“O TEOREMA ESPECTRAL E A
PROPRIEDADE DE ‘SELF-ADJOINTNESS’ PARA
ALGUNS OPERADORES DE SCHRÖDINGER”

RODRIGO AUGUSTO HIGO MAFRA CABRAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ORIENTADOR: SEVERINO TOSCANO DO RÊGO MELO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO (IME - USP)

Trabalho produzido com apoio financeiro da agência CNPq

Novembro de 2014

“O TEOREMA ESPECTRAL E A PROPRIEDADE DE ‘SELF-ADJOINTNESS’ PARA
ALGUNS OPERADORES DE SCHRÖDINGER”

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 18/12/2014. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Severino Toscano do Rêgo Melo (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Frank Michael Forger - IME-USP
- Prof. Dr. César Rogério de Oliveira - DM-UFSCAR

AGRADECIMENTOS

Vivemos, inevitavelmente, integrados num coletivo do qual muitas vezes esquecemos fazer parte, de modo que o ato de agradecer se torna uma ação vaga e de difícil atribuição específica. Agradeço, então, a todos os anônimos envolvidos. Quanto aos não-anônimos, agradeço o meu orientador pela paciência e pelo suporte acadêmico; agradeço também os meus pais, meu irmão, meus amigos e a minha namorada pelo suporte emocional e pelos bons (e vitais) momentos de descontração.

RESUMO

Neste texto são demonstrados, a partir do ponto de vista da teoria dos espaços de Hilbert e da teoria das C^* -álgebras, teoremas relacionados a operadores auto-adjuntos em espaços de Hilbert, entre os quais estão o Teorema Espectral, o teorema de Kato-Rellich e a desigualdade de Kato. Também são dadas aplicações destes teoremas a alguns operadores de Schrödinger provenientes da Física-Matemática.

Palavras-chave: Teorema Espectral, Kato-Rellich, Schrödinger, desigualdade de Kato, “*self-adjointness*”, C^* -álgebras.

ABSTRACT

In this text we prove, within the Hilbert spaces theory and C^* -algebras points of view, some theorems which are related to self-adjoint operators acting on Hilbert spaces, among which are the Spectral Theorem, the Kato-Rellich theorem and Kato's inequality. Also, some applications to Schrödinger operators coming from the Mathematical-Physics context are given.

Keywords: Spectral Theorem, Kato-Rellich, Schrödinger, Kato's inequality, self-adjointness, C^* -algebras.

Sumário

Considerações Iniciais	14
Álgebras de Banach e C^* -álgebras - alguns resultados elementares . . .	31
1 O Teorema Espectral	42
O teorema espectral para operadores lineares auto-adjuntos limitados	43
O Cálculo Funcional Boreliano relativamente a operadores lineares auto-adjuntos limitados	52
Teorema espectral para n -uplas de operadores lineares auto-adjuntos que comutam dois a dois	56
O teorema espectral para operadores lineares normais	62
O teorema espectral para operadores auto-adjuntos não-limitados . . .	64
O Cálculo Funcional Boreliano relativamente a operadores lineares auto-adjuntos não-limitados	67
2 O Teorema de Kato-Rellich	71
3 Aplicações do Teorema de Kato-Rellich	85
O domínio de “ <i>self-adjointness</i> ” do operador $-\Delta$	85
O átomo de hidrogênio e um átomo qualquer	94
4 A desigualdade de Kato	102
Um corolário da desigualdade de Kato	110
Aplicações do corolário da desigualdade de Kato	113
5 Apêndice A	116
Teorema espectral para operadores normais via C^* -álgebras	116
Teorema de Von Neumann	119
O Teorema Espectral - uma outra demonstração	123
6 Apêndice B	127
O teorema espectral para coleções de operadores limitados auto-adjuntos que comutam dois a dois	127

INTRODUÇÃO

O intuito principal deste texto é fazer uma exposição de alguns tópicos clássicos em teoria de operadores não-limitados auto-adjuntos sobre espaços de Hilbert.

Nas “Considerações Iniciais” são estabelecidas algumas notações, definições e teoremas que servirão de ferramentas básicas para o desenvolvimento do conteúdo principal. Incluem-se nessa seção:

1. a definição de somabilidade em espaços de Banach com alguns resultados, para que possamos lidar com espaços de Hilbert não-separáveis;
2. as definições de semi-álgebras e álgebras de conjuntos, que serão cruciais para que possamos estabelecer (de maneira um tanto “limpa”) uma estimativa vital, quando formos demonstrar o teorema espectral para n -uplas finitas de operadores lineares limitados auto-adjuntos que comutam dois a dois;¹
3. uma subseção na qual são expostos alguns resultados rudimentares sobre a teoria de C^* -álgebras, que serão importantes para a demonstração de vários teoremas presentes nos Apêndices A e B. As informações desta subseção só serão utilizadas fortemente nos Apêndices A e B, e não precisam ser lidas caso não se pretenda lê-los (na verdade, utilizamos levemente um resultado mencionado logo no início dessa subseção - a expansão da série de Von Neumann - para podermos concluir alguns detalhes da demonstração do teorema de Kato-Rellich; mas esta é a única exceção).

O Capítulo 1 se encarrega da demonstração detalhada, utilizando-se somente a teoria de espaços de Hilbert e alguns resultados de medida e integração, das linhas gerais do teorema espectral para operadores lineares auto-adjuntos expostas em [18]. Tal teorema se encarrega da caracterização dos operadores lineares auto-adjuntos (não-limitados) agindo num espaço de Hilbert (não necessariamente separável) como sendo unitariamente equivalentes a um operador de multiplicação por uma função real e Borel-mensurável definido num certo espaço de funções de quadrado integrável.

No Capítulo 2 é demonstrado o famoso teorema de Kato-Rellich, que estabelece condições suficientes para que a perturbação simétrica de um operador auto-adjunto seja auto-adjunta. Algumas variações desse teorema (como a versão deste teorema para “*cores*” (ou “*cernes*”, em português) do operador auto-adjunto em questão e o caso limite em que a cota do operador simétrico em relação ao auto-adjunto é igual a 1) e uma estimativa muito útil para estabelecer cotas inferiores para um operador auto-adjunto limitado inferiormente assim perturbado também são demonstradas. Inclusive, para chegarmos a tais

¹Agradeço ao professor Daniel V. Tausk pela sugestão de utilizar tais conceitos para estabelecer a estimativa mencionada

estimativas utilizamos o Cálculo Funcional estabelecido no capítulo 1 (também utilizamos tal Cálculo para demonstrar o Lema 2.2).

No Capítulo 3 apresentamos alguns conceitos básicos relativos à Teoria de Distribuições para estabelecer o domínio de “*self-adjointness*” do Laplaciano, e utiliza-se o teorema de Kato-Rellich para concluir que os operadores de Schrödinger da forma $-\Delta + V(x)$, agindo em $L^2(\mathbb{R}^n)$, com

$$V = V_1 + V_2, V_1 \in L^2(\mathbb{R}^n), V_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^n), 0 < n \leq 3,$$

estão bem-definidos e são auto-adjuntos em $H^2(\mathbb{R}^n)$. Em particular, mostra-se que o operador de Schrödinger que descreve um modelo aproximado do sistema correspondente a um átomo de hidrogênio é auto-adjunto em $H^2(\mathbb{R}^n)$ e limitado inferiormente. Essa é uma aplicação muito famosa, e muito importante para a Mecânica Quântica não-relativística. Também mostramos que o operador de Schrödinger correspondente a um modelo aproximado de um átomo qualquer é auto-adjunto em $H^2(\mathbb{R}^n)$.²

O Capítulo 4 destina-se à demonstração detalhada da famosa desigualdade (distribucional) de Kato, com uma aplicação aos operadores de Schrödinger da forma $-\Delta + V(x)$, onde $M_{V(x)}$ é um operador de multiplicação limitado inferiormente tal que $V \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (a saber, mostramos que tais operadores são essencialmente auto-adjuntos em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$). Em particular, mostra-se que o operador de Schrödinger relativo ao potencial de Coulomb em uma dimensão é essencialmente auto-adjunto em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, e comenta-se como a desigualdade de Kato pode ser refinada de modo a podermos aplicá-la a operadores de Schrödinger relativos a sistemas de n partículas carregadas sujeitas à ação de um campo magnético constante.

No Apêndice A é dada uma demonstração alternativa do teorema espectral para operadores normais utilizando a teoria de C^* -álgebras, e conclui-se uma nova demonstração do teorema espectral para operadores auto-adjuntos que não são limitados, com o auxílio do teorema de Von Neumann (que classifica as extensões simétricas de um operador simétrico em termos da transformação de Cayley), também demonstrado no apêndice.

No Apêndice B demonstra-se, também utilizando a teoria de C^* -álgebras, o teorema espectral para uma coleção infinita (de qualquer cardinalidade) de operadores limitados auto-adjuntos que comutam dois a dois.

²Enfatizamos que este texto não possui a pretensão de discutir do ponto de vista da Física as aplicações dos teoremas demonstrados; a intenção aqui é somente ilustrar os teoremas com exemplos advindos da Física-Matemática

Considerações Iniciais

I) todos os espaços vetoriais mencionados serão considerados sobre o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos;

II) as normas e os produtos internos (que serão considerados lineares na primeira entrada, seguindo a “nomenclatura dos matemáticos”) de um espaço normado (respectivamente, espaço com produto interno) serão representados indistintamente por $\|\cdot\|/\langle\cdot,\cdot\rangle$, estando subentendido no contexto a qual espaço tal norma (respectivamente, produto interno) se refere;

III) uma notação recorrente que será utilizada é a seguinte: se X é um espaço normado e $x \in X$, com $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sendo uma seqüência de elementos de X que converge para x , indicaremos “ $x_n \rightarrow x$ ” para indicar que “ $\lim_n x_n = x$ ”;

IV) se I é um intervalo compacto, ou o produto cartesiano finito de intervalos compactos, então:

1. $P(I)$ denota o espaço normado das funções polinomiais p com coeficientes complexos definidas em I , com a norma do sup $\|p\|_\infty := \sup \{|p(x)| : x \in I\}$;
2. $C(I)$ denota o espaço normado das funções contínuas a valores complexos definidas em I , com a “norma do sup” $\|f\|_\infty := \sup \{|f(x)| : x \in I\}$. A função $id_{C(I)}$ será sempre definida por $id_{C(I)}(x) := x$, para todo $x \in I$, e a função $1_{C(I)}$, por $1_{C(I)}(x) := 1$, para todo $x \in I$ (na verdade, para todo espaço topológico compacto e Hausdorff X , o espaço das funções contínuas a valores complexos definidas em X será denotado por $C(X)$, e será sempre munido da norma do sup, tornando-se um espaço de Banach, desta forma);
3. se μ é uma medida que possui as propriedades da medida construída no Teorema da Representação de Riesz (veja a página 45), então $C_\mu(I)$ denota o espaço normado das classes de equivalência (segundo a relação de equivalência usual induzida pela medida μ) de funções contínuas f a valores complexos definidas em I , com a norma herdada do espaço $L^2(I, \mu)$ (a norma induzida pelo produto interno usual). Isto é possível devido ao fato de que $C_\mu(I) \subseteq L^2(I, \mu)$ (na verdade, $C_\mu(I)$ é denso em $L^2(I, \mu)$). A notação $id_{C_\mu(I)}$ sempre indicará a classe de equivalência de $id_{C(I)}$ com respeito a μ , e $1_{C_\mu(I)}$ sempre indicará a classe de equivalência de $1_{C(I)}$ com respeito a μ ;
4. $B(\mathbb{R})$ denota o espaço das funções definidas em $\mathbb{R}$ a valores complexos, Borel-mensuráveis e limitadas, e é munido da norma do sup (inclusive, torna-se um espaço de Banach, desta forma);

Notamos aqui que, quando tratarmos de espaços de medida (M, μ) , utilizaremos a mesma notação tanto para nos referirmos a uma função $f : M \rightarrow \mathbb{C}$

quanto para nos referirmos a sua classe de equivalência relativa a μ (por exemplo, nos espaços $L^p(M, \mu)$, $1 \leq p \leq +\infty$. Lembramos que $L^\infty(M, \mu)$ é definido como sendo o conjunto das funções f mensuráveis tais que $\|f\|_\infty := \inf \{ \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0 : \mu(|f|^{-1}[(\lambda, +\infty))) = 0 \} < +\infty$; os membros desta álgebra serão chamados de funções essencialmente limitadas). Também chamamos a atenção para o fato de que usamos a mesma notação para indicar as normas do sup e a norma das funções essencialmente limitadas, estando implícito pelo contexto qual delas está sendo usada;

V) um operador linear A num espaço de Hilbert H será uma transformação linear cujos domínio e conjunto-imagem estão contidos em H , e seu domínio será sempre um subespaço vetorial de H . O seu domínio será denotado por $\text{Dom}(A)$, enquanto sua imagem e kernel serão denotados por $\text{Im}(A)$ e $\text{Ker}(A)$, respectivamente; seu gráfico será denotado por

$$\text{Gr}(A) := \{(u, v) \in H \times H : u \in \text{Dom}(A), v = Au\};$$

VI) se A e B são dois operadores lineares num espaço de Hilbert H , então definiremos

$$\text{Dom}(A + B) := \text{Dom}(A) \cap \text{Dom}(B)$$

e

$$\text{Dom}(A \circ B) := \{u \in \text{Dom}(B) : Bu \in \text{Dom}(A)\};$$

note que tais domínios, assim definidos, permanecem sendo subespaços vetoriais de H ;

VII) se A e B são dois operadores lineares num espaço de Hilbert H , diremos que B é uma extensão de A , e escreveremos $A \subset B$, se $\text{Dom}(A) \subseteq \text{Dom}(B)$ e $B|_{\text{Dom}(A)} = A$; (perceba que tal notação torna-se natural se interpretarmos uma função definida em H a valores em H como sendo um subconjunto de $H \times H$)

VIII) se X é um espaço normado, então $\mathcal{B}(X)$ denota o espaço normado dos operadores lineares limitados $T : \text{Dom}(T) \rightarrow X$ tais que $\text{Dom}(T)$ é um subconjunto denso de X , com a norma dada por

$$\|T\| := \sup \{ \|Tx\| / \|x\| : x \in \text{Dom}(T), x \neq 0 \},$$

para todo $T \in \mathcal{B}(X)$. O operador identidade $I_{\mathcal{B}(X)} \in \mathcal{B}(X)$ é definido por $I_{\mathcal{B}(X)}(u) := u$, para todo $u \in X$, e o operador nulo $0_{\mathcal{B}(X)} \in \mathcal{B}(X)$ é definido por $0_{\mathcal{B}(X)}(u) := 0$, para todo $u \in X$. Devido ao Lema 1.1 (B.L.T.), demonstrado logo no início do capítulo 1, sempre que tomarmos um elemento T de $\mathcal{B}(X)$, suporemos sem perda de generalidade que $\text{Dom}(T) = X$ (salvo em menção contrária, como na seção do Teorema de Von Neumann). Como veremos mais adiante, na Observação X, no contexto dos espaços de Hilbert esta hipótese de densidade do domínio é equivalente à garantia de podermos definir o operador adjunto. Lidaremos neste texto essencialmente com operadores não-limitados

