**Bifurcação zero-Hopf e soluções
periódicas para um sistema
hipercaótico de Lorenz**

Sonia Isabel Renteria Alva

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
MESTRA EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática Aplicada
Orientadora: Prof^a. Dr^a. Ana Cristina de Oliveira Mereu

Durante o desenvolvimento deste trabalho a autora
recebeu auxílio financeiro da CAPES e CNPQ

São Paulo
21 de Janeiro de 2021

**Bifurcação zero-Hopf e soluções
periódicas para um sistema
hipercaótico de Lorenz**

Sonia Isabel Renteria Alva

Esta é a versão original da dissertação
elaborada pela candidata Sonia
Isabel Renteria Alva, tal como
submetida à Comissão Julgadora.

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

*Dedico o presente trabalho ao meus
pais Juana Gloria e Angel Edmundo.*

Agradecimentos

Nada na vida deve ser temido, apenas compreendido. Agora é a hora de entender mais, temer menos.
— Marie Curie.

Se anos atrás me perguntassem se eu viajaria a outro país para estudar, minha resposta seria sempre, não!, não posso viajar, tenho medo que algo aconteça com meu pai e minha família. No entanto, no ano 2018 decidi me inscrever para o curso de verão aqui em São Paulo. Naquele momento, eu repeti, são apenas dois meses e volto, mas nunca pensei que me apaixonaria pelas oportunidades que existiam para poder estudar, e foi assim que decidi perder o voo de retorno ao Perú. Eu sabia que voltar para matemática depois de um tempo não seria tão fácil, mas o desafio já havia começado, e agora cumpri uma das primeiras metas que estabeleci para mim.

Se me perguntassem qual foi o momento mais difícil que eu tive que enfrentar durante o mestrado, sem dúvida foi e sempre será não poder dizer adeus ao meu pai. O que eu mais temia aconteceu. Só agradeço a Deus por esta oportunidade, por me dar saúde, força para continuar enfrentando todas as dificuldades que tenho no meu caminho e também por colocar as pessoas que estavam ali segurando minhas mãos para que eu pudesse seguir em frente.

Obrigada papai pelas suas palavras, por me ensinar a ser independente, a não ter medo de arriscar tudo pelos meus estudos, por ser meu exemplo e por ser a luz da força em meu caminho. Agora você é meu anjo que cuida de mim no dia a dia. Este trabalho é dedicado à sua memória.

Para você mãe, obrigada por estar sempre ao meu lado e por suas orações todos os dias, sempre digo que não há melhor bênção do que uma mãe pode pedir, obrigada por estar sempre presente quando preciso de você.

À professora Dr^a. Ana Cristina Mereu pelo competente trabalho de orientação, ensina-

mentos, paciência e atenção dedicada para a realização deste trabalho.

Agradeço a minhas irmãs Claribel, Vixania e irmão Carlos, obrigada porque vocês estão sempre presentes dia a dia em minha vida, por suas palavras de encorajamento e me dizendo que confiam em mim, que tudo que eu proponho eu alcanço, obrigado por me dizer que eu sou seu orgulho, embora seja o oposto, vocês são meu orgulho.

Agradeço às minhas sobrinhas Yohana Mercedes, Nathaly Valentina, Vixania del Rosario e aos sobrinhos Luis Angel, Carlos Alonso e José Fernando porque sempre me enchem de alegria, por todos aqueles áudios, desenhos e por suas palavras onde me mostram todo o amor que sentem por mim.

A você Iván pelo carinho e, acima de tudo, pela paciência (100 %), conselhos e pelas discussões que muito contribuíram para a conclusão deste trabalho. Obrigada porque sempre estive presente nos meus momentos felizes e mais difíceis que tive que enfrentar, obrigada por acreditar em mim e como não agradecer por todo os bolos, almoços, jantares, vinhos, sorvetes, filmes e séries que nós compartilhamos.

Obrigada a toda a minha família em especial a minha Avó Eudora ("mamita Dora"), tia Violeta, William e Fernando por seu apoio incondicional, amor e orações.

Obrigada Sra. Eymi por me encorajar a realizar meus sonhos, por confiar e acreditar em mim e por me fazer sentir bem em cada uma das minhas escolhas. Por dar bons conselhos e estar comigo nos piores e melhores momentos da minha vida.

Aos meus amigos Kassandra e Luis por tornarem os momentos difíceis mais suaves. Em especial a Judith e Violeta que apesar da distância sempre tenho seu apoio emocional sentindo-as ao meu lado em qualquer uma das minhas aventuras. E a todos os meus amigos do IME que conheci durante meu mestrado.

Aos funcionários da secretaria de Pós-graduação pelo ótimo trabalho, em especial para Ana Paula, por resolver sempre minhas dúvidas sobre processos burocráticos.

À USP, e especialmente, ao Instituto de Matemática e Estatística. Uma honra para mim, ter tido a oportunidade de realizar meus estudos de mestrado com as condições necessárias para minha formação e minha pesquisa.

À Capes, pela bolsa concedida entre o período de maio 2020 a agosto 2020.

Ao CNPq, pela bolsa concedida entre os períodos de novembro de 2018 a fevereiro de 2019, abril de 2019 a junho de 2019 e agosto de 2019 a fevereiro de 2020.

Resumo

Sonia Isabel Renteria Alva. **Bifurcação zero-Hopf e soluções periódicas para um sistema hipercaótico de Lorenz** . Dissertação (Mestrado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2020.

Nesta dissertação estudamos a dinâmica local de um sistema hipercaótico de tipo Lorenz dependendo de sete parâmetros. Usando a teoria Averaging caracterizamos as bifurcações de soluções periódicas nos pontos de equilíbrio zero-Hopf e descrevemos as condições suficientes, que asseguram que duas soluções periódicas nasçam a partir do ponto de bifurcação.

Palavras-chave: Sistema hipercaótico tipo Lorenz. Bifurcação zero-Hopf. Órbitas periódicas. Teoria de Averaging.

Abstract

Sonia Isabel Renteria Alva. **Zero–Hopf Bifurcation and Periodic solutions for a four-dimensional hyperchaotic system.** Thesis (Masters). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2020.

In this thesis we study the local dynamics of a hyperchaotic Lorenz-type system depending on seven parameters. Using the Averaging theory we characterize the bifurcations of periodic solutions at zero-Hopf equilibrium points and describe the sufficient conditions, which ensure that two periodic solutions are born from the bifurcation point.

Keywords: Hyperchaotic type Lorenz system. zero-Hopf bifurcation. Periodic orbits. Averaging Theory.

Lista de Símbolos

$\mathbb{D}_r(a)$	Disco aberto centrado em $a \in \mathbb{R}^n$ e de raio r
Λ	O espaço de parâmetros em um subconjunto do espaço euclidiano
$\mathbf{M}_z(t)$	A matriz fundamental dependendo de t no ponto z
$\det(A)$	Determinante da matriz A
λ_j	Autovalores

Lista de Figuras

2.1	Esquema de Lyapunov-Schmidt.	7
2.2	O atrator de Lorenz para os parâmetros $a = 10, b = 28, c = 2.667$ e as condições iniciais $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 1.05)$	12
2.3	O atrator de Rössler para os parâmetros $a = 0.2, b = 5.7$ e $c = 0.2$	13
2.4	O atrator de Chen para os parâmetros $a = 35, b = 3$ e $c = 28$ com $x(0) = -0.1, y(0) = 0.5$ e $z(0) = -0.6$	14
4.1	Típicos retratos de fase de atratores hipercaóticos do sistema (4.1) (a) com $a = 10, b = 28, c = 8/3, d = 0.2, j = 0.4, e = -0.1, k = 4.3$; (b) para $a = 20$; (c) e (d) para $c = 3, d = 0.4, j = 3, e = -0.1, k = 3$. As figuras fornecidas foram geradas adaptando o código Python para nosso sistema 4D, de https://matplotlib.org/3.1.0/gallery/mplot3d/lorenz_attractor.html	25

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Conceitos básicos e Resultados clássicos	5
2.1	Redução de Lyapunov-Schmidt	5
2.2	Teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias	8
2.2.1	Existência e Unicidade de Soluções	8
2.2.2	Dependência contínua e diferenciável das soluções	9
2.2.3	Equações Diferenciais Lineares	10
2.2.4	Critério de Estabilidade	11
2.3	Sistemas hipercaóticos: Exemplos	11
2.4	Equilíbrio e Bifurcação zero-Hopf	14
3	Método do Averaging	17
4	Sistema hipercaótico de Lorenz	23
4.1	O modelo	23
4.2	Propriedades dinâmicas	23
4.3	Análise de equilíbrio zero-Hopf	25
5	Existência de órbitas periódicas para o sistema de Lorenz	31
6	Conclusão e Trabalho Futuro	41
	Bibliografia	43

Capítulo 1

Introdução

Uma frase singular se menciona na cultura popular: "o bater de asas de uma simples borboleta no Brasil poderia talvez provocar um tufão do outro lado do mundo". Tal frase é conhecida como o *efeito borboleta* e foi analisada pela primeira vez por Edward Norton Lorenz no ano 1963, [Lor63]. Lorenz descobre uns dos primeiros sistemas de equações diferenciais ordinárias em $\mathbb{R}^3$ exibindo soluções caóticas para certos valores de parâmetros e condições iniciais. Mais precisamente o sistema de Lorenz exhibe caos determinístico, isto é, dependência sensível das condições iniciais de um sistema, em outras palavras, pequenas escolhas iniciais aparentemente insignificantes, podem causar grandes mudanças e efeitos nos resultados.

Desde a descoberta do paradigma de Lorenz, um sistema de três equações diferenciais

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x), \\ \dot{y} &= bx - y - xz, \\ \dot{z} &= -cz + xy,\end{aligned}\tag{1.1}$$

com três parâmetros reais a, b, c , muitas outras variantes e generalizações a dimensões maiores do sistema (1.1) foram estudadas, tais sistemas são chamados sistemas de Lorenz hipercaóticos. A dinâmica dos sistemas hipercaóticos tem sido estudada principalmente numericamente e por simulações de computador. De acordo com [CLS14], uma definição precisa de um *sistema hipercaótico* compreende as propriedades: um sistema de equações diferenciais autônomo de dimensão maior ou igual a quatro, uma estrutura dissipativa, e pelo menos duas direções instáveis, das quais uma é devido à não linearidade.

Existem vários trabalhos que estudam *equilíbrio tridimensional zero-Hopf*. Uma bifurcação tridimensional zero-Hopf é um desdobramento de dois parâmetros (ou família) de um sistema diferencial autônomo tridimensional com um equilíbrio zero-Hopf. O desdobramento tem um equilíbrio isolado com um autovalor zero e um par de autovalores puramente imaginários se os dois parâmetros assumem valores zero, e o desdobramento tem um tipo de dinâmica topológica diferente na pequena vizinhança deste equilíbrio isolado, pois os dois parâmetros variam em uma pequena vizinhança da origem. A bifurcação zero-Hopf é amplamente analisada por Guckenheimer [Guc81]; Guckenheimer et al. [GH13]; Han [Mao98]; Kuznetsov [Kuz13]; Scheurle et al., [SM84], e foi demonstrado

que, sob certas condições, alguns conjuntos invariantes complicados do desdobramento podem ser bifurcados do equilíbrio zero-Hopf isolado sob algumas condições. Devido à complexidade relacionada à alta dimensionalidade, há pouco trabalho feito na bifurcação n -dimensional zero-Hopf com $n > 3$.

O *método de averaging* é uma ferramenta analítica empregada para a análise de bifurcações. Consiste em reduzir o problema de computação das soluções periódicas de um determinado sistema de equações diferenciais ordinárias ao simples problema de encontrar zeros de funções médias (averaging) associadas, [Cos19]. O método de averaging tem sido empregado para investigar a ocorrência de órbitas periódicas em singularidades zero-Hopf de alguns sistemas dinâmicos não lineares, veja por exemplo ([LM16]-[CLS14]).

Devido à maior dimensão e complexidade dos sistemas hipercaóticos, poucos estudos estão atualmente engajados na análise da teoria hipercaótica, ainda há muito pouco trabalho feito sobre a bifurcação de zero-Hopf para sistemas n dimensionais com $n \geq 4$. Em 2014, Llibre et al., [CLS14] estudaram a bifurcação zero-Hopf de uma classe de sistemas hipercaóticos de Lorenz e a geração de soluções periódicas com a mudança de parâmetros, sendo este o primeiro trabalho sobre o problema da bifurcação zero-Hopf em sistemas quadridimensionais. Em 2015, Maza [Maz15] estudou a bifurcação zero-Hopf do sistema hipercaótico de Chen e provou que o sistema hipercaótico de Chen tem duas órbitas periódicas bifurcando do ponto de equilíbrio zero-Hopf usando a teoria de averaging. Em 2017, Chen et al., [CL17] estudaram a bifurcação zero-Hopf do sistema hipercaótico generalizado de Lorenz-Stenflo e obtiveram duas soluções periódicas geradas a partir de pontos de bifurcação. Em 2020, Jing Yang et al., [YWM20] estudaram a bifurcação zero-Hopf em um sistema hipercaótico autônomo quadrático quadridimensional. Usando a teoria de averaging provaram a existência de órbitas periódicas bifurcando do equilíbrio zero-Hopf localizado na origem do sistema hipercaótico, e estabeleceram as condições de estabilidade de soluções periódicas. Neste trabalho estamos interessadas em estudar o sistema hipercaótico de Lorenz 4-dimensional,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x), \\ \dot{y} &= bx - y - xz + w, \\ \dot{z} &= -cz + xy, \\ \dot{w} &= -dw - jx - ky + exz,\end{aligned}\tag{1.2}$$

onde o espaço de parâmetros é $\Lambda = \{a, b, c, d, e, j, k\} \subset \mathbb{R}^7$. O sistema (1.2) é uma variante do sistema que aparece no trabalho [Zho+17], de fato, ambos sistemas coincidem quando $k = 0$.

