Existência e Destruição de Toros Invariante, Para Uma Certa Família de Sistemas Hamiltonianos no R4

Julio Cezar de Oliveira Andrade

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Doutor em Ciências

Programa: Matemática Aplicada
Orientador: Prof. Dr. Manuel Valentim de Pera Garcia
Coorientador: Prof. Dr. Mário Jorge Dias Carneiro

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, 2019

Existência e Destruição de Toros Invariante, Para Uma Certa Família de Sistemas Hamiltonianos no $\mathbb{R}^4$

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 07/06/2019. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Manuel Valentim Garcia (orientador)-IME-USP
- Prof. Dr. Mario Jorge Dias Carneiro - UFMG
- Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo - IME-USP
- Prof. Dr. Pedro Antonio Santoro Salomão - IME-USP
- Prof. Dr. Ricardo Miranda Martins - UNICAMP

AGRADECIMENTOS

A Deus, primeiramente.

À minha família, especialmente aos meus pais, Lovidio e Detinha, ao tio Baial e ao amor da minha vida, a Dani.

Aos meus orientadores Manuel Valentim de Pera Garcia e Mario Jorge Dias Carneiro, por todo apoio, paciência e por acreditarem em mim. Agradeço à Professora Sonia Regina Leite Garcia pelo constante apoio, desde a graduação até hoje. Agradeço ao Professor Jorge Sotomayor por sempre me incentivar e pelas monitorias.

Aos membros da banca, Clodoaldo Ragazzo, Pedro Salomão e Ricardo Miranda, pelas dúvidas respondidas, sugestões e incentivos.

Aos Professores que, mesmo sem me conhecer, respondiam os meus e-mails ao longo desses anos de estudo, entre eles, Marie-Claude Arnaud, Alfonso Sorrentino, Henrique Bursztyn, Daniel Tausk e Ivan Struchiner.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

A todos que, direta ou indiretamente, me ajudaram a alcançar este objetivo.

RESUMO

ANDRADE, J. C. de O. **Existência e Destruição de Toros Invariante, Para Uma Certa Família de Sistemas Hamiltonianos no** $\mathbb{R}^4$. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

Estudaremos uma família de sistemas hamiltonianos no $\mathbb{R}^4$, $H_\epsilon : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, satisfazendo certas condições, dependendo de um parâmetro ϵ. Iremos caracterizar algumas condições sobre níveis de energia desse sistema, que nos permitem concluir existência e destruição de toros invariantes, em tais níveis de energia. Além disso, podemos concluir que o fluxo hamiltoniano, restrito a esses níveis de energia, possui entropia topológica positiva.

Palavras-chave: Sistemas Hamiltonianos, nível de energia, toros invariantes, aplicações twist.

ABSTRACT

ANDRADE, J. C. de O. **Existence and Destruction of Invariant Torus, For a Certain Family of Hamiltonian Systems in $\mathbb{R}^4$.** Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

We will study a family of Hamiltonian Systems in $\mathbb{R}^4$, satisfyng certain conditions, $H_\epsilon : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, depending of a parameter ϵ. We will characterize some conditions about the energy levels of this system, which allow us to conclude existence and destruction of invariant torus, at such energy levels. Moreover, we can conclude that the hamiltonian flow, restricted to these energy level, has positive topological entropy.
Keywords: Hamiltonian Systems, energy level, invariant torus, twist maps.

Sumário

1 Introdução **3**

1.1 Resultados Principais 3

2 Teoria de Sistemas Hamiltonianos. **9**

2.1 Sistemas Hamiltonianos 9

2.2 Geometria Simplética 16

2.3 Análise de Órbitas Periódicas 21

2.4 Aplicações Twist Simpléticas 25

2.5 Teoria de Aubry Mather 31

3 Propriedades Dinâmicas de X_{H_ϵ} **37**

3.1 Alguns resultados relacionados. 37

3.2 Demonstração da Proposição 3.1.1 41

3.3 Construção da Transformação de Poincaré 47

3.4 Algumas Questões 50

4 Mudança Conveniente de Coordenadas. **53**

4.1 A Forma Normal de Birkhoff 53

4.2 Aplicando o Teorema 4.1.1 às Aplicações de Poincaré 56

4.3 Algumas Questões em coordenadas twist. 57

5 O Primeiro Invariante de Birkhoff **59**

5.1 Fórmula para o Primeiro Invariante de Birkhoff. 59

5.2 A Aplicação ψ_0 de uma forma conveniente. 61

5.3 Análise do Primeiro Invariante de Birkhoff para ψ_0 65

6 Destruição de Curvas Invariantes. **69**

6.1 Critério de Melnikov 69

6.2 Critério de Melnikov Atraves da Função Geradora. 73

7 A Função de Melnikov na Seção **75**
7.1 Algumas considerações iniciais. 75
7.2 Análise do termo $\bar{M}_1$. 77
7.3 Análise do termo $\bar{N}_1$ 82
7.4 Algumas observações sobre a função $\bar{L}_1$ 83
7.5 Análise da Função A_1. 85
7.6 As Derivadas da Função A_1. 90

8 Destruição de Curvas Invariantes. **93**
8.1 A condição de Melnikov a partir das soluções explícitas de X_{H_1}. 93
8.2 Análise do termo relacionado a μ_1 98
8.3 As singularidades da função μ_1 102
8.4 A Contribuição de μ_1 ao Somatório. 110
8.5 Conclusão a respeito da destruição de curvas invariantes . . . 116
8.6 Algumas Observações Finais 118

A As derivadas do campo f_1. **121**
A.1 Reescrevendo as Transformações de Poincaré 121
A.2 As Matrizes $\Phi_\epsilon(t)$ 126
A.3 Voltando a derivada de $\bar{G}_1$. 131
A.4 Análise dos Coeficientes da Equação A.10. 133
A.5 Cálculo das derivadas de A_1 139

B Análise da subvariedade M_2 **143**

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo, introduzimos a família de sistemas hamiltonianos que estudaremos neste texto e apresentamos os enunciados dos resultados principais.

1.1 Resultados Principais

Consideremos a seguinte família de Hamiltonianas, $H_\epsilon : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, dependendo de um parâmetro ϵ, dada por:

$$H_\epsilon(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + \frac{\alpha^2 x_1^2}{2} - \frac{\nu^2 x_2^2}{2} + \frac{b_1 x_1^4}{4} + \frac{b_2 x_2^4}{4} - R_\epsilon(x_1, x_2) \quad (1.1)$$

Onde as seguintes condições são satisfeitas:

- α, $\nu \neq 0$ e b_1, $b_2 > 0$;
- A função $R_\epsilon = R_\epsilon(x_1, x_2)$ é analítica real, tendo a seguinte forma:

$$R_\epsilon(x_1, x_2) = \epsilon(x_1^2 x_2^2 + x_1^3 x_2^3 \bar{R}(x_1, x_2))$$

Associado a esta função H_ϵ, temos um campo vetorial X_{H_ϵ}, chamado Campo Hamiltoniano, dado por:

$$X_{H_\epsilon}(x_1, x_2, y_1, y_2) = (y_1, y_2, -\alpha^2 x_1 - b_1 x_1^3 + \partial_{x_1} R_\epsilon, \nu^2 x_2 - b_2 x_2^3 + \partial_{x_2} R_\epsilon)$$

Este campo vetorial dá origem a um fluxo no $\mathbb{R}^4$, indicado por $\phi_t^{H_\epsilon}$, e os conjuntos de nível, da função H_ϵ, são chamados níveis de energia e eles são invariantes pelo fluxo $\phi_t^{H_\epsilon}$. A origem $(0, 0, 0, 0)$ é uma singularidade do campo X_{H_ϵ}, localizada no nível zero de energia. Os autovalores de $dX_{H_\epsilon}(0, 0, 0, 0)$

são $\{\nu, -\nu, i\alpha, -i\alpha\}$. Portanto, a origem $(0,0,0,0)$ é uma singularidade do tipo sela-centro, localizada no nível zero de energia. Isso vale para qualquer valor do parâmetro ϵ. Sistemas Hamiltonianos com um equilíbrio sela-centro é um tópico muito explorado na literatura. Alguns trabalhos importantes, sobre esse tema, são [18], [25], [24], [27] e [26].

O objetivo deste trabalho é estudar algumas propriedades da dinâmica dessa família de sistemas hamiltonianos, restrita a certos níveis de energia (níveis de energia que satisfazem algumas condições), quando o valor do parâmetro ϵ é pequeno. A análise será feita a partir de uma órbita periódica Γ_E, fixada em cada nível de energia E, segundo o Lema:

Lema 1.1.1 *Seja $E > 0$. Existe uma curva $\Gamma_E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$, com as seguintes propriedades:*

1. *Γ_E é uma órbita periódica de X_{H_ϵ}, com energia E e período $T = T(E)$, para qualquer valor de parâmetro ϵ.*

2. *A curva Γ_E tem a seguinte forma: $\Gamma_E(t) = (0, x_2(t), 0, y_2(t))$.*

Esse lema será provado no capítulo 3. Para cada $E > 0$, esta órbita Γ_E é escolhida, por meio de uma análise do campo X_{H_ϵ} sobre o plano (invariante) $\{x_1 = y_1 = 0\}$. É fundamental notar que a órbita Γ_E de X_{H_ϵ} é a mesma (como uma curva no $\mathbb{R}^4$), tem o mesmo período e a mesma energia, para qualquer valor de parâmetro ϵ. Em relação a esta órbita, temos:

Teorema 1.1.1 *Sejam $E > 0$ e Γ_E a órbita dada pelo Lema 1.1.1. Suponhamos que o período $T = T(E)$ satisfaça a seguinte condição:*

$$\{\alpha T \neq 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

Então existe $\epsilon_0 = \epsilon_0(E)$, tal que se $|\epsilon| < \epsilon_0$, então valem as seguintes condições:

1. *Γ_E é elíptica no nível de energia $H_\epsilon^{-1}(E)$.*

2. *Existe uma órbita Γ'_E de X_{H_ϵ}, com energia E, hiperbólica no nível de energia, tal que Γ_E e Γ'_E estão linkadas em $H_\epsilon^{-1}(E)$.*

O item 1 do Teorema 1.1.1 nos diz que se αT não for múltiplo inteiro de 2π, então a órbita Γ_E, de X_{H_ϵ}, é elíptica no nível de energia, para $|\epsilon|$ pequeno. O estudo da Transformação de Poincaré dessa órbita de X_{H_ϵ}, no nível de energia, pode ser reduzido ao estudo de um difeomorfismo, que

preserva área, $\psi_\epsilon : \Omega_\epsilon \to \Omega_\epsilon$, onde $\Omega_\epsilon \subseteq \mathbb{R}^2$ é uma vizinhança de $(0,0)$ e este ponto é um ponto fixo elíptico.

Em relação ao item 2 do Teorema 1.1.1, ele afirma que existe uma órbita Γ'_E, de X_{H_ϵ}, com energia E, hiperbólica no nível de energia, tal que Γ_E e Γ'_E formam um enlace de Hopf. A existência dessa órbita hiperbólica, na situação em que o nível de energia é pequeno e uma condição de convexidade no nível zero (o nível do equilíbrio sela-centro) é satisfeita, nos permite fazer uma possível conexão entre os resultados deste trabalho e os resultados de [12] e [13].

A condição do Teorema 1.1.1, em que αT não é múltiplo inteiro de 2π, indica que certos níveis de energia serão excluídos de nossa análise. De fato, teremos que excluir mais níveis de energia (impor mais restrições). Como foi dito acima, o estudo da Transformação de Poincaré da órbita Γ_E, de X_{H_ϵ}, no nível de energia, pode ser reduzido ao estudo de um difeomorfismo, que preserva área, $\psi_\epsilon : \Omega_\epsilon \subseteq \mathbb{R}^2 \to \Omega_\epsilon$, cuja origem é um ponto fixo elíptico. Impondo condições sobre os autovalores de $d\psi_\epsilon(0,0)$, é possível utilizar o Teorema da Forma Normal de Birkhoff (ver [14] e [23]), que nos garante que a expressão de ψ_ϵ, em coordenadas polares (θ, r), tenha uma expressão bem definida, que depende de alguns coeficientes, chamados invariantes de Birkhoff. Na nossa análise, faremos uso de um desses invariantes, o chamado primeiro invariante de Birkhoff. É possível garantir que o Teorema da Forma Normal de Birkhoff possa ser aplicado ao estudo da Transformação de Poincaré de Γ_E, em $H_\epsilon^{-1}(E)$, excluindo-se mais alguns níveis de energia. Tendo em vista isso, definiremos o seguinte conjunto de energias (críticas):

$$J \doteq \{E \in (0, +\infty) : \alpha T \neq 2k\pi, k\pi, \tfrac{k\pi}{2}, \tfrac{2k\pi}{3} : k \in \mathbb{Z}\}$$

Observemos que se $E \in J$, então a hipótese do Terema 1.1.1 é satisfeita. Em relação a uma vizinhança de Γ_E, no nível de energia, podemos afirmar:

Teorema 1.1.2 *Existe uma função*[1] $I_B : J \to \mathbb{R}$, *tal que se* $E \in J$ *e* $I_B(E) \neq 0$, *então existe* $\epsilon_0 = \epsilon_0(E)$, *tal que se* $\mid \epsilon \mid < \epsilon_0$, *então existem toros invariantes, pelo fluxo de* X_{H_ϵ}, *com energia* E, *que se acumulam na órbita* Γ_E.

Em relação a este Teorema, se $E \in J$, a órbita Γ_E, de X_{H_ϵ}, é elíptica no nível de energia e o Teorema da Forma Normal de Birkhoff pode ser utilizado para a correspondente Transformação de Poincaré, $\psi_\epsilon : \Omega_\epsilon \to \Omega_\epsilon$, quando $|\epsilon|$ é pequeno. Em particular, quando $\epsilon = 0$. O primeiro invariante de Birkhoff,

[1] I_B faz referência a invariante de Birkhoff. Assim, $I_B(E)$ representa o primeiro invariante de Birkhoff para o caso $\epsilon = 0$.

para $\epsilon = 0$, pode ser expressado, nessas condições, como uma função da energia E. Definimos esse número real como sendo $I_B(E)$. Isso define a função $I_B = I_B(E)$. Se $I_B(E) \neq 0$, então, para ϵ suficientemente pequeno, o primeiro invariante de Birkhoff correspondente a $\psi_\epsilon : \Omega_\epsilon \to \Omega_\epsilon$, também, é não nulo. Portanto, a aplicação de Poincaré ψ_ϵ, em coordenadas polares, satisfaz uma condição Twist (ver [14]); além disso, ela satisfaz as hipóteses do Teorema do Twist de Moser (ver [23]). Logo, existem curvas fechadas, invariantes por ψ_ϵ, que se acumulam no ponto fixo elíptico $(0,0) \in \Omega_\epsilon$. Essas curvas fechadas e invariantes, quando vistas ao longo da órbita Γ_E, correspondem a toros invariantes, com energia E, que se acumulam em Γ_E. Veremos que no caso $\epsilon = 0$, o domínio de $\psi_0 : \Omega_0 \to \Omega_0$ é inteiramente folheado por curvas fechadas e invariantes por ψ_0, cuja dinâmica de ψ_0, restrita a tais curvas fechadas, é conjugada a uma rotação. Portanto, os toros invariantes do Teorema 1.1.2 podem ser vistos, para o caso $\epsilon \neq 0$, pequeno, como toros sobreviventes do caso $\epsilon = 0$. Poderíamos nos questionar se algum dos toros invariantes, para o caso $\epsilon = 0$, é destruído pela perturbação. Nesse sentido, o próximo Teorema nos dá uma condição suficiente para que alguns desses toros invariantes sejam destruídos, pela perturbação.

Teorema 1.1.3 *Sejam $E \in J$ e Γ_E a órbita periódica do Lema 1.1.1. Suponhamos que as seguintes condições sejam satisfeitas:*

1. $I_B(E) \neq 0$;
2. $\displaystyle\int_0^T x_2^2(s)\sin\{2\alpha(T-s)\}ds \neq 0$;

Então existe $\epsilon_0 = \epsilon_0(E) > 0$, tal que se $|\epsilon| < \epsilon_0$, então existem zonas de instabilidade, em $H_\epsilon^{-1}(E)$, que se acumulam em Γ_E.

Nas hipóteses do Teorema 1.1.3, a órbita Γ_E de X_{H_ϵ} é elíptica no nível de energia, para $|\epsilon|$ pequeno. A correspondente Transformação de Poincaré satisfaz uma condição twist. Na Teoria de Aplicações Twist, uma zona de instabilidade (ver [2]) é uma região anular invariante, cujo interior não contem curvas rotacionais invariantes. Nessas regiões invariantes, ocorrem alguns dos fenômenos mais interessantes relacionados a Teoria de Aplicações Twist, tais como existência de conjuntos de Aubry-Mather (não triviais) e entropia topológica positiva. Assim, as zonas de instabilidade, descritas no Teorema 1.1.3, são regiões invariantes entre toros invariantes (sem toros invariantes em seu interior), com dinâmica twist, se acumulando em Γ_E, dentro do nível de energia. Para provarmos este resultado de destruição de toros invariantes, fazemos uso de um critério perturbativo de destruição de curvas rotacionais

invariantes para aplicações twist. Esse critério (assim como algumas de suas propriedades) está descrito em [28] e [29]. A hipótese 2, do Teorema 1.1.3, está relacionada a este critério.

Diante do resultado do Teorema 1.1.3, temos o seguinte corolário.

Corolário 1.1.1 *Seja $E \in J$ e suponhamos que que as condições do Teorema 1.1.3 sejam satisfeitas. Então, existe $\epsilon_0 = \epsilon_0(E) > 0$, tal que se $|\epsilon| < \epsilon_0$, com $\epsilon \neq 0$, então o fluxo de X_{H_ϵ}, restrito a $H_\epsilon^{-1}(E)$, tem entropia topológica positiva.*

Este resultado segue do Teorema 1.1.3 e de um resultado de [1], que relaciona, para aplicações twist, curvas rotacionais invariantes e entropia topológica positiva.

Ao longo deste texto, destacaremos alguns níveis de energia que satisfazem as nossas hipóteses. De fato, por meio da influência do comportamento dinâmico próximo ao equilíbrio sela-centro $(0, 0, 0, 0)$, localizado no nível zero de energia, mostraremos que "um conjunto grande de valores de energia", próximos ao nível zero, satisfazem as nossas hipóteses.

O texto está organizado da seguinte maneira. No capítulo 2, faremos uma revisão de alguns aspectos da Teoria de Sistemas Hamiltonianos que irão estar presentes ao longo deste texto.

No capítulo 3, iremos estudar algumas propriedades dinâmicas da família de sistemas hamiltonianos, definidos em (1.1). Neste capítulo, provaremos o Lema 1.1.1 e o Teorema 1.1.1. Além disso, definiremos a aplicação de Poincaré para estudo da dinâmica de X_{H_ϵ}, próximo a órbita Γ_E, sobre o nível de energia. Desta forma, teremos uma família de aplicações de Poincaré associadas a órbita Γ_E. Colocaremos algumas questões, relacionadas a essa família de aplicações, que irão conduzir o andamento do restante do texto.

No capítulo 4, estudaremos uma mudança de coordenadas para o estudo das Transformações de Poincaré associadas a órbita Γ_E, via a Forma Normal de Birkhoff. Neste ponto, é colocada a importância de saber se algum invariante de Birkhoff é não nulo. No capítulo 5, estudaremos o primeiro invariante de Birkhoff, para essa família de aplicações. Por meio deste estudo, provaremos o Teorema 1.1.2 e concluiremos que, em certas condições e em coordenadas convenientes, as aplicações de Poincaré, associadas a órbita Γ_E, correspondem a aplicações twist simpléticas exatas. Com o objetivo de provar o Teorema 1.1.3, no capítulo 6, apresentaremos um critério para a análise de destruição de curvas rotacionais invariantes para aplicações twist e o capítulo 7 trata de expressar este critério nas coordenas da seção de Poincaré construída. Parte dos cálculos, envolvidos nessa parte, estão no Apêndice A. É importante destacar que cada curva rotacional invariante, pela aplicação de

Poincaré, corresponde a um toro invariante, pelo fluxo hamiltoniano, sobre o nível de energia.

No capítulo 8, analisaremos, com mais detalhes, o critério de destruição de curvas rotacionais invariantes, estabelecido nas coordenadas da seção, e provamos o Teorema 1.1.3 e o Corolário 1.1.1. O texto contém um segundo apêndice que trata da análise da interseção entre variedades estável e instável, associadas a uma subvariedade invariante normalmente hiperbólica, introduzida no capítulo 2. Este apêndice tem como objetivo dar uma complementar as informações dinâmicas da família de sistemas hamiltonianos, introduzido em (1.1), dadas no capítulo 2.

Em [4] e [5], os autores estudaram fluxos geodésicos em grupos de Lie não compactos. A análise, nestes trabalhos, se reduzem ao estudo de um sistema hamiltoniano com características próximas ao estudado neste texto. O estudo destes dois trabalhos motivou algumas questões que são tratadas no texto.

Capítulo 2

Teoria de Sistemas Hamiltonianos.

O objetivo, deste capítulo, é introduzir alguns conceitos (nomenclaturas) e resultados relacionados a teoria de Sistemas Hamiltonianos, que irão aparecer ao longo desse texto, assim como tratar de alguns exemplos, que podem auxiliar na compreensão do resultado do texto. Os leitores mais familiarizados podem passar, diretamente, ao próximo capítulo.

2.1 Sistemas Hamiltonianos

Suponhamos $H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, função de classe C^2. Associamos, a H, o seguinte campo vetorial:

$$\begin{aligned} X_H : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n) &\mapsto \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, ..., \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, ..., -\frac{\partial H}{\partial q_n} \right) \end{aligned}$$

Este campo é uma campo vetorial de classe C^1, chamado campo hamiltoniano associado a função H, sendo esta função chamada de função hamiltoniana. A equação de Hamilton associada à função H consiste da seguinte equação diferencial ordinária:

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p}, \\ \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial q}. \end{cases}$$

Portanto, uma solução da equação de Hamilton associada a H consiste em uma trajetória do campo Hamiltoniano X_H. Poderíamos, da mesma forma, considerar funções H dependendo do tempo. Ou seja, a função H dependeria de uma variável real a mais t, $H = H(q, p, t)$. Nesse caso, o campo Hamiltoniano seria não-autônomo. Para o caso autônomo, a função H é uma integral primeira do campo hamiltoniano X_H. Assim, os conjuntos de nível da função H, que são chamados níveis de energia do sistema, são invariantes pelo fluxo do campo X_H.

A Teoria de Sistemas Hamiltonianos surgiu como uma formulação alternativa para as Leis de Newton da Mecânica Clássica. Para ilustração disso, consideremos o movimento de uma partícula de massa m, no espaço $\mathbb{R}^n$, de coordenadas $(q_1, ..., q_n)$, submetida à ação de uma força conservativa F. Nesse caso, existe uma função diferenciável $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, talque:

$$F(q) = -\nabla V(q)$$

A função V é chamada energia potencial do sistema. A energia cinética é dada por:

$$E_{cin} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \dot{q}_i^{\,2}}{2}$$

A energia total é dada por $E_T = E_{cin} + V$ e é uma quantidade conservada pelo sistema, ou seja, é uma integral primeira associada a equação de segunda ordem, que está associada à Lei de Newton:

$$\ddot{q}(t) = -\frac{1}{m} \nabla V(q(t)) \tag{2.1}$$

O momento linear da partícula é definido como: $p = m\dot{q}$. Escrevendo a função energia nas variáveis posição e momento, obtemos:

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{2m} + V(q)$$

Então, a equação de Hamilton, associada à função $H = H(q, p)$, é dada por:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{p_i}{m}, \\ \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial V}{\partial q_i}(q). \end{cases}$$

Observemos que esta equação é equivalente à equação (1), diante da relação: $p = m\dot{q}$. De um modo geral, é mais conveniente tratar equações diferenciais de primeira ordem a equações diferenciais de segunda ordem.

Em Sistemas Hamiltonianos, o espaço $\mathbb{R}^{2n}$, das variáveis (q, p) é chamado espaço de fase do sistema. O espaço $\mathbb{R}^n$ das variáveis q é chamado espaço de configuração dos sistema.

Exemplo 2.1.1 *Hamiltoniano associado ao fluxo geodésico de uma métrica hiperbólica no semiplano $y > 0$:*

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{y^2}{4}(p_x^2 + p_y^2).$$

Este exemplo está contido em [19], que contém muitos outros exemplos interessantes. Outros exemplos podem ser encontrados em [3].

Exemplo 2.1.2 *Consideremos a Hamiltoniana $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por:*

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \cos x.$$

Temos que a equação de Hamilton associada é dada por:

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -\sin x. \end{cases}$$

O retrato de fase do campo Hamiltoniano $X_H(x, y) = (y, -\sin x)$ é esboçado na Figura 1.

Os níveis de energia de H corresponde aos conjuntos $S_E = \{(x, y) : y = \pm\sqrt{2(E + \cos x)}\}$. Portanto, para $E \geqslant 1$, S_E será a união de dois gráficos invariantes. Devemos notar que o campo X_H possui as seguintes singularidades:

$$\{Q_n = (2\pi n, 0) : n \in \mathbb{Z}\} \text{ e } \{P_n = ((2n + 1)\pi, 0) : n \in \mathbb{Z}\}$$

Os pontos Q_n são elípticos, enquanto os pontos P_n são hiperbólicos. Os pontos hiperbólicos estão no nível de energia $H = 1$ e vale a seguinte relação entre as variedades invariantes de singularidades hiperbólicas de X_H:

$$W^s(P_n) = W^u(P_{n-1}), \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

Exemplo 2.1.3 *Consideremos, agora, a seguinte Hamiltoniana, dependente do tempo e de um parâmetro ϵ, $H_\epsilon : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por:*

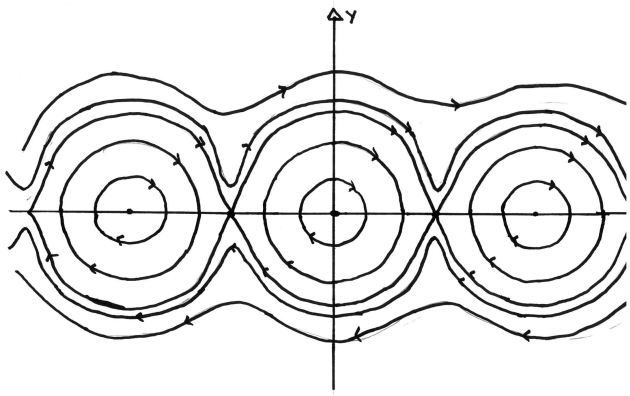

Figura 2.1: Retrato de Fase da equação diferencial do pêndulo.

$$H_\epsilon((x,y),t) = \frac{y^2}{2} - \cos x + \epsilon x \sin \omega t$$

Nesse caso, a equação de Hamilton associada é dada por:

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -\sin x - \epsilon \sin \omega t. \end{cases}$$

Podemos analisar o campo Hamiltoniano X_{H_ϵ} como uma perturbação do campo Hamiltoniano do exemplo anterior, do pendulo, sendo o termo perturbativo dependente periodicamente do tempo. Em casos assim, em que a hamiltoniana é dependente do tempo, ela não será mais uma integral primeira da equação de Hamilton.

É possível mostrar que para ϵ suficientemente pequeno, para todo $n \in \mathbb{Z}$, teremos uma singularidade do campo $P_n(\epsilon)$, dependendo diferenciavelmente do parâmetro ϵ, tal que $P_n(0)$ coincide com as singularidades hiperbólicas do exemplo anterior. Tínhamos $W^s(P_n(0)) = W^u(P_{n+1}(0))$. Porém, em [35], mostra-se que para $\epsilon \neq 0$, pequeno, as variedades invariantes deixarão de coincidir. Além disso, elas passam a se interceptarem transversalmente, ou seja, $W^s(P_n(\epsilon)) \pitchfork W^u(P_{n+1}(\epsilon)) \neq \emptyset$. Este sistema passa, então, a ter um comportamento caótico, conforme discutido em [35].

O próximo exemplo apresenta alguns resultados do sistema hamiltoniano analisado em [5] e [4]. Conforme comentado na seção 1 deste texto, este exemplo motivou algumas das questões deste trabalho.

Exemplo 2.1.4 ***(Hamiltoniana de [4] e [5].)*** *Os trabalhos [5] e [4] tratam do estudo de fluxos geodésicos em grupos de Lie não compactos, associados a métricas invariantes a esquerda. Em particular, considera-se o grupo de Lie T_4, das matrizes de ordem 4 e triangulares superiores, com o elemento 1 na diagonal principal. Em [5], há uma exposição sobre como a dinâmica de certos fluxos geodésicos, invariantes a esquerda, podem ser estudados por meio de uma sistema hamiltoniano no $\mathbb{R}^4$, via um processo de redução simplética. O sistema hamiltoniano obtido, neste processo, é dado pela seguinte hamiltoniana:*

$$2H = x^2 + (X^2 - \tfrac{1}{2})^2 + y^2 + \alpha^2 Y^2 + y^4 - 2X^2Y^2$$

Estamos utilizando as notações de [4] e [5], onde trabalha-se com coordenadas $(X, Y, x, y) \in \mathbb{R}^4$. Assim, a Hamiltoniana pode ser reescrita como:

$$H = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{\alpha^2 Y^2}{2} + \frac{Y^4}{2} - \frac{X^2}{2} + \frac{X^4}{2} - X^2Y^2$$

Em [4] e [5], mostra-se a existência de um horseshoe para essa família de sistemas hamiltonianos (a análise depende do parâmetro α). Apresentaremos, a seguir, as principais etapas neste processo. Seguiremos por partes.

- *Dado $\epsilon > 0$,consideremos a família de aplicações $h_\epsilon : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, definidas por:*

  $$h_\epsilon(X, Y, x, y) = (X, \tfrac{Y}{\sqrt{\epsilon}}, x, \tfrac{y}{\sqrt{\epsilon}})$$

  Segue que h_ϵ conjuga o fluxo do campo X_H ao fluxo do campo F_ϵ, dado por:

  $$F_\epsilon(X, Y, x, y) = (x, y, X - 2X^3 + 2\epsilon XY^2, -\alpha^2 Y + 2YX^2 - 2\epsilon Y^3)$$

  Devemos notar que, apesar de a transformação h_ϵ não estar definida para $\epsilon = 0$, o campo F_ϵ está bem definido para $\epsilon = 0$ e é dado por:

  $$F_0(X, Y, x, y) = (x, y, X - 2X^3, -\alpha^2 Y + 2YX^2)$$

- *Analisemos algumas propriedades do campo F_0. Consideremos a seguinte subvariedade:*

  $$S = \{(X, Y, x, y) \in \mathbb{R}^4 : X = x = 0\}$$

Esta é uma subvariedade invariante pelo fluxo do campo F_0. Além disso, S é normalmente hiperbólica para o fluxo de F_0. Dessa forma, vamos determinar as variedades estável e instável (indicadas, respectivamente, por $W_0^+(S)$ e $W_0^-(S)$). Consideremos a função $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, dada por:

$$h(X, Y, x, y) = x^2 + (X^2 - \tfrac{1}{2})^2$$

Essa função h é uma integral primeira do campo F_0. Além disso, por meio dessa função e analisando o comportamento do campo nas direções (X, x), é possível verificar que:

$$W_0^+(S) = W_0^-(S) = h^{-1}(\tfrac{1}{4})$$

- *A subvariedade S é, ainda, invariante pelo fluxo do campo F_ϵ, para qualquer $\epsilon > 0$. Além disso, S é normalmente hiperbólica para o fluxo de F_ϵ, para qualquer ϵ.*

- *Sobre o conjunto $S \setminus W_0^\pm(S)$, o fluxo de F_0 é dado por:*

$$\begin{cases} X(t) = \pm sech(t + t_0), x(t) = \mp tangh(t + t_0) sech(t + t_0) \\ Y(t) = c_0 Y_0(t + t_0) c_1 Y_1(t + t_0), y = \dot{Y} \end{cases} \tag{2.2}$$

Onde $\{Y_0, Y_1\}$ é uma base do espaço de soluções da seguinte equação diferencial ordinária:

$$Y'' + \{\alpha^2 - 2sech^2(t)\}Y \tag{2.3}$$

Se $Y(0) = Y_{0,j}$ e $\dot{Y}(0) = \dot{Y}_{0,j}$, exige-se:

$$W = Y_{0,0}\dot{Y}_{0,1} - Y_{0,1}\dot{Y}_{0,0} \neq 0$$

- *Para $\epsilon \neq 0$, suficientemente pequeno, temos as subvariedades estável e instável, relacionadas a S, $W_\epsilon^+(S)$ e $W_\epsilon^-(S)$. A análise da interseção entre essas variedades invariantes pode ser feita por meio da função de Melnikov, que mede a "ϵ-separação"entre elas, podendo nos dar informação sobre interseção transversal entre essas variedades. A função de Melnikov pode ser vista como uma função definida sobre $W_0^\pm(S) \setminus S$. Para caracterizar este conjunto, utilizamos as igualdades (2.2) e (2.3), e, assim, épossível trabalhar com coordenadas (t_0, c_0, c_1). Dessa forma, a função de Melnkov pode ser escrita como:*

$$m(t_0, c_0, c_1) = m_{00}c_0^2 + 2m_{01}c_0c_1 + m_{11}c_1^2$$

Onde: $m_{ij} = \int_{\mathbb{R}} \dot{q}(s)Y_i(s)Y_j(s)ds$ *e* $q(s) = 2sech^2(s)$. *Observemos que essa representação, da função de Melnikov, depende da escolha de uma base* $\{Y_0, Y_1\}$ *para o espaço de soluções da equação (2.3).*

Portanto, nessas coordenadas, a função de Melnikov é uma forma quadrática. Pontos onde ocorrem interseção transversal entre $W_\epsilon^+(S)$ *e* $W_\epsilon^-(S)$ *estão relacionados a zeros não degenerados da função* $m = m(t_0, c_0, c_1)$.

- *Em [5], por meio da escolha da seguinte base, para o espaço de soluções de (2.3),* $Y_j(0) = 1 - j$ *e* $\dot{Y}_j(0) = j$, *mostra-se que se* $\alpha \neq 1$, *então há zeros não degenerados da função de Melnikov. Ou seja, há interseção transversal entre* $W_\epsilon^+(S)$ *e* $W_\epsilon^-(S)$, *para* ϵ *suficientemente pequeno.*

  Em [4], "por meio de uma escolha mais específica"de base $\{Y_0, Y_1\}$, *mostra-se que vale a mesma conclusão para qualquer* $\alpha \in \mathbb{R}$.

  Portanto, o fluxo do campo F_ϵ *tem um horseshoe e o mesmo vale para o campo hamiltoniano* X_H. *Assim, o fluxo de* X_H *tem entropia topológica positiva.*

Sistemas Hamiltonianos podem ser definidos em espaços mais gerais que os espaços euclidianos $\mathbb{R}^{2n}$. Observemos que o campo Hamiltoniano X_H, associado à função $H : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$, pode ser obtido do campo gradiente de H, ∇H, por meio de:

$$X_H = J_0\nabla H, \text{ onde: } J_0 = \begin{pmatrix} 0_n & \text{Id} \\ \text{-Id} & 0_n \end{pmatrix}.$$

Observemos a relação direta entre o campo X_H e a função H.

$$d_xH(v) = \langle \nabla H(x); u\rangle = \langle -J_0X_H(x), v\rangle = \langle X_H(x); J_0v\rangle$$

Diante disso, definimos a seguinte aplicação bilinear em $\mathbb{R}^{2n}$:

$$\begin{aligned} \Omega : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \langle u; J_0v\rangle \end{aligned}$$

Segue que:

$$dH = i_{X_H}\Omega \tag{2.4}$$

Essa relação determina o campo X_H por meio da aplicação bilinear Ω. Essa análise nos permite estender a noção de sistemas hamiltonianos para espaços mais gerais: as variedades simpléticas.

2.2 Geometria Simplética

Algumas propriedades, relacionadas a Sistemas Hamiltonianos, tais como autovalores de uma aplicação de Poincare de uma órbita periódica, podem ser melhor compreendidas num "contexto simplético". Uma ótima introdução a geometria simplética pode ser encontrada em [31]. Uma variedade simplética consiste de uma variedade diferenciável, na qual o espaço tangente em todo ponto possui uma estrutura de espaço vetorial simplético que varia diferenciavelmente com o ponto. Sendo assim, definiremos, inicialmente, um espaço vetorial simplético.

Definição 2.2.1 *Um espaço vetorial simplético é um par (V, Ω_0), onde V é um espaço vetorial real de dimensão m e $\Omega_0 : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação bilinear e anti-simétrica que satisfaz:*

$$\Omega_0^* : V \longrightarrow V^*$$

Definida por $\Omega_0^*(v) = \Omega_0(v, \cdot\,)$, é não degenerada, ou seja, é um isomorfismo.

Espaços vetoriais simplético possuem dimensão par. Para ser mais preciso, se (V, Ω_0) é um espaço vetorial simplético, então existe uma base de V, $\{e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_n\}$, satisfazendo a seguinte condição:

$$\Omega_0(e_i, f_j) = \delta_{ij} \text{ e } \Omega_0(e_i, e_j) = 0 = \Omega_0(f_i, f_j), \forall i, j.$$

Em tal base, a aplicação Ω_0 se escreve da seguinte forma:

$$\Omega_0(u, v) = \langle u, J_0 v \rangle, \text{ onde, } J_0 = \begin{pmatrix} 0_n & \text{Id} \\ \text{-Id} & 0_n \end{pmatrix}.$$

Se (V_1, Ω_1) e (V_2, Ω_2) são espaços vetoriais simpléticos, então um simplectomorfismo linear, entre eles, consiste de um isomorfismo linear satisfazendo: $T^*\Omega_2 = \Omega_1$. A existência da base acima implica que todo espaço vetorial simplético é simplectomorfo a $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$. O conjunto dos simplectomorfismos linear de um espaço vetorial simplético pode ser indentificado com:

$$Sp(n) = \{A \in GL(2n, \mathbb{R}), AJ_0A = J_0\}$$

Trata-se de um grupo com a operação de multiplicação de matrizes. Mais a frente, quando falarmos de autovalores da aplicação de Poincaré de uma órbita periódica de um sistema Hamiltoniano, voltaremos a destacar algumas propriedades deste grupo.

É importante destacar alguns tipos de subespaços vetoriais de um espaço vetorial simplético. Ao contrário de um produto interno, que quando restrito a um subespaço vetorial continua sendo um produto interno, a forma simplética pode deixar de ser uma forma simplética.

Sejam (V, Ω) um espaço vetorial simplético e $W \subseteq V$ um subespaço vetorial. Associado ao subespaço W, definimos o seguinte outro subespaço, chamado ortogonal simplético de W:

$$W^{\perp} = \{v \in V : \Omega(v, u) = 0, \forall u \in W\}$$

Assim, dizemos que:

- W é isotrópico, se $W \subseteq W^{\perp}$;
- W é coisotrópico, se $W^{\perp} \subseteq W$;
- W é isotrópico, se $W = W^{\perp}$;

Não é difícil verificar que vale $(W^{\perp})^{\perp} = W$ e também vale a seguinte relação:

$$dimV = dimW + dimW^{\perp} \tag{2.5}$$

Diante dessa pequena introdução aos espaços vetoriais simpléticos, passemos às variedades simpléticas.

Definição 2.2.2 *Uma variedade simplética é um par (M, ω), onde M é uma variedade simplética e $\omega \in \Omega^2(M)$ é uma 2-forma fechada e não-degenerada.*

Observemos que se (M, ω) é uma variedade simplética, então (T_pM, ω_p) é um espaço vetorial simplético para todo $p \in M$. Logo, a dimensão da variedade M tem de ser par. Além disso, M tem que ser orientável, pois ω^n define uma forma de volume sobre M.

Exemplo 2.2.1 *$(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ é uma variedade simplética, onde utilizando coordenadas $(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$ para $\mathbb{R}^{2n}$, ω_0 é dado por:*

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i$$

Exemplo 2.2.2 *Consideremos a 2-esfera $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. Definimos:*

$$\omega_p(u, v) = \langle p; u \times v \rangle,$$

onde, $u, v \in T_p\mathbb{S}^2$, $p \in \mathbb{S}^2$. $(\mathbb{S}^2, \omega)$ *é uma variedade simplética.*

É importante destacar que a única esfera que admite uma estrutura simplética é a esfera de dimensão 2. Há restrições de natureza topológica (além da dimensão). Ver [21] para maiores detalhes.

Exemplo 2.2.3 *(Fibrados Cotangentes)*
Seja M^n *uma variedade e consideremos o seu fibrado cotangente* $\pi : T^*M \longrightarrow M$. *Consideremos a 1-forma em* T^*M*:*

$$\alpha_{(x,p)}(v) = p(d_{(x,p)}\pi(v))$$

Essa 1-forma é chamada 1-forma de Liouville. A 2-forma:

$$\omega = -d\alpha$$

define uma estrutura simplética em T^*M.
Localmente em T^*M, *com coordenadas* $(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$, *teremos:*

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i \text{ e } \omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i$$

Um fato importante sobre as variedades simpléticas é que, se duas delas possuem a mesma dimensão, então elas são, localmente, equivalentes. Para formalizar isso, vamos definir essa noção de equivalência.

Definição 2.2.3 *Sejam* (M_1, ω_1) *e* (M_2, ω_2) *variedades simpléticas. Dizemos que um difeomorfismo* $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ *é um simplectomorfismo se* $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$.

Observemos que se $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ é um simplectomorfismo, então sua diferencial $d_p\varphi : T_pM_1 \longrightarrow T_{\varphi(p)}M_2$ é um simplectomorfismo linear.

O próximo teorema, chamado Teorema de Darboux, nos diz que quaisquer duas variedades simpléticas, com mesma dimensão, são localmente simplectomorfas.

Teorema 2.2.1 *Sejam* (M^{2n}, ω) *variedade simplética e* $p \in M$. *Existem* V_p, *vizinhança de* p *em* M, V_0, *vizinhança da origem em* $\mathbb{R}^{2n}$ *e um difeomorfismo* $\varphi : V_0 \longrightarrow V_p$ *tal que:*

$$\varphi^*\omega = \omega_0, \text{ onde } \omega_0 \text{ é a forma canônica.}$$

Diante de uma estrutura simplética em uma variedade, podemos falar em sistemas Hamiltonianos na variedade. A definição é muito natural, tendo em vista a equação (2).

Definição 2.2.4 *Sejam (M^{2n}, ω) variedade simplética e $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O Campo Hamiltoniano associado a função H, denotado por X_H, é definido pela seguinte relação:*

$$dH = i_{X_H}\omega.$$

Observação 2.2.1 *Observemos que, como ω é não-degenerada, existe e é único um campo vetorial definido por essa igualdade. O fato de ω ser fechada nos garante que o fluxo, associado ao campo X_H, é um simplectomorfismo em todos os instantes.*

Se consideramos a variedade simplética $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, a definição acima coincide com a definição de campo Hamiltoniano dada no início da subseção anterior. Quando dizemos uma função Hamiltoniana definida num espaço $\mathbb{R}^{2n}$, está implícito que a estrutura simplética é a canônica.