(ou seja, operadores T tais que $\|T\| = +\infty$)³ sobre espaços de Hilbert (e cujo operador adjunto correspondente esteja bem definido). Ainda notamos também que, devido ao Teorema do Gráfico Fechado,⁴ vemos que operadores lineares não-limitados (ou, equivalentemente, não-contínuos) fechados não podem satisfazer $\text{Dom}(T) = X$. Aliás, notamos aqui como os operadores não-limitados são entes bastante naturais, a partir do exemplo de um operador de diferenciação agindo num espaço de Banach: considere o operador de diferenciação $D : C^1([-\pi, \pi]) \subseteq C([-\pi, \pi]) \rightarrow C([-\pi, \pi])$, $D : f \mapsto D(f) := f'$. Vamos mostrar que este operador não é limitado. De fato, considere a sequência $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$f_n(x) := \frac{\sin(nx)}{n}, n \in \mathbb{N}, x \in [-\pi, \pi].$$

Vemos que os elementos desta sequência estão em $C^1([-\pi, \pi])$ e que $f_n \rightarrow 0_{[-\pi, \pi]}$, pois

$$\left\| \frac{\sin(nx)}{n} \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. No entanto, $\{D(f_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções tal que, para cada $x \in [-\pi, \pi]$ fixado, o limite $\lim_n D(f_n)(x)$ não existe. Logo, não existe um elemento g em $C([-\pi, \pi])$ que possa satisfazer $D(f_n) \rightarrow g$, pois a convergência pontual da sequência é condição necessária para que haja a convergência uniforme da sequência. Em particular, não podemos ter $D(f_n) \rightarrow D(0_{C([-\pi, \pi])}) = 0_{C([-\pi, \pi])}$, e D não é um operador contínuo em $C([-\pi, \pi])$. Para ver um exemplo de operador não-limitado em espaços de Hilbert, basta tomar o operador de diferenciação com domínio $H^1[0, 1] \subseteq L^2[0, 1]$ (com a medida de Lebesgue e norma induzida de $L^2[0, 1]$).⁵ A sequência $\{\phi_n(x) := \sqrt{2}\sin(n\pi x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é formada somente por elementos de norma 1 e está em $L^2[0, 1]$, mas a sequência de suas derivadas satisfaz $\|\phi_n\| = n\pi$, para todo $n \in \mathbb{N}$, mostrando novamente que tal operador não é contínuo.

Um resultado elementar relativo à geometria de espaços de Hilbert e que será utilizado freqüentemente é o

IX) Teorema I: *Se H é um espaço de Hilbert e $F \subseteq H$ é um subespaço vetorial fechado, então $H = F \oplus F^\perp$, isto é, se $x \in H$, então existem $x_1 \in F$ e $x_2 \in F^\perp$ tais que $x = x_1 + x_2$ e, se $x = x_1 + x_2 = (x_1)' + (x_2)'$, com $x_1, (x_1)' \in F$ e $x_2, (x_2)' \in F^\perp$, então $x_1 = (x_1)'$ e $x_2 = (x_2)'$; além disso, existe um par $P, Q \in \mathcal{B}(H)$ unicamente determinado pelas propriedades: (i) $I_{\mathcal{B}(H)} = P + Q$, (ii) $\text{Im}(P) \subseteq F$ e (iii) $\text{Im}(Q) \subseteq F^\perp$. P e Q possuem as seguintes propriedades*

³Salientamos aqui que assumir esta interpretação para a expressão “não-limitado” não é uma prática usual da literatura, ou seja, costuma-se dizer “não-limitado” (unbounded) para afirmar que um operador não é necessariamente limitado. No entanto, não adotaremos esta prática ambígua neste texto

⁴Se $T : X \supseteq \text{Dom}(T) \rightarrow Y$ é uma transformação linear tal que $\text{Dom}(T)$ é fechado em X e cujo gráfico é fechado - segundo a topologia do gráfico induzida pela norma $(x, y) \mapsto \|x\| + \|y\|$ -, então T é contínua

⁵Para a definição do espaço de Sobolev $H^1[0, 1]$, veja o início do capítulo 3

adicionais: (iv) $P \circ Q = Q \circ P = 0_{\mathcal{B}(H)}$ e (v) $P^2 = P$, $Q^2 = Q$ (ou seja, P e Q são projeções - veja a Definição abaixo). Devido à propriedade (iv), P e Q são denominadas projeções ortogonais sobre F e $F^\perp$, respectivamente. Note que $\text{Im}(P) = F$ e $\text{Im}(Q) = F^\perp$.

X) se A é um operador linear num espaço de Hilbert H , defina $D_A := \{v \in H : \text{existe } \eta \in H \text{ satisfazendo } \langle Au, v \rangle = \langle u, \eta \rangle, \text{ para todo } u \in \text{Dom}(A)\}$. Vamos mostrar que cada $v \in D_A$ determina unicamente o η da definição se, e somente se, A é densamente definido, isto é, o conjunto $\text{Dom}(A)$ é denso em H :

$\Rightarrow$) Sejam $v \in D_A$ e $\eta \in H$ um elemento tal que $\langle Au, v \rangle = \langle u, \eta \rangle$, para todo $u \in \text{Dom}(A)$. Suponhamos que $\text{Dom}(A)$ não seja denso em H . Então, $\overline{\text{Dom}(A)} \neq H$ e, pelo Teorema I, garantimos a existência de um elemento $0 \neq w \in \overline{\text{Dom}(A)}^\perp$. Portanto, $\langle Au, v \rangle = \langle u, \eta + w \rangle = \langle u, \eta \rangle + \langle u, w \rangle = \langle u, \eta \rangle$, para todo $u \in \text{Dom}(A)$, e vemos que $\eta + w$ também contempla a definição, mas $\eta + w \neq \eta$ (na verdade, $(\eta + \alpha w)$ contempla a definição para todo $\alpha \in \mathbb{C}$).

$\Leftarrow$) Seja $v \in D_A$. Se η_1, η_2 ambos contemplam a definição, então para todo $u \in \text{Dom}(A)$, tem-se que $0 = \langle u, \eta_1 - \eta_2 \rangle$. Como $\text{Dom}(A)$ é denso em H , sabemos que existe uma seqüência $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\text{Dom}(A)$ tal que $u_n \rightarrow (\eta_1 - \eta_2)$. Da igualdade acima, obtemos $0 = \langle u_n, \eta_1 - \eta_2 \rangle$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando limites em ambos os membros, concluímos $0 = \langle \eta_1 - \eta_2, \eta_1 - \eta_2 \rangle$, e vem que $\eta_1 = \eta_2$. Logo, o η da definição está unicamente determinado.

Assim, se A é um operador linear densamente definido em H , podemos definir em função deste um outro operador em H , que denotaremos por A^* , e será tal que $\text{Dom}(A^*) := D_A$ e $A^*v := \eta$, onde η é tal que $\langle Au, v \rangle = \langle u, \eta \rangle$, para todo $u \in \text{Dom}(A)$ (note que D_A é um espaço vetorial e A^* é linear).

A^* será denominado o operador adjunto de A (lembramos que se $A \in \mathcal{B}(H)$ - e, portanto, $\text{Dom}(A) = H$ -, então $\text{Dom}(A^*) = H$, pelo Lema de Riesz⁶).

XI) se A é um operador linear num espaço de Hilbert H , definimos seu resolvente como sendo o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ que satisfazem as seguintes condições:

1. $(\lambda I_{\mathcal{B}(H)} - A) : \text{Dom}(A) \rightarrow H$ é uma bijeção;
2. existe um operador linear limitado $(\lambda I_{\mathcal{B}(H)} - A)^{-1} : H \rightarrow \text{Dom}(A)$ que satisfaz $(\lambda I_{\mathcal{B}(H)} - A)(\lambda I_{\mathcal{B}(H)} - A)^{-1} = I_{\mathcal{B}(H)}$ e $(\lambda I_{\mathcal{B}(H)} - A)^{-1}(\lambda I_{\mathcal{B}(H)} - A) = I_{\mathcal{B}(\text{Dom}(A))}$.

Denotaremos o resolvente de A por $\rho(A)$; definimos o espectro de A como sendo $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$;

⁶Se λ é um funcional linear limitado definido num espaço de Hilbert H , então existe um único elemento $\eta \in H$ tal que $\lambda u = \langle u, \eta \rangle$, para todo $u \in H$

XII) **Definição:** Se H é um espaço de Hilbert, então um operador linear densamente definido A é dito auto-adjunto se $A = A^*$.

Em Mecânica Quântica não-relativística, o estado de uma partícula é dado por uma função $\mathbb{R}^4 \ni (x, t) \mapsto \psi(x, t) \in \mathbb{C}$ de quadrado integrável sobre $\mathbb{R}^3$, para todo $t \in \mathbb{R}$ fixado (ou melhor, $(x, t) \mapsto \psi(x, t)$ satisfaz $\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x, t)|^2 dx = C$, onde C é uma constante real, para todo $t \in \mathbb{R}$ fixo). Ela é denominada função de onda da partícula. Através de uma normalização, tal aplicação induz uma distribuição de probabilidade para a posição da partícula. A evolução desta função é governada pela equação

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H\psi,$$

chamada equação de Schrödinger.⁷ Aqui, H é um operador

$$H := -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + M_{V(x)}$$

agindo em um certo domínio $\text{Dom}(H) \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$, e é chamado operador de Schrödinger que, com o domínio adequado, representa a energia mecânica do sistema correspondente. Se o problema de valor inicial

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H\psi \\ \psi|_{t=0} = \psi_0 \end{cases},$$

para algum $\psi_0 \in \text{Dom}(H)$ fixo, possui uma única solução, e que preserva probabilidade (i.e., $(x, t) \mapsto \psi(x, t)$ satisfaz $\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x, t)|^2 dx = 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$ fixo), diz-se que existe uma dinâmica unitária. Prova-se que uma dinâmica unitária existe se, e somente se, H é auto-adjunto. Além disso, os observáveis da Mecânica Quântica tais como posição, momento, energia, etc., são representados por operadores auto-adjuntos agindo num espaço de Hilbert. Estes fatos são uma motivação (provinda de argumentos físico-matemáticos) do porquê de a propriedade de “*self-adjointness*” ser algo importante, e do porquê de investigar-se quando se tem a propriedade de “*self-adjointness*” para operadores da forma $H = -\Delta + M_{V(x)}$.

XIII) se f é uma função mensurável e finita em μ -quase toda parte relativamente a um espaço de medida positiva (M, μ) , definimos o operador de multiplicação $M_f : \text{Dom}(M_f) \rightarrow L^2(M, \mu)$ por $M_f(g) = f \cdot g$, para toda $g \in \text{Dom}(M_f) := \{g \in L^2(M, \mu) : (f \cdot g) \in L^2(M, \mu)\}$. Este operador possui uma participação fundamental na essência do Teorema Espectral. Se $M_f : \text{Dom}(M_f) \rightarrow L^2(M, \mu)$ é um operador de multiplicação, então quatro fatos importantes à respeito deste são:

1. M_f é densamente definido (e, portanto, o seu adjunto está sempre bem definido);

⁷ $\hbar$ denota a constante de Planck

2. $(M_f)^* = M_{\bar{f}}$;
3. $\|M_f\| \leq \|f\|_\infty$. Se M for σ -finito, e $\|f\|_\infty < \infty$, então $\|M_f\| = \|f\|_\infty$;
4. se M é σ -finito, então $\sigma(M_f) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mu(\{x \in M : |\lambda - f(x)| < \epsilon\}) > 0, \forall \epsilon > 0\}$ (este último conjunto é chamado de imagem essencial de f , e será denotado por $\text{Im}_{\text{ess}}(f)$).

Demonstração de 1:

Defina, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$E_n := \{x \in M : |f(x)| \in [0, n]\},$$

e seja $\xi \in \text{Dom}(M_f)^\perp \subseteq L^2(M, \mu)$. Então, $\int_M \xi \bar{\phi} d\mu = 0$, para todo $\phi \in \text{Dom}(M_f)$ e $\xi \chi_{E_n} \in \text{Dom}(M_f)$, pois $\xi \chi_{E_n} \in L^2(M, \mu)$ e

$$\begin{aligned} \int_M |f(\xi \chi_{E_n})|^2 d\mu &= \int_M |f\xi|^2 \chi_{E_n} d\mu = \int_M |f\xi|^2 \chi_{E_n} d\mu = \\ &= \int_{E_n} |f\xi|^2 d\mu \leq n^2 \int_{E_n} |\xi|^2 d\mu \leq n^2 \int_M |\xi|^2 d\mu < \infty. \end{aligned}$$

Portanto, $\int_M |\xi|^2 \chi_{E_n} d\mu = \int_M \xi \cdot \overline{\xi \chi_{E_n}} d\mu = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $|\xi|^2 \chi_{E_n} \rightarrow |\xi|^2$ pontualmente e $|\xi|^2 \chi_{E_n} \leq |\xi|^2 \in L^1(M, \mu)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, obtemos pelo Teorema da Convergência Dominada (ou pelo Teorema da Convergência Monótona) que $\int_M |\xi|^2 d\mu = \lim_n \int_M |\xi|^2 \chi_{E_n} d\mu = 0$, o que implica $\xi = 0 \in L^2(M, \mu)$. Assim, concluímos que $\text{Dom}(M_f) = L^2(M, \mu)$.

