{C}}}(X_{n+1}^j, X^j)$, de forma que na topologia de $\mathcal{F}(S)$ tenha-se que $X_n^j \rightarrow X^j$. Ao tomar para cada $n \geq 1$, uma geodésica $\gamma_n^j \subset S$ fechada e simples tal que a componente de $U^j \setminus \gamma_n^j$ que contenha a X^j contenha também a X_k^j para todo $k > n$, em quanto que a outra componente contenha os fechados $X_1^j, \dots, X_n^j$, construye-se uma sequência $\{\gamma_n^j\}_{n \geq 1}$ que separa em calças a U^j . Daí cada domínio U^j é obtido colando consecutivamente uma sequência de calças a través das geodésicas γ_n^j , logo U^j é uma flauta. $\square$

Como comentário final observe-se que as superfícies gaita de fole podem-se generalizar um pouco mais pedindo-lhes que a superfície $S_0 = \mathbb{H}/G^0$ tenha gênero positivo com o qual teriam-se superfícies gaitas de ordem m e gênero g . Acredito que as proposições anteriores valeriam também neste caso.

Capítulo 2

Espaços de papel

Neste capítulo serão definidos os espaços chamados de papel fazendo úso do conceito de quociente métrico da seção 1.1 do capítulo anterior, e serão mostrados alguns exemplos e propriedades básicas de estos espaços. As seções 2.2 e 2.3 são tomadas do [dCH12], [Ber12], e a seção 2.1 essencialmente é tomado de [dC05] e [CGL06]. Convido ao leitor a dar uma olhada a estas seções para compreender o conceito de espaço de papel, os exemplos e os tipos de pontos nele sem entrar nos detalhes se quiser. A seção 2.4, principalmente o Teorema 2.4.4 será importante para o seguinte capítulo.

2.1 Ferradura justa

A ferradura justa é uma transformação definida sobre uma esfera topológica que reproduz a ação da conhecida ferradura de Smale com a diferença de que a ferradura justa não possui pontos com dinâmica irrelevante: O conjunto não-errante desta aplicação é a superfície toda. A ferradura justa é o exemplo mais simple de uma classe de homeomorfismos sobre superfícies chamados de pseudo-Anosov generalizados; como seu nome indica, estos generalizam o concito clássico de homeomorfismos pseudo-Anosov mas, neste caso, são permitidos um número infinito de singularidades, só que estos acumulam-se num número finito de pontos da superfície. A definição formal de homeomorfismo pseudo-anosov generalizado será a seguinte.

Definição 2.1.1. Seja $f : S \longrightarrow S$ um homeomorfismo definido sobre uma superfície diferenciável S . Dize-se que f é um homeomorfismo *pseudo-Anosov generalizado* se existem:

- Um conjunto finito $Q \subset S$ invariante por f ;
- Um par de folheações mensuradas transversais $(\mathcal{F}^s, \mu^s)$ e $(\mathcal{F}^u, \mu^u)$ de $S \setminus Q$ com uma quantidade enumerável de singularidades de grau $n \geq 1$ (dos tipos mostrados na figura 2.1) os quais acumulam-se somente nos pontos de Q ;

Figura 2.1: Singularidades de grau 1, 3 e 4 admitidas nas folheações de um pseudo-Anosov generalizado

c) Um número real $\lambda > 1$;

Tais que,

$$f(\mathcal{F}^s, \mu^s) = (\mathcal{F}^s, \frac{1}{\lambda} \cdot \mu^s)$$

$$f(\mathcal{F}^u, \mu^u) = (\mathcal{F}^u, \lambda \cdot \mu^u)$$

Em particular o homeomorfismo f será um pseudo-Anosov no sentido tradicional quando tenha um número finito de singularidades ou, equivalentemente, quando $Q = \emptyset$.

Este capítulo começa com a descrição da ferradura justa e principalmente da superfície onde tal aplicação é definida: este corresponde com uma esfera de papel com pelo menos um ponto irregular os quais são protagonistas importantes nesta tese. Assim começamos com um primeiro exemplo interessante de um espaço de papel que espero sirva de motivação para o resto do conteúdo das seções a seguir.

Considere-se o quadrado unitario $P = \{x + iy \mid 0 \leq x, y \leq 1\}$ e a aplicação $\hat{f} : P \rightarrow P$ definida, para todo $z = x + iy \in P$, por,

$$\hat{f}(z) := \begin{cases} 2x + i\frac{y}{2}; & \text{se } x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) + i(1 - \frac{y}{2}); & \text{se } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Figura 2.2: Ação de $\hat{f}$ sobre o quadrado.

No desenho acima mostra-se a ação de $\hat{f}$ sobre P : $\hat{f}$ contrai verticalmente por um fator $\frac{1}{2}$, e expande horizontalmente por um fator igual a 2, dobrando a metade direita A_2 de P justamente acima da metade esquerda A_1 . Claramente $\hat{f}$ não é uma aplicação injetora nem sobrejetora e pior ainda, $\hat{f}$ não é continua pois pontos a ambos lados do segmento vertical central $\text{Re } z = \frac{1}{2}$ são consideravelmente separados entre si. A ideia será fazer identificações adequadas de pares de subsegmentos de igual comprimento contidos na fronteira do quadrado para converter a aplicação $\hat{f}$ num homeomorfismo.

Para corrigir a descontinuidade de $\hat{f}$ observe-se que o lado direito de A_1 é levado pela $\hat{f}$ no subsegmento $\alpha_{-1} = \{1 + iy \mid 0 \leq y \leq \frac{1}{2}\}$, enquanto que o lado esquerdo de A_2 é levado pela $\hat{f}$ no subsegmento $\alpha'_{-1} = \{1 + iy \mid \frac{1}{2} \leq y \leq 1\}$ mas invertendo este segmento. Ao identificar cada ponto $1 + i(\frac{1}{2} - t) \in \alpha_{-1}$ com $1 + i(\frac{1}{2} + t) \in \alpha'_{-1}$, para $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, a aplicação $\hat{f}$ fica continua no segmento $\text{Re } z = \frac{1}{2}$; a figura 2.3 na esquerda mostra a identificação descrita. Observe-se que o ponto

Figura 2.3: Identificação dos lados verticais do quadrado.

$\hat{p}_{-1} = 1 + \frac{i}{2}$ é o único que é identificado com ele mesmo; este tipo de ponto também é chamado de ponto de dobradura por razões óbvias.

Definindo para cada $n \geq 1$ os pares de subsegmentos $\alpha_{n+1} := \hat{f}^n(\alpha_{-1})$ e $\alpha'_{n+1} := \hat{f}^n(\alpha'_{-1})$, a identificação feita no lado direito do quadrado deve ser reproduzido na união de todos estes pares de forma que a aplicação fique bem definida, ver o outro desenho na figura ???. Assim o segmento α_{n+1} é dobrado acima no segmento α'_{n+1} , sendo o ponto meio $\hat{p}_{n+1}$ de $\alpha_{n+1} \cup \alpha'_{n+1}$ um novo ponto de dobradura. Com as identificações anteriores a aplicação $\hat{f}$ vira numa transformação contínua.

Para fazer agora que a aplicação seja injetora observe-se que tanto o subsegmento $\alpha_1 = \{x + i / 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\}$ como o subsegmento $\alpha'_1 = \{x + i / \frac{1}{2} \leq x \leq 1\}$ são mapeados no mesmo segmento horizontal $\text{Im } z = \frac{1}{2}$ de P , sendo o segundo subsegmento virado acima do segmento. Dobrando o lado superior do P pela metade e identificando o ponto $(\frac{1}{2} - t) + i \in \alpha_1$ com o ponto $(\frac{1}{2} + t) + i \in \alpha'_1$, para cada $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, fazemos que a aplicação seja injetora no lado superior de P ; denote-se por $\hat{p}_1$ o ponto de dobradura ao fazer a identificação anterior. Como o lado inferior de A_2 é transformado no lado superior de P , para preservar a injetividade precisa-se dividir em dois partes iguais este subsegmento e identificar ambas metades. Especificamente cada ponto $\frac{3}{4} - t$ no subsegmento $\alpha'_{-2} = \hat{f}^{-1}(\alpha'_1)$ é identificado com o ponto $\frac{3}{4} + t$ no subsegmento $\alpha_{-2} = \hat{f}^{-1}(\alpha_1)$, para $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$; denota-se por $\hat{p}_{-2}$ ao ponto de dobradura de esta identificação, é dizer, $\hat{p}_{-2} = \frac{3}{4}$. Repetindo este processo para cada $n \geq 2$, definindo $\alpha_{-(n+1)} = \hat{f}^{-n}(\alpha_1)$ e $\alpha'_{-(n+1)} = \hat{f}^{-n}(\alpha'_1)$, e dobrando cada um destes subsegmentos pelo ponto de dobradura $\hat{p}_{-(n+1)} = \frac{3}{2^{n+1}}$, consegue-se fazer de $\hat{f}$ uma aplicação injetora em todos os pontos. A coleção de pares de intervalos $\alpha'_n \cup \alpha_n$, $n \in \mathbb{Z}^*$ cobrem a fronteira de P exceto no vértice 0. A figura 2.4 mostra o quadrado P junto com todas as identificações descritas anteriormente.

A união de todas as relações de equivalências definidas em cada $\alpha'_n \cup \alpha_n$ determina uma relação $\mathcal{P}$ em P simétrica, reflexiva mas não transitiva. Porém, ao considerar o quociente métrico $S = P/d_P^P$, sendo d_P a métrica Euclideana intrínica no quadrado, a aplicação $\hat{f}$ projeta-se num homeomorfismo $f : S \rightarrow S$ que chamaremos de ferradura justa. Se $\pi_{\mathcal{P}}$ denota a aplicação projeção sobre este quociente, é fácil ver que $q = \pi_{\mathcal{P}}(0)$ é o único ponto com infinitas $\pi_{\mathcal{P}}$ -preimagens e além disso é o ponto de acumulação de todos os pontos de dobraduras $p_n = \pi_{\mathcal{P}}(\hat{p}_n)$, $n \neq 0$. De fato q é um ponto fixo de f e o conjunto $\{p_n\}_{n \in \mathbb{Z}^*}$ é a órbita de qualquer de seus pontos, a qual no futuro e no passado converge para o ponto q relativo a dinâmica dada pelo homeomorfismo f . A figura 2.5 mostra a ação de f sobre o quociente S .

Com relação as propriedades geométricas do S , este é homeomorfo a uma esfera e admite uma estrutura complexa, logo é biholomorfo à $\hat{\mathbb{C}}$, ver [dC05] para mais detalhes. As folheações vertical e horizontal do quadrado P são projetados sobre S num par de folheações mensuradas transversais $(\mathcal{F}^s, \mu^s)$ e $(\mathcal{F}^u, \mu^u)$ respectivamente, ambas invariantes pelo f ; A aplicação f expande por um fator $\lambda = 2$ na folheação horizontal e contrai por um fator $\frac{1}{2}$ a folheação vertical. Os pontos de dobraduras p_n correspondem com as singularidades de ambas folheações, sendo todas estas de grau 1. Assim conclui-se que a ferradura justa é um homeomorfismo pseudo-Anosov generalizado como na definição 2.1.1, onde $Q = \{q\}$. O exemplo acima desenvolvido é uma simplificação de uma receita

Figura 2.4: O quadrado P com todas as identificações e os pontos de dobradura.

Figura 2.5: Ação de f sobre a superfície S .

mais geral feita em [dC05] (ver também [dCH04], [dCH10]), que permite construir homeomorfismos pseudo-Anosov generalizados definidos sobre espaços de papel, a partir de uma classe especial de aplicações chamadas de homeomorfismos sobre grafos grossos. O leitor interessado pode consultar as referências citadas para conhecer os detalhes desta receita.

2.2 Espaços de papel

Um *arco* num espaço métrico X é uma imagem homeomorfa $\gamma \subset X$ do intervalo $[0, 1]$. Seus *pontos extremos* são as imagens de 0 e 1 e seu *interior*, denotado por $\hat{\gamma}$, é a imagem de $(0, 1)$. Uma *curva fechada simples* em X é a imagem homeomorfa de um círculo. Um *segmento* é um arco em $\mathbb{C}$ o qual está contido numa linha reta. O comprimento de um segmento α denota-se $|\alpha|$. Um arco ou curva fechada simples em $\mathbb{C}$ chama-se de *poligonal* se ela é a concatenação de um número finito de segmentos; cada segmento maximal numa poligonal chama-se de *lado*, e a interseção de dois lados consecutivos de uma poligonal chama-se de *vértice*.

Um *polígono* é um disco topológico fechado em $\mathbb{C}$, cuja fronteira é uma poligonal fechada simples. Um *multipolígono* é uma união finita e disjunta de polígonos em $\mathbb{C}$. Os vértices e lados de um

multipolígono são os respectivos vértices e lados de sua fronteira. Num multipolígono P sempre será considerada a métrica intrínseca induzida pela métrica euclídeana $d_{\mathbb{C}}$, a qual será denotada por d em vez de d_P desde que não exista perigo de confusão. Observe-se que a topologia induzida por d_P é a mesma que a topologia de subespaço de P (Observação 1.1.4, ii)), logo (P, d_P) é um espaço métrico compacto. Num multipolígono, sempre será fixada a orientação anti-horária na fronteira de cada um dos seus polígonos. Para cada ponto $x \in \partial P$, denota-se por $\xi_P(x)$ ao ângulo interno de P em x ; se x está no interior do multipolígono P , então $\xi_P(x) := 2\pi$.

Definição 2.2.1. Seja $P \subset \mathbb{C}$ um multipolígono e $\alpha, \alpha' \subset \partial P$ dois segmentos de igual comprimento com interiores disjuntos (não necessariamente maximais). O *pareamento* de α e α' , denotado $\langle \alpha, \alpha' \rangle$, é a relação que identifica pares de pontos de α e α' por uma isometria $\alpha \rightarrow \alpha'$ que reverte orientação. Os segmentos α e α' e quaisquer par de pontos identificados por $\langle \alpha, \alpha' \rangle$ são ditos pareados. O *comprimento* de um pareamento, denotado por $|\langle \alpha, \alpha' \rangle|$, é o comprimento comum dos segmentos pareados $|\alpha| = |\alpha'|$.

Uma coleção $\{\langle \alpha_i, \alpha'_i \rangle\}_i$ de pareamentos em P são *interiormente disjuntas* se o conjunto $\{\alpha_i, \alpha'_i\}_i$ são disjuntos dois a dois. Se $\mathcal{P} = \{\langle \alpha_i, \alpha'_i \rangle\}_i$ é uma união enumerável de pareamentos, o qual é interiormente disjunto, seu *comprimento*, denotado por $|\mathcal{P}|$, é a soma dos comprimentos de seus pareamentos. Neste caso diz-se que $\mathcal{P}$ é *total*, se $|\mathcal{P}|$ for igual a metade do perímetro de ∂P .

Quando $\mathcal{P} = \{\langle \alpha_i, \alpha'_i \rangle\}_i$ é total e interiormente disjunto, a união $\cup_i (\alpha_i \cup \alpha'_i)$ cobre ∂P a menos de um conjunto de medida de Lebesgue 1-dimensional igual a 0. Uma coleção de pareamentos $\mathcal{P}$ num multipolígono P determina uma relação em P reflexiva e simétrica chamada relação de pareamento a qual será denotada igualmente por $\mathcal{P}$, onde para todo par de pontos $x, x' \in P$, $(x, x') \in \mathcal{P}$ se $x = x'$ ou x, x' são pareados. Observe-se que em geral a relação de pareamento não é transitiva e que todo ponto em P está $\mathcal{P}$ -relacionado com a lo más dois pontos diferentes.

Definição 2.2.2 (Espaço de papel). Uma *dobradura de papel*, ou simplesmente *dobradura*, é um par $(P, \mathcal{P})$, onde P é um multipolígono e $\mathcal{P}$ é uma coleção de pareamentos interiormente disjunto e total de ∂P . O quociente métrico $S_{\mathcal{P}} := P/d_{\mathcal{P}}^{\mathcal{P}}$ chama-se de *espaço de papel associado a dobradura de papel* $(P, \mathcal{P})$.

Observe-se que ao ser (P, d) um espaço métrico compacto, o quociente métrico $P/d_{\mathcal{P}}^{\mathcal{P}}$ é homeomorfo ao quociente topológico $P/\sim_{\mathcal{P}}$ (proposição 1.1.10), logo o espaço de papel $(S_{\mathcal{P}}, d^{\mathcal{P}})$ sempre será um espaço métrico compacto. Além disso e como consequência das proposições 1.1.11 e 1.1.6, a métrica $d^{\mathcal{P}}$ é estritamente intrínseca em $S_{\mathcal{P}}$.

Denote-se por $\pi_{\mathcal{P}} : P \rightarrow S_{\mathcal{P}}$ a $\sim_{\mathcal{P}}$ -projeção do multipolígono P sobre o espaço de papel $S_{\mathcal{P}}$. O subespaço $G_{\mathcal{P}} := \pi_{\mathcal{P}}(\partial P)$ chama-se de *cicatriz do $S_{\mathcal{P}}$* ; observe-se que $\pi_{\mathcal{P}} : \text{int } P \rightarrow S_{\mathcal{P}} \setminus G_{\mathcal{P}}$ é um homeomorfismo. Sobre a cicatriz $G_{\mathcal{P}}$ de um espaço de papel $S_{\mathcal{P}}$ será considerada a métrica intrínseca, denotada por $d_{G_{\mathcal{P}}}$, como subespaço de $S_{\mathcal{P}}$; também em $G_{\mathcal{P}}$ será considerada a medida $m_{G_{\mathcal{P}}}$ definida por $m_{G_{\mathcal{P}}}(D) := m_{\partial P}(\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D))$, para todo Boreliano $D \subset G_{\mathcal{P}}$, sendo $m_{\partial P}$ a medida de Lebesgue 1-dimensional em ∂P .

Definição 2.2.3. Seja $(P, \mathcal{P})$ uma dobradura de papel e $S_{\mathcal{P}}$ o espaço de papel associado. Dado $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, um ponto $x \in G_{\mathcal{P}}$ é um *vértice de valência k* ou *k -vértice*, se $\#\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(x) = k \neq 2$, ou se $\#\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(x) = 2$ e pelo menos uma das preimagem de x é um vértice do multipolígono P .

Os pontos de um espaço de papel dividem-se em tres tipos:

- Pontos irregulares: Vértices de valência ∞ ou pontos de acumulação de vértices. Denote-se por $\mathcal{Q}$ o conjunto de todos os pontos irregulares de $S_{\mathcal{P}}$.
- Pontos cônicos: Vértices de valência k não irregulares. Se a valência de um ponto cônico é k , chama-se ao ponto de *k -cônico*. Denote-se por $\mathcal{V}$ o conjuntos de pontos cônicos de $S_{\mathcal{P}}$.

- Pontos planares: Os demais pontos de $S_{\mathcal{P}}$, é dizer os pontos em $S_{\mathcal{P}} \setminus (\mathcal{V} \cup \mathcal{Q})$.

Observação 2.2.4. Se $\langle \alpha, \alpha' \rangle \in \mathcal{P}$ e $x \in \hat{\alpha}$, é claro que $\pi_{\mathcal{P}}(x) \in S_{\mathcal{P}}$ é um ponto planar, pois $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(\pi_{\mathcal{P}}(x))$ só tem dois pontos, nenhum deles vértice de P (esse é o motivo de diferenciar na definição acima os 2-vértices dos k -vértices com $k \neq 2$). Por outro lado as extremidades de segmentos pareados não necessariamente são projetados em pontos cônicos ou irregulares: Se $\langle \alpha, \alpha' \rangle \in \mathcal{P}$, ambos segmentos podem-se dividir em dois subsegmentos $\alpha_1 \cup \alpha_2$, $\alpha'_1 \cup \alpha'_2$ com um único ponto común respectivamente, de forma que α_1 , α'_1 e α_2 , α'_2 estén pareados, logo neste novo pareamento $\mathcal{P}'$, onde obviamente $S_{\mathcal{P}} = S_{\mathcal{P}'}$, a extremidade común de α_1 e α_2 é projetado num ponto planar do espaço de papel. No entanto, é possível sempre escolher a dobradura de papel $(P, \mathcal{P})$ de forma que as extremidades de qualquer pareamento de segmentos sejam projetadas em pontos não-planares do espaço de papel; chamam-se a tais dobraduras de papel de *eficientes*, ver [Ber12], seção 2.4. Nesta tese sempre será assumido sem perda de generalidade que uma dobradura de papel $(P, \mathcal{P})$ é eficiente.

Proposição 2.2.5 ([dCH12]). *Seja $(P, \mathcal{P})$ uma dobradura de papel e $G_{\mathcal{P}}$ a cicatriz do espaço de papel associado $S_{\mathcal{P}}$, então as seguintes propriedades são satisfeitas:*

- i) *O conjunto de pontos planares em $G_{\mathcal{P}}$ é aberto e denso em $G_{\mathcal{P}}$, enquanto que o conjunto $\mathcal{V} \cup \mathcal{Q}$ é fechado e de interior vazio em $G_{\mathcal{P}}$, com $m_{G_{\mathcal{P}}}$ -medida nula. Em particular, o conjunto de pontos planares em $S_{\mathcal{P}}$ é aberto e denso.*
- ii) *A métrica intrínseca $d_{G_{\mathcal{P}}}$ sobre $G_{\mathcal{P}}$ coincide com a métrica do quociente métrico $\partial P / (d_{\partial P})^{\mathcal{P}}$.*
- iii) *$G_{\mathcal{P}}$ tem dimensão de Hausdorff 1.*
- iv) *Todo arco γ em $G_{\mathcal{P}}$ é retificável, e $|\gamma|_{G_{\mathcal{P}}} = \frac{1}{2}m_{G_{\mathcal{P}}}(\gamma)$.*

□

Definição 2.2.6. Considere-se um espaço de papel $S_{\mathcal{P}}$ associado à dobradura de papel $(P, \mathcal{P})$. O ângulo de um ponto $x \in S_{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{Q}$, denotado por $\xi_{\mathcal{P}}(x)$, define-se da seguinte forma: se $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(x) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, $k \geq 1$, então $\xi_{\mathcal{P}}(x) := \xi_P(x_1) + \xi_P(x_2) + \dots + \xi_P(x_k)$, onde $\xi_P(x_n)$ denota o ângulo interno de P no ponto x_n . A curvatura num ponto $x \in S_{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{Q}$ define-se como $\kappa_{\mathcal{P}}(x) := 2\pi - \xi_{\mathcal{P}}(x)$.

Todo ponto planar num espaço de papel tem curvatura igual à zero. Por outro lado a curvatura num ponto 1-cônico qualquer é sempre um número positivo. Denote-se por $\mathcal{V}_+$ o subespaço de $S_{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{Q}$ dos pontos com curvatura positiva. Observe-se que o conjunto $\mathcal{V}_+$, além de conter todos os pontos 1-cônicos, poderia conter alguns pontos k -cônicos com $k \geq 2$ mas, nesse caso, seriam somente um número finito de pontos: Se $x \in S_{\mathcal{P}}$ é k -cônico com $k \neq 1$ e $\kappa_{\mathcal{P}}(x) > 0$, então alguma $\pi_{\mathcal{P}}$ -preimagem de x deve ser um vértice do polígono P .

Mostran-se a continuação alguns exemplos de espaços de papel para ilustrar mais claramente os conceitos antes definidos.

Exemplo 2.2.7. Considere-se P um polígono regular de n -lados, e divida o i -ésimo lado em dois subsegmentos α_i e α'_i , $i = 1, 2, \dots, n$, de igual comprimento. Considere-se $\mathcal{P}$ constituída por os n pareamentos $\langle \alpha_i, \alpha'_i \rangle$, ver figura 2.6. Observe-se que cada lado do polígono é dobrado pela metade, logo a identificação dos subsegmentos α_i e α'_i é realizada por um isometria que reverte orientação com relação à ∂P . O espaço de papel associado $S_{\mathcal{P}}$ tem n pontos 1-cônicos (também chamados de pontos de dobras) $p_1, p_2, \dots, p_n$, cada um dos quais tem ângulo $\xi_{\mathcal{P}}(p_i) = \pi$, logo a curvatura é $\kappa_{\mathcal{P}}(p_i) = \pi$. Em $S_{\mathcal{P}}$ há um único ponto n -cônico v cujas $\pi_{\mathcal{P}}$ -preimagens são os vértices de P , com ângulo $\xi_{\mathcal{P}}(v) = \pi(n - 2)$. Observe-se que $\kappa_{\mathcal{P}}(v) < 0$ se, e somente se, $n \geq 5$.

Figura 2.6: Espaço de papel do exemplo 2.2.7 para $n = 5$ e sua cicatriz.

□

Exemplo 2.2.8. Considere-se novamente o quadrado unitário P como na ferradura justa e a transformação $\hat{f} : P \rightarrow P$ cuja ação é mostrada na figura 2.7. $\hat{f}$ de maneira similar a transformação da seção anterior não é bijetora nem contínua. Porém identificando adequadamente subsegmentos de ∂P como no caso da ferradura justa construye-se um espaço de papel $S = P/d^P$ cujo pareamento é mostrado na figura 2.8 à esquerda, de forma que agora $\hat{f}$ projeta-se num homeomorfismo $f : S \rightarrow S$ o qual será pseudo-Anosov generalizado. Este tem infinitos pontos 1-cônicos e 4-cônicos acumulando-se em dois pontos q^1 e q^2 , ambos de valência 1: o primeiro tem uma única preimagem no lado inferior do quadrado P e o segundo tem uma única preimagem no lado esquerdo do quadrado P . Além dos pontos de valência 1 e 4, S_P tem um único ponto 6-cônico, o qual tem ângulo 4π (quatro de suas seis preimagens são os vértices do P), logo de curvatura -2π .