Vamos a alguns exemplos de Sistemas Hamiltonianos em variedades.

Exemplo 2.2.4 *Sejam (M^n, g) uma variedade riemanniana e $\pi : T^*M \longrightarrow M$ seu fibrado cotangente com sua estrutura simplética ususal. Definimos:*

$$\begin{array}{c} H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,p) \longmapsto \frac{||p||_x}{2} \end{array}$$

Onde $|| \, p \, ||_x$ é a norma em T^*_xM, induzida por g_x. O sistema Hamiltoniano associado a H representa o fluxo geodésico associado a métrica g. A projeção das trajetórias de X_H em M correspondem às geodésicas da métrica g.

Exemplo 2.2.5 *Consideremos (M^n, g) uma variedade riemanniana, $V : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $\pi : T^*M \longrightarrow M$ o fibrado cotangente com a estrutura simplética usual. Definimos:*

$$\begin{array}{c} H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,p) \longmapsto \frac{||p||_x}{2} + V(x) \end{array}$$

Esse tipo de sistema representa uma generalização de Hamiltonianos da Mecânica Clássica.

Destacaremos alguns tipos de subvariedades de uma variedade simplética. Ao contrário do que ocorre em geometria riemanniana, onde uma métrica no espaço ambiente induz uma estrutura riemanniana na subvariedade, tornando-a riemanniana, uma subvariedade associada a uma variedade simplética pode não ser simplética (por exemplo, uma subvariedade de dimensão ímpar). Nesse sentido, é conveniente estabelecer algumas situações.

Supondo (M^{2n}, ω) variedade simplética e $N \subseteq M$ uma subvariedade, seja $i : N \hookrightarrow M$ a inclusão.

Dizemos que:

- N é isotrópica, se:

$$\forall p \in N,\ T_pN \text{ é subespaço isotrópico de } (T_pM, \omega_p).$$

  Nesse caso, $dimN \leq dimM$

- N é coisotrópica, se

$$\forall p \in N,\ T_pN \text{ é subespaço coisotrópico de } (T_pM, \omega_p)$$

  Nesse caso, $dimN \geq dimM$

- N é Lagrangiana, se:

$$\forall p \in N,\ T_pN \text{ é subespaço Lagrangiano de } (T_pM, \omega_p)$$

  Nesse caso, dim $N = n$. Uma outra forma de expressar essa condição, seria dizendo que $i^*\omega = 0$.

- N é simplética, se:

$$\forall p \in N,\ T_pN \text{ é subespaço simplético de } (T_pM, \omega_p)$$

  Nesse caso, $dimN$ é um número par. Outra forma de expressar essa condição, seria dizendo que $i^*\omega$ é uma forma simplética sobre N.

A seguir, dois exemplos importantes:

Exemplo 2.2.6 *Sejam (M^{2n}, ω) variedade simplética e $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Suponhamos $c \in \mathbb{R}$ valor regular de H. Segue que o nível de energia $\Sigma_c = H^{-1}(c)$ é uma hiperfície de M tal que:*

$$\forall p \in M,\ T_p\Sigma_c = Ker(d_pH)$$

Observemos que X_H é tangente a Σ_c, pois Σ_c é invariante pelo fluxo de X_H. Seja $S \subseteq \Sigma_c$ subvariedade de codimensão 2 em M, que é transversal ao campo X_H em Σ_c. Então, S é uma subvariedade simplética de (M, ω). Ver [35], para maiores detalhes.

Exemplo 2.2.7 *Consideremos (T^*M, ω) o fibrado cotangente de uma variedade diferenciável M, munido da estrutura simplética usual. Seja $\eta \in \Omega^1(M)$. Associado a esta 1-forma η, temos uma subvariedade em T^*M, que corresponde ao gráfico de η:*

$$\Gamma_\eta = \{(x, \eta_x) \in T^*M : x \in M\}$$

Temos que Γ_η *é subvariedade Lagrangiana de* (T^*M, ω) *se, e somente se,* $d\eta = 0$.
Pensemos no caso em que η *é exata. Assim,* $\exists\ u : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *diferenciável tal que* $\eta = du$. *Seja* $H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ *diferenciável. A subvariedade* Γ_η *é invariante pelo fluxo do campo* X_H *se, e somente se:*

$$H(x, d_x u) = constante,\ \forall x \in M$$

Ou seja, u *é solução da equação de Hamilton-Jacobi associada a* H. *Concluímos que subvariedades Lagrangiana exatas, que são invariantes pelo fluxo de um sistema Hamiltoniano, correspondem a uma solução da equação de Hamilton Jacobi do sistema.*

2.3 Análise de Órbitas Periódicas

O estudo local do comportamento das trajetórias de um campo, próximos a uma órbita periódica, pode ser feito por meio de uma análise da transformação de Poincaré associada à órbita[1]. É importante analisar os autovalores da diferencial da transformação de Poincaré no correspondente ponto da órbita. Como a transformação de Poincaré pode ser escrita em termos do fluxo, existe uma relação entre os autovalores da diferencial da aplicação de Poincaré e da diferencial do fluxo. Vamos analisar um pouco essa situação, para o caso de Sistemas Hamiltonianos.

Sejam (M^{2n}, ω) uma variedade simplética e $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Suponhamos φ_t o fluxo do campo Hamiltoniano associado a H, X_H, e $p \in M$ um ponto periódico de X_H, com período $T > 0$. Assim, conforme discutido na seção anterior, $\varphi_T : M \longrightarrow M$ é um simplectomorfismo e, sua diferencial, $d_p\varphi_T : T_pM \longrightarrow T_pM$ é um simplectomorfismo linear. É possível descrever algumas propriedades do espectro de simplectomorfismos lineares. Faremos essa análise num contexto mais geral.

Seja (V^{2n}, Ω) um espaço vetorial simplético. Fixada uma base simplética para (V, Ω), como foi estabelecido acima, podemos identificar o conjunto dos simplectomorfismos lineares de (V, Ω) com o seguinte subconjunto de matrizes:

$$Sp(n) = \{A \in GL(2n, \mathbb{R}) : A^T J_0 A = J_0\},$$

[1] Ver ([33]).

onde a matriz J_0 é dada por:

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0_n & \mathrm{Id} \\ \text{- Id} & 0_n \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Naturalmente, $Sp(n)$ é um grupo com respeito a multiplicação matricial e se $A \in Sp(n)$, então $detA = 1$.

A próxima proposição nos dá uma propriedade muito importante do espectro dessas matrizes.

Proposição 2.3.1 *Sejam $A \in Sp(n)$ e $\sigma(A)$ o seu espectro. Se $\lambda \in \sigma(A)$, então $\lambda^{-1}, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}^{-1} \in \sigma(A)$. Além disso, $\lambda, \lambda^{-1}, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}^{-1}$ possuem, todos, a mesma multiplicidade algébrica.*

Portanto, os autovalores da diferencial do fluxo:

$$d_p\varphi_T : T_pM \longrightarrow T_pM,$$

satisfazem essa propriedade. Observemos, ainda, que $X_H(p)$ é autovetor de $d_p\varphi_T$, associado ao autovalor 1. De fato, pela propriedade de fluxo, temos:

$$\varphi_s \circ \varphi_t(p) = \varphi_t \circ \varphi_s(p), \forall s, t \in \mathbb{R}.$$

Derivando com respeito a s, obtemos:

$$d_{\varphi_s(p)}\varphi_t = X_H(\varphi_{s+t}(p)).$$

Fazendo $s = 0$ e $t = T$, conseguimos que:

$$d_p\varphi_T(X_H(p)) = X_H(p).$$

Segue então a afirmação feita.

Seja Σ uma seção local para o campo X_H em p. Assim, Σ é uma subvariedade de codimensão 1 em M, satisfazendo:

$$T_q\Sigma \oplus \{X_H(p)\} = T_qM, \forall q \in \Sigma.$$

Consideremos $\psi : \Sigma \longrightarrow \Sigma$, a aplicação de Poincaré associada. Assim, ela é escrita na forma:

$$\psi(q) = \varphi(T(q), q),$$

onde $T : \Sigma \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, que corresponde ao "tempo de retorno". Analisemos a diferencial de ψ em p.

É possível mostrar a seguinte relação entre os polinômios característicos:

$$det(\lambda Id - d_p\varphi_T) = (1-\lambda)det(\lambda Id - d_p\psi)$$

Concluímos[2] dessa relação que:

$$\sigma(d_p\varphi T) = \{1\} \bigcup \sigma(d_p\psi)$$

Vamos analisar, agora, essa situação no correspondente nível de energia.

Suponhamos $H(p) = E$ e $W_E = H^{-1}(E)$ um nível regular de energia. Definimos:

$$\Sigma_E = \Sigma \cap W_E$$

Pela conservação de energia, Σ_E é um subconjunto de Σ invariante por ψ. Definimos então a sua restrição:

$$\psi_0 : \Sigma_E \longrightarrow \Sigma_E,\ \psi_0 = \psi \mid_{\Sigma_E}$$

Observemos, ainda, que Σ_E é uma subvariedade de codimensão 2 em M, que está contida em W_E, nível regular de energia, e Σ_E é transversal ao campo Hamiltoniano X_H. Segue, pelo exemplo 2.2.6, que Σ_E é uma subvariedade simplética de (M^{2n}, ω).

Indicando por $i : \Sigma_E \hookrightarrow M$ a inclusão em M e definindo $\omega_E = i^*\omega$, 2-forma em Σ_E, temos:

Proposição 2.3.2 *Nas condições acima, a aplicação $\psi_0 : \Sigma_E \longrightarrow \Sigma_E$ é difeomorfismo tal que: $\psi_0^*\omega_E = \omega_E$. Além disso, vale:*

$$\sigma(d_p\varphi_T) = \{1, 1\} \cup \sigma(d_p\psi_0)$$

Demonstração: *Ver [35].* $\square$

Ou seja, a restrição da aplicação de Poincaré ao nível de energia da órbita é um simplectomorfismo de (Σ_E, ω_E).

Esses resultados sobre autovalores para Aplicações de Poincaré, em $\mathbb{R}^4$, serão resumidos no próximo Lema, da maneira que será aplicada neste texto.

Lema 2.3.1 *Suponhamos $H : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $p \in \mathbb{R}^4$ ponto cuja órbita, por X_H, é periódica com período $T > 0$. Então valem as seguintes afirmações:*

- $\sigma(d_p\phi_T^H : T_p\mathbb{R}^4 \longrightarrow T_p\mathbb{R}^4) = \{1, 1, \lambda, \lambda^{-1}\}$.

[2] σ denota o espectro da aplicação

- *Sejam Σ uma seção transversal para a órbita periódica de p, em seu nível de energia, e $\psi : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ a correspondente Transformação de Poincaré. Então:*

$$\sigma(d_p\psi : T_p\Sigma \longrightarrow T_p\Sigma) = \{\lambda, \lambda^{-1}\}.$$

Demonstração: *Destacaremos os argumentos importantes na demonstração desse lema. Uma demonstração completa das afirmações, contidas neste lema, podem ser encontradas em [35].*

- *A forma dos autovalores de um simplectomorfismo linear.*
- *1 é autovalor de $d_p\phi_T^H : T_p\mathbb{R}^4 \longrightarrow T_p\mathbb{R}^4$, associado ao autovetor $X_H(p)$.*
- *Se $\psi : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ é a Transformação de Poincaré, sobre o nível de energia, então Σ é uma subvariedade simplética de $(\mathbb{R}^4, \omega_0)$ e ψ é um simplectomorfismo. Assim, $\sigma(d_p\psi : T_p\Sigma \longrightarrow T_p\Sigma) = \{\lambda, \lambda^{-1}\}$.*
- *Vale a relação:*

$$\sigma(d_p\phi_T^H) = \{1, 1\} \cup \{d_p\psi\}.$$

O próximo exemplo nos mostra como o Lema 2.3.1 pode ser útil para o estudo da dinâmica próxima a uma órbita periódica, restrita ao seu nível de energia, no momento de caracterizar o tipo de órbita em questão.

Exemplo 2.3.1 *No contexto do Lema anterior, suponhamos suponhamos Σ seção para a órbita de p e Σ_E a restrição da seção ao nível de energia. Assim, $dim\Sigma = 3$ e $dim\Sigma_E = 2$. Temos que Σ_E é uma subvariedade simplética de M. Próximo a $p \in \Sigma_E$, podemos escolher o sistema de coordenadas do Teorema de Darboux. Assim, nessas coordenadas, $\omega_E = dx \wedge dy$ e a aplicação de Poincaré, sobre o nível de energia, pode ser vista como um difeomorfismo, definido numa vizinhança da origem, que preserva área.*

Utilizando o Lema anterior, teremos os autovalores de $d_p\varphi_T$ como sendo da forma $\{1, 1, \lambda, \frac{1}{\lambda}\}$, onde $\{\lambda, \frac{1}{\lambda}\}$ serão os autovalores da restrição da aplicação de Poincaré, $d_p\psi_0$, ao nível de energia.

Se $\lambda \in \mathbb{R}$, com $|\lambda| \neq 1$, então a órbita periódica é hiperbólica no nível de energia e, pelo Teorema de Hartman-Grobman, a derivada $d_p\psi_0$ determina o comportamento dinâmico local. Se $\lambda \in \mathbb{S}^1 \backslash \{-1, 1\}$, então a órbita é elíptica. Nesse caso, a primeira derivada é insuficiente para descrever a dinâmica local e precisamos recorrer a derivadas de ordem superior. Posteriormente, voltaremos a explorar essa situação.

2.4 Aplicações Twist Simpléticas

Existe um modelo discreto de sistemas dinâmicos para o estudo de certos sistemas hamiltonianos, trata-se das aplicações twist simpléticas. Analisaremos algumas propriedades dessas aplicações, quando definidas em $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ (tais resultados se estendem a aplicações definidas em $\mathbb{S}^1 \times [a, b]$, ver [14] para maiores detalhes). As aplicações twist podem ser definidas em $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$, que corresponde ao fibrado contangente do toro n-dimensional, ou até mesmo em fibrados cotangentes mais gerais (ver [14]). Podemos pensar que estas aplicações representam a aplicação fluxo, de certos sistemas Hamiltonianos, em um instante t_0. A recíproca é verdadeira. Dada uma aplicação twist simplética, é possível encontrar um sistema Hamiltoniano, em geral dependente do tempo, que a represente, no sentido de ela ser o fluxo hamiltoniano num certo instante de tempo.

No que segue, adotaremos as seguintes notações:

- $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R} \setminus \ 2\pi\mathbb{Z}$ e $\mathbb{A} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.
- Um ponto $x \in \mathbb{A}$ é representado pelas seguintes coordenadas $x = (\theta, r) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.
- Em $\mathbb{A}$, temos a estrutura simplética usual, vinda do fibrado cotangente de $\mathbb{S}^1$:

$$\lambda = rd\theta \text{ e } \omega = -d\lambda = d\theta \wedge dr.$$

- $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{A}$ é o recobrimento universal de $\mathbb{A}$.
- $\pi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\pi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ representam as projeções na primeira coordenada.
- $V(x) = Ker(d_x\pi)$, $\pi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{S}^1$. Trata-se do subespaço vertical de $T_x\mathbb{A}$. Podemos identificar: $V(x) = \{\theta\} \times \mathbb{R}$, $x = (\theta, r)$.

A seguir, a definição de aplicação twist simplética, em $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$

Definição 2.4.1 *Seja $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ um difeomorfismo de classe C^1, satisfazendo as seguintes condições:*

1. *f é isotópica a Id de $\mathbb{A}$.*
2. *(Condição Twist) Existe $\epsilon > 0$ tal que:*

$$\forall x \in \mathbb{A},\ \epsilon < d_x(\pi \circ f)(0, 1) < \tfrac{1}{\epsilon}$$

3. *f é um simplectomorfismo exato de $\mathbb{A}$.*

Nesse caso, dizemos que f é uma aplicação twist simplética sobre $\mathbb{A}$.

Em relação a esta definição, faremos algumas observações.

Observação 2.4.1 *Temos:*

1. *A primeira condição significa que f preserva orientação e os bordos de $\mathbb{A}$. Trata-se de uma condição muito natural para aplicações que provém de fluxos.*

2. *A terceira condição nos diz que existe uma função diferenciável $s : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

$$ds = f^*\lambda - \lambda$$

3. *É possível encontrar $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ difeomorfismo de classe C^1, que seja levantamento de f, $F(x, y) = (X, Y)$, satisfazendo as seguintes condições:*

   - *F é isotópica a Id.*
   - *Existe $\epsilon > 0$ tal que:*

   $$\epsilon < \frac{\partial X}{\partial x}(x, y) < \frac{1}{\epsilon},\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

   - *Existe uma função $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, diferenciável, tal que:*

   $$F^*ydx - ydx = dS$$

   Assim, F é um simplectomorfismo exato de $\mathbb{R}^2$.

4. *A condição twist pode ser vista, então, como uma mudança de coordenadas:*

$$\begin{gathered}\psi_F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x, X(x, y))\end{gathered}$$

   Nessas coordenadas, a seguinte relação é estabelecida entre F e S:

$$F(x, y) = (X, Y) \Leftrightarrow \frac{\partial S}{\partial X} = Y \ \text{ e } \frac{\partial S}{\partial x} = -y$$

   Essa equivalência nos permite caracterizar as órbitas de F como pontos críticos de um certo funcional. Exploraremos essa relação mais a frente.

Vejamos a alguns exemplos.

Exemplo 2.4.1 *Seja $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$, dada por:*

$$f(\theta, r) = (\theta + \alpha + \alpha_1 r, r)$$

Onde $\alpha_1 \neq 0$. Temos que f é uma aplicação twist simplética. Observemos que $\mathbb{A}$ é folheado por círculos invariantes por f:

$$\mathbb{A} = \bigcup_{r \in \mathbb{R}} \mathbb{S}^1 \times \{r\}$$

Além disso, a dinâmica de f, sobre cada um desses círculos invariantes, é topologicamente conjugada a uma rotação em $\mathbb{S}^1$.

Exemplo 2.4.2 *Seja $\epsilon > 0$. Definimos:*

$$\begin{gathered} f_\epsilon : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A} \\ (\theta, r) \mapsto (\theta + r + \tfrac{\epsilon}{2\pi} \sin 2\pi\theta, r + \tfrac{\epsilon}{2\pi} \sin 2\pi\theta) \end{gathered}$$

Para $\epsilon = 0$, temos o exemplo anterior. A medida que ϵ cresce, aqueles círculos invariantes do exemplo anterior vão deixando de existir. Para $\epsilon > 0$, suficientemente grande, nenhum círculo irá "sobreviver".

A seguir, enunciaremos um resultado que nos permitirá dar outros exemplos. Além disso, esse resultado estabelece uma relação entre aplicações twist simpléticas e sistemas Hamiltonianos no $\mathbb{R}^2$, conforme mencionado no início desta subseção.

Proposição 2.4.1 *Suponhamos:*

$$\begin{gathered} H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x, y), t) \mapsto H_t(x, y) \end{gathered}$$

Função de classe C^2, com as seguintes propriedades:

1. *H_t é 2π-periódica em x e periódica em t.*
2. *$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 H_t}{\partial y^2}(x, y) > 0$.*
3. *Existe $K > 0$, tal que:*

$$\sup_{\mathbb{R}^2} \| dX_{H_t} \| < K$$

então, existe $\delta > 0$ tal que se $t \in (0, \delta)$, então:

$$\phi_t^H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

é o levantamento de uma aplicação twist simplética em $\mathbb{A}$.
Demonstração: *Ver em [14].* $\square$

Por meio dessa proposição, temos os seguintes exemplos:

Exemplo 2.4.3 *Consideremos a Hamiltoniana do pêndulo, analisada no exemplo 2.1.2. Aplicando a proposição anterior, é possível verificar que existe $\delta > 0$, tal que para $t \in (0, \delta)$, o fluxo hamiltoniano, associado, no instante t, $\phi_t^H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, será o levantamento de uma aplicação twist simplética $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, onde $\mathbb{A} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Projetando-se a análise feita, no exemplo 2.1.2, em $\mathbb{A}$, obtemos a situação esboçada na Figura* 2.2

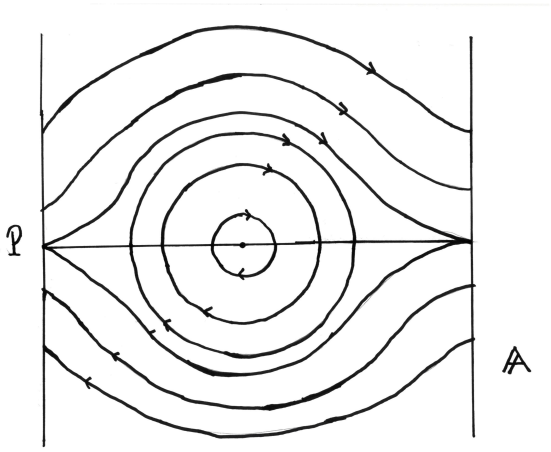

Figura 2.2: Curvas invariantes para a aplicação do exemplo 2.4.3.

Este exemplo mostra uma aplicação twist que possui muitas curvas invariantes. Devemos notar que o ponto P, que é a projeção dos pontos P_n (ver exemplo 2.1.2), é um ponto fixo hiperbólico de f. Nesse caso, as variedades invariantes serão a união de duas curvas invariantes por f, que são gráficos Lipschtiz sobre $\mathbb{S}^1$. Estes gráficos são Lipschtiz, mas não são suaves.

Exemplo 2.4.4 *Consideremos, agora, a Hamiltoniana do exemplo 2.1.3. Aplicando a proposição 2.4.1, existe $\delta > 0$, tal que para $t \in (0, \delta)$, o fluxo hamiltoniano, associado, no instante t, $\phi_t^{H_\epsilon} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, será o levantamento de uma aplicação twist simplética $f_\epsilon : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$. Observemos que f_0 é aplicação*

analisada no exemplo anterior. Projetando-se em $\mathbb{A}$ a análise feita no exemplo 2.1.3, para cada $\epsilon \neq 0$, pequeno, teremos um ponto fixo hiperbólico P_ϵ de f_ϵ. Nesse caso, as variedades invariantes associadas deixam de coincidir, como no caso $\epsilon = 0$ e passam a se interceptar transversalmente, produzindo a existência de pontos homoclínicos transversais. Este sistema possui entropia topológica positiva.

Observação 2.4.2 *Analisando os dois últimos exemplos, podemos dizer que a perturbação destruiu as curvas invariantes do exemplo 2.4.3, que correspondem às separatrizes do ponto fixo hiperbólico. A destruição destas curvas invariantes pela aplicação twist f, produziu um ponto homoclínico transversal. Essa situação em que temos uma aplicação twist $f_\epsilon = f_0 + o(\epsilon)$, em que a perturbação destrói uma curva invariante para a aplicação f_0, produzindo um ponto homoclínico transversal, e, portanto, entropia topológica positiva, será explorada neste texto.*

Como pode ser observado, por meio desses exemplos, "esses círculos invariantes"desempenham um papel importante no estudo da aplicações twist. Faremos, desse conceito, um guia para o estudo dessas aplicações.

Consideremos $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ uma aplicação twist simplética e $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ levantamento de f. Para analisar as propriedades desses "círculos invariantes", temos a seguinte definição.

Definição 2.4.2 *Uma curva rotacional invariante para a aplicação twist f é um subconjunto $\Gamma \subseteq \mathbb{A}$, satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. *Γ é uma curva C^0, fechada e sem auto-interseções.*
2. *Γ é invariante por f. Ou seja, $f(\Gamma) = \Gamma$.*
3. *Γ é homotopicamente não trivial.*

Sobre a estrutura desses conjuntos, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.4.2 *Seja $\Gamma \subseteq \mathbb{A}$ uma curva rotacional invariante para f. Então, existe uma função $\psi : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$, função Lipschitz, tal que:*

$$\Gamma = Graf(\psi) = \{(x, \psi(x)) : x \in \mathbb{S}^1\}$$

Demonstração: *Ver [23].* $\square$

Portanto, se $\Gamma \subseteq \mathbb{A}$ é uma curva rotacional invariante para f, então Γ é um gráfico Lipschitz sobre sua projeção $\mathbb{S}^1$. Seguirá, então, que a projeção $\pi\mid_\Gamma : \Gamma \longrightarrow \mathbb{S}^1$ é um homeomorfismo. Logo, como Γ é invariante por f, a aplicação $\pi\mid_\Gamma$ projeta a dinâmica de f sobre $\mathbb{S}^1$. Sendo assim, torna-se natural tentar definir a noção de número de rotação de uma órbita.

Definição 2.4.3 *Seja $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ uma órbita de F. O número de rotação da órbita é definido pelo seguinte limite, quando existe:*

$$\lim_{k\longrightarrow\pm\infty} \frac{x_k - x_0}{k}$$

Seja $g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$, definido por:

$$g = (\pi\mid_\Gamma) \circ f \circ (\pi\mid_\Gamma)^{-1}$$

Temos que g é um homeomorfismo de $\mathbb{S}^1$ que preserva orientação. Segue, então, que fica associado um número de rotação ao homeomorfismo g, ou melhor, fica associado um número de rotação às órbitas de f em Γ. Utilizando a teoria de Poincaré para homeomorfismos de $\mathbb{S}^1$, temos uma boa descrição das possibilidades para a dinâmica de f sobre uma curva rotacional invariante $\Gamma \subseteq \mathbb{A}$. Maiores detalhes podem ser encontrados em [16].

É importante destacar que o conjunto de todas as curvas rotacionais invariantes para a aplicação f, que denotaremos por $C(f)$, pode ser vazio, como foi observado no exemplo 2.4.2. Além disso, o conjunto $C(f)$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{A}$, pois cada curva é um gráfico invariante Lipschitz, com constante Lipschitz limitada, dependendo da aplicação f (ver [2]). Analisaremos algumas propriedades do complementar de $C(f)$ em $\mathbb{A}$, $\mathbb{U}(f) = \mathbb{A}\backslash C(f)$.

Uma curva $C \subseteq \mathbb{A}$, fechada, contínua e mergulhada em $\mathbb{A}$, é chamada curva rotacional quando é homotopicamente não trivial. Um subconjunto $A \subseteq \mathbb{A}$ é chamado sub anel essencial quando é homeomorfo a $\mathbb{A}$ e contém uma curva rotacional.

Em relação às componentes conexas de $\mathbb{U}(f)$, temos a seguinte proposição:

Proposição 2.4.3 *Toda componente conexa de $\mathbb{U}(f)$ ou é um disco topológico limitado ou é um sub anel essencial. Além disso, temos:*

1. *Quando uma tal componente é um disco topológico $\mathbb{D}$, esse disco é periódico, isto é, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.*

2. *No caso de uma componente conexa ser um sub anel essencial, o bordo dela será ou um gráfico invariante, ou $\mathbb{S}^1 \times \{+\infty\}$ ou $\mathbb{S}^1 \times \{-\infty\}$.*

Demonstração: *Ver [2].* $\square$

No caso do exemplo 2.4.3, dado anteriormente, é simples observar, projetando o retrato de fase do pêndulo em $\mathbb{A}$, uma componente conexa do tipo disco. Componentes do tipo sub anel essencial podem ser observadas no exemplo 2.4.2. Muitos fenômenos dinâmicos interessantes de uma aplicação twist simplética ocorrem nas componentes conexas tipo sub anel essencial (componente anelar).

Definição 2.4.4 *Uma componente anelar de $\mathbb{U}(f)$ é chamada zona de instabilidade de f.*

Em relação a essas regiões, temos:

Proposição 2.4.4 *Seja $A \subseteq \mathbb{A}$, uma zona de instabilidade para f, tal que $\partial A = C_- \cup C_+$. Então*[3]*:*

$$W^u(C_-) \cap W^s(C_+) \bigcap A \neq \emptyset$$

Demonstração: *Ver em [6] e [20].* $\square$

Um belo resultado sobre a dinâmica de uma aplicação twist, que relaciona curvas rotacionais invariantes com entropia topológica e será fundamental para concluirmos o Corolário 1.1.1, é apresentado a seguir.

Proposição 2.4.5 *Suponhamos $f : \mathbb{S}^1 \times [a, b] \to \mathbb{S}^1 \times [a, b]$ uma aplicação twist, definida sobre o anel compacto, tal que a restrição de f aos bordos tenha números de rotação ρ_0 e ρ_1, com $\rho_0 < \rho_1$. Se*[4] *$h_{top}(f) = 0$, então f possui uma curva rotacional invariante, com número de rotação ω, com $\omega \in (\rho_0, \rho_1)$.*
Demonstração *Ver em [1]. Há, também, uma discussão sobre este resultado em [14].*

Observação 2.4.3 *Em [1], estuda-se a dinâmica de uma aplicação twist f, em anéis, que formam zonas de instabilidade. Em particular, é possível construir um conjunto compacto invariante K, associado a certas órbitas (construídas a partir de sub e super soluções do princípio variacional), tal que $f^q|_K$, para algum $q \in \mathbb{N}$, é semi-conjugada a um shift de Bernoulli.*

2.5 Teoria de Aubry Mather

Como foi observado no exemplo 2.4.2, ao variarmos o parâmetro ϵ, curvas rotacionais invariantes vão sendo destruídas. Para ϵ suficientemente grande, tais curvas deixam de existir. Poderíamos nos questionar se alguma propriedade relacionada a essas curvas ainda persiste no sistema, mesmo após sua destruição. Essa questão pode ser analisada através de um princípio variacional associado a aplicações twist. A perturbação do sistema pode destruir a curva rotacional como objeto geométrico do sistema, mas as propriedades

[3] W^u e W^s denotam as variedades instável e estável associada ao respectivo conjunto.
[4] $h_{top}(f)$ representa a entropia topológica da aplicação f.

variacionais da mesma persistem. Dentro desse ponto de vista, poderíamos dizer que a curva não seria destruída, mas seria transformada em um outro tipo de conjunto, que também é um gráfico, porém pode-se mudar as propriedades topológicas e de regularidade das curvas rotacionais. Esses novos conjuntos são os chamados conjuntos de Aubry Mather. Faremos uma breve estudo sobre eles.

Iremos supor ao longo dessa seção que $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ é uma aplicação twist simplética, com levantamento fixado $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e função geradora $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Conforme foi mencionado, é possível associar um princípio variacional às órbitas de uma aplicação twist. Fixemos $m, n \in \mathbb{Z}$, com $m > n$, e $a, b \in \mathbb{R}$. Consideremos o seguinte conjunto:

$$\Omega_{a,b}^{n,m} = \{(x_n, ..., x_m) \in \mathbb{R}^{m-n+1} : x_n = a \text{ e } x_m = b\}$$

Notemos que $\Omega_{a,b}^{n,m}$ pode ser identificado como conjunto de sequências finitas que conecta o ponto $a \in \mathbb{R}$, no instante n, ao ponto $b \in \mathbb{R}$, no instante m, como "um caminho discreto". A comparação com um espaço de curvas absolutamente contínuas para se definir a ação de um sistema Lagrangiano é muito instrutiva, como pode ser observado em [19] e [3]. Observemos ainda que podemos fazer a seguinte identificação $\Omega_{a,b}^{n,m} \approx \mathbb{R}^{m-n-1}$.

Definimos o seguinte funcional:

$$W : \Omega_{a,b}^{n,m} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Dado por:

$$W(x) = \sum_{i=n}^{m-1} S(x_i, x_{i+1})$$

A associação entre órbitas de F e pontos críticos desse funcional é dada pela seguinte proposição:

Proposição 2.5.1 *Um segmento $(x_n, ..., x_m) \in \Omega_{a,b}^{n,m}$ é a projeção de uma órbita $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de F, satisfazendo $x_n = a$ e $x_m = b$ se, e somente se, é ponto crítico de W.*

Isso nos permite falar em órbitas minimizantes, como aquelas órbitas em que qualquer segmento finito é minimizante para o respectivo funcional ação. Ou seja, é um ponto de mínimo do correspondente funcional W. Nesse sentido, temos a seguinte propriedade de curvas rotacionais invariantes.

Proposição 2.5.2 *Seja $\Gamma \subseteq \mathbb{A}$ uma curva rotacional invariante para a aplicação f. Então, o levantamento de toda órbita de Γ é minimizante.*

Essa propriedade de minimização das curvas rotacionais invariantes é uma propriedade interessante no sentido de não estar relacionada a métodos perturbativos.

É possível modificar esse princípio de pontos críticos, na proposição 2.5.1, de modo a se analisar apenas órbitas periódicas.

Se $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência de reais, então dizemos que $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ é tipo (m,n), quando:

$$x_{k+n} = x_k + m,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Observemos que se $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ é uma órbita de F, que é o levantamento de uma órbita periódica de f, então existem $(m,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$, tal que:

$$x_{k+n} = x_k + m \text{ e } y_{k+n} = y_k,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Nesse sentido, diremos que a órbita é tipo (m,n). É possível mostrar, ainda, que órbitas periódicas tipo (m,n) possuem número de rotação, segundo a definição 2.4.3, dado por $\frac{m}{n}$.

Indiquemos por $\Omega_{m,n}$ o espaço das sequências reais do tipo (m,n). Observemos que um elemento $x \in \Omega_{m,n}$ fica completamente determinado por n pontos, $(x_1, ..., x_n)$. Portanto, identificamos $\Omega_{m,n} \approx \mathbb{R}^n$. Definimos o seguinte funcional:

$$W_{m,n} : \Omega_{m,n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Dado por:

$$W_{m,n}(x) = S(x_n, x_1 + m) + \sum_{i=1}^{n-1} S(x_i, x_{i+1}).$$

Temos o seguinte princípio de pontos críticos:

Proposição 2.5.3 *Um ponto $x \in \Omega_{m,n}$ é a projeção de uma órbita tipo (m,n) para F se, e somente se, é ponto crítico de $W_{m,n}$.*

Observemos que se x_k é ponto crítico de $W_{m,n}$, então, naturalmente, temos uma órbita periódica. De fato, teremos:

$$y_{k+n} = -\tfrac{\partial S}{\partial x}(x_{k+n}, x_{k+1+n}) = -\tfrac{\partial S}{\partial x}(x_k + m, x_{k+1} + m) = -\tfrac{\partial S}{\partial x}(x_k, x_{k+1}) = y_k.$$

Isso vale para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Gostaríamos de analisar, agora, a existência de órbitas periódicas do tipo (m,n), que sejam minimizantes. Para isso, faremos uso do seguinte lema auxiliar, que é uma consequência da condição twist.

Lema 2.5.1 *Vale o seguinte limite:*

$$\lim_{\|X-x\|\longrightarrow\infty} S(x,X) = +\infty.$$

Consequência disso será o fato de que se $(y_k)_k \in \{y \in \Omega_{m,n}, y_1 \in [0,1]\}$ e $\lim_{k\longrightarrow\infty} \| y_k \| = +\infty$, então $\lim_{k\longrightarrow\infty} W_{m,n}(y_k) = +\infty$. Segue então que se $k > 0$ é suficientemente grande, então $W_{m,n}^{-1}(-\infty, k] \bigcap \{y \in \Omega_{m,n} : y_1 \in [0,1]\}$ é limitado e, por continuidade, é fechado. Logo é compacto e $W_{m,n}$ alcançará um mínimo neste conjunto. Com isso, esboçamos a ideia da prova de parte da seguinte proposição:

Proposição 2.5.4 *Dados $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $W_{m,n} : \Omega_{m,n} \longrightarrow \mathbb{R}$ possui um ponto de mínimo. Assim, existem órbitas minimizantes com todo número de rotação racional. Além disso, por um processo de limite, é possível concluir a existência de órbitas minimizantes com número de rotação irracional.*

Assim, existem órbitas minimizantes com todo número de rotação real. Gostaríamos de analisar, num certo sentido, o conjunto formado por todas as órbitas, com um dado número de rotação, e que sejam minimizantes. Para melhor caracterizá-lo, vamos introduzir as seguintes definições.

Definição 2.5.1 *Um subconjunto $M \subseteq \mathbb{R}^2$ é dito F-ordenado quando for invariante por F e satisfizer a seguinte condição:*

$$\textit{Se } z_1, z_2 \in M, \textit{ com } \pi_1(z_1) < \pi_1(z_2), \textit{ então: } \pi_1(F(z_1)) < \pi_1(F(z_2)),$$

onde $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é a projeção na primeira coordenada. A seguir, a definição de conjunto de Aubry Mather.

Definição 2.5.2 *Um conjunto de Aubry Mather para F é um subconjunto $M \subseteq \mathbb{R}^2$ que é fechado, F-ordenado e invariante por translações inteiras.*

Quando falarmos em conjuntos de Aubry Mather, estaremos nos referindo a eles como subconjuntos do $\mathbb{R}^2$ ou suas projeções em $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. A seguir, descreveremos algumas propriedades desses conjuntos.

Proposição 2.5.5 *Seja $M \subseteq \mathbb{R}^2$ conjunto de Aubry Mather para F. Então:*

1. *Todas as órbitas de M possuem o mesmo número de rotação.*

2. *M é um gráfico Lipschtiz sobre sua projeção $\pi(M)$.*

3. *A dinâmica de f sobre $p(M)$ é topologicamente conjugada à dinâmica de um homeomorfismo $g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$, que preserva orientação, sobre um subconjunto fechado e invariante.*

É possível construir diversos tipos de conjuntos de Aubry Mather para uma aplicação twist. Podemos dar o seguinte exemplo de conjuntos de Aubry Mather. Suponhamos $\alpha \in \mathbb{R}$. Consideremos o conjunto $M_\alpha \subseteq \mathbb{R}^2$ formado pelo fecho de todas as translações inteiras de órbitas minimizantes, com número de rotação α. Assim, M_α é um conjunto de Aubry Mather. Observemos que uma curva rotacional invariante é um conjunto de Aubry Mather, formado a partir de órbitas minimizantes. A seguir, resumiremos os resultados desta seção, relacionando-os com os conjuntos de Aubry Mather.

Proposição 2.5.6 *Seja $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ aplicação twist simplética, com levantamento $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. temos:*

1. *F possui órbitas minimizantes com todo número de rotação em $\mathbb{R}$.*

2. *Essas órbitas minimizantes estão contidas em certos conjuntos fechados e invariantes, os conjuntos de Aubry Mather, que são gráficos Lipschtiz sobre suas projeções.*

3. *A dinâmica de f, sobre esses conjuntos, é topologicamente conjugada à dinâmica de um homeomorfismo de $\mathbb{S}^1$, que preserva orientação, sobre um subconjunto fechado e invariante de $\mathbb{S}^1$.*

Esse teorema nos permite analisar os tipos de dinâmicas de uma aplicação twist sobre um conjunto de Aubry Mather, como também as possíveis estruturas topológicas desses conjuntos. Suponhamos $M \subseteq \mathbb{R}^2$ conjunto de Aubry Mather, com número de rotação $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $\alpha \in \mathbb{Q}$ ou $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Assim, temos as possibilidades[5]:

- $\alpha \in \mathbb{Q}$; Nesse caso, $p(M)$ ou é uma coleção de órbitas periódicas, com, possivelmente órbitas heteroclínicas, conectando duas delas, ou uma curva rotacional invariante com número de rotação racional.

- $\alpha \notin \mathbb{Q}$; Nesse caso, $p(M)$ ou é um conjunto de Cantor, com, possivelmente, órbitas homoclínicas em seus gaps ou é uma curva rotacional invariante com número de rotação irracional.

[5]Consequência de rsultados de dinâmica em $\mathbb{S}^1$. Ver [16].

Sendo assim, ao destruirmos curvas rotacionais invariantes, como no exemplo 2.4.2, temos, ainda, um certo tipo de estrutura, a dos Conjuntos de Aubry Mather, que ainda mantém algumas relações com as curvas rotacionais invariantes.

Capítulo 3

Propriedades Dinâmicas de X_{H_ϵ}

O objetivo deste capítulo é provar o Teorema 1.1.1, que afirma que a órbita periódica Γ_E, de X_{H_ϵ}, é elíptica em certos níveis de energia, quando $|\epsilon|$ é pequeno. Além disso, construiremos a seção transversal para a análise da correspondente Transformação de Poincaré, sobre o nível de energia e faremos algumas considerações sobre a dinâmica deste campo vetorial.

3.1 Alguns resultados relacionados.

Consideremos a seguinte Hamiltoniana, dependendo de uma parâmetro ϵ, $H_\epsilon : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, dada pela igualdade (1.1). Em relação ao termo $R_\epsilon = R_\epsilon(x_1, x_2)$, temos a seguinte observação.

Observação 3.1.1 *Na maioria dos cálculos que faremos, é suficiente supor que $R_\epsilon(x_1, x_2) = \epsilon x_1^2 x_2^2$. De fato, os outros termos se anulam nos cálculos que faremos.*

Devido a esta observação, podemos supor que a função $H_\epsilon : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ tenha a seguinte forma:

$$H_\epsilon(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + \frac{\alpha^2 x_1^2}{2} - \frac{\nu^2 x_2^2}{2} + \frac{b_1 x_1^4}{4} + \frac{b_2 x_2^4}{4} - \epsilon x_1^2 x_2^2,$$

onde $\alpha, \nu \neq 0$ e $b_1, b_2 > 0$. Temos o Campo Hamiltoniano:

$$X_{H_\epsilon} = (y_1, y_2, -\alpha^2 x_1 - b_1 x_1^3 + 2\epsilon x_1 x_2^2, \nu^2 x_2 - b_2 x_2^3 + 2\epsilon x_2 x_1^2).$$

E a equação de Hamilton:

$$\begin{cases} x_1' = y_1, \\ x_2' = y_2, \\ y_1' = -\alpha^2 x_1 - b_1 x_1^3 + 2\epsilon x_1 x_2^2, \\ y_2' = \nu^2 x_2 - b_2 x_2^3 + 2\epsilon x_2 x_1^3. \end{cases}$$

Observemos que se $\epsilon = 0$, então o comportamento desse sistema nas variáveis (x_1, y_1) é independente do comportamento do sistema nas variáveis (x_2, y_2). Dizemos, nessa situação, que o sistema está desacoplado. O comportamento do sistema nas variáveis (x_1, y_1) é dado por um Hamiltoniano $H_1 = H_1(x_1, y_1)$ e o comportamento do sistema nas variáveis (x_2, y_2) é dado por um Hamiltoniano $H_2 = H_2(x_2, y_2)$. H_1 e H_2 podem ser escritos como:

$$\begin{cases} H_1(x_1, y_1) = \dfrac{y_1^2}{2} + V_1(x_1) = \dfrac{y_1^2}{2} + \dfrac{\alpha^2 x_1^2}{2} + \dfrac{b_1 x_1^4}{4}, \\ \\ H_2(x_2, y_2) = \dfrac{y_2^2}{2} + V_2(x_2)\dfrac{y_2^2}{2} - \dfrac{\nu^2 x_1^2}{2} + \dfrac{b_2 x_1^4}{4}. \end{cases} \tag{3.1}$$

Para $\epsilon \neq 0$, o sistema não está mais desacoplado, porém ainda vale:

Lema 3.1.1 *Sejam $M_i = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4 : (x_i, y_i) = (0, 0)\}$, onde $i = 1$ ou $i = 2$. Então valem:*

- *M_1 e M_2 são invariantes pelo fluxo do campo X_{H_ϵ};*
- *O fluxo de X_{H_ϵ} em M_1 é conjugado ao fluxo de X_{H_2} e o fluxo de X_{H_ϵ} em M_2 é conjugado ao fluxo de X_{H_1}.*

Demonstração: *O campo X_{H_ϵ} é tangente a M_1 e a M_2. Para o caso M_1, temos naturalmente um difeomorfismo $\pi_2 : M_1 \to \mathbb{R}^2$ e se $z \in M_1$, então $d_z\pi_2(X_{H_\epsilon}(z)) = X_{H_2}(\pi_2(z))$. Segue destes fatos que π_2 é uma conjugação entre os fluxos dos dois campos. O caso M_2 é análogo.* $\square$

Os retratos de fase dos campos bidimensionais X_{H_1} e X_{H_2} são esboçados nas Figura 3.1 e Figura 3.2, respectivamente.

