Hedge dinâmico de um *swap first-to-default*

Tatiana Iwashita

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Doutor em Ciências

Área de Concentração: Matemática Aplicada
Orientador: Prof. Dr. Pedro Paulo Serpa Schirmer

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, agosto de 2007

Hedge dinâmico de um
swap first-to-default

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida
e defendida por Tatiana Iwashita
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Pedro Paulo Serpa Schirmer (orientador)- IME-USP.
- Prof. Dr. Vladimir Belitsky - IME-USP.
- Profa. Dra. Celma de Oliveira Ribeiro - EP-USP.
- Prof. Dr. Marcos Eugênio da Silva - FEA-USP.
- Prof. Dr. Gerson Francisco - IFT-UNESP.

Resumo

O objetivo deste trabalho é desenvolver uma estratégia de hedge dinâmico de um *swap* FtD com n nomes, $n \geq 2$. A estratégia deve eliminar os riscos de mercado e de default, incluindo o risco de correlação. Neste sentido, a escolha do instrumento de hedge é fundamental.

A rolagem contínua de CDS é um instrumento de hedge que além de proteger contra os riscos envolvidos no contrato em questão, a estratégia gera recurso necessário e suficiente para que no instante do primeiro default, o vendedor do *swap* FtD cumpra com as obrigações dos contratos e não tenha perdas com os $(n-1)$ CDSs correspondentes aos nomes que sobreviveram e foram utilizados no hedge.

A estratégia de hedge é obtida através do Teorema de Representação de Martingais.

Palavras-chave: hedge dinâmico, *swap first-to-default*, risco de crédito.

Abstract

The objective of this work is to develop a dynamic hedging of first-to-default swap with n underlying names, $n \geq 2$. The strategy should eliminate market risk and default risk, including correlation risk. In this sense, the hedge instrument choice is essencial.

The continuous resettling strategy of CDS is a hedge instrument against risks in the contract and moreover it will generate necessary and sufficient income to hedger fulfill all contracts obligations and he doesn't have losses with the $(n-1)$ CDSs associated with the names that have survival and were used in the hedging.

The hedging strategy is obtained through Martingale Representation Theorem.

Keywords: dynamic hedging, first-to-default swap, credit risk.

Sumário

Lista de Símbolos **ix**

1 Introdução **1**

1.1 Risco de Crédito 1

1.2 Objetivo 5

1.3 Contribuições 6

1.4 Organização do Trabalho 6

2 Estratégia de Hedge com CDS **7**

2.1 Definições 7

2.2 Contexto com dois nomes 9

2.2.1 Valores dos Derivativos de Crédito 10

2.2.2 Representação Martingal 22

2.2.3 Hedge Dinâmico I 24

2.3 Contexto com n nomes 26

2.3.1 Valores dos Derivativos de Crédito 29

2.3.2 Representação Martingal 54

2.3.3 Hedge Dinâmico I - Caso Geral 55

3 Hedge com Rolagem Contínua de CDS **57**

3.1 Definições 58

3.2 Contexto com dois nomes 59

3.2.1 Valores dos Derivativos de Crédito 59

3.2.2 Rolagem Contínua de CDS 64

3.2.3 Hedge Dinâmico II 71

3.3 Contexto com n nomes 72

3.3.1 Valores dos Derivativos de Crédito 72

3.3.2 Rolagem Contínua de CDS 91

3.3.3 Hedge Dinâmico II - Caso Geral 91

4 Hedge Dinâmico com Taxa de Juros Estocástica **93**

4.1 Modelo 93

4.1.1 Valor do Bônus 94

4.2 Contexto com dois nomes 96

4.2.1 Valores dos Derivativos de Crédito 96

4.2.2 Rolagem Contínua de CDS 106

4.2.3 Hedge Dinâmico III 111

4.3 Contexto com n nomes 113

4.3.1 Valores dos Derivativos de Crédito 113

4.3.2 Rolagem Contínua de CDS 115

4.3.3 Hedge Dinâmico III - Caso Geral 115

5 Resultados da Simulação **117**

5.1 Conceitos 117

5.1.1 Cópula de Sobrevivência 118

5.1.2 Simulação dos Instantes de Default 121

5.2 Derivativos de Crédito 124

5.3 Hedge Dinâmico do *Swap* FtD 128

5.4 Análise do Parâmetro da Cópula 133

5.4.1 Análise de Sensibilidade 133

5.4.2 Estratégia conforme a Dependência 134

6 Conclusões **137**

6.1 Problemas em Aberto 138

Referências Bibliográficas **139**

Lista de Símbolos

$A_i = \{I_D, I_S\}$	parte do conjunto I'.
$CDS_c^{*i}(t, s_i^p(t))$	valor $CDS^{*i}(t)$ com *spread* $s_i^p(t)$, ver Seção 3.2.2.
$\Delta_{k,I'}$	conjunto das partes A_i de I', tal que $\|I_D\| = k$.
$F(\mathbf{t})$	função de distribuição dos n nomes.
$F(\mathbf{t}_{-i}, u)$	o i-ésimo componente de $\mathbf{t}$ é substituído por u.
$F(\mathbf{t}_{-i}, u; \mathbf{t}_{-I_D}, v)$	o i-ésimo componente de $\mathbf{t}$ é substituído por u e os componentes de $\mathbf{t}$ identificados pelos índices em I_D são substituídos por v.
$F_{i,I_D^k,I_S^p}(t, \tau_{I_D}, \mathbf{t})$	função de distribuição marginal das variáveis em I_D^k, I_S^p e i; o primeiro argumento se refere à variável i, o segundo, às variáveis em I_D^k e o terceiro, às variáveis em I_S^p.
$\mathcal{F}_t$	filtração gerada pelos processos da taxa de juros e dos indicadores de default do n nomes.
$G(\mathbf{t})$	função de sobrevivência dos n nomes.
$\mathcal{G}_t$	filtração gerada pelos processos indicadores de default dos n nomes, em t.
$\mathcal{G}'_t$	filtração gerada pelos processos indicadores de default dos n nomes, com $\tau_i > t$.
$h_i^{-I_D}(t)$	intensidade de default do nome i sob $\mathcal{G}'_t = \{\tau_{I_D} = \bar{\tau}_{I_D}; \tau_i > t; \tau_{I_S} > t\}$.
$\mathcal{H}_t$	filtração gerada pelo processo da taxa de juros estocástica.
I	conjunto dos n nomes.
$I' = I - \{i\}$	conjunto formado pelos nomes em I exceto o nome i.
I_D	conjunto dos nomes que tiveram o default até (inclusive) o instante t.
I_D^k	subconjunto de I_D, tal que $\|I_D^k\| = k$.
I_D^u	conjunto dos nomes que tiveram o default até o instante $u > t$.
$\|I_D\|$	cardinalidade do conjunto I_D, analogamente para $\|I_S\|$.

I_S	conjunto dos nomes que sobreviveram até o instante t, exceto o nome i.
I_S^p	subconjunto de I_S, tal que $\lvert I_S^p\rvert = p$.
I_S^u	conjunto dos nome que sobreviveram até o instante $u > t$.
λ_i	pseudo-intensidade de default do nome i.
$N_i(t) = \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}}$	processo indicador de default do nome i, (processo pontual).
$\partial_{I_D} G(\mathbf{t})$	derivada parcial da função $G(\mathbf{t})$ com relação às variáveis em I_D, (se $I_D = \emptyset$, então $\partial_{I_D} G(\mathbf{t}) = G(\mathbf{t})$).
$s_i^p(t) = s_i(t_-)$	*spread* do nome i $\mathcal{G}_t$-predizível.
$\sum_{I_S^k \subset I_S}$	somatório sobre todos os subconjuntos I_S^k de I_S, tal que $\lvert I_S^k\rvert = k$.
$\sum_{\substack{A_i \subset \Delta_{k,I'} \\ A_i = \{I_D, I_S\}}}$	somatório de todas partes A_i de I', tal que $\lvert I_D\rvert = k$.
$\mathbf{t} = (t_1, ..., t_n)$	vetor dos instantes de tempo.
$t \wedge \tau_i$	mínimo entre t e τ_i.
τ_i	instante de default no nome i.
τ_{I_D}	vetor com os instantes de default dos nomes em I_D.
$\tau_{(1)} = \min\{\tau_1, ..., \tau_n\}$	primeiro instante de default, $n \geq 2$.

Capítulo 1

Introdução

O risco de default é a possibilidade de uma contraparte em um contrato financeiro não cumprir com o compromisso contratual. Se isto de fato ocorrer, dizemos que a parte teve default ou o evento de default ocorreu.

O risco de crédito em uma carteira é decorrente tanto do evento de default como das mudanças inesperadas da qualidade do crédito dos tomadores de empréstimos. O risco de crédito pode estar associado ao risco da contraparte ou ao risco de uma terceira parte, isto é, uma entidade, que denominaremos *nome*, que não é uma parte em um dado contrato.

1.1 Risco de Crédito

Derivativos de Crédito

Os derivativos de crédito são instrumentos financeiros que permitem os participantes do mercado isolar e negociar o risco de crédito da terceira parte. O principal objetivo de um derivativo de crédito é transferir o risco da terceira parte, tanto completamente como parcialmente, entre as contrapartes.

O instrumento mais comum é o *swap* de crédito (*credit default swap*, CDS). Um CDS é um contrato *single-name* de troca no qual uma contraparte (o comprador da proteção) paga uma taxa pré-estabelecida denominada *spread* a outra contraparte (o vendedor da proteção) que, por sua vez, faz um pagamento ao comprador se o evento de default com relação ao nome de referência do contrato ocorrer durante o período estabelecido no *swap* de crédito.

Os riscos envolvidos neste *swap* de crédito são:

- risco de mercado devido à variação do valor do derivativo que não seja decorrente do default;

- risco de default do nome no qual o contrato foi escrito.

Outro tipo de derivativo de crédito é o contrato multinome. Assim como os derivativos *single-name*, os contratos multinome fornecem proteção contra o evento de default ao comprador, porém este contrato envolve vários nomes.

Alguns exemplos de derivativos multinome:

- *Swaps* de cesta de crédito (*basket default swaps*): são derivativos de crédito que estão relacionados a vários créditos subjacentes (nomes). O produto padrão é um contrato que oferece proteção contra os k primeiros eventos de default em uma cesta com n nomes, para $n \geq k$. Geralmente, esta cesta contém entre três e dez nomes. Este derivativo é denominado *swap k-to-default*.

  Em particular, para $k = 1$, temos o *swap first-to-default* (FtD). Neste contrato, o comprador paga uma taxa de proteção contra o primeiro evento de default entre n nomes.

- Obrigações de dívida garantidas (*collateralized debt obligation*, CDO): fornece proteção contra perdas em uma carteira de referência, também denominada *pool* de colateral, após as perdas superarem $x\%$ e forem inferiores à $y\%$, isto é, para um certo limite de perdas denominado *tranche*. Basicamente, os CDOs se baseiam em carteiras de emprésimos ou bônus, neste caso temos:

  - *collateralized loan obligation* (CLO): o *pool* de colateral consiste de empréstimos,

  - *collateralized bond obligation* (CBO): o *pool* de colateral contém bônus com risco de crédito.

  Estes produtos geralmente são utilizados por banco comercial, no qual ele pode reter a primeira porcentagem de perdas mas procura proteção para o restante da carteira. O termo CDO é utilizado em referência à estrutura completa das tranches de proteção que cobrem todas as perdas na carteira de referência.

Os riscos envolvidos nos contratos multinome são:

- risco de mercado devido à variação do valor do derivativo que não seja decorrente do default;

- risco de default. Estes estão divididos em:

  (i) risco de default de cada um dos n nomes;

  (ii) risco de correlação entre os nomes.

O risco de correlação surge através do contágio de default entre os nomes. Schönbucher [24] define a existência do contágio entre dois nomes por:

Definição: O *contágio de default* entre dois nomes A e B existe se no instante de default do nome A, o risco de default do nome B tem um salto, e se no instante de default do nome B, o risco de default do nome A tem um salto.

Ou seja, o risco de default em um contrato multinome não depende apenas do risco de cada nome não cumprir com as suas obrigações, mas também do contágio de default entre os nomes envolvidos neste contrato.

Portanto, para o hedge de um derivativo de crédito multinome é fundamental considerar o risco de correlação, a menos que os nomes sejam independentes.

Modelos Quantitativos

O evento de crédito é um evento aleatório cuja ocorrência afeta a possibilidade da contraparte em um contrato financeiro de cumprir com a obrigação contratual. A maior parte das pesquisas matemáticas dedicadas ao risco de crédito concentram-se na modelagem do instante aleatório no qual o evento de default ocorre, isto é, o instante de default.

O principal objetivo dos modelos quantitativos é proporcionar formas de apreçamento e hedge de contratos financeiros que são sensíveis ao risco de crédito. Neste sentido, temos duas metodogias:

- Modelos Estruturais: concentram-se na modelagem do risco de crédito específico de uma firma ou empresa. O evento de default ocorre sempre que uma variável estocástica, geralmente representando o valor do ativo, atravessa um certo limiar que representa os passivos.

  O principal objetivo é a modelar a evolução do valor e a estrutura de capital da firma.

  O primeiro trabalho neste sentido é Merton [17].

- Modelos de Forma Reduzida: nesta metodologia os eventos de crédito são especificados em termos de um processo de salto exogeneamente.

  Neste sentido mencionamos os *modelos baseados na intensidade* que concentram-se na modelagem do instante de default, assim como no cálculo de esperanças condicionais sob probabilidades neutras ao risco de funcionais do instante de default.

  Em risco de crédito, o conceito que envolve a probabilidade de um nome ter o default em um instante de tempo dado que ele sobreviveu até o instante anterior é denominado *intensidade de default*, de onde vem a denominação 'modelos baseados na intensidade'.

Exemplos: Lando [14], Schönbucher [23].

Nesta metodologia também temos os *modelos de migração de crédito* que modelam as migrações entre classes de ratings de crédito.

Exemplo: Duffie [6].

Hedge Dinâmico de um *Swap* de Cesta de Crédito

Nesta tese utilizamos o modelo baseado na intensidade para desenvolver uma estratégia de hedge dinâmico de um *swap* FtD com n nomes, para $n \geq 2$. Questões relacionadas ao hedge de um derivativo de crédito foram abordadas pelos trabalhos citados a seguir.

Rutkowski [1] obtém os valores dos derivativos de crédito sob a hipótese de independência entre os nomes. Neste caso, a intensidade de default é descrita por um função contínua e um dos principais resultados sob esta hipótese é a representação martingal do valor do derivativo de crédito, o que permite escrevê-los em função dos fatores de risco.

Entretanto, sob a hipótese de independência entre os nomes, Rutkowski [1] exclui o risco de correlação, considerando apenas os riscos decorrentes à variação da taxa de juros (estocástica) e ao default dos nomes do derivativo multinome.

O efeito do risco de correlação é explorado por Schönbucher [24] através da intensidade de default de um nome i. No contexto com n nomes, ele define a intensidade no instante t, condicionada à informação sobre os defaults de todos os nomes, de forma que no instante em que um nome j, $j \neq i$, tem o default, a intensidade do nome i tem um salto, elevando a sua probabilidade de ocorrer o default em um instante posterior, incorporando dessa forma o efeito de contágio entre os nomes.

Conforme a definição no Capítulo 2, esta intensidade de default de um nome determinada com base na informação sobre os defaults dos n nomes é estocástica.

No hedge dinâmico de um *swap* de cesta de crédito temos Riboulet [20] e Schmidt [22].

Sob hipóteses simplificadoras, Riboulet [20] desenvolve uma estratégia de hedge de um derivativo de crédito escrito em dois nomes que fornece proteção contra os defaults dos dois nomes, utilizando-se o *swap* de crédito como instrumento de hedge. O risco de default é modelado através da probabilidade de sobrevivência dos nomes, condicionada à informação sobre o default. Entretanto, neste contexto não há o risco de mercado devido às hipóteses simplificadoras da modelagem dos valores dos derivativos.

O principal resultado deste trabalho é a representação martingal dos valores do contratos de crédito, o que permite escrevê-los em função dos fatores de risco, de forma que o hedge do derivativo

multinome é solução de um sistema linear.

O problema em não considerar do risco de mercado na estratégia de Riboulet [20] surge quando o valor do CDS é definido em função do *spread*, ou seja, da taxa pré-estabelecida no início do contrato e que é paga regularmente pela proteção contra o evento de default.

Esta taxa é determinada sob as condições do mercado, logo existe este risco.

No Capítulo 2 mostramos que a estratégia de Riboulet [20] não é adequada para um *swap k-to-default* quando a quantidade de nomes na cesta for maior do que k. Para o caso particular de um *swap firs-to-default*, o problema surge no primeiro instante de default. Neste instante, o *swap* de crédito do nome que teve o primeiro default entre os n nomes e o *swap* FtD são liquidados e o vendedor deste derivativo multinome permanece com os CDSs dos nomes que sobreviveram e foram utilizados no hedge. Porém a estratégia de hedge obtida com os *swaps* de crédito não garantirá que ele terá recurso suficiente para sair dos contratos antes do vencimento.

Schmidt [22] denomina o risco de mercado como o risco de *spread*. Uma estratégia de hedge deve considerar todos os riscos envolvidos no contrato. Schmidt [22] define os seguintes objetivos de uma estratégia de hedge de um *swap* de cesta de crédito:

- imunizar o derivativo contra as mudanças nos *spreads* dos nomes - risco de *spread*;
- gerar caixa suficiente a partir da estratégia de hedge para pagar o *spread* do contrato no instante que ele sai do contrato, sob as condições do mercado;
- quando o evento de default ocorrer, cumprir com as obrigações do contrato - risco de default.

Schmidt [22] propôs a utilização de rolagem contínua de CDS como instrumento de hedge de um *swap k-to-default* que, conforme obtemos no Capítulo 3, cumpre com os objetivos do hedge citados acima.

No entanto, Schmidt [22] considera que o *spread* é determinado de forma exógenea à análise.

1.2 Objetivo

O objetivo deste trabalho é desenvolver uma estratégia de hedge dinâmico de um *swap first-to-default* que cumpra com os objetivos do hedge apontados por Schmidt [22]. Para mostrar que a escolha do instrumento de hedge é essencial para alcançar estes objetivos, no Capítulo 2 desenvolvemos a estratégia de hedge com os *swaps* de crédito e apontamos os problemas desta estratégia.

Utilizando-se a rolagem contínua de CDS, desenvolvemos uma estratégia de hedge dinâmico de um *swap* FtD com n nomes, $n \geq 2$, de forma que o *spread* é determinado endogeneamente à análise

em dois contextos: um em que a taxa de juros é determinística e constante e o outro, considerando a incerteza da taxa de juros.

1.3 Contribuições

A principal contribuição deste trabalho é a consideração dos riscos de correlação entre os nomes e de mercado, além do risco de default de cada nome, no desenvolvimento da estratégia de hedge dinâmico de um *swap first-to-default*. O contágio de default é modelado através do processo pontual (ou processo de salto) com intensidade estocástica, determinada considerando-se a informação sobre o default dos n nomes, $n \geq 2$.

A escolha do instrumento de hedge adequado permite que a estratégia de hedge obtida gere caixa necessário e suficiente para que o investidor cumpra com as obrigações dos contratos no instante do primeiro default e não tenha perdas com os $(n-1)$ *swaps* de crédito utilizados no hedge.

Os principais resultados são obtidos através do Teorema de Representação de Martingais, de forma que a estratégia de hedge de um *swap* FtD com n nomes é solução de um sistema linear. Nos contextos em que as rolagens contínuas de CDSs são os instrumentos de hedge estes resultados são dados pelas Proposições 3.10 e 4.10.

1.4 Organização do Trabalho

Iniciamos desenvolvendo uma estratégia de hedge de um *swap* FtD considerando o CDS como instrumento de hedge, no Capítulo 2. Em seguida, no Capítulo 3, utilizamos a rolagem contínua de *swap* de crédito para obter a estratégia de hedge no contexto em que a taxa de juros é determinística e constante. E no Capítulo 4, consideramos que a taxa de juros é estocástica. Nos três casos analisados, consideramos inicialmente o *swap first-to-default* com dois e em seguida, generalizamos os resultados para este derivativo com n nomes.

Por fim, no Capítulo 5, apresentamos os resultados da simulação do hedge dinâmico de um *swap* FtD, onde utilizamos o conceito de cópula para descrever a dependência entre os nomes e analisamos o efeito do contágio de default.

Capítulo 2

Estratégia de Hedge com CDS

Através do Teorema de Representação de Martingais, desenvolvemos uma estratégia de hedge dinâmico de um *swap first-to-default* (FtD), semelhante a estratégia proposta por Riboulet [20], utilizando-se os *swaps* de crédito (CDSs) como instrumentos de hedge.

Para simplificar, consideramos que a taxa de juros é determinística e constante.

Na Seção 2.1 definimos os valores dos derivativos de crédito. Em seguida, na Seção 2.2, obtemos uma estratégia de hedge dinâmico de um *swap first-to-default* com dois nomes e na Seção 2.3, generalizamos os resultados da seção anterior considerando o *swap* FtD com n nomes.

Nos dois casos, calculamos os valores dos derivativos de crédito e mostramos que os valores do CDS e do *swap* FtD, conforme definidos na Seção 2.1, são martingais e pelo Teorema de Representação de Martingais estes valores podem ser escritos em função dos fatores de risco. Com este resultado, desenvolvemos uma estratégia de hedge dinâmico de um *swap* FtD com dois e n nomes. Por fim, mostramos os problemas com esta estratégia de hedge.

2.1 Definições

Iniciamos esta seção com a construção do modelo e em seguida definimos os valores do *swap* de crédito e do *swap first-to-default*.

O Modelo

Seja $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{G} = \{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}, P)$, um espaço de probabilidade filtrado com $\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$ contínua à direita e P, a medida neutra ao risco, de forma que sob esta medida não existem oportunidades de arbitragem.

Considere as variáveis aleatórias $\tau_1, ..., \tau_n$. Para cada $i = 1, ..., n$, assumimos que τ_i é um instante de parada sob $\mathbb{G}$, isto é, $\{\tau_i \leq t\}$ é $\mathcal{G}_t$-mensurável para todo t. No contexto de risco de crédito, τ_i

representa o instante de default do nome i.

Definimos $N_i(t) = \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}}$, o processo indicador de default do nome i, para $i = 1, ..., n$.

Neste capítulo supomos que a taxa de juros é determinística e que não há incertezas geradas pelas variáveis de estados, isto é, a única fonte de incerteza é decorrente dos processos indicadores de default dos n nomes. Logo, a filtração $\{\mathcal{G}_t\}_{t \geq 0}$ é gerada pelos processos indicadores de default dos n nomes até o instante t.

Derivativos de Crédito

Assumimos que os derivativos de crédito possuem a mesma data de vencimento $T > 0$. O comprador do *swap* de crédito no nome i, CDS^i, paga uma taxa de proteção contra o default do nome i denominada *spread* e denotada por s_i, $i = 1, ..., n$. Da mesma forma, o comprador do *swap* FtD paga uma taxa de proteção s contra o primeiro default. Estas taxas são pagas regularmente em m datas até o vencimento do contrato ou o instante de default, caso este ocorra antes. Para simplificar assumimos que os *spreads* dos contratos são pagos nas mesmas datas.

Considerando-se que os valores dos *spreads* são constantes, na data de vencimento do contrato T, o valor pago pelo comprador do *swap* de crédito pela proteção contra o default no nome i é determinado pela soma dos pagamentos:

$$f_p(\tau_i) \; = \; \sum_{j=1}^{m} s_i \; \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}} \, e^{\, r(T - t_j)}$$

onde $r \geq 0$ é a taxa de juros determinística e constante. Analogamente, definimos o valor pago pelo comprador do *swap* FtD substituindo na expressão acima s_i por s e τ_i por $\tau_{(1)}$, onde $\tau_{(1)} = \min\{\tau_1, ..., \tau_n\}$.

Se o default do nome i ocorrer antes do vencimento do contrato T, o vendedor do CDS paga $(1 - \delta_i)$ ao comprador da proteção, onde δ_i é denominada taxa de recuperação. Neste capítulo, assumimos que este pagamento é feito somente na data de vencimento do contrato.

O mesmo ocorre com o vendedor do *swap* FtD quando o primeiro default ocorrer antes do vencimento T. Neste caso, a quantia paga $(1 - \delta_i)$ corresponde ao nome que teve primeiro o default entre os n nomes, isto é, $\tau_{(1)} = \tau_i$.

No instante T, os valores pagos pelos vendedores do CDS, $f_r(\tau_i)$, e do *swap* FtD com n nomes,

$f_r(\tau_{(1)})$, são dados por:

$$\begin{aligned} f_r(\tau_i) &= (1-\delta_i)\,\mathbf{1}_{\{\tau_i \leq T\}} \\ f_r(\tau_{(1)}) &= \sum_{i=1}^{n}(1-\delta_i)\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} \leq T;\, \tau_{(1)}=\tau_i\}}\,. \end{aligned}$$

Logo, na data de vencimento, o *payoff* de um derivativo de crédito, $f(\cdot)$, é definido pelo fluxo de caixa do ponto de vista do comprador do contrato por:

$$f(X) = -f_p(X) + f_r(X)$$

onde $X = \tau_i$ para o CDS no nome i e $X = \tau_{(1)}$ para o *swap first-to-default*.

Consideramos que a taxa de recuperação δ_i e os *spreads* s_i e s são determinísticos e constantes, $i = 1, ..., n$.

Seja $B(t) = e^{rt}$ o valor no instante t de uma unidade monetária investida no instante $t_0 = 0$ à taxa de juros r constante. Neste contexto, $B(t)$ representa o valor do ativo livre de risco.

Sob a hipótese de ausência de arbitragem, no instante $t \leq T$, o valor do *swap* de crédito correspondente ao nome i, $CDS^{*i}(t)$, e o valor do *swap first-to-default*, $FtD^*(t)$, descontados à taxa de juros, são definidos sob a medida neutra ao risco pelo valor esperado do *payoff* no instante T, condicionados à informação gerada pelos processos indicadores de default dos n nomes, ou seja,

$$\begin{aligned} CDS^{*i}(t) &= E\big[f^*(\tau_i)|\,\mathcal{G}_t\big] \\ FtD^*(t) &= E\big[f^*(\tau_{(1)})|\,\mathcal{G}_t\big] \end{aligned}$$

onde

$$f^*(\tau_i) = \frac{f(\tau_i)}{B(T)} = \sum_{j=1}^{m} -s_i\,\mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}}\,e^{-rt_j} + (1-\delta_i)\,\mathbf{1}_{\{\tau_i \leq T\}}\,e^{-rT} \tag{2.1a}$$

$$f^*(\tau_{(1)}) = \frac{f(\tau_{(1)})}{B(T)} = \sum_{j=1}^{m} -s\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} \geq t_j\}}\,e^{-rt_j} + \sum_{i=1}^{n}(1-\delta_i)\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} \leq T;\, \tau_{(1)}=\tau_i\}}\,e^{-rT} \tag{2.1b}$$

e o *payoff* descontado $f^*(X)$ é $\mathcal{G}_T$-mensurável e $E[|f^*(X)|] < \infty$, para $X = \tau_i$ no caso do CDS^i, $i = 1, ..., n$, e $X = \tau_{(1)}$, para o *swap* FtD.

2.2 Contexto com dois nomes

Nesta seção obtemos uma estratégia de hedge dinâmico de um *swap* FtD para o caso particular em que este contrato fornece a proteção ao comprador deste derivativo contra o risco de crédito de dois nomes.

2.2.1 Valores dos Derivativos de Crédito

Iniciamos calculando os valores dos derivativos de crédito definidos na Seção 2.1, observando-se que devido à dependência entre os dois nomes, a probabilidade de sobrevivência no instante t depende da informação sobre o default destes nomes.

Para o cálculo da esperança condicional, utilizaremos o seguinte resultado.

Seja X_t um processo contínuo à direita e adaptado à filtração $\mathcal{G}_t$, então X_t pode ser representado por:

$$X_t = \mathbf{1}_{\{0 \leq t < \tau_{(1)}\}} f_0(t) + \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} \leq t < \tau_{(2)}\}} f_1(t, \tau_{(1)}) + \mathbf{1}_{\{\tau_{(2)} \leq t\}} f_2(t, \tau_{(1)}, \tau_{(2)})$$

onde $\tau_{(j)}$ é o j-ésimo default e $f_j(t, \tau_{(1)}, ..., \tau_{(j)})$ é $\mathcal{G}_{\tau_{(j)}}$-mensurável [1], para $j = 0, 1, 2$, e definimos $\tau_{(0)} = 0$. Ou seja, a função f_j depende da identidade dos nomes cujos default já ocorreram até o instante t.

Podemos reescrever a variável aleatória X_t em função dos instantes de default dos nomes 1 e 2 ao invés dos $\tau_{(j)}$, $j = 0, 1, 2$, obtendo:

$$X_t = \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > t\}} f_0(t) + \mathbf{1}_{\{\tau_1 \leq t;\, \tau_2 > t\}} f_1^1(t) + \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 \leq t\}} f_1^2(t) + \mathbf{1}_{\{\tau_1 \leq t;\, \tau_2 \leq t\}} f_2(t)$$

onde $f_1^j(t) = f_1(t, \tau_{(1)} = \tau_j)$, para $j = 1, 2$.

Se considerarmos que o processo X_t é definido por uma esperança condicional, esta expressão representa o valor de X_t para cada possível filtração $\mathcal{G}_t$. Isto é, considere $g(\tau_1)$ uma função $\mathcal{G}_T$-mensurável, tal que $E[|g(\tau_1)|] < \infty$. Conforme a expressão acima, a esperança condicional $E[g(\tau_1)|\mathcal{G}_t]$ pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} E[\, g(\tau_1)|\, \mathcal{G}_t] =& \mathbf{1}_{\{\tau_1 \leq t\}}\, g(\tau_1) + \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > t\}}\, E[\, g(\tau_1)|\{\tau_1 > t; \tau_2 > t\}] \\ &+ \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 \leq t\}}\, E[\, g(\tau_1)|\{\tau_1 > t; \tau_2 = \bar{\tau_2}\}] \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde $\bar{\tau_2} \leq t$ é o instante em que ocorreu o default do nome 2. O resultado análogo é válido para $g(\tau_2)$.

Notações: Denotamos $G(t_1, t_2)$, a função de sobrevivência dos dois nomes, isto é,

$$G(t_1, t_2) = P[\tau_1 > t_1;\, \tau_2 > t_2]$$

e assumimos que $G(t_1, t_2)$ é suficientemente diferenciável. A função de distribuição conjunta $F(t_1, t_2)$ dos instantes de default é denotada por:

$$F(t_1, t_2) = P[\tau_1 \leq t_1;\, \tau_2 \leq t_2]$$

[1] Se τ é um tempo de parada, os eventos observados antes ou em τ são descritos pela σ-álgebra $\mathcal{G}_\tau$, definida como a coleção dos conjuntos $\mathcal{G}_\tau = \{A \in \mathcal{G}$: para qualquer t, $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{G}_t\}$.

e $F_i(t_i) = P[\tau_i \leq t_i]$ é a função de distribuição marginal de τ_i, para $i = 1, 2$.

A proposição a seguir fornece a relação entre as funções de distribuição e sobrevivência que é utilizadas nos cálculos dos valores dos derivativos de crédito.

Proposição 2.1. *A função de sobrevivência é expressa em termos da função de distribuição conjunta através da seguinte igualdade:*

$$1 - G(t_1, t_2) = F_1(t_1) + F_2(t_2) - F(t_1, t_2). \tag{2.3}$$

Prova: A função de distribuição marginal de τ_1 pode ser escrita como:

$$F_1(t_1) = P[\tau_1 \leq t_1;\, \tau_2 \leq t_2] + P[\tau_1 \leq t_1;\, \tau_2 > t_2]. \tag{2.4}$$

De forma análoga, para τ_2 temos:

$$\begin{aligned} P[\tau_2 > t_2] &= P[\tau_1 > t_1;\, \tau_2 > t_2] + P[\tau_1 \leq t_1;\, \tau_2 > t_2] \\ P[\tau_1 \leq t_1;\, \tau_2 > t_2] &= 1 - F_2(t_2) - G(t_1, t_2) \end{aligned} \tag{2.5}$$

onde na segunda igualdade utilizamos o fato que $P[\tau_2 > t_2] = 1 - F_2(t_2)$ e a definição de função de sobrevivência. Substituindo a expressão (2.5) em (2.4) e utilizando a definição de função de distribuição conjunta, obtemos a expressão que queremos provar. □

Valor do *Swap* de Crédito - CDS

Considere o *swap* de crédito com as características descritas na Seção 2.1. Sob a medida neutra ao risco, o valor do CDS no nome 1 descontado à taxa de juros, ou simplesmente, valor descontado, $CDS^{*1}(t)$, é dado pela proposição a seguir.

Proposição 2.2. *No instante $t \leq T$, o valor descontado do swap de crédito no nome 1 é:*

$$\begin{aligned} CDS^{*1}(t) = {} & \mathbf{1}_{\{\tau_1 \leq t\}} \left[\sum_{j=1}^{m} -s_1\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 \geq t_j\}}\, e^{-rt_j} + (1 - \delta_1)\, e^{-rT} \right] \\ & + \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t\}} \left\{ \sum_{j=1}^{m} -s_1\, e^{-rt_j} \left[\mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}} \left(\mathbf{1}_{\{\tau_2 > t\}} \frac{G(t_j, t)}{G(t, t)} + \mathbf{1}_{\{\tau_2 \leq t\}} \frac{\partial_2 G(t_j, \tau_2)}{\partial_2 G(t, \tau_2)} \right) \right] \right. \\ & \left. + (1 - \delta_1)\, e^{-rT} \left[1 - \mathbf{1}_{\{\tau_2 > t\}} \frac{G(T, t)}{G(t, t)} - \mathbf{1}_{\{\tau_2 \leq t\}} \frac{\partial_2 G(T, \tau_2)}{\partial_2 G(t, \tau_2)} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Prova: Conforme a Seção 2.1, o valor descontado do *swap* de crédito no nome 1 é dado por $CDS^{*1}(t) = E[f^*(\tau_1)|\mathcal{G}_t]$, com $f^*(\tau_1)$ definido por (2.1a).

Pela expressão (2.2), o valor $CDS^{*1}(t)$ pode ser escrito como:

$$CDS^{*1}(t) = \mathbf{1}_{\{\tau_1 \leq t\}} f^*(\tau_1) + \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t\}} \big\{ \mathbf{1}_{\{\tau_2 > t\}} E[f^*(\tau_1) | \{\tau_1 > t; \tau_2 > t\}] + \mathbf{1}_{\{\tau_2 \leq t\}} E[f^*(\tau_1) | \{\tau_1 > t; \tau_2 \leq t\}] \big\} . \tag{2.6}$$

Portanto, devemos calcular a esperança condicional para o caso em que nome 1 sobreviveu no instante t, isto é, $\tau_1 > t$, considerando-se que o default do nome 2 pode ou não ter ocorrido até este instante, $\tau_2 \leq t$ ou $\tau_2 > t$.

Para facilitar os cálculos, escrevemos o *payoff* descontado do *swap* de crédito no nome 1 como:

$$f^*(\tau_1) = e^{-rT}(-f_p(\tau_1) + f_r(\tau_1)) = -f_p^*(\tau_1) + f_r^*(\tau_1)$$

onde $f_p(\tau_1)$ e $f_r(\tau_1)$ são definidos conforme a Seção 2.1. Dessa forma, o valor descontado do CDS no nome 1 do ponto de vista do comprador é composto por duas partes: o valor pago pela proteção contra o default do nome 1 no instante t, $\pi_1^{vp}(t)$, e o valor que ele recebe se o default deste nome ocorrer antes do vencimento do contrato, $\pi_1^{vr}(t)$, ambos os valores descontados à taxa de juros. Ou seja, o valor descontado do CDS no nome 1 pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} CDS^{*1}(t) &= -E[f_p^*(\tau_1) | \mathcal{G}_t] + E[f_r^*(\tau_1) | \mathcal{G}_t] \\ &= -\pi_1^{vp}(t) + \pi_1^{vr}(t) \end{aligned}$$

onde $E[|f_p^*(\tau_1)|] < \infty$, $E[|f_r^*(\tau_1)|] < \infty$, $f_p^*(\tau_1)$ e $f_r^*(\tau_1)$ são $\mathcal{G}_T$-mensuráveis.

Para calcular as esperanças condicionais na expressão (2.6), a seguir calculamos os valores $\pi_1^{vp}(t)$ e $\pi_1^{vr}(t)$, considerando-se as duas filtrações: $\mathcal{G}_t' = \{\tau_1 > t;\ \tau_2 > t\}$ e $\mathcal{G}_t' = \{\tau_1 > t;\ \tau_2 = \bar{\tau}_2\}$.

(i) Quando os dois nomes sobreviveram até o instante t, isto é, $\mathcal{G}_t' = \{\tau_1 > t;\ \tau_2 > t\}$.

(i.a) Para o cálculo do valor descontado que o comprador paga pela proteção, temos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} E\big[\, f_p^*(\tau_1)\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > t\}} \big] &= E\Big[E\big[\, f_p^*(\tau_1)\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > t\}} | \mathcal{G}_t' \big] \Big] = E\Big[\mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > t\}}\, E\big[f_p^*(\tau_1) | \mathcal{G}_t' \big] \Big] \\ &= E\big[\, f_p^*(\tau_1) | \mathcal{G}_t' \big]\, P[\tau_1 > t; \tau_2 > t] = E\big[\, f_p^*(\tau_1) | \mathcal{G}_t' \big]\, G(t,t) . \end{aligned}$$

Logo, o valor $\pi_1^{vp}(t)$ é determinado por:

$$\pi_1^{vp}(t) \;=\; \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t\,;\, \tau_2 > t\}}\, E\big[f_p^*(\tau_1) | \mathcal{G}_t' \big] = \frac{E\big[\, f_p^*(\tau_1)\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > t\}} \big]}{G(t,t)} . \tag{2.7}$$

Calculando o numerador da expressão acima:

$$E\big[\, f_p^*(\tau_1)\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > t\}}\big] \;=\; \sum_{j=1}^{m} s_1\, e^{-rt_j}\, E\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 \geq t_j\}}\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > t\}}\big]$$

onde temos duas possibilidades: $t \geq t_j$, o que representa os pagamentos feitos até (inclusive) o instante t, ou $t < t_j$, representando os pagamentos futuros. Considerando-se estes dois casos, calculamos a esperança acima:

$$\begin{aligned} E\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 \geq t_j\}}\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > t\}}\big] &= \mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}}\, E\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > t\}}\big] + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}}\, E\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t_j;\, \tau_2 > t\}}\big] \\ &= \mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}}\, P[\tau_1 > t; \tau_2 > t] + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}}\, P[\tau_1 > t_j; \tau_2 > t] \\ &= \mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}}\, G(t,t) + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}}\, G(t_j, t)\,. \end{aligned}$$

Dessa forma, o valor descontado pago pela proteção contra o default do nome 1, no instante $t \leq T$, dado que o nome 2 sobreviveu até o instante t, é:

$$\pi_1^{vp}(t) \;=\; \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t\,;\, \tau_2 > t\}} \sum_{j=1}^{m} s_1\, e^{-rt_j} \left[\, \mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} \;+\; \mathbf{1}_{\{t < t_j\}} \frac{G(t_j, t)}{G(t,t)} \right]. \tag{2.8}$$

(i.b) O valor descontado que o comprador recebe se o default do nome 1 ocorrer antes do vencimento do contrato é obtido através da expressão (2.7) para $f_r^*(\tau_1)$:

$$\pi_1^{vr}(t) \;=\; \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > t\}} E\big[\, f_r^*(\tau_1) |\, \mathcal{G}_t'\,\big] \;=\; \frac{E\big[\, f_r^*(\tau_1)\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > t\}}\big]}{G(t,t)}$$

onde

$$E\big[\, f_r^*(\tau_1)\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > t\}}\big] \;=\; (1 - \delta_1)\, e^{-rT}\, E\big[\, \mathbf{1}_{\{t < \tau_1 \leq T;\, \tau_2 > t\}}\big]$$

calculando a esperança acima temos:

$$\begin{aligned} E\big[\, \mathbf{1}_{\{t < \tau_1 \leq T;\, \tau_2 > t\}}\big] \;&=\; \int_t^T \!\!\int_t^\infty \partial^2 F(u_1, u_2) \;=\; \int_t^T \big(\partial_1 F_1(u_1) - \partial_1 F(u_1, t)\big) \\ &=\; \int_t^T \big(-\partial_1 G(u_1, t)\big) \;=\; G(t,t) - G(T,t) \end{aligned}$$

onde a terceira igualdade decorre da derivada da expressão (2.3) com relação à primeira variável.

Logo, para $\tau_2 > t$ e $t \leq T$, temos o valor:

$$\pi_1^{vr}(t) \;=\; \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > t\}}\, (1 - \delta_1)\, e^{-rT} \left[\, 1 \;-\; \frac{G(T,t)}{G(t,t)} \right]. \tag{2.9}$$

Através das expressões (2.8) e (2.9), obtemos que o valor descontado do *swap* de crédito no nome 1, dado que os dois nomes sobreviveram até o instante t, é:

$$CDS^{*1}(t) = \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t\,;\,\tau_2 > t\}} \left\{ \sum_{j=1}^{m} -s_1\, e^{-rt_j} \left[\mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}} \frac{G(t_j,t)}{G(t,t)} \right] + (1-\delta_1)\, e^{-rT} \left[1 - \frac{G(T,t)}{G(t,t)} \right] \right\}. \tag{2.10}$$

(ii) No instante t, o default do nome 2 já ocorreu, isto é, $\mathcal{G}'_t = \{\tau_1 > t; \tau_2 = \bar{\tau}_2\}$, onde $\bar{\tau}_2 \leq t$.

(ii.a) Para o cálculo do valor descontado que o comprador paga pela proteção, temos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
E\big[\, f_p^*(\tau_1)\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > \bar{\tau}_2\}} \big] &= E\Big[E\big[\, f_p^*(\tau_1)\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > \bar{\tau}_2\}} | \{\tau_1 > t; \tau_2 = \bar{\tau}_2\} \big] \Big] \\
&= E\Big[\mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > \bar{\tau}_2\}}\, E\big[\, f_p^*(\tau_1)\, | \{\tau_1 > t; \tau_2 = \bar{\tau}_2\} \big] \Big] \\
&= \int_t^{\infty} \int_{\bar{\tau}_2}^{\infty} E\big[\, f_p^*(\tau_1) | \{\tau_1 > t; \tau_2 = u_2\} \big]\, \partial^2 F(u_1, u_2) \\
&= \int_{\bar{\tau}_2}^{\infty} E\big[\, f_p^*(\tau_1) | \{\tau_1 > t; \tau_2 = u_2\} \big] \big(\partial_2 F_2(u_2) - \partial_2 F(t, u_2) \big)
\end{aligned}$$

onde $\bar{\tau}_2 \leq t$. Derivando (2.3) com relação à segunda variável e substituindo na expressão acima, temos:

$$E\big[\, f_p^*(\tau_1)\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > \bar{\tau}_2\}} \big] = \int_{\bar{\tau}_2}^{\infty} E\big[\, f_p^*(\tau_1) | \{\tau_1 > t\,; \tau_2 = u_2\} \big] \big(-\partial_2 G(t, u_2) \big)\,.$$

Em seguida, derivando esta expressão com relação à $\bar{\tau}_2$, obtemos:

$$\pi_1^{vp}(t) = \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 \leq t\}}\, E\big[\, f_p^*(\tau_1) | \, \mathcal{G}'_t \big] = \frac{\partial_2 E\big[\, f_p^*(\tau_1)\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > \bar{\tau}_2\}} \big]}{\partial_2 G(t, \bar{\tau}_2)}\,. \tag{2.11}$$

Calculando o numerador:

$$\partial_2 E\big[\, f_p^*(\tau_1)\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > \bar{\tau}_2\}} \big] = \sum_{j=1}^{m} s_1\, e^{-rt_j}\, \partial_2 E\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 \geq t_j\}}\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > \bar{\tau}_2\}} \big]$$

onde, para a esperança acima temos $t \geq t_j$ ou $t < t_j$, logo:

$$\begin{aligned}
\partial_2 E\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 \geq t_j\}}\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > \bar{\tau}_2\}} \big] &= \mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}}\, \partial_2 E\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > \bar{\tau}_2\}} \big] + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}}\, \partial_2 E\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t_j;\, \tau_2 > \bar{\tau}_2\}} \big] \\
&= \mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}}\, \partial_2 G(t, \bar{\tau}_2) + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}}\, \partial_2 G(t_j, \bar{\tau}_2)\,.
\end{aligned}$$

Como no instante t o default do nome 2 já ocorreu, então $\tau_2 = \bar{\tau}_2$.

Portanto, para $t \leq T$, o valor descontado pago pela proteção contra o default do nome 1, dado que o default do nome 2 já ocorreu, é:

$$\pi_1^{vp}(t) \;=\; \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 \leq t\}} \sum_{j=1}^{m} s_1\, e^{-rt_j} \left[\mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} \;+\; \mathbf{1}_{\{t < t_j\}} \frac{\partial_2 G(t_j, \tau_2)}{\partial_2 G(t, \tau_2)} \right]. \tag{2.12}$$

(ii.b) O valor $\pi_1^{vr}(t)$ é obtido através da expressão (2.11) para $f_r^*(\tau_1)$, isto é:

$$\pi_1^{vr}(t) \;=\; \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 \leq t\}}\, E\big[\, f_r^*(\tau_1) |\, \mathcal{G}_t' \,\big] \;=\; \frac{\partial_2 E\big[\, f_r^*(\tau_1) \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > \bar{\tau}_2\}} \big]}{\partial_2 G(t, \bar{\tau}_2)}$$

onde $\bar{\tau}_2 \leq t$. Calculando o numerador:

$$\partial_2 E\big[\, f_r^*(\tau_1) \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > \bar{\tau}_2\}} \big] \;=\; (1 - \delta_1)\, e^{-rT}\, \partial_2 E\big[\, \mathbf{1}_{\{t < \tau_1 \leq T;\, \tau_2 > \bar{\tau}_2\}} \big]$$

para a esperança acima, temos:

$$\begin{aligned} \partial_2 E\big[\, \mathbf{1}_{\{t < \tau_1 \leq T;\, \tau_2 > \bar{\tau}_2\}} \big] \;&=\; \partial_2 \int_t^T \int_{\bar{\tau}_2}^{\infty} \partial^2 F(u_1, u_2) \\ &=\; -\int_t^T \partial^2 F(u_1, \bar{\tau}_2) \;=\; \partial_2 G(t, \bar{\tau}_2) - \partial_2 G(T, \bar{\tau}_2)\,. \end{aligned}$$

Logo, no caso que o default do nome 2 ocorreu até o instante t, $\tau_2 \leq t$, obtemos:

$$\pi_1^{vr}(t) \;=\; \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 \leq t\}}\, (1 - \delta_1)\, e^{-rT} \left[1 - \frac{\partial_2 G(T, \tau_2)}{\partial_2 G(t, \tau_2)} \right]. \tag{2.13}$$

Portanto, através das expressões (2.12) e (2.13), o valor descontado do *swap* de crédito no nome 1, dado que no instante t o default do nome 2 já ocorreu, é:

$$CDS^{*1}(t) = \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t; \tau_2 \leq t\}} \left\{ \sum_{j=1}^{m} s_1\, e^{-rt_j} \left[\mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} \;+\; \mathbf{1}_{\{t < t_j\}} \frac{\partial_2 G(t_j, \tau_2)}{\partial_2 G(t, \tau_2)} \right] + (1 - \delta_1)\, e^{-rT} \left[1 - \frac{\partial_2 G(T, \tau_2)}{\partial_2 G(t, \tau_2)} \right] \right\}. \tag{2.14}$$

Substituindo as expressões (2.10) e (2.14) em (2.6), obtemos a expressão que queremos provar. □

De forma análoga obtemos o valor descontado do *swap* de crédito no nome 2, para $t \leq T$:

$$\begin{aligned} CDS^{*2}(t) = \mathbf{1}_{\{\tau_2 \leq t\}} &\left[\sum_{j=1}^{m} -s_2\, \mathbf{1}_{\{\tau_2 \geq t_j\}}\, e^{-rt_j} + (1 - \delta_2)\, e^{-rT} \right] \\ + \mathbf{1}_{\{\tau_2 > t\}} &\left\{ \sum_{j=1}^{m} -s_2\, e^{-rt_j} \left[\mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}} \left(\mathbf{1}_{\{\tau_1 > t\}} \frac{G(t, t_j)}{G(t, t)} + \mathbf{1}_{\{\tau_1 \leq t\}} \frac{\partial_1 G(\tau_1, t_j)}{\partial_1 G(\tau_1, t)} \right) \right] \right. \\ &\left. + (1 - \delta_2)\, e^{-rT} \left[1 - \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t\}} \frac{G(t, T)}{G(t, t)} - \mathbf{1}_{\{\tau_1 \leq t\}} \frac{\partial_1 G(\tau_1, T)}{\partial_1 G(\tau_1, t)} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Valor do *Swap* FtD com dois nomes

Para calcularmos o valor do *swap first-to-default* é necessário definir o conceito de *intensidade de default* e alguns conceito matemáticos.

Definições: Seja X_t um processo estocástico em $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$.

• X_t é um *processo de variação finita* se X_t for um processo adaptado tal que, cada trajetória $t \mapsto X(t,\omega)$ tem variação finita.

• Seja $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ uma σ-álgebra sobre $(0,\infty)\times\Omega$ gerada por retângulos da forma

$$(s,t] \quad \times \quad A\,; \qquad 0 \leq s \leq t\,, \qquad A \in \mathcal{F}_s\,.$$

$\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ é chamada *σ-álgebra $\mathcal{F}_t$-predizível* sobre $(0,\infty)\times\Omega$.

Um processo X_t, tal que X_0 é $\mathcal{F}_0$-mensurável e $(t,\omega) \to X_t(\omega)$, definido de $(0,\infty)\times\Omega$ em $\mathbb{R}$, é $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$-mensurável e denominado *$\mathcal{F}_t$-predizível*[2].

• X_t é um *processo progressivo* em $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ se, para cada $t \in \mathbb{R}_+$, temos que $(s,\omega) \to X(s,\omega)$ de $[0,t]\times\Omega$ em $\mathbb{R}$ é $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$-mensurável.

• Seja τ um tempo de parada. Denotamos $X_{t\wedge\tau}$, o *processo de parada* onde

$$X_{t\wedge\tau} \;=\; X_t\,\mathbf{1}_{\{t<\tau\}} + X_\tau\,\mathbf{1}_{\{t\geq\tau\}}\,.$$

• Um processo X_t é um *martingal local* se existe uma seqüência crescente $\{\tau_m\}$ de tempos de parada, tal que $\lim_{m\to\infty}\tau_m = \infty$, P-quase-certamente[3], e cada processo de parada $X_{t\wedge\tau_m}$ é um martingal.

• Um processo X_t adaptado à filtração $\mathcal{F}_t$ é um *martingal* sob $\mathcal{F}_t$ se, para qualquer t, X_t é integrável, $E[|X_t|] < \infty$, e para $s \leq t$, $E[X_t|\,\mathcal{F}_s] = X_s$.

Teorema 2.1. *Se X_t é mensurável, Y_t é integrável e $Y_t = \sup_{u\leq t}|X_u|$, então, X_t é integrável.*

Brémaud [2] define a *intensidade estocástica* para um processo pontual, isto é, um processo com vários saltos, entretanto, neste caso assumimos que, se o default ocorrer, isto ocorre apenas uma vez em cada nome. Então, consideramos o processo com apenas um salto da forma $N(t) = \mathbf{1}_{\{\tau\leq t\}}$.

[2] Ver Brémaud [2].

[3] Uma seqüência $\{X_n\}$ de variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ converge *P-quase-certamente* para uma variável aleatória X se $P\big[\lim_{n\to\infty} X_n = X\big] = 1$.

Definição: Sejam $N(t)$, um processo pontual adaptado à $\mathcal{F}_t$, e $\mathbf{h}(t)$, um processo $\mathcal{F}_t$- progressivo e não-negativo tal que, para todo $t \geq 0$, $\int_0^t \mathbf{h}(s)\, ds < \infty$. Se para todo processo C_t, $\mathcal{F}_t$-predizível e não-negativo, a igualdade

$$E\left[\int_0^\infty C_s\, dN(s)\right] = E\left[\int_0^\infty C_s\, \mathbf{h}(s)\, ds\right]$$

é satisfeita, então dizemos que $N(t)$ admite a *intensidade estocástica* $\mathbf{h}(t)$, $\mathcal{F}_t$-mensurável.

Observação: O limite de integração nas integrais estocásticas é $(s, t]$, onde $s \leq t$. Dessa forma, para simplificar a notação, denotamos $\int_s^t H_u\, dX_u = \int_{s_+}^t H_u\, dX_u$.

No contexto do risco de crédito denominamos $\mathbf{h}(t)$ de *intensidade de default*.

A intensidade de default de um nome está associada à sua probabilidade de sobrevivência. Schönbucher [24] define a intensidade de default por:

Definição: Considere que o nome i sobreviveu até o instante t, $\tau_i > t$. A *intensidade de default* do nome i, $\mathbf{h}_i(t)$, é definida por:

$$\mathbf{h}_i(t) = -\frac{\partial}{\partial T} E\left[\, \mathbf{1}_{\{\tau_i > T\}} | \, \mathcal{G}_t\right]\Big|_{T=t}$$

onde $\mathbf{h}_i(t)$ é $\mathcal{G}_t$-mensurável e diferenciável em T. Para $t \geq \tau_i$, $\mathbf{h}_i(t) = 0$. Além disso, a intensidade de default é um processo *càdlàg*, ou seja, contínuo à direita e com limite à esquerda, para $i = 1, 2$.

Como estamos considerando que o default de um nome ocorre apenas uma vez, a intensidade de default representa a probabilidade de ocorrer o default do nome i no instante t, dado que ele sobreviveu até o instante anterior.

Através da expressão (2.2), podemos escrever a intensidade de default como:

$$\mathbf{h}_i(t) = \mathbf{1}_{\{\tau_i > t\}}\left[\mathbf{1}_{\{\tau_j > t\}}\, h_i(t) + \mathbf{1}_{\{\tau_j \leq t\}}\, h_i^{-j}(t)\right] \tag{2.15}$$

onde $(t, \omega) \to h_i(t)$ é $\mathcal{B}_+ \otimes \mathcal{G}_0$-mensurável, $(t, \omega) \to h_i^{-j}(t)$, $\mathcal{B}_+ \otimes \mathcal{G}_{\tau_j}$-mensurável, $\mathcal{G}_{\tau_j} = \{A \in \mathcal{G}$: para qualquer t, $A \cap \{\tau_j \leq t\} \in \mathcal{G}_t\}$, e $\mathcal{B}$, a σ-álgebra de Borel, para $i, j = 1, 2$ e $j \neq i$.

Observação: Denotamos a intensidade de default do nome i sobre todas as filtrações em negrito, $\mathbf{h}_i(t)$, e para uma filtração específica por $h_i^{-j}(t)$, onde '$-j$' indica o nome j teve o default até (inclusive) o instante t e $h_i(t)$, se os dois nomes sobreviveram até t.

Em particular, para o caso em que os dois nomes sobreviveram até o instante t, a intensidade de default do nome 1, $h_1(t)$, é:

$$h_1(t) = -\frac{\partial}{\partial T} \frac{E\left[\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 > T\}}\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > t\}}\right]}{G(\mathbf{t})}\Bigg|_{T=t} = -\frac{\partial_1 G(\mathbf{t})}{G(\mathbf{t})}.$$

Se no instante t o default do nome 2 já ocorreu, $\tau_2 \leq t$, então, a intensidade de default do nome 1, $h_1^{-2}(t)$, é calculada conforme a expressão (2.11),

$$h_1^{-2}(t) = -\frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial_2 E\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_1 > T\}}\,\mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\,\tau_2 \geq \tilde{\tau}_2\}}\big]}{\partial_2 G(\mathbf{t}, \tau_2)}\bigg|_{T=t} = -\frac{\partial^2 G(\mathbf{t}, \tau_2)}{\partial_2 G(\mathbf{t}, \tau_2)}\,.$$

Observando-se que a intensidade de default do nome i no instante t depende da informação sobre o default dos demais nomes neste instante, de forma que, no instante de default do nome j, $t = \tau_j$, $\mathbf{h}_i(t)$ tem um salto, $j \neq i$.