Figura 2.7

□

Exemplo 2.2.9. O seguinte é um exemplo clássico de espaço quociente: O toro como quociente de um quadrado como mostra a figura 2.9, na esquerda. O pareamento $\mathcal{P}$ consiste em duas translações: $z \mapsto z + i$ que identifica os lados horizontais, e $z \mapsto z + 1$ que identifica os lados verticais, ambas isometrias revertem a orientação nos correspondentes segmentos pareados (Ainda as isometrias

Figura 2.8: Espaço de papel do exemplo 2.2.8 e sua cicatriz. Os pontos azuis e os pontos verdes correspondem com pontos 1-cônicos e 4-cônicos respectivamente

preservam orientação vistas como transformações no plano). O espaço de papel associado tem um único ponto cônico de valência 4 e curvatura 0 correspondente à projeção dos vértices do quadrado.

Figura 2.9: Espaço de papel que também são superfície de translação

De maneira mais geral, considere-se um polígono P com as seguintes características: O número de lados de P é igual a $2n$, $n \geq 2$, e se $a_1, a_2, \dots, a_n, a'_1, a'_2, \dots, a'_n$ denotam os lados de P , existem vetores t_1, t_2, t_n tais que para cada $1 \leq i \leq n$, $a'_i = a_i + t_i$, ver figura 2.9, na direita.

Tomando $\mathcal{P} = \{\langle a_i, a'_i \rangle \mid 1 \leq i \leq n\}$, o espaço de papel associado $S_{\mathcal{P}}$ é homeomorfo a uma superfície de gênero $g = \frac{n + \#\mathcal{V} - 1}{2}$, onde o conjunto de pontos cônicos $\mathcal{V}$ de $S_{\mathcal{P}}$ é a $\pi_{\mathcal{P}}$ -projeção dos vértices do polígono P . As isometrias que identificam a_i com a'_i são definidas pelas translações $z \mapsto z + t_i$. Espaços de papel definidos deste jeito correspondem a uma categoria muito interessantes de espaços chamados de superfícies de translação, ver [Zor06]. No caso da figura 2.9, $S_{\mathcal{P}}$ tem um ponto 2-cônico correspondente a $\pi_{\mathcal{P}}$ -projeção do vértice comum nos lados a_2 e a_3 , a'_2 e a'_3 ; os demais vértices projetam-se num ponto 8-cônico, logo $S_{\mathcal{P}}$ tem gênero $g = 3$.

Uma superfície de translação mais extrema é a conhecida como a superfície de Chamanara, ver [Cha04], cujo pareamento é mostrado na figura 2.10. Fixado $\lambda \in (0, 1)$, considere-se um quadrado P de lado igual a $\sum_{j \geq 1} \lambda^j$, e divida os lados em sub-segmentos a_j, b_j, a'_j, b'_j , $j \geq 1$, como mostra a figura, onde $|a_j| = \lambda^j = |a'_j|$, $|b_j| = \lambda^j = |b'_j|$.

Figura 2.10: *Superfície de Chamanara.* Observe-se que $d^P(q_1, q_2) = 0$.

Para cada $j \geq 1$, o segmento a_j é identificado com o segmento a'_j via uma translação, e o segmento b_j é identificado com b'_j também por uma translação. As extremidades de todos os segmentos, assim como os vértices superior-direito e inferior-esquerdo, projectam-se num único ponto irregular (pois tem valência ∞) o qual é o único ponto não-planar do espaço de papel. Observe-se que a cicatriz do espaço de papel consiste numa família infinita de círculos com um ponto común, o ponto irregular. O espaço de papel menos sua irregularidade é uma superfície de gênero infinito chamada freqüentemente de Monstro do lago Ness, ver [CGL06], [Ran16].

□

Exemplo 2.2.10. O seguinte exemplo é um espaço de papel $S_{\mathcal{P}}$ associado à dobradura $(P, \mathcal{P})$, onde P é a união de quatro retângulos $P = P_1 \sqcup P_2 \sqcup P_3 \sqcup P_4$ do mesmo tamanho, ver figura 2.11. No desenho observa-se que $S_{\mathcal{P}}$ têm infinitos pontos 1-cônicos, todos de ângulo π , acumulando-se em dois pontos irregulares q^1 e q^2 , os quais também são pontos de valência ∞ .

Suponha que $\langle \alpha_1, \alpha'_1 \rangle$ é o pareamento em $\mathcal{P}$ que conecta P_1 e P_2 , onde $\alpha_1 \subset \partial P_1$ e $\alpha'_1 \subset \partial P_2$. Igualmente sejam $\langle \alpha_2, \alpha'_2 \rangle$, $\langle \alpha_3, \alpha'_3 \rangle$ os pareamentos que conectam P_2 com P_3 e P_3 com P_4 respectivamente. Ao fazer as três identificações acima somente, é obtido um novo polígono P' como mostra a figura 2.12; observe-se que no interior do polígono P' estão contido três arcos δ_i obtidos do colagem dos pareamentos $\langle \alpha_i, \alpha'_i \rangle$, $i = 1, 2, 3$. se $\mathcal{P}'$ consiste nos pareamentos restantes de $\mathcal{P}$, claramente $S_{\mathcal{P}'} = S_{\mathcal{P}}$. A figura 2.13 mostra a cicatriz do $S_{\mathcal{P}}$

□

Em [dCH12], é dado uma condição necessaria e suficiente para que um espaço de papel $S_{\mathcal{P}}$ associado à dobradura $(P, \mathcal{P})$ seja homeomorfo à uma superfície de gênero finito. Como nesta tese interessa principalmente o caso dos espaços de papel homeomorfos à esferas, não será desenvolvida

Figura 2.11: Espaço de papel do exemplo 2.2.10 obtido como quociente de quatro rectângulos

Figura 2.12: Espaço de papel associado à dobradura $(P', \mathcal{P}')$ do exemplo 2.2.10

Figura 2.13: Cicatriz do espaço de papel do exemplo 2.2.10

esta caracterização geral, mas sim será caracterizado os espaços de papel de gênero 0 na seguinte seção para fazer o texto o mais auto-contido possível. Por enquanto os seguintes dois resultados são consequências direitas da caracterização feita em [dCH12].

Proposição 2.2.11 ([dCH12]). *Se o espaço de papel $S_{\mathcal{P}}$ é homeomorfo à uma superfície de gênero finito, então sua cicatriz $G_{\mathcal{P}}$ é um dendrito local.*

□

Proposição 2.2.12 ([dCH12]). *Se o espaço de papel $S_{\mathcal{P}}$ não é homeomorfo à uma superfície de gênero finito, então $S_{\mathcal{P}}$ contém uma superfície de gênero infinito.*

□

Por outro lado é fácil ver que em qualquer espaço de papel $S_{\mathcal{P}}$, se $x \in S_{\mathcal{P}}$ é um ponto planar, existe $r > 0$ tal que a bola $B_{S_{\mathcal{P}}}(x, r)$ é isométrica à bola $B_{\mathbb{C}}(0, r)$. No capítulo 2 de [Ber12] prova-se com detalhe que em cada ponto cônico $x \in S_{\mathcal{P}}$ de ângulo $\xi_{\mathcal{P}}(x)$, existe $r > 0$ suficientemente pequeno tal que a bola $B_{S_{\mathcal{P}}}(x, r)$ é isométrica à bola de raio r e centro $[0]$ no cone métrico $\text{Cone}(\frac{\xi_{\mathcal{P}}(p)}{2\pi})$. Em consequência, em todo espaço de papel $S_{\mathcal{P}}$, o subespaço $S_{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{Q}$ está equipado de uma estrutura de superfície cônico-plana, com o qual possui uma estrutura complexa natural associada à tal estrutura cônico-plana. A pergunta agora é se tal estrutura complexa pode ser estendida ao conjunto de pontos irregulares fazendo todo o espaço $S_{\mathcal{P}}$ uma superfície de Riemann. No mesmo artigo [dCH12] (veja-se também [dCH13]) mostra-se um critério que garante a extensão da estrutura complexa ao conjunto de pontos $\mathcal{Q}$. Considere-se o seguinte: Dado $q \in G_{\mathcal{P}}$ e $r > 0$ suficientemente pequeno, as funções $m_q(r)$ e $n_q(r)$ são definidas por,

$$m_q(r) := m_{G_{\mathcal{P}}}(B_{G_{\mathcal{P}}}(q, r))$$

$$n_q(r) := \#\mathbb{S}_{G_{\mathcal{P}}}(q, r)$$

Teorema 2.2.13 (ver [dCH12], Teorema 59). *Seja $S_{\mathcal{P}}$ um espaço de papel de gênero finito associado à dobradura $(P, \mathcal{P})$. Se para todo $q \in \mathcal{Q}$,*

$$\int_0^{\infty} \frac{dr}{m_q(r) + r \cdot n_q(r)} = \infty, \quad (2.1)$$

então a estrutura complexa de $S_{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{Q}$ estende-se de maneira única para toda a superfície de papel.

□

É importante resaltar aqui que ainda fica em aberto conhecer se sempre é possível estender a estrutura complexa aos pontos $\mathcal{Q}$ num espaço de papel arbitrário de gênero finito. Na maioria dos exemplos interessantes em algum sentido a resposta é afirmativa, mas é fácil conseguir outros exemplos com irregularidades isoladas onde não se sabe se tal extensão acontece.

2.3 Esferas de papel

O objetivo principal desta seção é mostrar uma condição necessária e suficiente para que o espaço de papel associado a uma dobradura $(P, \mathcal{P})$ seja uma esfera topológica. Como já foi mencionado na seção anterior, tal caracterização foi feita em [dCH12] (Ver Teorema 42) no caso onde P é um único polígono; porém a prova vale também para o caso onde P é um multipolígono e por isso será reproduzida a prova desse caso nesta seção. Também será demonstrado a proposição 2.2.11 para o

caso particular dos espaços de papel de gênero 0, os quais serão chamados simplesmente de esferas de papel.

Considere-se uma dobradura de papel $(P, \mathcal{P})$ onde o multipolígono P é a união dos polígonos $P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_k$. Seja $\Upsilon_{\mathcal{P}}$ o grafo simple cujos vértices são os polígonos P_i , e existe uma aresta conectando o vértice P_i com o vértice P_j , $i \neq j$, se e somente se, existe um pareamento $\langle \alpha, \alpha' \rangle \in \mathcal{P}$ tal que $\alpha \subset \partial P_i$ e $\alpha' \subset \partial P_j$. Claramente o espaço de papel associado $S_{\mathcal{P}}$ é conexo se, e somente se, o grafo $\Upsilon_{\mathcal{P}}$ é conexo; nesta tese também será sempre considerada esta hipótese. Seja T um árvore de extensão do grafo $\Upsilon_{\mathcal{P}}$, escolha-se um pareamento $\langle \alpha_l, \alpha'_l \rangle$ associado a cada aresta de T e cole todos os polígonos P_i via as identificações escolhidas. O espaço resultante é um disco topológico P' e os restantes pareamentos de $\mathcal{P}$ induzem um pareamento $\mathcal{P}'$ de arcos de $\partial P'$ internamente disjunta e total (Ver a figura 2.12 no exemplo 2.2.10). Ainda o disco P' não é um polígono no sentido descrito ao começo da seção 2.2, a estrutura poligonal é irrelevante para a estrutura topológica do quociente $P'/d^{\mathcal{P}'}$. Por outro lado, sendo o quociente métrico $P'/d^{\mathcal{P}'}$ igual ao quociente métrico $P/d^{\mathcal{P}}$, também não é relevante a escolha do árvore de extensão T do grafo $\Upsilon_{\mathcal{P}}$ nem as escolhas dos pareamentos associados as arestas do árvore T . Para garantir que o espaço de papel $S_{\mathcal{P}}$ seja uma homeomorfo a uma esfera precisa-se dar condições para que o quociente $P'/d^{\mathcal{P}'}$ seja uma esfera. Por simplicidade, as seguintes definições e proposições serão feitas para o caso que P seja um único polígono, mas valerão também para o caso do disco P' obtido ao colar parcialmente os polígonos de um multipolígono qualquer como foi explicado anteriormente.

Definição 2.3.1. Seja γ um arco ou laço poligonal. Dois pares de pontos não necessariamente distintos $\{x, x'\}, \{y, y'\} \subset \gamma$ são *desvinculados*, se um dos pares está contido no fecho de uma componente conexa do complemento do outro; caso contrario, eles são *vinculados*. Uma relação simétrica e reflexiva R em γ é *desvinculada*, se qualquer par de pares $\{x, x'\}, \{y, y'\} \subset \gamma$, com xRx' , yRy' e x e x' não identificado por R nem a y nem a y' , são desvinculados.

Definição 2.3.2. Seja $(P, \mathcal{P})$ uma dobradura de papel e $\gamma \subset \partial P$ um arco ou laço (em cujo caso seria $\gamma = \partial P$). diz-se que γ é *$\mathcal{P}$ -simple* se,

- i) A restrição de $\mathcal{P}$ à γ é desvinculada.
- ii) Se $\langle \alpha, \alpha' \rangle$ é um pareamento de $\mathcal{P}$ e $\alpha \cap \text{int } \gamma \neq \emptyset$ ou $\alpha' \cap \text{int } \gamma \neq \emptyset$, então $\alpha \cup \alpha' \subset \gamma$.

Lema 2.3.3 ([dCH12]). *Se $\gamma \subset \partial P$ é $\mathcal{P}$ -simple, suas extremidades são $\sim_{\mathcal{P}}$ -equivalentes.*

Demonstração. Sejam a e b as extremidades de γ , logo basta provar que para todo $\varepsilon > 0$, $d^{\mathcal{P}}(a, b) < \varepsilon$. Por conveniencia, considere-se os pontos de γ ordenados de esquerda a direita, sendo a a extremidade esquerda e b a direita. Pela totalidade de $\mathcal{P}$, existe uma família finita de pareamentos $\{\langle \alpha_j, \alpha'_j \rangle\}_{j=1}^N$ contida em γ tal que $\cup_{j=1}^N (\alpha_j \cup \alpha'_j)$ cobre γ a menos de comprimento menor que ε . Suponha que para todo j o segmento α_j está a esquerda do segmento α'_j .

Seja $p_0 = a$ e construa-se um $\mathcal{P}$ -itinerário de a até b indutivamente da seguinte maneira: Para cada $i \geq 1$, seja q_i o ponto de $[p_i, b]$ mais próximo de p_i que seja uma extremidade esquerda de algum $\alpha_{j(i)}$; Seja p_{i+1} a extremidade direita de $\alpha'_{j(i)}$, logo $(q_i, p_{i+1}) \in \mathcal{P}$. Como a família de pareamentos é finita, existe $k \geq 1$ tal que $[p_k, b]$ é disjunto de todos os α_j ; tome $q_k = b$. Por construção $p_0 \leq q_0 < p_1 \leq q_1 < \dots < p_k \leq q_k$. Os intervalos (p_i, q_i) são disjuntos de cada α_j pela escolha de q_i . Por outro lado, os intervalos (p_i, q_i) são também disjuntos de cada α'_j pois, se (p_i, q_i) intersecta algum α'_j , então α_j deve estar contida em (q_s, p_{s+1}) para algum $s < j$, logo $\alpha_{j(s)} < \alpha_j < \alpha'_{j(s)} < \alpha'_j$ seriam vinculados, contrariando a simplicidade de γ . Assim $\cup_{i=0}^k (p_i, q_i) \subset \gamma \setminus \cup_{j=1}^N (\alpha_j \cup \alpha'_j)$, pelo qual,

$$d^{\mathcal{P}}(a, b) \leq L^{\mathcal{P}}((p_i, q_i)_{i=0}^k) = \sum_{i=0}^k d(p_i, q_i) < \varepsilon$$

□

Suponha que $\langle \alpha, \alpha' \rangle$ é um pareamento de $\mathcal{P}$, β é um sub-segmento de α e β' é o correspondente sub-segmento de α' . diz-se neste caso que $\langle \beta, \beta' \rangle$ é um sub-pareamento de $\langle \alpha, \alpha' \rangle$.

Lema 2.3.4 ([dCH12]). *Seja γ um arco $\mathcal{P}$ -simple em ∂P , $\langle \alpha, \alpha' \rangle$ um sub-pareamento de algum pareamento de $\mathcal{P}$ contido em γ , e $z \in \gamma \setminus (\dot{\alpha} \cup \dot{\alpha}')$. Suponha que $\dot{\alpha} \cup \dot{\alpha}'$ separa z das extremidades de γ . então o comprimento de $|\langle \alpha, \alpha' \rangle|$ é uma cota inferior de $d_{\partial P}^{\mathcal{P}}(z, w)$, para todo $w \in \partial P$ que não está na mesma componente de z em $\partial P \setminus (\dot{\alpha} \cup \dot{\alpha}')$.*

Demonstração. Seja γ_1 a componente de $\partial P \setminus (\dot{\alpha} \cup \dot{\alpha}')$ que contém z e $\gamma_2 = \partial P \setminus (\dot{\alpha} \cup \gamma_1 \cup \dot{\alpha}')$. Se $x \in \gamma_1$ e $y \in \partial P$ é um ponto tal que xPy , existe um sub-pareamento $\langle \beta, \beta' \rangle$ tal que $x \in \beta$, $y \in \beta'$, e $\dot{\beta} \cup \dot{\beta}'$ é disjunto de $\dot{\alpha} \cup \dot{\alpha}'$. Claramente $\beta \subset \gamma_1$, logo $\beta' \subset \gamma$. Como a relação $\mathcal{P}$ é desvinculada em γ , tem-se que $\beta' \subset \gamma_1$, logo $y \in \gamma_1$. Isto prova que γ_1 é $\mathcal{P}$ -saturado. Um argumento similar mostra que γ_2 também é $\mathcal{P}$ -saturado.

Para demonstrar que $d_{\partial P}^{\mathcal{P}}(z, w) \geq |\langle \alpha, \alpha' \rangle|$, para todo $w \in \gamma_2$, basta provar que o $d_{\partial P}$ -custo de qualquer $\mathcal{P}$ -itinerário $\{(p_i, q_i)\}_{i=0}^N$ de z à w é limitado inferiormente por $|\langle \alpha, \alpha' \rangle|$. A saturação de γ_1 e γ_2 implicam que existem $r \leq s$ tal que p_r é o último ponto no $\mathcal{P}$ -itinerário em γ_1 e q_s é o primeiro ponto no $\mathcal{P}$ -itinerário em γ_2 .

Se $r = s$, $L^{\mathcal{P}}((p_i, q_i)_{i=0}^N) \geq d_{\partial P}^{\mathcal{P}}(p_r, q_s) \geq |\langle \alpha, \alpha' \rangle|$. Se $r < s$, os pontos $q_r, p_{r+1}, q_{r+1}, \dots, p_s$ estão em $\dot{\alpha} \cup \dot{\alpha}'$. Sejam $\zeta, \zeta' : [0, |\langle \alpha, \alpha' \rangle|] \rightarrow \partial P$ parametrizações de α e α' por comprimento de arco, e sejam t_i , $r \leq i < s$, parâmetros tais que $\zeta(t_i) = q_i$, $\zeta(t_i) = p_{i+1}$, então

$$L^{\mathcal{P}}((p_i, q_i)_{i=0}^N) \geq \sum_{i=r}^s d_{\partial P}(p_i, q_i) \geq t_r + \sum_{i=r+1}^{s-1} |t_i - t_{i-1}| + ||\langle \alpha, \alpha' \rangle| - t_s| \geq |\langle \alpha, \alpha' \rangle|$$

□

Lema 2.3.5 ([dCH12]). *Se $\gamma \subset \partial P$ é um arco $\mathcal{P}$ -simple e a, b denota suas extremidades, então a restrição de $\sim_{\mathcal{P}}$ em γ é desvinculada e $\gamma \setminus [a] = \gamma \setminus [b]$ é $\sim_{\mathcal{P}}$ -saturada, onde $[x]$ denota a $\sim_{\mathcal{P}}$ -classe de equivalência de um ponto x .*

Demonstração. Suponha-se que os pontos de γ estão ordenados de esquerda à direita, sendo a a extremidade esquerda. Para provar que $\sim_{\mathcal{P}}$ é desvinculado em γ , basta mostrar que, se existem pontos $x, x', y, y' \in \gamma$ tais que $a \leq x < y < x' < y' \leq b$, $x \sim_{\mathcal{P}} x'$ e $y \sim_{\mathcal{P}} y'$, então $y \sim_{\mathcal{P}} x'$ (Neste caso os quatro pontos estão $\sim_{\mathcal{P}}$ -relacionados); para provar isso basta mostrar, usando o lema 2.3.3, que o arco $[y, x']$ é simple. Como a relação $\mathcal{P}$ em γ é desvinculada, ela também é desvinculada em $[y, x']$. Suponha por redução ao absurdo que $[y, x']$ não é simple, logo existe um sub-pareamento $|\langle \alpha, \alpha' \rangle|$ de algum pareamento de $\mathcal{P}$ tal que $\alpha \subset (y, x')$ e $\alpha' \subset \gamma \setminus [y, x']$. Se $\alpha' \subset [a, y)$, pelo lema 2.3.4, $d^{\mathcal{P}}(y, y') > 0$, logo $y \not\sim_{\mathcal{P}} y'$, e se $\alpha' \subset (x', b]$, então pelo mesmo lema $d^{\mathcal{P}}(x, x') > 0$, logo $x \not\sim_{\mathcal{P}} x'$. As duas opções leva a uma contradição, pelo qual $[y, x']$ é simple.

Para demonstrar que $\gamma \setminus [a]$ é $\sim_{\mathcal{P}}$ -saturado é suficiente provar que dado qualquer $x \in \dot{\gamma}$, $x \sim_{\mathcal{P}} a$ ou a $\sim_{\mathcal{P}}$ -classe de equivalência de x está contida em γ . Se existe um sub-pareamento em γ que separa a x de a e b , pelo lema 2.3.4 tem-se que $d^{\mathcal{P}}(z, w) > 0$ para todo $w \in \partial P \setminus \gamma$, logo $[x] \subset \gamma$. Se nenhum sub-pareamento separa a x das extremidades de γ , então os arcos $[a, x]$ e $[x, b]$ são simples, logo $[x] = [a] = [b]$. □

Definição 2.3.6. *Seja $P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_k$, $k \geq 1$, um multipolígono e $\mathcal{P}$ uma coleção de pareamentos de P . A dobradura de papel $(P, \mathcal{P})$ é simple se para alguma escolha da dobradura $(P', \mathcal{P}')$ associada a um árvore de extensão de $\Upsilon_{\mathcal{P}}$, a relação $\mathcal{P}'$ é desvinculada em $\partial P'$.*

Observação 2.3.7. i) Para o caso $k = 1$, tem-se trivialmente que $P = P'$ e $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$, logo a dobradura $(P, \mathcal{P})$ é simple se $\mathcal{P}$ é desvinculada em ∂P .

ii) Em principio a definição acima parece depender da escolha da dobradura $(P', \mathcal{P}')$, mas como será mostrado no seguinte resultado (que é a caracterização das esferas de papel), se $(P'', \mathcal{P}'')$ é outra escolha de dobradura associada a outro árvore de extensão de $\Upsilon_{\mathcal{P}}$, a relação $\mathcal{P}''$ é desvinculada em $\partial P''$ se $\mathcal{P}'$ é desvinculada em $\partial P'$.

Teorema 2.3.8 ([dCH12]). *O espaço de papel $S_{\mathcal{P}}$ associado a dobradura de papel $(P, \mathcal{P})$ é uma esfera topológica se, e somente se, a dobradura $(P, \mathcal{P})$ é simple.*

Demonstração. Suponha que $(P, \mathcal{P})$ é simple e seja $(P', \mathcal{P}')$ uma dobradura associada a um árvore de extensão de $\Upsilon_{\mathcal{P}}$ tal que $\mathcal{P}'$ é desvinculada em $\partial P'$. Lembre-se que $\mathcal{P}'$ é um disco topológico pelo qual existe um homeomorfismo que leva $\partial P'$ no círculo unitário $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$, e leva o interior do disco P' no exterior do disco unitário $\mathbb{D} \subset \hat{\mathbb{C}}$, pelo qual identifica-se o disco P' com $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$. A ideia agora é construir uma decomposição $\mathcal{G}$ de $\hat{\mathbb{C}}$ monótona e semi-continua superiormente de forma que $P'/\partial P' \cong \hat{\mathbb{C}}/\mathcal{G}$, logo pelo Teorema 1.1.15 o espaço de papel $S_{\mathcal{P}} = P/\mathcal{P} = P'/\mathcal{P}'$ é homeomorfo a uma 2-esfera. É importante salientar que a identificação de P' com $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$ é simplesmente uma mudança de coordenadas conveniente e que a construção de $\mathcal{G}$ não usa a geometria hiperbólica de nenhuma maneira essencial.

Se $\langle \alpha, \alpha' \rangle$ é um pareamento de $\mathcal{P}'$, dois pontos pareados por tal pareamento que estão no interior de α e de α' são chamados de pares de pontos interiores. Conecte-se cada par de pontos interiores em $\partial P'$ com a linha geodésica em $\mathbb{D}$ que tem tais pontos como extremidades. O fato de ser a relação $\mathcal{P}'$ em $\partial P'$ desvinculada garante que a coleção de geodésicas assim construídas sejam duas a duas disjuntas. Seja $\mathcal{L}$ a laminação geodésica obtida do fecho da união de todas as linhas geodésicas que conectam pares de pontos interiores de $\partial P'$. Como a relação $\sim_{\mathcal{P}'}$ é fechada, toda geodésica em $\mathcal{L}$ conecta um par de pontos $\sim_{\mathcal{P}'}$ -equivalentes. Se U é uma componente de $\mathbb{D} \setminus \mathcal{L}$ e $\bar{U}$ denota o fecho de U em $\hat{\mathbb{C}}$, então $\bar{U}$ é um disco fechado cuja fronteira é a união de algumas geodésicas em $\mathcal{L}$, incluindo suas extremidades em $\mathbb{S}^1$, conectando pontos $\sim_{\mathcal{P}'}$ -equivalentes que não são pares interiores.