Demonstração de 2:

Primeiro, notemos que $M_{\bar{f}} \subset (M_f)^*$, pois se $\theta \in \text{Dom}(M_{\bar{f}}) = \text{Dom}(M_f)$, então

$$\langle M_f \phi, \theta \rangle = \langle f\phi, \theta \rangle = \int_M (f\phi)\bar{\theta} d\mu = \int_M \phi(\bar{f}\bar{\theta}) d\mu = \langle \phi, \bar{f} \cdot \theta \rangle,$$

para todo $\phi \in \text{Dom}(M_f)$ e, como $(f \cdot \theta) \in L^2(M, \mu)$, segue pela definição de adjunto que $\theta \in \text{Dom}((M_f)^*)$, com $(M_f)^* \theta = M_{\bar{f}} \theta$. Seja, agora, $\theta \in \text{Dom}((M_f)^*)$. Então, existe um único elemento em $L^2(M, \mu)$, denotado por $(M_f)^* \theta$, tal que $\langle M_f \phi, \theta \rangle = \langle \phi, (M_f)^* \theta \rangle$, para todo $\phi \in \text{Dom}(M_f)$. Vamos mostrar que $\bar{f}\theta \in L^2(M, \mu)$. De fato, como para todo $\rho \in L^2(M, \mu)$ a norma do funcional linear

$$L^2(M, \mu) \ni \psi \mapsto \langle \psi, \rho \rangle$$

é $\|\rho\|$, obtemos pelo Teorema da Convergência Monótona (considerando E_n como acima),

$$\infty > \int_M |(M_f)^* \theta|^2 d\mu = \lim_n \int_M |(M_f)^* \theta|^2 \chi_{E_n} d\mu = \lim_n \|[(M_f)^* \theta] \chi_{E_n}\|^2 =$$

$$\begin{aligned}
& \lim_n (\sup \{ |\langle \psi, [(M_f)^* \theta]_{\chi_{E_n}} \rangle| : \psi \in L^2(M, \mu), \|\psi\| = 1 \})^2 = \\
& \lim_n (\sup \{ |\langle \psi, (M_f)^* \theta \rangle| : \psi \in L^2(M, \mu), \|\psi\| = 1, \psi|_{M \setminus E_n} = 0 \})^2 = (*) \\
& \lim_n (\sup \{ |\langle M_f \psi, \theta \rangle| : \psi \in L^2(M, \mu), \|\psi\| = 1, \psi|_{M \setminus E_n} = 0 \})^2 = \\
& \lim_n (\sup \{ |\langle \psi, \bar{f} \theta \rangle| : \psi \in L^2(M, \mu), \|\psi\| = 1, \psi|_{M \setminus E_n} = 0 \})^2 = \\
& \lim_n (\sup \{ |\langle \psi, \bar{f} \theta_{\chi_{E_n}} \rangle| : \psi \in L^2(M, \mu), \|\psi\| = 1 \})^2 = \\
& \lim_n \|\bar{f} \theta_{\chi_{E_n}}\|^2 = \lim_n \int_M |\bar{f} \theta_{\chi_{E_n}}|^2 d\mu = \|\bar{f} \theta\|^2.
\end{aligned}$$

Note que em (*) foi usado que as funções $\psi \in L^2(M, \mu), \|\psi\| = 1, \psi|_{M \setminus E_n} = 0$ pertencem ao domínio de M_f . Segue, então, que θ é uma função de $L^2(M, \mu)$ tal que $\bar{f} \theta \in L^2(M, \mu)$. Portanto, concluímos que $\text{Dom}((M_f)^*) \subseteq \text{Dom}(M_{\bar{f}})$. Logo, $\text{Dom}((M_f)^*) = \text{Dom}(M_{\bar{f}})$, e como já foi mostrado que $M_{\bar{f}} \subset (M_f)^*$, concluímos que $M_{\bar{f}} \theta = (M_f)^* \theta$, demonstrando que $(M_f)^* \subset M_{\bar{f}}$. Logo, $(M_f)^* = M_{\bar{f}}$. Obtemos como corolário deste teorema que, se f é uma função a valores reais, então M_f é auto-adjunto.

Demonstração de 3:

Notemos, primeiramente, que $\|M_f\| \leq \|f\|_\infty$. Se $\|f\|_\infty = +\infty$, a desigualdade é trivialmente satisfeita. Suponhamos que $\|f\|_\infty < \infty$. Para todo $\phi \in \text{Dom}(M_f)$, tem-se que

$$\begin{aligned}
\|M_f \phi\|^2 &= \int_M |f \phi|^2 d\mu = \int_{|f|^{-1}[(\|f\|_\infty, +\infty)]} |f \phi|^2 d\mu + \\
&\int_{M \setminus |f|^{-1}[(\|f\|_\infty, +\infty)]} |f \phi|^2 d\mu = \int_{M \setminus |f|^{-1}[(\|f\|_\infty, +\infty)]} |f \phi|^2 d\mu = \\
&\int_{|f|^{-1}[0, \|f\|_\infty]} |f \phi|^2 d\mu \leq \|f\|_\infty^2 \int_{|f|^{-1}[0, \|f\|_\infty]} |\phi|^2 d\mu \leq \\
&\|f\|_\infty^2 \int_M |\phi|^2 d\mu = \|f\|_\infty^2 \|\phi\|^2,
\end{aligned}$$

mostrando que $\|M_f\| \leq \|f\|_\infty$. Suponha, agora, que M é σ -finito e que $\|f\|_\infty < \infty$. Para ver que $\|M_f\| \geq \|f\|_\infty$, tome $r < \|f\|_\infty$. Vamos mostrar que $\|M_f\| > r$. Pela definição de $\|f\|_\infty$, temos que $\mu(f^{-1}[r, +\infty)) > 0$. Agora, como (M, μ) é σ -finito, garantimos a existência de um subconjunto $E \subseteq f^{-1}[r, +\infty)$ de medida finita e estritamente positiva. Dessa forma, a função característica $\chi_E \in \text{Dom}(M_f)$ (basta fazer um cálculo semelhante ao que foi feito no item 1 para ver que $\int_M |f \chi_E|^2 d\mu \leq \|f\|_\infty^2 \int_M |\chi_E|^2 d\mu = \|f\|_\infty^2 \mu(E)$) e

$$\|M_f(\chi_E)\|^2 = \int_M |f \chi_E|^2 d\mu = \int_E |f|^2 d\mu > r^2 \int_E d\mu =$$

$$r^2 \int_M |\chi_E|^2 d\mu = r^2 \|\chi_E\|^2.$$

Logo, como $\|\chi_E\| \neq 0$, concluímos que $\|M_f\| > r$. Isto finaliza a demonstração.

Corolário: *Se M for σ -finito, então M_f ser auto-adjunto implica que f seja, a menos de um conjunto de medida nula, uma função a valores reais.*

Demonstração: Se M_f for auto-adjunto, então pelo item 2, temos que $M_{f-\bar{f}} = 0$. Logo, pelo que acabou de ser mostrado no item 3, $0 = M_{f-\bar{f}} = \|f - \bar{f}\|_\infty$, e concluímos que $f = \bar{f}$ em μ -quase toda parte de M .

Observação importante: enfatizamos que a propriedade fundamental do espaço de medida (M, μ) utilizada para mostrar que $\|M_f\| \geq \|f\|_\infty$ foi a existência de um subconjunto $E \subseteq f^{-1}[r, +\infty)$ de medida *finita e estritamente positiva*. Logo, se ao invés da σ -finitude de M exigíssemos a hipótese mais fraca de que M seja um espaço de medida no qual *todo subconjunto $S \subseteq M$ de medida estritamente positiva possui um subconjunto $E \subseteq S$ de medida finita e estritamente positiva*, concluiríamos que $\|M_f\| \geq \|f\|_\infty$. O espaço de medida que construiremos no decorrer do Teorema Espectral possuirá esta propriedade, como mostraremos na página 63.

Demonstração de 4:

Suponha que $\lambda \in \rho(M_f)$. Então, existe um operador limitado L agindo em $L^2(M, \mu)$ satisfazendo $(LM_{\lambda-f})\phi = \phi$, para todo $\phi \in \text{Dom}(M_{\lambda-f})$ (note que $\lambda I_{L^2(M, \mu)} - M_f = M_{\lambda-f}$). Isto implica

$$\|L\|^2 \int_M |\lambda - f|^2 |\phi|^2 d\mu \geq \int_M |\phi|^2 d\mu,$$

ou melhor,

$$\int_M \left(\frac{1}{\|L\|^2} - |\lambda - f|^2 \right) |\phi|^2 d\mu \leq 0,$$

para todo $\phi \in \text{Dom}(M_{\lambda-f}) = \text{Dom}(M_f)$. Afirmamos que $\frac{1}{\|L\|^2} - |\lambda - f|^2 \leq 0$ em μ -quase toda parte de M . Suponha, por absurdo, que exista um conjunto de medida positiva $S \subseteq M$ de forma que $\frac{1}{\|L\|^2} - |\lambda - f|^2 > 0$ em μ -quase toda parte de S . Pela σ -finitude de M , podemos encontrar um subconjunto E de S com medida estritamente positiva e finita. Portanto, como também

$$E = \cup_{n \in \mathbb{N}} (E \cap |f|^{-1}[0, n]),$$

existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $+\infty > \mu(E \cap |f|^{-1}[0, n_0]) > 0$. Assim, $\chi_{E \cap |f|^{-1}[0, n_0]} \in \text{Dom}(M_f)$ e concluímos que

$$\int_M \left(\frac{1}{\|L\|^2} - |\lambda - f|^2 \right) |\chi_{E \cap |f|^{-1}[0, n_0]}|^2 d\mu =$$

$$\int_{E \cap |f|^{-1}[0, n_0]} \frac{1}{\|L\|^2} - |\lambda - f|^2 d\mu > 0,$$

e isto não pode ocorrer. Portanto,

$$|\lambda - f| \geq \frac{1}{\|L\|}$$

em μ -quase toda parte de M , estabelecendo que λ não está na imagem essencial de f . Logo, $\text{Im}_{\text{ess}}(f) \subseteq \sigma(M_f)$.

(Outra observação importante: Como no item anterior, poderíamos trocar a propriedade de σ -finitude e substituir por aquela outra propriedade mencionada, mais fraca, e ainda obteríamos a mesma conclusão).

Suponha, agora, que $\lambda \notin \text{Im}_{\text{ess}}(f)$. Então, por hipótese, existe $\epsilon > 0$ tal que $\mu(\{x \in M : |\lambda - f(x)| < \epsilon\}) = 0$. Portanto, $|\lambda - f(x)| \geq \epsilon > 0$ em μ -quase toda parte de M , mostrando que está bem definido em $L^2(M, \mu)$ e é limitado o operador $M_{\frac{1}{|\lambda - f(x)|}}$, com $\text{Dom}\left(M_{\frac{1}{|\lambda - f(x)|}}\right) = L^2(M, \mu)$, pelo item 3 - para concluir que

$$\text{Dom}\left(M_{\frac{1}{|\lambda - f(x)|}}\right) = L^2(M, \mu),$$

usamos que

$$\left| \frac{1}{\lambda - f(x)} \right|_{\infty} \leq \frac{1}{\epsilon}.$$

Então, $\lambda \in \rho(M_f)$, e isto estabelece a inclusão $\sigma(M_f) \subseteq \text{Im}_{\text{ess}}(f)$.

XIV) Definição: Se A é um operador linear definido num espaço de Hilbert H , diremos que A é fechado se seu gráfico é um subconjunto fechado de $H \times H$, segundo a norma definida em $H \times H$ dada por $\|(u, v)\| := \|u\| + \|v\|$, para todo $(u, v) \in H \times H$; A será dito fechável se possuir uma extensão fechada. Neste caso, a menor extensão fechada de A - no sentido da inclusão - será denotada por $\overline{A}$, e denominada o fecho de A . Notamos aqui que, se $\text{Gr}(A) := \{(u, v) \in H \times H : u \in \text{Dom}(A) \text{ e } v = Au \text{ e } A \text{ for fechável, então } \text{Gr}(\overline{A}) = \overline{\text{Gr}(A)}\}$. Em particular, o conjunto $\overline{\text{Gr}(A)}$ será o gráfico de um operador linear.

Alguns fatos que devem ser ressaltados, e que poderão ser utilizados sumariamente, são os seguintes:

se A é um operador linear densamente definido num espaço de Hilbert H , então:

1. A^* é um operador fechado;
2. se A for fechável, então $\overline{A} = A^{**}$ e $\overline{A^*} = A^*$;
3. A é fechável se, e somente se, A^* for densamente definido.

Se A é um operador linear densamente definido num espaço de Hilbert H , diremos que A é simétrico se o seu adjunto o estende. Como o adjunto de um operador linear é sempre fechado, temos que todo operador linear simétrico é fechável. Além disso, A é dito ser essencialmente auto-adjunto se o seu fecho é um operador auto-adjunto.

XV) **Definição:** Uma transformação linear $U : H_1 \rightarrow H_2$ entre os espaços com produto interno H_1 e H_2 é dito um operador unitário se é bijetor e $\langle u, v \rangle = \langle Uu, Uv \rangle$, para todos $u, v \in H_1$. Se $U : \text{Dom}(U) \subseteq H_1 \rightarrow H_2$ for uma bijeção tal que $\langle u, v \rangle = \langle Uu, Uv \rangle$, para todos $u, v \in \text{Dom}(U)$ mas $\text{Dom}(U)$ não for necessariamente igual a H_1 , então diremos que U é uma isometria. Note que todo operador unitário é uma isometria.

XVI) **Definição:** Se H é um espaço de Hilbert, então um operador linear $N \in \mathcal{B}(H)$ é dito normal se $N \circ N^* = N^* \circ N$.

XVII) **Definição:** Se H é um espaço de Hilbert, então um operador linear $P \in \mathcal{B}(H)$ é dito uma projeção se $P^2 = P$. Um resultado importante sobre projeções é a equivalência:

Seja P uma projeção. Então P é auto-adjunta se, e somente se, é a projeção ortogonal sobre algum subespaço fechado F de H .

Demonstração:

$\Rightarrow$) Vamos mostrar, primeiramente, que a imagem de P é fechada em H . De fato, se $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de elementos de H tal que $Pu_n \rightarrow \eta \in H$, então pela continuidade de P , segue que $Pu_n = P(Pu_n) \rightarrow P(\eta)$ e, pela unicidade do limite, segue que $P(\eta) = \eta$. Definindo o operador linear $Q : u \mapsto (u - Pu)$, para todo $u \in H$, vemos que $\langle Pv, u - Pu \rangle = \langle v, P^*(u - Pu) \rangle = \langle v, P(u - Pu) \rangle = \langle v, Pu - P^2u \rangle = \langle v, Pu - Pu \rangle = 0$, quaisquer que sejam $u, v \in H$. Logo, como se $u \in H$ é dado, temos $u = Pu + Qu$, temos $\|Qu\|^2 = \|u\|^2 - \|Pu\|^2 \leq \|u\|^2$, mostrando que $Q \in \mathcal{B}(H)$. Então, fazendo $F = \text{Im}(P)$ no enunciado do Teorema I, garantimos pela unicidade da existência dos operadores ali mencionados que P é a projeção ortogonal sobre sua imagem.

$\Leftarrow$) Sejam $Q \in \mathcal{B}(H)$ a projeção ortogonal sobre $F^\perp$ e $u, v \in H$. Então, $\langle Pu, v \rangle = \langle Pu, Pv + Qv \rangle = \langle Pu, Pv \rangle + \langle Pu, Qv \rangle = \langle Pu, Pv \rangle = \langle u, P^*Pv \rangle$. Como tal igualdade é válida para todos $u, v \in H$, concluímos que $P^* = P^*P$, e temos que $P = P^{**} = (P^*P)^* = P^*P = P^*$.

XVIII) Sejam A e B operadores lineares densamente definidos num espaço de Hilbert H . Então, se $A+B$ e $A \circ B$ também são densamente definidos, temos que:

1. $A^* + B^* \subset (A+B)^*$ (se $A \in \mathcal{B}(H)$, então $A^* + B^* = (A+B)^*$);

2. $B^* \circ A^* \subset (A \circ B)^*$ (se $A \in \mathcal{B}(H)$, então $B^* \circ A^* = (A \circ B)^*$).

Demonstração de 1:

Se $\xi \in \text{Dom}(A^* + B^*) = \text{Dom}(A^*) \cap \text{Dom}(B^*)$, então $\langle u, A^*\xi + B^*\xi \rangle = \langle u, A^*\xi \rangle + \langle u, B^*\xi \rangle = \langle Au, \xi \rangle + \langle Bu, \xi \rangle = \langle (A + B)u, \xi \rangle = \langle u, (A + B)^*\xi \rangle$, para todo $u \in \text{Dom}(A + B) = \text{Dom}(A) \cap \text{Dom}(B)$. Portanto, da definição de adjunto, segue que $\xi \in \text{Dom}(A + B)^*$ e $A^*\xi + B^*\xi = (A + B)^*\xi$. Da arbitrariedade de ξ , obtemos $A^* + B^* \subset (A + B)^*$.

