Equações de Difusão Não Locais do tipo Neumann

Allan Fernandes Banzatto

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Mestre em Ciências

Programa: Programa de Pós Graduação em Matemática Aplicada
Orientador: Prof. Dr. Marcone Corrêa Pereira

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CNPq

São Paulo, agosto de 2018

Equações de Difusão Não Locais do tipo Neumann

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 27/09/2018. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Marcone Corrêa Pereira (orientador) - IME-USP
- Prof^{a}. Dr^{a}. Juliana Fernandes da Silva Pimentel - UFRJ
- Prof. Dr. Marcus Antonio Mendonça Marrocos - UFABC

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Professor Marcone Corrêa Pereira, pela paciência e orientação, à minha família pelo apoio e suporte, a todos os meus amigos da Pós-Graduação do IME-USP pela força e ajuda e também agradeço à Letícia, pois sem ela este trabalho não teria chegado ao fim.

Resumo

Banzatto, A. F. **Equações de Difusão Não Locais do tipo Neumann**. 2018. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

Neste trabalho estudaremos uma classe de problemas não locais do tipo Neumann. Consideramos o caso linear não homogêneo, bem como o semi-linear com não linearidades globalmente Lipschitz. Procuramos escrever um trabalho auto-contido. Apresentamos alguns resultados clássicos de Análise e suas aplicações no contexto de equação de evolução não local. Na introdução, apresentamos uma motivação para tais equações tendo em vista os fenômenos de reação e difusão baseados no trabalho de P. Fife [4].
Palavras-chave: EDP, Difusão, Não homogênea, Neumann.

Abstract

Banzatto, A. F. **Neumann Non-Local Diffusion Equations**. 2018. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

In this work we will study a class of nonlocal problems of the Neumann type. We consider the non-homogeneous linear case as well as the semi-linear one with globally Lipschitz non-linearities. We seek to write a self-contained work with some classic results of Analysis and its applications in the context of non-local evolution equations. In the introduction, we present a motivation for such equations in view of the phenomena of reaction and diffusion based on the work of P. Fife [4].
Keywords: PDE, Diffusion, Nonhomogeneous, Neumann.

Sumário

1 Resultados Preliminares **5**

1.1 Definições Básicas e Desigualdades 5

1.2 Teorema de Arzelá-Ascoli 7

1.3 O Espectro de um Operador Limitado 9

1.4 Espaços L^p 9

2 Contração Com Parâmetros e o Teorema de Stampacchia **13**

2.1 Teorema da Contração Uniforme 13

2.2 Teorema de Stampacchia e Lax-Milgram 18

3 Problema de Neumann Não Local **29**

3.1 Equação Linear Não Homogênea 29

3.1.1 Resultados Preliminares 29

3.1.2 Existência e Unicidade 38

3.2 Uma Equação Semi-Linear 44

3.3 Regularidade com Relação aos Parâmetros 47

Referências Bibliográficas **51**

Introdução

Baseando-se principalmente nos trabalhos [1, 10], a finalidade desta dissertação é discutir alguns resultados sobre equações de evolução semi-lineares não locais do tipo Neumann. Lidaremos com a unicidade e existência global de soluções e comportamento assintótico no caso linear. Inicialmente, utilizaremos algumas ideias de [4] para dar uma motivação da classe de equações discutidas em nosso trabalho.

Para isto, considere $J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função par, não negativa e contínua com

$$\int_{\mathbb{R}^n} J(x)dx = 1 \text{ e } \|J\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Inicialmente, observamos que equações de evolução não locais da forma

$$\begin{cases} u_t(t,x) = (J * u - u)(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} J(x-y)u(t,y)dy - u(t,x), \ x \in \Omega, t > 0 \\ u(t,x) \equiv 0, \text{ em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

bem como suas variações, tem sido muito utilizadas na modelagem de processos de difusão. De acordo com [4], se $u(t,x)$ representa a densidade populacional no ponto x e instante t, e $J(x-y)$ a distribuição probabilística de nos movermos do ponto y para o ponto x, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)u(t,y)dy = (J * u)(t,x)$$

é a taxa cujo indivíduos estão chegando na posição x de todos os outros lugares e

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^N} J(y-x)u(t,x)dy$$

é a taxa que mostra o deslocamento de x para todos os outros lugares y. Esta consideração, na falta de fontes internas ou externas e na suposição de que fora de Ω não há vida, nos leva para o fato de que a densidade u satisfaz a equação (1).

O problema (1) é chamado de *equação de difusão não local do tipo Dirichlet*, embora a difusão da densidade u no ponto x e tempo t não dependa das derivadas $u(t,x)$, ela depende de todos os valores de u numa vizinhança de x através do termo de convolução $J * u$ bem como dos valores de u em x.

Fixemos então Ω um domínio limitado e conexo do $\mathbb{R}^N$. Vamos começar a olhar para possíveis generalizações da equação clássica semilinear do calor

$$u_t(t,x) = \Delta u(t,x) - f(u(t,x)), \ \forall x \in \Omega \text{ e } t > 0. \tag{2}$$

Focando em extensões não locais, devemos questionar qual é a contrapartida mais "natural"do termo de difusão Δu. Uma maneira de motivar nossa resposta é caracterizar seu negativo, $-\Delta u$ como a derivada funcional no espaço $L^2(\Omega)$ da integral de Dirichlet

$$\epsilon_0[u(t,x)] = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u(t,x)|^2 dx. \tag{3}$$

Lembremos da seguinte relação muito utilizada em cálculo:

$$div(u_t(t,x)\nabla u(t,x)) = \nabla u_t(t,x)\nabla u(t,x) + u_t(t,x)\Delta u(t,x), \tag{4}$$

ou seja,

$$\nabla u_t(t,x)\nabla u(t,x) = div(u_t(t,x)\nabla u(t,x)) - u_t(t,x)\Delta u(t,x). \tag{5}$$

Então, para u suficientemente suave, obtemos

$$\frac{d\epsilon_0}{dt}[u(t,\cdot)] = \int_\Omega \nabla u_t(t,\cdot)\nabla u(t,\cdot)dx.$$

Utilizando (5) e assumindo que $\int_\Omega div(u(t,x)\nabla u(t,x))dx = 0$ neste caso, encontramos

$$\frac{d\epsilon_0}{dt}[u(t,\cdot)] = \int_\Omega -u_t(t,\cdot)\Delta u(t,\cdot)dx,$$

ou seja,

$$\frac{d\epsilon_0}{dt}[u(t,\cdot)] = \langle -\Delta u(t,\cdot), u_t(t,\cdot)\rangle, \tag{6}$$

onde a operação $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é o produto interno de $L^2(\Omega)$. Assim, escrevemos formalmente que

$$-\Delta u(t,x) = \frac{\delta\epsilon_0}{\delta u}, \tag{7}$$

onde $\frac{\delta\epsilon}{\delta u}$ é o diferencial em $L^2(\Omega)$ do funcional $\epsilon[u(t,x)]$.

A energia ϵ_0 é muitas vezes interpretada como uma medida de quanto u deixa de ser constante. Além disso, para todo $u \in H^1(\Omega)$, $\epsilon_0[u] \geq 0$ com $\epsilon_0[u] = 0$ se, e somente se, u é constante em quase todo ponto.

Um funcional energético não local natural que pode agir como uma medida alternativa do mesmo problema é

$$\epsilon_{10}[u(t,x)] = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{4}J(x-y)(u(t,x)-u(t,y))^2 dxdy, \tag{8}$$

para alguma função não negativa J assumindo, por exemplo que $u(x) \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$, como em (1). Novamente, $\epsilon_{10}[u] \geq 0$ e $\epsilon_{10}[u] = 0$ apenas quando u é constante.

Assim, utilizando a Proposição 3.1, do Capítulo 3, temos que

$$\begin{aligned}\frac{d\epsilon_{10}}{dt}[u(t,x)] &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)(u(t,x)-u(t,y))(u_t(t,x)-u_t(t,y))dxdy \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N} u_t(t,y)\int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)(u(t,x)-u(t,y)dxdy,\end{aligned}$$

o que nos dá

$$\frac{\delta\epsilon_{10}}{\delta u}[u(t,x)] = -\int_{\mathbb{R}^n} J(x-y)(u(t,x)-u(t,y))dx,$$

que é equivalente a

$$\frac{\delta\epsilon_{10}}{\delta u}[u(t,x)] = -J*u(t,x) + \left(\int_{\mathbb{R}^n} J(x-y)dx\right)u(t,x). \tag{9}$$

Utilizando a hipótese $\int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)dx = 1$, encontramos

$$\frac{\delta}{\delta u}\epsilon_{10}(u(t,x)) = -J*u(t,x) + u(t,x).$$

Dessa forma, se entendemos que ϵ_{10} é formalmente análogo a ϵ_0, concluímos que a expressão $J*u-u$

também é análoga a Δu em (2).

Indo um pouco além, podemos incorporar o termo não linear $f(u)$ em tais modelos da seguinte maneira: seja W uma função derivável tal que $W' = f$. Definimos

$$\epsilon[u(t,x)] = \epsilon_0[u(t,x)] + \int_\Omega W(u(t,x))dx, \tag{10}$$

e

$$\epsilon_1[u(t,x)] = \epsilon_{10}[u(t,x)] + \int_\Omega W(u(t,x))dx. \tag{11}$$

Observamos que o efeito não linearidade pode ser interpretada como uma reação ou força externa agindo no sistema assumindo valores que dependem da própria densidade u no sistema. (Para maiores discussões neste sentido, veja [8].)

Assim da equação (2) concluímos que

$$u_t(t,x) = -\frac{\delta\epsilon}{\delta u}, \tag{12}$$

já que, por (7) e $W'(u) = f(u)$ temos

$$\frac{\delta}{\delta u}\epsilon[u(t,x)] = \frac{\delta}{\delta u}\epsilon_0[u(t,x)] + \frac{\delta}{\delta u}\int_\Omega W(u(t,x))dx = -\Delta u + f(u(t,x)).$$

Analogamente, podemos calcular sua versão não local correspondente $u_t(t,x) = -\frac{\delta\epsilon_1}{\delta u}$ que é

$$u_t(t,x) = J * u(t,x) - u(t,x) - f(u(t,x)). \tag{13}$$

A expressão $\frac{\delta\epsilon}{\delta u}$ é o diferencial em $L^2(\Omega)$ do funcional $\epsilon[u(t,x)]$, e as leis de evolução (2), (13) e em geral (12) são derivadas de suas respectivas energias. Deste modo, obtemos de (12) que

$$\frac{d}{dt}\epsilon[u(t,x)] = \left\langle \frac{\delta\epsilon}{\delta u}, u_t \right\rangle = -\left\| \frac{\delta\epsilon}{\delta u} \right\|^2. \tag{14}$$

Outra interpretação de (12) e seu análogo para ϵ_1 sugere o seguinte: do lado direito, a quantidade $-\frac{\delta\epsilon}{\delta u}$, sendo o negativo da taxa a qual ϵ muda quando submetida a variação de u, pode ser considerada uma força, em analogia com os campos de força potenciais. O lado esquerdo de (12) é então a reação ou fluxo, no sentido de um movimento ou taxa de mudança se contrapondo a uma força exercida. Assim, (12) pode representar alguma relação que envolve força/reação.

Finalmente, nos modelos de difusão de organismos no espaço onde u é sua densidade, a expressão $J*u-u$ pode representar transporte através de mecanismos de reação a longa distância. Com efeito, se $J(r)$ é uma função de distribuição probabilística de difusão em relação à distância r,temos que a expressão $J*u-u$ à direita de (13) representa a taxa líquida de aumento devido à difusão. Note que existe um princípio de conservação, já que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (J * u(t,x) - u(t,x))dx = 0.$$

Para problemas locais, as duas condições de contorno mais comuns são a de Neumann e Dirichlet. Quando olhamos para condições de contorno em problemas não locais, temos que modificar as formulações usuais das equações locais. O problema que daremos atenção neste trabalho é o análogo às condições de Neumann:

$$\begin{cases} u_t(t,x) = \displaystyle\int_\Omega J(x-y)(u(t,y) - u(t,x))dy, \ x \in \Omega, t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x), x \in \Omega. \end{cases} \tag{15}$$

Neste modelo temos que o integrando leva em conta a difusão apenas dentro de Ω. De fato, como

já discutido anteriormente, temos que a expressão $\int J(x-y)(u(t,y)-u(t,x))dy$ leva em conta os indivíduos chegando ou saindo da posição x de outros lugares. Como estamos integrando em Ω, impomos que a difusão se estabeleça apenas em Ω. Desta forma, os indivíduos não podem entrar ou sair da região de interesse.

Problemas não locais como (1) e (15) são frequentemente utilizados para modelar processos ou situações em ecologia, biologia, processamento de imagens, sistemas de partículas, etc. [1]

Finalmente observamos que aqui nesta dissertação, também vamos considerar o problema semilinear relacionado a (15)

$$\begin{cases} u_t(t,x) = \displaystyle\int_\Omega J(x-y)(u(t,y)-u(t,x))dy + f(u(t,x)), \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases}$$

assumindo f globalmente Lipschitz em $\mathbb{R}$. Assim como no problema (15), temos que a expressão $\int J(x-y)(u(t,y)-u(t,x)dy$ leva em conta os indivíduos chegando ou saindo da posição x de outros lugares, com a difusão passando-se apenas em Ω, sobre ação de uma força externa que depende da própria solução u. Ou seja, podemos caracterizar f como sendo um agente externo que altera de alguma forma o modo como os indivíduos se locomovem e interagem dentro de Ω. Para tal problema também mostraremos unicidade e existência global de soluções em $L^2(\Omega)$.

[1] Veja por exemplo [1, 4]. Nesse sentido o estudo qualitativo destes modelos se torna uma tarefa útil e importante em Análise Matemática.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo vamos enunciar e demonstrar alguns resultados que serão usados no decorrer deste trabalho. Como por exemplo mencionamos as Desigualdades de Young, Hölder e Minkowski. Enunciaremos também, baseando-se em [11], o Teorema de Arzelá-Ascoli, que nos será muito útil. Logo após estudaremos Operadores Compactos. Em seguida introduzimos os Espaços L^p e concluímos o capítulo com o Teorema de Fischer-Riez, que nos diz que todo espaço L^p é um espaço de Banach.

1.1 Definições Básicas e Desigualdades

Definição 1.1 *Uma sequência $\{x_n\}$ é dita de Cauchy se: dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n, m > n_0$, então*

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Definição 1.2 *Um espaço normado X é um espaço de Banach se toda sequência de Cauchy em X converge. Dizemos que $\mathcal{L}(X, Y)$ é o espaço de operadores lineares contínuos com domínio X e contra-domínio Y.*

Definição 1.3 *Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial com produto interno que também é um espaço de Banach com a norma canônica definida pelo produto interno*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Notação: Escrevemos $f(x) = O(x)$ se $x \to x_0$, caso exista $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c|g(x)|$, para todo x próximo a x_0 e, $f(x) = o(g(x))$, se $x \to x_0$, caso ocorra

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Definição 1.4 *Uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ é diferenciável no ponto $a \in X$ se existe uma aplicação contínua linear $f'(a) : X \longrightarrow Y$ tal que*

$$\|f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)\|_Y = o(\|x - a\|_X), \text{ com } x \to a,$$

ou seja,

$$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)\|_Y}{\|x - a\|_X} = 0.$$

Neste caso, $f'(a) \in \mathcal{L}(X, Y)$ é chamada derivada de Frechèt em a.

Quando f é n-vezes continuamente diferenciável em um aberto $U \subset X$, consideremos suas derivadas de k-ésima ordem $f^{(k)}, 1 \leq k \leq n$ como sendo um polinômio contínuo de ordem k para cada $x \in U$, determinado pela fórmula de Taylor:

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)(h^k) + o(\|h\|_X^n), h \to 0, x \in U,$$

onde $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Uma aplicação $f : U \subset X \longrightarrow Y$, U aberto, é analítica em U se f é infinitamente sempre diferenciável em cada ponto de U e, se $\forall x \in U$, existe $\delta = \delta(x) > 0$, tal que sempre que $\|h\|_X \leq \delta$,

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)(h^k),$$

a série convergente na norma Y uniformemente em $\|h\|_X \leq \delta$.