Nosso objetivo neste trabalho é estudar bifurcações zero-Hopf do sistema de quatro dimensões hipercaótico Lorenz (1.2). Aqui, um equilíbrio de zero-Hopf 4-dimensional significa um ponto de equilíbrio com dois zeros e um par de números imaginários conjugados puros como autovalores. Estamos interessadas na existência de órbitas periódicas do sistema diferencial (1.2). A principal ferramenta para nossa análise é a *teoria averaging* (consulte a Seção 3). Sob mudanças convenientes de variáveis e parâmetros, podemos analisar as bifurcações zero-Hopf do sistema (1.2) para as escolhas apropriadas dos parâmetros no conjunto Λ , mostramos que duas soluções periódicas emergem conforme os parâmetros

variam. Além disso, caracterizamos a estabilidade dessas soluções periódicas. Sendo assim, organizamos nosso trabalho da seguinte forma:

No Capítulo 2, apresentamos os conceitos básicos e resultados clássicos relacionados a análise e topologia de $\mathbb{R}^n$, à teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias e à bifurcação zero-Hopf que julgamos importantes para que o leitor compreenda as ideias que apresentaremos no decorrer do trabalho. Ainda mais, incluímos alguns exemplos de sistemas hipercaóticos e seus espaços de fase.

No Capítulo 3, apresentamos a teoria de averaging. Neste capítulo damos a ideia da prova do teorema de perturbações de um conjunto isócrono, seguindo o artigo [BFL07], o qual será chave no capítulo 5.

No Capítulo 4, apresentamos o modelo de Lorenz 4-dimensional e algumas de suas propriedades. Provamos um dos primeiros resultados principais, a Proposição 4, onde apresentamos a caracterização dos pontos de equilíbrio zero-Hopf do sistema (1.2).

No Capítulo 5, provamos o segundo resultado principal. Estudamos quando o sistema (1.2) com um ponto de equilíbrio de zero-Hopf na origem das coordenadas tem uma bifurcação de zero-Hopf produzindo alguma órbita periódica no Teorema 5.0.1.

Na prova deste teorema usamos a teoria de averaging, especificamente o teorema de Perturbações de um conjunto isócrono, para mais detalhes veja o Teorema 3.0.2.

Capítulo 2

Conceitos básicos e Resultados clássicos

Nesta seção estabelecemos as notações, definições e teoremas clássicos da análise do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, assim como da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias, as quais serão de utilidade ao longo do trabalho. Para este capítulo os livros de consulta são [Sot79], [Lim00], [LIM15], [BFL07]. As figuras fornecidas foram geradas usando um programa escrito na linguagem Python, veja https://matplotlib.org/3.1.0/gallery/mplot3d/lorenz_attractor.html.

2.1 Redução de Lyapunov-Schmidt

Um dos principais resultados em análise do $\mathbb{R}^n$ é o teorema da função Implícita. O teorema mencionado abaixo garante que os zeros de um sistema de equações são localmente o gráfico de uma função, desde que se fixem condições sobre as derivadas.

Teorema 2.1.1 (Teorema da Função Implícita, [LIM15]). *Sejam D um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $F : D \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^∞ . Para $(a_0, b_0) \in D$ tal que:*

1. $F(a_0, b_0) = 0$,
2. $\frac{\partial F}{\partial b}(a_0, b_0) \neq 0$.

Então, existe um aberto $U = U_{a_0} \times U_{b_0}$ em torno de (a_0, b_0) tal que, para cada $a \in U_{a_0}$, existe um único $a \mapsto b = b(a) \in C^\infty$ e $F(a, b(a)) = 0$.

No estudo de sistemas não lineares onde o teorema da função implícita não se aplica, uma ferramenta alternativa é a redução de Lyapunov-Schmidt para o caso de funções de varias variáveis reais, veja o Teorema 2.1.2 e a Figura 2.1 para uma descrição geométrica. Antes de enunciá-lo, precisamos estabelecer certas funções:

As projeções das k primeiras e $n - k$ últimas coordenadas são

$$\begin{aligned}\Pi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} &\rightarrow \mathbb{R}^k \\ (x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) &\mapsto (x_1, \dots, x_k)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\Pi^\perp : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} &\rightarrow \mathbb{R}^{n-k} \\ (x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) &\mapsto (x_{k+1}, \dots, x_n),\end{aligned}$$

respectivamente.

Teorema 2.1.2 (Redução de Lyapunov-Schmidt para funções em espaços de dimensão finita, [BFL07]). *Sejam $g : D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\beta_0 : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ funções de classe C^2 , onde D é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e V é um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^k$. Assumimos que:*

i) $\mathcal{Z} = \{z_\alpha = (\alpha, \beta_0(\alpha)) : \alpha \in \bar{V}\} \subset D$ e para cada $z_\alpha \in \mathcal{Z}$, $g(z_\alpha, 0) = 0$.

ii) A matriz de $G_\alpha = D_z g(z_\alpha, 0)$ é da forma

$$G_\alpha = \left[\begin{array}{c|c} * & 0_{k \times (n-k)} \\ \hline * & \Delta_\alpha \end{array} \right]$$

com $\det \Delta_\alpha \neq 0$, onde Δ_α é uma matriz $(n - k) \times (n - k)$.

Consideramos a função $f_1 : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^k$ definida por $f_1(\alpha) = \left(\frac{\partial(\Pi g)}{\partial \varepsilon} \right)(z_\alpha, 0)$. Se existe $a \in V$ com $f_1(a) = 0$ e $\det\left(\frac{\partial f_1(a)}{\partial \alpha}\right) \neq 0$, então para todo ε existe α_ε tal que $g(z_{\alpha_\varepsilon}, \varepsilon) = 0$ e $z_{\alpha_\varepsilon} \rightarrow z_a$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Demonstração. Dado que $g : D \subset \mathbb{R}^n \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ consideramos a função

$$\begin{aligned}\Pi^\perp g &: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^{n-k} \\ (\alpha, \beta, \varepsilon) &\mapsto \Pi^\perp g(\alpha, \beta, \varepsilon).\end{aligned}$$

É fácil ver que:

a) $\Pi^\perp g(z_\alpha, 0) = 0$,

b) $\left(\frac{\partial(\Pi^\perp g)}{\partial \beta} \right)(z_\alpha, 0)$ é uma matriz de ordem $(n - k) \times (n - k)$ que denotamos por Δ_α , pela hipóteses (ii) temos $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$.

Então pelo o Teorema da Função Implícita 2.1.1 implica que, para $|\varepsilon|$ suficientemente pequeno, existe uma função β definida como $\beta : (\alpha, \varepsilon) \mapsto \beta(\alpha, \varepsilon)$ tal que

$$\begin{aligned}\Pi^\perp g(\alpha, \beta(\alpha, \varepsilon), \varepsilon) &= 0 \\ \beta(\alpha, 0) &= \beta_0(\alpha).\end{aligned}$$

Figura 2.1: Esquema de Lyapunov-Schmidt.

Agora consideramos a função

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{R}^k \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] &\rightarrow \mathbb{R}^k \\ (\alpha, \varepsilon) &\mapsto \delta(\alpha, \varepsilon) = \Pi g(\alpha, \beta(\alpha, \varepsilon), \varepsilon). \end{aligned}$$

Temos que δ cumpre as seguintes propriedades

- 1) $\delta(\alpha, 0) = \Pi g(\alpha, \beta(\alpha, 0), 0) = \Pi g(z_\alpha, 0) = 0$.
- 2) A derivada de δ em relação a ε no ponto $(\alpha, 0)$ é

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial \varepsilon}(\alpha, 0) &= \frac{\partial(\Pi g)}{\partial \beta}(\alpha, \beta(\alpha, 0), 0) \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \varepsilon}(\alpha, 0) + \frac{\partial(\Pi g)}{\partial \varepsilon}(\alpha, \beta(\alpha, 0), 0) \cdot 1 \\ &= \frac{\partial(\Pi g)}{\partial \beta}(z_\alpha, 0) \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \varepsilon}(\alpha, 0) + \frac{\partial(\Pi g)}{\partial \varepsilon}(z_\alpha, 0). \end{aligned}$$

Usando (ii) vemos que $\frac{\partial(\Pi g)}{\partial \beta}(z_\alpha, 0) = 0_{k \times (n-k)}$, onde $0_{k \times (n-k)}$ é a matriz nula de ordem $k \times (n-k)$, então temos

$$\frac{\partial \delta}{\partial \varepsilon}(\alpha, 0) = \frac{\partial(\Pi g)}{\partial \varepsilon}(z_\alpha, 0). \quad (2.1)$$

Como

$$\begin{aligned} f_1 : \bar{V} &\rightarrow \mathbb{R}^k \\ \alpha &\mapsto f_1(\alpha) = \frac{\partial(\Pi g)}{\partial \varepsilon}(z_\alpha, 0), \end{aligned}$$

substituindo em (2.1) temos

$$\frac{\partial \delta}{\partial \varepsilon}(\alpha, 0) = f_1(\alpha).$$

Consideremos a série de Taylor da função δ em torno do ponto $(\alpha, 0)$ como resto de Taylor $r(\alpha, \varepsilon)$ e usando a propriedade (1) de α temos

$$\delta(\alpha, \varepsilon) = \varepsilon f_1(\alpha) + \varepsilon^2 r(\alpha, \varepsilon).$$

Seja a função ζ definida por

$$\zeta(\alpha, \varepsilon) = f_1(\alpha) + \varepsilon r(\alpha, \varepsilon)$$

tem-se que

- $\delta(\alpha, \varepsilon) = \varepsilon \zeta(\alpha, \varepsilon),$
- $\zeta(\alpha, 0) = 0,$
- $\frac{\partial \zeta}{\partial \alpha}(\alpha, 0) = \frac{\partial f_1}{\partial \alpha}(\alpha),$

aplicando o determinante e assumindo a hipótese (ii), desde que existe $a \in \bar{V}$ tal que $f_1(a) = 0$ e $\det\left(\frac{\partial f_1}{\partial \alpha}(a)\right) \neq 0$, então $\det\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \alpha}(\alpha, 0)\right) \neq 0$. Pelo Teorema da Função Implícita 2.1.1, obtemos para $|\varepsilon|$ suficientemente pequeno, a existência de $\alpha(\varepsilon)$ tal que $\alpha(0) = a$ e $f_1(\alpha(\varepsilon)) + \varepsilon r(\alpha(\varepsilon), \varepsilon) = 0$, lembre que $f_1(a) = 0$. Portanto,

$$\delta(\alpha(\varepsilon), \varepsilon) = \varepsilon [f_1(\alpha(\varepsilon)) + \varepsilon r(\alpha(\varepsilon), \varepsilon)] = 0$$

e além disso, denotando $z_{\alpha_\varepsilon} = (\alpha(\varepsilon), \beta(\alpha(\varepsilon)), \varepsilon)$, temos que $g(z_{\alpha_\varepsilon}, \varepsilon) = 0$, pois $\delta(\alpha(\varepsilon), \varepsilon) = \Pi g(z_{\alpha_\varepsilon}, \varepsilon)$ e que $z_{\alpha_\varepsilon} \rightarrow z_a$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$. $\square$

O Teorema 2.1.2 será usado posteriormente na demonstração de Teorema 3.0.1.

2.2 Teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias

2.2.1 Existência e Unicidade de Soluções

O objetivo principal deste trabalho é estudar a existência e a estabilidade de soluções periódicas para o sistema (1.2). Neste contexto, é natural que o primeiro resultado a ser apresentado seja o de existência e unicidade de soluções para equações diferenciais. Não iremos exibir as demonstrações, para isso veja [Sot79].

Sejam $J \subset \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ e $\Lambda \subset \mathbb{R}^l$ conjuntos abertos e suponhamos que $f : J \times D \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja uma função continuamente diferenciável. Uma equação diferencial ordinária é uma equação da forma

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda) \quad , \quad x(t_0) = x_0, \tag{2.2}$$

onde o ponto denota diferenciação em relação à variável independente t (o tempo), a variável dependente x é um vetor de variáveis de estado e λ é um vetor de parâmetros.

Se $\lambda \in \Lambda$ é fixo, então a *solução* da equação diferencial (2.2) é uma função $\varphi : J_0 \rightarrow U$ dada por $t \mapsto \varphi(t)$, onde $J_0 := J_0(t_0, x_0, \lambda)$ é um intervalo aberto de J , tal que

$$\frac{d\varphi}{dt} = f(t, \varphi(t), \lambda), \quad (2.3)$$

para todo $t \in J_0$ e tal que $\varphi(t_0) = x_0$.

Definimos a *órbita* da solução φ como o conjunto

$$\{\varphi(t) \in U : t \in J_0\}.$$

Teorema 2.2.1 (Existência e unicidade). *Se $J \subseteq \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ são conjuntos abertos, $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^l$, $f : J \times D \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função continuamente diferenciável e $(t_0, x_0, \lambda_0) \in J \times U \times \Lambda$, então existem subconjuntos abertos $J_0 \subseteq J$, $U_0 \subseteq U$ e $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ com $(t_0, x_0, \lambda_0) \in J_0 \times U_0 \times \Lambda_0$ e uma função $\varphi : J_0 \times J_0 \times U_0 \times \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $(t, s, x, \lambda) \mapsto \varphi(t, s, x, \lambda)$ tal que para cada ponto $(t_1, x_1, \lambda_1) \in J_0 \times U_0 \times \Lambda_0$, a função $t \mapsto \varphi(t, t_1, x_1, \lambda_1)$ é a única solução definida em J_0 do problema de valor inicial dado pela equação diferencial (2.2) e a condição inicial $x(t_1) = x_1$.*

2.2.2 Dependência contínua e diferenciável das soluções

Teorema 2.2.2 (Continuidade). *Seja f uma função contínua no conjunto aberto Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \Lambda$, onde Λ é um espaço euclidiano. Para cada $(t_0, x_0, \lambda) \in \Omega$ suponhamos que para o sistema (2.2), com λ fixo, tenha uma única solução $\varphi = \varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$, definida no seu intervalo máximo $J_0 = J_0(t_0, x_0, \lambda)$. Então*

$$D = \{(t, t_0, x_0, \lambda) : (t_0, x_0, \lambda) \in \Omega, t \in J_0\}$$

é aberto em $\mathbb{R} \times \Omega$ e φ é contínua em D .