Nesse ponto, podemos demonstrar o Lema 1.1.1, enunciado na introdução.
Demonstração do Lema 1.1.1: Fixemos um nível de energia $E > 0$ e seja $z_0 = (0, 0, 0, y_2^E) \in \mathbb{R}^4$, onde $H_2(0, y_2^E) = E$. Pelo lema anterior, segue que a órbita de z_0, por X_{H_ϵ}, é periódica, para todo $\epsilon \in \mathbb{R}$, e seu período não depende do parâmetro ϵ. Além disso, esta órbita tem a seguinte forma:

$$\phi_t^{H_\epsilon}(z_0) = (0, x_2(t), 0, y_2(t))$$

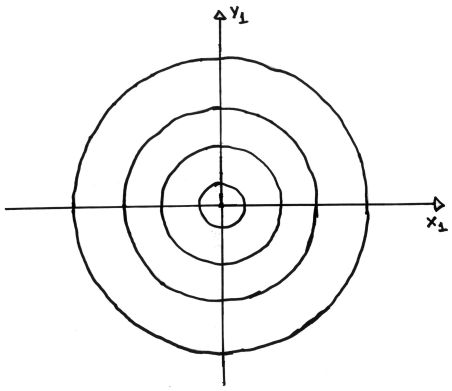

Figura 3.1: Retrato de Fase do sistema Hamiltoniano X_{H_1}

Onde $t \mapsto (x_2(t), y_2(t))$ é uma órbita periódica de X_{H_2}, órbita com energia E. Nas condições em que fixamos o ponto z_0, o período de sua órbita pode ser visto como função da energia, no Sistema Hamiltoniano H_2. **Isso conclui a demonstração do Lema 1.1.1.** $\square$

Um dos objetivos, desta seção, é analisar como o tipo de órbita de z_0, em seu respectivo nível de energia (elíptica ou hiperbólica), depende do nível de energia E e do parâmetro ϵ. Nesse sentido, teremos:

Teorema 3.1.1 *Suponhamos que o período T da órbita de z_0 e o coeficiente α satisfaçam: $\alpha T \notin \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Então existe $\epsilon_0 > 0$ tal que se $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$, a órbita de z_0 é periódica elíptica em seu nível de energia.*

A classificação do tipo de órbita periódica de z_0, em seu nível de energia, está relacionada aos autovalores da derivada $d_{z_0}\phi_T^{H_\epsilon} : T_{z_0}\mathbb{R}^4 \longrightarrow T_{z_0}\mathbb{R}^4$. Por meio dessa relação, é possível reduzir a análise da classificação da órbita periódica de z_0, em seu nível de energia, a uma análise de uma equação diferencial unidimensional de segunda ordem. De fato, definindo $u_\epsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por[1]:

$$u_\epsilon(t) = -\alpha^2 + 2\epsilon x_2^2(t)$$

Consideremos a equação:

$$x'' = u_\epsilon(t)x \tag{3.2}$$

Sejam $x_1 = x_1(t)$ e $x_3 = x_3(t)$ as soluções desta equação, caracterizadas pelas seguintes condições iniciais:

[1] $x_2 = x_2(t)$ é a correspondente coordenada (coordenada x_2) da órbita de z_0.

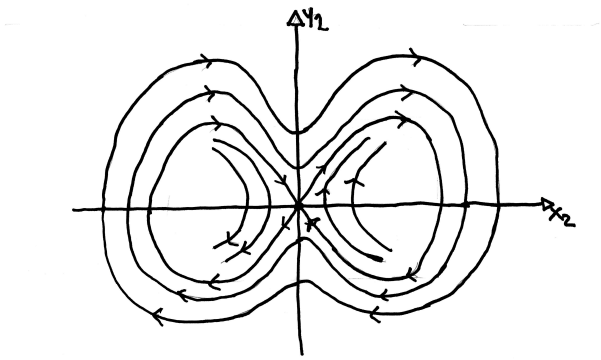

Figura 3.2: Retrato de Fase do sistema Hamiltoniano X_{H_2}. Nessa figura não está sendo detalhado o comportamento das trajetórias que não interceptam o eixo y_2, pois essas trajetórias não interferem na análise feita neste texto.

$$\begin{cases} x_1(0) = 1, x_1'(0) = 0; \\ x_3(0) = 0, x_3'(0) = 1; \end{cases}$$

A partir destas duas soluções específicas, definimos a seguinte função:

$$\Phi_\epsilon(t) = \frac{x_1(t,\epsilon) + x_3'(t,\epsilon)}{2}$$

Por meio desta função $\Phi = \Phi_\epsilon(t)$, podemos classificar a órbita de z_0, em seu nível de energia:

Proposição 3.1.1 *Se $(\Phi_\epsilon(t))^2 \in (0,1)$, então a órbita de z_0 é elíptica em seu nível de energia. Se $(\Phi_\epsilon(t))^2 > 1$, então a órbita de z_0 é hiperbólica em seu nível de energia.*

Na seção próxima seção, provaremos esta proposição. Mostraremos, a seguir, como ela implica o Teorema 3.1.1.

Demonstração de Teorema 3.1.1: *A equação diferencial $x'' = u_\epsilon(t)x$ depende diferenciavelmente do parâmetro ϵ. Segue do Teorema da dependência de equações diferenciais de parâmetros (ver [33]), que as soluções $x = x(t,\epsilon)$ dependem diferenciavelmente do parâmetro ϵ. Em particular, a função $\Phi = \Phi(t,\epsilon)$ depende continuamente do parâmetro ϵ. Calculemos, então, esta função em $\epsilon = 0$. Nessa situação, temos a equação:*

$$x'' = -\alpha^2 x$$

Pela definição das funções $x_1 = x_1(t)$ e $x_2 = x_2(t)$, temos:

$$x_1(t,0) = \cos\alpha T \text{ e } x_2(t,0) = \frac{1}{\alpha}\sin\alpha T$$

Logo, $\Phi_0(t) = \cos\alpha t$. Assim, $\Phi_0(T) = \cos\alpha T$. Pela hipótese do Teorema 1.1, temos que $(\Phi_0(T))^2 \in (0,1)$. Como a função $\Phi = \Phi_\epsilon(t)$ depende continuamente do parâmetro ϵ, existe $\epsilon_0 > 0$, tal que se $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$, então $(\Phi_\epsilon(T))^2 \in (0,1)$. Por meio da Proposição 3.1.1, concluímos que a órbita de z_0 é elíptica em seu nível de energia. $\square$

Na próxima seção, provaremos a Proposição 3.1.1.

3.2 Demonstração da Proposição 3.1.1

O objetivo deta seção é provar a Proposição 3.1.1. Para isso, baseados no Lema 2.3.1, iremos estudar os autovalores da derivada do fluxo $d_{z_0}\phi_T^{H_\epsilon} : T_{z_0}\mathbb{R}^4 \longrightarrow T_{z_0}\mathbb{R}^4$. Seguiremos por partes.

1. **O Polinômio Característico de $d_{z_0}\phi_T^{H_\epsilon}$.**
   O fluxo de X_{H_ϵ} tem a seguinte forma[2]:

   $$\phi_t^{H_\epsilon}(z) = (X_1(t,z), X_2(t,z), Y_1(t,z), Y_2(t,z))$$

   Segue que a derivada de $\phi_t^{H_\epsilon}$ pode ser, matricialmente, escrita por:

   $$d_z\phi_t^{H_\epsilon} = \begin{bmatrix} \partial_{x_1}X_1 & \partial_{x_2}X_1 & \partial_{y_1}X_1 & \partial_{y_2}X_1 \\ \partial_{x_1}X_2 & \partial_{x_2}X_2 & \partial_{y_1}X_2 & \partial_{y_2}X_2 \\ \partial_{x_1}Y_1 & \partial_{x_2}Y_1 & \partial_{y_1}Y_1 & \partial_{y_2}Y_1 \\ \partial_{x_1}Y_2 & \partial_{x_2}Y_2 & \partial_{y_1}Y_2 & \partial_{y_2}Y_2 \end{bmatrix}$$

   Sendo que estas derivadas parciais estão sendo avaliadas em (t,z). O polinômio característico de $d_{z_0}\phi_T^{H_\epsilon}$ é dado por:

   $$det(\lambda Id - d_{z_0}\phi_T^{H_\epsilon}) = det \begin{bmatrix} \lambda - \partial_{x_1}X_1 & -\partial_{x_2}X_1 & -\partial_{y_1}X_1 & -\partial_{y_2}X_1 \\ -\partial_{x_1}X_2 & \lambda - \partial_{x_2}X_2 & -\partial_{y_1}X_2 & -\partial_{y_2}X_2 \\ -\partial_{x_1}Y_1 & -\partial_{x_2}Y_1 & \lambda - \partial_{y_1}Y_1 & -\partial_{y_2}Y_1 \\ -\partial_{x_1}Y_2 & -\partial_{x_2}Y_2 & -\partial_{y_1}Y_2 & \lambda - \partial_{y_2}Y_2 \end{bmatrix}$$

[2]Por um momento, omitiremos a dependência do parâmetro ϵ.

Por meio de propriedades da função determinante (vista como função de seus vetores linha ou coluna), podemos escrever (trocando-se coluna 2 por coluna 3):

$$det(\lambda Id - d_{z_0}\phi_T^{H_\epsilon}) = -det \begin{bmatrix} \lambda - \partial_{x_1}X_1 & -\partial_{y_1}X_1 & -\partial_{x_2}X_1 & -\partial_{y_2}X_1 \\ -\partial_{x_1}X_2 & -\partial_{y_1}X_2 & \lambda - \partial_{x_2}X_2 & -\partial_{y_2}X_2 \\ -\partial_{x_1}Y_1 & \lambda - \partial_{y_1}Y_1 & -\partial_{x_2}Y_1 & -\partial_{y_2}Y_1 \\ -\partial_{x_1}Y_2 & -\partial_{y_1}Y_2 & -\partial_{x_2}Y_2 & \lambda - \partial_{y_2}Y_2 \end{bmatrix}$$

$$= det \begin{bmatrix} \lambda - \partial_{x_1}X_1 & -\partial_{y_1}X_1 & -\partial_{x_2}X_1 & -\partial_{y_2}X_1 \\ -\partial_{x_1}Y_1 & \lambda - \partial_{y_1}Y_1 & -\partial_{x_2}Y_1 & -\partial_{y_2}Y_1 \\ -\partial_{x_1}X_2 & -\partial_{y_1}X_2 & \lambda - \partial_{x_2}X_2 & -\partial_{y_2}X_2 \\ -\partial_{x_1}Y_2 & -\partial_{y_1}Y_2 & -\partial_{x_2}Y_2 & \lambda - \partial_{y_2}Y_2 \end{bmatrix}$$

Onde a última igualdade foi obtida trocando-se a linha 2 pela linha 3. Essa matriz 4×4 pode ser representada, da forma usual, por blocos de matrizes 2×2. Dessa forma, podemos escrever:

$$det(\lambda Id - d_{z_0}\phi_T^{H_\epsilon}) = det \begin{bmatrix} B_1 & -B_2 \\ -B_3 & B_4 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Diante dessa representação, temos:

Lema 3.2.1 *A matriz B_2 é nula.*
Demonstração: *A matriz B_2 é dada por:*

$$B_2 = \begin{bmatrix} \partial_{x_2}X_1(T, z_0) & \partial_{y_2}X_1(T, z_0) \\ \partial_{x_2}Y_1(T, z_0) & \partial_{y_2}Y_1(T, z_0) \end{bmatrix}$$

Observemos que esta matriz corresponde a derivada da aplicação:

$$(x_2, y_2) \mapsto (X_1(T, 0, x_2, 0, y_2), Y_1(T, 0, x_2, 0, y_2))$$

Avaliada em $(x_2, y_2) = (0, y_2^E)$. Como a subvariedade M_1, definida na seção 1, é invariante pelo fluxo de X_{H_ϵ}, segue que esta aplicação é identicamente $(0, 0)$. Portanto, $B_2 = 0_{2x2}$. $\square$

Com isso, obtemos os dois próximos corolários.

Corolário 3.2.1 *O polinômio característico de* $d_{z_0}\phi_T^{H_\epsilon}$ *é dado por:*

$$det(\lambda Id - d_{z_0}\phi_T^{H_\epsilon}) = det(B_1)det(B_4)$$

Demonstração: *Imediato a partir do lema anterior e da representação por blocos de matrizes* 2×2 *(igualdade 3.3).* $\square$

Corolário 3.2.2 *Os autovalores da seguinte matriz:*

$$\Delta = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} X_1(T, z_0) & \partial_{y_1} X_1(T, z_0) \\ \partial_{x_1} Y_1(T, z_0) & \partial_{y_1} Y_1(T, z_0) \end{bmatrix}$$

são autovalores de $d_{z_0}\phi_T^{H_\epsilon} : T_{z_0}\mathbb{R}^4 \longrightarrow T_{z_0}\mathbb{R}^4$.
Demonstração: *Devemos observar que os autovalores de* Δ *correspondem às raízes da equação* $det(B_1) = 0$. $\square$

Observação 3.2.1 *A ideia, na sequência, será analisar os autovalores dessa matriz* Δ*, tendo em vista que eles são autovalores de* $d_{z_0}\phi_T^{H_\epsilon}$ *e que, pelo Lema 2.3.1, os autovalores de* $d_{z_0}\phi_T^{H_\epsilon}$ *são da forma* $\{\lambda, \lambda^{-1}, 1, 1\}$*, onde* $\{\lambda, \lambda^{-1}\}$ *são autovalores da correspondente derivada da aplicação de Poincaré, no nível de energia. A partir destes, podemos classificar a órbita periódica sobre o nível de energia.*

2. **A Matriz** Δ.
Observemos que a matriz Δ corresponde a derivada da aplicação:

$$(x_1, y_1) \mapsto (X_1(T, x_1, 0, y_1, y_2^E), Y_1(T, x_1, 0, y_1, y_2^E))$$

avaliada em $(x_1, y_1) = (0, 0)$. Definimos as seguintes curvas auxiliares:

$$z_1(t) = \frac{\partial \phi_t^{H_\epsilon}}{\partial x_1}(z_0) \text{ e } z_2(t) = \frac{\partial \phi_t^{H_\epsilon}}{\partial y_1}(z_0)$$

Então, **definindo a matriz** $A_\epsilon(t) = dX_{H_\epsilon}(\phi_t^{H_\epsilon}(z_0))$, podemos caracterizar essas curvas e a matriz Δ por:

Lema 3.2.2 *Pela definição das curvas* z_1 *e* z_2*, temos:*

- z_1 *e* z_2 *são soluções de:*

$$\begin{cases} z_1' = A_\epsilon(t)z_1 \\ z_1(0) = (1,0,0,0) \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} z_2' = A_\epsilon(t)z_2 \\ z_2(0) = (0,0,1,0) \end{cases}$$

- *Indicando por* $\pi_1 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\pi_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1, y_1)$, *a primeira coluna da matriz* Δ *é dada pelo vetor* $\pi_1(z_1(T))$ *e a segunda coluna é dada pelo vetor* $\pi_1(z_2(T))$.

Demonstração: *O primeiro item segue de propriedades da derivada da aplicação fluxo de uma equação diferencial ordinária (ver [33]) e o segundo segue da definição da matriz* Δ. $\square$

Devido a caracterização da matriz Δ, por meio das soluções de $z' = A_\epsilon(t)z$, vamos analisar melhor esta equação. Observemos que, pela definição de A_ϵ e como a trajetória de z_0 é da forma $\phi_t^{H_\epsilon}(z_0) = (0, x_2(t), 0, y_2(t))$, podemos escrever:

$$A_\epsilon(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha^2 + 2\epsilon x_2^2(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu^2 - 3b_2 x_2^2(t) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, por meio de blocos de matrizes 2×2, a matriz A_ϵ se escreve como:

$$A_\epsilon(t) = \begin{bmatrix} 0 & Id \\ U_\epsilon(t) & 0 \end{bmatrix}, \text{ Onde } U_\epsilon(t) = \begin{bmatrix} u_\epsilon(t) & 0 \\ 0 & v(t) \end{bmatrix}$$

Com $u_\epsilon(t) \doteq -\alpha^2 + 2\epsilon x_2^2(t)$ e $v(t) \doteq \nu^2 - 3b_2 x_2^2(t)$.

Suponhamos $z(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ (ou seja, as curvas x e y estão no $\mathbb{R}^2$) solução de $z' = A_\epsilon(t)z$. Então:

$$z' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & Id \\ U_\epsilon(t) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ U_\epsilon(t)x \end{bmatrix}$$

Logo:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = U_\epsilon(t)x \end{cases}$$

Portanto, a equação se reduz a uma equação diferencial ordinária, em $\mathbb{R}^2$, de segunda ordem:

$$x'' = U_\epsilon(t)x$$

Procedendo da mesma forma, escrevendo a solução desta equação como $x(t) = (x_1(t), x_3(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, obtemos:

$$x' = \begin{bmatrix} x_1'' \\ x_3'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_\epsilon(t) & 0 \\ 0 & v(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_\epsilon(t)x_1 \\ v(t)x_3 \end{bmatrix}$$

Logo:

$$\begin{cases} x_1'' = u_\epsilon(t)x_1 \\ x_3'' = v(t)x_3 \end{cases}$$

Tendo em vista essas simplificações da equação $z' = A_\epsilon(t)z$ e as condições iniciais no Lema 3.2.2, podemos concluir:

- A curva $z_1 = z_1(t)$ tem a forma $z_1(t) = (x_1(t), x_3(t), x_1'(t), x_3'(t))$, onde:

$$\begin{cases} x_1'' = u_\epsilon(t)x_1 \\ x_1(0) = 1; \\ x_1'(0) = 0; \end{cases}$$

- A curva $z_2 = z_2(t)$ tem a forma $z_2(t) = (x_1(t), x_3(t), x_1'(t), x_3'(t))$, onde:

$$\begin{cases} x_1'' = u_\epsilon(t)x_1 \\ x_1(0) = 0; \\ x_1'(0) = 1; \end{cases}$$

Baseado nessas informações, podemos representar a matriz Δ da seguinte forma:

Proposição 3.2.1 *Seja $M = M(t)$ a matriz dada por:*

$$M(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_3(t) \\ x_1'(t) & x_3'(t) \end{bmatrix}$$

Onde:

$$\begin{cases} x_1'' = u_\epsilon(t)x_1 \\ x_1(0) = 1; \\ x_1'(0) = 0; \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x_3'' = u_\epsilon(t)x_3 \\ x_3(0) = 0; \\ x_3'(0) = 1; \end{cases}$$

Então: $\Delta = M(T)$.
Demonstração: *Segue da análise feita acima e do Lema 3.2.2.* □

Essa caracterização da matriz Δ nos permite escrever, para o seu polinômio característico:

Corolário 3.2.3 *O polinômio característico da matriz* Δ *tem a seguinte forma:*

$$p_\Delta(\lambda) = \lambda^2 - 2\Phi\lambda + 1, \text{ onde: } \Phi = \frac{x_1(T) + x_3'(T)}{2}.$$

Demonstração: *Observemos que a matriz* $M = M(t)$ *é matriz fundamental da seguinte equação:*

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ u_\epsilon(t) & 0 \end{bmatrix} X$$

Logo, pela Fórmula de Liouville (ver [33]), o determinante de $M(t)$ *é dado por:*

$$det(M(t)) = det(M(0))e^0 = det(M(0)) = 1, \forall t \in \mathbb{R}$$

Como $\Delta = M(T)$, *o polinômio característico de* Δ *tem a seguinte forma:*

$$p_\Delta(\lambda) = \lambda^2 - 2\Phi\lambda + 1, \text{ onde: } 2\Phi \text{ é o traço de } M(T).$$

Segue o resultado. □

Observação 3.2.2 *Convém ressaltar que esse número* Φ *pode ser visto como função de* T *(período da órbita) e do parâmetro* ϵ. *De fato, as soluções* $x_1 = x_1(t)$ *e* $x_3 = x_3(t)$ *dependem do parâmetro* ϵ. *Assim:*

$$\Phi = \frac{x_1(T,\epsilon) + x_3'(T,\epsilon)}{2}$$

Assim, escreveremos $\Phi = \Phi_\epsilon(T)$ para representar este número, da forma como ele aparece no enunciado da Proposição 3.1.1.

Diante dessas propriedades, vamos demonstrar a Proposição 3.1.1.
Demonstração da Proposição 3.1.1: *Suponhamos λ_1 e λ_2 autovalores de Δ. Então:*

$$\lambda_1 = \Phi_\epsilon(T) + \sqrt{\Phi_\epsilon^2(T) - 1} \text{ e } \lambda_2 = \Phi_\epsilon(T) - \sqrt{\Phi_\epsilon^2(T) - 1}$$

Temos: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$. Consideremos as situações:

- *$\Phi_\epsilon^2(T) \in (0,1)$. Nesse caso, λ_1 e λ_2 têm parte imaginária não nula. Segue que $\lambda_2 = \bar{\lambda_1}$. Assim, $\mid \lambda_1 \mid, \mid \lambda_2 \mid = 1$. Obtemos que:*

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \{z \in \mathbb{C} : \mid z \mid = 1\} \setminus \{-1, 1\}.$$

  Como os autovalores de Δ são autovalores de $d_{z_0}\phi_T^{H_\epsilon}$ (Corolário 3.2.2) e tendo em vista o Lema 2.3.1, concluímos que λ_1 e λ_2 são autovalores da Transformação de Poincaré, sobre o nível de energia, da órbita de z_0. Segue que a órbita é elíptica em seu nível de energia.

- *$\Phi_\epsilon^2(T) > 1$. Nesse caso, λ_1 e λ_2 são reais, com módulos diferentes de 1. Por um argumento análogo ao caso anterior, concluímos que a órbita de z_0 é hiperbólica no seu nível de energia.*

Concluímos assim a demonstração da Proposição 3.1.1. □

Uma vez provado o Teorema 3.1.1, indicaremos, a seguir, as principais etapas para se concluir a demonstração do Teorema 1.1.1.
Demonstração do Teorema 1.1.1: *Pelo Teorema 3.1.1, para completarmos a demonstração do Teorema 1.1.1, resta a análise da órbita hiperbólica Γ'_E. Definimos a órbita Γ'_E como sendo a órbita no plano invariante M_2, com energia E no sistema hamiltoniano bidimensional X_{H_1}. Procedendo de forma análoga ao que foi feito em relação a órbita elíptica, para $|\epsilon|$ pequeno, termos que Γ'_E é hiperbólica em seu nível de energia. As órbitas Γ_E e Γ'_E estão linkadas no nível de energia $H_\epsilon^{-1}(E)$.* □

3.3 Construção da Transformação de Poincaré

Nesta seção, construiremos a Transformação de Poincaré para a análise da dinâmica próxima a órbita periódica elíptica Γ_E, no nível de energia. Analisando a dinâmica da aplicação de Poincaré, para o caso $\epsilon = 0$, colocaremos,

na sequência, algumas questões que irão nos conduzir às demonstrações dos Teoremas 1.1.2 e 1.1.3.

Mostramos, então, que todo dado $E > 0$, existe $\epsilon_0 = \epsilon_0(E) > 0$, tal que, quando $|\epsilon| < \epsilon_0$, a órbita Γ_E, construída no Lema 1.1.1, é elíptica no nível de energia. Na sequência, construiremos uma seção transversal para o estudo da Transformação de Poincaré, restrita ao nível de energia. Para isso, consideremos o seguinte conjunto:

$$\Sigma = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4 : x_2 = 0\}.$$

Vamos decompor este conjunto, considerando os seguintes subconjuntos:

$$\Sigma^+ = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4 : x_2 = 0 \text{ e } y_2 > 0\}$$

$$\Sigma^0 = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4 : x_2 = 0 \text{ e } y_2 = 0\}$$

$$\Sigma^- = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4 : x_2 = 0 \text{ e } y_2 < 0\}$$

O conjunto $\Sigma^0 = M_2$ (conjunto introduzido anteriormente), que é uma subvariedade invariante pelo fluxo de X_{H_ϵ}. Os conjunto Σ^+ e Σ^- são seções transversais a órbita Γ_E (seções transversais em $\mathbb{R}^4$).Restringindo essas seções transversais ao nível de energia, obtemos seções sobre o nível de energia. Tendo em vista isso, definimos os seguintes conjuntos:

$$\Sigma_E = \Sigma \cap H_\epsilon^{-1}(E) \text{ e } \Sigma_E^{+,-,0} = \Sigma^{+,-,0} \cap H_\epsilon^{-1}(E).$$

Segue que o conjunto Σ_E pode ser escrito como:

$$\Sigma_E = \Sigma_E^+ \cup \Sigma_E^0 \cup \Sigma_E^-.$$

Assim, Σ_E^+ e Σ_E^- são seções transversais para a órbita Γ_E, sobre o nível de energia, e Σ_E^0 é uma órbita periódica de X_{H_ϵ}, com energia E (esta órbita corresponde a uma órbita periódica do sistema hamiltoniano bidimensional X_{H_1}, com energia E).

Notemos que se $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \Sigma$, então:

$$x_2 = 0 \text{ e } \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + \frac{\alpha^2 x_1^2}{2} + \frac{b_1 x_1^4}{4} = E.$$

Segue que Σ_E é uma superfície, contida no nível de energia, que é difeomorfa a esfera bidimensional $\mathbb{S}^2$. Um esboço, desta situação, é indicado na próxima figura (Figura 3.3).

Os conjuntos Σ_E^+ e Σ_E^-, seções transversais para a órbita Γ_E, correspondem aos hemisférios da esfera. O equador Σ_E^0 é uma órbita periódica, que corresponde ao bordo das seções transversais Σ_E^+ e Σ_E^-. Para o estudo da Transformação de Poincaré da órbita Γ_E, restrito ao nível de energia, utilizaremos a seção Σ_E^+. Esta é uma, contida no nível de energia, que é a imagem da aplicação:

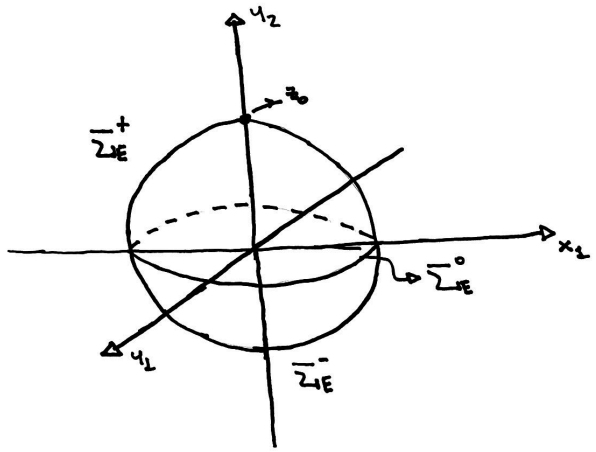

Figura 3.3: A esfera Σ_E.

$$\bar{z} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$(x_1, y_1) \mapsto (x_1, 0, y_1, \bar{y}(x_1, y_1)). \tag{3.4}$$

Onde Ω é uma vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, dada por:

$$\Omega \doteq \{(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 : \tfrac{y_1^2}{2} + \tfrac{\alpha^2 x_1^2}{2} + \tfrac{b_1 x_1^4}{4} < E\}.$$

E a aplicação $\bar{y} = \bar{y}(x_1, y_1)$ é dada por:

$$\bar{y}(x_1, y_1) = \sqrt{2\{E - (\frac{y_1^2}{2} + \frac{\alpha^2 x_1^2}{2} + \frac{b_1 x_1^4}{4})\}}. \tag{3.5}$$

Observemos que Ω é um subconjunto do $\mathbb{R}^2$, que é invariante pelo fluxo do campo hamiltoniano bidimensional X_{H_1}. Este conjunto Ω pode ser decomposto como uma união de órbitas periódicas de X_{H_1}, órbitas com energia menor que E. A superfície Σ_E^+, seção transversal para a órbita Γ_E de X_{H_ϵ}, sobre o nível de energia E, não depende do parâmetro ϵ.

Na sequência, analisaremos o comportamento da correspondente Transformação de Poincaré, segundo o parâmetro ϵ ser nulo ou não.

- **Caso $\epsilon = 0$.** Vamos analisar a Transformação de Poincaré da órbita periódica Γ_E, de X_{H_ϵ}, no caso em que $\epsilon = 0$, e no caso em que $\alpha T \neq$

$2k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Nessas condições, a Transformação de Poincaré está definida na seção Σ_E^+ (definida na seção inteira), e seu estudo pode ser feito através de um simplectomorfismo $\psi_0 : \Omega \to \Omega$, definido no sistema de coordenadas da seção Σ_E^+. Temos que $((0,0)) \in \Omega$ é um ponto fixo elíptico de ψ_0.

A dinâmica da aplicação de Poincaré ψ_0 é simples. O seu domínio Ω é folheado por curvas fechadas e invariantes por ψ_0, que são as mesmas curvas fechadas que aparecem na Figura 3 (por conservação de energia). Observemos que tais curvas correspondem a órbitas periódicas do campo bidimensional X_{H_1}. As órbitas de ψ_0 sobre cada uma dessas curvas ou são periódicas ou são densas sobre a curva. De fato, dado um ponto $(x_1, y_1) \in \Omega$, temos duas órbitas periódicas associadas: a órbita de (x_1, y_1) por X_{H_1} e a órbita de $(0, \bar{y}(x_1, y_1))$ (onde $\bar{y}$ é definido em (3.5)) por X_{H_2}. Indicando por T_1 o período da órbita periódica de X_{H_1} e por T_2 o período da órbita periódica de X_{H_2}, se $\frac{T_2}{T_1} \in \mathbb{Q}$, então a órbita de (x_1, y_1) por ψ_0 é periódica; caso contrário, esta órbita será densa sobre a curva.

- **Caso $\epsilon \neq 0$.** Vamos supor $E > 0$, com $\alpha T \neq 2k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, e Γ_E a órbita dada pelo Lema 1.1.1. Fixemos ϵ, com $|\epsilon| < \epsilon_0$, com $\epsilon \neq 0$, onde ϵ_0 é dado pelo Teorema 1.1.1. Nessa situação, Γ_E é órbita de X_{H_ϵ}, elíptica em seu nível de energia. Ao contrário do caso $\epsilon = 0$, não podemos garantir que a Transformação de Poincaré esteja definida na seção toda Σ_E^+. Indicaremos a correspondente Transformação de Poincaré por $\psi_\epsilon : \Omega_\epsilon \to \Omega_\epsilon$, onde $\Omega_\epsilon \subseteq \Omega$ é uma vizinhança de $(0,0)$, sendo este um ponto fixo elíptico.

3.4 Algumas Questões

Pela descrição feita acima, temos que $\psi_0 : \Omega \to \Omega$ é um simplectomorfismo suave, cuja origem é um ponto fixo elíptico. O domínio Ω é folheado por curvas fechadas invariantes, sobre as quais a dinâmica de ψ_0 é, relativamente, simples de descrever. Por outro lado, temos $\psi_\epsilon : \Omega_\epsilon \to \Omega_\epsilon$, $\epsilon \neq 0$, que são simplectomorfismos cuja origem também é um ponto fixo elíptico. Iremos analisar a família de aplicações ψ_ϵ como uma perturbação da aplicação ψ_0. Gostaríamos de analisar como as propriedades descritas acima para ψ_0 (domínio folheado por curvas fechadas invariantes) se comportam diante dessa perturbação. Ou seja:

- Alguma dessas curvas fechadas invariantes persiste para a aplicação ψ_ϵ, com $\epsilon \neq 0$?

- Que tipo de dinâmica irá surgir para $\epsilon \neq 0$? Se as curvas forem destruídas, que tipo de estrutura surgirá no sistema?

Observemos que para o caso $\epsilon = 0$, uma vizinhança da órbita Γ_E, no nível de energia E, é folheada por toros bidimensinais invariantes. Portanto, questionar a persistência das curvas invariantes de ψ_0 é questionar a persistência desses toros invariantes para $\epsilon \neq 0$. No próximo capítulo, analisaremos uma mudança de coordenadas que nos permitirá colocar essas questões de uma forma "mais tratável".

Capítulo 4

Mudança Conveniente de Coordenadas.

O Teorema 1.1.1 nos dá uma condição para que a órbita Γ_E, de X_{H_ϵ}, seja elíptica no nível de energia, para $|\epsilon|$ pequeno. Nesse caso, o estudo da correspondente Transformação de Poincaré é feito através de um difeomorfismo, que preserva área, definido numa vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, cuja origem é um ponto fixo elíptico. Neste capítulo, iremos estudar uma mudança conveniente de coordenadas para essa situação, baseada na Forma Normal de Birkhoff, e veremos como ficam, nessas novas coordenadas, algumas das questões colocadas nos Teoremas 1.1.2 e 1.1.3.

4.1 A Forma Normal de Birkhoff

Suponhamos $V_0 \subseteq \mathbb{R}^2$, vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, e $f : V_0 \longrightarrow V_0$ um difeomorfismo de classe C^∞, que preserva área e cuja origem é um ponto fixo, isto é, $f(0,0) = (0,0)$. Sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ autovalores de $df(0,0)$. Como f preserva área, temos $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$. Ou seja, os autovalores de $df(0,0)$ são da forma $\lambda, \frac{1}{\lambda}$, com $\lambda \in \mathbb{C}$.

Se $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{1,-1\}$, então a origem é um ponto fixo hiperbólico de f. Nesse caso, o teorema de Hartman-Grobman nos diz que, localmente, próximo a origem, as órbitas de f se comportam como as órbitas de $df(0,0)$, o sistema linearizado de f. Portanto, a derivada de f, na origem $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, determina o comportamento da dinâmica próxima ao ponto fixo.

Uma outra possibilidade é que o número $\lambda \in \mathbb{C}$ seja da forma $\lambda = e^{i\alpha}$. Nesse caso, se $\lambda^2 \neq 1$, então o ponto fixo é um ponto fixo elíptico. Nessa situação, ao contrário do que ocorre no caso hiperbólico, a primeira derivada é insuficiente para descrever o comportamento dinâmico local e precisamos

recorrer a derivadas de ordem superior. É possível associar uma Forma Normal a f, próximo ao ponto fixo, dentro de certas condições, que é a chamada Forma Normal de Birkhoff (ver [23] e [14]). Tal forma normal depende dos jatos de ordem superior de f em $(0,0)$ e é descrita abaixo.

Teorema 4.1.1 ***(Forma Normal de Birkhof)****Suponhamos $f : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ um simplectomorfismo suave, cuja origem é um ponto fixo e $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$ e $\bar{\lambda}$ são os autovalores de $df(0)$. É satisfeita a seguinte hipótese sobre o autovalor λ:*

$$\exists\ q \in \mathbb{N} \text{ tal que } \lambda^n \neq 1, \forall n \in \{1, 2, ..., q\}$$

Então existe um difeomorfismo h, C^∞, que preserva área, tal que em coordenadas complexas, $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$, tenhamos:

$$h \circ f \circ h^{-1}(z) = \lambda z e^{2\pi i P(z\bar{z})} + o(|z|^{q-1}),$$

$$\text{onde: } P(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i x^i, \text{ sendo que } 2m + 1 < q.$$

Cada coeficiente c_i do polinômio P, que aparece na expressão da forma normal, é chamado invariante de Birkhoff.

Em relação a este teorema, temos as seguintes observações:

Observação 4.1.1 *Notemos que:*

1. *Escrevendo a expressão obtida na Forma Normal de Birkhoff em coordenadas polares (θ, r), conseguimos uma aplicação $\tilde{f}$ da forma:*

$$\tilde{f} = (\theta, r) \mapsto (\theta + \alpha + P(r^2), r) + o(|r|^{q-1}) = (\Theta, R).$$

2. *Segue que diminuindo U, se necessário, existe um difeomorfismo $G_1 : U \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times (0, b)$, para algum $b > 0$, tal que $G_1 \circ f = \tilde{f} \circ G_1$, onde $\tilde{f}$ é dada acima. É importante ressaltar que vale:*

$$G_1^*(r d\theta \wedge dr) = dx \wedge dy.$$

3. *Sendo $\tilde{f}(\theta, r) = (\Theta, R)$ e se algum invariante de Birkhoff for não nulo, então:*

$$\frac{\partial \Theta}{\partial r}(\theta, r) \neq 0, \text{ para } r > 0 \text{ suficientemente pequeno.}$$

Ou seja, a aplicação $\tilde{f}$ satisfaz uma condição twist.

4. *Seria interessante que $\tilde{f} : \mathbb{S}^1 \times (0,b) \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times (0,b)$ preservasse a 2-forma simplética $d\theta \wedge dr$. Notemos que ela preserva $rd\theta \wedge dr$. Para contornar esse problema, faremos uma outra mudança de coordenadas. Definimos:*

$$G_2 : \mathbb{S}^1 \times (0,b) \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times (0,a),\ G_2(\theta, r) = (\theta, \tfrac{r^2}{2}) = (\Theta, R).$$

Observemos[1] *que $G_2^*(d\Theta \wedge dR) = rd\theta \wedge dr$.*
Seja $\bar{f} = G_2 \circ \tilde{f} \circ G_2^{-1}$.

5. *Observemos que $\bar{f}$ satisfaz a condição twist se, e somente se, $\tilde{f}$ satisfaz.*

6. *Seja $G : U \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times (0,a)$, $G = G_2 \circ G_1$. Se alguma invariante de Birkhoff for não nulo, então G conjuga f em U a $\bar{f}$ em $\mathbb{S}^1 \times (0,a)$, com $\bar{f}$ satisfazendo uma condição twist. Devemos notar que: $G_2^*(Rd\Theta) = \frac{r^2}{2}d\theta$. Além disso, vale que se $\lambda = Rd\Theta$, obtemos, portanto*[2]*, $G^*\lambda = \mu$, onde:*

$$\mu = \frac{x}{2}dy - \frac{y}{2}dx.$$

Observemos que $f^*\mu - \mu$ é exata, pois f preserva área e U é contrátil. Logo, $\bar{f}^*\lambda - \lambda$ é exata em $\mathbb{S}^1 \times (0,a)$. Portanto, G conjuga f a uma aplicação twist simplética exata (se algum invariante for não nulo).

7. *A ideia para essa segunda mudança de coordenadas aparece em [8] e, em dimensões maiores, em [7].*

Um importante resultado relacionado a uma aplicação $f : U \to U$, satisfazendo as condições do Teorema da Forma Normal de Birkhoff, é apresentado a seguir. O resultado se refere a estabilidade do ponto fixo em questão. É uma versão do resultado conhecido como Teorema do Twist de Moser (ver [23] para maiores detalhes).

Teorema 4.1.2 *Seja $f : U \to U$ uma aplicação satisfazendo as condições do Teorema da Forma Normal de Birkhoff. Se o polinômio associado (dado no teorema anterior) for não nulo, então dado qualquer vizinhança $V \subseteq U$ de $(0,0) \in U$, existe uma curva fechada γ, contida em V, homotopicamente não*

[1] Por abuso de notação, indicamos as coordenadas de $\mathbb{S}^1 \times (0;a)$ por (Θ, R)

[2] $G_1^*(\frac{r^2}{2}d\theta) = \mu$

trivial em $V \setminus \{(0,0)\}$, tal que $f(\gamma) = \gamma$. Ou seja, se algum dos invariantes de Birkhoff, associado a forma normal, é não nulo, então exitem curvas fechadas invariantes por f, homotopicamente não triviais, arbitrariamente próxima ao ponto fixo.
Demonstração: *Ver [23].* $\square$

4.2 Aplicando o Teorema 4.1.1 às Aplicações de Poincaré

Vamos aplicar o Teorema 4.1.1 a Transformação de Poincaré de Γ_E, sobre o nível de energia. No nosso caso de interesse, apresentado na seção anterior, temos uma família de simpectomorfismos $\psi_\epsilon : \Omega_\epsilon \to \Omega_\epsilon$, onde Ω_ϵ é uma pequena vizinhança da origem. Temos que a origem é um ponto fixo elíptico, sendo os autovalores, para o caso $\epsilon = 0$, dados por $e^{i\alpha T}$ e $e^{-i\alpha T}$. Para que a Forma Normal de Birkhoff esteja bem definida para essa aplicação ψ_0, é suficiente impor a seguinte condição. Escrevendo $\lambda = e^{i\alpha T}$, suponhamos que:

$$\lambda^j \neq 1, \text{ para } j = 1, 2, 3, 4.$$

Nessas condições, o Teorema 4.1.1 pode ser aplicado a Transformação $\psi_0 : \Omega \to \Omega$. O parâmetro q, do enunciado do Teorema 4.1.1, pode ser tomado como $q = 4$. Notemos ainda que essa condição é equivalente a:

$$\cos j\alpha T + i \sin j\alpha T \neq 1, \ \forall j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Ou seja, $j\alpha T \neq 2k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, onde $j = 1, 2, 3, 4$.

Baseado nisso definimos o seguinte conjunto de valores de energia, que aparece no enunciado dos Teoremas 1.1.2 e 1.1.3.

Notação: Consideremos $J \subseteq (0, +\infty)$ definido como:

$$J \doteq \{E \in (0, +\infty) : \alpha T \neq 2k\pi, k\pi, \tfrac{k\pi}{2}, \tfrac{2k\pi}{3} : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Com isso, obtemos o próximo lema.

Lema 4.2.1 *Suponhamos $E \in J$. Então existe $\epsilon_0 = \epsilon_0(E) > 0$, tal que se $|\epsilon| < \epsilon_0$, então a Forma Normal de Birkhoff da aplicação $\psi_\epsilon : \Omega_\epsilon \to \Omega_\epsilon$ está bem definida.*
Demonstração: *Observemos que para $|\epsilon|$ suficientemente pequeno, $(0,0)$ é um ponto fixo elíptico de ψ_ϵ. Se $E \in J$, pela argumentação feita acima, a Forma Normal de Birkhoff está definida para ψ_0. Como os autovalores de ψ_ϵ variam continuamente com o parâmetro ϵ, segue que diminuindo ϵ, se necessário, temos que se $E \in J$, então a Forma Normal de Birkhoff de ψ_ϵ também esta definida.* $\square$

Em relação ao domínio das aplicações $\psi_\epsilon : \Omega_\epsilon \to \Omega_\epsilon$, faremos a seguinte consideração.

