**Estudos numéricos para o problema da tomografia por
impedância elétrica**

Juan Carlos Zavaleta Aguilar

**TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS**

Área de Concentração: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Nelson Mugayar Kuhl

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, 06 de Abril de 2009

Estudos numéricos para o problema da tomografia por impedância elétrica

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida
e defendida por Juan Carlos Zavaleta Aguilar
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Nelson Mugayar Kuhl (orientador) – IME - USP.
- Jose Jaime da Cruz – POLI – USP.
- Vanessa Rolnik Artioli – FFCLRP – USP.
- Saulo Rabello Maciel de Barros – IME – USP.
- Raúl Gonzales Lima – POLI – USP.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a **Deus** por permitir a culminação deste trabalho e assim dar mais um passo na minha formação acadêmica.

Agradeço em forma muito especial a minha esposa Fátima, que tem sido uma companheira em todas as horas pela sua paciência e dedicação em todos os momentos que foi preciso.

Agradeço as minhas filhas Milena, Laila e Natalie porque elas constituem a minha grande motivação para alcançar os objetivos traçados.

Agradeço aos meus pais Américo e Rita e aos meus irmãos René e Elí por sempre terem acreditado em mim.

Agradeço ao meu orientador, professor. Dr. Nelson Mugayar Kuhl pelo apoio e paciência na orientação e aos muitos conhecimentos adquiridos com ele que fizeram possível a culminação deste trabalho.

Agradeço aos professores que formaram minha banca, os quais fizeram importantes contribuições para o aperfeiçoamento do trabalho.

Agradeço aos professores do Instituto de Matemáticas e Estatística com os quais realizei as disciplinas.

Agradeço aos meus amigos e colegas (Jorge, Valentin, Anderson, Gerard) pelos gratos momentos compartilhados. Agradeço também ao grupo de Tomografia por Impedância Elétrica da POLI, em especial, a Julio pelos muitos conhecimentos adquiridos.

Agradeço ao pessoal administrativo do IME pela atenção e gentileza.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Este trabalho estuda a técnica de reconstrução de imagens conhecido como tomografia por impedância elétrica em um domínio bidimensional. Esta técnica consiste na alocação de eletrodos na fronteira do volume e uma fonte injeta padrões de corrente através dos eletrodos e medem-se as voltagens resultantes na fronteira. Com estes dados estima-se a condutividade (ou resistividade) do interior do domínio criando-se uma imagem do mesmo. A tomografia por impedância elétrica é um problema inverso e mal posto no sentido de Hadamard. Estudam-se diversos métodos de solução para resolver o problema direto usando métodos numéricos como diferenças finitas e volumes finitos. Proporemos os métodos numéricos a serem aplicados na solução do problema direto os quais serão testados com problemas onde a solução analítica é conhecida. Posteriormente aplicaremos os métodos propostos ao problema específico. Uma questão importante na reconstrução de imagens é propor a maneira como aproximar o Jacobiano (ou matriz de sensibilidade) do problema, assim desenvolvemos uma técnica para a aproximação do mesmo usando os dados fornecidos pelo problema direto.

Palavras-Chave: Tomografia por impedância elétrica, métodos de regularização, métodos numéricos.

Abstract

In this work is studied the technique of reconstruction of images known as electrical impedance tomography for a two-dimensional domain. This technique consists in the allocation of electrodes on the border of the volume and a source injects patterns of current through the electrodes and then measuring voltages through the other electrodes. With these data it is estimated the conductivity (or resistivity) on the interior of the domain and an image is create of it. The electrical impedance tomography is an inverse and ill conditioned problem in the Hadamard sense. In this work, is studying some numerical methods to solve the direct problem and are applied numerical methods such as the finite difference method and the finite volume method. It is proposed some numerical methods to solve the direct problem which will be tested with analytical problems where the solution is known. Later, apply the methods proposed to the specific issue. An important issue in the reconstruction problems is about the Jacobian (or sensitivity matrix) aproximation, thus proposing a technique for the calculation of even using the data provided by the direct problem.

Keywords: Electric impedance tomography, regularization methods, numerical methods.

SUMÁRIO

LISTA DE ABREVIATURAS	vi
LISTAS DE SÍMBOLOS	vii
LISTAS DE FIGURAS	xii
LISTAS DE TABELAS	xiv
1. INTRODUÇÃO	1
1.1 Descrição do Problema.....	1
1.2 Revisão Bibliográfica.....	3
1.3 O Problema Inverso de Condutividade é mal posto.....	5
1.4 Objetivos.....	6
1.5 Divisão da Tese.....	7
2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS	8
2.1 Equações governantes.....	8
2.2 O Problema Direto.....	9
2.3 A Coleta de dados na TIE.....	16
2.4 O Problema Inverso.....	18
3. ESTUDOS NUMÉRICOS USANDO O EIDORS	27
3.1 Características da malha.....	27
3.2 Tratamento do Problema Direto.....	29
3.3 Tratamento do Problema Inverso.....	32

4.	ESTUDOS NUMÉRICOS DO PROBLEMA DIRETO	35
4.1	O Problema de Difusão com Coeficientes Contínuos em Coordenadas Polares.....	35
4.2	O Problema de Difusão com Coeficientes Descontínuos.....	45
4.2.1	Discretização por volumes finitos modificados em problemas de dimensão 1.....	46
4.2.2	Discretização por volumes finitos modificados em problemas de dimensão 2.....	53
4.2.3	Solução numérica da equação de difusão com coeficientes descontínuos em coordenadas polares.....	58
4.3	Aproximação da solução na fronteira.....	84
5.	ESTUDOS NUMÉRICOS NA TIE	87
5.1	A Malha.....	87
5.2	O Problema Direto.....	88
5.3	Comparações das voltagens.....	90
5.4	O Jacobiano.....	93
5.5	Aproximação do Fluxo nos nós.....	96
5.6	O Jacobiano em termos do Fluxo.....	98
5.7	Aproximação Gauss-Newton.....	101
6.	CONCLUSÕES	104
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	106
	APÊNDICE A - TRATAMENTO DA CONDIÇÃO DE FRONTEIRA TIPO NEUMANN	111
	APÊNDICE B - O JACOBIANO EM TERMOS DA VARIAÇÃO DO POTENCIAL	117

LISTA DE ABREVIATURAS

AA	Método numérico da média aritmética.
Bi-PGC	Método dos Bi-gradientes conjugados com pré - condicionamento.
<i>d -bar</i>	Método <i>d</i> -barra.
DOT	Tomografia ótica difusa.
EIDORS	<i>Electrical Impedance and Diffuse Optical tomography Reconstruction Software</i>
GC	Gradientes conjugados.
HA	Método que usa a média harmônica.
HIA	Método que usa a média harmônica modificada.
ITM	Indução tomográfica.
LU	Método numérico para resolver um sistema linear
MCE	Modelo completo de eletrodos.
MVFM	Método dos volumes finitos modificados.
PGC	Gradientes conjugados com pré-condicionamento.
SVD	Método numérico da decomposição dos valores singulares.
TC	Tomografia computadorizada.
TIE	Tomografia por impedância elétrica.
TCE	Tomografia por capacitância elétrica.
TOAST	Tomografia em óptica.
UMIST	<i>University of Manchester Institute of Science and Technology.</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

A	=	Matriz de um sistema linear da forma $Ax = b$
A_{φ}	=	Eletrodo localizado na fronteira do volume condutor
a_1, a_2	=	Constantes
$a_{i\pm 1/2}$	=	Termos adicionais no método da media harmônica modificada
B	=	Densidade do fluxo magnético
b	=	Vetor do lado direito de um sistema linear da forma $Ax = b$
B_{φ}	=	Eletrodo localizado na fronteira do volume condutor
B_s	=	Forma bi-linear na formulação do método dos elementos finitos
b_p	=	Distribuição do potencial elétrico no método dos elementos finitos
C_0	=	Constante
C_{φ}	=	Eletrodo localizado na fronteira do volume condutor
C	=	Parte simétrica da matriz de rigidez no método dos elementos finitos
D_a	=	Conjunto de dados admissíveis
D_0^2	=	Operador de distinguibilidade
D_{φ}	=	Eletrodo localizado na fronteira do volume condutor
D_b	=	Último bloco da matriz de rigidez do método dos elementos finitos
dA	=	Diferencial de área
dl	=	Diferencial de linha
E	=	Campo elétrico
E_r	=	Erro quadrático
E_S	=	Solução com boa resolução espacial
E_D	=	Solução ótima

e_l	=	l -ésimo eletrodo localizado na fronteira do volume condutor
e_i^j	=	Componente de erro no i -ésimo eletrodo e na j -ésima iteração
$e_{\max}$	=	Erro relativo na norma do máximo
e_{L^2}	=	Erro relativo na norma L^2
F	=	Função com inversa contínua
f	=	Função fonte do problema de difusão
F_{ij}	=	Aproximação dos fluxos
g	=	Função que produz os valores na condição de Dirichlet
H^p	=	Espaço de Sobolev
h	=	Função que produz os valores na condição de Neumann
h_x	=	Tamanho do passo na direção x em coordenadas cartesianas
h_y	=	Tamanho do passo na direção y em coordenadas cartesianas
h_r	=	Tamanho do passo na direção r em coordenadas polares
h_θ	=	Tamanho do passo na direção θ em coordenadas polares
I	=	Padrão de corrente
I^d	=	d -ésimo padrão de corrente
I_ψ	=	Padrão de corrente que produz o potencial ψ
I_ϕ	=	Padrão de corrente que produz o potencial ϕ
J	=	Jacobiano
$J_{dl,k}$	=	Componentes do Jacobiano relacionando o l -ésimo eletrodo, o k -ésimo padrão de corrente e o n -ésimo volume finito.
j	=	Densidade de corrente
J^s	=	Fonte de corrente
K_{ij}^H	=	Temo correspondente a média harmônica dos coeficientes σ_{ij} num volume finito
L	=	Índice que indica o número de eletrodos alocados na fronteira do volume
L_i	=	Polinômios de Lagrange
LD	=	Lado direito de um sistema linear em forma matricial
$O(h^p)$	=	Termos de ordem p

n	=	Vetor normal unitário
Q_{Ω}	=	Carga no interior do volume Ω
R	=	Matriz de regularização
RI	=	Potenciais em $\partial\Omega$
r	=	Raio, variável radial
r_a	=	Constante
S_a	=	Conjunto de soluções admissíveis
S	=	Matriz de sensibilidade
$S_{dl,k}$	=	Componentes da matriz de sensibilidade
tx_c	=	Taxa de convergência
u	=	Distribuição do potencial em Ω
$U(\sigma)$	=	Modelo discreto entre σ e as voltagens V
$\vec{U}^k$	=	Padrões de voltagens produzidos ao injetar o k -ésimo padrão de corrente
u_h	=	Solução generalizada que resolve o problema direto
u_{ij}	=	Aproximação de u nos nós
u_{ex}	=	Solução exata
u_{ap}	=	Solução aproximada
V	=	Observações determinísticas
$\vec{V}^d$	=	Medidas de voltagens
V_j	=	Padrões de voltagens
V_P	=	Volume finito genérico
W	=	O fluxo
w_1, w_2	=	Componentes do fluxo
Z	=	Impedância mútua
z_l	=	Impedância de contato dos eletrodos

x

Gregos

α_i	=	Constantes que determinam a distribuição de condutividade no método dos elementos finitos
α	=	Parâmetro de regularização
β_i	=	Constantes que determinam as voltagens na fronteira no método dos elementos finitos
γ	=	Função complexa de admitividade
σ	=	Distribuição de condutividade
ω	=	Frequência dada
ε	=	Permissividade elétrica
ε_0	=	Permissividade no vácuo
Ω	=	Volume condutor
$\partial\Omega$	=	Fronteira do volume condutor
ρ_c	=	Densidade de carga
ν	=	Vetor normal unitário
τ	=	Elemento com volume cilíndrico
Γ_i	=	Subconjunto em $\partial\Omega$
Λ_{σ}^{NiD}	=	Mapeamento Neumann para Dirichlet
Λ_{σ}^{DiN}	=	Mapeamento Dirichlet para Neumann
δu	=	Perturbação do potencial
$\delta\sigma$	=	Perturbação de condutividade
δV	=	Diferença entre dois conjuntos de medidas consecutivas
$\delta\sigma$	=	Perturbação de condutividade
δZ	=	Mudança de impedância mutua
λ_1^2	=	Maior autovalor de D_0^2
φ_i	=	Funções base no método dos elementos finitos
χ_n	=	Função característica

θ	=	Ângulo, variável angular
ψ, ϕ	=	Potências de corrente
ϕ_i	=	Funções base lineares no método dos elementos finitos
ψ_i	=	Funções base constante por partes no método dos elementos finitos
η_j	=	Vetor de mudanças relativas
γ_r	=	Mudanças relativas no vetor de condutividade
ρ	=	Distribuição de resistividade em Ω
ξ	=	Ponto de descontinuidade
μ_i	=	Valores do lado direito de um sistema linear
v	=	Variável num intervalo finito
Υ^l	=	Condição de fronteira tipo dipolo

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Sistema TIE aplicado à medicina (Cheney. M, Isaacson. D, Newell. J, 1999).....	1
Figura 1.2	Sistema TIE num processo bifásico (A. Hunt, J. Pendleton, Y. Ladam, 2004).....	2
Figura 2.1	A corrente é injetada no interior de Ω através dos eletrodos A-B e mede-se a voltagem V através dos eletrodos C-D.....	24
Figura 3.1	(a) Malha para resolver o problema inverso, (b) Malha para resolver o problema direto.....	28
Figura 3.2	Distribuição de resistividade.....	29
Figura 3.3	Gráfico da curva - L	33
Figura 3.4	A distribuição de resistividade e a aproximação após a 5ª iteração.	33
Figura 4.1	Subdivisão do eixo radial considerando a condição Dirichlet.....	36
Figura 4.2	Subdivisão do eixo radial considerando a condição de Neumann.....	36
Figura 4.3	Subdivisão do eixo angular.....	37
Figura 4.4	(a) Gráfico da solução exata, (b) Gráfico de $\sigma(r, \theta)$	40
Figura 4.5	(a) Gráfico da solução exata, (b) Gráfico de $\sigma(r, \theta)$	42
Figura 4.6	Subdivisão do intervalo [0,1].....	47
Figura 4.7	Gráfico da solução exata do Problema (3).....	51
Figura 4.8	Gráfico do erro relativo na norma do máximo no método HIA & subdivisões no eixo radial no Problema (3).....	52
Figura 4.9	Gráfico do erro relativo na norma L2 no método HIA & subdivisões no eixo radial no Problema (3).....	52
Figura 4.10	Volume finito em coordenadas cartesianas.....	54
Figura 4.11	Domínio [0,1]x[0,1] e a localização da interface.....	55
Figura 4.12	Gráfico da solução exata do Problema (4).....	56
Figura 4.13	Um volume finito em coordenadas polares.....	59
Figura 4.14	(a) Domínio físico, (b) Domínio computacional.....	59

Figura 4.15	Malha perto do pólo.....	64
Figura 4.16	(a) Gráfico da solução exata do Problema (5), (b) Interface no disco unitário.....	78
Figura 4.17	(a) Gráfico da solução exata do Problema (6), (b) Interfaces no disco unitário.....	82
Figura 4.18	Extrapolação na fronteira.....	84
Figura 5.1	(a) Malhado com volumes finitos no disco unitário quando usamos 16 subdivisões no eixo radial e 32 subdivisões no eixo angular, (b) Posição dos 16 eletrodos na fronteira.....	87
Figura 5.2	Distribuição do potencial devido á injeção de corrente adjacente: (a)1-padrão (b) 2-padrão, (c)10-padrão (d)15-padrão e (e)16 - padrão.....	91
Figura 5.3	Distribuição do potencial devido á injeção de corrente pula 1: (a)1-padrão (b) 2-padrão, (c)10-padrão (d)15-padrão e (e)16 - padrão....	92
Figura 5.4	Volume finito V_{ij} correspondente á variável de condutividade σ_{ij}	96
Figura 5.5	Erro máximo do fluxo na direção radial.....	98
Figura 5.6	(a) Distribuição da condutividade (b) Reconstrução usando $R = I$, (c) Reconstrução usando $R \neq I$	102

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1	Valores de resistividade em tecidos biológicos [1].....	8
Tabela 2.2	Valores de resistividade em rochas e fluidos [33].....	9
Tabela 4.1	Aproximação do Problema (1) com condição de fronteira tipo Dirichlet e usando fatorização de Choleski.....	40
Tabela 4.2	Taxa de convergência do Problema (1), considerando o erro relativo na norma L2.....	40
Tabela 4.3	Aproximação do Problema (1) com condição de fronteira tipo Dirichlet e usando PGC com pré-condicionamento Choleski Incompleto.....	41
Tabela 4.4	Aproximação do Problema (1) com condição de fronteira tipo Dirichlet usando PGC com pré-condicionamento Choleski Incompleto com <i>drop tolerance</i>	41
Tabela 4.5	Taxa de convergência ao aplicar PGC com pré-condicionamento considerando o erro relativo na norma L2.....	41
Tabela 4.6	Aproximação do Problema (2) com condição de fronteira tipo Dirichlet e usando fatorização de Choleski.....	42
Tabela 4.7	Taxa de convergência do Problema (2) respeito do erro relativo na norma L2.....	43
Tabela 4.8	Aproximação do Problema (2) usando PGC com pré-condicionamento Choleski Incompleto.....	43
Tabela 4.9	Aproximação do Problema (2) usando PGC com pré-condicionamento Choleski Incompleto com <i>drop tolerance</i>	43
Tabela 4.10	Taxa de convergência ao aplicar PGC com pré-condicionamento.	43
Tabela 4.11	Aproximação do Problema (1) com condição tipo Neumann usando PGC com pré-condicionamento Choleski Incompleto com <i>drop tolerance</i>	44
Tabela 4.12	Taxa de convergência do problema (1) com condição de Neumann.....	44
Tabela 4.13	Aproximação do Problema (2) com condição tipo Neumann usando PGC com pré-condicionamento Choleski Incompleto com <i>drop tolerance</i>	44

Tabela 4.14	Taxa de convergência do problema (2) com condição de Neumann.....	44
Tabela 4.15	Aproximação aplicando os métodos AA, HA e HIA do Problema 3 usando o erro relativo na norma do máximo.....	51
Tabela 4.16	Aproximação aplicando os métodos AA, HA e HIA do Problema 3 usando o erro relativo na norma L^2	52
Tabela 4.17	Aproximação aplicando os métodos HA e HIA do Problema (4) usando o erro relativo na norma do máximo.....	56
Tabela 4.18	Aproximação aplicando os métodos HA e HIA do Problema (4) usando o erro relativo na norma do máximo.....	57
Tabela 4.19	Aproximação aplicando os métodos HA e HIA do Problema (4) usando o erro relativo na norma do máximo com <i>drop tolerance</i>	57
Tabela 4.20	Aproximação aplicando o método HIA do Problema (4) usando o erro relativo na norma do máximo e condição de fronteira tipo Neumann com <i>drop tolerance</i>	58
Tabela 4.21	Aproximação do problema 5.1 usando o método HA e fatorização de Choleski para resolver o sistema linear.....	79
Tabela 4.22	Aproximação do problema 5.1 com condição de fronteira tipo Neumann usando o método HA e fatorização de Choleski para resolver o sistema linear.....	79
Tabela 4.23	Aproximação do problema 5.1, onde a interface se encontra em 0.5 usando os métodos HA, HIA e eliminação gaussiana para resolver o sistema linear.....	80
Tabela 4.24	Aproximação do problema 5.2 usando o método HA e fatorização de Choleski para resolver o sistema linear.....	80
Tabela 4.25	Aproximação do problema 5.2 com condição de fronteira tipo Neumann usando o método HA e fatorização de Choleski para resolver o sistema linear.....	81
Tabela 4.26	Aproximação do problema 5.2, onde a interface se encontra em 0.5 usando os métodos HÁ, HIA e eliminação gaussiana para resolver o sistema linear.....	81
Tabela 4.27	Aproximações do problema 6.1, usando os métodos HA, HIA e eliminação gaussiana para resolver o sistema linear.....	83
Tabela 4.28	Aproximações do problema 6.2, usando os métodos HA , HIA e eliminação gaussiana para resolver o sistema linear.....	83

Tabela 4.29	Extrapolação na fronteira do problema (1).....	85
Tabela 4.30	Extrapolação na fronteira do problema (2).....	85
Tabela 4.31	Extrapolação na fronteira do problema (4) usando o método HIA.....	85
Tabela 4.32	Extrapolação na fronteira do problema 5.2, usando o método HIA.....	86
Tabela 5.1	Erro das voltagens nos eletrodos quando usamos normalização e voltagem de referencia na solução do sistema linear (5.1) e injeção adjacente.....	91
Tabela 5.2	Erro das voltagens nos eletrodos quando usamos normalização e voltagem de referencia na solução do sistema linear (5.1) e injeção pula1.....	93
Tabela 5.3	Erro do fluxo na direção radial do problema 5.2 usando o método HA.....	98
Tabela 5.4	Tempo computacional no cálculo do Jacobiano	101

1. INTRODUÇÃO

1.1 Descrição do Problema

A tomografia por impedância elétrica (TIE) pertence a uma família de imagens eletromagnéticas das quais também fazem parte técnicas como tomografia por capacitância elétrica (TCE)[34], tomografia eletromagnética (TEM)[12] e indução tomográfica (ITM)[6].

Na TIE ([2], [10]) um arranjo de eletrodos é alocado na fronteira de um objeto e uma fonte injeta correntes alternadas (de baixa frequência) através dos eletrodos e medem-se as voltagens resultantes na fronteira. Com estes dados estima-se a condutividade (ou resistividade) da seção transversal do objeto (dimensão 2) criando-se uma imagem do mesmo. Também é possível obter a reconstrução tridimensional do interior do objeto.

Um sistema típico de TIE é um conjunto de equipamentos que consiste numa unidade de aquisição de dados, uma fonte de corrente, sensores e um computador, neste ultimo fica o código de reconstrução da imagem. Nas figuras (1.1) e (1.2) podemos observar um sistema de TIE sendo aplicado na medicina e em processos industriais.

Figura 1.1 Sistema TIE aplicado à medicina (Cheney. M, Isaacson. D, Newell. J, 1999).

Figura 1.2 Sistema TIE num processo bifásico (A. Hunt, J. Pendleton, Y. Ladam, 2004).

Nas aplicações médicas a técnica TIE é diferente quando comparado com a técnica de tomografia computadorizada (TC) por raios X a qual é bem conhecida por proporcionar imagens com alta resolução [39]. Na TC o paciente fica no interior de um anel de aproximadamente 70 cm de diâmetro e na volta deste encontra-se uma ampola de raios X. Durante o processo de *scanning* uma fonte injeta linhas paralelas de raios X os quais são guiados dentro do corpo e seguidamente avaliados por detectores de medidas da variação das linhas que emergem do interior do objeto. Em máquinas sequenciais de terceira geração este procedimento é repetido até fazer uma volta completa (360°) em torno do paciente e em máquinas de quarta geração os equipamentos descrevem uma hélice, em vez de uma sucessão de círculos. Do outro lado da ampola de raios X os detectores de radiação enviam as informações de variação de medidas dos raios X guiados para um processador o qual desenvolve imagens da variação de distribuição usando algoritmos de reconstrução. Em termos de rapidez computacional e resolução espacial da imagem este método é extremamente eficiente. Isto é principalmente por que os raios X se propagam em linha reta através do objeto. O resultado é um sistema linear, esparso e bem condicionado. Uma desvantagem da técnica da TC é o uso de raios X o qual tem efeitos negativos no corpo humano, sobretudo pelo risco de causar mutações genéticas em células que estão a se multiplicar rapidamente. Por isso não é recomendável o seu uso em grávidas e em crianças.

A TIE usa a equação elíptica para descrever o campo elétrico, como esse campo é modificado através do objeto as medidas dos valores do potencial no contorno compõem uma

função não linear da distribuição dos parâmetros elétricos através do objeto. Isso associa um problema de reconstrução que não é fácil de resolver.

Como vantagens da técnica TIE quando comparada com TC podemos salientar o baixo custo e o fato de não ser um método invasivo e a principal desvantagem deste método pode ser atribuída à baixa resolução espacial da imagem reconstruída.

A reconstrução da imagem pode ser vista como uma fonte de informações sobre as propriedades elétricas do interior de um objeto. Nesse contexto uma imagem de baixa qualidade pode limitar as informações que poderiam ser aproveitadas. Assim o melhoramento na resolução da imagem é um dos objetivos principais dos pesquisadores. Dependendo da área onde esta técnica vai ser aplicada temos um ótimo custo-benefício na reconstrução da imagem em um dado volume.

A propriedade de proporcionar uma imagem do interior de um objeto converte a TIE numa ferramenta com importantes aplicações em diferentes áreas como medicina, geofísica, ciências ambientais e em testes não destrutivos de materiais. Em medicina podemos destacar: detecção de êmbolos nos pulmões [15], monitoramento de apnéia [55], monitoramento da função esofágica e gastrointestinal [13], hipotermia [24], monitoramento do fluxo sanguíneo do coração [40], detecção de câncer [69]. Em geofísica e em ciências ambientais a TIE é útil para a localização de depósitos minerais [41], detecção de vazamentos em tanques de armazenagem subterrâneos [36]. Em testes não destrutivos a TIE é aplicada na detecção de corrosão e pequenos defeitos como fissuras ou vazios em metais [2].

1.2 Revisão Bibliográfica

Os trabalhos iniciais em imagens médicas apareceram nos inícios de 1980 [4]. Nesse começo se tinha muitos limites computacionais com processadores lentos e um limitado número de ferramentas de medição. Talvez o método mais representativo seja o método linear back-projection introduzido por Barber e Brown [3], [4], [5]. Naquela época a modelagem dos eletrodos não era considerada como um ponto crucial do método. Posteriormente os pesquisadores perceberam a necessidade de compensar uma boa

modelagem de eletrodos na diminuição dos ruídos nas medidas. Pidcock et al. [43] e Hua et al [18] adotaram uma técnica de medição chamada de “quatro eletrodos” atualmente essa técnica é usada em medidas de bioimpedância. Em particular Hua e co-autores deram uma solução prática em forma de eletrodos compostos onde eles usavam diferentes partes de um mesmo eletrodo para propósito de excitação e medição. Este método foi amadurecendo até o chamado “método dos quatro eletrodos” de Barber e Brown [5] e posteriormente foi implementado nos sistemas de aquisição de dados: OXBACT II / III e no Mark III desenvolvidos na universidade de Sheffield. Atualmente as modelagens dos eletrodos estão mais sofisticadas e realistas e o “Modelo Completo de Eletrodos (MCE)” foi convertido numa técnica quase que padrão.

Apesar de que a comunidade de médicos e engenheiros priorizava esforços com o hardware e na busca de aplicações da TIE em diferentes áreas, os pesquisadores em matemática se concentravam nos aspectos teóricos do problema. A grande questão da comunidade era se um conjunto de medidas em particular poderia determinar de forma única uma distribuição de condutividade no interior de um corpo. Um primeiro intento para responder esta questão foi dado por Calderón em 1980 [8], onde ele mostra que a derivada Fréchet do operador direto era uma função injetora em algum espaço normado e assim uma única inversa poderia ser calculada. Em 1992, Somersalo, Cheney e Isaacson [53], mostraram a existência e unicidade da solução do problema direto para o caso bidimensional usando o MCE, similares estudos foram feitos por Konh e Vogelius [28], Sylvester e Uhlmann [49] mostraram a existência e unicidade em modelos tridimensionais com condições de contorno simples. Atualmente, Murai [39], Breckon[7] e Pidcock[43] tem publicado algoritmos de reconstrução baseados no método SVD truncado. Breckon, explicitamente prova que o problema linear e sua linearização são mal postos em termos da decomposição de valores singulares, conduzindo o problema no caminho da programação não linear e no uso de técnicas de regularização. O mesmo autor é pioneiro na pesquisa sobre a existência e unicidade da solução do problema inverso em domínios anisotrópicos.

Os esforços relacionados com a busca de qualidade nas imagens reconstruídas conduziram na busca de padrões de corrente ótimas para substituir os convencionais padrões de corrente conhecidos como “adjacente” e “oposto”. Nos artigos [22], [23] Isaacson mostra que padrões trigonométricos de corrente, usados para maximizar a distinguibilidade de uma distribuição em particular, produziam ótimos resultados no modelo dos quatro eletrodos.

Mais recentemente em 1997 Vauhkonen M. [57] explica a importância de se ter informações a priori para estabilizar a solução inversa. Suas pesquisas incluem também a estimação dinâmica da condutividade, a aproximação bayesiana assim como os métodos de bases condicionadas e regularização por subespaços. Posteriormente estas técnicas foram adaptadas em problemas tridimensionais no grupo de tomografia por impedância elétrica aplicada ao diagnóstico médico da Universidade de Kuopio.