Suponha, agora, que $A \in \mathcal{B}(H)$, e tome $\xi \in \text{Dom}((A + B)^*)$. Então, pela definição de adjunto, $\langle (A + B)u, \xi \rangle = \langle u, (A + B)^*\xi \rangle$, para todo $u \in \text{Dom}(A + B)$. Ainda, como $\text{Dom}(A + B) = H \cap \text{Dom}(B) = \text{Dom}(B)$ e $\xi \in \text{Dom}(A^*) = H$ (pois $\|A^*\| = \|A\| < \infty$), temos que $\langle u, A^*\xi \rangle + \langle Bu, \xi \rangle = \langle Au, \xi \rangle + \langle Bu, \xi \rangle = \langle (A + B)u, \xi \rangle = \langle u, (A + B)^*\xi \rangle$, para todo $u \in \text{Dom}(A + B) = \text{Dom}(B)$. Mas, pela definição de adjunto, isto é equivalente a dizer que $\xi \in \text{Dom}(B^*) = H \cap \text{Dom}(B^*) = \text{Dom}(A^*) \cap \text{Dom}(B^*)$ e $B^*\xi = (A + B)^*\xi - A^*\xi$. Portanto, $(A + B)^* \subset A^* + B^*$. Concluimos, então, que $A^* + B^* = (A + B)^*$.

Demonstração de 2:

Seja $\xi \in \text{Dom}(B^* \circ A^*)$. Então, $A^*\xi \in \text{Dom}(B^*)$, de onde vem que $\langle Bu, A^*\xi \rangle = \langle u, (B^* \circ A^*)\xi \rangle$, para todo $u \in \text{Dom}(B)$. Em particular, $\langle Bu, A^*\xi \rangle = \langle u, (B^* \circ A^*)\xi \rangle$, para todo $u \in \text{Dom}(A \circ B) = \{u \in \text{Dom}(B) : Bu \in \text{Dom}(A)\}$. Portanto, $\langle (A \circ B)u, \xi \rangle = \langle Bu, A^*\xi \rangle = \langle u, (B^* \circ A^*)\xi \rangle$, para todo $u \in \text{Dom}(A \circ B)$. Logo, pela definição de adjunto, concluimos que $\xi \in \text{Dom}((A \circ B)^*)$ e que $(A \circ B)^*\xi = (B^* \circ A^*)\xi$. Assim, $B^* \circ A^* \subset (A \circ B)^*$.

Suponhamos, agora, que $A \in \mathcal{B}(H)$, e seja $\xi \in \text{Dom}(A \circ B)^*$. Então,

$$\langle A(Bu), \xi \rangle = \langle (A \circ B)u, \xi \rangle = \langle u, (A \circ B)^*\xi \rangle,$$

para todo $u \in \text{Dom}(A \circ B)$. Decorre de $A \in \mathcal{B}(H)$ que

$$\langle Bu, A^*\xi \rangle = \langle A(Bu), \xi \rangle,$$

para todo $u \in \text{Dom}(A \circ B)$, uma vez que $\xi \in \text{Dom}(A^*) = H$. Assim, concluimos que $A^*\xi \in \text{Dom}(B^*)$, e que $B^*(A^*\xi) = (A \circ B)^*\xi$. Mostramos, então, que $\text{Dom}((A \circ B)^*) \subseteq \text{Dom}(B^* \circ A^*)$, e que $(B^* \circ A^*)|_{\text{Dom}((A \circ B)^*)} = (A \circ B)^*$, isto é, $(A \circ B)^* \subset B^* \circ A^*$, finalizando a demonstração.

XIX) Demonstraremos, agora, condições necessárias e suficientes para que um operador linear simétrico num espaço de Hilbert seja auto-adjunto.

Teorema II: *Se H é um espaço de Hilbert, A é um operador linear densamente definido e simétrico em H e $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$, então são equivalentes:*

1. A é auto-adjunto;

2. A é fechado e $\text{Ker}(A^* \pm \lambda i I_{\mathcal{B}(H)}) = \{0\}$;

3. $\text{Im}(A \pm \lambda i I_{\mathcal{B}(H)}) = H$.

Demonstração:

1 $\Rightarrow$ 2) A é fechado, pois A^* é fechado e $A = A^*$. Se $u \in \text{Dom}(A^*) = \text{Dom}(A^* + \lambda i I_{\mathcal{B}(H)})$, então

$$\|(A^* + \lambda i I_{\mathcal{B}(H)})u\|^2 = \|A^*u\|^2 - \lambda i \langle A^*u, u \rangle + \lambda i \langle u, A^*u \rangle + \lambda^2 \|u\|^2 \geq \lambda^2 \|u\|^2$$

(note que $\langle A^*u, u \rangle = \langle u, A^*u \rangle$), o que mostra a injetividade de $A^* + \lambda i$. A demonstração de $\text{Ker}(A^* - \lambda i I_{\mathcal{B}(H)}) = \{0\}$ é análoga.

2 $\Rightarrow$ 3) Vamos mostrar que $\text{Im}(A + \lambda i I_{\mathcal{B}(H)})$ é um conjunto denso e fechado. Se $\text{Im}(A + \lambda i I_{\mathcal{B}(H)})$ não fosse denso, então pelo Teorema I existiria $\xi \in \text{Im}(A + \lambda i I_{\mathcal{B}(H)})^\perp$ não-nulo. Mas isto implicaria $0 = \langle (A + \lambda i I_{\mathcal{B}(H)})u, \xi \rangle = \langle u, 0 \rangle$, para todo $u \in \text{Dom}(A)$ e, portanto, $\xi \in \text{Dom}((A + \lambda i I_{\mathcal{B}(H)})^*)$, com

$$(A + \lambda i I_{\mathcal{B}(H)})^* \xi = (A^* - \lambda i I_{\mathcal{B}(H)}) \xi = 0,$$

contradizendo a hipótese. Logo, $\text{Im}(A + \lambda i I_{\mathcal{B}(H)})$ é denso em H . Seja, agora, $\{(A + \lambda i I_{\mathcal{B}(H)})u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência convergente de elementos de $\text{Im}(A + \lambda i I_{\mathcal{B}(H)})$. Como A é simétrico, vale que $\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$, para todo $v \in \text{Dom}(A)$, o que implica

$$\|(A + \lambda i I_{\mathcal{B}(H)})u_n\|^2 \geq \lambda^2 \|u_n\|^2,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por esta última desigualdade, segue que $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy em $\text{Dom}(A)$, uma vez que $\{(A + \lambda i I_{\mathcal{B}(H)})u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ também o é. Logo, da completude de H , segue que $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge para algum elemento de H , e concluímos que $\{(u_n, (A + \lambda i I_{\mathcal{B}(H)})u_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência convergente de elementos de $\text{Gr}(A + \lambda i I_{\mathcal{B}(H)})$. Como $A + \lambda i I_{\mathcal{B}(H)}$ é fechado (pois A é fechado), o limite de $\{(u_n, (A + \lambda i I_{\mathcal{B}(H)})u_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ também pertence a $\text{Gr}(A + \lambda i I_{\mathcal{B}(H)})$. Em particular, o limite de $\{(A + \lambda i I_{\mathcal{B}(H)})u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ pertence à imagem de $A + \lambda i I_{\mathcal{B}(H)}$, e concluímos que $\text{Im}(A + \lambda i I_{\mathcal{B}(H)})$ é fechado em H . Temos, então, que $\text{Im}(A + \lambda i I_{\mathcal{B}(H)})$ é denso e fechado em H , isto é, $\text{Im}(A + \lambda i I_{\mathcal{B}(H)}) = H$. A demonstração de que $\text{Im}(A - \lambda i I_{\mathcal{B}(H)}) = H$ é análoga à que acabou de ser feita.

3 $\Rightarrow$ 1) Vamos mostrar, primeiramente, que se T é um operador linear qualquer, então $\text{Im}(T)^\perp = \text{Ker}(T^*)$. De fato, se $v \in \text{Ker}(T^*)$, então $\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle = 0$, para todo $u \in \text{Dom}(T)$. Isso mostra que $\text{Ker}(T^*) \subseteq \text{Im}(T)^\perp$. Por outro lado, se $v \in \text{Im}(T)^\perp$, então $\langle Tu, v \rangle = 0 = \langle u, 0 \rangle$, para todo $u \in \text{Dom}(T)$, mostrando que $v \in \text{Dom}(T^*)$ e que $T^*v = 0$. Logo, $v \in \text{Ker}(T^*)$,

e a outra inclusão está demonstrada. Voltemos à demonstração original. Seja $\xi \in \text{Dom}(A^*)$. Da sobrejetividade de $A - \lambda iI_{\mathcal{B}(H)}$, garantimos a existência de $\rho \in \text{Dom}(A - \lambda iI_{\mathcal{B}(H)}) = \text{Dom}(A)$ tal que $(A - \lambda iI_{\mathcal{B}(H)})\rho = (A^* - \lambda iI_{\mathcal{B}(H)})\xi$. Como A é simétrico, temos que $(A^* - \lambda iI_{\mathcal{B}(H)})(\rho - \xi) = 0$. Logo, como $\text{Im}(A + \lambda iI_{\mathcal{B}(H)}) = H$, pelo que acabou de ser demonstrado temos que $\text{Ker}(A^* - \lambda iI_{\mathcal{B}(H)}) = \text{Ker}((A + \lambda iI_{\mathcal{B}(H)})^*) = \text{Im}(A + \lambda iI_{\mathcal{B}(H)})^\perp = \{0\}$, e obtemos $\xi = \rho \in \text{Dom}(A - \lambda iI_{\mathcal{B}(H)}) = \text{Dom}(A)$. Portanto, $\text{Dom}(A^*) \subseteq \text{Dom}(A)$ e, como A é simétrico por hipótese, concluímos que A é auto-adjunto.

Deste teorema que acabamos de mostrar, podemos derivar um critério para verificar se um operador linear densamente definido e simétrico é essencialmente auto-adjunto, bastando substituir A por $\bar{A}$:

Se H é um espaço de Hilbert, A é um operador linear densamente definido e simétrico em H , então $\bar{A}$ é um operador linear densamente definido e simétrico em H . Portanto, pelo Teorema II, se $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$, então são equivalentes:

1. $\bar{A}$ é auto-adjunto;
2. $\text{Im}(A \mp \lambda iI_{\mathcal{B}(H)})^\perp = \text{Ker}(A^* \pm \lambda iI_{\mathcal{B}(H)}) = \{0\}$.

Denotaremos, às vezes, $A \pm \lambda iI_{\mathcal{B}(H)}, \lambda \in \mathbb{C}$, simplesmente por $A \pm \lambda$, alternativamente.

Temos também o seguinte lema, que utilizaremos na demonstração do corolário da desigualdade de Kato, no capítulo 4:

Lema: *Seja A um operador densamente definido e simétrico. Se existir $\lambda \in \mathbb{R}$ satisfazendo $\text{Im}(\bar{A} - \lambda iI_{\mathcal{B}(H)}) = H$ então A é essencialmente auto-adjunto.*

Demonstração: Já sabemos que $\bar{A} \subseteq \bar{A}^* = A^* = \bar{A}^*$. Vamos mostrar que $\text{Dom}(A^*) \subseteq \text{Dom}(\bar{A})$. Seja $v \in \text{Dom}(A^*)$. Pela definição de adjunto,

$$\langle (\bar{A} - \lambda)u, v \rangle = \langle u, (A^* - \lambda)v \rangle,$$

qualquer que seja $u \in \text{Dom}(\bar{A})$ (lembre-se que, pelo que comentamos na Observação XIII, $\bar{A}^* = A^*$). Tome $w \in \text{Dom}(\bar{A}) =: \text{Dom}(\bar{A} - \lambda)$ tal que $(\bar{A} - \lambda)w = (A^* - \lambda)v$. Então,

$$\langle (\bar{A} - \lambda)u, v \rangle = \langle u, (\bar{A} - \lambda)w \rangle = \langle (\bar{A} - \lambda)u, w \rangle,$$

para todo $u \in \text{Dom}(\bar{A})$, mostrando que $w - v$ deve ser ortogonal a todo vetor de H . Logo, $v = w \in \text{Dom}(\bar{A})$, e terminamos a demonstração.

O intuito das próximas duas definições⁸ é generalizar a noção de convergência de séries em espaços normados. Isto se torna uma necessidade natural devido ao

⁸Estas definições e os subseqüentes “Fatos” foram retirados/inspirados na referência [13]

fato de não estarmos lidando com espaços de Hilbert necessariamente separáveis:

XX) Definição: *Seja X um espaço normado. Diremos que a família $\{x_i\}_{i \in I}$ de elementos de X é somável se existir $x \in X$ de forma que, para todo $\epsilon > 0$ dado exista $F_\epsilon \subseteq I$ finito tal que, para todo $F \supseteq F_\epsilon$ finito, se tenha $\|(\sum_{i \in F} x_i) - x\| < \epsilon$. Nesse caso, diremos que a soma de tal família é x , e denotaremos $x := \sum_{i \in I} x_i$ (note que a soma de uma família somável é única). Se a família $\{\|x_i\|\}_{i \in I}$ for somável, então diremos que a família $\{x_i\}_{i \in I}$ é absolutamente somável.*

XXI) Definição: *Seja X um espaço normado. Diremos que a família $\{x_i\}_{i \in I}$ de elementos de X é de Cauchy se, dado $\epsilon > 0$, existe $F_\epsilon \subseteq I$ finito tal que, para todo $F \subseteq I$ finito e disjunto de F_ϵ , tem-se $\|\sum_{i \in F} x_i\| < \epsilon$.*

Alguns fatos pertinentes relacionados às definições XX e XXI são: (alguns são apresentados sem demonstração. Os que serão efetivamente utilizados posteriormente são os Fatos 1, 2, 3, a implicação ($\Rightarrow$) do Fato 4 e o Fato 7)

Fato 1: Dada uma família $\Gamma = \{r_i\}_{i \in I}$ não-vazia de números reais não-negativos, se existir $M > 0$ tal que

$$\sup \left\{ \sum_{i \in F} r_i : F \subseteq I \text{ finito} \right\} \leq M,$$

então Γ é somável e $\sum_{i \in I} r_i = \sup \left\{ \sum_{i \in F} r_i : F \subseteq I \text{ finito} \right\}$.

Obs.: daqui para frente, denotaremos o fato de uma família de números reais não-negativos $\{r_i\}_{i \in I}$ ser somável por $\sum_{i \in I} r_i < \infty$.

Demonstração: Basta mostrar que

$$\sum_{i \in I} r_i = \sup \left\{ \sum_{i \in F} r_i : F \subseteq I \text{ finito} \right\} =: s.$$

Seja $\epsilon > 0$. Pela hipótese, sabemos que o supremo de $\left\{ \sum_{i \in F} r_i : F \subseteq I \text{ finito} \right\}$ existe e é um número real. Da definição de supremo, temos que existe $F_\epsilon \subseteq I$ finito de modo que $s - \epsilon < \sum_{i \in F_\epsilon} r_i$. Mas, se $F \subseteq I$ é um subconjunto finito tal que $F \supseteq F_\epsilon$, então $s - \epsilon < \sum_{i \in F_\epsilon} r_i \leq \sum_{i \in F} r_i$, o que implica $|\sum_{i \in F} r_i - s| < \epsilon$. Assim, da unicidade da soma, vem que $\sum_{i \in I} r_i = \sup \left\{ \sum_{i \in F} r_i : F \subseteq I \text{ finito} \right\}$.