Observação 4.2.1 *Como muitas das questões que faremos serão analisadas numa pequena vizinhança de* $(0,0)$*, iremos supor que as Transformações de Poincaré,* ψ_ϵ*, estejam definidas num mesmo domínio, que indicaremos por* Ω*, obtido diminuindo o domínio da aplicação* ψ_0*.*

4.3 Algumas Questões em coordenadas twist.

Portanto, diante da condição $E \in J$ e da observação 4.2.1, a Forma Normal de Birkhoff fica bem definida para a família de aplicações $\psi_\epsilon : \Omega \to \Omega$, quando ϵ é suficientemente pequeno. Assim, temos uma boa caracterização de suas expressões, quando escritas em coordenadas polares. Tendo em vista as observações feitas após o Tereoma 4.1.1, seria interessante dizer se algum invariante de Birkhoff, dessas aplicações, é nulo ou não. Isso não é algo tão simples, pois, como foi comentado, eles dependem dos jatos de ordem superior da aplicação. No caso do primeiro invariante de Birkhoff, ele depende do jato de ordem 3. Suponhamos, além de $E \in J$, que algum dos invariantes de Birkhoff seja não nulo. Vamos analisar como ficariam as questões levantadas no capítulo anterior (última seção do capítulo anterior). Teremos, nessas condições, que ψ_ϵ é conjugada a uma aplicação twist simplética exata φ_ϵ. Vimos que o domínio da aplicação ψ_0 é folheado por curvas fechadas invariantes. Isso, no contexto da teoria de aplicações twist, pode ser formulado para a aplicação correspondente φ_0, dizendo-se que φ_0 é uma aplicação twist integrável: seu domínio é folheado por curvas rotacionais invariantes, cuja dinâmica, sobre elas, é conjugada a uma rotação rígida. Dessa forma, colocaríamos as questões do capítulo anterior, dentro da teoria de aplicações twist, da seguinte maneira:

- Para $\epsilon \neq 0$, a aplicação twist φ_ϵ é integrável? Possui curvas rotacionais invariantes?

- Se não for integrável, que propriedades teríamos para φ_ϵ?

O objetivo deste trabalho será mostrar que para $\epsilon \neq 0$, pequeno, surgem zonas de instabilidade "se acumulando em $r = 0$", produzindo entropia topológica positiva para as aplicações φ_ϵ, $\epsilon \neq 0$, pequeno. Se provarmos essas afirmações, teremos provado o Teorema 1.1.3.

Diante das colocações feitas nessa seção, é fundamental saber se algum dos invariantes de Birkhoff é não nulo. Analisaremos essa questão para o primeiro

invariante de Birkhoff, isto é, o coeficiente c_1 do polinômio apresentado no Teorema da Forma Normal de Birkhoff. Esse será o assunto do próximo capítulo.

Capítulo 5

O Primeiro Invariante de Birkhoff

O objetivo deste capítulo é analisar o primeiro invariante de Birkhoff para a família de aplicações[1] $\psi_\epsilon : \Omega \to \Omega$. Nesse sentido, estabeleceremos uma fórmula para este invariante, correspondente ao caso $\epsilon = 0$, como uma função do nível de energia. Além disso, neste capítulo, provaremos o Teorema 1.1.2.

5.1 Fórmula para o Primeiro Invariante de Birkhoff.

Apresentaremos uma expressão (uma fórmula) para o cálculo do primeiro invariante, baseado em [10].

Suponhamos $f : U \longrightarrow U$ difeomorfismo que preserva área, como no enunciado do teorema da forma normal, com $f(0,0) = (0,0)$, e seja μ autovalor de $df(0)$, que será escrito como:

$$\mu = \cos\gamma + i\sin\gamma = e^{i\gamma}.$$

A expansão em série de Taylor de f em $(0,0) \in U$, nas variáveis (x,y) nos dá:

$$f(x,y) = (a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + ... + a_{03}x^3, b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + ... + b_{03}y^3) +$$

$$+ o(\| (x,y) \|^4).$$

[1] Quando escrevemos $\psi_\epsilon : \Omega \to \Omega$, estamos assumindo a situação da observação 4.2.1.

Em coordenadas complexas conjugadas, é possível escrever:

$f(z,\bar{z}) = \mu(z + c_{20}z^2 + c_{11}z\bar{z} + ... + c_{03}\bar{z}^3) + o(\mid z \mid^4)$.

Assumiremos que:

$$\mu^j \neq 1, 2, 3, 4.$$

Proposição 5.1.1 *Nessas condições, o primeiro invariante de Birkhoff pode ser escrito em termos dos coeficientes da expansão de f em coordenadas complexas conjugadas $(z,\bar{z})$:*

$$\tau = Im(c_{21}) + \tfrac{\sin\gamma}{\cos\gamma - 1}(3 \mid c_{20} \mid^2 + \tfrac{2\cos\gamma - 1}{2\cos\gamma + 1} \mid c_{02} \mid^2),$$

onde $Im(c_{21})$ denota a parte imaginária do coeficiente c_{21}.
Demonstração: *Ver [22] e [10].* $\square$

Os coeficientes da expansão em coordenadas complexas conjugadas dependem dos coeficientes $(a_{i,j})_{i,j}$ e $(b_{i,j})_{i,j}$ da expansão em variáveis reais (x,y). Observemos que os coeficientes (a_{ij}) e (b_{ij}), para $i+j=1$, são os coeficientes da matriz $df(0)$. Como f preserva área:

$$a_{10}b_{01} - a_{01}b_{10} = 1.$$

Para o caso em que $a_{10} = b_{01}$, teremos $a_{10}^2 - a_{01}b_{10} = 1$ (que é a situação da aplicação ψ_0). Utilizando essas relações, mostra-se[2] que:

- $Im(c_{21}) = \frac{a_{10}}{8}(-a_{21} + 3\dfrac{b_{10}}{a_{10}}a_{03} - 3\dfrac{a_{01}}{b_{10}}b_{30} + b_{12}) - \dfrac{b_{10}}{8}(a_{12} - 3\dfrac{a_{01}}{b_{10}}a_{30} - \dfrac{a_{01}}{b_{10}}b_{21} + 3b_{03})$.
- $\mid c_{20} \mid^2 = \frac{1}{16}\sqrt{\frac{-a_{01}}{b_{10}}}(\frac{b_{10}}{a_{01}}a_{02} + a_{20} + b_{11})^2 + \frac{1}{16}\sqrt{\frac{-b_{10}}{a_{01}}}(\frac{a_{01}}{b_{10}}b_{20} + b_{02} + a_{11})^2$.
- $\mid c_{20} \mid^2 = \frac{1}{16}\sqrt{\frac{-a_{01}}{b_{10}}}(\frac{b_{10}}{a_{01}}a_{02} + a_{20} - b_{11})^2 + \frac{1}{16}\sqrt{\frac{-b_{10}}{a_{01}}}(\frac{a_{01}}{b_{10}}b_{20} + b_{02} - a_{11})^2$.

Essas igualdades e a proposição anterior mostram que é possível determinar o primeiro invariante de Birkhoff em termos dos coeficientes da expansão em série de Taylor nas variáveis (x,y). Portanto, precisaremos determinar o jato de ordem 3 das aplicações $\psi_\epsilon : \Omega \to \Omega$, e a partir disso calcular o invariante de Birkhoff, utilizando a fórmula dada acima. É o que faremos na próxima seção.

[2] Ver [10].

5.2 A Aplicação ψ_0 de uma forma conveniente.

Objetivo, dessa seção, é escrever a aplicação $\psi_0 : \Omega \to \Omega$ de uma forma que nos permita analisar o correspondente primeiro invariante de Birkhoff, segundo a fórmula estabelecida acima.

Estamos indicando as coordenadas da seção Σ_E^+ por (x, y) (ao contrário de (x_1, y_1)). No caso $\epsilon = 0$, o sistema está desacoplado. Segue que o comportamento do sistema é determinado pelos sistemas hamiltonianos bidimensionais, H_1 e H_2, definidos em (3.1). Indicando $\phi = \phi_t^{H_1}$ o fluxo do sistema hamiltoniano bidimensional X_{H_1} e $T_0 = T_0(x, y)$ a função tempo de retorno, para o caso $\epsilon = 0$, da aplicação de Poincaré, em termos das coordenadas $(x, y) \in \Omega$, da seção escolhida[3]. Conforme vem sendo feito, indicaremos período, da órbita periódica Γ_E, por T. Portanto, $T = T_0(0, 0)$.

A aplicação $\psi_0 : \Omega \to \Omega$ pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\psi_0(x, y) = \phi(T_0(x, y), x, y)$$

Iremos escrever a função $T_0 = T_0(x, y)$ de uma maneira conveniente. Seja $P_2 : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, a função que associa a cada nível de energia, $E_2 > 0$, o período da órbita do sistema Hamiltoniano X_{H_2} com energia E_2. Se $t \mapsto (\tilde{x}_2(t), \tilde{y}_2(t))$ indica esta essa órbita, então temos:

$$\frac{\tilde{y}^2(t)}{2} + V_2(\tilde{x}_2(t)) = E_2.$$

Conforme discutido em [3] e [19], por exemplo, a função $P_2 = P_2(T_2)$ pode ser dada em termos da seguinte integral elíptica:

$$P_2(E_2) = 4 \int_0^{x(E_2)} \frac{dx_2}{\sqrt{2(E_2 - V_2(x_2))}}.$$

Onde $x(E_2)$ representa a raiz real e positiva de $V_2(x_2) - E_2 = 0$. Além disso, essa função P_2 é diferenciável, como função da energia E_2.

Observemos que se $(x, y) \in \Omega$, a órbita correspondente do Sistema Hamiltoniano X_{H_2} passará pelo ponto $(0, \bar{y}(x, y))$, onde $\bar{y} = \bar{y}(x, y)$ é dada pela equação (3.5). O tempo de retorno da órbita correspondente a (x, y), na seção, é o período da órbita de $(0, \bar{y}(x, y))$(pela construção da seção transversal). Notemos, ainda, que a energia dessa órbita no sistema hamiltoniano X_{H_2} é dada por:

[3]Conforme vem sendo destacado no texto, T é período da órbita periódica Γ_E; T_0 é uma função.

$$E_2 = \frac{\bar{y}^2(x,y)}{2}.$$

Seguirá que vale:

$$T_0(x,y) = P_2(\tfrac{\bar{y}^2(x,y)}{2}) = P_2(E - V_1(x) - \tfrac{y^2}{2}).$$

Sendo E a energia da órbita periódica Γ_E. Em relação a função $T_0 = T_0(x,y)$, temos o próximo lema.

Lema 5.2.1 *Valem as seguintes igualdades:*

- $\frac{\partial^2 T_0}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial T_0}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial T_0}{\partial y}(0,0) = 0$;
- $\frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2}(0,0) = -\alpha^2 P_2'(E)$;
- $\frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2}(0,0) = -P_2'(E)$;

Onde E é a energia da órbita periódica Γ_E. Além disso, as derivadas de ordem 1, em $(0,0)$, são nulas.
Demonstração: *Segue da igualdade:*

$$T_0(x,y) = P_2(\tfrac{\bar{y}^2(x,y)}{2}) = P_2(E - V_1(x) - \tfrac{y^2}{2}).$$

Derivando, aplicando a regra da cadeia, e calculando em $(x,y) = (0,0)$. $\square$

Diante disso, obtemos uma forma conveniente de escrever $T_0 = T_0(x,y)$.

Corolário 5.2.1 *Podemos escrever:*

$$T_0(x,y) = T + e(x,y),$$

onde $T = T_0(0,0)$ é o período da órbita periódica Γ_E e a aplicação $e = e(x,y)$ tem a seguinte forma:

$$e(x,y) = t_{20}x^2 + t_{02}y^2 + r_e(x,y),$$

sendo a função $r_e = r_e(x,y)$ uma função diferenciável que se anula em $(x,y) = (0,0)$, assim como suas derivadas até ordem 2.

O nosso objetivo será analisar o jato de ordem 3 de ψ_0 em $(0,0)$, tendo em vista a discussão feita, no capítulo anterior, sobre a Forma Normal de Birkhoff. Indicaremos o jato de ordem 3 de f em $(0,0)$ por $J^3 f(x,y)$. Assim, as componentes de $J^3 f(x,y)$ são polinômios homogêneos, em duas variáveis x e y, de grau 3.

O próximo resultado fará uma descrição de $J^3\psi_0$.

Proposição 5.2.1 *Vale a seguinte igualdade:*

$$J^3\psi_0(x,y) = J^3\phi_T(x,y) + P(x,y),$$

onde $P = P(x,y)$ é a aplicação polinomial dado por:

$$P(x,y) = (t_{20}x^2 + t_{02}y^2)(d_{(0,0)}(X_{H_1} \circ \phi_T)(x,y)).$$

A aplicação ϕ_T é o fluxo hamiltoniano do sistema bidimensional X_{H_1} no instante $t = T$, onde T é o período da órbita Γ_E.
Demonstração: *Observemos que:*

$$\psi_0(x,y) = \phi(T + e(x,y), x, y)$$

Mas em relação ao fluxo ϕ, podemos escrever:

$$\phi(T + t, x, y) = \phi_T(x,y) + tX_{H_1}(\phi_T(x,y)) + r(t,x,y).$$

Onde $r = r(t,x,y)$ se anula em $t = 0$, assim como suas derivadas de ordem 1, em relação a variável t.

Fazendo $t = e(x,y)$, obtemos:

$$\psi_0(x,y) = \phi_T(x,y) + e(x,y)X_{H_1}(\phi_T(x,y)) + r_1(x,y).$$

Onde $r_1(x,y) = r(e(x,y),x,y)$. A partir daqui, seguiremos por partes.

1. *A função $r_1 = r_1(x,y)$ não contribui com $J^3\psi_0(x,y)$, pois r_1 se anula em $(0,0)$, assim como suas derivadas até terceira ordem.*

2. *Analisemos o termo $X_{H_1}(\phi_T(x,y))$. Podemos escrever:*

$$X_{H_1}(\phi_T(x,y)) = d_{(0,0)}(X_{H_1} \circ \phi_T)(x,y) + r_2(x,y),$$

onde a função $r_2 = r_2(x,y)$ se anula em $(x,y) = (0,0)$, assim como suas derivadas de ordem 1. Segue que:

$$e(x,y)X_{H_1}(\phi_{T_0}(x,y)) = e(x,y)d_{(0,0)}(X_{H_1} \circ \phi_{T_0})(x,y) + e(x,y)r_2(x,y).$$

Afirmação: *O termo $e(x,y)r_2(x,y)$ não contribui com $J^3\psi_0(x,y)$, ou melhor, a função $e(x,y)r_2(x,y)$ se anula em $(0,0)$, assim como suas derivadas até terceira ordem.*

Diante dessa afirmação, concluímos que o termo de $e(x,y)X_{H_1}(\phi_{T_0}(x,y))$, que contribui com o $J^3\psi_0(x,y)$, é dado por:

$$P(x,y) = (t_{20}x^2 + t_{02}y^2)(d_{(0,0)}(X_{H_1} \circ \phi_{T_0})(x,y)).$$

Pelo que foi destacado nos itens 1 *e* 2*, concluímos que:*

$$J^3\psi_0(x,y) = J^3\phi_T(x,y) + P(x,y).$$

Concluímos, assim, a demonstração da proposição. □

Observação 5.2.1 *Devemos observar que esta proposição nos diz que o jato de ordem 3 de* ψ_0 *em* $(0,0)$ *coincide com o jato de ordem 3 da aplicação* ϕ_T*, em* $(0,0)$*, a menos da aplicação polinomial, homogênea de grau* 3*,* $P = P(x,y)$*. Assim, o polinômio* $P = P(x,y)$ *detecta a influência do sistema hamiltoniano* X_{H_2} *no primeiro invariante de Birkhoff.*

Vamos, agora, escrever a expressão "completa"da aplicação $P = P(x,y)$ obtido na proposição anterior. Temos:

$$d_{(0,0)}(X_{H_1} \circ \phi_T)(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos T\alpha & \frac{1}{\alpha}\sin T\alpha \\ -\alpha \sin T\alpha & \cos T\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\alpha \sin T\alpha & \cos T\alpha \\ -\alpha^2 \cos T\alpha & -\alpha \sin T\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha x \sin T\alpha + y \cos T\alpha \\ -\alpha^2 x \cos T\alpha - \alpha y \sin T\alpha \end{bmatrix}.$$

Logo, o polinômio $P = P(x,y)$ é dado por:

$$P(x,y) = (t_{20}x^2 + t_{02}y^2) \begin{bmatrix} -\alpha x \sin T\alpha + y \cos T\alpha \\ -\alpha^2 x \cos T\alpha - \alpha y \sin T\alpha \end{bmatrix}.$$

Segue que o polinômio $P = P(x,y)$ pode ser escrito da forma:

$$P(x,y) = (P_1(x,y), P_2(x,y)) \tag{5.1}$$

Onde:

$$\begin{cases} P_1(x,y) = (-\alpha t_{20} \sin T\alpha)x^3 + (t_{20} \cos T\alpha)x^2y + (-\alpha t_{02} \sin T\alpha)xy^2 + (t_{02} \cos T\alpha)y^3. \\ \\ P_2(x,y) = (-\alpha^2 t_{20} \cos T\alpha)x^3 + (-\alpha t_{20} \sin T\alpha)x^2y + (-\alpha^2 t_{02} \cos T\alpha)xy^2 + (-\alpha t_{20} \sin T\alpha)y^3 \end{cases}$$

Por fim, para termos em mãos elementos suficientes para a análise do primeiro invariante de Birkhoff para as aplicações de Poincaré, temos o seguinte resultado auxiliar e o próximo corolário.

Lema 5.2.2 *As derivadas de ordem 2 da aplicação ϕ_T são todas nulas em $(x, y) = (0, 0)$.*
Demonstração: *Segue do procedimento usual para o cálculo das derivadas do aplicação fluxo, relacionado a uma equação diferencial ordinária, conforme discutido em [33].*

Corolário 5.2.2 *O primeiro invariante de Birkhoff correspondente a aplicação de Poincaré ψ_0 é dado por:*

$$\tau = \frac{a_{10}}{8}(-a_{21} + 3\frac{b_{10}}{a_{10}}a_{03} - 3\frac{a_{01}}{b_{10}}b_{30} + b_{12}) - \frac{b_{10}}{8}(a_{12} - 3\frac{a_{01}}{b_{10}}a_{30} - \frac{a_{01}}{b_{10}}b_{21} + 3b_{03}),$$

onde os coeficientes $a_{i,j}$ e $b_{i,j}$ são os coeficientes que aparecem na expressão de $J^3\psi_0(x, y)$.
Demonstração: *Segue do fato de que $J^3\psi_0(x, y) = J^3\phi_T(x, y) + P(x, y)$ e do fato de as derivadas de ordem 2 de ψ_0 serem as derivadas de ordem 2 de ϕ_T, em $(0, 0)$. Logo, todas são nulas, pelo lema anterior. Portanto, levando em consideração a fórmula que apresentamos, na seção anterior, para o cálculo do primeiro invariante, concluímos que o primeiro invariante para a aplicação ψ_0 é dado pela expressão do enunciado.* □

Vamos a análise do primeiro invariante para ψ_0.

5.3 Análise do Primeiro Invariante de Birkhoff para ψ_0

O primeiro invariante de Birkhoff correspondente a aplicação ψ_0 é dado pela corolário 5.2.2. Nessa expressão, podemos notar que o primeiro invariante depende linearmente das derivadas de terceira ordem de ψ_0 em $(x, y) = (0, 0)$. Por outro lado, pela proposição 5.2, temos que as derivadas de terceira ordem de ψ_0, em $(0, 0)$, são a soma da correspondente derivada da aplicação ϕ_T com "o elemento correspondente"do polinômio $P = P(x, y)$. Portanto, podemos pensar que o primeiro invariante de Birkhoff τ, associado a aplicação ψ_0, é a soma de dois termos $\tau = \tau_1 + \tau_2$, onde τ_1 é obtido por meio das derivadas de terceira ordem de ϕ_T e τ_2 é obtido por meio dos coeficientes do polinômio P.

Observação 5.3.1 *O coeficiente τ_1 é obtido por meio da igualdade dada no corolário 5.2.2, tomando-se os elementos correspondentes a derivadas de terceira ordem como nos elementos de ϕ_T e τ_2 tomando-se os elementos de terceira ordem como nos elementos do polinômio P. Como a dependência do primeiro invariante em relação às derivadas de terceira ordem é linear, teremos $\tau = \tau_1 + \tau_2$.*

Vamos, a seguir, calcular o termo τ_2. Para este cálculo, teremos:

$$\begin{bmatrix} a_{10} & a_{01} \\ \\ b_{10} & b_{01} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos T\alpha & \frac{1}{\alpha}\sin T\alpha \\ \\ -\alpha \sin T\alpha & \cos T\alpha \end{bmatrix}.$$

Segue então que:

- $\frac{b_{10}}{a_{01}} = \frac{-\alpha \sin T\alpha}{\frac{1}{\alpha}\sin T\alpha} = -\alpha^2$;
- $\frac{a_{01}}{b_{10}} = \frac{-1}{\alpha^2}$;

Os elementos correspondentes aos termos de terceira ordem estão na igualdade (5.1). Segue que:

- $\frac{a_{10}}{8}(-a_{21}+3\frac{b_{10}}{a_{10}}a_{03}-3\frac{a_{01}}{b_{10}}b_{30}+b_{12}) = \frac{\cos T\alpha}{8}\{-t_{20}\cos T\alpha - 3\alpha^2 t_{02}\cos T\alpha - 3\frac{1}{\alpha^2}\alpha^2\cos T\alpha - \alpha^2 t_{02}\cos T\alpha\} =$

  $= \frac{\cos^2 T\alpha}{8}\{-t_{20} - 3\alpha^2 t_{02} - 3t_{20} - \alpha^2 t_{02}\} = \frac{-\cos^2 T\alpha}{2}\{t_{20} + \alpha^2 t_{02}\}.$

  Por outro lado, teremos:

- $\frac{b_{10}}{8}(a_{12} - 3\frac{a_{01}}{b_{10}}a_{30} - \frac{a_{01}}{b_{10}}b_{21} + 3b_{03}) =$

  $= \frac{-\alpha \sin T\alpha}{8}\{-\alpha t_{02}\sin T\alpha - \frac{3}{\alpha^2}\alpha t_{20}\sin T\alpha - \frac{1}{\alpha^2}\alpha t_{20}\sin T\alpha - 3\alpha t_{02}\sin T\alpha\}$

  $= \frac{-\alpha \sin^2 T\alpha}{8}\{-\alpha t_{02} - \frac{3}{\alpha}t_{20} - \frac{t_{20}}{\alpha} - 3\alpha t_{02}\}$

  $= -\frac{\sin^2 T\alpha}{8}\{-\alpha^2 t_{02} - 3t_{20} - t_{20} - 3\alpha^2 t_{02}\}$

  $= \frac{\sin^2 T\alpha}{2}\{\alpha^2 t_{02} + t_{20}\}.$

Segue então que:

$\tau_2 = -\frac{\cos^2 T\alpha}{2}\{t_{20} + \alpha^2 T_{02}\} - \frac{\sin^2 T\alpha}{2}\{\alpha^2 t_{02} + t_{20}\}$

$= (\cos^2 T\alpha + \sin^2 T\alpha)\frac{(-\alpha^2 t_{02} - t_{20})}{2}$

$= -\frac{1}{2}(\alpha^2 t_{02} + t_{20})$

Utilizando a definição da função $e = e(x, y)$, de onde temos os coeficientes t_{20} e t_{02}, obtemos:

$$t_{20} = -\frac{\alpha^2 P_2'(E)}{2} \text{ e } t_{02} = -\frac{P_2'(E)}{2}.$$

Portanto:

$$\tau_2 = -\frac{1}{2}\frac{(-\alpha^2 P_2'(E) - \alpha^2 P_2'(E))}{2} = \frac{1}{2}\frac{2\alpha^2 P_2'(E)}{2} = \frac{\alpha^2 P_2'(E)}{2}.$$

Com isso, conseguimos uma expressão para o coeficiente τ_2. Para o coeficiente τ, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 5.3.1 *O primeiro invariante de Birkhoff, associado a aplicação ψ_0, é dado por:*

$$\tau = \tau_1 + \frac{\alpha^2 P_2'(E)}{2},$$

onde τ_1 é calculado a partir das derivadas de terceira ordem da aplicação ϕ_T, conforme mencionado na observação 5.3.1.
Demonstração: *Segue dos cálculos feitos acima.* □

Notemos que o coeficiente τ_1 depende das derivadas, até ordem 3, de ϕ_T em $(0,0)$. Como o período $T = T(E)$ é uma função da energia, podemos considerar o coeficiente τ_1 como função da energia e escrever $\tau_1 = \tau_1(E)$. Devido a isso, obtemos o seguinte corolário.

Definição 5.3.1 *Tendo em vista que o primeiro invariante de Birkhoff, da aplicação ψ_0, pode ser escrito como uma função da energia, definimos a seguinte função:*

$$I_B : J \longrightarrow \mathbb{R}$$

Onde $I_B(E)$ é o primeiro invariante de Birkhoff da aplicação ψ_0.

Lembremos que a aplicação $P_2 = P_2(E_2)$ associa a cada nível de energia $E_2 > 0$, do sistema Hamiltoniano X_{H_2}, o período da respectiva órbita periódica com energia E_2. Devemos notar que ao fazer a energia E_2 tender a 0, a correspondente órbita de X_{H_2} passa pelo eixo das ordenadas cada vez mais próximo da singularidade $(0,0)$ do campo X_{H_2}. Esta singularidade, por sua vez, é uma singularidade hiperbólica. Baseado nessa propriedade, é possível mostrar que:

Lema 5.3.1 *Vale o seguinte limite, para a derivada da função P_2:*

$$\lim_{E_2 \to 0} P_2'(E_2) = -\infty$$

Demonstração: *Nessas condições, o período, da órbita periódica, é inversamente proporcional a energia da órbita (algo como* $1/E_2$*).*

Diante desse lema e da definição 5.3.1, teremos a próxima proposição que descreve o primeiro invariante de Birkhoff, para a aplicação ψ_0, quando a energia E tende a zero

Proposição 5.3.1 *Se o nível de energia* E *da órbita periódica* Γ_E *for suficientemente pequeno, então o primeiro invariante de Birkhoff, correspondente a aplicação* ψ_0*, será não nulo. Além disso, se o valor do parâmetro* ϵ *também for suficientemente pequeno, então o primeiro invariante de Birkhoff, correspondente às aplicações* ψ_ϵ*, para* ϵ *pequeno, será não nulo.*
Demonstração: *Para a aplicação* ψ_0*, o primeiro invariante será não nulo, pelo lema anterior e corolário 5.3.1. Como o primeiro invariante depende das derivadas até terceira ordem, para* ϵ *suficientemente pequeno, as derivadas de terceira ordem de* ψ_ϵ*, em* $(0,0)$*, estarão próximas das derivadas de* ψ_0*. Sendo o invariante não nulo para* ψ_0*, então vale o mesmo para* ψ_ϵ*, quando* ϵ *for suficientemente pequeno.* $\square$

Neste ponto, podemos demonstrar o Teorema 1.1.2.
Demonstração do Teorema 1.1.2: *Seja* $I_B : J \longrightarrow \mathbb{R}$ *a função, que associa a cada nível de energia* E*, o primeiro invariante de Birkhoff* $I_B(E)$*, correspondente a aplicação* ψ_0 *(definição 5.3.1), e suponhamos que* $E \in J$ *e que* $I_B(E) \neq 0$*. O primeiro invariante de Birkhoff, correspondente a* ψ_ϵ*, depende das derivadas até terceira ordem* ψ_ϵ *em* $(0,0)$ *e estas variam continuamente com o parâmetro* ϵ*. Logo, sendo* $I_B(E) \neq 0$*, existe* $\epsilon_0 = \epsilon_0(E) > 0$*, tal que se* $|\epsilon| < \epsilon_0$*, então o primeiro invariante de Birkhoff, correspondente a* ψ_ϵ*, é não nulo. Segue do teorema 4.1.2, que existem curvas fechadas e invariantes, por* ψ_ϵ*, que se acumulam em* $(0,0)$*, quando* $|\epsilon| < \epsilon_0$*. Estas curvas fechadas invariantes, analisada ao longo da órbita periódica* Γ_E*, de* X_{H_ϵ}*, correspondem a toros invariantes se acumulando em* Γ_E*.* $\square$

No próximo capítulo, com o objetivo de criar ferramentas para provar o Teorema 1.1.3, apresentaremos um critério perturbativo para a análise da persistência de curvas rotacionais invariantes para aplicações twist.

Capítulo 6

Destruição de Curvas Invariantes.

Objetivo deste capítulo é apresentar um método (perturbativo, chamado Critério de Melnikov) para a destruição de curvas rotacionais invariantes para aplicações twist, para que, no próximo capítulo, com base neste critério, possamos dar uma condição de destruição de toros invariantes nas coordenadas da seção de Poincaré Σ_E^+. As principais referências utilizadas, neste capítulo, foram [28] e [29].

6.1 Critério de Melnikov

Seja $f : \mathbb{S}^1 \times (a,b) \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times (a,b)$ um difeomorfismo satisfazendo a condição twist:

$$\text{Se } f(\theta, r) = (\Theta, R), \text{ então } \frac{\partial \Theta}{\partial r}(\theta, r) \neq 0, \ \forall (\theta, r) \in \mathbb{S}^1 \times (a,b).$$

Iremos fazer, a respeito de f, as seguintes hipóteses:

- f satisfaz uma certa rigidez nos bordos de $\mathbb{S}^1 \times (a,b)$. Indicando por $F : \mathbb{R} \times (a,b) \longrightarrow \mathbb{R} \times (a,b)$ um levantamento de f, então existem números reais $\omega_- < \omega_+$, satisfazendo:

  $$F(x,a) = (x + \omega_-, a) \text{ e } F(x,b) = (x + \omega_+, b).$$

  Assim, a aplicação f pode ser estendida aos bordos de $\mathbb{S}^1 \times (a,b)$, de modo que seja uma rotação rígida.

- Fazendo $\lambda = r d\theta$, existe $s : \mathbb{S}^1 \times (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$ds = f^*\lambda - \lambda.$$

Nesse caso, se $F : \mathbb{R} \times (a,b) \to \mathbb{R} \times (a,b)$ é um levantamento de f, então podemos associar um princípio variacional às órbitas de F. Se $F(x,y) = (X,Y)$, então existe uma função $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $dS = YdX - ydx$. Por outro lado, em consequência da condição twist, $B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $B(x,y) = (x, X(x,y))$ é um difeomorfismo sobre sua imagem (aplicando-se o Teorema da Função Inversa). Definimos $h(x,X) = S(B^{-1}(x,X))$. Dessa forma, teremos:

$$F(x,y) = (X,Y) \Longleftrightarrow y = -\tfrac{\partial h}{\partial x}(x,X) \text{ e } Y = \tfrac{\partial h}{\partial X}(x,X).$$

Dessas relações, obtemos o princípio variacional, conforme discutido na parte introdutória desse texto.

Observação 6.1.1 *A função $h = h(x,X)$ será chamada de princípio variacional. Temos as funções geradoras s e S (no anel e no recobrimento do anel, respectivamente). As relações entre essas funções (função geradora para o simplectomorfismo e princípio variacional) estão muito bem descritas em [14], por exemplo.*

Diante dessas condições, f é uma aplicação twist simplética exata no anel $\mathbb{S}^1 \times (a,b)$, cujas órbitas satisfazem a um princípio variacional. Vamos supor que tenhamos uma perturbação dessa aplicação f por aplicações twist simpléticas exatas, em $\mathbb{S}^1 \times (a,b)$, da forma $f_\epsilon = f + o(\epsilon)$. Iremos supor, também, que exista $\Gamma \subseteq \mathbb{S}^1 \times (a,b)$, curva rotacional invariante (que indicaremos, abreviadamente, por CRI) para f, que seja (m,n)-ressonante. Assim, toda órbita de f sobre o subconjunto invariante Γ é n-periódica e possui número de rotação $\frac{m}{n}$. Gostaríamos de avaliar se esta curva rotacional invariante persiste ou não sob a perturbação $f_\epsilon = f + o(\epsilon)$. Apresentaremos um método para analisar esta questão, baseado em [28]. Daremos, a seguir, uma definição formal dessa noção de persistência.

Definição 6.1.1 *Dizemos que a curva $\Gamma \subseteq \mathbb{S}^1 \times (a,b)$, curva rotacional invariante para f, persiste sob a perturbação $f_\epsilon = f + o(\epsilon)$, se f_ϵ possui, para todo ϵ suficientemente pequeno, uma curva rotacional invariante $\Gamma_\epsilon \subseteq \mathbb{S}^1 \times (a,b)$, que (também) é (m,n)-ressonante e satisfaça:*

$$\Gamma_\epsilon = \Gamma + o(\epsilon).$$

Sendo Γ uma curva rotacional invariante para f, segue, do teorema de Birkhoff, que existe uma função $v : \mathbb{S}^1 \longrightarrow (a, b)$, tal que $\Gamma = graf(v)$. Além disso, este teorema nos diz que essa função é, no mínimo, Lipschitz; no entanto, iremos supor aqui que v seja suave. Naturalmente, temos o levantamento de v, $\tilde{v} : \mathbb{R} \longrightarrow (a, b)$, cujo gráfico é invariante por F, levantamento de f. Ao fazermos a perturbação $f_\epsilon = f + o(\epsilon)$, num certo sentido falando, a curva Γ dará origem a duas outras novas curvas, que indicaremos por Γ_ϵ e Γ_ϵ^*. A curva Γ_ϵ representaria a curva Γ, dentro do sistema perturbado, e Γ_ϵ^* representaria $f_\epsilon^n(\Gamma_\epsilon)$. Iremos formalizar esses comentários no próximo lema. Seguirá que obter persistência da curva rotacional Γ significará a igualdade $\Gamma_\epsilon = \Gamma_\epsilon^*$ (no entanto, não há razão, a priori, para valer essa igualdade). Vamos ao lema.

Lema 6.1.1 *Supondo que estejamos nas condições descritas acima, se $|\epsilon|$ for suficientemente pequeno, então existem funções:*

$$v_\epsilon, v_\epsilon^* : \mathbb{S}^1 \longrightarrow (a, b),$$

satisfazendo as seguintes condições:

1. $v_\epsilon(x) = v(x) + o(\epsilon)$ *e* $v_\epsilon^*(x) = v(x) + o(\epsilon)$, $\forall x \in \mathbb{S}^1$.
2. $f_\epsilon^n(x, v_\epsilon(x)) = (x, v_\epsilon^*(x))$.

Indicamos $\Gamma_\epsilon = graf(v_\epsilon)$ *e* $\Gamma_\epsilon^* = graf(v_\epsilon^*)$.
Demonstração: *Ver [28].* $\square$

Analisando-se a construção da prova desse lema em [28], é imediato o seguinte corolário.

Corolário 6.1.1 *Nas condições acima, a curva Γ persiste sob a perturbação $f_\epsilon = f + o(\epsilon)$ se, e somente se, $\Gamma_\epsilon = \Gamma_\epsilon^*$. Ou seja, as funções v_ϵ e v_ϵ^* coincidem.*

Portanto, para a análise da persistência da curva Γ, é útil quantificar a separação entre os gráficos das funções v_ϵ e v_ϵ^*. Iremos apresentar um critério, nesse sentido, que será resumido no próximo corolário.

Consideremos os levantamentos, dos gráficos, $\tilde{v_\epsilon}, \tilde{v_\epsilon}^* : \mathbb{R} \longrightarrow (a, b)$. Podemos definir uma função $\tilde{L}_\epsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\tilde{L}_\epsilon'(x) = \tilde{v}_\epsilon^*(x) - \tilde{v}_\epsilon(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Assim, temos uma função $L_\epsilon : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $L_\epsilon' = v_\epsilon^* - v_\epsilon$.

Analisando-se a expansão de L_ϵ, com respeito ao parâmetro ϵ, temos:

$$L_\epsilon = L_0 + \epsilon L_1 + o(\epsilon^2).$$

Logo, como $L_0'(x) = v_0^*(x) - v_0(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{S}^1$, ou seja, a função L_0 é constante, assim:

$$L_\epsilon'(x) = \epsilon L_1'(x) + o(\epsilon^2) = v_\epsilon^*(x) - v_\epsilon(x).$$

Segue então que se existe $x_0 \in \mathbb{S}^1$ tal que $L_1'(x_0) \neq 0$, então, para ϵ suficientemente pequeno, podemos garantir que $v_\epsilon^*(x_0) - v_\epsilon(x_0) \neq 0$. Ou seja, $\Gamma_\epsilon \neq \Gamma_\epsilon^*$ e, com isso, a curva rotacional invariante Γ não persiste com a perturbação $f_\epsilon = f + o(\epsilon)$. Essa argumentação está resumida no próximo corolário.

Corolário 6.1.2 *Se a função $L_1 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ não é uma função constante, então a curva Γ não persiste sob a perturbação $f_\epsilon = f + o(\epsilon)$.*

A questão imediata que surge é como expressar essa tal função L_1. O fato é que ela se relaciona com as funções h_ϵ, associadas a cada função f_ϵ. Com o intuito de expressar esta relação, consideremos, a seguir, a expansão em série de Taylor de h_ϵ, com respeito ao parâmetro ϵ. Temos:

$$h_\epsilon = h_0 + \epsilon h_1 + o(\epsilon^2).$$

O termo L_1 se relaciona com o termo h_1, da expansão de h_ϵ. Este é o conteúdo da próxima proposição.

Proposição 6.1.1 *A função $\tilde{L}_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por:*

$$\tilde{L}_\epsilon(x) = \sum_{j=0}^{n-1} h_\epsilon(\bar{x}_j(x,\epsilon), \bar{x}_{j+1}(x,\epsilon)), \text{ onde } \bar{x}_j(x,\epsilon) = \pi_1(F_0^j(x, \tilde{v}(x))).$$

Estamos indicando $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a projeção na primeira coordenada.
Demonstração: *Ver [28].* $\square$

Diante dessa expressão relacionando $\tilde{L}_\epsilon$ e o princípio variacional h_ϵ, obtemos:

Corolário 6.1.3 *Vale a igualdade:*

$$\tilde{L}_1(x) = \sum_{j=0}^{n-1} h_1(x_j, x_{j+1}), \text{ onde } x_j = \pi(F^j(x, \tilde{v}(x))).$$

Demonstração: *Ver [28].* $\square$

6.2 Critério de Melnikov Atraves da Função Geradora.

Como foi ressaltado no início da seção anterior, o princípio variacional h está relacionado à função geradora S, via a mudança de coordenadas induzida pela condição twist. Na seção anterior a função L_1 foi escrita em termos do princípio variacional mas para os propósitos deste texto, é mais conveniente escrever a função L_1 em termos das funções geradoras no anel. Isso é feito na próxima proposição, cuja demonstração está em [29] e iremos reproduzi-la aqui.

Proposição 6.2.1 *Seja $\tilde{L}_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função correspondente ao potencial de Melnikov, como indicado acima. Então vale a igualdade*[1]*:*

$$\tilde{L}_1(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \{S_1(x_j, y_j) - \tilde{\lambda}_{F_0(x_j,y_j)}(F_1(x_j, y_j))\},$$

onde $(x_j, y_j) = F^j(x, \tilde{v}(x))$ e $\tilde{\lambda} = ydx$.
Demonstração: *Observemos que se $F_\epsilon(x, y) = (X_\epsilon, Y_\epsilon)$, então:*

$$h_\epsilon(x, X_\epsilon(x, y)) = S_\epsilon(x, y).$$

Derivando esta igualdade com respeito a ϵ e calculando em $\epsilon = 0$, obtemos:

$$h_1(x, X_0(x, y)) + \frac{\partial h_0}{\partial X}(x, X_0(x, y))X_1(x, y) = S_1(x, y).$$

Mas observando que $\dfrac{\partial h_0}{\partial X}(x, X_0(x, y)) = Y_0(x, y)$, podemos escrever:

$$h_1(x, X_0(x, y)) = S_1(x, y) - Y_0(x, y)X_1(x, y).$$

Analisando o último termo desta igualdade, podemos notar que:

$$\tilde{\lambda}_{F_0(x,y)}(F_1(x, y)) = \tilde{\lambda}_{(X_0,Y_0)}(X_1, Y_1) = Y_0(x, y)X_1(x, y).$$

Diante dessa igualdade, segue que:

$$\tilde{L}_1(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \{S_1(x_j, y_j) - \tilde{\lambda}_{F_0(x_j,y_j)}(F_1(x_j, y_j))\}.$$

Com isso, concluímos a demonstração. □

[1] Ver a próxima observação, refrente ao termo $\tilde{\lambda}_{F_0(x,y)}(F_1(x, y))$.

Observação 6.2.1 *Observemos que o termo* $\tilde{\lambda}_{F_0(x_j,y_j)}(F_1(x_j,y_j))$*, que aparece na proposição anterior, não corresponde a um pullback da* 1*-forma* $\tilde{\lambda}$*. Além disso, é conveniente analisar o termo relacionado a* F_1 *como um campo de vetores.*

Com isso, conseguimos expressar $\tilde{L}_1$ em termos da função S_1. Para a aplicação que faremos, seria ainda mais interessante ter a igualdade da proposição anterior em $\mathbb{S}^1 \times (a,b)$. Faremos isso baseado nas relações entre as funções S e s, que estão descritas em [14].