Dispõe-se em forma de códigos abertos o projeto de software “Electrical Impedance and Diffuse Optical Reconstruction Software (EIDORS)”. Esses códigos resolvem o problema direto e inverso em problemas de admitividade em duas e três dimensões [60]. Similarmente, existe um software em problemas de tomografia aplicado em óptica chamado TOAST Project (<http://www.ucl.ac.uk/MedPhys/toast/index.htm>), [48].

A maioria dos problemas em imagens médicas e industriais é tridimensional, com exceção dos problemas que são invariantes numa direção espacial. Alguns estudos em 3D foram feitos por Kleiner mann [27] e Pinheiro [44] com resultados interessantes. Recentemente foram publicados códigos abertos em 3D desenvolvido na UMIST [1].

1.3 O Problema Inverso de Condutividade é mal posto

Resolver o problema direto é achar um único efeito, dada uma ou várias causas, usando apropriados modelos físicos. Esses problemas geralmente são bem postos os quais conduzem a uma única solução a qual não é afetada por pequenas mudanças nos dados iniciais. Atualmente é sabido que na ciência e tecnologia se lidam com problemas que não são bem postos. Tais problemas têm um objetivo inverso ao do problema direto e podem ser interpretados como achar a causa de um dado efeito ou achar uma lei física que cause o efeito. Esses problemas, geralmente, não têm uma única solução.

Em 1932 Hadamard [16] descreveu propriedades genéricas de problemas que provêm de fenômenos físicos. Para um dado conjunto de observações podemos mapear unicamente para um dado conjunto de soluções. Assim, de acordo com Hadamard, um problema é bem posto se para um dado conjunto de observações:

1. Existe uma solução que é consistente com as observações.

2. A solução é única.
3. A solução depende continuamente das observações.

Em outras palavras, dada uma função $F: D_a \rightarrow S_a$, onde D_a é um conjunto de dados admissíveis e S_a é o conjunto de soluções admissíveis então existe F^{-1} contínua, assim para uma solução com a propriedade de boa resolução espacial E_s , existe um E_D ótimo para o qual E_s é alcançado para o nível de ruído dado. Chamamos de problema mal posto segundo Hadamard se alguma das três condições não é satisfeita. O problema inverso de condutividade é mal posto no sentido de Hadamard apesar de que, condições naturalmente impostas, podem assegurar a validade das primeiras duas condições, estas certamente falham na terceira condição pois pequenas perturbações nas medidas podem implicar em grandes oscilações na solução.

Quando aproximamos um problema mal posto, geralmente, a tendência é transformá-lo num problema equivalente com a propriedade de ser menos mal posto. Do ponto de vista prático, no problema inverso de condutividade trabalha-se com dados incompletos, pois não é possível injetar padrões de corrente arbitrários na fronteira do objeto. Assim, a transformação pode ser feita por vários caminhos um deles é a regularização.

Regularização é essencialmente proporcionar ao problema inverso informação a priori acerca da solução, nesse sentido podemos dizer que é uma condição de preservar a existência, unicidade e também a estabilidade da solução. Desde outra perspectiva, técnicas de regularização podem ser interpretadas como um balanço entre as condições a priori e a influência das medidas na solução.

1.4 Objetivos

A modelagem do problema direto na TIE leva à solução numérica da equação de difusão com coeficientes variáveis, não homogêneos. O problema direto tem que ser resolvido eficientemente, pois ele é “chamado” freqüentemente pelo método inverso.

Apesar de que existem técnicas conhecidas para resolver o problema como o dado em [29],[36],[37],[48] aplicações de médio e grande porte precisa de um método cada vez mais

rápido e eficiente, em particular, o caso onde os coeficientes variáveis têm a característica de ser descontínuos ainda merece atenção [14],[20],[51],[68].

O presente trabalho tem como objetivo principal apresentar a formulação e solução numérica do problema direto usando métodos como diferenças finitas e volumes finitos [14], [48]. Para isso estudaremos a solução numérica do problema de difusão em domínios retangulares e polares e os coeficientes de difusão como sendo contínuos e descontínuos. Os métodos numéricos propostos serão testados em problemas onde a solução analítica é conhecida para posteriormente serem aplicados na solução numérica do problema direto que trata a TIE.

Outro objetivo a ser apresentado é propor a maneira como o fluxo é aproximado em cada nó, em vista de propor um método para a aproximação do Jacobiano (ou matriz de sensibilidade) o qual é um ponto crucial na técnica de reconstrução de imagens que usa a metodologia da tomografia por impedância elétrica.

1.5 Divisão da tese

O presente trabalho se divide em seis capítulos.

O capítulo 1 trata da introdução do problema e uma revisão bibliográfica dos trabalhos relacionados.

No capítulo 2 fazemos a formalização do problema e os fundamentos teóricos que usa o presente trabalho.

O capítulo 3 trata da aplicação da metodologia da TIE usando os algoritmos dados no EIDORS.

No capítulo 4 resolvemos o problema direto com diferentes métodos numéricos e para diferentes formas da condutividade.

No capítulo 5 aplicamos os métodos desenvolvidos no capítulo 4 para resolver o problema direto e descrevemos uma maneira de aproximar o Jacobiano.

Por último, no capítulo 6 são dadas as conclusões e recomendações do trabalho.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1 Equações governantes

Consideramos um domínio limitado e simplesmente conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

A função complexa γ de admitividade definida num ponto $x \in \Omega$ e numa frequência ω é definida como:

$$\gamma(x, \omega) = \sigma(x) + i\omega\varepsilon(x), \quad i = \sqrt{-1},$$

onde σ é a condutividade e ε é a permissividade elétrica.

A condutividade e a permissividade elétrica determinam o comportamento dos materiais sob a influência de campos elétricos externos. A impedância elétrica é a inversa da admitividade e mede a razão entre a tensão elétrica e a corrente elétrica num ponto $x \in \Omega$.

A tomografia por impedância elétrica é um problema inverso que determina a distribuição da condutividade ou resistividade no interior de Ω dados que simultaneamente correntes são injetadas e voltagens são medidas em $\partial\Omega$.

Dado que os materiais possuem diferentes propriedades elétricas então uma imagem da distribuição de σ ou ε pode inferir em conhecer a estrutura interna do interior de Ω . Assim devido a esta propriedade a TIE pode ser aplicada em diferentes áreas.

Na tabela 2.1 podem ser observados diferentes valores de resistividade em tecidos biológicos e na tabela 2.2 a resistividade em rochas e fluidos.

Tabela 2.1 Valores de resistividade em tecidos biológicos [2].

Tecidos	$1/\sigma(\Omega\text{ cm})$	$\varepsilon(\mu Fm^{-1})$
Pulmão	950	0.22
Músculo	760	0.49
Fígado	685	0.49
Coração	600	0.88
Tecido adiposo	>1000	0.18

Tabela 2.2 Valores de resistividade em rochas e fluidos [38].

Rochas ou Fluidos	$1/\sigma(\Omega\text{ cm})$
Areia marina, xisto	1-10
Areia terrestre	15-50
Rocha vulcânica, basalto	10-200
Granito	500-2000
Dolomita	50-5000
Água clorada	0.16
Água sulfurada	1.2

Na TIE aspectos importantes na modelagem matemática é a dimensão, geometria da fronteira e características estruturais do volume físico. Além disso, a localização dos eletrodos na fronteira tem que ser tratada convenientemente para ter observações de boa qualidade. Assim, as características da modelagem têm que conduzir em uma simulação realista da distribuição do potencial e o modelo têm que refletir a locação dos eletrodos e a impedância de contato.

2.2 O Problema Direto

As inter-relações que governam as interações da eletricidade e magnetismo num problema físico são resumidas pelas equações de estado de Maxwell.

Para um volume isotrópico de condutividade Ω , onde o contorno $\partial\Omega$ é de classe C^2 as equações das relações elétricas são:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho_c}{\varepsilon_0} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times E = 0, \quad (2.2)$$

e as equações das relações magnéticas são:

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \times B = \frac{j}{\varepsilon_0}, \quad (2.4)$$

onde E é um campo elétrico, B é a densidade de fluxo magnético, ρ_c a densidade de carga, j a densidade de corrente e ε_0 uma constante.

Da teoria do cálculo quando $\nabla \cdot E = 0$ então existe um escalar u cujo gradiente é igual ao vetor, então de (2.2):

$$E = -\nabla u . \quad (2.5)$$

A densidade de corrente j pode ser assumida como invariante no tempo. Se I^d é o d -ésimo padrão de corrente desde um eletrodo s , então:

$$I^d = \int_s j \cdot \nu ds . \quad (2.6)$$

Das leis de conservação de carga, se l é a superfície de $\partial\Omega$ então:

$$\int_l j \cdot dl = -\frac{d}{dt}(Q_\Omega) . \quad (2.7)$$

A carga no interior do volume Q_Ω pode ser expressa como o volume integral da densidade de carga, assim:

$$Q_\Omega = \int_\Omega \rho_c dV . \quad (2.8)$$

Combinando (2.7) e (2.8) temos:

$$\nabla \cdot j = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t} . \quad (2.9)$$

O qual basicamente é outra maneira de expressar o teorema de conservação de carga. Como não há uma fonte de corrente no interior do volume e sabendo que E não muda no tempo, o lado direito de (2.9) tem que ser zero:

$$\nabla \cdot j = 0. \quad (2.10)$$

Num meio isotrópico linear a densidade de corrente e o campo elétrico são relacionados pela seguinte aproximação:

$$j \approx \gamma E \approx (\sigma + i\omega\varepsilon) E, \quad (2.11)$$

onde σ é a condutividade elétrica, ε é a permissividade elétrica e γ é a admitividade complexa do meio. Considerando aparte real de γ e substituindo (2.5) e (2.11) em (2.10) temos:

$$\nabla \cdot \sigma E = 0. \quad (2.12)$$

Agora, combinado esta última expressão com (2.5) temos a seguinte equação diferencial elíptica:

$$\nabla \cdot \sigma \nabla u = 0. \quad (2.13)$$

Assim, a equação diferencial elíptica de segunda ordem (2.13) conhecida como equação de difusão com coeficientes variáveis rege a distribuição do potencial eletrostático u no meio condutivo Ω .

Para derivar as condições de fronteira que acompanham a equação (2.13) consideremos um elemento τ com volume cilíndrico na superfície de Ω . Integrando a equação $\nabla \cdot \sigma E = -\nabla \cdot J^s$, onde J^s é uma fonte de corrente, sobre o volume τ :

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \sigma E d\tau = - \int_{\tau} \nabla \cdot J^s d\tau, \quad (2.14)$$

e usando o teorema da divergência:

$$\int_{S_{\tau}} \sigma E \cdot \nu dS_{\tau} = - \int_{S_{\tau}} J^s \cdot \nu dS_{\tau}, \quad (2.15)$$

onde S_τ é a fronteira de τ e ν é o vetor normal unitário.

Sabendo que $J^s = 0$ dentro de τ e fora dele se cumpre que $E = 0$, temos as relações:

$$-\sigma E \cdot \nu|_{in} = -J^s \cdot \nu|_{out} , \quad (2.16)$$

usando a relação (2.5) concluimos que:

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} = -J^s \cdot \nu = j , \quad (2.17)$$

onde j é componente normal, negativa da densidade de corrente elétrica injetada J^s . Daqui em diante denotaremos como j a corrente elétrica injetada.

O modelo contínuo da TIE assume que não há eletrodos. Assim, a corrente elétrica injetada é uma função contínua:

$$j(\zeta) = C_0 \cos(k\zeta) , \quad (2.18)$$

onde C_0 é uma constante. Para este modelo em [9] é mostrado que a resistividade é sobreestimada em mais de 25%, pois os efeitos dos eletrodos são ignorados.

Soluções analíticas para o modelo contínuo podem ser encontradas em [49], [53].

Outros modelos onde os efeitos dos eletrodos são levados em conta são:

O modelo “**gap**” [2] assume que a corrente injetada j satisfaz:

$$j = \begin{cases} \frac{I_l}{|e_l|}, x \in e_l, l = 1, 2, \dots, L \\ 0, x \in \partial\Omega \setminus \bigcup_{l=1}^L e_l \end{cases} , \quad (2.19)$$

onde $|e_l|$ é a área do eletrodo, I_l é a corrente injetada no l -ésimo eletrodo e L o número total de eletrodos. Este modelo ainda que leve em conta os eletrodos na fronteira ainda sobreestima a resistividade. Modelos mais acurados levam em conta a impedância de contato do eletrodo e o volume condutor.

O modelo “*shunt*” [2] leva em conta a propriedade do potencial elétrico no eletrodo ser uma constante. Assim a relação (2.18) é substituída pela condição:

$$\int_{e_l} \sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = I_l, x \in e_l, l = 1, 2, \dots, L, \quad (2.20)$$

e o efeito *shunt* é considerado em:

$$u = U_l, x \in e_l, l = 1, 2, \dots, L, \quad (2.21)$$

onde U_l é a voltagem medida no l -ésimo eletrodo. Segundo [59] este modelo ainda não estima a resistividade corretamente, pois a impedância de contato é ignorada.

As seguintes condições de contorno acompanham a equação (2.13) e são conhecidas como o **modelo completo de eletrodos (MCE)** [1], [5]:

Se $\Gamma_1 \subset \partial\Omega$ é o subconjunto da superfície do volume sob os eletrodos, então a densidade de corrente associada é:

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} = j \quad \text{em } \Gamma_1, \quad (2.22)$$

para o restante da superfície $\Gamma_2 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1$,

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{em } \Gamma_2. \quad (2.23)$$

Para cada eletrodo a integral de densidade de corrente sobre a superfície do eletrodo s é igual à quantidade de corrente desse eletrodo,

$$\int_{e_l} \sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = I_l, \quad x \in e_l, \quad l = 1, \dots, L, \quad (2.24)$$

onde L é o número de eletrodos do sistema. Os valores do potencial U_l , os quais são medidos no l -ésimo eletrodo, são iguais à soma dos potenciais sobre a superfície desses eletrodos e os potenciais que ocorre pela impedância de contato dos eletrodos $z_l[\Omega/m^2]$,

$$u + z_l \sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} = U_l, \quad x \in e_l, \quad l = 1, 2, \dots, L. \quad (2.25)$$

Este modelo tem uma única solução [53], quando consideramos o teorema de conservação de carga:

$$\int_{\partial\Omega} j = 0 \Leftrightarrow \sum_{l=1}^L I_l = 0, \quad (2.26)$$

e para as medidas fazemos a seguinte escolha:

$$\int_{\partial\Omega} u = 0 \Leftrightarrow \sum_{l=1}^L U_l = 0. \quad (2.27)$$

O problema direto em TIE pode ser formulado da seguinte maneira:

Dada σ queremos determinar as voltagens $u|_{\partial\Omega}$ para os padrões de corrente I^d que satisfazem (2.26), para isso resolvemos a equação (2.13) junto às condições de fronteira descritas acima. Em outras palavras, o problema direto é determinar o mapeamento Neumann para Dirichlet $\Lambda_\sigma^{NiD} : H^{-1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$, definido como:

$$\Lambda_\sigma^{NiD} I^d = u|_{\partial\Omega}. \quad (2.28)$$

Uma linearização do problema direto é feita da seguinte maneira. Estamos interessados em mensurar a perturbação δu em $\partial\Omega$, quando introduzimos uma perturbação de condutividade $\delta\sigma$ em Ω ($\delta\sigma \ll \sigma$) então a equação de difusão (2.13) fica:

$$\nabla \cdot ((\sigma + \delta\sigma) \nabla (u + \delta u)) = 0, \text{ em } \Omega, \quad (2.29)$$

então:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) + \nabla \cdot (\sigma \nabla (\delta u)) + \nabla \cdot (\delta\sigma \nabla u) + \nabla \cdot (\delta\sigma \nabla (\delta u)) = 0. \quad (2.30)$$

Considerando novamente a equação (2.13) temos que o primeiro termo do lado esquerdo da equação (2.29) é nulo e considerando que os termos $\delta\sigma, \delta u$ são variações pequenas temos o seguinte problema linearizado:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla (\delta u)) = -\nabla \cdot \left(\frac{\delta\sigma}{\sigma} \right) \cdot \nabla u. \quad (2.31)$$

então a condição (2.17) fica :

$$\sigma \frac{\partial (\delta u)}{\partial \nu} = -\delta\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu}, \text{ em } \partial\Omega. \quad (2.32)$$

Para resolver o problema direto encontramos na literatura que o método dos elementos finitos é os mais utilizados [32], [45], [57], [58], [23]. Para problemas cuja fronteira seja suficientemente regular podemos aplicar métodos como diferenças finitas [2] ou volumes finitos [69].

Para problemas bi-dimensionais o sistema linear gerado pelo método numérico pode ser resolvido usando métodos diretos como o método de eliminação gaussiana ou usar fatorização da matriz, onde dependendo das propriedades da matriz, podemos usar fatorização de Choleski, fatorização LU entre outros. O sistema linear também pode ser resolvido usando métodos iterativos como os métodos com pré-condicionamento (Choleski incompleto,

LU incompleto, etc), métodos *multigrid*. Atualmente implementações que usam o método *multigrid* e malhas adaptativas estão sendo aplicadas [32].

2.3 A coleta de dados na TIE

Para resolver o problema direto precisamos de padrões de corrente elétrica injetadas através dos eletrodos e fazer as medições das voltagens resultantes. A questão de ter medidas razoáveis é um ponto importante na TIE. Para isso muitas estratégias tem sido implementadas [4], [28], [23].

A maioria de sistemas de TIE tem preferido em injetar corrente e medir as voltagens resultantes (em vez de fazer o contrário) devido a que a impedância de contacto entre o eletrodo e o meio condutor não tem efeitos notáveis nas medidas das voltagens, pois, os voltímetros têm uma grande impedância de entrada ao contrário dos ohmímetros. Injetar corrente e medir voltagens caracterizam em resolver o problema (2.13) junto à condição de Neumann. Fazer o contrário implica em impor a condição de Dirichlet.

Existem duas formas principais de coletar dados de entrada. A primeira é chamada método dos dois eletrodos, na qual as voltagens dos eletrodos são medidas dos mesmos eletrodos de onde se injetaram as correntes. A outra forma é o chamado método dos quatro eletrodos onde as correntes são injetadas de alguns eletrodos e as medidas são tomadas dos outros eletrodos. Este método minimiza os erros nas voltagens medidas devido à impedância de contato o qual se apresenta em ambos os métodos de coleta de dados.

Uma forma de aplicar o método dos quatro eletrodos é o chamado método dos eletrodos vizinhos [45], [57], na qual a corrente é injetada desde dois eletrodos adjacentes e as diferenças de voltagem são medidas de todos os outros pares de eletrodos. O método é repetido em todos os eletrodos. Assim, por exemplo, quando temos 16 eletrodos na fronteira do objeto condutor um total de $16 \times 13 = 208$ medidas são feitas. Porém, somente 104 destas medidas são independentes devido ao teorema de reciprocidade, a qual afirma que invertendo as medidas das voltagens e injeção de corrente nos eletrodos obtemos o mesmo valor de condutividade ou resistividade [45].

Outra versão do método dos quatro eletrodos é o método oposto na qual as correntes são injetados através de eletrodos diametralmente opostos. As medidas das voltagens são feitas tomando como referência o eletrodo adjacente do eletrodo de injeção de corrente. Este método produz o mesmo numero de medidas independentes do método dos eletrodos vizinhos, porem com a vantagem de produzir uma densidade de corrente mais uniforme.

A combinação dos métodos descritos resulta no método cruzado [45] na qual um eletrodo (de um total de 16 eletrodos), por exemplo, o eletrodo 1 é o referencial de corrente e a fonte de corrente é aplicado sucessivamente nos eletrodos 3,5,7,...,15. Para cada par de corrente injetada as voltagens são medidas com respeito ao eletrodo 2 de todos os eletrodos exceto daquele que serviu de referencia na injeção de corrente. Este método também produz o mesmo numero de medidas independentes que os outros dois métodos anteriores.

Segundo [61] a posição angular ótima de dois eletrodos injetores de corrente que produz a melhor sensibilidade (diferença de voltagens entre a distribuição homogênea e perturbada) é aproximadamente 48° . Assim em vez de injetar corrente entre eletrodos adjacentes temos que aplicar nos pares: 1-3; 2-4; ...; N-1. Este modelo também é conhecido como pula 1.

A qualidade de imagens tem relação com a forma que os dados são coletados. Em [22] aparece o termo “distinguiabilidade” de condutividade e posteriormente é estudado em [32],[33]. Duas condutividades σ_1, σ_2 são “distinguíveis” por medidas de precisão ε se existe um padrão de correntes $I, \|I\|=1$ e:

$$\|R(\sigma_1)I - R(\sigma_2)I\|^2 > \varepsilon, \quad (2.33)$$

onde $R(\sigma)I$ denota os potenciais elétricos ou voltagens em $\partial\Omega$ resultantes da aplicação de padrões de correntes I contendo a condutividade σ .

Assim, para maximizar a “distinguiabilidade” $\|R(\sigma_1)I - R(\sigma_2)I\|^2$ com respeito ao padrão de correntes I fazemos:

$$\max_I \frac{\|R(\sigma_1)I - R(\sigma_2)I\|^2}{\|I\|^2} = \max_I \frac{\|D_0 I\|^2}{\|I\|^2}, \quad (2.34)$$

onde $D_0 = (R(\sigma_1) - R(\sigma_2))$. Assim, temos que o padrão de corrente ótimo que maximiza (2.34) é o autovetor de D_0^2 que tem o maior autovalor. Assim, σ_1 é “distinguível” de σ_2 por medidas de precisão ε se $\sqrt{\lambda_1^2} > \varepsilon$, onde λ_1^2 é o maior autovalor de D_0^2 . O próximo melhor padrão de corrente corresponde aos autovetores que tem o segundo maior autovalor. Todos aqueles autovetores para os quais $\sqrt{\lambda_k^2} > \varepsilon$ são padrões razoáveis a serem usados na injeção de corrente.

Dada essa definição é possível otimizar o melhor padrão de correntes e usar isso para injetar corrente no volume de modo a ter a melhor “distinguibilidade”. Por exemplo, segundo estudos feitos em [21] os chamados padrões de corrente trigonométricos são a melhor opção de padrões de corrente elétrica para distinguir uma distribuição não homogênea circular dentro de um volume condutor circular.

Os padrões de corrente trigonométricos são dados da seguinte maneira:

$$I_l^d = \begin{cases} \cos(d\varphi_l), & l = 1, \dots, L, d = 1, \dots, L/2 \\ \sin((d - L/2)\varphi_l), & l = 1, \dots, L, d = L/2 + 1, \dots, L-1 \end{cases}, \quad (2.35)$$

onde $\varphi_l = \frac{2\pi l}{L}$, d é o número de padrões de corrente e L o número de eletrodos alocados em $\partial\Omega$.

2.4 O Problema Inverso

O problema inverso em TIE pode ser formulado da seguinte maneira: dada uma distribuição de medidas de voltagens $u|_{\partial\Omega}$ para todos os padrões de corrente I^d , ou, dado conhecido o mapeamento Λ_σ^{ND} temos que reconstruir σ . Assim temos que determinar o mapeamento Dirichlet para Neumann $\Lambda_\sigma^{DN} = H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$, definido como:

$$\Lambda_{\sigma}^{DtN} u|_{\partial\Omega} = \sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} \quad (2.36)$$

Os métodos de reconstrução em TIE podem ser classificados em dois grandes grupos: determinísticos e probabilísticos além de outras abordagens como o método *d-bar* [9] *backprojection* [4], variacionais [28], *layer stripping* [22], método da perturbação [63], variação total mínima [57], filtro de Kalman [11] entre outros.

Um modelo de observações determinísticas tem a forma:

$$V = U(\sigma; I), \quad (2.37)$$

onde $V \in \mathfrak{R}^{LP}$, sendo que L é o número de eletrodos e P o número de padrões de corrente usados, $U(\sigma; I)$ representa o modelo discreto entre os parâmetros $\sigma \in \mathfrak{R}^K$ e as observações V . Daqui para frente denotaremos $U(\sigma)$ em substituição de $U(\sigma; I)$.

Como a dependência das observações a respeito de σ é não linear, temos que usar algum método iterativo apropriado para obter a solução σ . Nesses termos o modelo (2.37) pode ser linearizado em torno de uma distribuição de referência σ_0 . Assim:

$$U(\sigma) = U(\sigma_0) + \frac{\partial U}{\partial \sigma}(\sigma_0)(\sigma - \sigma_0) + O(\|\sigma - \sigma_0\|^2), \quad (2.38)$$

onde $\frac{\partial U}{\partial \sigma}(\sigma_0) \in \mathfrak{R}^{LP \times K}$ é o Jacobiano de $U(\sigma) \in \mathfrak{R}^{LP}$ em $\sigma = \sigma_0$. Desconsiderando os termos de segunda ordem de (2.38) temos:

$$\delta U \approx J \delta \sigma, \quad (2.39)$$

onde: $J = \frac{\partial U}{\partial \sigma}(\sigma_0)$, $\delta U = U(\sigma) - U(\sigma_0)$ e $\delta \sigma = \sigma - \sigma_0$.

Assim temos que resolver o seguinte problema de minimização:

$$\min_{\delta\sigma} \|\delta V - J\delta\sigma\|, \quad (2.40)$$

onde δV é a diferença entre dois conjuntos de medidas.

Para resolver o problema (2.40) métodos iterativos são usados, principalmente aqueles baseados no algoritmo de Gauss-Newton com parâmetros e matrizes de regularização [19], [22], [33], [60].

Para lidar com o mau condicionamento do Jacobiano são aplicados diversos métodos de regularização para termos uma solução estável. Por exemplo, o método Levenberg-Marquardt [30] tem o seguinte processo iterativo:

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i + \delta\sigma_i, \quad (2.41)$$

onde:

$$\delta\sigma_i = \left(J_i^T J_i + \alpha I \right)^{-1} \left(J_i^T (V - U(\sigma_i)) \right), \quad (2.42)$$

sendo α o parâmetro de regularização.

Nos métodos determinísticos é preciso aprimorar o cálculo do Jacobiano o qual tem que ser feito de maneira eficiente, pois no seu cálculo é gasto uma grande parcela do tempo computacional total do problema.

O Jacobiano tem a seguinte forma:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_1^1}{\partial \sigma_1} & \dots & \frac{\partial U_1^1}{\partial \sigma_K} \\ \frac{\partial U_2^1}{\partial \sigma_1} & \dots & \frac{\partial U_2^1}{\partial \sigma_K} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial U_L^1}{\partial \sigma_1} & \dots & \frac{\partial U_L^1}{\partial \sigma_K} \\ \frac{\partial U_1^2}{\partial \sigma_1} & \dots & \frac{\partial U_1^2}{\partial \sigma_K} \\ \frac{\partial U_2^2}{\partial \sigma_1} & \dots & \frac{\partial U_2^2}{\partial \sigma_K} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial U_L^2}{\partial \sigma_1} & \dots & \frac{\partial U_L^2}{\partial \sigma_K} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial U_1^P}{\partial \sigma_1} & \dots & \frac{\partial U_1^P}{\partial \sigma_K} \\ \frac{\partial U_2^P}{\partial \sigma_1} & \dots & \frac{\partial U_2^P}{\partial \sigma_K} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial U_L^P}{\partial \sigma_1} & \dots & \frac{\partial U_L^P}{\partial \sigma_K} \end{bmatrix}_{L \times P \times K}$$

O Jacobiano descreve a mudanças nos voltagens medidos devido a pequenas mudanças de condutividade nos subdomínios de Ω . Daqui em diante vamos denotar o Jacobiano como:

$$J_{ld,k} = \partial U_l^d / \partial \sigma_k, \quad (2.43)$$

Uma forma de calcular o Jacobiano é perturbando cada elemento de condutividade e calcula-se a mudança em cada eletrodo, fazemos isso para cada padrão de corrente $d = 1, 2, 3, \dots, P$ e para todos os $k = 1, 2, \dots, K$ subdomínios de Ω . Então, seja o sistema linear que resulta ao aplicar um método numérico para resolver o problema direto:

$$Ab_p = f_c, \quad (2.44)$$

A k -ésima coluna do Jacobiano pode ser obtida como:

$$\frac{\partial b_p}{\partial \sigma_k} = \frac{\partial (A^{-1} f_c)}{\partial \sigma_k}, \quad (2.45)$$

então o lado direito de (2.45) pode ser expandida da seguinte maneira:

$$\frac{\partial(A^{-1}f_c)}{\partial\sigma_k} = -A^{-1} \frac{\partial A}{\partial\sigma_k} A^{-1}f_c = -A^{-1} \frac{\partial A}{\partial\sigma_k} b_p,$$

Se na solução numérica do problema direito se usa o método dos Elementos Finitos então a derivada $\partial A/\partial\sigma_k$ pode ser calculado como:

$$\frac{\partial A(m,i)}{\partial\sigma_k} = -\frac{1}{\sigma_k^2} \int_{\Delta_k} \nabla \varphi_m \cdot \nabla \varphi_i,$$

onde $\hat{u} = \sum_{k=1}^K \alpha_k \varphi_k$ é a solução aproximada e φ_k são funções base [57].