Sejam $x, y \in \partial P'$ dois pontos diferentes e que não estão em um par interior, e seja $[x, y] \subset \partial P'$ um arco com extremidades x e y . As seguintes condições são equivalentes:

- i) $x \sim_{\mathcal{P}'} y$.
- ii) $[x, y]$ é $\mathcal{P}'$ -simple.
- iii) x, y pertencem à $\bar{U}$, sendo U uma componente de $\mathbb{D} \setminus \mathcal{L}$ ou, x, y são as extremidades de uma geodésica em $\mathcal{L}$.

Para provar i) $\Leftrightarrow$ ii), suponha que $[x, y]$ não é $\mathcal{P}'$ -simple. $\mathcal{P}'$ é desvinculado em $\partial P'$ e como x nem y estão num par interior, deve existir um pareamento $\langle \alpha, \alpha' \rangle$ em $\mathcal{P}'$ tal que $\alpha \subset [x, y]$ e $\alpha' \cap (x, y) = \emptyset$. Isto implica que x e y pertencem a diferentes componentes de $\partial P' \setminus (\hat{\alpha} \cup \hat{\alpha}')$, logo pelo lema 2.3.4 e considerando a $\partial P'$ como o arco $\mathcal{P}'$ -simple com a mesma extremidade x , tem-se que $x \not\sim_{\mathcal{P}'} y$. O recíproco é consequência do lema 2.3.3.

Para provar ii) $\Leftrightarrow$ iii), suponha que $[x, y]$ é $\mathcal{P}'$ -simple e que a linha geodésica com extremidades x e y não pertence a $\mathcal{L}$. Se existe uma geodésica em $\mathcal{L}$ com uma extremidade em (x, y) e a outra fora de $[x, y]$ existirá uma geodésica com extremidade $a \in (x, y)$ e $b \in \partial P' \setminus [x, y]$, sendo a e b um par interior. Más isto implica que $\{x, y\}$ e $\{a, b\}$ são $\sim_{\mathcal{P}'}$ -vinculados o qual é uma contradição pois $\sim_{\mathcal{P}'}$ é desvinculado em $\partial P'$. Assim, não existe uma geodésica com um extremo em (x, y) e o outro em $\partial P' \setminus [x, y]$, logo a geodésica que conecta x e y está contido numa componente de $\mathbb{D} \setminus \mathcal{L}$. Se $[x, y]$ não é $\mathcal{P}'$ -simple, existe um pareamento $\langle \alpha, \alpha' \rangle$ em $\mathcal{P}'$ tal que $\hat{\alpha} \subset (x, y)$ e $\hat{\alpha}' \cap [x, y] = \emptyset$, logo qualquer geodésica que conecta pontos pareados em $\hat{\alpha} \cup \hat{\alpha}'$ separa a x de y em $\mathbb{D}$.

Das equivalências mostradas acima conclui-se que dois pontos diferentes $x, y \in \partial P'$ são $\sim_{P'}$ -relacionados se, e somente se, ou eles são extremidades de uma geodésica em $\mathcal{L}$ ou eles estão no mesmo fecho de uma componente de $\mathbb{D} \setminus \mathcal{L}$. Seja $\mathcal{G}$ a decomposição de $\hat{\mathbb{C}}$ que consiste em elementos dos seguintes tipos:

- I) Fecho de uma componente de $\mathbb{D} \setminus \mathcal{L}$.
- II) Geodésica em $\mathcal{L}$ incluindo suas extremidades, que não estão em elementos do tipo II).
- III) Pontos que não estão em elementos do tipo I) e II).

Como P' é compacto, o quociente métrico $P'/d^{P'}$ é homeomorfo ao quociente topológico $P'/\sim_{P'}$ o qual, pelos argumentos feitos antes, coincide com o quociente topológico $\hat{\mathbb{C}}/\mathcal{G}$. Por outro lado, os elementos de $\mathcal{G}$ sendo discos fechados, arcos simples e pontos, são conexos e não separam a $\hat{\mathbb{C}}$. Logo para aplicar o Teorema de Moore somente falta provar que a relação de equivalência $R_{\mathcal{G}}$ é fechada.

Sejam $(x_n)_{n \geq 1}$ e $(y_n)_{n \geq 1}$ seqüências em $\hat{\mathbb{C}}$ tais que $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ e para cada $n \geq 1$ existe um elemento $g_n \in \mathcal{G}$ tal que $x_n, y_n \in g_n$. Procura-se provar que existe $g \in \mathcal{G}$ tal que $x, y \in g$. Podemos assumir sem perda de generalidade que todos os elementos g_n são do mesmo tipo.

Se os g_n são todos do tipo III), então $x_n = y_n$, para cada $n \geq 1$, logo $x = y$. Se cada g_n é uma geodésica do tipo II), existem duas possibilidades: Se a distância em $\partial P'$ entre as extremidades de $(g_n)_n$ não estão limitadas inferiormente por uma constante positiva, então $x = y$; caso contrário, as geodésicas g_n convergem a uma geodésica $g \in \mathcal{G}$ (junto com as extremidades) entre que contem os pontos x e y . O último caso é que cada g_n seja o fecho de uma componente U_n de $\mathbb{D} \setminus \mathcal{L}$. Para cada $n \geq 1$, seja β_n o arco geodésico que conecta x_n com y_n (assuma que $x_n \neq y_n$, se não, a conclusão é trivial), e γ_n a linha geodésica em $\mathbb{D}$ que contém β_n . Se a distância entre as extremidades de $(\gamma_n)_n$ não estão limitadas inferiormente por uma constante positiva novamente tem-se $x = y$. Se a distância entre as extremidades de $(\gamma_n)_n$ estão limitadas inferiormente por uma constante positiva, as geodésicas γ_n convergem a uma geodésica γ contendo a x e y . Se $x = y$ ou $\gamma \in \mathcal{L}$, então $x R_{\mathcal{G}} y$; caso contrário, o arco geodésico β que conecta x com y é disjunto da laminação $\mathcal{L}$, logo x e y estão na mesma componente conexa de $\mathbb{D} \setminus \mathcal{L}$.

Portanto $S_{\mathcal{P}}$ é homeomorfo a uma 2-esfera se a dobradura de papel $(P, \mathcal{P})$ é simple. Para provar o recíproco do teorema, suponha que $(P, \mathcal{P})$ não é simple e tome uma dobradura $(P', \mathcal{P}')$ associada a um árvore de extensão de $\Upsilon_{\mathcal{P}}$ qualquer. Existem dois pareamentos $\langle \alpha, \alpha' \rangle, \langle \beta, \beta' \rangle$ em $\mathcal{P}'$ que são vinculados, é dizer, para cada $x \in \alpha$, $x' \in \alpha'$, $y \in \beta$ e $y' \in \beta'$, x e x' , y e y' pontos respectivamente pareados, os pares $\{x, x'\}$, $\{y, y'\}$ são vinculados. A identificação de α com α' , e de β com β' vão produzir no espaço de papel $S_{\mathcal{P}}$ pelo menos uma alça, logo $S_{\mathcal{P}}$ não pode ser uma esfera. $\square$

Teorema 2.3.9 ([dCH12]). *A cicatriz $G_{\mathcal{P}}$ de uma esfera de papel $S_{\mathcal{P}}$ é um dendrito local que pode ser escrito como $G_{\mathcal{P}} = G_0 \cup \Delta$, onde G_0 é um dendrito e Δ é vazio ou, é uma união finita de arcos simples com as seguintes características:*

- i) *As extremidades de cada arco $\delta \in \Delta$ estão em G_0 e $\text{int } \delta \cap G_0 = \emptyset$.*
- ii) *Se δ, δ' são dois arcos diferentes de Δ , então $\text{int } \delta \cap \text{int } \delta' = \emptyset$.*

Demonstração. Se $(P, \mathcal{P})$ é a dobradura de $S_{\mathcal{P}}$, considere-se um árvore de extensão T de $\Upsilon_{\mathcal{P}}$, pareamentos $\langle \alpha_j, \alpha'_j \rangle$, $1 \leq j \leq k$, associados as arestas de T e a dobradura $(P', \mathcal{P}')$ obtida ao fazer as identificações dos segmentos α_j com α'_j , para cada j . Observe-se que cada pareamento $\langle \alpha_j, \alpha'_j \rangle$ determina um arco δ_j com extremidades em $\partial P'$ cujos interiores são dois a dois disjuntos e contidos em $\text{int } P'$. Se G_0 é a cicatriz do quociente $P'/d^{P'}$, então $G_{\mathcal{P}} = G_0 \cup \Delta$, sendo $\Delta = \pi_{P'}(\cup_j \delta_j)$, pelo qual faltaria provar somente que G_0 é um dendrito.

Como $\partial P'$ é compacto, a cicatriz G_0 é homeomorfo ao quociente topológico $\partial P'/\sim_{P'}$. Por outro lado, sendo $S_{\mathcal{P}}$ uma esfera, a relação $\mathcal{P}'$ é desvinculada em $\partial P'$ e pelo lema 2.3.5, a relação $\sim_{P'}$

também é. Isto implica em particular que a decomposição $\mathcal{G}$ das $\sim_{\mathcal{P}'}$ -classes de equivalência de $\partial P'$ é não-separada. Assim, para demonstrar que G_0 é um dendrito basta provar que $\mathcal{G}$ é dendrítica e usar o Teorema 1.1.20.

Seja $y \notin g \in \mathcal{G}$. Considere-se $A \subset \partial P'$ o arco maximal contendo y disjunto de g . Essa poligonal é aberta com extremidades $x_1, x_2 \in g$. Como em $\partial P'$, $\sim_{\mathcal{P}'}$ é desvinculada, então o arco A é $\sim_{\mathcal{P}'}$ -saturado. Suponha por absurdo que não houverem pontos p e p' em componetes distintas de $A \setminus \{y\}$ pareados por algum pareamento de $\mathcal{P}'$, logo as poligonais $[x_1, y]$ e $[y, x_2]$ são simples, mas isto implica que $y \in g$ (lema 2.3.3), o qual é uma contradição. Assim existem $p \in (x_1, y)$ e $p' \in (y, x_2)$ pareados. Tome um par interior z, z' próximo deles tal que $g' = \{z, z'\}$ não contém y , logo $g' \in \mathcal{P}'$ separa y de g . □

2.4 Pontos irregulares isolados

Lembre-se que um ponto q num espaço de papel é irregular se ele tem valência ∞ ou ele é ponto de acumulação de pontos cônicos, sendo possível que sejam satisfeitas as duas propriedades anteriores ao mesmo tempo. Na maioria dos exemplos mostrados até o momento, os pontos de valência ∞ também são pontos de acumulação de pontos cônicos. Em geral isto não sempre é assim: A superfície de Chamanara do exemplo 2.2.9 tem um ponto irregular que não é ponto de acumulação de pontos cônicos, de fato, tal espaço não tem nenhum ponto cônico. Outro exemplo de um espaço de papel com um ponto irregular que não é ponto de acumulação de pontos cônicos é o seguinte:

Exemplo 2.4.1. Seja $P = \{x + it \mid 0 \leq x, y \leq 1\}$ e $\mathcal{P}$ a dobradura descrita a continuação: O lado superior de P é dobrado pela metade e os dois lados laterais são colados por uma translação. Em quanto ao lado inferior de P , considere-se uma sequência infinita de número reais positivos $(a_n)_{n \geq 1}$ tal que $\sum_{n \geq 1} a_n \leq \frac{1}{4}$, e uma sequência de pareamentos $\langle \alpha_n, \alpha'_n \rangle$, $n \geq 1$, tais que $|\langle \alpha_n, \alpha'_n \rangle| = a_n$, para todo n como mostra a figura 2.14.

Figura 2.14: Detalhe dos pareamentos no exemplo 2.4.1

$[0, 1] \setminus \bigcup_{n \geq 1} (\alpha_n \cup \alpha'_n)$ é uma união disjunta de intervalos fechados $\bigcup_{n \geq 1} I_n^1$, onde I_n^1 é o intervalo que está entre os intervalos α_n e α'_n . Seja $\varphi_n : [0, 1] \rightarrow I_n^1$, $n \geq 1$, a contração que leva o ponto 0

na extremidade esquerda de I_n^1 e o ponto 1 na extremidade direita de I_n^1 , e defina-se o pareamento $\langle \alpha_{n_1 n_2}, \alpha'_{n_1 n_2} \rangle$, $n_1, n_2 \geq 1$, onde $\alpha_{n_1 n_2} := \varphi_{n_2}(\alpha_{n_1})$, $\alpha'_{n_1 n_2} := \varphi_{n_2}(\alpha'_{n_1})$, ver figura 2.14 a direita.

Agora $I_m^1 \setminus \cup_{n \geq 1} (\alpha_{nm} \cup \alpha'_{nm}) = \cup_{n \geq 1} I_n^2$, onde $I_n^2 = \varphi_m(I_n^1)$, para todo $m, n \geq 1$. Completa-se recursivamente a dobradura de papel $\mathcal{P}$ definindo-se, para toda sequência finita de naturais positivos $n_0, n_1, n_2, \dots, n_k$, o pareamento $\langle \alpha_{n_1 n_2 \dots n_k}, \alpha'_{n_1 n_2 \dots n_k} \rangle$, sendo $\alpha_{n_1 n_2 \dots n_k} := \varphi_{n_k} \circ \varphi_{n_{k-1}} \circ \dots \circ \varphi_{n_1}(\alpha_{n_0})$ e $\alpha'_{n_1 n_2 \dots n_k} := \varphi_{n_k} \circ \varphi_{n_{k-1}} \circ \dots \circ \varphi_{n_1}(\alpha'_{n_0})$.

A esfera de papel $S_{\mathcal{P}}$ associada a $(P, \mathcal{P})$ (observe-se que tal dobradura é simple) tem um único ponto 1-cônico e um único ponto 2-cônico, que são o ponto de dobradura do lado superior e a projeção dos vértices superiores do quadrado respectivamente. No lado inferior do P , todas as extremidades dos intervalos $\alpha_{n_0 n_1 \dots n_k}, \alpha'_{n_0 n_1 \dots n_k}$, $k \geq 0$, $n_0, n_1, \dots, n_k \geq 1$, são projetados por $\pi_{\mathcal{P}}$ em algum ponto de $S_{\mathcal{P}}$ de valência ∞ ; o conjunto de todos esses pontos irregulares é infinito e nenhum deles é ponto de acumulação de pontos k -cônicos, com k finito. Observe-se que neste caso o conjunto $\mathcal{Q}$ de irregulares é um conjunto perfecto, isto é, todos eles acumulam-se entre si.

□

A continuação será mostrado que os dois casos acima mencionados são as únicas possibilidades que pode ter um ponto irregular que não seja ponto de acumulação de pontos cônicos

Teorema 2.4.2. *Seja $S_{\mathcal{P}}$ um espaço de papel associado a uma dobradura $(P, \mathcal{P})$ e $q \in S_{\mathcal{P}}$ um ponto irregular que não é ponto de acumulação de pontos cônicos. então q é ponto de acumulação de ∞ -vértices ou $S_{\mathcal{P}}$ contém uma superfície de gênero infinito.*

Demonstração. Seja $\mathcal{P} = \{\langle \alpha_m, \alpha'_m \rangle\}_m$. É fácil ver que $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(q) \cap \bigcup_m (\alpha_m \cup \alpha'_m)$ é infinito. Como a soma dos perímetros dos polígonos de P é finito, existe uma sequência de pareamentos distintos $(\langle \alpha_n, \alpha'_n \rangle)_{n \geq 1}$ em $\mathcal{P}$, $\alpha_n = [x_n, y_n]$, $\alpha'_n = [x'_n, y'_n]$, tais que $|\langle \alpha_n, \alpha'_n \rangle| \rightarrow 0$ e $\pi_{\mathcal{P}}(x_n) = \pi_{\mathcal{P}}(x'_n) = q$. Não sendo q ponto de acumulação de pontos cônicos pode-se assumir sem perda de generalidade que $q_n = \pi_{\mathcal{P}}(y_n) = \pi_{\mathcal{P}}(y'_n)$ são pontos irregulares para todo $n \geq 1$, os quais são todos ∞ -vértices.

Se existe uma sub-sequência $(q_{n_j})_{j \geq 1}$ tal que $q_{n_j} \neq q$, para cada $j \geq 1$, tem-se a primeira afirmação. Se em vez disso $q_{n_j} = q$ para todos $j \geq 1$, a família $(\pi_{\mathcal{P}}(\alpha_{n_j}))_j$ é uma coleção de círculos com um único ponto común, o ponto q , cujos diâmetros decrescem à 0. Neste caso, qualquer vizinhança fechada arbitrariamente pequena de q em $G_{\mathcal{P}}$ deve conter infinitos círculos e, em consequência, tal vizinhança não pode ser um dendrito. Isto implica que a cicatriz $G_{\mathcal{P}}$ não é um dendrito local, pelo qual $S_{\mathcal{P}}$ contém uma superfície de gênero infinito, ver a proposição 2.2.11 e a proposição 2.2.12. □

Um ponto irregular q num espaço de papel $S_{\mathcal{P}}$ diz-se que é isolado, se q é isolado relativo ao conjunto de pontos irregulares $\mathcal{Q}$, isto é, se existe $r > 0$ tal que na bola $B_{S_{\mathcal{P}}}(q, r)$ o ponto q é a única irregularidade. Do teorema anterior conclui-se que todo ponto irregular isolado num espaço de papel de gênero finito deve ser um ponto de acumulação do conjunto de pontos cônicos $\mathcal{V}$. Neste caso pode-se dizer ainda mais: Tal ponto irregular deve ser ponto de acumulação de pontos 1-cônicos do espaço de papel. Para provar este fato usaremos o seguinte resultado elementar, o qual diz essencialmente que todo caminho simple num dendrito cujo ponto final é um ponto de corte pode ser estendido um pouco mais.

Lema 2.4.3. *Seja G um dendrito e $\gamma : [0, T] \rightarrow G$ um caminho simple tal que $\gamma(T)$ é um ponto de corte de G . Então existe $\hat{T} > T$ e um caminho simple $\hat{\gamma} : [0, \hat{T}] \rightarrow G$ tal que $\hat{\gamma}|_{[0, T]} = \gamma$ e $\hat{\gamma}(\hat{T})$ é uma extremidade de G .*

Demonstração. Como $\gamma(T)$ separa G , considere-se uma componente conexa C de $G \setminus \{\gamma(T)\}$ que não contém $\gamma([0, \gamma(T)))$. $\bar{C} = C \cup \{\gamma(T)\}$ é um subcontinuum de G , logo um dendrito. Se d denota a distância de G , existe $x_0 \in C$ tal que $d(\gamma(T), x_0) = \sup_{x \in C} d(\gamma(T), x)$. Parametrize-se o arco que conecta o ponto $\gamma(T)$ com o ponto x_0 por um caminho simple $\gamma_1 : [T, \hat{T}] \rightarrow \bar{C}$ tal que $|\gamma_1| = d(\gamma(T), x_0)$, logo a concatenação dos caminhos $\hat{\gamma} := \gamma * \gamma_1$ é simple e $\hat{\gamma}|_{[0, \hat{T}]} = \gamma$. Falta mostrar que $\gamma(\hat{T})$ é uma extremidade de G . Se não, usando-se o argumento acima consegue-se estender o caminho γ_1 para um caminho com extremidades $\gamma(T)$ e $y \in C$, com $d(\gamma(T), y) > d(\gamma(T), x_0)$ o qual é uma contradição. $\square$

Teorema 2.4.4. *Considere-se um espaço de papel $S_{\mathcal{P}}$ de gênero finito associado a uma dobradura $(P, \mathcal{P})$. Se $q \in S_{\mathcal{P}}$ é um ponto irregular isolado, então q é ponto de acumulação de pontos 1-cônicos.*

Demonstração. Seja $G_{\mathcal{P}}$ a cicatriz de $S_{\mathcal{P}}$ e suponha por absurdo que $q \in G_{\mathcal{P}}$ não é ponto de acumulação de pontos 1-cônicos, logo existe $r > 0$ tal que a bola fechada $\bar{B}_{G_{\mathcal{P}}}(q, r)$ não contém nem pontos 1-cônicos nem pontos irregulares diferentes de q . Tomando r suficientemente pequeno pode-se assumir também que $\bar{B}_{G_{\mathcal{P}}}(q, r)$ não contém pontos 2-cônicos e que tal bola é um dendrito (Ver proposição 2.2.11). Como q é ponto de acumulação de pontos cônicos (Ver Teorema 2.4.2), existe uma sequência $(p_n)_{n \geq 0} \subset \bar{B}_{G_{\mathcal{P}}}(q, r)$, tal que $d_{G_{\mathcal{P}}}(p_n, q) \searrow 0$, sendo cada p_n um ponto k_n -cônico, com $k_n \geq 3$. Além disso, pode-se assumir que algum dos seguintes dois casos é satisfeito:

- 1) Existe um arco $\delta \subset G_{\mathcal{P}}$ que conecta p_0 com q e contém a sequência $(p_n)_{n \geq 0}$, sendo estes e o ponto irregular q os únicos pontos não-planares em δ .
- 2) Existem uma sequência de arcos $(\delta_n)_{n \geq 0}$ em $G_{\mathcal{P}}$, onde cada arco δ_n conecta o ponto p_n com o ponto q e no interior de δ_n não existem pontos não-planares.

Figura 2.15: Desenho que ilustra o caso 1) e o caso 2) respectivamente.

Na figura 2.15 são mostrados os dois casos mencionados. A prova do teorema será feita só para o caso 1) pois o argumento para o caso 2) é análogo. Observe-se que no caso 1), como $d_{G_{\mathcal{P}}}(p_n, q) > d_{G_{\mathcal{P}}}(p_{n+1}, q)$, então $\delta \setminus \{q\}$ é a concatenação dos arcos que conecta p_n com p_{n+1} , para todo $n \geq 0$, ver a figura 2.15 à esquerda.

Como $k_n \geq 3$ para cada $n \geq 0$, existem arcos simples $\gamma_n \subset B_{G_{\mathcal{P}}}(q, r)$ com ponto inicial p_n tal que $\gamma_n \cap \delta = \{p_n\}$. Usando-se o lema 2.4.3 pode-se assumir que o ponto final do arco γ_n é uma extremidade do dendrito $\bar{B}_{G_{\mathcal{P}}}(q, r)$ ou o ponto final de γ_n está em $\mathbb{S}_{G_{\mathcal{P}}}(q, r)$. Procura-se provar que a primeira possibilidade é impossível. Em efeito, uma extremidade numa cicatriz de um espaço de papel deve ser um ponto 1-cônico ou um ponto irregular, como por hipótese em $\bar{B}_{G_{\mathcal{P}}}(q, r)$ não há pontos 1-cônicos, então o ponto final de γ_n deve ser uma irregularidade, mas nesse caso, deve ser o ponto q . Isto implica que existem dois arcos distintos, um dele é γ_n e o outro um arco contido

Figura 2.16: Desenho do arco δ e os arcos γ_n .

em δ , que conectam o ponto p_n com o ponto q o qual contradiz que $\bar{B}_{G_P}(q, r)$ seja um dendrito (proposição 1.1.17 ii)). Portanto, para cada $n \geq 1$ o arco γ_n tem ponto final em $\mathbb{S}_{G_P}(q, r)$.

Usando novamente a proposição 1.1.17 ii), é claro que $\gamma_n \cap \gamma_m = \emptyset$, se $n \neq m$: Se não, existe um arco contido em δ que conecta p_n com p_m , e outro arco contido em $\gamma_n \cup \gamma_m$ conectando os mesmos pontos. Assim, sendo m_{G_P} uma medida e usando a proposição 2.2.5 iv),

$$|\partial P| = m_{G_P}(G_P) \geq m_{G_P}\left(\bigcup_{n \geq 1} \gamma_n\right) = \sum_{n \geq 1} m_{G_P}(\gamma_n) = 2 \sum_{n \geq 1} |\gamma_n|_{G_P}$$

Como $d_{G_P}(q, \mathbb{S}_{G_P}(q, r)) = r$ e $d_{G_P}(p_n, q) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$, deve existir $\varepsilon > 0$ tal que $d_{G_P}(p_n, \mathbb{S}_{G_P}(q, r)) > \varepsilon$, para todo $n \geq 1$. Isto implica que $|\gamma_n|_{G_P} \geq \varepsilon$, para cada $n \geq 1$, pelo qual $|\partial P| = \infty$. Assim, chegamos a uma contradição pelo qual nós concluímos que q tem que ser ponto de acumulação de pontos 1-cônicos. $\square$

Para terminar a seção, mostra-se um exemplo de esfera de papel que somente tem pontos planares, pontos irregulares e pontos 3-cônicos. Este exemplo não contradiz o Teorema 2.4.4 pois seu conjunto de irregularidades é um conjunto de Cantor, logo nenhum dele é isolado.

Exemplo 2.4.5. Sejam $a_n > 0$, tais que $\sum_{n \geq 0} 2^{n+1} a_n = 1$. Seja P um triângulo equilátero de lado com comprimento igual a um e $\mathcal{P}$ a coleção de pareamentos mostrados na figura 2.17 a esquerda.

Figura 2.17: Espaço de papel com infinitos pontos 3-cônicos, um Cantor de pontos irregulares e nenhum ponto 1-cônico; ao lado um esboço de sua cicatriz.

Para entender com mais detalhe a dobradura de papel basta olhar os pareamentos em um lado do triângulo: Começar com um pareamento $\langle \alpha, \alpha' \rangle$ de comprimento a_0 tal que a extremidade esquerda de α seja um vértice de P , a extremidade direita de α' seja outro vértice de P e ambas estão contidos num mesmo lado de P ; seja B o segmento no meio entre α e α' , e z_1 o ponto meio de B . A continuação considere dois pareamentos $\langle \alpha_0, \alpha'_0 \rangle$ e $\langle \alpha_1, \alpha'_1 \rangle$, ambos com comprimento $|\langle \alpha_0, \alpha'_0 \rangle| = |\langle \alpha_1, \alpha'_1 \rangle| = a_1$, tais que,

1. $\alpha_i, \alpha'_i \subset B$, $i = 0, 1$;
2. A extremidade esquerda de α_0 e a extremidade direita de α'_1 coincidem com as extremidades esquerda e direita do subsegmento B respectivamente;
3. A extremidade direita de α'_0 e a extremidade esquerda de α_1 coincidem com o ponto meio z .