Proposição 1.1 *Aplicações contínuas com domínios compactos são uniformemente contínuas.*

Demonstração: Seja $K \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto compacto, Y um espaço de Banach, $f : K \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua. Sejam $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ tais que $x_k - y_k \to 0$. Suponha que existe $\delta > 0$ e subsequência $\{k_1, \cdots, k_j, \cdots\}$ tais que

$$\|f(x_{k_j}) - f(y_{k_j})\| \geq \delta, \ \forall \ j \in \mathbb{N}.$$

Como K é compacto, tomando subsequência, se necessário, podemos supor que $\lim_{j\to\infty} x_{k_j} = \lim_{j\to\infty} y_{k_j} = z_0 \in K$. Mas f é contínua, então $\|f(x_{k_j}) - f(y_{k_j})\| \to 0$. Mostrando que não pode existir tal $\delta > 0$ e, assim, $\|f(x_k) - f(y_k)\| \to 0$. Portanto f é uniformemente contínua. ■

Lema 1.2 *Para todo $a, b \geq 0$, vale*

$$(a+b)^p \leq 2^p(a^p + b^p).$$

Demonstração: De fato, temos

$$\begin{aligned}(a+b)^p &\leq (\max\{a,b\} + \max\{a,b\})^p \\ &= (2\max\{a,b\})^p \\ &= 2^p\{\max a, b\}^p \leq 2^p(a^p + b^p).\end{aligned}$$

■

Proposição 1.3 (Desigualdade de Young) *Se $a, b \geq 0$, $p > 1$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração: Se $a = 0$ e $b = 0$, a conclusão é clara. Assumamos que ambos sejam postivos $(a, b > 0)$. Se $k \in (0,1)$, definimos $f(t)$ para $t \geq 1$ por $f(t) = k(t-1) - t^k + 1$. Notemos que $f(1) = k(1-1) - 1^k + 1 = 0$ e que

$$\begin{aligned} f'(t) &= k - kt^{k-1} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow k(1 - t^{k-1}) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - t^{k-1} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow t^{k-1} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{t^{1-k}} \leq 1, \end{aligned}$$

que vale pois $1 - k > 0$ e $t \geq 1$. Deste fato $(f'(t) \geq 0)$ concluímos que $f(t) = k(t-1) - t^k + 1 \geq 0$, para todo $t \geq 1$. Daí,

$$t^k \leq k(t-1) + 1 = kt + (1-k). \tag{1.1}$$

Se $a \geq b$, colocamos $t = \frac{a}{b}$ (portanto, $t \geq 1$) e $k = \frac{1}{p}$ (pertence a $(0,1)$ pois $p \geq 1$). Substituindo em (1.1), temos

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{a}{b} - 1\right) + 1.$$

Multiplicando a desigualdade acima por $b^{\frac{1}{q}} b^{\frac{1}{p}}$ temos,

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{a}{b} - 1\right) b^{\frac{1}{q}} b^{\frac{1}{p}} + b^{\frac{1}{q}} b^{\frac{1}{p}}.$$

Usando $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ainda obtemos

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} &\leq \frac{b}{p}\left(\frac{a}{b} - 1\right) + b \\ &= \frac{a}{p} - \frac{b}{p} + b \\ &= \frac{a}{p} + b\left(1 - \frac{1}{p}\right) \\ &= \frac{a}{p} + b\left(\frac{1}{q}\right) \\ &= \frac{a}{p} + \frac{b}{q}. \end{aligned}$$

O caso $a < b$ é completamente análogo. ■

1.2 Teorema de Arzelá-Ascoli

Definição 1.5 *Seja X um espaço topológico. Dizemos que $H \subset X$ é relatimente compacto se $\overline{H}$ é compacto.*

Definição 1.6 *Seja X um subconjunto de um espaço métrico. Dizemos que X é totalmente limitado se dado $\varepsilon > 0$ existe um recobrimento $\{O_1, \cdots, O_k\}$ com a propriedade: se $x, y \in O_i$, então $d(x,y) \leq \varepsilon$.*

Teorema 1.4 (Arzelá-Ascoli) *Suponha X um espaço métrico compacto, $C(X, \mathbb{C})$ o conjunto de todas as funções $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ contínuas, com a métrica*

$$d(f,g) = \sup\{d(f(x), g(x)); x \in X\}$$

e $\Phi \subset C(X, \mathbb{C})$ é pontualmente limitado e equicontínua. Mais explicitamente

- ***a)*** $\sup\{|f(x)| : f \in \Phi\} < \infty$ $\forall x \in X$, *e*
- ***b)****Se $\varepsilon > 0$, todo $x \in X$ tem uma vizinhança V tal que*

  $$|f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

  para todo $y \in V$ e para toda $f \in \Phi$.

Então Φ é totalmente limitada em $C(X, \mathbb{C})$.

Demonstração: Fixe $\varepsilon > 0$. Para todo $x \in X$, seja V_x uma vizinhança tal que b) ocorra, $\cup_{x \in X} V_x \supset X$. Como X é compacto, existem pontos $x_1, \cdots, x_n \in X$, com vizinhanças $V_1, \cdots, V_n$ tais que $X = \cup_{i=1}^{n} V_i$, de modo que

$$|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon, \ (\forall f \in \Phi, x \in V_i, 1 \leq i \leq n). \tag{1.2}$$

Note que

$$|f(x)| = |f(x) + f(x_i) - f(x_i)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i)|,$$

e, por a)

$$|f(x)| < \varepsilon + M_i,$$

onde $M_i = \sup\{|f(x_i)| : f \in \Phi\}$.

Como X é compacto, segue que

$$\begin{aligned}\sup\{|f(x)| : x \in X, f \in \Phi\} &= \sup \cup_{i=1}^{n}\{|f(x)| : x \in V_i, f \in \Phi\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \sup\{|f(x)| : x \in V_i, f \in \Phi\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon + M_i = M.\end{aligned}$$

Seja agora $D = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq M\}$ e associe a cada $f \in \Phi$ o seguinte ponto $p(f) \in D^n \subset \mathbb{C}^n$:

$$p(f) = (f(x_1), \cdots, f(x_n)). \tag{1.3}$$

Para cada $f \in \Phi$ e $\varepsilon > 0$, defina também $B_\varepsilon(f) = B_\varepsilon(f(x_1)) \times \cdots \times B_\varepsilon(f(x_n))$, com $|B_\varepsilon(f)| < \varepsilon$, onde $B_\varepsilon(f(x_i))$ é uma bola em D com raio ε pequeno.

Como D é compacto, $D^n = D \times \cdots \times D$ também é compacto. Note que $\cup_{f\in\Phi} B_\varepsilon(f) \subset D^n$. Além disso, por construção,

$$D^n \setminus \bigcup_{f\in\Phi} B_\varepsilon(f)$$

também é compacto. Logo existe uma cobertura $\mathcal{C}$ de subconjuntos de diâmetro menor que ε, tal que

$$\mathcal{C} \cup \left(\bigcup_{f\in\Phi} B_\varepsilon(f)\right) \supset D^n.$$

Assim, D^n possui uma cobertura finita $\mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_m, B_\varepsilon(f_1), \cdots, B_\varepsilon(f_m)$ tais que, para toda $f \in \Phi$, existe k, $1 \leq k \leq m$, de modo que

$$|f(x_i) - f_k(x_i)| < \varepsilon, \ 1 \leq i \leq n. \tag{1.4}$$

Como para todo $x \in X$, x está em algum V_i, segue que, para este i

$$|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon \text{ e } |f_k(x) - f_k(x_i)| < \varepsilon. \tag{1.5}$$

Assim

$$\begin{aligned}|f(x) - f_k(x)| &= |f(x) - f(x_i) + f(x_i) - f_k(x_i) - f_k(x) + f_k(x_i)| \\ &< |f(x_i) - f_k(x_i)| + |f(x) - f(x_i)| + |f_k(x) - f_k(x_i)| \\ &< 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Assim $|f(x) - f_k(x)| < 3\varepsilon$ para todo $x \in X$.

Temos então que as bolas centradas em $f_1, \cdots, f_k$ de raio 3ε cobrem Φ. Como ε é arbitrário, Φ é totalmente limitado. ■

1.3 O Espectro de um Operador Limitado

Definição 1.7 *Dados E, F espaços de Banach, dizemos que um operador $T : E \longrightarrow F$ é limitado (contínuo) se existe constante $c \geq 0$ tal que*

$$\|Tu\| \leq c\|u\|, \ \forall u \in E.$$

Definição 1.8 *Um operador limitado $T \in \mathcal{L}(E, F)$, ou seja, $T : E \longrightarrow F$ contínuo, com E, F espaços de Banach é dito compacto se $T(B_E)$ tem fecho compacto em F, ou seja a imagem de T por $B_E = \{x \in E, \|x\| \leq 1\}$ tem fecho compacto em F.*

Definição 1.9 *Seja E um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(E)$ operador limitado. O conjunto resolvente, denotado por $\rho(T)$, é definido por*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (T - \lambda I) \text{ é bijetiva de } E \text{ em } E\}.$$

O espectro, denotado por $\sigma(T)$, é o complementar do conjunto resolvente, isto é, $\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \rho(T)$. Um número complexo é dito ser um autovalor de T se

$$N(T - \lambda I) \neq \{0\};$$

$N(T - \lambda I)$ é o autoespaço correspondente.

Definição 1.10 *Um operador $T^* : D(T^*) \subset F^* \longrightarrow E^*$ é chamado adjunto de T se*

$$\langle Tu, v\rangle_{E,E^*} = \langle u, T^*v\rangle_{F,F^*}, \forall u \in D(T), \forall v \in D(T^*),$$

onde E^*, F^* são os espaços duais de E, F e $D(T), D(T^*)$ são os domínios de T e T^*.

Agora, assumiremos que $E = H$ é um espaço de Hilbert e que $T \in \mathcal{L}(H)$. Identificando H^* e H, veremos T^* como um operador de H nele mesmo.

Definição 1.11 *Um operador limitado $T \in \mathcal{L}(H)$ é dito ser autoadjunto se $T^* = T$, isto é*

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^*v\rangle \ \forall u, v \in H.$$

Definição 1.12 *Seja $T : D(T) \subset H \longrightarrow H$ um operador. Dizemos que T é simétrico se*

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle \forall u, v \in D(T).$$

Observação: Para operadores limitados, as noções de simétrico e auto-adjunto coincidem.

1.4 Espaços L^p

Aqui vamos recordar os espaços L^p.
Seja $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida, isto é, Ω é um conjunto e

1. $\mathcal{M}$ é uma $\sigma-$álgebra em Ω, ou seja, $\mathcal{M}$ é uma coleção de subconjuntos de Ω tais que:
   - $\emptyset \in \mathcal{M}$,
   - Se $A \in \mathcal{M}$, então $A^c \in \mathcal{M}$,
   - $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$ sempre que $A_n \in \mathcal{M}$, para todo n.
2. μ é uma medida, isto é, $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty]$ satisfaz
   - $\mu(\emptyset) = 0$,

- $\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \cup_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ sempre que (A_n) é uma família contável disjunta de membros de $\mathcal{M}$.

3. Ω é σ-finito, ou seja, existe uma família contável (Ω_n) em $\mathcal{M}$ tal que $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ e $\mu(\Omega_n) < \infty$ para todo n.

Os conjuntos $E \in \mathcal{M}$ com a propriedade $\mu(E) = 0$ são chamados de conjuntos de medida nula, podemos escrevê-lo como $|E| = 0$.

Dizemos que uma propriedade vale q.t.p. (para quase todo ponto $x \in \Omega$) ou quase sempre se vale para todo Ω exceto num conjunto de medida nula.

Chamamos de $L^1(\Omega)$ o espaço das funções integráveis de Ω em $\mathbb{R}$

$$L^1(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; \int_\Omega f(x) d\mu < \infty\}, \ x \in \Omega.$$

Definição 1.13 *Seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 < p < \infty$. Definimos*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; \ \|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\},$$

e, se $p = \infty$

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; \ f \text{ é mensurável e existe uma constante } C \text{ tal que } |f(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

com

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C; \ |f(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

Notação: Seja $1 < p < \infty$; denotamos por q o expoente conjugado

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Quando $p = 1$ tomamos $q = \infty$. Analogamente, quando $p = \infty$, definimos seu conjugado por $q = 1$.

Proposição 1.5 (Desigualdade de Hölder) *Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, $p, q \geq 1$ e $1/p + 1/q = 1$ então*

$$\int_\Omega |fg| d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Demonstração: Se $\|f\|_p \cdot \|g\|_q = 0$ então $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$ e assim $|f \cdot g| = |f||g| = 0$ e portanto $\int_\Omega |fg| d\mu = 0$.

Se $\|f\|_p \cdot \|g\|_q \neq 0$, neste caso, temos que mostrar que

$$\int_\Omega \left|\frac{f}{\|f\|_p}\right| \left|\frac{g}{\|g\|_q}\right| d\mu \leq 1.$$

Note que, como $\left\|\frac{f}{\|f\|_p}\right\|_p = \left\|\frac{g}{\|g\|_q}\right\|_q = 1$, temos pela Proposição 1.3 que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{|f|}{\|f\|_p} \frac{|g|}{\|g\|_p} d\mu \leq \int_\Omega \frac{\left(\frac{|f|}{\|f\|_p}\right)^p}{p} + \frac{\left(\frac{|g|}{\|g\|_q}\right)^q}{q} d\mu &= \frac{1}{p} \int_\Omega \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} dx + \frac{1}{q} \int_\Omega \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} d\mu \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.
\end{aligned}$$

Note que a demonstração vale para o caso $p = \infty$ e $q = 1$ onde teremos $0 = \lim_{p \to \infty} \frac{1}{p}$.

Assim, concluímos a prova. ■

Proposição 1.6 (Desigualdade de Minkowski) *Se $f, g \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ então*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Demonstração: Se $p = \infty$,

$$|f+g| \leq |f| + |g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Mostraremos para $p = 1$ e $p > 1$.
Se $p = 1$, a afirmação é clara já que $\int_\Omega |f+g| d\mu \leq \int_\Omega |f| dx + \int_\Omega |g| d\mu$.
Se $p > 1$, notamos que

$$|f+g|^p = |f+g|^{p-1}|f+g| \leq |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1}.$$

Mostremos que $(f+g)^{p-1} \in L^q(\Omega)$.
De fato, como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então $pq = p + q$, assim

$$\int_\Omega (|f+g|^{p-1})^q d\mu = \int_\Omega |f+g|^p d\mu < \infty \Rightarrow (f+g)^{p-1} \in L^q(\Omega).$$

Daí, temos pela Desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f+g|^p d\mu &\leq \int_\Omega |f||f+g|^{p-1} d\mu + \int_\Omega |g||f+g|^{p-1} d\mu \\ &\leq \|f\|_p \|(f+g)^{p-1}\|_q + \|g\|_p \|(f+g)^{p-1}\|_q \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p)\|(f+g)^{p-1}\|_q.\end{aligned}$$

Então

$$\frac{\|f+g\|^p}{\|(f+g)^{p-1}\|_q} \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{1.6}$$

Mas,

$$\|(f+g)^{p-1}\|_q = \left(\int_\Omega (|f+g|^{p-1})^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}.$$

Daí, de (1.6), obtemos

$$\|f+g\|_p^{p-\frac{p}{q}} \leq \|f\|_p + \|g\|_q \Rightarrow \|f+g\|_p \leq \|f\|_q + \|g\|_p.$$

■

Teorema 1.7 (Fischer-Riesz) *O espaço L^p é uma espaço de Banach para todo $1 \leq p \leq \infty$.*

Demonstração: Faremos os casos $p = \infty$ e $1 \leq p < \infty$.

- Caso $p = \infty$: Seja $\{f_n\}$ uma sequência de Cauchy em $L^\infty(\Omega)$. Dado um inteiro $k \geq 1$, existe um inteiro N_k tal que

  $$\|f_m - f_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{1}{k}, \ m, n \geq N_k.$$

  Assim, existe um conjunto de medida nula E_k tal que

  $$|f_m - f_n| \leq \frac{1}{k}, \ \forall x \in \Omega \setminus E_k, \ \forall m, n \geq N_k, \tag{1.7}$$

  pela afirmação.

  Então temos $E = \cup_k E_k$, assim, E tem medida nula, e temos para todo $x \in \Omega \setminus E_k$, a sequência f_n é de Cauchy (em $\mathbb{R}$) e converge para alguma f. Desde modo $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in \Omega \setminus E$. Tomando o limite em (1.7) com $m \to \infty$, obtemos

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}, \ \forall x \in \Omega \setminus E, \ \forall n \geq N_k.$$

Conluímos que $f \in L^\infty(\Omega)$ e $\|f - f_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{1}{k}$ para todo $n \geq N_k$. Desde modo $f_n \to f$ em $L^\infty(\Omega)$.

- Caso $1 \leq p < \infty$: Seja $\{f_n\}$ uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega)$. É suficiente mostrar que uma subsequência converge em $L^p(\Omega)$.

  Tomemos uma subsequência $\{f_{n_k}\}$ tal que

  $$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| \leq \frac{1}{2^k}. \ \forall k \geq 1,$$

  Mostremos que f_{n_k} converge em $L^p(\Omega)$.

  Para simplificar a notação, escrevemos f_k ao invés de f_{n_k}, assim

  $$\|f_{k+1} - f_k\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{2^k}, \ \forall k \geq 1. \tag{1.8}$$

  Seja

  $$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|.$$

  Note que $\|g_n\|_{L^p(\Omega)} \leq 1$.

  Como $g_1 \leq g_2 \leq \cdots$ q.t.p em Ω e $\sup_n \int_\Omega g_n < \infty$, segue do Teorema da Convergência Monótona (veja por exemplo [2], Teorema 4.1) que $g_n(x)$ tende a uma função $g(x)$ q.t.p em Ω, com $g \in L^p(\Omega)$.

  Por outro lado, para $m, n \geq 2$, $m > n$, temos, pela desigualdade triangular

  $$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &\leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + \cdots + |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \\ &\leq g(x) - g_{n-1}(x). \end{aligned}$$

  Segue que $f_n(x)$ é de Cauchy, q.t.p em Ω e converge para um limite finito, $f(x)$.

  Temos

  $$|f(x) - f_n(x)| \leq g(x)$$

  q.t.p para $n \geq 2$, e, em particular, $f \in L^p(\Omega)$. Finalmente, pelo Teorema da Convergência Dominada (veja [2], Teorema 4.2), segue que $\|f_n - f\| \to 0$, já que $|f_n(x) - f(x)|^p \to 0$ q.t.p e também $|f_n(x) - f(x)|^p \leq g^p(x) \in L^1(\Omega)$.