Outra implementação que usa o método iterativo de Newton é o chamado método de reconstrução de um passo ou algoritmo NOSER [22], [23]. Neste método temos L eletrodos alocados em $\partial\Omega$. Para assegurar uma boa resolução espacial usamos $L-1$ diferentes padrões de correntes $\vec{I}^d = (I_1^d, I_2^d, \dots, I_L^d)$, $d=1, 2, \dots, L-1$ e obtemos as correspondentes medidas de voltagens $\vec{V}^d = (V_1^d, V_2^d, \dots, V_L^d)$, $d=1, 2, \dots, L-1$.

Denotamos como $\vec{U}^d = (U_1^d(\sigma), U_2^d(\sigma), \dots, U_L^d(\sigma))$, $d=1, 2, \dots, L-1$ padrões de voltagens que é produzido ao injetar o d -ésimo padrão de corrente para uma distribuição de condutividade σ .

O problema inverso consiste em determinar a condutividade σ que minimiza

$$\vec{V}^d - \vec{U}^d(\sigma),$$

onde $d=1, 2, \dots, L-1$.

A distribuição de condutividade é dada como:

$$\sigma(p) = \sum_{k=1}^K \sigma_k \chi_k(p), \quad (2.46)$$

onde χ_k é a função característica no k -ésimo elemento, e nesse elemento a condutividade é tida como constante.

O problema inverso encontra o mínimo de $\sigma_k, k=1,2,...,K$. Uma maneira de fazer isso é pelo método dos mínimos quadrados. Assim, temos que minimizar o erro:

$$E_r(\sigma) = \sum_{d=1}^{L-1} \left\| \vec{V}^d - \vec{U}^d(\sigma) \right\|^2, \quad (2.47)$$

e um mínimo pode ser achado fazendo:

$$0 = \frac{\partial E_r(\sigma)}{\partial \sigma_k}, k=1,2,...,K. \quad (2.48)$$

Dada uma condutividade inicial σ_k , o método iterativo de Newton pode ser utilizado para achar uma nova solução.

Outra abordagem para resolver o problema inverso é o chamado método de sensibilidade. Este método é baseado no teorema da de sensibilidade o qual foi derivado por Geselowitz e Lehr [31] e depois foi linearizado por Murai e Kagawa [39].

Sejam ψ , ϕ potenciais elétricos em resposta aos padrões de corrente I_ψ , I_ϕ injetados através dos pares de eletrodos ($A_\phi - B_\phi$ e $C_\psi - D_\psi$) respectivamente como se mostra na figura (2.1). Então a mudança de impedância mútua δZ do sistema de quatro eletrodos é dado como:

$$\delta Z = \frac{\delta \phi_{A_\phi B_\phi}}{I_\phi} = \frac{\delta \phi_{C_\psi D_\psi}}{I_\psi} = - \int_{\Omega} \delta \sigma \frac{\nabla \phi^*}{I_\theta} \cdot \frac{\nabla \psi}{I_\psi} d\Omega, \quad (2.49)$$

onde $\phi^* = \phi + \delta \phi$ é a mudança do potencial que é causada pela mudança na condutividade $\sigma^* = \sigma + \delta \sigma$. Assim:

$$\delta Z = - \int_{\Omega} \delta \sigma \frac{\nabla \phi}{I_\theta} \cdot \frac{\nabla \psi}{I_\psi} d\Omega + O((\delta \sigma)^2) \approx - \int_{\Omega} \delta \sigma \frac{\nabla \phi}{I_\theta} \cdot \frac{\nabla \psi}{I_\psi} d\Omega, \quad (2.50)$$

onde $\delta \sigma \ll \sigma$.

Figura 2.1 A corrente é injetada no interior de Ω através dos eletrodos A-B e mede-se a voltagem V através dos eletrodos C-D.

A impedância mútua no sistema de quatro eletrodos [61] é dada como:

$$Z = \frac{\phi_{A\phi B\phi}}{I_\phi} = \frac{\phi_{C\phi D\phi}}{I_\psi} = - \int_{\Omega} \sigma \frac{\nabla \phi}{I_\theta} \cdot \frac{\nabla \psi}{I_\psi} d\Omega. \quad (2.51)$$

A forma discreta de (2.50) e (2.51) ficam da seguinte maneira:

$$\delta Z = \sum_{k=1}^K \delta \sigma S_{dl,k}, \quad (2.52)$$

$$Z = \sum_{k=1}^K \sigma_k S_{dl,k}, \quad (2.53)$$

onde:

$$S_{dl,k} = - \int_{\Omega_k} \frac{\nabla u^d}{I_d} \cdot \frac{\nabla u^l}{I_l} d\Omega_k, \quad (2.54)$$

sendo u^d, u^l distribuições de voltagens quando o d -ésimo e o l -ésimo padrão de correntes é usado. Os coeficientes $S_{dl,k}$ formam a chamada **matriz de sensibilidade**.

Talvez, o método mais difundido que usa a matriz de sensibilidade para resolver o problema inverso seja o método *backprojection* [3],[42].

Em [61] podemos encontrar uma solução inversa que usa a matriz de sensibilidade baseada no método dos gradientes conjugados (GC) cujo algoritmo é dado da seguinte maneira:

- (1) Calcular o vetor de voltagem de referência e a matriz de sensibilidade para uma distribuição inicial $\hat{\sigma}_0$:

$$u(\hat{\sigma}^{(0)}), S(\hat{\sigma}^{(0)})$$

- (2) Mensurar os padrões de voltagens e produzir um vetor de mudanças relativas.

$$\eta_d = \frac{V'_d(\sigma')}{V_d(\sigma)}, d = 1, 2, \dots, P$$

- (3) Definir os parâmetros de controle: erro mínimo de convergência ε_s , número máximo de passos inversos δ_s e o número máximo de iterações δ_c do método dos gradientes conjugados.

- (4) Fazer a primeira estimação de um vetor de erro e do vetor de condutividade.

$$\begin{cases} e^{(1)} = [e_1^{(1)}, \dots, e_P^{(1)}]^T, & e_d^{(1)} = \eta_d - \sum_{d=1}^P \frac{\eta_d}{P} \\ \hat{\sigma}^{(1)} = [\hat{\sigma}_1^{(1)}, \dots, \hat{\sigma}_K^{(1)}]^T, & \hat{\sigma}_k^{(1)} = \frac{\sigma_0}{\sum_{d=1}^P \frac{\eta_d}{P}} \end{cases}$$

- (5) Normalizar a matriz de sensibilidade: $\bar{S} = [\bar{s}_{dl,k}]$,

$$\bar{s}_{dl,k}^{(n)} = \frac{s_{dl,k}(\hat{\sigma}_k^{(n)})}{\sum_{k=1}^K s_{dl,k}(\hat{\sigma}_k^{(0)})}$$

- (6) Resolver o problema inverso usando o método GC e atualizar as mudanças relativas no vetor de condutividade.

$$\gamma_r = -\bar{S}^{-1} \cdot e$$

- (7) Atualizar o vetor de condutividade.

$$\hat{\sigma}^{(n+1)} = \hat{\sigma}^{(n)} \left(1 + \gamma_r^{(n+1)} \right)$$

(8) Resolver o problema direto e atualizar o vetor de voltagens e a matriz de sensibilidade.

$$u\left(\hat{\sigma}^{(n+1)}\right), \quad S\left(\hat{\sigma}^{(n+1)}\right)$$

(9) Atualizar o vetor de erros.

$$e_d^{(n+1)} = \eta_d - \frac{u'_d\left(\hat{\sigma}_k^{(n+1)}\right)}{u_d\left(\hat{\sigma}_k^{(0)}\right)}$$

(10) Verificar se os parâmetros de controle têm sido atingidos:

$$\|e\| \leq \varepsilon_s, \text{ ou } \text{iterações} \geq \delta_s ?$$

(11) Se não se conseguiu a convergência ou o máximo numero de iterações tem sido alcançado então retornar ao passo (5) ate que os parâmetros de controle sejam alcançados.

Nos últimos anos, métodos probabilísticos (algoritmos genéticos [46], *simulated annealing*, enxame de partículas, *ant-colony*, etc) vem sendo aplicados para resolver o problema inverso. A grande motivação é que esses métodos não usam a informação do gradiente dos potenciais e se espera que uma implementação satisfatória obtenha boas soluções numéricas e melhore o tempo computacional.

O problema de minimização dos métodos probabilísticos é:

$$\min_{\sigma} \frac{1}{2} \left\| \vec{V}^d - \vec{U}^d(\sigma) \right\|^2, \quad (2.55)$$

$$0 \leq \sigma_k \leq 1$$

e algumas outras restrições que dependem das especificações do método probabilístico utilizado [11], [46].

3. ESTUDOS NUMÉRICOS USANDO O EIDORS

O EIDORS (*Electrical Impedance and Diffuse Optical Tomography Reconstruction Software* [1], [60]) é um software aberto voltado ao uso de reconstrução de imagens em TIE e tomografia ótica difusa (DOT). Este software facilita a pesquisa no que se refere à reconstrução de imagens pois seus algoritmos podem ser modificáveis ou mesmo usados para comparação com novos desenvolvimentos. Os códigos foram implementados em MATLAB e, na sua concepção inicial, o software resolve o problema direto e inverso num domínio bidimensional. Atualmente apareceu a versão para problemas tridimensionais EIDORS 3D (<http://eidors3d.sourceforge.net>). O problema direto é resolvido usando o método numérico dos elementos finitos e para resolver o problema inverso se usam técnicas de regularização.

3.1 Características da malha

Consideramos o domínio como sendo o disco unitário e construímos duas malhas triangulares para resolver o problema direto e o problema inverso. Como é preciso uma solução acurada do problema direto a malha deve ser mais fina comparado à malha que se usa para resolver o problema inverso. Em ambos os casos o pólo $r = 0$ faz parte da malha.

Usamos uma malha triangular para resolver o problema inverso (Figura 3.1 (a)) com as seguintes características:

Número de nós = 353.

Número de elementos = 672.

Número de eletrodos alocados na fronteira (os elementos correspondentes à locação de eletrodos fica colorida) = 16.

A malha para resolver o problema direto (Figura 3.1 (b)) tem as seguintes características:

Número de nós = 1377.

Número de elementos = 2688.

Figura 3.1 (a) Malha para resolver o problema inverso, (b) Malha para resolver o problema direto.

O EIDORS teve como uma de suas motivações a reconstrução de resistividade dentro de um volume condutor ρ . Porém, a resistividade é a inversa da condutividade σ . Assim a equação (2.13) fica:

$$\nabla \cdot \frac{1}{\rho} \nabla u = 0. \quad (3.1)$$

Como primeiro exemplo a condutividade é dividida numa região não homogênea com valor (200) e no restante da região tem o valor (400) conforme é mostrada na figura 3.2.

DISTRIBUIÇÃO DA RESISTIVIDADE

Figura 3.2 Distribuição de resistividade.

3.2 Tratamento do Problema Direto

Para resolver o problema direto consideramos a equação (2.13) junto às condições de fronteira dadas com o modelo completo de eletrodos (2.22 - 2.27).

Seja u_h a solução generalizada que resolve o problema direto, ϕ_k funções bases lineares e constantes por partes com suporte limitado tal que:

$$\phi_k(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ no vértice } i \\ 0, \text{ em outro lugar } \end{cases}, \quad (3.2)$$

então:

$$u_h = \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_k, \quad (3.3)$$

onde U_i é o valor do potencial no nó i a ser determinado e K o número total de nós.

A distribuição discreta de condutividade fica:

$$\sigma = \sum_{k=1}^K \sigma_k \psi_k, \quad (3.4)$$

onde ψ_k são funções bases constante por partes.

As voltagens U^h nos eletrodos são aproximadas como:

$$U^h = \sum_{d=1}^{L-1} \beta_d \eta_d, \quad (3.5)$$

onde $\eta_1 = [1, -1, 0, \dots, 0]$, $\eta_2 = [1, 0, -1, 0, \dots, 0]$, ..., $\eta_{L-1} = [1, 0, \dots, 0, -1]$ e $\eta_d \in \mathfrak{R}^L$. Com isto, asseguramos que $\sum_{l=1}^L U_l = 0$, onde L é o numero de eletrodos alocados na fronteira e β_d são coeficientes a ser determinados.

Como mostrado em [51] para (v, V) , $v \in H^1(\Omega)$, $V \in \mathfrak{R}^L$:

$$B_s((u, U), (v, V)) = \sum_{l=1}^L I_l V_l, \quad (3.6)$$

onde:

$$B_s((u, U), (v, V)) = \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v dx + \sum_{l=1}^L \frac{1}{z_l} \int_{e_l} (u - U_l)(v - V_l) dS.$$

O sistema linear fica:

$$A b_p = f_c \quad (3.7)$$

onde $b_p = (\alpha, \beta)^T \in \mathfrak{R}^{K+L-1}$, $A \in \mathfrak{R}^{(K+L-1) \times (K+L-1)}$ é uma matriz simétrica que tem a forma:

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ C^T & D_b \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

e no lado direito de (3.7) se encontram os padrões de corrente:

$$f_c = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{l=1}^L I_l (\eta_k)_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{0} \\ \tilde{I} \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

onde $\tilde{0} = (0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^K$, $\tilde{I} = (I_1 - I_2, I_1 - I_3, \dots, I_1 - I_L)^T \in \mathbb{R}^{L-1}$.

Quando consideramos as funções bases ϕ_k e os vetores η_k na forma variacional (3.6) os blocos da matriz A ficam:

$$\begin{aligned} B(i, j) &= \int_{\Omega} \sigma \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dx + \sum_{l=1}^L \frac{1}{z_l} \int_{e_l} \phi_i \phi_j dS, \quad i, j = 1, 2, \dots, K \\ C(i, j) &= - \left(\frac{1}{z_1} \int_{e_1} \phi_i dS - \frac{1}{z_{j+1}} \int_{e_{j+1}} \phi_i dS \right), \quad i = 1, 2, \dots, K, \quad j = 1, 2, \dots, L-1 \\ D_b(i, j) &= \sum_{l=1}^L \frac{1}{z_l} \int_{e_l} (\eta_i)_l (\eta_j)_l dS \\ &= \begin{cases} \frac{|e_1|}{z_1}, & i \neq j \\ \frac{|e_1|}{z_1} + \frac{|e_{j+1}|}{z_{j+1}}, & i = j, \quad i, j = 1, 2, \dots, L-1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.10)$$

O sistema linear (3.7) é resolvido usando fatorização de Choleski, pois a formulação pelo método dos elementos finitos leva à matriz A a ser simétrica e definida positiva.

Inicialmente o problema direto é aplicado para fazer as simulações das medições das voltagens nos eletrodos.

Dados de entrada:

Número de eletrodos = 16.

Padrões de corrente trigonométrica = $I_{16 \times 15}$ (15 padrões de corrente e 16 eletrodos).

Impedância de contato eletrodo-volume condutor = $z_{16 \times 1}$

O problema direto fornece a distribuição do potencial nos 1377 nós para os 15 padrões de corrente injetados $U_{1377 \times 15}$, sendo que 16 voltagens para cada um dos 15 padrões $V_{16 \times 15}$ correspondem às voltagens simuladas nos eletrodos.

3.3 Tratamento do Problema Inverso

A distribuição de condutividade inicial é escolhida de maneira que as voltagens na fronteira de Ω são decompostas como:

$$U_l(\sigma) \approx \frac{\sigma}{\sigma_r} U_l(\sigma_r), \quad (3.11)$$

onde σ_r é uma condutividade constante arbitrária. Então resulta que a melhor condutividade homogênea σ_0 é a que minimiza o seguinte funcional:

$$\left\| V - \frac{\sigma_0}{\sigma_r} U(\sigma_r) \right\|, \quad (3.12)$$

onde a solução é obtida pelo método dos mínimos quadrados.

Assim, se em nosso algoritmo escolhermos $\sigma_r = 1.0$, resolvemos o problema direto para esta condutividade homogênea obtendo $U_{16 \times 15}(\sigma_r = 1.0)$ medidas de voltagens nos eletrodos e o valor da condutividade (homogênea) inicial σ_0 .

Novamente resolvemos o problema direto com a condutividade inicial e calculamos o Jacobiano J_{σ_0} . Para resolver o problema de minimização (2.40) é preciso definir a matriz de regularização R e o parâmetro de regularização α com o propósito de utilizar o método de Gauss-Newton com regularização de Tikhonov para aproximar a distribuição de resistividade.

O parâmetro de regularização e a matriz de regularização usam informações a priori do problema. Na solução deste problema o parâmetro de regularização foi calculado aplicando o método da curva - L [17] (como mostra a figura 3.3) e a matriz de regularização é construída tentando obter imagens com certa suavidade.

Figura 3.3 Gráfico da curva L .

A solução do problema inverso usa um processo iterativo do tipo Gauss-Newton com regularização de Tikhonov, assim:

$$\begin{aligned} &\text{para } i = 1 : \text{max it} \\ &\rho_i = \rho_{i-1} + \delta\rho_{i-1} \\ &\delta\rho_{i-1} = \left(J_{i-1}^T J_{i-1} + \alpha R^T R \right)^{-1} \left[J_{i-1}^T \left(V - U_{\sigma_{i-1}} \right) - \alpha R^T R \rho_{i-1} \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde $\text{max it} = 5$

Assim, obtemos a seguinte imagem da reconstrução da resistividade:

DISTRIBUIÇÃO DA RESISTIVIDADE

5= nro. de it.

Figura 3.4 A distribuição de resistividade e a aproximação após a 5ª iteração.

O erro é medido da seguinte maneira:

$$E_i = \|V - U_{\sigma_i}\|,$$

onde i é o número de iterações. Assim, após a quinta iteração temos que $E_5 = 1.544 \times 10^{-6}$ sendo que o tempo computacional gasto pelo processo iterativo foi de aproximadamente 23.2s (s = segundos) e as malhas para resolver o problema direto e inverso foram geradas antes do processo iterativo e gastaram aproximadamente 35s para serem geradas.

Na figura 3.4 podemos observar que o método iterativo usado consegue identificar a região onde fica a interface de valores de resistividade e este processo fica mais preciso na medida em que as iterações aumentam.

4. ESTUDOS NUMÉRICOS DO PROBLEMA DIRETO

A reconstrução da condutividade no interior de um volume é essencialmente baseada na capacidade de calcular o campo elétrico no interior do mesmo quando os padrões de corrente são injetados na fronteira. Esta é a característica principal do modelo direto. Portanto, o objetivo do problema direto é estimar a distribuição do potencial no interior e na fronteira de um volume para, sequencialmente, gerar observações na mesma.

O problema direto pode ser resolvido, em alguns casos, analiticamente [21] derivando equações para avaliar o potencial elétrico em algum ponto do volume ou pode ser resolvido numericamente.

Sabendo que nas aplicações da TIE a distribuição de condutividade ou resistividade podem ser funções contínuas ou descontínuas por partes, a continuação resolvemos o problema de difusão numericamente para diferentes tipos de distribuição e testamos os métodos em problemas onde a solução analítica é conhecida.

4.1 O problema de difusão com coeficientes contínuos em coordenadas polares

A equação a ser considerada é mais geral que a dada em (2.13), a saber, por considerar uma função fonte definida em Ω .

A equação de difusão em coordenadas polares e em dimensão 2 é :

$$\frac{-1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\sigma(r, \theta) r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\sigma(r, \theta)}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \right] = f(r, \theta), \quad \text{em } \Omega \quad (4.1)$$

onde vamos considerar Ω como sendo o disco unitário $\Omega = \{(r, \theta) / 0 < r < 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ e os coeficientes $\sigma(r, \theta)$ não homogêneos porém contínuos. A equação (4.1) é munida de uma das seguintes condições de fronteira de tipo Dirichlet ou Neumann:

$$\begin{cases} u(1, \theta) = g(\theta), & \text{em } \partial\Omega \\ \text{ou} \\ \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = h(\theta), & \text{em } \partial\Omega \end{cases}, \quad (4.2)$$

onde n é a direção normal e f, g ou h são funções conhecidas.

Discretização dos eixos radial e angular.

Eixo radial

Para evitar um tratamento especial na singularidade do pólo usamos a seguinte malha modificada:

No caso quando a condição de fronteira é Dirichlet temos:

$r_i = (i - 1/2)h_r$, onde $h_r = \frac{2}{2M+1}$, $i = 1, \dots, M+1$. Assim, $r_i - r_{i-1} = h_r$, $i = 2, \dots, M+1$ e

$r_{i \pm 1/2} = r_i \pm \frac{h_r}{2}$, $r_{M+1} = 1.0$. O pólo ocorre em $r_{1/2} = 0$ e não faz parte da malha como mostrado na figura (4.1).

Figura 4.1 Subdivisão do eixo radial considerando a condição de Dirichlet.

No caso quando em que a condição de fronteira é de tipo Neumann temos:

$r_i = (i - 1/2)h_r$, onde $h_r = \frac{1}{M}$, $i = 1, \dots, M$. Assim, $r_i - r_{i-1} = h_r$, $i = 2, \dots, M$ e $r_{i \pm 1/2} = r_i \pm \frac{h_r}{2}$,

$r_{M+1/2} = 1.0$.

A figura 4.2 mostra esta discretização.

Figura 4.2 Subdivisão do eixo radial considerando a condição de Neumann.

Eixo angular

$$\theta_j = jh_\theta, \quad h_\theta = \frac{2\pi}{N}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad \theta_{j\pm 1/2} = \theta_j \pm \frac{h_\theta}{2} \text{ e}$$

$$\theta_j - \theta_{j-1} = h_\theta, \quad j = 2, \dots, N.$$

A figura 4.3 mostra a discretização no eixo angular.

Figura 4.3 Subdivisão do eixo angular.

Considerando as seguintes notações: $u_{i,j} \approx u(r_i, \theta_j)$, $f_{i,j} \approx f(r_i, \theta_j)$,

$\sigma_{i\pm 1/2,j} = \sigma(r_i \pm 0.5h_r, \theta_j)$, $\sigma_{i,j\pm 1/2} = \sigma(r_i, \theta_j \pm 0.5h_\theta)$ e $g_j = g(\theta_j)$. Para discretizar a equação (4.1) se usou o método de diferenças finitas centrais com um stêncil de cinco pontos [36].

Assim, temos:

$$-\frac{1}{r_i} \left[\left(r_{i+1/2} \sigma_{i+1/2,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_r} - r_{i-1/2} \sigma_{i-1/2,j} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_r} \right) / h_r + \left(\frac{\sigma_{i,j+1/2}}{r_i} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_\theta} - \frac{\sigma_{i,j-1/2}}{r_i} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_\theta} \right) / h_\theta \right] = f_{i,j}, \quad (4.3)$$

onde $1 \leq i \leq M$, $1 \leq j \leq N$.

As condições de periodicidade na variável θ são dadas da seguinte maneira:

$$\begin{cases} u_{i,0} = u_{i,M} \\ u_{i,M+1} = u_{i,1} \end{cases},$$

onde $u_{i,0}$ e $u_{i,M+1}$ são substituídos em (4.3).

Quando consideramos condições de fronteira tipo Dirichlet, temos que $u_{N+1,j} = g_j$ e no caso de considerar à condição de Neumann temos $\sigma(1, \theta) \frac{\partial u}{\partial r} \big|_{r=1} = h(\theta)$.

Na condição de fronteira tipo Neumann em $i = M$, consideramos a própria equação de difusão. Assim temos:

$$-\frac{r_{M-1/2} \sigma_{M-1/2,j}}{h_r^2} u_{M-1,j} - \frac{\sigma_{M,j-1/2}}{r_M h_\theta^2} u_{M,j-1} + \left[\frac{r_{M-1/2} \sigma_{M-1/2,j}}{h_r^2} + \left(\frac{\sigma_{M,j+1/2} + \sigma_{M,j-1/2}}{r_M h_\theta^2} \right) \right] u_{M,j} - \frac{\sigma_{M,j+1/2}}{r_M h_\theta^2} u_{M,j+1} = r_M f_{M,j} + \frac{h_j}{h_r} \quad (4.4)$$

O sistema linear que resulta desta discretização é da forma: $Ax = b$, onde $A = [a_{ij}]$ é uma matriz de dimensão MN , no caso onde as condições de fronteira são de tipo Dirichlet temos que A é simétrica e definida positiva e no caso de considerar a condição de fronteira tipo Neumann temos que A é uma matriz simétrica e podemos mostrar [25] que é semi-definida positiva.

Resultados Numéricos

Dadas as seguintes notações:

$$\begin{cases} u_{ex} = \text{solução exata} \\ u_{ap} = \text{solução aproximada} \\ e_{\max} = \text{erro relativo na norma do maximo} \\ e_{L^2} = \text{erro relativo na norma } L^2 \end{cases}$$

Os erros usados para testar nossos algoritmos são:

erro relativo na norma do máximo:

$$e_{\max} = \|u_{ex} - u_{ap}\|_{\infty} / \|u_{ex}\|_{\infty} \quad (4.5)$$

e erro relativo na norma L^2 :

$$e_{L2} = \|u_{ex} - u_{ap}\|_{L^2} / \|u_{ex}\|_{\infty} \quad (4.6)$$

A taxa de convergência é calculada pela fórmula:

$$tx_c = \log_2 \left(\frac{e_{M/2}}{e_M} \right),$$

onde: e_M denota o erro na norma do máximo relativo ou $L2$ relativo, considerando M subdivisões do eixo radial. As subdivisões no intervalo angular é $N = 2M$.

Para obter a solução aproximada u_{ap} usando o método de diferenças finitas descrito acima, resolvemos o sistema linear $A(u_{ap}) = b$ usando métodos diretos e métodos iterativos.

Considerando métodos diretos usamos fatorização de Choleski e para testar os algoritmos usamos soluções conhecidas do problema (4.1) dadas em [36]:

Problema (1)

$$\begin{cases} u(r, \theta) = \exp(r(\cos(\theta) + \sin(\theta))), \\ \sigma(r, \theta) = r^2 \sin^2(\theta) + r \cos(\theta) + 1.1 \end{cases}$$

Figura 4.4 (a) Gráfico da solução exata, (b) Gráfico de $\sigma(r, \theta)$.

As figuras 4.4, (a) e (b) foram geradas considerando coordenadas cartesianas:

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases},$$

e mostram a distribuição das variáveis $u(r, \theta)$ e dos coeficientes contínuos $\sigma(r, \theta)$ respectivamente no disco unitário.

Resultados:

Tabela 4.1 Aproximação do Problema (1) com condição de fronteira tipo Dirichlet e usando fatorização de Choleski.

Fatorização de Choleski		
M	E_{L2}	$E_{\max}$
16	6.1936491×10^{-4}	0.0011683
32	1.5007779×10^{-4}	2.8271419×10^{-4}
64	$3.69344449 \times 10^{-5}$	6.9544314×10^{-5}
128	9.1611034×10^{-6}	1.7255221×10^{-5}

A taxa de convergência fica:

Tabela 4.2 Taxa de convergência do Problema (1), considerando o erro relativo na norma L2.

M	tx_c
16	-
32	2.04
64	2.02
128	2.01

Das tabelas 4.1 e 4.2 podemos observar a convergência quadrática o qual é uma consequência da discretização de segunda ordem usada.

Também podemos usar métodos iterativos para resolver o sistema linear. Dado que a matriz do sistema linear é simétrica usamos o método dos gradientes conjugados com pré-condicionamento Choleski incompleto (PGC) e o método PGC com *drop tolerance*. Os detalhes da implementação deste último método são dados em [47]. O sistema linear foi resolvido usando as rotinas correspondentes a estes métodos do **MATLAB versão 7**, obtendo-se os seguintes resultados:

Tabela 4.3 Aproximação do Problema (1) com condição de fronteira tipo Dirichlet e usando PGC com pré-condicionamento Choleski Incompleto.

PGC – Choleski Incompleto				
M	E_{L2}	$E_{\max}$	Iterações	Tempo (s)
16	6.1913716×10^{-4}	0.0011674	24	0.15625
32	1.4976962×10^{-4}	2.8114731×10^{-4}	44	0.5
64	3.8360657×10^{-5}	6.5745694×10^{-5}	79	3.421875
128	1.0499728×10^{-5}	1.9168523×10^{-5}	154	35.65625

Tabela 4.4 Aproximação do Problema (1) com condição de fronteira tipo Dirichlet usando PGC com pré-condicionamento Choleski Incompleto com *drop tolerance*.