Isto ocorre devido à dependência entre os nomes e pelo fato que a intensidade de default ser um processo *càdlàg* e $\mathcal{G}_t$-mensurável.

As provas dos teoremas a seguir, para o caso geral do processo pontual com mais de um salto, podem ser vistas em Brémaud [2].

Teorema 2.2. *Considere o processo de intensidade de default do nome i, $\mathbf{h}_i(t)$, dado pela expressão (2.15). Então, o processo compensado*

$$M_t^i \;=\; N_i(t) - \int_0^t \mathbf{h}_i(u)\,du$$

é um martingal sob $\mathcal{G}_t$[4]*, para $i = 1, 2$.*

Observações: Sob as condições do Teorema 2.2:

- O Teorema é válido também para o caso em que o processo da intensidade de default $\mathbf{h}_i(t)$ é $\mathcal{G}_t$-predizível.
- Seja C_t um processo $\mathcal{G}_t$-predizível e não-negativo, então:

$$E\bigg[\int_0^\infty C_s\,dN_i(s)\bigg] \;=\; E\bigg[\int_0^\infty C_s\,\mathbf{h}_i(s)\,ds\bigg]$$

e portanto, $\mathbf{h}_i(t)$ é a *intensidade estocástica* do processo $N_i(t)$ sob $\mathcal{G}_t$.

O teorema a seguir fornece um resultado que será usado nos cálculos dos valores dos derivativos de crédito.

Teorema 2.3. *Seja C_t um processo $\mathcal{G}_t$-predizível. Se $N_i(t)$ admite a intensidade estocástica $\mathbf{h}_i(t)$, onde $\int_0^t \mathbf{h}_i(s)\,ds < \infty$, para $t \geq 0$, então:*

[4] Para o caso geral de um processo pontual $N_i(t)$ com vários saltos, se $\tau_\infty = \lim_{m\uparrow\infty} \tau_m = +\infty$, então o processo M_t^i é um martingal local sob $\mathcal{G}_t$.

- $\int_0^t C_s\, dM_s^i$ *é um martingal sob* $\mathcal{G}_t$*, tal que* $E\big[\int_0^t |\, C_s|\, \mathbf{h}_i(s)\, ds\big] < \infty$*,*
- $\int_0^t C_s\, dM_s^i$ *é um martingal local sob* $\mathcal{G}_t$*, tal que* $\int_0^t |\, C_s|\, \mathbf{h}_i(s)\, ds < \infty$*.*

Corolário 2.1 (Propriedade Martingal). *Sob as condições do Teorema 2.3, para* $t < T$*, temos que:*

$$E\Big[\int_t^T C_s\, dN_i(s)\big|\mathcal{G}_t\Big] \;=\; E\Big[\int_t^T C_s\, \mathbf{h}_i(s)\, ds\big|\mathcal{G}_t\Big]$$

tal que $E\big[\int_0^t |\, C_s|\, \mathbf{h}_i(s)\, ds\big] < \infty$*.*

Teorema 2.4 (Fubini). *Seja* X_t *um processo* $\mathcal{G}_t$*-mensurável. Se* $\int_a^b E\big[|X_s|\big] ds < \infty$*,* P*-quase-certamente, então* $\int_a^b E[X_s]\, ds = E\big[\int_a^b X_s\, ds\big]$*.*

Com estes conceitos, a proposição a seguir fornece o valor descontado do *swap* FtD com dois nomes.

Proposição 2.3. *No instante* $t \leq T$*, o valor descontado do swap first-to-default com dois nomes é:*

$$\begin{aligned} FtD^*(t) \;=\; & \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} \leq t\}} \left[\sum_{j=1}^{m} -s\, \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} \geq t_j\}}\, e^{-rt_j} + \sum_{i=1}^{2} (1-\delta_i)\, \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} = \tau_i\}}\, e^{-rT}\right] \\ & + \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} > t\}} \left\{\sum_{j=1}^{m} -s\, e^{-rt_j} \left[\mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}} \frac{G(t_j, t_j)}{G(t,t)}\right] + \sum_{i=1}^{2} (1-\delta_i)\, e^{-rT} \int_t^T h_i(u) \frac{G(u,u)}{G(t,t)} du\right\}. \end{aligned}$$

Prova: Como foi definido na Seção 2.1, o valor descontado do *swap first-to-default* é dado por $FtD^*(t) = E[f^*(\tau_{(1)})|\mathcal{G}_t]$, com $f^*(\tau_{(1)})$ definido por (2.1b).

No caso do primeiro instante de default $\tau_{(1)}$, a expressão (2.2) pode ser escrita como:

$$E[\, g(\tau_{(1)})|\, \mathcal{G}_t] = \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} \leq t\}}\, g(\tau_{(1)}) + \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} > t\}}\, E[\, g(\tau_{(1)})|\{\tau_1 > t; \tau_2 > t\}]\,. \tag{2.16}$$

Dessa forma, o valor $FtD^*(t)$ é obtido através da expressão:

$$FtD^*(t) = \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} \leq t\}}\, f^*(\tau_{(1)}) + \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} > t\}}\, E[f^*(\tau_{(1)})|\{\tau_1 > t; \tau_2 > t\}]\,.$$

Portanto, devemos calcular a esperança condicional para o caso em que o primeiro default não ocorreu até o instante t, $\tau_{(1)} > t$.

Assim como no caso do *swap* de crédito CDS, escreveremos o *payoff* descontado do *swap* FtD como:

$$f^*(\tau_{(1)}) \;=\; e^{-rT}\big(-f_p(\tau_{(1)}) + f_r(\tau_{(1)})\big) \;=\; -f_p^*(\tau_{(1)}) + f_r^*(\tau_{(1)})$$

com $f_p(\tau_{(1)})$ e $f_r(\tau_{(1)})$ definidos conforme a Seção 2.1. Logo, o valor descontado do *swap* FtD, do ponto de vista do comprador, é composto por duas partes: o valor que ele paga pela proteção contra o primeiro default $\pi^{vp}(t)$ e o valor que ele recebe, caso o primeiro default ocorra antes do vencimento do contrato, $\pi^{vr}(t)$, ambos descontados à taxa de juros, ou seja,

$$\begin{aligned} FtD^*(t) &= -E[f_p^*(\tau_{(1)})|\,\mathcal{G}_t] + E[f_r^*(\tau_{(1)})|\,\mathcal{G}_t] \\ &= -\pi^{vp}(t) + \pi^{vr}(t) \end{aligned}$$

onde $E[|f_p^*(\tau_{(1)})|] < \infty$, $E[|f_r^*(\tau_{(1)})|] < \infty$, $f_p^*(\tau_{(1)})$ e $f_r^*(\tau_{(1)})$ são $\mathcal{G}_T$-mensuráveis.

Para a filtração $\mathcal{G}'_t = \{\tau_1 > t;\, \tau_2 > t\}$ e pela expressão (2.7), temos:

(a) Valor descontado pago pela proteção contra o primeiro default:

$$\pi^{vp}(t) = \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > t\}} \frac{E[f_p^*(\tau_{(1)})\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > t\}}]}{G(t,t)}\,.$$

Calculando o numerador da expressão acima:

$$\begin{aligned} E[f_p^*(\tau_{(1)})\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > t\}}] &= \sum_{j=1}^{m} s\, e^{-rt_j}\, E[\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} > t_j\}}\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > t\}}] \\ &= \sum_{j=1}^{m} s\, e^{-rt_j} \left[\mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}}\, E[\mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > t\}}] + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}}\, E[\mathbf{1}_{\{\tau_1 > t_j;\, \tau_2 > t_j\}}]\right] \\ &= \sum_{j=1}^{m} s\, e^{-rt_j} \left[\mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}}\, G(t,t) + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}}\, G(t_j, t_j)\right] \end{aligned}$$

observando-se que $\tau_{(1)} > t_j \Rightarrow \min\{\tau_1, \tau_2\} > t_j$, isto é, $\tau_1 > t_j$ e $\tau_2 > t_j$.

Logo, no instante t, o valor descontado que o comprador do *swap* FtD com dois nomes paga pela proteção contra o primeiro default é:

$$\pi^{vp}(t) \;=\; \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} > t\}} \sum_{j=1}^{m} s\, e^{-rt_j} \left[\mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} \;+\; \mathbf{1}_{\{t < t_j\}}\, \frac{G(t_j, t_j)}{G(t,t)}\right] \tag{2.17}$$

dado que o primeiro default não ocorreu até o instante t.

(b) Valor descontado que o comprador do *swap first-to-default* recebe se o primeiro default ocorrer antes do vencimento do contrato.

Para i fixo e $j \neq i$, temos que:

$$\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} < T\}}\, \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} = \tau_i\}} \Rightarrow \mathbf{1}_{\{\tau_i < T\}}\, \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq \tau_j\}}$$

onde $i, j = 1, 2$. Utilizando esta igualdade, para $t \leq T$, o valor $\pi^{vr}(t)$ é dado por:

$$\pi^{vr}(t) = \sum_{i=1}^{2} (1 - \delta_i)\, e^{-rT}\, E\Big[\mathbf{1}_{\{\tau_i < T\}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{2} \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq \tau_j\}} \big| \mathcal{G}_t \Big]$$

onde a esperança condicional pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} E\Big[\mathbf{1}_{\{\tau_i < T\}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{2} \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq \tau_j\}} \big| \mathcal{G}_t \Big] &= E\Big[\int_0^T \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{2} \mathbf{1}_{\{\tau_j \geq u\}}\, dN_i(u) \big| \mathcal{G}_t \Big] \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} = \tau_i \leq t\}} + E\Big[\int_t^T \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{2} \mathbf{1}_{\{\tau_j \geq u\}}\, dN_i(u) \big| \mathcal{G}_t \Big]. \end{aligned} \tag{2.18}$$

A esperança condicional acima é calculada através da Propriedade Martingal (Corolário 2.1) e para isto é necessário mostrar que o processo no integrando na esperança condicional, $\mathbf{1}_{\{\tau_j \geq u\}}$, para i fixo, satisfaz à condição do corolário. Temos que:

$$\begin{aligned} E\Big[\int_0^t \mathbf{1}_{\{\tau_j \geq u\}}\, \mathbf{h}_i(u)\, du \Big] &= E\Big[\int_0^t \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} > u\}}\, h_i(u)\, du \Big] = E\Big[\int_0^{t \wedge \tau_{(1)}} h_i(u)\, du \Big] = E\Big[\int_0^{t \wedge \tau_{(1)}} dN_i(u) \Big] \\ &= E\big[N_i(t \wedge \tau_{(1)}) \big] \leq 1 < \infty \end{aligned}$$

onde a terceira igualdade decorre do fato que o processo M_t^i é um martingal (Teorema 2.2). Aplicando a Propriedade Martingal na esperança condicional em (2.18), obtemos:

$$\begin{aligned} E\Big[\int_t^T \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{2} \mathbf{1}_{\{\tau_j \geq u\}}\, dN_i(u) \big|\, \mathcal{G}_t \Big] &= E\Big[\int_t^T \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{2} \mathbf{1}_{\{\tau_j \geq u\}}\, \mathbf{h}_i(u)\, du \big|\, \mathcal{G}_t \Big] \\ &= \int_t^T E\big[\mathbf{1}_{\{\tau_1 > u;\, \tau_2 > u\}}\, h_i(u) \big|\, \mathcal{G}_t \big]\, du \end{aligned} \tag{2.19}$$

onde a última igualdade decorre do Teorema 2.4, de Fubini. Como $u > t$, para o integrando da expressão acima temos:

$$\begin{aligned} E\big[\mathbf{1}_{\{\tau_1 > u;\, \tau_2 > u\}}\, h_i(u) \big|\, \mathcal{G}_t \big] &= \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > t\}}\, E\big[\mathbf{1}_{\{\tau_1 > u;\, \tau_2 > u\}}\, h_i(u) \big|\, \mathcal{G}'_t \big] \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > t\}}\, E\big[\mathbf{1}_{\{\tau_1 > u;\, \tau_2 > u\}}\, h_i(u) \big]\, G(t,t)^{-1} \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > t\}}\, h_i(u)\, G(u,u)\, G(t,t)^{-1} \end{aligned} \tag{2.20}$$

onde $\mathcal{G}'_t = \{\tau_1 > t;\, \tau_2 > t\}$.

Portanto, através das expressões (2.18), (2.19) e (2.20), no instante $t < \min\{\tau_{(1)}, T\}$, o valor descontado que o comprador do *swap* FtD com dois nomes recebe se o primeiro default ocorrer entre os instantes t e T é:

$$\pi^{vr}(t) = \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} > t\}} \sum_{i=1}^{2} (1-\delta_i)\, e^{-rT} \int_t^T h_i(u)\, \frac{G(u,u)}{G(t,t)}\, du\,. \tag{2.21}$$

Logo, através das expressões (2.17) e (2.21) temos o valor $FtD^*(t)$ com dois nomes, para $t < \tau_{(1)}$.

2.2.2 Representação Martingal

Seja $N_i(t) = \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}}$, um processo pontual com intensidade $\mathbf{h}_i(t)$, $\mathcal{G}_t$-mensurável, da forma:

$$\mathbf{h}_i(t) \;=\; \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t\}} \Big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_j \geq t\}}\, h_i(t) + \mathbf{1}_{\{\tau_j < t\}}\, h_i^{-j}(t) \Big] \tag{2.22}$$

onde $h_i(t)$ e $h_i^{-j}(t)$ são definidas conforme a Seção 2.2.1, para $i, j = 1, 2$ e $j \neq i$. Isto é, $\mathbf{h}_i(t)$ é a versão $\mathcal{G}_t$-predizível de (2.15). Para ressaltar que a intensidade é $\mathcal{G}_t$-predizível, denotaremos $\mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t\}}\, \mathbf{h}_i(t)$.

Teorema 2.5. *[Representação de Martingais][5] Sejam $(N_1(t), N_2(t))$, um processo bidimensional não-explosivo[6] em $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ e $\mathcal{G}_t$, a filtração gerada pelos dois processos. Suponha que para cada i, $N_i(t)$ admite a intensidade $\mathbf{h}_i(t)$, $\mathcal{G}_t$-predizível. Seja X_t um martingal contínuo à direita da forma $X_t = E\big[\, X_\infty | \, \mathcal{G}_t \big]$, onde $E[|X_\infty|] < \infty$. Então, para $t \geq 0$,*

$$X_t \;=\; X_0 + \sum_{i=1}^{2} \int_0^t H_i(s)\, dM_s^i$$

P-quase-certamente, onde $M_t^i = N_i(t) - \int_0^t \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq s\}}\, \mathbf{h}_i(s)\, ds$ e $H_i(t)$ é um processo $\mathcal{G}_t$-predizível, tal que

$$\int_0^t |\, H_i(s)|\, \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq s\}}\, \mathbf{h}_i(s)\, ds < \infty$$

P-quase-certamente e $t \geq 0$. Além disso, $H_i(t) = \Delta X_t\big|_{t=\tau_i}$, $i = 1, 2$.

Para os valores dos derivativos de crédito temos o seguinte resultado:

Proposição 2.4. *Sob a medida neutra ao risco, os valores $CDS^{*i}(t)$ e $FtD^*(t)$ são martingais sob $\mathcal{G}_t$, para $i = 1, 2$.*

[5] Ver Brémaud [2].

[6] O processo $N_i(t)$ é *P-não-explosivo* se $N_i(t) < \infty$, para $t \geq 0$, P-quase-certamente.

Prova: O valor $\pi_i^{vp}(t)$ pago pelo comprador do CDS pode ser escrito como:

$$\pi_i^{vp}(t) = \sum_{j=1}^{m} s_i\, e^{-rt_j}\, E\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}} \big|\, \mathcal{G}_t\big] = \sum_{j=1}^{m} s_i\, e^{-rt_j}\, \pi_{ij}^{vp}(t)\,.$$

A seguir, mostraremos as propriedades dos processos $\pi_{ij}^{vp}(t)$ e $\pi_i^{vr}(t)$, para $i = 1, 2$ e $j = 1, ..., m$.

Para $u \geq t$, temos:

$$E\big[\, \pi_{ij}^{vp}(u) \big|\, \mathcal{G}_t\big] \;=\; E\Big[E\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}} \big|\, \mathcal{G}_u\big] \,\Big|\, \mathcal{G}_t\Big] \;=\; E\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}} \big|\, \mathcal{G}_t\big] \;=\; \pi_{ij}^{vp}(t)\,.$$

Para o processo do valor descontado que o comprador do *swap* de crédito recebe em caso de default do nome i, $\pi_i^{vr}(t)$, temos:

$$\begin{aligned} E\big[\, \pi_i^{vr}(u) \big|\, \mathcal{G}_t\big] \;&=\; E\Big[E\big[(1-\delta_i)\, \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq T\}}\, e^{-rT} \big|\, \mathcal{G}_u\big] \,\Big|\, \mathcal{G}_t\Big] \\ &=\; E\big[(1-\delta_i)\, \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq T\}}\, e^{-rT} \big|\, \mathcal{G}_t\big] \;=\; \pi_i^{vr}(t)\,. \end{aligned}$$

Além disso, por definição, para todo $t \geq 0$, os processos $\pi_{ij}^{vp}(t)$ e $\pi_i^{vr}(t)$ são integráveis e portanto, martingais sob $\mathcal{G}_t$.

A soma de processos martingais é um martingal, logo, $\pi_i^{vp}(t)$ e conseqüentemente, o valor descontado do *swap* de crédito $CDS^{*i}(t)$ são martingais sob $\mathcal{G}_t$, para $i = 1, 2$.

De forma análoga, para o *swap* FtD podemos mostrar que os processos $\pi^{vp}(t)$ e $\pi^{vr}(t)$ são martingais sob $\mathcal{G}_t$ e portanto, o valor $FtD^*(t)$ é um martingal sob $\mathcal{G}_t$. $\square$

Pelo Teorema 2.5, de Representação de Martingais, para $t \leq T$, os valores dos *swaps* de crédito podem ser escritos como:

$$CDS^{*i}(t) \;=\; CDS^{*i}(0) + \sum_{j=1}^{2} \int_0^t H_j^i(s)\, dM_s^j \tag{2.23a}$$

$$FtD^*(t) \;=\; FtD^*(0) + \sum_{j=1}^{2} \int_0^t K_j(s)\, dM_s^j \tag{2.23b}$$

onde os processos $\mathcal{G}_t$-predizíveis $H_j^i(t) = \Delta CDS^{*i}(t)\big|_{t=\tau_j}$ e $K_j(t) = \Delta FtD^*(t)\big|_{t=\tau_j}$, $i, j = 1, 2$. Ou

seja, para e $i, j = 1, 2$:

$$H_j^i(t) = \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} \geq t\}} \left\{ \sum_{k=1}^{m} -s_i \, \mathbf{1}_{\{t < t_k\}} \, e^{-rt_k} \left[\frac{\partial_j G(\mathbf{t}_{-i}, t_k)}{\partial_j G(t,t)} - \frac{G(\mathbf{t}_{-i}, t_k)}{G(t,t)} \right] \right.$$
$$\left. + (1 - \delta_i) \, e^{-rT} \left[\frac{G(\mathbf{t}_{-i}, T)}{G(t,t)} - \frac{\partial_j G(\mathbf{t}_{-i}, T)}{\partial_j G(t,t)} \right] \right\} \tag{2.24a}$$

$$H_i^i(t) = \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t\}} \left\{ \sum_{k=1}^{m} s_i \, \mathbf{1}_{\{t < t_k\}} \, e^{-rt_k} \left[\mathbf{1}_{\{\tau_j > t\}} \frac{G(\mathbf{t}_{-i}, t_k)}{G(t,t)} + \mathbf{1}_{\{\tau_j \leq t\}} \frac{\partial_j G(\mathbf{t_k}_{-j}, \tau_j)}{\partial_j G(\mathbf{t}_{-j}, \tau_j)} \right] \right.$$
$$\left. + (1 - \delta_i) \, e^{-rT} \left[\mathbf{1}_{\{\tau_j > t\}} \frac{G(\mathbf{t}_{-i}, T)}{G(\mathbf{t})} + \mathbf{1}_{\{\tau_j \leq t\}} \frac{\partial_j G(\mathbf{T}_{-j}, \tau_j)}{\partial_j G(\mathbf{t}_{-j}, \tau_j)} \right] \right\} \tag{2.24b}$$

$$K_j(t) = \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} = \tau_j \geq t\}} \left\{ \sum_{k=1}^{m} s \, \mathbf{1}_{\{t < t_k\}} \, e^{-rt_k} \frac{G(t_k, t_k)}{G(t,t)} + (1 - \delta_j) \, e^{-rT} \left[1 - \int_t^T h_j(u) \frac{G(u,u)}{G(t,t)} \, du \right] \right.$$
$$\left. - (1 - \delta_i) \, e^{-rT} \int_t^T h_i(u) \frac{G(u,u)}{G(t,t)} \, du \right\} \tag{2.24c}$$

onde, para $i = 1$, $G(\mathbf{t}_{-i}, t_k) = G(t_k, t)$ e para $i = 2$, temos $G(t, t_k)$; analogamente para $\partial_j G(\mathbf{t}_{-j}, \tau_j)$.

2.2.3 Hedge Dinâmico I

Assumindo a liquidez dos derivativos e com o propósito de fazer o hedge de um *swap* FtD com dois nomes, o vendedor deste contrato compõe a seguinte carteira: vendido em um *swap* FtD, comprado nos *swaps* de crédito CDSs de cada nomes e com uma quantia γ_0 investida à taxa de juros livre de risco.

No instante $t < \min\{\tau_{(1)}, T\}$, o valor desta carteira é:

$$\Pi(t) = \sum_{i=1}^{2} \gamma_i(t) \, CDS^i(t) + \gamma_0(t) \, e^{-rt} - FtD(t)$$

logo, o valor descontado à taxa de juros é:

$$\Pi^*(t) = \sum_{i=1}^{2} \gamma_i(t) \, CDS^{*i}(t) + \gamma_0(t) \, cash - FtD^*(t).$$

Supomos que a estratégia $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\gamma_0(t), \gamma_1(t), \gamma_2(t))$ é auto-financiada, no sentido que a variação do valor da carteira é determinada somente pela variação do valor dos derivativos, ou seja,

$$d\Pi^*(t) = \sum_{i=1}^{2} \gamma_i(t) \, dCDS^{*i}(t) - dFtD^*(t) \, . \tag{2.25}$$

No contexto com dois nomes temos o seguinte resultado:

Proposição 2.5. *No instante $t < \min\{\tau_{(1)}, T\}$, a estratégia de hedge dinâmico de um swap FtD com dois nomes $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\gamma_0(t), \gamma_1(t), \gamma_2(t))$ é obtida de forma que $\boldsymbol{\gamma}'(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ é solução do sistema linear:*

$$\mathbf{H}(t)\boldsymbol{\gamma}'(t) = \mathbf{K}(t)$$

onde $H_{j,i}(t) = H_j^i(t)$ e $K_j(t)$ são determinados pelas expressões (2.24a), (2.24b) e (2.24c), $i, j = 1, 2$. E a quantia de cash é determinada por:

$$\gamma_0(t) = FtD^*(t) - \sum_{i=1}^{2} \gamma_i(t)\, CDS^{*i}(t)\,. \tag{2.26}$$

Prova: Substituindo na expressão (2.25) as dinâmicas dos valores dos derivativos, obtidas pela forma diferencial de (2.23a) e (2.23b), a variação infinitesimal do valor da carteira em termos dos fatores de risco é dada por:

$$\begin{aligned} d\Pi^*(t) &= \sum_{i=1}^{2} \gamma_i(t) \Big[\sum_{j=1}^{2} H_j^i(t)\, dM_t^j \Big] - \sum_{j=1}^{2} K_j(t)\, dM_t^j \\ &= \sum_{j=1}^{2} \Big[\sum_{i=1}^{2} \gamma_i(t)\, H_j^i(t) - K_j(t) \Big] \big(dN_j(t) - \mathbf{1}_{\{\tau_j \geq t\}}\, \mathbf{h}_j(t)\, dt \big)\,. \end{aligned}$$

Portanto, a variação no valor da carteira é composta por dois termos: um termo determinístico e um termo de incerteza devido ao default dos dois nomes.

A estratégia de hedge dinâmico do *swap* FtD consiste em obter $\boldsymbol{\gamma}(t)$, tal que a variação do valor da carteira $d\Pi^*(t)$ seja livre de risco. Dessa forma, $\boldsymbol{\gamma}'(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ é solução do sistema linear $\mathbf{H}(t)\boldsymbol{\gamma}'(t) = \mathbf{K}(t)$, isto é,

$$\sum_{i=1}^{2} \gamma_i(t)\, H_j^i(t) = K_j(t)$$

para $j = 1, 2$.

A quantia $\gamma_0(t)$ em *cash* é determinada de forma que a estratégia $\boldsymbol{\gamma}(t)$ replica o *payoff* do *swap* FtD no instante $t < \min\{\tau_{(1)}, T\}$, ou seja, $\Pi^*(t) = 0$, obtendo-se a expressão (2.26) para $\gamma_0(t)$. □

O sistema linear $\mathbf{H}(t)\boldsymbol{\gamma}'(t) = \mathbf{K}(t)$ tem solução única se $\det(\mathbf{H}(t)) \neq 0$, para cada $t < \min\{\tau_{(1)}, T\}$. Isto é, se os saltos nos valores dos CDSs devido ao default de um nome não for obtido por uma combinação linear dos saltos dos valores dos *swaps* de crédito decorrentes ao default dos demais nomes. Em outras palavras, o mercado deve ser completo para que a estratégia de hedge do *swap* FtD seja única.

2.3 Contexto com n nomes

Nesta seção generalizamos os resultados obtidos na Seção 2.2, obtendo o hedge dinâmico de um *swap* FtD com n nomes. Iniciamos com a definição de funções de sobrevivência e de distribuição no contexto com n nomes.

Definição: Seja $\mathbf{t} = (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n$, um vetor de instantes de tempo. Denotamos $G(\mathbf{t})$, a função de sobrevivência dos n nomes, isto é:

$$G(\mathbf{t}) = P[\tau_1 > t_1; \ldots; \tau_n > t_n]$$

e assumimos que $G(\mathbf{t})$ é suficientemente diferenciável. A função de distribuição conjunta $F(\mathbf{t})$ dos instantes de default é denotada por:

$$F(\mathbf{t}) = P[\tau_1 \leq t_1; \ldots; \tau_n \leq t_n]$$

e $F_i(t_i) = P[\tau_i \leq t_i]$ é a função de distribuição marginal de τ_i, para $i = 1, ..., n$.

A seguir temos a notação que é utilizada neste e nos próximos capítulos.

Observação: As variáveis em negrito representam vetores.

Notações: Considere que o nome i sobreviveu até o instante t, $\tau_i > t$. Denotamos:

- $I_D = \{k_1, ..., k_{j-1}\}$, o conjunto dos nomes que tiveram o default até (inclusive) o instante t, isto é, $s \in I_D \Rightarrow \tau_s \leq t$, para $j = 1, ..., n$ com $j = 1 \Rightarrow I_D = \emptyset$ e $n \geq 2$.
- $I_S = \{l_1, ..., l_{n-j}\}$, o conjunto dos nomes, exceto o nome i, que sobreviveram até o instante t, ou seja, $r \in I_S \Rightarrow \tau_r > t$, tal que $i \notin I_S$.

Dessa forma, $\{I_D, \{i\}, I_S\}$ é uma parte do conjunto dos n nomes $I = \{1, ..., n\}$, onde

$$i \notin I_D,\ i \notin I_S,\ I_D \cap I_S = \emptyset,\ I_D \cup I_S \cup \{i\} = \{1, ..., n\}\,.$$

Para i fixo, definimos:

- $I' = \{\{1, ..., n\} - \{i\}\}$: o conjunto formado pelos nomes em I exceto o nome i;
- $A_i = \{I_D, I_S\}$: uma parte do conjunto I', tal que $I_D \cup I_S = I'$;
- $|I_D|$: a cardinalidade de I_D, analogamente para $|I_S|$;
- $\Delta_{k,I'}$: o conjunto das partes de I', tal que $|I_D| = k$, onde $k = 0, ..., n-1$.

Desta forma, temos que:

$$\sum_{\substack{A_i \subset \Delta_{k,I'} \\ A_i = \{I_D, I_S\}}} : \text{somatório de todas as partes } A_i \text{ de } I', \text{ tal que } |I_D| = k.$$

Observando-se que $|I_D| = k$ indica implicitamente que $|I_S| = n - 1 - k$.

Exemplo: Considere $I = \{q_1, q_2, q_3\}$ e $i = q_3$, logo $I' = \{q_1, q_2\}$. Para $k = 0, 1, 2$, temos:

$$\Delta_{k,I'} = \begin{cases} \{\emptyset, \{q_1, q_2\}\} & \text{para } k = 0 \\ \{\{\{q_1\}, \{q_2\}\}, \{\{q_2\}, \{q_1\}\}\} & \text{para } k = 1 \\ \{\{q_1, q_2\}, \emptyset\} & \text{para } k = 2 \end{cases}$$

De forma simplificada, denotaremos:

$$\mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} \leq t\}} = \mathbf{1}_{\{\tau_{k_1} \leq t, \ldots, \tau_{k_{j-1}} \leq t\}} = \prod_{i=1}^{j-1} \mathbf{1}_{\{\tau_{k_i} \leq t\}}$$

e analogamente para $\mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}}$.

Para as funções de sobrevivência e de distribuição, utilizaremos a seguinte notação:

Seja $\mathbf{t} = (t_1, ..., t_n)$, um vetor de instantes de tempo. A derivada parcial de função de sobrevivência $G(\mathbf{t})$ com relação à i-ésima variável é denotada por $\partial_i G(\mathbf{t}) = \partial G(\mathbf{t})/\partial t_i$, para $i = 1, ..., n$. Para o conjunto I_D dos nomes que tiveram o default antes do instante t definimos:

$$\partial_{I_D} G(\mathbf{t}) := \frac{\partial^{j-1} G(\mathbf{t})}{\partial t_{k_1} ... \partial t_{k_{j-1}}}$$

onde $\mathbf{t}_{I_D} = (t_{k_1}, ..., t_{k_{j-1}}) \in \mathbb{R}^{j-1}$.

Observação 1: Se $I_D = \emptyset$, ou seja, $|I_D| = 0$, então $\partial_{I_D} G(\mathbf{t}) = G(\mathbf{t})$.

Para as funções que têm o vetor $\mathbf{t} = (t_1, ..., t_n)$ como argumento, a notação a seguir é utilizada para representar que o i-ésimo componente de $\mathbf{t}$ é substituído por s:

$$F(\mathbf{t}_{-i}, s) := F(t_1, ..., t_{i-1}, s, t_{i+1}, ..., t_n).$$

Generalizando, se t_i for substituído por s e além disso, se os componentes do vetor $\mathbf{t}$ identificados pelos índices no conjunto I_D forem substituídos por r, tal que $i \notin I_D$, denotaremos estas substituições por $F(\mathbf{t}_{-i}, s; \mathbf{t}_{-I_D}, r)$, ou seja, para $k_l \in I_D$, $l = 1, ..., j-1$,

$$F(\mathbf{t}_{-i}, s; \mathbf{t}_{-I_D}, r) = F(\mathbf{t}_{-i}, s; \mathbf{t}_{-k_1}, r; ...; \mathbf{t}_{-k_{j-1}}, r).$$

Observação 2: Considere os conjuntos I_D^k e I_S^p, onde $|I_D^k| = k \leq j-1$ e $|I_S^p| = p \leq n-j$. Para $\mathbf{t}' \in \mathbb{R}^p$, denotamos por:

$$F_{i,I_D^k,I_S^p}(t, \boldsymbol{\tau}_{I_D^k}, \mathbf{t}') := F_{i,I_D^k,I_S^p}(\mathbf{t}_{-I_D^k}, \boldsymbol{\tau}_{I_D^k})$$

a função de distribuição marginal dos nomes em I_D^k, I_S^p e o nome i, onde $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{k+p+1}$.

Generalizando o resultado da Seção 2.2.1, um processo X_t contínuo à direita e adaptado à $\mathcal{G}_t$ pode ser representado por:

$$\begin{aligned} X_t = {} & \mathbf{1}_{\{0 \leq t < \tau_{(1)}\}} f_0(t) + \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} \leq t < \tau_{(2)}\}} f_1(t, \tau_{(1)}) + ... \\ & + \mathbf{1}_{\{\tau_{(n-1)} \leq t < \tau_{(n)}\}} f_{n-1}(t, \tau_{(1)}, ..., \tau_{(n-1)}) + \mathbf{1}_{\{\tau_{(n)} \leq t < \infty\}} f_n(t, \tau_{(1)}, ..., \tau_{(n)}) \end{aligned}$$

onde $\tau_{(j)}$ é o j-ésimo default, $\tau_{(0)} = 0$ e $f_j(t, \tau_{(1)}, ..., \tau_{(j)})$ é $\mathcal{G}_{\tau_{(j)}}$-mensurável e depende da identidade dos j nomes que tiveram o default até o instante t, $j = 0, 1, ..., n$.

Considerando que $\tau_i > t$, o conjunto dos n nomes pode ser escrito como $I = \{I_D, \{i\}, I_S\}$, onde $I_D = \{k_1, ..., k_{j-1}\}$ e $I_S = \{l_1, ..., l_{n-j}\}$, para $j = 1, ..., n$, com $j = 1$, $I_D = \emptyset$. Reescrevendo a expressão acima em função dos instantes de default dos n nomes, para $\tau_i > t$, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\{\tau_i > t\}} X_t = \mathbf{1}_{\{\tau_i > t\}} \Big\{ & \mathbf{1}_{\{\tau_{l_1} > t; ..., \tau_{l_{n-1}} > t\}} f_0(t) + \sum_{\substack{A_i \subset \Delta_{1,I'} \\ A_i = \{I_D, I_S\}}} \mathbf{1}_{\{\tau_{k_1} \leq t; \tau_{l_1} > t; ...; \tau_{l_{n-2}} > t\}} f_1(t, \tau_{(1)}) \\ & + ... + \sum_{\substack{A_i \subset \Delta_{j-1,I'} \\ A_i = \{I_D, I_S\}}} \mathbf{1}_{\{\tau_{k_1} \leq t; ...; \tau_{k_{j-1}} \leq t; \tau_{l_1} > t; ...; \tau_{l_{n-j}} > t\}} f_{j-1}(t, \tau_{(1)}, ..., \tau_{(j-1)}) \\ & + ... + \mathbf{1}_{\{\tau_{k_1} \leq t; ...; \tau_{k_{n-1}} \leq t\}} f_{n-1}(t, \tau_{(1)}, ..., \tau_{(n-1)}) \Big\} \end{aligned}$$

onde os somatórios se estendem sobre todas as possíveis partes A_i, tal que $|I_D| = k$, para $k = 0, 1, ..., (n-1)$. Logo,

$$\mathbf{1}_{\{\tau_i > t\}} X_t = \mathbf{1}_{\{\tau_i > t\}} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\substack{A_i \subset \Delta_{k,I'} \\ A_i = \{I_D, I_S\}}} \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} \leq t; \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}} f_k(t, \tau_{(1)}, ..., \tau_{(k)}).$$

Considere $g(\tau_i)$ uma função adaptada à $\mathcal{G}_t$ tal que $E[|g(\tau_i)|] < \infty$. Conforme a expressão acima, a esperança condicional $E\big[g(\tau_i)|\,\mathcal{G}_t\big]$ pode ser escrita como:

$$E\big[g(\tau_i)|\,\mathcal{G}_t\big] = \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}} g(\tau_i) + \mathbf{1}_{\{\tau_i > t\}} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\substack{A_i \subset \Delta_{k,I'} \\ A_i = \{I_D, I_S\}}} \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} \leq t; \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}} E\big[g(\tau_i)|\,\mathcal{G}_t'\big] \tag{2.27}$$

onde $\mathcal{G}_t' = \{\boldsymbol{\tau}_{I_D} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}; \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t; \tau_i > t\}$, para $|I_D| = 0, 1, ..., n-1$ e $i = 1, ..., n$.

2.3.1 Valores dos Derivativos de Crédito

Nesta seção obtemos os valores do *swap* de crédito e do *swap first-to-default* para n nomes, generalizando as expressões das Proposições 2.2 e 2.3.

Valor do *Swap* de Crédito

Considere o *swap* de crédito com as características descritas na Seção 2.1. Conforme foi definido, sob a medida neutra ao risco, o valor descontado do CDS no nome i, $CDS^{*i}(t)$, do ponto de vista do comprador é composto por duas partes: o valor pago pela proteção contra o default do nome i e o valor que ele recebe se o default deste nome ocorrer antes do vencimento do contrato.

A proposição a seguir fornece o valor pago pela proteção contra o default do nome i.

Proposição 2.6. *No instante $t \leq T$, o valor descontado que o comprador do swap de crédito (CDS) paga pela proteção contra o default do nome i é dado por $\pi_i^{vp}(t) = E\big[f_p^*(\tau_i)|\,\mathcal{G}_t\big]$, onde*

$$f_p^*(\tau_i) \;=\; \sum_{j=1}^{m} s_i\, e^{-rt_j}\, \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}}$$

é $\mathcal{G}_T$-mensurável e $E\big[|f_p^*(\tau_i)|\big] < \infty$. Logo,

$$\begin{aligned}\pi_i^{vp}(t) \;=\; & \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}} \sum_{j=1}^{m} s_i\, e^{-rt_j}\, \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}} \\ & + \mathbf{1}_{\{\tau_i > t\}} \sum_{j=1}^{m} s_i\, e^{-rt_j} \Bigg[\mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\substack{A_i \subset \Delta_{k,I'} \\ A_i = \{I_D, I_S\}}} \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} \leq t; \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}} \frac{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D}; \mathbf{t}_{-i}, t_j)}{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D})} \Bigg]\end{aligned}$$

onde $I' \cup \{i\} = I$, para $i = 1, ..., n$.

O primeiro termo representa a soma dos pagamentos feitos até o instante de default do nome i tal que, no instante t, o default deste nome já ocorreu. Por outro lado, se o nome i sobreviveu até o instante t, o valor que o comprador do CDS paga pela proteção é dado pelo valor descontado das taxas de proteção s_i pagas até o instante t, logo com probabilidade 1, somado aos pagamentos futuros multiplicados pelas probabilidades condicionais de sobrevivência do nome i, dada a informação sobre o default dos demais nomes no instante t.

Para a prova do valor $\pi_i^{vp}(t)$, precisamos de uma expressão que relaciona a função de sobrevivência à função de distribuição. Isto é obtido através do *Princípio da Inclusão e Exclusão*[7], dado pela proposição a seguir.

[7] Ver Gill [10] e Dudewicz [5].

Proposição 2.7. (Princípio da Inclusão e Exclusão) *Sejam $\bar{A}_1, ..., \bar{A}_n$, n eventos disjuntos. Então,*

$$P\big(\bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i\big) = 1 - P\big(\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i^c\big)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(\bar{A}_i) - \sum_{i<j} P(\bar{A}_i \cap \bar{A}_j) + \sum_{i<j<k} P(\bar{A}_i \cap \bar{A}_j \cap \bar{A}_k) - ... + (-1)^{n+1} P(\bar{A}_1 \cap ... \cap \bar{A}_n)$$

Esta relação é uma generalização do resultado da Proposição 2.1, no caso em que $n = 2$.

No contexto de risco de crédito, consideramos $\bar{A}_i = \{\tau_i \leq t_i\}$, o evento de default do nome i, para $i = 1, ..., n$.

Reescrevendo o Princípio da Inclusão e Exclusão para os eventos de default de n nomes, temos:

$$1 - P[\tau_1 > t_1; ...; \tau_n > t_n] = \sum_{i=1}^{n} P[\tau_i \leq t_i] - \sum_{i<j} P[\tau_i \leq t_i; \tau_j \leq t_j] + ... + (-1)^{n+1} P[\tau_1 \leq t_1; ...; \tau_n \leq t_n]$$

ou seja, para $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$,

$$1 - G(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{n} F_i(t_i) - \sum_{i<j} F_{ij}(t_i, t_j) + \sum_{i<j<k} F_{ijk}(t_i, t_j, t_k) - ... + (-1)^{n+1} F(\mathbf{t})$$

onde os somatórios se estendem sobre todos os *singletons*, duplas, triplas, etc, dos diferentes elementos de I.

Prova: (Proposição 2.6) O valor descontado que o comprador do CDS paga pela proteção contra o default do nome i, π_i^{vp}, é o valor esperado da soma dos pagamentos do *spread* s_i descontado à taxa de juros, condicionado à informação sobre o default dos n nomes. Pela expressão (2.27), temos:

$$\pi_i^{vp}(t) \;=\; \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}} f_p^*(\tau_i) \;+\; \mathbf{1}_{\{\tau_i > t\}} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\substack{A_i \subset \Delta_{k,I'} \\ A_i = \{I_D, I_S\}}} \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} \leq t; \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}} E\big[f_p^*(\tau_i) | \, \mathcal{G}_t' \,\big] \tag{2.28}$$

onde $\mathcal{G}_t' = \{\boldsymbol{\tau}_{I_D} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}; \tau_i > t; \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}$, para $|I_D| = 0, 1, ..., n-1$. Logo, devemos provar o valor $\pi_i^{vp}(t)$ para o instante t anterior ao default do nome i, $t < \tau_i$.

A esperança condicional em (2.28) é calculada para o caso em que os n nomes sobreviveram até o instante t e o caso em que pelo menos um nome já teve o default até (inclusive) o instante t. Ou seja, consideraremos os seguintes casos:

(i) $\mathcal{G}_t' = \{\boldsymbol{\tau} > t\}$, onde $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$

(ii) $\mathcal{G}'_t = \{\boldsymbol{\tau}_{I_D} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{I_D}}; \tau_i > t; \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}$, com $|I_D| = 1, ..., n-1$.

A prova é feita por indução. Para $n = 2$ e $i = 1$, pela expressão da proposição temos os conjuntos:

$$A_1 = \{I_D, I_S\} = \begin{cases} \{\emptyset, \{2\}\} & \text{se } k = 0 \\ \{\{2\}, \emptyset\} & \text{se } k = 1 \end{cases}$$

onde $k = 0$ corresponde ao caso (i.a) e $k = 1$, ao caso (ii.a) calculados na prova da Proposição 2.2, no contexto com dois nomes. Logo, a expressão da proposição concorda com o valor $\pi_1^{vp}(t)$ obtido na Proposição 2.2. De forma análoga, podemos obter o valor $\pi_2^{vp}(t)$ para o nome 2. Portanto, a expressão $\pi_i^{vp}(t)$ é válida para $n = 2$.

Supondo que a expressão é verdadeira para n, a seguir provamos para $(n+1)$ nomes.

Reescrevendo o Princípio da Inclusão e Exclusão (Proposição 2.7) para $(n+1)$ nomes, temos:

$$\begin{aligned} 1 - G(\mathbf{t}) &= \sum_{i=1}^{n+1} F_i(t_i) - \sum_{i<j} F_{ij}(t_i, t_j) + \sum_{i<j<k} F_{ij\,k}(t_i, t_j, t_k) - ... + (-1)^{n+1} F(\mathbf{t}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} F_i(t_i) + F_{n+1}(t_{n+1}) - \sum_{\substack{i<j \\ j\neq n+1}} F_{ij}(t_i, t_j) - \sum_{i=1}^{n} F_{i,n+1}(t_i, t_{n+1}) \\ &\qquad + \sum_{\substack{i<j<k \\ k\neq n+1}} F_{ij\,k}(t_i, t_j, t_k) + \sum_{i<j} F_{i,j,n+1}(t_i, t_j, t_{n+1}) - ... + (-1)^{n+1} F(\mathbf{t}) \\ &= 1 - G(\mathbf{t}') + F_{n+1}(t_{n+1}) - \sum_{i=1}^{n} F_{i,n+1}(t_i, t_{n+1}) + ... + (-1)^{n+1} F(\mathbf{t}) \end{aligned} \tag{2.29}$$

onde $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $\mathbf{t}' \in \mathbb{R}^n$.

Observação: Nas provas por indução das proposições deste e dos demais capítulos, utilizamos o acento $'$ para indicar que o vetor tem dimensão n.

A igualdade (2.29) expressa a função de sobrevivência dos $(n+1)$ nomes em termos da função de sobrevivência de n nomes. Esta expressão é utilizada na prova a seguir.

Assim como no caso $n = 2$, para $(n+1)$ nomes devemos calcular o valor $\pi_i^{vp}(t)$, para $\tau_i > t$. Ou seja, calcular a esperança condicional em (2.28) considerando-se os casos (i) e (ii).

Caso (i) Para a filtração $\mathcal{G}'_t = \{\boldsymbol{\tau} > t\}$, os $(n+1)$ nomes sobreviveram até o instante t. Neste caso, temos:

$$\begin{aligned} E\big[\, f_p^*(\tau_i)\, \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau} > t\}}\big] &= E\Big[E\big[\, f_p^*(\tau_i)\, \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau} > t\}} \big|\, \mathcal{G}'_t\,\big]\Big] \\ &= E\big[\, f_p^*(\tau_i) \big|\, \mathcal{G}'_t\,\big]\, P[\boldsymbol{\tau} > t] \;=\; E\big[\, f_p^*(\tau_i) \big|\, \mathcal{G}'_t\,\big]\, G(\mathbf{t}) \end{aligned}$$

portanto, para $t \leq T$, o valor $\pi_i^{vp}(t)$ é dado por:

$$\pi_i^{vp}(t) \;=\; \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau} > t\}}\, E\big[\, f_p^*(\tau_i) | \, \mathcal{G}_t' \,\big] \;=\; \frac{E\big[\, f_p^*(\tau_i)\, \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau} > t\}}\big]}{G(\mathbf{t})} \tag{2.30}$$

onde, para o numerador temos:

$$E\big[\, f_p^*(\tau_i)\, \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau} > t\}}\big] = \int_t^\infty f_p^*(u_i) \underbrace{\int_t^\infty \!\!\ldots \int_t^\infty}_{(n)} \partial^{n+1} F(\mathbf{u})\,. \tag{2.31}$$

(a.1) Para $i \neq n+1$, podemos reescrever a expressão (2.29) como:

$$G(\mathbf{t}) \;=\; G(\mathbf{t}') - \sum_{k=0}^{|I_S'|} \sum_{I_S^k \subset I_S'} (-1)^k \big(F_{I_S^k, n+1}(\mathbf{t}, t) - F_{i, I_S^k, n+1}(t, \mathbf{t}, t)\big) \tag{2.32}$$

$$\underbrace{\int_t^\infty \!\!\ldots \int_t^\infty}_{(n+1)} \partial^{n+1} F(\mathbf{u}) \;=\; \underbrace{\int_t^\infty \!\!\ldots \int_t^\infty}_{(n)} \partial^{n} F(\mathbf{u}') - \sum_{k=0}^{|I_S'|} \sum_{I_S^k \subset I_S'} (-1)^k \big(F_{I_S^k, n+1}(\mathbf{t}, t) - F_{i, I_S^k, n+1}(t, \mathbf{t}, t)\big)$$

onde $I_S' = I_S - \{n+1\}$ e I_S^k é um subconjunto de I_S'. O somatório $\sum_{I_S^k \subset I_S'}$ se estende sobre todos os subconjutos $I_S^k \subset I_S'$, tal que $|I_S^k| = k$. Derivando a expressão acima com relação à t da i-ésima variável, para $i \neq n+1$, e substituindo em (2.31), obtemos:

$$\begin{aligned} E\big[\, f_p^*(\tau_i)\, \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau} > t\}}\big] &= \int_t^\infty f_p^*(u_i) \underbrace{\int_t^\infty \!\!\ldots \int_t^\infty}_{(n-1)} \partial^{n} F(\mathbf{u}') - \sum_{k=0}^{|I_S'|} \sum_{I_S^k \subset I_S'} (-1)^k \int_t^\infty f_p^*(u_i)\, \partial_i F_{i, I_S^k, n+1}(u_i, \mathbf{t}, t) \\ &= J_1 - \sum_{k=0}^{|I_S'|} \sum_{I_S^k \subset I_S'} (-1)^k\, J_2\,. \end{aligned}$$

A seguir, calculamos as integrais J_1 e J_2.

$$\begin{aligned} J_1 &= \underbrace{\int_t^\infty \!\!\ldots \int_t^\infty}_{(n)} f_p^*(u_i)\, \partial^n F(\mathbf{u}') \;=\; E\big[\, f_p^*(\tau_i)\, \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}' > t\}}\big] \;=\; \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}' > t\}}\, \pi_i^{vp}(t)\, G(\mathbf{t}') \\ &= \sum_{j=1}^m s_i\, e^{-rt_j} \,\big[\, \mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} G(\mathbf{t}') + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}} G(\mathbf{t}'_{-i}, t_j)\big] \end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre da hipótese de indução e $\boldsymbol{\tau}', \mathbf{t}' \in \mathbb{R}^n$. Para a integral J_2, temos:

$$\begin{aligned}
J_2 &= \int_t^\infty f_p^*(u_i)\, \partial_i F_{i,I_S^k,n+1}(u_i, \mathbf{t}, t) \\
&= \sum_{j=1}^m s_i\, e^{-rt_j} \left[\mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} \int_t^\infty \partial_i F_{i,I_S^k,n+1}(u_i, \mathbf{t}, t) + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}} \int_{t_j}^\infty \partial_i F_{i,I_S^k,n+1}(u_i, \mathbf{t}, t) \right] \\
&= \sum_{j=1}^m s_i\, e^{-rt_j} \big[\mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} \big(F_{I_S^k,n+1}(\mathbf{t}, t) - F_{i,I_S^k,n+1}(t, \mathbf{t}, t) \big) \\
&\qquad + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}} \big(F_{I_S^k,n+1}(\mathbf{t}, t) - F_{i,I_S^k,n+1}(t_j, \mathbf{t}, t) \big) \big]
\end{aligned}$$

Reunindo os resultados das integrais J_1 e J_2 e utilizando a relação (2.32), obtemos o valor da esperança, para $i \neq n+1$:

$$E\big[f_p^*(\tau_i)\, \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau} > t\}} \big] = \sum_{j=1}^m s_i\, e^{-rt_j} \big[\mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} G(\mathbf{t}) + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}} G(\mathbf{t}_{-i}, t_j) \big]\,. \tag{2.33}$$

Portanto, para o caso em que todos os nomes sobreviveram até o instante t, $\boldsymbol{\tau} > t$, o valor descontado pago pela proteção contra o default do nome i, para $i \neq n+1$, é:

$$\pi_i^{vp}(t) = \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau} > t\}} \sum_{j=1}^m s_i\, e^{-rt_j} \left[\mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}} \frac{G(\mathbf{t}_{-i}, t_j)}{G(\mathbf{t})} \right]$$

no instante t antes do vencimento do contrato T.

(a.2) Para $i = n+1$, o procedimento para obtermos o valor descontado pago pela proteção contra o default do nome $(n+1)$ é semelhante ao caso (a.1).

Reescrevemos a expressão (2.29) como:

$$G(\mathbf{t}) = G(\mathbf{t}') - F_{n+1}(t) - \sum_{k=1}^{|I_S|} \sum_{I_S^k \subset I_S} (-1)^k\, F_{I_S^k,n+1}(\mathbf{t}, t)\,. \tag{2.34}$$

Escrevendo a função de sobrevivência $G(t)$ na forma integral, derivando com relação à t da $(n+1)$-ésima variável e substituindo na expressão (2.31), tem-se:

$$\begin{aligned}
E\big[f_p^*(\tau_{n+1})\, \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau} > t\}} \big] &= \int_t^\infty f_p^*(u_{n+1}) \left(\partial_{n+1} F_{n+1}(u_{n+1}) + \sum_{k=1}^{|I_S|} \sum_{I_S^k \subset I_S} (-1)^k\, \partial_{n+1} F_{I_S^k,n+1}(\mathbf{t}, u_{n+1}) \right) \\
&= J_1 + \sum_{k=1}^{|I_S|} \sum_{I_S^k \subset I_S} (-1)^k\, J_2\,.
\end{aligned}$$

As integrais acima são calculadas de forma análoga à integral J_2 do caso (a.1); logo,

$$\begin{aligned} J_1 &= \sum_{j=1}^{m} s_{n+1}\, e^{-rt_j}\big[\,\mathbf{1}_{\{t\geq t_j\}}\big(1-F_{n+1}(t)\big)+\mathbf{1}_{\{t< t_j\}}\big(1-F_{n+1}(t_j)\big)\big] \\ J_2 &= \sum_{j=1}^{m} s_{n+1}\, e^{-rt_j}\big[\,\mathbf{1}_{\{t\geq t_j\}}\big(F_{I_S^k}(\mathbf{t})-F_{I_S^k,n+1}(\mathbf{t},t)\big)+\mathbf{1}_{\{t< t_j\}}\big(F_{I_S^k}(\mathbf{t})-F_{I_S^k,n+1}(\mathbf{t},t_j)\big)\big]\,. \end{aligned}$$

Observando-se que, neste caso, $|I_S| = n$ e

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{|I_S|}\sum_{I_S^k\subset I_S}(-1)^k\, F_{I_S^k}(\mathbf{t}) &= -\sum_{i=1}^{n}F_i(t)+\sum_{\substack{i<j\\ j\neq n+1}}F_{ij}(t,t)-\sum_{\substack{i<j<k\\ k\neq n+1}}F_{i\,j\,k}(t,t,t)+\ldots+(-1)^nF(\mathbf{t}') \\ &= G(\mathbf{t}')-1 \end{aligned} \tag{2.35}$$

onde segunda igualdade decorre do Princípio da Inclusão e Exclusão (Proposição 2.7) e $\mathbf{t}' \in \mathbb{R}^n$.

Reunindo os resultados das integrais J_1 e J_2, e utilizando a expressão (2.35) na integral J_2, obtemos:

$$\begin{aligned} E\big[\,f_p^*(\tau_{n+1})\,\mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}>t\}}\big] &= \sum_{j=1}^{m} s_{n+1}\, e^{-rt_j}\Big[\,\mathbf{1}_{\{t\geq t_j\}}\Big(G(\mathbf{t}')-F_{n+1}(t)-\sum_{k=1}^{|I_S|}\sum_{I_S^k\subset I_S}(-1)^k\, F_{I_S^k,n+1}(\mathbf{t},t)\Big) \\ &\qquad +\mathbf{1}_{\{t< t_j\}}\Big(G(\mathbf{t}')-F_{n+1}(t_j)-\sum_{k=1}^{|I_S|}\sum_{I_S^k\subset I_S}(-1)^k\, F_{I_S^k,n+1}(\mathbf{t},t_j)\Big)\Big] \\ &= \sum_{j=1}^{m} s_{n+1}\, e^{-rt_j}\big[\,\mathbf{1}_{\{t\geq t_j\}}G(\mathbf{t})\;+\;\mathbf{1}_{\{t< t_j\}}G(\mathbf{t}_{-(n+1)},t_j)\big] \end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre da relação (2.34). Conseqüentemente, o valor descontado que o comprador do *swap* de crédito no nome $(n+1)$ paga pela proteção é:

$$\pi_{n+1}^{vp}(t) \;=\; \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}>t\}}\sum_{j=1}^{m} s_{n+1}\, e^{-rt_j}\left[\,\mathbf{1}_{\{t\geq t_j\}}+\mathbf{1}_{\{t< t_j\}}\frac{G(\mathbf{t}_{-(n+1)},t_j)}{G(\mathbf{t})}\right].$$

Portanto, através dos casos (a.1) e (a.2), concluímos que, para $i = 1, ..., n+1$, a expressão $\pi_i^{vp}(t)$ da proposição é válida para $(n+1)$ nomes, dado que todos os nomes sobreviveram até o instante t, para $t \leq T$.

Caso (ii) Para a filtração $\mathcal{G}_t' = \{\boldsymbol{\tau}_{I_D} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D};\, \tau_i > t;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}$, onde $|I_D| = j-1$ e $j = 2, ..., n+1$.

Neste caso, pelo menos o default de um nome já ocorreu até o instante t. Temos que:

$$\begin{aligned}
&E\big[\, f_p^*(\tau_i)\, \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} > \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}\,;\, \tau_i > t\,;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}}\big] \\
&= E\Big[\, E\big[\, f_p^*(\tau_i)\, \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} > \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}\,;\, \tau_i > t;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}} | \{\boldsymbol{\tau}_{I_D} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}; \tau_i > t; \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}\big]\Big] \\
&= \int_{\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}}^{\infty} E\big[\, f_p^*(\tau_i) | \{\boldsymbol{\tau}_{I_D} = \mathbf{u}_{I_D}; \tau_i > t; \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}\big] \underbrace{\int_t^{\infty} \cdots \int_t^{\infty}}_{(n+2-j)} \partial^{n+1} F(\mathbf{u})
\end{aligned} \tag{2.36}$$

onde $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}$ denota o vetor dos instantes de default dos nomes em I_D.