Teorema 2.2.3 (Diferenciabilidade). *Se para o sistema (2.2) as hipóteses do Teorema 2.2.1 são satisfeitas, então a solução $\varphi : J_0 \times J_0 \times U_0 \times \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ da equação diferencial (2.2) é única e admite derivada parcial $D_3\varphi$ com relação a x_0 . Mais ainda, a aplicação $(t, t_0, x_0, \lambda) \rightarrow D_3\varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ é contínua no seu domínio*

$$D = \{(t, t_0, x_0, \lambda) : (t_0, x_0, \lambda) \in \Omega, t \in J_0\}$$

e

$$x(t) = D_3\varphi(t, t_0, x_0, \lambda) \cdot e_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_0^k}(t, t_0, x_0, \lambda)$$

para todo $1 \leq k \leq n$, é solução de

$$x' = J(t)x, \quad x(t_0) = e_k, \quad (2.4)$$

onde $J(t) = J(t, t_0, x_0, \lambda) = D_2 f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda)$.

Corolário 2.2.4. Se além das hipóteses do Teorema 2.2.3 supusermos que f é diferenciável relativamente a λ e que $D_3 f$ é contínua em Ω , então φ é diferenciável relativamente a λ e $D_4 \varphi \cdot e_k = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda^k}$ é contínua em D . Além disto, $x(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda^k}(t, t_0, x_0, \lambda)$ é solução de

$$x' = J(t)x + b(t), \quad x(t_0) = 0,$$

onde

$$b(t) = B(t) \cdot e_k, B(t) = D_3 f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda).$$

2.2.3 Equações Diferenciais Lineares

Um tipo especial de sistema de equações diferenciais resulta quando o campo vetorial é linear. O conhecimento deste tipo de sistemas é importante para o estudo local das soluções de equações não lineares, que é feito através da comparação com as soluções do sistema linear que a aproxima. Consideramos o sistema

$$x' = A(t)x + b(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.5)$$

onde $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $b(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, com $A(t) = (a_{ij}(t))$ e $b(t) = (b_i(t))$ funções contínuas. Quando $b(t) = 0$, o sistema (2.5) em $I \times \mathbb{R}^n$ chama-se *linear homogêneo*, e o problema de valor inicial resultante é dado por

$$x' = A(t)x, \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.6)$$

para todo $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, pelo Teorema de existência e unicidade das equações diferenciais sabemos que existe uma única solução $\varphi(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$ de (2.5) definida em I tal que $\varphi(t_0) = x_0$.

Definição 2.2.5. Uma matriz $\phi(t)$ de ordem $n \times n$ cujas colunas de $\phi(t)$ formam uma base de $\mathbb{R}^n$ em cada t do espaço de soluções de $x' = A(t)x$ chama-se *matriz fundamental* de $x' = A(t)x$.

Proposição 1. Sejam $\phi(t)$ e $\psi(t)$ duas soluções de $x' = A(t)x$, sendo ϕ fundamental, então existe uma única matriz C de ordem $n \times n$ tal que $\forall t \in I$,

$$\psi(t) = \phi(t)C,$$

onde a matriz C é não singular se, e somente se, $\psi(t)$ é fundamental.

O Teorema seguinte mostra que o conhecimento de uma matriz fundamental de $x' = A(t)x$ implica no conhecimento da “solução geral” de $x' = A(t)x + b(t)$.

Teorema 2.2.6. Se $\phi(t)$ é uma matriz fundamental de $x' = A(t)x$, então a solução $\varphi(t, t_0, x_0)$ de (2.5) tal que $\varphi(t_0, t_0, x_0) = x_0$ é dada por

$$\varphi(t, t_0, x_0) = \phi(t) \left[\phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \phi^{-1}(s)b(s)ds \right]. \quad (2.7)$$

2.2.4 Critério de Estabilidade

Definição 2.2.7. Fixado $\lambda \in \Lambda$. Seja $\varphi = \varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ uma solução da equação (2.2). Dizemos que φ é periódica na variável t , quando existe número real T positivo, tal que $\varphi(t, t_0, x_0, \lambda) = \varphi(t + T, t_0, x_0, \lambda)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, e o período de φ é dado pelo menor T possível com essa propriedade. Neste caso, dizemos que φ é T -periódica.

Dizemos que uma solução é estável, quando qualquer outra solução que está suficientemente próxima a esta no tempo inicial, permanece próxima quando o tempo é suficientemente longo. Caso contrário, é chamada solução instável.

Dizemos que $\varphi(t)$ uma órbita de $x' = f(t, x)$ definida para $t \geq 0$ é *estável* se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que $\psi(t)$ é solução de $x' = f(t, x)$ e $|\psi(0) - \varphi(0)| < \delta$ então $\psi(t)$ está definida para todo $t \geq 0$ e $|\psi(t) - \varphi(t)| < \epsilon$, $\forall t \geq 0$. Se além disso existir δ_1 tal que $|\psi(0) - \varphi(0)| < \delta_1$ implica $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\psi(t) - \varphi(t)| = 0$, então φ diz-se *assintoticamente estável*.

A estabilidade pode ser completamente resolvida para cada solução de uma equação diferencial linear (2.6). O seguinte teorema descreve um critério para estudar a estabilidade das órbitas de um sistema linear.

Teorema 2.2.8 (Critério de Estabilidade, [Sot79]). *Seja φ a solução do sistema*

$$x' = Ax, \quad x(0) = x_0, \quad (2.8)$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. O seguinte é válido

1. A solução $\varphi(t)$ é **estável** se todos os autovalores de A tem parte real negativa.
2. A solução $\varphi(t)$ é **instável** se ao menos um autovalor de A tem parte real positiva.

2.3 Sistemas hipercaóticos: Exemplos

Nesta seção apresentamos alguns exemplos de sistemas caóticos e hipercaóticos clássicos da literatura.

Sistema de Lorenz. Lorenz [Lor63] propôs seu famoso modelo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x), \\ \dot{y} &= cx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy, \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde x , y e z são variáveis reais e o espaço de parâmetros $\Lambda = \{a, b, c\} \subset \mathbb{R}^3$. Este sistema tem sido intensamente investigado como um sistema dinâmico (ver por exemplo [Spa12] e [Foi+01]), principalmente para estudar seus atratores estranhos, o mais clássico corresponde aos valores dos parâmetros $a = 10$, $c = 28$ e $b = 8/3$, veja a Figura 2.2.

Algumas generalizações deste modelo são dadas na tabela seguinte:

Figura 2.2: O atrator de Lorenz para os parâmetros $a = 10, b = 28, c = 2.667$ e as condições iniciais $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 1.05)$.

[CLS14]	[CL17]	[YWM20]
$\dot{x} = a(y - x) + w,$ $\dot{y} = cx - y - xz,$ $\dot{z} = -bz + xy,$ $\dot{w} = dw - xz.$	$\dot{x} = a(y - x) + sw,$ $\dot{y} = cx + dy - xz,$ $\dot{z} = -bz + xy,$ $\dot{w} = -x - rw.$	$\dot{x} = a(y - x),$ $\dot{y} = bx - y - xz + w,$ $\dot{z} = -cz + xy,$ $\dot{w} = -dw - jx + exz.$

Em todos estes trabalhos, os autores caracterizam as bifurcação zero-Hopf nos pontos singulares de tais sistemas. Usando a teoria de averaging, encontraram condições suficientes para que nos pontos de bifurcação duas soluções periódicas surjam e descrevam a estabilidade dessas órbitas.

Sistema de Rössler. Rössler [Ros79] propôs seu modelo

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= -y - z, \\
 \dot{y} &= x + ay, \\
 \dot{z} &= bx - cz + xz,
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

onde x, y e z são variáveis reais e o espaço de parâmetros $\Lambda = \{a, b, c\} \subset \mathbb{R}^3$. Os parâmetros $a = 0.2, b = 5.7$ e $c = 0.2$ correspondem ao atrator de Rössler, veja a Figura 2.3.

O sistema foi generalizado por exemplo em [WSB16], onde experimentos numéricos por computador mostraram a existência de órbitas periódicas do seguinte sistema:

Figura 2.3: O atrator de Rössler para os parâmetros $a = 0.2$, $b = 5.7$ e $c = 0.2$.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(y + x), \\ \dot{y} &= x + ay + w, \\ \dot{z} &= xy + b, \\ \dot{w} &= -cz + dw.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Sistema Chen. Chen [CU99] propôs seu modelo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x), \\ \dot{y} &= (c - a)x - xz + cy, \\ \dot{z} &= -bz + xy,\end{aligned}\tag{2.12}$$

onde x , y e z são variáveis reais e o espaço de parâmetros $\Lambda = \{a, b, c\} \subset \mathbb{R}^3$. Os parâmetros $a = 35$, $b = 3$ e $c = 28$ correspondem ao atrator de Chen, veja a Figura 2.4.

Uma generalização deste modelo é estudado por Maza [Maz15], onde é considerado o sistema hipercaótico de Chen,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x) + w, \\ \dot{y} &= dx + cy - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz, \\ \dot{w} &= yz + rw.\end{aligned}\tag{2.13}$$

O sistema (2.13) possui uma bifurcação zero-Hopf, conforme os parâmetros variam e usando a teoria de averaging, prova-se a existência de duas órbitas periódicas bifurcando do equilíbrio zero-Hopf localizado na origem do sistema hipercaótico Chen.

Figura 2.4: O atrator de Chen para os parâmetros $a = 35$, $b = 3$ e $c = 28$ com $x(0) = -0.1$, $y(0) = 0.5$ e $z(0) = -0.6$.

2.4 Equilíbrio e Bifurcação zero-Hopf

Uma bifurcação de Hopf genérica é uma bifurcação local onde um ciclo limite bifurca de um ponto de equilíbrio quando um par de autovalores complexos cruza o eixo imaginário. Existem muitas outras bifurcações de Hopf não genéricas ou degeneradas. Um deles é chamado de bifurcação zero-Hopf.

Definição 2.4.1. Um equilíbrio zero-Hopf 4-dimensional é um ponto de equilíbrio de um sistema diferencial autônomo, cuja matriz da parte linear tem um autovalor zero duplo e um par de autovalores puramente imaginários. Cujos autovalores em símbolos são $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e $\lambda_{3,4} = \pm \delta i$ com $\delta > 0$.

Exemplo 2.4.2 (Equilíbrio zero-Hopf).

1. No exemplo do sistema hipercaótico de Lorenz ([CLS14]), existe uma família a um parâmetro para o qual a origem das coordenadas é um ponto de equilíbrio zero-Hopf. Em efeito: O polinômio característico no ponto $(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0)$ é $p(\lambda) = (-b - \lambda)(d - \lambda)[\lambda^2 + (a + 1)\lambda + a(1 - c)]$. Portanto, quando $a = -1$, $b = d = 0$ e $c > 1$, obtemos uma família de um parâmetro do sistemas hipercaóticos de Lorenz para os quais a origem é um equilíbrio zero-Hopf, quando $c > 1$. Além disso, os valores próprios para esta família de parâmetros são $0, 0$ e $\pm i\sqrt{c - 1}$.
2. No exemplo do sistema hipercaótico de Rössler (2.11), é fácil comprovar que a origem do sistema é sempre um ponto de equilíbrio quando $b = 0$. O polinômio característico $p(\lambda)$ da linearização do sistema no ponto de equilíbrio localizado na origem é dado por $p(\lambda) = -(d - \lambda)\lambda(1 - a\lambda + \lambda^2)$. Portanto, quando $a = 0$ e $d = 0$, obtemos que a origem é um equilíbrio zero-Hopf. Além disso, os valores próprios para esta família de parâmetros são $0, 0$ e $\pm i$.
3. No exemplo do sistema hipercaótico de Chen (2.13), é fácil comprovar que a origem do sistema é sempre um ponto de equilíbrio dele sob qualquer escolha de parâmetros.

O polinômio característico $p(\lambda)$ da linearização do sistema no ponto de equilíbrio localizado na origem é dado por $p(\lambda) = (r - \lambda)(b + \lambda)(a(c + d - \lambda) + (c - \lambda)\lambda)$. Portanto, quando $b = 0$, $r = 0$ e $c = a$, obtemos que a origem é um equilíbrio zero-Hopf se $a(a + c) < 0$. Além disso, os valores próprios para esta família de parâmetros são 0 , 0 e $\pm i\sqrt{a(a + c)}$.

Quando uma órbita periódica bifurca de um equilíbrio de zero-Hopf, diremos que o sistema exibe uma bifurcação de zero-Hopf.

Definição 2.4.3. Um desdobramento de um sistema diferencial autônomo $\dot{x} = F(x)$ é uma família de sistemas $\dot{x} = F_\lambda(x)$, dependendo do parâmetro λ , tal que se $F_0(x) = F(x)$. Uma *bifurcação zero-Hopf* é um desdobramento de um sistema diferencial autônomo quatro dimensional que exibe um ponto de equilíbrio zero-Hopf. Quando o parâmetro $\lambda \neq 0$, o comportamento das soluções de $\dot{x} = F_\lambda(x)$ é diferente do que quando $\lambda = 0$.

Exemplo 2.4.4 (Bifurcação zero-Hopf).

1. No exemplo do sistema hipercaótico de Lorenz ([CLS14]), quando $b = 0$ e $d = 0$ o sistema tem uma bifurcação zero-Hopf no ponto de equilíbrio localizado na origem das coordenadas. Duas soluções periódicas nascem neste equilíbrio e são estáveis se $a + 1 > 0$, $b > 0$ e $d > 0$. Ver artigo [CLS14].
2. No exemplo do sistema hipercaótico de Chen (2.13), se consideramos o sistema com $c = a$ para pequenos valores de b e r , e satisfazendo $b(a + d)r > 0$ e $a(a + d) < 0$, ocorre uma bifurcação zero-Hopf emergindo dois ciclos limite da origem. Ver artigo [Maz15].