Fato 2: Se $\Gamma = \{r_i\}_{i \in I}$ é uma família somável não-vazia de números reais não-negativos, então $\sum_{i \in I} r_i = \sup \left\{ \sum_{i \in F} r_i : F \subseteq I \text{ finito} \right\} =: s$.

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$. Sabemos, por hipótese, que existe $F_\epsilon \subseteq I$ finito tal que, se $F \subseteq I$ é um subconjunto finito que satisfaz $F \supseteq F_\epsilon$, então $|(\sum_{i \in F} r_i) - \sum_{i \in I} r_i| < \epsilon$, e isto implica $(\sum_{i \in I} r_i) - \epsilon < \sum_{i \in F} r_i$. Para

finalizar a demonstração, basta mostrar que $\sum_{i \in I} r_i$ é uma cota superior de $\{\sum_{i \in F} r_i : F \subseteq I \text{ finito}\}$. Seja $F \subseteq I$ finito. Então, $\sum_{i \in F} r_i \leq \sum_{i \in F \cup F_\epsilon} r_i = (\sum_{i \in F \cup F_\epsilon} r_i) - (\sum_{i \in I} r_i) + (\sum_{i \in I} r_i) < \epsilon + (\sum_{i \in I} r_i)$ e, como ϵ e F são arbitrários, concluiu-se a demonstração.

Fato 3: Se a família $\{x_i\}_{i \in I}$ é de Cauchy, então o conjunto

$$E := \{i \in I : x_i \neq 0\}$$

é enumerável.

Demonstração: Como $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \{i \in I : \|x_i\| \geq 1/n\}$, basta mostrar que $E_n := \{i \in I : \|x_i\| \geq 1/n\}$ é finito, para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. De fato, se E_n não for finito, para algum $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, então dado $F \subseteq I$ finito, garantimos a existência de $j \in E_n \setminus F$. Logo, como $E_n \setminus F$ é disjunto de F , $\{x_i\}_{i \in I}$ não pode ser de Cauchy.

Fato 4: Se X é um espaço de Banach, então a família $\{x_i\}_{i \in I}$ é somável se, e somente se, for de Cauchy.

Fato 5: Se $\{x_i\}_{i \in I}$ é uma família absolutamente somável e X é um espaço de Banach, então ela é somável: de fato, se $\epsilon > 0$ é dado, sabemos que existe, pelo Fato 4, $F_\epsilon \subseteq I$ finito tal que, se $F \subseteq I$ é finito e disjunto de F_ϵ , então $\sum_{i \in F} \|x_i\| < \epsilon$ e, portanto, $\|\sum_{i \in F} x_i\| \leq \sum_{i \in F} \|x_i\| < \epsilon$. Logo, valendo-se novamente do Fato 4, concluímos que $\{x_i\}_{i \in I}$ é somável.

Fato 6: Se A é um operador limitado num espaço com produto interno H e $\{x_i\}_{i \in I}$ é uma família somável em H , então $\{Ax_i\}_{i \in I}$ é somável em H e $\sum_{i \in I} Ax_i = A(\sum_{i \in I} x_i)$. (basta notar que $\|\sum_{i \in F} Ax_i - A(\sum_{i \in I} x_i)\| \leq \|A\| \|\sum_{i \in F} x_i - \sum_{i \in I} x_i\|$, para todo $F \subseteq I$ finito)

Fato 7: Seja $\{X_i\}_{i \in I}$ uma família de espaços normados. Então,

a) o conjunto

$$\oplus_{i \in I} X_i := \left\{ (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i : \{i \in I : x_i \neq 0\} \text{ é finito} \right\}$$

é denso no conjunto

$$\tilde{l}_p := \left\{ (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i : \sum_{i \in I} \|x_i\|^p < \infty \right\},$$

se $1 \leq p < \infty$ (com a topologia induzida pela norma dada por

$$\|(x_i)_{i \in I}\| := \sqrt[p]{\sum_{i \in I} \|x_i\|^p},$$

para todo $(x_i)_{i \in I} \in \tilde{l}_p$: de fato, sejam $\epsilon > 0$ e $(x_i)_{i \in I} \in \tilde{l}_p$. Da somabilidade de $\{\|x_i\|^p\}_{i \in I}$ garantimos, pelo Fato 2, a existência de $F_{\epsilon^p} \subseteq I$ finito tal que $|\sum_{i \in I \setminus F_{\epsilon^p}} \|x_i\|^p - \sum_{i \in I} \|x_i\|^p| < \epsilon^p$. Considere o elemento $(y_i)_{i \in I}$ definido por $y_i = x_i$, se $i \in F_{\epsilon^p}$ e $y_i = 0$, se $i \in I \setminus F_{\epsilon^p}$. Então, $(y_i)_{i \in I}$ é tal que $(y_i)_{i \in I} \in \oplus_{i \in I} X_i$ e $\|(y_i)_{i \in I} - (x_i)_{i \in I}\| < \epsilon$.

Logo, se $p = 2$ e cada $X_i := H_i$ for um espaço com produto interno, $\tilde{l}_2$ será um espaço com produto interno, sendo este dado por

$$\langle (x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I} \rangle := \sum_{i \in I} \langle x_i, y_i \rangle,$$

$$(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} H_i.$$

b) $\tilde{l}_p$ é completo se, e somente se, X_i é completo, para todo $i \in I$. Para demonstrar este item, basta usar o Fato 1 e alguns truques simples de Análise.

XXII) Seja X um conjunto não-vazio.

Uma família $\mathcal{S}$ não-vazia de subconjuntos de X é dita ser uma semi-álgebra em X se:

1. $X \in \mathcal{S}$;
2. para todos $A, B \in \mathcal{S}$ tem-se que $A \cap B \in \mathcal{S}$; (e, portanto, intersecções finitas de elementos de $\mathcal{A}$ pertencem a $\mathcal{A}$)
3. para todo $A \in \mathcal{S}$, existem $n \in \mathbb{N}$ e elementos $A_i \in \mathcal{S}, 1 \leq i \leq n$, com $A_i \cap A_j = \emptyset$, se $i \neq j$, tais que $X \setminus A = \cup_{1 \leq i \leq n} A_i$.

Além disso, uma família $\mathcal{A}$ não-vazia de subconjuntos de X é dita ser uma álgebra X se:

1. para todos $A, B \in \mathcal{A}$ tem-se que $A \cup B \in \mathcal{A}$; (e, portanto, uniões finitas de elementos de $\mathcal{A}$ pertencem a $\mathcal{A}$)
2. para todo $A \in \mathcal{A}$, tem-se que $X \setminus A \in \mathcal{A}$.

(Note que $X \in \mathcal{A}$).

Um resultado muito importante que vamos utilizar mais tarde, na demonstração do teorema espectral para n -uplas finitas de operadores lineares limitados auto-adjuntos que comutam dois a dois, é o seguinte:

Lema:⁹ *Seja $\mathcal{S}$ uma semi-álgebra em X . Então a álgebra gerada por $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, consiste no conjunto $\mathcal{D}(\mathcal{S})$ das uniões finitas disjuntas de elementos de*

⁹Este lema foi demonstrado com base em informações de [9]

$\mathcal{S}$.

Demonstração: É possível ver que $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ é o conjunto das uniões finitas de elementos de $\mathcal{S}$ com complementares de elementos de $\mathcal{S}$. Logo, tem-se trivialmente que $\mathcal{D}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{S})$. Como $\mathcal{D}(\mathcal{S})$ contém $\mathcal{S}$, terminaremos a demonstração se mostrarmos que $\mathcal{D}(\mathcal{S})$ é uma álgebra. Vamos mostrar, primeiramente, que $\mathcal{D}(\mathcal{S})$ é fechado por complementação. Sejam $B_j, 1 \leq j \leq m$, elementos de $\mathcal{S}$ tais que $B_p \cap B_q = \emptyset$, se $p \neq q$. Definindo $B := \bigcup_{1 \leq j \leq m} B_j$ temos que

$$X \setminus B = \bigcap_{1 \leq j \leq m} X \setminus B_j,$$

e cada $X \setminus B_j$ é uma união disjunta de elementos de $\mathcal{S}$, digamos $X \setminus B_j = \bigcup_{1 \leq k \leq r(j)} B_j^k$, para algum $r(j) \in \mathbb{N}$ e certos $B_j^k \in \mathcal{S}$. Logo, $X \setminus B$ é a união variando-se nas m -uplas $(k(i))_{1 \leq i \leq m}$, onde $1 \leq k(i) \leq r(i)$, dos elementos $\bigcap_{1 \leq j \leq m} B_j^{k(j)}$. Cada $\bigcap_{1 \leq j \leq m} B_j^{k(j)}$ pertence a $\mathcal{S}$, pelo fato de $\mathcal{S}$ ser uma semi-álgebra. Além disso, eles são dois a dois disjuntos, pois se $\bigcap_{1 \leq j \leq m} B_j^{k_1(j)}$ e $\bigcap_{1 \leq j \leq m} B_j^{k_2(j)}$ são tais que $(k_1(i))_{1 \leq i \leq m} \neq (k_2(i))_{1 \leq i \leq m}$, então existe i tal que $k_1(i) \neq k_2(i)$. Logo, $B_i^{k_1(i)} \cap B_i^{k_2(i)} = \emptyset$, mostrando que $\bigcap_{1 \leq j \leq m} B_j^{k_1(j)}$ e $\bigcap_{1 \leq j \leq m} B_j^{k_2(j)}$ são disjuntos. Isto estabelece que $X \setminus B$ é uma união disjunta de elementos de $\mathcal{S}$. Vamos mostrar, agora, que $\mathcal{D}(\mathcal{S})$ é fechado por união. Sejam $A_l, 1 \leq l \leq n$, elementos de $\mathcal{S}$ tais que $A_i \cap A_j = \emptyset$, se $i \neq j$. Vamos mostrar que $(\bigcup_{1 \leq l \leq n} A_l) \cup (\bigcup_{1 \leq j \leq m} B_j)$ é uma união disjunta de elementos de $\mathcal{S}$. Temos que

$$(\bigcup_{1 \leq l \leq n} A_l) \cup B = (\bigcup_{1 \leq l \leq n} (A_l \cap X \setminus B)) \cup B.$$

Mas $X \setminus B$ é uma união disjunta de elementos de $\mathcal{S}$, como já vimos. Portanto, $\bigcup_{1 \leq l \leq n} (A_l \cap X \setminus B)$ é uma união disjunta de elementos de $\mathcal{S}$, sendo que tais elementos são todos disjuntos de B . Isto termina a demonstração.

“Álgebras de Banach e C^* -álgebras - alguns resultados elementares”

10

Definiremos uma álgebra de Banach A como sendo um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial no qual:

1. além das operações de soma (+) e de multiplicação por um escalar ($\cdot$), está definida uma operação de multiplicação $\circ : A \times A \longrightarrow A$ que é associativa e bilinear (em particular, vale a distributividade à esquerda e à direita). Os símbolos de multiplicação e de multiplicação por escalar serão sempre omitidos;
2. está definida uma norma $\|\cdot\|$ que é submultiplicativa (isto é, ela satisfaz $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$, para todos $a, b \in A$) e que induz uma métrica segundo a qual A , quando considerada como um espaço métrico, é completo.

Uma álgebra de Banach será dita comutativa se a multiplicação satisfizer $ab = ba$, para todos $a, b \in A$. Além disso, se A for uma álgebra de Banach na qual existe um elemento I_A satisfazendo $I_A \neq 0$, $aI_A = I_Aa = a$, para todo $a \in A$, e $\|I_A\| = 1$ (note que $aI_A = I_Aa = a$, para todo $a \in A$ implica somente $\|I_A\| \geq 1$), diremos que tal álgebra possui uma unidade (note que sua definição implica sua unicidade). Agora, se A for uma álgebra de Banach na qual está definida uma aplicação $*$: $A \longrightarrow A$ satisfazendo, para todos $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$:

1. $(a + \lambda b)^* = a^* + \bar{\lambda}b^*$,
2. $(ab)^* = b^*a^*$,
3. $(a^*)^* = a$,

com a propriedade adicional $\|a^*a\| = \|a\|^2$, para todo $a \in A$, então A é dita ser uma C^* -álgebra ($*$ é denominada aplicação de involução, e a propriedade $\|a^*a\| = \|a\|^2$, para todo $a \in A$, é denominada propriedade C^* ; além disso, a^* é definido como o adjunto de a). Numa C^* -álgebra, a involução é uma isometria, isto é, $\|a^*\| = \|a\|$, para todo $a \in A$. Isto se segue da propriedade 3 da involução, da submultiplicatividade da norma e da identidade C^* . Se A for uma C^* -álgebra que possui uma unidade, dizemos que A é uma C^* -álgebra unital. Se A for uma C^* -álgebra sem unidade podemos munir o produto cartesiano $A \times \mathbb{C}$ com uma estrutura de C^* -álgebra unital, na qual a aplicação $a \longmapsto (a, 0) :=$ é uma isometria. Basta definirmos a soma, o produto por escalar e a involução da maneira óbvia (coordenada a coordenada), o produto por $(a, \alpha)(b, \beta) \longmapsto (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta)$ e a norma por $\|(a, \alpha)\| = \sup \{(a, \alpha)\tilde{x} : x \in A, \|x\| \leq 1\}$, $a, b \in A, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$. A unidade, neste caso, será o elemento $(0, 1)$ (a C^* -álgebra $\tilde{A}$ assim obtida é conhecida como a unitização de A).

Se A é uma C^* -álgebra, dizemos que:

¹⁰Esta subseção foi escrita com inspiração na leitura de textos presentes em [16], [21], [17] e [3]

1. $a \in A$ é um elemento normal se $aa^* = a^*a$, isto é, se a comuta com seu adjunto;
2. $a \in A$ é um elemento auto-adjunto se $a = a^*$;
3. $a \in A$ é um elemento unitário se satisfaz $aa^* = a^*a = I_A$;
4. $a \in A$ é uma projecção se satisfaz $a^* = a = a^2$.¹¹

Ressaltamos aqui, sem demonstração, que os espaços $C(I)$ e $\mathcal{B}(H)$ são C^* -álgebras, se definirmos suas involuções pela conjugação complexa e pela operação de adjunção, respectivamente.

Um homomorfismo entre C^* -álgebras será dito um $*$ -homomorfismo se for um homomorfismo de álgebras que preserva a involução. Se as C^* -álgebras forem unitais e tal homomorfismo levar a unidade de uma na unidade da outra, então ele será denominado um homomorfismo unital.