Observação: Para simplificar a notação, definimos a integral múltipla

$$\int_{\bar{\tau}_{k_1}}^{\infty} \int_{\bar{\tau}_{k_2}}^{\infty} \cdots \int_{\bar{\tau}_{k_{j-1}}}^{\infty} \partial^{n+1} F(\mathbf{u}) = \int_{\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}}^{\infty} \partial^{n+1} F(\mathbf{u})$$

onde $k_1, ..., k_{j-1} \in I_D$, para $j = 2, ..., n+1$.

Escrevendo a função de sobrevivência para $\mathbf{t} = (\mathbf{t}_{-I_D}, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e derivando com relação à $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}$, temos:

$$\partial_{I_D} G(\, \mathbf{t}_{-I_D}, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}) \;=\; (-1)^{|I_D|} \underbrace{\int_t^{\infty} \cdots \int_t^{\infty}}_{(n+2-j)} \partial^{n+1} F(\, \mathbf{u}_{-I_D}, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D})\,.$$

Substituindo esta expressão em (2.36), obtemos:

$$E\big[\, f_p^*(\tau_i)\, \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} > \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}; \tau_i > t; \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}}\big] = (-1)^{|I_D|} \int_{\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}}^{\infty} E\big[\, f_p^*(\tau_i) | \{\boldsymbol{\tau}_{I_D} = \mathbf{u}_{I_D}; \tau_i > t; \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}\big]\, \partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \mathbf{u}_{I_D})$$

derivando com relação à $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}$, obtemos o valor $\pi_i^{vp}(t)$ para este caso:

$$\pi_i^{vp}(t) = \frac{\partial_{I_D} E\big[\, f_p^*(\tau_i)\, \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} > \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}\,;\, \tau_i > t;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}}\big]}{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D})}\,. \tag{2.37}$$

Logo, a prova no caso em que, no instante t, pelo menos um nome já teve o default consiste em obter a esperança do numerador da expressão acima.

A seguir calculamos esta esperança para os seguintes casos:

- o nome $(n+1)$ sobreviveu até o instante t, $\tau_{n+1} > t$,
- o default do nome $(n+1)$ ocorreu antes do instante t ou em t, isto é, $\tau_{n+1} \leq t$.

(b.1) Para $\tau_{n+1} > t$, temos:

$$\partial_{I_D} E\big[\, f_p^*(\tau_i)\, \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} > \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}\,;\, \tau_i > t\,;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}}\big] = \int_t^{\infty} f_p^*(u_i)\, \partial_{I_D} \int_{\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}}^{\infty} \underbrace{\int_t^{\infty} \cdots \int_t^{\infty}}_{(n+1-j)} \partial^{n+1} F(\mathbf{u})\,. \tag{2.38}$$

A integral do lado direito da expressão acima é calculada considerando o valor descontado pago pela proteção contra o default do nome i para os seguintes casos: $i \neq n+1$ e $i = n+1$.

(b.1.1) Para $i \neq n+1$, a seguir calculamos o valor $\pi_i^{vp}(t)$ pago pela proteção contra o default do nome i, onde $i = 1, ..., n$.

Podemos reescrever a expressão (2.29) em função dos conjuntos I_D e I'_S, onde $I'_S = I_S - \{n+1\}$, como:

$$G(\mathbf{t}) \;=\; G(\mathbf{t}') \;-\; \sum_{q=1}^{|I_D|} \sum_{I_D^q \subset I_D} (-1)^q \sum_{k=0}^{|I'_S|} \sum_{I_S^k \subset I'_S} (-1)^k \left(F_{I_D^q, I_S^k, n+1}(\mathbf{t}, \mathbf{t}, t) - F_{i, I_D^q, I_S^k, n+1}(t, \mathbf{t}, \mathbf{t}, t) \right)$$

onde os somatórios se estendem sobre todos os subconjuntos I_D^q e I_S^k dos conjuntos dos nomes que tiveram o default até (inclusive) o instante t, I_D, e dos nomes que sobreviveram até t, I_S, respectivamente.

Tomando $\mathbf{t} = (\mathbf{t}_{-I_D}, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D})$ na expressão acima e derivando com relação à $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}$, onde $q = |I_D|$:

$$\begin{aligned} \partial_{I_D} G\big(\mathbf{t}_{-I_D}, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}\big) = \partial_{I_D} G\big(\mathbf{t}'_{-I_D}, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}\big) - (-1)^{|I_D|} \sum_{k=0}^{|I'_S|} \sum_{I_S^k \subset I'_S} (-1)^k \big(\partial_{I_D} F_{I_D, I_S^k, n+1}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}, \mathbf{t}, t) \\ - \partial_{I_D} F_{i, I_D, I_S^k, n+1}(t, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}, \mathbf{t}, t) \big) \end{aligned} \tag{2.39}$$

em seguida, derivamos (2.39) com relação à t da i-ésima variável, para $i \neq n+1$. Escrevendo a função de sobrevivência em termos da integral e substituindo em (2.38), obtemos a esperança:

$$\begin{aligned} \partial_{I_D} E\big[f_p^*(\tau_i)\, \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} > \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D};\, \tau_i > t;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}} \big] &= \partial_{I_D} \int_{\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}}^{\infty} \underbrace{\int_t^{\infty} \cdots \int_t^{\infty}}_{(n+1-j)} f_p^*(u_i)\, \partial^n F(\mathbf{u}') \\ &- (-1)^{|I_D|} \sum_{k=0}^{|I'_S|} \sum_{I_S^k \subset I'_S} (-1)^k \int_t^{\infty} f_p^*(u_i)\, \partial_{i, I_D} F_{i, I_D, I_S^k, n+1}(u_i, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}, \mathbf{t}, t) \\ &= J_1 - (-1)^{|I_D|} \sum_{k=0}^{|I'_S|} \sum_{I_S^k \subset I'_S} (-1)^k J_2 \end{aligned} \tag{2.40}$$

onde denotamos $\partial_{i,I_D}F(\cdot) = \partial_i\partial_{I_D}F(\cdot)$. As integrais J_1 e J_2 são calculadas a seguir.

$$\begin{aligned} J_1 &= \partial_{I_D}\int_{\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}}^{\infty}\underbrace{\int_t^{\infty}\cdots\int_t^{\infty}}_{(n+1-j)} f_p^*(u_i)\,\partial^n F(\mathbf{u}') \;=\; \partial_{I_D}E\big[\,f_p^*(\tau_i)\,\mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D}>\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D};\,\tau_i>t;\,\boldsymbol{\tau}_{I'_S}>t\}}\big] \\ &= \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D}\le t;\,\tau_i>t;\,\boldsymbol{\tau}_{I'_S}>t\}}\,\pi_i^{vp}(t)\,\partial_{I_D}G(\mathbf{t}'_{-I_D},\bar{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{I_D}}) \\ &= \sum_{j=1}^{m} s_i\,e^{-rt_j}\,\big[\,\mathbf{1}_{\{t\ge t_j\}}\,\partial_{I_D}G(\mathbf{t}'_{I_D},\bar{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{I_D}}) + \mathbf{1}_{\{t<t_j\}}\,\partial_{I_D}G(\mathbf{t}'_{-I_D},\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D};\mathbf{t}'_{-i},t_j)\big] \end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre da hipótese de indução e $\mathbf{t}' \in \mathbb{R}^n$.

A integral J_2 é calculada de forma análoga à integral J_2 do caso (a.1), logo,

$$\begin{aligned} J_2 = \sum_{j=1}^{m} s_i\,e^{-rt_j}\Big[\,&\mathbf{1}_{\{t\ge t_j\}}\big(\partial_{I_D}F_{I_D,I_S^k,n+1}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D},\mathbf{t},t) - \partial_{I_D}F_{i,I_D,I_S^k,n+1}(t,\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D},\mathbf{t},t)\big) \\ &+ \mathbf{1}_{\{t<t_j\}}\big(\partial_{I_D}F_{I_D,I_S^k,n+1}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D},\mathbf{t},t) - \partial_{I_D}F_{i,I_D,I_S^k,n+1}(t_j,\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D},\mathbf{t},t)\big)\Big]\,. \end{aligned}$$

Substituindo J_1 e J_2 na expressão (2.40), e através da expressão (2.39), concluímos que:

$$\begin{aligned} &\partial_{I_D}E\big[\,f_p^*(\tau_i)\,\mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D}>\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D};\,\tau_i>t\,;\,\boldsymbol{\tau}_{I_S}>t\}}\big] \\ &= \sum_{j=1}^{m} s_i\,e^{-rt_j}\,\big[\,\mathbf{1}_{\{t\ge t_j\}}\,\partial_{I_D}G(\mathbf{t}_{-I_D},\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}) + \mathbf{1}_{\{t<t_j\}}\,\partial_{I_D}G(\mathbf{t}_{-I_D},\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D};\mathbf{t}_{-i},t_j)\big]\,. \end{aligned}$$

Portanto, o valor descontado pago pela proteção contra o default do nome i, exceto o nome $(n+1)$, dado que pelo menos um nome já teve o default até o instante t, é:

$$\pi_i^{vp}(t) \;=\; \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D}\le t;\,\tau_i>t;\,\boldsymbol{\tau}_{I_S}>t\}}\sum_{j=1}^{m} s_i\,e^{-rt_j}\left[\,\mathbf{1}_{\{t\ge t_j\}} + \mathbf{1}_{\{t<t_j\}}\frac{\partial_{I_D}G(\mathbf{t}_{-I_D},\boldsymbol{\tau}_{I_D};\mathbf{t}_{-i},t_j)}{\partial_{I_D}G(\mathbf{t}_{-I_D},\boldsymbol{\tau}_{I_D})}\right]$$

para o instante t durante o período do contrato.

(b.1.2) Para $i = n+1$, a seguir calculamos o valor $\pi_{n+1}^{vp}(t)$ pago pela proteção contra o default do nome $(n+1)$. De forma análoga, ao caso (b.1.1), reescrevemos a expressão (2.29) como:

$$G(\mathbf{t}) \;=\; G(\mathbf{t}') \;-\; \sum_{q=1}^{|I_D|}\sum_{I_D^q\subset I_D}(-1)^q\sum_{k=0}^{|I_S|}\sum_{I_S^k\subset I_S}(-1)^k\,F_{I_D^q,I_S^k,n+1}(\mathbf{t},\mathbf{t},t)\,.$$

Tomando $\mathbf{t} = (\mathbf{t}_{-I_D},\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ na expressão acima e derivando com relação à $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}$, obtemos:

$$\partial_{I_D}G(\mathbf{t}_{-I_D},\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}) = \partial_{I_D}G(\mathbf{t}'_{-I_D},\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}) - (-1)^{|I_D|}\sum_{k=0}^{|I_S|}\sum_{I_S^k\subset I_S}(-1)^k\,\partial_{I_D}F_{I_D,I_S^k,n+1}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D},\mathbf{t},t) \tag{2.41}$$

em seguida, derivamos com relação à t da $(n+1)$-ésima variável e escrevendo a função de sobrevivência na forma integral, podemos reescrever a esperança em (2.38) para o nome $(n+1)$, como:

$$\begin{aligned}
&\partial_{I_D} E\big[\, f_p^*(\tau_{n+1})\, \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} > \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D};\, \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t;\, \tau_{n+1} > t\}}\big] \\
&= (-1)^{|I_D|} \sum_{k=0}^{|I_S|} \sum_{I_S^k \subset I_S} (-1)^k \int_t^\infty f_p^*(u_{n+1})\, \partial_{n+1, I_D} F_{I_D, I_S^k, n+1}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}, \mathbf{t}, u_{n+1}) \\
&= \sum_{j=1}^m s_{n+1}\, e^{-rt_j}\, (-1)^{|I_D|} \sum_{k=0}^{|I_S|} \sum_{I_S^k \subset I_S} (-1)^k \big[\, \mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} \big(\partial_{I_D} F_{I_D, I_S^k}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}, \mathbf{t}) - \partial_{I_D} F_{I_D, I_S^k, n+1}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}, \mathbf{t}, t)\big) \\
&\qquad\qquad + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}} \big(\partial_{I_D} F_{I_D, I_S^k}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}, \mathbf{t}) - \partial_{I_D} F_{I_D, I_S^k, n+1}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}, \mathbf{t}, t_j)\big)\big]\,.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

onde a última igualdade é obtida de forma análoga à integral J_2 do caso (a.1).

Para $\mathbf{t}' \in \mathbb{R}^n$, o Princípio da Inclusão e Exclusão pode ser escrito como:

$$1 - G(\mathbf{t}') \;=\; -\sum_{q=0}^{|I_D|} \sum_{I_D^q \subset I_D} (-1)^q \sum_{k=0}^{|I_S|} \sum_{I_S^k \subset I_S} (-1)^k\, F_{I_D^q, I_S^k}(\mathbf{t}, \mathbf{t})$$

onde $I_D \cup I_S = \{1, ..., n\}$. Tomando $\mathbf{t}' = (\mathbf{t}'_{-I_D}, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D})$ e derivando com relação à $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}$, obtemos:

$$\partial_{I_D} G(\mathbf{t}'_{-I_D}, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}) \;=\; (-1)^{|I_D|} \sum_{k=0}^{|I_S|} \sum_{I_S^k \subset I_S} (-1)^k\, \partial_{I_D} F_{I_D, I_S^k}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}, \mathbf{t})\,. \tag{2.43}$$

Utilizando este resultado na expressão (2.42) e através da igualdade (2.41), concluímos que o valor descontado que o comprador do *swap* de crédito no nome $(n+1)$ paga pela proteção contra o default deste nome é:

$$\pi_{n+1}^{vp}(t) \;=\; \sum_{j=1}^m s_{n+1}\, e^{-rt_j} \left[\, \mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}} \frac{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D}; \mathbf{t}_{-(n+1)}, t_j)}{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D})} \right]$$

dado que pelo menos um nome teve o default até o instante t e $t \leq T$.

Portanto, através de (b.1.1) e (b.1.2) provamos que o valor $\pi_i^{vp}(t)$ é válido para $(n+1)$ nomes no caso em que o nome $(n+1)$ sobreviveu até o instante t, $\tau_{n+1} > t$, e pelo menos um nome teve o default em um instante anterior à t ou em t, $i = 1, ..., n+1$ e $t \leq T$.

(b.2) Para $\tau_{n+1} \leq t$, o nome $(n+1)$ já teve o default e neste caso, necessariamente $i \neq n+1$, pois estamos calculando o valor $\pi_i^{vp}(t)$ para $\tau_i > t$.

Calculando a esperança no numerador da expressão de $\pi_i^{vp}(t)$ em (2.37), temos:

$$\partial_{I_D} E\big[\, f_p^*(\tau_i)\mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} > \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}\,;\,\tau_i > t;\,\boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}}\big] = \int_t^\infty f_p^*(u_i)\,\partial_{I_D} \int_{\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}}^\infty \underbrace{\int_t^\infty \cdots \int_t^\infty}_{(n+1-j)} \partial^{n+1} F(\mathbf{u})\,. \tag{2.44}$$

Reescrevendo a expressão (2.29) para $\mathbf{t} = (\mathbf{t}_{-I_D}, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D})$, $\mathbf{t}' = (\mathbf{t}'_{-I'_D}, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I'_D})$, onde $I'_D = I_D - \{n+1\}$:

$$G(\mathbf{t}_{-I_D}, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}) = G(\mathbf{t}'_{-I'_D}, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I'_D}) - \sum_{q=0}^{|I'_D|} \sum_{I_D^q \subset I'_D} (-1)^q \sum_{k=0}^{|I_S|} \sum_{I_S^k \subset I_S} (-1)^k \big[\, F_{I_D^q, I_S^k, n+1}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D^q}, \mathbf{t}, \bar{\tau}_{n+1}) + F_{i, I_D^q, I_S^k, n+1}(t, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D^q}, \mathbf{t}, \bar{\tau}_{n+1})\big]$$

derivando com relação à $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}$, obtemos:

$$\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}) = (-1)^{|I'_D|} \sum_{k=0}^{|I_S|} \sum_{I_S^k \subset I_S} (-1)^k \big[-\partial_{I'_D, n+1} F_{I'_D, I_S^k, n+1}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I'_D}, \mathbf{t}, \bar{\tau}_{n+1}) + \partial_{I'_D, n+1} F_{i, I'_D, I_S^k, n+1}(t, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I'_D}, \mathbf{t}, \bar{\tau}_{n+1})\big]\,.$$

Escrevendo o lado direito da expressão acima em função de I_D e a função de sobrevivência na forma integral, temos:

$$\partial_{I_D} \int_{\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}}^\infty \underbrace{\int_t^\infty \cdots \int_t^\infty}_{(n+2-j)} \partial^{n+1} F(\mathbf{u}) = (-1)^{|I_D|} \sum_{k=0}^{|I_S|} \sum_{I_S^k \subset I_S} (-1)^k \left(\partial_{I_D} F_{I_D, I_S^k}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}, \mathbf{t}) - \partial_{I_D} F_{i, I_D, I_S^k}(t, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}, \mathbf{t})\right). \tag{2.45}$$

Em seguida, derivamos esta igualdade com relação à t da i-ésima variável, para $i \neq n+1$, e substituindo em (2.44), obtemos a esperança:

$$\begin{aligned}
&\partial_{I_D} E\big[\, f_p^*(\tau_i)\, \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} > \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}\,;\,\tau_i > t;\,\boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}}\big] \\
&= (-1)^{|I_D|} \sum_{k=0}^{|I_S|} \sum_{I_S^k \subset I_S} (-1)^k \int_t^\infty f_p^*(u_i)\, \partial_{i, I_D} F_{i, I_D, I_S^k}(u_i, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}, \mathbf{t}) \qquad (2.46)\\
&= \sum_{j=1}^m s_i\, e^{-rt_j} (-1)^{|I_D|} \sum_{k=0}^{|I_S|} \sum_{I_S^k \subset I_S} (-1)^k \Big[\mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} \big(\partial_{I_D} F_{I_D, I_S^k}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}, \mathbf{t}) - \partial_{I_D} F_{i, I_D, I_S^k}(t, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}, \mathbf{t})\big) \\
&\qquad + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}} \big(\partial_{I_D} F_{I_D, I_S^k}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}, \mathbf{t}) - \partial_{I_D} F_{i, I_D, I_S^k}(t_j, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}, \mathbf{t})\big)\Big]
\end{aligned}$$

onde a última igualdade é obtida de forma semelhante à integral J_2 do caso (a.1).

Utilizando a relação (2.45), concluímos que, no instante t, o valor descontado pago pela proteção contra o default do nome i, tal que o nome $(n+1)$ já teve o default em um instante anterior à t ou neste instante, $\tau_{n+1} \leq t$, é dado por:

$$\pi_i^{vp}(t) \;=\; \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} \leq t;\, \tau_i > t;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}} \sum_{j=1}^{m} s_i\, e^{-rt_j} \left[\mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}} \frac{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D}; \mathbf{t}_{-i}, t_j)}{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D})} \right]$$

onde $i = 1, ..., n$ e $t \leq T$.

Portanto, através dos casos (b.1) e (b.2), provamos que, para $i = 1, ..., n+1$, a expressão $\pi_i^{vp}(t)$ da proposição é válida para $(n+1)$ nomes, tal que pelo menos um nome já teve o default até (inclusive) o instante t anterior ao vencimento do contrato T, ou seja, $|I_D| \neq 0$. $\square$

Para a segunda parte do valor do CDS, temos a seguinte proposição:

Proposição 2.8. *No instante $t \leq T$, o valor descontado que o comprador do CDS no nome i recebe se o default do nome i ocorrer antes do vencimento do contrato é $\pi_i^{vr}(t) = E\big[\, f_r^*(\tau_i) |\, \mathcal{G}_t \big]$, onde*

$$f_r^*(\tau_i) \;=\; (1 - \delta_i)\, \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq T\}}\, e^{-rT}$$

é $\mathcal{G}_T$-mensurável e $E[|f_r^*(\tau_i)|] < \infty$. Logo,

$$\begin{aligned} \pi_i^{vr}(t) \;&=\; \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}} (1 - \delta_i)\, e^{-rT} \\ &+\; \mathbf{1}_{\{\tau_i > t\}} (1 - \delta_i)\, e^{-rT} \left[1 - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\substack{A_i \subset \Delta_{k,I'} \\ A_i = \{I_D, I_S\}}} \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} \leq t;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}} \frac{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D}; \mathbf{t}_{-i}, T)}{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D})} \right] \end{aligned}$$

onde $I' = I - \{i\}$, para $i = 1, ..., n$.

No instante $t \leq T$, se o default do nome i já ocorreu, o comprador do CDS receberá $(1 - \delta_i)$ na data de vencimento do contrato. Por outro lado, se o nome i sobreviveu até o instante t, o valor esperado que ele recebe se o default ocorrer antes da data de vencimento do contrato T é $(1 - \delta_i)$ multiplicado pela probabilidade condicional do default do nome i ocorrer entre os instantes t e T, dada a informação sobre o default dos n nomes no instante t.

Prova: Pela expressão (2.27), temos:

$$\pi_i^{vr}(t) \;=\; \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}}\, f_r^*(\tau_i) + \mathbf{1}_{\{\tau_i > t\}} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\substack{A_i \subset \Delta_{k,I'} \\ A_i = \{I_D, I_S\}}} \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} \leq t; \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}} E\big[\, f_r^*(\tau_i) |\, \mathcal{G}_t' \,\big]\,.$$

onde $\mathcal{G}_t' = \{\boldsymbol{\tau}_{I_D} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}; \tau_i > t; \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}$ e $|I_D| = 0, 1, ..., n-1$.

Logo, devemos provar o valor esperado que o comprador do CDS^i recebe, caso o default do nome i ocorra antes do vencimento do contrato, considerando que este nome sobreviveu até o instante t, $t < \tau_i$.

A prova é feita por indução. O procedimento é semelhante ao utilizado na prova da Proposição 2.6. O valor $\pi_i^{vr}(t)$ é calculado para o caso em que todos os nomes sobreviveram até o instante t e para o caso no qual pelo menos um nome teve o default até o instante t. Ou seja, consideramos os casos (i) e (ii) da prova da Proposição 2.6.

Para $n = 2$ e, sem perda de generalidade, $i = 1$, temos que os conjuntos A_1 dados na Proposição 2.6 correspondem aos casos (i.b), quando $k = 0$ e (ii.b), para $k = 1$. Logo, a expressão da proposição confere com os valores $\pi_i^{vr}(t)$ calculados na Proposição 2.2. O resultado análogo é obtido para $i = 2$. Portanto, a expressão $\pi_i^{vr}(t)$ é válida para $n = 2$.

Supondo que a expressão é verdadeira para n, a seguir provamos para $(n+1)$ nomes.

Assim como no caso $n = 2$, devemos provar o valor $\pi_i^{vr}(t)$, para $\tau_i > t$, considerando as filtrações dos casos (i) e (ii) da Proposição 2.6, para $i = 1, ..., n+1$.

Caso (i) Para $\mathcal{G}_t' = \{\boldsymbol{\tau} > t\}$, com $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{n+1}$, os $(n+1)$ nomes sobreviveram até o instante t. Pela expressão (2.30), temos:

$$\pi_i^{vr}(t) \;=\; \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau} > t\}}\, E\big[\, f_r^*(\tau_i) \big|\, \mathcal{G}_t' \,\big] \;=\; \frac{E\big[\, f_r^*(\tau_i)\, \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau} > t\}} \big]}{G(\mathbf{t})}$$

onde a esperança no numerador pode ser escrita como:

$$E\big[\, f_r^*(\tau_i)\, \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau} > t\}} \big] \;=\; \int_t^\infty f_r^*(u_i) \underbrace{\int_t^\infty \cdots \int_t^\infty}_{(n)} \partial^{n+1} F(\mathbf{u})\,.$$

(a.1) Para $i \neq n+1$, a seguir calculamos o valor que o comprador do *swap* de crédito no nome i recebe se o default deste nome ocorrer entre os instante t e T, para $i = 1, ..., n$.

Derivando a expressão (2.32) com relação à t da i-ésima variável e substituindo na integral acima,

obtemos:

$$
\begin{aligned}
E\big[\, f_r^*(\tau_i)\, \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau} > t\}} \big] &= \underbrace{\int_t^\infty \!\!\ldots \int_t^\infty}_{(n)} f_r^*(u_i)\, \partial^n F(\mathbf{u}') - \sum_{k=0}^{|I_S'|} \sum_{I_S^k \subset I_S'} (-1)^k \int_t^\infty f_r^*(u_i)\; \partial_i F_{i, I_S^k, n+1}(u_i, \mathbf{t}, t) \\
&= J_1 - \sum_{k=0}^{|I_S'|} \sum_{I_S^k \subset I_S'} (-1)^k\, J_2
\end{aligned}
$$

onde $I_S' = I_S - \{n+1\}$. Calculando as integrais J_1 e J_2:

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \underbrace{\int_t^\infty \!\!\ldots \int_t^\infty}_{(n)} f_r^*(u_i)\, \partial^n F(\mathbf{u}') \;=\; E\big[\, f_r^*(\tau_i)\, \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}' > t\}} \big] \\
&= \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}' > t\}}\, \pi_i^{vr}(t)\, G(\mathbf{t}') = (1 - \delta_i)\, e^{-rT} \big[\, G(\mathbf{t}') - G(\mathbf{t}'_{-i}, T) \big]
\end{aligned}
$$

onde a última igualdade decorre da hipótese de indução e $\boldsymbol{\tau}', \mathbf{t}' \in \mathbb{R}^n$. Para a integral J_2, temos:

$$
\begin{aligned}
J_2 &= (1 - \delta_i)\, e^{-rT} \int_t^T \partial_i F_{i, I_S^k, n+1}(u_i, \mathbf{t}, t) \\
&= (1 - \delta_i)\, e^{-rT} \big(F_{i, I_S^k, n+1}(T, \mathbf{t}, t) - F_{i, I_S^k, n+1}(t, \mathbf{t}, t) \big)\,.
\end{aligned}
$$

Reunindo as integrais J_1 e J_2 e somando e subtraindo o termo $F_{I_S^k, n+1}(\mathbf{t}, t)$ no somatório da integral J_2, através da expressão (2.32), obtemos a esperança:

$$
E\big[\, f_r^*(\tau_i)\, \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau} > t\}} \big] = (1 - \delta_i)\, e^{-rT} \big[\, G(\mathbf{t}) - G(\mathbf{t}_{-i}, T) \big] \tag{2.47}
$$

para o instante t anterior ao fim do contrato e $i \neq n+1$.

Portanto, o valor descontado que o comprador do *swap* de crédito no nome i recebe se o default deste nome ocorrer entre os instantes t e T, dado que no instante t todos os nomes sobreviveram, é:

$$
\pi_i^{vr}(t) \;=\; \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau} > t\}}\, (1 - \delta_i)\, e^{-rT} \left[1 - \frac{G(\mathbf{t}_{-i}, T)}{G(\mathbf{t})} \right]
$$

para qualquer nome i, exceto o nome $(n+1)$, isto é, $i = 1, ..., n$.

(a.2) Para $i = n+1$, se o default do nome $(n+1)$ ocorrer após o instante t e antes do vencimento do contrato, o valor descontado que o comprador do *swap* de crédito neste nome recebe é calculado

à seguir. Temos que:

$$E\big[\, f_r^*(\tau_{n+1})\, \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau} > t\}}\big] = \int_t^\infty f_r^*(u_{n+1}) \underbrace{\int_t^\infty \cdots \int_t^\infty}_{(n)} \partial^{n+1} F(\mathbf{u})$$

$$= \int_t^\infty f_r^*(u_{n+1}) \Big(\partial_{n+1} F_{n+1}(u_{n+1}) + \sum_{k=1}^{|I_S|} \sum_{I_S^k \subset I_S} (-1)^k\, \partial_{n+1} F_{I_S^k, n+1}(\mathbf{t}, u_{n+1}) \Big)$$

onde a segunda igualdade decorre da derivada da expressão (2.34) com relação à t da $(n+1)$-ésima variável. As integrais do lado direito desta expressão são calculadas de forma análoga à integral J_2 do caso (a.1), logo,

$$E\big[\, f_r^*(\tau_{n+1})\, \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau} > t\}}\big]$$

$$= (1 - \delta_{n+1})\, e^{-rT} \Big[F_{n+1}(T) - F_{n+1}(t) + \sum_{k=1}^{|I_S|} \sum_{I_S^k \subset I_S} (-1)^k \left(F_{I_S^k, n+1}(\mathbf{t}, T) - F_{I_S^k, n+1}(\mathbf{t}, t) \right) \Big]$$

$$= (1 - \delta_{n+1})\, e^{-rT} \big[G(\mathbf{t}) - G(\mathbf{t}_{-(n+1)}, T) \big]$$

onde no lado direito da primeira igualdade somamos e subtraímos a probabilidade $G(\mathbf{t}')$ de forma que a última igualdade decorre de (2.34). Conseqüentemente, o valor descontado que o vendedor do *swap* de crédito no nome $(n+1)$ paga se o default deste nome ocorrer entre os instantes t e T é:

$$\pi_{n+1}^{vr}(t) \;=\; \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau} > t\}}\, (1 - \delta_{n+1})\, e^{-rT} \left[1 - \frac{G(\mathbf{t}_{-(n+1)}, T)}{G(\mathbf{t})} \right]$$

dado que os $(n+1)$ nomes sobreviveram até o instante t.

Portanto, através dos casos (a.1) e (a.2), para $i = 1, ..., n+1$, concluímos que a expressão $\pi_i^{vr}(t)$ da proposição é válida para $(n+1)$ nomes onde nenhum nome teve o default até o instante t.

Caso (ii) Filtração $\mathcal{G}_t' = \{\boldsymbol{\tau}_{I_D} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}; \tau_i > t; \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}$, onde $|I_D| = j - 1$, para $j = 2, ..., n+1$.

Neste caso, pelo menos um nome já teve o default em um instante anterior à t, ou em t.

Assim como na prova do valor $\pi_i^{vp}(t)$, a seguir analisamos o caso em que o nome $(n+1)$ já teve o default, $\tau_{n+1} \leq t$, e o caso no qual ele sobreviveu até este instante, $\tau_{n+1} > t$.

(b.1) Para $\tau_{n+1} > t$, consideramos que $(j-1)$ nomes já tiveram o default, $|I_D| = j - 1$, e conseqüentemente, $(n+1-j)$ nomes sobreviveram até este instante, exceto o nome i, $|I_S| = n+1-j$. Pela expressão (2.37), temos:

$$\pi_i^{vr}(t) = \frac{\partial_{I_D} E\big[\, f_r^*(\tau_i)\, \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} > \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}; \tau_i > t; \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}}\big]}{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{I_D}, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D})}\,. \tag{2.48}$$

A seguir calculamos a esperança no numerador da expressão acima, para isto utilizamos alguns resultados da prova do valor $\pi_i^{vp}(t)$ (Proposição 2.6).

(b.1.1) Para $i \neq n+1$, a esperança no numerador de (2.48) é obtido de forma análoga à expressão (2.40), diferindo que neste caso na esperança e no integrando temos $f_r^*(u_i)$, logo,

$$\partial_{I_D} E\big[\, f_r^*(\tau_i)\, \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} > \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D};\, \tau_i > t;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}}\big] \;=\; J_1 - (-1)^{|I_D|} \sum_{k=0}^{|I'_S|} \sum_{I_S^k \subset I'_S} (-1)^k\, J_2 \tag{2.49}$$

onde $I'_S = I_S - \{n+1\}$ e as integrais J_1 e J_2 são dada por:

$$\begin{aligned} J_1 \;&=\; \partial_{I_D} \int_{\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}}^{\infty} \underbrace{\int_t^{\infty} \cdots \int_t^{\infty}}_{(n+1-j)} f_r^*(u_i)\; \partial^n F(\mathbf{u}') \;=\; \partial_{I_D} E\big[\, f_r^*(\tau_i)\, \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} > \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D};\, \tau_i > t;\, \boldsymbol{\tau}_{I'_S} > t\}}\big] \\ &=\; \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} \leq t;\, \tau_i > t;\, \boldsymbol{\tau}_{I'_S} > t\}}\; \pi_i^{vr}(t)\; \partial_{I_D} G(\mathbf{t}'_{-I_D}, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{I_D}}) \\ &=\; (1-\delta_i)\, e^{-rT}\, \big[\, \partial_{I_D} G(\mathbf{t}'_{I_D}, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}) - \partial_{I_D} G(\mathbf{t}'_{-I_D}, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}; \mathbf{t}'_{-i}, T)\big] \end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre da hipótese de indução. Para a integral J_2, temos:

$$\begin{aligned} J_2 \;&=\; \int_t^{\infty} f_r^*(u_i)\, \partial_{i,I_D} F_{i,I_D,I_S^k,n+1}(u_i, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}, \mathbf{t}, t) \\ &=\; (1-\delta_i)\, e^{-rT} \int_t^{T} \partial_{i,I_D} F_{i,I_D,I_S^k,n+1}(u_i, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}, \mathbf{t}, t) \\ &=\; (1-\delta_i)\, e^{-rT}\, \big[\, \partial_{I_D} F_{i,I_D,I_S^k,n+1}(T, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}, \mathbf{t}, t) - \partial_{I_D} F_{i,I_D,I_S^k,n+1}(t, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}, \mathbf{t}, t)\big]\,. \end{aligned}$$

Substituindo J_1 e J_2 em (2.49) e somando e subtraindo $\partial_{I_D} F_{I_D,I_S^k,n+1}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}, \mathbf{t})$ no somatório de J_2, através da expressão (2.39), concluímos que o valor descontado que o comprador do *swap* de crédito no nome i, exceto o nome $(n+1)$, recebe se o default deste nome ocorrer após o instante t e antes da data de vencimento T é:

$$\pi_i^{vr}(t) \;=\; \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} \leq t;\, \tau_i > t;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}}\, (1-\delta_i)\, e^{-rT} \left[1 - \frac{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D}; \mathbf{t}_{-i}, T)}{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D})} \right]$$

dado que pelo menos um nome teve o default até o instante t e considerando-se que o nome $(n+1)$ sobreviveu até este instante.

(b.1.2) Para $i = n+1$, conforme a primeira igualdade da expressão (2.42) da prova da Proposição

2.6, temos:

$$\begin{aligned}
&\partial_{I_D} E\big[\, f_r^*(\tau_{n+1})\, \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} > \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D};\, \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t;\, \tau_{n+1} > t\}}\big] \\
&= (-1)^{|I_D|} \sum_{k=0}^{|I_S|} \sum_{I_S^k \subset I_S} (-1)^k \int_t^\infty f_r^*(u_{n+1})\, \partial_{n+1, I_D} F_{I_D, I_S^k, n+1}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}, \mathbf{t}, u_{n+1}) \\
&= (1-\delta_{n+1})\, e^{-rT} (-1)^{|I_D|} \sum_{k=0}^{|I_S|} \sum_{I_S^k \subset I_S} (-1)^k \big[\, \partial_{I_D} F_{I_D, I_S^k, n+1}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}, \mathbf{t}, T) - \partial_{I_D} F_{I_D, I_S^k, n+1}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}, \mathbf{t}, t)\big]\,.
\end{aligned}$$

Somando e subtraindo o termo $\partial_{I_D} G(\mathbf{t}'_{-I_D}, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D})$ multiplicado por $(1-\delta_{n+1})e^{-rT}$ na expressão acima, através da expressão (2.41), concluímos que o valor descontado que o comprador do *swap* de crédito no nome $(n+1)$ recebe se o default deste nome ocorrer entre t e T é:

$$\pi_{n+1}^{vr}(t) = \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} \le t;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t;\, \tau_{n+1} > t\}}\, (1-\delta_{n+1})\, e^{-rT} \left[1 - \frac{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D}; \mathbf{t}_{-(n+1)}, T)}{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D})} \right]$$

onde pelo menos um nome já teve o default até o instante t.

Portanto, através dos casos (b.1.1) e (b.1.2) em que o nome $(n+1)$ sobreviveu até o instante t, a expressão do valor $\pi_i^{vr}(t)$, para $i = 1, ..., n+1$, é válida para os $(n+1)$ nomes e $t \le T$.

(b.2) Para $\tau_{n+1} \le t$, assim como na prova do valor $\pi_i^{vp}(t)$ (Proposição 2.6), consideramos que $(j-1)$ nomes tiveram o default, $|I_D| = j-1$, e conseqüentemente, $(n+1-j)$ sobreviveram até o instante t, $|I_S| = n+1-j$, onde $j = 2, ..., n+1$. Neste caso, o nome $(n+1)$ já teve o default e necessariamente $i \neq n+1$, pois $\tau_i > t$. Para I_D e I_S fixos tem-se:

$$\pi_i^{vr}(t) = \frac{\partial_{I_D} E\big[\, f_r^*(\tau_i)\, \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} > \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D};\, \tau_i > t;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}}\big]}{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D})}$$

onde o numerador é calculado conforme a expressão (2.46) para $f_r^*(\tau_i)$, ou seja,

$$\begin{aligned}
&\partial_{I_D} E\big[\, f_r^*(\tau_i)\, \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} > \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D};\, \tau_i > t;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}}\big] \\
&= (-1)^{|I_D|} \sum_{k=0}^{|I_S|} \sum_{I_S^k \subset I_S} (-1)^k \int_t^\infty f_r^*(u_i)\, \partial_{i, I_D} F_{i, I_D, I_S^k}(u_i, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}, \mathbf{t}) \\
&= (1-\delta_i)\, e^{-rT}\, (-1)^{|I_D|} \sum_{k=0}^{|I_S|} \sum_{I_S^k \subset I_S} (-1)^k \big[\, \partial_{I_D} F_{i, I_D, I_S^k}(T, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}, \mathbf{t}) - \partial_{I_D} F_{i, I_D, I_S^k}(t, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}, \mathbf{t})\big]\,.
\end{aligned}$$

No termo entre colchetes, somamos e subtraímos a probabilidade $\partial_{I_D} F_{I_D, I_S^k}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}, \mathbf{t})$ e através da expressão (2.45) concluímos que para $\tau_{n+1} \le t$,

$$\pi_i^{vr}(t) = \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} \le t;\, \tau_i > t;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}}\, (1-\delta_i)\, e^{-rT} \left[1 - \frac{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D}; \mathbf{t}_{-i}, T)}{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D})} \right]$$

dado que pelo menos o nome $(n+1)$ já teve o default até o instante t. Neste caso, o valor $\pi_i^{vr}(t)$ corresponde aos nomes $i = 1, ..., n$ e $t \leq T$.

Portanto, através dos casos (b.1) e (b.2), concluímos que, para $i = 1, ..., n+1$, a expressão $\pi_i^{vr}(t)$ da proposição é válida para $(n+1)$ nomes. $\square$

Através das Proposições 2.6 e 2.8, obtemos o valor descontado do CDS no nome i:

$$CDS^{*i}(t) \;=\; -\pi_i^{vp}(t) \;+\; \pi_i^{vr}(t)$$

ou seja, no instante $t \leq T$, o valor descontado do *swap* de crédito no nome i, do ponto de vista do comprador deste contrato, é:

$$\begin{aligned} CDS^{*i}(t) = \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}} & \left[\sum_{j=1}^{m} -s_i \, \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}} \, e^{-rt_j} + (1-\delta_i)\, e^{-rT} \right] \\ & + \mathbf{1}_{\{\tau_i > t\}} \left\{ \sum_{j=1}^{m} -s_i \, e^{-rt_j} \left[\mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\substack{A_i \subset \Delta_{k,I'} \\ A_i = \{I_D, I_S\}}} \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} \leq t;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}} \frac{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D}; \mathbf{t}_{-i}, t_j)}{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D})} \right] \right. \\ & \left. + (1-\delta_i)\, e^{-rT} \left[1 - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\substack{A_i \subset \Delta_{k,I'} \\ A_i = \{I_D, I_S\}}} \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} \leq t;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}} \frac{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D}; \mathbf{t}_{-i}, T)}{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D})} \right] \right\} \end{aligned}$$

para os nomes $i = 1, ..., n$.

O primeiro termo da expressão do valor $CDS^{*i}(t)$ representa o fluxo de caixa do comprador do *swap* de crédito, dado que o default do nome i ocorreu no instante $\tau_i \leq t$.

Por outro lado, se o default do nome i não ocorreu até o instante t, então o fluxo de caixa é dado pelos termos entre chaves desta expressão. Estes termos são dados em função das probabilidades de sobrevivência condicionais dos n nomes, considerando-se todas as possíveis filtrações para $\tau_i > t$, isto é, toda a informação sobre o default dos demais nomes.

Observando-se que, o valor $CDS^{*i}(t)$ é um processo *càdlàg*, isto é, contínuo à direita com limite à esquerda, e além disso, é adaptado à filtração $\mathcal{G}_t$. Logo no instante $t = \tau_j$, $j \neq i$, o valor do *swap* de crédito tem salto $\Delta CDS^{*i}(t) = CDS^{*i}(t) - CDS^{*i}(t_-)\big|_{t=\tau_j}$ devido ao default do nome j, para $j = 1, ..., n$, considerando-se que o nome i sobreviveu até o instante t, $t < \tau_i$. Isto ocorre devido à dependência entre os nomes, modelada através da filtração.

Valor do *Swap* FtD com n nomes

Nesta seção provamos a expressão do valor do *swap first-to-default* com n nomes.

Assim como no caso do *swap* de crédito CDS, o valor do *swap* FtD, do ponto de vista do comprador, é composto por duas partes: o valor que ele paga pela proteção contra o primeiro default e o valor que ele recebe, caso o primeiro default ocorra antes do vencimento do contrato.

A proposição a seguir fornece o valor que o comprador do *swap* FtD paga pela proteção contra o primeiro default.

Proposição 2.9. *No instante $t \leq T$, o valor descontado que o comprador do swap FtD com n nomes paga pela proteção contra o primeiro default é $\pi^{vp}(t) = E\big[f_p^*(\tau_{(1)})|\,\mathcal{G}_t\big]$, onde*

$$f_p^*(\tau_{(1)}) = f_p(\tau_{(1)})B(T)^{-1} = \sum_{j=1}^{m} s\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}\geq t_j\}}\,e^{-rt_j}$$

é $\mathcal{G}_T$-mensurável e $E[|f_p^*(\tau_{(1)})|] < \infty$. Logo,

$$\pi^{vp}(t) \;=\; \sum_{j=1}^{m} s\,e^{-rt_j}\left[\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}\leq t\}}\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}\geq t_j\}} + \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}> t\}}\left(\mathbf{1}_{\{t\geq t_j\}} + \mathbf{1}_{\{t< t_j\}}\frac{G(\mathbf{t_j})}{G(\mathbf{t})}\right)\right].$$

Prova: Pela expressão (2.27), no instante $t \leq T$, o valor $\pi^{vp}(t)$ é dado por:

$$\pi^{vp}(t) \;=\; \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}\leq t\}}\,f_p^*(\tau_{(1)}) + \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}> t\}}\,E\big[\,f_p^*(\tau_{(1)})|\{\tau_{(1)} > t\}\big]\,. \tag{2.50}$$

Logo, devemos provar o valor $\pi^{vp}(t)$ que o comprador do *swap* FtD com n nomes paga pela proteção contra o primeiro default, dado que o primeiro default não ocorreu até o instante t, $\tau_{(1)} > t$. Para a esperança condicional acima temos:

$$E\big[\,f_p^*(\tau_{(1)})|\{\tau_{(1)} > t\}\big] = \frac{E\big[\,f_p^*(\tau_{(1)})\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}> t\}}\big]}{G_{\tau_{(1)}}(t)} \tag{2.51}$$

onde $G_{\tau_{(1)}}(t) = P[\tau_{(1)} > t]$.

Observando-se que $\tau_{(1)} = \min\{\tau_1, ..., \tau_n\}$ e se o primeiro default não ocorreu até t, então os n nomes sobreviveram até este instante, isto é, $\{\tau_{(1)} > t\} \Rightarrow \{\tau_1 > t\,,\,\tau_2 > t\,,\,...\,,\,\tau_n > t\}$.

Dessa forma, a função de sobrevivência do primeiro instante de default $\tau_{(1)}$ pode ser expressa em termos dos instantes de default dos n nomes por:

$$G_{\tau_{(1)}}(t) = P\big[\,\tau_{(1)} > t\,\big] \;=\; P\big[\,\tau_1 > t\,;\,...\,;\,\tau_n > t\,\big] = G(\mathbf{t})\,.$$

Podemos também reescrever a função do valor descontado pago pelo comprador do *swap* FtD em função dos n instantes de default:

$$f_p^*(\tau_{(1)}) \;=\; \sum_{j=1}^{m} s\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}\geq t_j\}}\,e^{-rt_j} \;=\; \sum_{j=1}^{m} s\,\mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}\geq t_j\}}\,e^{-rt_j} \;=\; f_p^*(\boldsymbol{\tau})$$

onde $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$.

A prova é feita por indução. Para $n = 2$, temos que a expressão da proposição concorda com o valor $\pi^{vp}(t)$ calculado na Proposição 2.3, parte (a). Supondo que seja verdadeira para n, a seguir provamos para $(n+1)$ nomes.

Para um *swap* FtD com $(n+1)$ nomes, o valor descontado pago pelo comprador deste contrato, no instante $t < \tau_{(1)}$, é dado por:

$$\pi^{vp}(t) \;=\; \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} > t\}} \, \frac{E\big[\, f_p^*(\boldsymbol{\tau})\, \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau} > t\}}\big]}{G(\mathbf{t})}$$

onde $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Calculando a esperança no numerador, temos:

$$\begin{aligned}
E\big[\, f_p^*(\boldsymbol{\tau})\, \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau} > t\}}\big] &= \sum_{j=1}^{m} s\, e^{-rt_j}\, E\big[\, \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau} \geq t_j\}}\, \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau} > t\}}\big] \\
&= \sum_{j=1}^{m} s\, e^{-rt_j} \left[\mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} \int_t^\infty \underbrace{\int_t^\infty \cdots \int_t^\infty}_{(n)} \partial^{n+1} F(\mathbf{u}) + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}} \int_{t_j}^\infty \underbrace{\int_{t_j}^\infty \cdots \int_{t_j}^\infty}_{(n)} \partial^{n+1} F(\mathbf{u}) \right] \\
&= J_1 + J_2\,. \qquad (2.52)
\end{aligned}$$

A seguir, analisamos os casos $i \neq n+1$ e $i = n+1$.

(a.1) Para $i \neq (n+1)$, o primeiro default não é o nome $(n+1)$. Derivando a expressão (2.32) com relação à t da i-ésima variável e substituindo na integral J_1, este termo pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
J_1 &= \sum_{j=1}^{m} s\, e^{-rt_j}\, \mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} \left[\int_t^\infty \underbrace{\int_t^\infty \cdots \int_t^\infty}_{(n-1)} \partial^n F(\mathbf{u}') - \sum_{k=0}^{|I'_S|} \sum_{I_S^k \subset I'_S} (-1)^k \int_t^\infty \partial_i F_{i, I_S^k, n+1}(u_i, \mathbf{t}, t) \right] \\
&= \sum_{j=1}^{m} s\, e^{-rt_j}\, \mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} \left[\underbrace{\int_t^\infty \cdots \int_t^\infty}_{(n)} \partial^n F(\mathbf{u}') - \sum_{k=0}^{|I'_S|} \sum_{I_S^k \subset I'_S} (-1)^k \big(F_{I_S^k, n+1}(\mathbf{t}, t) - F_{i, I_S^k, n+1}(t, \mathbf{t}, t) \big) \right] \\
&= J_{11} + J_{12}\,.
\end{aligned}$$

Procedendo da mesma forma na integral J_2, onde substituímos t por t_j na expressão (2.32), obtemos a integral $J_2 = J_{21} + J_{22}$, semelhante à J_1, onde t é substituído por t_j e $t < t_j$.

A seguir, analisamos os termos obtidos em J_1 e J_2. Tomando os termos J_{11} e J_{21}:

$$\begin{aligned} J_{11} + J_{21} &= \sum_{j=1}^{m} s\, e^{-rt_j} \Bigg[\mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} \underbrace{\int_t^\infty \cdots \int_t^\infty}_{(n)} \partial^n F(\mathbf{u}') + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}} \underbrace{\int_{t_j}^\infty \cdots \int_{t_j}^\infty}_{(n)} \partial^n F(\mathbf{u}') \Bigg] \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau'_{(1)} > t\}}\, E\big[f_p^*(\tau'_{(1)}) | \{\boldsymbol{\tau}' > t\} \big]\, G(\mathbf{t}') \\ &= \sum_{j=1}^{m} s\, e^{-rt_j} \left[\mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} G(\mathbf{t}') + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}} G(\mathbf{t_j}') \right] \end{aligned} \tag{2.53}$$

onde $\tau'_{(1)} = \min\{\tau_1, ..., \tau_n\}$ e a última igualdade decorre da hipótese de indução. Reunindo os termos J_{12} e J_{22}, temos:

$$\begin{aligned} J_{12} + J_{22} = \sum_{j=1}^{m} s\, e^{-rt_j} \sum_{k=0}^{|I'_S|} \sum_{I_S^k \subset I'_S} (-1)^k \big[\mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} \big(-F_{I_S^k, n+1}(\mathbf{t}, t) + F_{i, I_S^k, n+1}(t, \mathbf{t}, t) \big) \\ + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}} \big(-F_{I_S^k, n+1}(\mathbf{t_j}, t_j) + F_{i, I_S^k, n+1}(t_j, \mathbf{t_j}, t_j) \big) \big] . \end{aligned} \tag{2.54}$$

A esperança em (2.52) é determinada por $J_1 + J_2 = (J_{11} + J_{12}) + (J_{21} + J_{22})$, logo, reunindo as expressões (2.53) e (2.54) e através de (2.32), concluímos que, para $\tau_{(1)} > t$, o valor descontado que o comprador do *swap* FtD com $(n+1)$ nomes paga pela proteção contra o primeiro default entre os $(n+1)$ nomes, tal que, $\tau_{(1)} \neq \tau_{n+1}$, é:

$$\pi^{vp}(t) = \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} > t\}} \sum_{j=1}^{m} s\, e^{-rt_j} \left[\mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}} \frac{G(\mathbf{t_j})}{G(\mathbf{t})} \right]$$

onde $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{n+1}$.

(a.2) Para $i = n+1$, o primeiro default é o nome $(n+1)$. Derivando a expressão (2.34) com relação à t da $(n+1)$-ésima variável e substituindo em (2.52), obtemos:

$$\begin{aligned} J_1 &= \sum_{j=1}^{m} s\, e^{-rt_j}\, \mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} \left[\int_t^\infty \partial_{n+1} F_{n+1}(u_{n+1}) + \sum_{k=1}^{|I_S|} \sum_{I_S^k \subset I_S} (-1)^k \int_t^\infty \partial_{n+1} F_{I_S^k, n+1}(\mathbf{t}, u_{n+1}) \right] \\ &= \sum_{j=1}^{m} s\, e^{-rt_j}\, \mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} \Big(1 - F_{n+1}(t) + \sum_{k=1}^{|I_S|} \sum_{I_S^k \subset I_S} (-1)^k \big(F_{I_S^k}(\mathbf{t}) - F_{I_S^k, n+1}(\mathbf{t}, t) \big) \Big) \\ &= \sum_{j=1}^{m} s\, e^{-rt_j}\, \mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}}\, G(\mathbf{t}) \end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre da expressões (2.34) e (2.35). A integral J_2 é obtida de forma análoga, substituindo t por t_j. Logo,

$$J_2 = \sum_{j=1}^{m} s\, e^{-rt_j}\, \mathbf{1}_{\{t< t_j\}}\, G(\mathbf{t_j})$$

e conseqüentemente,

$$E\big[\, f_p^*(\boldsymbol{\tau})\, \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}> t\}}\big] = \sum_{j=1}^{m} s\, e^{-rt_j}\, \big[\mathbf{1}_{\{t\geq t_j\}}\, G(\mathbf{t}) + \mathbf{1}_{\{t< t_j\}}\, G(\mathbf{t_j})\big]\,.$$

Dividindo pela função de sobrevivência $G(\mathbf{t})$, concluímos que a expressão do valor $\pi^{vp}(t)$ é válida para o caso em que o primeiro default é o nome $(n+1)$, $\tau_{(1)} = \tau_{n+1}$.

Portanto, através dos casos (a.1) e (a.2), concluímos que o valor $\pi^{vp}(t)$ da proposição é válido para $(n+1)$ nomes. $\square$

Para obtermos o valor que o comprador do *swap* FtD recebe se o primeiro default ocorrer antes do vencimento do contrato utilizamos a definição da intensidade de default para o caso geral com n nomes, que é análoga ao caso com dois nomes definida na Seção 2.2.

Através da expressão (2.27), podemos escrever a intensidade de default como:

$$\mathbf{h}_i(t) \;=\; \mathbf{1}_{\{\tau_i> t\}} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\substack{A_i\subset\Delta_{k,I'}\\ A_i=\{I_D,I_S\}}} \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D}\leq t;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S}> t\}}\, h_i^{-I_D}(t) \tag{2.55}$$

onde $|I_D| = k$, $(t,\omega) \to h_i^{-I_D}(t)$ é $\mathcal{B}_+ \otimes \mathcal{G}_{\tau_{(k)}}$-mensurável.

Observação: Denotamos a intensidade de default do nome i sobre todas as filtrações em negrito, $\mathbf{h}_i(t)$, e para uma filtração específica por $h_i^{-I_D}(t)$, onde '$-I_D'$ indica que no instante t, $j \in I_D \Rightarrow \tau_j \leq t$, para todo nome j que teve o default até (inclusive) o instante t.

Os Teoremas 2.2 e 2.3 também são válidos para $n \geq 2$, assim como o Corolário 2.1.

A seguir temos a segunda parte do valor do *swap* FtD.

Proposição 2.10. *No instante $t \leq T$, o valor descontado que o comprador do swap FtD com n nomes recebe se o primeiro default ocorrer antes do vencimento do contrato é $\pi^{vr}(t) = E\big[\, f_r^*(\tau_{(1)})|\, \mathcal{G}_t\big]$, onde*

$$f_r^*(\tau_{(1)}) \;=\; \sum_{i=1}^{n} (1-\delta_i)\, \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}\leq T\}}\, \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}=\tau_i\}}\, e^{-rT}$$

é $\mathcal{G}_T$-mensurável e $E[|f_r^*(\tau_{(1)})|] < \infty$. Ou seja,

$$\pi^{vr}(t) \;=\; \sum_{i=1}^{n}(1-\delta_i)\,e^{-rT}\left[\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}\leq t\}}\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}=\tau_i\}} \;+\; \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}>t\}}\int_t^T h_i(u)\,\frac{G(\mathbf{u})}{G(\mathbf{t})}\,du\right]$$

onde $h_i(u)$ é a intensidade de default do nome i, dado que os n nomes sobreviveram até o instante u.