Capítulo 3

Método do Averaging

Neste capítulo apresentamos as principais ferramentas que serão utilizadas em nosso trabalho, a saber: *Teoria de Averaging para órbitas periódicas*.

A teoria de Averaging é uma ferramenta clássica para estudar o comportamento das soluções de sistemas dinâmicos não lineares e, em particular, de suas órbitas periódicas.

Consideramos o problema da bifurcação de soluções T -periódicas a partir de sistemas diferenciais da forma

$$\dot{\mathbf{x}} = F_0(t, \mathbf{x}) + \varepsilon F_1(t, \mathbf{x}) + \varepsilon^2 R(t, \mathbf{x}, \varepsilon), \quad (3.1)$$

com ε suficientemente pequeno. Aqui, as funções $F_0, F_1 : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $R : \mathbb{R} \times \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ são funções C^2 , T -periódicas na primeira variável e Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. A principal premissa é que o sistema não perturbado

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F_0(t, \mathbf{x}) \quad (3.2)$$

possui uma subvariedade de soluções periódicas. Uma solução para este problema é dada usando a teoria de averaging.

Seja $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}, \varepsilon)$ a solução do sistema (3.2) tal que $\mathbf{x}(0, \mathbf{z}, \varepsilon) = \mathbf{z}$. Escrevemos a linearização do sistema não perturbado ao longo de uma solução periódica $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0)$ como

$$\dot{\mathbf{y}} = D_{\mathbf{x}}F_0(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0))\mathbf{y}. \quad (3.3)$$

A seguir, denotamos por $\mathbf{M}_{\mathbf{z}}(t)$ alguma matriz fundamental do sistema diferencial linear (3.3).

O primeiro passo na prova do Teorema 3.0.1 que será enunciado a seguir é reduzir o problema de bifurcação de soluções T -periódicas do sistema (3.1) à bifurcação de pontos fixos do mapa de Poincaré-Andronov, ou equivalentemente, encontrar zeros de uma função conveniente $g : D(g) \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}$, onde $D(g)$ é algum subconjunto aberto de Ω .

Como, em geral, não é possível aplicar diretamente o Teorema da Função Implícita para a função g , então usaremos o Teorema da Redução de Lyapunov-Schmidt, mas não em sua forma geral, e sim na forma apresentada na seção 2.1.2. Esta teoria aqui

é simplificada ao assumir que a matriz Jacobiana de $g(\cdot, 0)$ tem uma forma particular. A hipótese correspondente para o sistema diferencial é que alguma solução matricial fundamental do sistema linearizado de (3.2) em torno de cada uma de suas soluções periódicas tem uma forma particular.

Uma das principais premissas é a existência de soluções T -periódicas do sistema (3.1) para $\varepsilon = 0$. Sob esta suposição, existe um subconjunto aberto D de Ω e um $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que, para todo $(z, \varepsilon) \in D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, a solução $x(\cdot, z, \varepsilon)$ é definida no intervalo $[0, T]$. Portanto, podemos considerar a função $f : D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por

$$f(z, \varepsilon) = x(T, z, \varepsilon) - z. \quad (3.4)$$

Então, todo $(z_\varepsilon, \varepsilon)$ tal que

$$f(z_\varepsilon, \varepsilon) = 0, \quad (3.5)$$

fornece a solução periódica $x(\cdot, z_\varepsilon, \varepsilon)$ de (3.1). O inverso também é verdadeiro, ou seja, para cada solução T -periódica de (3.1), se denotamos por z_ε seu valor em $T = 0$, então (3.5) se mantém. Assim, o problema de encontrar uma solução T -periódica de (3.1), pode ser substituído pelo problema de encontrar zeros da função de dimensão finita $f(\cdot, \varepsilon)$ dada por (3.4).

Denotamos a linearização de (3.2) por

$$y' = P(t, z)y, \quad (3.6)$$

onde

$$P(t, z) = D_x F_0(t, x(t, z, 0)), \quad (3.7)$$

e seja $Y(\cdot, z)$ alguma solução de matriz fundamental de (3.6).

Teorema 3.0.1. [BFL07] *Seja $\beta_0 : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ uma função C^2 , onde V é um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^k$. Assumimos que:*

- i) $\mathcal{Z} = \{z_\alpha = (\alpha, \beta_0(\alpha)) : \alpha \in \bar{V}\} \subset D$ e para cada $z_\alpha \in \mathcal{Z}$, a única solução x_α de (3.2) com $x(0) = z_\alpha$ é T -periódica.
- ii) Para cada $z_\alpha \in \mathcal{Z}$, existe uma matriz fundamental de soluções de (3.6), $M_\alpha(t) = M(t, z_\alpha)$ tal que a matriz

$$M_\alpha^{-1}(0) - M_\alpha^{-1}(T) = \left[\begin{array}{c|c} * & 0_{k \times (n-k)} \\ \hline * & \Delta_\alpha \end{array} \right]$$

com $\det \Delta_\alpha \neq 0$, onde Δ_α é uma matriz $(n-k) \times (n-k)$.

Consideramos a função $f_1 : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^k$ definida por

$$f_1(z) = \Pi \int_0^T M_\alpha^{-1}(t) F_1(t, x_\alpha) dt. \quad (3.8)$$

Se existe $\mathbf{a} \in V$ com $f_1(\mathbf{a}) = 0$ e $\det \left((\partial f_1 / \partial \alpha)(\mathbf{a}) \right) \neq 0$, então existe uma solução T -periódica $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$ do sistema (3.1) tal que $\mathbf{x}(0, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{z}_\alpha$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Demonstração. Na prova aplicamos o Teorema 2.1.2 à função (3.4) após uma mudança adequada de coordenadas. Nosso objetivo é provar que existe $x(t, z, \varepsilon)$ solução de (3.1) tal que $x(T, z, \varepsilon) = x(0, z, \varepsilon) = z$. Isso permite definir naturalmente a função (3.4), que traslada o problema inicial ao problema de encontrar os zeros da função $f(z, \varepsilon) = 0$. Precisamos estudar os zeros da função $f(z, \varepsilon)$ em (3.4), ou equivalentemente da função

$$g(z, \varepsilon) = \mathbf{M}_z^{-1}(T)f(z, \varepsilon). \quad (3.9)$$

Afirmção: $f(z, \varepsilon) = 0$ se e somente se $g(z, \varepsilon) = 0$. De fato,

- Se $f(z, \varepsilon) = 0$, então obtemos diretamente $g(z, \varepsilon) = \mathbf{M}_z^{-1}(T)f(z, \varepsilon) = \mathbf{M}_z^{-1}(0) = 0$.
- Se $g(z, \varepsilon) = 0$. Devemos provar que $f(z, \varepsilon) = 0$. Caso contrário $f(z, \varepsilon) \neq 0$ e $f(z, \varepsilon) \in \ker \mathbf{M}_z^{-1}(T)$, isto é, $\ker \mathbf{M}_z^{-1}(T) \neq \{0\}$, o qual é uma contradição pois $\mathbf{M}_z(T)$ é invertível.

Verifiquemos as propriedades de g do Teorema 2.1.2.

i) Desde que cada $z_\alpha \in \mathcal{Z}$ forneça uma solução T -periódica x_α de (3.2) e as soluções T -periódicas são zeros de (3.4). Logo $f(z_\alpha, 0) = 0$, e assim $g(z_\alpha, 0) = 0$, porque $x(\cdot, z_\alpha, 0)$ é T -periódica.

Agora provaremos que a derivada de g em relação a z nos pontos $(z_\alpha, 0)$, possui uma expressão específica em termos da matriz $\mathbf{M}_z^{-1}(t)$ dada por

$$G_\alpha = \frac{dg}{dz}(z_\alpha, 0) = \mathbf{M}_{z_\alpha}^{-1}(0) - \mathbf{M}_{z_\alpha}^{-1}(T). \quad (3.10)$$

Agora vamos calcular $D_z g(z_\alpha, 0)$. Derivando a equação $g(z, \varepsilon) = \mathbf{M}_z^{-1}(T)f(z, \varepsilon)$ em relação a z temos

$$\frac{dg}{dz}(z, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{M}_z^{-1}(T))f(z, \varepsilon) + \mathbf{M}_z^{-1}(T) \frac{\partial}{\partial z}(f(z, \varepsilon)).$$

Quando $z = z_\alpha$ e $\varepsilon = 0$

$$\frac{dg}{dz}(z_\alpha, 0) = \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{M}_z^{-1}(T))f(z_\alpha, 0) + \mathbf{M}_z^{-1}(T) \frac{\partial}{\partial z}(f(z_\alpha, 0)).$$

Mais $f(z_\alpha, 0) = 0$, daí

$$\frac{dg}{dz}(z_\alpha, 0) = \mathbf{M}_z^{-1}(T) \frac{\partial}{\partial z}(f(z_\alpha, 0)). \quad (3.11)$$

Lembrando que $f(z, \varepsilon) = x(T, z, \varepsilon) - z$, temos que:

$$\frac{d}{dz}f(z_\alpha, \varepsilon) = \frac{\partial x}{\partial z}(T, z_\alpha, \varepsilon) - Id. \quad (3.12)$$

Portanto precisamos calcular $\frac{\partial x}{\partial z}(\cdot, z, 0)$. Segue do Teorema (2.2.3) que $\frac{\partial x}{\partial z}(t, z, 0)$ é solução do sistema linear (3.6) com a condição inicial $\frac{\partial x}{\partial z} = Id$.

Dado que $M_z(t)$ é matriz fundamental de (3.6), então pela Proposição 1, existe uma única matriz C tal que

$$\frac{d}{dt}x(t, z, 0) = M_z(t)C, \quad \forall t \in \Omega. \quad (3.13)$$

Se $t = 0$

$$\frac{d}{dt}x(0, z, 0) = Id = M_z(0)C$$

o que implica que $C = M_z^{-1}(0)$ e substituindo na equação (3.13) temos

$$\frac{d}{dt}x(0, z, 0) = M_z(T)M_z^{-1}(0).$$

Da equação (3.12) em $(z_\alpha, 0)$ temos

$$\frac{df}{dz}(z_\alpha, 0) = \frac{\partial x}{\partial z}(T, z_\alpha, 0) - Id,$$

logo

$$\frac{df}{dz}(z_\alpha, 0) = M_z(T)M_z^{-1}(0) - Id. \quad (3.14)$$

Substituindo (3.14) na equação (3.11) temos

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dz}(z_\alpha, 0) &= M_z^{-1}(T) \frac{\partial}{\partial z}(f(z_\alpha, 0)) \\ &= M_z^{-1}(T) \left(M_z(T)M_z^{-1}(0) - Id \right) \\ &= M_z^{-1}(0) - M_z^{-1}(T). \end{aligned}$$

Assim provamos que

$$G_\alpha = \frac{dg}{dz}(z_\alpha, 0) = M_z^{-1}(0) - M_\alpha^{-1}(T). \quad (3.15)$$

Lembremos que

$$\frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(z, 0) = M_z^{-1}(T) \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(z, 0),$$

sabemos que $f(z, \varepsilon) = x(T, z, \varepsilon) - z$ e que cuja derivada quando $\varepsilon = 0$ é

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(z, 0) = \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(T, z, 0).$$

Portanto

$$\frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(z, 0) = \mathbf{M}_z^{-1}(T) \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(T, z, 0).$$

Do sistema (3.1), temos

$$\frac{dx}{dt}(\cdot, z, t) = F_0(t, x(t, z, \varepsilon)) + \varepsilon F_1(t, x(t, z, \varepsilon)) + \varepsilon^2 R(t, x(t, z, \varepsilon), \varepsilon)$$

e derivando em relação a ε

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{dx}{dt}(\cdot, z, t) \right) &= \frac{\partial}{\partial x} F_0(t, x(t, z, \varepsilon)) \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t, z, \varepsilon) + F_1(t, x(t, z, \varepsilon)) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon} F_1(t, x(t, z, \varepsilon)) + \\ &\quad 2\varepsilon R(t, x(t, z, \varepsilon)) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} R(t, x(t, z, \varepsilon), \varepsilon) \end{aligned}$$

quando $\varepsilon = 0$ na equação anterior e já que a seguinte igualdade é válida $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{dx}{dt}(\cdot, z, t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(\cdot, z, t)$, temos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(\cdot, z, 0) = \frac{\partial}{\partial x} F_0(t, x(t, z, 0)) \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t, z, 0) + F_1(t, x(t, z, 0)).$$

A esta equação podemos associar o seguinte sistema diferencial

$$y' = \frac{\partial}{\partial x} F_0(t, x(t, z, 0)) y + F_1(t, x(t, z, 0)), \quad y(0) = 0, \quad (3.16)$$

onde pelo o corolário (3.16) a função $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(\cdot, z, 0)$ é a única solução do PVI. Pelo Teorema (2.2.6)

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t, z, 0) &= \mathbf{M}_z(T) \left[\mathbf{M}_z^{-1}(0) \mathbf{M}_z(0) + \int_0^t \mathbf{M}_z^{-1}(s) F_1(s, x(s, z, 0)) ds \right] \\ &= \mathbf{M}_z(T) \int_0^t \mathbf{M}_z^{-1}(s) F_1(s, x(s, z, 0)) ds. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t, z, 0) = \mathbf{M}_z(T) \int_0^t \mathbf{M}_z^{-1}(s) F_1(s, x(s, z, 0)) ds.$$

Agora, temos

$$\frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(z, 0) = \int_0^T \mathbf{M}_z^{-1}(s) F_1(s, x(s, z, 0)) ds.$$

Consideramos a função de bifurcação

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) &= \left(\frac{\partial \pi g}{\partial \varepsilon} \right)(z_\alpha, 0) \\ &= \pi \left(\frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(z_\alpha, 0) \right) \\ &= \pi \int_0^T \mathbf{M}_{z_\alpha}^{-1}(s) F_1(s, \mathbf{x}(s, z_\alpha, 0)) ds. \end{aligned}$$

Assumindo que existe $a \in \bar{V}$, $f_1(a) = 0$ e $\det \left(\frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon}(a) \right) \neq 0$ podemos aplicar o Teorema 2.1.2. Assim existe $\alpha_\varepsilon \in V$ tal que $g(z_{\alpha_\varepsilon}, \varepsilon) = 0$ e, além disso, $f(z_{\alpha_\varepsilon}, \varepsilon) = 0$, o que assegura que $\varphi(\cdot, \varepsilon) = \mathbf{x}(\cdot, z_{\alpha_\varepsilon}, \varepsilon)$ é uma solução T -periódica de (3.1). $\square$

Assumimos que existe um conjunto aberto V com $\bar{V} \subset \Omega$ tal que para cada $\mathbf{z} \in \bar{V}$, $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0)$ seja T -periódico, onde $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0)$ indica a solução do sistema não perturbado (3.2) com $\mathbf{x}(0, \mathbf{z}, 0) = \mathbf{z}$. O conjunto $\bar{V}$ é *isócrono* para o sistema (3.1); ou seja, é um conjunto formado apenas por órbitas periódicas, todas elas com o mesmo período. Então, uma resposta para o problema de bifurcação das soluções T -periódicas a partir das soluções periódicas $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0)$ contidas em $\bar{V}$ é dada no resultado a seguir.