Proposição 6.2.2 *A projeção* $L_1 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$*, da função* $\tilde{L}_1$ *da proposição anterior, é dada por:*

$$L_1(\theta) = \sum_{j=0}^{n-1} \{s_1(\theta_j, r_j) - \lambda_{f_0(\theta_j,r_j)}(f_1(\theta_j, r_j))\}$$

Onde $(\theta_j, r_j) = \varphi^j(\theta, v(\theta))$*,* $0 \leq j \leq n-1$*.*
Demonstração: *Seja* $(x_j, y_j)_j$ *o levantamento da órbita de* $(\theta, v(\theta))$*. Se* $p : \mathbb{R} \times (a,b) \to \mathbb{S}^1 \times (a,b)$ *é o recobrimento, façamos* $p(x_j, y_j) = (\theta_j, r_j)$*. Assim, segue que:*

$$S_1(x_j, y_j) = s_1(p(x_j, y_j)) = s_1(\theta_j, r_j).$$

Por outro lado, observemos que:

$$\lambda_{f_0(\theta_j,r_j)}(f_1(\theta_j, r_j)) = \lambda_{f_0(p(x_j,y_j))}(f_1(p(x_j, y_j))) = \lambda_{p(F_0(x_j,y_j))}(\tfrac{\partial}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0} f_\epsilon(p(x_j, y_j))) =$$

$$= \lambda_{p(F_0(x_j,y_j))}(\tfrac{\partial}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0} p(F_\epsilon(x_j, y_j))) = \lambda_{p(F_0(x_j,y_j))}(d_{F_0(x_j,y_j)} p(F_1(x_j, y_j)) =$$

$$= (p^*\lambda)_{F_0(x_j,y_j)}(F_1(x_j, y_j)).$$

Logo, utilizando a proposição anterior:

$$\tilde{L}_1(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \{s_1(\theta_j, r_j) - \lambda_{f_0(\theta_j,r_j)}(f_1(\theta_j, r_j))\} = L_1(\theta) = L_1(p(x)).$$

Indicando por p *o recobrimento de* $\mathbb{S}^1$*. Segue o resultado.* $\square$

Capítulo 7

A Função de Melnikov na Seção

Objetivo deste capítulo é expressar a condição de Melnikov, sobre destruição de curvas rotacionais invariantes, nas coordenadas da seção Σ_E^+, tendo em vista que as aplicações de Poincaré são conjugadas a aplicações twist, conforme discutido no Capítulo 4. Por meio disso, estabeleceremos uma condição de destruição de toros invariantes em termos de elementos do campo X_{H_ϵ}.

7.1 Algumas considerações iniciais.

Como as funções que irão aparecer, na sequência do texto, dependem do parâmetro ϵ e teremos que derivar, em muitas situações, em relação ao parâmetro ϵ e calcular em $\epsilon = 0$, fixaremos, a princípio, a seguinte notação. Se $\xi = \xi_\epsilon(z)$ é uma função diferenciável que depende de um parâmetro ϵ, então indicaremos por $\xi_1 \doteq \xi_1(z) = \frac{\partial}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0}\xi_\epsilon(z)$.

Fixemos $E \in J$ e suponhamos que $I_B(E) \neq 0$. Nesse caso, existe $\epsilon_0 = \epsilon_0(E) > 0$, tal que se $|\epsilon| < \epsilon_0$, então Γ_E é uma órbita periódica, de X_{H_ϵ}, elíptica em seu nível de energia. Além disso, indicando por $\psi_\epsilon : \Omega_\epsilon \to \Omega_\epsilon$ a correspondente Transformação de Poincaré, nas coordenadas da seção Σ_E^+, podemos fazer uso da Forma Normal de Birkhoff, para o estudo dessas aplicações em coordenadas polares. Segue, pelo Teorema 4.1.2, que existem curvas invariantes por ψ_ϵ, em $\Omega_\epsilon \setminus \{(0,0)\}$, que se acumulam em $(0,0)$. Logo, podemos delimitar, para cada ψ_ϵ, regiões anulares invariantes, arbitrariamente próximas a $(0,0)$(regiões entre curvas invariantes).

Indicando por $\bar{\Omega}_\epsilon \subseteq \Omega_\epsilon \setminus \{(0,0)\}$ uma região anular invariante por ψ_ϵ, pelo resultado do Capítulo 4, temos a mudança de coordenadas $G : \bar{\Omega}_\epsilon \to \bar{\mathbb{A}}_\epsilon$, que transforma $\psi_\epsilon : \bar{\Omega}_\epsilon \to \bar{\Omega}_\epsilon$ em uma transformação twist simplética exata $\varphi_\epsilon : \bar{\mathbb{A}}_\epsilon \to \bar{\mathbb{A}}_\epsilon$, sendo $\bar{\mathbb{A}}_\epsilon$ uma região anular invariante em $\mathbb{S}^1 \times (0, +\infty)$, que depende do parâmetro ϵ. Cada curva invariante por ψ_ϵ, em $\Omega_\epsilon \setminus \{(0,0)\}$

corresponde a uma curva rotacional invariante por φ_ϵ. Portanto, temos, associado a ela, um número de rotação. Para o caso $\epsilon = 0$, o domínio $\Omega_0 \setminus \{(0,0)\}$ é folheado por curvas invariantes e, portanto, φ_0 é uma aplicação twist integrável.

Fixemos $\Gamma \subseteq \Omega_0 \setminus \{(0,0)\}$ uma curva invariante por ψ_0, com número de rotação racional $\frac{m}{n}$. A imagem de Γ, por G, $\tilde{\Gamma} = G(\Gamma) \subseteq \mathbb{A}_0$, é uma curva rotacional invariante por $\varphi_0 : \mathbb{A}_0 \to \mathbb{A}_0$, que é (m,n)-ressonante. Como há uma ordenação de curvas invariantes, segundo o seu número de rotação, podemos delimitar uma região anular invariante $\bar{\Omega}_0 \subseteq \Omega_0 \setminus \{(0,0)\}$, cujos bordos sejam curvas invariantes com número de rotação diofantino (curvas do tipo KAM, ver [14]) e tal que Γ esteja contida no interior de $\bar{\Omega}_0$. Para $\epsilon \neq 0$, suficientemente pequeno, as curvas invariantes que formam o bordo de $\bar{\Omega}_0$ persistem, dando origem a uma região anular invariante por ψ_ϵ, $\bar{\Omega}_\epsilon \subseteq \Omega_\epsilon \setminus \{(0,0)\}$, cujos bordos são curvas invariantes com os mesmos números de rotação das curvas invariantes por ψ_0, que formam o bordo de $\bar{\Omega}_0$ e tal que a curva Γ está contida no interior de $\bar{\Omega}_\epsilon$.

Gostaríamos de avaliar a persistência dessa curva invariante Γ (ou da curva $\tilde{\Gamma} = G(\Gamma)$, em coordenadas twist). Ao projetarmos a situação descrita no parágrafo anterior em $\mathbb{S}^1 \times (0, +\infty)$, via a mudança de coordenadas G, não temos, exatamente, a situação apresentada na exposição do critério de Melnikov, no capítulo anterior, pois, nessa nova situação, o domínio da aplicação twist varia com o parâmetro ϵ. No entanto, o critério de Melnikov ainda é válido, conforme estabelecido na próxima proposição.

Proposição 7.1.1 *Consideremos a situação que vem sendo descrita nessa seção. Temos a família de aplicações twist simplética exata $\varphi_\epsilon : \bar{\mathbb{A}}_\epsilon \to \bar{\mathbb{A}}_\epsilon$, com as respectivas funções geradoras $s_\epsilon : \bar{\mathbb{A}}_\epsilon \to \mathbb{R}$, sendo $G(\bar{\Omega}_\epsilon) = \bar{\mathbb{A}}_\epsilon$ e $\tilde{\Gamma} = G(\Gamma)$ a curva (m,n)-ressonante, para φ_0 fixada, que é gráfico de $v : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$. Nessa situação, consideremos a função $L_1 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$, definida por:*

$$\bar{L}_1(\theta) = \sum_{j=0}^{n-1} \{s_1(\theta_j, r_j) - \lambda_{\varphi_0(\theta_j, r_j)}(\varphi_1(\theta_j, r_j))\},$$

onde $(\theta_j, r_j) = \varphi_0^j(\theta, v(\theta))$. Se a função $\bar{L}_1$ não é uma função constante, então a curva $\tilde{\Gamma}$ não persiste sob a pertubação $\varphi_\epsilon = \varphi_0 + o(\epsilon)$.

Demonstração: *A demonstração dessa proposição pode ser feita através dos mesmos passos que foram feitos para provar o critério de Melnikov, feito no capítulo anterior, observando que a demonstração depende apenas da perturbação $f_\epsilon = f_0 + o(\epsilon)$ sobre a curva (m,n)-ressonante, em que a análise é feita. É importante observar que, na situação deste capítulo, temos a curva (m,n)-ressonante contida no interior dos anéis compactos $\bar{\mathbb{A}}_\epsilon$. Devido a esse*

fato, todos os passos da demonstração do critério de Melnikov, feitos no capítulo anterior, podem ser adaptados. $\square$

Observação 7.1.1 *Ao longo deste texto, iremos supor que a curva (m,n)-ressonante Γ é fixada suficientemente próxima do ponto fixo, tendo em vista que a construção da região anular invariante pode ser feita, arbitrariamente, próxima ao ponto fixo, partindo de uma curva ressonante que esteja suficientemente próxima ao ponto fixo.*

Portanto, a persistência da curva rotacional $\tilde{\Gamma}$ (ou, equivalentemente, da curva invariante $\Gamma \subseteq \Omega_0 \setminus \{(0,0)\}$ por ψ_0), sob a perturbação $\varphi_\epsilon = \varphi_0 + o(\epsilon)$ pode ser analisada por meio da função $\bar{L}_1 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$, dada por:

$$\bar{L}_1(\theta) = \sum_{j=0}^{n-1} \{s_1(\theta_j, r_j) - \lambda_{f_0(\theta_j, r_j)}(f_1(\theta_j, r_j))\},$$

onde $(\theta_j, r_j) = \varphi_0^j(\theta, v(\theta))$, $0 \leq j \leq n-1$.

Vamos analisar, separadamente, os dois termos do somatório que compõe a expressão de $\bar{L}_1$. Sendo assim, definiremos: $\bar{M}_1 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ e $\bar{N}_1 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$, dados por:

$$\bar{M}_1(\theta) = \sum_{j=0}^{n-1} s_1(\theta_j, r_j) \text{ e } \bar{N}_1(\theta) = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{f_0(\theta_j, r_j)}(f_1(\theta_j, r_j))$$

Dessa forma: $\bar{L}_1(\theta) = \bar{M}_1(\theta) - \bar{N}_1(\theta)$. Iremos trazer as expressões de $\bar{M}_1$ e $\bar{N}_1$ para as coordenadas em Ω.

7.2 Análise do termo $\bar{M}_1$.

Vamos indicar $\bar{M}_\epsilon(\theta) = \sum_{j=0}^{n-1} s_\epsilon(\theta_j, r_j)$. Fixemos $z \in \Omega_0$ e $\theta_z \in \mathbb{S}^1$, tal que $G(z) = (\theta_z, v(\theta_z))$.

Lema 7.2.1 *Vale a igualdade:*

$$\bar{M}_\epsilon(\theta_z) = \sum_j (s_\epsilon \circ G \circ \psi_0^{-1})(\psi_0^j(z)).$$

Demonstração: *Pela definição de $\bar{M}_\epsilon$:*

$$\bar{M}_\epsilon(\theta_z) = \sum_j s_\epsilon(\varphi_0^j(\theta_z, v(\theta_z))) = \sum_{j=0}^{n-1} s_\epsilon(\varphi_0^j(G(z))).$$

Como G é uma conjugação entre ψ_ϵ e φ_ϵ, teremos:

$$\bar{M}_\epsilon(\theta_z) = \sum_j s_\epsilon(G(\psi_0^j(z))).$$

Mas sendo esta soma, uma soma sobre uma órbita periódica, conseguimos:

$$\bar{M}_\epsilon(\theta_z) = \sum_j (s_\epsilon \circ G \circ \psi_0^{-1})(\psi_0^j(z)).$$

Segue o resultado. □

Dessa forma, relacionamos $\bar{M}_\epsilon$, de uma soma em órbitas de φ_0 a uma soma sobre órbitas de ψ_0.

Seja $f_\epsilon : \Omega \to \Omega$, definida por $f_\epsilon = \psi_\epsilon \circ \psi_0^{-1}$. Observemos que f_ϵ é um simplectomorfismo, com $f_\epsilon(0,0) = (0,0)$, $\forall \epsilon$ e $\psi_\epsilon = f_\epsilon \circ \psi_0$. A seguir, provaremos duas igualdades que nos serão auxiliares.

Lema 7.2.2 *Valem*[1] *as seguintes igualdades:*

- $d(s_\epsilon \circ G) = \psi_\epsilon^* \mu - \mu$;
- $d(s_\epsilon \circ G \circ \psi_0^{-1}) = f_\epsilon^* \mu - (\psi_0^{-1})^* \mu$;

Demonstração: *Segue que:*

$$d(s_\epsilon \circ G) = G^* d s_\epsilon = G^*(\varphi_\epsilon^* \lambda - \lambda) = \psi_\epsilon^* G^* \lambda - G^* \lambda = \psi_\epsilon^* \mu - \mu.$$

Por outro lado, temos:

$$d(s_\epsilon \circ G \circ \psi_0^{-1}) = (\psi_0^{-1})^* d(s_\epsilon \circ G) = (\psi_0^{-1})^*(\psi_0^* f_\epsilon^* \mu - \mu) = f_\epsilon^* \mu - (\psi_0^*)\mu.$$

Seguem as duas igualdades do enunciado. □

Essas igualdades, juntamente com o teorema fundamental do cálculo, nos permite escrever:

Proposição 7.2.1 *Vale a igualdade:*

$$\bar{M}_\epsilon(\theta_z) = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\gamma_j} d(s_\epsilon \circ G \circ \psi_0^{-1}) + n(s_\epsilon \circ G \circ \psi_0^{-1})(z),$$

[1] A 1-forma μ foi definida na seção 4, assim como a 1-forma λ.

onde, $\gamma_j : [0, T_j] \longrightarrow \bar{\Omega}_0$, *tal que* $\gamma_j(0) = z$ *e* $\gamma_j(T_j) = \psi_0^j(z)$.
Demonstração: *Observemos que:*

$$\bar{M}_\epsilon(\theta_z) = \sum_j (s_\epsilon \circ G \circ \psi_0^{-1})(\psi_0^j(z)) =$$

$$= \sum_j \{(s_\epsilon \circ G \circ \psi_0^{-1})(\psi_0^j(z)) - (s_\epsilon \circ G \circ \psi_0^{-1}(z))\} + n s_\epsilon \circ G \circ \psi_0^{-1}(z)$$

$$= \sum_j \int_{\gamma_j} d(s_\epsilon \circ G \circ \psi_0^{-1}) + n(s_\epsilon \circ G \circ \psi_0^{-1})(z).$$

Obtemos, assim, a igualdade do enunciado. □

Corolário 7.2.1 *Segue, da proposição anterior, que:*

$$\bar{M}_\epsilon(z) = \int_{\gamma_j} (f_\epsilon^* \mu - (\psi_0^{-1})^* \mu) + n s_\epsilon \circ G \circ \psi_0^{-1}(z).$$

Demonstração: *Segue dos últimos lemas e da proposição anterior.* □

Observação 7.2.1 *Faremos algumas considerações, neste ponto.*

1. *Nessa última igualdade do corolário, desprezaremos o termo* $(\psi_0^{-1})^* \mu$. *Faremos isso porque derivaremos esta igualdade com respeito ao parâmetro* ϵ *e este termo não depende de* ϵ.

2. *Como foi observado no início desta seção, os pontos da órbita de* ψ_0, *nessas expressões, estão sobre* $\Gamma = G^{-1}(\bar{\Gamma})$, *sendo* Γ *uma órbita do Sistema Hamiltoniano bidimensional* X_{H_1}. *Devido a essa propriedade, podemos tomar as curvas* γ_j, *na proposição 7.2.1, como sendo o segmento de órbita de* X_{H_1}, *que conecta os pontos* $\gamma_j(0) = z$ *a* $\gamma_j(T_j) = \psi_0^j(z)$. *Portanto, faremos* $\gamma_j(t) = \phi_t(z)$, *com* $t \in [0, T_j]$ *e* $\phi = \phi_t^{H_1}$.

3. *Observemos que devido a estrutura das aplicações de primeiro retorno que estamos analisando, o tempo* T_j *não depende do ponto* z, *depende, apenas, da curva que o contém. Estes tempos de retorno* T_j *serão os mesmos para todo ponto da curva* Γ. *Além disso, indicando por* T_1 *o período de* Γ, *por* X_{H_1}, *e por* T_2 *o período da órbita corresponde de* X_{H_2}, *temos que* $T_j = jT_2$.

Tendo em vistas estas observações, escreveremos:

$$\bar{M}_\epsilon(\theta_z) = \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^{T_j} f_\epsilon^*(\mu)_{\gamma_j(t)}(\gamma_j'(t))dt + n(s_\epsilon \circ G \circ \psi_0^{-1})(z).$$

Notemos, ainda, que definindo uma função $g = g_\epsilon(x, y)$ como:

$$g_\epsilon(x, y) = \{f_\epsilon^* \mu\}_{(x,y)}(X_{H_1}(x, y)).$$

Poderemos escrever:

$$\bar{M}_\epsilon(\theta_z) = \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^{T_j} g_\epsilon(\gamma_j(t))dt + n(s_\epsilon \circ G \circ \psi_0^{-1})(z)$$

O ponto z está sobre a curva Γ, que é uma trajetória do campo hamiltoniano X_{H_1}. Fixando um ponto $z_0 \in \Gamma$, podemos escrever qualquer outro ponto $z \in \Gamma$ como $z = \phi_s(z_0)$. Esta observação nos sugere introduzir um parâmetro s para avaliar a igualdade acima. Definimos $M_\epsilon(s) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por:

$$M_\epsilon(s) = \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^{T_j} g_\epsilon(\phi_{t+s}(z_0))dt + n(s_\epsilon \circ G \circ \psi_0^{-1})(\phi_s(z_0)).$$

Observação 7.2.2 *Devemos notar que se $\phi_s(z_0) = z$ e $G(z) = (\theta_z, v(\theta_z))$, então $\bar{M}_\epsilon(\theta_z) = M_\epsilon(s)$. Dessa forma, é possível avaliar o termo, da função de Melnikov, através da função $M_\epsilon = M_\epsilon(s)$.*

Por fim, provaremos duas últimas igualdades relacionadas a essa representação $M_\epsilon = M_\epsilon(s)$.

Proposição 7.2.2 *Vale as seguintes igualdades:*

- $M_1(s) = \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^{T_j} g_1(\phi_{t+s}(z_0))dt + n(s_1 \circ G \circ \psi_0^{-1})(\phi_s(z_0))$;
- $M_1'(s) = \sum_{j=0}^{n-1} g_1(\phi_{T_j+s}(z_0))$

Demonstração: *A primeira igualdade é imediata. Observemos que na segunda igualdade, temos:*

$$M_1'(s) = \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^{T_j} \frac{\partial}{\partial s} g_1(\phi_s(\phi_t(z_0)))dt + \frac{\partial}{\partial s} n(s_1 \circ G \circ \psi_0^{-1})(\psi_s(z_0)).$$

Vamos dividir a análise nos dois termos do somatório.

1. *Temos:*

$$\int_0^{T_j} \frac{\partial}{\partial s} g_1(\phi_s(\phi_t(z0)))dt = \int_0^{T_j} d_{\phi_{s+t}(z_0)} g_1(\frac{\partial}{\partial s}(\phi_s(\phi_t(z_0))))dt =$$

$$= \int_0^{T_j} d_{\phi_{s+t}(z_0)} g_1(F(\phi_{s+t}(z_0)))dt$$

$$= \int_0^{T_j} d_{\phi_{s+t}(z_0)} g_1(\frac{\partial}{\partial t}(\phi_t(\phi_s(z_0))))dt$$

$$= \int_0^{T_j} \frac{\partial}{\partial t} g_1(\phi_t(\phi_s(z_0)))dt$$

$$= g_1(\phi_{T_j}(\phi_s(z_0))) - g_1(\phi_s(z_0)).$$

Voltando ao somatório, obtemos:

$$M_1'(s) = \sum_j \{g_1(\phi_{T_j}(\phi_s(z_0)) - g_1(\phi_s(z_0))\} + n\frac{\partial}{\partial s}(s_1 \circ G \circ \psi_0^{-1})(\phi_s(z_0)) =$$

$$= \sum_j g_1(\phi_{T_j}(\phi_s(z_0))) + n\{\frac{\partial}{\partial s}(s_1 \circ G \circ \psi_0^{-1})(\phi_s(z_0)) - g_1(\phi_s(z_0))\}.$$

2. *Vamos analisar o termo entre chaves.*

$$\frac{\partial}{\partial s}(s_1 \circ G \circ \psi_0^{-1})(\phi_s(z_0)) = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0}(s_\epsilon \circ G \circ \psi_0^{-1})(\phi_s(z_0))$$

$$= \tfrac{\partial}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0}\tfrac{\partial}{\partial s}(s_\epsilon \circ G \circ \psi_0^{-1})(\phi_s(z_0)) =$$

$$= \tfrac{\partial}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0} d_{\phi_s(z_0)}(s_\epsilon \circ G \circ \psi_0^{-1})(X_{H_1}(\phi_s(z_0))).$$

Mas, nesse ponto, devemos lembrar que:

$$d(s_\epsilon \circ G \circ \psi_0^{-1}) = f_\epsilon^* \mu - (\psi_0^{-1})^* \mu.$$

Logo:

$$\frac{\partial}{\partial s}(s_1 \circ G \circ \psi_0^{-1})(\phi_s(z_0)) = \frac{\partial}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0}(f_\epsilon^* \mu)_{\phi_s(\theta_0)}(X_{H_1}(\phi_s(z_0))) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0} g_\epsilon(\phi_s(z_0))$$

$= g_1(\phi_s(z_0))$.

Isso nos mostra que o termo entre chaves, acima, é nulo.

Segue o resultado. □

Na sequência, faremos o mesmo tipo de análise para o termo $\bar{N}_1$.

7.3 Análise do termo $\bar{N}_1$

Consideremos a função $\xi(x,y) = \bar{\xi}(G(x,y))$, onde $\bar{\xi}(\theta,r) = \lambda_{\varphi_0(\theta,r)}(\varphi_1(\theta,r))$. Teremos:

Lema 7.3.1 *Se f_ϵ representa a aplicação, definida na seção anterior, $f_\epsilon \doteq \psi_\epsilon \circ \psi_0^{-1}$, então Vale a igualdade:*

$$\xi(x,y) = \mu_{\psi_0(x,y)}(f_1(\psi_0(x,y))).$$

Demonstração: *Observemos que:*

$$\xi(x,y) = \lambda_{\varphi_0(G(x,y))}(\varphi_1(G(x,y))).$$

Seja $\tilde{f}_\epsilon$, tal que $\varphi_\epsilon = \tilde{f}_\epsilon \circ \varphi_0$. Então:

$$\varphi_1 \circ G = \frac{\partial}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0}\tilde{f}_\epsilon \circ \varphi_0 \circ G = \frac{\partial}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0}\tilde{f}_\epsilon \circ G \circ \psi_0 = \frac{\partial}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0} G \circ f_\epsilon \circ \psi_0 =$$
$$= \frac{\partial}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0} G \circ \psi_\epsilon$$

Logo: $\psi_1(G(x,y)) = d_{\psi_0(x,y)}G(f_1(\psi_0(x,y)))$.

Portanto:

$$\xi(x,y) = \lambda_{G(\psi_0(x,y))}(d_{\psi_0(x,y)}G(f_1(\psi_0(x,y))) = (G^*\lambda)_{\psi_0(x,y)}(f_1(\psi_0(x,y)))$$

$$= \mu_{\psi_0(x,y)}(f_1(\psi_0(x,y))).$$

Com isso, obtemos a igualdade desejada. □

Seja $z \in \Gamma$, tal que $G(z) = (\theta_z, v(\theta_z))$. Então:

$$\bar{N}_1(\theta_z) = \sum_{j=0}^{n-1} \bar{\xi}(\theta_j, r_j) = \sum_{j=0}^{n-1} \bar{\xi}(G(\psi_0^j(z))) \doteq N_1(z).$$

Segue que:

$$N_1(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \mu_{\psi_0(x_j,y_j)}(f_1(\psi_0(x_j,y_j))), \text{ sendo } (x_j,y_j) = \psi_0^j(z).$$

Se definirmos $K(x,y) = \mu(x,y)(f_1(x,y))$, então :

$$N_1(z) = \sum_{j=0}^{n-1} K(x_j,y_j).$$

Utilizaremos o mesmo argumento que foi utilizado na subseção anterior, para introduzir um parâmetro s na função $M_\epsilon = M_\epsilon(z)$. Fixemos um ponto $z_0 \in \Gamma$ e seja $s \in \mathbb{R}$, tal que $z = \phi_s(z_0)$, onde ϕ_s é o fluxo do campo hamiltoniano bidimensional X_{H_1}. Escrevermos:

$$(x_j,y_j) = \phi_{s+T_j}(z_0), \text{ onde } z = \phi_s(z_0).$$

Portanto, poderemos avaliar o termo $N_1 = N_1(z)$, através da função $N_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por:

$$N_1(s) = \sum_{j=0}^{n-1} K(\phi_{s+T_j}(z_0)).$$

A derivada dessa função, com respeito a s, é dada por:

$$N_1'(s) = \sum_{j=0}^{n-1} d_{\phi_{s+T_j}(z_0)} K(X_{H_1}(\phi_{T_j+s}(z_0))).$$

A partir dessa representação para as funções $\bar{M}_1$ e $\bar{N}_1$, voltaremos a análise da função $\bar{L}_1$, para que algumas ideias fiquem mais claras.

7.4 Algumas observações sobre a função $\bar{L}_1$

Vimos que o potencial de Melnikov pode ser calculado por meio de:

$$\bar{L}_1(\theta) = \bar{M}_1(\theta) - \bar{N}_1(\theta).$$

Representamos essas funções, $\bar{M}_1$ e $\bar{N}_1$, em Ω, cujo domínio é $\mathbb{R}$, a partir de um parâmetro para descrever a curva Γ, obtendo funções $M_1 = M_1(s)$ e $N_1 = N_1(s)$. Dessa forma, consideramos a nova função:

$$L_1(s) = M_1(s) - N_1(s).$$

A relação entre L_1 e $\bar{L}_1$ se dá da seguinte forma. Se $G(\phi_s(z_0)) = (\theta_s, v(\theta_s))$, então:

$$L_1(s) = \bar{L}_1(\theta_s).$$

Portanto poderemos avaliar se $\bar{L}_1$ é constante por meio de uma análise de L_1. Suponhamos, por exemplo, que exista $s_0 \in \mathbb{R}$, tal que $L_1'(s_0) \neq 0$. Então, existem $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, próximos de s_0, tal que $L_1(s_1) \neq L_1(s_2)$. Portanto, $\bar{L}_1(\theta_{s_1}) \neq \bar{L}_1(\theta_{s_2})$ (ou seja, a função $\bar{L}_1$ não é constante) Tentaremos avaliar a derivada de L_1:

$$L_1'(s) = M_1'(s) - N_1'(s).$$

Pela análise feita nos termos M_1 e N_1, teremos, então:

$$L_1'(s) = \sum_{j=0}^{n-1} \{g_1(\phi(T_j + s, z_0)) - d_{\phi(T_j+s,z_0)} K(X_{H_1}(\phi(T_j + s, z_0)))\}, \text{ onde:}$$

- $g_1 = \frac{\partial}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0} g_\epsilon$, sendo $g_\epsilon(x, y) = (f_\epsilon^* \mu)_{(x,y)}(X_{H_1}(x, y))$.
- $K(x, y) = \mu_{(x,y)}(f_1(x, y))$.

Com o objetivo de dar uma melhor expressão para essa função L_1' (que está no conteúdo do próximo corolário), observemos que o termo correspondente à função K, que corresponde ao segundo termo dentro do somatório, também pode ser expresso como uma derivada em ϵ. Seja $K_\epsilon(x, y) = \mu_{(x,y)}(f_\epsilon(x, y))$. Logo $K_1 = K$ (utilizando a notação fixada). Daí:

$$d_{\phi(T_j+s,z_0)} K(X_{H_1}(\phi(T_j + s, z_0))) = \frac{\partial}{\partial s} K_1(\phi(T_j + s, z_0)) =$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0} K_\epsilon(\phi(T_j + s, z_0)) = \frac{\partial}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0} d_{\phi(T_j+s,z_0)} K_\epsilon(X_{H_1}(\phi(T_j + s, z_0))).$$

Logo, com isso obtemos a seguinte igualdade para $L_1'(s)$:

$$L_1'(s) = \frac{\partial}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0} \sum_{j=0}^{n-1} \{g_\epsilon(\phi(T_j + s, z_0)) - d_{\phi(T_j+s,z_0)} K_\epsilon(X_{H_1}(\phi(T_j + s, z_0)))\}.$$

Notemos ainda que a função dentro do somatório pode ser escrita como:

$$g_\epsilon(x, y) - d_{(x,y)} K_\epsilon(X_{H_1}(x, y)) = (f_\epsilon^* \mu - dK_\epsilon)_{(x,y)}(X_{H_1}(x, y)).$$

Diante dessas manipulações algébricas, resumiremos a representação obtida para a função $L_1'(s)$ no próximo corolário.

Corolário 7.4.1 *Definindo $A_\epsilon(x, y) = (f_\epsilon^* \mu - dK_\epsilon)_{(x,y)}(X_{H_1}(x, y))$, obtemos:*

$$L_1'(s) = \sum_{j=0}^{n-1} A_1(\phi(T_j + s, z_0)).$$

Demonstração: *Segue dos cálculos feitos acima.* $\square$

Portanto, se existir $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que $L_1'(s_0) \neq 0$, então $\bar{L}_1$ não é constante e teremos, então, que a curva rotacional invariante $\bar{\Gamma}$ não persisti sob a perturbação. **É fundamental notar que** o somatório que aparece na expressão de L_1', no último corolário, é uma soma sobre órbitas de ψ_0. De fato, através do parâmetro s, escolhemos um ponto sobre a curva Γ; ao variar o índice j do somatório, percorremos a órbita do ponto fixado (por meio de s) por ψ_0. Essa construção foi possível devido ao fato de que todo ponto sobre a curva Γ possui tempo de retorno, pela aplicação de Poincaré ψ_0, iguais. Na sequência do texto, iremos avaliar essa função A_1, que aparece no corolário anterior.

7.5 Análise da Função A_1.

Vamos analisar melhor esta função A_1. Conforme foi visto, teremos:

$$A_\epsilon(x, y) = (f_\epsilon^* \mu - dK_\epsilon)(X_{H_1}(x, y)).$$

Escrevermos $f_\epsilon(x, y) = (X_\epsilon(x, y), Y_\epsilon(x, y))$. Assim: $K_\epsilon(x, y) = \mu_{(x,y)}(f_\epsilon(x, y)) = \mu_{(x,y)}(X_\epsilon, Y_\epsilon)$.

Passemos as expressões das 1-formas, que aparecem na expressão de A_ϵ, para coordenadas. Seguimos por partes.

1. $f_\epsilon^* \mu$.

   Observemos que calculando essa 1-forma num vetor $v \in T_{(x,y)}\mathbb{R}^2$, temos:

   $$(f_\epsilon^* \mu)_{(x,y)}(v) = \mu_{f_\epsilon(x,y)}(d_{(x,y)} f_\epsilon(v)) = \mu_{(X_\epsilon, Y_\epsilon)}(d_{(x,y)} f_\epsilon(v)) =$$

   $$= \frac{X_\epsilon}{2} d\pi_2((d_{(x,y)} f_\epsilon(v))) - \frac{Y_\epsilon}{2} d\pi_1((d_{(x,y)} f_\epsilon(v))).$$

   Onde, as aplicações π_i, $i = 1$ ou $i = 2$, representam as projeções canônicas. Segue que:

   $$(f_\epsilon^* \mu)_{(x,y)}(v) = \tfrac{X_\epsilon}{2} d_{(x,y)} Y_\epsilon(v) - \tfrac{Y_\epsilon}{2} d_{(x,y)} X_\epsilon(v) =$$

Portanto, podemos escrever

$$(f_\epsilon^*\mu)_{(x,y)} = \left(\frac{X_\epsilon}{2}\frac{\partial Y_\epsilon}{\partial x} - \frac{Y_\epsilon}{2}\frac{\partial X_\epsilon}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{X_\epsilon}{2}\frac{\partial Y_\epsilon}{\partial y} - \frac{Y_\epsilon}{2}\frac{\partial X_\epsilon}{\partial y}\right)dy \quad (7.1)$$

2. dK_ϵ

   Faremos o mesmo com dK_ϵ. Como $K_\epsilon(x,y) = \mu_{(x,y)}(X_\epsilon, Y_\epsilon)$, temos:

$$K_\epsilon(x,y) = \frac{x}{2}dy(X_\epsilon, Y_\epsilon) - \frac{y}{2}dx(X_\epsilon, Y_\epsilon) = \frac{x}{2}Y_\epsilon - \frac{y}{2}X_\epsilon$$

   Segue então que:

$$\frac{\partial K_\epsilon}{\partial x} = \frac{Y_\epsilon}{2} + \frac{x}{2}\frac{\partial Y_\epsilon}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial X_\epsilon}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial K_\epsilon}{\partial y} = \frac{x}{2}\frac{\partial Y_\epsilon}{\partial y} - \frac{y}{2}\frac{X_\epsilon}{\partial y} - \frac{X_\epsilon}{2}$$

   Portanto, podemos escrever, em relação à base $\{dx, dy\}$:

$$dK_\epsilon = \left(\frac{x}{2}\frac{\partial Y_\epsilon}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial X_\epsilon}{\partial x} + \frac{Y_\epsilon}{2}\right)dx + \left(\frac{x}{2}\frac{\partial Y_\epsilon}{\partial y} - \frac{y}{2}\frac{\partial X_\epsilon}{\partial y} - \frac{X_\epsilon}{2}\right)dy \quad (7.2)$$

3. $(f_\epsilon^*\mu - dK_\epsilon)$

   Juntando as duas expressões obtidas, podemos escrever:

$$(f_\epsilon^*\mu - dK_\epsilon) = B_\epsilon(x,y)dx + C_\epsilon(x,y)dy, \text{ onde:}$$

$$\begin{cases} B_\epsilon(x,y) = \frac{X_\epsilon}{2}\frac{\partial Y_\epsilon}{\partial x} - \frac{Y_\epsilon}{2}\frac{\partial X_\epsilon}{\partial x} - \frac{x}{2}\frac{\partial Y_\epsilon}{\partial x} + \frac{y}{2}\frac{\partial X_\epsilon}{\partial x} - \frac{Y_\epsilon}{2} \\ \\ C_\epsilon(x,y) = \frac{X_\epsilon}{2}\frac{\partial Y_\epsilon}{\partial y} - \frac{Y_\epsilon}{2}\frac{\partial X_\epsilon}{\partial y} - \frac{x}{2}\frac{\partial Y_\epsilon}{\partial y} + \frac{y}{2}\frac{\partial X_\epsilon}{\partial y} - \frac{X_\epsilon}{2} \end{cases}$$

   Com isso, obtemos uma boa representação para a 1-forma que aparece na expressão da função A_ϵ.

Vamos, agora, avaliar as derivadas, em relação ao parâmetro ϵ, das funções obtidas B_ϵ e C_ϵ. Antes disso, faremos uma observação.

Observação 7.5.1 *Escrevendo $f_\epsilon(x,y) = (X_\epsilon(x,y), Y_\epsilon(x,y))$, devemos notar que:*

$$X_\epsilon(0,0) = 0 \text{ e } Y_\epsilon(0,0) = 0, \ \forall\epsilon.$$

Isso é consequência de $\psi_\epsilon(0,0) = (0,0)$, $\forall\epsilon$ (ou seja, a órbita periódica é a mesma, quando variamos o parâmetro). Portanto:

$$X_1(0,0) = 0 \ e \ Y_1(0,0) = 0$$

Por outro lado, devemos notar que $f_0 = Id$ (é a identidade). Logo:

$$X_0(x,y) = x \ e \ Y_0(x,y) = y$$

Essas relações serão importantes nos próximos cálculos.

Vamos aos cálculos de B_1 e C_1. Seguiremos, por partes.

1. Cálculo da função B_1.
   Temos:

$$B_\epsilon(x,y) = \frac{X_\epsilon}{2}\frac{\partial Y_\epsilon}{\partial x} - \frac{Y_\epsilon}{2}\frac{\partial X_\epsilon}{\partial x} - \frac{x}{2}\frac{\partial Y_\epsilon}{\partial x} + \frac{y}{2}\frac{\partial X_\epsilon}{\partial x} - \frac{Y_\epsilon}{2}$$

   Vamos, a seguir, derivar, em relação a ϵ, cada termo que aparece na soma dessa expressão:

   - $\frac{\partial}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0}\left(\frac{X_\epsilon}{2}\frac{\partial Y_\epsilon}{\partial x}\right) = \frac{X_1}{2}\frac{\partial Y_0}{\partial x} + \frac{X_0}{2}\frac{\partial Y_1}{\partial x} = \frac{x}{2}\frac{\partial Y_1}{\partial x}.$
   - $\frac{\partial}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0}\left(\frac{Y_\epsilon}{2}\frac{\partial X_\epsilon}{\partial x}\right) = \frac{Y_1}{2}\frac{\partial X_0}{\partial x} + \frac{Y_0}{2}\frac{\partial X_1}{\partial x} = \frac{Y_1}{2} + \frac{y}{2}\frac{\partial X_1}{\partial x}.$
   - $\frac{\partial}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0}\left(\frac{x}{2}\frac{\partial Y_\epsilon}{\partial x}\right) = \frac{x}{2}\frac{\partial Y_1}{\partial x}.$
   - $\frac{\partial}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0}\left(\frac{y}{2}\frac{\partial X_\epsilon}{\partial x}\right) = \frac{y}{2}\frac{\partial X_1}{\partial x}.$
   - $\frac{\partial}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0}\left(\frac{Y_\epsilon}{2}\right) = \frac{Y_1}{2}.$

   Tendo em vista os sinais na expressão, acima, de B_ϵ, e essas derivadas com respeito a ϵ, concluímos que:

$$B_1(x,y) = -\frac{Y_1}{2} - \frac{Y_1}{2} = -Y_1(x,y).$$

2. Cálculo da função C_1.

   Esquematizaremos o cálculo de C_1 da mesma forma que fizemos com B_1. Temos:

$$C_\epsilon(x,y) = \frac{X_\epsilon}{2}\frac{\partial Y_\epsilon}{\partial y} - \frac{Y_\epsilon}{2}\frac{\partial X_\epsilon}{\partial y} - \frac{x}{2}\frac{\partial Y_\epsilon}{\partial y} + \frac{y}{2}\frac{\partial X_\epsilon}{\partial y} - \frac{X_\epsilon}{2}.$$

Vamos derivar, em relação a ϵ, cada termo que aparece nessa expressão:

- $\frac{\partial}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0}\left(\frac{X_\epsilon}{2}\frac{\partial Y_\epsilon}{\partial y}\right) = \frac{X_1}{2}\frac{\partial Y_0}{\partial y} + \frac{X_0}{2}\frac{\partial Y_1}{\partial y} = \frac{X_1}{2} + \frac{x}{2}\frac{\partial Y_1}{\partial y}.$
- $\frac{\partial}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0}\left(\frac{Y_\epsilon}{2}\frac{\partial X_\epsilon}{\partial y}\right) = \frac{Y_1}{2}\frac{\partial X_0}{\partial y} + \frac{Y_0}{2}\frac{\partial X_1}{\partial y} = \frac{y}{2}\frac{\partial X_1}{\partial y}.$
- $\frac{\partial}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0}\left(\frac{x}{2}\frac{\partial Y_\epsilon}{\partial y}\right) = \frac{x}{2}\frac{\partial Y_1}{\partial y}.$
- $\frac{\partial}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0}\left(\frac{y}{2}\frac{\partial X_\epsilon}{\partial y}\right) = \frac{y}{2}\frac{\partial X_1}{\partial y}.$
- $\frac{\partial}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0}\left(\frac{X_\epsilon}{2}\right) = \frac{X_1}{2}.$

Tendo em vista os sinais na expressão de C_ϵ e essas derivadas, obtemos:

$$C_1(x,y) = \frac{X_1}{2} + \frac{X_1}{2} = X_1(x,y).$$

Diante dessa representação de B_1 e C_1, conseguimos a seguinte igualdade para $A_1 = A_1(x,y)$.

Proposição 7.5.1 *Se V é o potencial*[2] *do Sistema Hamiltoniano H_1 (que foi indicado, na seção 3, por V_1), temos:*

$$A_1(x,y) = -yY_1(x,y) - V'(x)X_1(x,y).$$

Demonstração: *Observemos que:*

$$A_\epsilon(x,y) = (f_\epsilon^*\mu - dK_\epsilon)_{(x,y)}(X_{H_1}(x,y))$$

Como $X_{H_1}(x,y) = (y, -V'(x))$ e $(f_\epsilon^*\mu - dK_\epsilon) = B_\epsilon(x,y)dx + C_\epsilon(x,y)dy$, temos:

$$A_\epsilon(x,y) = B_\epsilon dx(y, -V'(x)) + C_\epsilon dy(y, -V'(x)) = yB_\epsilon(x,y) - V'(x)C_\epsilon(x,y).$$

Derivando, com respeito a ϵ, esta igualdade:

[2]Iremos indicá-lo por V e não por V_1, conforme introduzido no texto. Faremos assim, para não confundir com a notação que representa a derivada com relação ao parâmetro ϵ.

$$A_1(x,y) = yB_1(x,y) - V'(x)C_1(x,y).$$

Utilizando as igualdades obtidas nos cálculos acima, $B_1 = -Y_1$ *e* $C_1 = X_1$*, conseguimos:*

$$A_1(x,y) = -yY_1(x,y) - V'(x)X_1(x,y).$$

Obtemos, assim, a igualdade desejada. □

Portanto, essa função $A_1(x,y) = -yY_1(x,y) - V'(x)X_1(x,y)$ que deveremos avaliar a soma sobre as órbitas de ψ_0 em Γ, conforme vem sendo discutido nesta seção. Tendo em vista que essa curva Γ é tomada próxima a origem[3] $(0,0) \in \Gamma$ (ou seja, Γ próxima ao ponto fixo), vamos avaliar, agora, como essa função A_1 se comporta próximo ao ponto fixo, $(0,0) \in \Omega$, ou seja, iremos calcular A_1 e suas primeiras derivadas em $(0,0)$ (essas informações estão resumidas na próxima proposição).

Observemos que $A_1(0,0) = 0$. Além disso:

$$\begin{cases} \frac{\partial A_1}{\partial x} = -y\frac{\partial Y_1}{\partial x} - V''X_1 - V'\frac{\partial X_1}{\partial x}, \\ \\ \frac{\partial A_1}{\partial y} = -Y_1 - y\frac{\partial Y_1}{\partial y} - V'\frac{\partial X_1}{\partial y}. \end{cases} \tag{7.3}$$

Temos ainda que $X_1(0,0) = 0$ e $Y_1(0,0) = 0$. Logo:

$$\frac{\partial A_1}{\partial x}(0,0) = 0 \text{ e } \frac{\partial A_1}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Vamos avaliar, agora, as derivadas de ordem 2 de A_1 em $(0,0)$. Observemos que a partir das igualdades (7.3), obtemos:

- $\dfrac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}(0,0) = -V''(0)\dfrac{\partial X_1}{\partial x}(0,0) - V''\dfrac{\partial X_1}{\partial x}(0,0) = -2\alpha^2\dfrac{\partial X_1}{\partial x}(0,0).$
- $\dfrac{\partial^2 A_1}{\partial y^2}(0,0) = -\dfrac{\partial Y_1}{\partial y}(0,0) - \dfrac{\partial Y_1}{\partial y}(0,0) = -2\dfrac{\partial Y_1}{\partial y}(0,0).$
- $\dfrac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial y}(0,0) = -\dfrac{\partial Y_1}{\partial x}(0,0) - V''(0)\dfrac{\partial X_1}{\partial y}(0,0) = -\dfrac{\partial Y_1}{\partial x} - \alpha^2\dfrac{\partial X_1}{\partial y}.$

Portanto, "as primeiras derivadas"da função A_1 que podem ser não nulas em $(0,0)$ são as derivadas de ordem 2 e estão relacionadas às derivadas de ordem 1 das funções X_1 e Y_1 em $(0,0)$. Essas funções, ou suas derivadas, estão relacionadas às propriedades dinâmicas do campo X_{H_ϵ}, conforme analisaremos na próxima seção. Resumiremos o comportamento local, provado nos argumentos acima, da função A_1, na próxima proposição.