■

Capítulo 2

Contração Com Parâmetros e o Teorema de Stampacchia

Na primeira seção deste capítulo, baseando-se em [5], enunciaremos e demonstraremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach assim como o Teorema da Contração com Parâmetros. A partir dele, obtemos o Teorema da Função Implícita. Já na segunda seção, seguiremos [2]. Vamos apresentar a Lei do Paralelogramo e resultados sobre projeções em conjuntos convexos e fechados, para em seguida obtermos o Teorema da Representação de Riesz, que é de grande importância em Análise Funcional e no estudo de EDP's. Em seguida enunciaremos e demonstraremos o Teorema de Stampacchia e seu famoso corolário conhecido como Teorema de Lax-Milgram.

2.1 Teorema da Contração Uniforme

Inicialmente mostramos o Teorema do Ponto Fixo em espaços métricos completos

Teorema 2.1 (Banach) *Seja (S, d) um espaço métrico completo e seja $T : S \longrightarrow S$ uma contração, isto é, existe $\theta < 1$ tal que*

$$d(T(x), T(y)) \leq \theta d(x, y), \ \forall x \in S.$$

Então, existe um único ponto fixo de T em S, $a \in S$, $T(a) = a$. Além disso, para todo $x \in S$, a sequência $(T^n a)_{n=0}^{\infty}$, onde $T^n = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{n}$ converge e

$$\lim_{n\to\infty} T^{(n)}(x) = a.$$

Demonstração:

Unicidade: Sejam a e a_1 dois pontos fixos. Temos então

$$d(a, a_1) = d(T(a), T(a_1)) \leq \theta d(a, a_1).$$

Logo, $d(a, a_1) = 0$, portanto $a = a_1$.

Existência: Sejam $x \in S$ e $x_n = T^n(x)$. Mostremos que $\{x_n\}$ é de Cauchy.

Afirmação:

$$d(T^n(x), T^n(y)) \leq \theta^n d(x, y). \tag{2.1}$$

De fato, mostremos por indução: Para $n = 1$, temos:

$$d(T(x), T(y)) \leq \theta d(x, y),$$

o que é verdade, por hipótese.

Vamos supor válido para n e mostremos que vale para $n+1$. Logo

$$\begin{aligned} d(T^n(T(x)), T^n(T(y))) &\leq \theta^n d(T(x), T(y)) \\ &\leq \theta^{n+1} d(x, y). \end{aligned}$$

Portanto

$$d(T^{n+1}(x), T^{n+1}(y)) \leq \theta^{n+1} d(x, y).$$

Agora, note que $d(x_{n+r}, x_n) \leq \theta^n d(x_r, x)$, e, pela desingualdade triangular, obtemos:

$$\begin{aligned} d(x_r, x) = d(x, x_r) &\leq d(x, T(x)) + d(T(x), T^2(x)) + \cdots + d(T^{r-1}(x), T^r(x)) \\ &\leq (1 + \theta + \theta^2 + \cdots + \theta^{r-1}) d(x, T(x)). \end{aligned}$$

Temos então que θ forma uma progressão geométrica, e assim,

$$d(x, x_r) \leq \frac{1}{1-\theta} d(x, T(x)). \tag{2.2}$$

Segue por (2.2) e (2.1), que

$$d(x_{n+r}, x_n) \leq \frac{\theta^n}{1-\theta} d(x, y).$$

Seja $m = n + r$. Então, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ de tal modo que

$$n_0 > \ln\left(\frac{\varepsilon(1-\theta)}{d(x, T(x))}\right) \frac{1}{\ln \theta}.$$

Concluímos que

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Portanto $\{x_n\}$ é de Cauchy e existe $a \in S$, S é espaço métrico completo, tal que $x_n \to a$. Falta mostrar que $\lim x_n = a$ é ponto fixo de $T(x)$. De fato:

$$T(a) = T(\lim x_n) = \lim T(x_n) = \lim x_{n+1} = a.$$

■

Definição 2.1 *Se (S, d) e (Λ, l) são espaços métricos completos, dizemos que $T : S \times \Lambda \longrightarrow S$ é uma contração uniforme se existe $\theta < 1$ tal que*

$$d(T(x, \lambda), T(y, \lambda)) \leq \theta d(x, y).$$

para todo x, y em S e λ em Λ.

Proposição 2.2 *Se A é um operador em um espaço de Banach qualquer tal que $\|A\| < 1$ e I é a identidade, então $(I - A)$ é inversível.*

Demonstração: Notemos que, se $\|A\| < 1$, a série $\sum_n^\infty \|A\|^n$ converge. Sendo assim, dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que a sequência $\{\sum_{n=0}^m A^n\}$ é de Cauchy. De fato, tomando $k, j \in \mathbb{N}$ tal que $k > j$ e $m = l + h$, temos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^m A^k - \sum_{j=0}^l A^j \right\| &= \|I + A + \cdots + A^m - (I + A + \cdots + A^l)\| \\ &= \left\| \sum_{n=l+1}^m A^n \right\| \leq \sum_{n=l+1}^m \|A\|^n, \end{aligned}$$

como $\sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n$ é convergente, temos

$$\sum_{n=l+1}^{m} \|A^n\| \leq \varepsilon$$

para l suficientemente grande. Logo, segue que $\{\sum_{k=0}^{m} A^k\}$ é de Cauchy.

Agora, mostremos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (I - A)^{-1}.$$

De fato,

$$(I - A)(I + A + \cdots + A^m) = I - A^{m+1},$$

e como $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ e $\|A\|^k \to 0$ quando $k \to \infty$ temos que $A^k \to 0$, assim

$$\lim_{n\to\infty} (I - A) \underbrace{(I + A + \cdots + A^n)}_{\sum_{n=1}^{m} A^n} = \lim_{n\to\infty} (I - A^{n+1}) = I.$$

Segue então que $(I - A)$ é inversível. ■

Agora vamos provar o Teorema da Contração Uniforme, que é o principal resultado deste Capítulo.

Teorema 2.3 (Teorema da Contração Uniforme) *Sejam U, V abertos nos espaços de Banach X, Y, e seja $\overline{U}$ o fecho de U (um espaço métrico completo). Suponha $T : \overline{U} \times V \longrightarrow \overline{U}$ contração uniforme em $\overline{U}$, e seja $g(y)$ o único ponto fixo de $T(\cdot, y)$ para cada $y \in V$.*

Se $T \in C^k(\overline{U} \times V, X)$, $0 \leq k < \infty$, isto é, a derivada parcial de Frechèt (Definição 1.4) até a ordem k existe em $U \times V$ e se estende continuamente até $\overline{U} \times V$, então a aplicação $y \longmapsto g(y)$ está em $C^k(V, X)$.

Se a aplicação $(x, y) \longmapsto T(x, y) \in X$ é analítica em $U_1 \times V$, onde U_1 é uma vizinhança de $\overline{U}$, então a aplicação $y \longmapsto g(y)$ é analítica de V em X.

Demonstração: Dividiremos a demonstração em dois casos:

- Caso $k = 0$

  Temos por hipótese que T é contínua e temos que mostrar que g é contínua. Bom, pela continuidade de T, dado ε_1, existe $\delta > 0$ tal que, se $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$ então $\|T(x, y) - T(x_0, y_0)\| < \varepsilon_1$.

  Agora, como g é ponto fixo, pela desigualdade triangular temos

$$\begin{aligned}\|g(y_1) - g(y_2)\| =& \|T(g((y_1), y_1) - T(g(y_2), y_2)\| \\ =& \|T(g((y_1), y_1) - T(g((y_2), y_1) + T(g((y_2), y_1) - T(g((y_2), y_2)\| \\ \leq& \theta\|g(y_1) - g(y_2)\| + \varepsilon_1.\end{aligned}$$

  Então

$$\begin{aligned}\|g(y_1) - g(y_2)\|(1 - \theta) \leq& \quad \varepsilon_1 \\ \|g(y_1) - g(y_2)\| \leq& \quad \frac{\varepsilon_1}{1 - \theta}.\end{aligned}$$

  Tomando

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{1 - \theta},$$

  segue o resultado.

- Caso $k = 1$

  Como T é contração uniforme $\|T(x_1, y) - T(x_2, y)\| \leq \|\theta\|\|x_1 - x_2\|$, segue que a derivada com respeito à primeira coordenada, $T_x(x, y)$ é tal que $||T_x(x, y)|| \leq \theta < 1$.

  Agora, como $g(y) = T(g(y), y)$, encontramos, pela regra da cadeia que $g'(y)$ deve ser a solução M da equação:

$$\begin{aligned} M =& T_x(g(y), y)M + T_y(g(y), y) \\ (I - T_x(g(y), y))M =& T_y(g(y), y). \end{aligned}$$

  Mas, $\|T_x(g(y), y)\| \leq \theta < 1$, e, pela Proposição 2.2 podemos escrever

$$M = (I - T_x(g(y), y))^{-1} T_y(g(y), y).$$

  Note que tal equação possui solução contínua única, $M(y)$. Queremos mostrar que $g'(y) = M(y)$, assim

$$\lim_{\eta \to 0} \left\| \frac{g(y + \eta) - g(y) - M(y)\eta}{\eta} \right\| = 0.$$

  Para isto, considere $\gamma = g(y + \eta) - g(y)$. Então, usando o fato de $g(y)$ ser ponto fixo para cada y, temos

$$T(g(y) + \gamma, y + \eta) - T(g(y), y) = \gamma,$$

  pois

$$T(g(y) + g(y + \eta) - g(y), y + \eta) - T(g(y), y) = T(g(y + \eta), y + \eta) - T(g(y), y) = \gamma.$$

  Então

$$(I - T_x(g(y), y))\gamma = T_y(g(y), y)\eta + \Delta, \tag{2.3}$$

  com $\Delta = T(g(y) + \gamma, y + \eta) - T(g(y), y) - T_x(g(y), y)\gamma - T_y(g(y), y)\eta$.

  Como T é de classe C^1, segue que

$$\frac{\|T(g(y) + \gamma, y + \eta) - T(g(y), y) - T_x(g(y), y)\gamma - T_y(g(y), y)\eta\|}{\|\gamma\| + \|\eta\|} \to 0$$

  se $\|\gamma\| + \|\eta\| \to 0$.

  De fato, se $\eta \to 0$, então $\gamma \to 0$, já que g é contínua. Portanto, para algum $\varepsilon > 0$, com $\|\eta\|$ pequeno o suficiente

$$\|\Delta(\eta)\| < \varepsilon(\|\gamma(\eta)\| + \|\eta\|). \tag{2.4}$$

  Então

$$\gamma = T_y(g(y), y)\eta + \Delta + T_x(g(y), y)\gamma$$

  e

$$\|\gamma\| \leq \|T_y(g(y), y)\eta\| + \|\Delta\| + \theta\|\gamma\|.$$

  Usando (2.4), segue para η suficientemente pequeno que

$$\begin{aligned}\|\gamma(\eta)\|\left(1-\frac{\varepsilon}{1-\theta}\right) &\leq \frac{1}{1-\theta}\|T_y\|\|\eta\|+\frac{\varepsilon}{1-\theta}\|\eta\| \\ &\leq \frac{\|\eta\|}{1-\theta}(\|T_y\|+\|\varepsilon\|).\end{aligned}$$

Tomando ε pequeno o suficiente, $\|\gamma(\eta)\| = O(\|\eta\|)$ com $\eta \to 0$.

Agora, por (2.3),

$$\Delta(\eta, \gamma(\eta)) = (I - T_x)(\gamma(\eta) - M\eta). \tag{2.5}$$

Então, encontramos

$$\begin{aligned}\|\gamma - M\eta\| &= \|(I-T_x)^{-1}\Delta\| \\ &\leq \|(I-T_x)^{-1}\|\|\Delta\|.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\gamma - M\eta\| = o\|\eta\|$$

Mas, pela definição de γ

$$\|g(y+\eta) - g(y) - M\eta\| = o(\|\eta\|)$$

Portanto

$$M(y) = g'(y).$$

- Caso $k > 1$

  Para este caso, procedemos por indução. De fato, se o resultado vale para $(k-1)$, então quando $T \in C^k$, temos por hipótese que $g \in C^{k-1}$, pelo menos, e vale

  $$(I - T_x(g(y), y))g'(y) = T_y(g(y), y),$$

  o que nos dá $g' \in C^{k-1}$, logo $g \in C^k$.

Mostremos agora que a aplicação $g(y)$ é analítica, quando, por hipótese, $T : \overline{U} \times V \longrightarrow \overline{U}$ é contração uniforme e analítica em $U_1 \times V$, com U_1 aberto de $\overline{U}$.

Tome $(g(y), y) \in U_1 \times V$. Note que, como T é analítica em $U_1 \times V \subset X \times Y$ podemos escrever

$$T(x+\Delta x, y+\Delta y) = T(x,y) + DT(x,y)(\Delta x, \Delta y) + \cdots,$$

como uma série de Taylor para algum raio de convergência ρ.

Vamos então estender T para o plano complexo. Para isto, seja $X_{\mathbb{C}} = \{\bar{x} = u + iv, u, v \in X\}$. Vamos definir a extensão da série T em $X_{\mathbb{C}}$ como

$$T_{\mathbb{C}}(\bar{x}+\Delta\bar{x}, \bar{y}+\Delta\bar{y}) = T(\bar{x},\bar{y}) + DT(\bar{x},\bar{y})(\Delta\bar{x}, \Delta\bar{y}) + \cdots,$$

Tomando a bola $B(g(y), \rho) \subset X_{\mathbb{C}}$, temos $T_{\mathbb{C}}$ possui o mesmo raio de convergência ρ, e $T_{\mathbb{C}}|_X = T$. Temos então que $T_{\mathbb{C}}$ é analítica, contração uniforme e vale $T_{\mathbb{C}}(g(y), y) = g(y)$.

Sendo assim, basta mostrarmos que g é C^1. De fato, isto é mostrado de maneira inteiramente análoga ao que foi feito anteriormente. Então, temos que g é analítica. ■

Como consequência do Teorema da Contração Uniforme obtemos o Teorema da Função Implícita

Teorema 2.4 (Teorema da Função Implícita) *Sejam X, Y, Z espaços de Banach e U, V abertos em X, V respectivamente. Assuma $F : U \times V \longrightarrow Z$ contínua e diferenciável, que $(x_0, y_0) \in U$, $F(x_0, y_0) = 0$, e a derivada parcial $F_x(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(X, Y)$ tem inversa contínua.*

Então, existe uma vizinhança de (x_0, y_0), $U_1 \times V_1 \subset U \times V$, e uma função $f : V_1 \longrightarrow U_1$, $f(y_0) = x_0$, tal que para $(x, y) \in U_1 \times V_1$, $F(x, y) = 0$ se, e somente se, $f(y) = x$. Portanto $F(f(y), y) = 0$ para todo $y \in V_1$.

Se $F : U \times V \longrightarrow Z$ é C^k $(1 \leq k < \infty)$ ou analítica perto de (x_0, y_0), então f é C^k ou analítica, respectivamente, perto de y_0.

Demonstração: Vamos definir $L = (F_x(x_0, y_0))^{-1} \in \mathcal{L}(Z, X)$ e $G(x, y) = x - LF(x, y)$.

Temos que G é C^1 numa vizinhança de (x_0, y_0) em X (ou C^k ou analítica) com $G(x_0, y_0) = x_0$. Além disso

$$G_x(x, y) = 1 - (F_x(x_0, y_0)^{-1}(F_x(x, y)),$$

o que nos dá $G_x(x_0, y_0) = 1 - 1 = 0$.

Note que, por continuidade numa vizinhança de (x_0, y_0), $\|G_x(x, y)\| \leq \theta < 1$, o que nos mostra que G é contração, assim

$$\|G(x_1, y) - G(x_2, y)\| \leq \theta \|x_1 - x_2\|.$$

Então, para todo $y \in V_1$, existe $f(y)$ tal que $G(f(y), y) = f(y)$.

Por outro lado, $f(y) = f(y) - LF(f(y), y)$. Portanto $F(f(y), y) = 0$.

A outra afirmação segue diretamente do Teorema 2.3. ■

2.2 Teorema de Stampacchia e Lax-Milgram

Definição 2.2 *Denotamos por E^* o espaço dual do espaço vetorial normado num corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e E como sendo o espaço de todos os funcionais lineares de E em $\mathbb{K}$, com a norma*

$$\|f\|_{E^*} = \sup_{\|x\|<1 \ x \in E} |f(x)| = \sup_{\|x\| \leq 1 \ x \in E} |f(x)|.$$

Definição 2.3 *Seja E um espaço vetorial normado em um corpo $\mathbb{K}$. Um conjunto $C \subset E$ é dito convexo se*

$$tx + (1 - t)y \in C$$

sempre que $x, y \in C$ e para todo $t \in [0, 1]$.

Proposição 2.5 (Lei do Paralelogramo) *Seja H um espaço de Hilbert. Para quaisquer $x, y \in H$,*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Demonstração: De fato, $\forall x, y \in H$

$$\|x + y\|^2 = \langle x, y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle,$$

e

$$\|x - y\|^2 = \langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle.$$

Assim

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 &= \langle x,x\rangle+2\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle+\\ &\quad+\langle x,x\rangle-2\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle\\ &= 2\|x\|^2+2\|y\|^2.\end{aligned}$$

■

Observação Podemos escrever a Lei do Paralelogramo da seguinte maneira

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2+\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2=\frac{1}{2}(\|x\|^2+\|y\|^2),$$

e sua demonstração é análoga.