Teorema 3.0.2. *(Perturbações de um conjunto isócrono, [BFL07]) Assumimos que existe um conjunto aberto e limitado V com $\bar{V} \subset \Omega$, de modo que, para cada $\mathbf{z} \in \bar{V}$, a solução $\mathbf{x}(t, \mathbf{z})$ é T -periódica, então consideramos a função $f : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por*

$$f(\mathbf{z}) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{M}_{\mathbf{z}}^{-1}(t) F_1(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z})) dt. \quad (3.17)$$

Então, as seguintes afirmações são válidas:

- (a) Se existe $\mathbf{a} \in V$ com $f(\mathbf{a}) = 0$ e $\det \left((\partial f / \partial \mathbf{z})(\mathbf{a}) \right) \neq 0$, então existe uma solução T -periódica $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$ do sistema (3.1) tal que $\mathbf{x}(0, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{a}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.
- (b) O tipo de estabilidade da solução periódica $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$ é dado pelos valores próprios da matriz jacobiana $\left((\partial f / \partial \mathbf{z})(\mathbf{a}) \right)$.

Demonstração. Obtém-se como consequência do Teorema 3.0.1 considerando $k = n$. $\square$

Capítulo 4

Sistema hipercaótico de Lorenz

Neste capítulo apresentamos o modelo principal de nosso trabalho, um sistema hipercaótico de Lorenz dependendo de sete parâmetros reais. Estudamos algumas de suas propriedades, assim como os pontos de equilíbrio zero-Hopf do sistema.

4.1 O modelo

Consideramos o seguinte sistema hipercaótico autônomo quadrático quadridimensional

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x), \\ \dot{y} &= bx - y - xz + w, \\ \dot{z} &= -cz + xy, \\ \dot{w} &= -dw - jx - ky + exz,\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde o espaço de parâmetros $\Lambda = \{a, b, c, d, e, j, k\} \subset \mathbb{R}^7$.

Observemos que quando o parâmetro $k = 0$, o modelo 4.1 coincide com o modelo de [YWM20] apresentado na seção 2.3.

4.2 Propriedades dinâmicas

Apresentamos algumas propriedades do sistema (4.1). Iniciamos com a simetria do sistema em relação ao eixo z . Isso significa que qualquer órbita que não seja invariante sob T deve ter sua órbita “gêmea” no sentido dessa transformação.

Proposição 2 (Simetria). *O sistema (4.1) é invariante sob a seguinte transformação de coordenadas $T : (x, y, z, w) \rightarrow (-x, -y, z, -w)$.*

A seguinte propriedade de dissipatividade garante que o sistema pode apresentar caos.

Proposição 3 (Dissipatividade). *O sistema (4.1) é dissipativo se e somente se $a + c + d + 1 > 0$.*

Demonstração. O sistema (4.1) pode ser representado em forma vetorial, como

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}), \quad (4.2)$$

onde

$$F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a(y - x) \\ bx - y - xz + w \\ -cz + xy \\ -dw - jx - ky + exz \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Seja Ω qualquer região em $\mathbb{R}^4$ com bordo suave e $\Omega(t) = \Phi_t(\Omega)$, onde Φ_t é o fluxo de F . Além disso, seja $V(t)$ o volume de $\Omega(t)$. Pelo Teorema de Liouville [VM07], sabemos que

$$\dot{V}(t) = \int_{\Omega(t)} (\nabla \cdot F) dx dy dz dw. \quad (4.4)$$

A divergência do sistema (4.1) é dada por

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} + \frac{\partial F_4}{\partial w} = -(a + c + d + 1) < 0, \quad (4.5)$$

sempre que $a + c + d + 1 > 0$.

Inserindo o valor de $\nabla \cdot F$ de (4.5) em (4.4), obtemos

$$\dot{V}(t) = \int_{\Omega(t)} -(a + c + d + 1) dx dy dz dw = -(a + c + d + 1)V(t). \quad (4.6)$$

Integrando a equação diferencial linear de primeira ordem (4.6), obtemos

$$V(t) = e^{-(a+c+d+1)t} V(0). \quad (4.7)$$

Da equação (4.7), é claro que o elemento de volume $V(t)$ converge exponencialmente a zero, quando $t \rightarrow +\infty$. Isso mostra que o sistema (4.1) é dissipativo. $\square$

Continuando, apresentamos alguns exemplos de parâmetros onde se observa caos. Na Figura 4.1 mostramos diferentes retratos de fase do sistema 4.1 projetados em planos coordenados distintos.

Figura 4.1: Típicos retratos de fase de atratores hipercaóticos do sistema (4.1) (a) com $a = 10, b = 28, c = 8/3, d = 0.2, j = 0.4, e = -0.1, k = 4.3$; (b) para $a = 20$; (c) e (d) para $c = 3, d = 0.4, j = 3, e = -0.1, k = 3$. As figuras fornecidas foram geradas adaptando o código Python para nosso sistema 4D, de https://matplotlib.org/3.1.0/gallery/mplot3d/lorenz_attractor.html.

4.3 Análise de equilíbrio zero-Hopf

Primeiro, vamos calcular os pontos de equilíbrio do sistema hipercaótico (4.1). Pode-se verificar o seguinte:

1. A origem das coordenadas $p_0 = (0, 0, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^4$ é sempre um ponto de equilíbrio para este sistema, para qualquer escolha dos parâmetros.
2. Se $e \neq d$ e $c(d - bd + j + k)(e - be + j + k) > 0$, o sistema (4.1) tem dois pontos de equilíbrio adicionais

$$p_{\pm} = \begin{pmatrix} \pm p_1, \pm p_2, -p_3, \mp p_4 \end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} p_1 &= \sqrt{\frac{c(d - bd + j + k)}{e - d}} \\ p_2 &= \sqrt{\frac{c(d - bd + j + k)}{e - d}} \\ p_3 &= \frac{d - bd + j + k}{d - e} \\ p_4 &= \sqrt{\frac{c(d - bd + j + k)}{(e - d)^3}}(e - be + j + k). \end{aligned}$$

3. Se $e = d$ e $d - bd + j + k = 0$, o sistema (4.1) tem uma curva de pontos singulares, dada por

$$\begin{cases} y = x \\ z = \frac{x^2}{c} \\ w = x - bx + \frac{x^3}{c} \end{cases}$$

4. Se $c = 0$ todo o eixo z está preenchido de equilíbrios. Além disso, se $c = 0$ e $\frac{(d - bd + j + k)(e - be + j + k)}{e - d} \neq 0$ temos o adicional ponto de equilíbrio

$$p = \left(0, 0, -\frac{d - bd + j + k}{d - e}, 0\right).$$

Observamos que os dois equilíbrios $p_{\pm}$ tendem aos pontos de equilíbrio p quando $c \rightarrow 0$.

Agora vamos caracterizar os pontos de equilíbrio zero-Hopf do sistema (4.1).

Proposição 4. *O sistema hipercaótico (4.1) tem um equilíbrio zero-Hopf se as seguintes afirmações são válidas:*

- (a) *A origem $p_0 = (0, 0, 0, 0)$ é um equilíbrio zero-Hopf se e somente se*

(i) *$a = -1$, $b + k > 1$, $c = d = 0$ e $j = -k$, os autovalores em p_0 para as condições do parâmetro são $0, 0, \pm\sqrt{b - 1 + k}$ i,*

(ii) *ou $c = 0$, $d = -1 - a$, $k - 1 - a - a^2 - ab > 0$ e $j = -(1 + a)(-1 + b) - k$. Neste caso, os autovalores em p_0 para as condições do parâmetro são $0, 0, \pm\sqrt{k - a(1 + a + b) - 1}$ i.*

- (b) *Se $(d - bd + j + k)(d - e) \neq 0$ e $c = 0$. O ponto de equilíbrio p é um equilíbrio zero-Hopf se e somente se*

(i) *$a = -(d + 1)$, e*

$$\frac{d^2e - d^3 + j + d(e(1 - b) + j + 2k) + e(1 - b - k)}{d - e} > 0. \quad (4.8)$$

Além disso, os autovalores em p são $0, 0$ e

$$\pm \delta_1 i = \pm \sqrt{\frac{ed^2 - d^3 + j + k + d(e(1-b) + j + 2k) + e(1-k-b)}{d-e}} i.$$

(ii) ou $d = -(a+1)$, e

$$\frac{k-1-e-a(3+a(3+a)+e+(a+b)e-j)+(2a+e)}{1+a+e} > 0. \quad (4.9)$$

Além disso, os autovalores em p são $0, 0$ e

$$\pm \delta_2 i = \pm \sqrt{\frac{k-1-e-a(3+a(3+a)+e+(a+b)e-j)+(2a+e)}{1+a+e}} i.$$

(c) Os equilíbrios $p_{\pm}$ nunca são equilíbrios zero-Hopf.

Observe que, apesar do eixo z ser preenchido com equilíbrios quando $c = 0$, seus únicos equilíbrios zero-Hopf são a origem e o ponto de equilíbrio p . Além disso, correspondendo à afirmação (a)(i) da Proposição 4, há uma família paramétrica unidimensional para a qual a origem é um ponto de equilíbrio zero-Hopf, e há uma família dependendo de dois parâmetros correspondendo à afirmação (a)(ii) da Proposição 4, ainda mais, há uma família de um parâmetro para a qual o ponto de equilíbrio p é um equilíbrio zero-Hopf do sistema hipercaótico (4.1), correspondendo às afirmações (b)(i) e (b)(ii).

Demonstração.

Demonstração parte (a)

A matriz Jacobiana em p_0 é

$$J(p_0) = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ b & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ -j & -k & 0 & -d \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico da parte linear do sistema no ponto de equilíbrio p_0 é

$$p(\lambda) = (c - \lambda) \left(-aj - ak - k\lambda + (-d - \lambda)(a - ab + \lambda + a\lambda + \lambda^2) \right),$$

cuja equação característica no ponto p_0 é obtida

$$\lambda^4 + \alpha_3 \lambda^3 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0, \quad (4.10)$$

onde

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= 1 + a + c + d, \\ \alpha_2 &= c + d(1 + c) + a(1 - b + c + d) + k, \\ \alpha_1 &= c(d + k) + a(d - bd + c(1 - b + d) + j + k), \\ \alpha_0 &= ac(d - bd + j + k).\end{aligned}$$

Claramente, um ponto de equilíbrio é um equilíbrio zero-Hopf se e somente se $p(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 + \delta^2)$ com $\delta > 0$. Resolvendo assim a equação $p(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 + \delta^2)$ em relação aos parâmetros a, b, c, d, e, j, k e δ , obtemos apenas duas soluções reais. Portanto,

- quando os parâmetros satisfazem $a = -1, c = d = 0, j = -k$ e $b + k > 1$ a equação (4.10) tem raízes

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \text{ e } \lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{b - 1 + k}.$$

Ou seja, o ponto de equilíbrio p_0 é um ponto de equilíbrio zero-Hopf do sistema (4.1), comprovando a afirmação (a)(i) da Proposição 4.

- quando os parâmetros satisfazem $c = 0, d = -(1 + a), j = -a(1 + a)(-1 + b) - k$ e $k - a - a(1 + a + b) > 0$ a equação (4.10) tem raízes

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \text{ e } \lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{k - a(1 + a + b) - 1}.$$

Ou seja, o ponto de equilíbrio p_0 é um ponto de equilíbrio zero-Hopf do sistema (4.1), isto prova a parte (a)(ii) da Proposição 4.

Demonstração parte (b)

A matriz Jacobiana em p é

$$J(p) = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ \frac{d-be+j+k}{d-e} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ -j - \frac{e(d-bd+j+k)}{d-e} & -k & 0 & -d \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico da parte linear do sistema no ponto de equilíbrio p é

$$p(\lambda) = -\left(a\left(-j - \frac{e(d-bd+j+k)}{d-e}\right) + k(-a - \lambda) + \left(-a\left(b + \frac{d-bd+j+k}{d-e}\right) + (-1 - \lambda)(-a - \lambda)\right)(-d - \lambda)\right),$$

cuja equação característica no ponto p é obtida

$$\lambda^4 + \tilde{\alpha}_3\lambda^3 + \tilde{\alpha}_2\lambda^2 = 0, \quad (4.11)$$

onde

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_3 &= 1 + a + d, \\ \tilde{\alpha}_2 &= a + d + ad + k - \frac{a(d - be + j + k)}{d - e}.\end{aligned}$$

Claramente, um ponto de equilíbrio é um equilíbrio zero-Hopf se e somente se $p(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 + \delta^2)$ com $\delta > 0$. Resolvendo assim a equação $p(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 + \delta^2)$ em relação aos parâmetros a, b, c, d, e, j, k e δ , obtemos apenas duas soluções reais. Portanto,

- quando os parâmetros satisfazem $c = 0, a = -(d + 1)$ e

$$\frac{d^2e - d^3 + j + k - e(-1 + b + k) + d(e - be + j + 2k)}{d - e} > 0$$

a equação (4.12) tem raízes

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \text{ e } \lambda_{3,4} = \pm i \sqrt{\frac{d^2e - d^3 + j + k - e(-1 + b + k) + d(e - be + j + 2k)}{d - e}},$$

ou seja, o ponto de equilíbrio p é um ponto de equilíbrio zero-Hopf do sistema (4.1), comprovando a afirmação (b)(i) da Proposição 4.