Prova: Como $\tau_{(1)} = \min\{\tau_1, ..., \tau_n\}$, para i fixo, temos que:

$$\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}\leq T\}}\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}=\tau_i\}} \;\Rightarrow\; \mathbf{1}_{\{\tau_i\leq T\}}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\mathbf{1}_{\{\tau_i\leq\tau_j\}}\,.$$

Utilizando a igualdade acima, para $t \leq T$, o valor $\pi^{vr}(t)$ é dado por:

$$\begin{aligned}
\pi^{vr}(t) \;&=\; \sum_{i=1}^{n}(1-\delta_i)\,e^{-rT}\,E\Big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_i\leq T\}}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\mathbf{1}_{\{\tau_j\geq\tau_i\}}\big|\mathcal{G}_t\Big]\\
&=\; \sum_{i=1}^{n}(1-\delta_i)\,e^{-rT}\,E\Big[\int_0^T\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\mathbf{1}_{\{\tau_j\geq u\}}\,dN_i(u)\big|\mathcal{G}_t\Big]\\
&=\; \sum_{i=1}^{n}(1-\delta_i)\,e^{-rT}\left\{\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}=\tau_i\leq t\}} + E\Big[\int_t^T\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\mathbf{1}_{\{\tau_j\geq u\}}\,dN_i(u)\big|\mathcal{G}_t\Big]\right\}. \qquad (2.56)
\end{aligned}$$

A esperança condicional acima é calculada através da Propriedade Martingal (Corolário 2.1). No caso $n = 2$, mostramos que o processo do integrando na esperança condicional satisfaz à condição do corolário. Este resultado pode ser estendido para $n \geq 2$, ou seja,

$$E\Big[\int_0^t\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\mathbf{1}_{\{\tau_j\geq u\}}\,\mathbf{h}_i(u)\,du\Big] \leq 1 < \infty\,.$$

Aplicando a Propriedade Martingal na esperança condicional em (2.56), obtemos:

$$\begin{aligned}
E\Big[\int_t^T\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\mathbf{1}_{\{\tau_j\geq u\}}\,dN_i(u)\big|\,\mathcal{G}_t\Big] \;&=\; E\Big[\int_t^T\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\mathbf{1}_{\{\tau_j\geq u\}}\,\mathbf{h}_i(u)\,du\big|\,\mathcal{G}_t\Big]\\
&=\; \int_t^T E\Big[\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\mathbf{1}_{\{\tau_j>u\}}\,\mathbf{1}_{\{\tau_i>u\}}\,h_i(u)\big|\,\mathcal{G}_t\Big]\,du \qquad (2.57)
\end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre do Teorema 2.4, de Fubini. Como $u > t$, para o integrando da expressão acima temos:

$$\begin{aligned} E\big[\,\mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}>u\}}\,h_i(u)|\,\mathcal{G}_t\big] &= \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}>t\}}\,E\big[\,\mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}>u\}}\,h_i(u)|\,\mathcal{G}'_t\,\big] \\ &= \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}>t\}}\,E\big[\,\mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}>u\}}\,h_i(u)\big]\,G(\mathbf{t})^{-1} \end{aligned} \tag{2.58}$$

onde $\mathcal{G}'_t = \{\boldsymbol{\tau} > t\}$. Observando-se que para $\mathcal{G}'_t = \{\boldsymbol{\tau}_{I_D} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D};\, \tau_i > t;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}$, onde $|I_D| \neq 0$, esta esperança condicional é zero.

Logo, a prova do valor descontado que o comprador do swap FtD com n nomes recebe se o primeiro default ocorrer antes do vencimento do contrato consiste em calcular a esperança na expressão (2.58), para $\boldsymbol{\tau} > t$.

A prova é feita por indução. Para $n = 2$, a expressão da proposição concorda com o valor $\pi^{vr}(t)$ calculado na Proposição 2.3, parte (b). Supondo que seja verdadeira para n, a seguir provamos para $(n+1)$ nomes.

Através das expressões (2.56), (2.57) e (2.58), para $(n+1)$ nomes temos que no instante t anterior ao primeiro default, $t < \tau_{(1)}$, o valor $\pi^{vr}(t)$ é determinado por:

$$\pi^{vr}(t) = \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}>t\}} \sum_{i=1}^{n+1} (1-\delta_i)\, e^{-rT} \int_t^T E\big[\,\mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}>u\}}\,h_i(u)\big]\,G(\mathbf{t})^{-1}\,du$$

onde $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{n+1}$ e

$$E\big[\,\mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}>u\}}\,h_i(u)\big] = h_i(u)\,P\big[\,\boldsymbol{\tau} > u\big]\,. \tag{2.59}$$

A seguir calculamos a probabilidade do lado direito da expressão acima.

(a.1) Para $i \neq n+1$, ou seja, quando o primeiro default não for o nome $(n+1)$, temos:

$$\begin{aligned} P\big[\,\boldsymbol{\tau} > u\big] &= \int_u^\infty \underbrace{\int_u^\infty \cdots \int_u^\infty}_{(n)} \partial^{n+1} F(\mathbf{v}) \\ &= \int_u^\infty \underbrace{\int_u^\infty \cdots \int_u^\infty}_{(n-1)} \partial^{n} F(\mathbf{v}') - \sum_{k=0}^{|I'_S|} \sum_{I_S^k \subset I'_S} (-1)^k \int_u^\infty \partial_i F_{i,I_S^k,n+1}(v_i, \mathbf{u}, u) \\ &= J_1 - J_2 \end{aligned} \tag{2.60}$$

onde $I'_S = I_S - \{n+1\}$ e $\mathbf{v}' \in \mathbb{R}^n$. A segunda igualdade decorre da derivada da expressão (2.32) com relação à t da i-ésima variável e tomando $\mathbf{t} = \mathbf{u}$.

Pela hipótese de indução, para n nomes e $\tau'_{(1)} > t$, onde $\tau'_{(1)} = \min\{\tau_1, ..., \tau_n\}$, temos:

$$\begin{aligned}\pi^{vr}(t) &= \mathbf{1}_{\{\tau'_{(1)} > t\}} \sum_{i=1}^{n} (1-\delta_i)\, e^{-rT} \int_t^T \hat{h}_i(u)\, P[\,\boldsymbol{\tau}' > u\,]\, G(\mathbf{t}')^{-1}\, du \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau'_{(1)} > t\}} \sum_{i=1}^{n} (1-\delta_i)\, e^{-rT} \int_t^T \hat{h}_i(u)\, \frac{G(\mathbf{u}')}{G(\mathbf{t}')}\, du\end{aligned}$$

onde $\boldsymbol{\tau}', \mathbf{t}' \in \mathbb{R}^n$ e $\hat{h}_i(t)$ é a intensidade de default do nome i no contexto com n nomes. Portanto, através da hipótese de indução, obtemos a integral J_1:

$$J_1 = P[\,\boldsymbol{\tau}' > u\,] = G(\mathbf{u}')\,.$$

Calculando a integral J_2, temos:

$$J_2 = \sum_{k=0}^{|I'_S|} \sum_{I_S^k \subset I'_S} (-1)^k \left(F_{I_S^k, n+1}(\mathbf{u}, u) - F_{i, I_S^k, n+1}(u, \mathbf{u}, u)\right).$$

Substituindo J_1 e J_2 na expressão (2.60), obtemos:

$$P\left[\,\boldsymbol{\tau} > u\,\right] = G(\mathbf{u}') - \sum_{k=0}^{|I'_S|} \sum_{I_S^k \subset I'_S} (-1)^k \left(F_{I_S^k, n+1}(\mathbf{u}, u) - F_{i, I_S^k, n+1}(u, \mathbf{u}, u)\right) = G(\mathbf{u})$$

onde a última igualdade decorre de (2.32).

(a.2) Para $i = n+1$, o primeiro default é o nome $(n+1)$. Calculando a probabilidade em (2.59), temos:

$$\begin{aligned}P\left[\,\boldsymbol{\tau} > u\,\right] &= \int_u^\infty \partial_{n+1} F_{n+1}(v_{n+1}) + \sum_{k=1}^{|I_S|} \sum_{I_S^k \subset I_S} (-1)^k \int_u^\infty \partial_{n+1} F_{I_S^k, n+1}(\mathbf{u}, v_{n+1}) \\ &= 1 - F_{n+1}(u) + \sum_{k=1}^{|I_S|} \sum_{I_S^k \subset I_S} (-1)^k \left(F_{I_S^k}(\mathbf{u}) - F_{I_S^k, n+1}(\mathbf{u}, u)\right) \\ &= G(\mathbf{u}') - F_{n+1}(u) - \sum_{k=1}^{|I_S|} \sum_{I_S^k \subset I_S} (-1)^k F_{I_S^k, n+1}(\mathbf{u}, u) = G(\mathbf{u})\,.\end{aligned}$$

onde na primeira igualdade utilizamos a derivada da expressão (2.34) para $\mathbf{t} = \mathbf{u}$ com relação à u da $(n+1)$-ésima variável, a terceira igualdade decorre da expressão (2.35) e por fim, concluímos a última igualdade através da expressão (2.34).

Através dos casos (a.1) e (a.2), concluímos que para i fixo, o valor da probabilidade em (2.59) é igual à $G(\mathbf{u})$, $i = 1, ..., n+1$.

Logo, no instante $t \leq T$, o valor descontado que o comprador do *swap* FtD recebe se o primeiro default ocorrer antes do vencimento do contrato é:

$$\pi^{vr}(t) = \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} > t\}} \sum_{i=1}^{n+1} (1-\delta_i)\, e^{-rT} \int_t^T h_i(u)\, \frac{G(\mathbf{u})}{G(\mathbf{t})}\, du\,.$$

Portanto, a expressão do valor $\pi^{vr}(t)$ dada pela proposição é válida para $(n+1)$ nomes. □

Através das Proposições 2.9 e 2.10, o valor descontado do *swap* FtD com n nomes, do ponto de vista do comprador, é dado por:

$$FtD^*(t) = -\pi^{vp}(t) + \pi^{vr}(t)$$

ou seja, no instante $t \leq T$,

$$\begin{aligned} FtD^*(t) \;=\; & \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} \leq t\}} \left[\sum_{j=1}^{m} -s\, \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} \geq t_j\}}\, e^{-rt_j} + \sum_{i=1}^{n} (1-\delta_i)\, \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} = \tau_i\}}\, e^{-rT} \right] \\ & + \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} > t\}} \left\{ \sum_{j=1}^{m} -s\, e^{-rt_j} \left[\mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}} \frac{G(\mathbf{t_j})}{G(\mathbf{t})} \right] + \sum_{i=1}^{n} (1-\delta_i)\, e^{-rT} \int_t^T h_i(u)\, \frac{G(\mathbf{u})}{G(\mathbf{t})}\, du \right\}. \end{aligned}$$

2.3.2 Representação Martingal

No contexto com n nomes, a versão $\mathcal{G}_t$-predizível da intensidade de default definida na expressão (2.55) é dada a seguir.

Seja $N_i(t) = \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}}$, um processo pontual com intensidade $\mathbf{h}_i(t)$, $\mathcal{G}_t$-mensurável, da forma:

$$\mathbf{h}_i(t) = \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t\}} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\substack{A_i \subset \Delta_{k,I'} \\ A_i = \{I_D, I_S\}}} \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} < t;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S} \geq t\}}\, h_i^{-I_D}(t) \tag{2.61}$$

onde $|I_D| = k$, $h_i^{-I_D}(t)$ é $\mathcal{G}_{\tau_{(k)}}$-mensurável, para $i = 1, ..., n$. Para ressaltar que a intensidade é $\mathcal{G}_t$-predizível, denotaremos $\mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t\}}\, \mathbf{h}_i(t)$.

O resultado do Teorema 2.5, de Representação de Martingais, para o caso bidimensional é estendido para o caso multidimensional sob as mesmas condições.

De forma análoga, a Proposição 2.4 também é válida no contexto com n nomes, isto é, os valores descontados dos derivativos de crédito, $CDS^{*i}(t)$ e $FtD^*(t)$, são martingais sob $\mathcal{G}_t$, para $i = 1, ..., n$.

E pelo Teorema de Representação de Martingais, estes valores podem ser escritos como:

$$CDS^{*i}(t) \;=\; CDS^{*i}(0) + \sum_{j=1}^{n} \int_0^t H_j^i(s)\, dM_s^j \tag{2.62a}$$

$$FtD^*(t) \;=\; FtD^*(0) + \sum_{j=1}^{n} \int_0^t K_j(s)\, dM_s^j \tag{2.62b}$$

onde os processos $\mathcal{G}_t$-predizíveis $H_j^i(t) = \Delta CDS^{*i}(t)\big|_{t=\tau_j}$ e $K_j(t) = \Delta FtD^*(t)\big|_{t=\tau_j}$. Para I_D e I_S fixos e $j \in I_S$, onde $j \neq i$, temos:

$$\begin{aligned} H_j^i(t) \;=\; & \sum_{k=1}^{m} -s_i\, \mathbf{1}_{\{t<\, t_k\}}\, e^{-rt_k} \left[\frac{\partial_{j,I_D} G(\mathbf{t}_{-i}, t_k; \mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D})}{\partial_{j,I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D})} - \frac{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-i}, t_k; \mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D})}{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D})} \right] \\ & + (1-\delta_i)\, e^{-rT} \left[\frac{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-i}, T; \mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D})}{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D})} - \frac{\partial_{j,I_D} G(\mathbf{t}_{-i}, T; \mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D})}{\partial_{j,I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D})} \right], \quad t \leq \tau_j, \tau_i \end{aligned} \tag{2.63a}$$

$$\begin{aligned} H_i^i(t) \;=\; & \sum_{k=1}^{m} s_i\, \mathbf{1}_{\{t<\, t_k\}}\, e^{-rt_k}\, \frac{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-i}, t_k; \mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D})}{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D})} \\ & + (1-\delta_i)\, e^{-rT}\, \frac{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-i}, T; \mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D})}{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D})}, \quad t \leq \tau_i \end{aligned} \tag{2.63b}$$

$$\begin{aligned} K_j(t) \;=\; & \sum_{k=1}^{m} s\, \mathbf{1}_{\{t<\, t_k\}}\, e^{-rt_k}\, \frac{G(\mathbf{t}_k)}{G(\mathbf{t})} + (1-\delta_j)\, e^{-rT} \left[1 - \int_t^T h_j(u)\, \frac{G(\mathbf{u})}{G(\mathbf{t})}\, du \right] \\ & - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} (1-\delta_i)\, e^{-rT} \int_t^T h_i(u)\, \frac{G(\mathbf{u})}{G(\mathbf{t})}\, du\,, \quad t \leq \tau_{(1)} \end{aligned} \tag{2.63c}$$

para $i, j = 1, ..., n$.

2.3.3 Hedge Dinâmico I - Caso Geral

Sob as mesmas condições da Seção 2.2.3, no caso do *swap first-to-default* com n nomes, a estratégia de hedge dinâmico é dada pela proposição a seguir, uma extensão da Proposição 2.5.

Proposição 2.11. *No instante $t < \min\{\tau_{(1)}, T\}$, a estratégia de hedge dinâmico de um swap FtD com n nomes $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\gamma_0(t), ..., \gamma_n(t))$ é obtida de forma que $\boldsymbol{\gamma}'(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t))$ é solução do sistema linear:*

$$\mathbf{H}(t)\boldsymbol{\gamma}'(t) = \mathbf{K}(t)$$

onde $H_{j,i}(t) = H_j^i(t)$ e $K_j(t)$ são determinados pelas expressões (2.63a), (2.63b) e (2.63c), $i, j = 1, ..., n$. E a quantia de cash é determinada por:

$$\gamma_0(t) = FtD^*(t) - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(t)\, CDS^{*i}(t)\,.$$

Prova: Análoga à prova do caso do *swap* FtD com dois nomes, Proposição 2.5. □

Problemas do hedge com os *swaps* de crédito

Podemos apontar dois problemas na estratégia de hedge de um *swap* FtD com n nomes utilizando-se os *swaps* de crédito como instrumentos de hedge.

Um dos problemas ocorre quando o valor do CDS^i é definido em função do *spread* s_i constante. O *spread* de um CDS é determinado sob as condições do mercado que variam conforme a probabilidade de default do nome aumentar ou diminuir ao longo do tempo. Logo, é necessário considerar o risco de mercado presente nas variações do *spread*.

O segundo problema surge quando o primeiro default ocorre antes do vencimento do contrato. Neste instante, o *swap* de crédito correspondente ao nome que teve o default e o *swap* FtD são liquidados e o comprador dos CDSs utilizados no hedge permanece com os *swaps* de crédito dos nomes que sobreviveram, de forma que a estratégia de hedge dada pela Proposição 2.11, não garante que ele terá caixa suficiente para sair destes *swaps* de créditos.

Para sair destes contratos antes do vencimento, o comprador dos CDSs deve pagar ao vendedor os *spreads* restantes, multiplicados pelas probabilidades de sobrevivência condicionais do nome no qual o contrato está escrito, isto é, $\pi_j^{vp}(t)$. O vendedor do CDS por sua vez paga o valor combinado em caso de default do nome, multiplicado pela probabilidade condicional do default do nome ocorrer antes do vencimento do contrato, $\pi_j^{vr}(t)$, ambos descontados à taxa de juros nos respectivos períodos, para $\tau_j > t$.

Ou seja, o caixa necessário para o comprador sair dos *swaps* de crédito é exatamente o valor do CDS neste instante.

Como o hedge é determinado pelos saltos nos valores destes contratos, $\Delta CDS^{*i}(t)|_{t=\tau_j}$, $i, j = 1, ..., n$, eles não representam o recurso necessário e suficiente para o comprador sair dos contratos, podendo ocorrer que a estratégia gere um excesso ou insuficiência de caixa para a saída dos contratos antes do vencimento, o que em ambos os casos representam perdas para o comprador.

Capítulo 3

Hedge com Rolagem Contínua de CDS

Como foi visto no Capítulo 2, os *swaps* de crédito CDSs não são instrumentos de hedge adequados para um *swap* FtD, por não considerar o risco de mercado presente no *spread* quando os valores destes derivativos são determinados em função desta taxa de proteção e por não garantir que a estratégia gerará recurso necessário e suficiente para sair dos CDSs que não foram liquidados no instante do primeiro default, caso isto ocorra antes do vencimento do contrato.

Schmidt [22] propôs como solução para estes problemas, a utilização de rolagem contínua de CDS como instrumento de hedge de um *swap k-to-default*, de forma que este instrumento cumpre com os objetivos do hedge citados no Capítulo 1.

Conforme a Seção 3.2.2, a rolagem contínua de CDS permite que o vendedor do *swap* FtD cumpra com as obrigações dos contratos, inclusive que no instante do primeiro default ele saia dos demais *swaps* de crédito sob as condições do mercado.

Logo, o objetivo deste capítulo é desenvolver uma estratégia de hedge de um *swap* FtD através da rolagem contínua de CDS, com os derivativos de crédito modelados de acordo com o Capítulo 2, porém com uma alteração. Consideramos que, a taxa de recuperação é paga no instante de default do nome, caso ele ocorra antes do término do contrato, e não data de vencimento do contrato, como assumimos no capítulo anterior.

Assim como no Capítulo 2, obtemos a estratégia de hedge de um *swap first-to-default* com dois nomes e em seguida, generalizamos o resultado para o caso de um *swap* FtD com n nomes, $n \geq 2$, Seções 3.2 e 3.3. Nos dois contextos, iniciamos calculando os valores dos derivativos de crédito e o valor da rolagem contínua de CDS. Por fim, desenvolvemos a estratégia de hedge de um *swap* FtD.

Consideramos que a taxa de juros é determinística e constante.

3.1 Definições

Seja $(\Omega, \mathcal{G}, \{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}, P)$, um espaço de probabilidade filtrado com $\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$ contínua à direita e P, a medida neutra ao risco, de forma que sob esta medida não existem oportunidades de arbitragem. Assim como no Capítulo 2, $\mathcal{G}_t$ é a filtração gerada pelos processos indicadores de default dos n nomes.

Payoff do *swap* de crédito - CDS

Considerando que o *swap* de crédito CDS possui as mesmas características descritas no Capítulo 2, porém com o pagamento da taxa de recuperação feito no instante de default do nome i e não na data de vencimento do contrato T.

Neste caso, o valor descontado à taxa de juros que o comprador do CDS no nome i recebe caso o default deste nome ocorra antes do vencimento do contrato é:

$$f_r^*(\tau_i) \;=\; (1-\delta_i)\,\mathbf{1}_{\{\tau_i\leq T\}}\,e^{-r\tau_i}\,. \tag{3.1}$$

Dessa forma, o *payoff* descontado $f^*(\tau_i)$, do ponto de vista do comprador do CDS no nome i, é dado por:

$$\begin{aligned} f^*(\tau_i) &= \sum_{j=1}^{m} -s_i\,\mathbf{1}_{\{\tau_i\geq t_j\}}\,e^{-rt_j} + (1-\delta_i)\,\mathbf{1}_{\{\tau_i\leq T\}}\,e^{-r\tau_i} \\ &= -f_p^*(\tau_i) + f_r^*(\tau_i) \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde $f^*(\tau_i)$ é $\mathcal{G}_T$-mensurável e $E[|f^*(\tau_i)|] < \infty$. O valor $f_p^*(\tau_i)$ é definido conforme a Proposição 2.6 e $f_r^*(\tau_i)$ é dado por (3.1), $i = 1, ..., n$.

Payoff do *swap* FtD

Se o pagamento da taxa de recuperação é feita no primeiro instante de default, caso ele ocorra antes do vencimento do contrato, então o *payoff* do *swap* FtD, descontado à taxa de juros, é dado por:

$$f^*(\tau_{(1)}) \;=\; \sum_{j=1}^{m} -s\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}\geq t_j\}}\,e^{-rt_j} + \sum_{i=1}^{n}(1-\delta_i)\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}\leq T;\,\tau_{(1)}=\tau_i\}}\,e^{-r\tau_{(1)}} \tag{3.3}$$

onde $f^*(\tau_{(1)})$ é $\mathcal{G}_T$-mensurável e $E[|f^*(\tau_{(1)})|] < \infty$.

Nas Seções 3.2 e 3.3 calculamos o valor destes derivativos de crédito considerando os contextos com dois e n nomes, $n \geq 2$, respectivamente, para obtermos uma estratégia de hedge dinâmico do *swap first-to-default* com a rolagem contínua de CDS para cada caso.

3.2 Contexto com dois nomes

Iniciamos esta seção calculando os valores dos *swap* de crédito e do *swap* FtD com dois nomes. Em seguida, obtemos o valor da rolagem contínua de CDS para então desenvolvermos a estratégia de hedge dinâmico do *swap* FtD com este instrumento de hedge.

3.2.1 Valores dos Derivativos de Crédito

Nesta seção calculamos os valores dos derivativos de crédito definidos na Seção 3.1, considerando o contexto com dois nomes.

Valor do *Swap* de Crédito - CDS

Utilizando a mesma notação do Capítulo 2, sob a medida neutra ao risco, o valor descontado do *swap* de crédito no nome 1 é dado pela proposição a seguir.

Proposição 3.1. *No instante $t \leq T$, o valor descontado do CDS no nome 1, do ponto de vista do comprador do swap de crédito, é $CDS^{*1}(t) = E\big[f^*(\tau_1)|\,\mathcal{G}_t\big]$, onde $f^*(\tau_1)$ é dado por (3.2), para $i = 1$. Logo,*

$$
\begin{aligned}
CDS^{*1}(t) = \mathbf{1}_{\{\tau_1 \leq t\}} & \left[\sum_{j=1}^{m} -s_1\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 \geq t_j\}}\, e^{-rt_j} + (1-\delta_1)\, e^{-r\tau_1}\right] \\
+ \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t\}} & \Bigg\{ \sum_{j=1}^{m} -s_1\, e^{-rt_j} \left[\mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}} \left(\mathbf{1}_{\{\tau_2 > t\}} \frac{G(t_j,t)}{G(t,t)} + \mathbf{1}_{\{\tau_2 \leq t\}} \frac{\partial_2 G(t_j,\tau_2)}{\partial_2 G(t,\tau_2)}\right)\right] \\
& + (1-\delta_1)\, \mathbf{1}_{\{\tau_2 > t\}} \int_t^T e^{-ru} \left[h_1(u)\, \frac{G(u,u)}{G(t,t)} - h_1^{-2}(u) \left(\frac{G(u,u)}{G(t,t)} - \frac{G(u,t)}{G(t,t)}\right)\right] du \\
& + (1-\delta_1)\, \mathbf{1}_{\{\tau_2 \leq t\}} \int_t^T e^{-ru}\, h_1^{-2}(u)\, \frac{\partial_2 G(u,\tau_2)}{\partial_2 G(t,\tau_2)}\, du \Bigg\}
\end{aligned}
$$

onde $h_1(t)$ e $h_1^{-2}(t)$ são as intensidades de default do nome 1, quando o nome 2 sobreviveu até o instante t e quando o default do nome 2 já ocorreu no instante t, respectivamente.

Prova: O valor descontado do *swap* de crédito no nome 1, pode ser escrito como:

$$
\begin{aligned}
CDS^{*1}(t) &= E\big[f^*(\tau_1)|\,\mathcal{G}_t\big] \\
&= -E\big[f_p^*(\tau_1)|\,\mathcal{G}_t\big] + E\big[f_r^*(\tau_1)|\,\mathcal{G}_t\big]
\end{aligned}
$$

onde $f_p^*(\tau_1)$ e $f_r^*(\tau_1)$ são $\mathcal{G}_T$-mensuráveis, $E[|f_p^*(\tau_1)|] < \infty$ e $E[|f_r^*(\tau_1)|] < \infty$.

O primeiro termo de $CDS^{*i}(t)$ corresponde ao valor no instante t pago pela proteção contra o default do nome 1, $\pi_1^{vp}(t)$, e foi calculado na prova da Proposição 2.2, do Capítulo 2. Portanto, basta provar o valor do segundo termo, $\pi_1^{vr}(t)$. Isto é, para $t \leq T$,

$$\begin{aligned}\pi_1^{vr}(t) = {} & \mathbf{1}_{\{\tau_1 \leq t\}}\,(1-\delta_1)\,e^{-r\tau_1} \\ & + \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t\}}\,(1-\delta_1)\Bigg\{\mathbf{1}_{\{\tau_2 > t\}}\int_t^T e^{-ru}\left[h_1^{-2}(u)\frac{G(u,t)-G(u,u)}{G(t,t)} + h_1(u)\frac{G(u,u)}{G(t,t)}\right]du \\ & \qquad + \mathbf{1}_{\{\tau_2 \leq t\}}\int_t^T e^{-ru}\,h_1^{-2}(u)\,\frac{\partial_2 G(u,\tau_2)}{\partial_2 G(t,\tau_2)}\,du\Bigg\}.\end{aligned}$$

Observação: No caso em que o nome 2 sobreviveu até o instante t e $\tau_1 > t$, o valor $\pi_1^{vr}(t)$ é determinado por uma integral que representa a probabilidade do nome 1 ter o default entre os instantes t e T, considerando-se que o default do nome 2 pode ocorrer entre os instantes t e u (primeiro termo entre colchetes), onde $u > t$, ou após u (segundo termo entre colchetes).

Para $t \leq T$, temos:

$$\begin{aligned}\pi_1^{vr}(t) &= E\big[\,(1-\delta_1)\,\mathbf{1}_{\{\tau_1 \leq T\}}\,e^{-r\tau_1}\,|\,\mathcal{G}_t\big] \\ &= E\Big[\,(1-\delta_1)\int_0^T e^{-ru}\,dN_1(u)\big|\,\mathcal{G}_t\Big] \\ &= (1-\delta_1)\Big\{\,\mathbf{1}_{\{\tau_1 \leq t\}}\,e^{-r\tau_1} + E\Big[\int_t^T e^{-ru}\,dN_1(u)\big|\,\mathcal{G}_t\Big]\Big\}. \qquad (3.4)\end{aligned}$$

Para calcular a esperança condicional na expressão acima é necessário analisar algumas propriedades do integrando $X_t = e^{-rt}$. Como a taxa de juros é determinística e constante, $r \geq 0$, X_t é $\mathcal{G}_t$-predizível e $\mathbf{h}_1(t)$ é um processo não-negativo (por definição), que conforme a expressão (2.15), pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_1(t) &= \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t\}}\big(\mathbf{1}_{\{\tau_2 > t\}}\,h_1(t) + \mathbf{1}_{\{\tau_2 \leq t\}}\,h_1^{-2}(t)\big) \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} > t\}}\,h_1(t) + \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} = \tau_2 \leq t\}}\,h_1^{-2}(t)\,. \qquad (3.5)\end{aligned}$$

Retornando à propriedade do processo X_t,

$$\begin{aligned}E\Big[\int_0^t |e^{-ru}|\,\mathbf{h}_1(u)\,du\Big] &\leq E\Big[\int_0^t \mathbf{h}_1(u)\,du\Big] \\ &= E\Big[\int_0^{t\wedge\tau_{(1)}} h_1(t)\,du\Big] + E\Big[\int_{\tau_{(1)}=\tau_2}^{t\wedge\tau_{(2)}} h_1^{-2}(t)\,du\Big] \\ &= E[N_1(t\wedge\tau_{(1)})] + E[N_1(t\wedge\tau_{(2)})] - E[N_1(\tau_{(1)} = \tau_2)] \leq 1 < \infty\end{aligned}$$

onde na primeira igualdade utilizamos a expressão (3.5) e a segunda igualdade decorre da fato do processo M_t^1 ser um martingal sob $\mathcal{G}_t$[1]. Logo, podemos aplicar a Propriedade Martingal (Corolário 2.1) na esperança condicional em (3.4), obtendo:

$$E\Big[\int_t^T e^{-ru}\, dN_1(u)\big|\, \mathcal{G}_t\Big] \;=\; E\Big[\int_t^T e^{-ru}\, \mathbf{h}_1(u)\, du\big|\, \mathcal{G}_t\Big] \;=\; \int_t^T e^{-ru}\, E\big[\, \mathbf{h}_1(u)|\, \mathcal{G}_t\big]\, du \tag{3.6}$$

onde a última igualdade decorre do Teorema 2.4, de Fubini.

A seguir, calculamos a esperança condicional do lado direito da expressão acima, considerando-se as duas possíveis filtrações, observando-se que $u > t$.

(i) Para $\mathcal{G}_t = \{\tau_1 > t; \tau_2 > t\}$, o nome 2 sobreviveu até o instante t.

Calculando a esperança condicional em (3.6):

$$\begin{aligned} E\big[\, \mathbf{h}_1(u)|\, \mathcal{G}_t\big] &= E\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 > u\}} \big(\mathbf{1}_{\{\tau_2 \le u\}}\, h_1^{-2}(u) + \mathbf{1}_{\{\tau_2 > u\}}\, h_1(u)\big)|\, \mathcal{G}_t\,\big] \\ &= \frac{E\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 > u\}}\, \mathbf{1}_{\{t < \tau_2 \le u\}}\, h_1^{-2}(u)\big]}{G(t,t)} + \frac{E\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 > u\}}\, \mathbf{1}_{\{\tau_2 > u\}}\, h_1(u)\big]}{G(t,t)} \\ &= \big(\, C_1 + C_2\big)\, G(t,t)^{-1} \end{aligned}$$

onde para as esperanças C_1 e C_2, temos:

$$\begin{aligned} C_1 \;&=\; E\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 > u;\, t < \tau_2 \le u\}}\, h_1^{-2}(u)\big] \;=\; E[\, h_1^{-2}(u)|\, \mathcal{G}_u]\, P\,[\, \tau_1 > u;\, t < \tau_2 \le u\,] \\ &=\; h_1^{-2}(u) \int_u^{\infty}\!\!\int_t^u \partial^2 F(v_1, v_2) \;=\; h_1^{-2}(u)\big[\, G(u,t) - G(u,u)\big] \\ C_2 \;&=\; E\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 > u;\, \tau_2 > u\}}\, h_1(u)\big] \;=\; E[\, h_1(u)|\, \mathcal{G}_u]\, P\,[\, \tau_1 > u;\, \tau_2 > u\,] \;=\; h_1(u)\, G(u,u)\,. \end{aligned}$$

Logo, o valor que o comprador do contrato recebe em caso de default do nome 1, dado que os dois nomes sobreviveram até o instante t, é:

$$\pi_1^{vr}(t) \;=\; \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > t\}}\, (1 - \delta_1) \int_t^T e^{-ru} \left[h_1^{-2}(u) \frac{G(u,t) - G(u,u)}{G(t,t)} + h_1(u) \frac{G(u,u)}{G(t,t)} \right] du\,. \tag{3.7}$$

(ii) Para $\mathcal{G}_t = \{\tau_1 > t; \tau_2 = \bar{\tau}_2\}$, o nome 2 teve o default, isto é, $\tau_2 \le t$. Neste caso,

$$\begin{aligned} E\big[\, \mathbf{h}_1(u)|\, \mathcal{G}_t\,\big] &= E\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 > u\}} \big(\mathbf{1}_{\{\tau_2 \le u\}}\, h_1^{-2}(u) + \mathbf{1}_{\{\tau_2 > u\}}\, h_1(u)\big)|\, \mathcal{G}_t\,\big] \\ &= \frac{\partial_2 E\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 > u\}} \big(\mathbf{1}_{\{\tau_2 \le u\}}\, h_1^{-2}(u) + \mathbf{1}_{\{\tau_2 > u\}}\, h_1(u)\big) \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t;\, \tau_2 > \bar{\tau}_2\}}\big]}{\partial_2 G(t, \bar{\tau}_2)} \\ &= \frac{\partial_2 E\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 > u;\, \bar{\tau}_2 < \tau_2 \le u\}}\, h_1^{-2}(u)\big]}{\partial_2 G(t, \bar{\tau}_2)}\,. \end{aligned}$$

[1] Teorema 2.2, Seção 2.2.1.

Calculando a esperança no numerador:

$$\begin{aligned}\partial_2 E\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_1>u;\,\bar{\tau}_2<\tau_2\le u\}}\,h_1^{-2}(u)\big] &= E[\,h_1^{-2}(u)|\,\mathcal{G}_u]\,\partial_2\int_u^{\infty}\int_{\bar{\tau}_2}^{u}\partial^2 F(v_1,v_2)\\ &= h_1^{-2}(u)\,\partial_2 G(u,\bar{\tau}_2)\,.\end{aligned}$$

Com isso, para $\tau_1 > t$ e $\tau_2 \le t$, obtemos:

$$\pi_1^{vr}(t) \;=\; \mathbf{1}_{\{\tau_1>t;\,\tau_2\le t\}}\,(1-\delta_1)\int_t^T e^{-ru}\,h_1^{-2}(u)\,\frac{\partial_2 G(u,\tau_2)}{\partial_2 G(t,\tau_2)}\,du\,. \tag{3.8}$$

Portanto, através das expressões (3.7) e (3.8) concluímos a prova do valor descontado que o comprador do *swap* de crédito recebe, $\pi_1^{vr}(t)$, se o default do nome 1 ocorrer antes do vencimento do contrato e conseqüentemente, o valor $CDS^{*1}(t)$. □

De forma análoga, podemos obter o valor $\pi_2^{vr}(t)$, para o nome 2.

Valor do *Swap* FtD com dois nomes

A seguir, calculamos o valor do *swap* FtD, considerando que o pagamento da taxa de recuperação é feita no primeiro instante de default, caso ele ocorra antes do vencimento do contrato. O valor descontado deste derivativo de crédito é dado pela proposição a seguir.

Proposição 3.2. *No instante $t \le T$, o valor descontado do swap FtD com dois nomes é $FtD^*(t) = E\big[f^*(\tau_{(1)})|\,\mathcal{G}_t\big]$, onde $f^*(\tau_{(1)})$ é definido por (3.3). Ou seja,*

$$\begin{aligned}FtD^*(t) \;=\; &\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}\le t\}}\Bigg[\sum_{j=1}^{m} -s\;\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}\ge t_j\}}\,e^{-rt_j} + \sum_{i=1}^{2}(1-\delta_i)\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}=\tau_i\}}\,e^{-r\tau_{(1)}}\Bigg]\\ &+\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}>t\}}\Bigg\{\sum_{j=1}^{m} -s\,e^{-rt_j}\Bigg[\mathbf{1}_{\{t\ge t_j\}}+\mathbf{1}_{\{t<t_j\}}\frac{G(t_j,t_j)}{G(t,t)}\Bigg] + \sum_{i=1}^{2}(1-\delta_i)\int_t^T e^{-ru}\,h_i(u)\frac{G(u,u)}{G(t,t)}\,du\Bigg\}\end{aligned}$$

onde $h_i(t)$ é a intensidade de default do nome i, dado que os dois nomes sobreviveram até o instante t, $i = 1, 2$.

Prova: O *payoff* descontado do *swap* FtD pode ser escrito como:

$$f^*(\tau_{(1)}) \;=\; -f_p^*(\tau_{(1)}) + f_r^*(\tau_{(1)})\,.$$

onde $f_p^*(\tau_{(1)})$ representa a soma dos *spreads* pagos pela proteção contra o primeiro default e $f_r^*(\tau_{(1)})$, o valor que o comprador do *swap* FtD recebe se o primeiro default ocorrer durante o período de vigência do contrato, ambos descontados à taxa de juros.

Logo, o valor descontado deste derivativo é dado por:

$$\begin{aligned} FtD^*(t) &= E\big[f^*(\tau_{(1)})\big|\,\mathcal{G}_t\big] \\ &= -E\big[f_p^*(\tau_{(1)})\big|\,\mathcal{G}_t\big] + E\big[f_r^*(\tau_{(1)})\big|\,\mathcal{G}_t\big] \end{aligned}$$

onde o primeiro termo foi calculado na parte (a) da prova da Proposição 2.3. A seguir provamos o segundo termo cujo procedimento é semelhante à parte (b).

Seja $\pi^{vr}(t)$ o valor que o comprador do *swap* FtD com dois nomes recebe se o primeiro default ocorrer antes do vencimento do contrato, para $t \leq T$.

De forma análoga à prova da Proposição 2.3, o valor $\pi^{vr}(t)$ pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \pi^{vr}(t) &= E\Big[\sum_{i=1}^{2}(1-\delta_i)\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}\leq T;\,\tau_{(1)}=\tau_i\}}\,e^{-r\tau_{(1)}}\,\Big|\,\mathcal{G}_t\Big] \\ &= E\Big[\sum_{i=1}^{2}(1-\delta_i)\int_0^T e^{-ru}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{2}\mathbf{1}_{\{\tau_j\geq u\}}\,dN_i(u)\big|\,\mathcal{G}_t\Big] \\ &= \sum_{i=1}^{2}(1-\delta_i)\Big\{\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}\leq t\}}\,e^{-r\tau_{(1)}} + E\Big[\int_t^T e^{-ru}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{2}\mathbf{1}_{\{\tau_j\geq u\}}\,dN_i(u)\big|\,\mathcal{G}_t\Big]\Big\}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Como temos apenas dois nomes, neste caso o integrando na esperança condicional acima se reduz à $X_t = e^{-rt}\,\mathbf{1}_{\{\tau_j\geq t\}}$, para i fixo. X_t é um processo contínuo à esquerda, logo é $\mathcal{G}_t$-predizível e satisfaz à:

$$\begin{aligned} E\Big[\int_0^t \big|\,e^{-ru}\,\mathbf{1}_{\{\tau_j\geq u\}}\,\mathbf{h}_i(u)\big|\,du\Big] &\leq E\Big[\int_0^t \mathbf{1}_{\{\tau_j\geq u\}}\,\mathbf{h}_i(u)\,du\Big] \\ &= E\Big[\int_0^{t\wedge\tau_{(1)}} h_i(u)\,du\Big] = E\big[\,N_i(t\wedge\tau_{(1)})\big] \leq 1 < \infty \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade decorre do fato do processo M_t^i ser um martingal sob $\mathcal{G}_t$. Lembrando-se que neste capítulo, assumimos que a taxa de juros $r \geq 0$ é constante.

Logo, podemos aplicar a Propriedade Martingal (Corolário 2.1) para calcular a esperança condicional em (3.9), obtendo:

$$\begin{aligned} E\Big[\int_t^T e^{-ru}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{2}\mathbf{1}_{\{\tau_j\geq u\}}\,dN_i(u)\big|\,\mathcal{G}_t\Big] &= E\Big[\int_t^T e^{-ru}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{2}\mathbf{1}_{\{\tau_j\geq u\}}\,\mathbf{h}_i(u)\,du\big|\,\mathcal{G}_t\Big] \\ &= \int_t^T e^{-ru}\,E\Big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_1>u;\,\tau_2>u\}}\,h_i(u)\big|\,\mathcal{G}_t\Big]\,du \end{aligned} \tag{3.10}$$

onde a segunda igualdade decorre do Teorema 2.4, de Fubini. A esperança condicional do lado direito da expressão (3.10) foi calculada na prova da Proposição 2.3, portanto, para $t \leq T$, o valor descontado que o comprador do *swap* FtD com dois nomes recebe se o primeiro default ocorrer antes do vencimento do contrato é:

$$\pi^{vr}(t) = \sum_{i=1}^{2} (1-\delta_i) \left[\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} \leq t\}} \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} = \tau_i\}} e^{-r\tau_{(1)}} + \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} > t\}} \int_t^T e^{-ru} h_i(u) \frac{G(u,u)}{G(t,t)} du \right]. \quad \square$$

Representação Martingal do Valor do *Swap* FtD

No caso analisado no Capítulo 2, em que o pagamento da taxa de recuperação é feito no vencimento do contrato, o valor $FtD^*(t)$ é um martingal sob $\mathcal{G}_t$ (Proposição 2.4). O mesmo resultado é válido para o caso analisado neste capítulo, onde o pagamento desta taxa é feito no instante do primeiro default.

Portanto, pelo Teorema 2.5, de Representação de Martingais, o valor descontado do *swap* FtD, no instante $t \leq T$, pode ser escrito como:

$$FtD^*(t) = FtD^*(0) + \sum_{i=1}^{2} \int_0^t K_i(u)\, dM_u^i \tag{3.11}$$

onde, para $i = 1, 2$,

$$K_i(t) = \Delta FtD^*(t)\big|_{t=\tau_i} = FtD^*(t) - FtD^*(t_-)\big|_{t=\tau_i}.$$

Ou seja, para o instante $t < \tau_{(1)} = \tau_i$, temos:

$$\begin{aligned} K_i(t) = &\sum_{j=1}^{m} -s\, e^{-rt_j}\, \mathbf{1}_{\{t < t_j\}} \frac{G(t_j,t_j)}{G(t,t)} + (1-\delta_i) \left[e^{-r\tau_{(1)}} - \int_t^T e^{-ru} h_i(u) \frac{G(u,u)}{G(t,t)} du \right] \\ &- (1-\delta_k) \int_t^T e^{-ru} h_k(u) \frac{G(u,u)}{G(t,t)} du \end{aligned} \tag{3.12}$$

para $i, k = 1, 2$ e $k \neq i$.

3.2.2 Rolagem Contínua de CDS

Considere que o intervalo de tempo $\left[0, t \wedge \tau_i\right]$ é particionado em $\bar{n}$ partes, tal que

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{\bar{n}} = t \wedge \tau_i,$$

onde τ_i é instante de default do nome i e $t \leq T$.

A rolagem de CDS^i é feita nos instantes t_k, $k = 1, ..., \bar{n}$, da partição da seguinte forma: no instante inicial t_0, o investidor compra um CDS^i com *spread* justo $s_i(t_0)$. No instante seguinte, t_1, ele sai deste CDS^i de *spread* $s_i(t_0)$ e no mesmo instante ele compra outro CDS^i com *spread* justo $s_i(t_1)$. Procedendo desta forma nos instantes seguintes até o instante de default do nome ou a data de vencimento do contrato T, se o default do nome i não ocorrer.

Para o investidor sair do contrato, no instante $t < \tau_i < T$, ele deve pagar ao vendedor do CDS os *spreads* restantes, multiplicados pelas probabilidades condicionais de sobrevivência do nome nos respectivos períodos. O vendedor, por sua vez, paga $(1 - \delta_i)$ multiplicado pela probabilidade condicional do default do nome i ocorrer entre os instante t e T, ambos descontados à taxa de juros.

Ou seja, ao sair do contrato no instante $t_k < \min\{\tau_i, T\}$, o fluxo de caixa do comprador do *swap* de crédito é exatamente o valor $CDS^{*i}(t_k, s_i(t_{k-1}))$, $k = 1, ..., \bar{n}$.

Se o default do nome i ocorrer antes do vencimento do contrato, $\tau_i < T$, neste instante o contrato é liquidado e o investidor interrompe a sua estratégia de rolagem de CDS^i.

Este instrumento de rolagem de CDS é apropriado para o hedge de um *swap* de cesta de crédito, em particular para o *swap* FtD, pois considera que o *spread* varia com o tempo, permitindo assim fazer o hedge do *spread*, o que não é possível quando utilizamos os CDSs como instrumentos de hedge.

Além disso, como podemos ver adiante, a rolagem contínua permite que o investidor cumpra com as obrigações dos contratos quando ela é interrompida no primeiro instante de default. Ou seja, ele terá caixa suficiente para liquidar o *swap* FtD e sair dos *swaps* de crédito dos nomes que sobreviveram sob as condições do mercado, o que não ocorre com a estratégia de hedge do Capítulo 2.

Logo, a rolagem contínua cumpre com os objetivos do hedge de um *swap k-to-default*, citados por Schmidt [22], e em particular para o *swap* FtD.

A seguir obtemos o valor da rolagem de *swap* de crédito no nome i, $V^i(t)$.

No instante $t < \tau_i$, onde $t \in [t_{\bar{n}-1}, t_{\bar{n}}]$, temos:

$$\begin{aligned} V^i(t) \;=\; & -\, e^{r(t-t_0)}\, CDS^i\big(t_0, s_i(t_0)\big) \;+\; e^{r(t-t_1)}\, CDS^i\big(t_1, s_i(t_0)\big) - e^{r(t-t_1)}\, CDS^i\big(t_1, s_i(t_1)\big) \\ & + ... - e^{r(t-t_{\bar{n}-1})}\, CDS^i\big(t_{\bar{n}-1}, s_i(t_{\bar{n}-1})\big) \;+\; CDS^i\big(t, s_i(t_{\bar{n}-1})\big)\;. \end{aligned}$$

Podemos reescrever esta expressão como:

$$\begin{aligned} V^i(t) \;&=\; \int_{t_0}^{t_1} d\big[\, e^{r(t-u)}\, CDS^i\big(u, s_i(t_0)\big)\big] \;+\; ... \;+\; \int_{t_{\bar{n}-1}}^{t} d\big[\, e^{r(t-u)}\, CDS^i\big(u, s_i(t_{\bar{n}-1})\big)\big] \\ &=\; \int_0^{t\wedge\tau_i} \sum_{j=1}^{\bar{n}} \mathbf{1}_{(\,t_{j-1},\,t_j\,]}(u)\, d\big[\, e^{r(t-u)}\, CDS^i\big(u, s_i(t_{j-1})\big)\big]\;. \end{aligned}$$

Tomando o limite $\Delta t_j = t_j - t_{j-1} \to 0$, obtemos o valor da rolagem contínua de CDS^i:

$$V^i(t) = \int_0^t \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq u\}}\, d\big[\, e^{r(t-u)}\, CDS^i\big(u, s_i(u_-)\big)\big]$$

logo, o seu valor descontado à taxa de juros é:

$$V^{*i}(t) \;=\; e^{-rt}\, V^i(t) = \int_0^t \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq u\}}\, dCDS^{*i}\big(u, s_i(u_-)\big)$$

onde $CDS^{*i}\big(t, s_i(t_-)\big) = e^{-rt} CDS^i\big(t, s_i(t_-)\big)$.

Substituindo a expressão do valor descontado do *swap* de crédito CDS^{*i}, obtemos:

$$\begin{aligned} V^{*i}(t) &= \int_0^t \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq u\}}\, dE_u\Big[\sum_{j=1}^m -s_i(u_-)\, \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}}\, e^{-rt_j} + (1-\delta_i)\, \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq T\}}\, e^{-r\tau_i}\Big] \\ &= -\int_0^t \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq u\}}\, d\Big(s_i(u_-)\, E_u\Big[\sum_{j=1}^m \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}} e^{-rt_j}\Big]\Big) + \int_0^t \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq u\}}\, dE_u\Big[\,(1-\delta_i)\mathbf{1}_{\{\tau_i \leq T\}} e^{-r\tau_i}\Big]\,. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Para obtermos o primeiro termo da expressão acima é necessário a definição de *semimartingal* e de alguns resultados relacionados a este processo.

Definição: Um *semimartingal* é um processo X_t da forma $X_t = X_0 + M_t + A_t$, onde X_0 tem valor finito e é $\mathcal{F}_0$-mensurável, M_t é um martingal local e A_t, um processo de variação finita.

Em particular, um martingal e um martingal local são semimartingais onde o processo A_t é nulo.

Proposição 3.3. [2] *Sejam X_t um semimartingal e Y_t um processo adaptado e de variação finita. Então,*

$$X_t\, Y_t = \int_0^t Y_{u_-}\, dX_u + \int_0^t X_u\, dY_u\,. \tag{A}$$

Se Y_t é um processo predizível, então,

$$X_t\, Y_t = \int_0^t Y_u\, dX_u + \int_0^t X_{u_-}\, dY_u\,. \tag{B}$$

Retornando ao valor da rolagem contínua de CDS, denotamos $s_i^p(t)$ o processo $\mathcal{G}_t$-predizível do *spread* justo $s_i(t)$ e no instante inicial definimos $s_i^p(t) = s_i(t_-)|_{t=0} = 0$.

Na Proposição 2.4, mostramos que o processo $\pi_{ij}^{vp}(t) = E\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}} | \mathcal{G}_t\big]$ é um martingal sob $\mathcal{G}_t$, para $i = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., m$. A soma de processos martingais é um martingal, logo para a taxa de

[2] Ver Jacod [12].

juros r constante, o processo $E\big[\sum_{j=1}^{m} \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}} e^{-rt_j} \,|\, \mathcal{G}_t\big]$ é um martingal sob $\mathcal{G}_t$ e conseqüentemente, um semimartingal.

Definição: Denotamos $CDS_c^{*i}\big(t, s_i^p(t)\big)$ o valor do CDS^{*i} com *spread* $s_i^p(t)$, tal que:

$$dCDS_c^{*i}\big(t, s_i^p(t)\big) \;=\; -s_i^p(t)\, dE_t\Big[\sum_{j=1}^{m} \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}} e^{-rt_j}\Big] + dE_t\Big[(1-\delta_i)\mathbf{1}_{\{\tau_i \leq T\}} e^{-r\tau_i}\Big]$$

e no instante inicial $t = 0$ definimos $CDS_c^{*i}\big(0, s_i^p(0)\big) = 0$.

Aplicando a Proposição 3.3 (B), no primeiro termo da expressão (3.13) da rolagem contínua de *swap* de crédito, obtemos:

$$\begin{aligned} V^{*i}(t) \;&=\; -\int_0^t \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq u\}}\, s_i^p(u)\, dE_u\Big[\sum_{j=1}^{m} \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}} e^{-rt_j}\Big] - \int_0^t \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq u\}}\, E_{u_-}\Big[\sum_{j=1}^{m} \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}} e^{-rt_j}\Big] ds_i^p(u) \\ &\quad + \int_0^t \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq u\}}\, dE_u\Big[(1-\delta_i)\mathbf{1}_{\{\tau_i \leq T\}} e^{-r\tau_i}\Big] \\ &=\; \int_0^t \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq u\}}\, dCDS_c^{*i}\big(u, s_i^p(u)\big) - \int_0^t \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq u\}}\, E_{u_-}\Big[\sum_{j=1}^{m} \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}} e^{-rt_j}\Big] ds_i^p(u)\,. \end{aligned} \tag{3.14}$$

O primeiro termo do valor descontado da rolagem contínua representa o valor do CDS com *spread* $s_i^p(t)$ $\mathcal{G}_t$-predizível e o segundo termo é decorrente da variação do *spread* deste derivativo.

Observe que se o *spread* fosse constante, o segundo termo do valor $V^{*i}(t)$ seria zero e conseqüentemente, o valor da rolagem de CDS seria o próprio valor do *swap* de crédito e estaríamos no caso analisado no Capítulo 2.

Portanto, o primeiro termo do lado direito da expressão (3.14) representa o risco de default dos nomes e o segundo, o risco do *spread*.

A seguir, obteremos as dinâmicas dos processos $CDS_c^{*i}\big(t, s_i^p(t)\big)$ e $s_i^p(t)$.

Proposição 3.4. *A dinâmica do processo $CDS_c^{*i}\big(t, s_i^p(t)\big)$, no instante $t \leq T$, é dada por:*

$$dCDS_c^{*i}\big(t, s_i^p(t)\big) \;=\; \sum_{k=1}^{2} H_k^i\big(t, s_i^p(t)\big)\, dM_t^k$$

onde $H_k^i\big(t, s_i^p(t)\big) = \Delta CDS^{*i}\big(t, s_i^p(t)\big)|_{t=\tau_k}$ é um processo $\mathcal{G}_t$-predizível, para $i, k = 1, 2$.

Prova: Por definição, o valor $CDS_c^{*i}\big(t, s_i^p(t)\big)$ satisfaz à:

$$dCDS_c^{*i}\big(t, s_i^p(t)\big) \;=\; -s_i^p(t)\, d\pi_i^{v\bar{p}}(t) \;+\; d\pi_i^{vr}(t)$$

onde

$$\pi_i^{v\bar{p}}(t) \;=\; \sum_{j=1}^{m} E\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}}\, e^{-rt_j} \,|\, \mathcal{G}_t\big]$$

e $\pi_i^{vr}(t)$, como foi definido anteriormente, para $i = 1, 2$.

Através da prova da Proposição 2.4 e considerando-se que a taxa de juros é constante, o processo $\pi_i^{v\bar{p}}(t)$ é um martingal sob $\mathcal{G}_t$ e pelo Teorema 2.5, de Representação de Martingais, este processo pode ser escrito como:

$$\pi_i^{v\bar{p}}(t) \;=\; \pi_i^{v\bar{p}}(0) \;+\; \sum_{k=1}^{2} \int_0^t \bar{H}_k^i(u)\, dM_u^k \tag{3.15}$$

onde $\bar{H}_k^i(t) = \Delta\pi_i^{v\bar{p}}(t)|_{t=\tau_k}$ é um processo $\mathcal{G}_t$-predizível, para $k = 1, 2$.

De forma análoga à prova da Proposição 2.4, no caso em que o pagamento da taxa de recuperação é feito no instante de default do nome i, o valor $\pi_i^{vr}(t)$ é um martingal sob $\mathcal{G}_t$.

Pelo Teorema 2.5, de Representação de Martingais, o processo $\pi_i^{vr}(t)$ tem a seguinte representação:

$$\pi_i^{vr}(t) \;=\; \pi_i^{vr}(0) \;+\; \sum_{k=1}^{2} \int_0^t \hat{H}_k^i(u)\, dM_u^k \tag{3.16}$$

onde $\hat{H}_k^i(t) = \Delta\pi_i^{vr}(t)|_{t=\tau_k}$ é um processo $\mathcal{G}_t$-predizível, para $k = 1, 2$.

Portanto, através das expressões (3.15) e (3.16), podemos escrever a dinâmica do valor $CDS_c^{*i}\big(t, s_i^p(t)\big)$ como:

$$\begin{aligned} dCDS_c^{*i}\big(t, s_i^p(t)\big) \;&=\; \sum_{k=1}^{2} \big(-s_i^p(t)\,\Delta\pi_i^{v\bar{p}}(t) \;+\; \Delta\pi_i^{vr}(t)\big)\big|_{t=\tau_k}\, dM_t^k \\ &=\; \sum_{k=1}^{2} \Delta CDS^{*i}\big(t, s_i^p(t)\big)\big|_{t=\tau_k}\, dM_t^k\,. \qquad \square \end{aligned}$$

A seguir, obtemos a dinâmica do processo predizível do *spread* justo $s_i^p(t)$, $i = 1, 2$.

Por definição, o *spread* justo no instante t, $s_i(t)$, de um *swap* de crédito no nome i é obtido tal que o valor que o comprador do CDS paga pela proteção é igual ao valor que o vendedor deste derivativo paga ao comprador caso o default do nome i ocorra antes do vencimento do contrato. Ou seja, no instante $t \leq T$, o *spread* justo satisfaz à igualdade $CDS^{*i}(t) = 0$. Dessa forma, para $t < \tau_i$,

$$s_i(t) \;=\; \frac{E\big[\,(1-\delta_i)\,\mathbf{1}_{\{\tau_i \leq T\}}\, e^{-r\tau_i} \;|\; \mathcal{G}_t\,\big]}{E\big[\,\sum_{j=1}^{m} \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}}\, e^{-rt_j} \;|\; \mathcal{G}_t\,\big]} \tag{3.17}$$

onde m é o número de pagamentos que são feitos entre o instante t (inclusive) e a data de vencimento T do contrato, logo $t \leq t_j$, para $j = 1, ..., m$ e $\pi_i^{v\bar{p}}(t) \neq 0$. Após o default, $t \geq \tau_i$, $s_i(t) = 0$.

Proposição 3.5. *A dinâmica do processo $\mathcal{G}_t$-predizível do spread justo do swap de crédito $CDS^{*i}(t)$, para $i = 1, 2$ e $t \leq \tau_i$, é dada por:*

$$ds_i^p(t) = -\sum_{k=1}^{2} H_k^i\big(t, s_i^p(t)\big)\, \mathbf{1}_{\{\tau_k \geq t\}}\, \mathbf{h}_k(t)\, dt.\ \pi_i^{v\bar{p}}(t_-)^{-1} \tag{3.18}$$

onde $H_k^i\big(t, s_i^p(t)\big) = \Delta CDS^{*i}\big(t, s_i^p(t)\big)\big|_{t=\tau_k}$ *e* $\pi_i^{v\bar{p}}(t_-) \neq 0$, *para* $k = 1, 2$ *e* $t \leq T$.