Teorema 2.6 (Projeção em um Conjunto Convexo e Fechado) *Seja $K\subset H$ um conjunto convexo, fechado e não vazio. Então, para todo $f\in H$ existe um único $u\in K$ tal que*

$$\|f-u\|=\min_{v\in K}\|f-v\|=dist(f,K). \tag{2.6}$$

Ainda mais, u é caracterizada pela propriedade

$$u\in K \text{ e } \langle f-u,v-u\rangle\leq 0\ \forall v\in K. \tag{2.7}$$

Notação: O elemento u é chamado de projeção de f em K, e é denotado por

$$u=P_Kf.$$

Demonstração:

- Existência

  Seja $\{v_n\}$ uma sequência de minimização para a equação (2.6), isto é, $v_n\in K$ e

  $$d_n=\|f-v_n\|\to d=\inf_{v\in K}\|f-v\|.$$

  Afirmação: $\{v_n\}$ é sequência de Cauchy.

  De fato, aplicando a Proposição 2.5 com $x=f-v_n$ e $y=f-v_m$ nos dá

  $$\left\|\frac{f-v_n+f-v_m}{2}\right\|^2+\left\|\frac{f-v_n-(f-v_m)}{2}\right\|^2=\frac{1}{2}(\|f-v_n\|^2+\|f-v_m\|^2)$$

  ou seja

  $$\left\|f-\frac{v_n+v_m}{2}\right\|^2+\left\|\frac{v_n-v_m}{2}\right\|^2=\frac{1}{2}(d_n^2+d_m^2).$$

  Como K é convexo, temos que $\dfrac{v_n+v_m}{2}$ pertence a K, e assim

  $$\left\|f-\frac{v_n+v_m}{2}\right\|\geq d.$$

  Segue então

  $$\left\|\frac{v_n-v_m}{2}\right\|^2\leq\frac{1}{2}(d_n^2+d_m^2)-d^2,$$

  e assim

  $$\lim_{m,n\to\infty}\left\|\frac{v_n-v_m}{2}\right\|=0.$$

Logo a sequência é de Cauchy, como afirmamos.
Assim, a sequência $\{v_n\}$ converge para algum limite $u \in K$ com $d = \|f - u\|$.

- Equivalência entre (2.6) e (2.7)
  Assuma que u satisfaça (2.6) e seja $w \in K$. Temos que, como K é convexo,

$$v = (1-t)u + tw \in K \ \forall t \in [0,1].$$

Assim

$$\|f - u\| \leq \|f - [(1-t)u + tw]\| = \|f - u - t(w-u)\|.$$

Portanto

$$\begin{aligned}\|f-u\|^2 \leq \|f-u-t(w-u)\|^2 &= \langle f-u-t(w-u), f-u-t(w-u)\rangle \\ &\leq \|f-u\|^2 - 2t\langle f-u, w-u\rangle + t^2\|w-u\|^2.\end{aligned}$$

Logo, para qualquer $t \in (0,1]$

$$2\langle f-u, w-u\rangle \leq t\|w-u\|^2.$$

Fazendo $t \to 0^+$ obtemos

$$\langle f-u, w-u\rangle \leq 0,$$

o que nos dá (2.7).
Por outro lado, assumindo que u satisfaz (2.7), temos

$$\|u-f\|^2 - \|v-f\|^2 = 2\langle f-u, v-u\rangle - \|u-v\|^2 \leq 0 \ \forall v \in K,$$

já que

$$\begin{aligned}\langle f-u, v-u\rangle &= \langle f-u, f-u+v-f\rangle \\ &= \|f-u\|^2 + \langle f-u, v-f\rangle \\ &= \|f-u\|^2 + \langle f-v-u+v, v-f\rangle \\ &= \|f-u\|^2 - \|v-f\|^2 + \langle v-u, v-f\rangle \\ &= \|f-u\|^2 - \|v-f\|^2 + \|v-u\|^2 - \langle v-u, f-u\rangle,\end{aligned}$$

e o resultado segue.

- Unicidade
  Assuma que u_1 e u_2 satisfaça (2.7). Temos

$$\langle f-u_1, v-u_1\rangle \leq 0, \forall v \in K \tag{2.8}$$

e

$$\langle f-u_2, v-u_2\rangle \leq 0, \forall v \in K. \tag{2.9}$$

Escolhendo $v = u_2$ em (2.8) e $v = u_1$ em (2.9) e somando, encontramos

$$\begin{aligned}\langle f-u_1, u_2-u_1\rangle + \langle f-u_2, u_1-u_2\rangle &= \langle f, u_2-u_1\rangle - \langle u_1, u_2-u_1\rangle \\ &\quad + \langle f, u_1-u_2\rangle - \langle u_2, u_1-u_2\rangle \\ &= \langle u_1, u_1\rangle - \langle u_1, u_2\rangle - \langle u_2, u_1\rangle + \langle u_2, u_2\rangle \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Donde tiramos

$$\langle u_1 - u_2, u_1 - u_2 \rangle \leq 0,$$

ou seja

$$\langle u_1 - u_2, u_1 - u_2 \rangle = 0.$$

Logo $u_1 = u_2$.

■

Proposição 2.7 *Seja $K \subset H$ um conjunto convexo fechado e não vazio. Então P_K não aumenta distância, isto é*

$$\|P_K f_1 - P_K f_2\| \leq \|f_1 - f_2\| \ \forall f_1, f_2 \in H.$$

Demonstração: Tome $u_1 = P_K f_1$ e $u_2 = P_K f_2$. Temos

$$\langle f_1 - u_1, v - u_1 \rangle \leq 0 \ \forall v \in K \tag{2.10}$$

e

$$\langle f_2 - u_2, v - u_2 \rangle \leq 0 \ \forall v \in K. \tag{2.11}$$

Tomando $v = u_2$ em 2.10 e $v = u_1$ em 2.9 e somando, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle f_1 - u_1, u_2 - u_1 \rangle + \langle f_2 - u_2, u_1 - u_2 \rangle &\leq 0 \\
-\langle f_1 - u_1, u_1 - u_2 \rangle + \langle f_2 - u_2, u_1 - u_2 \rangle &\leq 0 \\
\langle f_2 - u_2 + u_1 - f_1, u_1 - u_2 \rangle &\leq 0 \\
\langle u_1 - u_2, u_1 - u_2 \rangle &\leq |\langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle \\
\|u_1 - u_2\|^2 &\leq \|f_1 - f_2\| \|u_1 - u_2\|.
\end{aligned}$$

Segue então que

$$\|u_1 - u_2\| \leq \|f_1 - f_2\|.$$

■

Corolário 2.8 *Assuma que $M \subset H$ é um subespaço fechado linear. Seja $f \in H$, então $u = P_M f$ é caracterizado por*

$$u \in M \ e \ \langle f - u, v \rangle = 0 \ \forall v \in M. \tag{2.12}$$

Além disso, P_M é um operador linear, chamado de projeção ortogonal.

Demonstração: Por (2.7), temos

$$\langle f - u, v - u \rangle \leq 0 \ \forall v \in M,$$

e assim

$$\langle f - u, tv - u \rangle \leq 0, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

pois, como M é subespaço linear, segue então que

$$t \left\langle f - u, v - \frac{u}{t} \right\rangle \leq 0.$$

Analisaremos alguns casos:

- Se $t > 0$, tomando $t \to \infty$, temos $\langle f - u, v \rangle \leq 0$.
- Se $t < 0$, tomando $t \to -\infty$, temos $\langle f - u, v \rangle \geq 0$.

Portanto, $\langle f-u, v\rangle = 0$. Segue que (2.12) é válida.
Por outro lado, se u satisfaz (2.12),

$$\langle f-u, v-u\rangle = 0,$$

pois $v-u \in M, \forall v \in M$.
Falta mostrar que $P_M f$ é linear.

- $P_M f_1 + PMf_2 = P_M(f_1+f_2)$
  De fato, sejam $P_M f_1 = u_1$ e $P_M f_2 = u_2$. Então, $\forall v \in M$ temos

$$\langle f_1 - u_1, v\rangle = 0$$
$$\langle f_2 - u_2, v\rangle = 0$$

  e

$$\langle (f_1+f_2) - \tilde{u}, v\rangle = 0.$$

  Subtraindo as equações acima, encontramos

$$\langle (f_1+f_2) - \tilde{u} - f_1 - f_2 + (u_1+u_2), v\rangle = 0, \forall v \in M$$

  ou seja

$$\langle (u_1+u_2) - \tilde{u}, v\rangle = 0, \forall v \in M.$$

  O que implica

$$\|u_1+u_2-\tilde{u}\|^2 = 0 \ \forall v \in M.$$

  E assim

$$P_M(f_1+f_2) = \tilde{u} = u_1+u_2.$$

- $P_M \lambda f = \lambda P_M f$
  De fato, dados $f \in H$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ e se $P_M f = u$ e $P_M \lambda f = w$ então

$$\langle f-u, v\rangle = 0 \ \forall v \in M$$
$$\langle \lambda f - w, v\rangle = 0 \ \forall v \in M.$$

  Agora, considerando $\langle \lambda f - \lambda u, v\rangle = 0$ e subtraindo de $\langle \lambda f - w, v\rangle = 0$, encontramos

$$\langle \lambda f - \lambda f - (w-\lambda u), v\rangle = 0, \forall v \in M$$
$$\langle -w + \lambda u, v\rangle = 0, \forall v \in M.$$

  O que implica

$$\|\lambda u - w\|^2 = 0.$$

  E assim

$$w = \lambda u.$$

■

Teorema 2.9 (Teorema da Representação de Riesz) *Seja H um espaço de Hilbert em $\mathbb{R}$ com produto interno $\langle .,.\rangle$ e $\varphi \in H^*$. Então existe um único $f \in H$ tal que*

$$\varphi(x) = \langle x, f\rangle, \forall x \in H.$$

Além disso, $\|\varphi\|_{H^*} = \|f\|$.

Demonstração: Seja $M = N(\varphi) = \{u \in H : \varphi(u) = 0\} = \varphi^{-1}\{0\}$. Note que $M \subset H$ é fechado, pois $\{0\}$ é fechado em $\mathbb{R}$ e como φ é contínua, sua imagem inversa mapeia fechados em fechados.

Vamos assumir $M \neq H$, pois caso contrário $\varphi \equiv 0$ e a conclusão do Teorema é óbvia, bastando tomar $f = 0$.

Mostremos que existe $g \in H$ tal que $\|g\| = 1$ e $\langle g, v\rangle = 0, \forall v \in M$, e assim $g \notin M$.

De fato, tome $g_0 \in H$ com $g_0 \notin M$. Seja $g_1 = P_M g_0$. Então

$$g = \frac{g_0 - g_1}{\|g_0 - g_1\|}$$

é tal que $\|g\| = 1$ e, pelo Corolário 2.8, $\langle g, v\rangle = 0$.

Agora, dado qualquer $u \in H$, tome $v = u - \lambda g$, com $\lambda = \dfrac{\varphi(u)}{\varphi(g)}$.

Note que v está bem definida, pois $\varphi(g) = \dfrac{1}{\|g_0 - g_1\|}[\varphi(g_0) - \varphi(g_1)] \neq 0$. Ainda mais, $v \in M$, já que

$$\varphi(v) = \varphi(u - \lambda g) = \varphi(u) - \lambda\varphi(g) = 0.$$

Segue que $\langle g, v\rangle = 0$, isto é,

$$\begin{aligned} 0 = \langle g, v\rangle = \langle g, u - \lambda g\rangle &= \langle g, u\rangle - \lambda\langle g, g\rangle \\ &= \varphi(g)\langle g, u\rangle - \varphi(g)\frac{\varphi(u)}{\varphi(g)}\|g\|^2. \end{aligned}$$

Donde concluímos

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(g)\langle g, u\rangle - \varphi(u) \\ \varphi(u) &= \varphi(g)\langle g, u\rangle, \forall u \in H. \end{aligned}$$

Tomando $f = \varphi(g)g$, o resultado segue.

Falta mostrar que $\|\varphi\|_{H^*} = \|f\|$.

De fato,

$$\|\varphi\| = \sup_{u \in H \ \|u\|=1} |\varphi(u)| = \sup_{u \in H \ \|u\|=1} |\langle f, u\rangle| = \|f\|.$$

■

Definição 2.4 *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Uma forma bilinear é uma função $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ que é linear em ambas as variáveis, ou seja, para todo $u, v \in V$ temos*

$$\begin{aligned} B(u + u', v) &= B(u, v) + B(u', v), \\ B(u, v + v') &= B(u, v) + B(u, v'), \\ B(\lambda u, v) &= B(u, \lambda v) = \lambda B(u, v). \end{aligned}$$

Definição 2.5 *Uma forma bilinear $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita ser*

- *contínua, se existe uma constante c tal que*

$$\|a(u, v)\| \leq c\|u\|\|v\|, \forall u, v \in H;$$

- *coerciva, se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que*

$$a(v, v) \geq \alpha\|v\|^2, \forall v \in H.$$

Definição 2.6 *Duas normas $\|.\|_1$ e $\|.\|_2$ sobre um espaço vetorial E são ditas equivalentes se existem constantes c_1 e c_2 com $c_1 \leq c_2$ tais que*

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1, \forall x \in E.$$

Teorema 2.10 (Stampacchia) *Suponhamos que $a(.,.)$ seja uma forma bilinear contínua e coerciva no espaço de Hilbert H. Seja $K \subset H$ um subconjunto convexo, fechado e não vazio. Então, dado qualquer $\varphi \in H^*$, existe um único elemento $u \in K$ tal que*

$$a(u, v-u) \geq \varphi(v-u), \forall v \in K. \tag{2.13}$$

Além disso, se $a(.,.)$ for simétrica, ou seja $a(u,v) = a(v,u), \forall u, v \in H$, então u pode ser caracterizado pela seguinte propriedade:

$$u \in K$$

e

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = \min_{v \in K}\{\frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v)\}. \tag{2.14}$$

Demonstração: Sabemos do Teorema 2.9 que existe um único $f \in H$ tal que

$$\varphi(v) = \langle f, v\rangle, \forall v \in H.$$

Por outro lado, se fixarmos $u \in H$, a aplicação $v \longmapsto a(u,v)$ é um funcional linear contínuo em H. Usando o Teorema 2.9 novamente, encontramos um único elemento em H, denotado por Au, tal que

$$a(u,v) = \langle Au, v\rangle, \forall v \in H.$$

Temos que A é linear. Além disso, A é contínuo. De fato, temos que existe $\varphi_u \in H^*$ tal que, para todo $v \in H$

$$\varphi_u(v) = a(u,v) = \langle Au, v\rangle.$$

Segue que,

$$\|Au\| = \|\varphi_u\| = \sup_{\|v\| \leq 1} |a(u,v)| \leq \sup_{\|v\| \leq 1} c\|u\|\|v\| \leq c\|u\|$$

e

$$a(u,u) = \langle Au, u\rangle \geq \alpha\|u\|^2.$$

Assim, o problema (2.13) é equivalente ao problema

$$\langle Au, v-u\rangle \geq \langle f, v-u\rangle, \forall v \in K,$$

ou seja, queremos demonstrar que

$$\langle f - Au, v-u\rangle \leq 0, \forall v \in K.$$

Dado $\rho > 0$, consideremos o problema

$$\langle \rho f - \rho Au, v-u\rangle \leq 0, \forall v \in K,$$

ou ainda,

$$\langle \rho f - \rho Au + u - u, v-u\rangle \leq 0, \forall v \in K.$$

Assim, queremos encontrar $u \in K$ tal que $u = P_K(\rho f - \rho Au + u)$.
Definamos $S : K \longrightarrow K$ por $S(w) = P_K(\rho f - \rho Aw + w)$. Pela Proposição 2.7, temos

$$\|S(w_1) - S(w_2)\| \leq \|(w_1 - w_2) - \rho(Aw_1 - Aw_2)\|.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\|S(w_1)-S(w_2)\|^2 &\leq \|(w_1-w_2)\|^2 - 2\rho\langle Aw_1-Aw_2, w_1-w_2\rangle + \rho^2\|Aw_1-Aw_2\|^2\\ &\leq \|(w_1-w_2)\|^2 - 2\rho\alpha\|(w_1-w_2)\|^2 + \rho^2c^2\|(w_1-w_2)\|^2\\ &\leq \|(w_1-w_2)\|^2(1-2\rho\alpha+\rho^2c^2).\end{aligned}$$

Escolhendo $\rho > 0$ e $c > \alpha > 0$ de modo que

$$k^2 = 1 - 2\alpha\rho + \rho^2c^2 < 1,$$

quando $\rho = \frac{\alpha}{c^2}$, k^2 é mínimo e vale $1 - \dfrac{\alpha^2}{c^2}$, concluímos que S é uma contração em K. Segue pelo Teorema 2.1 que $S(u) = u$, ou seja

$$\begin{aligned}\rho f - \rho Au + u &= u\\ Au &= f,\end{aligned}$$

o que mostra (2.13).

Suponhamos agora que a forma bilinear a seja simétrica. Assim $a(.,.)$ define um novo produto interno em H e uma nova norma $\|u\|_1 = (a(u,u))^{\frac{1}{2}}$.