Denote-se o subsegmento entre α_i e α'_i por B_i e seu ponto meio por z_i , para $i = 0, 1$; observe-se que com estos dois pareamentos, o ponto z é projetado num ponto 3-cônico. No seguinte passo, considere-se os quatro pareamentos $\langle \alpha_{00}, \alpha'_{00} \rangle$, $\langle \alpha_{01}, \alpha'_{01} \rangle$, $\langle \alpha_{10}, \alpha'_{10} \rangle$ e $\langle \alpha_{11}, \alpha'_{11} \rangle$, todos de comprimento a_2 descritos a continuação:

1. $\alpha_{i_1 i_2}, \alpha'_{i_1 i_2} \subset B_{i_1}$, $i_1, i_2 = 0, 1$;
2. A extremidade esquerda de α_{00} e a extremidade direita de α'_{01} coincidem com as extremidades esquerda e direita do subsegmento B_0 respectivamente;
3. A extremidade esquerda de α_{10} e a extremidade direita de α_{11} coincidem com as extremidades esquerda e direita do subsegmento B_1 respectivamente;
4. A extremidade direita de α'_{00} e a extremidade esquerda de α_{01} coincidem com o ponto meio z_0 ;
5. A extremidade direita de α'_{10} e a extremidade esquerda de α'_{11} coincidem com o ponto meio z_1 .

Agora cada ponto z_i , $i = 0, 1$ é projetado num ponto 3-cônico. De maneira similar, denote-se por $B_{i_1 i_2}$ o subsegmento no meio de $\alpha_{i_1 i_2}$ e $\alpha'_{i_1 i_2}$ e por $z_{i_1 i_2}$ seu ponto meio, sendo $i_1 i_2 = 00, 01, 10, 11$. A mesma construção é repetida infinitas vezes até cobrir o lado do triângulo com a coleção de pareamentos $\langle \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k}, \alpha'_{i_1 i_2 \dots i_k} \rangle$, $i_1, i_2, \dots, i_k = 0, 1$, $k \geq 1$. A figura 2.18 mostra um acercamento de três dos pareamentos descritos acima.

Figura 2.18: Detalhe dos pareamentos $\langle \alpha_{01}, \alpha'_{01} \rangle$ e $\langle \alpha_{01 i_3}, \alpha'_{01 i_3} \rangle$, $i_3 = 0, 1$.

Assim, dado uma palavra $i_1 i_2 \dots i_k \in \{0, 1\}^k$, tem-se que $p_{i_1 i_2 \dots i_k} = \pi_{\mathcal{P}}(z_{i_1 i_2 \dots i_k})$ é um ponto 3-cônico do espaço do papel e estos são todos os pontos cônicos de $S_{\mathcal{P}}$. Por outro lado, num lado

do triângulo e dado $\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, existe um único ponto $\hat{q}_\omega$ na interseção $\bigcap_{k \geq 1} B_{\omega_{[1, k]}}$; a $\pi_{\mathcal{P}}$ -projeção deste ponto é o ponto q_ω o qual é o limite da sequência $\{p_{\omega_{[1, k]}}\}_k$, logo um ponto irregular.

.

□

Capítulo 3

Esfera de papel furada

Considere-se uma dobradura de papel simple $(P, \mathcal{P})$ e a correspondente esfera de papel $S_{\mathcal{P}}$. Suponha que seu conjunto de pontos irregulares $\mathcal{Q}$ é finito e não vazio, logo o conjunto $\mathcal{V}_+$ de pontos de curvatura positiva é infinito e acumula-se em cada ponto de $\mathcal{Q}$ (Teorema 2.4.4). Neste capítulo será estudado a superfície de Riemann $S_{\infty} := S_{\mathcal{P}} \setminus (\mathcal{Q} \cup \mathcal{V}_+)$ com a estrutura complexa induzida como subespaço de $S_{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{Q}$; tal espaço será chamado de esfera de papel furada ou simplesmente de esfera furada. Sendo S_{∞} uma superfície do tipo infinito, pode-se assumir sem perda de generalidade que $S_{\infty} = \mathbb{H}/G_{\infty}$, onde G_{∞} é um modelo Fuchsiano desta superfície. Denote-se por $\lambda_{\infty}(z)|dz|$ à métrica de Poincaré de S_{∞} e por $\ell_{\infty}(\cdot)$ à função de comprimento de caminhos com esta métrica. Observe-se que em princípio, nem o grupo Fuchsiano G_{∞} nem a métrica de Poincaré de S_{∞} são conhecidos. Por outro lado é importante resaltar ainda que a estrutura complexa possa ser estendida ao conjunto $\mathcal{Q}$, com o qual $S_{\mathcal{P}}$ é conformemente equivalente à $\hat{\mathbb{C}}$, a distância esférica e a distância do espaço de papel $d^{\mathcal{P}}$ não são necessariamente comparáveis, pelo menos não em nosso conhecimento.

3.1 Decomposição de S_{∞}

Suponha que a esfera de papel $S_{\mathcal{P}}$ tem m pontos singulares $q^1, q^2, \dots, q^m$. Pelo Teorema 2.4.4, cada ponto q^j é ponto de acumulação do conjunto de pontos 1-cônicos de $S_{\mathcal{P}}$, logo pode-se escrever o conjunto $\mathcal{V}_+$ como uma união disjunta finita $\mathcal{V}_+ = \mathcal{V}_+^1 \sqcup \mathcal{V}_+^2 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{V}_+^m$, onde cada ponto q^j é o único ponto de acumulação do conjunto $\mathcal{V}_+^j$, $1 \leq j \leq m$. Em consequência cada conjunto $\mathcal{V}_+^j$ pode ser ordenado como uma sequência $\mathcal{V}_+^j = \{p_1^j, p_2^j, \dots\}$, de forma que $\lim_{k \rightarrow +\infty} p_k^j = q^j$, para todo $j = 1, \dots, m$. Nesta primeira seção será descrita uma multicurva $\Gamma_{\infty} \in S_{\infty}$ relativamente natural que separa a superfície em calças justas; a multicurva dependerá essencialmente da partição do conjunto $\mathcal{V}_+$ e do ordenamento feito em cada um dos subconjuntos da partição, com o qual assumiremos sempre que estes já foram fixados como está explicado acima.

Suponha-se inicialmente que o número de pontos irregulares é $m \geq 3$. É possível escolher a partição $\mathcal{V}_+ = \bigsqcup_{1 \leq j \leq m} \mathcal{V}_+^j$ de maneira que, se D_0^j denota o menor sub-continuum em $G_{\mathcal{P}}$ que contém $\{q^j\} \cup \mathcal{V}_+^j$, então $D_0^{j_1} \cap D_0^{j_2} = \emptyset$ sempre que $j_1 \neq j_2$: Tome-se $r > 0$ tal que as bolas fechadas em $G_{\mathcal{P}}$, $\overline{B}_{G_{\mathcal{P}}}(q^1, r), \dots, \overline{B}_{G_{\mathcal{P}}}(q^m, r)$ sejam dendritos dois a dois disjuntos; como fora delas só ficam um número finito de pontos de $\mathcal{V}_+$, basta distribuir estes pontos conectando-os com um arco em $G_{\mathcal{P}}$ à alguma dessas bolas até obter a partição procurada. Dado qualquer $1 \leq j \leq m$ e $k \geq 1$, seja D_k^j o menor subcontinuum em $G_{\mathcal{P}}$ que contém o subconjunto $\{q^j\} \cup \{p_{k+1}^j, p_{k+2}^j, \dots\}$, e E_k^j o resto dos pontos em $\mathcal{Q} \cup \mathcal{V}_+$, é dizer, $E_k^j = \overline{\mathcal{V}} \setminus D_k^j$. Claramente $D_0^j \supset D_1^j \supset D_2^j \supset \dots$, pelo qual $D_{k_1}^{j_1} \cap D_{k_2}^{j_2} = \emptyset$ se $j_1 \neq j_2$, $k_1, k_2 \geq 0$.

A ideia agora consiste em usar cada sub-continuum D_k^j para determinar uma única curva geodésica γ_k^j na superfície S_{∞} , para todo j, k . Sendo D_k^j um conjunto conexo, pela Proposição 1.3.8 existe uma única curva fechada simples $\hat{\gamma}_k^j \subset S_{\mathcal{P}}$ que separa os conjuntos D_k^j e E_k^j a qual é uma

geodésica na superfície $S_{\mathcal{P}} \setminus (D_k^j \cup E_k^j)$. Como $\hat{\gamma}_k^j \subset S_{\infty}$, tome-se γ_k^j definida como a única geodésica em S_{∞} na classe de homotopia de $\hat{\gamma}_k^j$, com o qual esta será também fechada e simples. Observe-se que o Lema 1.3.9 implica que a sequência de geodésicas $(\gamma_k^j)_{k \geq 0}$ são concêntricas no sentido que, para todo $k \geq 0$, as curvas γ_n^j , $n > k$, estão na mesma componente de $S_{\mathcal{P}} \setminus \gamma_k^j$. A figura 3.1 mostra um esboço das geodésicas γ_k^j e γ_{k+1}^j em um caso particular. Por construção, as curvas $\gamma_0^j, \gamma_0^j, \dots, \gamma_0^j$ são disjuntas duas a duas, logo o mesmo acontece com a família de curvas $\{\gamma_k^j / 1 \leq j \leq m, k \geq 0\}$.

Para finalizar, a superfície $S^0 = S_{\mathcal{P}} \setminus \bigcup_{j=1}^m D_0^j$ é do tipo $(0, 0, m)$, logo pose-se escolher à vontade $m-3$ curvas $\hat{\gamma}_1^0, \hat{\gamma}_2^0, \dots, \hat{\gamma}_{m-3}^0$ que separem à S^0 em calças, depois tome-se as geodésicas $\gamma_1^0, \dots, \gamma_{m-3}^0$ em S_{∞} nas respectivas classes de homotopia. Tome-se Γ_{∞} como a coleção de geodésicas acima descrita, logo esta multicurva separa a esfera furada S_{∞} em calças.

Figura 3.1: Construção das geodésicas γ_k^j .

Observe-se que foi reproduzido a prova da Proposição 1.4.11 para esta superfície: O espaço dos fins de S_{∞} é homeomorfo ao subespaço $\bar{\mathcal{V}}_+ = \mathcal{V}_+ \cup \mathcal{Q}$, sendo cada fin finito um furo o qual a sua vez é identificado com cada ponto de $\mathcal{V}_+$, e sendo cada fin infinito da superfície identificado com cada ponto irregular $q^1, \dots, q^m$. Assim conclui-se que a esfera de papel furada com m pontos irregulares é uma superfície gaita de fole justa de ordem m . Escolha-se o modelo Fuchsiano G_{∞} de S_{∞} como na definição 1.4.4, de maneira que cada elemento $g_k^j \in G_{\infty}$ corresponda com a geodésica γ_k^j , para todo par de índices j, k .

Figura 3.2: Uma esfera de papel furada com 5 fins infinitos

Quando a esfera de papel $S_{\mathcal{P}}$ tem um ou dois pontos irregulares a construção da multicurva Γ_{∞} será similar ao caso anterior com $m \geq 3$ pontos irregulares, a diferença está em que não será

necessário particionar o conjunto de pontos $\mathcal{V}_+$: Ordene-se este conjunto como uma sequência $\{p_n\}_n$ de forma que $\mathcal{Q} = \{\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n\}$, se $m = 1$ e $\mathcal{Q} = \{\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n, \lim_{n \rightarrow -\infty} p_n\}$, se $m = 2$, logo defina-se D_k como o menor subcontinuum em $G_{\mathcal{P}}$ que contém $\{p_n\}_{n > k}$ e E_k o complemento de D_k em $\bar{\mathcal{V}}_+$ (No caso $m = 1$ será conveniente escrever $\mathcal{V}_+$ como uma sequência que começa no ponto $p_{-1}, p_0, p_1 \dots$). A multicurva $\Gamma_\infty = \{\gamma_k\}_k$ construída de maneira similar ao caso $m \geq 3$ usando os conjuntos D_k e E_k , separará em calças a esfera furada S_∞ . Novamente esta será uma gaita de fole de ordem um e dois respectivamente, é dizer uma flauta justa se existe um único ponto irregular ou uma bifaleta justa se existem dois pontos irregulares, ver figura 3.3.

Figura 3.3: Esfera de papel furado com um e dois fins infinitos respectivamente.

Em conclusão, toda esfera de papel furada será uma superfície gaita de fole justa cujo ordem é igual ao número de pontos irregulares do espaço de papel $S_{\mathcal{P}}$. Uma pergunta interessante seria saber se o recíproco vale, isto é, dada uma superfície gaita de fole justa S de ordem m qualquer, ela pode ser realizada por alguma esfera de papel furada com m irregularidades? E se a resposta for negativa, que condições precisa satisfazer a gaita de fole para ser realizada por uma esfera de papel furada? ou, existe uma esfera furada S_∞ e uma aplicação quaseconforme $f : S_\infty \rightarrow S$? Espera-se responder algumas destas perguntas numa futura pesquisa. Por enquanto, um primeiro passo consiste em entender os possíveis comprimentos hiperbólicos das curvas geodésicas na família Γ_∞ que faz a decomposição em calças da mesma.

3.2 Modelo base

A continuação serão calculadas estimativas superiores para os comprimentos hiperbólicos das curvas Γ_∞ de uma esfera de papel furada particular que chamaremos de modelo base. A razão de iniciar com este exemplo particular deve-se a simplicidade deste modelo o qual permitirá entender facilmente os argumentos usados para o calculo das mesmas estimativas superiores numa esfera furada geral. Este modelo base corresponde a uma esfera de papel com um único ponto irregular o qual é um ∞ -vértice e é possivelmente o exemplo mais básico de um espaço de papel com irregularidades.

Comenzamos então com a descrição do espaço de papel do modelo base. Considere-se uma sequência decrescente $(a_k)_{k \geq 1}$ de números reais positivos tal que

$$\sum_{k \geq 1} a_k = \frac{L}{2} < +\infty$$

Seja P o quadrado cujos vértices são os pontos $0, L, i \cdot L$ e $L + i \cdot L$, e $\mathcal{P}$ a coleção de pareamentos que consiste num pareamento $\langle \alpha_{-1}, \alpha'_{-1} \rangle$ que dobra o lado superior do quadrado P pela metade, outro pareamento $\langle \alpha_0, \alpha'_0 \rangle$ que identifica os lados verticais do P pela translação $z \mapsto z + L$, e a família de pareamentos $\{\langle \alpha_k, \alpha'_k \rangle\}_{k \geq 1}$ contidas no lado inferior de P , com as seguintes características:

- i) Para cada $k \geq 1$, $|\langle \alpha_k, \alpha'_k \rangle| = a_k$.

- ii) Para cada $k \geq 1$, a extremidade esquerda de α_k coincide com a extremidade direita de α'_k , de modo que $\alpha'_k \cup \alpha_k$ é um subsegmento do lado inferior de P .
- iii) Se $k_1 < k_2$, o segmento $\alpha'_{k_2} \cup \alpha_{k_2}$ está na esquerda do segmento $\alpha'_{k_1} \cup \alpha_{k_1}$.

O modelo base corresponde à esfera de papel furada do $S_{\mathcal{P}}$. A figura 3.4 mostra a dobradura de papel acima descrita e sua respectiva cicatriz. Observe-se que a união de todos os segmentos $\alpha'_k \cup \alpha_k$, $k \geq 1$, cobre todo o lado inferior do P exceto no vértice 0. O conjunto $\mathcal{V}_+$ consiste em todos os pontos 1-cônicos p_k , $k \geq 1$, correspondentes as dobraduras feitas no lado inferior do quadrado, o ponto 1 cônico p_{-1} correspondente a dobradura do lado superior e um ponto 2-cônico p_0 o qual é a $\pi_{\mathcal{P}}$ -projeção dos vértices superiores do P (observe-se que este ponto tem curvatura igual a π como os outros). A irregularidade é o ponto $q = \pi_{\mathcal{P}}(0)$; observe-se que $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(q) = \{0\} \cup \{c_k\}_{k \geq 0}$, onde $c_k = 2 \sum_{n>k} a_n$. Por outro lado já o conjunto $\mathcal{V}_+$ foi ordenado de forma que $\lim_{k \rightarrow +\infty} p_k = q$, pois $d^{\mathcal{P}}(p_k, q) = a_k$.

Figura 3.4: Esfera de papel do modelo base e sua cicatriz

Considere-se a multicurva $\Gamma = (\gamma_k)_{k \geq 0}$ que separa à S_{∞} numa sequência de calças como foi explicado na seção anterior. Neste caso cada geodésica γ_k separa os conjuntos de furos $\{p_{-1}, p_0, p_1, \dots, p_k\}$ e $\{q\} \cup \{p_{k+1}, p_{k+2}, \dots\}$. A figura 3.5 mostra um esboço de uma destas geodésicas no espaço S_{∞} .

Procuramos estimar o comprimento hiperbólico $\ell_{\infty}(\gamma_k)$ para cada $k \geq 0$. Lembre-se que não são conhecidas as representações matriciais dos elementos $g_k \in G_{\infty}$, logo não é possível usar a Proposição 1.3.1 iv), para calcular exatamente qual é o valor deste comprimento. A continuação será explicado o argumento que servirá para conseguir as estimativas de $\ell_{\infty}(\gamma_k)$; este argumento possivelmente é devido à L. Ahlfors ou A. Beurling. Lembre-se que num anel de módulo finito A existe uma única geodésica α_A cujo comprimento é $\ell_A(\alpha_A) = \frac{\pi}{\text{Mod } A}$.

Definição 3.2.1. Seja S uma superfície hiperbólica e $A \hookrightarrow S$ uma subsuperfície anular mergulhada em S . Se $\gamma \subset S$ é uma curva fechada diz-se que o anel A é *reduzível* à γ se as curvas γ e a curva α_A são livremente homotópicas em S .

Como numa superfície hiperbólica S uma geodésica fechada sempre realiza o menor comprimento na sua classe de homotopia, se $A \subset S$ é um anel reduzível à geodésica fechada simples $\gamma \subset S$, então $\ell_S(\gamma) \leq \ell_S(\alpha_A)$. Sendo neste caso A uma subsuperfície de S , a Proposição 1.2.23 implica que

Figura 3.5: Possível desenho da geodésica γ_3 em azul. No desenho a esquerda pode-se ver em vermelho as componentes de $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_3)$

$\ell_S(\alpha_A) \leq \ell_A(\alpha_A)$. Usando agora a Proposição 1.3.3, considere-se uma densidade Boreliana $\rho \in m_A$ (Lembre-se que $\mathcal{A}_\rho(A)$ denota a ρ -área de A e $\mathcal{L}_\rho(A)$ denota a ρ -distância entre as componentes de fronteira de A), logo,

$$\text{Mod } A \geq \frac{\mathcal{L}_\rho(A)^2}{\mathcal{A}_\rho(A)}$$

Combinando as três desigualdades anteriores hemos demonstrado o seguinte resultado.

Lema 3.2.2. *Sejam S uma superfície hiperbólica e $\gamma \subset S$ uma geodésica fechada simples. Se $A \subset S$ é um anel redutível à γ e se $\rho(z)|dz|$ é uma densidade Boreliana em A , então,*

$$\ell_S(\gamma) \leq \pi \cdot \frac{\mathcal{A}_\rho(A)}{\mathcal{L}_\rho(A)^2} \quad (3.1)$$

□

Voltando ao modelo base S_∞ precisa-se conseguir para cada $k \geq 0$, um subanel $A_k \subset S_\infty$ e uma densidade $\rho_k \in m_{A_k}$, ambas convenientes em algum sentido, de forma que o anel A_k seja redutível à geodésica γ_k , e assim fazer úso da desigualdade 3.1 do lema acima. Aqui tal vez a parte delicada seja a escolha da densidade Boreliana de forma que a estimativa seja "boa" e ao mesmo tempo fácil de calcular. Por exemplo, a densidade Euclideana $\rho_e(z)|dz|$ definida sobre um espaço de papel $S_{\mathcal{P}}$ por $\rho_e(z) = 1$, para todo $z \in S_{\mathcal{P}}$, resulta ser a densidade mais natural num espaço de papel pela seguinte razão: esta indúz a distância $d^{\mathcal{P}}$ do $S_{\mathcal{P}}$ e para todo Boreliano $A \subset S_{\mathcal{P}}$, a ρ_e -área de A é a área Euclideana de $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(A) \subset P$. Para a primeira curva de Γ_∞ , a geodésica γ_0 , considere-se a banda $\hat{A}_0 = \{z \in P \mid \frac{L-s}{2} < \text{Im } z < \frac{L+s}{2}\}$, onde $s \in (0, L]$, logo o anel $A_0 := \pi_{\mathcal{P}}(\hat{A}_0)$ (Observe-se que A_0 separa p_{-1} e p_0 dos outros furos) é redutível à γ_0 , com o qual tem-se $\mathcal{A}_{\rho_e}(A_0) = s \cdot L$ e $\mathcal{L}_{\rho_e}(A_0) = s$. Logo a desigualdade 3.1 implica que $\ell_\infty(\gamma_0) \leq \pi \frac{L}{s}$; em particular para $s = L$, $\ell_\infty(\gamma_0) \leq \pi$.

Para cada $k \geq 1$, observe-se que o conjunto D_k definido como o menor sub-continuum em $G_{\mathcal{P}}$ que contém os pontos $q, p_{k+1}, p_{k+2}, \dots$, é a união dos arcos em $G_{\mathcal{P}}$ que conectam cada ponto 1-cônico p_n com o ponto irregular q , para $n > k$, logo $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_k) = [0, c_k] \cup \{c_{k-1}, \dots, c_1, c_0\}$. Por outro lado $d^{\mathcal{P}}(E_k, D_k) = d^{\mathcal{P}}(p_k, q) = a_k$, assim que, para $0 < r \leq a_k$, o anel $A_k = B_{d^{\mathcal{P}}}(D_k, r) \setminus D_k$ separa ambos conjuntos, sendo assim o anel A_k é redutível à γ_k . Usando novamente a densidade ρ_e , tem-se $\mathcal{L}_{\rho_e}(A_k) = r$ e, como $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(A_k) = R \cup C_k \cup C_{k-1} \cup \dots \cup C_1 \cup C_0$, onde $R = [0, c_k] \times (0, r)$, $C_j = B_P(c_j, r) \setminus \{c_j\}$ para $j = 0, 1, \dots, k-1$, e $C_k = B_P(c_k, r) \cap \{z \in P \mid \text{Re } z > c_k\}$, então

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\rho_e}(A_k) &= \mathcal{A}_{\text{eucl.}}(R) + \sum_{j=0}^k \mathcal{A}_{\text{eucl.}}(C_j) \\
&= c_k \cdot r + k \cdot \frac{\pi}{2} \cdot r^2
\end{aligned}$$

Logo usando novamente 3.1, tem-se $\ell_\infty(\gamma_k) \leq M_k = \pi\left(\frac{c_k}{r} + k\frac{\pi}{2}\right)$, para todo $k \geq 1$. Ainda foi obtido uma estimativa para $\ell_\infty(\gamma_k)$ com a densidade Euclideana ρ_e , é claro que as estimativas são insuficientes para entender o comportamento assintótico da sequência de comprimentos $(\ell_\infty(\gamma_k))_{k \geq 1}$. Em efeito $M_k \rightarrow +\infty$ quando $k \rightarrow +\infty$, mas isto não implica necessariamente que os comprimentos das curvas γ_k crescem também junto com as cotas M_k . O problema aqui está no número de peças circulares $C_0, \dots, C_k$, os quais crescem proporcionalmente ao índice k ; ainda os raios das peças sejam cada vez menor, a relação área/raio da desigualdade 3.1 faz que o valor M_k seja também proporcional à k .

Para melhorar as estimativas das curvas γ_k , procuraremos densidades que de algum jeito controlem o crescimento das componentes do conjunto $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_k)$ para evitar um resultado similar as estimativas feitas com a densidade ρ_e . Considere-se $k \geq 1$ e um número real $t > 1$ arbitrário. Tome-se agora o anel A_k^t , dado por

$$A_k^t := B_{d^{\mathcal{P}}}(D_k, a_k) \setminus \overline{B}_{d^{\mathcal{P}}}(D_k, \frac{a_k}{t^k}),$$

o qual novamente é redutível à geodésica γ_k . Neste caso $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(A_k^t) = R^t \cup \bigcup_{j=0}^k C_j^t$, sendo

$$R^t = [0, c_k] \times (\frac{a_k}{t^k}, a_k)$$

$$C_0^t = \{re^{i\theta} \mid \frac{a_k}{t^k} < r < a_k, \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi\}$$

$$C_k^t = \{re^{i\theta} \mid \frac{a_k}{t^k} < r < a_k, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

$$C_j^t = \{re^{i\theta} \mid \frac{a_k}{t^k} < r < a_k, 0 \leq \theta \leq \pi\}, j = 1, 2, \dots, k-1.$$

Na figura 3.6 é mostrado por exemplo um desenho do anel A_3^t

Em vez de usar a densidade ρ_e em A_k^t , tome-se a função $\rho_k^t : A_k^t \rightarrow [0, +\infty)$ definida por:

$$\rho_k^t(z) := \begin{cases} \frac{1}{d^{\mathcal{P}}(z, D_k)} ; & \text{se } \pi_{\mathcal{P}}^{-1}(z) \in \bigcup_{j=0}^k C_j^t \\ \frac{k \cdot \log t}{a_k(1 - \frac{1}{t^k})} ; & \text{se } \pi_{\mathcal{P}}^{-1}(z) \in R^t \end{cases}$$

Observe-se que a densidade ρ_k^t é somente descontínua na fronteira relativa ao anel da peça retangular R^t , pelo qual ρ_k^t é uma função Borel-mensurável. A vantagem da densidade ρ_k^t está nas regiões circulares C_j^t a fórmula $\frac{1}{d^{\mathcal{P}}(z, D_k)}$ pois alí a relação ρ_k^t -área/ ρ_k^t -largura ao quadrado é proporcional à $\frac{1}{k}$. Na parte retangular R^t a densidade ρ_k^t é a densidade plana multiplicada por o fator $\frac{k \cdot \log t}{a_k(1 - \frac{1}{t^k})}$; a escolha deste fator particular será esclarecido na prova do seguinte lema.