Um resultado muito conhecido afirma que, se A é uma álgebra de Banach com unidade I_A , então o elemento $I_A - a$ é inversível, para todo $a \in A$ satisfazendo $\|a\| < 1$. Neste caso, mostra-se que $(I_A - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ (esta fórmula é conhecida como série de Von Neumann). Isto mostra que o conjunto $G(A) := \{a \in A : a \text{ é inversível em } A\}$ (dizer que “ $a \in A$ é inversível em A ” significa dizer que a possui um inverso multiplicativo a^{-1} , isto é, $aa^{-1} = a^{-1}a = I_A$, e que **este pertence a** A) é aberto em A , pois se $a \in G(A)$ e $b \in A$ satisfizer $\|b\| < \|a^{-1}\|^{-1}$, então $a - b = a(I_A - a^{-1}b)$, e $I_A - a^{-1}b$ é inversível, uma vez que $\|a^{-1}b\| \leq \|a^{-1}\|\|b\| < 1$.

É possível provar que a operação de inversão em $G(A)$ é um homeomorfismo diferenciável (não nos aprofundaremos nesta discussão, aqui).

Dado $a \in A$ numa álgebra de Banach com unidade, definimos o espectro de a com respeito a A por $\sigma_A(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I_A - a \text{ não é inversível em } A\}$, e o seu resolvente (com respeito a A) por $\rho_A(a) := \mathbb{C} \setminus \sigma_A(a)$. Definimos, ainda, o raio espectral de a , com respeito a A , por $r_A(a) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_A(a)\}$ (se A não tiver uma unidade, definimos $\sigma_A(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I_{\tilde{A}} - a \text{ é inversível em } \tilde{A}\}$, sendo $I_{\tilde{A}} = (0, 1)$). Aliás, o acréscimo “com respeito a A ” posto acima na definição de espectro se deve ao fato de que, se um certo elemento $a \in A$ pertence a uma subálgebra de Banach de A , digamos B , com $I_A \in B$ - por exemplo, a subálgebra gerada por a e I_A -, então $\sigma_A(a) \subseteq \sigma_B(a)$, mas nem sempre se tem a inclusão inversa, pois um elemento inversível em A pode não ser inversível em B . Portanto, se $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > \|a\|$, então $\lambda \in \rho_A(a)$. De fato, se $|\lambda| > \|a\|$, temos que $\lambda I - a = \lambda(I_A - a/\lambda)$, e $\|a/\lambda\| < 1$. Além disso, como $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \lambda I_A - a \in A$ é uma aplicação contínua e $\sigma_A(a)$ é a imagem inversa de $A \setminus G(A)$ por tal aplicação, segue que $\sigma_A(a)$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{C}$.

¹¹Aqui temos uma certa ambiguidade de nomenclaturas, pois se a fosse um operador limitado agindo sobre um espaço de Hilbert, ele seria chamado de projecção ortogonal. No entanto, no contexto de C^* -álgebras abstratas chamaremos tal elemento somente de projecção

Logo, $\sigma_A(a)$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Prova-se, inclusive, que $\sigma_A(a)$ é sempre não-vazio.

Uma fórmula extremamente importante afirma que

$$(R) \quad r_A(a) = \lim_n \|a^n\|^{1/n}.$$

Com esta fórmula, mostra-se que, se A for uma C^* -álgebra unital, então $r_A(a) = \|a\|$, sempre que $a \in A$ for um elemento normal ou auto-adjunto. Inclusive, usando este fato, podemos dar uma aplicação interessante aos operadores auto-adjuntos sobre espaços de Hilbert (sejam eles limitados ou não). Vamos fazer uma breve digressão para mostrar um lema e, logo em seguida, mostrar a aplicação mencionada:¹²

Lema A0: *Se A é um operador linear injetor agindo num espaço de Hilbert H , então*

$$\sigma(A^{-1}) \setminus \{0\} = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}\},$$

onde $\text{Dom}(A^{-1}) := \text{Im}(A)$

Demonstração: A identidade algébrica

$$(z^{-1} - \lambda^{-1})^{-1} = -\lambda z(z - \lambda)^{-1},$$

válida para quaisquer $z, \lambda \in \mathbb{C}$ não-nulos, nos motiva a ideia da demonstração: se $\lambda \in \rho(A)$, $\lambda \neq 0$, então para todo $u \in H$,

$$(A^{-1} - \lambda^{-1})(-\lambda A(A - \lambda)^{-1})u = -\lambda(A - \lambda)^{-1}u + A(A - \lambda)^{-1}u = u,$$

enquanto que para todo $v := Aw \in \text{Dom}(A^{-1}) = \text{Im}(A)$,

$$(-\lambda A(A - \lambda)^{-1})(A^{-1} - \lambda^{-1})v = A(A - \lambda)^{-1}(-\lambda + A)w = Aw = v.$$

Isto mostra que

$$-\lambda A(A - \lambda)^{-1} = (A^{-1} - \lambda^{-1})^{-1}$$

e, como

$$-\lambda A(A - \lambda)^{-1} = -\lambda^2(A - \lambda)^{-1} - \lambda$$

e o membro da direita pertence a $\mathcal{B}(H)$, temos pela definição de resolvente que $\lambda^{-1} \in \rho(A^{-1})$. Isto mostra a inclusão $\rho(A^{-1}) \setminus \{0\} \supseteq \{\lambda^{-1} : \lambda \in \rho(A) \setminus \{0\}\}$, ou seja, $\sigma(A^{-1}) \setminus \{0\} \subseteq \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}\}$. Usando-se a identidade

$$-\lambda^{-1}z^{-1}(z^{-1} - \lambda^{-1})^{-1} = (z - \lambda)^{-1}$$

e a mesma estratégia acima, mostra-se a outra inclusão.

Teorema: *O espectro de qualquer operador auto-adjunto A agindo num espaço de Hilbert H é não-vazio.*

¹²O lema, bem como a aplicação mencionada, foram retirados de [6]

Demonstração: Se $0 \in \sigma(A)$, não há nada a demonstrar. Suponha que $0 \notin \sigma(A)$. Então, está bem definido e é limitado o operador A^{-1} . Como A^{-1} é auto-adjunto,¹³ $r_{\mathcal{B}(H)}(A^{-1}) = \|A^{-1}\|$, pelo que acabamos de afirmar. Isto mostra que $\sigma(A^{-1})$ contém um elemento não-nulo de $\mathbb{C}$, pois caso contrário, A^{-1} seria nulo, um absurdo. Logo, existe $0 \neq \lambda \in \sigma(A^{-1})$. Pelo Lema A0, garantimos que $\lambda^{-1} \in \sigma(A)$, mostrando que o espectro de A é não-vazio. Isto estabelece o resultado desejado.

(na realidade, ganhamos o seguinte corolário, também: se A é um operador linear agindo sobre um espaço de Hilbert H tal que $0 \notin \sigma(A)$ e A^{-1} é um operador normal, então $\sigma(A) \neq \emptyset$. Isto se deve ao fato de que também temos $r_{\mathcal{B}(H)}(A^{-1}) = \|A^{-1}\|$, neste caso).

Voltemos à teoria de álgebras de Banach.

Devido ao fato de a definição do raio espectral ser puramente algébrica e à “ponte” criada entre a estrutura algébrica e a estrutura topológica de A pela fórmula (R), provamos que o raio espectral de a permanece o mesmo, tanto se o consideramos com respeito a A ou com respeito a alguma subálgebra unital de A que contenha a (desde que a unidade desta seja a unidade de A). Por este motivo, representaremos o raio espectral de a simplesmente por $r(a)$, de agora em diante. Prova-se também que se A é uma $*$ -álgebra (isto é, uma álgebra com uma involução) que adquire uma estrutura de C^* -álgebra quando munida de uma certa norma $\|\cdot\|_1$ e se, quando munimos A com uma outra norma $\|\cdot\|_2$, (mantendo as mesmas operações de soma, multiplicação, multiplicação por escalar e involução) A também se transforma numa C^* -álgebra, então $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$. De fato, se $a \in A$ é um elemento de uma álgebra de Banach A com unidade que se torna uma C^* -álgebra tanto com $\|\cdot\|_1$ quanto com $\|\cdot\|_2$, então $\|a\|_1^2 = \|a^*a\|_1 = r(a^*a) = \|a^*a\|_2 = \|a\|_2^2$, pois a^*a é um elemento auto-adjunto de A .

Devido ao fato (não trivial) de que o espectro de todo elemento de uma álgebra de Banach com unidade é não-vazio, prova-se o seguinte resultado:

Teorema (Gelfand): *Se A é uma álgebra de Banach com unidade tal que todo elemento não-nulo é inversível, então A é isometricamente isomorfa a $\mathbb{C}$ (a comutatividade de A também é consequência do teorema).*

Demonstração: notemos, primeiramente, que o espectro de cada elemento a de A , por ser não-vazio, contém somente um elemento. De fato, se $\lambda, \mu \in \sigma_A(a)$, então $\lambda I_A - a = 0 = \mu I_A - a$, pela definição de espectro, uma vez que

¹³Pois seja A um operador simétrico densamente definido tal que $0 \notin \sigma(A)$. Então, se $v \in H$ e $u \in \text{Dom}(A^{-1})$, existem $x, y \in \text{Dom}(A)$ tais que $Ax = u$ e $Ay = v$. Logo,

$$\langle A^{-1}u, v \rangle = \langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle = \langle u, A^{-1}v \rangle,$$

mostrando que A^{-1} é auto-adjunto

todo elemento não-nulo de A é inversível. Como $I_A \neq 0$, $\lambda = \mu$. (o espectro de 0_A é constituído somente pelo 0).

Seja $a \in G(A)$ e $\lambda \in \sigma_A(a)$. Como todo elemento não-nulo é inversível, devemos ter $\lambda I_A - a = 0$, pela definição de espectro. Logo, $a = \lambda I_A$. Isto mostra o resultado, pois então a aplicação que associa cada elemento de A ao seu respectivo elemento do espectro está bem definida, é um homomorfismo de álgebras isométrico (se $a = \lambda I_A$, então $\|a\| = \|\lambda I_A\| = |\lambda| \|I_A\| = |\lambda|$) e é uma bijeção de A em $\mathbb{C}$.

É possível, ainda, obter uma outra condição suficiente para que uma álgebra de Banach unital seja isometricamente isomorfa a $\mathbb{C}$. Para tanto, vamos precisar do seguinte lema,¹⁴ que também será utilizado depois, por uma outra razão:

Lema A1: *Se $a \in \partial G(A)$ ($\partial G(A)$ denota a fronteira topológica de $G(A)$) e $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de elementos de $G(A)$ tal que $a_n \rightarrow a$, então $\|a_n^{-1}\| \rightarrow +\infty$ (note que tal seqüência sempre existe, pois A é um espaço métrico; além disso, ela possui infinitos elementos em sua imagem, pois $a \notin G(A)$, já que $G(A)$ é aberto em A).*

Demonstração: Suponhamos que não valha $\|a_n^{-1}\| \rightarrow +\infty$. Então, existem uma subsequência $\{a_{n_k}^{-1}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{a_n^{-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $M > 0$ tais que $\|a_{n_k}^{-1}\| \leq M$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $a_n \rightarrow a$, sabemos que existe k_0 tal que $\|a_{n_{k_0}} - a\| < 1/M$ e, portanto, $\|I_A - a_{n_{k_0}}^{-1} a\| = \|a_{n_{k_0}}^{-1} (a_{n_{k_0}} - a)\| \leq \|a_{n_{k_0}}^{-1}\| \|a_{n_{k_0}} - a\| < 1$. Concluiríamos, então, pela série de Von Neumann, que $a_{n_{k_0}}^{-1} a = I_A - (I_A - a_{n_{k_0}}^{-1} a)$ é inversível, e teríamos, portanto, que a também é inversível, um absurdo.

Agora vamos usar o lema acima para mostrar que:

Teorema: *Se A é uma álgebra de Banach com unidade satisfazendo*

$$\|a\| \|b\| \leq M \|ab\|,$$

para algum $M > 0$ e todos $a, b \in A$, então A é isometricamente isomorfa a $\mathbb{C}$.

Demonstração: Vamos mostrar que, se $a \in \partial G(A)$, então $a = 0$. De fato, seja $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de $G(A)$ tal que $a_n \rightarrow a$. Então, $\|a_n\| \|a_n^{-1}\| \leq M \|a_n a_n^{-1}\| = M \|I_A\| = M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, mostrando que $\|a_n\| \rightarrow 0$, devido ao lema anterior. Logo, pela continuidade da norma, temos que $\|a\| = \|\lim_n a_n\| = \lim_n \|a_n\| = 0$ e, portanto, $a = 0$. Sejam, agora, $a \in A$ e $\lambda \in \partial \sigma_A(a)$. Então, existe uma seqüência $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $\rho(a)$ tal que $\lambda_n \rightarrow \lambda$. Portanto, como $\lambda I_A - a \in \partial G(A)$ (pois $\lambda \in \partial \sigma(a)$), temos que $\lambda I_A - a = 0$, pelo argumento acima. Logo, a conclusão do teorema se dá de forma análoga à conclusão do Teorema de Gelfand.

¹⁴Este lema, bem como o próximo teorema, foram retirados de [3]

Dado um espaço de Banach X sobre $\mathbb{C}$, representamos por X' o seu dual, isto é, $X' := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ é linear e contínuo}\}$. Pelo Teorema de Banach-Alaoglu, sabemos que a bola unitária $\{f \in X' : \|f\| \leq 1\}$ (onde $\|\cdot\|$ é a norma usual de operador em X') é um subconjunto compacto de X' , quando munido da topologia fraca-*.¹⁵ Agora, dada uma álgebra de Banach com unidade A , podemos considerar o conjunto

$$\Omega_A := \{\phi : A \rightarrow \mathbb{C} : \phi \text{ é linear, contínuo e multiplicativo, } \phi \neq 0\},$$

onde ser multiplicativo significa que $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$, para todos $a, b \in A$. É possível mostrar que todos os elementos de Ω_A possuem norma (de operador) igual a 1. Agora, como toda álgebra de Banach é, em particular, um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, as inclusões

$$\Omega_A \subseteq \{\phi \in X' : \|\phi\| \leq 1\} \subseteq A'$$

fazem sentido. Além disso, se munirmos A' com a topologia fraca-*, Ω_A será um subconjunto fechado (em A') de $\{\phi \in X' : \|\phi\| \leq 1\}$ (para mostrar isso, basta usar a caracterização de continuidade via nets e o fato de A' ser Hausdorff, quando munido da topologia fraca-*, que é, por sua vez, compacto em A'). Assim, vemos que Ω_A também é um subconjunto compacto de A' . Se A for uma C^* -álgebra, mostra-se que os elementos ϕ de Ω_A , acima definido, automaticamente satisfazem $\phi(a^*) = \phi(a)$.