[3] Ver a observação 7.1.1.

Proposição 7.5.2 *Temos que a função A_1 se anula em $(0,0)$, juntamente com suas derivadas de ordem 1. Suas derivadas de ordem 2 são dadas por:*

- $\dfrac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}(0,0) = -2\alpha^2 \dfrac{\partial X_1}{\partial x}(0,0).$
- $\dfrac{\partial^2 A_1}{\partial y^2}(0,0) = -2 \dfrac{\partial Y_1}{\partial y}(0,0).$
- $\dfrac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial y}(0,0) = -\dfrac{\partial Y_1}{\partial x} - \alpha^2 \dfrac{\partial X_1}{\partial y}$

Observação 7.5.2 *Diante da proposição anterior e dos comentários relacionados, podemos escrever, então, $A_1(x,y) = Q(x,y) + R(x,y)$, onde $Q = Q(x,y)$ é a forma quadrática associada a hessiana de A_1 em $(0,0)$ e $R = R(x,y)$ é o termo de resto. Assim, teremos:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{R(x,y)}{\| (x,y) \|^2} = 0$$

Portanto, em uma vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ suficientemente pequena, o termo $R = R(x,y)$ contribui pouco com o valor de A_1, ou melhor, o termo $Q = Q(x,y)$ predomina. Estamos interessados em avaliar a soma da função A_1 sobre órbitas da aplicação ψ_0, órbitas que estão sobre a curva invariante Γ. Se a curva invariante Γ estiver suficientemente próxima a origem $(0,0) \in \Omega$, então o valor do termo Q, sobre pontos da órbitas da função ψ_0, estará "muito próxima"do respectivo valor da soma da função A_1. Essa é a ideia para fazer a análise, que será feita mais a frente.

7.6 As Derivadas da Função A_1.

Tendo em vista a observação 7.5.2, temos que calcular as derivadas de segunda ordem da função A_1 em $(0,0)$. Isso nos permite trabalhar com a forma quadrática $Q = Q(x,y)$. Esses cálculos estão relacionados ao fluxo do campo Hamiltoniano X_{H_ϵ}. Os resultados finais de tais cálculos estão na próxima proposição. Uma exposição completa destes cálculos está no Apêndice A.

Proposição 7.6.1 *Indicando a órbita Γ_E, como no Lema 1.1.1, por $\Gamma_E(t) = (0, x_2(t), 0, y_2(t))$, sendo T o seu período. As derivadas parciais da função A_1, de segunda ordem, são:*

- $\dfrac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial y}(0,0) = 2\displaystyle\int_0^T x_2^2(s)\cos\{2\alpha(T-s)\}ds;$
- $\dfrac{\partial^2 A_1}{\partial y^2}(0,0) = \dfrac{2}{\alpha}\displaystyle\int_0^T x_2^2(s)\sin\{2\alpha(T-s)\}ds;$
- $\dfrac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}(0,0) = 2\alpha\displaystyle\int_0^T x_2^2(s)\sin\{2\alpha(T-s)\}ds;$

Observemos que as derivadas de segunda ordem de A_1, em $(0,0)$, dependem, basicamente, do parâmetro α e de integrais sobre a órbita periódica Γ_E.

Nesse ponto, podemos escrever a função $Q = Q(x,y)$, que foi descrita na observação 7.5.2, por:

$$Q(x,y) = ax^2 + 2cxy - by^2 \tag{7.4}$$

Onde:

$$a = \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}(0,0),\ c = \frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial y}(0,0) \text{ e } b = -\frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2}(0,0)$$

Na próxima seção, trataremos de melhorar a expressão da função $L_1' = L_1'(s)$, escrevendo explicitamente as soluções do Sistema Hamiltoniano bidimensional H_1.

Capítulo 8

Destruição de Curvas Invariantes.

O objetivo deste capítulo é provar o Teorema 1.1.3, a partir da condição de Melnikov que foi estabelecida, no capítulo anterior, nas coordenadas da seção de Poincaré Σ_E^+.

8.1 A condição de Melnikov a partir das soluções explícitas de X_{H_1}.

Como vem sendo destacado no texto, gostaríamos de avaliar a função[1]:

$$L \doteq L_1' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Dada por: $L(s) = \sum_{j=0}^{n-1} A_1(\phi(s + T_j), z_0)$,

onde $z_0 \in \Gamma$, z_0 está fixado e Γ é a curva (m, n)-ressonante, a qual queremos avaliar se persiste ou não, e $\phi = \phi(t, z)$ é o fluxo do Campo Hamiltoniano bidimensional X_{H_1}.

Vale ressaltar que indicando por T_1 o período da órbita de Γ (órbita de X_{H_1}) e por T_2 o correspondente período no sistema hamiltoniano H_2, teremos:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{m}{n}, \tag{8.1}$$

onde $m, n \in \mathbb{N}$ são primos entre si. Dessa forma, teremos, na expressão da função $L = L(s)$, $T_j = jT_2$.

[1] Ao longo dessa seção, indicaremos a função L_1' simplesmente por L

Se a função $L = L(s)$ não for identicamente nula, então a curva Γ não persiste sob a perturbação (no sentido da definição (6.1.1)). "Para uma melhor análise dessa questão", iremos, nessa seção, "explicitar"o fluxo $s \mapsto \phi(s, z_0)$, que corresponderá a uma parametrização da curva Γ. A equação de Hamilton, associada a Hamiltoniana H_1, é dada por:

$$\begin{cases} q' = p \\ p' = -\alpha^2 q - 2q^3 \end{cases}$$

(Estamos supondo, sem perda de generalidade, que o coeficiente $b_1 = 1$.)

Sendo $\Gamma = H_1^{-1}(E_1)$, temos:

$$\frac{p^2}{2} + \frac{\alpha^2 q^2}{2} + \frac{q^4}{2} = E_1$$

Segue então que:

$$\frac{dq}{dt} = \sqrt{2E_1 - \alpha^2 q^2 - q^4}$$

No entanto, considerando o polinômio dentro da raíz, podemos escrever:

$$2E_1 - \alpha^2 x^2 - x^4 = (r_1 - x^2)(r_2 + x^2)$$

Onde r_1 e r_2 são dados por:

$$\begin{cases} r_1 = \frac{-\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 8E_1}}{2} \\ \\ r_2 = \frac{\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 8E_1}}{2} \end{cases} \tag{8.2}$$

Teremos a situação indicada na figura 8.1.

Além disso:

$$\int_t^{\frac{T_1}{4}} dt = \int_q^{\sqrt{r_1}} \frac{dx}{\sqrt{(r_1 - x^2)(r_2 + x^2)}}$$

Sendo $q \in [0, \sqrt{r_1}]$ a coordenada no instante t, $t \in [0, \frac{T_1}{4}]$.

A integral do lado direito é chamada integral elíptica (ver ([17])). Podemos expressar esse tipo de integral a partir das chamadas funções elípticas de Jacobi (suas inversas). Integrais, como a apresentada acima, satisfazem:

$$\int_x^b \frac{dt}{\sqrt{(b^2 - t^2)(a^2 + t^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} cn^{-1}(\frac{x}{b}),$$

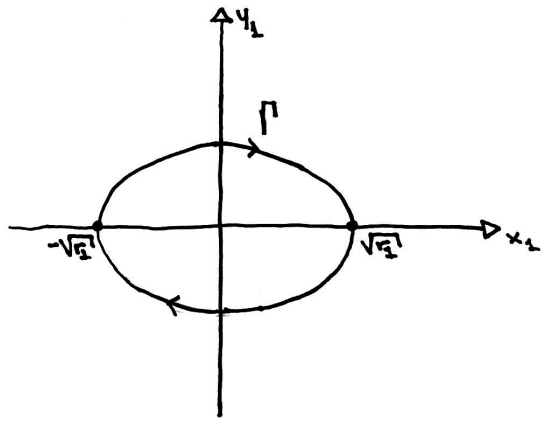

Figura 8.1: Representação da curva Γ.

onde cn é a função cosseno elíptico e o módulo da função cosseno elíptico, contido nessa expressão, é dado por:

$$k = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Essas informações estão em [17]. No nosso caso, teremos $r_1 = b^2$ e $r_2 = a^2$. Logo:

$$\frac{T_1}{4} - t = \frac{1}{\sqrt{r_1 + r_2}} cn^{-1}\left(\frac{q}{\sqrt{r_1}}\right)$$

Onde o módulo da função elíptica é dado por:

$$k = \sqrt{\frac{r_1}{r_1 + r_2}} \tag{8.3}$$

Portanto:

$$cn^{-1}\left(\frac{q}{\sqrt{r_1}}\right) = \sqrt{r_1 + r_2}\left(\frac{T_1}{4} - t\right) \Longrightarrow q(t) = \sqrt{r_1} cn\left(\sqrt{r_1 + r_2}\left(\frac{T_1}{4} - t\right)\right)$$

Isso nos sugere poder expressar as soluções da equação de Hamilton associada a função H_1 por meio das funções elípticas de Jacobi. Verificaremos,

a seguir, que a função $q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $q(t) = \sqrt{r_1}cn(\sqrt{r_1 + r_2}t)$, onde o módulo da função elíptica é dado por $k = \sqrt{\frac{r_1}{r_1+r_2}}$, é solução da seguinte equação:

$$\begin{cases} x'' = -\alpha^2 x - 2x^3 \\ x(0) = \sqrt{r_1} \\ x'(0) = 0 \end{cases} \tag{8.4}$$

As funções elípticas de Jacobi estão relacionadas a certas equações diferenciais. Em relação a isso, temos:

Lema 8.1.1 *Seja $y(x) = cn(x)$, onde cn é o cosseno elíptico, associado ao módulo k. Então vale:*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (2k^2 - 1)y - 2k^2y^3.$$

Demonstração: *Ver ([17]).*

Diante desse lema, obtemos o seguinte corolário:

Corolário 8.1.1 *A função $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por:*

$$q(t) = \sqrt{r_1}cn(\sqrt{r_1 + r_2}t), \text{ com módulo } k = \sqrt{\frac{r_1}{r_1+r_2}}$$

é solução de (8.4). Onde r_1 e r_2 são dados em (8.2).

Demonstração: *Observemos que pela definição da função $q = q(t)$, teremos:*

$$\frac{q(t)}{\sqrt{r_1}} = cn(\sqrt{r_1 + r_2}t) \Longrightarrow \frac{q'(t)}{\sqrt{r_1}} = (\sqrt{r_1 + r_2})cn'(\sqrt{r_1 + r_2}t).$$

Derivando mais uma vez, obtemos:

$$\frac{q''(t)}{\sqrt{r_1}} = (r_1 + r_2)cn''((\sqrt{r_1 + r_2})t).$$

Por outro lado, teremos:

$$r_1 - r_2 = \alpha^2 \Longrightarrow r_2 = r_1 + \alpha^2.$$

Segue que:

$$2k^2 - 1 = \frac{2r_1}{r_1 + r_2} - 1 = \frac{2r_1 - r_1 - r_2}{r_1 + r_2} = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}.$$

Obtemos então:

$$2k^2 - 1 = \frac{-\alpha^2}{r_1 + r_2} \text{ e } 2k^2 = \frac{2r_1}{r_1 + r_2}.$$

Substituindo na igualdade que nos dá q'', obtemos:

$$\frac{q''(t)}{\sqrt{r_1}} = (r_1 + r_2)\left(\frac{-\alpha^2}{\sqrt{r_1}}\frac{q(t)}{r_1 + r_2} - \frac{2r_1}{\sqrt{r_1}}\frac{q^3(t)}{r_1 + r_2}\right) = \frac{-\alpha^2 q(t)}{\sqrt{r_1}} - \frac{2}{\sqrt{r_1}}q^3(t).$$

Portanto:

$$q''(t) = -\alpha^2 q(t) - 2q^3(t)$$

Devemos notar ainda que $q(0) = \sqrt{r_1}$. Além disso, vale:

$$q'(t) = -(\sqrt{r_1^2 + r_1 r_2})sn((\sqrt{r_1 + r_2})t)dn((\sqrt{r_1 + r_2})t)$$

Logo, $q'(0) = 0$. Obtemos, assim, que $q = q(t)$ é solução de (8.4). $\square$

Definimos, a partir deste corolário, a seguinte curva:

$$z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ z(t) = (q(t), p(t))$$

Onde as curvas $q = q(t)$ e $p = p(t)$ são dados por:

$$\begin{cases} q(t) = \sqrt{r_1}cn(\sqrt{(r_1 + r_2)}t), \\ \\ p(t) = -(\sqrt{r_1^2 + r_1 r_2})sn((\sqrt{r_1 + r_2})t)dn((\sqrt{r_1 + r_2})t). \end{cases} \tag{8.5}$$

Diante dessa definição, obtemos:

Corolário 8.1.2 *Se $z_0 = (\sqrt{r_1}, 0)$, então:*

$$\phi(s, z_0) = z(s).$$

Onde ϕ é o fluxo do campo hamiltoniano X_{H_1}.

Portanto, fazendo, na expressão de $L = L(s)$, $z_0 = (\sqrt{r_1}, 0)$, obtemos:

$$L(s) = \sum_{j=0}^{n-1} A_1(z(s + j \cdot T_2))$$

Nesse caso, a curva $s \mapsto \phi(s, z_0)$, associada à expressão de $L = L(s)$ está explícita, expressa através das funções elípticas de Jacobi.

A função $A_1 = A_1(x, y)$ é da forma $A_1(x, y) = Q(x, y) + R(x, y)$, sendo a função Q da forma:

$$Q(x,y) = ax^2 + 2cxy - by^2$$

Onde os coeficientes são dados em (7.4). A função $R = R(x,y)$, por sua vez, satisfaz:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{R(x,y)}{\| (x,y) \|^2} = 0$$

Definiremos as funções $\mu_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\mu_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por:

$$\mu_1(s) = Q(z(s)) \text{ e } \mu_2(s) = R(z(s)).$$

Assim:

$$L(s) = \sum_{j=0}^{n-1} \{\mu_1(s + j \cdot T_2) + \mu_2(s + j \cdot T_2)\}$$

Gostaríamos de mostrar que a função $L = L(s)$ não é identicamente nula. Em particular, se L não for uma função constante, então teremos que L não é identicamente nula. Uma técnica, para analisar esse tipo de soma, vem da análise complexa. De fato, as funções $u \mapsto cn(u)$, $u \mapsto sn(u)$ e $u \mapsto dn(u)$ (assim como as demais funções elípticas) se estendem, analiticamente, a valores do plano complexos; a partir disso, podemos pensar num mesmo tipo de extensão para a função L. Essas funções, vistas como funções definidas no plano complexo, serão funções meromorfas duplamente periódicas. Uma análise das singularidades complexas desse tipo de função pode nos levar a concluir se elas são constantes ou não. Seguiremos nessa direção. Os argumentos utilizados aqui são adaptações dos argumentos feitos em [9]. Na sequência do texto, vamos analisar o termo do somatório relacionado a função μ_1, considerando as funções elípticas definidas no plano complexo, e tentaremos estudar as singularidades da função obtida.

8.2 Análise do termo relacionado a μ_1

Como foi definido acima, a função $\mu_1 = \mu_1(s)$ é dada por:

$$\mu_1(s) = Q(z(s)), \text{ onde } Q(x,y) = ax^2 + 2cxy - by^2$$

Os coeficientes a, b e c são dados em (7.4). Em particular, teremos:

$$a = 2\alpha \int_0^T x_2^2(s) \sin\{2\alpha(T-s)\} ds \text{ e}$$

$$b = \frac{2}{\alpha}\int_0^T x_2^2(s)\sin\{2\alpha(T-s)\}ds$$

Trabalharemos com a seguinte hipótese, relacionada ao nível de energia:

Hipótese 8.2.1 *Vamos supor que coeficiente α e o nível de energia, que é utilizado na construção da transformação de Poincaré, são tais que a seguinte condição é satisfeita:*

$$\int_0^T x_2^2(s)\sin\{2\alpha(T-s)\}ds \neq 0$$

Devemos destacar que, fixado o coeficiente α da Hamiltoniana, essa é uma hipótese sobre o nível de energia, no qual está sendo feita a análise. Observemos, ainda, que esta hipótese corresponde a hipótese do item 2, feita no enunciado do Teorema 1.1.3. Esta hipótese está relacionada, portanto, aos coeficientes da forma quadrática Q. Daqui em diante, neste capítulo, trabalharemos com esta hipótese. .

Observemos que, diante da Hipótese 8.2.1, os coeficientes a e b são não nulos. Assim diante dessa hipótese, vale a relação:

$$\alpha b = \frac{a}{\alpha} \Longrightarrow a = \alpha^2 b$$

Portanto, substituindo na expressão de $Q = Q(x,y)$, conseguimos:

$$Q(x,y) = \alpha^2 bx^2 + 2cxy - by^2$$

No entanto, estamos interessados na expressão da função μ_1, na qual a função Q aparece sendo calculada em valores $(x,y) \in \Gamma = H_1^{-1}(E_1)$. Logo, (x,y) devem satisfazer:

$$\frac{y^2}{2} + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + \frac{x^4}{2} = E_1 \Longrightarrow y^2 = 2E_1 - \alpha^2 x^2 - x^4$$

Substituindo esta relação na expressão de Q, obtemos:

$$Q|_\Gamma(x,y) = \alpha^2 bx^2 + 2cxy - b(2E_1 - \alpha^2 x^2 - x^4) =$$

$$= \alpha^2 bx^2 + 2cxy - 2bE_1 + b\alpha^2 x^2 + bx^4 =$$

$$= bx^4 + 2b\alpha^2 x^2 + 2cxy - 2bE_1.$$

Sendo $\mu_1(s) = Q(z(s))$, onde $z = (s) = (q(s), p(s))$, q e p dados em (8.5), obtemos então:

$$\mu_1(s) = bq^4(s) + 2\alpha^2 bq^2(s) + 2cq(s)p(s) - 2bE_1$$

Omitiremos o termo constante $2bE_1$ dessa expressão (esse termo não interfere na análise). Escreveremos, para efeitos de simplificação nas expressões que serão manipuladas:

$$\omega(s) = (\sqrt{r_1 + r_2}) \cdot s$$

Utilizando as expressões de q e p, dadas em (8.5), obtemos:

$$\mu_1(s) = br_1^2 cn^4(\omega(s)) + 2\alpha^2 br_1 cn^2(\omega(s)) - cr_1(\sqrt{r_1 + r_2})(2sn(\omega(s))cn(\omega(s))dn(\omega(s))).$$

Mas vale, entre as funções elípticas, a seguinte identidade, que está associada ao termo entre parênteses, na expressão acima:

$$sn(2\omega(s)) = \frac{2sn(\omega(s))cn(\omega(s))dn(\omega(s))}{1 - k^2 sn^4(\omega(s))}.$$

Logo:

$$sn(2\omega(s))(1 - k^2 sn^4\omega(s)) = 2sn(\omega(s))cn(\omega(s))dn(\omega(s)).$$

Substituindo na expressão de $\mu_1 = \mu_1(s)$, obtemos:

$$\mu_1(s) = br_1^2 cn^4(\omega(s)) + 2\alpha^2 br_1 cn^2(\omega(s)) - cr_1(\sqrt{r_1 + r_2})(sn(2\omega(s))$$

$$(1 - k^2 sn^4\omega(s)) =$$

$$= br_1^2 cn^4(\omega(s)) + 2\alpha^2 br_1 cn^2(\omega(s)) - cr_1(\sqrt{r_1 + r_2})sn(2\omega(s)) +$$

$$+ ck^2 r_1(\sqrt{r_1 + r_2})sn(2\omega(s))sn^4(\omega(s)).$$

Portanto, obtemos a seguinte expressão para a função μ_1:

$$\mu_1(s) = br_1^2 cn^4(\omega(s)) + 2\alpha^2 br_1 cn^2(\omega(s)) - cr_1(\sqrt{r_1 + r_2})sn(2\omega(s)) +$$

$$+ ck^2 r_1(\sqrt{r_1 + r_2})sn(2\omega(s))sn^4(\omega(s)).$$

Como as funções $x \mapsto cn(x)$ e $x \mapsto sn(x)$ se estendem analiticamente a valores do plano complexo, a função μ_1 se estenderá, também, a valores do plano complexo. Assim, teremos a função $\mu_1 = \mu_1(z)$:

$$\mu_1(z) = br_1^2 cn^4(\omega(z)) + 2\alpha^2 br_1 cn^2(\omega(z)) - cr_1(\sqrt{r_1 + r_2})sn(2\omega(z)) +$$

$+ck^2r_1(\sqrt{r_1+r_2})sn(2\omega(z))sn^4(\omega(z))$.

As funções $z \mapsto cn(z)$ e $z \mapsto sn(z)$ são funções meromorfas duplamente periódicas. Seus períodos são, respectivamente, $4K$ e $2K+2iK'$ e $4K$ e $2iK'$. Seguirá que as funções $z \mapsto cn(\omega(z))$ e $z \mapsto sn(\omega(z))$ possuem, respectivamente, períodos:

$$\frac{4K}{\sqrt{r_1+r_2}} \text{ e } \frac{2K+2iK'}{\sqrt{r_1+r_2}} \text{ e } \frac{4K}{\sqrt{r_1+r_2}} \text{ e } \frac{2iK'}{\sqrt{r_1+r_2}}.$$

Podemos notar que $4K$ e $4iK'$ são períodos em comum das funções cn e sn (são períodos em comum das funções cn, sn e dn; por isso, trabalharemos com eles). Portanto, a função μ_1, estendida ao plano complexo, é uma função meromorfa, duplamente periódica, com períodos:

$$\frac{4K}{\sqrt{r_1+r_2}} \text{ e } \frac{4iK'}{\sqrt{r_1+r_2}}.$$

Em relação a essas constantes, temos a próxima observação.

Observação 8.2.1 *Utilizando a forma da integral elíptica, apresentada nessa seção, teremos que a constante K é dada por:*

$$\frac{K}{a^2+b^2} = \int_0^b \frac{dt}{\sqrt{(b^2-t^2)(a^2+t^2)}}.$$

Assim, para o nosso caso, teremos:

$$\frac{K}{r_1+r_2} = \int_0^{\sqrt{r_1}} \frac{dx}{\sqrt{(r_1-x^2)(r_2+x^2)}}.$$

Portanto, a constante K está relacionada ao período da correspondente órbita do Sistema Hamiltoniano H_1. Teremos:

$$\frac{4K}{\sqrt{r_1+r_2}} = T_1.$$

A constante K' está relacionada ao módulo complementar k'. Mais detalhes podem ser consultados em ([17]).

Resumindo, a função μ_1, estendida ao plano complexo, é uma função meromorfa duplamente periódica. A próxima subseção se propõe a estudar as possíveis singularidades desta função.

8.3 As singularidades da função μ_1

Temos então:

$$\mu_1(z) = br_1^2 cn^4(\omega(z)) + 2\alpha^2 br_1 cn^2(\omega(z)) - cr_1(\sqrt{r_1+r_2})sn(2\omega(z)) +$$

$$+ck^2 r_1(\sqrt{r_1+r_2})sn(2\omega(z))sn^4(\omega(z)).$$

Para fazer uma análise das possíveis singularidades da função μ_1, definiremos as funções auxiliares:

- $A(z) = br_1^2 cn^4(\omega(z)) + 2\alpha^2 br_1 cn^2(\omega(z))$
- $B(z) = ck^2 r_1(\sqrt{r_1+r_2})sn(2\omega(z))sn^4(\omega(z))$.
- $C(z) = cr_1(\sqrt{r_1+r_2})sn(2\omega(z))$.

Dessa forma, teremos: $\mu_1(z) = A(z) + B(z) - C(z)$. Portanto, os candidatos às singularidades da função μ_1 devem ser singularidades da função A, ou da função B, ou da função C. Iremos determinar as singularidades das funções A, B e C e, na medida do possível, os coeficientes de suas respectivas séries de Laurent, para, a partir disso, fazer o mesmo em relação a função μ_1. Seguiremos por partes.

I- A função A=A(z)

Temos que a função A é dada por:

$$A(z) = br_1^2 cn^4(\omega(z)) + 2\alpha^2 br_1 cn^2(\omega(z)).$$

Seguirá que suas possíveis singularidades provém da função cosseno elíptico, $z \mapsto cn(z)$. Em relação às singularidades dessa função, temos:

Lema 8.3.1 *Seja $y(z) = cn(z)$ a função cosseno elíptico, associado ao módulo k. Suas singularidades são iK' e $2K + iK'$ (ver a observação a seguir), que são polos simples, com resíduos dados, respectivamente, por $\frac{-i}{k}$ e $\frac{i}{k}$.*

Demonstração: *Ver ([17]).*

Em relação a esta afirmação, é importante destacar que a periodicidade dupla está sendo levada em consideração. Em relação a isso, temos a seguinte observação.

Observação 8.3.1 *A situação deste lema pode ser analisada no paralelogramo com vértices nos seguintes pontos $-2K$, $2K$, $4K + 2iK'$ e $2iK'$. Todas as outras singularidades são equivalentes às singularidades descritas no lema, devido a periodicidade dupla.*

Sejam z_0, $z_1 \in \mathbb{C}$ tais que $\omega(z_0) = iK'$ e $\omega(z_1) = 2k+iK'$. Assim, teremos:

$$z_0 = \frac{iK'}{\sqrt{r_1+r_2}} \text{ e } z_1 = \frac{2K+iK'}{\sqrt{r_1+r_2}}.$$

Segue, então, que z_0 e z_1 são singularidades da função $z \mapsto cn(\omega(z))$. A situação é resumida no próximo lema.

Lema 8.3.2 *Os pontos:*

$$z_0 = \frac{iK'}{\sqrt{r_1+r_2}} \text{ e } z_1 = \frac{2K+iK'}{\sqrt{r_1+r_2}}.$$

são polos de ordem 1 *da função* $z \mapsto cn(\omega(z))$. *Os resíduos são, respectivamente, dados por:* $\dfrac{-i}{k\sqrt{r_1+r_2}}$ *e* $\dfrac{i}{k\sqrt{r_1+r_2}}$.

Observação 8.3.2 *A situação é análoga à feita na observação referente ao lema anterior.*

Diante dessas informações, levando-se em consideração as potências de $z \mapsto cn(\omega(z))$ e os coeficientes que estão na expressão da função $A = A(z)$, obtemos o próximo corolário.

Corolário 8.3.1 *As singularidades da função* $A = A(z)$ *são:*

$$z_0 = \frac{iK'}{\sqrt{r_1+r_2}} \text{ e } z_1 = \frac{2K+iK'}{\sqrt{r_1+r_2}}.$$

Temos ainda:

- z_0 *é um polo de ordem* 4 *da função* $A = A(z)$. *A série de Laurent de* A, *centrada em* z_0, *é da forma:*

$$A(z) = \sum_{m=1}^{4} \frac{b_m}{(z-z_0)^m} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n. \tag{8.6}$$

  Com o coeficiente b_4, *dado por:*

$$b_4 = br_1^2 \left(\frac{-i}{k\sqrt{r_1+r_2}} \right)^4 = b.$$

- z_1 *é um polo de ordem* 4 *da função* $A = A(z)$. *A sua série de Laurente, centrada em* z_1, *tem a forma de (8.6). Onde o coeficiente* b_4 *é dado por:*

$$b_4 = br_1^2 \left(\frac{i}{k\sqrt{r_1 + r_2}} \right)^4 = b$$

Notemos que, devido ao módulo das funções elípticas ser dado em (8.3), teremos $b_4 = b$. De fato:

$$b_4 = br_1^2 \left(\frac{\pm i}{k\sqrt{r_1 + r_2}} \right)^4 = br_1^2 \left(\frac{\pm i}{k\sqrt{r_1 + r_2}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\pm i}{k\sqrt{r_1 + r_2}} \right)^2 =$$

$$= br_1^2 \left(\frac{-1}{k^2(r_1 + r_2)} \right) \left(\frac{-1}{k^2(r_1 + r_2)} \right) = br_1^2 \left(\frac{1}{\frac{r_1}{r_1+r_2}(r_1 + r_2)} \right) \left(\frac{1}{\frac{r_1}{r_1+r_2}(r_1 + r_2)} \right) =$$

$$= br_1^2 \frac{1}{r_1^2} = b.$$

O coeficiente b é dado em (7.4). Temos a seguinte observação.

Observação 8.3.3 *É importante notar que não há dependência entre coeficiente b_4 e a curva Γ, (m, n)-ressonante, que está sendo feita a análise. O coeficiente b depende do parâmetro α (na Hamiltoniana H_1) e da órbita periódica usada para a construção da aplicação de Poincaré. Posteriormente, voltaremos a destacar esta propriedades.*

II- A Função C= C(z).
A função $C = C(z)$ é dada por:

$$C(z) = cr_1(\sqrt{r_1 + r_2})sn(2\omega(z)).$$

Segue que as possíveis singularidades da função C estão relacionadas às singularidades da função $z \mapsto sn(\omega(z))$. Em relação a isso, teremos:

Lema 8.3.3 *Seja $y(z) = sn(z)$, a função seno elíptico, associada ao módulo k. Suas singularidades são iK' e $2K + iK'$ (ver a observação a seguir), que são polos simples. Seus resíduos são dados, respectivamente, por $\frac{1}{k}$ e $\frac{-1}{k}$.*

É importante destacar "o fator "periodicidade, contido na afirmação desse lema, assim como fizemos com a função $z \mapsto cn(z)$.

Observação 8.3.4 *A situação descrita no lema anterior pode ser analisada no paralelogramo com vértices $-K$, $3K$, $3K + 2iK'$ e $-K + 2iK'$. Todas as outras singularidades serão equivalentes às singularidades descritas no lema, devido a periodicidade dupla.*

Sejam z_0, $z_1 \in \mathbb{C}$, tais que $2\omega(z_0) = iK'$ e $2\omega(z_1) = 2k + iK'$. Então:

$$z_0 = \frac{iK'}{2\sqrt{r_1 + r_2}} \text{ e } z_1 = \frac{2K + iK'}{2\sqrt{r_1 + r_2}}.$$

Seguirá que z_0 e z_1 são singularidades da função $z \mapsto sn(2\omega(z))$. Outras informações são descritas no próximo lema.

Lema 8.3.4 *Os pontos:*

$$z_0 = \frac{iK'}{2\sqrt{r_1 + r_2}} \text{ e } z_1 = \frac{2K + iK'}{2\sqrt{r_1 + r_2}}.$$

são singularidades [2] *da função* $z \mapsto sn(2\omega(z))$. *Estas são polos de ordem* 1. *Seus resíduos são dados, respectivamente, por:*

$$\frac{1}{2k\sqrt{r_1 + r_2}} \text{ e } \frac{-1}{2k\sqrt{r_1 + r_2}}.$$

Diante deste lema, podemos descrever as singularidades da função C.

Corolário 8.3.2 *As singularidades da função* $C = C(z)$ *são dadas por:*

$$z_0 = \frac{iK'}{2\sqrt{r_1 + r_2}} \text{ e } z_1 = \frac{2K + iK'}{2\sqrt{r_1 + r_2}}.$$

Além disso, temos:

- z_0 *é um polo de ordem* 1 *de* C. *O resíduo, associado, é dado por:*

$$b_1 = cr_1(\sqrt{r_1 + r_2})\frac{1}{2k\sqrt{r_1 + r_2}} = \frac{cr_1}{2k}.$$

- z_1 *é polo de ordem* 1 *da função* $C = C(z)$. *O resíduo, associado, é dado por:*

$$b_1 = -cr_1(\sqrt{r_1 + r_2})\frac{1}{2k\sqrt{r_1 + r_2}} = \frac{-cr_1}{2k}.$$

Com esse corolário, temos a descrição das singularidades da função C.

III- A função B=B(z).

A função $B = B(z)$ é dada por:

[2] Devemos destacar que estas informações estão sempre condicionadas a periodicidade dupla

$$B(z) = cr_1(\sqrt{r_1 + r_2})k^2 sn(2\omega(s))sn^4(\omega(s)).$$

Observemos, então, que podemos escrever a função $B = B(z)$ da seguinte maneira:

$$B(z) = C(z) \cdot (k^2 sn^4(\omega(z))).$$

Portanto, tanto as singularidades da função C, quanto as singularidades da função $z \mapsto k^4 sn^4(\omega(z))$ serão candidatas a singularidades da função B. As singularidades de C já foram estudadas. A seguir, caracterizaremos as singularidades da função $z \mapsto k^2 sn^4(\omega(z))$.

Lema 8.3.5 *Os pontos:*

$$z_0 = \frac{iK'}{\sqrt{r_1 + r_2}} \text{ e } z_1 = \frac{2K + iK'}{\sqrt{r_1 + r_2}}.$$

são singularidades[3] *da função* $z \mapsto k^2 sn^4(\omega(z))$. *Estes são polos de ordem* 4. *Os coeficientes da correspondentes série de Laurent são, respectivamente, dados por:*

1. $k^2(\frac{1}{k})^4 = k^2\frac{1}{k^4} = \frac{1}{k^2}$;
2. $k^2(\frac{-1}{k})^4 = k^2\frac{1}{k^4} = \frac{1}{k^2}$.

Diante desse lema, teremos os seguintes candidatos a singularidades da função B:

- Singularidades de $C = C(z)$ são $\frac{iK'}{2\sqrt{r_1 + r_2}}$ e $\frac{2K + iK'}{2\sqrt{r_1 + r_2}}$ são polos de ordem 1, com coeficientes, respectivamente, dados por: $\frac{cr_1}{2k}$ e $\frac{cr_1}{2k}$, conforme discutido anteriormente.
- Singularidades de $z \mapsto k^2 sn^4(\omega(z))$ são $\frac{iK'}{\sqrt{r_1 + r_2}}$ e $\frac{2K + iK'}{\sqrt{r_1 + r_2}}$ são polos de ordem 4, com, respectivamente, coeficientes: $\frac{1}{k^2}$ e $\frac{1}{k^2}$.

Observemos que, calculando a função $z \mapsto k^2 sn^4(\omega(z))$ nas singularidades da função C, obtemos:

[3] Devemos sempre considerar essa afirmação, a menos de periodicidade dupla.

$$k^2 sn^4\left(\omega(\tfrac{iK'}{2\sqrt{r_1+r_2}})\right) = k^2 sn^4\left(\frac{iK'}{2}\right) = k^2\left(\frac{i}{\sqrt{k}}\right)^4 = k^2\frac{1}{k^2} = 1.$$

Da mesma forma, teremos que:

$$k^2 sn^4\left(\omega\left(\tfrac{2K+iK'}{2\sqrt{r_1+r_2}}\right)\right) = k^2 sn^4\left(\frac{2K+iK'}{2}\right) = k^2 sn^4\left(K+\frac{iK'}{2}\right).$$

Devemos notar que vale a seguinte relação entre funções elípticas (ver ([17])):

$$sn(K+\tfrac{iK'}{2}) = sn(\tfrac{-iK'}{2}+(K+iK')) = \frac{1}{k}\frac{dn(\frac{-iK'}{2})}{cn(\frac{-iK'}{2})} = \frac{1}{k}\frac{\sqrt{1+k}}{\frac{\sqrt{1+k}}{\sqrt{k}}} = \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Logo:

$$k^2 sn^4\left(\omega\left(\tfrac{2K+iK'}{2\sqrt{r_1+r_2}}\right)\right) = k^2\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^4 = 1.$$

Resumindo, calculando a função $z \mapsto k^2 sn^4(\omega(z))$ nas singularidades da função C, obtemos:

$$k^2 sn^4\left(\omega\left(\tfrac{iK'}{2\sqrt{r_1+r_2}}\right)\right) = 1 \text{ e } k^2 sn^4\left(\omega\left(\tfrac{2K+iK'}{2\sqrt{r_1+r_2}}\right)\right) = 1$$

Portanto, a análise das singularidades da função B, em relação às singularidades da função C, pode ser feita na situação do próximo lema.

Lema 8.3.6 *Sejam*[4] $f : A(z_0, 0, \delta) \to \mathbb{C}$ *e* $g : B_\delta(z_0) \to \mathbb{C}$ *funções holomorfas. Definimos* $h : A(z_0, 0, \delta) \to \mathbb{C}$ *por* $h(z) = f(z)g(z)$. *Se* z_0 *é um polo de ordem* 1 *de* f, *com resíduo* ζ, *e* $g(z_0) \neq 0$, *então* z_0 *é um polo de ordem* 1 *da função* h, *com resíduo* $\zeta \cdot g(z_0)$.

Demonstração: *Como* z_0 *é polo de ordem* 1 *da função* f, *com resíduo* ζ, *teremos:*

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \zeta$$

Observemos que:

$$(z-z_0)h(z) = (z-z_0)f(z)g(z) = \{(z-z_0)f(z)\}g(z).$$

Segue então:

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)h(z) = \zeta \cdot g(z_0) \neq 0$$

[4]Notações usuais de análise complexa. Ver [32].

Isso conclui a afirmação do lema. □

Este lema nos permite caracterizar as singularidades de C como singularidades da função B.

Corolário 8.3.3 *Em relação a função $B = B(z)$, vale::*

- *Os pontos $z_0 = \dfrac{iK'}{2\sqrt{r_1+r_2}}$ e $z_1 = \dfrac{2K+iK'}{2\sqrt{r_1+r_2}}$ são singularidades de B;*
- *z_0 é um polo de ordem 1, com resíduo $\frac{cr_1}{2k}$;*
- *z_1 é um polo de ordem 1, com resíduo $\frac{cr_1}{2k}$.*

Observação 8.3.5 *Notemos que estes são, exatamente, os polos da função C (Ou seja, os polos são os mesmos e os resíduos são os mesmos.)*

Devemos avaliar, agora, as possibilidades em relação as singularidades da função $z \mapsto k^2 sn^4(\omega(z))$. Calculando a função C nas singularidades da função $z \mapsto k^2 sn^4(\omega(z))$, obtemos:

$$C\left(\tfrac{iK'}{\sqrt{r_1+r_2}}\right) = cr_1\left(\sqrt{r_1+r_2}\right) sn(2(\sqrt{r_1+r_2})\tfrac{iK'}{r_1+r_2}) = cr_1(r_1+r_2)sn(2iK')$$

$$= cr_1(\sqrt{r_1+r_2})sn(0+2K'i) = 0$$

Fazendo o mesmo em relação a outra singularidade:

$$C\left(\tfrac{2K+2iK'}{\sqrt{r_1+r_2}}\right) = cr_1\left(\sqrt{r_1+r_2}\right) sn\left(2\left(\sqrt{r_1+r_2}\right)\tfrac{2K+2iK'}{\sqrt{r_1+r_2}}\right) =$$

$$= cr_1(\sqrt{r_1+r_2})sn(4K+2iK') = 0.$$

Portanto, o argumento, que foi usado na situação anterior, não pode ser utilizado aqui. Uma observação fundamental, que pode ser encontrada em ([17]), é que os zeros das funções elípticas de Jacobi são todos simples. Em relação a essa segunda situação, em que as singularidades de uma função são zeros da outra, temos:

Lema 8.3.7 *Suponhamos $f : A(z_0, 0, \delta) \to \mathbb{C}$ e $g : B_\delta(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorfas, sendo z_0 um polo de ordem 4 de f e z_0 um zero simples da função g. Definimos $h : A(z_0, 0, \delta) \to \mathbb{C}$, por $h(z) = f(z)g(z)$. Então z_0 é um polo de ordem 3 da função h.*

Demonstração: *Como z_0 é polo de ordem 4 de f, $\exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que:*

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^4 f(z) = \lambda$$

Sendo z_0 um zero de ordem 1 de g, podemos escrever:

$$g(z) = (z - z_0) g_1(z), \text{ com } g_1(z_0) \neq 0.$$

Segue, então, que:

$$(z - z_0)^3 h(z) = (z - z_0)^3 f(z) g(z) = (z - z_0)^3 f(z)(z - z_0) g_1(z)$$

$$= (z - z_0)^4 f(z) g_1(z).$$

Logo:

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^3 h(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^4 f(z) g_1(z) = \lambda g_1(z_0) \neq 0$$

Segue que z_0 é polo de ordem 3 de h. $\square$

Corolário 8.3.4 *Os pontos $z_0 = \dfrac{iK'}{\sqrt{r_1 + r_2}}$ e $z_1 = \dfrac{2K + iK'}{\sqrt{r_1 + r_2}}$ são polos de ordem 3 da função $B = B(z)$.*

Observação 8.3.6 *Devemos notar que estes mesmos pontos são também polos de ordem 4 da função $A = A(z)$.*

A situação, referente a "todas"as singularidades da função $B = B(z)$ é resumida no próximo corolário.

Corolário 8.3.5 *A função $B = B(z)$ possui as seguintes singularidades:*

- $z_1 = \dfrac{iK'}{2\sqrt{r_1 + r_2}}$ *e* $z_2 = \dfrac{2K + iK'}{2\sqrt{r_1 + r_2}}$.
  Estes são polos de ordem 1, com resíduos, respectivamente, dados por $\frac{cr_1}{2k}$ *e* $\frac{cr_1}{2k}$.

- $z_3 = \dfrac{iK'}{\sqrt{r_1 + r_2}}$ *e* $z_4 = \dfrac{2K + iK'}{\sqrt{r_1 + r_2}}$.
  Estes são polos de ordem 3 de B.

Com este último corolário, concluímos a análise das singularidades de B. Iremos voltar a análise da função $\mu_1 = \mu_1(z)$.

IV-Sobre as singularidades da função μ_1.
A função μ_1 é dada por $\mu_1(z) = A(z) + B(z) - C(z)$. Diante da análise feita, os candidatos a singularidades da função μ_1 são singularidades das funções A, B e C, que são descritas nos corolários 8.3.1, 8.3.5 e 8.3.2. Portanto, serão os pontos z_1, z_2, z_3 e z_4, dados no corolário 8.3.5. Observemos que z_1 e z_2 são singularidades das funções B e C. Ambas são polos de ordem 1 e possuem os mesmos resíduos. Ao fazermos "$B - C$ "na expressão de μ_1, estas singularidades são removidas. Ou seja, elas são singularidades removíveis da função μ_1. Por outro lado, os pontos z_3 e z_4 são polos das funções A e B. No entanto, são polos de ordem 4 da função A e polos de ordem 3 da função B. Logo, os pontos z_3 e z_4 são polos de ordem 4 da função μ_1. Essas informações estão na próxima proposição.