Lema 3.2.3. Para todo $k \geq 1$ e $t > 1$, $\mathcal{L}_{\rho_k^t}(A_k^t) = k \cdot \log t$.

Demonstração. Considere-se a região circular C_j^t , $1 \leq j < k$. Cada $z \in C_j^t$ pode-se escrever em coordenadas polares como $z = c_j + r \cdot e^{i\theta}$, com $\frac{a_k}{t^k} < r < a_k$ e $0 \leq \theta \leq \pi$. Observe-se que para

Figura 3.6: Anel A_3^t em azul. Em vermelho mostra-se as componentes de $\pi_P^{-1}(D_3)$

$z \in C_j^t$, $d(z, D_k) = |z - c_j| = r$. Fixando um ângulo $\theta_0 \in [0, \pi]$, seja $\beta_\theta(s) = c_j + s \cdot e^{i\theta_0}$, $\frac{a_k}{t^k} \leq s \leq a_k$, isto é, o segmento que conecta as duas componentes de $\partial C_i^t \cap \partial \pi^{-1}(A_k^t)$, na semi-reta que parte de c_j fazendo um ângulo θ_0 com o eixo real, ver figura 3.7 à esquerda.

Figura 3.7: Região circular C_j^t e região retangular R^t

Logo o ρ_k^t -comprimento de β_{θ_0} é

$$\int_{\beta} \rho_k^t(z) |dz| = \int_{\beta} \frac{|dz|}{d^P(z, D_k)} = \int_{\frac{a_k}{t^k}}^{a_k} \frac{ds}{s} = \log \frac{a_k}{a_k/t^k} = k \cdot \log t$$

Se $\bar{\beta}(s) = c_j + r(s) \cdot e^{i\theta(s)} \in C_j^t$, $s \in I$ é qualquer outro caminho que conecta as mesmas duas componentes, assumindo sem perda de generalidade que $r'(s) \geq 0$, o ρ_k^t -comprimento de $\bar{\beta}(s)$ é,

$$\int_{\bar{\beta}} \rho_k^t(z) |dz| = \int_I \frac{|r'(s) + i \cdot r(s) \cdot \theta'(s)|}{r(s)} ds \geq \int_I \frac{r'(s)}{r(s)} ds = k \cdot \log t$$

Logo $\mathcal{L}_{\rho_k^t}(C_j^t) = k \cdot \log t$, para todo $1 \leq j \leq k-1$. Similarmente se prova que $\mathcal{L}_{\rho_k^t}(C_0^t) = \mathcal{L}_{\rho_k^t}(C_k^t) = k \cdot \log t$. Em R^t , a métrica ρ_k^t é a mesma métrica plana ρ_e , mas multiplicada por um fator $\frac{k \cdot \log t}{a_k(1 - \frac{1}{t^k})}$.

Agora ficará claro por que a escolha desse fator: $\mathcal{L}_{\rho_e}(R^t) = a_k(1 - \frac{1}{t^k})$, logo $\mathcal{L}_{\rho_k^t}(R^t) = k \cdot \log t$. A maneira como são colados as diferentes peças do anel mostra que $\mathcal{L}_{\rho_k^t}(A_k^t) = k \cdot \log t$. $\square$

A ρ_k^t -área do anel A_k^t é calculado no seguinte lema.

Lema 3.2.4. Para todo $k \geq 1$ e $t > 1$, $\mathcal{A}_{\rho_k^t}(A_k^t) = \frac{2k^2 \cdot \log^2 t}{1 - \frac{1}{t^k}} \cdot \frac{\sum_{n>k} a_n}{a_k} + \pi \cdot k^2 \cdot \log t$

Demonstração. A área euclideana de R^t é $A_{\rho_e}(R^t) = 2 \cdot a_k \cdot (1 - \frac{1}{t^k}) \sum_{n>k} a_n$. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\rho_k^t}(R^t) &= \frac{k^2 \cdot \log^2 t}{a_k^2 (1 - \frac{1}{t^k})^2} \cdot \mathcal{A}_{\rho_e}(R^t) \\ &= \frac{2 \cdot k^2 \cdot \log^2 t}{1 - \frac{1}{t^k}} \cdot \frac{\sum_{n>k} a_n}{a_k} \end{aligned}$$

Para $1 \leq j \leq k-1$, novamente escrevendo os pontos de C_j^t como $z = c_j + r \cdot e^{i \cdot \theta}$ tem-se,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\rho_k^t}(C_j^t) &= \iint_{C_j^t} \frac{dx dy}{d^P(z, D_k)^2} \\ &= \int_0^\pi \int_{\frac{a_k}{t^k}}^{a_k} \frac{1}{r^2} \cdot r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi d\theta \cdot \int_{\frac{a_k}{t^k}}^{a_k} \frac{dr}{r} \\ &= \pi \cdot k \cdot \log t \end{aligned}$$

Similarmente $\mathcal{A}_{\rho_k^t}(C_j^t) = \frac{\pi}{2} \cdot k \cdot \log t$, para $j = 0, k$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\rho_k^t}(A_k^t) &= \mathcal{A}_{\rho_k^t}(R^t) + \sum_{j=0}^k \mathcal{A}_{\rho_k^t}(C_j^t) \\ &= \frac{k^2 \cdot \log^2 t}{1 - \frac{1}{t^k}} \cdot \frac{\sum_{n>k} a_n}{a_k} + \pi \cdot k^2 \log t \end{aligned}$$

□

Feitos os cálculos da ρ_k^t -área e a ρ_k^t -largura do anel A_k^t , aplicando a desigualdade 3.1 do Lema 3.2.2, tem-se:

$$\ell_\infty(\gamma_k) \leq \pi \cdot \frac{\mathcal{A}_{\rho_k^t}(A_k^t)}{\mathcal{L}_{\rho_k^t}(A_k^t)^2} = \pi \left(\frac{2 \sum_{n>k} a_n}{a_k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{t^k}} + \frac{\pi}{\log t} \right)$$

Como a desigualdade acima é válida para qualquer valor do parâmetro $t > 1$, fazendo agora $t \rightarrow +\infty$, temos provado o seguinte resultado:

Teorema 3.2.5. No modelo base S_∞ tem-se, para cada $k \geq 1$,

$$\ell_\infty(\gamma_k) \leq 2\pi \cdot \frac{1}{a_k} \cdot \sum_{n>k} a_n \quad (3.2)$$

□

A melhora obtida na estimativa anterior com relação a densidade Euclideana é clara: tomando $r = a_k$ na estimativa com ρ_e , esta fica igual à $M_k = 2\pi \cdot \frac{1}{a_k} \cdot \sum_{n>k} a_n + \frac{\pi^2}{2} \cdot k$, onde o termo $\frac{\pi^2}{2} \cdot k$

corresponde a contribuição dada pelas peças circulares do anel, enquanto que com a densidade ρ_k^t , tal contribuição fica anulada ao fazer $t \rightarrow +\infty$

Exemplo 3.2.6. Seja $0 < \lambda < 1$ e suponha que $a_n \asymp \lambda^n$, é dizer, existem $A_0, A_1 > 0$ tais que para todo $n \geq 1$,

$$A_0 \cdot \lambda^n \leq a_n \leq A_1 \cdot \lambda^n,$$

Logo para cada $k \geq 1$,

$$\ell_\infty(\gamma_k) \leq 2\pi \cdot \frac{A_1}{A_0} \cdot \frac{\sum_{n>k} \lambda^n}{\lambda^k} = \frac{A_1}{A_0} \cdot \frac{2\lambda\pi}{1-\lambda}$$

Em particular se $a_n = \frac{1}{2^n}$, $n \geq 1$, então $\ell_\infty(\gamma_k) \leq 2\pi$, para cada $k \geq 1$.

□

Exemplo 3.2.7. Suponha agora que $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, então $\sum_{n>k} a_n = \frac{1}{k}$, com o qual, para cada $k \geq 1$,

$$\ell_\infty(\gamma_k) \leq 2k\pi$$

Neste exemplo não fica claro se $\{\ell_\infty(\gamma_k)\}_k$ seria limitado ou não.

□

Em vista dos dois exemplos anteriores, gostaríamos de um critério simple que permita determinar quando a coleção $\{\ell_\infty(\gamma_k) / k \geq 1\}$ está limitada superiormente. Uma versão do Lema de Stolz-Cesàro fornecerá este critério; ainda sua prova seja elementar, esta será feita a continuação.

Lema 3.2.8 (Stolz-Cesàro). *Sejam $(a_k)_{k \geq 1}$, $(b_k)_{k \geq 1}$ duas seqüências de números reais positivos que convergem à 0 e suponha que $(a_k)_{k \geq 1}$ é estritamente decrescente.*

$$\text{Se } \limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{b_k - b_{k+1}}{a_k - a_{k+1}} = \lambda, \text{ então } \limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{b_k}{a_k} \leq \lambda.$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, considere-se $N \geq 1$ tal que para todo $k \geq N$,

$$b_k - b_{k+1} \leq (\lambda + \varepsilon)(a_k - a_{k+1})$$

Logo para $n > k \geq N$ qualquer,

$$b_k - b_{k+1} = \sum_{i=k}^n (b_i - b_{i+1}) \leq (\lambda + \varepsilon) \sum_{i=k}^n (a_i - a_{i+1}) = (\lambda + \varepsilon)(a_k - a_{k+1})$$

Fazendo $n \rightarrow +\infty$, tem-se $\frac{b_k}{a_k} \leq \lambda + \varepsilon$, para qualquer $k \geq N$.

Sendo ε arbitrário, tem-se $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{b_k}{a_k} \leq \lambda$.

□

Proposição 3.2.9. *Na esfera de papel furada S_∞ do modelos base,*

i) *Se $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$, então $\sup_{k \geq 1} \ell_\infty(\gamma_k) < +\infty$.*

ii) *Se $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 0$, então $\lim_{k \rightarrow +\infty} \ell_\infty(\gamma_k) = 0$.*

Demonstração. Considere-se $b_k := \sum_{n>k} a_n$, logo $b_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow +\infty$. Lembre-se que a sequência $(a_k)_{k \geq 1}$ é decrescente. Como para todo $k \geq 1$

$$\frac{b_k - b_{k+1}}{a_k - a_{k+1}} = \frac{a_{k+1}}{a_k - a_{k+1}} = \frac{\frac{a_{k+1}}{a_k}}{1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}},$$

$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lambda < 1$ implica que $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{b_k - b_{k+1}}{a_k - a_{k+1}} \leq \frac{\lambda}{1 - \lambda}$, logo pelo Lema 3.2.8 e pela desigualdade 3.2,

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \ell_\infty(\gamma_k) \leq 2\pi \limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{b_k}{a_k} \leq \frac{2\pi\lambda}{1 - \lambda}$$

Assim, $\sup_{k \geq 1} \ell_\infty(\gamma_k) < +\infty$ e, no caso $\lambda = 0$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \ell_\infty(\gamma_k) = 0$. □

Exemplo 3.2.10. Sejam $A_0, A_1 > 0$ tais que para todo $k \geq 1$,

$$\frac{A_0}{k!} \leq a_k \leq \frac{A_1}{k!}$$

Neste caso $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{A_1}{A_0} \cdot \frac{1}{k+1} = 0$, logo $\lim_{k \rightarrow +\infty} \ell_\infty(\gamma_k) = 0$. □

Exemplo 3.2.11. Se a sequência $(a_k)_{k \geq 1}$ decresce à 0 polinomialmente, isto é, existem $A_0, A_1 > 0$ e $s > 1$ tais que para todo $k \geq 1$,

$$\frac{A_0}{k^s} \leq a_k \leq \frac{A_1}{k^s},$$

então tem-se que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_k} \cdot \sum_{n>k} a_n &\geq \frac{A_0}{A_1} \cdot \sum_{n>k} \left(\frac{k}{n}\right)^s \\ &= \frac{A_0}{A_1} \cdot \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\left(1 + \frac{n}{k}\right)^s} \\ &\geq \frac{A_0}{A_1} \cdot \sum_{n=1}^k \frac{1}{\left(1 + \frac{n}{k}\right)^s} \\ &\geq \frac{A_0}{A_1 \cdot 2^s} \cdot k \end{aligned}$$

Assim neste caso $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_k} \cdot \sum_{n>k} a_n = +\infty$, pelo qual o critério 3.2.9 não permite decidir se a família $\{\ell_\infty(\gamma_k) / k \geq 1\}$ está limitada superiormente. Cresceram os comprimentos das geodésicas γ_k para infinito neste caso? Se a resposta for afirmativa, as curvas crescem no máximo linearmente; em efeito, para todo $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_k} \cdot \sum_{n>k} a_n &\leq \frac{A_1}{A_0} \cdot \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\left(1 + \frac{n}{k}\right)^s} \\
&= \frac{A_1}{A_0} \cdot \sum_{i \geq 1} \sum_{j=1}^k \frac{1}{\left(i + \frac{j}{k}\right)^s} \\
&\leq \frac{A_1}{A_0} \cdot \sum_{i \geq 1} \frac{k}{\left(i + \frac{1}{k}\right)^s} \\
&\leq \frac{A_1}{A_0} \cdot k \cdot \sum_{i \geq 1} \frac{1}{i^s}
\end{aligned}$$

$$\text{Logo } \limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ell_\infty(\gamma_k)}{k} \leq \frac{2\pi \cdot A_1}{A_0} \cdot \zeta(s), \text{ sendo } \zeta(s) := \sum_{i \geq 1} \frac{1}{i^s}.$$

□

Fechamos esta seção com um corolário que permite determinar se o modelo Fuchsiano da flauta S_∞ no modelo base é do primeiro tipo. Este é consequência imediata da Proposição 3.2.9 e da proposição 1.4.3.

Corolário 3.2.12. *Se $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$, então o modelo Fuchsiano $\mathbf{G}_\infty$ de S_∞ é um grupo Fuchsiano do primeiro tipo.*

□

3.3 Estimativas superiores das coordenadas de comprimento

Nesta seção procura-se generalizar o Teorema 3.2.5 para o caso de uma esfera de papel furada qualquer associada à dobradura $(P, \mathcal{P})$. Suponha-se que $q^1, \dots, q^m$ são os pontos irregulares de $S_{\mathcal{P}}$ e lembre-se que Γ_∞ denota a multicurva que decompoe a S_∞ em calças. Uma vez fixado um superíndice $j = 1, \dots, m$, precisa-se conseguir estimativas superiores para a família $\{\ell_\infty(\gamma_k^j)\}_{k \geq 0}$, pelo menos para todo k suficientemente grande. A ideia novamente consiste em fazer uso do Lema 3.2.2 construindo para cada k uma região anular $A_{j,k}^t \subset S_\infty$ redutível à γ_k^j e uma densidade $\rho_{j,k}^t \in m_{A_{j,k}^t}$, sendo $t > 1$ um parâmetro real conveniente para otimizar a estimativa dada pelo lema. No modelo base, o anel $A_k^t = A_{1,k}^t$ foi definido como $A_k^t = B_{d^{\mathcal{P}}}(D_k, e_k) \setminus \overline{B}_{d^{\mathcal{P}}}(D_k, \frac{e_k}{t^k})$, onde e_k é a $d^{\mathcal{P}}$ -distância entre os conjuntos E_k e D_k ; neste caso a estimativa superior de $\ell_\infty(\gamma_k)$ depende do quociente $\frac{m_k}{e_k}$, onde $m_k = m_{G_{\mathcal{P}}}(D_k) = \sum_{n>k} a_n$. Por tal razão é natural esperar no caso geral que, ao definir $A_{j,k}^t$ como o conjunto $B_{d^{\mathcal{P}}}(D_k^j, e_k^j) \setminus \overline{B}_{d^{\mathcal{P}}}(D_k^j, \frac{e_k^j}{t^{\#_k^j}})$, sendo $\#_k^j$ uma potencia adequada, e ao usar o Lema 3.2.2 com $\rho_{j,k}^t(z)|dz|$ similar a densidade definida na seção anterior, pode-se conseguir uma estimativa da curva γ_k^j proporcional ao quociente $\frac{m_{G_{\mathcal{P}}}(D_k^j)}{e_k^j}$, onde e_k^j é definido por:

$$e_k^j := d_{\mathcal{P}}(D_k^j, E_k^j)$$

Aquí é necessario ser cuidadoso com o argumento pois ao ser agora P um multipolígono qualquer e ao estar $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_k^j)$ contido possivelmente em diferentes lados de P , o número e_k^j tal vez não seja suficientemente pequeno para garantir que o conjunto $A_{j,k}^t$ como foi definido acima seja uma região anular, com o qual o argumento inteiro falha. Assim, na hora de construir o anel $A_{j,k}^t$, este dependerá de um raio h_k^j a definir mais na frente o qual será menor ou igual que a distância e_k^j . Para simplificar a notação, denote-se por m_k^j o valor:

$$m_k^j := m_{G_P}(D_k^j)$$

Lembre-se que $m_{G_P}(D) := m_{\partial P}(\pi_P^{-1}(D))$, para todo $D \subset G_P$ Borel-mensurável, onde $m_{\partial P}$ denota a medida de Lebesgue 1-dimensional em ∂P .

Proposição 3.3.1. *Para todo $j = 1, 2, \dots, m$,*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} e_k^j = \lim_{k \rightarrow +\infty} m_k^j = 0.$$

Demonstração. Como $\lim_{k \rightarrow +\infty} p_k^j = q^j$ e como,

$$0 \leq e_k^j = d^P(D_k^j, E_k^j) \leq d^P(q^j, p_k^j),$$

é claro que $\lim_{k \rightarrow +\infty} e_k^j = 0$. Para ver que $\lim_{k \rightarrow +\infty} m_k^j = 0$ basta provar que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \text{diam}_{G_P} D_k^j = 0$ pois, como $D_k^j \supset D_{k+1}^j$, $k \geq 1$, então $\bigcap_{k \geq 1} D_k^j = \{q^j\}$, com o qual,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} m_k^j = \lim_{k \rightarrow +\infty} m_{G_P}(D_k^j) = m_{G_P}(\{q^j\}) = 0$$

Demostremos então o seguinte: Para todo $k \geq 1$ e $x \in D_k^j$, $d_{G_P}(q^j, x) \leq \max_{n > k} d_{G_P}(q^j, p_n^j)$. Seja $x_0 \in D_k^j$ um ponto tal que $d_{G_P}(q^j, x_0) \leq \max_{x \in D_k^j} d_{G_P}(q^j, x)$ e $\delta : [0, 1] \rightarrow D_k^j$ um caminho com extremidades $\delta(0) = x_0$ e $\delta(1) = q^j$ que realiza esta distância. O Lema 2.3.4 implica que o ponto x_0 é uma extremidade do dendrito D_k^j , logo existe $t_1 \in (0, 1]$ tal que $\delta(t)$ é um ponto planar de S_P para $0 < t < t_1$ e $\delta(t_1)$ é um ponto não-planar de S_P , com o qual $\delta([0, t_1])$ é um aberto em D_k^j que não o separa. Portanto $A + D_k^j \setminus \delta([0, t_1])$ é um subcontinuum próprio de D_k^j . Se $x_0 \neq p_n^j$ para $n > k$, então A contém $\{q^j\} \cup \{p_n^j\}_{n > k}$ o qual contradiz a definição do continuum D_k^j . Logo $x_0 = p_n^j$ para algum $n > k$. □

Como $m_k^j \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow +\infty$, podemos tomar K_0 suficientemente grande de forma que para todo $k \geq K_0$, cada componente conexa de $\pi_P^{-1}(D_k^j)$ seja um segmento ou um ponto contido no máximo em dois lados consecutivos do multipolígono P . Assim, se escrevemos $\pi_P^{-1}(D_k^j)$ como a união $\pi_P^{-1}(D_k^j) = \bigsqcup_{i \in I} L_i$ de suas componentes conexas (Aqui será excluído da notação os índices j, k , abusando um pouco do idioma), cada componente L_i é um segmento poligonal com extremidades a_i^- e a_i^+ , sendo a primeira a extremidade esquerda e a segunda a direita, relativo à orientação do ∂P , e podemos clasificar cada uma destas componentes em quatro tipos:

Tipo 1: L_i é um ponto, com o qual $a_i^- = a_i^+ = a_i$.

Tipo 2: L_i é um segmento cujo interior está contido num lado só do multipolígono P .

Tipo 3: L_i é um segmento cujo interior está contido em dois lados do multipolígono P e contém um único vértice v_i de P com ângulo $\phi_i := \xi_P(v_i) > \pi$.

Tipo 4: L_i é um segmento cujo interior está contido em dois lados do multipolígono P e contém um único vértice v_i de P com ângulo $\phi_i := \xi_P(v_i) < \pi$.

Em consequência o conjunto de índices I pode-se escrever como a união $I = I_1 \sqcup I_2 \sqcup I_3 \sqcup I_4$ dependendo do tipo da componente L_i . Observe-se que no modelo base só existem componentes do

tipo 1 e 2. No espaço de papel da figura 3.8, para $k = 5$ tem-se $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_5^1) = \bigsqcup_{i=1}^7 L_i$, onde $1, 2, 4, 6 \in I_1$, $5 \in I_2$, $3 \in I_3$ e $7 \in I_4$.

Figura 3.8: Em vermelho mostra-se as componentes de $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_5^1)$

Para construir o anel $A_{j,k}^t$ e posteriormente a densidade $\rho_{j,k}^t$, gostaríamos ter uma boa descrição dos discos $B_P(L_i, h)$, para $h > 0$ pequeno. Nos casos das componentes L_i do tipo 1 e 2 e até do tipo 3 os discos $B_P(L_i, h)$ são relativamente simples como mostra a figura 3.9: é fácil decompor estes discos em peças retangulares e peças circulares. Quando $i \in I_4$, esta divisão do disco $B_P(L_i, h)$ não fica muito clara se o ângulo ϕ_i é pequeno, ver figura 3.10. Observe-se que esta diferenciação entre peças retangulares e circulares foi chave para a definição da densidade ρ_k^j no modelo base.

Figura 3.9: O disco $B_P(L_i, h)$ com centro L_i (em vermelho) do tipo 1, 2 e 3

Figura 3.10: $B_P(L_i, h)$ para uma componente L_i do tipo 4 e h grande.

Para o caso geral também procuramos fazer esta divisão nos discos $B_P(L_i, h)$ em partes circulares

e retangulares, indiferentemente do tipo da componente L_i , pelo qual, além dos valores m_k^j e e_k^j já definidos, usaremos o seguinte parâmetro: Se $I_4 = \emptyset$, defina-se $f_k^j := \infty$ e se $I_4 \neq \emptyset$, então,

$$f_k^j := \frac{1}{2} \cdot \min_{i \in I_4} \left\{ d_P(v_i, a_i^-) \cdot \tan\left(\frac{\phi_i}{2}\right), d_P(v_i, a_i^+) \cdot \tan\left(\frac{\phi_i}{2}\right) \right\}$$

Por último, defina-se:

$$h_k^j := \min\{e_k^j, f_k^j\}$$

Uma vez definidos todos estes parâmetros podemos enunciar o resultado principal desta seção.

Teorema 3.3.2 (Critério para as estimativas de $\ell_\infty(\gamma_k^j)$). *Considere-se uma esfera de papel furada S_∞ associada à esfera de papel S_P com m pontos irregulares. Então existe $K_0 \geq 1$ tal que para todo $1 \leq j \leq m$ e $k \geq K_0$,*

$$\ell_\infty(\gamma_k^j) \leq \pi \cdot \frac{m_k^j}{h_k^j} \quad (3.3)$$

A prova deste resultado, ainda o argumentos seja o mesmo usado no modelo base, precisa de alguns lemas técnicos, pelo qual será desenvolvida na próxima seção. Por enquanto mostraremos no que resta da seção alguns exemplos onde é aplicado o critério acima.

Exemplo 3.3.3. Seja P um triângulo isosceles cujos vértices são v, x_1 e x_2 , sendo o lado com extremidades x_1 e x_2 a base do triângulo e os lados $[v, x_1]$ e $[v, x_2]$ os lados de igual comprimento. Suponha que o ângulo no vértice v é $\phi \in (0, \pi)$. Considere-se $\mathcal{P} = \{\langle \alpha_n, \alpha'_n \rangle\}_{n \geq -1}$ a dobradura de papel mostrada na figura 3.11, onde $|\langle \alpha_{2n-1}, \alpha'_{2n-1} \rangle| = |\langle \alpha_{2n}, \alpha'_{2n} \rangle| = \frac{1}{2^n}$, para cada $n \geq 1$.