- quando os parâmetros satisfazem $c = 0, d = -(a + 1)$ e

$$\frac{k - 1 - e - a(3 + a(3 + a) + e + (a + b)e - j) + (2a + e)k}{1 + a + e} > 0$$

a equação (4.10) tem raízes

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \text{ e } \lambda_{3,4} = \pm i \sqrt{\frac{-1 - e - a(3 + a(3 + a) + e + (a + b)e - j) + k + (2a + e)k}{1 + a + e}},$$

ou seja, o ponto de equilíbrio p é um ponto de equilíbrio zero-Hopf do sistema (4.1), isto prova a parte (b)(ii) da Proposição 4.

Demonstração parte (c)

Agora forneceremos as condições necessárias e suficientes sob as quais p_+ se $c \neq 0$, ou p se $c = 0$, é um ponto de equilíbrio zero-Hopf. A matriz Jacobiana do sistema (4.1) avaliada em p_+ é

$$J(p_+) = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ \frac{d-be+j+k}{d-e} & -1 & -\sqrt{\frac{c(d-bd+j+k)}{e-d}} & 1 \\ \sqrt{\frac{c(d-bd+j+k)}{e-d}} & \sqrt{\frac{c(d-bd+j+k)}{e-d}} & -c & 0 \\ -j - \frac{e(d-bd+j+k)}{d-e} & -k & e\sqrt{\frac{c(d-bd+j+k)}{e-d}} & -d \end{bmatrix}$$

e seu polinômio característico é

$$\lambda^4 + \widehat{\alpha}_3\lambda^3 + \widehat{\alpha}_2\lambda^2 + \widehat{\alpha}_1\lambda = 0, \quad (4.12)$$

onde

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha}_3 &= 1 + a + c + d, \\ \widehat{\alpha}_2 &= \frac{bcd + d^2(1+c) - c(e+j) - de(1+c) + ((c+d)(d-e) + (-1+b)e - j - k) - (c-d+e)k}{d-e}, \\ \widehat{\alpha}_1 &= 2ac((-1+b)d - j - k) + c\left(bd - j + \frac{a(d^2 + d(-2 + 2b - e) + (-1+b)e - 3(j+k))}{d-e}\right).\end{aligned}$$

As expressões para a matriz $J(p_+)$ e para seu polinômio característico também funcionam para o equilíbrio p considerando $c = 0$. Forçando que $p(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 + \delta^2)$, devemos resolver o seguinte sistema: $\widehat{\alpha}_3 = 0$, $\widehat{\alpha}_2 = \delta^2$ e $\widehat{\alpha}_1 = 0$. Obtendo as seguintes duas soluções reais:

- Quando $a = -1 - d$ e $c = 0$

$$S^1 : \delta = \sqrt{\frac{d^2e - d^3 + j + k - e(-1 + b + k) + d(e - be + j + 2k)}{d - e}},$$

- quando $d = -1 - a$ e $c = 0$

$$S^2 : \delta = \sqrt{\frac{k - 1 - e - a(3 + a(3 + a) + e + (a + b)e - j) + (2a + e)}{1 + a + e}}.$$

As soluções S^1 e S^2 implicam que p é um equilíbrio zero-Hopf se as condições são satisfeitas.

Como nas duas soluções temos $c = 0$, segue-se que o equilíbrio p_+ nunca pode ser um equilíbrio zero-Hopf, provando a afirmação (c) e, conseqüentemente, provando a Proposição 4. $\square$

Capítulo 5

Existência de órbitas periódicas para o sistema de Lorenz

Neste capítulo mostramos a existência de órbitas periódicas para o sistema hipercaótico tipo Lorenz 4.1. Estudamos a bifurcação zero-Hopf do sistema 4.1 no ponto de equilíbrio localizado na origem e a geração de soluções periódicas conforme os parâmetros mudam. A ferramenta principal para este objetivo é o método de Averaging descrito no capítulo 3.

Teorema 5.0.1. *Consideremos o sistema hipercaótico (4.1),*

(I) *Quando os parâmetros assumem os valores:*

$$(a, b, c, d, j) = (-1 + \varepsilon a_1, 1 - k + \delta^2 + \varepsilon b_1, \varepsilon c_1, \varepsilon d_1, -k + \varepsilon j_1), \quad (5.1)$$

onde $\varepsilon > 0$ é um parâmetro suficientemente pequeno e a_1, b_1, c_1, d_1, e, k e j_1 são parâmetros reais. Então, se

$$c_1 \neq 0, \quad j_1 + d_1(k - \delta^2) \neq 0, \quad e \\ j_1 \neq b_1 e - d_1 k + a_1 e k + d_1 \delta_2 - a_1 e \delta^2 \pm \sqrt{-a_1^2 e^2 \delta^2 - 2a_1 d_1 e^2 \delta^2 - d_1^2 e^2 \delta^2}, \quad (5.2)$$

o sistema (4.1) tem uma bifurcação zero-Hopf no ponto de equilíbrio localizado na origem das coordenadas. Duas soluções periódicas nascem neste equilíbrio. Além disso, as soluções são estáveis se $c_1 > 0$ e $a_1 + d_1 > 0$.

(II) *Quando os parâmetros assumem os valores:*

$$(c, d, j, k) = (\varepsilon c_1, -1 - a + \varepsilon d_1, -b - a(a + 2b) - \delta^2 + \varepsilon j_1, 1 + a(1 + a + b) + \delta^2 + \varepsilon k_1), \quad (5.3)$$

onde $\varepsilon > 0$ é um parâmetro suficientemente pequeno e c_1, d_1, j_1, a, b, e e k_1 são números

reais. Então, se

$$\begin{aligned} a &\neq 0, c_1 \neq 0, 1 + a + e \neq 0, (b - 1)d_1 \neq j_1 + k_1 e \\ j_1 &\neq \frac{-ad_1 \left(1 + e + a(3 + a - b + e) \right) - a(1 + 2a + e)k_1 \pm \sqrt{-a^2 d_1^2 (1 + a + e)^2 \delta^2}}{a^2}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

o sistema (4.1) tem uma bifurcação zero-Hopf no ponto de equilíbrio localizado na origem das coordenadas. Duas soluções periódicas nascem neste equilíbrio. Além disso, as soluções são estáveis se $c_1 > 0$ e $d_1 > 0$.

Demonstração.

(I) Consideremos os valores dos parâmetros a, b, c, d e j dados como

$$\begin{aligned} a &= -1 + \varepsilon a_1, \\ b &= 1 - k + \delta^2 + \varepsilon b_1, \\ c &= \varepsilon c_1, \\ d &= \varepsilon d_1, \\ j &= -k + \varepsilon j_1, \end{aligned}$$

onde $\varepsilon > 0$ é um parâmetro suficientemente pequeno e a_1, b_1, c_1, d_1 e j_1 são números reais. Com essas substituições, o sistema (4.1) torna-se

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y - a_1(x - y)\varepsilon, \\ \dot{y} &= w + x - kx - y - xz + x\delta^2 + b_1x\varepsilon, \\ \dot{z} &= xy - c_1z\varepsilon, \\ \dot{w} &= kx - ky + exz + (-d_1w - j_1x)\varepsilon. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Em seguida, redimensionamos as variáveis. Seja $(x, y, z, w) = (\varepsilon X, \varepsilon Y, \varepsilon Z, \varepsilon W)$, e denotando as variáveis (X, Y, Z, W) por (x, y, z, w) o sistema (5.5) é escrito da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y - a_1(x - y)\varepsilon, \\ \dot{y} &= w + (1 - k + \delta^2)x - y + x(b_1 - z)\varepsilon, \\ \dot{z} &= (xy - c_1z)\varepsilon, \\ \dot{w} &= k(x - y) + (-d_1w - j_1x + exz)\varepsilon. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Para descrever o comportamento do sistema (5.6), aplicaremos o método de averaging descrito no Teorema 3.0.2. Usando a notação $\mathbf{x} = (x, y, z, w)$

$$F_0(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x - y \\ w + (1 - k + \delta^2)x - y \\ 0 \\ k(x - y) \end{pmatrix},$$

$$F_1(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -a_1(x - y) \\ x(b_1 - z) \\ xy - c_1z \\ -d_1w - j_1x + exz \end{pmatrix},$$

e $F_2(t, \mathbf{x}, \varepsilon) = 0$. Vamos considerar o seguinte problema de valor inicial dado pelo sistema não perturbado

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= F_0(t, \mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(0, \varepsilon) &= (x_0, y_0, z_0, w_0) = \mathbf{z}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

A solução para este sistema não perturbado é

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{z}, \varepsilon) = (x(t), y(t), z(t), w(t)),$$

onde

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{-w_0 + kx_0 + (w_0 + x_0(-k + \delta^2)) \cos(t\delta) + (x_0 - y_0)\delta \sin(t\delta)}{\delta^2}, \\ y(t) &= \frac{-w_0 + kx_0 + (w_0 - kx_0 + y_0\delta^2) \cos(t\delta) + \delta(w_0 + x_0 - kx_0 - y_0 + x_0\delta^2) \sin(t\delta)}{\delta^2}, \\ z(t) &= z_0, \\ w(t) &= \frac{(-w_0 + kx_0)(k - \delta^2) + k(w_0 + x_0(-k + \delta^2)) \cos(t\delta) + k(x_0 - y_0)\delta \sin(t\delta)}{\delta^2}. \end{aligned}$$

Observe que todas as soluções $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}, \varepsilon)$ com $\mathbf{z} \neq 0$ são periódicas, e têm o mesmo período $T = \frac{2\pi}{\delta}$. Sabemos escrever a linearização do sistema não perturbado ao longo de uma solução periódica $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0)$ como

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{D}_{\mathbf{x}}F_0(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0))\mathbf{y}. \quad (5.8)$$

A matriz fundamental $\mathbf{M}_{\mathbf{z}}(t)$ é dada por

$$\mathbf{M}_{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{k+(-k+\delta^2) \cos(t\delta)+\delta \sin(t\delta)}{\delta^2} & -\frac{\sin(t\delta)}{\delta} & 0 & \frac{-1+\cos(t\delta)}{\delta^2} \\ \frac{k-k \cos(t\delta)+\delta(1-k+\delta^2) \sin(t\delta)}{\delta^2} & \cos(t\delta) - \frac{\sin(t\delta)}{\delta} & 0 & \frac{-1+\cos(t\delta)+\delta \sin(t\delta)}{\delta^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{k(k-\delta^2+(-k+\delta^2) \cos(t\delta)+\delta \sin(t\delta))}{\delta^2} & -\frac{k \sin(t\delta)}{\delta} & 0 & \frac{-k+\delta^2+k \cos(t\delta)}{\delta^2} \end{pmatrix},$$

e sua inversa $\mathbf{M}_{\mathbf{z}}^{-1}(t)$ é dada por

$$\mathbf{M}_{\mathbf{z}}^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{k+(-k+\delta^2) \cos(t\delta)-\delta \sin(t\delta)}{\delta^2} & \frac{\sin(t\delta)}{\delta} & 0 & \frac{-1+\cos(t\delta)}{\delta^2} \\ \frac{k-k \cos(t\delta)+\delta(-1+k-\delta^2) \sin(t\delta)}{\delta^2} & \cos(t\delta) + \frac{\sin(t\delta)}{\delta} & 0 & \frac{-1+\cos(t\delta)-\delta \sin(t\delta)}{\delta^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k(k-\delta^2)(-1+\cos(t\delta))+k\delta \sin(t\delta)}{\delta^2} & \frac{k \sin(t\delta)}{\delta} & 0 & \frac{-k+\delta^2+k \cos(t\delta)}{\delta^2} \end{pmatrix},$$

onde $r := \delta$. Calculando a integral estabelecida no Teorema 3.0.2,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}) &= \frac{r}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{r}} \mathbf{M}_z^{-1}(t) \mathbf{F}_1(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z})) dt \\ &= (f_1(\mathbf{z}), f_2(\mathbf{z}), f_3(\mathbf{z}), f_4(\mathbf{z})), \end{aligned} \quad (5.9)$$

onde as componentes de $f(\mathbf{z})$ são dados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{z}) &= \frac{1}{2\delta^4} \left(-3(w_0 - kx_0)(j_1 + d_1k - ez_0) - \left(-2d_1w_0 - b_1x_0 + j_1x_0 + 3d_1kx_0 + b_1y_0 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. a_1(w_0 + k(-2x_0 + y_0)) - ((-1 + e)x_0 + y_0)z_0 \right) \delta^2 + a_1(-2x_0 + y_0)\delta^4 \right), \\ f_2(\mathbf{z}) &= \frac{-1}{2\delta^3} \left(\frac{3(w_0 - kx_0)(j_1 + d_1k - ez_0)}{\delta} + (-2d_1w_0 + j_1y_0 + d_1k(2x_0 + y_0) - ey_0z_0)\delta + \right. \\ &\quad \left. a_1\delta \left(k((-2 + k)x_0 + y_0) + (1 - 2k)x_0\delta^2 + x_0\delta^4 + w_0(1 - k + \delta^2) \right) - (b_1 - z_0)\delta(w_0 - \right. \\ &\quad \left. y_0 + x_0(1 - k + \delta^2)) \right), \\ f_3(\mathbf{z}) &= \frac{1}{2} \left(x_0^2 - 2c_1z_0 + \frac{3(w_0 - kx_0)^2}{\delta^4} + \frac{x_0(2w_0 + x_0 - 2kx_0) - 2x_0y_0 + y_0^2}{\delta^2} \right), \\ f_4(\mathbf{z}) &= \frac{1}{2\delta^4} \left(3k(-w_0 + kx_0)(j_1 + d_1k - ez_0) + \left(j_1(2w_0 - 3kx_0) + k(4d_1w_0 + b_1x_0 - 5d_1kx_0 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - b_1y_0 - a_1(w_0 - 2kx_0 + ky_0)) + (-2ew_0 - kx_0 + 3ekx_0 + ky_0)z_0 \right) \delta^2 + \left(-2d_1(w_0 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - kx_0) + a_1k(-2x_0 + y_0) \right) \delta^4 \right), \end{aligned}$$

e resolvendo o sistema não linear dado por $f(\mathbf{z}) = 0$, podemos concluir que o sistema tem as seguintes três soluções