PGC – Choleski Incompleto com <i>drop tolerance</i> = 10^{-3}				
M	E_{L2}	$E_{\max}$	Iterações	Tempo (s)
16	6.1953557×10^{-4}	0.0011685	6	0.15675
32	1.5032993×10^{-4}	2.8203244×10^{-4}	8	0.40625
64	3.7186787×10^{-5}	6.9194729×10^{-5}	14	2.28125
128	1.0314064×10^{-5}	2.3044259×10^{-5}	27	19.765625

Tabela 4.5 Taxa de convergência ao aplicar PGC com pré-condicionamento considerando o erro relativo na norma L2.

M	tx_c
16	-
32	2.04
64	2.01
128	1.9

O critério de parada usado nos métodos iterativos é:

$$\|b - Ax_{(i)}\| / \|b\| < 10^{-6} \quad (4.7)$$

Nas tabelas 4.3 e 4.4 se observa que quando usamos o método de Choleski incompleto com *drop tolerance* obtemos um ganho de tempo computacional na medida em que reduzimos o tamanho do passo e na tabela 4.5 podemos observar a ordem de convergência quadrática.

Problema (2)

$$\begin{cases} u(r, \theta) = \sin(r \cos(\theta)) \sin(r \sin(\theta)), \\ \sigma(r, \theta) = \exp(r(\cos(\theta) + \sin(\theta))) \end{cases}$$

Figura 4.5 (a) Gráfico da solução exata, (b) Gráfico de $\sigma(r, \theta)$.

Resultados:

Tabela 4.6 Aproximação do Problema (2) com condição de fronteira tipo Dirichlet e usando fatorização de Choleski.

Fatorização de Choleski		
M	E_{L2}	$E_{\max}$
16	0.0027051	0.0029793
32	6.4079641×10^{-4}	7.0663607×10^{-4}
64	1.5606043×10^{-4}	1.7211521×10^{-4}
128	3.8489361×10^{-5}	4.2482815×10^{-5}

Tabela 4.7 Taxa de convergência do Problema (2) respeito do erro relativo na norma L2.

M	tx_c
16	-
32	2.08
64	2.03
128	2.01

A tabela 4.7 mostra que a taxa de convergência é compatível com a discretização de segunda ordem usada.

Usando os métodos iterativos gradientes conjugados com pré-condicionamento Choleski incompleto (PGC) e o método PGC com *drop tolerance*, temos os seguintes resultados:

Tabela 4.8 Aproximação do Problema (2) com condição de fronteira tipo Dirichlet e usando PGC com pré-condicionamento Choleski Incompleto.

PGC – Choleski Incompleto				
M	E_{L2}	$E_{\max}$	Iterações	Tempo (s)
16	0.0027056	0.0029792	23	0.15625
32	6.4181419×10^{-4}	7.0698817×10^{-4}	40	0.5
64	1.5714453×10^{-4}	1.7274502×10^{-4}	77	3.5
128	3.8980834×10^{-5}	4.8992245×10^{-5}	151	35.6875

Tabela 4.9 Aproximação do Problema (2) com condição de fronteira tipo Dirichlet e usando PGC com pré-condicionamento Choleski Incompleto com *drop tolerance*.

PGC – Choleski Incompleto com $\text{drop tolerance} = 10^{-3}$				
M	E_{L2}	$E_{\max}$	Iterações	Tempo (s)
16	0.0027052	0.0029794	6	0.15625
32	6.4246953×10^{-4}	7.0870142×10^{-4}	8	0.40625
64	1.5567015×10^{-4}	1.7241548×10^{-4}	13	2.28125
128	3.3645628×10^{-5}	4.6711596×10^{-5}	25	19.921875

Tabela 4.10 Taxa de convergência ao aplicar PGC com pré-condicionamento.

M	tx_c
16	-
32	2.07
64	2.04
128	2.1

O critério de parada usado nos métodos iterativos do problema (2) é o dado em (4.7) onde novamente podemos observar das tabelas 4.8 e 4.9 o ganho de tempo computacional na medida em que reduzimos o tamanho do passo.

Considerando a condição de fronteira tipo Neumann, temos os seguintes resultados para os problemas (1) e (2).

Tabela 4.11 Aproximação do Problema (1) com condição de fronteira tipo Neumann e usando PGC com pré-condicionamento Choleski Incompleto com *drop tolerance*.

Problema (1)				
PGC – Choleski Incompleto com $\text{drop tolerance} = 10^{-3}$				
M	E_{L2}	$E_{\max}$	Iterações	Tempo (s)
16	0.0033189	0.0055591	6	0.171875
32	7.9769944×10^{-4}	0.0013271	10	0.40625
64	1.9574212×10^{-4}	3.2537913×10^{-4}	18	2.390625
128	4.8495202×10^{-5}	8.0481329×10^{-5}	35	20.234375

Tabela 4.12 Taxa de convergência do problema (1) com condição de fronteira tipo Neumann.

M	tx_c
16	-
32	2.05
64	2.02
128	2.01

Tabela 4.13 Aproximação do Problema (2) com condição de fronteira tipo Neumann usando PGC com pré-condicionamento Choleski Incompleto com *drop tolerance*.

Problema (2)				
PGC – Choleski Incompleto com $\text{drop tolerance} = 10^{-3}$				
M	E_{L2}	$E_{\max}$	Iterações	Tempo (s)
16	0.0069783	0.0079139	6	0.171875
32	0.0016918	0.0019159	10	0.4375
64	4.1698847×10^{-4}	4.7223551×10^{-4}	18	2.375
128	1.0347735×10^{-4}	1.1743769×10^{-4}	30	20.09375

Tabela 4.14 Taxa de convergência do problema (2) com condição de fronteira tipo Neumann.

M	tx_c
16	-
32	2.04
64	2.01
128	2.01

Na solução numérica da equação (4.1) com condição de fronteira tipo Neumann é preciso fazer uma normalização, neste caso foi feito uma normalização pela fronteira para termos uma solução única, pois as soluções deste problema diferem em uma constante. No apêndice A temos uma descrição de alguns tipos de normalização.

O critério de parada usado para gerar as tabelas 4.11 e 4.13 é dado em (4.7) e as taxas de convergência das tabelas 4.12 e 4.14 mostram serem compatíveis com a ordem de discretização usada.

4.2 O problema de difusão com coeficientes descontínuos

Na maioria de aplicações da TIE os coeficientes σ são descontínuos em Ω , sendo que existem interfaces $\Gamma \subset \Omega$ que separam as regiões onde os coeficientes têm valores característicos. Assim se precisa de métodos apropriados para lidar com as descontinuidades dos coeficientes.

Sabendo que na maioria de aplicações da técnica de TIE em dimensão 2 o domínio é um quadrado, um disco ou uma deformação destes volumes, resolvemos o problema de difusão pelo método dos volumes finitos modificados (MVFM) [14],[20], com o objetivo de termos uma técnica que proporcione resultados acurados.

O problema de difusão pode ser escrito da seguinte maneira:

$$-div(\sigma(x)grad(u(x))) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (4.9)$$

onde div é o operador divergência e $grad$ é o operador gradiente.

A equação (4.9) é sujeita as condições de fronteira tipo Dirichlet ou Neumann e $\sigma(x)$ é descontínua numa interface $\Gamma \subset \Omega$. As interfaces que são consideradas usando este método são paralelas aos eixos coordenados.

Devido à natureza dos processos, geralmente, as componentes do fluxo através da interface Γ definidas como $-\sigma \text{grad}(u) \cdot \nu$, onde ν é o vetor normal unitário são suaves apesar de que os coeficientes σ e as derivadas da solução são descontínuos.

Para colocar as idéias principais deste método começamos nossa discussão do método de MVFM com a solução do problema de difusão em coordenadas retangulares e em dimensão 1.

4.2.1 Discretização por volumes finitos modificados em problemas de dimensão 1

Problemas com condição de fronteira tipo Dirichlet:

Em dimensão 1 a equação de difusão é:

$$\begin{cases} W'(x) = f(x), & W(x) = -\sigma(x)u'(x), & 0 < x < 1. \\ u(0) = a_1, & u(1) = a_2 \end{cases} \quad (4.10)$$

onde: $\sigma(x)$ é um coeficiente de difusão conhecida, $W(x)$ é o fluxo e $f(x)$ é o termo fonte.

O problema vem acompanhado de condições de continuidade da solução u e do fluxo W numa interface $x = \xi \in \Omega$:

$$[u] = [W] = 0, \quad x = \xi,$$

onde: $[\varphi]$ denota a diferença dos limites à direita e a esquerda de φ no ponto de descontinuidade ξ .

Consideramos como domínio do problema o intervalo $\Omega = [0,1]$ e as principais condições para a existência de uma solução contínua neste problema são:

(*) Os coeficientes $\sigma(x)$ têm um numero finito de descontinuidades.

(*) O lado direito $f(x) \in C^2[0,1]$.

Malha

Usaremos a seguinte malha:

Figura 4.6 Subdivisão do intervalo $[0,1]$.

Os pontos nodais são: $x_0 = 0$, $x_1 = h/2$, $x_i = x_{i-1} + h$, $i = 2, \dots, N$, $x_{N+1} = 1$, onde $h = 1/N$.

Os volumes finitos são definidos como: $V_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$, onde $x_{i\pm 1/2} = x_i \pm \frac{h}{2}$.

Método dos volumes finitos modificados

Integrando a equação dada em (4.1) num volume finito, temos:

$$W_{i+1/2} - W_{i-1/2} = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.11)$$

Seja:

$$-u'(x) = \frac{W(x)}{\sigma(x)} \quad (4.12)$$

Integrando essa equação no intervalo (x_i, x_{i+1}) :

$$-(u_{i+1} - u_i) = -\int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{W(x)}{\sigma(x)} dx. \quad (4.13)$$

Considerando que $W(x)$ é duas vezes continuamente diferenciável na interface podemos expandir ao redor de $x_{i+1/2}$ na série de Taylor:

$$W(x) = W_{i+1/2} + (x - x_{i+1/2}) W'(x_{i+1/2}) + \frac{(x - x_{i+1/2})^2}{2} W''(\eta), \quad \eta \in (x_i, x_{i+1}) \quad (4.14)$$

Substituindo a primeira derivada do fluxo em $x_{i+1/2}$ pelo esquema *backward* de diferenças finitas chegamos a seguinte expressão:

$$-(u_{i+1} - u_i) = W_{i+1/2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{\sigma(x)} + \frac{W_{i+1/2} - W_{i-1/2}}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x - x_{i+1/2})}{\sigma(x)} dx + O(h^3) \quad (4.15)$$

Assim a equação fica:

$$-\kappa_{i+1/2}^H \frac{u_{i+1} - u_i}{h} = W_{i+1/2} + a_{i+1/2} (W_{i+1/2} - W_{i-1/2}) + \varphi_i, \quad (4.16)$$

onde $\varphi_i = O(h^2)$ e:

$$\kappa_{i+1/2}^H = \left(\frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{\sigma(x)} \right)^{-1}, \quad (4.17)$$

$$a_{i+1/2} = \kappa_{i+1/2}^H \frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x - x_{i+1/2}}{\sigma(x)} dx, \quad (4.18)$$

$\kappa_{i+1/2}^H$ é a média harmônica dos coeficientes $\sigma(x)$ sobre a célula (x_i, x_{i+1}) .

Por causa de usar os termos $a_{i+1/2}, a_{i-1/2}$ chamamos este método de media harmônica modificada (HIA) e observamos que em (4.16) no lado direito as ordens dos termos são: $O(1)$, $O(h)$ e $O(h^2)$ respectivamente sendo que se consideramos somente o primeiro termo do lado direito temos o esquema de Samarski [48], onde se prova que esta discretização é $O(h)$ -consistente nos pontos de interface e a convergência é de segunda ordem na norma H^1 . Chamaremos a este esquema de (HA).

Denotamos como $F_{i+1/2}$ e $F_{i-1/2}$ a aproximação dos fluxos $W_{i+1/2}$ e $W_{i-1/2}$ respectivamente, e denotamos como y_i as aproximações dos valores exatos da solução $u(x_i)$. Assim temos as seguintes relações:

$$\begin{cases} -\kappa_{i+1/2}^H \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = F_{i+1/2} + a_{i+1/2} (F_{i+1/2} - F_{i-1/2}) \\ -\kappa_{i-1/2}^H \frac{y_i - y_{i-1}}{h} = F_{i-1/2} + a_{i-1/2} (F_{i+1/2} - F_{i-1/2}). \end{cases} \quad (4.19)$$

Dessas relações chegamos a:

$$(1 + a_{i+1/2} - a_{i-1/2})(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}) = -\kappa_{i+1/2}^H \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + \kappa_{i-1/2}^H \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \quad (4.20)$$

onde os pontos x_0, x_{N+1} estão numa distancia $h/2$ do nó vizinho.

As equações em $i=1$ e $i=N$ são modificados convenientemente para assegurar a convergência desejada [20].

Assim o problema fica:

$$L_h y_i = \mu_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.21)$$

onde:

$$L_h y_i = \begin{cases} -\frac{4}{3} \frac{1}{h} \left(\kappa_{3/2}^H \frac{y_2 - y_1}{h} - \kappa_{1/2}^H \frac{2y_1}{h} \right), & i = 1 \\ -(1 + a_{i+1/2} - a_{i-1/2})^{-1} \frac{1}{h} \left(\kappa_{i+1/2}^H \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \kappa_{i-1/2}^H \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right), & i \neq 1, N \\ -\frac{4}{3} \frac{1}{h} \left(\kappa_{N+1/2}^H \frac{2y_N}{h} - \kappa_{N-1/2}^H \frac{y_N - y_{N-1}}{h} \right), & i = N \end{cases} \quad (4.22)$$

Para comparar os resultados que produz o método HIA, usaremos o esquema HA e o esquema da media aritmética (AA), onde temos que neste último esquema $a_{i+1/2} = a_{i-1/2} = 0$ e $\kappa_{i+1/2}^H = 0.5(\sigma_i + \sigma_{i+1})$.

O novo esquema HIA aproxima os fluxos nas laterais dos volumes finitos com exatidão de segunda ordem, independentemente da posição da descontinuidade dos coeficientes $\sigma(x)$ [14]. O preço que pagamos é a necessidade de avaliar $(a_{i+1/2} - a_{i-1/2})$ e $\kappa_{i+1/2}^H$ com um erro maior o igual que $O(h^2)$.

Discretização na interface

Suponha que $\sigma(x)$ é descontínua em $x = \xi$, $\xi = x_i + \nu h$ para algum i e $0 \leq \nu \leq 1$. Obviamente que quando $\nu = 0$ e $\nu = 1$ temos as interfaces alinhadas com os pontos nodais.

No caso $0 < \nu < 1$ suponha que a descontinuidade fica no intervalo (x_i, x_{i+1}) então $\kappa_{i+1/2}^H$ é calculada integrando em (x_i, ξ) e (ξ, x_{i+1}) .

Assim no caso em que $\sigma(x)$ é constante por partes temos as seguintes aproximações:

$$\kappa_{i+1/2}^H = \left(\frac{\nu}{\sigma_i} + \frac{(1-\nu)}{\sigma_{i+1}} \right)^{-1}, \quad (4.23)$$

$$a_{i+1/2} = \frac{1}{2} \frac{\nu(1-\nu)(\sigma_i - \sigma_{i+1})}{(1-\nu)\sigma_i + \nu\sigma_{i+1}}, \quad (4.24)$$

e conseqüentemente com a seguinte aproximação no fluxo:

$$F_{i+1/2} = \frac{-\kappa_{i+1/2}^H \frac{y_{i+1} - y_i}{h} (1 - a_{i-1/2}) - \kappa_{i-1/2}^H \frac{y_i - y_{i-1}}{h} (a_{i+1/2})}{(1 + a_{i+1/2})(1 - a_{i-1/2}) + a_{i+1/2} a_{i-1/2}} = W_{i+1/2} + O(h^2) \quad (4.25)$$

atingimos convergência de segunda ordem.

Resultados Numéricos

Consideramos a descontinuidade em $\xi = 1/2$.

Quando utilizamos os métodos AA (média Aritmética), HA (média harmônica) a matriz do sistema linear é simétrica definida positiva e o método que usamos para resolver este sistema linear é o método PGC. Porém, quando utilizamos o método HIA (média harmônica modificada) a matriz do sistema linear é não simétrica e para resolver este sistema aplicamos o método dos Bi-gradientes conjugados com pré – condicionamento LU incompleto.

Para calcular o erro consideramos as normas definidas em (4.5) e (4.6).

O problema usado para testar os algoritmos é:

Problema (3)

$$\begin{cases} u(x) = (1/\sigma) \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) (x - 1/2)(1 + x^2), \\ \sigma(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 0.5 \\ 10^{-4}, & 0.5 < x < 1 \end{cases} \end{cases}$$

Figura 4.7 Gráfico da solução exata do Problema 3.

Os resultados são comparados com a solução exata nas normas do erro máximo relativo e na norma L^2 relativa, obtendo-se:

Tabela 4.15 Aproximação aplicando os métodos AA, HA e HIA do Problema (3) usando o erro relativo na norma do máximo.

<i>Erro relativo na norma do máximo</i>	$\sigma = \{1, 10^{-4}\}$		
M=N	AA	HA	HIA
12	3.14×10^{-2}	4.31×10^{-3}	4.68×10^{-4}
22	1.53×10^{-2}	1.21×10^{-3}	1.82×10^{-4}
42	7.55×10^{-3}	3.19×10^{-4}	5.59×10^{-5}
82	3.74×10^{-3}	8.24×10^{-5}	7.64×10^{-6}
162	1.86×10^{-3}	2.09×10^{-5}	2.84×10^{-6}

Figura 4.8 Gráfico do erro relativo na norma do máximo no método HIA & subdivisões no eixo radial no Problema (3).

Tabela 4.16 Aproximação aplicando os métodos AA, HA e HIA do Problema (3) usando o erro relativo na norma L^2 .

<i>Erro relativo na norma L^2</i>	$\sigma = \{1, 10^{-4}\}$		
M=N	AA	HA	HIA
12	1.47×10^{-2}	2.79×10^{-3}	2.31×10^{-4}
22	6.79×10^{-3}	7.79×10^{-4}	8.74×10^{-5}
42	3.23×10^{-3}	2.07×10^{-4}	2.76×10^{-5}
82	1.57×10^{-3}	5.32×10^{-5}	7.64×10^{-6}
162	7.71×10^{-4}	1.35×10^{-5}	1.42×10^{-6}

Figura 4.9 Gráfico do erro relativo na norma L2 no método HIA & subdivisões no eixo radial no Problema (3).

Destes resultados podemos observar que nas tabelas 4.15 e 4.16 que as ordens de convergência são: para o método AA $O(h)$, para o método HA $O(h^2)$. Também podemos observar dos gráficos 4.8 e 4.9 que o método HIA tem ordem de convergência $O(h^2)$, porém os resultados são mais acurados que o método HA, estes resultados eram os esperados segundo as ordens de discretização usadas.

4.2.2 Discretização por volumes finitos modificados em problemas de dimensão 2

Consideramos um domínio bi-dimensional a equação de difusão (4.1) munida das condições de fronteira tipo Dirichlet ou Neumann tem a forma:

$$\begin{cases} -\left[(\sigma u_x)_x + (\sigma u_y)_y\right] = f(x, y), \text{ em } \Omega \\ u(x, y) = g(x, y), \text{ em } \partial\Omega \\ \text{ou} \\ \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = h(x, y), \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.26)$$

onde consideramos o domínio $\Omega = [0,1] \times [0,1]$.

Considerando as interfaces sendo paralelas às faces dos volumes finitos. O desenvolvimento em dimensão 2 é o produto tensorial de 2 problemas de dimensão 1 (um para cada direção).

As componentes do fluxo ficam:

$$W(x, y) = \begin{bmatrix} -\sigma u_x \\ -\sigma u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

O gráfico de um volume finito é dado na figura 4.10.

Figura 4.10 Volume finito em coordenadas cartesianas.

Integrando a equação em V_p :

$$\int_{V_p} \nabla \cdot W dA = h_x h_y \varphi_p, \quad \varphi_p = \frac{1}{h_x h_y} \int_{V_p} f dA, \quad (4.28)$$

pelo teorema da divergência:

$$\begin{aligned} \int_{V_p} \nabla \cdot W dA &= \int_{\partial V_p} W \cdot n dl \\ \int_{\partial V_p} W \cdot n dl &= \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} [W_2(x, y_{j+1/2}) - W_2(x, y_{j-1/2})] dx + \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} [W_1(x_{i+1/2}, y) - W_1(x_{i-1/2}, y)] dy \end{aligned} \quad (4.29)$$

Aplicando a regra do ponto médio temos:

$$h_y (W_e - W_w) + h_x (W_n - W_s) = h_x h_y f_{ij}. \quad (4.30)$$

Assim, a discretização fica:

Na direção x :

$$\begin{cases} h_y \left[\frac{-4}{3} \left(K_{3/2,j}^H \frac{y_{2,j} - y_{1,j}}{h_x} - K_{1/2,j}^H \frac{2y_{1,j}}{h_x} \right) \right], i=1, j=1, \dots, N \\ h_y \left[-\left(1 + a_{i+1/2,j} - a_{i-1/2,j}\right)^{-1} \left(K_{i+1/2,j}^H \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{h_x} - K_{i-1/2,j}^H \frac{y_{i,j} - y_{i-1,j}}{h_x} \right) \right], i=2, \dots, M-1, j=1, \dots, N \\ h_y \left[\frac{-4}{3} \left(K_{N+1/2,j}^H \frac{2(y_{N+1,j} - y_{N,j})}{h_x} - K_{N-1/2,j}^H \frac{(y_{N,j} - y_{N-1,j})}{h_x} \right) \right], i=M, j=1, \dots, N \end{cases}, \quad (4.31)$$

e na direção y :

$$\begin{cases} h_x \left[\frac{-4}{3} \left(K_{i,3/2}^H \frac{y_{i,2} - y_{i,1}}{h_y} - K_{i,1/2}^H \frac{2(y_{i,1} - y_{i,0})}{h_y} \right) \right], j=1, i=1, \dots, M \\ h_x \left[-\left(1 + a_{i,j+1/2} - a_{i,j-1/2}\right)^{-1} \left(K_{i,j+1/2}^H \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{h_y} - K_{i,j-1/2}^H \frac{y_{i,j} - y_{i,j-1}}{h_y} \right) \right], j=2, \dots, N-1, i=1, \dots, M \\ h_x \left[\frac{-4}{3} \left(K_{i,M+1/2}^H \frac{2(y_{i,M+1} - y_{i,M})}{h_y} - K_{i,M-1/2}^H \frac{(y_{i,M} - y_{i,M-1})}{h_y} \right) \right], j=N, i=1, \dots, M \end{cases} \quad (4.32)$$

Na figura 4.11 temos o domínio $[0,1] \times [0,1]$ e a interface centrada nos pontos médios do domínio.

Figura 4.11 O Domínio $[0,1] \times [0,1]$ e a localização da interface.

Resultados Numéricos:**Problema (4)**

$$\begin{cases} u(x, y) = \frac{1}{\sigma} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) (x - \xi_1)(y - \xi_2)(1 + x^2 + y^2) \\ \sigma(x, y) = \begin{cases} \sigma_1 = 10^{-2}; & 0 \leq x < \xi_1, 0 \leq y < \xi_2 \\ \sigma_2 = 1; & \xi_1 < x \leq 1, 0 \leq y < \xi_2 \\ \sigma_3 = 10^{-4}; & 0 \leq x < \xi_1, \xi_2 < y \leq 1 \\ \sigma_4 = 10^{+5}; & \xi_1 < x \leq 1, \xi_2 < y \leq 1 \end{cases} \end{cases},$$

onde $(\xi_1, \xi_2) = (0.5, 0.5)$.

Figura 4.12 Gráfico da solução exata do Problema (4).

Para resolver o sistema linear usamos o método de fatorização de Choleski para ambos os métodos (HA e HIA) e o erro é dado usando a norma do máximo como descrito em (4.5).

Tabela 4.17 Aproximação aplicando os métodos HA e HIA do Problema (4) usando o erro relativo na norma do máximo.

GRID	HA	HIA
N=M	Erro relativo na norma do máximo	Erro relativo na norma do máximo
12	0.0157335	2.562509×10^{-4}
22	0.005368	6.656319×10^{-5}
42	0.0017031	1.825298×10^{-5}
82	4.894295×10^{-4}	4.819306×10^{-6}
162	1.335411×10^{-4}	1.242216×10^{-6}

Podemos observar na tabela 4.17 que com o método HIA obtemos resultados mais acurados e mantemos a ordem de convergência quadrática, porém gastamos maior tempo computacional.

Também resolvemos o sistema linear do método HA usando o método iterativo dos gradientes conjugados com pré-condicionador Choleski Incompleto e o critério de parada e da tolerância relativa, dado em (4.7) $tol = 10^{-6}$, e no esquema HIA usamos o método dos Bi-gradientes conjugados com pré-condicionador LU Incompleto e tolerância relativa $tol = 10^{-6}$. Quando usamos os métodos PGC e Bi-PGC com a fatorização incompleta no modo usual (sem *drop-tolerance*) temos os seguintes resultados:

Tabela 4.18 Aproximação aplicando os métodos HA e HIA do Problema (4) usando o erro relativo na norma do máximo.

GRID N=M	HA			HIA		
	Erro relativo na norma do máximo	Iter	Tempo	Erro relativo na norma do máximo	Iter	Tempo
12	0.015838	13	0.140625	2.562112×10^{-4}	14	0.234375
22	0.005367	23	0.203125	6.656383×10^{-5}	22	0.3125
42	0.001696	39	0.484375	1.825301×10^{-5}	42	0.859375
82	4.877827×10^{-4}	78	2.84375	4.818712×10^{-6}	76	4.921875
162	1.332667×10^{-4}	142	24.28125	1.2416931×10^{-6}	147	45.828125

Quando usamos os métodos PCG e Bi-PCG com a fatorização incompleta com *drop-tolerance* = 10^{-3} temos:

Tabela 4.19 Aproximação aplicando os métodos HA e HIA do Problema (4) usando o erro relativo na norma do máximo com *drop tolerance*.

GRID N=M	HA			HIA		
	Erro relativo na norma do máximo relativo	Iter	Tempo	Erro relativo na norma do máximo relativo	Iter	Tempo
12	0.015838	4	0.125	2.562531×10^{-4}	3	0.21875
22	0.005366	5	0.171875	6.649025×10^{-5}	4	0.28125
42	0.001696	8	0.34375	1.825383×10^{-5}	7	0.578125
82	4.877825×10^{-4}	13	1.65625	4.819987×10^{-6}	12	2.46875
162	1.332631×10^{-4}	16	10.953125	1.832487×10^{-6}	15	14.984375

Novamente, podemos ver das tabelas (4.18) e (4.19) que o método HIA proporciona melhores resultados quando comparado com o método HA, no entanto este método demanda maior tempo computacional.

O problema (4) também é resolvido numericamente usando a condição de fronteira tipo Neumann a qual é obtida da solução analítica. Os seguintes resultados são relativos ao método HIA. Para resolver o sistema linear usamos o método Bi-PGC com a fatorização incompleta LU com $drop\text{-}tolerance = 10^{-3}$ onde obtemos:

Tabela 4.20 Aproximação aplicando o método HIA do Problema 4 usando o erro relativo na norma do máximo e condição de fronteira tipo Neumann com *drop tolerance*.

GRID N=M	HIA		
	Erro relativo na norma do máximo	Iter	Tempo
12	8.821918×10^{-4}	2	0.1875
22	3.460102×10^{-4}	2	0.265625
42	9.544108×10^{-5}	2	0.53125
82	2.505263×10^{-5}	3	2.328125
162	5.751978×10^{-6}	5	15.390625

O critério de parada foi a tolerância relativa $tol = 10^{-6}$ e como podemos observar na tabela 4.20 os erros relativos na norma do máximo e o tempo computacional foram parecidos daqueles mostrados na tabela 4.19 onde foi considerado a condição de fronteira tipo Dirichlet.

4.2.3 Solução numérica da equação de difusão com coeficientes descontínuos em coordenadas polares

Consideramos novamente a equação de difusão (4.1) dada em coordenadas polares junto às condições de fronteira tipo Dirichlet ou Neumann (4.2) e o domínio Ω como sendo o disco unitário e os coeficientes $\sigma(r, \theta)$ descontínuos e constantes por partes.

A malha a ser usada é a mesma das figuras 4.1, 4.2 e 4.3.