Prova: Considere $t < \tau_i$. Por definição, o *spread* justo satisfaz à:

$$\begin{aligned} -s_i(t)\, \pi_i^{v\bar{p}}(t) \ + \ \pi_i^{vr}(t) \ &= \ 0 \\ d\big(-s_i(t)\, \pi_i^{v\bar{p}}(t)\big) \ + \ d\pi_i^{vr}(t) \ &= \ 0\,. \end{aligned}$$

O *spread* justo $s_i(t)$ é um processo adaptado e de variação finita e como foi visto, o processo $\pi_i^{v\bar{p}}(t)$ é um martingal, logo é semimartingal. Aplicando a Proposição 3.3 (A) no primeiro termo da expressão acima, obtemos:

$$\begin{aligned} -s_i(t_-)\, d\pi_i^{v\bar{p}}(t) - \pi_i^{v\bar{p}}(t)\, ds_i(t) + d\pi_i^{vr}(t) \ &= \ 0 \\ dCDS_c^{*i}\big(t, s_i(t_-)\big) - \pi_i^{v\bar{p}}(t)\, ds_i(t) \ &= \ 0 \end{aligned}$$

logo, a expressão acima pode ser reescrita como:

$$CDS_c^{*i}\big(t, s_i(t_-)\big) \ = \sum_{k=1}^{2} \int_0^t H_k^i\big(u, s_i^p(u)\big)\, dM_u^k \ = \int_0^t \pi_i^{v\bar{p}}(u)\, ds_i(u) \tag{3.19}$$

onde a primeira igualdade decorre da Proposição 3.4.

Escrevendo a expressão acima em função dos processos indicadores de default, temos:

$$\begin{aligned} Z_t \ &= \int_0^t \pi_i^{v\bar{p}}(u)\, ds_i(u) \\ &= \sum_{k=1}^{2} \left[\int_0^t H_k^i\big(u, s_i^p(u)\big)\, dN_k(u) - \int_0^t H_k^i\big(u, s_i^p(u)\big)\, \mathbf{1}_{\{\tau_k \geq u\}}\, \mathbf{h}_k(u)\, du \right] \\ &= \sum_{k=1}^{2} \left[\Delta CDS^{*i}\big(v, s_i^p(v)\big)\big|_{v=\tau_k}\, \mathbf{1}_{\{\tau_k \leq t\}} - \int_0^t H_k^i\big(u, s_i^p(u)\big)\, \mathbf{1}_{\{\tau_k \geq u\}}\, \mathbf{h}_k(u)\, du \right]. \end{aligned}$$

O processo Z_t é adaptado e *càdlàg*, logo $\Delta Z_t = Z_t - Z_{t_-}$. Portanto,

$$Z_{t_-} \ = \sum_{k=1}^{2} \left[\Delta CDS^{*i}\big(v, s_i^p(v)\big)\big|_{v=\tau_k}\, \mathbf{1}_{\{\tau_k < t\}} - \int_0^t H_k^i\big(u, s_i^p(u)\big)\, \mathbf{1}_{\{\tau_k \geq u\}}\, \mathbf{h}_k(u)\, du \right]$$

ou, na forma diferencial:

$$\pi_i^{v\bar{p}}(t_-)\, ds_i(t_-) \;=\; -\sum_{k=1}^{2} H_k^i\big(t, s_i^p(t)\big)\, \mathbf{1}_{\{\tau_k \geq t\}}\, \mathbf{h}_k(t)\, dt$$

onde $\pi_i^{v\bar{p}}(t_-) \neq 0$, $t \leq \tau_i$ e $i = 1, 2$. $\square$

Portanto, através das Proposições 3.4 e 3.5 podemos reescrever a expressão (3.14) do valor descontado da rolagem contínua de CDS no nome i, $i = 1, 2$, como:

$$\begin{aligned} V^{*i}(t) &= \int_0^t \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq u\}} \sum_{k=1}^{2} H_k^i\big(u, s_i^p(u)\big)\, dM_u^k + \int_0^t \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq u\}} \sum_{k=1}^{2} H_k^i\big(u, s_i^p(u)\big)\, \mathbf{1}_{\{\tau_k \geq u\}}\, \mathbf{h}_k(u)\, du \\ &= \int_0^t \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq u\}} \sum_{k=1}^{2} H_k^i\big(u, s_i^p(u)\big)\, dN_k(u) \qquad (3.20) \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t\}} \sum_{k=1}^{2} CDS^{*i}\big(u, s_i(u_-)\big)\big|_{u=\tau_k}\, \mathbf{1}_{\{\tau_k \leq t\}}\,. \qquad (3.21) \end{aligned}$$

Ou seja, se o primeiro default for devido ao nome k, $k \neq i$, neste instante, o valor descontado da rolagem contínua de *swap* de crédito no nome i é exatamente o caixa necessário para o comprador sair do contrato neste instante. Portanto, na estratégia de hedge, este instrumento gera recurso suficiente para o vendedor do *swap* FtD sair do CDS correspondente ao nome que sobreviveu após o primeiro default, tal que $\tau_{(1)} = \tau_k < T$, o que não ocorre quando o instrumento de hedge é o *swap* de crédito.

Esta expressão também pode ser vista como o salto no *spread* s_i no instante de default do nome k. No instante $t < \min\{\tau_i, T\}$, temos que $CDS^{*i}(t, s_i(t)) = 0$, isto é,

$$\pi_i^{vr}(t) = s_i(t)\, \pi_i^{v\bar{p}}(t)\,.$$

Utilizando esta relação, o valor descontado da rolagem contínua de *swap* de crédito (3.21) pode ser escrito como:

$$V^{*i}(t) = \; \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t\}}\, \Delta s_i(u)\, \pi_i^{v\bar{p}}(u)\big|_{u=\tau_k}\, \mathbf{1}_{\{\tau_k \leq t\}}$$

onde $\Delta s_i(t) = s_i(t) - s_i(t_-)$, $i, k = 1, 2$ e $k \neq i$.

Portanto, no instante $t \leq \{\tau_i, T\}$, o valor descontado da rolagem contínua de CDS no nome i é o salto ocorrido no *spread* até (inclusive) o instante t, multiplicado pelo valor esperado dos pagamentos futuros, descontados à taxa de juros, $\pi_i^{v\bar{p}}(\tau_k)$, para $\tau_k \leq t$ e $k \neq i$.

Pela expressão (3.20), temos que a rolagem contínua de CDS^{*i} elimina a variação determinística do valor do *swap* de crédito, restando apenas a incerteza devido ao default dos nomes.

Isto ocorre devido à rolagem dos *swaps* de crédito ser contínua, de forma que a variação do valor do CDS na entrada (compra) e saída é zero, justamente por ser feita em um intervalo de tempo infinitesimal, para $t \neq \tau_j$, $j = 1, 2$ e $j \neq i$.

Além disso, a rolagem é sempre feita com a compra de CDS com *spread* justo, onde este *spread* incorpora toda a variação determinística ocorrida entre um instante e o outro em que ocorre a entrada e saída do CDS.

3.2.3 Hedge Dinâmico II

Nesta seção obtemos uma estratégia de hedge do *swap* FtD com dois nomes, utilizando-se como instrumentos de hedge a rolagem contínua de CDS de cada nome.

Para isto, o vendedor do *swap first-to-default* compõe a seguinte carteira: vendido em um *swap* FtD, comprado nas rolagens contínuas de CDS de cada um dos dois nomes e com uma quantia investida em ativo livre de risco, neste caso, a taxa de juros. O valor descontado à taxa de juros desta carteira, no instante $t < \min\{\tau_{(1)}, T\}$, é:

$$\Pi^*(t) = \sum_{i=1}^{2} \gamma_i(t)\, V^{*i}(t) + \gamma_0(t)\, cash - FtD^*(t)$$

onde $V^{*i}(t)$ é o valor da rolagem contínua de CDS^{*i} no instante t.

Assumimos a liquidez dos derivativos de crédito e que a estratégia $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\gamma_0(t), \gamma_1(t), \gamma_2(t))$ é auto-financiada no sentido que a variação no valor da carteira se deve apenas a variação do valor dos derivativos, conforme foi definido no Capítulo 2.

A proposição a seguir fornece a estratégia de hedge de um *swap* FtD.

Proposição 3.6. *No instante $t < \min\{\tau_{(1)}, T\}$, a estratégia de hedge dinâmico de um swap FtD com dois nomes $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\gamma_0(t), \gamma_1(t), \gamma_2(t))$ é obtida de forma que $\boldsymbol{\gamma}'(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ é solução do sistema linear:*

$$\mathbf{H}(t)\boldsymbol{\gamma}'(t) = \mathbf{K}(t) \tag{3.22}$$

onde $K_j(t)$ é dado por (3.12) e $H_{j,i}(t) = CDS^{*i}(t, s_i(t_-))\big|_{t=\tau_j}$ para $i, j = 1, 2$.

A quantia de cash é determinada por $\gamma_0(t) = FtD^*(t)$.

Prova: A estratégia de hedge $\boldsymbol{\gamma}(t)$ é auto-financiada, logo satisfaz à:

$$d\Pi^*(t) = \sum_{i=1}^{2} \gamma_i(t)\, dV^{*i}(t) - dFtD^*(t)\,.$$

Substituindo as expressões (3.11) e (3.20) dos valores $FtD^*(t)$ e $V^{*i}(t)$, respectivamente, na forma diferencial, obtemos:

$$d\Pi^*(t) = \sum_{j=1}^{2}\Big[\sum_{i=1}^{2}\gamma_i(t)\,\mathbf{1}_{\{\tau_i\geq t\}}\,H_j^i\big(t,s_i^p(t)\big) - K_j(t)\Big]dN_j(t) + \sum_{j=1}^{2}K_j(t)\,\mathbf{1}_{\{\tau_j\geq t\}}\,\mathbf{h}_j(t)\,dt\,.$$

Através da expressão acima, temos que a variação no valor da carteira é composta por: um termo determinístico e um termo de incerteza devido ao default dos dois nomes. O objetivo do hedge é eliminar as incertezas na variação do valor desta carteira, para isto devemos ter que:

$$\sum_{i=1}^{2}\gamma_i(t)\,\mathbf{1}_{\{\tau_i\geq t\}}\,H_j^i\big(t,s_i^p(t)\big) = K_j(t)$$

para $j = 1, 2$. Ou seja, $\boldsymbol{\gamma}'(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ é solução de um sistema linear da forma $\mathbf{H}(t)\boldsymbol{\gamma}'(t) = \mathbf{K}(t)$, onde $H_{j,i}(t) = H_j^i(t, s_i^p(t)) = CDS^{*i}(t, s_i(t_-))|_{t=\tau_j}$ e $K_j(t) = \Delta FtD^*(t)|_{t=\tau_j}$, dado por (3.12), para $i, j = 1, 2$.

Assim como no caso analisado no Capítulo 2, a quantia $\gamma_0(t)$ de *cash* é obtida tal que, $\Pi^*(t) = 0$, ou seja, a estratégia $\boldsymbol{\gamma}(t)$ replica o *payoff* do *swap* FtD no instante $t < \min\{\tau_{(1)}, T\}$, logo:

$$\gamma_0(t) = FtD^*(t) - \sum_{i=1}^{2}\gamma_i(t)\,V^{i*}(t)\,.$$

Entretanto, como o valor descontado da rolagem contínua $V^{i*}(t) = 0$ para $t < \tau_{(1)}$, então a quantia de *cash* é determinada pelo valor descontado do *swap* FtD no instante t. $\square$

Assim como no hedge com CDSs proposto no Capítulo 2, no caso em que os instrumentos de hedge do *swap* FtD são as rolagens contínuas de *swaps* de crédito, a estratégia de hedge dinâmico também é determinada por um sistema linear.

O sistema (3.22) tem solução única se $\det(\mathbf{H}(t)) \neq 0$, para $t < \min\{\tau_{(1)}, T\}$. Ou seja, a estratégia de hedge é única se o mercado for completo.

3.3 Contexto com n nomes

Nesta seção generalizamos os resultados obtidos na Seção 3.2, obtendo a estratégia de hedge dinâmico de um *swap* FtD com n nomes.

3.3.1 Valores dos Derivativos de Crédito

Iniciamos obtendo os valores do *swap* de crédito e do *swap first-to-default*, estendendo os resultados das Proposições 3.1 e 3.2 para n nomes, $n \geq 2$.

Valor do *Swap* de Crédito

Considere o *swap* de crédito com as características descritas na Seção 3.1. Utilizando a mesma notação do Capítulo 2, sob a medida neutra ao risco, temos o seguinte resultado:

Proposição 3.7. *No instante $t \leq T$, o valor descontado do CDS no nome i, $i = 1, ..., n$, do ponto de vista do comprador do swap de crédito, é $CDS^{*i}(t) = E\big[f^*(\tau_i)|\,\mathcal{G}_t\big]$, onde $f^*(\tau_i)$ é dado por (3.2). Logo,*

$$
\begin{aligned}
CDS^{*i}(t) = \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}} &\left[\sum_{j=1}^{m} -s_i\, \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}}\, e^{-rt_j} + (1-\delta_i)\, e^{-r\tau_i}\right] \\
&+ \mathbf{1}_{\{\tau_i > t\}} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\substack{A_i \subset \Delta_{k,I'} \\ A_i = \{I_D, I_S\}}} \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} \leq t;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}} \left\{ \sum_{j=1}^{m} -s_i\, e^{-rt_j} \left[\mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}} \frac{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D}; \mathbf{t}_{-i}, t_j)}{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D})} \right] \right. \\
&\left. + (1-\delta_i) \int_t^T e^{-ru} \sum_{p=0}^{|I_S|} \sum_{I_S^p \subset I_S} (-1)^p\, h_i^{-I_D, -I_S^p}(u) \sum_{k=0}^{p} \sum_{I_S^k \subset I_S^p} (-1)^k \frac{\partial_{I_D} G(\mathbf{u}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D}; \mathbf{u}_{-I_S^k}, t)}{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D})}\, du \right\}.
\end{aligned}
$$

Observação: Conforme a notação utilizada no Capítulo 2, o somatório $\sum_{I_S^p \subset I_S}$ se estende sobre todos os subconjuntos $I_S^p \subset I_S$ tal que $|I_S^p| = p$.

Assim como no contexto com dois nomes, Seção 3.2, o valor descontado pago pela proteção contra o default do nome i é dado pela Proposição 2.6, Capítulo 2. Logo, basta provar o valor que ele recebe se $\tau_i \leq T$ que é dado pelo corolário a seguir.

Corolário 3.1. *No instante $t \leq T$, o valor descontado que o comprador do CDS no nome i recebe se o default do nome i ocorrer antes do vencimento do contrato é $\pi_i^{vr}(t) = E\big[f_r^*(\tau_i)|\,\mathcal{G}_t\big]$, onde $f_r^*(\tau_i)$ é dado por (3.1). Logo,*

$$
\begin{aligned}
\pi_i^{vr}(\tau_i) = \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}}\, (1-\delta_i)\, e^{-r\tau_i} \;+\; \mathbf{1}_{\{\tau_i > t\}} &\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\substack{A_i \subset \Delta_{k,I'} \\ A_i = \{I_D, I_S\}}} \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} \leq t;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}} \cdot \\
.(1-\delta_i) \int_t^T e^{-ru} &\sum_{p=0}^{|I_S|} \sum_{I_S^p \subset I_S} (-1)^p\, h_i^{-I_D, -I_S^p}(u) \sum_{k=0}^{p} \sum_{I_S^k \subset I_S^p} (-1)^k \frac{\partial_{I_D} G(\mathbf{u}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D}; \mathbf{u}_{-I_S^k}, t)}{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D})}\, du
\end{aligned}
$$

onde $h_i^{-I_D, -I_S^p}(u)$ é a intensidade de default do nome i, dado que os nomes em I_D tiveram o default até o instante t e o default dos nomes em I_S^p ocorre entre os instantes t e u, $u > t$, para $i = 1, ..., n$.

Prova: Para $t \leq T$, a expressão (3.4), obtida no contexto com dois nomes, é válida para $i = 1, ..., n$:

$$\pi_i^{vr}(t) \;=\; (1-\delta_i)\Big\{\, \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}}\, e^{-r\tau_i} + E\Big[\int_t^T e^{-ru}\, dN_i(u)\big|\, \mathcal{G}_t\Big]\Big\}. \tag{3.23}$$

Analogamente, o processo no integrando $X_t = e^{-rt}$ satisfaz à condição da Propriedade Martingal, isto é,

$$\begin{aligned} E\Big[\int_0^t |e^{-ru}|\, \mathbf{h}_i(u)\, du\Big] \leq E\Big[\int_0^t \mathbf{h}_i(u)\, du\Big] &= \sum_{j=1}^n E\Big[\int_{\tau_{(j-1)}}^{t\wedge\tau_{(j)}} h_i^{-I_D}(u)\, du\Big] \\ &= \sum_{j=1}^n E\big[\, N_i(t\wedge\tau_{(j)})\big] \leq 1 < \infty \end{aligned}$$

onde $|I_D| = j-1$, $\tau_{(0)} = 0$ e $j = 1, ..., n$. A segunda igualdade decorre do processo M_t^i ser um martingal sob $\mathcal{G}_t$ e a segunda desigualdade, do fato que $N_i(t)$ é um processo com apenas um salto.

Além disso, o processo $X_t = e^{-rt}$ é $\mathcal{G}_t$-predizível, onde a taxa de juros $r \geq 0$ é determinística e constante. Aplicando a Propriedade Martingal:

$$E\Big[\int_t^T e^{-ru}\, dN_i(u)\big|\, \mathcal{G}_t\Big] \;=\; E\Big[\int_t^T e^{-ru}\, \mathbf{h}_i(u)\, du\big|\, \mathcal{G}_t\Big] \;=\; \int_t^T e^{-ru}\, E\big[\, \mathbf{h}_i(u)|\, \mathcal{G}_t\big]\, du$$

onde a última igualdade decorre do Teorema 2.4, de Fubini.

Como $u > t$, para a esperança condicional no integrando da expressão do lado direito, temos:

$$E\big[\, \mathbf{h}_i(u)|\, \mathcal{G}_t\big] \;=\; \mathbf{1}_{\{\tau_i > t\}} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\substack{A_i \subset \Delta_{k,I'} \\ A_i = \{I_D, I_S\}}} \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} \leq t;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}}\, E\big[\, \mathbf{h}_i(u)|\, \mathcal{G}_t'\big]$$

onde $\mathcal{G}_t' = \{\boldsymbol{\tau}_{I_D} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}; \tau_i > t; \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}$ e $|I_D| = 0, 1, ..., n-1$. Portanto, para $\tau_i > t$, I_D e I_S fixos, o valor $\pi_i^{vr}(t)$ é dado por:

$$\pi_i^{vr}(t) \;=\; \mathbf{1}_{\{\tau_i > t\}}\, \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} \leq t;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}}\, (1-\delta_i) \int_t^T e^{-ru}\, E\big[\, \mathbf{h}_i(u)|\, \mathcal{G}_t'\big]\, du\,. \tag{3.24}$$

Logo, a prova de $\pi_i^{vr}(t)$ consiste em calcular a esperança condicional em (3.24). O procedimento é o mesmo utilizado na prova da Proposição 2.6.

A prova é feita por indução. Para $n = 2$, $i = 1$ e $\tau_1 > t$, na expressão da proposição temos:

- Para $|I_D| = 0$,

$$A_1 = \{\emptyset, \{2\}\} = \begin{cases} I_S^p = I_S^k = \emptyset; & \text{para } p = 0 \\ I_S^p = \{2\}, I_S^k = \begin{cases} \emptyset, & \text{para } k = 0 \\ \{2\}, & \text{para } k = 1 \end{cases} ; & \text{para } p = 1 \end{cases}$$

- Para $|I_D| = 1$,

$$A_1 = \{\{2\}, \emptyset\} = \left\{ I_S^p = I_S^k = \emptyset; \quad \text{para } p = 0. \right.$$

Dessa forma o valor descontado que o comprador do CDS no nome 1 recebe, se o default deste nome ocorrer antes do vencimento do contrato, para $t < \tau_1$, é dado por:

$$\begin{aligned} \pi_1^{vr}(t) = {} & \mathbf{1}_{\{\tau_2 > t\}} (1 - \delta_1) \int_t^T e^{-ru} \left[h_1(u) \frac{G(u,u)}{G(t,t)} - h_1^{-2}(u) \left(\frac{G(u,u)}{G(t,t)} - \frac{G(u,t)}{G(t,t)} \right) \right] du \\ & + \mathbf{1}_{\{\tau_2 \leq t\}} (1 - \delta_1) \int_t^T e^{-ru} h_1^{-2}(u) \frac{\partial_2 G(u, \tau_2)}{\partial_2 G(t, \tau_2)} du \end{aligned}$$

o que concorda com a expressão calculada na Proposição 3.1. Portanto, a expressão $\pi_i^{vr}(t)$ é válida para $n = 2$.

Supondo que $\pi_i^{vr}(t)$ é válida para n, a seguir provamos a expressão para $(n+1)$ nomes.

Reescrevendo a expressão (2.55) da intensidade de default do nome i para $u < \tau_i$, temos:

$$\mathbf{h}_i(u) = \mathbf{1}_{\{\tau_i > u\}} \sum_{p=0}^{n} \sum_{\substack{B_i \subset \Delta_{p,I'} \\ B_i = \{I_D^u, I_S^u\}}} \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D^u} \leq u;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S^u} > u\}} h_i^{-I_D^u}(u)$$

onde $|I_D^u| = p$ e $h_i^{-I_D^u}(u)$ é $\mathcal{G}_{\tau_{(p)}}$-mensurável, $\tau_{(p)}$ é o p-ésimo default, $i = 1, ..., n$.

Substituindo $\mathbf{h}_i(u)$ em (3.24), para $\tau_i > t$, I_D e I_S fixos, o valor $\pi_i^{vr}(t)$ é determinado por:

$$\pi_i^{vr}(t) = (1 - \delta_i) \int_t^T e^{-ru} \sum_{p=0}^{n} \sum_{\substack{B_i \subset \Delta_{p,I'} \\ B_i = \{I_D^u, I_S^u\}}} E\big[\mathbf{1}_{\{\tau_i > u\}} \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D^u} \leq u;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S^u} > u\}} h_i^{-I_D^u}(u) | \, \mathcal{G}_t' \,\big] du \tag{3.26}$$

onde $\mathcal{G}_t' = \{\boldsymbol{\tau}_{I_D} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D};\, \tau_i > t;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}$, $|I_D| = 0, 1, ..., n$.

A seguir analisamos a esperança condicional acima para $t < \tau_i$, nos seguintes casos:

(i) $\mathcal{G}_t' = \{\boldsymbol{\tau} > t\}$, onde $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$

(ii) $\mathcal{G}_t' = \{\boldsymbol{\tau}_{I_D} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}\,;\, \tau_i > t\,;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}$, com $|I_D| = 1, ..., n$.

Notação: Sejam $J_p = \{s_1, s_2, ..., s_p\}$ e $J_k = \{r_1, r_2, ..., r_k\}$ tal que, $k \leq p$ e J_k é um subconjunto de J_p com $|J_k| = k$ e $k \geq 0$.

Exemplo: Para $p = 2$, temos o conjunto $J_p = J_2 = \{s_1,\ s_2\}$ e os subconjuntos J_k:

$$\begin{aligned} J_0 &= \emptyset\,, \text{ para } k = 0 \\ J_1 &= \begin{cases} \{s_1\} \\ \{s_2\} \end{cases}, \text{ para } k = 1 \\ J_2 &= \{s_1,\ s_2\}\,, \text{ para } k = 2\,. \end{aligned}$$

Para k fixo, o somatório $\sum_{J_k \subset J_p}$ se estende sobre todos os subconjuntos $J_k \subset J_p$, tal que $|J_k| = k$.

Na prova do valor $\pi_i^{vr}(t)$ que o comprador do CDS recebe em caso de default do nome i utilizamos o seguinte resultado para a integral múltipla:

Proposição 3.8. *Sejam $1 \leq p \leq n$ e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$,*

$$\underbrace{\int_t^u ... \int_t^u}_{(p)} \partial_{J_p} F(\mathbf{u}_{-J_p}, \mathbf{v}_{J_p}) \;=\; \sum_{k=0}^{p} \sum_{J_k \subset J_p} (-1)^k\; F(\mathbf{u}_{-J_k}, t)$$

onde $J_p = \{s_1, s_2, ..., s_p\}$, tal que $t < \tau_{s_i} \leq u$, para todo $s_i \in J_p$, $i = 1, ..., p$.

Prova: Por indução. Para $p = 1$ e $i \in J_p$, tem-se:

$$\int_t^u \partial_i F(\mathbf{u}_{-i}, v_i) \;=\; F(\mathbf{u}) \;-\; F(\mathbf{u}_{-i}, t)$$

o que confere com a expressão que queremos provar. Supondo que a expressão é válida para $p = m$, ou seja,

$$\underbrace{\int_t^u ... \int_t^u}_{(m)} \partial_{J_m} F(\mathbf{u}_{-J_m}, \mathbf{v}_{J_m}) \;=\; \sum_{k=0}^{m} \sum_{J_k \subset J_m} (-1)^k\, F(\mathbf{u}_{-J_k}, t)\,.$$

A seguir provamos para $p = m + 1$. Seja $J_{m+1} = J_m \cup \{i\}$,

$$\underbrace{\int_t^u ... \int_t^u}_{(m+1)} \partial_{J_{m+1}} F(\mathbf{u}_{-J_{m+1}}, \mathbf{v}_{J_{m+1}}) \;=\; \int_t^u \partial_i \underbrace{\int_t^u ... \int_t^u}_{(m)} \partial_{J_m}\, F(\mathbf{u}_{-i}, v_i;\, \mathbf{u}_{-J_m}, \mathbf{v}_{J_m})\,.$$

Pela hipótese de indução, a igualdade acima pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}\int_t^u \cdots \int_t^u \partial_{J_{m+1}} F(\mathbf{u}_{-J_{m+1}}, \mathbf{v}_{J_{m+1}}) &= \int_t^u \sum_{k=0}^{m} \sum_{J_k \subset J_m} (-1)^k \, \partial_i F(\mathbf{u}_{-i}, v_i;\, \mathbf{u}_{-J_k}, t) \\ &= \sum_{k=0}^{m} \sum_{J_k \subset J_m} (-1)^k \left(F(\mathbf{u}_{-J_k}, t) - F(\mathbf{u}_{-i}, t;\, \mathbf{u}_{-J_k}, t) \right)\end{aligned}$$

desenvolvendo o somatório do lado direito desta expressão, temos:

$$\begin{aligned}&\int_t^u \cdots \int_t^u \partial_{J_{m+1}} F(\mathbf{u}_{-J_{m+1}}, \mathbf{v}_{J_{m+1}}) \\ &\quad = (-1)^0 F(\mathbf{u}) + (-1)^1 \left[F(\mathbf{u}_{-i}, t) + \sum_{J_1 \subset J_m} F(\mathbf{u}_{-J_1}, t) \right] + \ldots + (-1)^{m+1} F(\mathbf{u}_{-i}, t; \mathbf{u}_{-J_m}, t) \\ &\quad = (-1)^0 F(\mathbf{u}) + (-1)^1 \sum_{J_1 \subset J_{m+1}} F(\mathbf{u}_{-J_1}, t) + \ldots + (-1)^{m+1} F(\mathbf{u}_{-J_{m+1}}, t) \\ &\quad = \sum_{k=0}^{m+1} \sum_{J_k \subset J_{m+1}} (-1)^k \, F(\mathbf{u}_{-J_k}, t) \, .\end{aligned}$$

Portanto, a expressão é válida para $p = m + 1$. $\square$

Calculando a esperança condicional em (3.26), temos:

Caso (i) Para $\mathcal{G}'_t = \{\boldsymbol{\tau} > t\}$, os $(n+1)$ nomes sobreviveram até o instante t. Neste caso,

$$\begin{aligned}E\left[\mathbf{1}_{\{\tau_i > u\}} \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D^u} \le u;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S^u} > u\}} \, h_i^{-I_D^u}(u) \middle| \mathcal{G}'_t \right] &= E\left[\mathbf{1}_{\{\tau_i > u\}} \mathbf{1}_{\{t < \boldsymbol{\tau}_{I_D^u} \le u;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S^u} > u\}} \, h_i^{-I_D^u}(u) \right] G(\mathbf{t})^{-1} \\ &= h_i^{-I_D^u}(u) \, P\left[\tau_i > u; t < \boldsymbol{\tau}_{I_D^u} \le u; \boldsymbol{\tau}_{I_S^u} > u \right] G(\mathbf{t})^{-1} \, .\end{aligned}$$

Denotando $I_D^u = I_S^p$, o conjunto dos nomes com o default entre os instantes t e u, e utilizando a expressão acima, reescrevemos a expressão (3.26), para $\boldsymbol{\tau} > t$, como:

$$\pi_i^{vr}(t) \;=\; (1 - \delta_i) \int_t^T e^{-ru} \sum_{p=0}^{|I_S|} \sum_{\substack{\bar{B}_i \subset \Delta_{p, I_S} \\ \bar{B}_i = \{I_S^p, I_S^u\}}} h_i^{-I_S^p}(u) \, \frac{P[\, \tau_i > u; t < \boldsymbol{\tau}_{I_S^p} \le u; \boldsymbol{\tau}_{I_S^u} > u \,]}{G(\mathbf{t})} \, du \tag{3.27}$$

onde $I_S = I_S^p \cup I_S^u$ e $|I_S| = n$.

Em seguida calculamos a probabilidade em (3.27) para $\tau_{n+1} > u$ e $\tau_{n+1} \le u$, separadamente.

(a.1) Para $\tau_{n+1} > u$, consideramos os casos: $i \neq n+1$ e $i = n+1$.

(a.1.1) Sejam $\tau_{n+1} > u$ e $i \neq n+1$. Escrevendo a expressão (2.29) do Princípio da Inclusão e Exclusão para o vetor $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_{-I_D^u}, \boldsymbol{\tau}_{I_D^u})$ e derivando com relação à $\boldsymbol{\tau}_{I_D^u}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\partial_{I_D^u} G(\mathbf{u}_{-I_D^u}, \boldsymbol{\tau}_{I_D^u}) &= \partial_{I_D^u} G(\mathbf{u}'_{-I_D^u}, \boldsymbol{\tau}_{I_D^u}) \\
&+ (-1)^{|I_D^u|} \sum_{l=0}^{|I_S^{'u}|} \sum_{I_S^l \subset I_S^{'u}} (-1)^l \left[\partial_{I_D^u} F_{i, I_D^u, I_S^l, n+1}(u, \boldsymbol{\tau}_{I_D^u}, \mathbf{u}, u) - \partial_{I_D^u} F_{I_D^u, I_S^l, n+1}(\boldsymbol{\tau}_{I_D^u}, \mathbf{u}, u) \right]
\end{aligned} \tag{3.28}$$

onde $I_S^{'u} = I_S^u - \{n+1\}$. Como $I_D^u = I_S^p$ onde $|I_S^p| = p$, logo $|I_S^u| = n - p$. Escrevendo a função de sobrevivência $G(\mathbf{u}_{-I_D^u}, \boldsymbol{\tau}_{I_D^u})$ na forma integral, temos:

$$\partial_{I_D^u} G(\mathbf{u}_{-I_D^u}, \boldsymbol{\tau}_{I_D^u}) = (-1)^p \int_u^\infty \underbrace{\int_u^\infty \cdots \int_u^\infty}_{(n-p)} \partial^{n+1} F(\mathbf{u}_{-I_D^u}, \boldsymbol{\tau}_{I_D^u}) \,. \tag{3.29}$$

Para I_S^p e I_S^u fixos, a probabilidade em (3.27) é dada por:

$$P\left[\tau_i > u;\, t < \boldsymbol{\tau}_{I_S^p} \leq u;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S^u} > u\right] = \int_u^\infty \underbrace{\int_t^u \cdots \int_t^u}_{(p)} \underbrace{\int_u^\infty \cdots \int_u^\infty}_{(n-p)} \partial^{n+1} F(\mathbf{v}) = (-1)^p \underbrace{\int_t^u \cdots \int_t^u}_{(p)} \partial_{I_S^p} G(\mathbf{u}_{-I_S^p}, \mathbf{v}_{I_S^p})$$

onde a segunda igualdade decorre da expressão (3.29) para $I_D^u = I_S^p$. Pela expressão (3.28), podemos reescrever a probabilidade acima como:

$$\begin{aligned}
P\left[\tau_i > u; t < \boldsymbol{\tau}_{I_S^p} \leq u; \boldsymbol{\tau}_{I_S^u} > u\right] &= (-1)^p \underbrace{\int_t^u \cdots \int_t^u}_{(p)} \partial_{I_S^p} G(\mathbf{u}'_{-I_S^p}, \mathbf{v}'_{I_S^p}) \\
&+ \sum_{l=0}^{|I_S^{'u}|} \sum_{I_S^l \subset I_S^{'u}} (-1)^l \underbrace{\int_t^u \cdots \int_t^u}_{(p)} \left[\partial_{I_S^p} F_{i, I_S^p, I_S^l, n+1}(u, \mathbf{v}_{I_S^p}, \mathbf{u}, u) - \partial_{I_S^p} F_{I_S^p, I_S^l, n+1}(\mathbf{v}_{I_S^p}, \mathbf{u}, u) \right] \\
&= J_1 + \sum_{l=0}^{|I_S^{'u}|} \sum_{I_S^l \subset I_S^{'u}} (-1)^l \left(J_2 - J_3\right).
\end{aligned}$$

Para a integral J_1, temos:

$$\begin{aligned}
J_1 &= (-1)^p \int_t^u \cdots \int_t^u \partial_{I_S^p} G(\mathbf{u}'_{-I_S^p}, \mathbf{v}'_{I_S^p}) = (-1)^p P\left[\tau_i > u; t < \boldsymbol{\tau}_{I_S^p} \leq u; \boldsymbol{\tau}_{I_S^{'u}} > u\right] \\
&= (-1)^p \sum_{k=0}^{p} \sum_{I_S^k \subset I_S^p} (-1)^k G(\mathbf{u}'_{-I_S^k}, t)
\end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre da hipótese de indução.

Pela Proposição 3.8, temos que as integrais múltiplas J_2 e J_3 são determinadas por:

$$J_2 = \int_t^u \ldots \int_t^u \partial_{I_S^p} F_{i,I_S^p,I_S^l,n+1}(u, \mathbf{v}_{I_S^p}, \mathbf{u}, u) = \sum_{k=0}^{p} \sum_{I_S^k \subset I_S^p} (-1)^k F_{i,I_S^p,I_S^l,n+1}(\mathbf{u}_{-I_S^k}, t)$$

$$J_3 = \int_t^u \ldots \int_t^u \partial_{I_S^p} F_{I_S^p,I_S^l,n+1}(\mathbf{v}_{I_S^p}, \mathbf{u}, u) = \sum_{k=0}^{p} \sum_{I_S^k \subset I_S^p} (-1)^k F_{I_S^p,I_S^l,n+1}(\mathbf{u}_{-I_S^k}, t)$$

onde, para simplificar a notação, denotamos:

$$F_{I_S^p,I_S^l,n+1}(\mathbf{u}_{-I_S^k}, t) = F_{I_S^k,(I_S^k)^c,I_S^l,n+1}(\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{u}, u)$$

com $I_S^k \cup (I_S^k)^c = I_S^p$. Analogamente para $F_{i,I_S^p,I_S^l,n+1}(\mathbf{u}_{-I_S^k}, t)$.

Com os valores das integrais J_1, J_2 e J_3, obtemos a probabilidade:

$$\begin{aligned} &P\left[\tau_i > u; t < \boldsymbol{\tau}_{I_S^p} \leq u; \boldsymbol{\tau}_{I_S^u} > u\right] \\ &= (-1)^p \sum_{k=0}^{p} \sum_{I_S^k \subset I_S^p} (-1)^k \left\{ G(\mathbf{u}'_{-I_S^k}, t) + \sum_{l=0}^{|I_S'^u|} \sum_{I_S^l \subset I_S'^u} (-1)^{l+p} \left[F_{i,I_S^p,I_S^l,n+1}(\mathbf{u}_{-I_S^k}, t) - F_{I_S^p,I_S^l,n+1}(\mathbf{u}_{-I_S^k}, t) \right] \right\}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

O próximo passo é escrever a probabilidade em (3.30) em termos da função de sobrevivência dos $(n+1)$ nomes. Para isto, iniciamos escrevendo a expressão (2.29) do Princípio da Inclusão e Exclusão em função dos subconjuntos de $I_S^p (= I_D^u)$ e $I_S'^u$, para $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n+1}$ como:

$$G(\mathbf{u}) = G(\mathbf{u}') + \sum_{q=0}^{p} \sum_{I_S^q \subset I_S^p} (-1)^q \sum_{l=0}^{|I_S'^u|} \sum_{I_S^l \subset I_S'^u} (-1)^l \left[F_{i,I_S^q,I_S^l,n+1}(\mathbf{u}) - F_{I_S^q,I_S^l,n+1}(\mathbf{u}) \right]. \tag{3.31}$$

Considere I_S^k e I_S^q dois subconjuntos de I_S^p, tal que $|I_S^k| = k = 0, ..., p$ e $|I_S^q| = q$, para q fixo. Para $z \in I_S^k$ temos que $z \in I_S^q$ ou $z \notin I_S^q$. Dessa forma,

$$I_S^q \cap I_S^k = I_S^r$$

onde $|I_S^r| = r = 0, 1, ..., q$. O subconjunto I_S^k pode ser escrito como $I_S^k = I_S^r \cup I_S^m$, onde $I_S^m \subset (I_S^p - I_S^q)$ e $|I_S^m| = m = 0, ..., p - q$. Logo, podemos escrever o somatório sobre todos os subconjuntos $I_S^k \subset I_S^p$, para $k = 0, ..., p$, como:

$$\sum_{k=0}^{p} \sum_{I_S^k \subset I_S^p} (-1)^k = \sum_{r=0}^{q} \sum_{I_S^r \subset I_S^q} (-1)^r \sum_{m=0}^{p-q} \sum_{I_S^m \subset (I_S^q)^c} (-1)^m \tag{3.32}$$

onde $(I_S^q)^c = I_S^p - I_S^q$.

Escrevendo a expressão (3.31) para $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_{-I_S^k}, t)$ e somando sobre todos os todos subconjuntos $I_S^k \subset I_S^p$, para $k = 0, ..., p$, obtemos:

$$\sum_{k=0}^{p} \sum_{I_S^k \subset I_S^p} (-1)^k G(\mathbf{u}_{-I_S^k}, t) = \sum_{k=0}^{p} \sum_{I_S^k \subset I_S^p} (-1)^k G(\mathbf{u}'_{-I_S^k}, t) + \sum_{q=0}^{p} \sum_{I_S^q \subset I_S^p} (-1)^q D_q \tag{3.33}$$

onde, no segundo termo do lado direito utilizamos a expressão (3.32) e é dado por:

$$D_q = \sum_{r=0}^{q} \sum_{I_S^r \subset I_S^q} (-1)^r \sum_{m=0}^{p-q} \sum_{I_S^m \subset (I_S^q)^c} (-1)^m \sum_{l=0}^{|I_S'^u|} \sum_{I_S^l \subset I_S'^u} (-1)^l \left[F_{i,I_S^q,I_S^l,n+1}(\mathbf{u}_{-I_S^r}, t) - F_{I_S^q,I_S^l,n+1}(\mathbf{u}_{-I_S^r}, t) \right]. \tag{3.34}$$

A seguir analisamos o termo D_q para os seguintes casos: $0 \leq q \leq (p-1)$ e $q = p$.

- Para $0 \leq q \leq (p-1)$, as funções de distribuição $F_{i,I_S^q,I_S^l,n+1}(\cdot)$ e $F_{I_S^q,I_S^l,n+1}(\cdot)$ não envolvem o subconjunto I_S^m, logo o somatório destes subconjuntos pode ser substituído pela combinação binomial $\binom{p-q}{m}$ que quantifica o número de combinações dos elementos de $I_S^p - I_S^q$ com m elementos, ou seja,

$$\sum_{m=0}^{p-q} \sum_{I_S^m \subset (I_S^q)^c} (-1)^m = \sum_{m=0}^{p-q} (-1)^m \binom{p-q}{m} = \big(1 + (-1)\big)^{p-q} = 0$$

para $q = 0, ..., (p-1)$. Portanto, D_q é igual à zero.

- Para $q = p$, temos $I_S^p \cap I_S^k = I_S^k$, logo, $r = k$ e o termo D_q é escrito como:

$$D_q = \sum_{k=0}^{p} \sum_{I_S^k \subset I_S^p} (-1)^k \sum_{l=0}^{|I_S'^u|} \sum_{I_S^l \subset I_S'^u} (-1)^l \left[F_{i,I_S^p,I_S^l,n+1}(\mathbf{u}_{-I_S^k}, t) - F_{I_S^p,I_S^l,n+1}(\mathbf{u}_{-I_S^k}, t) \right].$$

Portanto, a igualdade (3.33) se reduz à:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p} \sum_{I_S^k \subset I_S^p} (-1)^k G(\mathbf{u}_{-I_S^k}, t) \; = \; & \sum_{k=0}^{p} \sum_{I_S^k \subset I_S^p} (-1)^k \Big\{ G(\mathbf{u}'_{-I_S^k}, t) \\ & + (-1)^p \sum_{l=0}^{|I_S'^u|} \sum_{I_S^l \subset I_S'^u} (-1)^l \left[F_{i,I_S^p,I_S^l,n+1}(\mathbf{u}_{-I_S^k}, t) - F_{I_S^p,I_S^l,n+1}(\mathbf{u}_{-I_S^k}, t) \right] \Big\} \end{aligned}$$

logo, a probabilidade (3.30) é dada por:

$$P\left[\tau_i > u; t < \boldsymbol{\tau}_{I_S^p} \leq u; \boldsymbol{\tau}_{I_S^u} > u\right] = (-1)^p \sum_{k=0}^{p} \sum_{I_S^k \subset I_S^p} (-1)^k \, G(\mathbf{u}_{-I_S^k}, t)\,.$$

Portanto, pela expressão (3.27), o valor descontado que o comprador do *swap* de crédito recebe em caso de default do nome i, para $i = 1, ..., n$, é:

$$\pi_i^{vr}(t) = \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau} > t\}} (1 - \delta_i) \int_t^T e^{-ru} \sum_{p=0}^{|I_S|-1} \sum_{\substack{I_S^p \subset I_S \\ (n+1) \notin I_S^p}} (-1)^p \, h_i^{-I_S^p}(u) \sum_{k=0}^{p} \sum_{I_S^k \subset I_S^p} (-1)^k \, \frac{G(\mathbf{u}_{-I_S^k}, t)}{G(\mathbf{t})} \, du \tag{3.35}$$

dado que os $(n+1)$ nomes sobreviveram até o instante t e $\tau_{n+1} > u$.

(a.1.2) Para $\tau_{n+1} > u$ e $i = n+1$, os cálculos são semelhantes ao caso (a.1.1) diferindo que na expressão (3.28), não temos o primeiro termo entre colchetes e conseqüentemente, não há a integral J_2 e no somatório teremos I_S^u ao invés de $I_S^{'u}$.

Logo, a expressão(3.35) é válida para o nome $(n+1)$.

(a.2) Para $\tau_{n+1} \leq u$, necessariamente $i \neq n+1$. Assim como no caso (a.1), $|I_S^p| = p$ e $|I_S^u| = n-p$, e,

$$\int_u^\infty \underbrace{\int_t^u \cdots \int_t^u}_{(p)} \underbrace{\int_u^\infty \cdots \int_u^\infty}_{(n-p)} \partial^{n+1} F(\mathbf{v}) = \int_u^\infty \underbrace{\int_t^u \cdots \int_t^u}_{(p-1)} \underbrace{\int_u^\infty \cdots \int_u^\infty}_{(n-p)} \left\{ \int_t^\infty \partial^{n+1} F(\mathbf{v}) - \int_u^\infty \partial^{n+1} F(\mathbf{v}) \right\}$$

onde a segunda integral múltipla do lado direito é semelhante à calculada no caso (a.1), porém neste caso temos $(p-1)$ nomes com default entre t e u, excluindo o nome $(n+1)$ e $(n+1-p)$ nomes sobrevivem até o instante u, além do nome i. A primeira integral pode ser obtida de forma análoga ao caso (a.1), substituindo u_{n+1} por t.

Utilizando o resultado do caso (a.1) no lado direito da igualdade acima, para $\bar{I}_S^p = I_S^p - \{n+1\}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_u^\infty \underbrace{\int_t^u \cdots \int_t^u}_{(p)} \underbrace{\int_u^\infty \cdots \int_u^\infty}_{(n-p)} \partial^{n+1} F(\mathbf{v}) &= (-1)^p \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{I_S^k \subset \bar{I}_S^p} (-1)^k \left[-G(\mathbf{u}_{-I_S^k}, t; \mathbf{u}_{-(n+1)}, t) + G(\mathbf{u}_{-I_S^k}, t) \right] \\
&= (-1)^p \sum_{k=0}^{p} \sum_{I_S^k \subset I_S^p} (-1)^k \, G(\mathbf{u}_{-I_S^k}, t)\,.
\end{aligned}$$

Dessa forma, para $t \leq T$, o valor $\pi_i^{vr}(t)$ é dado por:

$$\pi_i^{vr}(t) = \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau} > t\}}\,(1-\delta_i)\int_t^T e^{-ru}\sum_{p=0}^{|I_S|}\sum_{\substack{I_S^p \subset I_S \\ (n+1)\in I_S^p}}(-1)^p\, h_i^{-I_S^p}(u)\sum_{k=0}^{p}\sum_{I_S^k \subset I_S^p}(-1)^k\,\frac{G(\mathbf{u}_{-I_S^k}, t)}{G(\mathbf{t})}\,du \tag{3.36}$$

Portanto, através das expressões (3.35), (3.36) e do caso (a.1.2) concluímos que para $i = 1, ..., n+1$, a expressão do valor $\pi_i^{vr}(t)$ é válida para $(n+1)$ nomes, dado que todos os nomes sobreviveram até o instante t.

Caso (ii) Filtração $\mathcal{G}_t' = \{\boldsymbol{\tau}_{I_D} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}; \tau_i > t; \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}$, onde $|I_D| = 1, ..., n$. Neste caso, pelo menos um nome tem o default até o instante t. A seguir provamos o valor $\pi_i^{vr}(t)$ para os casos em que o nome $(n+1)$ sobreviveu até o instante t, $\tau_{n+1} > t$, e em que o default deste nome já ocorreu, $\tau_{n+1} \leq t$.

Considere I_D e I_S fixos, pela expressão (3.26), para $\tau_i > t$, temos:

$$\pi_i^{vr}(t) \;=\; (1-\delta_i)\int_t^T e^{-ru}\sum_{p=0}^{n}\sum_{\substack{B_i \subset \Delta_{p,I'} \\ B_i = \{I_D^u, I_S^u\}}} E\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_i > u\}}\mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D^u} \leq u;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S^u} > u\}}\, h_i^{-I_D^u}(u)|\,\mathcal{G}_t'\,\big]\,du \tag{3.37}$$

onde $\mathcal{G}_t' = \{\boldsymbol{\tau}_{I_D} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D};\ \tau_i > t;\ \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}$, $|I_D| = 1, ..., n$.

(b.1) Para $\tau_{n+1} > t$ e $i \neq n+1$. Analisamos os casos $\tau_{n+1} > u$, em que o nome $(n+1)$ sobreviveu até o instante u, e $\tau_{n+1} \leq u$, onde o nome tem o default entre os instantes t e u.

(b.1.1) Considerando $\tau_{n+1} > u$, a esperança condicional no integrando de (3.37) pode ser escrita em função de $I_S^{'u}$ e $\{n+1\}$, onde $I_S^{'u} = I_S^u - \{n+1\}$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=0}^{n}\sum_{\substack{B_i \subset \Delta_{p,I'} \\ B_i = \{I_D^u, I_S^u\}}} E\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_i > u\}}\mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D^u} \leq u;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S^u} > u\}}\, h_i^{-I_D^u}(u)|\,\mathcal{G}_t'\,\big] \\
&= \sum_{p=0}^{n-1}\sum_{\substack{B_i \subset \Delta_{p,I''} \\ B_i = \{I_D^u, I_S^{'u}\}}} E\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_i > u\}}\,\mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D^u} \leq u\,;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S^{'u}} > u\}}\,\mathbf{1}_{\{\tau_{n+1} > u\}}\, h_i^{-I_D^u}(u)|\,\mathcal{G}_t'\,\big]
\end{aligned} \tag{3.38}$$

onde $I'' = I' - \{n+1\}$. Considere os conjuntos I_D e I_S fixos, para o cálculo da expressão acima,

utilizamos a seguinte igualdade:

$$\sum_{p=0}^{n-1} \sum_{\substack{B_i \subset \Delta_{p,I''} \\ B_i = \{I_D^u, I_S'^u\}}} \mathbf{1}_{\{\tau_i > u\}} \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D^u} \leq u\,;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S'^u} > u\}} \mathbf{1}_{\{\tau_{n+1} > u\}} \mathbf{1}_{\{\tau_i > t;\, \boldsymbol{\tau}_{I_D} > \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}\,;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}}$$

$$= \sum_{p=0}^{|I_S'|} \sum_{\substack{\bar{B}_i \subset \Delta_{p,I_S'} \\ \bar{B}_i = \{I_S^p, I_S'^u\}}} \mathbf{1}_{\{\tau_i > u\,;\, \tau_{n+1} > u\}} \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} > \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}\,;\, t < \boldsymbol{\tau}_{I_S^p} \leq u\,;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S'^u} > u\}}$$

onde $I_D \cup I_S^p = I_D^u$, $I_S^p \cup I_S^u = I_S'$ e $I_S' \cup \{n+1\} = I_S$. Com esta expressão, calculamos a esperança condicional em (3.38), para $\tau_i > t$:

$$\sum_{p=0}^{n} \sum_{\substack{B_i \subset \Delta_{p,I'} \\ B_i = \{I_D^u, I_S^u\}}} E\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_i > u\}} \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D^u} \leq u;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S^u} > u\}}\, h_i^{-I_D^u}(u) \big|\, \mathcal{G}_t' \,\big]$$

$$= \sum_{p=0}^{|I_S'|} \sum_{\substack{\bar{B}_i \subset \Delta_{p,I_S'} \\ \bar{B}_i = \{I_S^p, I_S'^u\}}} \frac{\partial_{I_D} E\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_i > u;\, \tau_{n+1} > u\}} \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} > \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}\}} \mathbf{1}_{\{t < \boldsymbol{\tau}_{I_S^p} \leq u;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S'^u} > u\}}\, h_i^{-I_D, -I_S^p}(u) \big]}{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D})}\,.$$

Para o numerador temos:

$$\begin{aligned}
&\partial_{I_D} E\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_i > u;\, \tau_{n+1} > u\}} \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} > \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}\}} \mathbf{1}_{\{t < \boldsymbol{\tau}_{I_S^p} \leq u;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S'^u} > u\}}\, h_i^{-I_D, -I_S^p}(u) \big] \\
&= h_i^{-I_D, -I_S^p}(u)\; \partial_{I_D} P\,[\, \tau_i > u; \tau_{n+1} > u; \boldsymbol{\tau}_{I_D} > \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D};\; t < \boldsymbol{\tau}_{I_S^p} \leq u;\; \boldsymbol{\tau}_{I_S'^u} > u \,] \\
&= h_i^{-I_D, -I_S^p}(u)\; \partial_{I_D} \underbrace{\int_u^\infty \!\cdots\! \int_u^\infty}_{(n+2-j-p)} \int_{\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}}^\infty \underbrace{\int_t^u \!\cdots\! \int_t^u}_{(p)} \partial^{n+1} F(\mathbf{v})\,.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

A probabilidade acima é calculada através do seguinte resultado.