Seja A uma álgebra de Banach comutativa com unidade. Então, a aplicação (denominada aplicação de Gelfand)

$$\hat{\cdot} : A \ni a \rightarrow \hat{a} \in C(\Omega_A)$$

($C(\Omega_A)$ sendo munida da norma do sup $\|f\|_\infty := \max\{|f(\phi)| : \phi \in \Omega_A\}$), onde $\hat{a} : \phi \mapsto \phi(a)$) é um homomorfismo contínuo de álgebras de norma 1. Inclusive, prova-se que, numa C^* -álgebra comutativa A com unidade, para todo $a \in A$, $\sigma_A(a) = \{\phi(a) \in \mathbb{C} : \phi \in \Omega_A\}$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \|\hat{a}\|_{+\infty} &:= \sup\{|\hat{a}(\phi)| \in \mathbb{C} : \phi \in \Omega_A\} = \sup\{|\phi(a)| \in \mathbb{C} : \phi \in \Omega_A\} = \\ &= \max\{|\phi(a)| \in \mathbb{C} : \phi \in \Omega_A\} = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_A(a)\} = r(a), \end{aligned}$$

onde a antepenúltima igualdade se dá devido à compacidade de Ω_A e à continuidade da função $|\cdot|$. Se, além disso, A for uma C^* -álgebra comutativa unital, então tal aplicação será um $*$ -isomorfismo (ou seja, um isomorfismo de álgebras que preserva a involução) isométrico de A sobre Ω_A (um jeito de provar isto é

¹⁵A topologia fraca-* é a topologia menos fina em X' que torna as aplicações $\hat{x} : X' \rightarrow \mathbb{C}$, $\hat{x} : X' \ni f \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$, $x \in X$, contínuas (agradeço ao professor Paulo D. Cordaro por esclarecer certas dúvidas nossas quanto a algumas technicalidades referentes a esta definição). Como consequência da definição de topologia fraca-*, as aplicações de soma e multiplicação por escalar em X' serão contínuas. Além disso, como a família $\{\hat{x} : x \in X\}$ separa pontos - i.e., dados $f_1, f_2 \in X$ com $f_1 \neq f_2$, existe $\hat{x} \in X''$ tal que $\hat{x}(f_1) \neq \hat{x}(f_2)$ -, garantimos que X é Hausdorff, uma vez que $\mathbb{C}$ é Hausdorff

usando, além da identidade C^* e a fórmula (R), o fato de que Ω_A é um espaço topológico Hausdorff e compacto, pois invoca-se o Teorema da Aproximação de Stone-Weierstrass.¹⁶

Pelo que foi dito neste parágrafo e pela última frase do parágrafo anterior, podemos mostrar que se A for uma C^* -álgebra comutativa unital e $a \in A$ for um elemento auto-adjunto, então seu espectro está contido em $\mathbb{R}$: seja $\lambda \in \sigma_A(a)$. Então, existe $\phi \in \Omega_A$ tal que $\lambda = \phi(a)$. Assim, $\lambda = \phi(a) = \phi(a^*) = \overline{\phi(a)} = \overline{\lambda}$, provando o que queríamos.

Se A é uma C^* -álgebra unital e $a \in A$ é um elemento normal, podemos definir um $*$ -isomorfismo entre a “menor” C^* -álgebra que contém a e I_A (segundo a ordem imposta pela inclusão), que denotaremos por $C^*(a)$, e o conjunto das funções contínuas a valores complexos definidas em $\sigma_A(a)$, $C(\sigma_A(a))$ - este $*$ -isomorfismo é denominado Cálculo Funcional Contínuo. Aliás, note que $C^*(a) = \left\{ \sum_{i,j, (i+j) \leq n} c_{ij} a^i (a^*)^j, c_{ij} \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N} \right\}$, isto é, $C^*(a)$ é o fecho do conjunto dos polinômios complexos em a e a^* . E como a é normal, $C^*(a)$ é uma C^* -álgebra comutativa.

Para estabelecer tal Cálculo Funcional, primeiramente notamos que a aplicação

$$\tau : \Omega_{C^*(a)} \ni \phi \longmapsto \phi(a) \in \sigma_{C^*(a)}(a).$$

Note que a ação de τ é a mesma de $\cdot$, definida anteriormente, e que a imagem de τ é $\sigma_{C^*(a)}(a)$, pois

$$\sigma_{C^*(a)}(a) = \{ \phi(a) : \phi \in \Omega_{C^*(a)} \}$$

é injetora, devido à simplicidade da estrutura de $C^*(a)$: se $\phi(a) = \psi(a)$, $\phi, \psi \in \Omega_{C^*(a)}$, então $\phi(a^*) = \overline{\phi(a)} = \overline{\psi(a)} = \psi(a^*)$ uma vez que, em uma C^* -álgebra unital A , todo elemento ϕ de Ω_A satisfaz automaticamente $\phi(a^*) = \overline{\phi(a)}$. Assim, pela linearidade e a multiplicatividade de ϕ e ψ , vemos que seus valores coincidem sobre todo polinômio complexo em a e a^* . Logo, pela continuidade de ϕ e ψ (lembre-se que $\|\phi\| = \|\psi\| = 1$), concluímos que seus valores coincidem sobre todo elemento do fecho do conjunto dos polinômios complexos em a e a^* , isto é, sobre $C^*(a)$. Logo, $\phi = \psi$, e verificamos a injetividade de τ . Assim, τ é uma aplicação contínua e bijetora entre um espaço compacto e um espaço Hausdorff e, conseqüentemente, é uma aplicação fechada. Portanto, τ é um homeomorfismo. Este homeomorfismo induz um $*$ -isomorfismo $\Lambda : C(\Omega_{C^*(a)}) \longrightarrow C(\sigma_{C^*(a)}(a))$, dado por $\Lambda(f) = f \circ \tau^{-1}$. Logo, $\Lambda \circ \hat{\cdot}$ é um $*$ -isomorfismo de $C^*(a)$ em $C(\sigma_{C^*(a)}(a))$, e é tal que $\Lambda \circ \hat{a} = Id$, onde $Id(z) = z$, para todo $z \in \sigma_{C^*(a)}(a)$ (na verdade, é o único $*$ -isomorfismo unital de $C^*(a)$

¹⁶**Teorema da Aproximação de Stone-Weierstrass para espaços compactos:** Se X é um espaço topológico compacto Hausdorff e $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ é uma $*$ -subálgebra completamente separante de $C(X)$ - uma família de funções $\mathcal{A}$ é separante se, dados $x, y \in X, x \neq y$, existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq f(y)$; se tal família, além de separante, for tal que: para todo $x \in X$, existe $f \in \mathcal{A}$ satisfazendo $f(x) \neq 0$, então esta família será denominada completamente separante -, então $\mathcal{A}$ é densa em $C(X)$

em $C(\sigma_{C^*(a)}(a))$ satisfazendo tal propriedade).

No contexto das C^* -álgebras existe o seguinte:

Teorema (Invariância Espectral:) *Se A é uma C^* -álgebra unital com unidade I_A e $B \subseteq A$ é uma sub C^* -álgebra de A tal que $I_A \in B$, então para todo $b \in B$, tem-se que $\sigma_B(b) = \sigma_A(b)$ (note que a inclusão $\sigma_A(b) \subseteq \sigma_B(b)$ é imediata, de modo que o que realmente precisa ser mostrado é a inclusão inversa).*

Já mostramos no caso de álgebras de Banach com unidade que existe uma “invariância” com respeito ao raio espectral, mas no caso de C^* -álgebras temos um pouco mais, como acabamos de afirmar. Para provar este teorema vamos precisar de alguns lemas:

Lema A2: *Se A é uma álgebra de Banach com unidade I_A e $B \subseteq A$ é uma sub-álgebra fechada de A tal que $I_A \in B$, então para todo $b \in B$, tem-se que $\partial\sigma_B(b) \subseteq \partial\sigma_A(b)$.*

Demonstração: Sejam $b \in B$ e $\lambda \in \partial\sigma_B(b)$. Pela definição de fronteira topológica, existe uma seqüência (que, aliás, possui imagem infinita) $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\rho_B(b) \subseteq \rho_A(b)$ tal que $\lambda_n \rightarrow \lambda$. Assim, $\lambda_n I_A - b \in G(B) \subseteq G(A)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\sigma_B(b)$ é fechado em $\mathbb{C}$, segue que $\lambda I_A - b \notin G(B)$. Logo, como $\lambda_n I_A - b \rightarrow \lambda I_A - b$ em A , devemos ter $\lambda I_A - b \in \partial G(B)$, pois $\overline{G(B)} = \text{int}(G(B)) \cup \partial G(B)$ e $\text{int}(G(B)) \subseteq G(B)$ (aliás, lembre-se que a fronteira considerada aqui é relativa à topologia de A ; assim, $G(B)$ pode **não** ser aberto em A). Portanto, pelo Lema A1, temos que $\|(\lambda_n I_A - b)^{-1}\| \rightarrow +\infty$. Vamos mostrar, agora, que $\lambda I_A - b \in \partial G(A)$. Já sabemos que $\lambda I_A - b \in \overline{G(A)}$. Se tivéssemos $\lambda \in \text{int}(G(A)) = G(A)$, então pela continuidade da operação de inversão em $G(A)$ e da norma em A , teríamos que $\|(\lambda_n I_A - b)^{-1}\| \rightarrow \|(\lambda I_A - b)^{-1}\|$, o que é incoerente com o que acabamos de observar. Portanto, $\lambda I_A - b \in \partial G(A) = \partial(A \setminus G(A)) \subseteq \overline{A \setminus G(A)} = A \setminus G(A)$, o que nos leva a concluir que $\lambda \in \sigma_A(b)$. Como, também, λ é limite de elementos de $\rho_A(b) := \mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$, concluímos, finalmente, que $\lambda \in \partial\sigma_A(b)$. Isto mostra a inclusão que queríamos.

O próximo lema é de fácil demonstração:

Lema A3: *Se A é uma $*$ -álgebra com unidade, então $a \in A$ é inversível em A se, e somente se, aa^* e a^*a são inversíveis em A .*

Podemos, agora, demonstrar o **Teorema da Invariância Espectral**:

Demonstração: Seja $b \in B$. Façamos, primeiramente, a demonstração supondo-se que b é auto-adjunto em B . Como já observamos anteriormente, o espectro $\sigma_{C^*(b)}(b)$ é real, pois $C^*(b)$ é uma C^* -álgebra comutativa. Logo,

$\sigma_{C^*(b)}(b) = \partial\sigma_{C^*(b)}(b)$, pois $\text{int}(\sigma_{C^*(b)}(b)) = \emptyset$. Assim,

$$\sigma_B(b) \subseteq \sigma_{C^*(b)}(b) = \partial\sigma_{C^*(b)}(b) \subseteq^{(*)} \partial\sigma_B(b) \subseteq_B (b),$$

(usamos o Lema A2 em $(*)$) mostrando que $\sigma_{C^*(b)}(b) = \sigma_B(b)$. Repetindo o argumento acima substituindo-se $\sigma_B(b)$ por $\sigma_A(b)$, obtemos $\sigma_{C^*(b)}(b) = \sigma_A(b)$ e, conseqüentemente, $\sigma_B(b) = \sigma_A(b)$. Suponhamos, agora, que $b \in B$ é um elemento arbitrário, e seja $\lambda \in \sigma_B(b)$. Então, pela definição de espectro, $\lambda I_A - b$ não é inversível em B . Pelo Lema A3, sabemos que $(\lambda I_A - b)(\lambda I_A - b)^*$ ou $(\lambda I_A - b)^*(\lambda I_A - b)$ não é inversível em B . Portanto, pelo que acabamos de mostrar, $(\lambda I_A - b)(\lambda I_A - b)^*$ ou $(\lambda I_A - b)^*(\lambda I_A - b)$ não é inversível em A . Concluimos, então, aplicando novamente o Lema A3 (agora para A), que $\lambda I_A - b$ não é inversível em A . Logo, $\lambda \in \sigma_A(b)$, como queríamos.

Devido a este teorema, é possível inferir a respeito do espectro de um elemento auto-adjunto, por exemplo, em uma C^* -álgebra unital A **qualquer** (não necessariamente comutativa): se $a \in A$ é auto-adjunto, então em particular é normal, de modo que podemos utilizar o Cálculo Funcional construído acima. Pelo Cálculo Funcional, temos que, como $a = a^*$, então $\text{id} = \bar{\cdot}$ (id é a função identidade sobre $\sigma_{C^*(a)}(a)$), aplicando-se o $*$ -isomorfismo $\Lambda \circ \hat{\cdot} : C^*(a) \rightarrow C(\sigma_{C^*(a)}(a))$ em ambos os membros, onde $\bar{\cdot}$ denota a conjugação complexa em $\mathbb{C}$ (ou, mais precisamente, em $\sigma_{C^*(a)}(a)$). Assim, devemos ter $z = \bar{z}$, para todo $z \in \sigma_{C^*(a)}(a)$. Pelo Teorema de Invariância Espectral, concluimos que $z = \bar{z}$, para todo $z \in \sigma_A(a)$, isto é, o espectro de a é real. Logo, a é auto-adjunto em A se, e somente se, seu espectro está contido em $\mathbb{R}$.

Seguindo passos semelhantes é possível mostrar que

1. $a \in A$ satisfaz $aa^* = a^*a = I_A$ se, e somente se, $\sigma_A(a) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$;
2. a satisfaz $a^* = a = a^2$ se, e somente se, $\sigma_A(a) \subseteq \{0, 1\}$.

Para finalizar este resumo sobre C^* -álgebras, vamos mostrar que todo $*$ -homomorfismo bijetor entre duas C^* -álgebras unitais é necessariamente uma isometria:

Lema A4: *Seja $\phi : A \rightarrow B$ um $*$ -homomorfismo bijetor e unital entre duas C^* -álgebras unitais A e B , de unidades I_A e I_B , respectivamente. Então, ϕ é uma isometria.*

Demonstração: Seja $a \in A$. Se $\lambda I_A - a \in G(A)$, então $\phi(\lambda I_A - a) \in G(B)$, pois ϕ preserva a multiplicação. Logo, $\sigma_B(\phi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$ (note que isto vale mesmo que ϕ não seja bijetor). Portanto, $r(\phi(a)) \leq r(a)$, para todo $a \in A$. Como já vimos anteriormente, para todo $a \in A$, temos que $r(a^*a) = \|a^*a\|$, pois a^*a é auto-adjunto em A . Logo,

$$\|\phi(a)\|^2 = \|\phi(a)^*\phi(a)\| = r(\phi(a)^*\phi(a)) = r(\phi(a^*a)) \leq r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2,$$

para todo $a \in A$. Isto mostra que $\|\phi(a)\| \leq \|a\|$, para todo $a \in A$. Como ϕ^{-1} está bem definido e é um $*$ -homomorfismo entre C^* -álgebras unitais, concluímos que $\|\phi^{-1}(b)\| \leq \|b\|$, para todo $b \in B$, estabelecendo o desejado.

Terminamos afirmando (sem demonstrações) que quocientes de C^* -álgebras A por ideais fechados $J \subseteq A$ podem se tornar C^* -álgebras quando munidas das estruturas algébricas e topológicas adequadas; tais C^* -álgebras quocientes são utilizadas para estabelecer o resultado de que a imagem de qualquer $*$ -homomorfismo unital entre C^* -álgebras unitais é fechado na topologia da C^* -álgebra que é o contradomínio. Logo, o resultado que acabamos de mostrar se estende para $*$ -homomorfismos unitais injetores, isto é, eles **não** precisam ser necessariamente sobrejetores.