Interfaces

Analogamente ao caso em que as coordenadas são retangulares consideramos às interfaces sendo ortogonais aos eixos coordenados.

Inicialmente vamos alinhar as curvas das interfaces com os pontos médios entre dois pontos da malha (laterais dos volumes finitos). Porém, de uma maneira geral, as interfaces podem estar localizadas em qualquer lugar entre dois nós da malha.

Denotaremos um volume finito genérico da forma: $V_p = [i-1/2, i+1/2] \times [j-1/2, j+1/2]$.

Na Figura 4.13 é mostrado um volume finito genérico.

Figura 4.13 Um volume finito em coordenadas polares.

Interfaces no eixo radial:

Consideramos a interface ξ em algum lugar da célula $[r_i, r_{i+1}]$ do eixo radial. Assim denotamos como $\xi = r_i + \nu h_r$, onde $\nu \in [0, 1]$.

Interfaces no eixo angular:

Da mesma maneira, denotamos as interfaces no eixo angular localizados no intervalo $[\theta_j, \theta_{j+1}]$ como $\eta = \theta_j + \nu h_\theta$, onde $\nu \in [0, 1]$.

Assim temos os seguintes domínios: físicos e computacional.

Figura 4.14 (a) Domínio físico, (b) Domínio computacional.

Discretização da equação de difusão

O fluxo do problema (4.1) tem a forma:

$$W(r, \theta) = -\sigma(r, \theta) \nabla u(r, \theta) = \begin{bmatrix} -\sigma u_r \\ -\frac{\sigma}{r} u_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Nesse termos a equação de difusão fica:

$$\nabla \cdot W(r, \theta) = f(r, \theta) \quad (4.37)$$

Integrando a equação em V_p temos:

$$\int_{V_p} \nabla \cdot W dA = r h_r h_\theta \varphi_p, \quad \varphi_p = \frac{1}{r h_r h_\theta} \int_{V_p} f dA, \quad (4.38)$$

e pelo teorema da divergência:

$$\int_{V_p} \nabla \cdot W dA = \int_{\partial V_p} W \cdot n dl, \quad (4.39)$$

então:

$$\left[- \int_{\theta_{j-1/2}}^{\theta_{j+1/2}} (r_{i+1/2}(\sigma u_r)(r_{i+1/2}, \theta) - r_{i-1/2}(\sigma u_r)(r_{i-1/2}, \theta)) d\theta \right] + \left[- \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \left(\left(\frac{1}{r} \sigma u_\theta \right)(r, \theta_{j+1/2}) - \left(\frac{1}{r} \sigma u_\theta \right)(r, \theta_{j-1/2}) \right) dr \right] = h_r h_\theta r_i \varphi_p \quad (4.40)$$

e agora, aproximando as integrais pela regra do ponto médio, temos:

$$- \left\{ h_\theta \left[r_{i+1/2}(\sigma u_r)_{i+1/2,j} - r_{i-1/2}(\sigma u_r)_{i-1/2,j} \right] + h_r \left[\left(\frac{\sigma}{r} u_\theta \right)_{i,j+1/2} - \left(\frac{\sigma}{r} u_\theta \right)_{i,j-1/2} \right] \right\} = h_r h_\theta r_i f_{i,j} \quad (4.41)$$

ou

$$h_\theta \left[r_{i+1/2}(W_1)_{i+1/2,j} - r_{i-1/2}(W_1)_{i-1/2,j} \right] + h_r \left[(W_2)_{i,j+1/2} - (W_2)_{i,j-1/2} \right] = h_r h_\theta r_i f_{i,j} \quad (4.42)$$

Esquemas da media harmônica e da media harmônica modificada em coordenadas polares

Das aproximações das componentes do fluxo W_1, W_2 pela serie de Taylor são obtidos os métodos dos volumes finitos que usa a media harmônica HA, e o método que usa uma media harmônica modificada HIA.

Esquema HA

Discretização na direção radial:

Sabendo que $W_1 = -\sigma u_r \rightarrow -u_r = \frac{W_1}{\sigma}$ e aproximando $W_1(r, \theta)$ pela série de Taylor truncada antes dos termos de primeira ordem temos: $W_1(r, \theta) \approx (W_1)_{i+1/2,j}$ então:

$$-\int_{\tilde{r}_i}^{\tilde{r}_{i+1}} u_r dr = \int_{\tilde{r}_i}^{\tilde{r}_{i+1}} \frac{W_1(r, \theta)}{\sigma(r, \theta)} dr = (W_1)_{i+1/2,j} \int_{\tilde{r}_i}^{\tilde{r}_{i+1}} \frac{dr}{\sigma(r, \theta)} + O(h_r^2) \quad (4.43)$$

e

$$-r_{i+1/2} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_r} = r_{i+1/2} (W_1)_{i+1/2,j} \frac{1}{h_r} \int_{\tilde{r}_i}^{\tilde{r}_{i+1}} \frac{dr}{\sigma(r, \theta)} + O(h_r). \quad (4.44)$$

Assim:

$$-r_{i+1/2} K_{i+1/2,j}^H \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_r} = r_{i+1/2} (W_1)_{i+1/2,j}, \quad (4.45)$$

onde:

$$K_{i+1/2,j}^H = \left(\frac{1}{h_r} \int_{\tilde{r}_i}^{\tilde{r}_{i+1}} \frac{dr}{\sigma(r, \theta_j)} \right)^{-1}. \quad (4.46)$$

Da mesma maneira, temos que:

$$-r_{i-1/2} K_{i-1/2,j}^H \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_r} = r_{i-1/2} (W_1)_{i-1/2,j}, \quad (4.47)$$

onde:

$$K_{i-1/2,j}^H = \left(\frac{1}{h_r} \int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{dr}{\sigma(r, \theta_j)} \right)^{-1}. \quad (4.48)$$

Portanto:

$$\begin{cases} -r_{i+1/2} K_{i+1/2,j}^H \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_r} = r_{i+1/2} (W_1)_{i+1/2,j} \\ -r_{i-1/2} K_{i-1/2,j}^H \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_r} = r_{i-1/2} (W_1)_{i-1/2,j} \end{cases}. \quad (4.49)$$

Em consequência a discretização da equação (4.1) na direção radial pelo método HA fica:

$$-\left[r_{i+1/2} K_{i+1/2,j}^H \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_r} - r_{i-1/2} K_{i-1/2,j}^H \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_r} \right] = r_{i+1/2} (W_1)_{i+1/2,j} - r_{i-1/2} (W_1)_{i-1/2,j} \quad (4.50)$$

Discretização na direção angular:

Sabendo que $W_2 = -\frac{\sigma}{r} u_\theta \rightarrow -\frac{u_\theta}{r} = \frac{W_2}{\sigma}$ e aproximando $W_2(r, \theta)$ pela série de Taylor truncada antes dos termos de primeira ordem:

$$W_1(r, \theta) = (W_1)_{i+1/2,j}, \quad (4.51)$$

então:

$$-\int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{u_\theta}{r} d\theta = \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{W_2(r, \theta)}{\sigma(r, \theta)} d\theta = (W_2)_{ij+1/2} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{d\theta}{\sigma(r, \theta)} \quad (4.52)$$

e

$$-\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{r_i h_\theta} = \theta_{j+1/2} (W_2)_{i,j+1/2} \frac{1}{h_\theta} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{d\theta}{\sigma(r, \theta)}. \quad (4.53)$$

Assim:

$$-K_{i,j+1/2}^H \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{r_i h_\theta} = (W_2)_{i,j+1/2}, \quad (4.54)$$

onde:

$$K_{i,j+1/2}^H = \left(\frac{1}{h_\theta} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{d\theta}{\sigma(r_i, \theta)} \right)^{-1}. \quad (4.55)$$

Da mesma maneira:

$$-K_{i,j-1/2}^H \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{r_i h_\theta} = (W_2)_{i,j-1/2}, \quad (4.56)$$

onde:

$$K_{i,j-1/2}^H = \left(\frac{1}{h_\theta} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \frac{d\theta}{\sigma(r_i, \theta)} \right)^{-1}. \quad (4.57)$$

Portanto:

$$\begin{cases} -K_{i,j-1/2}^H \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{r_i h_\theta} = (W_2)_{i,j+1/2} \\ -K_{i,j-1/2}^H \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{r_i h_\theta} = (W_2)_{i,j-1/2} \end{cases}. \quad (4.58)$$

Assim, temos que a discretização da equação (4.1) na direção angular pelo método HA fica:

$$-\left[K_{i,j+1/2}^H \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{r_i h_\theta} - K_{i,j-1/2}^H \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{r_i h_\theta} \right] = (W_2)_{i,j+1/2} - (W_2)_{i,j-1/2}. \quad (4.59)$$

Também é possível aplicar a metodologia dos esquemas HA e HIA em problemas onde precisamos ter à aproximação no pólo ($r=0$). Para isso, precisamos considerar o pólo como sendo parte da malha e fazer algumas considerações especiais, como descritos a seguir:

Dividimos $V_1 = [0, 1+1/2] \times [j-1/2, j+1/2]$ como mostra a figura 4.15, em duas regiões de integração, de $r=0$ a $r = \frac{1}{4}h_r$ e de $r = \frac{1}{4}h_r$ a $r = h_r$.

Na direção radial $r = \frac{1}{4}h_r$ a $r = h_r$ consideramos o intervalo radial centrado em $r_a = \frac{5h_r}{8}$. Assim os limites de integração são:

$$\begin{cases} r_a + \frac{3h_r}{8} \\ r_a - \frac{3h_r}{8} \end{cases}.$$

Figura 4.15 Malha perto do pólo [68].

De:

$$\int_{V_1=V_0+V_a} \nabla \cdot \bar{W} dA = rh_r h_\theta \varphi, \quad \varphi = \frac{1}{rh_r h_\theta} \int_V f dA, \quad (4.60)$$

chegamos a:

$$\left\{ h_\theta \left[r_{a+3h_r/8} (W_1)_{a+3h_r/8j} - r_{a-3h_r/8} (W_1)_{a-3h_r/8j} \right] + \frac{3h_r}{8} \left[(W_2)_{aj+1/2} - (W_2)_{aj-1/2} \right] \right\} = -r_1 f_{1j}. \quad (4.61)$$

Assim:

$$h_\theta \left[h_r K_{1+1/2,j}^H \frac{u_{2,j} - u_{1,j}}{h_r} - \frac{h_r}{4} K_{1-1/2,j}^H \frac{u_{1,j} - u_{0,j}}{h_r/2} \right] + \frac{3h_r}{4} \left[K_{1,j+1/2}^H \frac{u_{a,j+1} - u_{a,j}}{r_a h_\theta} - K_{1,j-1/2}^H \frac{u_{a,j} - u_{a,j-1}}{r_a h_\theta} \right] = -r_1 f_{1,j}, \quad (4.62)$$

e fazendo interpolação linear:

$$u_{a,j} = \frac{1}{8}(7u_{1,j} + u_{2,j}), u_{a,j+1} = \frac{1}{8}(7u_{1,j+1} + u_{2,j+1}) u_{a,j-1} = \frac{1}{8}(7u_{1,j-1} + u_{2,j-1}). \quad (4.63)$$

Assim: Para $i = 1, 1 \leq j \leq N$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{21}{20} \frac{K_{1,j-1/2}^H}{h_\theta} \right) u_{1,j-1} - \left[h_\theta K_{3/2,j}^H + \frac{K_{1/2,j}^H}{2} h_\theta + \frac{21}{20} \frac{K_{1,j+1/2}^H}{h_\theta} + \frac{21}{20} \frac{K_{1,j-1/2}^H}{h_\theta} \right] u_{1,j} + \left(\frac{21}{20} \frac{K_{1,j+1/2}^H}{h_\theta} \right) u_{1,j+1} + \\ & \left[h_\theta K_{3/2,j}^H - \frac{3}{20} \frac{K_{1,j+1/2}^H}{h_\theta} - \frac{3}{20} \frac{K_{1,j-1/2}^H}{h_\theta} \right] u_{2,j} + \left(\frac{3}{20} \frac{K_{1,j-1/2}^H}{h_\theta} \right) u_{2,j-1} + \left(\frac{3}{20} \frac{K_{1,j+1/2}^H}{h_\theta} \right) u_{2,j+1} + \\ & \frac{K_{1/2,j}^H}{2} h_\theta u_{o,j} = -r_1 f_{1,j} \end{aligned} \quad (4.64)$$

O sistema linear

Na direção radial:

Para $i = 1, 1 \leq j \leq N$:

$$r_{1+1/2} (W_1)_{1+1/2,j} = -r_{1+1/2} K_{1+1/2,j}^H \frac{u_{2,j} - u_{1,j}}{h_r} \quad (4.65)$$

Para $2 \leq i \leq M-1, 1 \leq j \leq N$:

$$r_{i+1/2} (W_1)_{i+1/2,j} - r_{i-1/2} (W_1)_{i-1/2,j} = - \left[r_{i+1/2} K_{i+1/2,j}^H \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_r} - r_{i-1/2} K_{i-1/2,j}^H \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_r} \right] \quad (4.66)$$

Para $i = M, 1 \leq j \leq N$:

$$r_{M+1/2} (w_1)_{M+1/2,j} - r_{M-1/2} (w_1)_{M-1/2,j} = - \left[r_{M+1/2} K_{M+1/2,j}^H \frac{g_j - u_{M,j}}{h_r} - r_{M-1/2} K_{M-1/2,j}^H \frac{u_{M,j} - u_{M-1,j}}{h_r} \right]. \quad (4.67)$$

Considerando os coeficientes $\sigma(r, \theta)$ contínuos por partes temos:

$$\begin{cases} K_{i+1/2,j}^H = 2 \frac{\sigma_{i+1,j} \sigma_{i,j}}{\sigma_{i+1,j} + \sigma_{i,j}}, i = 1, M \\ K_{i-1/2,j}^H = 2 \frac{\sigma_{i-1,j} \sigma_{i,j}}{\sigma_{i-1,j} + \sigma_{i,j}}, i = 2, M + 1 \end{cases} \quad (4.68)$$

Aproximação nas interfaces

Em geral se a interface se encontra no intervalo $[r_i, r_{i+1}]$ e aproximando os valores de $K_{i+1/2,j}^H$ podem ser aproximados pelo método do ponto médio.

Seja:

$$\xi = r_i + \nu h_r, \quad 0 \leq \nu \leq 1, \quad (4.69)$$

uma interface no eixo radial e:

$$K_{i+1/2,j}^H = \left(\frac{1}{h_r} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{dr}{\sigma(r, \theta_j)} \right)^{-1}, \quad (4.70)$$

onde temos que considerar a interface nessa integral. Em particular se a interface se encontra no ponto médio do intervalo $[r_i, r_{i+1}]$, aproximamos os valores de $K_{i+1/2,j}^H$ pelo método do ponto médio, assim:

$$\frac{1}{h_r} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{dr}{\sigma(r, \theta)} = \frac{1}{h_r} \left[\frac{1}{\sigma_{i,j}} \left(\int_{r_i}^{r_{i+1/2}} dr \right) + \frac{1}{\sigma_{i+1,j}} \left(\int_{r_{i+1/2}}^{r_{i+1}} dr \right) \right],$$

então:

$$K_{i+1/2,j}^H = 2 \left(\frac{\sigma_{i,j} \sigma_{i+1,j}}{\sigma_{i,j} + \sigma_{i+1,j}} \right). \quad (4.71)$$

Na direção angular:

Para $1 \leq j \leq N, \quad 1 \leq i \leq M$

$$-\left[K_{i,j+1/2}^H \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{r_i h_\theta} - K_{i,j-1/2}^H \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{r_i h_\theta} \right] = (W_2)_{i,j+1/2} - (W_2)_{i,j-1/2}. \quad (4.72)$$

Nos intervalos $[\theta_j, \theta_{j+1}]$ considerando os coeficientes $\sigma(r, \theta)$ contínuos por partes, os valores de $K_{i,j+1/2}^H$ são:

$$\begin{cases} K_{i,j+1/2}^H = 2 \frac{\sigma_{i,j} \sigma_{i,j+1}}{\sigma_{i,j} + \sigma_{i,j+1}}, & j = 1, N \\ K_{i,j-1/2}^H = 2 \frac{\sigma_{i,j} \sigma_{i,j-1}}{\sigma_{i,j} + \sigma_{i,j-1}}, & j = 2, N \end{cases} \quad (4.73)$$

Aproximação nas interfaces:

Nos intervalos $[\theta_j, \theta_{j+1}]$, os valores de $K_{i+1/2,j}^H$ são aproximados como:

$$K_{i,j+1/2}^H = 2 \left(\frac{\sigma_{i,j} \sigma_{i,j+1}}{\sigma_{i,j} + \sigma_{i,j+1}} \right). \quad (4.74)$$

Montagem da Matriz AG do sistema linear $(AG)*U = b$

Substituindo (4.50) e (4.59) em (4.42) e considerando $A(i, j), B(i, j), C(i, j)$ como sendo os coeficientes das variáveis u_{ij} em (4.42), montamos o sistema linear $(AG)*U = b$ correspondente ao esquema HA.

Os primeiros blocos da matriz AG no caso em que *não se considera o pólo*:

Para $i = 1, \quad j = 1, N$

$$\begin{cases} C(1,1)u_{1,1} - B(1,1)u_{1,2} - B(1)u_{1,N} - A(1,1)u_{2,1} = r_1 f_{1,1} \\ -B(i, j-1)u_{i,j-1} + C(1, j)u_{1,j} - B(1, j)u_{1,j+1} - A(1, j)u_{2,j} = r_1 f_{1,j}, \quad j = 2, N-1 \\ -B(1, N)u_{1,1} - B(1, N-1)u_{1,N-1} + C(1, N)u_{1,N} - A(1, N)u_{2,N} = r_1 f_{1,N} \end{cases}$$

Assim temos os primeiros blocos de AG

$$\begin{bmatrix} C(1,1) & -B(1,1) & 0 & \cdots & 0 & -B(1) & -A(1,1) & 0 & \cdots & 0 \\ -B(1,1) & C(1,2) & -B(1,2) & & & 0 & 0 & -A(1,2) & & \\ 0 & -B(1,2) & C(1,3) & -B(1,3) & & \vdots & \vdots & & -A(1,3) & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 & & & & \ddots \\ 0 & & & & -B(1, N-2) & C(1, N-1) & -B(1, N-1) & & -A(1, N-1) & 0 \\ -B(N) & 0 & \cdots & & 0 & -B(1, N-1) & C(1, N) & 0 & \cdots & 0 & -A(1, N) \end{bmatrix},$$

Para $i = 2, M-1 \quad j = 1, N$

$$\begin{cases} -A(i-1,1)u_{i-1,1} + C(i,1)u_{i,1} - B(i,1)u_{i,2} - B(i)u_{i,N} - A(i,1)u_{i+1,1} = r_i f_{i,1} \\ -A(i-1,j)u_{i-1,j} - B(i,j-1)u_{i,j-1} + C(i,j)u_{i,j} - B(i,j)u_{i,j+1} - A(i,j)u_{i+1,j} = r_i f_{i,j}, j = 2, N-1 \\ -A(i-1,N)u_{i-1,N} - B(i)u_{i,1} - B(i,N-1)u_{i,N-1} + C(i,N)u_{i,N} - A(i,N)u_{i+1,N} = r_i f_{i,N} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -A(i-1,1) & 0 & \cdots & 0 & C(i,1) & -B(i,1) & 0 & \cdots & 0 & -B(i) & -A(i,1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -A(i-1,2) & & & -B(i,1) & C(i,2) & -B(i,2) & & 0 & 0 & -A(i,2) & & \\ \vdots & & -A(i-1,3) & & \vdots & 0 & -B(i,2) & C(i,3) & -B(i,3) & & \vdots & & -A(i,3) & \vdots \\ & & & \ddots & & \vdots & & & \ddots & & 0 & & \ddots & \\ & & & & -A(i-1,N-1) & 0 & 0 & & -B(i,N-2) & C(i,N-1) & -B(i,N-1) & & -A(i,N-1) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -A(i-1,N) & -B(i) & 0 & \cdots & 0 & -B(i,N-1) & C(i,N) & 0 & \cdots & 0 & -A(i,N) \end{bmatrix}$$

Para $i = M \quad j = 1, N$

$$\begin{cases} -A(M-1,1)u_{M-1,1} + C(M,1)u_{M,1} - B(M,1)u_{M,2} - B(M)u_{M,N} = r_M f_{M,1} + A(M,1)g(1) \\ -A(M-1,j)u_{M-1,j} - B(M,j-1)u_{M,j-1} + C(M,j)u_{M,j} - B(M,j)u_{M,j+1} = r_M f_{M,j} + A(M,j)g(j), j = 2, N-1 \\ -A(M-1,N)u_{M-1,N} - B(M)u_{M,1} - B(M,N-1)u_{M,N-1} + C(M,N)u_{M,N} = r_M f_{M,N} + A(M,N)g(N) \end{cases}$$

assim os últimos blocos de AG são:

$$\begin{bmatrix} -A(M-1,1) & 0 & \cdots & 0 & C(M,1) & -B(M,1) & 0 & \cdots & 0 & -B(M) \\ 0 & -A(M-1,2) & & & -B(M,1) & C(M,2) & -B(M,2) & & 0 \\ \vdots & & -A(M-1,3) & & \vdots & 0 & -B(M,2) & C(M,3) & -B(M,3) & \vdots \\ & & & \ddots & & \vdots & & & \ddots & 0 \\ & & & & -A(M-1,N-1) & 0 & 0 & & -B(M,N-2) & C(M,N-1) & -B(M,N-1) \\ 0 & \cdots & 0 & -A(M-1,N) & -B(M) & 0 & \cdots & 0 & -B(M,N-1) & C(M,N) \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz AG (em blocos) fica da seguinte forma:

$$AG = \begin{bmatrix} T^{(1)} & A^{(1)} & 0 & & \cdots & & & & 0 \\ A^{(1)} & T^{(2)} & A^{(2)} & & & & & & \\ 0 & A^{(2)} & T^{(3)} & A^{(3)} & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & A^{M/2-2} & T^{M/2-1} & A^{M/2-1} & & & \\ \vdots & & & & A^{M/2-1} & T^{M/2} & A^{M/2} & & \\ & & & & & A^{M/2} & T^{M/2+1} & A^{M/2+1} & \\ & & & & & & A^{M/2+1} & T^{M/2+2} & A^{M/2+2} \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \\ 0 & & & & & & & A^{(M-2)} & T^{(M-1)} & A^{(M-1)} \\ & & & & & & & 0 & A^{(M-1)} & T^{(M)} \end{bmatrix}$$

A matriz AG é simétrica e definida positiva, assim o sistema $(AG * U) = b$ tem uma solução única.

Os primeiros blocos da matriz AG *quando consideramos o pólo* fica:

Para $i = 1, \quad j = 1, N$

$$\begin{cases} -z_0(1)u_{0,1} + C(1,1)u_{1,1} - B(1,1)u_{1,2} - B(1)u_{1,N} - D(1)u_{2,1} - A(1)u_{2,2} - E_0u_{2,N} = r_1 f_{1,1} \\ -z_0(i)u_{0,i} - B(i, j-1)u_{i,j-1} + C(1, j)u_{1,j} - B(1, j)u_{1,j+1} - A(j-1)u_{2,j-1} - D(i)u_{2,j} - A(j)u_{2,j+1} = r_1 f_{1,j}, \quad j = 2, N-1 \\ -z_0(N)u_{0,N} - B(1, N)u_{1,1} - B(1, N-1)u_{1,N-1} + C(1, N)u_{1,N} - A(N)u_{2,1} - A(N-1)u_{2,N-1} - D(N)u_{2,N} = r_1 f_{1,N} \end{cases}$$

Assim temos os primeiros blocos de AG

$$\begin{bmatrix} c_0 & -z_0(1) & -z_0(2) & -z_0(3) & \dots & -z_0(N) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -z_0(1) & C(1,1) & -B(1,1) & & & -B(1) & -D(1) & -A(1) & 0 & -A_0 \\ -z_0(2) & -B(1,1) & C(1,2) & -B(1,2) & & & -A(1) & -D(2) & -A(2) & \\ & & & & \ddots & & 0 & & & \\ & & & & & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & -B(1, N-1) & 0 & & & -A(N-1) \\ -z_0(N) & B(1) & & & & -B(1, N-1) & C(1, N) & A_0 & 0 & 0 & A(N-1) & D(N) \end{bmatrix}$$

Esquema HIA

Discretização na direção radial:

Sabendo que $W_1 = -\sigma u_r \rightarrow -u_r = \frac{W_1}{\sigma}$ e aproximando $W_1(r, \theta)$ pela série de Taylor até os termos de primeira ordem:

$$W_1(r, \theta) = (W_1)_{i+1/2, j} + (r - r_{i+1/2})[(W_1)_r]_{i+1/2, j} + O(h_r^2) \quad (4.75)$$

então:

$$\begin{aligned} - \int_{\tilde{r}_i}^{\tilde{r}_{i+1}} u_r dr &= \int_{\tilde{r}_i}^{\tilde{r}_{i+1}} \frac{W_1(r, \theta)}{\sigma(r, \theta)} dr = (W_1)_{i+1/2, j} \int_{\tilde{r}_i}^{\tilde{r}_{i+1}} \frac{dr}{\sigma(r, \theta)} + [(W_1)_r]_{i+1/2, j} \int_{\tilde{r}_i}^{\tilde{r}_{i+1}} \frac{r - r_{i+1/2}}{\sigma(r, \theta)} dr + O(h_r^3) \text{ e} \\ -r_{i+1/2} \frac{u_{i+1, j} - u_{i, j}}{h_r} &= r_{i+1/2} (W_1)_{i+1/2, j} \frac{1}{h_r} \int_{\tilde{r}_i}^{\tilde{r}_{i+1}} \frac{dr}{\sigma(r, \theta)} + r_{i+1/2} [(W_1)_r]_{i+1/2, j} \frac{1}{h_r} \int_{\tilde{r}_i}^{\tilde{r}_{i+1}} \frac{r - r_{i+1/2}}{\sigma(r, \theta)} dr + O(h_r^2) \end{aligned}$$

Fazendo $(rW_1)_r = r(W_1)_r + W_1$, então:

$$r(W_1)_r = (rW_1)_r - W_1, \quad (4.76)$$

temos que:

$$\begin{aligned} -r_{i+1/2} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_r} &= r_{i+1/2} (W_1)_{i+1/2,j} \frac{1}{h_r} \int_{\tilde{r}_i}^{r_{i+1}} \left(\frac{1}{\sigma(r, \theta)} - \frac{r - r_{i+1/2}}{r_{i+1/2} \sigma(r, \theta)} \right) dr + \\ &+ \left[r_{i+1/2} (W_1)_{i+1/2,j} - r_{i-1/2} (W_1)_{i-1/2,j} \right]_{i+1/2,j} \frac{1}{h_r^2} \int_{\tilde{r}_i}^{r_{i+1}} \frac{r - r_{i+1/2}}{\sigma(r, \theta)} dr + O(h_r^2) \end{aligned}$$

Assim:

$$-r_{i+1/2} K_{i+1/2,j}^H \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_r} = r_{i+1/2} (W_1)_{i+1/2,j} + \left[r_{i+1/2} (W_1)_{i+1/2,j} - r_{i-1/2} (W_1)_{i-1/2,j} \right] a_{i+1/2,j}, \quad (4.77)$$

onde

$$K_{i+1/2,j}^H = \left(\frac{1}{h_r} \int_{\tilde{r}_i}^{r_{i+1}} \left(1 - \frac{(r - r_{i+1/2})}{r_{i+1/2}} \right) \frac{dr}{\sigma(r, \theta_j)} \right)^{-1} \quad (4.78)$$

$$a_{i+1/2,j} = K_{i+1/2,j}^H \frac{1}{h_r^2} \int_{\tilde{r}_i}^{r_{i+1}} \frac{r - r_{i+1/2}}{\sigma(r, \theta_j)} dr, \quad (4.79)$$

sendo que os limites do termo $1 - \frac{(r - r_{i+1/2})}{r_{i+1/2}}$ são:

$$r_i \leq r \leq r_{i+1} \rightarrow 0 \leq 1 - \frac{r - r_{i+1/2}}{r_{i+1/2}} \leq 1 + \frac{h_r}{2r_{i+1/2}}. \quad (4.80)$$