De fato, note que

- $a(u,v) = a(v,u)$ por hipótese;
- $a(u+v,w) = a(u,w) + a(v,w)$, pois a é forma bilinear;
- $a(\lambda u, v) = \lambda a(u,v)$;
- $a(u,u) > 0$ e igual a zero se, e somente se $u = 0$, pois a é coerciva.

Note que esta nova norma é equivalente à primeira com constantes de equivalência c e α.

Segue que $(H, \|.\|_1)$ é um espaço de Hilbert. Pelo Teorema 2.9, para cada $\varphi \in H^*$, existe um único $g \in H$ tal que

$$\varphi(v) = a(g,v), \forall v \in H.$$

Assim, queremos resolver

$$a(g-u, v-u) \leq 0, \forall v \in K. \tag{2.15}$$

A solução de (2.15) é a projeção sobre K (relativa ao produto interno $a(.,.)$).

Pelo Teorema 2.6, sabemos que u é o único elemento de K que atinge

$$\min_{v\in K} a(g-v, g-v)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim, u minimiza a função

$$\begin{aligned}v \longmapsto a(g-v,g-v) &= a(v,v) - 2a(g,v) + a(g,g)\\ &= a(v,v) - 2\varphi(v) + a(g,g).\end{aligned}$$

Concluímos que u satisfaz

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) \leq \frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v), \forall v \in K.$$

■

Corolário 2.11 (Lax-Milgram) *Suponhamos $a(\cdot,\cdot)$ seja uma forma bilinear contínua e coerciva no espaço de Hilbert H. Então dado qualquer $\varphi \in H^*$, existe um único elemento $u \in H$ tal que*

$$a(u,v) = \varphi(v), \forall v \in H.$$

Além disso, se $a(\cdot,\cdot)$ for simétrica, então u pode ser caracterizado pela seguinte propriedade:

$$u \in H$$

e

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = \min_{u\in H}\{\frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v)\}.$$

Demonstração: Tome $K = H$ no Teorema 2.10 e use um argumento análogo ao que foi usado na prova do Corolário 2.8. ■

Agora finalizamos o capítulo com o seguinte resultado sobre o espectro de operadores autoadjuntos.

Teorema 2.12 *Seja $T \in \mathcal{L}(H)$ um operador autoadjunto. Defina*

$$m = \inf_{u\in H\ \ |u|=1}\langle T(u),(u)\rangle \ \text{ e } \ M = \sup_{u\in H\ \ |u|=1}\langle T(u),(u)\rangle.$$

Então $\sigma(T) \subset [m, M]$, $m \in \sigma(T)$ e $M \in \sigma(T)$. Ainda mais,

$$\|T\| = \max\{|m|, |M|\}.$$

Demonstração: Seja $\lambda > M$. Provemos que $\lambda \in \rho(T)$. Note que, para $u \neq 0$

$$\langle T(u),(u)\rangle = \|u\|^2\langle T\left(\frac{u}{\|u\|}\right), \left(\frac{u}{\|u\|}\right)\rangle \leq M\|u\|^2.$$

Por outro lado

$$-\langle T(u) - \lambda u, u\rangle \leq \|T(u) - \lambda u\|\|u\|$$

e também

$$\begin{aligned} -\langle T(u) - \lambda u, u\rangle &= -\langle T(u), u\rangle + \lambda\|u\|^2 \\ &\geq -\|u\|^2 M + \lambda\|u\|^2 \\ &= \alpha\|u\|^2. \end{aligned}$$

Assim

$$\|T(u) - \lambda u\| \geq \alpha\|u\|.$$

Logo, se tomarmos $a(u,v) = \langle T(u) - \lambda u, v\rangle$, temos que a é coerciva.
Agora,

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &= |\langle T(u) - \lambda u, v\rangle| \\ &\leq \|T(u) - \lambda u\|\|v\| \\ &\leq \|T - \lambda\|\|u\|\|v\| \\ &\leq c\|u\|\|v\|. \end{aligned}$$

Segue então que a é contínua.
Pelo Corolário 2.11, dado $\varphi \in H^*$, existe um único $u \in H$ tal que

$$\langle T(u) - \lambda u, v\rangle = \varphi(v).$$

Pelo Teorema 2.9, concluímos que

$$\langle T(u) - \lambda u, v\rangle = \langle f, v\rangle,$$

para algum $f \in H$.
Portanto $(T - \lambda I)$ é bijeção, e assim $\lambda \in \rho(T)$.

Agora, seja $\lambda < m$. Para $u \neq 0$, escrevemos

$$\langle T(u), (u)\rangle = \|u\|^2 \langle T\left(\frac{u}{\|u\|}\right), \left(\frac{u}{\|u\|}\right)\rangle \geq m\|u\|^2.$$

Logo,

$$\langle T(u) - \lambda u, u\rangle \leq \|T(u) - \lambda u\|\|u\|$$

e

$$\begin{aligned}\langle T(u) - \lambda u, u\rangle &= \langle T(u), u\rangle - \lambda\|u\|^2 \\ &\geq (m - \lambda)\|u\|^2 \\ &= \delta\|u\|^2.\end{aligned}$$

De modo análogo, $a(u, v) = \langle T(u) - \lambda u, v\rangle$ é contínua e coerciva, então, pelo Corolário 2.11, segue que $\lambda \in \rho(T)$.

Provemos agora que $M \in \sigma(T)$ ($m \in \sigma(T)$ é análogo).

A forma $a(u, v) = \langle M(u) - T(u), v\rangle$ é simétrica e satisfaz

$$\langle Mu - T(u), v\rangle = \langle M(v), v\rangle - \langle T(v), v\rangle \geq 0, \forall v \in H,$$

pois $M = \sup_{u\in H}\langle T(u), u\rangle$ e T é auto-adjunto.

Assim, satisfaz a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|a(u, v)| \leq a(u, u)^{\frac{1}{2}} a(v, v)^{\frac{1}{2}}, \forall u, v \in H,$$

isto é,

$$|\langle M(u) - T(u), v\rangle| \leq \langle M(u) - T(u), u\rangle^{\frac{1}{2}} \langle M(v) - T(v), v\rangle^{\frac{1}{2}}, \forall u, v \in H,$$

Segue que

$$\|M(u) - T(u)\| \leq c\langle M(u) - T(u), u\rangle^{\frac{1}{2}}, \forall u \in H. \tag{2.16}$$

Pela definição de M, existe uma sequência $\{u_n\}$ tal que $|u_n| = 1$ e $\langle T(u_n), u_n\rangle \to M$.

De (2.16), temos que

$$\begin{aligned}\|M(u_n) - T(u_n)\| &\leq c\langle M(u_n) - T(u_n), u_n\rangle^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c[M\langle u_n, u_n\rangle - \langle T(u_n), u_n\rangle]^{\frac{1}{2}} \to 0.\end{aligned}$$

Finalmente, mostremos que $\|T\| = \mu$, onde $\mu = \max\{|m|, |M|\}$. De fato, escrevemos, para todo $u, v \in H$, como T é auto-adjunto

$$\begin{aligned}\langle T(u + v), u + v\rangle &= \langle T(u), u\rangle + \langle T(v), v\rangle + 2\langle T(u), v\rangle \\ \langle T(u - v), u - v\rangle &= \langle T(u), u\rangle + \langle T(v), v\rangle - 2\langle T(u), v\rangle.\end{aligned}$$

Subtraindo as equações, temos

$$\langle T(u + v), u + v\rangle - \langle T(u - v), u - v\rangle = 4\langle T(u), v\rangle.$$

Então

$$\begin{aligned}4|\langle T(u), v\rangle| &= |\langle T(u + v), u + v\rangle - \langle T(u - v), u - v\rangle| \\ &\leq |\langle T(u + v), u + v\rangle| + |\langle T(u - v), u - v\rangle| \\ &\leq \mu(\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2).\end{aligned}$$

Pela Proposição 2.5,

$$4|\langle T(u), v\rangle| \leq 2\mu(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Substituindo v por αv, com $\alpha > 0$, segue que

$$\begin{aligned} 4|\langle T(u), \alpha v\rangle| &\leq 2\mu(\|u\|^2 + \|\alpha v\|^2) \\ 4\alpha|\langle T(u), v\rangle| &\leq 2\mu(\|u\|^2 + \alpha^2\|v\|^2) \\ 4|\langle T(u), v\rangle| &\leq 2\mu\left(\frac{\|u\|^2}{\alpha} + \alpha\|v\|^2\right). \end{aligned}$$

Agora, tomando $\alpha = \dfrac{\|u\|}{\|v\|}$, obtemos

$$|\langle T(u), v\rangle| \leq \mu\|u\|\|v\|, \forall u, v \in H.$$

Então $\|T\| \leq \mu$.
Por outro lado, $|\langle T(u), v\rangle| \leq \|T\|\|u\|^2$, pois $M = \|T\|$.
Temos então que $|m| \leq \|T\|$ e $M \leq \|T\|$ e assim $\mu \leq \|T\|$.
Logo, $\|T\| = \mu$. ■

Capítulo 3

Problema de Neumann Não Local

Baseando-se em [1, 10], estudaremos neste capítulo o problema de Neumann não local. Mostraremos a existência e unicidade de soluções utilizando o Teorema do Ponto Fixo de Banach 2.1 e também estudaremos o comportamento assintótico das soluções com relação à variável temporal t. Consideraremos o caso linear e semilinear com linearidades globalmente Lipschitz. Na última seção, estudaremos a regularidade das soluções com relação a alguns parâmetros do nosso problema. Para tanto, utilizaremos o Teorema da Contração Uniforme 2.3.

3.1 Equação Linear Não Homogênea

Nesta seção vamos estudar questões de existência e unicidade da seguinte equação de difusão não local linear e não homogênea

$$\begin{cases} u_t(t,x) = \displaystyle\int_\Omega J(x-y)(u(t,y)-u(t,x))dy + f(t,x), \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio aberto limitado e conexo, $t \in \mathbb{R}$, a condição inicial $u_0 \in L^2(\Omega)$ e $f \in C(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$, com

(H) $J \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, não negativa, com $J(0) > 0$, $J(-x) = J(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} J(x)dx = 1.$$

Também assumimos, sem perda de generalidade que $\|J\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \infty$.

A seguir obtemos alguns resultados preliminares necessários para a prova dos resultados principais.

3.1.1 Resultados Preliminares

A próxima proposição é um resultado útil que utilizaremos mais a frente.

Proposição 3.1 *Seja J satisfazendo **(H)**, então para $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, vale*

$$\int_\Omega v(x) \int_\Omega J(x-y)(u(y)-u(x))dydx = -\frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega J(x-y)(u(y)-u(x))(v(y)-v(x))dydx. \tag{3.2}$$

Em particular, se $p = 2$, temos, para $u \in L^2(\Omega)$

$$\int_\Omega u(x) \int_\Omega J(x-y)(u(y)-u(x))dydx = -\frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega J(x-y)(u(y)-u(x))^2 dydx. \tag{3.3}$$

Demonstração: Chamando a integral do lado direito de (3.2) de

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_\Omega\int_\Omega J(x-y)(u(y)-u(x))(v(y)-v(x))dydx \\ &= \int_\Omega\int_\Omega J(x-y)(u(y)-u(x))v(y)dydx - \int_\Omega\int_\Omega J(x-y)(u(y)-u(x))v(x)dydx. \end{aligned}$$

Trocando a ordem das variáveis no primeiro termo da soma, obtemos

$$I_1 = \int_\Omega\int_\Omega J(y-x)(u(x)-u(y))v(x)dxdy - \int_\Omega\int_\Omega J(x-y)(u(y)-u(x))v(x)dydx.$$

Como $J(x) = J(-x)$, segue

$$I_1 = \int_\Omega\int_\Omega J(x-y)(u(x)-u(y)v(x)dxdy - \int_\Omega\int_\Omega J(x-y)(u(y)-u(x))v(x)dydx.$$

Graças ao Teorema de Fubini, temos

$$I_1 = -2\int_\Omega\int_\Omega J(x-y)(u(y)-u(x))v(x)dydx.$$

Assim sendo, provamos que o lado direito de (3.2) é

$$\begin{aligned} &\int_\Omega\int_\Omega J(x-y)(u(y)-u(x)(v(y)-v(x)dydx = \\ &\quad = -2\int_\Omega\int_\Omega J(x-y)(u(y)-u(x))v(x)dydx. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} &\int_\Omega v(x)\int_\Omega J(x-y)(u(y)-u(x)dydx = \\ &= \int_\Omega \left(\int_\Omega J(x-y)u(y)dy - \int_\Omega J(x-y)u(x)\right) v(x)dx \\ &= \int_\Omega\int_\Omega J(x-y)(u(y)-u(x))v(x)dydx. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Então, de (3.4) e (3.5), temos

$$\begin{aligned} &\int_\Omega v(x)\int_\Omega J(x-y)(u(y)-u(x))dydx = \\ &= \int_\Omega\int_\Omega J(x-y)(u(y)-u(x))v(x)dydx = \\ &= -\frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega J(x-y)(u(y)-u(x))(v(y)-v(x))dydx. \end{aligned}$$

A segunda parte da Proposição é um caso imediato de (3.2). ■

Inicialmente consideramos a equação não local do tipo Neumann homogênea e linear

$$\begin{cases} u_t(t,x) = \displaystyle\int_\Omega J(x-y)(u(t,y)-u(t,x))dy, \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{3.6}$$

com $x \in \Omega, t > 0$.

Definição 3.1 *Uma solução para o problema (3.1) e (3.6) (quando $f \equiv 0$) é uma função $u \in C([0,\infty], L^1(\Omega))$ tal que*

$$u(t,x) = u_0(x) + \int_0^t \int_\Omega J(x-y)(u(s,y)-u(s,x))dyds + \int_0^t f(s,x)dx$$

onde $x \in \Omega, t > 0$.

Observação: Apesar de estarmos definindo as soluções em $L^1(\Omega)$, a maioria de nossos resultados serão enunciados em $L^2(\Omega)$. [1]

Proposição 3.2 *Para todo $u_0 \in L^1(\Omega)$ a única solução u de (3.6) preserva a massa total em Ω, ou seja*

$$\int_\Omega u(t,x)dx = \int_\Omega u_0(x)dx, \ \forall t \geq 0.$$

Demonstração: Como

$$u(t,x) - u_0(x) = \int_0^t \int_\Omega J(x-y)(u(s,y)-u(s,x))dyds,$$

integrando em x e utilizando o Teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega u(t,x)dx - \int_\Omega u_0(x)dx &= \int_\Omega \int_0^t \int_\Omega J(x-y)(u(s,y)-u(s,x))dydsdx \\ &= \int_0^t \int_\Omega \int_\Omega J(x-y)(u(s,y)-u(s,x))dydxds \\ &= \int_0^t \int_\Omega \left[\int_\Omega J(x-y)u(s,y)dy - \int_\Omega J(x-y)dyu(s,x) \right] dxds \\ &= \int_0^t \left[\int_\Omega \int_\Omega J(x-y)u(s,y)dydx - \int_\Omega \int_\Omega J(x-y)dyu(x)dx \right] ds \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Lema 3.3 *A função $A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $A(x) = \int_\Omega J(x-y)dy$ é contínua e satisfaz $A(x) \geq c$, para algum $c > 0$.*

Demonstração: Como J é contínua por **(H)**, temos que é uniformemente contínua em conjuntos compactos de $\mathbb{R}^N$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x-z| < \delta$, então $|J(x-y)-J(z-y)| < \varepsilon$. Agora, note que

$$\begin{aligned} |A(x) - A(z)| &= \left| \int_\Omega J(x-y)dy - \int_\Omega J(z-y)dy \right| \\ &\leq \int_\Omega |J(x-y) - J(z-y)|dy \leq \int_\Omega \varepsilon dy = \varepsilon|\Omega|. \end{aligned}$$

Desta forma, concluímos que A é contínua em Ω.

[1] Note também que $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$.)

Mostremos agora que $A(x)$ é estritamente positiva. De fato, suponha que não. Então existe uma sequência $\{x_n\} \subset \Omega$ tal que $0 \leq A(x_n) \leq \frac{1}{n}$. Segue então que $A(x_n) \to 0$. Note que $A(x_n) \to A(x)$ se $x \in \Omega$ pela continuidade de A. Portanto

$$0 = A(x) = \int_\Omega J(x-y)dy > 0,$$

absurdo, pois, por **(H)**, $J(0) \geq c > 0$.

Analogamente, se $x \in \partial\Omega$, temos $\int_\Omega J(x-y)dy = 0$, o que também é absurdo, pois $J(0) > 0$ e J é contínua. Segue então que A é estritamente positivo e pode ser estendida continuamente até $\overline{\Omega}$. ■

Seja $C^k(\Omega)$ o espaço das funções contínuas k-vezes diferenciáveis em Ω, com $k \geq 0$. Se $g \in C^k(\Omega)$ e $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ é um multi-index de tamanho $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, com $|\alpha| \leq k$, escrevemos

$$D^\alpha g = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} g.$$

Teorema 3.4 *Sejam $f \in L^1(\Omega)$ e $g \in C^k(\Omega)$, com $D^\alpha g$ limitada para todo $|\alpha| \leq k$. Então*

$$\int_\Omega g(x-y)f(y)dy \in C^k(\Omega)$$

e

$$D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g,$$

se $|\alpha| \leq k$.