Figura 3.11: Esfera de papel do exemplo 3.3.3

Aquí os pares $\alpha_n \cup \alpha'_n$ estão contidos no lado $[v, x_1]$ quando n seja ímpar e no lado $[v, x_2]$ quando n seja par. O espaço de papel S_P tem uma única irregularidade $q = \pi_P(v)$. Para cada $k \geq 1$, observe-se que,

$$\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_{2k-1}) = [v, x_{2k+1}] \cup [v, x_{2k}] \cup \{w, x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}\},$$

$$\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_{2k}) = [v, x_{2k+1}] \cup [v, x_{2k+2}] \cup \{w, x_1, x_2, \dots, x_{2k}\},$$

Pelo qual, $m_{2k-1} = 4 \sum_{n>k} \frac{1}{2^n} + \frac{2}{2^k} = \frac{6}{2^k}$ e $m_{2k} = 4 \sum_{n>k} \frac{1}{2^n} = \frac{4}{2^k}$. Tem-se também que $e_{2k-1} = e_{2k} = d^{\mathcal{P}}(p_{2k-1}, q) = \frac{1}{2^k}$ e $f_{2k-1} = f_{2k} = \frac{1}{2} d^{\mathcal{P}}(v, x_{2k+1}) \cdot \tan \frac{\phi}{2} = \frac{1}{2^k} \tan \frac{\phi}{2}$. Assim $h_k = e_k$ se, e somente se, $\phi \geq \frac{\pi}{2}$. Neste caso, aplicando o Teorema 3.3.2 tem-se,

$$\ell_{\infty}(\gamma_{2k-1}) \leq 6\pi \text{ e } \ell_{\infty}(\gamma_{2k}) \leq 4\pi$$

Se em cambio $\phi < \frac{\pi}{2}$, então para todo k suficientemente grande,

$$\ell_{\infty}(\gamma_{2k-1}) \leq \frac{6\pi}{\tan \frac{\phi}{2}} \text{ e } \ell_{\infty}(\gamma_{2k}) \leq \frac{4\pi}{\tan \frac{\phi}{2}}$$

□

Exemplo 3.3.4. Considere-se P o quadrado unitario e $\mathcal{P} = \bigcup_{j=1,2,3,4} (\{\langle \alpha_k^j, \alpha_k^{j'} \rangle\}_{k \geq 1} \cup \{\langle \beta_k^j, \beta_k^{j'} \rangle\}_{k \geq 0})$

o pareamento mostrado na figura 3.12, onde cada superíndice j corresponde com uma subfamília de pareamentos que cobrem cada lado e estos são os mesmos a menos de uma rotação. Os subsegmentos α_k^j e $\alpha_k^{j'}$ produzem um ponto de dobradura p_k^j e o segmento $\alpha_k^j \cup \alpha_k^{j'}$ ubica-se entre os subsegmentos β_{k-1}^j e β_k^j , ficando o primeiro na esquerda e o segundo na direita (relativo à orientação do ∂P); a sua vez, o subsegmento $\beta_{k-1}^{j'}$ ubica-se na direita do subsegmento $\beta_k^{j'}$. Sejam $a, b \in (0, 1)$ tais que para cada $k \geq 1$ e $j = 1, 2, 3, 4$, $|\langle \alpha_k^j, \alpha_k^{j'} \rangle| = a^k$ e $|\langle \beta_k^j, \beta_k^{j'} \rangle| = b^k$. Observe-se que $S_{\mathcal{P}}$ tem quatro pontos irregulares q^j , $j = 1, 2, 3, 4$, um em cada lado do quadrado, os quais são pontos de acumulação de pontos 1-cônicos e 3-cônicos. Logo a esfera furada S_{∞} corresponde com uma gaita de fole justa de ordem 4.

Fixe um superíndice j e observe que para todo $k \geq 0$, $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_k^j)$ consiste num único segmento contido no lado j , logo é do tipo 2. Assim tem-se $h_k^j = e_k^j = b^k$. Por outro lado é fácil ver que $m_k^j = 2 \sum_{n>k} b^n + 2 \sum_{n>k} a^n$. Portanto,

$$\ell_{\infty}(\gamma_k^j) \leq 2\pi \left[\frac{b}{1-b} + \left(\frac{a}{b}\right)^k \frac{a}{1-a} \right]$$

Observe-se que se $a \leq b$, então todas as curvas tem comprimento limitado por acima.

□

O seguinte resultado é a generalização do Corolario 3.2.12 no modelo base para o caso geral de uma esfera de papel furada qualquer.

Proposição 3.3.5. *Seja $S_{\mathcal{P}}$ uma esfera de papel cujo conjunto de pontos irregulares $\mathcal{Q}$ é finito. Com a notação da seção 3.1 e desta seção, suponha que para todo $1 \leq j \leq m$,*

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{m_k^j}{h_k^j} < +\infty$$

Então o modelo Fuchsiano $\mathbf{G}_{\infty}$ da esfera furada S_{∞} é do primeiro tipo. Além disso, a estrutura complexa de $S_{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{Q}$ estende-se a toda a esfera $S_{\mathcal{P}}$.

Figura 3.12: Esfera de papel do exemplo 3.3.4

Demonstração. Tome $M = \max_{1 \leq j \leq m} \sup_{k \geq 0} \ell_\infty(\gamma_k^j)$. Por hipótese, o Teorema 3.3.2 implica que $M < +\infty$.

Como $\eta(\ell_\infty(\gamma_k^j)) \geq \eta(M) > 0$, para todo $k \geq 0$ e $1 \leq j \leq m$, então para cada $j = 1, \dots, m$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \eta(\ell_\infty(\gamma_k^j)) = +\infty$$

A Proposição 1.4.6 implica que G_∞ é um grupo Fuchsiano do primeiro tipo. Para provar que a estrutura complexa estende-se ao ponto irregular q^j , considere-se cada colar $\mathbb{A}_k = \mathbb{A}_{\gamma_k^j}$, $k \geq 1$. Pelo Lema do colar, esta coleção é duas a duas disjunta, de fato esta coleção consiste numa família concentrada de anéis com respeito ao ponto q^j . Sendo $\ell_\infty(\gamma_k^j) \leq M$, então existe uma constante $c > 0$ tal que $\text{Mod } \mathbb{A}_k \geq c$ para todo $k \geq 1$. Logo $\sum_{k \geq 1} \text{Mod } \mathbb{A}_k = \infty$ o que implica que em $S_{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{Q}$, o

fin q^j corresponde a um furo, logo pelo Teorema da singularidade removível, a estrutura complexa pode-se estender a este ponto.

□

A seguinte proposição dá uma condição suficiente para que as distâncias $d_{\mathcal{T}}$ e $d_{\mathcal{L}}$ não sejam topologicamente equivalentes em $\mathcal{T}(S_\infty)$.

Corolário 3.3.6. *Se existe $1 \leq j \leq m$ tal que,*

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{m_k^j}{e_k^j} = 0,$$

então, no espaço de Teichmüller $\mathcal{T}(S_\infty)$, a métricas de Teichmüller $d_{\mathcal{T}}$ e a métrica do comprimento espectral $d_{\mathcal{L}}$ não são topologicamente equivalentes.

Demonstração. O Teorema 3.3.2 implica que existe uma subsequência de geodésica $(\gamma_{k_n})_{n=1}^{+\infty}$ tal que $\ell_\infty(\gamma_{k_n}) \searrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$, logo a Proposição 1.3.13 implica que $d_{\mathcal{T}}$ e $d_{\mathcal{L}}$ geram diferentes topologias em $\mathcal{T}(S_\infty)$. $\square$

3.4 Prova do Teorema 3.3.2

Suponha em princípio que a esfera de papel $S_{\mathcal{P}}$ é obtido como quociente métrico de um único polígono P . Suponha também que foi fixado um superíndice $j = 1, \dots, m$ correspondente ao ponto irregular q^j , logo no desenvolvimento da prova do Teorema 3.3.2 será surpimido tal superíndice para aliviar a notação. Lembre-se que existe $K_0 \geq 1$ tal que para $k \geq K_0$, as componentes L_i de $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_k)$ são tipo 1, 2, 3 ou 4. O primeiro objetivo será mostrar que tais componentes estão suficientemente espalhados na fronteira de P . Para conseguir isso olhemos primeiro as extremidades a_i^- e a_i^+ de cada L_i .

Lema 3.4.1. *Para todo $i \in I$, $\pi_{\mathcal{P}}(a_i^\pm) \in \mathcal{V} \cup \{q\}$, mas não são pontos 1-cônicos.*

Demonstração. Dado $i \in I$ queremos ver que $\pi_{\mathcal{P}}(a_i^-) \in \mathcal{V} \cup \{q\}$. Suponha por absurdo que $\pi_{\mathcal{P}}(a_i^-)$ é um ponto planar, logo existe $\langle \alpha, \alpha' \rangle \in \mathcal{P}$ tal que $a_i^- \in \text{int } \alpha$. Tome-se $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de forma que $(a_i^- - \varepsilon, a_i^-) \not\subset D_k$. Pelo Lema 2.4.3 o caminho simple $\delta \subset D_k$ que conecta q com $\pi_{\mathcal{P}}(a_i^-)$ estende-se a um caminho simple $\bar{\delta} \subset D_k$ com ponto final uma extremidade do dendrito D_k , o que resulta numa contradição pois $\bar{\delta}$ deve conter à $\pi_{\mathcal{P}}((a_i^- - \varepsilon, a_i^-))$. Portanto $\pi_{\mathcal{P}}(a_i^-) \in \mathcal{V} \cup \{q\}$.

Usando novamente redução ao absurdo, suponha que $\pi_{\mathcal{P}}(a_i^-)$ é um ponto 1-cônico. Seja $\langle \alpha, \alpha' \rangle \in \mathcal{P}$ tal que $\pi_{\mathcal{P}}(a_i^-)$ é o ponto de dobradura deste pareamento; suponha que α está na esquerda α' . Se $i \notin I_1$, pode-se tomar $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $[a_i^-, a_i^- + \varepsilon] \subset L_i \cap \alpha'$ e $(a_i^- - \varepsilon, a_i^-] \subset \alpha$. Claramente $\pi_{\mathcal{P}}((a_i^- - \varepsilon, a_i^-]) = \pi_{\mathcal{P}}([a_i^-, a_i^- + \varepsilon])$, porém $\pi_{\mathcal{P}}((a_i^- - \varepsilon, a_i^-]) \not\subset D_k$ pela definição da extremidade esquerda a_i^- enquanto que $\pi_{\mathcal{P}}([a_i^-, a_i^- + \varepsilon]) \subset D_k$, com o qual temos uma contradição. Se $i \in I_1$ tem-se $a_i^- = a_i^+$. Um argumento similar ao usado para demonstrar que $\pi_{\mathcal{P}}(a_i^-)$ não é planar leva-nos também a uma contradição. Conclui-se assim que $\pi_{\mathcal{P}}(a_i^-)$ não é um ponto 1-cônico. A demonstração para a extremidade a_i^+ é análoga. $\square$

Lema 3.4.2. *Sejam $i_1, i_2, \dots, i_n \in I$ tais que $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(q) \cap (L_{i_1} \cup L_{i_2} \cup \dots \cup L_{i_n}) = \emptyset$, então existem $i_{n+1} \in I$, $i_{n+1} \neq i_1, \dots, i_n$, $1 \leq l \leq n$, $z \in L_{i_{n+1}}$ e $z' \in L_{i_l}$, tais que $z \mathcal{P} z'$.*

Demonstração. Observe-se que $A = \pi_{\mathcal{P}}(L_{i_1} \cup \dots \cup L_{i_n}) \subsetneq D_k$ é fechado e não vazio em D_k . Como $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(q) \cap L_{i_l}$ para todo $1 \leq l \leq n$, pelo Lema 3.4.1 não podem existir componentes L_i , com $i \neq i_l$, à uma $d_{\partial P}$ -distância arbitrariamente pequena de L_{i_l} . Em consequência existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a_{i_l}^- - \varepsilon, a_{i_l}^+ + \varepsilon) \cap L_i = \emptyset$ para todo $i \neq i_1, \dots, i_n$ e $l = 1, \dots, n$.

Lembre-se que $d_{|G_{\mathcal{P}}}^{\mathcal{P}} = (d_{\partial P})^{\mathcal{P}}$, ver Proposição 2.2.5 ii). Como A não pode ser aberto em D_k pois por definição D_k é conexo, devem existir $i_{n+1} \neq i_1, \dots, i_n$, $z \in L_{i_{n+1}}$ e $z' \in L_{i_1} \cup \dots \cup L_{i_n}$ tais que $d^{\mathcal{P}}(z, z') = 0$ e isto só vai acontecer se $z \mathcal{P} z'$. $\square$

Sejam L_{i_1} e L_{i_2} dois componentes consecutivos de $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_k)$, é dizer, tais que no intervalo $(a_{i_1}^+, a_{i_2}^-)$ não existe outra componente de $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_k)$. Dize-se que o intervalo $(a_{i_1}^+, a_{i_2}^-)$ é uma *brecha* do D_k se existe $\langle \alpha, \alpha' \rangle \in \mathcal{P}$ tal que $\text{int } \alpha = (a_{i_1}^+, a_{i_2}^-)$. Um exemplo de brecha do D_k para todo $k \geq 6$ é mostrado na figura 3.13; observe-se que neste exemplo P consiste numa união disjunta de dois polígonos e não é um polígono no só como estamos assumindo até agora.

Lema 3.4.3. *Se P é um polígono, não existem brechas do D_k para todo $k \geq K_0$.*

Figura 3.13: Desenho de uma brecha de D_k , para todo $k \geq 1$. As extremidades dos intervalos α e α' são pre-imagens da irregularidade do espaço de papel $S_{\mathcal{P}}$.

Demonstração. Suponha por redução ao absurdo que existe algum k e um pareamento $\langle \alpha, \alpha' \rangle \in \mathcal{P}$ tal que $\text{int}\alpha$ é uma brecha de D_k . Observe-se que $\partial P \setminus (\text{int}\alpha \cup \text{int}\alpha')$ é a união disjunta de dois arcos fechados T_1 e T_2 , cada um dos quais contém pelo menos uma componente de $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_k)$.

Lembre-se que a relação $\mathcal{P}$ em ∂P é desvinculada, ver Teorema 2.3.1. Em consequência a relação $\sim_{\mathcal{P}}$ também é desvinculada em ∂P , ver Lema 2.3.3, pelo qual, ou $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(q) \cap T_1 = \emptyset$ ou $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(q) \cap T_2 = \emptyset$. Suponha que $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(q) \cap T_1 = \emptyset$ e $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(q) \cap T_2 \neq \emptyset$.

Seja $L_{i_1} \subset T_1$ uma componente de $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_k)$. Pelo Lema 3.4.2 existem $i_1 \neq i_2$, $z_1 \in L_{i_1}$ e $z' \in L_{i_2}$ tais que $z_1 \mathcal{P} z'_1$. Sendo $\mathcal{P}$ desvinculada em ∂P tem-se que $L_{i_2} \subset T_1$. Usando novamente o Lema 3.4.2 e o fato de $\mathcal{P}$ ser desvinculada em ∂P obtem-se $i_3 \neq i_1, i_2$ tal que $L_{i_3} \subset T_1$. Repetindo o argumento infinitas vezes construye-se uma sequência de componentes diferentes $(L_{i_n})_{n \geq 1}$ de $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_k)$, todas contidas em T_1 . Considerando que cada L_{i_n} contém pelo menos uma $\pi_{\mathcal{P}}$ -preimagem de um ponto cônico (Lema 3.4.1), existe $z_1 \in T_1$ ponto de acumulação de $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(\mathcal{V} \cap D_k)$. Isto implica que $\pi_{\mathcal{P}}(z_1) = q$ o qual é uma contradição. $\square$

Lema 3.4.4. Para todo $k \geq K_0$ e $i_1, i_2 \in I(k) = I$, $i_1 \neq i_2$,

$$d_{\partial P}(L_{i_1}, L_{i_2}) \geq 2e_k$$

Em consequência o número de componentes conexas de $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_k)$ é finito para cada $k \geq K_0$.

Demonstração. Basta provar que dadas duas componentes consecutivas L_{i_1} e L_{i_2} de $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_k)$, sendo L_{i_1} à esquerda de L_{i_2} , então $d_{\partial P}(a_{i_1}^+, a_{i_2}^-) \geq 2e_k$. Pelo Lema 3.4.3 (Lembre-se que estamos assumindo que P é um polígono) o intervalo $(a_{i_1}^+, a_{i_2}^-)$ não é uma brecha, logo existe $w \in (a_{i_1}^+, a_{i_2}^-)$ tal que $\pi_{\mathcal{P}}(w) \in \overline{\mathcal{V}}$. Como L_{i_1} e L_{i_2} são consecutivos, então $\pi_{\mathcal{P}}(w) \notin D_k$, logo $\pi_{\mathcal{P}}(w) \in E_k$. Assim,

$$d_{\partial P}(a_{i_1}^+, a_{i_2}^-) = d_{\partial P}(a_{i_1}^+, w) + d_{\partial P}(w, a_{i_2}^-) \geq 2e_k$$

Dado que $e_k > 0$ e $|\partial P|$ é finito, não podem existir infinitas componentes L_i de $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_k)$. $\square$

Para cada $k \geq 1$ denote-se por $\#_k$ ao número de componentes de $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_k)$. No modelo base e no exemplo 3.3.3 a sequência $(\#_k)_k$ cresce linearmente com relação à k : $\#_k = k + 1$ no caso do modelo base e $\#_k = k + 3$ no exemplo 3.3.3. No exemplo 3.3.4 em cambio, $\#_k^j$ é constante igual à 1, para $j = 1, 2, 3, 4$. Fixando para todo $k \geq K_0$ um índice $i_1 \in I$ (a verdade a notação certa deveria

ser $I(j, k)$ ou $I(k)$, mas continuaremos suprimindo o superíndice j nesta seção e do índice k para o conjunto I), podemos ordenar os elementos de I como $i_1, i_2, \dots, i_{\#_k}$, de forma que L_{i_l} está na esquerda de $L_{i_{l+1}}$ e são consecutivos, para $1 \leq l \leq \#_k$, tomando $i_{\#_k+1} = i_1$.

Lema 3.4.5. Para todo $k \geq K_0$ e $1 \leq l \leq \#_k$, $a_{i_l}^+ \sim_{\mathcal{P}} a_{i_{l+1}}^-$.

Demonstração. Pelo Lema 3.4.4, a esquerda e a direita de cada componente L_i , $i \in I$, somente há $\pi_{\mathcal{P}}$ -preimagens de pontos planares de $S_{\mathcal{P}}$ numa vizinhança de L_i . Sendo $\#_k$ finito, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $i \in I$, existem pareamentos $\langle \alpha_i^-, \alpha_i^{-'} \rangle, \langle \alpha_i^+, \alpha_i^{+'} \rangle \in \mathcal{P}$ que satisfazem o seguinte:

1. $\beta_i^- := (a_i^- - \varepsilon, a_i^-) \subset \alpha_i^-$, sendo a_i^- uma extremidade de α_i^- .
2. $\beta_i^+ := (a_i^+, a_i^+ + \varepsilon) \subset \alpha_i^+$, sendo a_i^+ uma extremidade de α_i^+ .
3. $\beta_i^+ \cap \pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_k) = \emptyset$ e $\beta_i^- \cap \pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_k) = \emptyset$.

Denote-se por $\langle \beta_i^+, \beta_i^{+'} \rangle$, $\langle \beta_i^-, \beta_i^{-'} \rangle$ os respectivos subpareamentos de $\langle \alpha_i^+, \alpha_i^{+'} \rangle$ e $\langle \alpha_i^-, \alpha_i^{-'} \rangle$, para cada $i \in I$. Nesse caso a_i^+ está pareado com algum $a_i^{+'} \in \pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_k)$ e a_i^- está pareado com algum $a_i^{-'} \in \pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_k)$.

Dado qualquer $1 \leq l \leq \#_k$ considere-se o subespaço $\partial P \setminus (\beta_{i_l}^+ \cup \beta_{i_l}^{+'})$, o qual contém $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_k)$. Éste, a sua vez é a união disjunta de dois arcos fechados T_1 e T_2 com $L_{i_l} \subset T_2$. Observe-se que $\beta_{i_l}^{+'} = \beta_{i_s}^{-'}$ para algum $1 \leq s \leq \#_k$, com o qual $L_{i_s} \subset T_2$ pois, no caso contrario, existiriam $z \in T_1$ e $z' \in T_2$ tal que $d^{\mathcal{P}}(z, z') = 0$, logo o par de pares $\{z, z'\}$ e $\{\beta_{i_l}^+, \beta_{i_l}^{+'}\}$ seriam $\sim_{\mathcal{P}}$ -vinculados, o qual é uma contradição. Portanto $i_s = i_{l+1}$ e assim $a_{i_l}^+ \sim_{\mathcal{P}} a_{i_{l+1}}^-$. $\square$

Observação 3.4.6. Para $k \geq K_0$, o valor $\varepsilon > 0$ usado na demonstração do lema anterior vai ser maior ou igual que e_k , com o qual, $(a_{i_l}^+ + r)\mathcal{P}(a_{i_{l+1}}^- - r)$, para todo $0 < r < e_k$ e $1 \leq l \leq \#_k$.

A seguir serão construído os anéis $A_k^t \subset S_{\infty}$ necesarios para aplicar o Lema 3.2.2 e conseguir uma estimativa superior de $\ell_{\infty}(\gamma_k)$. Como $e_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow +\infty$, pode-se tomar K_0 suficientemente grande de maneira que, para $k \geq K_0$, a distância de um lado de P a qualquer outro lado de P que não seja adjacente a este seja maior ou igual a $2e_k$. Lembre-se que cada componente de $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_k)$ está contido no máximo em dois lados consecutivos de P pelo qual, se L_j é uma componente de $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_k)$ e se T_1 e T_2 são dois lados consecutivos que contém à L_j , então não perda de generalidade em supor que para qualquer outra componente L_i de $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_k)$ que não esté contenido em $T_1 \cup T_2$, tem-se $d_P(L_i, L_j) \geq 2e_k$.

Sejam T_1 e T_2 dois lados de P consecutivos. Dado $k \geq K_0$, suponha que existe $j \in I_4$ tal que $L_j \subset T_1 \cup T_2$, logo o vértice v_j é o vértice común entre T_1 e T_2 e $L_j = [a_j^-, a_j^+] = [a_j^-, v_j] \cup [v_j, a_j^+]$. Na figura 3.14, se a_j denota a extremidade de L_j que está mais perto do vértice v_j e M é o ponto de interseção da bissetriz de v_j com a perpendicular ao lado de P que contém o ponto a_j e passa por a_j , tem-se:

$$d_P(a_j, M) = d_P(a_j, v_j) \cdot \tan \frac{\phi_j}{2} \geq 2f_k$$

Assim, para todo $x \in T_1 \setminus L_j$, $d_P(x, T_2) \geq 2f_k$ e igualmente, para todo $y \in T_2 \setminus L_j$, tem-se $d_P(y, T_1) \geq 2f_k$. Em particular, se L_i é outra componente de $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_k)$ que intersecta o lado T_1 ou o lado T_2 , então $d_P(L_i, L_j) \geq 2h_k$.

Se existe $j \in I_3$ tal que $L_j \subset T_1 \cup T_2$, é fácil ver que para $x \in T_1 \setminus L_j$ e $y \in T_2 \setminus L_j$, tem-se $d_P(x, L_j) = d_P(x, a_j^-)$ e $d_P(y, L_j) = d_P(a_j^+, y)$. Logo para qualquer componente L_i de $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_k)$ que intersecta o lado T_1 ou o lado T_2 , $d_P(L_i, L_j) \geq 2h_k$.

Figura 3.14

Figura 3.15

Suponha agora que não existe $j \in I_3 \cup I_4$ tal que $L_j \subset T_1 \cup T_2$ e seja v o vértice común entre os lados T_1 e T_2 . Sejam $j_1, j_2 \in I$ (se existem!) tais que $a_{j_1}^+$ é a extremidade direita de uma componente de $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_k)$ contida em T_1 más próxima de v , e $a_{j_2}^-$ é a extremidade esquerda de uma componente de $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_k)$ contida em T_2 más próxima de v , ver figura 3.16.

Figura 3.16

Como $D_k \supset D_{k+1}$ para todo k e como $e_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow +\infty$, escolha-se K_0 maior de ser necessario tal que para $k \geq K_0$, $d_P(T_1 \cap \pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_k), T_2) \geq 2e_k$ e $d_P(T_2 \cap \pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_k), T_1) \geq 2e_k$. Logo, neste caso tem-se também que $d_P(L_i, L_j) \geq 2e_k$ se L_i é uma componente de $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_k)$ que intersecta à T_1 e L_j é uma componente de $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_k)$ que intersecta à T_2 . Como $h_k = \min\{e_k, f_k\}$ conclui-se o seguinte.

Lema 3.4.7. *Existe $K_0 \geq 1$ tal que para $k \geq K_0$, se L_i e L_j são dois componentes diferentes de $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_k)$, então:*

$$d_P(L_i, L_j) \geq 2h_k$$

Com o qual $B_{d_P}(L_i, h_k) \cap B_{d_P}(L_j, h_k) = \emptyset$.

□

A continuação provaremos que as diferentes bolas $B_{d_P}(L_i, h)$ são π_P -colados num disco em S_P .

Lema 3.4.8. *Para $k \geq K_0$ e $0 < h < h_k$, $B_{S_P}(D_k, h)$ é um disco topológico. Além disso,*

$$B_{S_P}(D_k, h) = \pi_P \left(\bigsqcup_{i \in I} B_{d_P}(L_i, h) \right) \quad (3.4)$$

Demonstração. Claramente $\pi_P \left(\bigsqcup_{i \in I} B_{d_P}(L_i, h) \right) \subset B_{S_P}(D_k, h)$. Se $z \notin B_{S_P}(D_k, h)$ e $x \in \pi_P^{-1}(z)$, então $d_P(x, \sqcup_{i \in I} L_i) \geq h$: Qualquer $\mathcal{P}$ -itinerário que conecte o ponto z com $\pi_P^{-1}(D_k)$ terá um d_P -custo maior ou igual que h . Assim tem-se a igualdade 3.4.