Da mesma maneira:

$$-r_{i-1/2} K_{i-1/2,j}^H \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_r} = r_{i-1/2} (W_1)_{i-1/2,j} + \left[r_{i+1/2} (W_1)_{i+1/2,j} - r_{i-1/2} (W_1)_{i-1/2,j} \right] a_{i-1/2,j}, \quad (4.81)$$

onde:

$$K_{i-1/2,j}^H = \left(\frac{1}{h_r} \int_{\tilde{r}_{i-1}}^{\tilde{r}_i} \left(1 - \frac{(r - r_{i-1/2})}{r_{i-1/2}} \right) \frac{dr}{\sigma(r, \theta_j)} \right)^{-1}, \quad (4.82)$$

$$a_{i-1/2,j} = K_{i-1/2,j}^H \frac{1}{h_r^2} \int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{r - r_{i-1/2}}{\sigma(r, \theta_j)} dr. \quad (4.83)$$

Assim temos que:

$$\begin{cases} -r_{i+1/2} K_{i+1/2,j}^H \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_r} = r_{i+1/2} (W_1)_{i+1/2,j} + \left[r_{i+1/2} (W_1)_{i+1/2,j} - r_{i-1/2} (W_1)_{i-1/2,j} \right] a_{i+1/2,j} \\ -r_{i-1/2} K_{i-1/2,j}^H \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_r} = r_{i-1/2} (W_1)_{i-1/2,j} + \left[r_{i-1/2} (W_1)_{i+1/2,j} - r_{i-1/2} (W_1)_{i-1/2,j} \right] a_{i-1/2,j} \end{cases} \quad (4.84)$$

Portanto:

$$-(1 + a_{i+1/2,j} - a_{i-1/2,j})^{-1} \left[r_{i+1/2} K_{i+1/2,j}^H \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_r} - r_{i-1/2} K_{i-1/2,j}^H \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_r} \right] = r_{i+1/2} (W_1)_{i+1/2,j} - r_{i-1/2} (W_1)_{i-1/2,j} \quad (4.86)$$

Discretização na direção angular:

Sabendo que $W_2 = -\frac{\sigma}{r} u_\theta \rightarrow -\frac{u_\theta}{r} = \frac{W_2}{\sigma}$ e aproximando $W_2(r, \theta)$ pela série de Taylor

ate os termos de primeira ordem:

$$W_1(r, \theta) = (W_1)_{i+1/2,j} + (r - r_{i+1/2}) [(W_1)_r]_{i+1/2,j} + O(h_r^2) \quad (4.87)$$

então:

$$-\int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{u_\theta}{r} d\theta = \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{W_2(r, \theta)}{\sigma(r, \theta)} d\theta = (W_2)_{i,j+1/2} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{d\theta}{\sigma(r, \theta)} + [(W_2)_\theta]_{i,j+1/2} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{\theta - \theta_{j+1/2}}{\sigma(r, \theta)} d\theta + O(h_\theta^3),$$

e:

$$-\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{r_i h_\theta} = \theta_{j+1/2} (W_2)_{i,j+1/2} \frac{1}{h_\theta} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{d\theta}{\sigma(r, \theta)} + [(W_2)_\theta]_{i,j+1/2} \frac{1}{h_\theta} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{\theta - \theta_{j+1/2}}{\sigma(r, \theta)} d\theta + O(h_\theta^2). \quad (4.88)$$

Assim:

$$-K_{i,j+1/2}^H \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{r_i h_\theta} = (W_2)_{i,j+1/2} + \left[(W_2)_{i,j+1/2} - (W_2)_{i,j-1/2} \right] a_{i,j+1/2} \quad (4.89)$$

onde:

$$K_{i,j+1/2}^H = \left(\frac{1}{h_\theta} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{d\theta}{\sigma(r_i, \theta)} \right)^{-1}, \quad (4.90)$$

$$a_{i,j+1/2} = K_{i,j+1/2}^H \frac{1}{h_\theta^2} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{\theta - \theta_{j+1/2}}{\sigma(r_i, \theta)} d\theta. \quad (4.91)$$

Da mesma maneira:

$$-K_{i,j-1/2}^H \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{r_i h_\theta} = (W_2)_{i,j-1/2} + \left[(W_2)_{i,j+1/2} - (W_2)_{i,j-1/2} \right] a_{i,j-1/2}, \quad (4.92)$$

onde:

$$K_{i,j-1/2}^H = \left(\frac{1}{h_\theta} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \frac{d\theta}{\sigma(r_i, \theta)} \right)^{-1},$$

$$a_{i,j-1} = K_{i,j-1/2}^H \frac{1}{h_\theta^2} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \frac{\theta - \theta_{j-1/2}}{\sigma(r_i, \theta)} d\theta.$$

De:

$$\begin{cases} -K_{i,j-1/2}^H \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{r_i h_\theta} = (W_2)_{i,j+1/2} + \left[(W_2)_{i,j+1/2} - (W_2)_{i,j-1/2} \right] a_{i,j+1/2} \\ -K_{i,j-1/2}^H \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{r_i h_\theta} = (W_2)_{i,j-1/2} + \left[(W_2)_{i,j+1/2} - (W_2)_{i,j-1/2} \right] a_{i,j-1/2} \end{cases} \quad (4.93)$$

temos que:

$$-(1 + a_{i,j+1/2} - a_{i,j-1/2})^{-1} \left[K_{i,j+1/2}^H \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{r_i h_\theta} - K_{i,j-1/2}^H \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{r_i h_\theta} \right] = (W_2)_{i,j+1/2} - (W_2)_{i,j-1/2} \quad (4.94)$$

O sistema linear

Na direção radial:

Para $i=1, 1 \leq j \leq N$:

$$r_{1+1/2} (W_1)_{1+1/2,j} = - \left(1 + a_{1+1/2,j}\right)^{-1} r_{1+1/2} K_{1+1/2,j}^H \frac{u_{2,j} - u_{1,j}}{h_r}$$

Para $2 \leq i \leq M-1, 1 \leq j \leq N$:

$$r_{i+1/2} (W_1)_{i+1/2,j} - r_{i-1/2} (W_1)_{i-1/2,j} = - \left(1 + a_{i+1/2,j} - a_{i-1/2,j}\right)^{-1} \left[r_{i+1/2} K_{i+1/2,j}^H \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_r} - r_{i-1/2} K_{i-1/2,j}^H \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_r} \right]$$

Para $i=M, 1 \leq j \leq N$:

$$r_{M+1/2} (W_1)_{M+1/2,j} - r_{M-1/2} (W_1)_{M-1/2,j} = - \left(1 + a_{M+1/2,j} - a_{M-1/2,j}\right)^{-1} \left[r_{M+1/2} K_{M+1/2,j}^H \frac{g_j - u_{M,j}}{h_r} - r_{M-1/2} K_{M-1/2,j}^H \frac{u_{M,j} - u_{M-1,j}}{h_r} \right].$$

Nos intervalos $[r_i, r_{i+1}], i=1, \dots, M/2-1, i=M/2+1, \dots, M$ consideramos os coeficientes $\sigma(r, \theta)$ contínuos por partes, assim os valores de $K_{i+1/2,j}^H, a_{i+1/2,j}$ podem ser obtidos com seus valores exatos:

$$\begin{cases} K_{i+1/2,j}^H = 2r_{i+1/2} \frac{\sigma_{i,j} \sigma_{i+1,j}}{\sigma_{i,j} r_{i+1/4} + \sigma_{i+1,j} r_{i+3/4}}, i=1, M \\ K_{i-1/2,j}^H = K_{(i-1)+1/2,j}^H, i=2, M+1 \end{cases}, \quad (4.95)$$

$$\begin{cases} a_{i+1/2,j} = 0, i=1, M/2-1; i=M/2+1, M \\ a_{i-1/2,j} = 0, i=2, M/2; i=M/2+2, M+1 \end{cases} \quad (4.96)$$

Aproximação nas interfaces:

Considerando a interface no ponto médio do intervalo $[r_i, r_{i+1}]$, os valores de $K_{i+1/2,j}^H, a_{i+1/2,j}$ podem se aproximados pelo método do ponto médio, então:

$$\frac{1}{h_r} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left(1 - \frac{r - r_{i+1/2}}{r_{i+1/2}}\right) \sigma(r, \theta) dr = \frac{1}{h_r} \left[\frac{1}{\sigma_{i,j}} \left(\int_{r_i}^{r_{i+1/2}} \left(2 - \frac{r}{r_{i+1/2}}\right) dr \right) + \frac{1}{\sigma_{i+1,j}} \left(\int_{r_{i+1/2}}^{r_{i+1}} \left(2 - \frac{r}{r_{i+1/2}}\right) dr \right) \right],$$

e:

$$\int_{\tilde{r}_i}^{\tilde{r}_{i+1/2}} \left(2 - \frac{r}{r_{i+1/2}} \right) dr = \frac{h_r}{2} \left(2 - \frac{r_{i+1/4}}{r_{i+1/2}} \right) = r_i + \frac{3h_r}{4}$$

$$\int_{\tilde{r}_{i+1/2}}^{\tilde{r}_{i+1}} \left(2 - \frac{r}{r_{i+1/2}} \right) dr = \frac{h_r}{2} \left(2 - \frac{r_{i+3/4}}{r_{i+1/2}} \right) = r_i + \frac{h_r}{4}.$$

Então:

$$K_{i+1/2,j}^H = 2r_{i+1/2} \left(\frac{\sigma_{i,j} \sigma_{i+1,j}}{\sigma_{i,j} r_{i+1/4} + \sigma_{i+1,j} r_{i+3/4}} \right) \quad (4.97)$$

e

$$a_{i+1/2,j} = K_{i+1/2,j}^H \frac{1}{h_r^2} \int_{\tilde{r}_i}^{\tilde{r}_{i+1}} \frac{r - r_{i+1/2}}{\sigma(r, \theta_j)} dr =$$

$$2r_{i+1/2} \left(\frac{\sigma_{i,j} \sigma_{i+1,j}}{\sigma_{i,j} r_{i+1/4} + \sigma_{i+1,j} r_{i+3/4}} \right) \frac{1}{h_r^2} \left(\frac{\sigma_{i,j} - \sigma_{i+1,j}}{\sigma_{i,j} \sigma_{i+1,j}} \right),$$

em consequência:

$$a_{i+1/2,j} = \frac{r_{i+1/2}}{4} \left(\frac{\sigma_{i,j} - \sigma_{i+1,j}}{\sigma_{i,j} r_{i+1/4} + \sigma_{i+1,j} r_{i+3/4}} \right). \quad (4.98)$$

O sistema linear na direção radial fica:

Para $i=1, 1 \leq j \leq N$:

$$r_{3/2} (W_1)_{3/2,j} = -r_{3/2} (1 + a_{3/2,j})^{-1} K_{3/2,j}^H \frac{u_{2,j} - u_{1,j}}{h_r}$$

Para $2 \leq i \leq M-1, 1 \leq j \leq N$:

$$r_{i+1/2} (W_1)_{i+1/2,j} - r_{i-1/2} (W_1)_{i-1/2,j} = -(1 + a_{i+1/2,j} - a_{i-1/2,j})^{-1} \left[r_{i+1/2} K_{i+1/2,j}^H \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_r} - r_{i-1/2} K_{i-1/2,j}^H \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_r} \right]$$

Para $i=M, 1 \leq j \leq N$:

$$r_{M+1/2} (W_1)_{M+1/2,j} - r_{M-1/2} (W_1)_{M-1/2,j} = -(1 + a_{M+1/2,j} - a_{M-1/2,j})^{-1} \left[r_{M+1/2} K_{M+1/2,j}^H \frac{g_j - u_{M,j}}{h_r} - r_{M-1/2} K_{M-1/2,j}^H \frac{u_{M,j} - u_{M-1,j}}{h_r} \right]$$

Na direção angular:

Para $1 \leq j \leq N$, $1 \leq i \leq M$

$$-\left(1 + a_{i,j+1/2} - a_{i,j-1/2}\right)^{-1} \left[K_{i,j+1/2}^H \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{r_i h_\theta} - K_{i,j-1/2}^H \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{r_i h_\theta} \right] = (W_2)_{i,j+1/2} - (W_2)_{i,j-1/2}$$

Aproximação nas interfaces:

Nos intervalos $[\theta_j, \theta_{j+1}]$, os valores de $K_{i+1/2,j}^H, a_{i+1/2,j}$ podem ser aproximados pelo método do ponto médio, então:

$$K_{i,j+1/2}^H = 2 \left(\frac{\sigma_{i,j} \sigma_{i,j+1}}{\sigma_{i,j} + \sigma_{i,j+1}} \right) \quad (4.99)$$

$$a_{i,j+1/2} = K_{i,j+1/2}^H \frac{1}{h_\theta^2} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{\theta - \theta_{j+1/2}}{\sigma(r_i, \theta)} d\theta = 2 \left(\frac{\sigma_{i,j} \sigma_{i,j+1}}{\sigma_{i,j} + \sigma_{i,j+1}} \right) \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma_{i,j} - \sigma_{i,j+1}}{\sigma_{i,j} \sigma_{i,j+1}} \right),$$

então:

$$a_{i,j+1/2} = \frac{1}{4} \left(\frac{\sigma_{i,j} - \sigma_{i,j+1}}{\sigma_{i,j} + \sigma_{i,j+1}} \right) \quad (4.100)$$

Em $j=1$, temos que levar em consideração os termos:

$$K_{i,1-1/2}^H = 2 \left(\frac{\sigma_{i,1} \sigma_{i,N}}{\sigma_{i,1} + \sigma_{i,N}} \right), \quad (4.101)$$

$$a_{i,1-1/2} = \frac{1}{4} \left(\frac{\sigma_{i,1} - \sigma_{i,N}}{\sigma_{i,1} + \sigma_{i,N}} \right), \quad (4.102)$$

então temos que na direção angular o sistema linear fica:

Para $1 \leq j \leq N$, $1 \leq i \leq M$:

$$(W_2)_{i,j+1/2} - (W_2)_{i,j-1/2} = -\left(1 + a_{i,j+1/2} - a_{i,j-1/2}\right)^{-1} \left[K_{i,j+1/2}^H \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{r_i h_\theta} - K_{i,j-1/2}^H \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{r_i h_\theta} \right]$$

Detalhamento dos termos $K_{i+1/2,j}^H, K_{i,j+1/2}^H$

Suponha que a interface se encontra nos pontos médios de $[\theta_{N/4}, \theta_{N/4+1}]$ e $[\theta_{N/2}, \theta_{N/2+1}]$ então:

$$K_{i+1/2,j}^H = \begin{cases} \sigma_{i,j}, i=1, M/2-1, j=1, N \\ 2r_{i+1/2} \left(\frac{\sigma_{i,j}\sigma_{i+1,j}}{\sigma_{i,j}r_{i+1/4} + \sigma_{i+1,j}r_{i+3/4}} \right), i=M/2, j=1, N \\ \sigma_{i,j}, i=M/2+1, M, j=1, N \end{cases}$$

e

$$K_{i,j+1/2}^H = \begin{cases} \sigma_{i,j}, j=1, N/4-1, i=1, M \\ 2 \left(\frac{\sigma_{i,j}\sigma_{i,j+1}}{\sigma_{i,j} + \sigma_{i,j+1}} \right), j=N/4, i=1, M \\ \sigma_{i,j}, j=N/4+1, N/2-1, i=1, M \\ 2 \left(\frac{\sigma_{i,j}\sigma_{i,j+1}}{\sigma_{i,j} + \sigma_{i,j+1}} \right), j=N/2, i=1, M \\ \sigma_{i,j}, j=N/2+1, N-1, i=1, M \\ 2 \left(\frac{\sigma_{i,N}\sigma_{i,1}}{\sigma_{i,1} + \sigma_{i,N}} \right), j=N, i=1, M \end{cases}$$

Montagem da Matriz AG de $(AG)U = b$

Substituindo (4.86) e (4.94) em (4.42) e considerando $A(i, j), B(i, j), C(i, j)$ como sendo os coeficientes das variáveis u_{ij} em (4.42), montamos o sistema linear $(AG)^*U = b$ correspondente ao esquema HIA.

Para $i=1, j=1, N$

$$\begin{cases} C(1,1)u_{1,1} - BS(1,1)u_{1,2} - B(1,1)u_{1,N} - A(1,1)u_{2,1} = r_1 f_{1,1} \\ -BF(i, j-1)u_{i,j-1} + C(1, j)u_{1,j} - BS(1, j)u_{1,j+1} - A(1, j)u_{2,j} = r_1 f_{1,j}, j=2, N-1. \\ -B(1, N)u_{1,1} - BF(1, N-1)u_{1,N-1} + C(1, N)u_{1,N} - A(1, N)u_{2,N} = r_1 f_{1,N} \end{cases}$$

Assim temos os primeiros blocos de AG ficam:

$$\begin{bmatrix} C(1,1) & -BS(1,1) & 0 & \dots & 0 & -B(1,1) & -A(1,1) & 0 & \dots & 0 \\ -BF(1,1) & C(1,2) & -BS(1,2) & & 0 & 0 & -A(1,2) & & & \\ 0 & -BF(1,2) & C(1,3) & -BS(1,3) & \vdots & \vdots & & -A(1,3) & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & & & & \ddots & \\ 0 & & & -BF(1,N-2) & C(1,N-1) & -BS(1,N-1) & & -A(1,N-1) & 0 & \\ -B(1,N) & 0 & \dots & 0 & -BF(1,N-1) & C(1,N) & 0 & \dots & 0 & -A(1,N) \end{bmatrix},$$

onde $B(1,N) \neq B(1,1)$.

Para $i = 2, M-1$ $j = 1, N$

$$\begin{cases} -A(i-1,1)u_{i-1,1} + C(i,1)u_{i,1} - BS(i,1)u_{i,2} - B(i,1)u_{i,N} - A(i,1)u_{i+1,1} = r_i f_{i,1} \\ -A(i-1,j)u_{i-1,j} - BF(i,j-1)u_{i,j-1} + C(i,j)u_{i,j} - BS(i,j)u_{i,j+1} - A(i,j)u_{i+1,j} = r_i f_{i,j}, j = 2, N-1 \\ -A(i-1,N)u_{i-1,N} - B(i,N)u_{i,1} - BF(i,N-1)u_{i,N-1} + C(i,N)u_{i,N} - A(i,N)u_{i+1,N} = r_i f_{i,N} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -A(i-1,1) & 0 & \dots & 0 & C(i,1) & -BS(i,1) & 0 & \dots & 0 & -B(i,1) & -A(i,1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -A(i-1,2) & & -BF(i,1) & C(i,2) & -BS(i,2) & & 0 & 0 & -A(i,2) & & & & \\ \vdots & & -A(i-1,3) & \vdots & 0 & -BF(i,2) & C(i,3) & -BS(i,3) & \vdots & \vdots & -A(i,3) & & \vdots & \\ & & & \ddots & \vdots & & & \ddots & 0 & & & & & \\ & & & -A(i-1,N-1) & 0 & 0 & -BF(i,N-2) & C(i,N-1) & -BS(i,N-1) & & -A(i,N-1) & 0 & & \\ 0 & \dots & 0 & -A(i-1,N) & -B(i,N) & 0 & \dots & 0 & -BF(i,N-1) & C(i,N) & 0 & \dots & 0 & -A(i,N) \end{bmatrix}$$

onde $B(i,N) \neq B(i,1)$

Para $i = M$ $j = 1, N$

$$\begin{cases} -A(M-1,1)u_{M-1,1} + C(M,1)u_{M,1} - BS(M,1)u_{M,2} - B(M,1)u_{M,N} = r_M f_{M,1} + A(M,1)g(1) \\ -A(M-1,j)u_{M-1,j} - BF(M,j-1)u_{M,j-1} + C(M,j)u_{M,j} - BS(M,j)u_{M,j+1} = r_M f_{M,j} + A(M,j)g(j), j = 2, N-1 \\ -A(M-1,N)u_{M-1,N} - B(M,N)u_{M,1} - BF(M,N-1)u_{M,N-1} + C(M,N)u_{M,N} = r_M f_{M,N} + A(M,N)g(N) \end{cases}$$

então os últimos blocos de AG são:

$$\begin{bmatrix} -A(M-1,1) & 0 & \dots & 0 & C(M,1) & -BS(M,1) & 0 & \dots & 0 & -B(M,1) \\ 0 & -A(M-1,2) & & -BF(M,1) & C(M,2) & -BS(M,2) & & 0 & 0 & \\ \vdots & & -A(M-1,3) & \vdots & 0 & -BF(M,2) & C(M,3) & -BS(M,3) & \vdots & \\ & & & \ddots & \vdots & & & \ddots & 0 & \\ & & & -A(M-1,N-1) & 0 & 0 & -BF(M,N-2) & C(M,N-1) & -BS(M,N-1) & \\ 0 & \dots & 0 & -A(M-1,N) & -B(M,N) & 0 & \dots & 0 & -BF(M,N-1) & C(M,N) \end{bmatrix}$$

$B(M,N) \neq B(M,1)$

Portanto, a matriz AG (em blocos) fica da seguinte forma:

$$AG = \begin{bmatrix} T^{(1)} & A^{(1)} & 0 & & \dots & & 0 \\ A^{(1)} & T^{(2)} & A^{(2)} & & & & \\ 0 & A^{(2)} & T^{(3)} & A^{(3)} & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & A^{M/2-2} & T^{M/2-1} & A^{M/2-1} & \\ \vdots & & & \tilde{A}^{M/2-1} & T^{M/2} & \tilde{A}^{M/2} & \\ & & & \hat{A}^{M/2} & T^{M/2+1} & \hat{A}^{M/2+1} & \\ & & & A^{M/2+1} & T^{M/2+2} & A^{M/2+2} & \\ & & & & \ddots & & 0 \\ & & & & A^{(M-2)} & T^{(M-1)} & A^{(M-1)} \\ 0 & & & \dots & 0 & A^{(M-1)} & T^{(M)} \end{bmatrix} \sim$$

onde: $\tilde{A}^{(M/2-1)} \neq A^{(M/2-1)}$, $\tilde{A}^{(M/2)} \neq \hat{A}^{(M/2)}$, $\hat{A}^{(M/2+1)} \neq A^{(M/2+1)}$. A matriz AG é não simétrica.

Resultados

Consideramos os seguintes problemas:

Problema (5)

$$u(r, \theta) = (r^2 - r_m)^2 / 4\sigma(r, \theta)$$

$$\sigma(r, \theta) = \begin{cases} \sigma_1, & 0 < r < r_m, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \sigma_2, & r_m \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Figura 4.16 (a) Gráfico da solução exata do Problema (5), (b) Interface no disco unitário.

A interface Γ é:

$$\Gamma = \{(r, \theta) / r = r_m; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

$$5.1-\sigma(r, \theta) = \begin{cases} 1, & 0 < r < r_m, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 100, & r_m \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases},$$

Considerando a interface em $r_m = r_{M/2} + 0.5h_r$ e usando a condição de fronteira tipo Dirichlet, obtemos os seguintes resultados:

Tabela 4.21 Aproximação do problema 5.1 usando o método HA e fatorização de Choleski para resolver o sistema linear.

M	Fatorização Choleski $r_m = r_{M/2} + 0.5h_r$
	Erro relativo na norma L^2
16	0.0070624
32	0.00154876
64	3.7760161×10^{-4}
128	9.4292309×10^{-5}

Como podemos observar na tabela 4.21, o esquema HA tem convergência quadrática o qual era o esperado pela ordem do esquema usado.

Usando a condição de fronteira tipo Neumann e aplicando fatorização de Choleski para resolver o sistema linear obtemos:

Tabela 4.22 Aproximação do problema 5.1 com condição de fronteira tipo Neumann usando o método HA e fatorização de Choleski para resolver o sistema linear.

M	Fatorização de Choleski $r_m = r_{M/2} + 0.5h_r$
	Erro relativo na norma L^2
16	0.0251498
32	0.0062746
64	0.0015699
128	3.9282675×10^{-4}

Considerando a interface em $r = 0.5$ e usando condição de fronteira tipo Dirichlet:

Tabela 4.23 Aproximação do problema 5.1, onde a interface se encontra em 0.5 usando os métodos HA, HIA e eliminação gaussiana para resolver o sistema linear.

Eliminação Gaussiana $r = 0.5$		
GRID	HA	HIA
M	Erro relativo na norma L^2	Erro relativo na norma L^2
16	0.00706241	0.0091825
32	0.0015488	0.0026156
64	3.7760161×10^{-4}	7.0247739×10^{-4}
128	9.4292309×10^{-5}	1.8230732×10^{-4}

Observamos da tabela 4.23 que os esquemas HA e HIA têm convergência quadrática quando consideramos condição de fronteira tipo Dirichlet. Porém, os resultados do esquema HIA não têm a precisão obtida em coordenadas cartesianas.

$$5.2- \sigma(r, \theta) = \begin{cases} 0.001, & 0 < r < r_m, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 1000, & r_m \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Considerando a interface em $r_m = r_{M/2} + 0.5h_r$ e usando à condição de Dirichlet:

Tabela 4.24 Aproximação do problema 5.2 usando o método HA e fatorização de Choleski para resolver o sistema linear.

M	Fatorização de Choleski $r_m = r_{M/2} + 0.5h_r$
	Erro relativo na norma L^2
16	0.0066151
32	0.0016981
64	4.2897791×10^{-4}
128	1.0773579×10^{-4}

Usando a condição de Neumann temos os seguintes resultados:

Tabela 4.25 Aproximação do problema 5.2 com condição de fronteira tipo Neumann usando o método HA e fatorização de Choleski para resolver o sistema linear.

M	Fatorização de Choleski $r_m = r_{M/2} + 0.5h_r$
	Erro relativo na norma L^2
16	0.0232906
32	0.0057873
64	0.0014446
128	3.6101586×10^{-4}

Nas tabelas 4.24 e 4.25 observamos que o esquema HA tem convergência quadrática para saltos grandes nas interfaces.

Considerando a interface em $r = 0.5$, temos:

Tabela 4.26 Aproximação do problema 5.2, onde a interface se encontra em 0.5 usando os métodos HA, HIA e eliminação gaussiana para resolver o sistema linear.

Eliminação Gaussiana $r = 0.5$				
GRID	HA		HIA	
M	Erro relativo na norma L^2	Tempo	Erro relativo na norma L^2	Tempo
16	0.0065915	0.09375	0.0089974	0.125
32	0.0014729	0.234375	0.0025751	0.265625
64	3.6553819×10^{-4}	1.8125	6.9321404×10^{-4}	1.4375
128	9.2187789×10^{-5}	22.09375	1.8011226×10^{-4}	13.78125

Na tabela 4.26 observamos que os esquemas HA e HIA têm convergência quadrática. Porém, o esquema HIA não têm a precisão obtida em coordenadas cartesianas.

Problema (6)

$u(r, \theta) = r^3(r - r_m)^3 \sin(z\theta)(\cos^2(z\theta) - 1) / \sigma(r, \theta)$, o coeficiente z é tal que $z\theta = \pi$

$$\sigma(r, \theta) = \begin{cases} \sigma_1, & 0 < r < r_m, 0 \leq \theta < y_n \\ \sigma_2, & 0 < r < r_m, y_n < \theta \leq 2\pi \\ \sigma_3, & r_m < r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Figura 4.17 (a) Gráfico da solução exata do Problema (6), (b) Interfaces no disco unitário.

A interface $\Gamma \subset \Omega$ tem a forma $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, onde:

$$\begin{cases} \Gamma_1 = \{(r, \theta) / r = r_m + \frac{h_r}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \\ \Gamma_2 = \{(r, \theta) / \theta = \frac{\pi}{4}, 0 < r \leq r_m\} \\ \Gamma_3 = \{(r, \theta) / \theta = \frac{\pi}{2}, 0 < r \leq r_m\} \end{cases},$$

a qual divide o disco unitário em 3 partes.

Interface no ponto médio do intervalo central para cada um dos eixos

$$\mathbf{6.1-} \sigma(r, \theta) = \begin{cases} \sigma_1 = 1 \\ \sigma_2 = 10 \\ \sigma_3 = 100 \end{cases}$$

Aplicando a condição de fronteira tipo Dirichlet e sem considerar o pólo:

Tabela 4.27 Aproximações do problema 6.1, usando os métodos HA , HIA e eliminação gaussiana para resolver o sistema linear.

Eliminação Gaussiana $r_m = r_{M/2} + 0.5h_r$ $y_n = \theta_{N/2} + 0.5h_\theta$		
GRID	HA	HIA
M	Erro relativo na norma L^2	Erro relativo na norma L^2
16	0.0131015	0.0122549
32	0.0025788	0.0024479
64	5.743182×10^{-4}	5.4833134×10^{-4}
128	1.3660386×10^{-4}	1.3056715×10^{-4}

Interface no ponto médio do intervalo central para cada um dos eixos

$$6.2- \sigma(r, \theta) = \begin{cases} \sigma_1 = 1 \\ \sigma_2 = 10 \\ \sigma_3 = 0.001 \end{cases}$$

Aplicando à condição de fronteira tipo Dirichlet e sem considerar o pólo:

Tabela 4.28 Aproximações do problema 6.2, usando os métodos HA , HIA e eliminação gaussiana para resolver o sistema linear.