Ainda mais, as derivadas de ordem menor ou igual a k de $f * g$ são limitadas.

Demonstração: Dividiremos a prova em casos.

- Caso $k = 0$. Note que $g(x-y)$ é majorada para alguma constante C, que independe de x e y, ou seja $|f(y)g(x-y)| \leq C|f(y)|$ e é contínua. Portanto, a integral é finita para cada x e pelo Teorema de Continuidade e Derivação sob o sinal de Integração (consulte obra [9], Capítulo 1, página 20), temos que $f * g$ é contínua.

- Caso $k = 1$. Fixemos $j = 1, \cdots, n$. Pelo caso anterior, segue que $f * \partial_{x_j} g$ é contínua. Para quaisquer x e y, temos

  $$|\partial_{x_j}[f(y)g(x-y)]| = |f(y)(\partial_{x_j} g)(x-y)| \leq C|f(y)| \in L^1(\Omega).$$

  Então, pelo Teorema de Continuidade e Derivação sob o sinal de Integração, temos que existe $\partial_{x_j}(f * g)$ e que $\partial_{x_j}(f * g) = f * (\partial_{x_j} g)$ é contínua. Variando j, concluímos que $f * g \in C^1(\Omega)$.

- Caso $k > 1$. Segue por indução de maneira inteiramente análoga ao que foi feito anteriormente.

Agora notemos que vale, pela desigualdade de Hölder

$$\|D^\alpha(f * g)\|_{L^\infty(\Omega)} = \|f * D^\alpha g\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f\|_{L^1(\Omega)} \|D^\alpha g\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty,$$

se $0 \leq |\alpha| < k$. ■

Definição 3.2 *Uma solução de (3.6) é dita estacionária se for independente do tempo t. Nesse caso, a solução estacionária de (3.6) é descrita por*

$$0 = \int_\Omega J(x-y)(\varphi(y) - \varphi(x))dy. \tag{3.7}$$

Proposição 3.5 *Toda solução estacionária da equação (3.6) é constante em Ω, e, como a massa total é preservada, a única solução estacionária com a mesma massa de u_0 é*

$$\varphi = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0.$$

Demonstração: Primeiramente, note que a equação (3.7) e o Lema 3.3 nos diz que

$$\begin{aligned}\int_\Omega J(x-y)dy\varphi(x) &= \int_\Omega J(x-y)\varphi(y)dy\\ A(x)\varphi(x) &= \int_\Omega J(x-y)\varphi(y)dy\\ \varphi(x) &= \frac{\int_\Omega J(x-y)\varphi(y)dy}{A(x)}.\end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.4 e pelo Lema 3.3, temos que φ é contínua. Com efeito, φ pode ser estendida continuamente em $\overline{\Omega}$.

Defina

$$K = \max_{x\in\overline{\Omega}} \varphi(x)$$

e considere o conjunto $\mathcal{A} = \{x \in \overline{\Omega} : \varphi(x) = K\}$. Temos que $\mathcal{A}$ é fechado e não vazio, pois φ é contínua em $\overline{\Omega}$.

Afirmação $\mathcal{A}$ é aberto em $\overline{\Omega}$. Seja $x_0 \in \mathcal{A}$, então

$$0 = \int_\Omega J(x_0-y)(\varphi(y)-\varphi(x_0))dy,$$

e, como x_0 é ponto de máximo, $\varphi(y) \leq \varphi(x_0)$ o que nos dá que, para todo $y \in \Omega \cap B(x_0,d)$, $\varphi(y) = \varphi(x_0)$, para qualquer $B(0,d) \subset \text{supp}(J)$. Logo, conseguimos uma bola aberta dentro de $\mathcal{A}$, implicando que $\mathcal{A}$ é aberto.

Como Ω é conexo, $\overline{\Omega}$ é conexo, e então $\mathcal{A} = \overline{\Omega}$. Assim φ é constante. Segue da Proposição 3.2 que a solução estacionária preserva a massa

$$\int_\Omega \varphi = \int_\Omega u_0 \Rightarrow \varphi|\Omega| = \int_\Omega u_0 \Rightarrow \varphi = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0,$$

onde u_0 é a condição inicial. ■

Proposição 3.6 *Dada J satisfazendo **(H)**, a quantidade*

$$\lambda_1 := \lambda_1(J,\Omega) = \inf_{u\in L^2(\Omega)\ \int_\Omega u=0} \frac{\frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega J(x-y)(u(y)-u(x))^2dydx}{\int_\Omega (u(x))^2dx}$$

é estritamente positiva.

Demonstração: É claro que $\lambda_1 \geq 0$. Provaremos que α_1 é de fato estritamente positiva. Para este fim, considere o subespaço W de $L^2(\Omega)$ dado pelo complemento ortogonal das constantes, ou seja

$$H = \{u \in L^2(\Omega) : \int_\Omega u = 0\}$$

e o operador $T : H \longrightarrow H$ dado por

$$T(u)(x) = \int_\Omega J(x-y)(u(x)-u(y))dy = -\int_\Omega J(x-y)u(y)dy + A(x)u(x),$$

onde $A(x) = \int_\Omega J(x-y)dy$. Temos que T é simétrico, pois

$$\begin{aligned}\int_\Omega Tu(x)v(x)dx &= \int_\Omega\int_\Omega J(x-y)(u(x)-u(y))dyv(x)dx\\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega J(x-y)(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))dydx\\ &= \int_\Omega u(x)Tv(x)dx\end{aligned}$$

pela Proposição 3.1.

Mostremos que T é a soma de um operador inversível e um operador compacto. Para isto, observamos inicialmente que $J(x-\cdot) \in L^2(\Omega)$, para todo $x \in \Omega$. Com efeito, pela Desigualdade de Hölder 1.5, temos

$$\begin{aligned}\|J(x-\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega |J(x-y)|^2dy \le \|1\|_{L^1(\Omega)}\|J(x-\cdot)\|^2_{L^\infty(\Omega)}\\ &\le |\Omega| \sup_{z\in\mathbb{R}^n} |J(z)|^2 < \infty.\end{aligned}$$

Agora, seja $S : \overline{\Omega} \longrightarrow L^2(\Omega)$ definido por $S(x) = J(x-\cdot)$. Note que $S \in C(\overline{\Omega}, L^2(\Omega))$, pois, para quaisquer $x, z \in \overline{\Omega}$

$$\|S(x)-S(z)\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |J(x-y)-J(z-y)|^2dy.$$

Fixemos um compacto K com a propriedade $\{x-y; x, y \in \Omega\} \subset K$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|w-w'| < \delta$, com $w, w' \in K \subset \mathbb{R}^n$, então

$$|J(w)-J(w')| < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{|\Omega|}},$$

pois J é uniformemente contínua em qualquer compacto de $\mathbb{R}^n$. Agora, note que

$$\|S(x)-S(z)\|^2_{L^2(\Omega)} \le \frac{\varepsilon}{|\Omega|}$$

se $|x-z| < \delta$, já que $|x-y-(z-y)| = |x-z|$.

Segue da Proposição 1.1 S é uniformemente contínua em $\overline{\Omega}$, e portanto uniformemente limitada em Ω.

Afirmação: O conjunto $\Phi = \{Gu \in L^2(\Omega) : \|u\|_{L^2(\Omega)} \le 1\}$, onde $G : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$, definido por $Gu(x) = \int_\Omega J(x-y)u(y)dy$ é totalmente limitado e G é um operador compacto.

De fato, note que $Gu : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \in C(\Omega)$. Além disso

$$|G(u(x))| = \left|\int_\Omega J(x-y)u(y)dy\right| \le \|J(x-\cdot)\|_{L^2(\Omega)} \le \|J\|_{L^\infty(\Omega)}|\Omega|^{\frac{1}{2}},$$

assim

$$\sup_{x\in\Omega}\{|G(u(x))| : Gu \in \Phi\} < \infty.$$

Se $\varepsilon > 0$, para todo $x \in \Omega$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
|G(u(x)) - G(u(z))| &= \left| \int_\Omega J(x-y)u(y)dy - \int_\Omega J(z-y)u(y)dy \right| \\
&\leq \|J(x-\cdot) - J(z-\cdot)\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|J(x-\cdot) - J(z-\cdot)\|_{L^2(\Omega)} \\
&= \left(\int_\Omega |J(x-y) - J(z-y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}, \\
&< \left(\int_\Omega \frac{\varepsilon^2}{|\Omega|} dy \right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

sempre que $|x-z| < \delta$. Aqui estamos usando que J é uniformemente contínua em qualquer compacto de $\mathbb{R}^n$.

Como tal estimativa independe u com $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$, temos para todo $|x-z| < \delta$ e para todo $Gu \in \Phi$, a desigualdade acima. Ou seja, Φ é pontualmente limitado e equicontínuo.

Segue pelo Teorema de Arzelá-Ascoli 1.4 que Φ é totalmente limitada.

Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Phi \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i).$$

Logo, existe subsequência $\{Gu_n\} \subset \Phi$ de Cauchy. O que nos diz que G é compacto.

Afirmação: O operador $N : H \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ dado por $N(u(x)) = A(x)u(x)$ é um operador inversível.

De fato, do Lema 3.3, temos que $A(x) \geq c > 0$ e assim, B dada por

$$Bu(x) = \frac{u(x)}{A(x)}$$

é inversa de N.

Agora, note que T é simétrica e limitada, o que nos diz que é auto-adjunta. E mais, segue pela Proposição 2.12 que seu espectro verifica $\sigma(T) \subset [m, M]$, onde $m = \inf_{u \in H \ \|u\|_{L^2(\Omega)}=1} \langle Tu, u \rangle$ e $M = \sup_{u \in H \ \|u\|_{L^2(\Omega)}=1} \langle Tu, u \rangle$.

Note que, de modo semelhante ao que foi feito na Proposição 3.1, obtemos

$$\begin{aligned}
m &= \inf_{u \in H \ \|u\|_{L^2(\Omega)}=1} \langle Tu, u \rangle \\
&= \inf_{u \in H \ \|u\|_{L^2(\Omega)}=1} \frac{1}{2} \int_\Omega \int_\Omega J(x-y)(u(x)-u(y))^2 dydx \\
&= \lambda_1.
\end{aligned}$$

Então $m \geq 0$. Mostremos que $m > 0$. Suponha por absurdo que $m = 0$. Temos que $0 \in \sigma(T)$ e $Tu = 0$ para algum $u \in H$ e $u \neq 0$, ou seja $N(T) \neq \{0\}$ e T não é injetora. Segue pela Proposição 3.5 que u deve ser constante e igual a zero, já que sua integral é nula. Logo $m > 0$ e assim, $\alpha_1 > 0$. ■

Precisaremos, também, dos seguintes Lemas para mostrar a existência e unicidade do problema (3.1):

Lema 3.7 *Seja $f \in C([a,b], L^2(\Omega))$. Então a função $g : [a,b] \longrightarrow L^2(\Omega)$, definida por*

$$g(t) = \int_a^t f(s,\cdot)ds$$

é uniformemente contínua.

Demonstração: Note que $\|g(t)\|_{L^2(\Omega)} < \infty$, pois

$$\begin{aligned}
\|g(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \left(\int_a^t 1.f(s,x)ds\right)^2 ds &\leq \int_\Omega \left[\left(\int_a^t 1^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^t (f(s,x))^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 dx \\
&\leq \int_\Omega (t-a) \int_a^t (f(s,x))^2 ds dx \\
&\leq (t-a) \int_\Omega \int_a^t (f(s,x))^2 ds dx.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
\|g(t)\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq (t-a) \int_a^t \|f(s,x)\|^2_{L^2(\Omega)} ds \\
&\leq (t-a)^2 \sup_{s\in[a,b]} \|f(s,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq (t-a)^2 k < \infty,
\end{aligned}$$

com k constante. Note que k existe pois f é uma função contínua com domínio compacto, logo admite máximo.

Mostremos agora a continuidade uniforme. Sem perda de generalidade vamos mostrar que, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que se $|t - t_1| < \delta$ então $\|g(t) - g(t_1)\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon$, supondo $t > t_1$, com $t, t_1 \in [a,b]$.

Temos

$$\|g(t) - g(t_1)\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \left(\int_{t_1}^t \overline{f}(s,x)ds\right)^2 dx.$$

Pela Desigualdade de Hölder 1.5

$$\begin{aligned}
\|g(t) - g(t_1)\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \int_\Omega \left[\left(\int_{t_1}^t 1^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_1}^t (f(s,x))^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 dx \\
&\leq |t-t_1| \int_\Omega \int_{t_1}^t (f(s,x))^2 ds dx.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Pelo Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
\|g(t) - g(t_1)\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq |t-t_1| \int_{t_1}^t \int_\Omega (f(s,x))^2 dx ds \\
&\leq |t-t_1| \int_{t_1}^t \|f(s,x)\|^2_{L^2(\Omega)} ds \\
&\leq (t-t_1)^2 \sup_{s\in[a,b]} \|f(s,x)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq (t-t_1)^2 k,
\end{aligned}$$

onde k é uma constante dependente de f.

Tomando $\delta = \dfrac{\varepsilon}{(b-a)^2 k}$, o resultado segue. ■

Lema 3.8 *Dados A como no Lema 3.3 e $u_0 \in L^2(\Omega)$ temos que a função $S : [a,b] \longrightarrow L^2(\Omega)$ dada por $S(t) = e^{-A(\cdot)t}u_0(\cdot)$, com $A(\cdot) = \int_\Omega J(\cdot - y)dy$, é uniformemente contínua em $[a,b]$.*

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, vamos mostrar que $\exists \delta > 0$ tal que se $|t - t_1| < \delta$, então

$$\|e^{-A(\cdot)t}u_0(\cdot) - e^{-A(\cdot)t_1}u_0(\cdot)\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon$$

.

Temos, pela Desigualdade de Hölder 1.5 e tomando o supremo que

$$\int_\Omega \left|u_0(x)\left(e^{-A(x)t} - e^{-A(x)t_1}\right)\right|^2 dx \leq \|e^{-A(\cdot)t} - e^{-A(\cdot)t_1}\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|u_0(\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.9}$$

Note que, como $e^{-A(\cdot)t_1} \leq 1$ para todo t positivo,

$$\|e^{-A(\cdot)t_1}(e^{A(\cdot)(t_1-t)} - 1)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|e^{A(\cdot)(t_1-t)} - 1\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Daí, segue de (3.9) que

$$\int_\Omega \left|u_0(x)\left(e^{-A(x)t} - e^{-A(x)t_1}\right)\right|^2 dx \leq \left\|e^{A(\cdot)(t_1-t)} - 1\right\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Além disso,

$$|A(\cdot)(t_1 - t)| \leq \|J\|_{L^\infty(\Omega)}|\Omega||t_1 - t|.$$

Chamando $M = \|J\|_{L^\infty(\Omega)}|\Omega|$, (3.9) fica

$$\begin{aligned}
\|u_0\|_{L^2(\Omega)}\|e^{A(\cdot)(t_1-t)} - 1\|_{L^\infty(\Omega)} &= \|u_0\|_{L^2(\Omega)}\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[A(\cdot)(t_1-t)]^n}{n!}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&\leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|M(t_1-t)|^n}{n!} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(M\delta)^n}{n!} \\
= \|u_0\|_{L^2(\Omega)}(e^{\delta M} - 1).
\end{aligned}$$

Mas queremos

$$\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}(e^{\delta M} - 1) < \varepsilon$$

isto é,

$$e^{\delta M} < \frac{\varepsilon}{\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}} + 1.$$

Aplicando o logaritmo natural nos dois lados da desigualdade acima, temos que, se tomarmos

$$\delta = \frac{1}{M}\ln\left(\frac{\varepsilon}{\|u_0\|_{L^2(\Omega)}} + 1\right),$$

o resultado segue. ■

Corolário 3.9 *Dados A como no Lema 3.3 e $u \in L^2(\Omega)$, temos que as funções $Q, L : [a,b] \longrightarrow L^2(\Omega)$ definidas por $Q(t) = \int_0^t e^{A(\cdot)s}f(s,\cdot)ds$ e $L(t) = \int_0^t e^{A(\cdot)s}\left(\int_\Omega J(\cdot - y)u(s,y)dy\right)ds$, com $f \in C(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$ são uniformemente contínuas.*

Demonstração: É consequência dos Lemas 3.7 e 3.8 já que as funções

$$\overline{f}_1(t,\cdot) = e^{A(\cdot)t} f(t,\cdot) \text{ e } \overline{f}_2(t,\cdot) = e^{A(\cdot)t} \int_\Omega J(\cdot - y) u(t,y) dy$$

pertencem a $C([a,b], L^2(\Omega))$. ■

3.1.2 Existência e Unicidade

Agora já estamos em condições de provar o resultado principal desta seção. Consideramos a equação não local linear e homogênea (3.1).