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_0 &= (0, 0, 0, 0), \\ \mathbf{S}_1 &= \left(\frac{\sqrt{c_1}\sqrt{j_1+d_1(k-\delta^2)}}{\sqrt{e}}, \frac{\sqrt{c_1}\sqrt{j_1+d_1(k-\delta^2)}}{\sqrt{e}}, \frac{j_1 + d_1k - d_1\delta^2}{e}, \frac{\sqrt{c_1}(-k-\delta^2)\sqrt{j_1+d_1(k-\delta^2)}}{\sqrt{e}} \right), \\ \mathbf{S}_2 &= \left(-\frac{\sqrt{c_1}\sqrt{j_1+d_1(k-\delta^2)}}{\sqrt{e}}, -\frac{\sqrt{c_1}\sqrt{j_1+d_1(k-\delta^2)}}{\sqrt{e}}, \frac{j_1 + d_1k - d_1\delta^2}{e}, \frac{\sqrt{c_1}(-k+\delta^2)\sqrt{j_1+d_1(k-\delta^2)}}{\sqrt{e}} \right). \end{aligned}$$

A primeira solução corresponde ao ponto de equilíbrio localizado na origem. Para as outras

soluções, observemos o determinante da matriz é

$$\begin{aligned} \det\left(\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}}\right)(\mathbf{S}_1)\right) &= \det\left(\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}}\right)(\mathbf{S}_2)\right) \\ &= \frac{1}{2e^2\delta^4}c_1(j_1 + d_1(k - \delta^2))\left(\left(j_1 + d_1k - e(b_1 + a_1k)\right)^2 + \right. \\ &\quad \left(2b_1e(d_1 - a_1e) + a_1^2e^2(1 - 2k) + d_1(d_1e^2 - 2j_1 - 2d_1k) + \right. \\ &\quad \left. 2a_1e(d_1e + j_1 + 2d_1k)\right)\delta^2 + (d_1 - a_1e)^2\delta^4\Big). \end{aligned}$$

As condições (5.2) garantem que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2e^2\delta^4}c_1(j_1 + d_1(k - \delta^2))\left(\left(j_1 + d_1k - e(b_1 + a_1k)\right)^2 + \left(2b_1e(d_1 - a_1e) + a_1^2e^2(1 - 2k) + \right. \right. \\ \left. \left. d_1(d_1e^2 - 2j_1 - 2d_1k) + 2a_1e(d_1e + j_1 + 2d_1k)\right)\delta^2 + (d_1 - a_1e)^2\delta^4\right) \neq 0 \end{aligned}$$

e assim, pelo Teorema (3.0.2), existem duas soluções T -periódica $\mathbf{x}_1(t, \varepsilon)$ e $\mathbf{x}_2(t, \varepsilon)$ do sistema (4.1) de modo que $\mathbf{x}_1(0, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{S}_1$ e $\mathbf{x}_2(0, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{S}_2$, em que seu período é $T = \frac{2\pi}{\delta}$.

Para determinar o tipo de estabilidade das soluções periódicas, examinamos os autovalores da matriz jacobiana $\Gamma_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}}\right)(\mathbf{S}_1)$ e $\Gamma_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}}\right)(\mathbf{S}_2)$. Temos que os valores próprios são os mesmos para ambas matrizes e são dados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\frac{c_1}{2} \pm \frac{\sqrt{c_1(-8(j_1 + d_1k) + (c_1 + 8d_1)\delta^2)}}{2\delta}, \\ \lambda_{3,4} &= -\frac{a_1 + d_1}{2} \pm i \frac{\sqrt{(-b_1e + j_1 + (d_1 - a_1e)(k - \delta^2))^2}}{2e\delta}. \end{aligned}$$

A estabilidade segue impondo que os autovalores tenham parte real negativa e substituindo a_1, b_1, c_1, d_1, j_1 , e k_1 em termos de a, b, c, d, j , e k .

Finalmente, as soluções periódicas

$$\mathbf{x}_1 = (x_1(t, \varepsilon), y_1(t, \varepsilon), z_1(t, \varepsilon), w_1(t, \varepsilon))$$

e

$$\mathbf{x}_2 = (x_2(t, \varepsilon), y_2(t, \varepsilon), z_2(t, \varepsilon), w_2(t, \varepsilon))$$

do sistema (5.6), fornecem as soluções periódicas

$$\varepsilon \mathbf{x}_1 = (\varepsilon x_1(t, \varepsilon), \varepsilon y_1(t, \varepsilon), \varepsilon z_1(t, \varepsilon), \varepsilon w_1(t, \varepsilon))$$

e

$$\varepsilon \mathbf{x}_2 = (\varepsilon x_2(t, \varepsilon), \varepsilon y_2(t, \varepsilon), \varepsilon z_2(t, \varepsilon), \varepsilon w_1(t, \varepsilon))$$

de sistema (5.5). Uma vez que cada uma dessas soluções periódicas anteriores tende ao ponto de equilíbrio $(0, 0, 0, 0)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, elas correspondem a uma bifurcação zero-Hopf do ponto de equilíbrio zero-Hopf.

(II) Consideremos os valores dos parâmetros c, d, j e k dados por

$$c = \varepsilon c_1, \quad (5.10)$$

$$d = -1 - a + \varepsilon d_1, \quad (5.11)$$

$$j = -b - a(a + 2b) - \delta^2 + \varepsilon j_1, \quad (5.12)$$

$$k = 1 + a(1 + a + b) + \delta^2 + \varepsilon k_1, \quad (5.13)$$

onde $\varepsilon > 0$ é um parâmetro suficientemente pequeno e c_1, d_1, j_1 e k_1 são números reais diferentes de zero. Com essas substituições, o sistema (4.1) torna-se

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -a(x - y), \\ \dot{y} &= w + bx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - c_1 z \varepsilon, \\ \dot{w} &= (1 + a)w + (a^2 + b + 2ab)x - (1 + a - a^2)y + exz + (x - y)\delta^2 + (-d_1 w - j_1 x - k_1 y)\varepsilon. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Em seguida, redimensionamos as variáveis. Seja $(x, y, z, w) = (\varepsilon X, \varepsilon Y, \varepsilon Z, \varepsilon W)$, e denotando as variáveis (X, Y, Z, W) por (x, y, z, w) o sistema (5.5) é escrito da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -a(x - y), \\ \dot{y} &= w + bx - y - xz \varepsilon, \\ \dot{z} &= (xy - c_1 z) \varepsilon, \\ \dot{w} &= (1 + a)w + (a^2 + b + 2ab)x - (1 - a - a^2 - ab)y + (x - y)\delta^2 + (-d_1 w - j_1 x - k_1 y + exz) \varepsilon. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Para descrever o comportamento do sistema (5.6), aplicaremos o método de averaging descrito no Teorema 3.0.2. Usando a notação $\mathbf{x} = (x, y, z, w)$

$$F_0(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -a(x - y) \\ w + bx - y \\ 0 \\ (1 + a)w + (a^2 + b + 2ab)x - (1 + a + a^2 - ab)y + (x - y)\delta^2 \end{pmatrix},$$

$$F_1(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ xz \\ xy - c_1 z \\ -d_1 w - j_1 x - k_1 y + exz \end{pmatrix} \varepsilon,$$

e $F_2(t, \mathbf{x}, \varepsilon) = 0$. Vamos a considerar o seguinte problema de valor inicial dado pelo sistema não perturbado

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= F_0(t, \mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(0, \varepsilon) &= (x_0, y_0, z_0, w_0) = \mathbf{z}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

A solução para este sistema não perturbado é

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{z}, \varepsilon) = (x(t), y(t), z(t), w(t)),$$

onde

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\delta^2} \left(a(w_0 + (a+b)x_0 - (1+a)y_0) + x_0\delta^2 - a(w_0 + (a+b)x_0 - (1+a)y_0) \cos(t\delta) + \right. \\ &\quad \left. a(-x_0 + y_0)\delta \sin(t\delta) \right), \\ y(t) &= \frac{1}{\delta^2} \left(a(w_0 + (a+b)x_0 - (1+a)y_0) + x_0\delta^2 - \left(a(w_0 + (a+b)x_0 - (1+a)y_0) + (x_0 - y_0)\delta^2 \right) \right. \\ &\quad \left. \cos(t\delta) + (w_0 + bx_0 - y_0)\delta \sin(t\delta) \right), \\ z(t) &= z_0, \\ w(t) &= \frac{1}{\delta^2} \left(-(-1+b) \left(a(w_0 + (a+b)x_0 - (1+a)y_0) + x_0\delta^2 \right) + \left(a(-1+b)(w_0 + (a+b)x_0 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (1+a)y_0) + (w_0 + (-1+b)x_0)\delta^2 \right) \cos(t\delta) + \delta((1+a)w_0 + bx_0 + 2abx_0 + a^2(x_0 - y_0) - \right. \\ &\quad \left. y_0 - a(1+b)y_0 + (x_0 - y_0)\delta^2) \sin(t\delta) \right). \end{aligned}$$

Observe que todas as soluções $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}, \varepsilon)$ com $\mathbf{z} \neq 0$ são periódicas, e têm o mesmo período $T = \frac{2\pi}{\delta}$. Sabemos escrever a linearização do sistema não perturbado ao longo de uma solução periódica $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0)$ como

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{D}_{\mathbf{x}}F_0(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0))\mathbf{y}. \quad (5.17)$$

A matriz fundamental $\mathbf{M}_{\mathbf{z}}(t)$ é dada por

$$\mathbf{M}_{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{a(a+b)+\delta^2-a(a+b)\cos(t\delta)-a\delta\sin(t\delta)}{\delta^2} & \frac{a(1+a)(-1-\cos(t\delta))+a\delta\sin(t\delta)}{\delta^2} & 0 & \frac{a-a\cos(t\delta)}{\delta^2} \\ \frac{-\left(a(a+b)+\delta^2\right)(-1+\cos(t\delta))+b\delta\sin(t\delta)}{\delta^2} & \frac{-a(1+a)+(a+a^2+\delta^2)\cos(t\delta)-\delta\sin(t\delta)}{\delta^2} & 0 & \frac{a-a\cos(t\delta)+\delta\sin(t\delta)}{\delta^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & 0 & m_{44} \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

onde m_{41} , m_{42} e m_{44} são

$$\begin{aligned} m_{41} &= \frac{(-1+b)(a(a+b)+\delta^2)(-1+\cos(t\delta))+\delta(a^2+b+2ab+\delta^2)\sin(t\delta)}{\delta^2}, \\ m_{42} &= -\frac{a(1+a)(-1+b)(-1+\cos(t\delta))+\delta(1+a(1+a+b)+\delta^2)\sin(t\delta)}{\delta^2}, \\ m_{44} &= \frac{a-ab+(a(-1+b)+\delta^2)\cos(t\delta)+(1+a)\delta\sin(t\delta)}{\delta^2}. \end{aligned}$$

e sua inversa $\mathbf{M}_z^{-1}(t)$ é dada por

$$\mathbf{M}_z^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{a(a+b)+\delta^2-a(a+b)\cos(t\delta)+a\delta\sin(t\delta)}{\delta^2} & \frac{a(1+a)(-1+\cos(t\delta))-a\delta\sin(t\delta)}{\delta^2} & 0 & \frac{a-a\cos(t\delta)}{\delta^2} \\ \hat{m}_{21} & \hat{m}_{22} & 0 & \hat{m}_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hat{m}_{41} & \hat{m}_{42} & 0 & \hat{m}_{44} \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

onde $\hat{m}_{41}$, $\hat{m}_{42}$ e $\hat{m}_{44}$ são

$$\begin{aligned} \hat{m}_{21} &= -\frac{(a(a+b)+\delta^2)(-1+\cos(t\delta))+b\delta\sin(t\delta)}{\delta^2}, \\ \hat{m}_{22} &= \frac{-a(1+a)+(a+a^2+\delta^2)\cos(t\delta)+\delta\sin(t\delta)}{\delta^2}, \\ \hat{m}_{24} &= \frac{a-a\cos(t\delta)-\delta\sin(t\delta)}{\delta^2}, \\ \hat{m}_{41} &= \frac{(-1+b)(a(a+b)+\delta^2)(-1+\cos(t\delta))-\delta(a^2+b+2ab+\delta^2)\sin(t\delta)}{\delta^2}, \\ \hat{m}_{42} &= \frac{-a(1+a)(-1+b)(-1+\cos(t\delta))+\delta(1+a(1+a+b)+\delta^2)\sin(t\delta)}{\delta^2}, \\ \hat{m}_{44} &= \frac{a-ab+(a(-1+b)+\delta^2)\cos(t\delta)-(1+a)\delta\sin(t\delta)}{\delta^2}. \end{aligned}$$

onde $r := \delta$. Calculando a integral estabelecida no Teorema 3.0.2,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}) &= \frac{r}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{r}} \mathbf{M}_z^{-1}(t) \mathbf{F}_1(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z})) dt \\ &= (f_1(\mathbf{z}), f_2(\mathbf{z}), f_3(\mathbf{z}), f_4(\mathbf{z})), \end{aligned} \quad (5.20)$$