Para $0 < r < h$ e $1 \leq l \leq \#_k$, denote-se por $\mathbb{S}_l(r)$ o conjunto:

$$\mathbb{S}_l(r) := \mathbb{S}_P(L_{i_l}, r) = \{z \in P \mid d_P(z, L_{i_l}) = r\}$$

Logo $\mathbb{S}_l(r)$ é um arco simple em P cujo interior está no interior do polígono P e suas extremidades estão em ∂P , sendo a extremidade esquerda o ponto $a_{i_l}^- - r$ e a extremidade direita o ponto $a_{i_l}^+ + r$. Como consequência do Lema 3.4.5 (ver também a observação 3.4.6), a extremidade direita $a_{i_l}^+ + r$ de $\mathbb{S}_l(r)$ é colado com a extremidade esquerda $a_{i_{l+1}}^- - r$ de $\mathbb{S}_{l+1}(r)$, para todo $1 \leq l \leq \#_k$. Portanto, sendo $\mathbb{S}_{l_1}(r)$ e $\mathbb{S}_{l_2}(r)$ conjuntos disjuntos quando $l_1 \neq l_2$ (Lema 3.4.7), então o conjunto $\pi_P(\mathbb{S}_P(\pi_P^{-1}(D_k), r)) = \pi_P \left(\bigsqcup_{l=1}^{\#_k} \mathbb{S}_l(r) \right)$ é homeomorfo a um círculo.

Sendo $B_{S_P}(D_k, h) = D_k \sqcup \bigsqcup_{0 < r < h} \pi_P(\mathbb{S}_P(\pi_P^{-1}(D_k), r))$, conclui-se que a bola $B_{S_P}(D_k, h)$ é em efeito homeomorfo a um disco. $\square$

Na figura 3.9 já foram mostrados os desenhos das bolas $B_{d_P}(L_i, h)$ nos casos de componentes do tipo 1, 2 e 3, para $h \leq h_k$. Nos três casos pode-se ver que o disco divide-se facilmente em peças circulares e peças retangulares. Como foi definido o parâmetro f_k , observe-se da figura 3.17 que quando L_i é uma componente do tipo 4, a bola $B_{d_P}(L_i, h)$ divide-se também em peças que não sobrepõem uns aos outros: duas peças circulares e uma peça "retangular" no meio.

Figura 3.17: *Desenho do disco $B_{d_P}(L_i, h)$ para $i \in I_4$ e $h \leq f_k$.*

Indiferentemente do tipo da componente L_i de $\pi_P^{-1}(D_k)$, queremos pensar no disco $B_{d_P}(L_i, h)$ como a união de quatro peças: uma circular na esquerda $C_{i,-}$, uma circular direita $C_{i,+}$, uma peça circular central $C_{i,0}$ e uma retangular R_i , onde,

- 1) Se L_i é do tipo 1, a peça retangular tem comprimento 0, é dizer, é um segmento radial.

- 2) Se L_i é do tipo 2, a peça circular central tem ângulo zero, logo também é um segmento, e se algumas das extremidades de L_i é um vértice do P de ângulo menor que $\frac{\pi}{2}$, a peça circular correspondente também tem ângulo zero.
- 3) Se L_i é do tipo 3, neste caso existem as quatro peças, mas a peça retangular consiste na união de dois retângulos $R_i = R_{i,-} \cup R_{i,+}$; a peça circular central $C_{i,0}$ está entre $R_{i,-}$ e $R_{i,+}$.
- 4) Se L_i é do tipo 4, igual que no item 2), a peça circular central tem ângulo zero. A peça retangular R_i na verdade é a união de dos trapézios $R_{i,-}$ e $R_{i,+}$.

Tome-se K_0 suficientemente grande de forma que todos os lemas e observações precedentes sejam válidos. Dado $k \geq K_0$ e $t > 1$, defina-se o conjunto A_k^t como:

$$A_k^t := B_{d^P}(D_k, h_k) \setminus \overline{B}_{d^P}\left(D_k, \frac{h_k}{t^{\#k}}\right)$$

A Proposição 3.4.8 garante que o conjunto A_k^t é um anel. Este será a união das π_P -projeções dos conjuntos $B_P(L_i, h_k) \setminus \overline{B}_P\left(L_i, \frac{h_k}{t^{\#k}}\right)$, $i \in I$. Igual que acima, consideraremos cada um destes pedaços divididos em quatro peças: Três circulares $C_{i,-}^t$, $C_{i,0}^t$ e $C_{i,+}^t$, e uma retangular R_i^t . As figuras 3.18 e 3.19 mostram um desenho das diferentes peças. Por outro lado, como $h_k \leq e_k$, tem-se que $A_k^t \subset S_\infty$ é redutível à curva geodésica γ_k , para cada $k \geq K_0$.

Figura 3.18: Semianel para uma componente L_i do tipo 2

Figura 3.19: Semianel para uma componente L_i do tipo 1, 3 e 4 respectivamente

Até agora foi tratado somente o caso onde P é um polígono. No caso geral onde P é um multipolígono, escolha-se um árvore de extensão do grafo Υ_P como foi explicado na seção 2.3 de forma que todos os polígonos de P sejam colados num disco poligonal P' ; suponha que $\delta_1, \dots, \delta_s$ são os arcos contidos no interior de P' dos pareamentos correspondentes as arestas do árvore Υ_P . Como $m_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow +\infty$, pode-se assumir sem perda de generalidade que $\pi_P^{-1}(D_k) \subset \partial P'$ para $k \geq K_0$. Todos os lemas desenvolvidos nesta seção valem também para os espaço $(P', d_{P'})$ e P'/P' . Observe-se que no caso do Lema 3.4.3, se $\pi_P^{-1}(D_k)$ têm brechas (como na figura 3.13), estes devem estar no conjunto $\{\text{int}\delta_1, \text{int}\delta_2, \dots, \text{int}\delta_s\}$, com o qual conclui-se que tomando K_0 suficientemente grande, as brechas de $\pi_P^{-1}(D_k)$ serão as mesmas para todo $k \geq K_0$ e o minimo comprimento de uma brecha é maior que $2 \cdot e_k$. Em consequência, elas não serão um problema para a construção dos aneis A_k^t .

Demonstração do Teorema 3.3.2. Considere-se $k \geq K_0$. Seja $\rho_k^t(z)|dz|$ a densidade Boreliana sobre o anel A_k^t definido por:

$$\rho_k^t(z) := \begin{cases} \frac{1}{d^{\mathcal{P}}(z, D_k)} ; & \text{se } \pi_{\mathcal{P}}^{-1}(z) \in \bigcup_{l=1}^{\#_k} (C_{i_l, -}^t \cup C_{i_l, 0}^t \cup C_{i_l, +}^t) \\ \frac{\#_k \cdot \log t}{h_k \left(1 - \frac{1}{t^{\#_k}}\right)} ; & \text{se } \pi_{\mathcal{P}}^{-1}(z) \in \bigcup_{l=1}^{\#_k} R_{i_l}^t \end{cases}$$

Onde para todo $1 \leq l \leq \#_k$, $R_{i_l}^t = R_{i_l} \cap A_k^t$ e $C_{i_l, p}^t = C_{i_l, p}^t \cap A_k^t$, sendo $p = -, 0, +$.

O mesmo argumento usado no Lema 3.2.3 mostra que,

$$\mathcal{L}_{\rho_k^t}(A_k^t) = \#_k \cdot \log t.$$

Similarmente é fácil ver que para cada $1 \leq l \leq \#_k$, a ρ_k^t -área de uma peça circular $C_{i_l, p}^t$, $p = -, 0, +$, satisfaz a desigualdade:

$$\mathcal{A}_{\rho_k^t}(C_{i_l, p}^t) \leq 2\pi \cdot \#_k \cdot \log t \quad (3.5)$$

Com relação a ρ_k^t -área de cada peça retangular $R_{i_l}^t$, tem-se o seguinte:

- 1) Se $i_l \in I_1$, $\mathcal{A}_{\rho_k^t}(R_{i_l}^t) = 0$.
- 2) Se $i_l \in I_2$, $\mathcal{A}_{\rho_k^t}(R_{i_l}^t) \leq \frac{\#_k^2 \log^2 t}{h_k^2 \left(1 - \frac{1}{t^{\#_k}}\right)^2} \cdot h_k \left(1 - \frac{1}{t^{\#_k}}\right) \cdot m_{\partial P}(L_{i_l}) = \frac{\#_k^2 \log^2 t}{h_k \left(1 - \frac{1}{t^{\#_k}}\right)} \cdot m_{\partial P}(L_{i_l})$.
- 3) Se $i_l \in I_3$, $\mathcal{A}_{\rho_k^t}(R_{i_l}^t) = \mathcal{A}_{\rho_k^t}(R_{i_l, -}^t) + \mathcal{A}_{\rho_k^t}(R_{i_l, +}^t) = \frac{\#_k^2 \log^2 t}{h_k \left(1 - \frac{1}{t^{\#_k}}\right)} \cdot m_{\partial P}(L_{i_l})$.
- 4) Se $i_l \in I_4$, ao ver a figura 3.20, é fácil ver que $\mathcal{A}_{\rho_k^t}(R_{i_l}^t) \leq \frac{\#_k^2 \log^2 t}{h_k \left(1 - \frac{1}{t^{\#_k}}\right)} \cdot m_{\partial P}(L_{i_l})$.

Figura 3.20: Transformação da peça retangular R_i^t num retângulo de verdade.

Como $m_k = m_{G^{\mathcal{P}}}(D_k) = \sum_{l=1}^{\#_k} m_{\partial P}(L_{i_l})$, então,

$$\mathcal{A}_{\rho_k^t} \left(\bigcup_{l=1}^{\#_k} (R_{i_l}^t) \right) \leq \frac{\#_k^2 \log^2 t}{h_k \left(1 - \frac{1}{t^{\#_k}} \right)} \cdot m_k$$

Como por cada componente L_i tem-se três peças circulares, então existem em total $3 \cdot \#_k$ peças circulares, com o qual,

$$\mathcal{A}_{\rho_k^t} \left(\bigcup_{l=1}^{\#_k} C_{i_l, p}^t \right) \leq 3 \cdot \#_k \cdot 2\pi \cdot \#_k \cdot \log t = 6\pi \cdot \#_k^2 \cdot \log t$$

Aplicando o Lema 3.2.2 tem-se para todo $t > 1$ que,

$$\begin{aligned} \ell_\infty(\gamma_k) &\leq \pi \cdot \frac{\mathcal{A}_{\rho_k^t}(A_k^t)}{\mathcal{L}_{\rho_k^t}(A_k^t)^2} \\ &\leq \frac{\pi}{\#_k^2 \cdot \log^2 t} \left(\frac{\#_k^2 \log^2 t}{h_k \left(1 - \frac{1}{t^{\#_k}} \right)} \cdot m_k + 6\pi \cdot \#_k^2 \cdot \log t \right) \\ &\leq \frac{\pi}{1 - \frac{1}{t^{\#_k}}} \frac{m_k}{h_k} + \frac{6\pi^2}{\log t} \end{aligned}$$

Ao fazer $t \rightarrow +\infty$ na desigualdade acima, conclui-se que,

$$\ell_\infty(\gamma_k) \leq \pi \cdot \frac{m_k}{h_k}$$

□

3.5 Estimativas inferiores das coordenadas de comprimento

Considere-se novamente a esfera furada S_∞ do modelo base. Na seção 3.2 foi estimado cotas superiores para $\ell_\infty(\gamma_k)$, $k \geq 1$. Gostariamos agora calcular estimativas inferiores para os comprimentos hiperbólicos das mesmas geodésicas. Para conseguir isto basta estimar por acima o comprimento hiperbólico de outra geodésica que intersecte transversalmente a curva γ_k : Se β é uma curva geodésica fechada simples que intersecta γ_k , então γ_k deve atravessar o colar $\mathbb{A}_\beta$ de β , com o qual,

$$\ell_\infty(\gamma_k) \geq 2i(\gamma_k, \beta) \cdot \eta(\ell_\infty(\beta)),$$

onde $i(\gamma_k, \beta)$ denota o número de interseção das curvas γ_k e β . Assim, se M é uma estimativa superior de $\ell_\infty(\beta)$, é dizer, se $\ell_\infty(\beta) \leq M$, como a função colar η é estritamente decrescente, tem-se

$$\ell_\infty(\gamma_k) \geq 2i(\gamma_k, \beta) \cdot \eta(M),$$

Fixe um inteiro $k \geq 1$ e considere-se a família de curvas fechadas simples $\hat{\beta}_{k,l}$, $l \geq 1$, em S_∞ mostradas na figura 3.4, logo tome-se para cada $l \geq 1$ a curva geodésica $\beta_{k,l}$ na classe de homotopia da curva $\hat{\beta}_{k,l}$. Observe-se que cada $\beta_{k,l}$ separa em $S_\mathcal{P}$ o conjunto $\{p_k, p_{k+1}, \dots, p_{k+l}\}$ do ponto irregular q e do resto de pontos cônicos, isto é, do conjunto $\{q\} \cup \{p_{-1}, p_0, p_1, \dots, p_{k-1}\} \cup \{p_{k+l+1}, p_{k+l+2}, \dots\}$.

As curvas $(\hat{\beta}_{k,l})_{l \geq 1}$ podem ser escolhidas de forma que todas elas sejam mutuamente disjuntas, logo pela Proposição 1.3.1 v), tem-se que para $1 \leq l_1 < l_2$, $\beta_{k,l_1} \cap \beta_{k,l_2} = \emptyset$. Por outro lado cada uma das curvas $\hat{\beta}_{k,l}$ intersecta γ_k em dois pontos, pelo qual da mesma Proposição 1.3.1

Figura 3.21: Desenho das curvas $\beta_{k,l}$

v), $i(\gamma_k, \beta_{k,l}) = 2$, para todo $k, l \geq 1$. A figura 3.22 mostra um possível desenho das primeiras geodésicas $\beta_{k,l}$ em S_∞ .

Figura 3.22: Curvas geodésica $\beta_{k,l}$, para $l = 1, 2, 3, 4$.

Pelo Lema do colar, ver Teorema 1.3.5, para cada $l_1, l_2 \geq 1$ com $l_1 \neq l_2$, tem-se que os colares $\mathbb{A}_{\beta_{k,l_1}}$ e $\mathbb{A}_{\beta_{k,l_2}}$ são disjuntos. Dado que γ_k atravessa cada um destes colares tem-se a seguinte desigualdade,

$$\ell_\infty(\gamma_k) \geq 4 \sum_{l \geq 1} \eta(\ell_\infty(\beta_{k,l})) \quad (3.6)$$

Claramente basta somente uma estimativa superior do comprimento de uma só das curvas $\beta_{k,l}$ para obter a uma estimativa inferior de $\ell_\infty(\gamma_k)$, porém em princípio, a soma infinita acima daria uma estimativa inferior melhor. vamos prosseguir em seguida com o calculo de estimativas superiores para cada $\ell_\infty(\beta_{k,l})$. Dado $t > 1$, denote-se por $x_1^t, x_2^t, x_3^t, z_1^t, z_2^t, z_3^t, z_4^t \in P$ os seguintes pontos:

$$\begin{aligned} x_1^t &:= 2 \sum_{n > k+l} a_n + \frac{a_{k+l}}{t^l}, & x_2^t &:= 2 \sum_{n \geq k} a_n - a_{k+l}, & x_3^t &:= 2 \sum_{n \geq k} a_n - \frac{a_{k+l}}{t^l}, \\ z_1^t &:= x_1^t + 2a_{k+l} \cdot i, & z_2^t &:= x_2^t + a_{k+l} \cdot i, & z_3^t &:= x_3^t + 2a_{k+l} \cdot i, & z_4^t &:= \hat{p}_{k+l} + a_{k+l} \cdot i, \end{aligned}$$

onde $\hat{p}_{k+l} = \pi_{\mathcal{P}}^{-1}(p_{k+l})$. Denote-se por c_j , $j = 1, \dots, l$, os pontos $c_j := 2 \sum_{n \geq k+j} a_n$, por $C_j^t \subset P$ o semi-anel,

$$C_j^t := \left\{ z \in P \mid \frac{a_{k+l}}{t^l} < |z - c_j| < a_{k+l} \right\},$$

e por R^t a região aberta em P limitada pela poligonal com vértices $x_1^t, z_1^t, z_3^t, x_3^t, x_2^t, z_2^t, z_4^t$ e $\hat{p}_{k+l}$. Ver a figura 3.23 para o caso $l = 3$.

Figura 3.23: Desenho do anel $B_{k,3,t}$.

Observe-se que $c_1, c_2, \dots, c_l \in \pi_{\mathcal{P}}^{-1}(q)$. A união das regiões $R^t \cup \bigcup_{j=1}^l C_j^t$ é projetada por $\pi_{\mathcal{P}}$ num anel $B_{k,l,t} \subset S_{\infty}$ que separa os furos de S_{∞} do mesmo jeito que $\beta_{k,l}$. Considere-se em $B_{k,l,t}$ a densidade Boreliana $\rho_{k,l}^t(z)|dz|$ dada por:

$$\rho_{k,l}^t(z) := \begin{cases} \frac{1}{d^{\mathcal{P}}(z, D_k)} ; & \text{se } \pi_{\mathcal{P}}^{-1}(z) \in \bigcup_{j=1}^l C_j^t \\ \frac{l \cdot \log t}{a_{k+l} \left(1 - \frac{1}{t^l}\right)} ; & \text{se } \pi_{\mathcal{P}}^{-1}(z) \in R^t \end{cases}$$

Logo usando novamente a desigualdade 3.1, tem-se $\ell_{\infty}(\beta_{k,l}) \leq \pi \cdot \frac{\mathcal{A}_{\rho_{k,l}^t}(B_{k,l,t})}{\mathcal{L}_{\rho_{k,l}^t}(B_{k,l,t})^2}$. O cálculo de $\mathcal{A}_{\rho_{k,l}^t}(B_{k,l,t})$ e $\mathcal{L}_{\rho_{k,l}^t}(B_{k,l,t})$ é similar aos feitos nos Lemas 3.2.3 e 3.2.4, pelo qual serão obviados os detalhes: $\mathcal{L}_{\rho_{k,l}^t}(B_{k,l,t}) = l \cdot \log t$, $\mathcal{A}_{\rho_{k,l}^t}(C_j^t) = \pi \cdot l \cdot \log t$, para $1 \leq j \leq l$ e, com relação à R^t ,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\rho_{k,l}^t}(R^t) &= \frac{l^2 \log^2 t}{a_{k+l}^2 \left(1 - \frac{1}{t^l}\right)^2} \left[2a_{k+l}^2 \left(1 - \frac{1}{t^l}\right) + a_{k+l} (x_3^t - x_1^t) \right] \\ &= \frac{l^2 \log^2 t}{a_{k+l}^2 \left(1 - \frac{1}{t^l}\right)^2} \left[2a_{k+l}^2 \left(1 - \frac{1}{t^l}\right) + 2 \sum_{n=k}^{k+l-1} a_n + 2a_{k+l} \left(1 - \frac{1}{t^l}\right) \right] \\ &= l^2 \log^2 t \left[\frac{4}{\left(1 - \frac{1}{t^l}\right)} + \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{t^l}\right)^2} \cdot \frac{\sum_{k \leq n < k+l} a_n}{a_{k+l}} \right] \end{aligned}$$

Logo $\mathcal{A}_{\rho_{k,l}^t}(B_{k,l,t}) = \mathcal{A}_{\rho_{k,l}^t}(R^t) + \pi \cdot l^2 \log t$, pelo qual, para todo $k, l \geq 1$, $t > 1$,

$$\ell_\infty(\beta_{k,l}) \leq \pi \cdot \frac{\mathcal{A}_{\rho_{k,l}^t}(B_{k,l,t})}{\mathcal{L}_{\rho_{k,l}^t}(B_{k,l,t})^2}$$

$$\pi \left[\frac{4}{\left(1 - \frac{1}{t}\right)} + \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{t}\right)^2} \cdot \frac{\sum_{k \leq n < n+k} a_n}{a_{k+l}} + \frac{\pi}{\log t} \right]$$

Ao fazer $t \rightarrow +\infty$ na desigualdade acima, conclui-se o seguinte resultado.

Proposição 3.5.1. *Na esfera de papel furada do modelo base,*

$$\ell_\infty(\beta_{k,l}) \leq 4\pi + 2\pi \cdot \frac{1}{a_{k+l}} \sum_{n=k}^{k+l-1} a_n,$$

para todo $k, l \geq 1$. Em consequência, para cada $k \geq 1$,

$$\ell_\infty(\gamma_k) \geq 4 \sum_{l \geq 1} \eta \left(4\pi + 2\pi \cdot \frac{1}{a_{k+l}} \sum_{n=k}^{k+l-1} a_n \right)$$

□

Exemplo 3.5.2. Suponha que $a_n = \lambda^n$, $n \geq 1$, para algum $0 < \lambda < 1$, como no exemplo 3.2.6.

Logo $\sum_{n=k}^{k+l-1} a_n = \lambda^k \cdot \frac{1 - \lambda^l}{1 - \lambda}$, pelo qual,

$$\ell_\infty(\gamma_k) \geq 4 \sum_{l \geq 1} \eta \left(4\pi + 2\pi \frac{1 - \lambda^l}{\lambda^l(1 - \lambda)} \right)$$

Observe-se que a expressão na direita na desigualdade não depende do índice k , assim, junto com a estimativa superior do exemplo 3.2.6, tem-se,

$$4 \sum_{l \geq 1} \eta \left(4\pi + 2\pi \frac{1 - \lambda^l}{\lambda^l(1 - \lambda)} \right) \leq \ell_\infty(\gamma_k) \leq 2\pi,$$

para cada $k \geq 1$. No caso particular $a_n = \frac{1}{2^n}$, $n \geq 1$,

$$6,97 \times 10^{-6} \approx 4 \sum_{l \geq 1} \log \coth(2^l \pi) \leq \ell_\infty(\gamma_k) \leq 2\pi,$$

□

O próximo critério permite determinar se a família $\{\ell_\infty(\gamma_k)\}_{k \geq 0}$ na esfera furada S_∞ está limitada por constantes positivas.

Corolário 3.5.3. *Se $0 < \liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$, então existem $m, M > 0$ tais que, para todo $k \geq 0$,*

$$m \leq \ell_\infty(\gamma_k) \leq M$$

Em consequência, no espaço de Teichmüller $\mathcal{T}(S_\infty)$ as distâncias $d_{\mathcal{T}}$ e $d_{\mathcal{L}}$ são topologicamente equivalentes.

Demonstração. $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ garante a existência da constante $M < +\infty$ pela Proposição 3.2.9. Como consequência da proposição 3.5.1,

$$\ell_\infty(\beta_{k,1}) \leq 4\pi + 2\pi \frac{a_k}{a_{k+1}}$$

Mas como $\liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 0$, existe $m' > 0$ tal que $\sup_{k \geq 1} \frac{a_k}{a_{k+1}} \leq m'$. Assim, para $k \geq 1$,

$$\ell_\infty(\gamma_k) \geq \eta \left(4\pi + 2\pi \frac{a_k}{a_{k+1}} \right) \geq m := \eta(4\pi + 2\pi m')$$

O fato de que as distâncias $d_{\mathcal{T}}$ e $d_{\mathcal{L}}$ geram a mesma topologia em $\mathcal{T}(S_\infty)$ é consequência imediata do Teorema de Shiga (ver o Teorema 1.3.12). $\square$

É tentador pensar em usar a Proposição 3.5.1 para determinar se a família $\{\ell_\infty(\gamma_k)\}_{k \geq 0}$ não está limitada superiormente (Por exemplo quando $a_n \asymp \frac{1}{n^s}$). Isso não será possível pela seguinte

razão: Como $a_n \geq a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$, então $\sum_{n=k}^{n+l-1} \frac{a_n}{a_{k+l}} \geq l-1$, logo,

$$\sum_{l \geq 1} \eta \left(4\pi + 2\pi \frac{1}{a_{k+l}} \sum_{n=k}^{k+l-1} a_n \right) < \sum_{l \geq 1} \eta(2\pi + 2\pi l) \approx 1,7 \times 10^{-4}$$

Portanto não é possível fazer que a soma na desigualdade da Proposição 3.5.1 diverga para infinito. ¿É possível conseguir melhores estimativas inferiores dos comprimentos das geodésica γ_k no modelo base usando tal vez outro argumento?

O argumento anterior para conseguir estimativas inferiores dos comprimentos das curvas em Γ_∞ no modelo base serve também para obter estimativas inferiores das geodésicas da decomposição em calças de uma esfera de papel furada qualquer. Seja $S_{\mathcal{P}}$ uma esfera de papel com pontos irregulares $q^1, \dots, q^m$. Suponha que queremos estimar por baixo o comprimento hiperbólico de γ_k^j para $j = 1, \dots, m$ e $k \geq 1$. Basta estimar por acima o comprimento hiperbólico de uma geodésica fechada simples em $\chi_{k,l}^j \subset S_\infty$ que separe os furos p_k^j e p_{k+l}^j do resto dos furos para algum $l \geq 1$, ver a figura 3.24, pois pelo Lema do colar, se $\ell_\infty(\chi_{k,l}^j) \leq M$, então,

$$\ell_\infty(\gamma_k^j) \geq 4\eta(M)$$

Denote-se por $\hat{p}_n^j$ a $\pi_{\mathcal{P}}$ -preimagem do ponto cônico p_n^j . Suponha que $\hat{p}_k^j$ e $\hat{p}_{k+l}^j$ estão contidos num mesmo lado do multipolígono P e que $\langle \alpha_k, \alpha'_k \rangle$ e $\langle \alpha_{k+l}, \alpha'_{k+l} \rangle$ são os respectivos pareamentos cujos pontos de dobraduras são os pontos p_k^j e p_{k+l}^j . Dado $t > 0$ pequeno, considere-se o anel A mostrado na figura 3.25.