Proposição 8.3.1 *A função μ_1 possui as seguintes singularidades:*

$$z_1 = \frac{iK'}{\sqrt{r_1 + r_2}} \text{ e } z_2 = \frac{2K + iK'}{\sqrt{r_1 + r_2}}$$

Além disso, temos:

- *z_1 é polo de ordem 4 da função μ_1. O coeficiente associado, na série de Laurent de μ_1, centrada em z_1, é $b_4 = b$;*
- *z_2 é polo de ordem 4 da função μ_1. O coeficiente associado, na série de Laurent de μ_1, centrada em z_2, é $b_4 = b$;*

A seguir analisaremos "a contribuição"de μ_1 para o somatório, relacionado a expressão de Melnikov.

8.4 A Contribuição de μ_1 ao Somatório.

A soma que estamos interessados em analisar é dada por:

$$L(s) = \sum_{j=0}^{n-1} \mu(s + j \cdot T_2).$$

Essa expressão depende inteiramente da curva (m, n)-ressonante que estamos analisando. Se essa expressão não for identicamente nula, então a curva em questão não persiste sob a perturbação do sistema (conforme estabelecido na definição (6.1.1). A função μ é da forma $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Consideremos a parcela da soma de L, relacionada a função μ_1. Ou seja, definimos $L^1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$L^1(s) = \sum_{j=0}^{n-1} \mu_1(s + j \cdot T_2).$$

Nesta subseção, vamos mostrar como as informações da proposição 8.3.1, a respeito da função μ_1, nos permite concluir que a função L^1 não é constante[5]; em particular, L^1 não é identicamente nula.

Primeiramente, analisemos a periodicidade da função L^1.

Lema 8.4.1 *A função $L^1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possui períodos T_2 e $T_1 = \frac{4K}{\sqrt{r_1+r_2}}$.*
Demonstração: *A função $s \mapsto \mu_1(s)$ está associada a orbita periódica do sistema hamiltoniano X_{H_1}, que tem período T_1. Portanto, T_1 é um período de L^1. Analisemos a situação referente a T_2.*

Observemos que:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{m}{n} \Longrightarrow nT_2 = mT_1.$$

Diante disso, teremos:

$$\mu_1(s + nT_2) = \mu_1(s + mT_1) = \mu_1(s).$$

Portanto, na expressão de $L^1 = L^1(s)$, conseguimos:

$$L^1(s + T_2) = \sum_{j=0}^{n-1} \mu_1(s + jT_2 + T_2) = \sum_{j=0}^{n-1} \mu_1(s + (j+1)T_2) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \mu_1(s + jT_2) = \sum_{j=1}^{n-1} \mu_1(s + jT_2) + (\mu_1(s + nT_2)) =$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1} \mu_1(s + jT_2) = L^1(s).$$

Isso mostra que T_2 também é um período da função L^1. Isso conclui o lema. $\square$

Sendo T_1 e T_2 períodos de L^1, temos que qualquer combinação linear entre eles, com coeficientes em $\mathbb{Z}$, também será um período. Iremos focar na combinação que nos fornece o período $T_1 = \frac{4K}{\sqrt{r_1+r_2}}$.

Como a função μ_1 se estende analiticamente, ao plano complexo, a uma função meromorfa, e como se trata de uma soma finita, a função L^1 também se estende analiticamente a uma função meromorfa. Obtemos assim uma função:

[5]Sendo assim, restaria analisar a interferência do termo μ_2 nessa situação.

$$L^1(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \mu_1(z + j \cdot T_2).$$

Segue, das propriedades de μ_1 e do lema anterior, que essa extensão é duplamente periódica, com períodos:

$$\frac{4K}{\sqrt{r_1 + r_2}} \text{ e } \frac{4K'i}{\sqrt{r_1 + r_2}}.$$

Portanto, a extensão de $L^1 = L^1(z)$ é uma função elíptica. Analisemos possíveis singularidades para essa extensão $L^1 = L^1(z)$. Candidatos naturais seriam os pontos z_1 e z_2, descritos na proposição 8.3.1, por se tratarem de singularidades de da função $\mu_1 = \mu_1(z)$. O próximo lema irá nos dizer se o ponto z_1 é singularidade do j-ésimo termo da soma, $z \mapsto \mu_1(z + jT_2)$. Essas expressões estão relacionadas a curva (m, n)-ressonante.

Lema 8.4.2 *Se n é ímpar, então z_1 é singularidade de $z \mapsto \mu_1(z + jT_2)$ apenas se $j = 0$. Se n é par, então z_1 é singularidade de $z \mapsto \mu_1(z + jT_2)$ para $j = 0$ e $j = \frac{n}{2}$.*

Demonstração: *Utilizando a proposição 8.3.1, teremos que z_1 será singularidade de $z \mapsto \mu_1(z + jT_2)$ nas seguintes situações:*

1. $z_1 + j \cdot T_2 \in z_1 + \dfrac{4K}{\sqrt{r_1 + r_2}}\mathbb{Z} + \dfrac{4K'i}{\sqrt{r_1 + r_2}}\mathbb{Z}$;

2. $z_1 + j \cdot T_2 \in z_2 + \dfrac{4K}{\sqrt{r_1 + r_2}}\mathbb{Z} + \dfrac{4K'i}{\sqrt{r_1 + r_2}}\mathbb{Z}$;

Analisemos separadamente cada uma dessas situações.

1. *Observemos que essa situação ocorre se, e somente se, a seguinte condição é satisfeita:*

$$jT_2 \in \frac{4K}{\sqrt{r_1 + r_2}}\mathbb{Z}.$$

Mas como $T_2 = \dfrac{m}{n}\dfrac{4K}{\sqrt{r_1 + r_2}}$, *teremos:*

$$jT_2 \in \frac{4K}{\sqrt{r_1 + r_2}}\mathbb{Z} \Leftrightarrow jm \in n\mathbb{Z}.$$

Como $0 \leq j < n$ e m e n são primos entre si, essa equivalência ocorre apenas se $j = 0$. Observemos que essa análise independe de n ser par ou ímpar.

2. *Essa condição ocorre se, e somente se, a seguinte condição é satisfeita:*

$$jT_2 \in \frac{1}{2}\frac{4K}{\sqrt{r_1+r_2}} + \frac{4K}{\sqrt{r_1+r_2}}\mathbb{Z}.$$

Uma vez que vale a seguinte relação:

$$z_2 - z_1 = \frac{2K}{\sqrt{r_1+r_2}} = \frac{1}{2}\frac{4K}{\sqrt{r_1+r_2}}.$$

Utilizando que $T_2 = \frac{m}{n}\frac{4K}{\sqrt{r_1+r_2}}$, *obtemos que a condição acima é equivalente a:*

$$j\frac{m}{n} \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}.$$

Observemos que essa condição não é satisfeita para $j = 0$. *Caso ela seja satisfeita, deverá existir* $p_j \in \mathbb{Z}$, *tal que:*

$$j\frac{m}{n} = \frac{1}{2} + p_j = \frac{1+2p_j}{2} \Longrightarrow 2jm = n(1+2p_j).$$

Mas sendo m *e* n *primos entre si, tem de existir* $\lambda_j \in \mathbb{N}$ *tal que* $2j = \lambda_j n$. *Observemos que:*

$$j < n \Longrightarrow \lambda_j n = 2j < 2n \therefore \lambda_j < 2.$$

Assim, $\lambda_j = 0$ *ou* $\lambda_j = 1$. *O primeiro caso não nos interessa. Logo,* $\lambda_j = 1$, *ou seja,* $j = \frac{n}{2}$. *Essa condição, evidentemente, ocorre apenas se* n *for um número par.*

Concluímos, assim, as afirmações do lema. $\square$

A próxima proposição mostrará que a função elíptica $L^1 = L^1(z)$ possui z_1 como uma singularidade.

Proposição 8.4.1 *A extensão analítica de* $L^1(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \mu_1(z + jT_2)$ *possui um polo de ordem 4 em* z_1. *Além disso, se* n *é par, então o coeficiente na série de Laurent associado é dado por* $2b$. *Se* n *é ímpar, então este coeficiente é* b *(onde* b *é dado por (7.4)).*

Demonstração: *Faremos, separadamente, essa análise nos casos* n *par e* n *ímpar.*

- *n ímpar;*
  Se n é ímpar, então, de acordo com o lema anterior, z_1 será singularidade de $z \mapsto \mu_1(z + jT_2)$ apenas para $j = 0$. Logo:

$$L^1(z_1 + u) = \sum_{j=0}^{n-1} \mu_1(z_1 + u + jT_2) = \mu_1(z_1 + u) + \sum_{j=1}^{n-1} \mu_1(z_1 + u + jT_2).$$

  Utilizando a proposição (8.3.1) e o lema anterior, obtemos:

$$L^1(z_1 + u) = \frac{b}{u^4} + \frac{b_3}{u^3} + \frac{b_2}{u^2} + \frac{b_1}{u} + ...$$

  Como $b \neq 0$, segue que z_1 é um polo de ordem 4 da função $L^1 = L^1(z)$.

- *n par;*
  Para o caso n par, z_1 será singularidade de $z \mapsto \mu_1(z + jT_2)$ nos casos $j = 0$ e $j = \frac{n}{2}$. Logo:

$$L^1(z_1 + u) = \sum_{j=0}^{n-1} \mu_1(z_1 + u + jT_2) = \mu_1(z_1 + u) + \mu_1(z_1 + u + \frac{n}{2}T_2) +$$

$$\sum_{j=1, j\neq\frac{n}{2}}^{n-1} \mu_1(z_1 + u + jT_2).$$

  Pelo lema anterior, existem p_1, $p_2 \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$z_1 + \frac{n}{2}T_2 = z_2 + \frac{4Kp_1}{\sqrt{r_1 + r_2}} + \frac{4p_2K'i}{\sqrt{r_1 + r_2}}.$$

  Assim:

$$\mu_1(z_1 + u + \frac{n}{2}T_2) = \mu_1(z_2 + \frac{4Kp_1}{\sqrt{r_1 + r_2}} + \frac{4p_2K'i}{\sqrt{r_1 + r_2}} + u) = \mu_1(z_2 + u),$$

  onde a última igualdade se deve a periodicidade da função μ_1. Obtemos, através da soma anterior, então:

$$L^1(z_1 + u) = \mu_1(z_1 + u) + \mu_1(z_2 + u) + \sum_{j=1, j\neq\frac{n}{2}}^{n-1} \mu_1(z_1 + u + jT_2).$$

  Utilizando a proposição (8.3.1) e o lema anterior, obtemos:

$$L^1(z_1+u) = \frac{b}{u^4} + \frac{b}{u^4} + \sum_{j=1}^{3} \frac{c_j}{u^j} + ...$$

Portanto:

$$L^1(z_1+u) = \frac{2b}{u^4} + \sum_{j=1}^{3} \frac{c_j}{u^j} + ...$$

Como $b \neq 0$, segue que z_1 é polo de ordem 4 de $L^1 = L^1(z)$.

Segue o resultado. □

Com essas informações, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 8.4.1 *A função $L^1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não é uma função constante. Em particular, não é identicamente nula.*
Demonstração: *Segue do fato de que sua extensão analítica ao plano complexo é uma função elíptica com um polo de ordem 4, conforme descrito no lema anterior.* □

Diante disso, pela construção que vem sendo feita, é conveniente colocar o resultado do corolário anterior em termos das coordenadas $(x, y) \in \Omega$ da seção.

Corolário 8.4.2 *Existe uma órbita $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ de ψ_0, sobre a curva (m, n)-ressonante, Γ, tal que:*

$$\sum_{i=0}^{n-1} Q(x_i, y_i) \neq 0$$

Além disso, podemos supor, sem perda de generalidade, que $Q(x_i, y_i) \neq 0$, $\forall i$.

Na sequência do texto, mostraremos como o último corolário e as informações a respeito das funções[6] $Q = Q(x, y)$ e $R = R(x, y)$ nos permitem concluir que a função $L = L(s)$ não é identicamente nula.

[6]Ver a observação 7.5.2.

8.5 Conclusão a respeito da destruição de curvas invariantes

Pela a análise que vem sendo feita, para concluir que a curva Γ não persiste sob a perturbação, que estamos analisando, é suficiente mostrar que:

$$\text{Existe uma órbita } (x_j, y_j) \text{ de } \psi_0, \text{ tal que } \sum_{j=0}^{n-1} A_1(x_j, y_j) \neq 0.$$

Sendo $A_1(x, y) = Q(x, y) + R(x, y)$, o corolário 8.4.2 nos fornece uma órbita candidata a verificar esta desigualdade. **Fixaremos**, então, tal órbita $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq n-1}$. A análise é baseada na observação 7.5.2. Em relação a forma quadrática Q, temos uma outra observação importante.

Observação 8.5.1 *A forma quadrática Q possui zeros. No que segue, como os pontos da órbita fixada não são zeros de Q, na análise que faremos, podemos supor que Q não se anula. Assim, se $Z \subseteq \mathbb{R}^2$ representa os pontos que anula Q, trabalharemos no aberto $\mathbb{R}^2 \setminus Z$.*

Lema 8.5.1 *Vale o seguinte limite*[7]*:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mid R(x, y) \mid}{\mid Q(x, y) \mid} = 0$$

Demonstração: *Observemos que:*

$$\frac{\mid R(x, y) \mid}{\parallel (x, y) \parallel^2} = \frac{\mid R(x, y) \mid}{\mid Q(x, y) \mid} \frac{\mid Q(x, y) \mid}{\parallel (x, y) \parallel^2}.$$

Ao fazermos $(x, y) \to (0, 0)$, na igualdade acima, o termo da esquerda vai a zero e o termo $\frac{|Q(x,y)|}{\|(x,y)\|^2}$ é limitado. Segue que $\frac{|R(x,y)|}{|Q(x,y)|}$ tende a zero, quando $(x, y) \to (0, 0)$. $\square$

Com as informações deste lema, temos o seguinte resultado.

Lema 8.5.2 *Dado $\epsilon_1 \in (0, 1)$, se a curva Γ estiver suficientemente próxima de $(0, 0)$, então vale a seguinte estimativa para a soma da função A_1 sobre a órbita $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq n-1}$, fixada acima:*

$$(1 - \epsilon_1) \sum_{i=0}^{n-1} Q(x_i, y_i) < \sum_{i=0}^{n-1} A_1(x_i, y_i) < (1 + \epsilon_1) \sum_{i=0}^{n-1} Q(x_i, y_i).$$

[7] Tendo em vista a observação anterior.

Demonstração: *Pelo lema anterior, dado* $\epsilon_1 \in (0,1)$*, existe* $\delta > 0$*, tal que:*

$$\| (x,y) \| < \delta \Longrightarrow -\epsilon_1 \mid Q(x,y) \mid < R(x,y) < \epsilon_1 \mid Q(x,y) \mid.$$

Podemos assumir que a curva (m,n)*-ressonante está contida*[8] *na bola* $B_\delta(0,0)$*. Portanto, esta desigualdade valerá sobre os pontos da órbita* $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq n-1}$*. Mas como* $A_1(x,y) = Q(x,y) + R(x,y)$*, teremos:*

$$\sum_i A_1(x_i, y_i) = \sum_i \{Q(x_i, y_i) + R(x_i, y_i)\} > \sum_i \{Q(x_i, y_i) - \epsilon_1 \mid Q(x_i, y_i) \mid\}.$$

O termo geral do somatório do lado direito desta desigualdade pode ser analisado separadamente, segundo o sinal de $\mid Q(x_i, y_i) \mid$*. Indicaremos índice* j *para o caso de* Q *ser positivo e* k *para ocaso de* Q *ser negativo. Logo:*

$$\begin{aligned}
&\sum_i A_1(x_i, y_i) > \sum_j \{Q(x_j, y_j) - \epsilon_1 Q(x_j, y_j)\} + \sum_k \{Q(x_k, y_k) + \epsilon_1 Q(x_k, y_k)\} = \\
&= (1 - \epsilon_1) \sum_j Q(x_j, y_j) + (1 + \epsilon_1) \sum_k Q(x_k, y_k) > \\
&> (1 - \epsilon_1) \sum_j Q(x_j, y_j) + (1 - \epsilon_1) \sum_k Q(x_k, y_k) = \\
&= (1 - \epsilon_1) \sum_{i=0}^{n-1} Q(x_i, y_i).
\end{aligned}$$

Desta forma, conseguimos uma das desigualdades afirmadas no lema. O processo de obtenção da outra desigualdade é, inteiramente, análogo. Segue o resultado. □

Por meio desse último lema, obtemos o seguinte resultado fundamental.

Proposição 8.5.1 *Em relação a órbita* $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq n-1}$*, temos:*

$$\sum_{i=0}^{n-1} A_1(x_i, y_i) \neq 0.$$

Portanto, a curva Γ*, que é* (m,n)*-ressonante, não persiste sob a perturbação.*
Demonstração: *Segue do corolário 8.4.2 e do lema anterior.* □

[8] Ver a observação 7.1.1.

Diante desse corolário, obtemos:

Demonstração do Teorema 1.1.3: *A partir do último corolário, temos que para toda curva Γ, que é (m,n)-ressonante e está suficientemente próxima de $(0,0) \in \Omega_0$, existe uma órbita $(x_i, y_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ da aplicação ψ_0, em Γ, tal que:*

$$\sum_{i=0}^{n-1} A_1(x_i, y_i) \neq 0$$

Segue da Proposição da discussão feita no Capítulo 7, que a curva Γ não persiste sob a perturbação $\psi_\epsilon = \psi_0 + o(\epsilon)$. A não persistência dessas curvas (m,n)-ressonantes, arbitrariamente próximas ao ponto fixo $(0,0) \in \Omega_0$, fazem surgir regiões de instabilidade, para ψ_ϵ, ϵ pequeno, se acumulando em $(0,0) \in \Omega_\epsilon$. Analisando-se esta situação ao longo da órbita periódica Γ_E, concluímos a demonstração do Teorema 1.1.3. $\square$

Em relação ao Corolário 1.1.1, temos:

Demonstração do Corolário 1.1.1: *Quando uma curva (m,n)-ressoante é destruída, surge uma região anular invariante por ψ_ϵ, sem curvas invariantes em seu interior, conjugada a uma aplicação twist, para ϵ suficientemente pequeno (ou seja, regiões de instabilidade). A demonstração deste corolário segue do resultado de [1]. Veja a Observação 2.4.3.* $\square$

Na próxima seção, iremos discutir a dependência desses resultados em relação ao nível de energia.

8.6 Algumas Observações Finais

Diante da última seção, concluímos as demonstrações dos resultados enunciados no Capítulo 1. É importante destacar que as hipóteses feitas nos Teoremas 1.1.1, 1.1.2 e 1.1.3 são hipóteses sobre níveis de energia do sistema hamiltoniano definido em (1.1). De fato, para cada nível $E > 0$, no Lema 1.1.1, fixamos uma órbita periódica Γ_E de X_{H_ϵ}, para todo ϵ, com energia E e período $T = T(E)$. Se $\alpha \cdot T(E)$ não for múltiplo inteiro de 2π, então, para $|\epsilon|$ pequeno, Γ_E é uma órbita periódica de X_{H_ϵ}, que é elíptica em seu nível de energia.

Excluindo-se mais alguns níveis de energia (isso é feito impondo-se $E \in J$), conseguimos que a Forma Normal de Birkhoff, para esta órbita Γ_E, esteja definida, para $|\epsilon|$ pequeno, e, dessa forma, o primeiro invariante de Birkhoff, para o caso $\epsilon = 0$, pode ser visto como uma função da energia. Portanto, temos definida a função $I_B : J \to \mathbb{R}$, que associa a cada nível E, o primeiro invariante de Birkhoff, para o caso $\epsilon = 0$, $I_B(E)$. Se $I_B(E) \neq 0$, então o primeiro invariante de Γ_E, órbita de X_{H_ϵ}, é não nulo, para $|\epsilon|$ pequeno. Em

consequência, obtemos toros invariantes pelo fluxo do campo X_{H_ϵ}, com energia E, que se acumulam em Γ_E. Esse é o conteúdo do Teorema 1.1.2. Pela Proposição 5.3.1, temos que $\lim_{E\to 0} I_B(E) = -\infty$, devido a influência da singularidade sela-centro, localizada no nível zero de energia. Com isso, obtemos "muitos níveis de energia "próximos ao nível zero, satisfazendo as hipóteses dos Teoremas 1.1.1 e 1.1.2.

A hipótese 2 do teorema 1.1.3 também pode ser vista como uma condição sobre o nível de energia $E \in J$. De fato, podemos escrevê-la como:

$$\int_0^{T(E)} x_2^2(s,E)\sin\{2\alpha(T(E)-s)\}ds \neq 0.$$

A partir dela, mostramos a existência de zonas de instabilidade, que se acumulam na órbita elíptica Γ_E de X_{H_ϵ}, para $|\epsilon|$ pequeno. Portanto, em relação ao sistema hamiltoniano definido em (1.1), temos que os resultados apresentados dependem de condições sobre o nível de energia e que existem níveis de energia, próximos ao nível zero, que satisfazem nossas condições.

A existência da órbita periódica hiperbólica Γ'_E nos remete a uma situação interessante, ainda a ser explorada, descrita em nos trabalhos [12], [13] e [11]. De fato, em [13], mostra-se um resultado de entropia topológica positiva, para sistemas hamiltonianos no $\mathbb{R}^4$, com uma singularidade sela-centro, no nível zero de energia, satisfazendo uma condição de convexidade neste nível de energia (ver [30] para uma definição de convexidade). A partir de um sistema de folheação transversal (ver [11] e [12] para uma definição) e por meio da análise próxima a uma órbita hiperbólica, que, no sistema definido em (1.1), coincide com a órbita Γ'_E, mostra-se o resultado de entropia topológica positiva. Portanto, se estabelecermos um resultado de convexidade para o sistema (1.1), válido para $|\epsilon|$ pequeno, poderíamos obter uma figura com as duas órbitas, Γ_E e Γ'_E linkadas, com o comportamento próximo a Γ'_E descrito em [13], e o comportamento próximo a órbita elíptica Γ_E, descrito neste texto. Há um método para demonstrar esta condição de convexidade. Tal método, assim como as definições e propriedades envolvidas, são descritas em [30] (ver também [15]).

Uma outra situação possível, a ser explorada, consiste numa descrição mais detalhada da dinâmica das aplicações de Poincaré nas regiões de instabilidade, dadas pelo Teorema 1.1.3. De fato, o comportamento genérico de difeomorfismos analíticos do plano, que preservam área, tendo um ponto fixo elíptico, foi estudado por Zehnder, em [34] (ver também [35]). Poderíamos nos questionar se as zonas de instabilidade, descritas no Teorema 1.1.3, se comportam como na situação genérica de Zehnder ou o quanto se aproximam dessa situação genérica. Trata-se de uma situação natural a ser explorada.

Apêndice A

As derivadas do campo f_1.

Neste apêndice, trataremos de alguns cálculos envolvendo as derivadas do fluxo do campo X_{H_ϵ}. Estamos admitindo o contexto do início da seção 8. O objetivo é demonstrar as igualdades da proposição 7.6.1. Alguns fatos sobre propriedades de fluxos de equações diferenciais ordinárias, assim como propriedades da derivada do fluxo em relação a parâmetros e condições iniciais podem ser consultados em [33].

A.1 Reescrevendo as Transformações de Poincaré

Temos, conforme foi descrito no texto, a família de transformações de Poincaré, nas coordenadas da seção, $\psi_\epsilon : \Omega \to \Omega$, com $f_\epsilon = \psi_\epsilon \circ \psi_0^{-1}$. Vimos, também, que as derivadas de ordem 2 do termo de Melnikov, descritas nas coordenadas da seção (a função A_1), podem ser escritas em termos das derivadas de $f_1 = \frac{\partial}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0} f_\epsilon$ (proposição 7.5.2.) Reescreveremos as transformações ψ_ϵ de maneira conveniente, de modo que possamos relacionar as derivadas do campo f_1 com o fluxo Hamiltoniano do campo X_{H_ϵ}. Para isso, vamos reescrever as transformações de Poincaré em termos dos correspondentes fluxos.

Analisaremos as transformações como aplicações em $\mathbb{R}^4$ e, em seguida, passaremos para as coordenadas da seção. Consideremos:

- $T_\epsilon = T + R_\epsilon$; onde T_ϵ é a aplicação tempo de retorno para o sistema X_{H_ϵ}, T é o período da órbita periódica. Assim[1], R_ϵ é a aplicação que nos dá a diferença entre o tempo de retorno e o período da órbita.

[1]Por abuso de notação, usaremos, apenas neste apêndice, R_ϵ para representar a aplicação que nos dá a diferença do tempo de retorno em relação ao período.

- $T_0 = T + R_0$; onde T_0 é a aplicação tempo de retorno para o sistema X_{H_0}, T é o período da órbita e R_0 é a aplicação que indica a diferença entre o tempo de retorno e o período da órbita periódica.

- Essas funções estão definidas sobre a seção e são diferenciáveis.

Se $z \in \Sigma_E^+$, então teremos as aplicações de Poincaré:

$$\varphi_\epsilon(z) = \phi^{H_\epsilon}(T_\epsilon(z), z) \text{ e } \varphi_0(z) = \phi^{H_0}(T_0(z), z).$$

Assim, φ_ϵ e φ_0 representam ψ_ϵ e ψ_0 escritas em termos dos seus respectivos fluxos Hamiltonianos no $\mathbb{R}^4$.

Faremos expansões do fluxo, em relação a varável tempo e em relação a variável posição. Assim, seguiremos por partes.

1. Em relação a variável t, em $t = T$.

$$\phi^{H_\epsilon}(t + T, z) = \phi^{H_\epsilon}(T, z) + tX_{H_\epsilon}(\phi^{H_\epsilon}(z)) + r_{\epsilon,1}(t, z).$$

Fazendo $t = R_\epsilon(z)$, obtemos:

$$\varphi_\epsilon(z) = \phi^{H_\epsilon}(T, z) + R_\epsilon(z)X_{H_\epsilon}(\phi_T^{H_\epsilon}(z)) + r_{\epsilon,1}(z).$$

Procedendo da mesma forma para o caso $\epsilon = 0$, conseguimos:

$$\varphi_0(z) = \phi^{H_0}(T, z) + R_0(z)X_{H_0}(\phi_T^{H_0}(z)) + r_{0,1}(z).$$

Nessas expressões, faremos as expansões dos termos $\phi_T^{H_\epsilon}$, $\phi_T^{H_0}$, $X_{H_\epsilon} \circ \phi_T^{H_\epsilon}$ e $X_{H_0} \circ \phi_T^{H_0}$ em $z = z_0$, onde z_0 é o ponto periódico.

2. $\phi_T^{H_\epsilon}(z)$ e $\phi_T^{H_0}(z)$

Teremos:

$$\phi_T^{H_\epsilon}(z) = \phi_T^{H_\epsilon}(z_0) + d_{z_0}\phi_{\bar{T}}^{H_\epsilon}(z - z_0) + \tilde{r}_{1,\epsilon}(z).$$

Da mesma forma para $\epsilon = 0$:

$$\phi_T^{H_0}(z) = \phi_T^{H_0}(z_0) + d_{z_0}\phi_{\bar{T}}^{H_0}(z - z_0) + \tilde{r}_{1,0}(z).$$

3. $X_{H_\epsilon} \circ \phi_T^{H_\epsilon}(z)$ e $X_{H_0} \circ \phi_T^{H_0}(z)$

   Teremos:

   $X_{H_\epsilon}(\phi_T^{H_\epsilon}(z)) = X_{H_\epsilon}(\phi_T^{H_\epsilon}(z_0)) + d_{z_0}(X_{H_\epsilon} \circ \phi_T^{H_\epsilon})(z - z_0) + s_{1,\epsilon}(z) =$

   $= X_{H_0}(\phi_T^{H_\epsilon}(z_0)) + d_{z_0}(X_{H_\epsilon} \circ \phi_T^{H_\epsilon})(z - z_0) + s_{1,\epsilon}(z).$

   Procedendo de maneira análoga para o caso $\epsilon = 0$, obtemos:

$$X_{H_0}(\phi_T^{H_0}(z)) = X_{H_0}(\phi_T^{H_0}(z_0)) + d_{z_0}(X_{H_0} \circ \phi_T^{H_0})(z - z_0) + s_{1,0}(z).$$

Essas expressões nos permitem escrever:

$\varphi_\epsilon(z) = z_0 + d_{z_0}\phi_T^{H_\epsilon}(z - z_0)+$

$+R_\epsilon(z)\{X_{H_0}(z_0) + d_{z_0}X_{H_0}(d_{z_0}\phi_T^{H_\epsilon}(z - z_0))\} + Q_\epsilon(z).$

e

$\varphi_0(z) = z_0 + d_{z_0}\phi_T^{H_0}(z - z_0)+$

$+R_0(z)\{X_{H_0}(z_0) + d_{z_0}X_{H_0}(d_{z_0}\phi_T^{H_0}(z - z_0))\} + Q_0(z).$

Onde:

$$\begin{cases} Q_\epsilon(z) = \tilde{r}_{1,\epsilon}(z) + r_{1,\epsilon}(z) + R_\epsilon(z)s_{1,\epsilon}(z), \\ Q_0(z) = \tilde{r}_{1,0}(z) + r_{1,0}(z) + R_0(z)s_{1,0}(z). \end{cases}$$

Portanto, conseguimos:

$\varphi_\epsilon(z) - \varphi_0(z) = (d_{z_0}\phi_T^{H_\epsilon} - d_{z_0}\phi_T^{H_0})(z - z_0) + (R_\epsilon(z) - R_0(z))X_{H_0}(z_0)+$

$+R_\epsilon(z)d_{z_0}X_{H_0}(d_{z_0}\phi_T^{H_\epsilon}(z - z_0)) - R_0(z)d_{z_0}X_{H_0}(d_{z_0}\phi_T^{H_0}(z - z_0))+$

$+Q_\epsilon(z) - Q_0(z) \doteq G_\epsilon(z)$ (definição de G_ϵ).

Segue que:

$$\varphi_\epsilon(z) = \varphi_0(z) + G_\epsilon(z).$$

Vamos, agora, relacionar esta igualdade com as expressões das transformações de Poincaré, quando escritas no sistema de coordenadas $(x, y) \in \Omega$ da seção. Observemos que a seção pode ser dada por:

$$\bar{z} : \Omega \to \mathbb{R}^4$$

$$(x, y) \mapsto (x, 0, y, \bar{y}(x, y)),$$

onde $\bar{y}$ é dado pela igualdade (3.5).

Teremos em coordenadas:

$$\psi_\epsilon = \Pi \circ \varphi_\epsilon \circ \bar{z},$$

onde $\Pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, é a projeção $\Pi(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1, y_1)$. Segue que:

$$\psi_\epsilon(x, y) = \Pi(\varphi_\epsilon(\bar{z}(x, y))) = \Pi(\varphi_0(\bar{z}(x, y)) + \Pi(G_\epsilon(\bar{z}(x, y))) =$$

$$= \psi_0(x, y) + \Pi(G_\epsilon(\bar{z}(x, y))).$$

Baseado nessa igualdade, definimos $\bar{G}_\epsilon(x, y) = \Pi(G_\epsilon(\bar{z}(x, y)))$. Assim:

$$\psi_\epsilon(x, y) = \psi_0(x, y) + \bar{G}_\epsilon(x, y).$$

O objetivo, conforme foi observado, seria relacionar as derivadas de f_1 com as propriedades do campo X_{H_ϵ}. Observemos que quando escrevemos $\psi_\epsilon(x, y) = \psi_0(x, y) + \bar{G}_\epsilon(x, y)$, as propriedades de X_{H_ϵ} aparecem explicitamente no termo $\bar{G}_\epsilon$, através de $G_\epsilon = G_\epsilon(z)$. A próxima proposição relaciona $d_{(0,0)} f_1$ com $\bar{G}_\epsilon$.

Proposição A.1.1 *Vale a seguinte igualdade:*

$$df_1(0, 0) = d\bar{G}_1(0, 0) \circ d\psi_0^{-1}(0, 0) \tag{A.1}$$

Demonstração: *Sendo $\psi_\epsilon = f_\epsilon \circ \psi_0$, derivando esta igualdade com respeito a variável ϵ e calculando em $\epsilon = 0$, obtemos:*

$$\psi_1 = f_1 \circ \psi_0.$$

Por outro lado, temos que $\psi_\epsilon = \psi_0 + \bar{G}_\epsilon$. Derivando com respeito a variável ϵ e calculando em $\epsilon = 0$, obtemos:

$$\psi_1 = \bar{G}_1.$$

Igualando essas duas igualdades, obtemos: $\bar{G}_1 = f_1 \circ \psi_0$. Derivando essa igualdade e calculando em $(x, y) = (0, 0)$, conseguimos: $df_1(0, 0) = d\bar{G}_1(0, 0) \circ d\psi_0^{-1}(0, 0)$. Segue o resultado. $\square$

Gostaríamos de calcular $d_{(0,0)}f_1$ por meio desta igualdade. O cálculo de $(d_{(0,0)}\psi_0)^{-1}$ é, relativamente, simples. Vamos analisar melhor a expressão de $\bar{G}_\epsilon$, visando o cálculo de $d_{(0,0)}\bar{G}_1$.

Teremos:

$$\bar{G}_\epsilon(x,y) = \Pi(G_\epsilon(\bar{z}(x,y))).$$

Sendo que:

$$G_\epsilon(z) = (d_{z_0}\phi_T^{H_\epsilon} - d_{z_0}\phi_T^{H_0})(z-z_0) + (R_\epsilon(z) - R_0(z))X_{H_0}(z_0)+$$

$$+R_\epsilon(z)d_{z_0}X_{H_0}(d_{z_0}\phi_T^{H_\epsilon}(z-z_0)) - R_0(z)d_{z_0}X_{H_0}(d_{z_0}\phi_T^{H_0}(z-z_0))+$$

$$+Q_\epsilon(z) - Q_0(z).$$

Nessa igualdade, objetivando cálculos que virão a frente, indicaremos as transformações lineares, que aparecem nessa igualdade, por suas respectivas representações matriciais. Indicaremos $d_{z_0}\phi_T^{H_\epsilon} = \Phi_\epsilon(T)$ e $C = d_{z_0}X_{H_0}$. Tendo em vista que a aplicação Π, que é uma projeção, também está em sua forma matricial. Assim, teremos:

$$\bar{G}_\epsilon(x,y) = \Pi(\Phi_\epsilon(T)-\Phi_0(T))(\bar{z}(x,y)-z_0)+R_\epsilon(\bar{z}(x,y))\Pi C\Phi_\epsilon(T)(\bar{z}(x,y)-z_0) - R_0(\bar{z}(x,y))\Pi C\Phi_0(T)(\bar{z}(x,y)-z_0) + \Pi(Q_\epsilon(\bar{z}(x,y)) - Q_0(\bar{z}(x,y)).$$

Derivando com respeito a ϵ, obtemos:

$$\bar{G}_1(x,y) = \Pi\Phi_1(T)(\bar{z}(x,y)-z_0) + R_1(\bar{z}(x,y))\Pi C\Phi_0(T)(\bar{z}(x,y)-z_0)+$$

$$+R_0(\bar{z}(x,y))\Pi C\Phi_1(T)(\bar{z}(x,y)-z_0) + \Pi(Q_1(\bar{z}(x,y))).$$

O próximo lema irá analisar o último termo:

Lema A.1.1 *Vale a igualdade:*

$$d_{(0,0)}(\Pi \circ Q_1 \circ \bar{z}) = 0.$$

Demonstração: *Segue da definição da função Q_1.* $\square$

Como nosso objetivo é calcular $d\bar{G}_1(0,0)$, desprezaremos o último termo $\Pi(Q_1(\bar{z}(x,y)))$, uma vez que esse termo, pelo lema anterior, não irá contribuir com $d_{(0,0)}\bar{G}_1$. Portanto:

$$\bar{G}_1(x,y) = \Pi\Phi_1(T)(\bar{z}(x,y)-z_0) + R_1(\bar{z}(x,y))\Pi C\Phi_0(T)(\bar{z}(x,y)-z_0)+$$

$+R_0(\bar{z}(x,y))\Pi C\Phi_1(T)(\bar{z}(x,y)-z_0)$.

Nessa expressão, conforme foi mencionado, temos as matrizes $\Phi_\epsilon(T)$, que consiste na representação matricial de $d_{z_0}\phi_t^{H_\epsilon}$, em $t=T$. A matriz C consiste na representação de $d_{z_0}X_{H_0}$. Devemos notar que $d_{z_0}X_{H_0}$ depende apenas de coeficientes da Hamiltoniana H_0. Assim, num certo sentido, no nosso contexto, é uma matriz constante. De fato, como $X_{H_0}(x_1,x_2,y_1,y_2)=(y_1,y_2,-V_1'(x_1),-V_2'(x_2))$ e $z_0=(0,0,0,y_2^E)$, temos:

$$d_{z_0}X_{H_0}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\alpha^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -a_2 & 0 & 0\end{bmatrix}=C.$$

A projeção $\Pi:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^2$, $\Pi(x_1,x_2,y_1,y_2)=(x_1,y_1)$ é indicada, em notação matricial, pela matriz Π. Assim:

$$\Pi=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Vamos avaliar a matriz $\Phi_\epsilon(T)$.

A.2 As Matrizes $\Phi_\epsilon(t)$

A transformação linear $d_{z_0}\phi_T^{H_\epsilon}$ é a solução da seguinte equação diferencial matricial:

$$\begin{cases}X'=A_\epsilon(t)X,\\ X(0)=Id.\end{cases}\tag{A.2}$$

Onde $A_\epsilon(t)=dX_{H_\epsilon}(\phi_t^{H_\epsilon}(z_0))$. Indicando a órbita periódica de z_0 por $(0,x_2(t),0,y_2(t))$, teremos então:

$$A_\epsilon(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\alpha^2-2\epsilon x_2^2(t) & 0 & 0 & 0\\ 0 & -a_2-3b_2x_2^2(t) & 0 & 0\end{bmatrix}.\tag{A.3}$$

Estamos indicando a solução da equação (A.2) acima por $\Phi_\epsilon(t)$. Assim, $\Phi_\epsilon(T)=d_{z_0}\phi_T^{H_\epsilon}$.

Temos que as entradas de $A_\epsilon(t)$ que dependem de ϵ e t serão indicadas por:

$$\begin{cases}u_\epsilon(t)=-\alpha^2-2\epsilon x_2^2(t),\\ v(t)=-a_2-3b_2x_2^2(t).\end{cases}$$

Com isso, podemos reescrever a matriz $A_\epsilon(t)$ de forma simplificada:

$$A_\epsilon(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ u_\epsilon(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v(t) & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Representaremos esta matriz por blocos de matrizes 2×2. Logo:

$$A_\epsilon(t) = \begin{bmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ U_\epsilon(t) & \mathbb{O} \end{bmatrix}.$$

Indiquemos, também, a matriz $\Phi_\epsilon(t)$, solução de (A.2), por blocos de matrizes 2×2. Logo:

$$\Phi_\epsilon(t) = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}.$$

Omitindo a dependência das variáveis ϵ e t nos blocos 2×2. Como $\Phi_\epsilon(t)$ é solução de (A.2), teremos:

$$\begin{bmatrix} X' & Y' \\ Z' & W' \end{bmatrix} = \Phi'_\epsilon(t) = A_\epsilon(t)\Phi_\epsilon(t) = \begin{bmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ U_\epsilon(t) & \mathbb{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Z & W \\ U_\epsilon(t)X & U_\epsilon(t)Y \end{bmatrix}.$$

Portanto, tendo em vista essas igualdades e as condições iniciais, o sistema se torna:

- $X' = Z$, $X(0) = \mathbb{I}$.
- $Y' = W$, $Y(0) = \mathbb{O}$.
- $Z' = U_\epsilon(t)X$, $Z(0) = \mathbb{O}$.
- $W' = U_\epsilon(t)Y$, $W(0) = \mathbb{I}$.

Essas equações se reduzem às seguintes equações diferenciais matriciais de ordem 2:

$$\begin{cases} X'' = U_\epsilon(t)X, \\ X(0) = \mathbb{I}, \\ X'(0) = \mathbb{O}. \end{cases} \tag{A.4}$$

Da mesma forma em Y:

$$\begin{cases} Y'' = U_\epsilon(t)Y \\ Y(0) = \mathbb{O}, \\ Y'(0) = \mathbb{I}. \end{cases} \tag{A.5}$$

Analisemos, separadamente, cada uma das equações (A.4) e (A.5).

1. Equação (A.4)
   Vamos supor que a solução da equação (A.4) seja da forma:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) \\ z(t) & w(t) \end{bmatrix}.$$

   Teremos, então:

$$\begin{bmatrix} x'' & y'' \\ z'' & z'' \end{bmatrix} = X'' = U_\epsilon(t)X = \begin{bmatrix} u_\epsilon(t) & 0 \\ 0 & v(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} u_\epsilon(t)x & u_\epsilon(t)y \\ v(t)z & v(t)w \end{bmatrix}.$$

   Por esta igualdade e pelas condições iniciais, podemos reduzir às equações unidimensionais de segunda ordem:

   - $x'' = u_\epsilon(t)x$, $x(0) = 1$ e $x'(0) = 0$;
   - $y'' = u_\epsilon(t)y$, $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0 \Longrightarrow y \equiv 0$.
   - $z'' = v(t)z$, $z(0) = 0$ e $z'(0) = 0 \Longrightarrow z \equiv 0$.
   - $w'' = v(t)w$, $w(0) = 1$ e $w'(0) = 0$.

   Concluímos, então, que a matriz, 2×2, $X = X(t)$ é da forma:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & 0 \\ 0 & w_1(t) \end{bmatrix}.$$

   Onde:

$$\begin{cases} x_1'' = u_\epsilon(t)x_1, \\ x_1(0) = 1 \\ x_1'(0) = 0. \end{cases} \tag{A.6}$$

E, da mesma forma para $w_1 = w_1(t)$:

$$\begin{cases} w_1'' = v(t)w_1, \\ w_1(0) = 1 \\ w_1'(0) = 0. \end{cases} \tag{A.7}$$

Passemos para a equação (A.5)

2. Equação (A.5)

Utilizando a mesma ideia para a equação (A.5), escreveremos:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

Segue que a matriz, 2×2, $Y = Y(t)$ satisfaz:

$$\begin{bmatrix} x'' & y'' \\ z'' & z'' \end{bmatrix} = Y'' = U_\epsilon(y)Y = \begin{bmatrix} u_\epsilon(t) & 0 \\ 0 & v(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} u_\epsilon(t)x & u_\epsilon(t)y \\ v(t)z & v(t)w \end{bmatrix}.$$

Dessa igualdade e das condições iniciais, reduzimos às seguintes equações unidimensionais de segunda ordem:

- $x'' = u_\epsilon(t)x$, $x(0) = 0$ e $x'(0) = 1$;
- $y'' = u_\epsilon(t)y$, $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0 \Longrightarrow y \equiv 0$.
- $z'' = v(t)z$, $z(0) = 0$ e $z'(0) = 0 \Longrightarrow z \equiv 0$.
- $w'' = v(t)w$, $w(0) = 0$ e $w'(0) = 1$.