Eliminação Gaussiana $r_m = r_{M/2} + 0.5h_r$ $y_n = \theta_{N/2} + 0.5h_\theta$		
GRID	HA	HIA
M	Erro relativo na norma L^2	Erro relativo na norma L^2
16	0.0126043	0.0081841
32	0.0023572	0.0015995
64	4.7971441×10^{-4}	3.5345334×10^{-4}
128	1.0502971×10^{-4}	8.3291517×10^{-5}

Das tabelas 4.27 e 4.28 podemos ver que o esquema HIA aproximou um pouco melhor o problema. Porém os resultados não são tão satisfatórios quando os obtidos em coordenadas cartesianas.

4.3 Aproximação da solução na fronteira

Para aproximar a solução na fronteira usamos os polinômios interpoladores de Lagrange e os três pontos finais na direção radial, como mostra a figura 4.18:

Figura 4.18 Gráfico da extrapolação na fronteira.

Os polinômios de Lagrange na direção radial são:

$$\begin{cases} L_{M-2}(r) = \frac{(r-r_{M-1})(r-r_M)}{(r_{M-2}-r_{M-1})(r_{M-2}-r_M)} \\ L_{M-1}(r) = \frac{(r-r_{M-2})(r-r_M)}{(r_{M-1}-r_{M-2})(r_{M-1}-r_M)} \\ L_M(r) = \frac{(r-r_{M-2})(r-r_{M-1})}{(r_M-r_{M-2})(r_M-r_{M-1})} \end{cases}.$$

Assim, os valores desses polinômios em $r = 1.0$, considerando condição de fronteira tipo Neumann são:

$$L_{M-2}(1) = \frac{3}{8}, \quad L_{M-1}(1) = \frac{-5}{4}, \quad L_M(1) = \frac{15}{8}.$$

Portanto, os valores extrapolados na fronteira têm a forma:

$$u(1, \theta_j) \approx \sum_{k=0}^2 L_{M-k}(1) u_{M-k,j} \quad (4.103)$$

Resultados da extrapolação

Consideramos os problema 1, 2, 4 e 5.2, com condição de fronteira tipo Neumann e comparamos a solução exata em $r=1$ e a aproximação usando valores extrapolados seguindo a formula 4.103.

Tabela 4.29 Extrapolação na fronteira do problema (1)

M	Problema (1)
	PGC – Choleski Incompleto
	Erro máximo
16	0.0123518
32	0.0031503
64	7.9901749×10^{-4}
128	2.0107814×10^{-4}

Tabela 4.30 Extrapolação na fronteira do problema (2)

M	Problema (2)
	PGC – Choleski Incompleto
	Erro máximo
16	0.0032864
32	8.0221371×10^{-4}
64	1.9851531×10^{-4}
128	4.9463472×10^{-5}

Tabela 4.31 Extrapolação na fronteira do problema (4) usando o método HIA.

N=M	Problema (4)
	PGC – Choleski Incompleto
	Erro máximo
12	0.0905839
22	0.0179451
42	0.0069149
82	0.0023355
162	5.6768302×10^{-4}

Tabela 4.32 Extrapolação na fronteira do problema 5.2, usando o método HIA.

M	Eliminação Gaussiana
	$r_m = r_{M/2} + 0.5h_r$
	Erro máximo
16	5.2309479×10^{-6}
32	2.3690984×10^{-6}
64	9.2975629×10^{-6}
128	8.1822563×10^{-8}

Dos resultados das tabelas 4.29, 4.30, 4.31 e 4.32 podemos concluir que o uso dos polinômios interpeladores de Lagrange resulta em aproximações razoáveis na fronteira. No entanto outros métodos, como por exemplo, *splines* cúbicos podem ser usados para tal fim.

5. ESTUDOS NUMÉRICOS NA TIE

Neste capítulo, vamos aplicar os métodos de solução numérica do problema direto descritos no capítulo 4 e também consideramos uma linearização para resolver o problema inverso.

5.1 A Malha

Consideramos o domínio condutor como sendo o disco unitário.

Consideramos M subdivisões no eixo radial e $N = 2M$ subdivisões no eixo angular.

Assim temos:

Número de nós = $M * N$ nós no interior do disco e N nós na fronteira.

Número de volumes finitos = $M * N$.

Número de eletrodos alocados na fronteira = 16.

Figura 5.1 (a) Malha com volumes finitos no disco unitário quando usamos 16 subdivisões no eixo radial e 32 subdivisões no eixo angular, (b) Posição dos 16 eletrodos na fronteira.

5.2 O Problema Direto

Para termos uma aproximação dos valores dos potenciais nos eletrodos, consideramos a equação de difusão (2.13) em coordenadas polares:

$$\frac{-1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\sigma(r, \theta) r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\sigma(r, \theta)}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \right] = 0, \quad \text{em } \Omega,$$

junto às condições de fronteira (2.19):

$$I^d = \begin{cases} \frac{I_l}{|e_l|}, & x \in e_l, l = 1, 2, \dots, L \\ 0, & x \in \partial\Omega \setminus \bigcup_{l=1}^L e_l \end{cases},$$

onde consideramos $d = 1, 2, 3, \dots, P$ padrões de corrente injetados nos $l = 1, 2, \dots, L = 16$ eletrodos.

Os padrões de correntes injetadas nos 16 eletrodos correspondem aos modelos: adjacente e pula 1. Os padrões de corrente do tipo adjacente são da forma:

$$I^1 = \begin{bmatrix} -I \\ I \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, I^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -I \\ I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, I^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, I^{15} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -I \\ I \end{bmatrix}, I^{16} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix},$$

e os padrões que correspondem á injeção pula 1 são :

$$I^1 = \begin{bmatrix} -I \\ 0 \\ I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, I^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -I \\ 0 \\ I \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, I^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ I \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, I^{15} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -I \\ 0 \end{bmatrix}, I^{16} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix},$$

onde $I^d \in \Re^L$.

Resolvemos o problema direto usando o método dos volumes finitos do tipo HA descrito no capítulo anterior. As variáveis são os valores do potencial elétrico no interior e na fronteira do disco unitário. Assim temos $(M+1)N$ variáveis.

O sistema linear tem a forma:

$$(AG)U = LD, \quad (5.1)$$

ou

$$\begin{bmatrix} T^{(1)} & A^{(1)} & 0 & & & & 0 \\ A^{(1)} & T^{(2)} & A^{(2)} & & & & \\ 0 & A^{(2)} & T^{(3)} & A^{(3)} & & & \\ & & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & A^{(M-2)} & T^{(M-1)} & A^{(M-1)} & 0 \\ & & & 0 & A^{(M-1)} & T^{(M)} & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & Z^{(M-2)} & Z^{(M-1)} & Z^{(M)} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_M \\ U_{M+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I^d \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde AG é uma M - matriz quadrada, não simétrica de dimensão $(M+1)N^2$, I^d contem os valores das correntes injetadas nos L eletrodos em $d=1,2,3,\dots,P$ padrões. A última linha das matrizes em bloco de AG correspondem á interpolação feita para aproximar as voltagens na fronteira do disco, os vetores U_i são vetores que correspondem às N variáveis para cada subdivisão i do eixo radial, $U_i \in \Re^N$.

Para resolver o sistema (5.1) é preciso usar alguma técnica de normalização, dado que a solução desse sistema não é única. No apêndice A podemos encontrar algumas técnicas de regularização, neste caso particular, usamos regularização pela fronteira.

Por outro lado, segundo [67] podemos considerar a voltagem de um nó de referencia igual a zero (voltagem de referencia ou terra). Como consequência de usar este critério eliminou-se a indeterminação do sistema linear (5.1).

5.3 Comparações das voltagens

A seguir, aproximamos as voltagens nos eletrodos correspondentes à injeção de correntes do tipo adjacente e pula 1. Para resolver o sistema linear usamos normalização pela fronteira e também o método que leva em conta um nó de referencia.

ADJACENTE

(a)

(b)

Figura 5.2 Distribuição do potencial devido á injeção de corrente adjacente : (a)1-padrão (b) 2-padrão, (c)10-padrão (d)15-padrão e (e)16 - padrão.

Na figura 5.2 podemos observar às distribuições dos potenciais devido á injeção de alguns padrões de corrente do tipo adjacente.

Tabela 5.1 Erro das voltagens nos eletrodos quando usamos normalização e voltagem de referencia na solução do sistema linear (5.1) e injeção adjacente.

<i>Padrão</i>	<i>Erro</i>
I^1	6.1238339×10^{-4}
I^2	6.3277224×10^{-4}
I^{10}	0.0015079
I^{15}	8.7902106×10^{-4}
I^{16}	6.3581059×10^{-4}

Na tabela 5.1 podemos observar o erro quando comparamos às voltagens nos eletrodos usando normalização pela fronteira e o método que considera um nó de referência para resolver o sistema linear.

PULA 1

Figura 5.3 Distribuição do potencial devido á injeção de corrente pula 1: (a)1-padrão (b) 2-padrão, (c)10-padrão (d)15-padrão e (e)16 - padrão.

Na figura 5.3 observamos algumas distribuições dos potenciais devido á injeção de padrões de corrente do tipo pula 1.

Tabela 5.2 Erro das voltagens nos eletrodos quando usamos normalização e voltagem de referencia na solução do sistema linear (5.1) e injeção pula1.

<i>Padrão</i>	<i>Erro</i>
I^1	6.3145672×10^{-4}
I^2	6.5431231×10^{-4}
I^{10}	7.0987653×10^{-4}
I^{15}	9.8106123×10^{-4}
I^{16}	6.4187492×10^{-4}

Na tabela 5.2, observamos o erro cometido quando comparamos ás voltagens nos eletrodos usando normalização pela fronteira e também considerando um nó de referência para resolver o sistema linear. Destas informações podemos dizer que ambos os métodos produzem aproximações satisfatórias e podem ser usados para termos uma única solução do sistema linear 5.1.

5.4 O Jacobiano

Como descrito no capítulo 2 , seção 2.4, para resolver o problema inverso usando alguma técnica de linearização precisamos calcular eficientemente o Jacobiano ou matriz de sensibilidade, dado que este calculo gasta uma parcela grande do tempo computacional total.

Em [67] podemos encontrar uma metodologia para calcular o Jacobiano chamado de método *standard*, onde:

$$J(\sigma_0) = \frac{\partial U(\sigma_0)}{\partial \sigma} = \frac{\partial [(AG(\sigma))^{-1} I^d]}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=\sigma_0},$$

é o Jacobiano dada uma distribuição de condutividade σ_0 .

Mas, sabemos que:

$$AG(\sigma)(AG(\sigma))^{-1} = I,$$

e derivado com respeito das variáveis σ :

$$\frac{\partial(AG)}{\partial\sigma}(AG)^{-1} + (AG)\frac{\partial(AG)^{-1}}{\partial\sigma} = 0,$$

então:

$$(AG)\frac{\partial(AG)^{-1}}{\partial\sigma} = -\frac{\partial(AG)}{\partial\sigma}(AG)^{-1},$$

em consequência:

$$\frac{\partial(AG)^{-1}}{\partial\sigma} = -(AG)^{-1}\frac{\partial(AG)}{\partial\sigma}(AG)^{-1}.$$

Assim, uma maneira de calcular o Jacobiano é dada como:

$$J_{d,i} = -(AG)^{-1}\frac{\partial(AG)}{\partial\sigma_i}(AG)^{-1}I^d \big|_{\sigma=\sigma_0}, \quad (5.2)$$

onde:

$J_{d,i}$ = O Jacobiano em função das condutividades $\sigma_i, i=1,2,3,...,ne$, onde ne é o número total de volumes finitos, e $d=1,2,3,...,P$ são os padrões de corrente.

AG^{-1} = Inversa da matriz do sistema que resolve o problema direto (5.1). A matriz AG , a qual é dada em função das variáveis de condutividade σ_i , é chamada de matriz simbólica.

$\frac{\partial(AG)}{\partial\sigma_i}$ = Derivada parcial da matriz de condutividade simbólica respeito das variáveis σ_i .

I^d = Padrões de corrente, $d=1,2,3,...,P$.

Também podemos observar que no cálculo da matriz $\frac{\partial(AG)}{\partial\sigma_i}$ somente alguns poucos elementos da matriz simbólica AG são diferentes de zero, no máximo 13 elementos. Assim o

cálculo de $\frac{\partial(AG)}{\partial\sigma_i}(AG)^{-1}I^d$ tem que ser feito convenientemente para otimizar o tempo computacional.

Para extrair os valores das voltagens correspondentes aos 16 eletrodos temos que introduzir uma matriz $T \in \Re^{L \times (M+1)N}$.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0_{(1,l)} & \cdots & 0_{(1,s)} \\ 0 & 1 & \cdots & 0_{(2,l)} & \cdots & 0_{(2,s)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1_{(l,l)} & \cdots & 0_{(l,s)} \end{bmatrix}_{L \times (M+1)N},$$

assim o vetor de aproximações das voltagens na fronteira é:

$$v_d(\sigma) = h_d(\sigma) = (AG)^{-1}I^d,$$

onde h_d é um operador não linear.

Aproximando a transformação h_d pela serie de Taylor ate os termos de primeira ordem:

$$v_d(\sigma) \simeq v_d(\sigma_0) + \frac{\partial h_d}{\partial \sigma} \bigg|_{\sigma=\sigma_0} [\sigma - \sigma_0],$$

e

$$J_d(\sigma_0) \simeq \frac{\partial h_d}{\partial \sigma} \bigg|_{\sigma=\sigma_0} = -(AG)^{-1} \frac{\partial(AG)}{\partial \sigma} (AG)^{-1} I^d,$$

então:

$$J_d(\sigma_0) = [-(AG)^{-1} \frac{\partial(AG)}{\partial \sigma_1} (AG)^{-1} I^d \quad -(AG)^{-1} \frac{\partial(AG)}{\partial \sigma_2} (AG)^{-1} I^d \quad \cdots \quad -(AG)^{-1} \frac{\partial(AG)}{\partial \sigma_s} (AG)^{-1} I^d],$$

onde $d = 1, 2, 3, \dots, P$.

Quando consideramos a matriz T resulta:

$$Tv_d(\sigma) = Tv_d(\sigma_0) + [-T(AG)^{-1} \frac{\partial(AG)}{\partial \sigma_1} (AG)^{-1} I^d \quad -T(AG)^{-1} \frac{\partial(AG)}{\partial \sigma_2} (AG)^{-1} I^d \quad \dots \quad -T(AG)^{-1} \frac{\partial(AG)}{\partial \sigma_s} (AG)^{-1} I^d] [\sigma - \sigma_0]$$

Figura 5.4 Volume finito V_{ij} correspondente á variável de condutividade σ_{ij} .

Calculado o Jacobiano, temos que resolver o sistema:

$$J(\sigma_i)(\delta u) = \delta V, \quad (5.3)$$

onde:

$$\delta u = u - u_i, \quad \delta V = V(\sigma) - V(\sigma_i).$$

Porém, o sistema (5.3) é mal condicionado, pois o numero de condição do Jacobiano é da ordem 10^{20} . Para lidar com o mal condicionamento é preciso usar técnicas de regularização como por exemplo o método de *Tikhonov* [59].

5.5 Aproximação do Fluxo nos nós

As expressões das componentes do fluxo nas laterais dos volumes finitos (ver figura 5.4) são dadas como:

Método HIA

$$(W_1)_{i+1/2j} = \frac{1}{r_{i+1/2}} \left\{ \frac{- \left[r_{i+1/2} K_{i+1/2j}^H \frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{h_r} \right] (1 - a_{i-1/2j}) - \left[r_{i-1/2} K_{i-1/2j}^H \frac{u_{ij} - u_{i-1j}}{h_r} \right] a_{i+1/2j}}{(1 + a_{i+1/2j})(1 - a_{i-1/2j}) + a_{i+1/2j} a_{i-1/2j}} \right\}$$

e

$$(W_2)_{ij+1/2} = \frac{- \left[K_{ij+1/2}^H \frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{r_i h_\theta} \right] (1 - a_{ij-1/2}) - \left[K_{ij-1/2}^H \frac{u_{ij} - u_{ij-1}}{r_i h_\theta} \right] a_{ij+1/2}}{(1 + a_{ij+1/2})(1 - a_{ij-1/2}) + a_{ij+1/2} a_{ij-1/2}}.$$

Método HA

$$(W_1)_{i+1/2j} = -K_{i+1/2j}^H \frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{h_r}$$

e

$$(W_2)_{ij+1/2} = -K_{ij+1/2}^H \frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{r_i h_\theta}.$$

Para aproximar os termos dos fluxos nos nós fazemos:

$$(W_1)_{1/2j} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (W_1)_{3/2j}$$

$$(W_1)_{ij} = \begin{cases} \frac{(W_1)_{3/2j} + (W_1)_{1/2j}}{2}, i = 1 \\ \frac{(W_1)_{i+1/2j} + (W_1)_{i-1/2j}}{2}, i = 2, 3, \dots, M \end{cases}$$

$$(W_2)_{i1/2} = - \left(K_{i1/2}^H \frac{u_{i1} - u_{iN}}{r_i h_\theta} \right)$$

$$(W_2)_{ij} = \begin{cases} \frac{(W_2)_{i3/2} + (W_2)_{i1/2}}{2}, j = 1 \\ \frac{(W_2)_{ij+1/2} + (W_2)_{ij-1/2}}{2}, j = 2, 3, \dots, N-1 \\ \frac{(W_2)_{i1/2} + (W_2)_{iN-1/2}}{2}, j = N \end{cases}$$

Tabela 5.3 Erro do fluxo na direção radial do problema 5.2 usando o método HA.

GRID M	Erro máximo do fluxo na direção radial	tx_c
16	0.0057678	-
32	0.0034065	0.76
64	0.0018296	0.89
128	9.4586611×10^{-4}	0.95

Figura 5.5 Erro máximo do fluxo na direção radial .

Na tabela 5.3 e na figura 5.5 podemos ver que o método HA em coordenadas polares aproxima o fluxo com ordem 1. Espera-se que aproximações mais acuradas, por exemplo, aquelas provenientes de usar o método HIA aproximem o fluxo com ordem 2, o qual é verdade em coordenadas cartesianas [14].

5.6 O Jacobiano em termos do Fluxo

Com o objetivo de poupar tempo computacional no cálculo do Jacobiano, apresentamos uma metodologia baseada nas componentes do fluxo.

Consideramos a solução da equação de difusão (2.13) junto à condição de fronteira (2.19) e consideramos também uma condição de fronteira chamada de dipolo definida como:

$$\Upsilon^l = \begin{cases} \frac{-1}{|e_l|}, & x \in e_l, l = 1, 2, \dots, L \\ \frac{1}{|e_l|}, & x \in e_{l+1}, l = 1, 2, \dots, L \\ 0, & x \in \partial\Omega \setminus \bigcup_{l=1}^L e_l \end{cases}$$

Com estas considerações e usando o teorema de divergência e algumas outras hipóteses ¹, temos que as componentes do Jacobiano ficam da seguinte maneira:

$$J_{dl,k} = \frac{\partial V_{dl}}{\partial \sigma_k} = - \iint_{\Omega_k} \nabla u(\Upsilon^l) \cdot \nabla u(I^d) dA, \quad (5.4)$$

onde $u(\Upsilon^l)$, $l = 1, 2, 3, \dots, L$ corresponde à solução do problema direto devido á condição de fronteira dipolo e $u(I^d)$ corresponde á distribuição do potencial quando usamos o padrão de corrente I^d , $d = 1, 2, 3, \dots, P$.

Mas, sabemos que:

$$\begin{cases} -\sigma \nabla u(I^d) = W^I \\ -\sigma \nabla u(\Upsilon^l) = W^\Upsilon \end{cases}$$

onde lembramos que as componentes de um fluxo $W = -\sigma \nabla u$ são:

$$W(r, \theta) = \begin{bmatrix} -\sigma u_r \\ \frac{\sigma}{r} u_\theta \end{bmatrix},$$

¹ Os detalhes de (5.4) são dados no apêndice B.

então, em termos dos fluxos W^I, W^r temos:

$$W^I = \begin{bmatrix} W_1^I \\ W_2^I \end{bmatrix}, \quad W^r = \begin{bmatrix} W_1^r \\ W_2^r \end{bmatrix},$$

assim:

$$\nabla u(\Upsilon^l) \cdot \nabla u(I^d) = \frac{\partial u(\Upsilon^l)}{\partial r} \frac{\partial u(I^d)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u(\Upsilon^l)}{\partial \theta} \frac{\partial u(I^d)}{\partial \theta} = \frac{W_1^r W_1^I}{\sigma^2} + \frac{W_2^r W_2^I}{\sigma^2}.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \int_{\bar{r}_{i-1/2}}^{\bar{r}_{i+1/2}} \int_{\theta_{j-1/2}}^{\theta_{j+1/2}} \nabla u(\Upsilon^l) \cdot \nabla u(I^d) v dA &= \int_{\bar{r}_{i-1/2}}^{\bar{r}_{i+1/2}} \int_{\theta_{j-1/2}}^{\theta_{j+1/2}} \frac{W_1^r W_1^I}{\sigma^2} + \int_{\bar{r}_{i-1/2}}^{\bar{r}_{i+1/2}} \int_{\theta_{j-1/2}}^{\theta_{j+1/2}} \frac{W_2^r W_2^I}{\sigma^2} \\ &\simeq \frac{1}{\sigma_{ij}^2} h_r h_\theta \left(r W_1^r W_1^I \right)_{ij} + \frac{1}{\sigma_{ij}^2} h_r h_\theta \left(r W_2^r W_2^I \right)_{ij} \\ &= \frac{1}{\sigma_{ij}^2} h_r h_\theta r_i \left(W_{1ij}^r W_{2ij}^I + W_{1ij}^r W_{2ij}^I \right) \end{aligned}$$

Finalmente, a expressão do Jacobiano em termos do fluxo fica:

$$J_{dl,k} = -\frac{1}{\sigma_{ij}^2} h_r h_\theta r_i \left(W_{1ij}^r W_{1ij}^I + W_{2ij}^r W_{2ij}^I \right), \quad (5.5)$$

onde os sub - índices ij relacionam um volume finito V_k , como mostra a figura 5.4.

Na tabela 5.4 comparamos o desempenho no cálculo do Jacobiano em termos do fluxo e quando usamos o método *standard* em uma distribuição homogênea de condutividade.

Tabela 5.4 Tempo computacional no cálculo do Jacobiano.

Volumes Finitos	Em termos do fluxo	Método <i>standard</i>
M*N	Tempo(s)	Tempo(s)
512	1.015625	2.96125
2048	3.921875	38.6175
8192	18.203125	185.5615

Na tabela 5.4 podemos observar que o cálculo do Jacobiano com a metodologia que usa os termos das componentes do fluxo gasta aproximadamente 10 vezes menos tempo computacional daquele que usa o método *standard*.

5.7 Aproximação Gauss - Newton

Para resolver o problema inverso usamos a aproximação Gauss - Newton com regularização de *Tikhonov* [59], onde consideramos as seguintes informações:

Aproximação inicial σ_0 : Por se tratar de um problema com dados numéricos o valor máximo e mínimo da condutividade é conhecido. Assim consideramos $\sigma_0 = (\max(\sigma) + \min(\sigma))/2$. Em problemas reais também é possível conhecer os valores máximos e mínimos das variáveis. Uma outra alternativa para se obter uma primeira distribuição de condutividade é dada em (3.12).

Injeção de corrente: Neste problema consideramos padrões de corrente do tipo pula 1.

Parâmetro de regularização α e matriz de regularização R : Estas informações são dadas a priori e geralmente se usam as informações das variáveis do problema específico.

Para resolver o problema direto usamos o esquema HA com normalização pela fronteira e para calcular o Jacobiano usamos a metodologia que usa as componentes do fluxo.

O processo iterativo de Gauss – Newton com regularização de *Tikhonov* tem a seguinte forma:

para $i = 1 : \max it$

$$\sigma_i = \sigma_{i-1} + \delta\sigma_{i-1},$$

$$\delta\sigma_{i-1} = (J_{i-1}^T J_{i-1} + \alpha R^T R)^{-1} [J_{i-1}^T (V - U_{\sigma_{i-1}}) - \alpha R^T R \sigma_{i-1}]$$

onde $\max it$ é um número máximo, pré-especificado de iterações.

Resultados:

Usando: $\alpha = 10^{-3}$, $\sigma_0 = (\max(\sigma) + \min(\sigma)) / 2$ e 10 iterações. O problema é reconstruir a seguinte distribuição de condutividade:

$$\sigma(r, \theta) = \begin{cases} 0.1, & 0 < r < r_m, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0.3, & r_m \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ r_m = r_{M/2} + 0.5r_{M+1} \end{cases}$$

A figura 5.5 mostra a reconstrução de condutividade σ , onde consideramos duas matrizes de regularização. A figura 5.5 (a) usa a matriz de regularização $R = I$ e a figura 5.5 (b) considera uma matriz de regularização R com pesos, a qual uniformiza as mudanças bruscas de condutividade em regiões circulares. O tempo computacional total que usa a metodologia descrita para se obter uma reconstrução de condutividade é aproximadamente 17s e o erro das voltagens nos eletrodos quando usamos a distribuição de condutividade exata e a reconstrução correspondente é de aproximadamente 0.001.

Da figura 5.5 podemos dizer que os métodos usados para calcular o problema direto e inverso produzem resultados razoáveis. Em ambos os casos a interface é localizada. O parâmetro e as matrizes de regularização têm uma relação direta com o tipo de resultado a ser obtido. Em algumas aplicações se precisa de imagens com uma resolução onde não se considere as mudanças bruscas de condutividade (resolução priorizando suavidade), já em outras aplicações as mudanças de condutividade (ou resistividade) trazem informações valiosas [11].

6.- CONCLUSÕES

Nos capítulos 1 e 2 formulamos a técnica da TIE para a reconstrução de imagens da distribuição da condutividade ou resistividade do interior de um domínio condutor. Assim precisamos resolver o problema direto e inverso numericamente. Também temos visto que o sucesso da técnica da TIE depende fortemente de resolver o problema direto eficientemente, pois ele é “chamado” varias vezes quando o problema inverso é resolvido como um processo iterativo. Por esta razão, no capítulo 4, se desenvolveu algumas técnicas numéricas para aproximar o problema direto onde as variáveis (condutividade ou resistividade) tem diferentes propriedades como de serem contínuas ou descontínuas. Assim, propomos alguns métodos de solução usando métodos numéricos como diferenças finitas, volumes finitos e volumes finitos modificados, onde podemos concluir que o uso destes métodos numéricos produz aproximações de segunda ordem. Os métodos propostos para tratar o problema de descontinuidade das variáveis em coordenadas cartesianas e polares (HA e HIA), são duas formas de abordar a aproximação numérica do problema direto tendo cada uma suas vantagens e desvantagens como custo computacional, tratamento da matriz do sistema linear e erro de convergência. Outra propriedade interessante na metodologia adotada para a aproximação das variáveis é o calculo nodal (e não por elementos), o qual se traduz em poupar tempo computacional.

Também temos visto que o calculo do Jacobiano (ou matriz de sensibilidade) é essencial na TIE, pois esse cálculo gasta uma parcela grande do tempo computacional total. Assim propomos uma maneira de calcular o Jacobiano em termos do fluxo o qual otimiza o tempo computacional total.