Aquí, se $a_{k,l}$ denota o mínimo entre $|\langle \alpha_k, \alpha'_k \rangle|$ e $|\langle \alpha_{k+l}, \alpha'_{k+l} \rangle|$, então,

$$x_1 := \hat{p}_{k+l}^j - a_{k,l}, \quad x_2 := \hat{p}_{k+l}^j + a_{k,l}, \quad x_3 := \hat{p}_k^j - a_{k,l}, \quad x_4 := \hat{p}_k^j + a_{k,l},$$

$$z_1 := x_2 + it, \quad z_2 := x_3 + it, \quad z_3 := \hat{p}_{k+l}^j + i(t + a_{k,l}),$$

$$z_4 := \hat{p}_k^j + i(t + a_{k,l}), \quad z_5 := x_1 + i(t + 2a_{k,l}), \quad z_6 := x_4 + i(t + 2a_{k,l}).$$

Figura 3.24: Desenho da geodésica $\chi_{k,3}^j$ em vermelho. Em azul a geodésica γ_k^j .

Figura 3.25: Desenho do anel A que separa p_k^j e p_{k+l}^j do resto dos furos

A fronteira exterior do anel A é a curva fechada que passa pelos pontos $x_1 \sim_{\mathcal{P}} x_2, z_1, z_2, x_3 \sim_{\mathcal{P}} x_4, z_6, z_5$, enquanto que a fronteira interior do A é os segmento poligonal que passa por $p_{k+l}^j, z_3, z_4, p_k^j$. O anel A é redutível a geodésica $\chi_{k,l}^j$ procurada. Usando a densidade Euclidiana $\rho_e(z)|dz|$, tem-se $\mathcal{A}_{\rho_e}(A) = 4a_{k,l}^2 + 4a_{k,l} \cdot t + 2a_{k,l} \cdot d_P(\hat{p}_k^j, \hat{p}_{k+l}^j)$. Como $\mathcal{L}_{\rho}(A) = a_{k,l}$, usando novamente o Lema 3.2.2,

$$\begin{aligned} \ell_{\infty}(\chi_{k,l}^j) &\leq \pi \cdot \frac{\mathcal{A}_{\rho_e}(A)}{\mathcal{L}_{\rho_e}(A)^2} \\ &= \pi \cdot \frac{4a_{k,l}^2 + 4a_{k,l} \cdot t + 2a_{k,l} \cdot d_P(\hat{p}_k^j, \hat{p}_{k+l}^j)}{a_{k,l}^2} \\ &= 2\pi \left(2 + 2\frac{t}{a_{k,l}} + \frac{d_P(\hat{p}_k^j, \hat{p}_{k+l}^j)}{a_{k,l}} \right) \end{aligned}$$

Ao fazer $t \rightarrow 0$, conclui-se o seguinte resultado.

Proposição 3.5.4. *Nas condições acima,*

$$\ell_{\infty}(\chi_{k,l}^j) \leq 4\pi + 2\pi \cdot \frac{d_P(\hat{p}_k^j, \hat{p}_{k+l}^j)}{a_{k,l}}$$

□

Exemplo 3.5.5. Considere-se a esfera furada do exemplo 3.3.4. Fixado um superíndice $j = 1, 2, 3, 4$, e dado qualquer $k \geq 1$, é fácil ver que $d_P(\hat{p}_k^j, \hat{p}_{k+1}^j) = a^k + a^{k+1} + b^k$ e que $a_{k,l} = a^{k+1}$. Logo usando a proposição acima tem-se,

$$\ell_\infty(\chi_{k,1}^j) \leq 6\pi + \frac{2\pi}{a} \left(1 + \left(\frac{b}{a} \right)^k \right)$$

Observe-se que se $b \leq a$, então as curvas $\chi_{k,1}^j$ têm comprimento uniformemente limitados por acima. Isto implica que existe $m > 0$ tal que $m \leq \ell_\infty(\gamma_k^j)$ para todo $k \geq 0$ e $j = 1, 2, 3, 4$.

□

3.6 A ferradura justa furada

Seja S_P a esfera de papel associada à ferradura justa da seção 2.1. Chamaremos a este espaço também de ferradura justa e à correspondente esfera de papel furada S_∞ de ferradura justa furada. Para finalizar a tese faremos um análise das coordenadas de comprimento e as coordenadas de torção da ferradura justa furada. Antes de estimar tais coordenadas, alguns comentários sobre a esfera de papel S_P .

Lembre-se que S_P tem um único ponto irregular $q = \pi_P(q)$ o qual é um ∞ -vértice e ao mesmo tempo é ponto de acumulação dos seus pontos cônicos $\{p_n\}_{n \in \mathbb{Z}^*}$, todos os quais são pontos 1-cônicos. É fácil ver, usando o Teorema 2.2.11 que a estrutura complexa de $S_P \setminus \{q\}$ estende-se ao ponto irregular q com o qual, pelo Teorema de uniformização, existe um biholomorfismo $\varphi : S_P \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Suponha que $\varphi(q) = \infty$ e denote por w_n , $n \neq 0$, as imagens $w_n := \varphi(p_n)$. É importante destacar que não é conhecido uma expressão do biholomorfismo φ nem da distribuição dos pontos w_n , $n \neq 0$, sobre o plano. Porém em [dCH12] prova-se a existencia de um módulo de continuidade para a aplicação φ , isto é, uma função $\phi : [0, \delta) \rightarrow [0, +\infty)$ estritamente crescente com $\phi(0) = 0$, que satisfaz o seguinte: Se $x_0 \in S_P$, então para todo $x \in B_{S_P}(x_0, \delta)$,

$$d_{\hat{\mathbb{C}}}(\varphi(x), \varphi(x_0)) \leq \phi(d^P(x, x_0))$$

A relação exata entre a distância esférica $d_{\hat{\mathbb{C}}}$ e a distância d^P do espaço de papel ainda não é bem conhecida.

Por outro lado, seja $\hat{R}$ a reflexão em torno à diagonal Δ do quadrado P . Observe-se que $\hat{R}(\pi_P^{-1}(q)) = \pi_P^{-1}(q)$ e $\hat{R}(\pi_P^{-1}(\mathcal{V})) = \pi_P^{-1}(\mathcal{V})$, logo $\hat{R}$ pode ser π_P -projetado numa aplicação contínua $R : S_P \rightarrow S_P$ a qual é de fato um homeomorfismo que reverte orientação cujo conjunto de pontos fixos consiste no círculo topológico $\Delta_P := \pi_P(\Delta)$. Olhando as cartas locais que determinam a estrutura complexa de S_P , é fácil verificar que R é uma aplicação anti-holomorfa, logo a função $h : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ dada por $h := \varphi \circ R \circ \varphi^{-1}$ também é anti-holomorfa. Assim existem $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$, tais que $h(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$. Uma função anti-holomorfa na esfera de Riemann ou não tem pontos fixos, ou tem um ponto fixo, ou têm dois pontos fixos ou têm um círculo em $\mathbb{C}$ de pontos fixos, ver [Mas88], capítulo 1. No caso da função h tem que ser a última possibilidade, com o qual $\varphi(\Delta_P)$ é um círculo mesmo na esfera de Riemann e h é a reflexão em torno a este círculo. Fazendo uma conjugação pode-se assumir que $\varphi(\Delta_P) = \mathbb{R}$, com o qual $h(z) = \bar{z}$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Em consequência, como $R(p_n) = p_{-n}$ para todo $n \geq 1$, conclui-se que $w_{-n} = \bar{w}_n$. A figura 3.26 mostra uma possível distribuição das imagens w_n , $n \neq 0$, dos pontos 1-cônicos de S_P no plano $\mathbb{C}$; observe-se que se pode assumir que $\varphi(p_1) = w_1 = i$. Possivelmente esta distribuição simétrica dos pontos w_n sobre o plano complexo com relação a reta real pode contribuir de alguma forma no estudo de mais propriedades da ferradura justa e em particular, no conhecimento das características da função de uniformização φ sobre a esfera furada S_∞ .

Figura 3.26: Possível distribuição dos pontos $w_{\pm k} = \varphi(p_{\pm k})$

Por enquanto voltemos à ferradura justa furada S_∞ e suas estimativas das coordenadas de comprimento. Dado que $S_{\mathcal{P}}$ tem somente um ponto irregular, a ferradura justa furada corresponde à uma flauta justa. Escolhemo a multicurva $\Gamma_\infty = \{\gamma_k\}_{k \geq 1}$ que separa em calças a S_∞ como foi explicado na seção 3.1, de maneira que, para todo $k \geq 1$,

- i) γ_{2k-1} separa os furos $\{p_{\pm 1}, p_{\pm 2}, \dots, p_{\pm k}\}$ de $\{q\} \cup \{p_{\pm n}\}_{n > k}$.
- ii) γ_{2k} separa os furos $\{p_{\pm 1}, p_{\pm 2}, \dots, p_{\pm k}, p_{k+1}\}$ de $\{q, p_{-k-1}\} \cup \{p_{\pm n}\}_{n > k+1}$.

Figura 3.27: Ferradura justa furada e as curvas geodésicas γ_k .

A figura 3.27 mostra um desenho da ferradura justa furada com a decomposição em calças feita pela multicurva Γ_∞ . Usaremos o Teorema 3.3.1 para estimar por acima os comprimentos hiperbólicos das geodésicas γ_k . Para todo $k \geq 2$, é fácil ver que $m_{2k-1} = \frac{4}{2^k}$ e $m_{2k} = \frac{3}{2^k}$. As componentes de $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(D_k)$ são todas do tipo 1 com a exceção de um único componente que é do tipo 4; a pesar disso observe-se que para $k \geq 2$, $f_{2k-1} = e_{2k-1} = \frac{1}{2^k}$ e $f_{2k} = e_{2k} = \frac{1}{2^{k+1}}$. Portanto,

$$\ell_\infty(\gamma_{2k-1}) \leq 4\pi, \quad \ell_\infty(\gamma_{2k}) \leq 6\pi$$

Observe-se que se $\gamma \subset S_\infty$ é uma curva homotópica à γ_{2k-1} , a curva $R(\gamma)$ também é homotópica a γ_{2k-1} . Isto implica em particular que $R(\gamma_{2k-1}) = \gamma_{2k-1}$, com o qual a imagem pelo φ de esta curva deve ser simétrica à reta real $\mathbb{R}$ e intersectar-lhe ortogonalmente. Com respeito a curva γ_{2k} , $R(\gamma_{2k})$ será outra geodésica em S_∞ que separa os furos $\{p_{\pm 1}, p_{\pm 2}, \dots, p_{\pm k}, p_{-k-1}\}$ dos furos $\{q, p_{k+1}\} \cup \{p_n\}_{n>k+1}$.

Considere-se agora geodésicas $\beta_{k,l}$, $k \geq 2$ e $l \geq 1$, similares as curvas da seção 3.5, onde $\beta_{k,l}$ separa os furos $\{p_k, p_{k+1}, \dots, p_{k+l}\}$ do resto dos furos. Seja β_{-k+l} a geodésica fechada simples homotópica à $R(\beta_{k,l})$; esta separa $\{p_{-k}, p_{-k-1}, \dots, p_{-k-l}\}$ do resto dos furos. A figura 3.28 mostra um desenho de tais geodésicas. Pela Proposição 1.3.1 ii) e v), fixado $k \geq 2$, a família de geodésicas $\{\beta_{\pm k+l}\}_{l \geq 1}$ são disjuntas duas a duas. Por outro lado γ_{2k-1} intersecta transversalmente a todas elas enquanto que γ_{2k} intersecta transversalmente a todas exceto a $\beta_{k,1}$. Usando o argumento da seção 3.5, a Proposição 3.5.1 e o exemplo 3.5.2, tem-se,

$$\ell_\infty(\beta_{\pm k+l}) \leq 2^{l+2} \cdot \pi,$$

Figura 3.28: Geodésicas $\beta_{\pm k,l}$, para $l = 1, 2, 3$ e $k = 2$.

com o qual,

$$\ell_\infty(\gamma_{2k-1}) \geq 8 \sum_{l \geq 1} \eta(2^{l+2}\pi) = 8 \sum_{l \geq 1} \log \coth(2^l \pi) \approx 1,4 \times 10^{-5}$$

$$\ell_\infty(\gamma_{2k}) \geq 4\eta(8\pi) + 8 \sum_{l \geq 2} \eta(2^{l+2}\pi) = 4 \log \coth(2\pi) + 8 \sum_{l \geq 2} \log \coth(2^l \pi)$$

Em qualquer caso existem constantes $m, M > 0$ tais que para todo $k \geq 1$,

$$m \leq \ell_\infty(\gamma_k) \leq M$$

Assim, o modelo Fuchsiano G_∞ de S_∞ é um grupo Fuchsiano do primeiro tipo e as métricas $d_{\mathcal{T}}$ e $d_{\mathcal{L}}$ do espaço de Teichmüller quaseconforme $\mathcal{T}(S_\infty)$ são topologicamente equivalentes. Por outro lado, se $\Sigma(S_\infty)$ denota a coleção de todas as geodésicas fechadas em S_∞ , cada elemento de $\Sigma(S_\infty)$

diferente de γ_k , deve intersectar transversalmente à alguma das curvas γ_k com o qual conclui-se também que $\inf_{\gamma \in \Sigma(S_\infty)} \ell_\infty(\gamma) > 0$.

Com relação as coordenadas de torção $\tau = (\tau_k)_{k \geq 1}$ da flauta S_∞ , mostraremos que existe $T > 0$ tal que $|\tau_k| \leq T$ para todo $k \geq 1$. Observe-se que ao considerar os núcleos de Nielsen de duas calças consecutivas de S_∞ e colar elas, tem-se uma superfície S_k do tipo $(0, 2, 2)$ como as mostradas na figura 3.29. Assim que é suficiente estimar por acima os comprimentos hiperbólico das curvas geodésicas $\alpha_k \subset S_k$ que separam dois furos consecutivos do resto dos furos de S_∞ , para logo usar a fórmula de Okai na Proposição 1.3.10 no caso onde $\ell_3 = \ell_4 = 0$, e assim conseguir estimativas para as coordenadas τ_k , $k \geq 1$.

Figura 3.29: Duas calças consecutivas de S_∞ coladas. A primeira tem como geodésica central à γ_{2k-1} e a segunda à γ_{2k} . As geodésicas α_{2k-1} e α_{2k} separam os furos do bordo em cada superfície.

Observe-se que α_{2k-1} limita um disco que contém os furos p_{-k} e p_{k+1} enquanto que α_{2k} limita um disco que contém os furos p_{k+1} e p_{-k-1} . Os anéis A_{2k-1} e A_{2k} mostrados na figura 3.30 são redutíveis as curvas α_{2k-1} e α_{2k} respectivamente. Usando o Lema 3.2.2 com estos anéis e a densidade $\rho_e(z)|dz|$, tem-se,

$$\ell_\infty(\alpha_{2k-1}) \leq 18\pi, \quad \ell_\infty(\alpha_{2k}) \leq 12\pi$$

Igualmente, como as curvas α_k intersectan as curvas γ_k para todo $k \geq 2$, e estas têm comprimentos limitados superiormente por uma constante, então as curvas α_k também são limitados inferiormente por uma constante. Assim a família $\{\ell_\infty(\alpha_k)\}_{k \geq 1}$ está limitada por constantes positivas. Segue-se da fórmula de Okai, que a sequência $\tau = (\tau_k)_{k \geq 1}$ deve estar limitada.

Em particular, observe-se que as geodésicas α_{2k} são transformados pela reflexão R numa curva homotópica em S_∞ a elas mesmas. Portanto elas devem ser invariantes pela reflexão R e assim, as geodésicas α_{2k} devem ser simétrica com respeito a curva $\Delta_{\mathcal{P}} \setminus \{q\}$. Por outro lado, sendo as curvas $\{\alpha_{2k}\}_k$ com comprimento limitado superiormente, tal vez pode-se provar que existe $M > 0$ tal que $|\text{Im } w_{\pm k}| \leq M$, para todo $k \geq 1$.

Para finalizar, a ferradura justa pertence a uma família infinita $\{f_i\}_{i \in I}$ de homeomorfismos pseudo-Anosov generalizados chamada de família unimodal (ver [dCH04] para mais detalhes), onde cada f_i esta definido sobre uma esfera de papel S_i que pode ou não ter pontos irregulares; aquí o conjunto de índices I é um subconjunto enumerável e denso do intervalo $(\sqrt{2}, 2]$ e f_2 corresponde

Figura 3.30: Aneis A_{2k-1} na esquerda, e A_{2k} na direita, na ferradura justa furada

exatamente com a ferradura justa. Quando o espaço de papel S_i tem irregularidades, estes correspondem aos pontos de acumulação das singularidades das folheações mensuradas invariantes pela aplicação f_i e localmente os pareamentos perto de uma irregularidade são como os pareamento da ferradura justa ou como os pareamento do exemplo 3.3.4, onde todos eles têm comprimentos proporcionais a potências λ^n , sendo $\lambda > 1$ a constante de expansividade na folheação instável do homeomorfismo f_i . Usando as técnicas desenvolvidas nesta tese, principalmente o Teorema 3.3.2 e a Proposição 3.5.4, não deve ser difícil demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 3.6.1. *Se S_∞ é a esfera de papel furada associada a uma esfera de papel da família unimodal com pontos irregulares, então existem constantes $m, M > 0$ tais que, para cada geodésica γ na multicurva Γ_∞ que decompoe à S_∞ em calças como foi descrito na seção 3.1, tem-se,*

$$m \leq \ell_\infty(\gamma) \leq M.$$

□

Referências Bibliográficas

- [Ahl73] L.V. Ahlfors. *Conformal invariants: Topics in geometric function theory*. McGraw-Hill, New York, 1973. [21](#)
- [ALP⁺11] D. Alessandrini, L. Liu, A. Papadopoulos, W. Su e Z. Sun. On Fenchel-Nielsen coordinates on Teichmüller spaces of surfaces of infinite type. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 36, no. 2:621–659, 2011. [3](#), [25](#)
- [ALPS12a] Daniele Alessandrini, Lixin Liu, Athanase Papadopoulos e Weixu Su. On local comparison between various metrics on Teichmüller spaces. *Geometriae Dedicata*, 157(1):91–110, 2012. [3](#)
- [ALPS12b] Daniele Alessandrini, Lixin Liu, Athanase Papadopoulos e Weixu Su. On various Teichmüller spaces of a surface of infinite topological type. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 140(2):561–574, 2012. [3](#), [25](#)
- [ALPS16] Daniele Alessandrini, Lixin Liu, Athanase Papadopoulos e Weixu Su. On the inclusion of the quasiconformal Teichmüller space into the length-spectrum Teichmüller space. *Monatshefte für Mathematik*, 179(2):165–189, 2016. [3](#), [25](#)
- [APLS11] Daniele Alessandrini, Athanase Papadopoulos, Lixin Liu e Weixu Su. The behaviour of Fenchel-Nielsen distance under a change of pants decomposition. *arXiv preprint arXiv:1105.0202*, 2011. [3](#), [23](#)
- [Bas90] A. Basmajian. Constructing pairs of pants. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ. Series A I. Mathematica*, 15, 1990. [27](#)
- [Bas93] A. Basmajian. Hyperbolic structure for surfaces of infinite type. *American Math Soc*, 336, 1993. [3](#), [5](#), [11](#), [12](#), [18](#), [26](#), [27](#), [30](#)
- [Bea83] A. Beardon. *The geometry of discrete groups*. Springer-Verlag, New York, 1983. [13](#), [20](#)
- [Ber12] M. Vinhas Bertolini. Espaços de papel. Dissertação de Mestrado, IME, São Paulo University, 2012. [3](#), [33](#), [38](#), [43](#)
- [Ber16] M. Vinhas Bertolini. *Groups representations and Real Trees*. Tese de Doutorado, IME, São Paulo University, 2016. [4](#)
- [BH95] M. Bestvina e M. Handel. Train-tracks for surface homeomorphisms. *Topology*, 34(1):109–140, 1995. [1](#)
- [BK08] Ara Basmajian e Youngju Kim. Geometrically infinite surfaces with discrete length spectra. *Geometriae Dedicata*, 137(1):219, 2008. [27](#)
- [Bon09] F. Bonahon. *Low dimensional geometry*. AMS, Providence, 2009. [5](#)
- [BŠ17] Ara Basmajian e Dragomir Šarić. Geodesically complete hyperbolic structures. Em *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, páginas 1–24. Cambridge University Press, 2017. [3](#), [27](#)

- [Bus92] P. Buser. *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*. Progress in mathematics, Birkhauser, Boston Inc, Boston MA, 1992. 5, 20
- [CGL06] R. Chamanara, F. P. Gardiner e N. Lakic. A hyperelliptic realization of the horseshoe and baker maps. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 26(6):1749–1768, 2006. 33, 41
- [Cha04] R. Chamanara. Affine automorphism groups of surfaces of infinite type. *In the tradition of Ahlfors and Bers, III*, 355, 2004. 40
- [Com11] Mark Comerford. Short separating geodesics for multiply connected domains. *Central European Journal of Mathematics*, 9(5):984–996, 2011. 22
- [dC05] Andre de Carvalho. Extensions, quotients and generalized pseudo-Anosov maps. *Graphs and patterns in mathematics and theoretical physics*, 73:315–338, 2005. iii, v, 1, 3, 33, 35, 36
- [dCH04] André de Carvalho e Toby Hall. Unimodal generalized pseudo-Anosov maps. *Geometry & Topology*, 8(3):1127–1188, 2004. 36, 87
- [dCH10] André de Carvalho e Toby Hall. Paper surfaces and dynamical limits. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 107(32):14030–14035, 08 2010. 1, 2, 3, 36
- [dCH12] André de Carvalho e Toby Hall. Paper folding, Riemann surfaces and convergence of pseudo-Anosov sequences. *Geometry & Topology*, 16(4):1881–1966, 2012. 3, 33, 38, 41, 43, 44, 45, 46, 47, 84
- [dCH13] André de Carvalho e Toby Hall. Riemann surfaces out of paper. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 108(3):541–574, 2013. 3, 43
- [Evr17] Özgür Evren. Inequivalent topologies on the Teichmüller space of the flute surface. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 145(6):2607–2621, 2017. 3, 27
- [FM11] Benson Farb e Dan Margalit. *A primer on mapping class groups (pms-49)*. Princeton University Press, 2011. 5, 20
- [Haa96] Andrew Haas. Dirichlet points, Garnett points, and infinite ends of hyperbolic surfaces. i. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ. Series A I. Mathematica*, 21(1):3–29, 1996. 27
- [Hem] Joachim A. Hempel. On the uniformization of the n -punctured sphere. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 20(2):97–115. 2
- [HS07] Andrew Haas e Perry Susskind. The geometry at infinity of a hyperbolic Riemann surface of infinite type. *Geometriae Dedicata*, 130(1):1–24, Dec 2007. 27, 31, 32
- [Iva01] D. Burago, Y. Burago, S. Ivanov. *A course in metric geometry*. American mathematical society, providence, RI, 2001. 5, 6, 8, 9
- [J.H06] J.H. Hubbard. *Teichmüller theory and applications of geometry, topology, and dynamics: Teichmüller theory*. Matrix editions, 2006. 4, 5, 14, 19, 20, 22
- [Kat88] Svetlana Katok. *Fuchsian group*. Chicago Press, 1988. 5, 13
- [Kee74] Linda Keen. Collars on Riemann surfaces. Em *Discontinuous groups and Riemann surfaces (Proc. Conf., Univ. Maryland, College Park, Md., 1973)*, páginas 263–268, 1974. 21

- [Kin11] Erina Kinjo. On Teichmüller metric and the length spectrums of topologically infinite Riemann surfaces. *Kodai Math. J.*, 34(2):179–190, 06 2011. [3](#), [25](#)
- [Lix99] Liu Lixin. On the length spectrums of non-compact Riemann surfaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 24(1):11–22, 1999. [25](#)
- [LSW08] Lixin Liu, Zongliang Sun e Hanbai Wei. Topological equivalence of metrics in Teichmüller space. Em *ANNALES-ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE MATHEMATICA*, volume 33, página 159. ACADEMIA SCIENTIARUM FENNICA, 2008. [25](#)
- [Mas88] Bernard Maskit. *Kleinian group*. Springer-Verlag, New York, 1988. [5](#), [14](#), [15](#), [84](#)
- [Moo25] R.L Moore. Concerning upper semi-continuous collections of continua. *Trans. Amer. Math. Soc*, 27:416–428, 1925. [8](#)
- [Oka93] T. Okai. Effects of change of pants decompositions on their Fenchel-Nielsen coordinates. *Kobe J. Math*, 10:215–223, 1993. [23](#)
- [Ota96] Jean-Pierre Otal. Le théorème d’hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3. *Astérisque*, 1996. [4](#)
- [PRT⁺11] Ana Portilla, José M Rodríguez, Eva Tourís et al. A real variable characterization of Gromov hyperbolicity of flute surfaces. *Osaka Journal of Mathematics*, 48(1):179–207, 2011. [27](#)
- [Ran16] Anja Randecker. *Geometry and topology of wild translation surfaces*. KIT Scientific Publishing, 2016. [1](#), [41](#)
- [Sar15] D. Saric. Fenchel-Nielsen coordinates for asymptotically conformal deformations. *ArXiv e-prints*, Julho 2015. [3](#)
- [Shi03] H. Shiga. On a distance defined by the length sprectrum on Teichmüller space. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Series A I. Mathematica*, 28:315–326, 2003. [3](#), [25](#)
- [Why63] G. T. Whyburn. *Analytic topology*. American mathematical society, providence,RI, 1963. [8](#), [9](#)
- [YT92] Imayoshi Y e M. Taniguchi. *An introduction to Teichmüller spaces*. Springer-Verlag, Tokio, 1992. [5](#), [22](#), [30](#)
- [Zor06] Anton Zorich. Flat surfaces. *Frontiers in number theory, physics, and geometry I*, páginas 439–585, 2006. [1](#), [40](#)
- [ZT88] P G Zograf e L A Takhtadzhyan. On Liouville’s equation, accessory parameters, and the geometry of Teichmüller space for Riemann surfaces of genus 0. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 60(1):143, 1988. [2](#)