Reescrevendo a expressão (3.28) em função de I_D e I_S^p:

$$\begin{aligned}
\partial_{I_D, I_S^p} G(\mathbf{u}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D}; \mathbf{u}_{-I_S^p}, \boldsymbol{\tau}_{I_S^p}) = {} & \partial_{I_D, I_S^p} G(\mathbf{u}'_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D};\, \mathbf{u}'_{-I_S^p}, \boldsymbol{\tau}_{I_S^p}) \\
& + (-1)^{|I_D| + |I_S^p|} \sum_{l=0}^{|I_S'^u|} \sum_{I_S^l \subset I_S'^u} (-1)^l \big[\, \partial_{I_D, I_S^p} F_{i, I_D, I_S^p, I_S^l, n+1}(\mathbf{u}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D}; \mathbf{u}_{-I_S^p}, \boldsymbol{\tau}_{I_S^p}) \\
& - \partial_{I_D, I_S^p} F_{I_D, I_S^p, I_S^l, n+1}(\mathbf{u}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D}; \mathbf{u}_{-I_S^p}, \boldsymbol{\tau}_{I_S^p}) \big]\,.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Observação: Integrando a expressão (3.40) de t à u nas variáveis de I_S^p e utilizando a Proposição 3.8, obtemos:

$$\sum_{k=0}^{p}\sum_{I_S^k\subset I_S^p}(-1)^k\partial_{I_D}G(\mathbf{u}_{-I_D},\boldsymbol{\tau}_{I_D};\mathbf{u}_{-I_S^k},t)=\sum_{k=0}^{p}\sum_{I_S^k\subset I_S^p}(-1)^k\Big\{\partial_{I_D}G(\mathbf{u}'_{-I_D},\boldsymbol{\tau}_{I_D};\mathbf{u}'_{-I_S^k},t)$$
$$+(-1)^{|I_D|+|I_S^p|}\sum_{l=0}^{|I_S'^u|}\sum_{I_S^l\subset I_S'^u}(-1)^l\big[\partial_{I_D}F_{i,I_D,I_S^p,I_S^l,n+1}(\mathbf{u}_{-I_D},\boldsymbol{\tau}_{I_D};\mathbf{u}_{-I_S^k},t)$$
$$-\partial_{I_D}F_{I_D,I_S^p,I_S^l,n+1}(\mathbf{u}_{-I_D},\boldsymbol{\tau}_{I_D};\mathbf{u}_{-I_S^k},t)\big]\Big\}. \tag{3.41}$$

Esta igualdade é usada adiante. Escrevendo a função de sobrevivência do lado esquerdo de (3.40) na forma integral para $|I_D|=j-1$ e $|I_S^p|=p$, temos:

$$\partial_{I_D,I_S^p}G(\mathbf{u}_{-I_D},\boldsymbol{\tau}_{I_D};\mathbf{u}_{-I_S^p},\boldsymbol{\tau}_{I_S^p}) = (-1)^{|I_D|+|I_S^p|}\underbrace{\int_u^\infty\!\!\cdots\!\int_u^\infty}_{(n+2-p-j)}\partial^{n+1}F(\mathbf{v}_{-I_D},\boldsymbol{\tau}_{I_D};\,\mathbf{v}_{-I_S^p},\boldsymbol{\tau}_{I_S^p}). \tag{3.42}$$

Substituindo a expressão (3.42) em (3.39) e em seguida utilizando (3.40), obtemos a probabilidade:

$$\begin{aligned}
&\partial_{I_D}P\left[\tau_i>u;\tau_{n+1}>u;\boldsymbol{\tau}_{I_D}>\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D};t<\boldsymbol{\tau}_{I_S^p}\le u;\boldsymbol{\tau}_{I_S'^u}>u\right]\\
&=\partial_{I_D}\int_{\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}}^\infty\int_t^u\!\!\cdots\!\int_t^u(-1)^{|I_D|+|I_S^p|}\partial_{I_D,I_S^p}G(\mathbf{u}'_{-I_D},\mathbf{v}_{I_D};\mathbf{u}'_{-I_S^p},\mathbf{v}_{I_S^p})\\
&\quad+\sum_{l=0}^{|I_S'^u|}\sum_{I_S^l\subset I_S'^u}(-1)^l\,\partial_{I_D}\int_{\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}}^\infty\int_t^u\!\!\cdots\!\int_t^u\big[\partial_{I_D,I_S^p}F_{i,I_D,I_S^p,I_S^l,n+1}(\mathbf{u}_{-I_D},\mathbf{v}_{I_D};\mathbf{u}_{-I_S^p},\mathbf{v}_{I_S^p})\\
&\qquad\qquad-\partial_{I_D,I_S^p}F_{I_D,I_S^p,I_S^l,n+1}(\mathbf{u}_{-I_D},\mathbf{v}_{I_D};\mathbf{u}_{-I_S^p},\mathbf{v}_{I_S^p})\big]\\
&=J_1+\sum_{l=0}^{|I_S'^u|}\sum_{I_S^l\subset I_S'^u}(-1)^l\big(J_2-J_3\big).
\end{aligned}\tag{3.43}$$

As integrais J_1, J_2 e J_3 são calculadas a seguir:

$$\begin{aligned}
J_1 &= \partial_{I_D}\int_{\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}}^\infty\underbrace{\int_t^u\!\!\cdots\!\int_t^u}_{(p)}(-1)^{|I_D|+|I_S^p|}\partial_{I_D,I_S^p}G(\mathbf{u}'_{-I_D},\mathbf{v}_{I_D};\mathbf{u}'_{-I_S^p},\mathbf{v}_{I_S^p})\\
&=\partial_{I_D}P\left[\tau_i>u;\boldsymbol{\tau}_{I_D}>\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D};t<\boldsymbol{\tau}_{I_S^p}\le u;\boldsymbol{\tau}_{I_S'^u}>u\right].
\end{aligned}$$

Pela hipótese de indução, para $\tau_i > t$, I_D e I'_S fixos, onde $i \neq n+1$, temos:

$$\pi_i^{vr}(t) = (1-\delta_i)\int_t^T e^{-ru}\sum_{p=0}^{|I'_S|}\sum_{I_S^p\subset I'_S}\hat{h}_i^{-I_D,-I_S^p}(u)\,\frac{\partial_{I_D}P\left[\tau_i > u; \boldsymbol{\tau}_{I_D} > \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}; t < \boldsymbol{\tau}_{I_S^p} \leq u; \boldsymbol{\tau}_{I'^u_S} > u\right]}{\partial_{I_D}G(\mathbf{t}'_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D})}\,du$$

$$= (1-\delta_i)\int_t^T e^{-ru}\sum_{p=0}^{|I'_S|}\sum_{I_S^p\subset I'_S}(-1)^p\,\hat{h}_i^{-I_D,-I_S^p}(u)\sum_{k=0}^{p}\sum_{I_S^k\subset I_S^p}(-1)^k\,\frac{\partial_{I_D}G(\mathbf{u}'_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D}; \mathbf{u}'_{-I_S^k}, t)}{\partial_{I_D}G(\mathbf{t}'_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D})}\,du$$

onde $\hat{h}_i^{-I_D,-I_S^p}(t)$ é a intensidade de default no nome i no contexto com n nomes. Portanto, através da hipótese de indução, obtemos:

$$J_1 \;=\; (-1)^p\sum_{k=0}^{p}\sum_{I_S^k\subset I_S^p}(-1)^k\,\partial_{I_D}G(\mathbf{u}'_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D}; \mathbf{u}'_{-I_S^k}, t)\,.$$

Calculando a integral J_2 da expressão (3.43),temos:

$$J_2 \;=\; \partial_{I_D}\int_{\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}}^{\infty}\underbrace{\int_t^u\cdots\int_t^u}_{(p)}\partial_{I_D,I_S^p}F_{i,I_D,I_S^p,I_S^l,n+1}(\mathbf{u}_{-I_D}, \mathbf{v}_{I_D}; \mathbf{u}_{-I_S^p}, \mathbf{v}_{I_S^p})$$

$$= (-1)^{|I_D|}\sum_{k=0}^{p}\sum_{I_S^k\subset I_S^p}(-1)^k\,\partial_{I_D}F_{i,I_D,I_S^p,I_S^l,n+1}(\mathbf{u}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D}; \mathbf{u}_{-I_S^k}, t)$$

onde a última igualdade decorre da Proposição 3.8. De forma análoga, calculamos a integral múltipla J_3, obtendo:

$$J_3 \;=\; (-1)^{|I_D|}\sum_{k=0}^{p}\sum_{I_S^k\subset I_S^p}(-1)^k\,\partial_{I_D}F_{I_D,I_S^p,I_S^l,n+1}(\mathbf{u}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D}; \mathbf{u}_{-I_S^k}, t)\,.$$

Com as integrais J_1, J_2 e J_3 calculadas acima, obtemos a probabilidade em (3.43):

$$\begin{aligned}
&\partial_{I_D}P\left[\tau_i > u; \tau_{n+1} > u; \boldsymbol{\tau}_{I_D} > \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}; t < \boldsymbol{\tau}_{I_S^p} \leq u; \boldsymbol{\tau}_{I'^u_S} > u\right]\\
&= (-1)^p\sum_{k=0}^{p}\sum_{I_S^k\subset I_S^p}(-1)^k\Big\{\partial_{I_D}G(\mathbf{u}'_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D}; \mathbf{u}'_{-I_S^k}, t) + (-1)^{|I_S^p|+|I_D|}\sum_{l=0}^{|I'^u_S|}\sum_{I_S^l\subset I'^u_S}\\
&\quad(-1)^l\left[\partial_{I_D}F_{i,I_D,I_S^p,I_S^l,n+1}(\mathbf{u}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D}; \mathbf{u}_{-I_S^k}, t) - \partial_{I_D}F_{I_D,I_S^p,I_S^l,n+1}(\mathbf{u}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D}; \mathbf{u}_{-I_S^k}, t)\right]\Big\}\\
&= (-1)^p\sum_{k=0}^{p}\sum_{I_S^k\subset I_S^p}(-1)^k\,\partial_{I_D}G(\mathbf{u}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D}; \mathbf{u}_{-I_S^k}, t)
\end{aligned}\tag{3.44}$$

onde a última igualdade resulta da expressão (3.41).

Logo, para $\tau_i > t$, $\tau_{n+1} > u$ e os conjuntos I_D e I_S fixos, o valor descontado que o comprador do *swap* de crédito no nome i, para $i \neq n+1$, recebe em caso de default deste nome é:

$$\pi_i^{vr}(t) = (1-\delta_i)\int_t^T e^{-ru}\sum_{p=0}^{|I'_S|}\sum_{\substack{I_S^p\subset I'_S\\(n+1)\notin I_S^p}}(-1)^p\, h_i^{-I_D,-I_S^p}(u)\sum_{k=0}^{p}\sum_{I_S^k\subset I_S^p}(-1)^k\,\frac{\partial_{I_D}G(\mathbf{u}_{-I_D},\boldsymbol{\tau}_{I_D};\mathbf{u}_{-I_S^k},t)}{\partial_{I_D}G(\mathbf{t}_{-I_D},\boldsymbol{\tau}_{I_D})}\,du\,. \tag{3.45}$$

(b.1.2) Para $t < \tau_{n+1} \leq u$, temos o *swap* de crédito CDS no nome i, para $i = 1, ..., n$.

Considerando todas as possíveis combinações de I_D^u e I_S^u, para I_D e I_S fixos, temos:

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{\substack{B_i\subset\Delta_{p,I'}\\B_i=\{I_D^u,I_S^u\}}}\mathbf{1}_{\{\tau_i>u;\,\boldsymbol{\tau}_{I_D^u}\leq u;\,\boldsymbol{\tau}_{I_S^u}>u\}}\mathbf{1}_{\{\tau_i>t;\,\boldsymbol{\tau}_{I_D}>\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D};\,\boldsymbol{\tau}_{I_S}>t\}} = \sum_{p=1}^{|I_S|}\sum_{\substack{\bar{B}_i\subset\Delta_{p,I_S}\\\bar{B}_i=\{I_S^p,I_S^u\}}}\mathbf{1}_{\{\tau_i>u;\,\boldsymbol{\tau}_{I_D}>\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D};\,t<\boldsymbol{\tau}_{I_S^p}\leq u;\,\boldsymbol{\tau}_{I_S^u}>u\}}$$

onde $(n+1) \in I_S^p$. Utilizando esta igualdade para calcular a esperança condicional em (3.37), onde $I_D^u = I_D \cup I_S^p$ e $i \neq n+1$, temos:

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=1}^{n}\sum_{\substack{B_i\subset\Delta_{p,I'}\\B_i=\{I_D^u,I_S^u\}}}E\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_i>u\}}\mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D^u}\leq u;\,\boldsymbol{\tau}_{I_S^u}>u\}}\,h_i^{-I_D^u}(u)|\,\mathcal{G}'_t\,\big]\\
&=\sum_{p=1}^{|I_S|}\sum_{\substack{\bar{B}_i\subset\Delta_{p,I_S}\\\bar{B}_i=\{I_S^p,I_S^u\}}}\frac{\partial_{I_D}E\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_i>u\}}\mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D}>\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}\}}\mathbf{1}_{\{t<\boldsymbol{\tau}_{I_S^p}\leq u;\,\boldsymbol{\tau}_{I_S^u}>u\}}\,h_i^{-I_D,-I_S^p}(u)\big]}{\partial_{I_D}G(\mathbf{t}_{-I_D},\boldsymbol{\tau}_{I_D})}\,.
\end{aligned}$$

Calculando o numerador da expressão acima, observando-se que $u > t$:

$$\begin{aligned}
&\partial_{I_D}E\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_i>u\}}\mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D}>\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}\}}\mathbf{1}_{\{t<\boldsymbol{\tau}_{I_S^p}\leq u;\,\boldsymbol{\tau}_{I_S^u}>u\}}\,h_i^{-I_D,-I_S^p}(u)\big]\\
&=E[\,h_i^{-I_D,-I_S^p}(u)|\,\mathcal{G}_u]\,\partial_{I_D}P\,[\,\tau_i>u;\boldsymbol{\tau}_{I_D}>\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D};t<\boldsymbol{\tau}_{I_S^p}\leq u;\boldsymbol{\tau}_{I_S^u}>u\,]\\
&=h_i^{-I_D,-I_S^p}(u)\,\partial_{I_D}\int_u^\infty\int_{\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}}^\infty\underbrace{\int_t^u\cdots\int_t^u}_{(p-1)}\underbrace{\int_u^\infty\cdots\int_u^\infty}_{(n+1-j-p)}\left\{\int_t^\infty\partial^{n+1}F(\mathbf{v})-\int_u^\infty\partial^{n+1}F(\mathbf{v})\right\}.
\end{aligned}$$

A segunda integral desta expressão é semelhante à integral calculada no caso (b.1.1), porém com $(p-1)$ nomes com o default entre t e u. E a primeira integral pode ser obtida de forma semelhante,

substituindo u_{n+1} por t. Seja $\bar{I}_S^p = I_S^p - \{n+1\}$, pela expressão (3.44), temos:

$$\begin{aligned}
&\partial_{I_D} P\left[\tau_i > u; \boldsymbol{\tau}_{I_D} > \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}; t < \boldsymbol{\tau}_{I_S^p} \leq u; \boldsymbol{\tau}_{I_S^u} > u\right] \\
&= (-1)^p \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{I_S^k \subset \bar{I}_S^p} (-1)^k \left\{-\partial_{I_D} G(\mathbf{u}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D};\, \mathbf{u}_{-I_S^k}, t; \mathbf{u}_{-(n+1)}, t) + \partial_{I_D} G(\mathbf{u}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D};\, \mathbf{u}_{-I_S^k}, t)\right\} \\
&= (-1)^p \sum_{k=0}^{p} \sum_{I_S^k \subset I_S^p} (-1)^k\, \partial_{I_D} G(\mathbf{u}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D};\, \mathbf{u}_{-I_S^k}, t)\,.
\end{aligned}$$

Logo, para $t < \tau_{n+1} \leq u$, o valor descontado no instante $t \leq T$ que o comprador do CDS recebe se o default do nome i ocorrer entre t e T é:

$$\pi_i^{vr}(t) = (1-\delta_i) \int_t^T e^{-ru} \sum_{p=1}^{|I_S|} \sum_{\substack{I_S^p \subset I_S \\ (n+1) \in I_S^p}} (-1)^p\, h_i^{-I_D, -I_S^p}(u) \sum_{k=0}^{p} \sum_{I_S^k \subset I_S^p} (-1)^k \frac{\partial_{I_D} G(\mathbf{u}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D};\, \mathbf{u}_{-I_S^k}, t)}{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D})}\, du\,. \tag{3.46}$$

Portanto, para $\tau_{n+1} > t$, I_D e I_S fixos, através das expressões (3.45) e (3.46) concluímos que, a expressão do valor $\pi_i^{vr}(t)$ é válida para $i = 1, ..., n$, isto é, exceto o nome $(n+1)$, dado que no instante t pelo menos um nome já teve o default.

(b.2) Para $\tau_{n+1} > t$ e $i = n+1$, isto é, para o *swap* de crédito CDS no nome $(n+1)$.

Neste caso[3] temos $\tau_{n+1} > u$. Os cálculos são semelhantes ao caso (b.1.1), diferindo que no lado direito da expressão (3.40) não há o primeiro termo entre colchetes e, conseqüentemente, não há a integral J_2 na expressão (3.43) e no somatório temos I_S^u ao invés de $I_S^{'u}$.

Logo, para $\tau_{n+1} > t$, no instante $t \leq T$, o valor descontado que o comprador do CDS no nome $(n+1)$ recebe se o default ocorrer entre os instantes t e T é:

$$\pi_{n+1}^{vr}(t) = (1-\delta_{n+1}) \int_t^T e^{-ru} \sum_{p=0}^{|I_S|} \sum_{I_S^p \subset I_S} (-1)^p\, h_{n+1}^{-I_D, -I_S^p}(u) \sum_{k=0}^{p} \sum_{I_S^k \subset I_S^p} (-1)^k \frac{\partial_{I_D} G(\mathbf{u}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D}; \mathbf{u}_{-I_S^k}, t)}{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D})}\, du\,.$$

Portanto, através dos casos (b.1) e (b.2), provamos que para $i = 1, ..., n+1$, a expressão $\pi_i^{vr}(t)$ é válida quando os nomes i e $(n+1)$ sobreviveram até o instante t, $t < \tau_i$ e $t < \tau_{n+1}$.

(b.3) Para $\tau_{n+1} \leq t$, o default do nome $(n+1)$ já ocorreu. Neste caso, necessariamente $i \neq n+1$.

[3] Para $i = n+1$, não há o caso $t < \tau_{n+1} \leq u$, pela definição da intensidade de default no instante u.

Para I_D e I_S fixos, temos:

$$\sum_{p=0}^{n} \sum_{\substack{B_i \subset \Delta_{p,I'} \\ B_i = \{I_D^u, I_S^u\}}} \mathbf{1}_{\{\tau_i > u;\, \boldsymbol{\tau}_{I_D^u} \leq u;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S^u} > u\}} \mathbf{1}_{\{\tau_i > t;\, \boldsymbol{\tau}_{I_D} > \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D};\, \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}} = \sum_{p=0}^{|I_S|} \sum_{\substack{\bar{B}_i \subset \Delta_{p,I_S} \\ \bar{B}_i = \{I_S^p, I_S^u\}}} \mathbf{1}_{\{\tau_i > u;\, \boldsymbol{\tau}_{I_D} > \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D};\, t < \boldsymbol{\tau}_{I_S^p} \leq u;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S^u} > u\}}$$

onde $(n+1) \in I_D$ e como anteriormente, $I_D \cup I_S^p = I_D^u$, $I_S^p \cup I_S^u = I_S$.

Utilizando a igualdade acima, a esperança condicional em (3.37) pode ser escrita como:

$$\pi_i^{vr}(t) \;=\; (1-\delta_i) \int_t^T e^{-ru} \sum_{p=0}^{|I_S|} \sum_{\substack{\bar{B}_i \subset \Delta_{p,I_S} \\ \bar{B}_i = \{I_S^p, I_S^u\}}} \frac{\partial_{I_D} E\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_i > u;\, \boldsymbol{\tau}_{I_D} > \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}\}} \mathbf{1}_{\{t < \boldsymbol{\tau}_{I_S^p} \leq u;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S^u} > u\}}\, h_i^{-I_D, -I_S^p}(u)\big]}{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D})}\, du$$

onde para o numerador do integrando, temos:

$$\begin{aligned}
&\partial_{I_D} E\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_i > u;\, \boldsymbol{\tau}_{I_D} > \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}\}} \mathbf{1}_{\{t < \boldsymbol{\tau}_{I_S^p} \leq u;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S^u} > u\}}\, h_i^{-I_D, -I_S^p}(u)\big] \\
&= E\big[\, h_i^{-I_D, -I_S^p}(u) \big|\, \mathcal{G}_u\big]\, \partial_{I_D} P\big[\, \tau_i > u;\, \boldsymbol{\tau}_{I_D} > \bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D};\, t < \boldsymbol{\tau}_{I_S^p} \leq u;\, \boldsymbol{\tau}_{I_S^u} > u\big] \\
&= h_i^{-I_D, -I_S^p}(u)\; J_1\,.
\end{aligned}$$

Escrevendo a probabilidade J_1 na forma integral:

$$J_1 \;=\; \partial_{I_D} \int_u^\infty \int_{\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}}^\infty \underbrace{\int_t^u \cdots \int_t^u}_{(p)} \underbrace{\int_u^\infty \cdots \int_u^\infty}_{(n+1-p-j)} \partial^{n+1} F(\mathbf{v})\,. \tag{3.47}$$

Neste caso, a expressão (3.28) se reduz à:

$$\partial_{I_D^u} G(\mathbf{u}_{-I_D^u}, \boldsymbol{\tau}_{I_D^u}) = (-1)^{|I_D^u|} \sum_{l=0}^{|I_S^u|} \sum_{I_S^l \subset I_S^u} (-1)^l \left[-\partial_{I_D^u} F_{i, I_D^u, I_S^l}(\mathbf{u}_{-I_D^u}, \boldsymbol{\tau}_{I_D^u}) + \partial_{I_D^u} F_{I_D^u, I_S^l}(\mathbf{u}_{-I_D^u}, \boldsymbol{\tau}_{I_D^u}) \right]$$

onde $I_D^u = I_D \cup I_S^p$, para $p = 0, 1, ..., |I_S|$ e $(n+1) \in I_D$.

Para p fixo, podemos reescrever a expressão acima em função de I_D e I_S^p como:

$$\begin{aligned}
\partial_{I_D, I_S^p} G(\mathbf{u}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D}; \mathbf{u}_{-I_S^p}, \boldsymbol{\tau}_{I_S^p}) \;=& (-1)^{|I_D| + |I_S^p|} \sum_{l=0}^{|I_S^u|} \sum_{I_S^l \subset I_S^u} (-1)^l \big[-\partial_{I_D, I_S^p} F_{i, I_D, I_S^p, I_S^l}(\mathbf{u}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D}; \mathbf{u}_{-I_S^p}, \boldsymbol{\tau}_{I_S^p}) \\
&+ \partial_{I_D, I_S^p} F_{I_D, I_S^p, I_S^l}(\mathbf{u}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D}; \mathbf{u}_{-I_S^p}, \boldsymbol{\tau}_{I_S^p}) \big]\,.
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Observação: Integrando a expressão (3.48) de t à u nas variáveis de I_S^p e utilizando a Proposição 3.8, obtemos:

$$\sum_{k=0}^{p}\sum_{I_S^k\subset I_S^p}(-1)^k\partial_{I_D}G(\mathbf{u}_{-I_D},\boldsymbol{\tau}_{I_D};\mathbf{u}_{-I_S^k},t) = \sum_{k=0}^{p}\sum_{I_S^k\subset I_S^p}(-1)^{k+|I_D|+|I_S^p|}\sum_{l=0}^{|I_S^u|}\sum_{I_S^l\subset I_S^u}$$
$$.(-1)^l\left[-\partial_{I_D}F_{i,I_D,I_S^p,I_S^l}(\mathbf{u}_{-I_D},\boldsymbol{\tau}_{I_D};\mathbf{u}_{-I_S^k},t)+\partial_{I_D}F_{I_D,I_S^p,I_S^l}(\mathbf{u}_{-I_D},\boldsymbol{\tau}_{I_D};\mathbf{u}_{-I_S^k},t)\right]. \tag{3.49}$$

Escrevendo o lado esquerdo da expressão (3.48) na forma integral,

$$\begin{aligned}\partial_{I_D,I_S^p}G(\mathbf{u}_{-I_D},\boldsymbol{\tau}_{I_D};\mathbf{u}_{-I_S^p},\boldsymbol{\tau}_{I_S^p}) &= \partial_{I_D,I_S^p}\int_{\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}}^{\infty}\int_{\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_S^p}}^{\infty}\underbrace{\int_u^{\infty}\cdots\int_u^{\infty}}_{(n+2-p-j)}\partial^{n+1}F(\mathbf{v})\\ &= (-1)^{|I_D|+|I_S^p|}\underbrace{\int_u^{\infty}\cdots\int_u^{\infty}}_{(n+2-p-j)}\partial^{n+1}F(\mathbf{v}_{-I_D},\boldsymbol{\tau}_{I_D};\mathbf{v}_{-I_S^p},\boldsymbol{\tau}_{I_S^p}).\end{aligned}$$

Substituindo a expressão acima na integral J_1 em (3.47):

$$\begin{aligned}J_1 &= \partial_{I_D}\int_{\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D}}^{\infty}\int_t^u\cdots\int_t^u(-1)^{|I_D|+|I_S^p|}\,\partial_{I_D,I_S^p}G(\mathbf{u}_{-I_D},\mathbf{v}_{I_D};\mathbf{u}_{-I_S^p},\mathbf{v}_{I_S^p})\\ &= (-1)^{|I_D|}\int_t^u\cdots\int_t^u\sum_{l=0}^{|I_S^u|}\sum_{I_S^l\subset I_S^u}(-1)^l\left[-\partial_{I_D,I_S^p}F_{i,I_D,I_S^p,I_S^l}(\mathbf{u}_{-I_D},\boldsymbol{\tau}_{I_D};\mathbf{u}_{-I_S^p},\mathbf{v}_{I_S^p})\right.\\ &\qquad\left.+\,\partial_{I_D,I_S^p}F_{I_D,I_S^p,I_S^l}(\mathbf{u}_{-I_D},\boldsymbol{\tau}_{I_D};\mathbf{u}_{-I_S^p},\mathbf{v}_{I_S^p})\right]\end{aligned}$$

onde a segunda igualdade decorre de (3.48). As integrais acima são obtidas através da Proposição 3.8, logo,

$$\begin{aligned}J_1 = (-1)^{|I_D|}\sum_{k=0}^{p}\sum_{I_S^k\subset I_S^p}(-1)^k\sum_{l=0}^{|I_S^u|}\sum_{I_S^l\subset I_S^u}(-1)^l&\left[-\partial_{I_D}F_{i,I_D,I_S^p,I_S^l}(\mathbf{u}_{-I_D},\boldsymbol{\tau}_{I_D};\mathbf{u}_{-I_S^k},t)\right.\\ &\left.+\,\partial_{I_D}F_{I_D,I_S^p,I_S^l}(\mathbf{u}_{-I_D},\boldsymbol{\tau}_{I_D};\mathbf{u}_{-I_S^k},t)\right].\end{aligned}$$

Através da expressão (3.49), concluímos que a probabilidade em (3.47) é dada por:

$$\partial_{I_D}P\left[\tau_i>u;\boldsymbol{\tau}_{I_D}>\bar{\boldsymbol{\tau}}_{I_D};t<\boldsymbol{\tau}_{I_S^p}\le u;\boldsymbol{\tau}_{I_S^u}>u\right] = (-1)^p\sum_{k=0}^{p}\sum_{I_S^k\subset I_S^p}(-1)^k\,\partial_{I_D}G(\mathbf{u}_{-I_D},\boldsymbol{\tau}_{I_D};\,\mathbf{u}_{-I_S^k},t).$$

Portanto, para $\tau_{n+1} \leq t$, I_D e I_S fixos, onde $|I_D| \neq 0$,

$$\pi_i^{vr}(t) \;=\; (1-\delta_i)\int_t^T e^{-ru}\sum_{p=0}^{|I_S|}\sum_{I_S^p\subset I_S}(-1)^p\, h_i^{-I_D,-I_S^p}(u)\sum_{k=0}^{p}\sum_{I_S^k\subset I_S^p}(-1)^k\,\frac{\partial_{I_D}G(\mathbf{u}_{-I_D},\boldsymbol{\tau}_{I_D};\mathbf{u}_{-I_S^k},t)}{\partial_{I_D}G(\mathbf{t}_{-I_D},\boldsymbol{\tau}_{I_D})}\,du\,.$$

Através dos casos (b.1), (b.2) e (b.3), obtemos que a expressão $\pi_i^{vr}(t)$ é válida para $i = 1, ..., n+1$, concluindo a prova do valor descontado que o comprador do CDS recebe em $t \leq T$, caso de default do nome i ocorra entre os instantes t e T. □

Valor do *Swap* FtD com n nomes

Generalizando a Proposição 3.2, para $n \geq 2$, temos o seguinte resultado:

Proposição 3.9. *No instante $t \leq T$, o valor descontado do swap FtD com n nomes é $FtD^*(t) = E\big[f^*(\tau_{(1)})|\,\mathcal{G}_t\big]$, onde $f^*(\tau_{(1)})$ é definido em (3.3). Ou seja,*

$$\begin{aligned}FtD^*(t) \;&=\; \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}\leq t\}}\left[\sum_{j=1}^{m}-s\;\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}\geq t_j\}}\,e^{-rt_j}+\sum_{i=1}^{n}(1-\delta_i)\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}=\tau_i\}}\,e^{-r\tau_{(1)}}\right]\\ &+\;\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}>t\}}\left\{\sum_{j=1}^{m}-s\,e^{-rt_j}\left[\mathbf{1}_{\{t\geq t_j\}}+\mathbf{1}_{\{t<t_j\}}\frac{G(\mathbf{t_j})}{G(\mathbf{t})}\right]+\sum_{i=1}^{n}(1-\delta_i)\int_t^T e^{-ru}\,h_i(u)\frac{G(\mathbf{u})}{G(\mathbf{t})}\,du\right\}\end{aligned}$$

onde $h_i(t)$ é a intensidade de default do nome i, dado que todos os nomes sobreviveram até o instante t, $i = 1, ..., n$.

Prova: Análoga ao caso do *swap first-to-default* com dois nomes, (Proposição 3.2). □

Representação Martingal do Valor do *Swap* FtD

Assim como no *swap* FtD com dois nomes, o valor $FtD^*(t)$ com n nomes é um martingal sob $\mathcal{G}_t$. Pelo Teorema 2.5, de Representação de Martingais, para $t \leq T$, o valor descontado deste derivativo pode ser escrito como:

$$FtD^*(t) \;=\; FtD^*(0)+\sum_{i=1}^{n}\int_0^t K_i(u)\,dM_u^i \tag{3.50}$$

onde, para $i = 1, ..., n$, $K_i(t) \;=\; \Delta FtD^*(t)\big|_{t=\tau_i}$. Ou seja, para o instante $t < \tau_{(1)}$, temos:

$$\begin{aligned}K_i(t) \;&=\; \sum_{j=1}^{m}-s\,e^{-rt_j}\;\mathbf{1}_{\{t<t_j\}}\frac{G(\mathbf{t_j})}{G(\mathbf{t})}+(1-\delta_i)\left[e^{-r\tau_{(1)}}-\int_t^T e^{-ru}\,h_i(u)\,\frac{G(\mathbf{u})}{G(\mathbf{t})}\,du\right]\\ &-\;\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(1-\delta_j)\int_t^T e^{-ru}\,h_j(u)\,\frac{G(\mathbf{u})}{G(\mathbf{t})}\,du\end{aligned} \tag{3.51}$$

para $\tau_{(1)} = \tau_i$ e $i = 1, ..., n$.

3.3.2 Rolagem Contínua de CDS

As Proposições 3.4 e 3.5, das dinâmicas dos processos $CDS_c^{*i}(t, s_i^p(t))$ e $s_i^p(t)$, respectivamente, são análogas para o contexto com n nomes. Portanto, o valor da rolagem contínua de CDS obtida na Seção 3.2.2 pode ser estendido para o caso geral $n \geq 2$. Dessa forma, o valor descontado da rolagem contínua de *swap* de crédito é determinado pela expressão:

$$\begin{aligned} V^{*i}(t) &= \int_0^t \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq u\}} \sum_{k=1}^{n} H_k^i\big(u, s_i^p(u)\big)\, dN_k(u) \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t\}} \sum_{k=1}^{n} CDS^{*i}\big(u, s_i(u_-)\big)\big|_{u=\tau_k} \mathbf{1}_{\{\tau_k \leq t\}} \end{aligned}$$

para $i = 1, ..., n$.

3.3.3 Hedge Dinâmico II - Caso Geral

Sob as mesmas hipóteses da Seção 3.2.3, no contexto com n nomes, o hedge do *swap first-to-default* é determinado de forma semelhante ao caso com dois nomes.

Proposição 3.10. *No instante $t < \min\{\tau_{(1)}, T\}$, a estratégia de hedge dinâmico de um swap FtD com n nomes $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\gamma_0(t), ..., \gamma_n(t))$ é obtida de forma que $\boldsymbol{\gamma}'(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t))$ é solução do sistema linear:*

$$\mathbf{H}(t)\boldsymbol{\gamma}'(t) = \mathbf{K}(t)$$

onde $K_j(t)$ é dado por (3.51) e $H_{j,i}(t) = CDS^{*i}(t, s_i(t_-))\big|_{t=\tau_j}$ para $i, j = 1, ..., n$.

A quantia de cash é determinada por $\gamma_0(t) = FtD^*(t)$.

Prova: Análoga à prova da Proposição 3.6, para o *swap first-to-default* com dois nomes.

Capítulo 4

Hedge Dinâmico com Taxa de Juros Estocástica

Neste capítulo desenvolvemos uma estratégia de hedge de um *swap* FtD considerando o contexto em que a taxa de juros é estocástica.

Utilizamos o modelo de Cox, Ingersoll e Ross (CIR) para descrever o processo da taxa de juros, onde o principal objetivo é incluir o fator de risco da taxa de juros e dessa forma obter a quantidade de bônus necessária para o hedge do *swap* FtD.

Os derivativos de crédito utilizados na estratégia de hedge possuem as mesmas características descritas no Capítulo 3, porém consideramos uma filtração para a taxa de juros, que neste caso proporciona mais um fator de incerteza. Para isto, definimos um novo espaço de probabilidade.

Sob a hipótese que a taxa de juros não tem influência sobre o default dos nomes, isto é, assumindo a independência entre os processos da taxa de juros e de default, os cálculos dos valores dos derivativos de crédito tornam-se semelhantes ao caso analisado no Capítulo 3.

Na Seção 4.1, definimos o modelo e calculamos o valor descontado do bônus. Assim como nos contextos analisados nos capítulos anteriores, iniciamos obtendo a estratégia de hedge dinâmico de um *swap* FtD com dois nomes e em seguida, generalizamos os resultados para n nomes, Seções 4.2 e 4.3, respectivamente. Nos dois casos, calculamos os valores dos derivativos de crédito no contexto em que a taxa de juros é estocástica e assim como no Capítulo 3, utilizamos a rolagem contínua de *swap* de crédito como instrumento de hedge do *swap* FtD.

4.1 Modelo

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$, um espaço de probabilidade filtrado com $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ contínua à direita e P a medida neutra ao risco, de forma que não existem oportunidades de arbitragem.

Considere $\mathcal{H}_t = \sigma(r_s : 0 \leq s \leq t)$, a filtração gerada pelo processo da taxa de juros r_t. Dessa

forma, definimos $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t \vee \mathcal{H}_t$, onde $\mathcal{G}_t$, conforme foi definido nos capítulos anteriores, é filtração gerada pelos processos indicadores de default dos n nomes.

Na seção a seguir, calculamos o valor do bônus onde o processo da taxa de juros é descrito pelo modelo de Cox, Ingersoll e Ross (CIR) [4].

4.1.1 Valor do Bônus

Definição: Sob a medida neutra ao risco, o valor de um bônus no instante t com vencimento T, para $t \leq T$, que paga uma unidade monetária no vencimento é:

$$P(t,T) \;=\; E\big[\, e^{-\int_t^T r_s ds} \,|\, \mathcal{H}_t\big]$$

tal que $E\big[|\, e^{-\int_t^T r_s ds}|\big] < \infty$ e $P(T,T) = 1$.

Pelo modelo proposto por CIR, sob a medida neutra ao risco, a taxa de juros é descrita pela seguinte equação diferencial estocástica (EDE):

$$dr_t = \kappa\,[\theta - r_t]\,dt \;+\; \sigma\,\sqrt{r_t}\,dW_t \tag{4.1}$$

onde κ, θ e σ são constantes. O parâmetro σ representa a volatilidade da taxa de juros, θ é a taxa de juros a longo prazo ou taxa média e κ, a velocidade com que a taxa de juros tem reversão à taxa média.

Proposição 4.1. *Considere que o processo da taxa de juros é descrito pelo modelo de Cox, Ingersoll e Ross (4.1). Sob a medida neutra ao risco, o valor do bônus no instante t com vencimento em $T > t$ é dado por:*

$$P(t,T) \;=\; A(t,T)\,e^{-B(t,T)\,r_t}$$

onde

$$B(t,T) \;=\; \frac{2(e^{\,\rho(T-t)} - 1)}{(\rho+\kappa)(e^{\,\rho(T-t)} - 1) + 2\rho}$$

$$A(t,T) \;=\; \left(\frac{2\rho\, e^{(\kappa+\rho)(T-t)/2}}{(\rho+\kappa)(e^{\,\rho(T-t)} - 1) + 2\rho}\right)^{2\kappa\,\theta/\sigma^2}$$

e $\rho = \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2}$.

Prova: Para obtermos os termos $A(t,T)$ e $B(t,T)$, fazemos a seguinte mudança de variável $r_t = z_t\,\sigma^2/2$, logo, o valor do bônus é dado por:

$$P(t,T) \;=\; A(t,T)\,e^{-D(t,T)\,z_t} \tag{4.2}$$

onde $D(t,T) = B(t,T)\,\sigma^2/2$ e o processo z_t,

$$dz_t \;=\; \kappa\left(\frac{2\theta}{\sigma^2} \;-\; z_t\right) dt \;+\; \sqrt{2\,z_t}\,dW_t\,.$$

Aplicando o Lema de Itô em (4.2), obtemos:

$$\frac{dP}{P} \;=\; \left(\frac{A_t}{A} - z_t\,D_t - \kappa\,D\left(\frac{2\theta}{\sigma^2} - z_t\right) \;+\; D^2\,z_t\right) dt \;-\; \sqrt{2\,z_t}\,D\,dW_t$$

onde $A_t = \partial A(t,T)/\partial t$ e analogamente para D_t.

Sob a medida neutra ao risco, o retorno esperado do bônus é a taxa de juros r_t, logo,

$$\frac{A_t}{A} - z_t\,D_t - \kappa\,D\left(\frac{2\theta}{\sigma^2} - z_t\right) \;+\; D^2\,z_t \;=\; z_t\,\frac{\sigma^2}{2}$$

$$\left(\frac{A_t}{A} - \kappa\,D\,\frac{2\theta}{\sigma^2}\right) \;+\; \left(-D_t + \kappa\,D \;+\; D^2 \;-\; \frac{\sigma^2}{2}\right) z_t \;=\; 0\,.$$

Os termos $A(t,T)$ e $D(t,T)$ são determinados pelo sistema:

$$\begin{cases} A_t/A \;-\; 2\,\kappa\,\theta\,D/\sigma^2 \;=\; 0 \\ -D_t + \kappa\,D \;+\; D^2 \;=\; \sigma^2/2 \end{cases} \tag{4.3}$$

com as condições: $A(T,T) = 1$ e $D(T,T) = 0$. A segunda equação deste sistema é uma equação de Ricatti cuja solução é da forma: $D(t,T) = -\dot{\psi}(t,T)/\psi(t,T)$, onde $\dot{\psi}(t,T) = \partial\psi(t,T)/\partial t$. Reescrevendo esta equação:

$$\ddot{\psi}(t,T) - \kappa\,\dot{\psi}(t,T) - \frac{\sigma^2}{2}\,\psi(t,T) \;=\; 0$$

onde $\ddot{\psi}(t,T) = \partial^2\psi(t,T)/\partial t^2$ e com condição final $\dot{\psi}(T,T) = 0$.

Resolvendo a equação diferencial ordinária acima, obtemos:

$$\psi(t,T) \;=\; c_1\,e^{u_1\,t}\left(1 \;-\; \frac{u_1}{u_2}\,e^{\rho\,(T-t)}\right)$$

onde $u_1 = (\kappa+\rho)/2$, $u_2 = (\kappa-\rho)/2$ e $\rho = \sqrt{\kappa + 2\,\sigma^2}$. Dessa forma, temos:

$$D(t,T) \;=\; \frac{\sigma^2\,(e^{\,\rho\,(T-t)} - 1)}{(\kappa+\rho)(e^{\,\rho\,(T-t)} - 1) + 2\rho}$$

A seguir, resolvemos a primeira equação do sistema (4.3). Reescrevendo $D(t,T) = -d\ln(\psi(t,T))$, obtemos a seguinte equação:

$$d\ln A(t,T) \;=\; -\frac{2\,\kappa\,\theta}{\sigma^2}\,d\ln\psi(t,T)$$

com condição final $A(T,T) = 1$, e portanto,

$$A(t,T) \;=\; \left(\frac{2\,\rho\, e^{(\kappa+\rho)(T-t)/2}}{(\kappa+\rho)(e^{\,\rho(T-t)} - 1) + 2\,\rho} \right)^{2\,\kappa\theta/\sigma^2}$$

Reescrevendo $D(t,T)$ em função da variável $B(t,T)$, obtemos o valor do bônus. □

Conforme a prova da Proposição 4.1, sob a medida neutra ao risco, a dinâmica do valor do bônus é dada por:

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} \;=\; r_t\, dt \;-\; B(t,T)\,\sigma\,\sqrt{r_t}\, dW_t\,.$$

Para o instante $t \leq T$, o valor descontado do bônus $P^*(t,T)$ é definido por:

$$P^*(t,T) = e^{-\int_0^t r_s ds}\, P(t,T) = E\big[\, e^{-\int_0^T r_s ds} |\, \mathcal{H}_t \big]\,. \tag{4.4}$$

Logo, o processo $P^*(t,T)$ é um martingal sob $\mathcal{H}_t$ pois, para todo $s \geq t$,

$$\begin{aligned} E\big[\, P^*(s,T) \mid \mathcal{H}_t \big] \;&=\; E\Big[E\big[\, e^{-\int_0^T r_s ds} |\, \mathcal{H}_s \big] |\, \mathcal{H}_t \Big] \\ &=\; E\big[\, e^{-\int_0^T r_s ds} |\, \mathcal{H}_t \big] \;=\; P^*(t,T)\,. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema de Itô em (4.4), obtemos a dinâmica de $P^*(t,T)$,

$$dP^*(t,T) \;=\; -r_t\, e^{-\int_0^t r_s ds}\, P(t,T)\, dt + e^{-\int_0^t r_s ds}\, dP(t,T)$$

onde o termo cruzado é zero. Substituindo a dinâmica $dP(t,T)$, para $t < T$, obtemos:

$$\frac{dP^*(t,T)}{P^*(t,T)} = -B(t,T)\,\sigma\,\sqrt{r_t}\, dW_t\,. \tag{4.5}$$

4.2 Contexto com dois nomes

Nesta seção desenvolvemos uma estratégia de hedge dinâmico do *swap* FtD com dois nomes considerando-se que a taxa de juros é estocástica.

4.2.1 Valores dos Derivativos de Crédito

Iniciamos calculando os valores dos derivativos de crédito no contexto com dois nomes.

Valor do *Swap* de Crédito - CDS

Considere que o *swap* de crédito CDS possui as características descritas no Capítulo 3, porém com a taxa de juros estocástica no fator de desconto. O valor descontado do *payoff* de um *swap* de crédito no nome i, do ponto de vista do comprador, é:

$$X_i^* = \sum_{j=1}^{m} -s_i \, \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}} \, e^{-\int_0^{t_j} r_s ds} + (1-\delta_i) \, \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq T\}} \, e^{-\int_0^{\tau_i} r_s ds} \tag{4.6}$$

onde X_i^* é $\mathcal{F}_T$-mensurável e $E[|X_i^*|] < \infty$.

Neste contexto, a proposição a seguir fornece o valor descontado do CDS.

Proposição 4.2. *No instante $t \leq T$, o valor descontado do CDS no nome 1, considerando-se a taxa de juros estocástica, é $CDS^{*1}(t) = E\big[X_1^* | \mathcal{F}_t\big]$, onde X_1^* é dado por (4.6). Sob a hipótese de independência entre o processo da taxa de juros e os processos indicadores de default dos dois nomes e sob a medida neutra ao risco, temos:*

$$\begin{aligned}
CDS^{*1}(t) = \; & \mathbf{1}_{\{\tau_1 \leq t\}} \left[\sum_{j=1}^{m} -s_1 \, P^*(t,t_j) \, \mathbf{1}_{\{\tau_1 \geq t_j\}} + (1-\delta_1) \, P^*(t,\tau_1) \right] \\
& + \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t\}} \Bigg\{ \sum_{j=1}^{m} -s_1 \, P^*(t,t_j) \left[\mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}} \left(\mathbf{1}_{\{\tau_2 > t\}} \frac{G(t_j,t)}{G(t,t)} + \mathbf{1}_{\{\tau_2 \leq t\}} \frac{\partial_2 G(t_j,\tau_2)}{\partial_2 G(t,\tau_2)} \right) \right] \\
& \quad + (1-\delta_1) \, \mathbf{1}_{\{\tau_2 > t\}} \int_t^T P^*(t,u) \left[h_1(u) \frac{G(u,u)}{G(t,t)} - h_1^{-2}(u) \left(\frac{G(u,u)}{G(t,t)} - \frac{G(u,t)}{G(t,t)} \right) \right] du \\
& \quad + (1-\delta_1) \, \mathbf{1}_{\{\tau_2 \leq t\}} \int_t^T P^*(t,u) \, h_1^{-2}(u) \, \frac{\partial_2 G(u,\tau_2)}{\partial_2 G(t,\tau_2)} \, du \Bigg\}
\end{aligned}$$

onde $P^*(t,u)$ é o valor descontado do bônus com vencimento em u, $u > t$.

Prova: O *payoff* do CDS descontado à taxa de juros pode ser escrito como:

$$X_1^* = -X_p^{*1} + X_r^{*1}$$

onde X_p^{*1} é o valor pago pelo comprador do CDS pela proteção contra o default do nome 1 e X_r^{*1}, o valor que ele recebe se o default ocorrer antes do vencimento do contrato, ambos descontados à taxa de juros. Logo, no instante t o valor descontado do *swap* de crédito CDS no nome 1 é dado por:

$$CDS^{*1}(t) = -E\big[X_p^{*1} | \mathcal{F}_t\big] + E\big[X_r^{*1} | \mathcal{F}_t\big]$$

onde X_p^{*1} e X_r^{*1} são $\mathcal{F}_T$-mensuráveis, $E\big[|X_p^{*1}|\big] < \infty$ e $E\big[|X_r^{*1}|\big] < \infty$.

A prova é dividida em duas partes. Na Parte A, calculamos a primeira esperança condicional do lado direito da expressão acima e na Parte B, a segunda esperança condicional.

Parte A) No instante $t \leq T$, o valor descontado que o comprador do CDS^1 paga pela proteção contra o default do nome 1 é:

$$\pi_1^{vp}(t) \;=\; E\big[X_p^{*1}|\,\mathcal{F}_t\big] \;=\; E\Big[\sum_{j=1}^{m} s_1\,\mathbf{1}_{\{\tau_1\geq t_j\}}\,e^{-\int_0^{t_j} r_s ds}\big|\mathcal{F}_t\Big]\,.$$

Sob a hipótese de independência entre o processo da taxa de juros e os processos indicadores de default, o valor $\pi_1^{vp}(t)$ pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}\pi_1^{vp}(t) \;&=\; \sum_{j=1}^{m} s_1\,E\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_1\geq t_j\}}|\,\mathcal{F}_t\big]\,E\Big[e^{-\int_0^{t_j} r_s ds}|\,\mathcal{F}_t\Big]\\ &=\; \sum_{j=1}^{m} s_1\,E\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_1\geq t_j\}}|\,\mathcal{G}_t\big]\,P^*(t,t_j) \qquad (4.7)\end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre do seguinte resultado:

Proposição 4.3. [1] *Seja Y uma variável aleatória tal que $E[|Y|]<\infty$. Se Y é independente de $\mathcal{G}$, então $E\big[Y|\,\mathcal{H}\vee\mathcal{G}\big] \;=\; E\big[Y|\,\mathcal{H}\big]$.*

O termo $\sum_{j=1}^{m} s_1\,E\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_1\geq t_j\}}|\,\mathcal{G}_t\big]$ do lado direito da expressão (4.7) é o valor $\pi_1^{vp}(t)$, calculado na prova da Proposição 2.2, no caso em que a taxa de juros r é constante. Tomando $r=0$, para $t\leq T$, temos:

$$\begin{aligned}\pi_1^{vp}(t) = \sum_{j=1}^{m} s_1\,P^*(t,t_j)\Bigg\{&\mathbf{1}_{\{\tau_1\leq t\}}\mathbf{1}_{\{\tau_1\geq t_j\}} + \mathbf{1}_{\{\tau_1>t\}}\Bigg[\mathbf{1}_{\{t\geq t_j\}}\\ &+\mathbf{1}_{\{t<t_j\}}\Bigg(\mathbf{1}_{\{\tau_2>t\}}\,\frac{G(t_j,t)}{G(t,t)} + \mathbf{1}_{\{\tau_2\leq t\}}\,\frac{\partial_2 G(t_j,\tau_2)}{\partial_2 G(t,\tau_2)}\Bigg)\Bigg]\Bigg\}. \qquad (4.8)\end{aligned}$$

Parte B) No instante $t\leq T$, o valor descontado que o vendedor do CDS paga se o default do nome 1 ocorrer antes do vencimento do contrato é:

$$\pi_1^{vr}(t) \;=\; E\big[X_r^{*1}|\,\mathcal{F}_t\big] \;=\; E\Big[\,(1-\delta_1)\,\mathbf{1}_{\{\tau_1\leq T\}}\,e^{-\int_0^{\tau_1} r_s ds}\big|\mathcal{F}_t\Big]\,.$$

Calculando o valor $\pi_1^{vr}(t)$, temos:

$$\begin{aligned}\pi_1^{vr}(t) \;&=\; E\Bigg[(1-\delta_1)\int_0^T e^{-\int_0^u r_s ds}\,dN_1(u)\Big|\mathcal{F}_t\Bigg]\\ &=\; (1-\delta_1)\Bigg\{\mathbf{1}_{\{\tau_1\leq t\}}\,P^*(t,\tau_1) + E\Bigg[\int_t^T e^{-\int_0^u r_s ds}\,dN_1(u)\big|\mathcal{F}_t\Bigg]\Bigg\}. \qquad (4.9)\end{aligned}$$

[1] Ver Rogers [21].

O processo $X_t = e^{-\int_0^t r_s ds}$ tem trajetória contínua, logo é $\mathcal{F}_t$-predizível[2] e

$$E\left[\int_0^t |\, X_u\, \mathbf{h}_1(u)|\, du\right] \leq E\left[\int_0^t \mathbf{h}_1(u)\, du\right] \leq 1 < \infty$$

onde a primeira desigualdade decorre do fato que pelo modelo de CIR, a taxa de juros é não-negativa para todo $t \geq 0$ e a segunda desigualdade, do fato que estamos considerando que processo $N_1(t)$ com apenas um salto.

Aplicando a Propriedade Martingal (Corolário 2.1), a esperança condicional em (4.9) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} E\left[\int_t^T e^{-\int_0^u r_s ds}\, dN_1(u)\big|\mathcal{F}_t\right] &= E\left[\int_t^T e^{-\int_0^u r_s ds}\, \mathbf{h}_1(u)\, du\big|\mathcal{F}_t\right] \\ &= \int_t^T E\left[e^{-\int_0^u r_s ds}\, \mathbf{h}_1(u)\big|\mathcal{F}_t\right] du \\ &= \int_t^T P^*(t,u)\, E\left[\mathbf{h}_1(u)|\, \mathcal{G}_t\right] du \end{aligned} \tag{4.10}$$

onde a segunda igualdade decorre do Teorema 2.4, de Fubini e na última igualdade utilizamos o fato que o processo da taxa de juros é independente dos processos indicadores de default e a Proposição 4.3. A esperança condicional no integrando da expressão do lado direito foi calculado na prova da Proposição 3.1. Logo, o valor $\pi_1^{vr}(t)$ é determinado por:

$$\begin{aligned} \pi_1^{vr}(t) = {} & \mathbf{1}_{\{\tau_1 \leq t\}}\, (1-\delta_1)\, P^*(t,\tau_1) \;+\; \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t\}}\, (1-\delta_1) \\ & .\left\{ \mathbf{1}_{\{\tau_2 > t\}} \int_t^T P^*(t,u) \left[h_1(u) \frac{G(u,u)}{G(t,t)} - h_1^{-2}(u) \left(\frac{G(u,u)}{G(t,t)} - \frac{G(u,t)}{G(t,t)} \right) \right] du \right. \\ & \left. + \mathbf{1}_{\{\tau_2 \leq t\}} \int_t^T P^*(t,u)\, h_1^{-2}(u)\, \frac{\partial_2 G(u,\tau_2)}{\partial_2 G(t,\tau_2)}\, du \right\} \end{aligned} \tag{4.11}$$

para $t \leq T$.

Portanto, através dos valores $\pi_1^{vp}(t)$ e $\pi_1^{vr}(t)$, dados pelas expressões (4.8) e (4.11), respectivamente, obtemos o valor $CDS^{*1}(t)$. $\square$

Analogamente obtemos o valor descontado do *swap* de crédito no nome 2 neste contexto.

Valor do *Swap* FtD com dois nomes

Considerando que o *swap* FtD possui as características descritas no Capítulo 3, no contexto em que a taxa de juros é estocástica, o *payoff* deste derivativo com dois nomes, descontado à taxa de

[2] Todo processo adaptado com trajetória contínua é predizível. Ver Jacod [12].

juros, do ponto de vista do comprador, é:

$$X^*_{(1)} \;=\; \sum_{j=1}^{m} -s\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}\geq t_j\}}\,e^{-\int_0^{t_j} r_s ds} + \sum_{i=1}^{2}(1-\delta_i)\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}\leq T;\,\tau_{(1)}=\tau_i\}}\,e^{-\int_0^{\tau_{(1)}} r_s ds} \tag{4.12}$$

onde $\mathcal{F}_T$-mensurável e $E[|X^*_{(1)}|] < \infty$.

Para este derivativo de crédito multinome temos o seguinte resultado:

Proposição 4.4. *No instante $t \leq T$, sob a hipótese de independência entre o processo da taxa de juros e os processos indicadores de default, o valor descontado do swap FtD com dois nomes, do ponto de vista do comprador do contrato, é $FtD^*(t) = E\big[X^*_{(1)}|\,\mathcal{F}_t\big]$, onde $X^*_{(1)}$ é dado por (4.12). Logo,*

$$FtD^*(t) \;=\; \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}\leq t\}}\left[\sum_{j=1}^{m} -s\,P^*(t,t_j)\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}\geq t_j\}} + \sum_{i=1}^{2}(1-\delta_i)\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}=\tau_i\}}\,P^*(t,\tau_{(1)})\right]$$
$$+\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}> t\}}\left\{\sum_{j=1}^{m} -s\,P^*(t,t_j)\left[\mathbf{1}_{\{t\geq t_j\}} + \mathbf{1}_{\{t< t_j\}}\,\frac{G(t_j,t_j)}{G(t,t)}\right] + \sum_{i=1}^{2}(1-\delta_i)\int_t^T P^*(t,u)\,h_i(u)\,\frac{G(u,u)}{G(t,t)}\,du\right\}$$

onde $h_i(t)$ é a intensidade de default do nome i, dado que os dois nomes sobreviveram até o instante t, para $i = 1, 2$.

Prova: O *payoff* descontado do *swap* FtD pode ser escrito como:

$$X^*_{(1)} \;=\; -X^*_p \;+\; X^*_r$$

onde X^*_p é o valor no instante T pago pela proteção contra o primeiro default e X^*_r representa o valor em T que o comprador do FtD recebe se o primeiro default ocorrer antes da data de vencimento do contrato, ambos descontados à taxa de juros. Logo, para $t \leq T$, o valor do *swap* FtD é dado por:

$$FtD^*(t) = -E\big[X^*_p|\,\mathcal{F}_t\big] + E\big[X^*_r|\,\mathcal{F}_t\big]$$

onde X^*_p e X^*_r são $\mathcal{F}_T$-mensuráveis e $E[|X^*_p|] < \infty$ e $E[|X^*_r|] < \infty$.

Procedendo de forma semelhante à prova da Proposição 4.2, dividimos a prova do valor $FtD^*(t)$ em duas partes. Na Parte A, calculamos a primeira esperança condicional do lado direito da expressão acima e na Parte B, a segunda.

Parte A) No instante $t \leq T$, o valor descontado que o comprador do *swap* FtD paga pela proteção é:

$$\pi^{vp}(t) \;=\; E\big[X^*_p|\,\mathcal{F}_t\big] = E\left[\sum_{j=1}^{m} s\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}\geq t_j\}}\,e^{-\int_0^{t_j} r_s ds}\big|\mathcal{F}_t\right].$$

Sob a hipótese de independência entre o processo da taxa de juros e os processos indicadores de default, temos:

$$\pi^{vp}(t) = \sum_{j=1}^{m} s\, E\Big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} \geq t_j\}} \big| \mathcal{G}_t \Big]\, P^*(t, t_j) \tag{4.13}$$

onde a igualdade resulta da Proposição 4.3. O termo $\sum_{j=1}^{m} s\, E\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} \geq t_j\}} \big| \mathcal{G}_t \big]$ do lado direito desta expressão foi calculado na prova da Proposição 2.3, parte (a), no caso em que a taxa de juros r é constante. Tomando $r = 0$, no instante $t \leq T$, obtemos o valor:

$$\pi^{vp}(t) \;=\; \sum_{j=1}^{m} s\, P^*(t, t_j) \left\{ \mathbf{1}_{\{t_j \leq \tau_{(1)} \leq t\}} + \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} > t\}} \left[\mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}} \frac{G(t_j, t_j)}{G(t, t)} \right] \right\}. \tag{4.14}$$

Parte B) Em $t \leq T$, o valor descontado que o comprador do FtD recebe se o primeiro default ocorrer antes de T é determinado por:

$$\pi^{vr}(t) \;=\; E\big[X_r^* | \mathcal{F}_t\big] = E\Big[\sum_{i=1}^{2} (1 - \delta_i)\, \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} \leq T;\, \tau_{(1)} = \tau_i\}}\, e^{-\int_0^{\tau_{(1)}} r_s ds} \big| \mathcal{F}_t \Big].$$

De forma análoga à Proposição 3.2, calculamos o valor $\pi^{vr}(t)$ no instante t, obtendo:

$$\begin{aligned} \pi^{vr}(t) &= \sum_{i=1}^{n} (1 - \delta_i)\, E\Big[\int_0^T \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{2} \mathbf{1}_{\{\tau_j \geq u\}}\, e^{-\int_0^u r_s ds}\, dN_i(u) \big| \mathcal{F}_t \Big] \\ &= \sum_{i=1}^{2} (1 - \delta_i) \left\{ \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} = \tau_i \leq t\}}\, P^*(t, \tau_{(1)}) + E\Big[\int_t^T \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{2} \mathbf{1}_{\{\tau_j \geq u\}}\, e^{-\int_0^u r_s ds}\, dN_i(u) \big| \mathcal{F}_t \Big] \right\}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Para calcular a esperança condicional acima, é necessário analisarmos algumas propriedades do processo no integrando $X_t = \mathbf{1}_{\{\tau_j \geq t\}}\, e^{-\int_0^t r_s ds}$. O processo X_t é $\mathcal{F}_t$-predizível, pois $\mathbf{1}_{\{\tau_j \geq t\}}$ é $\mathcal{G}_t$-predizível e $e^{-\int_0^t r_s ds}$ tem trajetória contínua sob $\mathcal{H}_t$. Além disso, este processo satisfaz à:

$$E\Big[\int_0^t |\, \mathbf{1}_{\{\tau_j \geq u\}}\, e^{-\int_0^u r_s ds}\, \mathbf{h}_i(u) |\, du \Big] \leq E\Big[\int_0^t |\, \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} \geq u\}}\, h_i(u) |\, du \Big] = E\big[\, N_i(t \wedge \tau_{(1)}) \big] \leq 1 < \infty$$

onde a primeira desigualdade decorre do fato que, pelo modelo de CIR a taxa de juros é não-negativa $r_t \geq 0$, para todo $t \geq 0$.