Logo, a matriz, 2×2, $Y = Y(t)$ é da forma:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_2(t) & 0 \\ 0 & w_2(t) \end{bmatrix}.$$

Onde:

$$\begin{cases} x_2'' = u_\epsilon(t)x_2, \\ x_2(0) = 0 \\ x_2'(0) = 1. \end{cases} \tag{A.8}$$

E, da mesma forma para $w = w(t)$:

$$\begin{cases} w_2'' = v(t)w_2 \\ w_2(0) = 0 \\ w_2'(0) = 1. \end{cases} \tag{A.9}$$

Segue dessa análise das matrizes, 2×2, X e Y, e tendo em vista que os blocos da matriz $\Phi_\epsilon(t)$ satisfazem: $X' = W$ e $Y' = W$, obtemos que:

$$\Phi_\epsilon(t) = \begin{bmatrix} X & Y \\ X' & Y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) & 0 & x_2(t) & 0 \\ 0 & w_1(t) & 0 & w_2(t) \\ x_1'(t) & 0 & x_2'(t) & 0 \\ 0 & w_1'(t) & 0 & w_2'(t) \end{bmatrix}.$$

Calculando essa matriz em $t = T$, obtemos $\Phi_\epsilon(T)$:

$$\Phi_\epsilon(\bar{T}) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & b_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & b_{22} \\ c_{11} & 0 & d_{11} & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & d_{22} \end{bmatrix}.$$

Nesse ponto, é fundamental notar que as soluções das equações (A.7) e (A.9) não dependem do parâmetro ϵ, pois as equações diferenciais, que as definem, não envolvem o parâmetro ϵ (o parâmetro ϵ aparece em $u_\epsilon(t)$ e não em $v(t)$). Logo, a matriz $\Phi_1(T)$ terá a seguinte forma:

$$\Phi_1(T) = \begin{bmatrix} a_{11}^1 & 0 & b_{11}^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{11}^1 & 0 & d_{11}^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por fim, indicaremos a matriz $\Phi_0(T)$ por:

$$\Phi_0(T) = \begin{bmatrix} a_{11}^0 & 0 & b_{11}^0 & 0 \\ 0 & a_{22}^0 & 0 & b_{22}^0 \\ c_{11}^0 & 0 & d_{11}^0 & 0 \\ 0 & c_{22}^0 & 0 & d_{22}^0 \end{bmatrix}.$$

Devemos destacar que os coeficientes a_{11}^1, b_{11}^1, c_{11}^1 e d_{11}^1, que aparecem na matriz $\Phi_1(T)$ são caracterizados por:

$$\begin{cases} a_{11}^1 = \frac{\partial}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0} x_1(\bar{T},\epsilon), \quad c_{11}^1 = \frac{\partial}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0} x_1'(\bar{T},\epsilon) \\ \\ b_{11}^1 = \frac{\partial}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0} x_2(\bar{T},\epsilon), \quad d_{11}^1 = \frac{\partial}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0} x_2'(\bar{T},\epsilon) \end{cases} \tag{A.10}$$

Essas representações e simplificações matriciais nos permite uma melhor visualização das contas, para o cálculo de $d\bar{G}_1$.

A.3 Voltando a derivada de $\bar{G}_1$.

A expressão de $\bar{G}_1 = \bar{G}_1(x,y)$ é dada por:

$$\bar{G}_1(x,y) = \Pi\Phi_1(T)(\bar{z}(x,y) - z_0) + R_1(\bar{z}(x,y))\Pi C\Phi_0(T)(\bar{z}(x,y) - z_0) +$$

$$+R_0(\bar{z}(x,y))\Pi C\Phi_1(T)(\bar{z}(x,y) - z_0).$$

Analisaremos, separadamente, cada uma dos termos que compõe a soma dessa expressão. Assim, definimos as funções:

$$\begin{cases} \alpha_1(x,y) = \Pi\Phi_1(\bar{T})(\bar{z}(x,y) - z_0), \\ \alpha_2(x,y) = R_1(\bar{z}(x,y))\Pi C\Phi_0(\bar{T})(\bar{z}(x,y) - z_0), \\ \alpha_3(x,y) = R_0(\bar{z}(x,y))\Pi C\Phi_1(\bar{T})(\bar{z}(x,y) - z_0). \end{cases}$$

Segue que:

$$\bar{G}_1(x,y) = \alpha_1(x,y) + \alpha_2(x,y) + \alpha_3(x,y).$$

Devemos notar que, pela definição da seção transversal Σ_E^+, em que estamos trabalhando, que é definida, como uma superfície, via a aplicação $\bar{z}$ (equação (3.4)), teremos:

$$\frac{\partial\bar{z}}{\partial x}(0,0) = e_1 \text{ e } \frac{\partial\bar{z}}{\partial y}(0,0) = e_3.$$

Onde $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ representam os vetores da base canônica do $\mathbb{R}^4$.
Vamos aos cálculos das derivadas:

1. O termo α_1.
   Temos:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}(0,0) = \Pi\Phi_1(\bar{T})(\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}(0,0)) = \Pi\Phi_1(\bar{T})(e_1) = \Pi(a_{11}^1, 0, c_{11}^1, 0) =$$

$$= (a_{11}^1, c_{11}^1).$$

Da mesma forma em relação a derivada com respeito a variável y:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial y}(0,0) = \Pi\Phi_1(T)(e_3) = \Pi(b_{11}^1, 0, d_{11}^1, 0) = (b_{11}^1, d_{11}^1).$$

2. O termo α_2.
   Temos:

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}(0,0) = R_1(z_0)\Pi C\Phi_0(T)(e_1) \text{ e } \tfrac{\partial \alpha_2}{\partial y}(0,0) = R_1(z_0)\Pi C\Phi_0(T)(e_3).$$

   Devemos observar que $R_\epsilon(z_0) = 0$, para todo ϵ. De fato, a função R_ϵ representa a diferença entre o período da órbita periódica e o tempo de retorno da aplicação de Poincaré. Assim, como a órbita periódica é a mesma, $\forall\epsilon$, temos $R_\epsilon(z_0) = 0$, $\forall\epsilon$. Logo, $R_1(z_0) = 0$. Segue que:

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}(0,0) = 0 \text{ e } \frac{\partial \alpha_2}{\partial y}(0,0) = 0.$$

3. O termo α_3.

   As derivadas de α_3 são calculadas da mesma forma que as derivadas da função α_2. Teremos:

$$\frac{\partial \alpha_3}{\partial x}(0,0) = 0 \text{ e } \frac{\partial \alpha_3}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Concluímos então que:

$$\frac{\partial \bar{G}_1}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x}(0,0) \text{ e } \frac{\partial \bar{G}_1}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial \alpha_1}{\partial y}(0,0).$$

Portanto, obtemos a derivada $d\bar{G}_1(0,0)$.

Proposição A.3.1 *A matriz da derivada $d\bar{G}_1(0,0)$ é dada por:*

$$d\bar{G}_1(0,0) = \begin{bmatrix} a_{11}^1 & b_{11}^1 \\ c_{11}^1 & d_{11}^1 \end{bmatrix}$$

Onde os coeficientes são dados pela equação (A.10).

Estamos interessados em calcular a derivada da função f_1 em $(0,0)$. Esta, por sua vez, está relacionada a derivada $d\bar{G}_1(0,0)$. Diante da proposição anterior, fica a questão de avaliar melhor os coeficientes da equação (A.10). Faremos isso a seguir.

A.4 Análise dos Coeficientes da Equação A.10.

Faremos a análise dos coeficientes da equação A.10 por partes.

1. **Coeficientes a_{11}^1 e c_{11}^1.**

   Temos:

   $$a_{11}^1 = \frac{\partial}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0} x_1(T,\epsilon) \text{ e } c_{11}^1 = \frac{\partial}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0} x_1'(T,\epsilon).$$

   Onde a curva $x_1 = x_1(t,\epsilon)$ é solução da equação (A.6). Transformando esta equação, que é de ordem 2, numa equação linear de primeira ordem por meio de $x_1 = x$ e $x_1' = y$, obtemos:

   $$\begin{cases} x' = y, x(0) = 1 \\ y' = u_\epsilon(t), y(0) = 0 \end{cases}.$$

   Podemos escrever esta equação de forma matricial por:

   $$\begin{cases} z' = A_\epsilon(t)z, \\ z(0) = e_1. \end{cases} \tag{A.11}$$

   Onde: $A_\epsilon(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ u_\epsilon(t) & 0 \end{bmatrix}$.

   Segue, então, que:

   $$(a_{11}^1, c_{11}^1) = \frac{\partial}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0} z(T,\epsilon).$$

   Portanto, para determinarmos o vetor (a_{11}^1, c_{11}^1), primeira coluna da matriz $d\bar{G}_1(0,0)$, precisaremos avaliar a derivada em relação ao parâmetro ϵ da solução da equação (A.11), calculada no instante $t = T$. Sendo assim, definimos:

$$c_1(t) = \frac{\partial}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0} z(t,\epsilon).$$

Lembremos que a curva $t \mapsto c_1(t)$ satisfaz:

$$c_1'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0} z(t,\epsilon) = \frac{\partial}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0}\frac{\partial}{\partial t} z(t,\epsilon) = \frac{\partial}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0} A_\epsilon(t) z(t,\epsilon)$$

$$= A_1(t)z(t,0) + A_0(t)\frac{\partial}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0} z(t,\epsilon) =$$

$$= A_0(t)c_1(t) + A_1(t)z(t,0).$$

Observação A.4.1 *Devemos fazer algumas observações:*

- *Observemos que* $u_\epsilon(t) = -\alpha^2 - 2\epsilon x_2^2(t)$. *Logo, fazendo* $\epsilon = 0$, *obtemos:*
$$A_0(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & 0 \end{bmatrix} = A.$$
Ou seja, a matriz $A_0(t)$ *é uma matriz constante que indicaremos por* A.
- *Observemos também que:*
$$A_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2x_2^2(t) & 0 \end{bmatrix}.$$
Assim, a expressão para a matriz $A_1(t)$ *depende basicamente da órbita periódica.*
- *A curva* $t \mapsto z(t,0)$ *é solução de:*
$$\begin{cases} z' = Az, \\ z(0) = e_1 \end{cases}.$$
Logo, podemos escrever $z(t,0) = e^{tA}e_1$ *(na forma exponencial de matriz).*

Tendo em vista essas observações e definindo $b_1(t) = A_1(t)e^{tA}e_1$, segue que a $t \mapsto c_1(t)$ satisfaz:

$$\begin{cases} c_1' = Ac_1 + b_1(t) \\ c_1(0) = (0,0) \end{cases}$$

Pela Fórmula de Variação dos Parâmetros:

$$c_1(t) = e^{tA}\left(\int_0^t e^{-sA} b_1(s)ds\right)$$

Segue então:

$$(a_{11}^1, c_{11}^1) = e^{TA}\left(\int_0^T e^{-sA} b_1(s)ds\right) \tag{A.12}$$

2. **Coeficientes b_{11}^1 e d_{11}^1**

Temos:

$$b_{11}^1 = \tfrac{\partial}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0} x_2(T,\epsilon) \text{ e } d_{11}^1 = \tfrac{\partial}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0} x_2'(T,\epsilon)$$

Onde a curva $x_2 = x_2(t,\epsilon)$ é solução da equação (A.8). Transformando esta equação, que é de ordem 2, numa equação linear de primeira ordem por meio de $x_2 = x$ e $x_2' = y$, obtemos:

$$\begin{cases} z' = A_\epsilon(t)z \\ z(0) = e_2 \end{cases} \tag{A.13}$$

Teremos:

$$(b_{11}^1, d_{11}^1) = \tfrac{\partial}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0} z(T,\epsilon)$$

Onde $z = z(t,\epsilon)$ é solução de (A.13).

Procedendo de maneira análoga a que foi feita no cálculo dos coeficientes a_{11}^1 e c_{11}^1, definindo:

$$c_2(t) = \tfrac{\partial}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0} z(t,\epsilon)$$

Seguirá que $t \mapsto c_2(t)$ é solução de:

$$\begin{cases} c_2' = Ac_2 + b_2(t), \\ c_2(0) = (0,0). \end{cases}$$

Onde:

$$b_2(t) = A_1(t)e^{tA}e_2.$$

Segue da Fórmula de Variação dos Parâmetros:

$$c_2(t) = e^{tA}\left(\int_0^t e^{-sA} b_2(s)ds\right).$$

Portanto:

$$(b_{11}^1, d_{11}^1) = e^{TA}\left(\int_0^T e^{-sA} b_2(s)ds\right) \tag{A.14}$$

Analisaremos esses coeficientes a partir das igualdades obtidas em (A.12) e (A.14).

Vamos a seguir calcular os elementos envolvidos nas igualdades (A.12) e (A.14). Temos:

A exponencial da matriz A

Sendo $A = A_0(t)$, teremos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Com isso, teremos o polinômio característico da matriz A, dado por $p_A(x) = x^2 + \alpha^2$. Assim, os autovalores de A são $\{i\alpha, -i\alpha\}$. Segue, do processo de obtenção da forma de Jordan da matriz A, que vale $A = QJQ^{-1}$, onde:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \text{ e } J = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

Segue das propriedades da exponencial de matrizes que vale:

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t\alpha & \sin t\alpha \\ -\sin t\alpha & \cos t\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t\alpha & \frac{1}{\alpha}\sin t\alpha \\ -\alpha \sin t\alpha & \cos t\alpha \end{bmatrix}$$

Temos então a expressão para as exponenciais que aparecem nas equações (A.12) e (A.14). Por fim, notemos que a inversa é dada por:

$$e^{-tA} = \begin{bmatrix} \cos t\alpha & \frac{-1}{\alpha}\sin t\alpha \\ \alpha \sin t\alpha & \cos t\alpha \end{bmatrix}.$$

Os vetores $b_1 = b_1(t)$ e $b_2 = b_2(t)$

O vetor b_1 foi definido como $b_1(t) = A_1(t)e^{tA}e_1$. Mas, pelo cálculo da exponencial da matriz A, $e^{tA}e_1 = (\cos t\alpha, -\alpha \sin t\alpha)$. Logo:

$$b_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ u_1(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t\alpha \\ -\alpha \sin t\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_1(t)\cos t\alpha \end{bmatrix}$$

Obtemos, assim, o vetor b_1. Para o cálculo do vetor b_2, podemos fazer de maneira análoga, com as adaptações necessárias. Assim, $b_2(t) = A_1(t)e^{tA}e_2$. Mas $e^{tA}e_2 = (\frac{1}{\alpha}\sin t\alpha, \cos t\alpha)$. Portanto:

$$b_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ u_1(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha}\sin t\alpha \\ \cos t\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{u_1(t)}{\alpha}\sin t\alpha \end{bmatrix}.$$

Com isso, conseguimos as seguintes expressões:

$$b_1(t) = (0, u_1(t)\cos t\alpha) \text{ e } b_2(t) = (0, \tfrac{u_1(t)}{\alpha}\sin t\alpha).$$

Tendo em vista que agora temos a expressão para as exponenciais de matrizes e os vetores b_1 e b_2 que aparecem nas equações (A.12) e (A.14), podemos tentar melhorar as integrais.

O vetor $c_1 = c_1(t)$

Na expressão que define $c_1 = c_1(t)$, temos:

$$e^{-sA}b_1(s) = \begin{bmatrix} \cos s\alpha & \frac{-1}{\alpha}\sin s\alpha \\ \alpha\sin s\alpha & \cos s\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_1(s)\cos s\alpha \end{bmatrix} = (\tfrac{-1}{2\alpha}u_1(s)\sin 2s\alpha, u_1(s)\cos^2 s\alpha)$$

Segue então que:

$$c_1(t) = e^{tA}\left(\frac{-1}{2\alpha}\int_0^t u_1(s)\sin 2s\alpha ds, \int_0^t u_1(s)\cos^2 s\alpha ds\right)$$

O vetor $c_2 = c_2(t)$

Da mesma forma, temos:

$$e^{-sA}b_2(s) = \begin{bmatrix} \cos s\alpha & \frac{-1}{\alpha}\sin s\alpha \\ \\ \alpha\sin s\alpha & \cos s\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \\ \frac{u_1(s)}{\alpha}\sin s\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-u_1(s)}{\alpha^2}\sin^2 s\alpha \\ \\ \frac{u_1(s)}{2\alpha}\sin 2s\alpha \end{bmatrix}$$

Com isso, podemos escrever:

$$c_2(t) = e^{tA}\left(\frac{-1}{\alpha^2}\int_0^t u_1(s)\sin^2 s\alpha ds, \frac{1}{2\alpha}\int_0^t u_1(s)\sin 2s\alpha ds\right)$$

Podemos agora calcular $c_1(T)$ e $c_2(T)$.

Cálculo de $c_1(T)$ **e** $c_2(T)$

Definimos:

$$I_{11} = \frac{-1}{2\alpha}\int_0^T u_1(s)\sin 2s\alpha\ ds \text{ e } I_{21} = \int_0^T u_1(s)\cos^2 s\alpha\ ds.$$

Segue então que:

$$c_1(T) = e^{TA}(I_{11}, I_{21}) = (a_{11}^1, c_{11}^1).$$

Da maneira análoga para o cálculo de $c_2(T)$, definimos:

$$I_{12} = \frac{-1}{\alpha^2}\int_0^T u_1(s)\sin^2 s\alpha\ ds \text{ e } I_{22} = \frac{1}{2\alpha}\int_0^T u_1(s)\sin 2s\alpha\ ds.$$

Portanto:

$$c_2(T) = e^{TA}(I_{12}, I_{22}).$$

Essa análise pode ser resumida na próxima proposição.

Proposição A.4.1 *A derivada $d\bar{G}_1(0,0)$ é dada por:*

$$d\bar{G}_1(0,0) = e^{TA}I$$

Onde:

$$I = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} \text{ e } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Com T sendo o período da órbita periódica Γ_E.

Devemos ressaltar que gostaríamos de calcular as derivadas da função f_1, pois elas estão relacionadas a função A_1, que deveremos avaliar a soma nas órbitas da aplicação ψ_0, sobre a curva invariante Γ. A partir da proposição anterior, temos a derivada de f_1 em $(0,0) \in \Omega$.

Corolário A.4.1 *Vale a igualdade:*

$$df_1(0,0) = e^{TA}Ie^{-TA}.$$

Onde I é a matriz que aparece na proposição anterior.
Demonstração: *Segue da proposição anterior e da igualdade (A.1).* $\square$.

A.5 Cálculo das derivadas de A_1

O objetivo, agora, será o de avaliar as derivadas parciais da função A_1, descritas na proposição 7.5.2. Em virtude do último corolário, temos condições de fazer essa avaliação. Ao longo dessa subseção, definimos a matriz W:

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \doteq e^{TA} I e^{-TA}.$$

Observemos que:

$$Ie^{-TA} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos T\alpha & \frac{-1}{\alpha}\sin T\alpha \\ \alpha \sin T\alpha & \cos T\alpha \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I_{11} cos T\alpha + I_{12}\alpha \sin T\alpha & \frac{-I_{11}}{\alpha}\sin T\alpha + I_{12}\cos T\alpha \\ \\ I_{21}\cos T\alpha + I_{22}\alpha \sin T\alpha & \frac{-I_{21}}{\alpha}\sin T\alpha + I_{22}\cos T\alpha \end{bmatrix}$$

Obtemos, então, a seguinte igualdade para a matriz W:

$$W = \begin{bmatrix} \cos T\alpha & \frac{1}{\alpha}\sin T\alpha \\ \\ -\alpha \sin T\alpha & \cos T\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11} cos T\alpha + I_{12}\alpha \sin T\alpha & \frac{-I_{11}}{\alpha}\sin T\alpha + I_{12}\cos T\alpha \\ \\ I_{21}\cos T\alpha + I_{22}\alpha \sin T\alpha & \frac{-I_{21}}{\alpha}\sin T\alpha + I_{22}\cos T\alpha \end{bmatrix}.$$

A partir desta igualdade, podemos calcular as entradas W_{ij} da matriz W. Seguiremos por partes.

- Cálculo de W_{11}.

  Observemos que:

  $$W_{11} = I_{11}\cos^2 T\alpha + \frac{\alpha I_{12}}{2}\sin 2T\alpha + \frac{I_{21}}{2\alpha}\sin 2T\alpha + I_{22}\sin^2 T\alpha.$$

  Assim, podemos escrever:

  $$W_{11} = (I_{11}\cos^2 T\alpha + I_{22}\sin^2 T\alpha) + \frac{(\alpha^2 I_{12} + I_{21})}{2\alpha}\sin 2T\alpha.$$

- Cálculo do coeficiente W_{12}.

  Observemos que:

  $$W_{12} = \frac{-I_{11}}{2\alpha}\sin 2T\alpha + I_{12}\cos^2 T\alpha - \frac{I_{21}}{\alpha^2}\sin^2 T\alpha + \frac{I_{22}}{2\alpha}\sin 2T\alpha.$$

Assim, podemos escrever:

$$W_{12} = \frac{1}{2\alpha}(-I_{11} + I_{22})\sin 2T\alpha + \frac{1}{\alpha^2}(\alpha^2 I_{12}\cos^2 T\alpha - I_{21}\sin^2 T\alpha).$$

- Cálculo do coeficiente W_{21}.

  Procedendo de maneira análoga a que foi feita nos coeficientes W_{11} e W_{12}, temos:

  $$W_{21} = \frac{-\alpha I_{11}}{2}\sin 2T\alpha - \alpha^2 I_{12}\sin^2 T\alpha + I_{21}\cos^2 T\alpha + \frac{\alpha I_{22}}{2}\sin 2T\alpha.$$

  Logo:

  $$W_{21} = \frac{\alpha}{2}(-I_{11} + I_{22})\sin 2T\alpha + I_{21}\cos^2 T\alpha - \alpha^2 I_{12}\sin^2 T\alpha.$$

- Cálculo de W_{22}.

  Temos:

  $$W_{22} = I_{11}\sin^2 T\alpha - \frac{\alpha I_{12}}{2}\sin 2T\alpha - \frac{I_{21}}{2\alpha}\sin 2T\alpha + I_{22}\cos^2 T\alpha.$$

  Logo:

  $$W_{22} = I_{11}\sin^2 T\alpha + I_{22}\cos^2 T\alpha - \frac{(\alpha^2 I_{12} + I_{21})}{2\alpha}\sin 2T\alpha.$$

Observemos que pela definição da matriz W, temos:

$W_{11} = \frac{\partial X_1}{\partial x}(0,0)$, $W_{12} = \frac{\partial X_1}{\partial y}(0,0)$, $W_{21} = \frac{\partial Y_1}{\partial x}(0,0)$ e $W_{22} = \frac{\partial Y_1}{\partial y}(0,0)$.

Diante dessas fórmulas para os coeficientes W_{ij} e as derivadas parciais da função A_1, que foram calculadas na proposição 7.5.2, teremos:

- Cálculo de $\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}(0,0)$.

  Temos:

  $$\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}(0,0) = -2\alpha^2\frac{\partial X_1}{\partial x}(0,0) = -2\alpha^2 W_{11}.$$

  Simplificando a expressão de W_{11}:

  $$W_{11} = I_{11}\cos 2T\alpha + \frac{(\alpha^2 I_{12} + I_{21})}{2\alpha}\sin 2T\alpha.$$

Mas:

$$\tfrac{(\alpha^2 I_{12}+I_{21})}{2\alpha} = \frac{-1}{2\alpha}\int_0^T u_1(s)\sin^2\alpha s\ ds + \frac{1}{2\alpha}\int_0^T u_1(s)\cos^2\alpha s\ ds.$$

Logo:

$$\tfrac{(\alpha^2 I_{12}+I_{21})}{2\alpha} = \frac{1}{2\alpha}\int_0^T u_1(s)\cos 2\alpha s\ ds.$$

Segue então que, substituindo esta expressão em W_{11} e utilizando a definição do coeficiente I_{11}, conseguimos:

$$W_{11} = -\cos 2T\alpha\,\frac{1}{2\alpha}\int_0^T u_1(s)\sin 2\alpha s\ ds + \sin 2T\alpha\,\frac{1}{2\alpha}\int_0^T u_1\cos 2\alpha s ds$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\int_0^T u_1(s)(\sin 2\alpha T\cos 2\alpha s - \cos 2\alpha T\sin 2\alpha s)\ ds =$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\int_0^T u_1(s)\sin\{2\alpha(T-s)\}\ ds.$$

Portanto:

$$\tfrac{\partial X_1}{\partial x}(0,0) = \frac{1}{2\alpha}\int_0^T u_1(s)\sin\{2\alpha(T-s)\}\ ds.$$

Logo:

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}(0,0) = -\alpha\int_0^T u_1(s)\sin\{2\alpha(T-s)\} \tag{A.15}$$

- Cálculo de $\frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2}(0,0)$.

Notemos que $\frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2}(0,0) = -2\frac{\partial Y_1}{\partial y}(0,0)$. Mas:

$$\tfrac{\partial Y_1}{\partial y}(0,0) = -\tfrac{\partial X_1}{\partial x}(0,0) = -W_{11}.$$

Obtemos então:

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2}(0,0) = \frac{1}{\alpha}\int_0^T u_1(s)\sin\{2\alpha(T-s)\}ds \tag{A.16}$$

- Cálculo de $\frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial y}(0,0)$. Observemos que:

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial y}(0,0) = -\alpha^2 \frac{\partial X_1}{\partial y}(0,0) - \frac{\partial Y_1}{\partial x}(0,0) = -\alpha^2 W_{12} - W_{21}.$$

Mas devemos observar que:

$$-\alpha^2 W_{12} = \frac{-\alpha}{2}(-I_{11} + I_{22}) \sin 2T\alpha + I_{21} \sin^2 T\alpha - \alpha^2 I_{12} \cos^2 T\alpha.$$

Utilizando que $I_{22} = -I_{11}$, conseguimos:

$$-\alpha^2 W_{12} = I_{11}\alpha \sin 2T\alpha + I_{21} \sin^2 T\alpha - \alpha^2 I_{12} \cos^2 T\alpha.$$

Da mesma forma, temos:

$$-W_{21} = I_{11}\alpha \sin 2T\alpha + \alpha^2 I_{12} \sin^2 T\alpha - I_{21} \cos^2 T\alpha.$$

Segue então que:

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial y}(0,0) = 2\alpha I_{11} \sin 2T\alpha + (\alpha^2 I_{12} + I_{21})(\sin^2 T\alpha - \cos^2 T\alpha).$$

$$= 2\alpha I_{11} \sin 2T\alpha - (\alpha^2 I_{12} + I_{21}) \cos 2T\alpha.$$

Utilizando a expressão de $(\alpha^2 I_{12} + I_{21})$ e utilizando a definição do coeficiente I_{11}, podemos escrever:

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial y}(0,0) = -\sin 2T\alpha \int_0^T u_1(s) \sin 2s\alpha \, ds - \cos 2T\alpha \int_0^T u_1(s) \cos 2s\alpha \, ds =.$$

$$= (-1) \int_0^T u_1(s)(\cos 2T\alpha \cos 2s\alpha + \sin 2T\alpha \sin 2s\alpha) ds =$$

$$= (-1) \int_0^T u_1(s) \cos\{2\alpha T - 2\alpha s\} ds =$$

$$= (-1) \int_0^T u_1(s) \cos\{2\alpha(T - s)\} ds.$$

Concluímos então:

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial y}(0,0) = (-1) \int_0^T u_1(s) \cos\{2\alpha(T - s)\} ds.$$

Tendo em vista que $u_\epsilon(t) = -\alpha^2 - 2\epsilon x_2^2(t)$,onde $t \mapsto (0, x_2(t), 0, y_2(t))$ é a órbita Γ_E, podemos representar as expressões obtidas por meio de integrais sobre Γ_E. Isso conclui a demonstração da proposição 7.6.1.

Apêndice B

Análise da subvariedade M_2

O objetivo aqui é analisar a subvariedade invariante M_2, construída no Capítulo 3, visando dar uma melhor descrição da dinâmica do sistema hamiltoniano estudado no texto.

Considerando a Hamiltoniana $H_\epsilon : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, dada por:

$$H_\epsilon = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + \frac{\alpha^2 x_1^2}{2} + \frac{b_1 x_1^4}{4} - \frac{\nu^2 x_2^2}{2} + \frac{b_2 x_2^4}{4} - R_\epsilon(x_1, x_2),$$

onde R_ϵ é analítica real e tem a seguinte forma:

$$R_\epsilon(x_1, x_2) = \epsilon(x_1^2 x_2^2 + R_1(x_1, x_2)), \text{ com } R_1 = x_1^3 R_2(x_1, x_2)$$

Segue que o campo hamiltoniano é dado por:

$$X_{H_\epsilon} = (y_1, y_2, -\alpha^2 x_1 - b_1 x_1^3 + \partial_{x_1} R_\epsilon, \nu x_2 - b_2 x_2^3 + \partial_{x_2} R_\epsilon)$$

Para uma análise da existência de um horseshoe[1] para o fluxo do campo Hamiltoniano X_{H_ϵ}, procederemos como no exemplo 2.1.4; ou seja, construiremos uma família de campos de vetores $(F_\delta)_{\delta \geq 0}$, tal que os fluxos dos campos X_{H_ϵ} e F_δ são conjugados, para todo $\delta > 0$. Para $\delta = 0$, a subvariedade Σ^0 é normalmente hiperbólica e suas variedades estável e instável coincidem. Aplicando o método de Melnikov, teremos que para $\delta > 0$, as correspondente variedades estável e instável se interceptarão transversalmente, existindo assim um horse-shoe para o fluxo de F_δ, para $\delta > 0$, pequeno, e assim valendo o mesmo para o campo X_{H_ϵ}. **O objetivo, neste apêndice, é mostrar que a análise para a Hamiltoniana H_ϵ se reduz a análise feita em [4] e [5], que foi apresentada no exemplo 2.1.4.** Procederemos por partes.

[1] Neste apêndice, mostraremos que, no caso em que temos o termo geral R_ϵ, como apresentado em (1.1), os resultados de [5] e [4] (caso comentado no exemplo 2.1.4) permanecem válidos.

1. Construção do campo F_δ.

   Para cada $\delta > 0$, consideremos a família de aplicações diferenciáveis, $\xi_\delta : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, dada por:

$$\xi_\delta(x_1, x_2, y_1, y_2) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{\delta}}, x_2, \frac{y_1}{\sqrt{\delta}}, y_2\right).$$

   Definimos o campo auxiliar $G_\delta(z) = d_z\xi_\delta(X_{H_\epsilon}(z))$. Logo:

$$G_\delta(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\delta}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\delta}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ -\alpha^2 x_1 - b_1 x_1^3 + \partial_{x_1} R_\epsilon \\ \nu^2 x_2 - b_2 x_2^3 + \partial_{x_2} R_\epsilon \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{y_1}{\sqrt{\delta}}, y_2, \frac{-\alpha^2 x_1 - b_1 x_1^3 + \partial_{x_1} R_\epsilon}{\sqrt{\delta}}, \nu^2 x_2 - b_2 x_2^3 + \partial_{x_2} R_\epsilon\right).$$

   Por fim, definimos o campo F_δ, para $\delta > 0$, por:

$$F_\delta(z) = G_\delta(\xi_\delta^{-1}(z)) = d_{\xi_\delta^{-1}}\xi_\delta(X_{H_\epsilon}(\xi_\delta^{-1}(z)))$$

   Dessa forma, ξ_δ é uma conjugação entre os fluxos de X_{H_ϵ} e F_δ. O campo F_δ é dado por:

$$F_\delta = \left(y_1, y_2, -\alpha^2 x_1 - b_1 \delta x_1^3 + \tfrac{\partial_{x_1} R_\epsilon}{\sqrt{\delta}}(\sqrt{\delta} x_1, x_2), \nu^2 x_2 - b_2 x_2^3 + \partial_{x_2} R_\epsilon(\sqrt{\delta} x_1, x_2)\right)$$

   Sendo $R_\epsilon = \epsilon(x_1^2 x_2^2 + x_1^3 R_2(x_1, x_2))$, teremos:

   - $\dfrac{\partial R_\epsilon}{\partial x_1} = 2\epsilon x_1 x_2^2 + 3\epsilon x_1^2 R_2 + \epsilon x_1^3 \dfrac{\partial R_2}{\partial x_1}$; Logo:
     $\dfrac{\partial_{x_1} R_\epsilon}{\sqrt{\delta}}(\sqrt{\delta} x_1, x_2) = 2\epsilon x_1 x_2^2 + \epsilon 3\sqrt{\delta} R_2(\sqrt{\delta} x_1, x_2) + \epsilon \delta^{\frac{3}{2}} x_1^3 \dfrac{\partial R_2}{\partial x_1}(\sqrt{\delta} x_1, x_2).$
   - Procedendo de maneira análoga a derivada com respeito a x_2, obtemos:

$$\partial_{x_2} R_\epsilon(\sqrt{\delta} x_1, x_2) = 2\epsilon \delta x_2 x_1^2 + \epsilon \delta^{\frac{3}{2}} x_1^3 \frac{\partial R_2}{\partial x_1}(\sqrt{\delta} x_1, x_2).$$

Observemos que se a função R_2 tiver a forma $R_2(x_1, x_2) = x_1^{k_1} x_2^{k_2}$, para k_1 e k_2 suficientemente grandes, então o campo F_δ depende diferenciavelmente do parâmetro δ e F_δ está definido para $\delta = 0$. **Assumiremos que estamos nessa situação**. Para $\delta = 0$, temos então:

$$F_0(x_1, x_2, y_1, y_2) = (y_1, y_2, -\alpha^2 x_1 + 2\epsilon x_1 x_2^2, a_2 x_2 - b_2 x_2^3)$$

2. O comportamento do campo F_0.
   Observemos que, em relação ao campo F_0, o comportamento nas variáveis (x_2, y_2) não dependem das variáveis (x_1, y_1). Consideremos o conjunto:

$$M_2 = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4 : x_2 = y_2 = 0\}$$

   Esta é uma subvariedade invariante pelo fluxo do campo F_0, que é normalmente hiperbólica. Determinemos suas variedades estável e instável, indicadas por $W_0^+(S)$ e $W_0^-(S)$, respectivamente. Consideremos a função $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, definida por:

$$h(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{y_2^2}{2} - \frac{\nu^2 x_2^2}{2} + \frac{b_2 x_2^4}{4},$$

   essa função h é uma integral primeira do campo F_0. Além disso, é possível verificar que vale:

$$W_0^+(S) = W_0^-(S) = h^{-1}(0).$$

   A subvariedade Σ^0 permanece invariante e normalmente hiperbólica para $\delta > 0$. Indiquemos as subvariedades instável e estável, associadas, por $W_\delta^-(S)$ e $W_\delta^+(S)$, respectivamente. Gostaríamos de avaliar a interseção entre elas, para $\delta > 0$ pequeno e não nulo. Podemos proceder como em [5] e [4]. Assim, a análise será feita através da função de Melnikov $m : W_0^\pm(S) \to \mathbb{R}$, dada por:

$$m(p) = \int_{\mathbb{R}} \langle \nabla h, \bar{Y} \rangle \circ \phi_t^{F_0}(p) dt.$$

   Onde $\bar{Y} = \dfrac{\partial}{\partial \delta} \dfrac{\partial}{\partial t}|_{t,\delta=0} \phi_t^{F_0}$.

3. O fluxo do campo F_0 sobre $W_0^\pm(S)$.

   O fluxo de F_0 sobre $W_0^\pm(S)$ pode ser representado por:

$$\begin{cases} x_2(t) = \pm\sqrt{\frac{2a_2}{b_2}}sech(\sqrt{a_2}(t+t_0)), & y_2(t) = \mp a_2\sqrt{\frac{2}{b_2}}tangh(\sqrt{a_2}(t+t_0)sech(\sqrt{a_2}(t+ \\ x_1(t) = c_0X_0(t+t_0) + c_1X_1(t+t_0), & y_1 = \dot{x}_1(t) \end{cases}$$

Onde $\{X_0, X_1\}$ é uma base do espaço de soluções da seguinte equação diferencial:

$$x'' = -\alpha^2 x + 2\epsilon x x_2^2$$

Fazendo $q(t) = \epsilon x_2^2(t) = \frac{2\epsilon\nu^2}{b_2}sech^2(\nu(t+t_0))$, obtemos que $\{X_0, X_1\}$ é base do espaço das soluções da seguinte equação:

$$x'' + \{\alpha^2 - 2q(t)\}x = 0$$

4. A função de Melnikov a partir da expressão do fluxo de F_0 sobre $W_0^{\pm}(S)$.

   Observemos que:

$$\langle \nabla h, \bar{Y} \rangle = 2\epsilon x_2 y_2 x_1^2.$$

   Dessa forma, teremos:

$$\langle \nabla h, \bar{Y} \rangle \circ \phi_t^{F_0} = \dot{q}(t)(c_0^2X_0^2 + 2c_0c_1X_0X_1 + c_1^2X_1^2).$$

   Portanto, podemos escrever:

$$m(p) = m_{00}c_0^2 + 2m_{01}c_0c_1 + m_{11}c_1^2, \text{ com } m_{ij} = \int_{\mathbb{R}} \dot{q}(t)X_i(t)X_j(t)dt.$$

Observando que a função $q = q(t)$, definida neste texto, tem as mesmas propriedades que a função q, que é utilizada em [4], a situação se torna análoga a análise feita em [5] e [4].

Referências Bibliográficas

[1] S. Angenent. *A remark on the topological entropy and invariant circles of an area preserving twist map.* Twist mappings and their applications, edited by R.McGeehee and K.R.Meyer. 1-5, IMA Vol. Math. Appl., 44, Springer, 1992.

[2] M. C. Arnaud. *Hyperbolicity for conservative twist maps of the 2-dimensional annulus.* hal-01174964, 2015.

[3] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics.* GTM, Springer, 1978.

[4] L. Butler. *Positive-entropy Hamiltonian sustems on Nilmanifolds via scattering.* Nonlinearity, 2014.

[5] L. Butler and V. Gelfreich. *Positve-entropy geodesic flows on nilmanifolds.* Nonlinearity, 2008.

[6] P. Le Calvez. *Propriétés dynamiques des régions d'instabilité.* Ann. Sci. Éscole Norm. Sup, no. 3, 443-464, 1987.

[7] G. Contreras. *Geodesic flows with positive topological entropy, twist maps and hyperbolicity.* Annals of Mathematics, 172 (2010), 2010.

[8] G. Contreras and G. Paternain. *Genericity of geodesic flows with positive topological entropy on S2.* J. Differential Geom. 61 (2002), no. 1, 1–49, 2002.

[9] J. Damasceno, M. Carneiro, and R. Ramirez Ros. *The billiard inside an ellipse deformed by the curvature flow.* Proc. Amer. Math. Soc. 145 (2017), 705-719, 2017.

[10] S. Pinto de Carvalho and Sylvie Oliffson Kamphorst. *The first Birkhoff coefficient and the stability of 2-periodic orbits on billiards.* Experimental Mathematics Volume 14 Edição 3 Páginas 299-306, 2005.

[11] N. de Paulo. *Sistemas de seções transversais próximos a níveis críticos de sistemas Hamiltonianos em R4.* Tese (Doutorado)-IME-USP, 2014.

[12] N. de Paulo and P. Salomão. *Systems of transversal sections near critical energy levels of Hamiltonian systems in R4.* Memoirs of AMS, 2018.

[13] N. de Paulo and P. A. Salomão. *On the multiplicity of periodic orbits and homoclinic near critical energy levels of Hamiltonian systems in R4.* Transactions of AMS, 2018.

[14] Christophe Golé. *Symplectic twist maps: global variational techniques.* World Scientific, Volume 18, 2001.

[15] U. Hryniewicz and P. Salomão. *Uma introdução à geometria de contato e aplicações à dinâmica Hamiltoniana.* IMPA, 2009.

[16] A. Katok and B. Hasselblat. *Introduction to the modern theory of dynamical system.* Cambridge University Press, 1995.

[17] Derek F. Lawden. *Elliptic Functions and Applications.* Applied Mathematical Sciences, 80, 1989.

[18] L. M. Lerman. *Hamiltonian systems with loops of a separatrix of a saddles-center.* Sel. Math Sov. 10, 297-306, 1991.

[19] A. O. Lopes. *Introdução à Mecânica Clássica.* EDUSP, 2006.

[20] J. N. Mather. *Variational construction of orbits of twist diffeomorphisms.* J. Amer. Math. Soc., 1991.

[21] D. McDuff and D. Salamon. *Introduction to symplectic topology.* Oxford University Press, 1998.

[22] R. Moeckel. *Generic birfurcations of the twist coefficient.* Erg. Th. Dyn. Syst. 10, 185-195, 1990.

[23] C. Ragazzo, M. Carneiro, and S. Zanata. *Uma Introdução às Aplicações do Tipo Twist.* IMPA, 2005.

[24] C. G. Ragazzo. *Irregular Dynamics and Homoclinic Orbits to Hamiltonian Saddle Centers.* Comm. Pure App. Math. L, 105-147, 1997.

[25] C. G. Ragazzo. *On the stability of double homoclinic loops.* Comm. Math. Phys. 184, 251-272, 1997.

[26] C. G. Ragazzo. *Stability of homoclinic orbits and diffusion in phase space.* Physics Letters., 1997.

[27] C. G. Ragazzo and S. Addas-Zanatta. *Critical number in scattering and escaping problems in classical mechanics.* Physical Review E 64, 2001.

[28] R. Ramirez-Ros and S. Pinto de Carvalho. *Non-persistence of resonant caustics in perturbed elliptic billiards.* Journal Ergodic Theory and Dynamical Systems Volume 33 Issue 6 Pages 1876-1890 Publisher Cambridge University Press, 2013.

[29] R. Ramirez-Ros and A. Delshams. *Melnikov potential for exact symplectic maps.* Communications in mathematical physics, Pages 213-245 Publisher Springer-Verlag, 1997.

[30] P. Salomão. *Convex energy levels of Hamiltonian systems.* Qualitative Theory of Dynamical Systems, 2004.

[31] A. C. Silva. *Lectures on Symplectic Geometry. Lectures Notes in Mathematics, 1764.* Springer-Verlag, Berlin., 2001.

[32] M. G. Soares. *Cálculo em Uma Variável Complexa.* Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2009.

[33] J. Sotomayor. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias.* Coleção projeto Euclides, CNPq, 1979.

[34] E. Zehnder. *Homoclinic points near elliptic fixed points.* Comm Pure Appl Math., 1973.

[35] E. Zehnder. *Lecturs on Dynamical Systems.* EMS, 1986.