Durante o desenvolvimento do trabalho nos deparamos com a necessidade de generalizar a aproximação numérica do problema direto em domínios onde sejam possíveis aplicações mais realistas. Assim surgiram algumas situações para estudos posteriores, por exemplo, a modelagem na fronteira levando em consideração o contato de impedância e o fato da voltagem ser constante nos eletrodos o qual resulta na formulação do modelo completo de eletrodos. Também se apresentou a tarefa de aplicar a metodologia que usa a TIE em

domínios com fronteira que podem ser uma deformação do disco o qual conduz a aplicações médicas mais realistas. Contudo, testes onde se use dados experimentais provenientes de um sistema de tomografia por impedância elétrica devem validar os nossos códigos desenvolvidos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Adler. A, Lionheart.R, *Uses and abuses of EIDORS:An extensible software base for EIT*, Manchester Institute for Mathematical Sciences, The University of Manchester, UK, 2008.
- [2] Borcea. L, *Electrical impedance tomography*, Inverse Problems, pp. 99 -136, 2002.
- [3] Barber. D, Brown. B, *Errors in reconstruction of resistivity images using a linear reconstruction technique*, Clinical Physics and Physiological Measurement **9**, pp. 101-104, 1988.
- [4] Barber. D, Brown. B, *Applied potential tomography*, Journal of Physical Engineering: Science Instrumentation **17**, pp. 723-733 (1984).
- [5] Barber. D, Brown. B, Freeston. I, *Imaging spatial distributions of resistivity using potential tomography*, Electronic Letters **19**, pp. 993-935, 1983.
- [6] Betrero. M, Boccacci. P, *Introduction to inverse problems in imaging*, IoP, Bristol, 1998.
- [7] Breckon. W, *Image reconstruction in Electrical Impedance Tomography*, Ph.D. thesis, Oxford polytechnic, Oxford, 1990.
- [8] Calderon. A, *On an inverse boundary value problem*, In the proceeding of a conference on Numerical Analysis and Its Applications to Continuum Physics, pp. 67-73, 1980.
- [9] Cheney. M, Isaacson. D, *Distinguishability in impedance imaging*, IEEE Transactions in Biomedical Engineering **39**, pp. 852-860, 1992.
- [10] Cheney. M, Isaacson. D, Newell. J. et al, *NOSER: An algorithm for solving the inverse conductivity problem*, International Journal of Imaging Systems and Technology **2**, pp. 66-75, 1990.
- [11] De Lima. C, *Estudo da obtenção de imagens de tomografia por impedância elétrica do pulmão pelo método de otimização topológica*, Ph.D, tese de doutoramento, POLI-USP, 2006.
- [12] Dorn. O, Miller. E, Rappaport. C, *A shape reconstruction methods for electromagnetic tomography using adjoint fields and level set*, Inverse Problems **16**, no 5, pp. 1119-1156, 2000.
- [13] Erol. R, Mangnall. Y, et al, *Identifying esophageal contents using electrical impedance tomography*, Physiological Measurement, pp. 253-261, 1995.
- [14] Ewing. R, Iliev. O, Lazarov. R, *A modified finite volume approximation of second-order elliptic equations with discontinuous coefficients*, SIAM J. Scientific Computational, pp.1335-1351, 2001.

- [15] George. P, Mahdi. M, et al., *Electrical impedance tomography (EIT) in pulmonary measurement: a review of applications and research*, Proceedings of the fifth IASTED International Conference: biomedical engineering, pp. 221-230, 2007.
- [16] Hadamard. J, *Le problème de Cauchy*, Hemann. Edit., Paris, 1932.
- [17] Hansen. P, *Regularization tools – A Matlab package for analysis and solution of Discrete ill-posed problems*, Departament of mathematical modeling, Technical University of Denmark, Denmark, 2001.
- [18] Hua. P, Woo. J, Topkins. W, *Using compound electrodes in electrical impedance tomography*, *IEEE Transactions of Biomedical Engineering* **40**, pp. 335-343, 1993.
- [19] Hunt. A, Pendleton. J, Ladam. Y, *Visualization of two phase gas-liquid pipe flows using electrical capacitance tomography*, Proceedings ESDA2004, Manchester, 2004.
- [20] Iliev. O, *On second-order-accurate discretization and its fast solution with a pointwise multigrid solver*, *IMA Journal of Numerical Analysis*. pp. 391-406, 2002.
- [21] Isakov. V, *Uniqueness and stability in multi-dimensional inverse problems*, *Inverse Problems* **9**, pp. 579-621, 1993.
- [22] Isaacson. D, *Distinguishability of conductivities by electric current computed tomography*, *IEEE Transactions on Medical Imaging MI-5*, pp. 91-95, 1986.
- [23] Isaacson. D, Gisser. G, Neweel. J, *Current topics in impedance imaging*, *Clinical Physics and Physiological Measurement* **8**, pp. 39-46, 1987.
- [24] Jon. F, Horowitz. L, et al, *Temperature dependence of tissue impedivity in electrical impedance tomography of cryosurgery*, *IEEE transactions on biomedical engineering*, pp. 695-701, 2005.
- [25] Kaasschieter. E, *Preconditioned conjugated gradients for solving singular systems*, *Journal of computational and applied mathematics* **24**, pp. 265-275, 1988.
- [26] Kaipio. J, Karjalainen. E, Vauhkonen,. M, *State estimation in time-varying electrical impedance tomography*, *Annals of New York Academy of Science* **873**, pp. 430-439, 1999.
- [27] Kleinermann. F, Avis. N, Alhargan,. F, *Analytical solution to the three-dimensional electrical forward problem for an elliptical cylinder*, *Physiological Measurement* **23**, pp. 141-147, 2002.
- [28] Khon. R, Vogelius. M, *Determining conductivity by boundary measurements*, *Communications in Pure and Applied Mathematics* **37**, pp. 113-123, 1984.
- [29] Le Veque. R, Li. Z, *The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources*, *SIAM J. Numerical Analysis*, pp. 1019- 1044, 1994.

- [30] Levenberg. K, *A method for the solution of certain problems in least squares*, *SIAM Journal of Numerical Analysis* **16**, pp. 588-604, 1944.
- [31] Lehr. J, *A vector derivation useful in impedance plethysmographic field calculation*, Short communications, *IEEE Transactions in Biomedical Engineering*, 1972.
- [32] Lionheart. W, *EIT reconstruction algorithms: pitfalls, challenges and recent developments*, *Physiological Measurement*, pp. 125-142, 2004.
- [33] Lionheart. W, Aridge. S, Schweiger. M, et al, *Electrical Impedance and Diffuse Optical Tomography Reconstruction Software*, *Proceeding of the 1st world congress on industrial process tomography*, pp. 150-155, 1999.
- [34] Lionheart. W, *Reconstruction algorithms for permittivity and conductivity imaging*, *Proceeding of the 2nd congress on industrial process tomography*, pp. 4-11, 2001.
- [35] Lionheart. W, *Conformal uniqueness results in anisotropic electrical impedance imaging*, *Inverse problems* **13**, pp. 125-134, 1997.
- [36] Ming-Chih. L, Yu-Hou. T, *A fast iterative solver for the variable coefficient diffusion equation on a disk*, *Manuscript of Comp. Phys.* pp. 1-13, 2005.
- [37] Ming-Chih. L, Chin-Tien. L, Yu-Hou. T, *An efficient semi-coarsening multigrid method for variable diffusion problems in cylindrical coordinates*, *App. Num. Math*, Vol.**57**, Issue 5-7. pp. 801-810, 2007.
- [38] Metherall. P, Barber. D, Smallwood. R, et al, *Three dimensional electrical impedance tomography*, *Nature* **380**, pp. 509-512, 1996.
- [39] Murai. T, Kagawa. Y, *Electrical impedance computed tomography based on a finite element model*, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* **32**, pp. 177-184, 1985.
- [40] McArdle. F, Brown. B, et al, *An in - vivo examination of cardiac impedance changes imaged by cardiardiosyntchnous averaging*, *Clinical and physiological applications of electrical impedance tomography*, London, D. Holder, 1993.
- [41] Parker. L, *The inverse problem of resistivity sounding*, *Geophysics*, pp. 2143-2158, 1984.
- [42] Paulson. K, Breckon. W, Pidcock. M, *Electrode modeling in electrical impedance tomography*, *SIAM Journal of Applied Mathematics* **52**, pp. 1012-1022, 1992.
- [43] Pidcock. M, Paulson. K, Breckon. W. *A hybrid phantom for eit*, *CAIT workshop proceeding*, York, UK, 1991.
- [44] Pinheiro. P, *Three-dimensional image reconstruction algorithm for electrical resistance tomography*, Ph.D.thesis, UMIST, Manchester, 1994.

- [45] Polydorides. N, Lionheart. W, *A MATLAB toolkit for three-dimensional electrical impedance tomography: a contribution to the EIDORS project*, Measurement Science and technology **13**, pp. 1871-1883, 2002.
- [46] Rolnik. V, *Contribuição ao desenvolvimento de uma nova técnica de reconstrução tomográfica para sondas de visualização direta*, Ph. D, tese de doutoramento, EESC-USP, 2003.
- [47] Saukh. Sergey, *Incomplete choleski factorization in fixed memory with flexible drop – tolerance strategy*, IEEE International workshop on intelligent data acquisition and advanced computing systems: Technology and applications, Ukraine, pp. 87 – 93, 2003.
- [48] Samarskii, A., A., *Theory of difference schemes*, Moscou, Nauka, 2001.
- [49] Sylvester. J, Uhlmann. G, *A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem*, Annals of Mathematics **125**, pp. 153-169, 1987.
- [50] Schweiger. M, Arridge. S, Delpy. D, *Applications of the finite element method for the forward and inverse models in optical tomography*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **3**, pp. 263-283, 1993.
- [51] Seyidmamedov, Z. Ebru. O, *A mathematical model and numerical solution of interface problems for steady state heat conduction*, Mathematical Problems in Engineering, pp. 1-18, 2006.
- [52] Sylvester. J, Uhlmann. G, *A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem*, Annals of Mathematics **125**, pp. 153-169, 1987.
- [53] Somersalo. E, Cheney. M, Isaacson. D, *Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography*, SIAM Journal of Applied Mathematics **52**, pp. 1023-1040, 1992.
- [54] Schweiger. M, Arridge. S, Delpy. D, *Applications of the finite element method for the forward and inverse models in optical tomography*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **3**, pp. 263-283, 1993.
- [55] Tanaka. H, Siqueira. R, et al, *Fuzzy modeling of electrical impedance tomography images of the lungs*, Clinics, pp. 363-370, 2007.
- [56] Tikhonov. A, Arsenin. V, *Solutions of ill-posed problems*, Winston, Washington DC, 1997.
- [57] Vauhkonen. M, *Electrical impedance tomography and prior information*, Ph.D. thesis, Kuopio University, Kuopio, 1997.
- [58] Vauhkonen. M, Karjalainen. P, Kaipio. J, *A Kalman filter approach to track fast Impedance changes in electrical impedance tomography*, IEEE Transactions of Biomedical Engineering **45**, pp. 486-493, 1998.

- [59] Vauhkonen. M, Vadász. D, Karjalainen. P, et al , *Tikhonov regularization and prior information in electrical impedance tomography*, IEEE Transactions on Medical Imaging **17**, no 2, pp. 285-293, 1998.
- [60] Vauhkonen. M, Lionheart. M, Heikkinen. L, et al. *A Matlab package for the EIDORS project to reconstruct two dimensional EIT images*, Physiological Measurement **22**, pp. 107-111, 2001.
- [61] Wang. M, *Inverse solutions for electrical impedance tomography based on conjugate gradients methods*, Meas. Sci. Technol. pp. 101-117, 2002.
- [62] Wang. M, *Electrical impedance tomography on conducting walled process vessels*, Ph.D. thesis, UMIST, Manchester, 1994.
- [63] Webster. J, *Electrical impedance tomography*, Adam Hilger, Bristol, 1990.
- [64] Woo. E, Webster. J, Tompkins. W, *Measuring lung resistivity using electrical impedance tomography*, IEEE Transactions in Biomedical Engineering **39**, pp. 756-760, 1992.
- [65] Wright. M, *Why a pure primal Newton barrier step may be infeasible*, Tech, report, AT & Bell Laboratories, New Jersey, 1993.
- [66] Yousef. S, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, SIAM, 2nd. Ed, 2007.
- [67] Yorkey. T, Webster. J, Tompkins. W, *Comparing reconstruction algorithms for electrical impedance tomography*, IEEE Transactions in Biomedical Engineering **34**, pp. 843 – 852, 1972.
- [68] Zhilin. W, Wei-Cheng. W, I-Lang. C. et al, *New formulation for interface problems in polar coordinates*, SIAM Journal on Scientific Computing. pp. 224-245, 2003.
- [69] Zlochiver. S, Rosenfeld. M, *Induced-Current Electrical impedance tomography: A 2-D theoretical simulation*, IEEE Transactions in Medical Imaging, pp.1550-1661, 2003.

TRATAMENTO DA CONDIÇÃO DE FRONTEIRA TIPO NEUMANN

Problemas unidimensionais

Consideramos o seguinte problema:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & a < x < b \\ u'(a) = \alpha, & u'(b) = \beta \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Condição de compatibilidade:

Integrando em (a, b) a equação de (A.1):

$$-\int_a^b u''(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$

Então:

$$-(u'(b) - u'(a)) = \int_a^b f(x)dx,$$

assim temos:

$$\int_a^b f(x)dx = -(\beta - \alpha) \quad (\text{A.2})$$

A equação (A.2) é chamada de condição de compatibilidade. Se esta condição não for satisfeita então não existe solução do problema (A.1).

Soluções de problema (A.1)

Sejam v, w soluções do problema (A.1) então:

$$\begin{cases} -v''(x) = f(x) + cd.fr \\ -w''(x) = f(x) + cd.fr \end{cases},$$

onde $cd.fr$ = condição de fronteira.

Assim: $-(v - w)''(x) = 0$, então $-(v - w)'(x) = c$, onde c é uma constante. Mas:

$$\begin{cases} (v - w)'(a) = v'(a) - w'(a) = \alpha - \alpha = 0 \\ (v - w)'(b) = v'(b) - w'(b) = \beta - \beta = 0 \end{cases},$$

então:

$(v - w)'(x) = 0$, onde temos que:

$$v(x) - w(x) = c, \quad (\text{A.3})$$

sendo c é uma constante.

De (A.3) concluímos que o problema (A.1) tem infinitas soluções e que duas soluções diferem em uma constante. Assim, para escolher uma solução é preciso fazer alguma normalização. Por exemplo:

$$\begin{cases} \text{Seja: } u(b) - u(a) = \gamma \\ \left(u(b) - \frac{\gamma}{2}\right) - \left(u(a) - \frac{\gamma}{2}\right) = 0 \\ v(x) = u(x) - \frac{\gamma}{2} \end{cases}$$

Note que a solução $v(x)$ tem a propriedade: $v(b) - v(a) = 0$.

Solução numérica do problema (A.1)

Suponha $a = 0, b = 1$. Fazemos a seguinte subdivisão do intervalo $[0, 1]$:

$$x_i = (i - 0.5)h, \quad 1 \leq i \leq M, \quad \text{onde } h = \frac{1}{M}, \quad x_M + 0.5h = 1.0.$$

A discretização da equação em (A.1) com o método de diferenças finitas centrais fica:

$$\begin{cases} -(u')'(x_i) = f(x_i), \quad 1 \leq i \leq M \\ -\left(\frac{u'_{i+1/2} - u'_{i-1/2}}{h}\right) = f_i = \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Sistema linear:

Para $i = 1$

$$-\frac{(u'_{3/2} - \alpha)}{h} = f_1, \quad \text{então:}$$

$$\frac{u_1 - u_2}{h^2} = f_1 - \frac{\alpha}{h}$$

Para $2 \leq i \leq M-1$

$$\frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} = f_i$$

Para $i = M$

$$-\left(\frac{\beta - u'_{M-1/2}}{h}\right) = f_M$$

$$\frac{u_M - u_{M-1}}{h^2} = f_M + \frac{\beta}{h}$$

Assim o sistema linear fica:

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{M-2} \\ u_{M-1} \\ u_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 - \frac{\alpha}{h} \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{M-2} \\ f_{M-1} \\ f_M + \frac{\beta}{h} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

O sistema linear (A.5) é da forma:

$$Au = b, \quad (\text{A.6})$$

onde podemos mostrar que:

- A é simétrica.
- $N(A) = \text{span}\{e\}$, $e = (1, 1, \dots, 1, 1)^T$.

Assim A é não inversível. Também temos que:

$$Au = b \rightarrow e^T Au = e^T b \rightarrow (Ae)^T u = e^T b \rightarrow e^T b = 0, \quad (\text{A.7})$$

assim: $\text{Im}(A) = \{w / e^T w = 0\} = \text{Espaço imagem de } A$.

Porém, do sistema linear (A.6):

$$e^T b = \sum_{i=1}^M f_i + \left(\frac{\beta - \alpha}{h} \right) = \frac{1}{h} \left(h \sum_{i=1}^M f_i + (\beta - \alpha) \right) = \frac{1}{h} \left[\int_a^b f(x) dx + (\beta - \alpha) - \frac{h^3}{24} f''(t_h) \right].$$

Mas, pela condição de compatibilidade (A.2):

$$e^T b = -\frac{h^2}{24} f''(t_h),$$

onde temos que, geralmente, $e^T b \neq 0$. Assim $b \notin \text{Im}(A)$.

Para assegurar (A.7) escolhemos o lado direito da seguinte maneira:

Seja:

$$\tilde{b} = b - \left(\frac{e^T b}{e^T e} \right) e, \quad (\text{A.8})$$

com essa escolha:

$$e^T \tilde{b} = e^T b - \left(\frac{e^T b}{e^T e} \right) e^T e = e^T b - e^T b = 0.$$

Assim:

* É necessário projetar b na $\text{Im}(A)$ e quando $e = (1, 1, \dots, 1, 1)$ temos que:

$$\tilde{b}_i = b_i - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M b_i. \quad (\text{A.9})$$

Portanto, em vez de resolver o sistema linear (A.6) resolvemos o sistema:

$$Au = \tilde{b} \quad (\text{A.10})$$

O sistema (A.10) tem uma solução mais ela não é única. Duas soluções diferem em uma constante.

Também, seja $\bar{u}$ a solução do sistema linear (A.10) então uma solução numérica “normalizada” é:

$$\tilde{u} = \bar{u} - \frac{e^T u}{e^T e} e,$$

onde se $e = (1, 1, \dots, 1, 1)$, temos:

$$\tilde{u} = \bar{u} - \sum_{i=1}^M \bar{u}_i / M$$

Assim temos:

$$\begin{cases} v(x) = u(x) + c_1 \\ \tilde{u}_i = \bar{u}_i + c_2 \end{cases},$$

onde $v(x)$ é a solução exata normalizada e $\tilde{u}$ a solução aproximada. O erro entre esses dois vetores produz:

$$v_i - \tilde{u}_i = u_i - \bar{u}_i + \gamma.$$

Em conseqüência, temos que fazer um refinamento de malha até obter o coeficiente γ e comparar v_i e $\tilde{u} + \gamma$.

No caso da equação de difusão em coordenadas polares:

$$\frac{-1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\sigma(r, \theta) r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\sigma(r, \theta)}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \right] = f(r, \theta), \quad (r, \theta) \in \Omega, \quad (\text{A.11})$$

munida da condição de fronteira tipo Neumann:

$$\left\{ \sigma(1, \theta) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=1} = g(\theta), \quad \text{em } \partial\Omega. \right. \quad (\text{A.12})$$

Seja $u(r, \theta)$ uma solução do problema. Então, podemos fazer as seguintes escolhas para termos uma normalização da solução da equação (A.11) e a condição de fronteira (A.12).

1.- Seja:

$$\begin{aligned} v(r, \theta) &= u(r, \theta) - \frac{1}{A(\Omega)} \int_0^1 \int_0^{2\pi} u(r, \theta) r dr d\theta = \\ &= u(r, \theta) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} u(r, \theta) r dr d\theta = u(r, \theta) - \frac{1}{\pi} \left(\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \int_{\theta_{j-1/2}}^{\theta_{j+1/2}} u(r, \theta) r dr d\theta \right), \\ &\stackrel{\text{Aproximação pela fórmula do ponto médio}}{=} u(r, \theta) - \frac{1}{\pi} \left(h_r h_\theta \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N u(r_i, \theta_j) r_i \right) \end{aligned}$$

onde $A(\Omega)$ é a área do domínio Ω e substituindo os valores de h_r e h_θ temos:

$$v(r, \theta) = u(r, \theta) - \frac{2}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N u_{ij} r_i. \quad (\text{A.13})$$

Assim, (A.13) constitui uma normalização.

2.- Uma outra escolha é a seguinte:

$$v(r, \theta) = u(r, \theta) - \frac{1}{C(\partial\Omega)} \int_0^{2\pi} u(1, \theta) d\theta =$$

$$\stackrel{\text{Aproximação pela fórmula dos trapezios}}{\approx} u(r, \theta) - \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L u(1, j \frac{2\pi}{L}), \quad (\text{A.14})$$

onde L é suficientemente grande.

Seja o sistema linear:

$$A\bar{u} = \tilde{b},$$

onde A é simétrica e $\tilde{b} = b - \frac{e^T b}{e^T e} e$.

Fazendo uma normalização com a solução aproximada:

$$\tilde{u} = \bar{u} - \frac{e^T u}{e^T e} e,$$

assim:

$$\tilde{u} = \bar{u} - \frac{1}{MN} \sum_{k=1}^{MN} \bar{u}_{ij}. \quad (\text{A.15})$$

Então podemos comparar as soluções exatas normalizadas dadas em (A.13) ou (A.14) com a solução numérica dada em (A.15).

O JACOBIANO EM TERMOS DA VARIAÇÃO DO POTENCIAL

Sejam: $I^d = [I_1^d, I_2^d, \dots, I_L^d]^T$, $d = 1, 2, \dots, P$ os padrões de corrente injetados através dos L eletrodos localizados na fronteira de um domínio condutor Ω e $\Upsilon^l = [\Upsilon_1^l, \Upsilon_2^l, \dots, \Upsilon_L^l]^T$, $l = 1, 2, \dots, L$ os padrões de correntes chamados dipolos.

Associamos as distribuições de potencial u^d e Ψ^l como sendo soluções dos problemas:

$$\nabla \cdot \sigma \nabla u^d = 0, \quad \text{em } \Omega, \quad (\text{B.1})$$

junto à condição de fronteira:

$$\sigma \frac{\partial u^d}{\partial \nu} = I^d = \begin{cases} \frac{I_l}{|e_l|}, & x \in e_l, l = 1, 2, \dots, L \\ 0, & x \in \partial\Omega \setminus \bigcup_{l=1}^L e_l \end{cases},$$

e

$$\nabla \cdot \sigma \nabla \Psi^l = 0, \quad \text{em } \Omega, \quad (\text{B.2})$$

onde à condição de fronteira é:

$$\sigma \frac{\partial \Psi^l}{\partial \nu} = \Upsilon^l = \begin{cases} \frac{-1}{|e_l|}, & x \in e_l, l = 1, 2, \dots, L \\ \frac{1}{|e_l|}, & x \in e_{l+1}, l = 1, 2, \dots, L \\ 0, & x \in \partial\Omega \setminus \bigcup_{l=1}^L e_l \end{cases},$$

respectivamente.

Sabemos que dados os potenciais elétricos $\phi, \mathcal{G}$:

$$\nabla \cdot (\phi \sigma \nabla \mathcal{G}) = \phi \nabla \cdot (\sigma \nabla \mathcal{G}) + \sigma \nabla \phi \cdot \nabla \mathcal{G}, \quad (*)$$

e supondo que os potenciais $\phi, \mathcal{G}$ satisfazem (B.1) ou (B.2), então:

$$\iint_{\Omega} \nabla \cdot (\phi \sigma \nabla \mathcal{G}) dV = \iint_{\Omega} \sigma \nabla \phi \cdot \nabla \mathcal{G} dV ,$$

usando o teorema da divergência:

$$\iint_{\Omega} \sigma \nabla \phi \cdot \nabla \mathcal{G} dV = \int_{\partial\Omega} \phi \sigma \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \nu} ds , \quad (**)$$

onde ν é o vetor normal unitário.

De (**) temos:

$$\iint_{\Omega} \sigma \nabla u^d \cdot \nabla \Psi^l dA = \int_{\partial\Omega} u^d \sigma \frac{\partial \Psi^l}{\partial \nu} ds = \int_{\partial\Omega} u^d \Upsilon^l ds = u_{l+1}^d - u_l^d$$

Definimos operadores não lineares como sendo:

$$\left[F(\sigma, I^d) \right]_l = u_{l+1}^d(\sigma, I^d) - u_l^d(\sigma, I^d) \quad (\text{B.3})$$

De (**):

$$\iint_{\Omega} \sigma \nabla \Psi^l \cdot \nabla u^d dA = \int_{\partial\Omega} \Psi^l I^d ds ,$$

assim, fazendo $\left[F(\sigma, I^d) \right]_l = F_l^d(\sigma)$:

$$F_l^d(\sigma) = \int_{\partial\Omega} \Psi^l(\sigma) I^d ds ,$$

considerando:

$$\sigma + \delta\sigma \Rightarrow \Psi^l(\sigma + \delta\sigma) = \Psi^l(\sigma) + \delta\Psi^l \quad (+)$$

então:

$$F_l^d(\sigma + \delta\sigma) = F_l^d(\sigma) + \int_{\partial\Omega} \delta\Psi^l(\sigma) I^d ds , \quad (++)$$

substituindo (+) em (B.2):

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \Psi^l) + \nabla \cdot (\sigma \nabla (\delta \Psi^l)) + \nabla \cdot (\delta \sigma \nabla \Psi^l) + \nabla \cdot (\delta \sigma \nabla (\delta \Psi^l)) = 0.$$

Considerando $\delta \sigma, \delta \Psi^l$ mudanças muito pequenas vamos desprezar o último termo da equação anterior e fazemos a seguinte hipótese:

$$\delta \sigma = 0, \text{ em } \partial \Omega, \quad (\text{B.3})$$

então:

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma (\delta \Psi^l)) \simeq -\nabla \cdot (\delta \sigma \nabla \Psi^l) \\ \sigma \frac{\partial (\delta \Psi^l)}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = 0 \end{cases}. \quad (\text{B.4})$$

De (++):

$$\int_{\partial \Omega} \delta \Psi^l (\sigma) I^d ds = \int_{\partial \Omega} \delta \Psi^l \sigma \frac{\partial u^d}{\partial \nu} ds = \iint_{\Omega} \sigma \nabla (\delta \Psi^l) \cdot \nabla u^d dV,$$

e seguindo (*):

$$\nabla \cdot (u^d \sigma \nabla (\delta \Psi^l)) = \sigma \nabla (\delta \Psi^l) \cdot \nabla u^d + u^d \nabla \cdot (\sigma \nabla (\delta \Psi^l)), \quad (\text{B.5})$$

então:

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Omega} (\delta \Psi^l) I^d ds &= \iint_{\Omega} \sigma \nabla (\delta \Psi^l) \cdot \nabla u^d dV = \iint_{\Omega} \nabla \cdot (u^d \sigma \nabla (\delta \Psi^l)) dV - \iint_{\Omega} u^d \nabla \cdot (\sigma \nabla (\delta \Psi^l)) dV \\ &= \int_{\partial \Omega} u^d \sigma \frac{\partial (\delta \Psi^l)}{\partial \nu} ds - \iint_{\Omega} u^d \nabla \cdot (\sigma \nabla (\delta \Psi^l)) dV \\ (\text{de B.4}) &= - \iint_{\Omega} u^d \nabla \cdot (\sigma \nabla (\delta \Psi^l)) dV \\ (\text{também de B.4}) &= \iint_{\Omega} u^d \nabla \cdot (\delta \sigma \nabla \Psi^l) dA. \end{aligned}$$

De (*):

$$\nabla \cdot (u^d \delta \sigma \nabla \Psi^l) = u^d \nabla \cdot (\delta \sigma \nabla \Psi^l) + \delta \sigma \nabla \Psi^l \cdot \nabla u^d, \quad (\text{B.6})$$

então:

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial\Omega} (\delta\Psi^l) I^d ds &= \iint_{\Omega} u^d \nabla \cdot (\delta\sigma \nabla \Psi^l) dV = \iint_{\Omega} \nabla \cdot (u^d \delta\sigma \nabla \Psi^l) dV - \iint_{\Omega} \delta\sigma \nabla \Psi^l \cdot \nabla u^d dV \\
 &= \int_{\partial\Omega} u^d \delta\sigma \frac{\partial(\Psi^l)}{\partial\nu} ds - \iint_{\Omega} \delta\sigma \nabla \Psi^l \cdot \nabla u^d dV \quad . \\
 (de\ B.3) &= - \iint_{\Omega} \delta\sigma \nabla \Psi^l \cdot \nabla u^d dV
 \end{aligned}$$

Conseqüentemente:

$$\int_{\partial\Omega} (\delta\Psi^l) I^d ds = - \iint_{\Omega} (\delta\sigma) \nabla \Psi^l \cdot \nabla u^d dV ,$$

e usando (++):

$$F_l^d(\sigma + \delta\sigma) \simeq F_l^d(\sigma) - \iint_{\Omega} (\delta\sigma) \nabla \Psi^l \cdot \nabla u^d dV ,$$

Finalmente, discretizando o domínio Ω em ne volumes finitos, temos:

$$F_l^d(\sigma + \delta\sigma) \simeq F_l^d(\sigma) - \sum_{k=1}^{ne} (\delta\sigma_k) \iint_{\Omega_k} \nabla \Psi^l \cdot \nabla u^d dA .$$

Portanto:

$$\frac{\partial F_l^d}{\partial \sigma_k} = - \iint_{\Omega_k} \nabla \Psi^l \cdot \nabla u^d dA , \tag{B.7}$$

onde $d = 1, 2, 3, \dots, P$ padrões de corrente, $l = 1, 2, 3, \dots, L$ eletrodos e $k = 1, 2, 3, \dots, ne$ volumes finitos.