Através da Propriedade Martingal (Corolário 2.1), para $\tau_{(1)} > t$, a esperança condicional em

(4.15) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} E\Big[\int_t^T \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{2} \mathbf{1}_{\{\tau_j \geq u\}}\, e^{-\int_0^u r_s ds}\, dN_i(u)\Big|\mathcal{F}_t\Big] &= E\Big[\int_t^T \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{2} \mathbf{1}_{\{\tau_j \geq u\}}\, e^{-\int_0^u r_s ds}\, \mathbf{h}_i(u)\, du\Big|\mathcal{F}_t\Big] \\ &= \int_t^T E\Big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 > u;\, \tau_2 > u\}}\, e^{-\int_0^u r_s ds}\, h_i(u)\big|\mathcal{F}_t\Big]\, du \\ &= \int_t^T P^*(t,u)\, E\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_1 > u;\, \tau_2 > u\}}\, h_i(u)\big|\, \mathcal{G}_t\big]\, du \end{aligned}$$

onde $h_i(u)$ é a intensidade de default do nome i, dado que $\tau_{(1)} > u$. A segunda igualdade decorre do Teorema 2.4, de Fubini e na última igualdade utilizamos a hipótese de independência entre o processo da taxa de juros e os processos indicadores de default dos dois nomes e a Proposição 4.3.

A esperança condicional da última igualdade da expressão acima foi calculada na prova da Proposição 2.3, parte (b). Logo, para $t \leq T$, o valor descontado que o comprador do *swap* FtD recebe se o primeiro default ocorrer antes do vencimento do contrato é:

$$\pi^{vr}(t) \;=\; \sum_{i=1}^{2}(1-\delta_i)\Big\{\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}=\tau_i \leq t\}}\, P^*(t,\tau_{(1)}) + \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} > t\}} \int_t^T P^*(t,u)\, h_i(u)\, \frac{G(u,u)}{G(t,t)}\, du\Big\}. \tag{4.16}$$

Através dos valores $\pi^{vp}(t)$ e $\pi^{vr}(t)$, dados pelas expressões (4.14) e (4.16), respectivamente, obtemos o valor descontado do *swap* FtD com dois nomes, para $t \leq T$. □

Dinâmica do Valor do *Swap* FtD

O valor descontado do *swap* FtD é determinado por:

$$FtD^*(t) \;=\; -\pi^{vp}(t) + \pi^{vr}(t)$$

e a dinâmica deste processo é:

$$dFtD^*(t) \;=\; -d\pi^{vp}(t) + d\pi^{vr}(t)$$

para $t \leq T$. A seguir, calculamos as dinâmicas dos processos $\pi^{vp}(t)$ e $\pi^{vr}(t)$.

A) Conforme a Parte A da prova da Proposição 4.4, o processo $\pi^{vp}(t)$ pode ser escrito como:

$$\pi^{vp}(t) \;=\; \sum_{j=1}^{m} s\, P^*(t,t_j)\, E\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} \geq t_j\}}\big|\, \mathcal{G}_t\big]\,.$$

Considere o processo $\pi_j^{v\bar{p}}(t) = E\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}\geq t_j\}}|\,\mathcal{G}_t\big]$, $j = 1, ..., m$. Para $u \geq t$, temos:

$$E\big[\pi_j^{u\bar{p}}(u)|\,\mathcal{G}_t\big] = E\Big[E\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}\geq t_j\}}|\,\mathcal{G}_u\big]\big|\mathcal{G}_t\Big] = E\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}\geq t_j\}}|\,\mathcal{G}_t\big] = \pi_j^{v\bar{p}}(t)$$

e por definição, $\pi_j^{v\bar{p}}(t)$ é integrável. Portanto, este processo é um martingal sob $\mathcal{G}_t$, $j = 1, ..., m$.

Através do Teorema 2.5, de Representação de Martingais, o valor $\pi_j^{v\bar{p}}(t)$ pode ser escrito como:

$$\pi_j^{v\bar{p}}(t) \;=\; \pi_j^{v\bar{p}}(0) \;+\; \int_0^t \bar{K}_{(1)}(u)\, dM_u^{(1)}$$

onde $\bar{K}_{(1)}(t) = \Delta E_t\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}\geq t_j\}}\big]\big|_{t=\tau_{(1)}}$ é um processo $\mathcal{G}_t$-predizível e $dM_t^{(1)} = dN_{(1)}(t) - \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}\geq t\}}\mathbf{h}_{(1)}(t)dt$, com $N_{(1)}(t) = \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}\leq t\}}$ e $\mathbf{h}_{(1)}(t)$ é a intensidade do primeiro nome a ter o default.

Logo, a dinâmica do processo $\pi_j^{v\bar{p}}(t)$ é dada por:

$$dE_t\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}\geq t_j\}}\big] \;=\; \bar{K}_{(1)}(t)\, dM_t^{(1)}\,. \tag{4.17}$$

O lema a seguir é utilizado para obter as dinâmicas dos valores $\pi^{vp}(t)$ e $\pi^{vr}(t)$.

Lema 4.1 (Regra do produto). *Sejam X_t e Y_t dois semimartingais com pelo menos um dos processos de variação finita. Então, $X_t Y_t$ é um semimartingal e*

$$X_t Y_t \;=\; X_0 Y_0 + \int_0^t X_{u_-}\, dY_u + \int_0^t Y_{u_-}\, dX_u + \sum_{u\leq t} \Delta X_u \Delta Y_u\,.$$

Este resultado também é conhecido como integração por partes.

O valor descontado do bônus $P^*(t, t_j)$ é um martingal sob $\mathcal{H}_t$ e sob a medida neutra ao risco, logo, é um semimartingal e de variação finita. Pela Regra do produto (Lema 4.1), temos:

$$d\pi^{vp}(t) \;=\; \sum_{j=1}^{m} s\left\{E_{t_-}\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}\geq t_j\}}\big]\, dP^*(t, t_j) + P^*(t, t_j)\, dE_t\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}\geq t_j\}}\big]\right\}$$

onde o termo cruzado é zero, pois $P^*(t, t_j)$ tem trajetória contínua. Substituindo a dinâmica do bônus (4.5) e a expressão (4.17) na igualdade acima, obtemos:

$$\begin{aligned} d\pi^{vp}(t) \;&=\; \sum_{j=1}^{m} s\left\{-E_{t_-}\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}\geq t_j\}}\big]\, P^*(t, t_j)\, B(t, t_j)\, \sigma\sqrt{r_t}\, dW_t + P^*(t, t_j)\, \bar{K}_{(1)}(t)\, dM_t^{(1)}\right\} \\ &=\; \sum_{j=1}^{m} -s\, E_{t_-}\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}\geq t_j\}}\big]\, P^*(t, t_j)\, B(t, t_j)\, \sigma\sqrt{r_t}\, dW_t + \Delta\pi^{vp}(t)\big|_{t=\tau_{(1)}}\, dM_t^{(1)}\,. \end{aligned} \tag{4.18}$$

B) Considere o valor $\pi^{vr}(t)$. Conforme a prova da Proposição 4.4, Parte (b), este processo pode ser escrito como:

$$\pi^{vr}(t) \;=\; \sum_{i=1}^{2}(1-\delta_i)\left\{\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}=\tau_i\leq t\}}\,P^*(t,\tau_{(1)}) + \int_t^T P^*(t,u)\,E\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}>u\}}\,h_i(u)|\,\mathcal{G}_t\big]\,du\right\}. \tag{4.19}$$

Seja $Y_t = E\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}>u\}}\,h_i(u)|\,\mathcal{G}_t\big]$, onde $u > t$. Como a intensidade de default é um processo não-negativo e $h_i(t) \leq 1$; para $s \geq 0$ e $u > s$, temos:

$$Y_t^* \;=\; \sup_{s\leq t} E\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}>u\}}\,h_i(u)|\,\mathcal{G}_s\big] \;=\; 1$$

logo, $E\big[|Y_t^*|\big] < \infty$ e pelo Teorema 2.1, Y_t é integrável . Além disso, para cada $v \geq t$, temos:

$$E\big[\,Y_v|\,\mathcal{G}_t\big] = E\Big[E\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}>u\}}\,h_i(u)|\,\mathcal{G}_v\big]\big|\,\mathcal{G}_t\Big] = E\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}>u\}}\,h_i(u)|\,\mathcal{G}_t\big] = Y_t$$

portanto, o processo Y_t é um martingal sob $\mathcal{G}_t$. Pelo Teorema 2.5, de Representação de Martingais,

$$E\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}>u\}}\,h_i(u)|\,\mathcal{G}_t\big] \;=\; E\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}>u\}}\,h_i(u)\big] + \int_0^t \hat{K}_{(1)}(s,u)\,dM_s^{(1)} \tag{4.20}$$

onde $u > t$, e

$$\hat{K}_{(1)}(t) = \Delta E_t\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}>u\}}\,h_i(u)\big]\big|_{t=\tau_{(1)}} = -E_{t_-}\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}>u\}}\,h_i(u)\big]\big|_{t=\tau_{(1)}}.$$

O valor $P^*(t,u)$, para $u > t$, é um semimartingal e de variação finita sob $\mathcal{H}_t$. Aplicando a Regra do produto (Lema 4.1),

$$P^*(t,u)\,E\big[\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}>u\}}\,h_i(u)|\mathcal{G}_t\big] \;=\; \int_0^t P^*(s,u)\,dE_s\big[\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}>u\}}\,h_i(u)\big] + \int_0^t E_{s_-}\big[\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}>u\}}\,h_i(u)\big]\,dP^*(s,u)$$

onde o termo cruzado é zero, pois o valor descontado do bônus é um processo com trajetória contínua.

Voltando à expressão (4.19), a integral do lado direito pode ser escrita como a diferença de duas integrais, com limites de integração de 0 à T e 0 à t, para $t \leq T$. Utilizando a expressão acima, o integrando em (4.19) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}\pi^{vr}(t) \;=\; &\sum_{i=1}^{2}(1-\delta_i)\left\{\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}=\tau_i\leq t\}}\,P^*(t,\tau_{(1)})\right.\\
&+\int_0^T\!\!\int_0^t P^*(s,u)\,dE_s\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}>u\}}\,h_i(u)\big]du + \int_0^T\!\!\int_0^t E_{s_-}\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}>u\}}\,h_i(u)\big]\,dP^*(s,u)du\\
&\left.-\int_0^t\!\!\int_0^t P^*(s,u)\,dE_s\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}>u\}}\,h_i(u)\big]du - \int_0^t\!\!\int_0^t E_{s_-}\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}>u\}}\,h_i(u)\big]\,dP^*(s,u)du\right\}.\end{aligned}$$

Escrevendo o valor $\pi^{vr}(t)$ na forma diferencial, temos:

$$\begin{aligned} d\pi^{vr}(t) &= \sum_{i=1}^{2}(1-\delta_i)\Big\{\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}=\tau_i\}}\,P^*(t,\tau_{(1)})\,dN_i(t) \\ &\quad + \int_t^T P^*(t,u)\,dE_t\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}>u\}}\,h_i(u)\big]du + \int_t^T E_{t_-}\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}>u\}}\,h_i(u)\big]\,dP^*(t,u)du \\ &\quad - \int_0^t P^*(s,t)\,dE_s\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}>t\}}\,h_i(t)\big]dt - \int_0^t E_{s_-}\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}>t\}}\,h_i(t)\big]\,dP^*(s,t)\,dt\Big\} \end{aligned}$$

onde a última linha desta expressão é exatamente o produto $-P^*(t,t)E_t\big[\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}>t\}}h_i(t)\big]dt$. Substituindo (4.5) e (4.20), na forma diferencial, na expressão acima, obtemos:

$$\begin{aligned} d\pi^{vr}(t) &= -\sum_{i=1}^{2}(1-\delta_i)\int_t^T E_{t_-}\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}>u\}}\,h_i(u)\big]P^*(t,u)\,B(t,u)\,\sigma\sqrt{r_t}\,du\,dW_t \\ &\quad + \Delta\pi^{vr}(t)\big|_{t=\tau_{(1)}}\,dM_t^{(1)} \end{aligned} \tag{4.21}$$

onde, para $\tau_{(1)} \geq t$,

$$\Delta\pi^{vr}(t)\big|_{t=\tau_{(1)}} = \sum_{i=1}^{2}(1-\delta_i)\left[\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}=\tau_i\}}\,P^*(t,t) - \int_t^T P^*(t,u)\,E_{t_-}\big[\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}>u\}}\,h_i(u)\big]\big|_{t=\tau_{(1)}}\,du\right]$$

Através das dinâmicas $d\pi^{vp}(t)$ e $d\pi^{vr}(t)$, dadas pelas expressões (4.18) e (4.21), temos que a variação infinitesimal do valor $FtD^*(t)$ é dada por:

$$\begin{aligned} dFtD^*(t) &= K_0(t)\,dW_t + K_{(1)}(t)\,dM_t^{(1)} \\ &= K_0(t)\,dW_t + \sum_{i=1}^{2} K_i(t)\,dM_t^i \end{aligned} \tag{4.22}$$

onde $K_i(t) = \Delta FtD^*(t)\big|_{t=\tau_{(1)}=\tau_i}$, para $i = 1, 2$ e

$$\begin{aligned} K_0(t) &= \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)}\geq t\}}\,\sigma\sqrt{r_t}\left\{\sum_{j=1}^{m} s\,P^*(t,t_j)\,B(t,t_j)\left[\mathbf{1}_{\{t\geq t_j\}} + \mathbf{1}_{\{t<t_j\}}\frac{G(t_j,t_j)}{G(t,t)}\right]\right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^{2}(1-\delta_i)\int_t^T P^*(t,u)\,B(t,u)\,h_i(u)\,\frac{G(u,u)}{G(t,t)}\,du\right\} \end{aligned} \tag{4.23}$$

para $t \leq \min\{\tau_{(1)}, T\}$. Ou seja, a expressão (4.22) decompõe a variação do valor do *swap first-to-default* em termos dos fatores de risco devido à taxa de juros e ao default dos dois nomes, além da variação determinística, estes dois últimos expressos nos termos dM_t^i, $i = 1, 2$.

4.2.2 Rolagem Contínua de CDS

Assim como no capítulo anterior, nesta seção utilizamos a rolagem contínua de CDS como instrumento de hedge do *swap* FtD. De forma análoga ao Capítulo 3, no instante $t \leq T$, o valor descontado da rolagem contínua de CDS^{*i}, para $i = 1, 2$, é determinada por:

$$\begin{aligned} V^{*i}(t) &= \int_0^t \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq u\}}\, dCDS^{*i}\big(u, s_i(u_-)\big) \\ &= \int_0^t \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq u\}}\, dCDS_c^{*i}\big(u, s_i^p(u)\big) - \int_0^t \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq u\}}\, E_{u_-}\Big[\sum_{j=1}^m \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}} e^{-\int_0^{t_j} r_s ds}\Big]\, ds_i^p(u) \end{aligned} \tag{4.24}$$

onde, neste caso $s_i^p(t) = s_i(t_-)$ é o processo $\mathcal{F}_t$-predizível do *spread* justo do *swap* de crédito no nome i e $CDS_c^{*i}\big(t, s_i^p(t)\big)$ é o valor descontado do CDS com *spread* $s_i^p(t)$, no contexto em que a taxa de juros é estocástica, tal que,

$$dCDS_c^{*i}\big(t, s_i^p(t)\big) = -s_i^p(t)\, dE_t\Big[\sum_{j=1}^m \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}}\, e^{-\int_0^{t_j} r_s ds}\Big] + dE_t\Big[\,(1-\delta_i)\, \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq T\}}\, e^{-\int_0^{\tau_i} r_s ds}\Big]\,.$$

No instante inicial, definimos o *spread* $s_i^p(0) = 0$ e o valor $CDS_c^{*i}\big(0, s_i^p(0)\big) = 0$.

Para obtermos a dinâmica do valor descontado da rolagem contínua de *swap* de crédito, $V^{*i}(t)$, devemos determinar as dinâmicas do valor $CDS_c^{*i}\big(t, s_i^p(t)\big)$ e do *spread* $s_i^p(t)$. Para o primeiro processo temos a proposição a seguir.

Proposição 4.5. *No instante $t \leq T$, a dinâmica do valor $CDS_c^{*i}\big(t, s_i^p(t)\big)$ é:*

$$dCDS_c^{*i}\big(t, s_i^p(t)\big) = H_0^i\big(t, s_i^p(t)\big)\, dW_t + \sum_{k=1}^2 H_k^i\big(t, s_i^p(t)\big)\, dM_t^k$$

onde $H_k^i(t, s_i^p(t)) = \Delta CDS^{*i}(t, s_i^p(t))\big|_{t=\tau_k}$, para $k = 1, 2$, e

$$\begin{aligned} H_0^i\big(t, s_i^p(t)\big) &= \sigma\sqrt{r_t}\; \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t\}} \Bigg\{ \sum_{j=1}^m s_i^p(t)\, P^*(t, t_j)\, B(t, t_j) \Bigg[\mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}} \frac{G(\mathbf{t}_{-i}, t_j)}{G(\mathbf{t})} \Bigg] \\ &- (1-\delta_i)\, \mathbf{1}_{\{\tau_k > t\}} \int_t^T P^*(t, u)\, B(t, u) \Bigg[h_i(u)\, \frac{G(u,u)}{G(t,t)} - h_i^{-k}(u) \Bigg(\frac{G(u,u)}{G(t,t)} - \frac{G(\mathbf{t}_{-i}, u)}{G(t,t)} \Bigg) \Bigg] du \\ &- (1-\delta_i)\, \mathbf{1}_{\{\tau_k \leq t\}} \int_t^T P^*(t, u)\, B(t, u)\, h_i^{-k}(u)\, \frac{\partial_k G(\mathbf{u}_{-k}, \tau_k)}{\partial_k G(\mathbf{t}_{-k}, \tau_k)}\, du \Bigg\} \end{aligned} \tag{4.25}$$

para $i, k = 1, 2$ e $k \neq i$.

Prova: Utilizando a notação da seção anterior, podemos escrever o valor $CDS_c^{*i}\big(t, s_i^p(t)\big)$ na forma diferencial como:

$$dCDS_c^{*i}\big(t, s_i^p(t)\big) \;=\; -s_i^p(t)\, d\pi_i^{v\bar{p}}(t) + d\pi_i^{vr}(t)$$

onde as dinâmicas $d\pi_i^{v\bar{p}}(t)$ e $d\pi_i^{vr}(t)$ são obtidas a seguir.

A) Como foi visto na Parte A) da prova da Proposição 4.2, podemos escrever o processo $\pi_i^{v\bar{p}}(t)$ da seguinte forma:

$$\pi_i^{v\bar{p}}(t) \;=\; E\Big[\sum_{j=1}^{m} \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}}\, e^{-\int_0^{t_j} r_s ds} \big| \mathcal{F}_t\Big] \;=\; \sum_{j=1}^{m} P^*(t, t_j)\, E\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}} \big| \, \mathcal{G}_t\big]\,. \tag{4.26}$$

Na Proposição 2.4, mostramos que o processo $\pi_{ij}^{vp}(t) = E\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}} \big| \, \mathcal{G}_t\big]$ é um martingal sob $\mathcal{G}_t$ e pelo Teorema 2.5, de Representação de Martingais,

$$E_t\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}}\big] \;=\; E\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}}\big] + \sum_{k=1}^{2} \int_0^t \bar{H}_k^i(u)\, dM_u^k$$

onde $\bar{H}_k^i(t) = \Delta E_t\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}}\big]\big|_{t=\tau_k}$, $k = 1, 2$, são processos $\mathcal{G}_t$-predizíveis ou na forma diferencial:

$$dE_t\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}}\big] \;=\; \sum_{k=1}^{2} \bar{H}_k^i(t)\, dM_t^k\,. \tag{4.27}$$

Aplicando a Regra do produto (Lema 4.1) em $P^*(t, t_j)\, E_t\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}}\big]$, obtemos:

$$d\pi_i^{v\bar{p}}(t) \;=\; \sum_{j=1}^{m} \Big\{ E_{t_-}\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}}\big]\, dP^*(t, t_j) + P^*(t, t_j)\, dE_t\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}}\big] \Big\}\,.$$

Substituindo (4.5) e (4.27) na expressão acima, obtemos a dinâmica:

$$d\pi_i^{v\bar{p}}(t) = \sum_{j=1}^{m} \Big\{ -E_{t_-}\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}}\big]\, P^*(t, t_j)\, B(t, t_j) \sigma \sqrt{r_t}\, dW_t + P^*(t, t_j) \sum_{k=1}^{2} \bar{H}_k^i(t)\, dM_t^k \Big\}\,. \tag{4.28}$$

B) Através das expressões (4.9) e (4.10)[3], o valor que o comprador do *swap* de crédito no nome i recebe se o default deste nome ocorrer antes do vencimento do contrato é:

$$\pi_i^{vr}(t) \;=\; (1 - \delta_i) \Big\{ \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}}\, P^*(t, \tau_i) + \int_t^T P^*(t, u)\, E\big[\, \mathbf{h}_i(u) \big| \, \mathcal{G}_t\big]\, du \Big\}\,. \tag{4.29}$$

[3] Estas expressões também são válidas para $i = 1, ..., n$.

Com o argumento análogo ao utilizado na determinação da dinâmica do processo Y_t do *swap* FtD, podemos mostrar que o processo $E\big[\,\mathbf{h}_i(u)|\,\mathcal{G}_t\big]$ é um martingal sob $\mathcal{G}_t$. Pelo Teorema 2.5, de Representação de Martingais,

$$E\big[\,\mathbf{h}_i(u)|\,\mathcal{G}_t\big] \;=\; E\big[\,\mathbf{h}_i(u)\big] + \sum_{k=1}^{2}\int_0^t \hat{H}_k^i(s,u)\,dM_s^k \tag{4.30}$$

onde $u > t$ e $\hat{H}_k^i(t,u) = \Delta E_t\big[\,\mathbf{h}_i(u)\big]\big|_{t=\tau_k}$, para $k = 1, 2$.

Aplicando a Regra do produto (Lema 4.1) em $P^*(t,u)\,E\big[\,\mathbf{h}_i(u)|\,\mathcal{G}_t\big]$, temos:

$$P^*(t,u)\,E\big[\,\mathbf{h}_i(u)|\,\mathcal{G}_t\big] = \int_0^t P^*(s,u)\,dE_s\big[\,\mathbf{h}_i(u)\big] + \int_0^t E_{s_-}\big[\,\mathbf{h}_i(u)\big]\,dP^*(s,u)\,.$$

De forma semelhante ao procedimento utilizado para obter a dinâmica do processo $\pi^{vr}(t)$ do *swap* FtD, reescrevemos (4.29) utilizando a expressão acima:

$$\begin{aligned}\pi_i^{vr}(t) \;=&(1-\delta_i)\Big\{\,\mathbf{1}_{\{\tau_i\le t\}}\,P^*(t,\tau_i)\\ &+\int_0^T\!\!\int_0^t P^*(s,u)\,dE_s\big[\,\mathbf{h}_i(u)\big]\,du + \int_0^T\!\!\int_0^t E_{s_-}\big[\,\mathbf{h}_i(u)\big]\,dP^*(s,u)\,du\\ &-\int_0^t\!\!\int_0^t P^*(s,u)\,dE_s\big[\,\mathbf{h}_i(u)\big]\,du - \int_0^t\!\!\int_0^t E_{s_-}\big[\,\mathbf{h}_i(u)\big]\,dP^*(s,u)\,du\Big\}\,.\end{aligned}$$

Substituindo (4.5) e (4.30) na expressão acima e escrevendo na forma diferencial, obtemos:

$$\begin{aligned}d\pi_i^{vr}(t) \;=&(1-\delta_i)\Big\{\,P^*(t,t)\,dM_t^i + \int_t^T P^*(t,u)\sum_{k=1}^{2}\hat{H}_k^i(t,u)\,du\,dM_t^k\\ &-\int_t^T E_{t_-}\big[\,\mathbf{h}_i(u)\big]\,P^*(t,u)\,B(t,u)\,\sigma\sqrt{r_t}\,du\,dW_t\Big\}\end{aligned}$$

onde para $u > t$ e $k = i$, temos:

$$\hat{H}_i^i(t,u) \;=\; \Delta E\big[\,\mathbf{h}_i(u)|\,\mathcal{G}_t\big]\big|_{t=\tau_i} = -E\big[\,\mathbf{h}_i(u)|\,\mathcal{G}_{t_-}\big]\big|_{t=\tau_i}\,.$$

Logo, a dinâmica do processo $\pi_i^{vr}(t)$ pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}d\pi_i^{vr}(t) \;=\; &(1-\delta_i)\Big(P^*(t,t) - \int_t^T P^*(t,u)\,E\big[\,\mathbf{h}_i(u)|\,\mathcal{G}_{t_-}\big]\big|_{t=\tau_i}\,du\Big)\,dM_t^i\\ &+(1-\delta_i)\Big[\int_t^T P^*(t,u)\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{2}\hat{H}_k^i(t,u)\,du\,dM_t^k - \int_t^T E_{t_-}\big[\,\mathbf{h}_i(u)\big]\,P^*(t,u)\,B(t,u)\,\sigma\sqrt{r_t}\,du\,dW_t\Big]\\ =\;&\sum_{k=1}^{2}\Delta\pi_i^{vr}(t)\,dM_t^k - (1-\delta_i)\int_t^T E_{t_-}\big[\,\mathbf{h}_i(u)\big]\,P^*(t,u)\,B(t,u)\,\sigma\sqrt{r_t}\,du\,dW_t\,.\end{aligned} \tag{4.31}$$

Portanto, através das expressões (4.28) e (4.31), a dinâmica do processo $CDS_c^{*i}\big(t, s_i^p(t)\big)$ é dada por:

$$\begin{aligned} dCDS_c^{*i}\big(t, s_i^p(t)\big) &= H_0^i\big(t, s_i^p(t)\big)\, dW_t + \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{m} -s_i^p(t)\, P^*(t, t_j)\, \bar{H}_k^i(t)\, dM_t^k + \sum_{k=1}^{2} \Delta\pi_i^{vr}(t)\, dM_t^k \\ &= H_0^i\big(t, s_i^p(t)\big)\, dW_t + \sum_{k=1}^{2} \Delta CDS^{*i}\big(t, s_i^p(t)\big)\, dM_t^k \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} H_0^i\big(t, s_i^p(t)\big) \;=\; \Bigg\{ &\sum_{j=1}^{m} s_i^p(t)\, E_{t_-}\big[\, \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}}\big]\, P^*(t, t_j)\, B(t, t_j) \\ &- (1-\delta_i) \int_t^T E_{t_-}\big[\, \mathbf{h}_i(u)\big]\, P^*(t, u)\, B(t, u)\, du \Bigg\} \sigma\sqrt{r_t}\,. \end{aligned}$$

Utilizando a Proposição 4.2, para $t < \tau_i$, obtemos a expressão (4.25). $\square$

Para $t \leq T$, o processo $CDS_c^{*i}\big(t, s_i^p(t)\big)$ pode ser escrito em função dos fatores de risco como:

$$CDS_c^{*i}\big(t, s_i^p(t)\big) \;=\; \int_0^t H_0^i\big(u, s_i^p(u)\big)\, dW_u + \sum_{k=1}^{2} \int_0^t H_k^i\big(u, s_i^p(u)\big)\, dM_u^k \tag{4.32}$$

onde $H_0^i(t, s_i^p(t))$ e $H_k^i(t, s_i^p(t))$, $i, k = 1, 2$, são determinados conforme a Proposição 4.5. O primeiro termo é decorrente da incerteza da taxa de juros e o segundo, devido ao default dos dois nomes.

A proposição a seguir fornece a dinâmica do processo $s_i^p(t)$, $i = 1, 2$.

Proposição 4.6. *Seja $s_i^p(t)$, o processo $\mathcal{F}_t$-predizível e de variação finita do spread justo do CDS no nome i. Considerando que a taxa de juros é estocástica, no instante $t \leq T$, a dinâmica de $s_i^p(t)$ é dada por:*

$$ds_i^p(t) = \Big\{ H_0^i\big(t, s_i^p(t)\big)\, dW_t - \sum_{k=1}^{2} H_k^i\big(t, s_i^p(t)\big)\, \mathbf{1}_{\{\tau_k \geq t\}}\, \mathbf{h}_k(t)\, dt \Big\}\, \pi_i^{v\bar{p}}(t_-)^{-1} \tag{4.33}$$

onde $H_k^i\big(t, s_i^p(t)\big) = \Delta CDS^{*i}\big(t, s_i^p(t)\big)\big|_{t=\tau_k}$, $H_0^i\big(t, s_i^p(t)\big)$ é determinado por (4.25) e $\pi_i^{v\bar{p}}(t_-) \neq 0$, para $i, k = 1, 2$.

Prova: Por definição, para $t < \tau_i$, o *spread* justo do CDS^i é solução da equação:

$$\begin{aligned} -s_i(t)\, \pi_i^{v\bar{p}}(t) \;+\; \pi_i^{vr}(t) \;&=\; 0 \\ -d\big(\, s_i(t)\, \pi_i^{v\bar{p}}(t)\big) \;+\; d\pi_i^{vr}(t) \;&=\; 0\,. \end{aligned}$$

No processo $\pi_i^{v\bar{p}}(t)$ dado por (4.26), temos que $P^*(t,t_j)$ é um semimartingal e na Proposição 2.4, mostramos que $E[\,\mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}}|\,\mathcal{G}_t]$ é um martingal, logo é um semimartingal. Como o produto de dois processos semimartingais é um semimartingal (Lema 4.1), então $\pi_i^{v\bar{p}}(t)$ é um semimartingal.

O processo $s_i(t)$ é de variação finita, aplicando a Proposição 3.3 (A) no primeiro termo da igualdade acima, temos:

$$\begin{aligned} -s_i(t_-)\,d\pi_i^{v\bar{p}}(t) \;-\; \pi_i^{v\bar{p}}(t)\,ds_i(t) \;+\; d\pi_i^{vr}(t) \;&=\; 0 \\ dCDS_c^{*i}\big(t, s_i(t_-)\big) \;-\; \pi_i^{v\bar{p}}(t)\,ds_i(t) \;&=\; 0 \end{aligned}$$

onde $s_i(t_-) = s_i^p(t)$. Substituindo a dinâmica $dCDS_c^{*i}(t, s_i^p(t))$, dada pela Proposição 4.5, obtemos:

$$\pi_i^{v\bar{p}}(t)\,ds_i(t) \;=\; H_0^i\big(t, s_i^p(t)\big)\,dW_t \;+\; \sum_{k=1}^{2} H_k^i\big(t, s_i^p(t)\big)\,dM_t^k \tag{4.34}$$

onde $H_0^i(t, s_i^p(t))$ e $H_k^i(t, s_i^p(t))$ são dados conforme a Proposição 4.5, para $i, k = 1, 2$.

Integrando a expressão acima, temos:

$$\begin{aligned} Z_t \;=\; \int_0^t \pi_i^{v\bar{p}}(u)\,ds_i(u) = \int_0^t H_0^i\big(u, s_i^p(u)\big)\,dW_u \;-\; \sum_{k=1}^{2}\int_0^t H_k^i\big(u, s_i^p(u)\big)\,\mathbf{1}_{\{\tau_k \geq u\}}\,\mathbf{h}_k(u)\,du \\ +\sum_{k=1}^{2} \Delta CDS^{*i}\big(v, s_i^p(v)\big)\big|_{v=\tau_k}\,\mathbf{1}_{\{\tau_k \leq t\}}\,. \end{aligned}$$

O processo Z_t é adaptado e *càdlàg*, logo, $\Delta Z_t = Z_t - Z_{t_-}$. Portanto, o processo $\mathcal{F}_t$-predizível Z_{t_-} é determinado por:

$$\begin{aligned} Z_{t_-} \;=\; \int_0^t H_0^i\big(u, s_i^p(u)\big)\,dW_u \;-\; \sum_{k=1}^{2}\int_0^t H_k^i\big(u, s_i^p(u)\big)\,\mathbf{1}_{\{\tau_k \geq u\}}\,\mathbf{h}_k(u)\,du \\ +\sum_{k=1}^{2} \Delta CDS^{*i}\big(v, s_i^p(v)\big)\big|_{v=\tau_k}\,\mathbf{1}_{\{\tau_k < t\}} \end{aligned}$$

ou na forma diferencial:

$$\pi_i^{v\bar{p}}(t_-)\,ds_i(t_-) \;=\; H_0^i\big(t, s_i^p(t)\big)\,dW_t \;-\; \sum_{k=1}^{2} H_k^i\big(t, s_i^p(t)\big)\,\mathbf{1}_{\{\tau_k \geq t\}}\,\mathbf{h}_k(t)\,dt$$

para $t \leq \tau_i$ e $i = 1, 2$. Como $s_i(t_-) = s_i^p(t)$, concluímos a prova. $\square$

Logo, com as dinâmicas do valor $CDS_c^{*i}\big(t, \mathbf{s}_i^p(t)\big)$ e do *spread* $s_i^p(t)$, dadas pelas Proposições 4.5 e 4.6, respectivamente, podemos escrever o valor descontado da rolagem contínua de CDS no nome

i, expressão (4.24), em função dos fatores de risco:

$$\begin{aligned} V^{*i}(t) &= \int_0^t \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq u\}} \Big\{ H_0^i\big(u, s_i^p(u)\big) dW_u + \sum_{j=1}^{2} H_j^i\big(u, s_i^p(u)\big) dM_u^j \Big\} \\ &\quad + \int_0^t \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq u\}} \Big\{ -H_0^i\big(u, s_i^p(u)\big) dW_u + \sum_{j=1}^{2} H_j^i\big(u, s_i^p(u)\big)\, \mathbf{1}_{\{\tau_j \geq u\}} \mathbf{h}_j(u)\, du \Big\} \\ &= \int_0^t \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq u\}} \sum_{j=1}^{2} H_j^i\big(u, s_i^p(u)\big)\, dN_j(u) \end{aligned} \tag{4.35}$$

onde $H_j^i(t, s_i^p(t)) = CDS^{*i}(t, s_i(t_-))|_{t=\tau_j}$, $t \leq T$ e $i, j = 1, 2$.

Este resultado é o análogo do resultado obtido no Capítulo 3 para o caso em que a taxa de juros é estocástica, ou seja, $V^{*i}(t)$ é o valor necessário e suficiente para o comprador do CDS sair do contrato antes do vencimento.

Neste contexto, a rolagem contínua de $CDS^{*i}(t)$ elimina a variação determinística do valor do *swap* de crédito e a incerteza da taxa de juros, restando apenas a incerteza devido ao default dos dois nomes, resultado semelhante ao obtido no caso analisado no capítulo anterior.

E pelo mesmo motivo, isto ocorre devido à rolagem ser feita sempre comprando CDS com *spread* justo no instante de forma que o valor do *spread* justo incorpora toda a variação que ocorreu no valor do *swap* de crédito entre um instante e o outro em que ocorre a entrada (compra) e saída do CDS.

4.2.3 Hedge Dinâmico III

Considerando que a taxa de juros é estocástica e com o propósito de fazer o hedge de um *swap* FtD com dois nomes, o vendedor deste derivativo compõem a seguinte carteira: vendido em um *swap first-to-default* e comprado nas rolagens contínuas de CDS de cada um dos nomes e com uma quantia investida em bônus.

No instante $t \leq \min\{\tau_{(1)}, T\}$, o valor desta carteira descontado à taxa de juros é:

$$\Pi^*(t) = \sum_{i=1}^{2} \gamma_i(t)\, V^{i*}(t) + \gamma_0(t)\, P^*(t,T) - FtD^*(t)$$

onde $\boldsymbol{\gamma}(t) = \big(\gamma_0(t), \gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)$ é a estratégia de hedge do *swap* FtD e supomos que a estratégia $\boldsymbol{\gamma}(t)$ é auto-financiada, no seguinte sentido:

$$d\Pi^*(t) = \sum_{i=1}^{2} \gamma_i(t)\, dV^{i*}(t) + \gamma_0(t)\, dP^*(t,T) - dFtD^*(t)\,. \tag{4.36}$$

Assumindo a liquidez dos derivativos de crédito e do bônus, temos o seguinte resultado:

Proposição 4.7. *Considerando que o processo da taxa de juros é descrito pelo modelo de CIR, no instante* $t < \min\{\tau_{(1)}, T\}$*, a estratégia de hedge dinâmico de um swap FtD com dois nomes* $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\gamma_0(t), \gamma_1(t), \gamma_2(t))$ *é obtida de forma que* $\boldsymbol{\gamma}'(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ *é solução do sistema linear:*

$$\mathbf{H}(t)\,\boldsymbol{\gamma}'(t) = \boldsymbol{K}(t) \tag{4.37}$$

onde $H_{j,i}(t) = CDS^{*i}(t, s_i(t_-))\big|_{t=\tau_j}$ *e* $K_j(t) = \Delta FtD^*(t)\big|_{t=\tau_{(1)}=\tau_j}$*, para* $i, j = 1, 2$*. A quantia investida em bônus é determinada por:*

$$\gamma_0(t) \;=\; -\frac{K_0(t)}{P^*(t,T)\,B(t,T)\,\sigma\sqrt{r_t}}$$

onde $K_0(t)$ *é dado por (4.23).*

Prova: Substituindo as expressões (4.5), (4.22) e (4.35), na forma diferencial, em $d\Pi^*$ dada por (4.36), obtemos a variação infinitesimal do valor da carteira em função dos fatores de risco,

$$\begin{aligned} d\Pi^*(t) = &\sum_{j=1}^{2}\Big[\sum_{i=1}^{2}\gamma_i(t)\,H_j^i\big(t, s_i^p(t)\big) - K_j(t)\Big]\,dN_j(t) + \sum_{j=1}^{2} K_j(t)\,\mathbf{1}_{\{\tau_j \geq t\}}\,h_j(t)\,dt \\ &- \big[\gamma_0(t)\,P^*(t,T)\,B(t,T)\,\sigma\sqrt{r_t} + K_0(t)\big]\,dW_t\,. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Dessa forma, a variação no valor da carteira é composta por um termo determinístico e por dois termos de incerteza ou fatores de risco, sendo um termo associado ao default dos dois nomes e o outro, decorrente do fator de incerteza da taxa de juros.

A estratégia de hedge consiste em eliminar os efeitos decorrentes dos fatores de risco, logo pela expressão (4.38), a estratégia de hedge $\boldsymbol{\gamma}(t)$ do *swap* FtD satisfaz a seguintes equações:

$$\begin{aligned} \gamma_0(t)\,P^*(t,T)\,B(t,T)\,\sigma\sqrt{r_t} \;&=\; -K_0(t) \\ \sum_{i=1}^{2}\gamma_i(t)\,H_j^i\big(t, s_i^p(t)\big) \;&=\; K_j(t)\,, \quad j = 1, 2 \end{aligned} \tag{4.39}$$

para $t < \min\{\tau_{(1)}, T\}$. Portanto, a primeira equação acima determina a quantia de bônus necessária para o hedge do *swap* FtD. A quantia de CDS na rolagem contínua é determinada pela segunda equação, ou seja, é solução do sistema linear:

$$\mathbf{H}(t)\,\boldsymbol{\gamma}'(t) = \boldsymbol{K}(t)$$

onde $\boldsymbol{\gamma}'(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, $H_{j,i}(t) = CDS^{*i}(t, s_i(t_-))\big|_{t=\tau_j}$ e $K_j(t) = \Delta FtD^*(t)\big|_{t=\tau_{(1)}=\tau_j}$, $i, j = 1, 2$.

Ou seja, as equações em (4.39) determinam a estratégia de hedge dinâmico do *swap* FtD no contexto em que a taxa de juros é estocástica. □

Observação: Pela Proposição 4.7, a quantidade de bônus necessária para o hedge do *swap* FtD não depende da quantia $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$ de *swaps* de crédito na estratégia, devido à hipótese que a taxa de juros não tem influência sobre o default dos nomes.

Assim como nos casos analisados nos Capítulos 2 e 3, o sistema linear acima tem solução única se $\det(\mathbf{H}(t)) \neq 0$, para $t < \min\{\tau_{(1)}, T\}$. Ou seja, a estratégia de hedge do *swap* FtD é única se o mercado for completo.

4.3 Contexto com n nomes

Nesta seção generalizamos os resultados obtidos na Seção 4.2, obtendo a estratégia de hedge dinâmico de um *swap* FtD com n nomes.

4.3.1 Valores dos Derivativos de Crédito

Iniciamos obtendo as expressões dos valores do *swap* de crédito e do *swap first-to-default* para n nomes, generalizando os resultados das Proposições 4.2 e 4.4.

Valor do *Swap* de Crédito

A proposição a seguir fornece o valor do *swap* de crédito no nome i, no contexto com n nomes.

Proposição 4.8. *No instante $t \leq T$, o valor descontado do CDS no nome i, considerando-se a taxa de juros estocástica, é $CDS^{*i}(t) = E\big[X_i^* | \mathcal{F}_t\big]$, onde X_i^* é dado por (4.6). Sob a hipótese de independência entre o processo da taxa de juros e os processos indicadores de default dos n nomes e sob a medida neutra ao risco, temos:*

$$
\begin{aligned}
CDS^{*i}(t) \;=\; & \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}} \left[\sum_{j=1}^{m} -s_i \, P^*(t, t_j) \, \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t_j\}} + (1 - \delta_i) \, P^*(t, \tau_i) \right] \\
& + \mathbf{1}_{\{\tau_i > t\}} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\substack{A_i \subset \Delta_{k,I'} \\ A_i = \{I_D, I_S\}}} \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\tau}_{I_D} \leq t; \boldsymbol{\tau}_{I_S} > t\}} \left\{ \sum_{j=1}^{m} -s_i \, P^*(t, t_j) \left[\mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}} \frac{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D}; \mathbf{t}_{-i}, t_j)}{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D})} \right] \right. \\
& \left. + (1 - \delta_i) \int_t^T P^*(t, u) \sum_{p=0}^{|I_S|} \sum_{I_S^p \subset I_S} (-1)^p \, h_i^{-I_D, -I_S^p}(u) \sum_{k=0}^{p} \sum_{I_S^k \subset I_S^p} (-1)^k \frac{\partial_{I_D} G(\mathbf{u}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D}; \mathbf{u}_{-I_S^k}, t)}{\partial_{I_D} G(\mathbf{t}_{-I_D}, \boldsymbol{\tau}_{I_D})} \, du \right\}
\end{aligned}
$$

onde $P^*(t,u)$ é o valor descontado do bônus com vencimento em u e $h_i^{-I_D,-I_S^p}(t)$ é a intensidade de default do nome i, para $i = 1, ..., n$.

Prova: Análoga à prova da Proposição 4.2, no contexto com dois nomes. □

Valor do *Swap* FtD com n nomes

Para o *swap first-to-default* com n nomes, o *payoff* descontado à taxa de juros é definido de forma semelhante à expressão (4.12), diferindo apenas no somatório do segundo termo da taxa de recuperação que neste caso envolve os n nomes:

$$X^*_{(1)} = \sum_{j=1}^{m} -s\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} \geq t_j\}}\, e^{-\int_0^{t_j} r_s ds} + \sum_{i=1}^{n} (1-\delta_i)\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} \leq T;\, \tau_{(1)} = \tau_i\}}\, e^{-\int_0^{\tau_{(1)}} r_s ds} \tag{4.40}$$

onde $\mathcal{F}_T$-mensurável e $E[|X^*_{(1)}|] < \infty$.

O valor deste derivativo de crédito multinome é dado pela proposição a seguir.

Proposição 4.9. *No instante $t \leq T$, sob a hipótese de independência entre o processo da taxa de juros e os processos indicadores de default, o valor descontado do swap FtD com n nomes, do ponto de vista do comprador do contrato, é dado por $FtD^*(t) = E\big[X^*_{(1)} | \mathcal{F}_t\big]$, onde $X^*_{(1)}$ é definido por (4.40). Logo,*

$$\begin{aligned} FtD^*(t) = {} & \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} \leq t\}} \left[\sum_{j=1}^{m} -s\, P^*(t,t_j)\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} \geq t_j\}} + \sum_{i=1}^{n} (1-\delta_i)\,\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} = \tau_i\}}\, P^*(t,\tau_{(1)}) \right] \\ & + \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} > t\}} \left\{ \sum_{j=1}^{m} -s\, P^*(t,t_j) \left[\mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}} \frac{G(\mathbf{t_j})}{G(\mathbf{t})} \right] + \sum_{i=1}^{n} (1-\delta_i) \int_t^T P^*(t,u)\, h_i(u)\, \frac{G(\mathbf{u})}{G(\mathbf{t})}\, du \right\} \end{aligned}$$

onde $h_i(t)$ é a intensidade de default do nome i, dado que os n nomes sobreviveram até o instante t, para $i = 1, ..., n$.

Prova: Análoga ao caso do *swap first-to-default* com dois nomes (Proposição 4.4). □

Dinâmica do Valor do *Swap* FtD com n nomes

A dinâmica do valor $FtD^*(t)$ com n nomes é obtida de forma semelhante ao caso deste derivativo com dois nomes, uma vez que os resultados para obter a dinâmica deste processo são estendidos para n nomes, $n \geq 2$. Então, para $t \leq \min\{\tau_{(1)}, T\}$,

$$dFtD^*(t) = K_0(t)\, dW_t + \sum_{i=1}^{n} K_i(t)\, dM_t^i$$

onde $K_i(t) = \Delta FtD^*(t)\big|_{t=\tau_{(1)}=\tau_i}$, para $i = 1, ..., n$ e

$$K_0(t) = \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} \geq t\}}\, \sigma\sqrt{r_t} \Bigg\{ \sum_{j=1}^{m} s\, P^*(t, t_j)\, B(t, t_j) \left[\mathbf{1}_{\{t \geq t_j\}} + \mathbf{1}_{\{t < t_j\}} \frac{G(\mathbf{t_j})}{G(\mathbf{t})} \right] - \sum_{i=1}^{n} (1 - \delta_i) \int_t^T P^*(t, u)\, B(t, u)\, h_i(u)\, \frac{G(\mathbf{u})}{G(\mathbf{t})}\, du \Bigg\}. \tag{4.41}$$

4.3.2 Rolagem Contínua de CDS

A obtenção do valor da rolagem contínua de CDS é análoga ao contexto com dois nomes, Seção 3.2.2. Logo, todos os resultados também são estendidos para o contexto geral com n nomes. Neste caso, o valor descontado da rolagem contínua de *swaps* de crédito é determinado pela expressão:

$$\begin{aligned} V^{*i}(t) &= \int_0^t \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq u\}} \sum_{k=1}^{n} H_k^i\big(u, s_i^p(u)\big)\, dN_k(u) \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t\}} \sum_{k=1}^{n} CDS^{*i}\big(u, s_i(u_-)\big)\big|_{u=\tau_k}\, \mathbf{1}_{\{\tau_k \leq t\}} \end{aligned}$$

para $i = 1, ..., n$. Ou seja, o valor descontado da rolagem contínua de CDS no nome i é a soma dos saltos ocorridos até o instante $t \leq \tau_i$, devido ao default dos n nomes.

4.3.3 Hedge Dinâmico III - Caso Geral

Sob as mesmas hipóteses da Seção 4.2.3, para o caso geral de um *swap first-to-default* com n nomes temos o seguinte resultado:

Proposição 4.10. *Considerando que o processo da taxa de juros é descrito pelo modelo de CIR, no instante $t < \min\{\tau_{(1)}, T\}$, a estratégia de hedge dinâmico de um swap FtD com n nomes $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\gamma_0(t), ..., \boldsymbol{\gamma}_n(t))$ é obtida de forma que $\boldsymbol{\gamma}^{'}(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t))$ é solução do sistema linear:*

$$\mathbf{H}(t)\, \boldsymbol{\gamma}^{'}(t) = \boldsymbol{K}(t)$$

onde $H_{j,i}(t) = CDS^{*i}(t, s_i(t_-))\big|_{t=\tau_j}$ e $K_j(t) = \Delta FtD^*(t)\big|_{t=\tau_{(1)}=\tau_j}$, para $i, j = 1, ..., n$. A quantia investida em bônus é determinada por:

$$\gamma_0(t) = -\frac{K_0(t)}{P^*(t, T)\, B(t, T)\, \sigma\sqrt{r_t}}$$

onde $K_0(t)$ é dado por (4.41).

Prova: Análoga à prova da Proposição 4.7, do *swap first-to-default* com dois nomes. □

Capítulo 5

Resultados da Simulação

Neste capítulo apresentamos os resultados da simulação do hedge dinâmico do *swap* FtD para os casos analisados nos Capítulos 2, 3 e 4.

Utilizamos o conceito de *função cópula* para descrever a relação de dependência entre os nomes. Em risco de crédito, a cópula combina a estrutura geral de dependência entre os nomes a um dado conjunto de estruturas a termo do risco de default de cada nome. Isto é especificado através do *Teorema de Sklar*, apresentado na Seção 5.1.

Conforme foi visto nos capítulos anteriores, a estratégia de hedge dinâmico do *swap* FtD é determinada em função das variações dos valores dos derivativos de crédito que, por sua vez, são determinados através da função de sobrevivência dos n nomes. Portanto, para a implementação da estratégia de hedge usamos o conceito de *cópula de sobrevivência*.

A simulação dos resultados obtidos nos três casos analisados é feita utilizando a cópula de Clayton. Esta cópula possui a característica de que o salto no *spread* devido ao default de um nome é uma constante que depende do seu parâmetro[1]. Na Seção 5.2, obtemos graficamente o efeito do default de um nome nos valores dos CDSs e do *swap first-to-default* com três nomes.

Os resultados da simulação nos três casos analisados são apresentados na Seção 5.3. Por fim, na Seção 5.4 analisamos o parâmetro da cópula de Clayton através da análise de sensibilidade e da dependência.

5.1 Conceitos

Nesta seção definimos o conceito de *cópula de sobrevivência* e descrevemos o procedimento para a simulação dos instantes de default dos n nomes através da técnica da *aproximação condicional*.

[1] Ver Schönbucher [24]

5.1.1 Cópula de Sobrevivência

O conceito de cópula de sobrevivência está relacionado ao conceito de cópula. Iniciamos definindo a função cópula.

Definição: Uma *cópula* n-dimensional é uma função $C : [0,1]^n \to [0,1]$ que satisfaz às seguintes propriedades:

- $C(\mathbf{1}_{-i}, v_i) = v_i$, para todo $i = 1, ..., n$, $v_i \in [0,1]$ e para todo $\mathbf{v} \in [0,1]^n$,

  $C(\mathbf{v}) = 0$, se pelo menos uma coordenada do vetor $\mathbf{v}$ for zero.

- Para todo $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in [0,1]^n$, com $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$, temos:

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{I_k \subset I} (-1)^k F\big(\mathbf{b}_{-I_k}, \mathbf{a}_{I_k}\big) \geq 0$$

  onde $I = \{1, ..., n\}$ e conforme a notação utilizada nos capítulos anteriores, o somatório se estende sobre todos os subconjuntos $I_k \subset I$, tal que $|I_k| = k$.

A principal característica da análise de dependência através das funções cópulas é que a função de distribuição conjunta F pode ser separada em duas partes. Uma parte é representada pelas funções de distribuição marginais das variáveis aleatórias e a outra parte é a estrutura de dependência entre estas variáveis que é descrita pela função cópula.

O Teorema de Sklar mostra como esta decomposição pode ser obtida para qualquer conjunto de variáveis aleatórias. Antes, revemos um resultado da função de distribuição contínua.

Proposição 5.1. *Seja X uma variável aleatória com função de distribuição contínua F. Então, $Z = F(X)$ tem distribuição uniforme $[0,1]$. Se U é uma variável com distribuição uniforme $[0,1]$, então $Y = F^{-1}(U)$ tem função de distribuição $F(\cdot)$.*

Teorema 5.1 (Sklar). *Sejam $X_1, ..., X_n$, n variáveis aleatórias com funções de distribuição marginais $F_1, ..., F_n$ e função de distribuição conjunta F. Então, existe uma cópula n-dimensional C tal que, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,*

$$F(\mathbf{x}) \;=\; C\big(F_1(x_1), F_2(x_2), ..., F_n(x_n)\big)$$

isto é, C é a função de distribuição de $F_1(x_1), ..., F_n(x_n)$. Se $F_1, ..., F_n$ são contínuas, então C é única.

Algumas propriedades da cópula:

Proposição 5.2.

- *Invariância sob transformações estritamente crescentes. Sejam* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$*, um vetor de variáveis aleatórias com cópula* C *e* $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $i = 1, ..., n$*, uma família de* n *funções estritamente crescentes. Então,* C *é a cópula de* $\mathbf{X}' = (f_1(X_1), ..., f_n(X_n))$*.*

- *Seja* C *uma cópula* n*-dimensional. A cópula é não-decrescente em cada argumento, isto é, se* $\mathbf{v} \in [0,1]^n$*, então*

$$C(\mathbf{v}) \leq C(\mathbf{v}_{-j}, v_j^{'}), \quad \forall\, v_j < v_j^{'} \leq 1, \quad \forall j = 1, ..., n.$$

O exemplo a seguir apresenta uma classe de cópula.

Exemplo 1: Uma *cópula Arquimediana* $C : [0,1]^n \to [0,1]$ é uma cópula que pode ser representada da seguinte forma:

$$C(\mathbf{x}) = \varphi^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\Big)$$

onde $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ é uma função contínua, decrescente e convexa, tal que, $\varphi(1) = 0$ e $\varphi(0) = \infty$. Neste caso, φ^{-1} é a função inversa. A função φ é denominada *gerador* da cópula.

Um exemplo de cópula Arquimediana é a *cópula de Clayton*, que utilizamos na implementação do hedge do *swap* FtD.

Exemplo 2: Gerador da cópula de Clayton: $\varphi(u) = u^{-\theta} - 1$, logo, $\varphi^{-1}(t) = (t+1)^{-1/\theta}$.

A cópula de Clayton com parâmetro θ é dada por:

$$C(u_1, ..., u_n) = \left[\sum_{i=1}^{n} u_i^{-\theta} - n + 1\right]^{-1/\theta}$$

onde $\theta > 0$.

As provas das proposições e outras propriedades e exemplos de cópula podem ser vistos em Nelsen [18]. Com a definição de cópula e as propriedades enunciadas acima, a seguir definimos a cópula de sobrevivência.

Definição: A *cópula de sobrevivência* da variáveis aleatórias $X_1, ..., X_n$ é uma cópula $\bar{C}$, tal que

$$G(\mathbf{x}) = \bar{C}\big(\bar{F}_1(x_1), \bar{F}_2(x_2), ..., \bar{F}_n(x_n)\big)$$

onde $G(\mathbf{x})$ é função de sobrevivência e $\bar{F}_i(x_i) = P[X_i > x_i]$ é a função de sobrevivência marginal de X_i, para $i = 1, .., n$.

A relação entre a cópula de sobrevivência $\bar{C}$ e a cópula C pode ser obtida a partir do Princípio da Inclusão e Exclusão (Proposição 2.7). Para o caso bidimensional, temos:

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2) &= F(x_1, x_2) - F_1(x_1) - F(x_2) + 1 \\ &= C(F_1(x_1), F_2(x_2)) + \bar{F}_1(x_1) + \bar{F}_2(x_2) - 1 \\ &= C\big(1 - \bar{F}_1(x_1), 1 - \bar{F}_2(x_2)\big) + \bar{F}_1(x_1) + \bar{F}_2(x_2) - 1\,. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\bar{C}(u_1, u_2) = C(1 - u_1, 1 - u_2) + u_1 + u_2 - 1\,.$$

A generalização para o caso n-dimensional e a prova que $\bar{C}$ é uma cópula podem ser vistas em Georges et.al. [9].

No contexto do risco de crédito, a função de sobrevivência marginal do nome i é dada por $\bar{F}_i(t_i) = P[\tau_i > t_i]$, para $i = 1, ..., n$.

Nos modelos baseados na intensidade, o instante de default τ_i é o instante do primeiro salto do processo $N_i(t) = \sum_j \mathbf{1}_{\{\tau_j \leq t\}}$, isto é,

$$\tau_i = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | N_i(t) > 0\}.$$

Se o processo pontual de default do nome i é modelado por um processo de Poisson não-homogêneo, então,

$$P[\tau_i > t_i] = \gamma_i(t_i) = \exp\Big(-\int_0^{t_i} \lambda_i(u)\, du\Big) \tag{5.1}$$

onde $\lambda_i(t)$ é uma função contínua e não-negativa, para $i = 1, ..., n$.