Teorema 3.10 *Seja $J \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ uma função satisfazendo **(H)** e $f \in C(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$. Então, para cada $u_0 \in L^2(\Omega)$, o problema não local (3.1) possui uma única solução global*

$$u : \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que, para todo intervalo limitado $[a,b] \subset \mathbb{R}$, temos

$$u \in C^1([a,b], L^2(\Omega))$$

com

$$u(t,x) = e^{-A(x)t} u_0 + \int_0^t e^{-A(x)(t-s)} \int_\Omega J(x-y) u(s,y) dy ds + \int_0^t e^{-A(x)(t-s)} f(s,x) ds \tag{3.10}$$

em $(t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega$, onde $A(x) \in L^\infty(\Omega)$ é a função positiva definida anteriormente por

$$A(x) = \int_\Omega J(x-y) dy, \ x \in \Omega.$$

Além disso, existem constantes positivas α e C, tais que

$$\left\| u(t,\cdot) - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u_0(x) dx \right\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\alpha t} \left[\left\| u_0 - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u_0(x) dx \right\|_{L^2(\Omega)} + C \int_0^t \|f(s,\cdot)\|^2 ds \right]. \tag{3.11}$$

Se ainda assumirmos que $u_0 \in L^\infty(\Omega)$,

$$\int_0^\infty \|f(s,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} ds < \infty \tag{3.12}$$

e

$$\int_0^\infty e^{\gamma s} \|f(s,\cdot)\|_{L^\infty} < \infty \tag{3.13}$$

para $\gamma = \|J\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} |\Omega|$, então

$$\left\| u(t,\cdot) - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u_0(x) dx \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C e^{-\alpha t} \tag{3.14}$$

para qualquer $t \geq 0$.

Demonstração: Primeiramente, mostremos a equivalência da equação (3.10) e do problema (3.1).

Reescrevendo (3.1)

$$u_t(t,x) e^{A(x)t} = e^{A(x)t} \int_\Omega J(x-y) u(t,y) dy - e^{A(x)t} \int_\Omega J(x-y) dy u(t,x) + e^{A(x)t} f(t,x).$$

Como $(u(t,x)e^{A(x)t})' = u_t(t,x)e^{A(x)t} + A(x)u(t,x)e^{A(x)t}$, segue que

$$(u(t,x)e^{A(x)t})' = e^{A(x)t}\int_\Omega J(x-y)u(t,y)dy + e^{A(x)t}f(t,x).$$

Integrando

$$u(t,x)e^{A(x)t} - u(0,x) = \int_0^t e^{A(x)s}\int_\Omega J(x-y)u(s,y)dyds + \int_0^t e^{A(x)s}f(s,x)ds$$
$$u(t,x) = e^{-A(x)t}u(0,x) + \int_0^t e^{-A(x)(t-s)}\int_\Omega J(x-y)u(s,y)dyds + \int_0^t e^{-A(x)(t-s)}f(s,x)ds.$$

Agora, partindo de

$$u(t,x)e^{A(x)t} = u_0(x) + \int_0^t e^{A(x)s}\int_\Omega J(x-y)u(s,y)dyds + \int_0^t e^{A(x)s}f(s,x)ds$$

e derivando

$$u_t(t,x)e^{A(x)t} + A(x)u(t,x)e^{A(x)t} = e^{A(x)t}\int_\Omega J(x-y)u(t,y)dy + e^{A(x)t}f(t,x)$$
$$u_t(t,x) + \int_\Omega J(x-y)dyu(t,x) = \int_\Omega J(x-y)u(t,y)dy + f(t,x)$$
$$u_t(t,x) = \int_\Omega J(x-y)(u(t,y)-u(t,x))dy + f(t,y).$$

Agora, mostremos a existência e unicidade. Consideremos $T>0$ fixo no espaço de Banach

$$X_T = \{u \in C([-T,T],L^2(\Omega)) : \sup_{-T\le t\le T}\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} < \infty\}.$$

A solução será dada como um ponto fixo do operador

$$F : X_T \longrightarrow X_T,$$

definido por

$$F(u)(t,x) = e^{-A(x)t}u_0 + \int_0^t e^{-A(x)(t-s)}\int_\Omega J(x-y)u(s,y)dyds$$
$$+ \int_0^t e^{-A(x)(t-s)}f(s,x)ds.$$

Verificamos inicialmente que $F(u)(t,x)$ é limitada em $L^2(\Omega)$ para cada $t\in[-T,T]$ e qualquer $u\in X_T$. De fato,

$$\|F(u)(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \left|e^{-A(x)t}u_0(x) + \int_0^t e^{-A(x)(t-s)}\int_\Omega J(x-y)u(s,y)dyds + \int_0^t e^{-A(x)(t-s)}f(s,x)ds\right|^2 dx.$$

Usando a desigualdade do Lema 1.2

$$\|F(u)(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} \le$$
$$\int_\Omega 4\left(\left|e^{-A(x)t}u_0(x) + \int_0^t e^{-A(x)(t-s)}\int_\Omega J(x-y)u(s,y)dyds\right|^2 + \left|\int_0^t e^{-A(x)(t-s)}f(s,x)ds\right|^2\right)dx.$$

Novamente, usando o Lema 1.2,

$$\|F(u)(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_\Omega 16\left(e^{-2A(x)t}|u_0(x)|^2 + \left|\int_0^t e^{-A(x)(t-s)}\int_\Omega J(x-y)u(s,y)dyds\right|^2\right)dx+$$
$$+\int_\Omega 4\left|\int_0^t e^{-A(x)(t-s)}f(s,x)ds\right|^2 dx.$$

Vamos majorar termo a termo a desigualdade acima. Primeiramente, note que

$$\max_{(t,x)\in[-T,T]\times\overline{\Omega}} e^{-A(x)t} \leq e^{T\max_{x\in\overline{\Omega}}A(x)} \leq e^{TA_m}, \tag{3.15}$$

onde $A_m = \max_{x\in\overline{\Omega}} A(x)$. Dessa maneira, tomando o supremo após usar a Desigualdade de Hölder 1.5 e por (3.15) encontramos

$$\begin{aligned}\int_\Omega e^{-2A(x)t}|u_0(x)|^2dx &\leq \|e^{-2A(\cdot)t}\|_{L^\infty(\Omega)}\|u_0(\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\leq e^{2TA_m}\sup_{-T\leq t\leq T}\|u_0(\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Seja $K = \int_\Omega \left|\int_0^t e^{-A(x)(t-s)}\int_\Omega J(x-y)u(s,y)dyds\right|^2 dx$, temos então

$$K = \left\|\int_0^t e^{-A(\cdot)(t-s)}\int_\Omega J(\cdot-y)u(s,y)dy\right\|^2_{L^2(\Omega)}$$

e pela Desigualdade de Hölder 1.5,

$$K \leq e^{2TA_m}\left\|\int_0^t 1\int_\Omega J(\cdot-y)u(s,y)dyds\right\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Segue que

$$\begin{aligned}K &\leq \int_\Omega e^{2TA_m}\left[\left(\int_\Omega J(x-y)^2dy\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega\left(\int_0^t u(s,y)ds\right)^2dy\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2dx\\ &\leq e^{2TA_m}\int_\Omega \|J(x-\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}\left(\int_\Omega |t|\left(\int_0^t u(s,y)^2ds\right)dy\right)dx\\ &\leq e^{2TA_m}T\int_\Omega \|J(x-\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}\left(\int_0^t \|u(s,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}ds\right)dx\\ &\leq e^{2TA_m}T^2\sup_{s\in[-T,T]}\|u(s,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}\int_\Omega \|J(x-\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}dx\\ &\leq e^{2TA_m}T^2\sup_{s\in[-T,T]}\|u(s,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}|\Omega|\|J\|^2_{L^\infty(\Omega)}\end{aligned}$$

Agora, seja

$$R = \int_\Omega \left|\int_0^t e^{-A(\cdot)(t-s)}f(s,\cdot)ds\right|^2 dx.$$

Usando a Desigualdade de Hölder 1.5 temos

$$\begin{aligned} R &= \int_\Omega \left| \int_0^t e^{-A(\cdot)(t-s)} f(s,\cdot) ds \right|^2 dx \\ &\leq \int_\Omega \left| e^{2TA_m} \int_0^t f(s,\cdot) ds \right|^2 dx \\ &\leq T e^{2TA_m} \sup_{-T\leq s\leq T} \|f(s,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Juntando todas as informações, temos

$$\begin{aligned} \|F(u)(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 16(e^{2TA_m} \sup_{-T\leq t\leq T} \|u_0(\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + T^2 e^{2TA_m} \|J\|^2_{L^\infty(\Omega)} |\Omega| \sup_{-T\leq t\leq T} \|u(s,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}) + \\ + 4Te^{2TA_m} \sup_{-T\leq t\leq T} \|f(s,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Logo

$$\sup_{t\in[-T,T]} \|F(u)(s,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} < \infty.$$

Agora, a continuidade da F em $t \in [0,T]$ segue diretamente dos Lemas 3.7, 3.8 e do Corolário 3.9. Falta mostrar que F é contração. De fato,

$$\begin{aligned} \|F(v)(t,\cdot) - F(w)(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} &= \left\| e^{-A(\cdot)t} \int_0^t e^{A(\cdot)s} \int_\Omega J(\cdot - y)[v(s,y) - w(s,y)] dy ds \right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_\Omega \left[e^{-A(x)t} \int_0^t e^{A(x)s} \int_\Omega J(x-y)[v(s,y) - w(s,y)] dy ds \right]^2 dx. \end{aligned}$$

Segue analogamente das estimativas para K que

$$\|F(v)(t,\cdot) - F(w)(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq T^2 e^{2TA_m} \|J\|^2_{L^\infty(\Omega)} |\Omega|^2 \|v(s,\cdot) - w(s,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}, \forall t \in [-T,T]$$

Assim, podemos escolher T suficientemente pequeno de maneira que $0 \leq T^2 e^{2TA_m} |\Omega|^2 \|J\|^2_{L^\infty(\Omega)} < 1$, daí segue que F é contração em X_T. Agora, pelo Teorema 2.3, temos que F possui um único ponto fixo $F(u)(t,x) = u(t,x)$, o que mostra que temos uma única solução do problema em X_T para algum $T > 0$.

Falta ainda mostrar que u está definida para todo $T > 0$. Note que até agora mostramos que u está definida em $[-T,T]$, para T pequeno. Para tanto, considere o mesmo problema, agora com condição inicial $u(T,x)$. Observe que todas as nossas estimativas independem das condições iniciais. Assim conseguimos mostrar existência e unicidade no intervalo $[0,2T]$. De modo análogo, com condição inicial $u(-T,x)$ obtemos existência e unicidade no intervalo $[-2T,0]$. Como $[-2T,2T] = [-2T,0] \cup [0,2T]$, estendemos nossa solução por unicidade para este intervalo. Iterando este processo, temos uma solução definida em $(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$.

Mostremos agora que vale (3.11). Considere

$$H(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(u(t,x) - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u_0(x) ds \right)^2 dx.$$

Pela Regra da Cadeia temos

$$H'(t) = \int_\Omega \left(u(t,x) - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u_0(x) dx \right) u_t(t,x) dx.$$

Mas $u_t(t,\cdot) = \int_\Omega J(\cdot - y)(u(t,y) - u(t,x) dy + f(t,x)$. Portanto

$$H'(t) = \int_\Omega \left(u(t,x) - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0(x)dx \right) \left(\int_\Omega J(x-y)(u(t,y)-u(t,x))dy + f(t,x) \right) dx.$$

Pela Proposição 3.1, usando que $v(x) = u(t,x) - \dfrac{1}{\Omega}\displaystyle\int_\Omega u_0(x)dx$, temos

$$H'(t) = -\frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega J(x-y)\left(u(t,y) - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0(x)dx - \left(u(t,x) - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0(x)dx \right)\right)$$
$$(u(t,y)-u(t,x))dydx + \int_\Omega \left(u(t,x) - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0(x)dx \right) f(t,x)dx.$$

Logo

$$H'(t) = -\frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega J(x-y)\left(u(t,y) - u(t,x) + \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0(x)dx - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0(x)dx \right)^2 dx +$$
$$+ \int_\Omega \left(u(t,x) - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0(x)dx \right) f(t,x)dx.$$

Seja $W = \{u \in L^2(\Omega) : \displaystyle\int_\Omega u(x)dx = 0\}$, sabemos pela Proposição 3.6 que

$$\lambda_1 = \inf_{u\in W} \frac{\frac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega\int_\Omega J(x-y)(u(t,y)-u(t,x))^2 dydx}{\displaystyle\int_\Omega u^2(x)dx}$$

é positivo. Assim, se $\tilde{u}(t,x) = u(t,x) - \dfrac{1}{\Omega}\displaystyle\int_\Omega u_0(x)dx$,

$$-\lambda_1 \geq \frac{-\frac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega\int_\Omega J(x-y)(\tilde{u}(t,y)-\tilde{u}(t,x))^2 dydx}{\displaystyle\int_\Omega \tilde{u}^2(x)dx}.$$

Portanto

$$-\lambda_1 \left\| u(t,x) - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0(x)dx \right\|^2_{L^2(\Omega)} \geq$$
$$-\frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega J(x-y)\left[\left(u(t,y) - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0(x)dx \right) - \left(u(t,x) - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0(x)dx \right)\right]^2 dydx,$$

então

$$-\lambda_1 2H(t) \geq -\frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega J(x-y)(u(t,y)-u(t,x))^2 dxdy.$$

Agora, note que no termo $\displaystyle\int_\Omega \left(u(t,x) - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0(x)dx \right) f(t,x)dx$ de $H'(t)$, podemos usar a Desigualdade de Young (1.3),

$$\frac{a}{\sqrt{2}\delta} b\sqrt{2}\delta \leq \frac{a^2}{4\delta^2} + b^2\delta^2$$

onde $a = f(t,x)$ e $b = u(t,x) - \dfrac{1}{\Omega}\displaystyle\int_\Omega u_0(x)dx$, temos

$$\int_\Omega \left(u(t,x) - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0(x)dx\right) f(t,x)dx \leq \int_\Omega \frac{f^2(t,x)}{4}dx\delta^{-2} + \int_\Omega \left(u(t,x) - \frac{1}{\Omega}\int_\Omega u_0(x)dx\right)^2 \delta^2.$$

Destas informações, obtemos

$$H'(t) \leq -\lambda_1 2H(t) + \frac{\|f(t,.)\|^2_{L^2(\Omega)}}{4}\delta^{-2} + \delta^2 2H(t).$$

Portanto

$$\begin{aligned} H'(t) &\leq 2(\delta^2 - \lambda_1)H(t) + \frac{\delta^{-2}}{4}\|f(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq 2(\delta^2 - \lambda_1)H(t) + \delta^{-2}\|f(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Integrando $H(t)$, obtemos

$$H(t) \leq e^{2(\delta^2-\lambda_1)}\left[H(0) + \delta^{-2}\int_0^t \|f(s,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}ds\right].$$

Agora, tomando δ pequeno o suficiente para que $\delta^2 - \lambda_1 < 0$, concluímos que

$$\left\|u(t,\cdot) - \frac{1}{\Omega}\int_\Omega u_0(x)dx\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\alpha t}\left[\left\|u_0(x) - \frac{1}{\Omega}\int_\Omega u_0(x)dx\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta^{-1}\int_0^t \|f(s,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}ds\right],$$

onde $2(\delta^2 - \lambda_1) = -\alpha$ e $\delta^{-2} = C$.

Mostremos agora (3.14).
Chamando

$$w(t,x) = u(t,x) - \frac{1}{\Omega}\int_\Omega u_0(x)dx,$$

w satisfaz (3.1), com condição inicial $w_0(x) = u_0(x) - \dfrac{1}{\Omega}\displaystyle\int_\Omega u_0(x)dx$, e então a solução fica

$$w(t,x) = e^{-A(x)t}\left[w_0 + \int_0^t e^{A(x)s}f(s,x)ds + \int_0^t e^{A(x)s}\int_\Omega J(x-y)w(s,y)dyds\right].$$

Segue, pela Desigualdade de Hölder 1.5

$$|w(t,x)| \leq e^{-A(x)t}\left[|w_0| + \int_0^t e^{A(x)t}|f(s,x)|ds + \int_0^t \|J(x-\cdot)\|_{L^2(\Omega)}\|w(s,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}ds\right].$$

Como J é contínua, J(0)>0 e Ω é um domínio limitado, existe $m > 0$ constante tal que

$$0 < m \leq A(x) = \int_\Omega J(x-y)dy \leq \|J\|_\infty|\Omega| = \gamma,$$

pois a extensão de $A(x)$ até $\overline{\Omega}$ é contínua, logo $A(x)$ admite mínimo.