onde as componentes de $f(\mathbf{z})$ são dados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{z}) &= \frac{1}{2\delta^4} a \left(3a(w_0 + (a+b)x_0 - (1+a)y_0)((-1+b)d_1 - j_1 - k_1 + (1+a+e)z_0) + \right. \\ &\quad \left. (-2j_1x_0 - 3k_1x_0 + d_1(w_0 + 3(-1+b)x_0) + k_1y_0 + (2+a+2e)x_0z_0 + ay_0z_0)\delta^2 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(\mathbf{z}) &= \frac{1}{2\delta^4} \left(3a^2(w_0 + (a+b)x_0 - (1+a)y_0)((-1+b)d_1 - j_1 - k_1 + ez_0) + \left(k_1(w_0 - 3ax_0 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + bx_0 + (-1+a)y_0) + d_1(w_0 + 2aw_0 + (b+a(-3+a+5b))x_0 - (1+a(1+a+b))y_0) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - a(3x_0 - y_0)(j_1 - ez_0) \right) \delta^2 + d_1(x_0 - y_0)\delta^4 + az_0 \left(3a(1+a)(w_0 + (a+b)x_0 - (1+a) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. y_0) + (w_0 + (3+3a+b)x_0 - (2+a)y_0)\delta^2 \right) \right), \\
f_3(\mathbf{z}) &= x_0^2 - c_1z_0 + \frac{3a^2(w_0 + (a+b)x_0 - (1+a)y_0)^2}{2\delta^4} + \frac{a}{2\delta^2} (x_0(4w_0 + 5ax_0 + 4bx_0y_0) - \\
&\quad 2(2+3a)x_0y_0 + ay_0^2), \\
f_4(\mathbf{z}) &= -\frac{1}{2\delta^4} \left(3a^2(-1+b)(w_0 + (a+b)x_0 - (1+a)y_0)((-1+b)d_1 - j_1 - k_1 + (1+a+e)z_0) \right. \\
&\quad \left. + \left(-aj_1w_0 - (1+2a)k_1w_0 + 3a(1-b)j_1x_0 + 3a(1-a)k_1x_0 - b(1+5a)k_1x_0 + (1+a) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. k_1y_0 + a(a+b)k_1y_0 + d_1 \left(-(1+a(4+a-2b))w_0 - (b+a(-3+a^2+2(5-2b)b+a(2 \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. +b)) \right)x_0 + (1+a)^3 \right) + a \left(-(3+3a+a^2-(2+a)b)x_0 + e(w_0 + 3(-1+b)x_0) + y_0 + a \right. \\
&\quad \left. \left. (1+a+b)y_0 \right)z_0 \right) \delta^2 + \left(d_1(w_0 + (-2-a-b)x_0 + y_0 + ay_0) - (x_0 - y_0)(k_1 + az_0) \right) \delta^4 \right),
\end{aligned}$$

e resolvendo o sistema não linear dado por $f(\mathbf{z}) = 0$, podemos concluir que o sistema tem as seguintes três soluções

$$\mathbf{S}_0 = (0, 0, 0, 0),$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_1 &= \left(\frac{\sqrt{c_1(d_1-bd_1+j_1+k_1)}}{\sqrt{1+a+e}}, \frac{\sqrt{c_1(d_1-bd_1+j_1+k_1)}}{\sqrt{1+a+e}}, \frac{d_1-bd_1+j_1+k_1}{1+a+e}, -\frac{(-1+b)\sqrt{c_1(d_1-bd_1+j_1+k_1)}}{\sqrt{1+a+e}} \right), \\
\mathbf{S}_2 &= \left(-\frac{\sqrt{c_1(d_1-bd_1+j_1+k_1)}}{\sqrt{1+a+e}}, -\frac{\sqrt{c_1(d_1-bd_1+j_1+k_1)}}{\sqrt{1+a+e}}, \frac{d_1-bd_1+j_1+k_1}{1+a+e}, -\frac{(-1+b)\sqrt{c_1(d_1-bd_1+j_1+k_1)}}{\sqrt{1+a+e}} \right).
\end{aligned}$$

A primeira solução corresponde ao ponto de equilíbrio localizado na origem. Para as outras soluções, observemos o determinante da matriz é

$$\begin{aligned}
\det \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}} \right) (\mathbf{S}_1) \right) &= \det \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}} \right) (\mathbf{S}_2) \right) \\
&= \frac{ac_1((-1+b)d_1 - j_1 - k_1)}{2(1+a+e)^2\delta^4} \left(\left(d_1(1+e+a(3+a-b+e)) + aj_1 + k_1 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 2ak_1 + ek_1 \right)^2 + d_1^2(1+a+e)^2\delta^2 \right).
\end{aligned}$$

As condições (5.4) garantem que

$$\frac{ac_1((-1+b)d_1-j_1-k_1)}{2(1+a+e)^2\delta^4} \left(\left(d_1(1+e+a(3+a-b+e)) + aj_1 + k_1 + 2ak_1 + ek_1 \right)^2 + d_1^2(1+a+e)^2\delta^2 \right) \neq 0.$$

Assim, pelo Teorema 3.0.2, existem duas soluções T -periódicas $\mathbf{x}_1(t, \varepsilon)$ e $\mathbf{x}_2(t, \varepsilon)$ do sistema (4.1) de modo que $\mathbf{x}_1(0, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{S}_1$ e $\mathbf{x}_2(0, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{S}_2$, em que seu período é $T = \frac{2\pi}{\delta}$.

Aplicando o Teorema 3.0.2 obtemos, as soluções periódicas

$$\mathbf{x}_1 = (x_1(t, \varepsilon), y_1(t, \varepsilon), z_1(t, \varepsilon), w_1(t, \varepsilon))$$

e

$$\mathbf{x}_2 = (x_2(t, \varepsilon), y_2(t, \varepsilon), z_2(t, \varepsilon), w_2(t, \varepsilon))$$

do sistema (5.15), fornecem as soluções periódicas

$$\varepsilon \mathbf{x}_1 = (\varepsilon x_1(t, \varepsilon), \varepsilon y_1(t, \varepsilon), \varepsilon z_1(t, \varepsilon), \varepsilon w_1(t, \varepsilon))$$

e

$$\varepsilon \mathbf{x}_2 = (\varepsilon x_2(t, \varepsilon), \varepsilon y_2(t, \varepsilon), \varepsilon z_2(t, \varepsilon), \varepsilon w_2(t, \varepsilon))$$

do sistema (5.14). Uma vez que cada uma das soluções periódicas posteriores tende ao ponto de equilíbrio $(0, 0, 0, 0)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, elas correspondem a uma bifurcação zero-Hopf do ponto de equilíbrio zero-Hopf.

Para determinar o tipo de estabilidade das soluções periódicas, examinamos os autovalores da matriz jacobiana $\Gamma_1 = \left((\partial f / \partial \mathbf{z})(\mathbf{S}_1) \right)$ e $\Gamma_2 = \left((\partial f / \partial \mathbf{z})(\mathbf{S}_2) \right)$. Temos que os valores próprios são os mesmos para ambas matrizes e são dados da seguinte forma:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c_1}{2} \pm \frac{\sqrt{c_1\delta^2(8a(d_1 - bd_1 + j_1k_1) + c_1\delta^2)}}{2\delta^2},$$

$$\lambda_{3,4} = -\frac{d_1}{2} \pm i \frac{\sqrt{(1+a+e)^2 \left(d_1(1+e+a(3+a-b+e)) + aj_1 + k_1 + 2ak_1 + ek_1 \right)^2 \delta^2}}{2(1+a+e)^2\delta^2}.$$

A estabilidade segue impondo uma parte real negativa a todos os autovalores e substituindo a_1, b_1, c_1, d_1, j_1 , e k_1 em termos de a, b, c, d, j , e k .

□

Capítulo 6

Conclusão e Trabalho Futuro

1. Os sistemas hipercaóticos quadridimensionais têm comportamento dinâmico complexo e são amplamente utilizados. Neste trabalho, estudamos um sistema hipercaótico autônomo quadrático quadridimensional e provamos que o sistema tem uma bifurcação zero-Hopf na origem das coordenadas. A existência de soluções periódicas bifurcando do sistema é provada pelo método de averaging, e as condições de estabilidade das soluções periódicas são fornecidas. Na verdade, existem muitas outras propriedades dinâmicas ricas desse sistema hipercaótico que não são totalmente exploradas. Esperamos ter outras descobertas sobre este sistema em trabalhos futuros.

Trabalho Futuro

Como uma consequência de nosso trabalho pretendemos estudar algumas das seguintes questões

1. Estudar existência de ciclos limites de sistema hipercaótico de tipo Lorenz.
2. Explorar outros tipos de bifurcações para modelos hipercaóticos de tipo Lorenz ou sistemas semelhantes.

Bibliografia

- [BFL07] Adriana BUICĂ, Jean-Pierre FRANÇOISE e Jaume LLIBRE. «Periodic solutions of nonlinear periodic differential systems with a small parameter». Em: *Communications on Pure & Applied Analysis* 6.1 (2007), p. 103 (ver pp. [3](#), [5](#), [6](#), [18](#), [22](#)).
- [CL17] Yu-Ming CHEN e Hai-Hua LIANG. «Zero-zero-Hopf bifurcation and ultimate bound estimation of a generalized Lorenz–Stenflo hyperchaotic system». Em: *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 40.10 (2017), pp. 3424–3432 (ver pp. [2](#), [12](#)).
- [CLS14] Lorena CID-MONTIEL, Jaume LLIBRE e Cristina STOICA. «Zero–Hopf bifurcation in a hyperchaotic Lorenz system». Em: *Nonlinear Dynamics* 75.3 (2014), pp. 561–566 (ver pp. [1](#), [2](#), [12](#), [14](#), [15](#)).
- [Cos19] Luis Manuel Braga da COSTA CAMPOS. *Non-linear differential equations and dynamical systems*. CRC Press, 2019 (ver p. [2](#)).
- [CU99] Guanrong CHEN e Tetsushi UETA. «Yet another chaotic attractor». Em: *International Journal of Bifurcation and chaos* 9.07 (1999), pp. 1465–1466 (ver p. [13](#)).
- [Foi+01] C FOIAS, MS JOLLY, I KUKAVICA e ES TITI. «The Lorenz equation as a metaphor for the Navier-Stokes equations». Em: *Discrete & Continuous Dynamical Systems-A* 7.2 (2001), p. 403 (ver p. [11](#)).
- [GH13] John GUCKENHEIMER e Philip HOLMES. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Vol. 42. Springer Science & Business Media, 2013 (ver p. [1](#)).
- [Guc81] John GUCKENHEIMER. «On a codimension two bifurcation». Em: *Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980*. Springer, 1981, pp. 99–142 (ver p. [1](#)).
- [Kuz13] Yuri A KUZNETSOV. *Elements of applied bifurcation theory*. Vol. 112. Springer Science & Business Media, 2013 (ver p. [1](#)).
- [Lim00] Elon Lages LIMA. *Curso de Análise, vol. 2*. 2000 (ver p. [5](#)).
- [LIM15] Elon Lages LIMA. *Curso de análise vol. 2/Elon Lages Lima*. 2015 (ver p. [5](#)).

- [LM16] Jaume LLIBRE e Amar MAKHLOUF. «Zero-Hopf bifurcation in the generalized Michelson system». Em: *Chaos, Solitons & Fractals* 89 (2016), pp. 228–231 (ver p. 2).
- [Lor63] Edward N LORENZ. «Deterministic nonperiodic flow». Em: *Journal of the atmospheric sciences* 20.2 (1963), pp. 130–141 (ver pp. 1, 11).
- [Mao98] Han MAOAN. «Existence of periodic orbits and invariant tori in codimension two bifurcations of three dimensional systems». Em: *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences* 4 (1998) (ver p. 1).
- [Maz15] Susanna MAZA. «PERIODIC ORBITS IN HYPERCHAOTIC CHEN SYSTEMS». Em: *Electronic Journal of Differential Equations* 2015.224 (2015), pp. 1–6 (ver pp. 2, 13, 15).
- [Ros79] OE ROSSLER. «An equation for hyperchaos». Em: *Physics Letters A* 71.2-3 (1979), pp. 155–157 (ver p. 12).
- [SM84] Jürgen SCHEURLE e Jerrold MARSDEN. «Bifurcation to quasi-periodic tori in the interaction of steady state and Hopf bifurcations». Em: *SIAM journal on mathematical analysis* 15.6 (1984), pp. 1055–1074 (ver p. 1).
- [Sot79] Jorge SOTOMAYOR. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Vol. 11. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979 (ver pp. 5, 8, 11).
- [Spa12] Colin SPARROW. *The Lorenz equations: bifurcations, chaos, and strange attractors*. Vol. 41. Springer Science & Business Media, 2012 (ver p. 11).
- [VM07] Ferdinand VERHULST e J MURDOCK. *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems. Applied Mathematical Sciences*. Springer, 2007 (ver p. 24).
- [WSB16] Daniel WILCZAK, Sergio SERRANO e Roberto BARRIO. «Coexistence and dynamical connections between hyperchaos and chaos in the 4D Rossler system: a computer-assisted proof». Em: *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* 15.1 (2016), pp. 356–390 (ver p. 12).
- [YWM20] Jing YANG, Zhouchao WEI e Irene MOROZ. «Periodic solutions for a four-dimensional hyperchaotic system». Em: *Advances in Difference Equations* 2020.1 (2020), pp. 1–9 (ver pp. 2, 12, 23).
- [Zho+17] Leilei ZHOU, Zengqiang CHEN, Jiezhi WANG e Qing ZHANG. «Local bifurcation analysis and global dynamics estimation of a novel 4-dimensional hyperchaotic system». Em: *International Journal of Bifurcation and Chaos* 27.02 (2017), p. 1750021 (ver p. 2).