Schönbucher [24] denomina a função $\lambda_i(t)$ de *pseudo-intensidade* de default do nome i. Isto se deve ao fato que $\lambda_i(t)$ coincide com a intensidade de default do nome i, $h_i(t)$, sob a filtração gerada somente pelo processo indicador de default do nome i, $\mathcal{G}_t^i = \sigma(N_i(s) : 0 \leq s \leq t)$.

Dessa forma, a função de sobrevivência dos n nomes é:

$$P[\boldsymbol{\tau} > t] = G(\mathbf{t}) = \bar{C}(\gamma_1(t_1), ..., \gamma_n(t_n)) = \bar{C}(\gamma(\mathbf{t}))$$

onde $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ e $\gamma_i(t_i)$ é a função de sobrevivência marginal do nome i, para $i = 1, ..., n$.

Medida de Dependência

Uma medida de dependência entre duas variáveis aleatórias X e Y é o *Tau de Kendall* que denotamos por $\rho_\tau(X, Y)$ e é definida por:

$$\rho_\tau(X, Y) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v)\, dC(u, v) - 1$$

onde C é a cópula das variáveis X e Y.

Para a cópula Arquimediana temos o seguinte resultado:

Proposição 5.3. *Sejam X e Y duas variáveis aleatórias contínuas com cópula Arquimediana única, gerada por ϕ. Então,*

$$\rho_\tau(X,Y) = 1 + 4\int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)}\, dt\,.$$

Em particular, para a cópula de Clayton com parâmetro θ, temos $\rho_\tau(X,Y) = \theta/(\theta+2)$.

5.1.2 Simulação dos Instantes de Default

Um método geral para simulação de uma cópula baseia-se na técnica de aproximação condicional (amostra condicional)[2].

Para explicar esta técnica, considere uma cópula bivariada na qual os parâmetros da cópula são todos conhecidos. O objetivo é gerar pares (u_1, u_2) de observações das variáveis aleatórias U_1 e U_2 distribuídas uniformemente em $[0,1]$ cuja função de distribuição conjunta é C. Para isto usamos a função de distribuição condicional da variável aleatória U_2 para um dado valor u_1 de U_1, que definimos por:

$$C_1(u_2) = P\big[\, U_2 \le u_2 \,|\, U_1 = u_1 \big]\,.$$

Como U_1 e U_2 têm distribuição Uniforme em $[0,1]$, então:

$$\begin{aligned} C_1(u_2) &= P\big[\, F_2(u_2) \le u_2 \,|\, F_1(u_1) = u_1 \big] \\ &= \lim_{\Delta u_1 \to 0} \frac{C(u_1 + \Delta u_1, u_2) - C(u_1, u_2)}{\Delta u_1} = \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1} \end{aligned}$$

onde $C_1(u_2)$ é uma função não-decrescente e existe para todo $u_2 \in [0,1]$.

Com isto, o par (u_1, u_2) é gerado da seguinte forma:

- Gere duas variáveis aleatórias uniformes independentes $(u_1, v_2) \in [0,1]$. u_1 é o primeiro valor do par que estamos gerando.
- Calcule a função inversa de $C_1(u_2)$, que depende do valor u_1 e do parâmetro da cópula. O segundo valor u_2 do par que estamos gerando é obtido por: $v_2 = C_1^{-1}(u_2)$.

O procedimento para o caso n-dimensional é dado a seguir.

Notação:

[2] Ver Cherubini et.al. [3].

- $C = C(u_1, ..., u_n)$ é a cópula n-dimensional.
- $C_k(u_1, ..., u_k, 1, ..., 1)$ é a função de distribuição marginal k-dimensional de C, para $k = 2, ..., n-1$, onde $C_1(u_1) = u_1$ e $C_n(u_1, ..., u_n) = C(u_1, ..., u_n)$.
- $X_i \sim U[0, 1]$: a variável aleatória X_i tem distribuição Uniforme em $[0, 1]$.

As variáveis aleatórias $U_1, ..., U_n$ têm função de distribuição conjunta C e assumindo que as derivadas parciais de C existem, então a função de distribuição condicional de U_k, dado os valores de $U_1, ..., U_{k-1}$, é dada por:

$$\begin{aligned} C_k(u_k|\, u_1, ...u_{k-1}) &= P\big[U_k \leq u_k|\, U_1 = u_1, ..., U_{k-1} = u_{k-1}\big] \\ &= \frac{\partial^{k-1} C_k(u_1, ..., u_k)}{\partial u_1 ... \partial u_{k-1}} \left(\frac{\partial^{k-1} C_{k-1}(u_1, ..., u_{k-1})}{\partial u_1 ... \partial u_{k-1}} \right)^{-1} \end{aligned}$$

para $k = 2, ..., n$ e assumimos que o numerador e o denominador existem e o denominador é diferente de zero.

No caso n-dimensional, a cópula é simulada através do procedimento descrito a seguir.

Algoritmo:

1. Gerar uma variável aleatória $u_1 \sim U[0, 1]$
2. Gerar uma variável $v_2 \sim U[0, 1]$

   Obter u_2 a partir de $v_2 = C_2(u_2|\, u_1)$
3. Gerar $v_3 \sim U[0, 1]$

   Obter u_3 a partir de $v_3 = C_3(u_3|\, u_1, u_2)$

   E assim sucessivamente, até que para a n-ésima variável:

n. Gerar $v_n \sim U[0, 1]$

   Obter u_n a partir de $v_n = C_n(u_n|\, u_1, ..., u_{n-1})$.

Portanto, $u_k = C_k^{-1}(v_k \,|\, u_1, ..., u_{k-1})$, para $k = 2, ..., n$. Entretanto, dependendo da cópula podemos não ter uma expressão para a função inversa. Neste caso, o valor u_k pode ser obtido através de um método numérico para zero de funções.

Para a cópula Arquimediana temos o seguinte resultado:

Teorema 5.2. [3] *Seja C uma cópula Arquimediana n-dimensional com gerador φ. Então, para*

[3] Ver Cherubini et.al. [3].

$k = 2, ..., n,$

$$C_k(u_k|\, u_1, ..., u_{k-1}) \;=\; \frac{\varphi^{-1(k-1)}\big(\varphi(u_1) + ... + \varphi(u_k)\big)}{\varphi^{-1(k-1)}\big(\varphi(u_1) + ... + \varphi(u_{k-1})\big)}$$

onde $\varphi^{-1(k)}(\cdot)$ é a derivada parcial da função inversa φ^{-1} com relação às k primeiras variáveis.

Na cópula de Clayton, a k-ésima derivada parcial de $\varphi^{-1}(t)$ é:

$$\varphi^{-1(k)}(t) \;=\; (-1)^k\, \theta^{-k} \prod_{i=1}^{k-1} (\theta + i)\, (t+1)^{-\frac{1}{\theta}-k}\,.$$

Pelo Teorema 5.2, para as variáveis v_k, $k = 2, ..., n$, temos:

$$v_k \;=\; \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} u_i^{-\theta} - k + 1}{\sum_{i=1}^{k-1} u_i^{-\theta} - k + 2} \right)^{-\frac{1}{\theta}-k+1}$$

logo,

$$u_k \;=\; \left[\left(\sum_{i=1}^{k-1} u_i^{-\theta} - k + 2 \right) \left(v_k^{-\frac{\theta}{1+(k-1)\theta}} - 1 \right) + 1 \right]^{-\frac{1}{\theta}}$$

onde $v_k \sim U[0,1]$.

Na simulação do hedge do *swap* FtD, assumimos que a cópula de sobrevivência dos n nomes é descrita pela cópula de Clayton, onde cada variável u_i da cópula, $i = 1, ..., n$, é o valor da função de sobrevivência marginal do nome i no instante t e conforme a equação (5.1), temos:

$$u_i \;=\; \gamma_i(t_i) \;=\; \exp\!\left(- \int_0^{t_i} \lambda_i(u)\, du \right).$$

Portanto, o instante de default do nome i, τ_i, é obtido tal que,

$$\int_0^{\tau_i} \lambda_i(u)\, du \;=\; -\ln u_i\,.$$

O instante τ_i pode ser obtido com o auxílio de um método de integração numérica para a expressão do lado esquerdo desta igualdade. Em particular, se a pseudo-intensidade de default λ_i for uma constante não-nula, temos que o processo pontual sob $\mathcal{G}_t^i$ é um processo de Poisson e

$$\tau_i \;=\; -\frac{\ln u_i}{\lambda_i}\,.$$

Neste caso o valor esperado do instante de default do nome i, τ_i, é:

$$E[\,\tau_i\,] = \int_0^{\infty} u\, \lambda_i\, e^{-\lambda_i\, u}\, du = \frac{1}{\lambda_i}\,. \tag{5.2}$$

5.2 Derivativos de Crédito

Nesta seção obtemos graficamente o efeito do default dos n nomes nos valores dos *swaps* de crédito e nos *spreads* justos dos CDSs para o caso analisado no Capítulo 3. Para isto, escolhemos os instantes de default de forma que eles ocorrem antes do vencimento do contrato e para obtermos melhor este efeito, consideramos que a taxa de juros é zero.

Assumimos que a pseudo-intensidade de default do nome i, λ_i, é constante e determinada por (5.2). Consideramos três nomes, $i = 1, 2, 3$.

Os *swaps* de crédito CDSs possuem as seguintes características:

Data de vencimento dos contratos: 3 anos.

Freqüência de pagamento do *spread*: semestral.

Nome (i)	1	2	3
pseudo-intensidade de default (λ_i)	0,74	0,37	0,40
taxa de recuperação (δ_i)	0,40	0,40	0,40
instante de default (τ_i)	1,35	2,70	2,50

Consideramos que a função de sobrevivência é descrita pela cópula de Clayton com parâmetro θ. A seguir, analisamos o impacto do default de cada nome nos *spreads* justos para os seguintes valores de θ e o correspondente valor do tau de Kendall:

Parâmetro θ	Tau de Kendall
$0,02$	1%
2	50%
8	80%

A Figura 5.1 apresenta os *spreads* justos dos *swaps* de crédito para $\theta = 0,02$. Neste caso a dependência entre os nomes é baixa, de 1%.

No instante inicial, o *spread* do CDS no nome 1 é maior comparado com as taxas de proteção dos *swaps* de crédito nos nomes 2 e 3. Isto ocorre devido à pseudo-intensidade de default do nome 1 ser maior; é o dobro da menor pseudo-intensidade. Como as pseudo-intensidades dos nomes 2 e 3 são próximas, a diferença entre os *spreads* iniciais destes nomes é pequena.

No primeiro instante de default devido ao nome 1, $t = 1,35$, os *spreads* dos *swaps* de créditos

nos nomes 2 e 3 têm uma variação muito pequena, assim como no instante de default do nome 3, o *spread* do CDS^2 não apresenta um salto em seu valor.

Ou seja, o *spread* justo do CDS é praticamente constante nos instantes anteriores ao default do correspondente nome, confirmando a relação de baixa dependência entre os nomes.

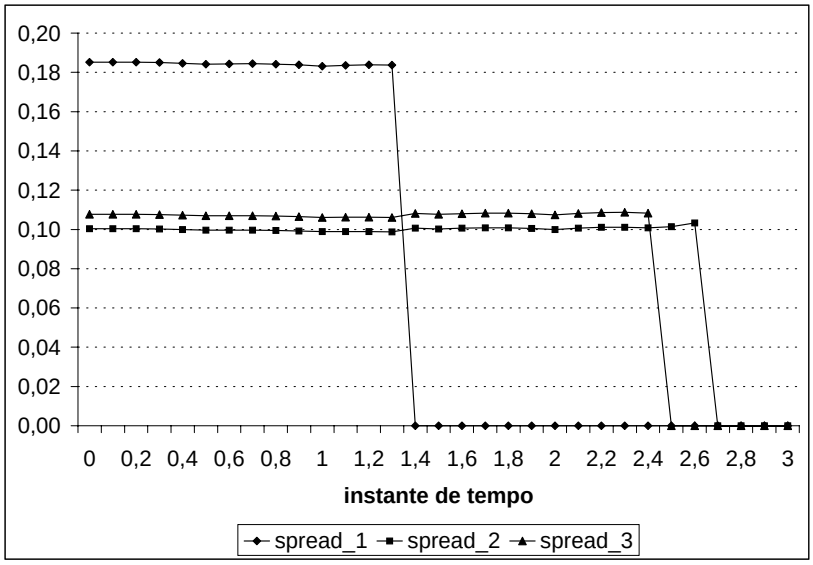

Figura 5.1: *Spreads* justos dos *swaps* de crédito para $\theta = 0,02$.

No caso em que o tau de Kendall é 50%, através da Figura 5.2 verificamos que no instante de default do nome 1, os *spreads* dos CDSs nos nomes 2 e 3 têm um salto e posteriormente, quando o nome 3 tem o default, o *spread* do CDS^2 tem outro salto.

Do início do contrato até o instante do primeiro default, os *spreads* dos três *swaps* de crédito diminuem ao longo do tempo, mas após este período, os *spreads* dos CDSs correspondentes aos nomes que sobreviveram aumentam com o passar do tempo até o instante de default de cada nome.

Portanto, após o instante de default tanto do nome 1 como do nome 3, o *spread* justo que o comprador do *swap* de crédito paga pela proteção do nome que sobreviveu é sempre maior do que o valor do *spread* no instante anterior ao default, pois devido à dependência entre os nomes a probabilidade de default deste nome aumenta, caracterizando o efeito de contágio de default.

Ou seja, o vendedor do contrato passa a cobrar uma taxa maior pela proteção contra o default de um nome que sobreviveu até o instante de default de um nome dependente a ele. E o valor desta taxa continua aumentando até o próprio instante de default.

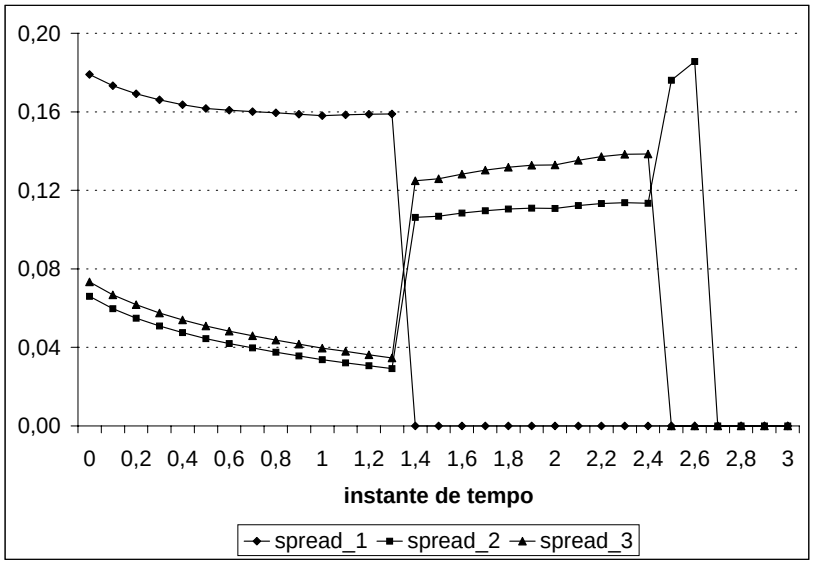

Figura 5.2: *Spreads* justos dos *swaps* de crédito para $\theta = 2$.

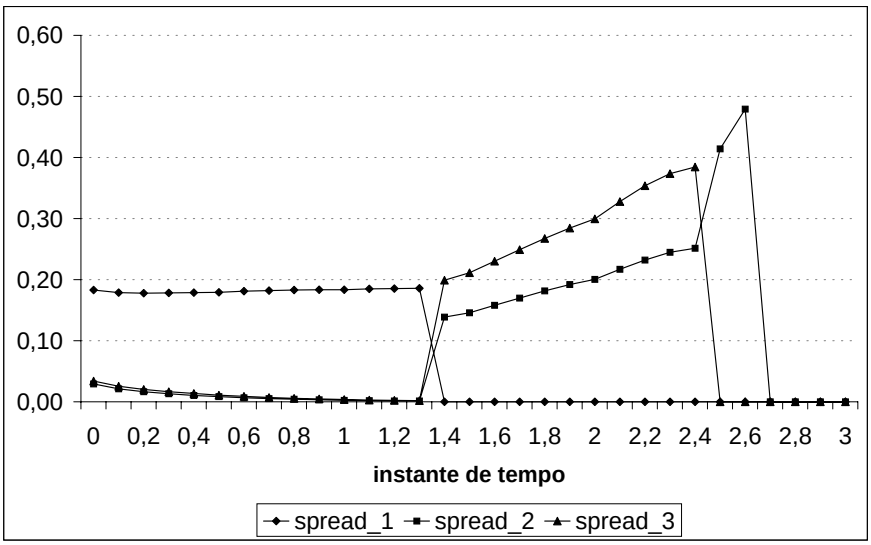

Figura 5.3: *Spreads* justos dos *swaps* de crédito para $\theta = 8$.

O mesmo efeito observamos quando a medida de dependência entre os nomes é de 80%, para $\theta = 8$, Figura 5.3. Entretanto neste caso, o tamanho do salto no *spread* justo do CDS^2, devido ao

default tanto do nome 1 como do nome 3, é maior do que no caso anterior, além disso, o *spread* justo aumenta de forma mais acentuada. Isto ocorre devido à maior dependência entre os nomes.

O mesmo efeito verifica-se no *spread* do nome 3, no instante e após o default do nome 1. Portanto, quando a dependência entre os nomes é alta, o impacto do default de um nome é grande nos *spreads* dos nomes que sobreviveram.

Considerando os mesmos derivativos, na Figura 5.4, temos os valores descontados dos *swaps* de crédito com *spreads* justos no instante inicial $t = 0$, para $\theta = 8$, cujos valores são dados pela tabela a seguir:

	CDS^{*1}	CDS^{*2}	CDS^{*3}	FtD^{*}
spread justo	0,183	0,030	0,034	0,190

onde o *swap* FtD tem a mesma data de vencimento e freqüência de pagamento do *spread* dos CDSs.

Podemos verificar o mesmo efeito de dependência entre os nomes observado na Figura 5.3 dos *spreads* justos dos *swaps* de crédito. No primeiro instante de default, devido ao nome 1, os valores CDS^{*2} e CDS^{*3} têm um salto e os *swaps* de crédito no nome 1 e FtD são liquidados e seus valores passam a ser constantes pois desprezamos o efeito da taxa de juros.

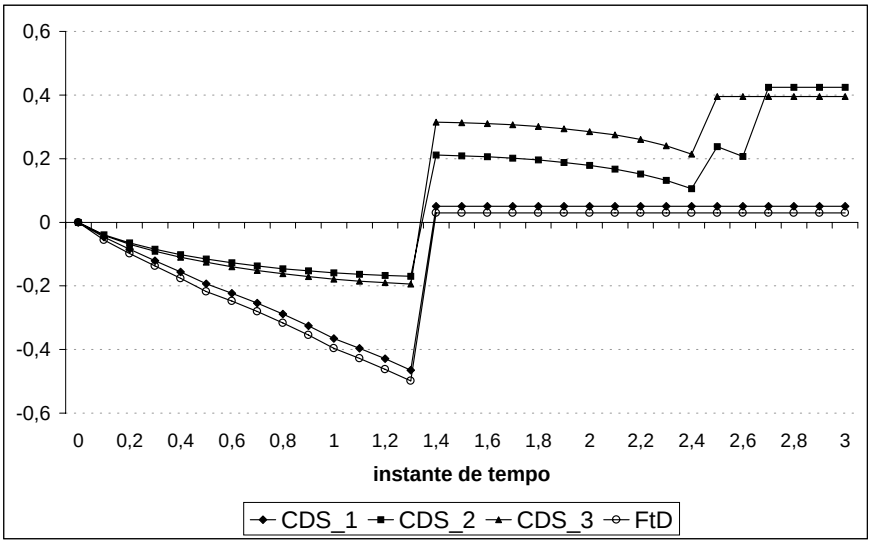

Figura 5.4: Valores descontados dos derivativos de crédito.

Pela Proposição 3.7, do Capítulo 3, estes valores são determinados pela diferença entre o valor pago

pelo contrato e o valor recebido em caso de default, do ponto de vista do comprador do derivativo, ou seja, até o instante do primeiro default, os valores dos derivativos negativos significam que os valores pagos pela proteção são maiores do que os valores que os compradores dos contratos recebem em caso de default, isto é, $\pi_i^{vp}(t) > \pi_i^{vr}(t)$, $i = 1, 2, 3$, e equivalentemente para o *swap* FtD.

Entretanto, após o primeiro default estes valores passam a ser positivos, o que significa que, para $\tau_i > t$, a probabilidade do comprador do CDS^i receber o valor da recuperação pelo default aumenta, diminuindo por sua vez a probabilidade dele pagar os *spreads* futuros.

Os valores positivos do CDS^3 e do *swap* FtD após o primeiro default representam que neste caso os compradores destes contratos tiveram um saldo positivo fazendo a proteção contra o default. Isto também é observado com os demais *swaps* de crédito após o default dos correspondentes nomes.

5.3 Hedge Dinâmico do *Swap* FtD

Nesta seção apresentamos os resultados obtidos na simulação do hedge de um *swap* FtD com três nomes para os casos analisados nos Capítulos 2, 3 e 4, que denominamos estratégia de hedge I, II, III, respectivamente.

Na estratégia de hedge III, a equação diferencial estocástica (4.1) que descreve o processo da taxa de juros pelo modelo de CIR não possui uma solução explícita, logo a simulação da taxa pode ser feita através de um método numérico, como por exemplo, o Metódo de Euler.

Entretanto este método não garante que a taxa de juros obtida numericamente é não-negativa como deveria ser. Por outro lado, a densidade de transição deste processo da taxa de juros é conhecida. A distribuição de r_t dada a taxa r_u, para $u < t$, é uma qui-quadrado não-central[4], logo esta propriedade pode ser utilizada para simular o processo da taxa de juros de forma exata[5].

Os valores dos parâmetros da taxa de juros utilizados são dados pela tabela a seguir.

Tabela 5.1: Modelo de CIR para a taxa de juros

taxa de reversão à média (κ)	3%
taxa de juros a longo prazo (θ)	2%
volatilidade (σ)	2%

Consideramos que a taxa de juros inicial é $r_0 = 5\%$ ao ano. Na Figura 5.5 temos o gráfico da simulação da taxa de juros no período de três anos.

[4] Ver Cox, Ingersoll e Ross [4].
[5] Para o procedimento da simulação deste processo, ver Glasserman [11].

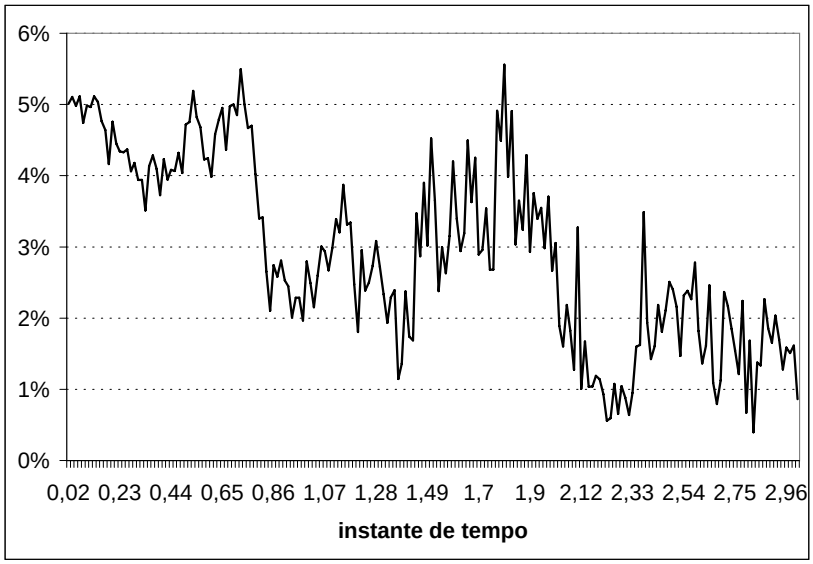

Figura 5.5: Simulação da taxa de juros.

Nas estratégias de hedge I e II em que a taxa de juros é constante consideramos r igual à taxa de juros inicial do modelo de CIR, isto é, 5% ao ano.

Para a simulação do hedge dinâmico do *swap* FtD com três nomes, consideramos os derivativos de crédito com as seguintes características:

Data de vencimento dos contratos: 3 anos.

Freqüência de pagamento do *spread*: semestral.

Função de sobrevivência: Cópula de Clayton com parâmetro $\theta = 8$.

Nome (i)	1	2	3
pseudo-intensidade de default (λ_i)	0,07	0,05	0,06
taxa de recuperação (δ_i)	0,40	0,40	0,40

A seguir apresentamos os resultados obtidos em 5000 simulações de Monte Carlo. Nos gráficos as barras verticais representam o intervalo de confiança da quantidade de CDS na estratégia de hedge para o nível de confiança de 99%.

Estratégia de hedge I

Na Figura 5.6 temos a estratégia de hedge do *swap* FtD para o caso analisado no Capítulo 2, onde o instrumento de hedge é o *swap* de crédito e o pagamento da taxa de recuperação é feito na data de vencimento, caso o default ocorra antes do fim do contrato.

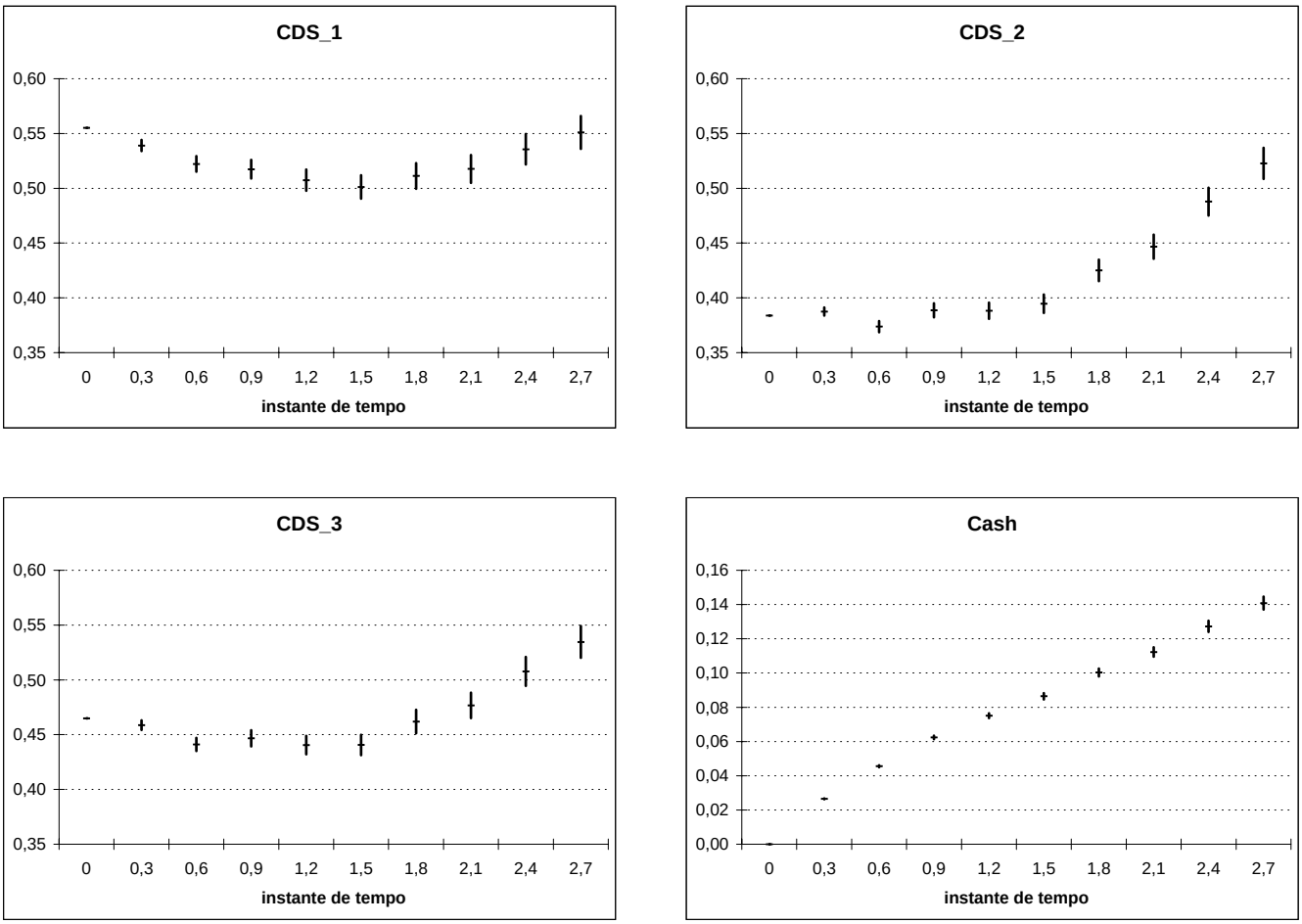

Figura 5.6: Hedge do *swap* FtD utilizando o CDS.

Observamos que quanto maior a pseudo-intensidade de default, maior é a quantidade de CDS neste nome na estratégia de hedge. Neste caso, a quantidade de CDS^1 é maior e a de CDS^2 menor para o hedge dinâmico do *swap* FtD.

Ao longo do período do contrato, a diferença entre as quantidades de CDS^1 e CDS^2 diminui.

Estratégia de hedge II

Para o caso analisado no Capítulo 3, em que o instrumento de hedge do *swap* FtD é a rolagem contínua de CDS e o pagamento da taxa de recuperação é feita no instante de default, o resultado da simulação é dado pela Figura 5.7.

Assim como no caso anterior, a quantidade de CDS na estratégia de hedge do *swap* FtD é maior para o nome com maior pseudo-intensidade de default, pois a probabilidade de default deste nome é maior.

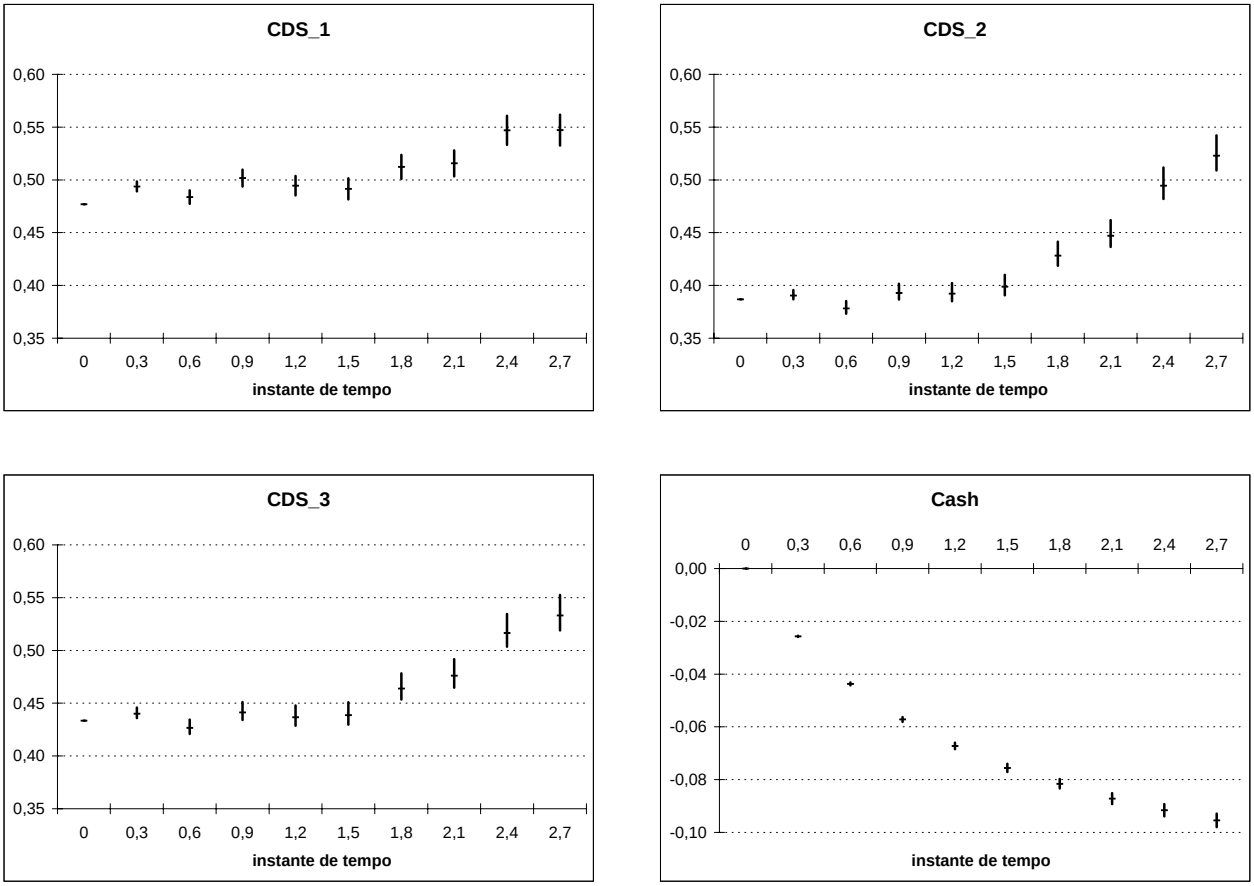

Figura 5.7: Hedge do *swap* FtD com a rolagem contínua de CDS.

Neste caso, o vendedor do *swap* FtD deve vender *cash* enquanto que na estratégia do Capítulo 2 ele compra este ativo. Isto ocorre porque a quantidade de *cash* é determinada em função dos valores dos instrumentos de hedge que são diferentes nos dois casos.

Estratégia de hedge III

No contexto em que a taxa de juros é estocástica, Capítulo 4, a estratégia de hedge obtida pela simulação é apresentada pela Figura 5.8.

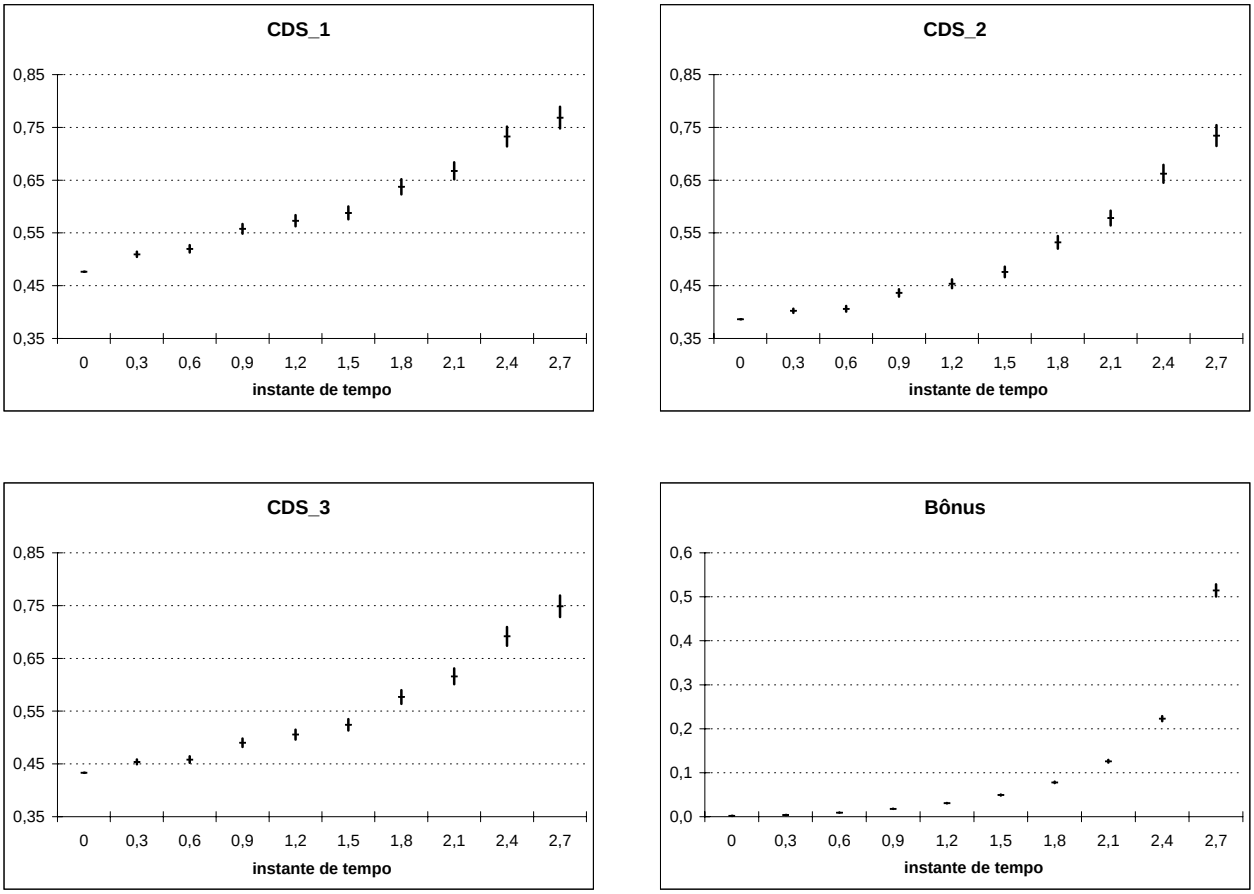

Figura 5.8: Hedge do *swap* FtD no contexto em que a taxa de juros é estocástica.

Assim como nos resultados dos casos anteriores, na estratégia de hedge, a quantia de *swap* de crédito na rolagem contínua é maior para o nome com maior pseudo-intensidade de default, mesmo quando há o fator de incerteza da taxa de juros, devido à hipótese que a taxa de juros não tem influência sobre o default dos nomes.

5.4 Análise do Parâmetro da Cópula

Nesta seção analisamos o parâmetro da cópula de Clayton na estratégia de hedge do *swap* FtD. Iniciamos com a análise de sensibilidade do parâmetro θ na Subseção 5.4.1. Em seguida, na Subseção 5.4.2 obtemos o comportamento da estratégia conforme a dependência entre os nomes.

Para isto, utilizamos a estratégia de hedge desenvolvida no Capítulo 3 e consideramos que os derivativos de crédito possuem as mesmas características escritas na Seção 5.3.

5.4.1 Análise de Sensibilidade

Reduzindo em 1% o valor do parâmetro θ, para $7,92$, a quantidade de *swaps* de crédito na estratégia de hedge diminui após os primeiros instantes analisados, conforme podemos verificar pela diferença relativa entre as estratégias com relação à estratégia $\theta = 8$, representada na Figura 5.9.

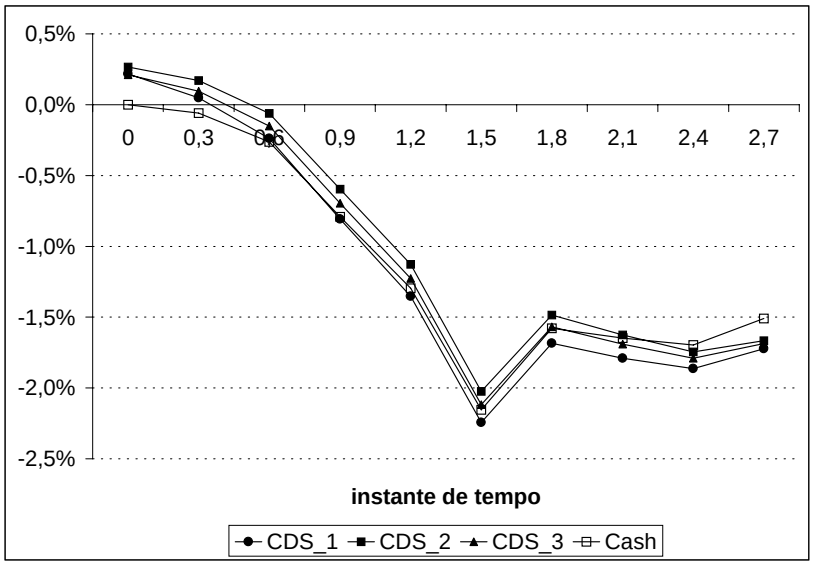

Figura 5.9: Diferença relativa entre as estratégias com relação à estratégia $\theta = 8$.

Até a metade do período dos contratos, a redução da estratégia de hedge do *swap* FtD é acentuada. Após este instante, a diferença permanece entre $1,5$ e 2%, ou seja, após o instante $t = 1,5$ a sensibilidade da estratégia de hedge diminui.

5.4.2 Estratégia conforme a Dependência

Conforme vimos na Seção 5.2, a dependência entre os nomes é determinada pelo parâmetro θ da cópula de Clayton. A seguir, apresentamos os resultados da simulação para dois valores de θ nos casos em que a dependência é baixa e média e comparamos com o resultado da Seção 5.3.

Para $\theta = 0,02$, a dependência entre os nomes é de 1%. A estratégia de hedge é dada pela Figura 5.10.

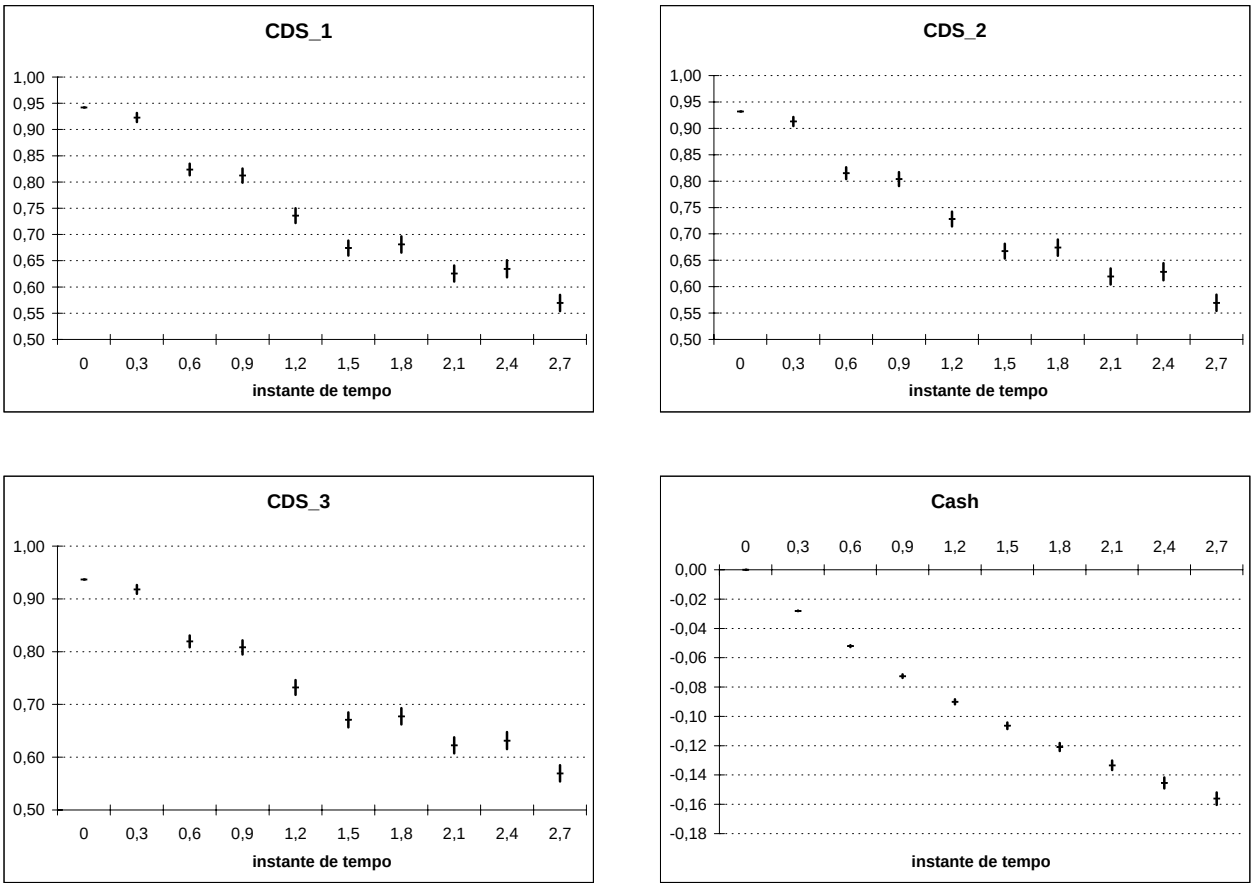

Figura 5.10: Hedge do *swap* FtD para $\theta = 0,02$.

Verificamos que no instante inicial as quantidades de CDSs nos três nomes são próximas de $0,95$. Isto se deve ao fato do tau de Kendall ser baixo, 1%, ou seja, a dependência entre os nomes é pequena.

Conforme observamos no gráfico dos *spreads* justos dos CDSs, no caso em que a dependência é de 1%, Figura 5.1, o default de um nome tem um impacto muito pequeno sobre os *spreads* dos demais

nomes. No caso extremo em que os nomes são independentes, para o hedge do *swap* FtD contra o risco de default do nome i é necessário somente CDS no nome i, justificando desta forma a quantia de CDS próximo a um quando $\theta = 0,02$.

Para o parâmetro da cópula de Clayton $\theta = 2$, o tau de Kendall é de 50%. O resultado da simulação é aresentado na Figura 5.11.

Assim como no caso anterior, as quantidades de CDSs diminuem ao longo do tempo, porém a estratégia de hedge no instante inicial requer menos *swaps* de crédito devido à dependência entre os nomes. Através da Figura 5.2, verificamos que o *spread* do nome j tem um salto no instante de default do nome i, $i \neq j$. Logo, o risco de default do nome i no valor do *swap* FtD é eliminado com a estratégia de hedge envolvendo os três CDSs.

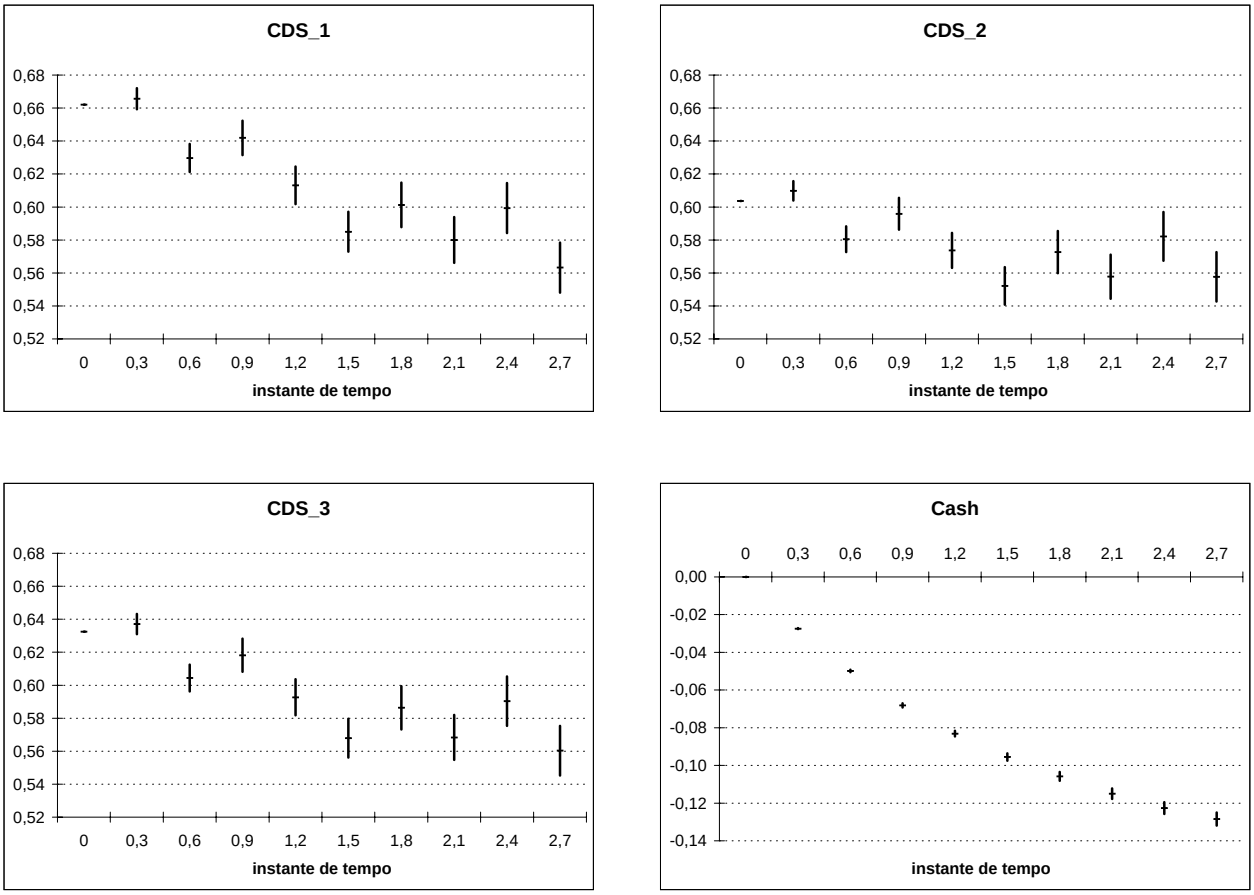

Figura 5.11: Hedge do *swap* FtD para $\theta = 2$.

Comparando com o resultado da estratégia em que os nomes têm alta dependência, $\theta = 8$, Figura 5.7, podemos observar que as quantidades de CDSs no instante inicial são menores do que no caso $\theta = 2$. Ao longo do tempo, a estratégia requer mais *swaps* de crédito, comparado com as quantidades no instante inicial, de forma que próximo ao vencimento dos contratos a quantidade de *swap* de crédito no nome com maior pseudo-intensidade de default, no caso o CDS^1, é próxima às quantidades obtidas nos casos em que $\theta = 0,02$ e 2.

Portanto, através dos resultados obtidos na simulação podemos concluir que no instante inicial, quanto maior a dependência, menor a quantidade de *swaps* de crédito na rolagem contínua. Próximo à data de vencimento dos contratos, a quantidade de *swaps* de crédito do nome com maior pseudo-intensidade de default é muito próxima para os diferentes níveis de dependência.

Capítulo 6

Conclusões

A escolha do instrumento de hedge é fundamental para imunizar o derivativo de crédito contra os riscos envolvidos no contrato.

Os valores dos derivativos de crédito foram definidos de forma que o hedge eliminasse de fato todos os riscos envolvidos no *swap first-to-default*, mencionados no Capítulo 1, o que não ocorre em Riboulet [20], uma vez que este define o *payoff* dos derivativos em termos apenas da taxa de recuperação.

No caso em que os *payoffs* dos derivativos de crédito são modelados em função do *spread* (constante) e os nomes são dependentes entre si, os *swaps* de crédito não são instrumentos de hedge adequados para o *swap first-to-default*, uma vez que não consideram o risco de *spread*, acarretando em perdas para o investidor, conforme foi visto no Capítulo 2.

Uma alternativa, proposta por Schmidt [22], é a utilização da rolagem contínua de CDS, Capítulo 3, que cumpre com os objetivos do hedge, eliminando todos os riscos envolvidos no *swap first-to-default* e além disso, a estratégia obtida gera caixa necessário e suficiente para que no instante do primeiro default, o vendedor do *swap* FtD cumpra com todas as obrigações dos contratos e saia dos $(n-1)$ CDSs correspondentes aos nomes que sobreviveram e foram utilizados no hedge, sob as condições do mercado.

O principal resultado, a estratégia de hedge dinâmico do *swap* FtD, foi obtida através do modelo baseado na intensidade de default no qual o principal objetivo foi considerar a dependência entre os nomes de forma a eliminar o risco de correlação entre os nomes, que é característico do contrato do tipo *swap* de cesta de crédito (*basket default swap*), no qual se inclui o *swap first-to-default*.

A intensidade de default de um nome foi modelada conforme os resultados de Schönbucher [24], no qual esta intensidade é determinada considerando-se a informação sobre o default de todos os

nomes. E ao utilizarmos um processo indicador de default, isto é, um processo pontual com um salto, temos que o processo compensado é um martingal (Proposição 2.2), sendo esta uma das principais contribuições deste trabalho na modelagem do risco de contágio de default.

Este resultado foi fundamental para o uso do Teorema de Representação de Martingais no desenvolvimento da estratégia de hedge dinâmico do *swap* FtD com n nomes, sendo esta, solução de um sistema linear, Proposições 3.10 e 4.10.

Ao contrário do trabalho de Schmidt [22], consideramos que o *spread* do *swap* de crédito é modelado de forma endógenea ao modelo, assim como o salto no valor do derivativo de crédito no instante de default de um nome. Para isto, utilizamos técnicas do cálculo estocástico para processos pontuais, o que envolve principalmente o conceito de processos semimartingais.

Conforme foi proposto por Schmidt [22], a rolagem contínua de *swap* de crédito pode ser utilizada também para o hedge dinâmico de um *swap k-to-default*.

6.1 Problemas em Aberto

Com relação ao hedge de um derivativo de crédito podemos citar os seguintes problemas em aberto:

- Considerar que a taxa de juros influência o default de um nome, ou seja, o processo da taxa de juros é dependente dos processos indicadores de default dos nomes.
- Desenvolvimento de uma estratégia de hedge dinâmico de um CDO (*collateralized debt obligation*).

Referências Bibliográficas

[1] Bielecki, T. e M. Rutkowski, *Credit Risk Modeling, Valuation and Hedging*. Springer-Verlag, 2004. 4

[2] Brémaud, P., *Point Processes and Queues, Martingale Dynamics*. Springer-Verlag, 1981. 16, 18, 22

[3] Cherubini, U., E. Luciano e W. Vecchiato, *Copula Methods in Finance*. John Wiley & Sons, 2004. 121, 122

[4] Cox, J. C., J. E. Ingersoll e S. A. Ross (1985), *A theory of the term structure of interest rates*, Econometrica, 53, 385-407. 94, 128

[5] Dudewicz, E. J. e S. N. Mishra, *Modern Mathematical Statistics*. John Wiley & Sons, 1988. 29

[6] Duffie, D. e K. J. Singleton (1998), *Ratings-based term structures of credit spreads*. Working paper, Stanford University. 4

[7] Duffie, D., *Dynamic Asset Pricing Theory*. Princeton University Press, 3ª edição, 2001.

[8] Duffie, D. e K. J. Singleton, *Credit Risk - Pricing, Measurement and Management*. Princeton University Press, 2003.

[9] Georges, P., A. G. Lamy, E. Nicolas; G. Quibel e T. Roncalli (2001), *Multivariate survival modelling: a unified approach with copulas*, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais. 120

[10] Gill, R. D. (1992), *Multivariate survival analysis*, Theory of Probability and Its Applications, vol. 37(2), 284-301. 29

[11] Glasserman, P., *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer, 2003. 128

[12] Jacod, J. e A. N. Shiryaev, *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Springer - Verlag, 2ª edição, 2003. 66, 99

[13] Klebaner, F. C., *Intoduction to Stochastic Calculus with Application*. Imperial College Press, 2ª edição, 2005.

[14] Lando, D. (1998), *On Cox processes and credit risky bonds*. Review of Derivatives Research, 2, 99-120. 4

[15] Lando, D., *Credit Risk Modeling - Theory and Application*. Princeton University Press, 2004.

[16] McNeil, A. J., R. Frey e P. Embrechts, *Quantitative Risk Management*. Princeton University Press, 2005.

[17] Merton, R. C. (1974), *On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates*. Journal of Finance 29, 449-470. 3

[18] Nelsen, R. B., *An Introduction to Copulas*. Lecture Notes in Statistics, 139. Springer, 1998. 119

[19] Protter, P. E., *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer -Verlag, 2ª edição, 2005.

[20] Riboulet, G. e D. Kurtz (2003), *Dynamic hedging of credit derivatives: a first approach*, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais. 4, 5, 7, 137

[21] Rogers, L. C. G. e D. Williams, *Diffusions, Markov Processes and Martingales*, vol.1. Cambridge University Press, 1994. 98

[22] Schmidt, W. M. (2004), *Hedging basket credit derivatives with CDS*, Frankfurt MathFinance Workshop. 4, 5, 57, 65, 137, 138

[23] Schönbucher, P. J. (1998), *Term structure modelling of defaultable bonds*. Review of Derivatives Research, 2, 161-192. 4

[24] Schönbucher, P. J. e D. Schubert (2001), *Copula-dependent default risk in intensity models*. Working paper, Department of Statistics, Bonn University. 3, 4, 17, 117, 120, 137

[25] Schönbucher, P. J., *Credit Derivatives Pricing Models*. John Wiley & Sons, 2003.