Como $\|J(x-\cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq \||J(x-\cdot)|^2\|_{L^\infty(\Omega)}$, segue que, por (3.11), (3.12), (3.13) e pela Desigualdade de Hölder 1.5

$$
\begin{aligned}
|w(t,x)| \leq & e^{-A(x)t}|w_0| + e^{-A(x)t}\int_0^t e^{A(x)s}|f(s,x)|ds + \\
& + e^{-A(x)t}\int_0^t e^{A(x)s}\|J(x-\cdot)\|_{L^2(\Omega)}e^{-\alpha s}\left(\|w_0\|_{L^2(\Omega)} + e^{-A(x)t}C\int_0^t \|f(\tau,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau\right)ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|w(t,x)| \leq & e^{-A(x)t}|w_0| + e^{-A(x)t}\int_0^\infty e^{\gamma s}|f(s,x)|ds + \\
& + e^{-A(x)t}\|J\|_{L^\infty(\Omega)}|\Omega|^{\frac{1}{2}}\int_0^t e^{(A(x)-\alpha)s}\left(\|w_0\|_{L^2(\Omega)} + C\int_0^\infty \|f(\tau,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau\right)ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|w(t,x)| \leq & e^{-A(x)t}|w_0| + e^{-A(x)t}\int_0^\infty e^{\gamma s}|f(s,x)|ds + \\
& + \|J\|_{L^\infty(\Omega)}|\Omega|^{\frac{1}{2}}e^{-A(x)t}\left(\frac{e^{(A(x)-\alpha)t}-1}{A(x)-\alpha}\right)\left(\|w_0\|_{L^2(\Omega)} + C\int_0^\infty \|f(\tau,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau\right).
\end{aligned}
$$

Assim, podemos tomar $\alpha > 0$ pequeno o suficiente em (3.11) tal que, para algum $m_1 > 0$,

$$0 < m_1 \leq A(x) - \alpha \leq \gamma.$$

Então,

$$
\begin{aligned}
|w(t,x)| \leq & e^{-mt}|w_0(x)| + e^{-mt}\int_0^\infty e^{\gamma s}|f(s,x)|ds + \\
& + e^{-\alpha t}\left(\frac{\|J\|_{L^\infty(\Omega)}|\Omega|^{\frac{1}{2}}}{m_1}\right)\left(\|w_0\|_{L^2(\Omega)} + C\int_0^\infty \|f(\tau,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau\right).
\end{aligned}
$$

Temos então

$$
\begin{aligned}
|w(t,x)| &\leq e^{-mt}c_1 + e^{-\alpha t}c_2 \\
&\leq e^{-\alpha t}\left(\frac{e^{-mtc_1}}{e^{-\alpha t}} + c_2\right) \\
&\leq e^{-\alpha t}e^{t(\alpha - m)}c_1 + c_2 \\
&\leq e^{-\alpha t}c_3.
\end{aligned}
$$

Tomando o supremo em x

$$\|w(t,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq e^{-\alpha t}c_3.$$

O que nos dá o que queríamos. ■

3.2 Uma Equação Semi-Linear

Vamos considerar a partir de agora, o seguinte problema não local semilinear

$$
\begin{cases}
u_t(t,x) = \displaystyle\int_\Omega J(x-y)(u(t,y)-u(t,x))dy + f(u(t,x)), \\
u(0,x) = u_0(x),
\end{cases}
\tag{3.16}
$$

com $x \in \Omega, t > 0$, J satisfazendo **(H)** e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ globalmente Lipschitz.

Teorema 3.11 *Se $u_0 \in L^2(\Omega)$, o problema (3.16) possui uma única solução global*

$$u : \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que $u \in C^1([a,b], L^2(\Omega))$, *com*

$$u(t,x) = e^{-A(x)t}u_0 + \int_0^t e^{-A(x)(t-s)} \int_\Omega J(x-y)u(s,y)dyds + \int_0^t e^{-A(x)(t-s)} f(u(s,x))ds, \quad (3.17)$$

para $(t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega$, *onde* $A(x) \in L^\infty(\Omega)$ *é a função positiva, já definida anteriormente,*

$$A(x) = \int_\Omega J(x-y)dy, \ x \in \Omega.$$

Demonstração: Observe primeiramente que a equivalência de (3.17) e do problema (3.16) é análoga ao que foi feito no Teorema 3.10. Trabalharemos com $[a,b] = [-T,T]$.

Consideremos $T > 0$ fixo no espaço de Banach

$$X_T = \{u \in C([-T,T], L^2(\Omega)) : \sup_{-T \le t \le T} \|u(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} < \infty\}.$$

A solução do problema (3.16) será dada, como no Teorema 3.10, como um ponto fixo da aplicação

$$F : X_T \longrightarrow X_T,$$

definida por

$$F(u)(t,x) = e^{-A(x)t}u_0 + \int_0^t e^{-A(x)(t-s)} \int_\Omega J(x-y)u(s,y)dyds + \\ + \int_0^t e^{-A(x)(t-s)} f(u(s,x))ds.$$

Mostremos que F é limitada em X_T. De fato,

$$\|F(u)(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \left| e^{-A(x)t}u_0 + \int_0^t e^{-A(x)(t-s)} \int_\Omega J(x-y)u(s,y)dyds + \int_0^t e^{-A(x)(t-s)} f(u(s,x))ds \right|^2 dx.$$

Pelo Lema 1.2

$$\|F(u)(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} \le \int_\Omega 4 \left| e^{-A(x)t}u_0 + \int_0^t e^{-A(x)(t-s)} \int_\Omega J(x-y)u(s,y)dyds \right|^2 dx + \\ + \int_\Omega 4 \left| \int_0^t e^{-A(x)(t-s)} f(u(s,x))ds \right|^2 dx.$$

Usando o Lema 1.2 novamente,

$$\|F(u)(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} \le \int_\Omega 16 \left[|e^{-A(x)t}u_0|^2 + \left| \int_0^t e^{-A(x)(t-s)} \int_\Omega J(x-y)u(s,y)dyds \right|^2 \right] dx + \\ + 4 \int_\Omega \left| \int_0^t e^{-A(x)(t-s)} f(u(s,x)) \right|^2 dx.$$

Sabemos que

$$\int_\Omega |e^{-A(x)t}u_0|^2 dx \le e^{2TA_m} \sup_{-T \le t \le T} \|u_0(\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

e

$$K = \left| \int_0^t e^{-A(x)(t-s)} \int_\Omega J(x-y)u(s,y)dyds \right|^2 \le T^2 e^{2TA_m} \|J\|^2_{L^\infty(\Omega)} |\Omega|^2 \sup_{0 \le s \le T} \|u(s,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Falta majorarmos o termo

$$4\int_\Omega \left|\int_0^t e^{-A(x)(t-s)} f(u(s,x))ds\right|^2 dx.$$

Mas, sabemos que, utilizando a Desigualdade de Hölder 1.5 e (3.15)

$$4\int_\Omega \left|\int_0^t e^{-A(x)(t-s)} f(u(s,x)ds\right|^2 dx \leq 4T^2 e^{2TA_m} \sup_{-T\leq s\leq T} \|f(u(s,\cdot))\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

A continuidade de F em $t \in [-T,T]$ segue de modo análogo ao que foi feito no Teorema 3.10. Assim, como f é globalmente Lipschitz, concluímos de tais desigualdades que F está bem definida, i.e, $F(u) \in X_T$ sempre que $u \in X_T$.

Agora falta mostrarmos que F é contração, de fato

$$\begin{aligned}
\|F(v)(t,\cdot) - F(w)(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} =& \|e^{-A(\cdot)}u_0 + \int_0^t e^{-A(\cdot)(t-s)} J(\cdot - y)v(t,y)dyds + \\
&+ \int_0^t e^{-A(\cdot)(t-s)} f(v(s,\cdot))ds - \\
&- e^{-A(\cdot)}u_0 - \int_0^t e^{-A(\cdot)(t-s)} J(\cdot - y)w(t,y)dyds - \\
&- \int_0^t e^{-A(\cdot)(t-s)} f(w(s,\cdot))ds\|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|F(v)(t,\cdot) - F(w)(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} =& \|e^{-A(\cdot)}u_0 + \int_0^t e^{-A(\cdot)(t-s)} J(\cdot - y)(v(t,y) - w(s,y)dyds + \\
&+ \int_0^t e^{-A(\cdot)(t-s)} (f(v(s,\cdot)) - f(w(s,\cdot)))ds\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 1.2

$$\begin{aligned}
\|F(v)(t,\cdot) - F(w)(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq& 4\left\|e^{-A(\cdot)t}\int_0^t e^{A(\cdot)s}\int_\Omega J(\cdot - y)(v(s,y) - w(s,y))dyds\right\|^2 + \\
&+ 4\left\|\int_0^t e^{A(\cdot)(t-s)}(f(v(s,\cdot) - w(s,\cdot))ds\right\|^2.
\end{aligned}$$

De modo análogo ao que foi feito no Teorema 3.10, concluímos que

$$\begin{aligned}
\|F(v)(t,\cdot) - F(w)(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq& 4T^2 e^{2TA_m}\|J\|^2_{L^\infty(\Omega)}|\Omega|^2\|v(s,\cdot) - w(s,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \\
&+ \left\|\int e^{-A(\cdot)(t-s)}(f(v(s,\cdot) - f(w(s,\cdot)))ds\right\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Mas, como f é globalmente Lipschitz, sabemos que

$$\begin{aligned}
\left\|\int e^{-A(\cdot)(t-s)}(f(v(s,\cdot) - f(w(s,\cdot)))ds\right\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq T^2 e^{2TA_m}\|f(v(s,\cdot) - f(w(s,\cdot))\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq T^2 k^2 \|v(s,\cdot) - w(s\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

onde k é a constante de Lipschitz.

Portanto, temos

$$\begin{aligned}\|F(v)(t,\cdot)-F(w)(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq (4|\Omega|^2T^2e^{2TA_m}+T^2e^{2TA_m}k^2)\|v(t,\cdot)-w(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\leq (4|\Omega|^2+k^2)T^2e^{2TA_m}\|v(t,\cdot)-w(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Se tomarmos

$$T^2<\frac{1}{(4|\Omega|^2+k^2)e^{2TA_m}},$$

temos uma contração, portanto segue pelo Teorema 2.1 que existe um único ponto fixo para $F(u)(t,x)=u(t,x)$. Mais uma vez, de modo análogo ao que foi feito no Teorema 3.10, conseguimos estender u para toda a reta $\mathbb{R}$ obtendo uma única solução $u\in C((-\infty,+\infty),L^2(\Omega))$

3.3 Regularidade com Relação aos Parâmetros

Nesta seção, consideremos uma bola $B_r(0)$, com raio r suficientemente grande centrada na origem de tal maneira que $x-y\in B_r(0)$ para todo $x,y\in\Omega$. Além disso consideramos o conjunto

$$Z=\{J\in C(\overline{B_r(0)},\mathbb{R}):J\geq 0,\ J(0)\geq c>0,\ J(-x)=J(x),\ \text{e } J(x)=0 \text{ em } \mathbb{R}^n\setminus B_r(0)\}.$$

Como na seção anterior, assumimos $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ globalmente Lipschitz. A partir disso, consideremos a aplicação F da seguinte maneira

$$F:X_T\times L^2(\Omega)\times Z\longrightarrow X_T$$

onde $X_T=\{u\in C([-T,T],L^2(\Omega)):\sup_{-T\leq t\leq T}\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}<\infty\}$ e

$$F(u,u_0,J)=e^{-A(x)t}u_0(x)+\int_0^t e^{-A(x)(t-s)}\int_\Omega J(x-y)u(s,y)dyds+\int_0^t e^{-A(x)(t-s)}f(u(s,x))ds.$$

Proposição 3.12 *O espaço Z munido da norma*

$$\|J\|=\sup_{x\in B_r(0)}|J(x)|$$

é um espaço de Banach.

Demonstração: Seja J_n uma sequência de Cauchy em Z. Então, dado $\varepsilon>0$, existe $n_0>0$ tal que, se $m,n>n_0$, então

$$\|J_n-J_m\|<\varepsilon.$$

Logo, para todo $x\in B_r(0)$ temos

$$|J_n(x)-J_m(x)|\leq\sup_{x\in B_r(0)}|J_n(x)-J_m(x)|=\|J_n-J_m\|<\varepsilon.$$

Então para todo x, temos que $J_n(x)$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$. Assim podemos concluir que J_n é pontualmente convergente.

Seja $J:B_r(0)\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$J(x)=\lim_{n\to\infty}J_n(x).$$

Afirmamos que $J\in Z$. De fato, como J_n é par, temos que J é par, e mais, $J(0)\geq c$ e $J\geq 0$, pois J_n também é.

Mostremos agora que J é contínua. Note que J_n é contínua definida no compacto $\overline{B_r(0)}$, logo é uniformemente contínua. Assim, pelo Teorema de Dini (consultar obra [7], página 211), que afirma que o limite de funções uniformemente contínuas é contínua, obtemos que J é contínua.

Falta-nos mostrar que $J_n \to J$ uniformemente. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_1 > 0$ tal que se $n > n_1$ então $\|J_n - J\| < \varepsilon$. De fato

$$\begin{aligned}|J_n(x) - J_n(y)| &= |J_n(x) - J_m(x) + J_m(x) - J_m(y) + J_m(y) - J_n(y)| \\ &< \varepsilon + |J_m(x) - J_m(y)| + \varepsilon,\end{aligned}$$

Mas como J_m é uniformemente contínua, temos que $|J_m(x) - J_m(y)| < \varepsilon$ para todo x, y com $|x - y| < \delta$, para algum $\delta > 0$.

Assim, como n é arbitrário, segue que $\{J_n\}$ é equicontínua. Como também sabemos que $J_n \to J$ ponto a ponto, temos também que é pontualmente limitada.

Segue, pelo Teorema de Arzelá-Ascoli 1.4, que $J_n \to J$ uniformemente.

Temos então que $J_n \to J$ uniformemente, e segue então que Z é espaço de Banach. ■

Proposição 3.13 *A aplicação F definida em (3.18) é da forma*

$$F(u, u_0, J) = L(u, u_0, J) + B(u),$$

onde $L : X_T \times L^2(\Omega) \times Z \longrightarrow X_T$ é uma aplicação afim dada por

$$L(u, u_0, J) = e^{-A(x)t}u_0(x) + \int_0^t e^{-A(x)(t-s)} \int_\Omega J(x-y)u(s,y)dyds$$

e $B : X_T \longrightarrow X_T$ é o funcional definido por

$$Bu = \int_0^t e^{-A(x)(t-s)} f(u(s,x))ds.$$

Além disso, temos os seguintes casos:

- *Se $B = 0$, a solução u do problema linear*

$$\begin{cases} u_t(t,x) = \displaystyle\int_\Omega J(x-y)(u(t,y) - u(t,x))dy, \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases}$$

  é analítica como uma função de $L^2(\Omega) \times Z \longrightarrow X_T$: $(u_0, J) \longmapsto u(u_0, J)$.

- *Se $B \neq 0$, a solução u de (3.16) é contínua nos mesmos espaços.*

Demonstração: Queremos mostrar que $F(u, u_0, J)$ satisfaz as hipóteses do Teorema 2.3. Sabemos dos Lemas 3.7, 3.8 e Corolário 3.9 que os termos

$$e^{-A(x)t}u_0(x), \quad \int_0^t e^{-A(x)(t-s)} \int_\Omega J(x-y)u(s,y)dyds \text{ e } \int_0^t e^{-A(x)(t-s)} f(u(s,x))ds$$

são uniformemente contínuos e portanto, contínuos. Daí concluímos que $F(u, u_0, J)$ está bem definida.

De modo análogo ao que foi feito no Teorema 3.10, também obtemos que $F(u, u_0, J)$ é contração uniforme com:

$$\|F(v, u_0, J)(t,\cdot) - F(w, u_0, J)(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq (4|\Omega|^2 + k^2)T^2 e^{2TA_m} \|J\|^2_{L^\infty(\Omega)} \|v(t,\cdot) - w(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

assumindo $T^2 < \dfrac{1}{(4|\Omega|^2 + k^2)e^{2TA_m}}$.

Com tais condições satisfeitas temos então que $F(u, u_0, J)$ possui um único ponto fixo, $u = u(u_0, J)$, dependendo da condição inicial u_0 e o kernel do operador integral J.

Agora, se $B \equiv 0$, temos que F é da forma

$$F(u, u_0, J) = L(u, u_0, J),$$

donde segue que F é analítica de $X_T \times L^2(\Omega) \times Z$ em X_T, pois sabemos que toda função afim é analítica. Pelo Teorema 2.3, concluímos que u é analítica em seu domínio.

Se $B \neq 0$, como f é globalmente Lipschitz, obtemos que B está bem definida e também é globalmente Lipschitz. Temos então que B é contínua e, pelo Teorema 2.3, obtemos que u é contínua.

■

Referências Bibliográficas

[1] Andreu-Vaillo, F.; Mazón, J. M.; Rossi, J. D.; Toledo, J. J.; **Evolution Problems with Nonlocal Diffusion**, Mathematics Subject Classification, Argentina, 1991. 1, 4, 29

[2] Brezis, H.; **Funcional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**, Springer, New York, 2010. 12, 13

[3] Carvalho, A. N., **Análise Funcional II**, Notas de Aula, 2016, disponível em http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/andcarva/AnaliseFuncional-II/AnaliseFuncional-II.pdf, acessado em Agosto de 2017.

[4] Fife, P. **Some nonclassical trends in parabolic and parabolic-like evolutions**, Trends in non-linear analysis, 153;191, Springer, Berlin, 2003. iii, v, 1, 4

[5] Henry, D. B.; **Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations**, Springer, New York, 1981. 13

[6] Kreyzig, E. **Introdutory Functional Analysis with Aplications**, John Wiley and Sons, 1979.

[7] Lima, E. L.; **Espaços Métricos**, Terceira Edição, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1993. 47

[8] Murray, J. D.; **Mathematical Biology I: An introduction**, 3rd edition, Springer, New York, 2002. 3

[9] Oliveira, O. R. B.; **EDP's Elípticas**, Notas de aula, 2017, disponível em https://www.ime.usp.br/∼oliveira/Disciplinas.html, acessado em Novembro de 2017. 32

[10] Pereira, M. C., Rossi, J. D.; **Nonlocal Evolution Problems in Thin Domains**, 1, 29

[11] Rudin, W.; **Functional Analysis**, Segunda Edição, 1976, McGrall-Hill, 1991. 5

[12] Sastre, S.; **Nonlocal Diffusion Problems**, Tese de Doutorado - Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid, Madrid, 2014.