1 O Teorema Espectral

Antes de iniciar a demonstração do Teorema Espectral, vamos demonstrar um teorema auxiliar que será utilizado com frequência, posteriormente:

Lema 1.1 (B.L.T. - Bounded Linear Transformation): *Sejam X e Y espaços normados não-triviais, sendo Y completo. Se $D \subseteq X$ é um subespaço de X e $T : D \rightarrow Y$ é uma transformação linear limitada com, digamos, $\|Tx\| \leq C\|x\|$ para um certo $C > 0$ e todo $x \in D$, então existe uma única transformação linear limitada $\tilde{T} : \overline{D} \rightarrow Y$ tal que $\tilde{T}|_D = T$ e $\|\tilde{T}x\| \leq C\|x\|$, para todo $x \in \overline{D}$. Em particular, se D for denso em X , então existe uma única transformação linear limitada $\tilde{T} : X \rightarrow Y$ tal que $\tilde{T}|_D = T$ e $\|\tilde{T}x\| \leq C\|x\|$, para todo $x \in X$.*

Demonstração: Sejam $x \in \overline{D}$ e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de D tal que $x_n \rightarrow x$ (tal seqüência existe, pois $x \in \overline{D}$ e todo ponto de X possui uma base local enumerável de abertos básicos, uma vez que X é um espaço métrico). Vamos mostrar que a aplicação dada por $\tilde{T}x := \lim_n Tx_n$, está bem definida, e é linear e contínua. Primeiramente, notemos que $\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \leq C\|x_n - x_m\| \leq C(\|x_n - x\| + \|x_m - x\|)$, para todos $n, m \in \mathbb{N}$, o que mostra que $\{Tx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy em Y e, da completude de Y , segue a existência do limite $\lim_n Tx_n$ (além disso, este limite é único, pois Y é Hausdorff). Agora, se $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de elementos de D tal que $y_n \rightarrow x$, então $\|Tx_n - Ty_n\| = \|T(x_n - y_n)\| \leq C\|x_n - y_n\| \leq C(\|x_n - x\| + \|y_n - x\|) \rightarrow 0$, o que mostra que $\lim_n (Tx_n - Ty_n) = 0$ e, portanto, $\lim_n Ty_n = \lim_n Tx_n + \lim_n (Ty_n - Tx_n) = \lim_n Tx_n$. Logo, pelos argumentos anteriores em conjunto, temos que $\tilde{T} : \overline{D} \rightarrow Y$ está bem definida. $\tilde{T}$ é linear, pois se $z \in \overline{D}$, com $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sendo uma seqüência de elementos de D tal que $z_n \rightarrow z$, e $\alpha \in \mathbb{C}$, então $\tilde{T}(\alpha x + z) := \lim_n T(\alpha x_n + z_n) = \lim_n (\alpha Tx_n + Tz_n) = \alpha \lim_n Tx_n + \lim_n Tz_n = \alpha \tilde{T}x + \tilde{T}z$. Finalmente, $\tilde{T}$ é contínua, pois $\|Tx_n\| \leq C\|x_n\|$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e, pela continuidade das normas em X e Y , obtemos, tomando limites em ambos os membros da desigualdade, que $\|\tilde{T}x\| = \|\lim_n Tx_n\| = \lim_n \|Tx_n\| \leq \lim_n (C\|x_n\|) = C\|x\|$. Portanto, como x é arbitrário, concluímos que $\tilde{T}$ é limitada em $\overline{D}$ ou, equivalentemente, contínua em $\overline{D}$ (Obs.: para ver que $\tilde{T}|_D = T$, tome $x \in D$ e a seqüência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_n = x$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, $\tilde{T}x = \lim_n Tx_n = \lim_n Tx = Tx$, mostrando o desejado).

Para verificar a unicidade de tal aplicação, suponha a existência de uma aplicação linear contínua $G : \overline{D} \rightarrow Y$ tal que $G|_D = T$. Se $x \in \overline{D}$ e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de elementos de D tal que $x_n \rightarrow x$, então da continuidade de G , segue que $Gx = G(\lim_n x_n) = \lim_n Gx_n = \lim_n Tx_n =: \tilde{T}x$ e, da arbitrariedade de x , segue a demonstração do resultado.

As linhas gerais da demonstração do teorema abaixo foram retiradas de [18].

Teorema Espectral: *Se H é um espaço de Hilbert e A é um operador linear densamente definido em H , então A é auto-adjunto se, e somente se, existem um espaço de medida (N, μ) positiva e uma transformação linear unitária $U : H \rightarrow L^2(N, \mu)$ tal que $U \circ A \circ U^{-1} : \text{Dom}(M_f) \ni g \mapsto f \cdot g \in L^2(N, \mu)$, onde f é uma função a valores reais e Borel-mensurável em N (isto é $U \circ A \circ U^{-1} = M_f$, para uma certa f real e Borel-mensurável em N ; note que N está provido de uma certa topologia, pois senão não faria sentido falar em funções Borel-mensuráveis definidas em N).*

Demonstração: Suponhamos, primeiramente, que A é um operador linear auto-adjunto em $\mathcal{B}(H)$:

“O teorema espectral para operadores lineares auto-adjuntos limitados”

Defina $I := [-\|A\|, \|A\|]$ e tome $p \in P(I), p \neq 0$. Vamos mostrar que $\|p(A)\| \leq \sup \{|p(x)| : x \in I\}$.¹⁷ Seja $u \in H, u \neq 0$. Se o grau de p for n , então considere o subespaço vetorial $W := \text{span} \{A^i u : 0 \leq i \leq n\}$. Como W é fechado (pois $\dim W < \infty$)¹⁸, podemos definir a respectiva projeção ortogonal $E : H \rightarrow W$ sobre ele. Note que, como $E|_W = (I_{\mathcal{B}(H)})|_W$ e $E^2 = E$, tem-se que $p(EAE)u = p(A)u$. Como W é um subespaço fechado de H , sabemos que $(EAE)|_W$ é um operador auto-adjunto em W , pela Observação XVII das Considerações Iniciais (aqui, usamos a completude do espaço W para definir o adjunto de um operador em W). Assim, $(EAE)|_W$ possui uma base ortonormal de auto-vetores de W ,¹⁹ digamos, $(e_i)_{1 \leq i \leq k}$, para um certo $k =: \dim W \leq n + 1$, de forma que $u := \sum_{1 \leq i \leq k} u_i e_i$. Denotemos para cada $j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq k$, por λ_j o auto-valor relativo ao auto-vetor e_j . Logo, $\|(EAE)|_W\| = \max \{|\lambda_i| : 1 \leq i \leq k\}$, pois se $0 \neq v := \sum_{1 \leq i \leq k} v_i e_i$, então

$$\begin{aligned} \frac{\|((EAE)|_W)v\|^2}{\|v\|^2} &= \frac{\left\| \sum_{1 \leq i \leq k} \lambda_i v_i e_i \right\|^2}{\left\| \sum_{1 \leq i \leq k} v_i e_i \right\|^2} = \frac{\sum_{1 \leq i \leq k} |\lambda_i v_i|^2}{\sum_{1 \leq i \leq k} |v_i|^2} \leq \\ &= \frac{\max \{|\lambda_i|^2 : 1 \leq i \leq k\} (\sum_{1 \leq i \leq k} |v_i|^2)}{\sum_{1 \leq i \leq k} |v_i|^2} = (\max \{|\lambda_i| : 1 \leq i \leq k\})^2; \end{aligned}$$

além disso,

$$\frac{\|((EAE)|_W)e_i\|}{\|e_i\|} = |\lambda_i|,$$

¹⁷Se $I \ni t \mapsto p(t) := \sum_{i=0}^n a_i x^i$ for uma função polinomial com coeficientes complexos, definimos $p(A) := \sum_{i=0}^n a_i A^i$

¹⁸ $\dim W$ denota a dimensão algébrica de W

¹⁹Este resultado que acabamos de usar é conhecido como o teorema espectral para operadores lineares sobre espaços vetoriais de dimensão finita

para todo $1 \leq j \leq k$. Portanto, $|\lambda_j| \leq \|(EAE)|_W\| \leq \|EAE\| \leq \|E\| \|A\| \|E\| = \|A\|$ (a norma de uma projeção ortogonal é 1), para todo $1 \leq j \leq k$, o que implica $\lambda_j \in I$, para todo $1 \leq j \leq k$, pois os auto-valores de $(EAE)|_W$ são reais, uma vez que $(EAE)|_W$ é auto-adjunto. Concluimos, então, que

$$\begin{aligned} \|p(A)u\| &= \|p(EAE)u\| = \left\| \sum_{1 \leq i \leq k} u_i(p(EAE)e_i) \right\| = \\ &= \left\| \sum_{1 \leq i \leq k} u_i(p(\lambda_i)e_i) \right\| = \left\| \sum_{1 \leq i \leq k} (p(\lambda_i)u_i e_i) \right\| = \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq k} |p(\lambda_i)|^2 |u_i|^2} \\ &\leq \max \{ |p(\lambda_i)| : 1 \leq i \leq k \} \|u\| \leq \sup \{ |p(x)| : x \in I \} \|u\| \end{aligned}$$

e, da arbitrariedade de u , resulta $\|p(A)\| \leq \sup \{ |p(x)| : x \in I \}$, como queríamos. Aliás, como p também é arbitrário, temos que $\|p(A)\| \leq \sup \{ |p(x)| : x \in I \}$, para todo $p \in P(I)$ (repare que, para $p = 0$, o resultado é trivial).

Temos, então, que a aplicação $P(I) \ni p \xrightarrow{\varphi} p(A) \in \mathcal{B}(H)$ é contínua. Mas, como φ também é linear, $P(I)$ é denso em $C(I)$ (pelo Teorema da Aproximação de Weierstrass²⁰) e $\mathcal{B}(H)$ é um espaço de Banach, sabemos que existe uma única aplicação linear contínua $\Phi_C : C(I) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ tal que $\Phi_C|_{P(I)} = \varphi$, pelo Lema 1.1 (começaremos, eventualmente, a usar a notação $f(A)$ para designar o objeto $\Phi_C(f)$, qualquer que seja $f \in C(I)$). Além disso, Φ_C é um $*$ -homomorfismo unital entre $*$ -álgebras (tais definições estão explicitadas no texto sobre C^* -álgebras logo após as Considerações Iniciais):

I) se $\alpha \in \mathbb{C}$ e $f, g \in C(I)$, então $\Phi_C(\alpha f + g) = \alpha \Phi_C(f) + \Phi_C(g)$, pois já vimos que Φ_C é linear;

II) sejam $f, g \in C(I)$, sendo $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seqüências de funções polinomiais uniformemente limitadas tais que $p_n \rightarrow f$ e $q_n \rightarrow g$ em $C(I)$ (tais seqüências podem sempre ser tomadas de modo que $\sup \{ |p_n| : n \in \mathbb{N} \} \leq \|f\|_\infty$ e $\sup \{ |q_n| : n \in \mathbb{N} \} \leq \|g\|_\infty$). Então, $\Phi_C(f \cdot g) := \lim_n \varphi(p_n \cdot q_n) = \lim_n (p_n \cdot q_n)(A) = \lim_n [p_n(A) \circ q_n(A)] = [\lim_n p_n(A)] \circ [\lim_n q_n(A)] = [\lim_n \varphi(p_n)] \circ [\lim_n \varphi(q_n)] = \Phi_C(f) \circ \Phi_C(g)$; a antepenúltima igualdade vem de

$$\begin{aligned} \|p_n(A) \circ q_n(A) - f(A) \circ g(A)\| &\leq \|p_n(A) \circ q_n(A) - p_n(A) \circ g(A)\| + \\ &\|p_n(A) \circ g(A) - f(A) \circ g(A)\| \leq \|p_n(A)\| \|q_n(A) - g(A)\| + \\ &\|p_n(A) - f(A)\| \|g(A)\|, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ (note a independência do resultado relativamente à escolha das seqüências);

²⁰Se $f \in C(I)$, onde I é um intervalo compacto da reta real, então para todo $\epsilon > 0$ dado existe uma função polinomial $p \in P(I)$ tal que $\|f - p\| < \epsilon$

III) sejam $1_{C(I)}$ a função identicamente igual a 1 em I (veja as convenções de notação na Observação III das Considerações Iniciais) e $I_{\mathcal{B}(H)}$ a função identidade de $\mathcal{B}(H)$. Então, $\Phi_C(1_{C(I)}) := 1_{C(I)}(A) = I_{\mathcal{B}(H)}$;

IV) seja $f \in C(I)$ e $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funções polinomiais tal que $p_n \rightarrow f$ em $C(I)$. Então, como $\overline{p_n} \rightarrow \overline{f}$ e $*$: $\mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ é um operador linear contínuo (de fato, a involução é uma isometria em $\mathcal{B}(H)$), temos que $\Phi_C f := \lim_n \overline{p_n}(A) = \lim_n (p_n(A))^* = (\lim_n p_n(A))^* = [f(A)]^* = (\Phi_C f)^*$.

(Observamos que todos os resultados mostrados até então, e que serão mostrados mais adiante, continuariam válidos se trocássemos I por qualquer subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ contendo o espectro de A).

Antes de prosseguir, evidenciamos o seguinte teorema (cuja demonstração se encontra em [21]), que será de vital importância para o progresso da demonstração:

Teorema da Representação de Riesz: *Seja X um espaço localmente compacto Hausdorff, e denotemos por $C_c(X)$ como sendo o conjunto das funções contínuas a valores complexos definidas em X que possuem suporte compacto (isto é funções contínuas em X a valores complexos f tais que o fecho de $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ é um subconjunto compacto de X). Se $\lambda : C_c(X) \rightarrow \mathbb{C}$ é um funcional linear positivo,²¹ então existe uma única medida positiva μ definida numa σ -álgebra Ω que contém a σ -álgebra de Borel tal que $\lambda f = \int_X f d\mu$, para todo $f \in C_c(X)$. Além disso, tal medida satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *todo $K \subseteq X$ compacto é Ω -mensurável e satisfaz $\mu(K) < \infty$;*
2. *para todo E que seja Ω -mensurável,*

$$\mu(E) = \inf \{ \mu(V) : V \supseteq E \text{ é aberto em } X \};$$

3. *para todo U aberto em X , ou U que seja Ω -mensurável e tenha medida finita, tem-se que*

$$\mu(U) = \sup \{ \mu(K) : K \subseteq U \text{ é um compacto de } X \};$$

4. *se E é Ω -mensurável e $\mu(E) = 0$, então todo subconjunto de E é Ω -mensurável. (em outras palavras, μ é uma medida completa)*

Seja $u \in H$, e defina o funcional $\lambda_u : C(I) \rightarrow \mathbb{C}$ por $\lambda_u(f) = \langle f(A)u, u \rangle$. Então, λ_u é claramente linear, pelo fato de a aplicação Φ_C ser linear e da bilinearidade do produto interno. Além disso, λ_u é um funcional linear positivo, pois se $f \in C(I)$, $f \geq 0 \in C(I)$, então existe $g \in C(I)$ tal que $g = \overline{f}$ e $f = g^2$,

²¹Um funcional linear $\lambda : C_c(X) \rightarrow \mathbb{C}$ é dito ser positivo se $\lambda(f) \geq 0$ sempre que $f \geq 0$. O Teorema de Riesz possui uma outra versão, que não exige a positividade do funcional, mas sim a sua continuidade

e daí, $\lambda_u(f) = \langle (\bar{g} \cdot g)(A)u, u \rangle = \langle [\bar{g}(A) \circ g(A)]u, u \rangle = \langle [g(A) \circ g(A)]u, u \rangle = \langle g(A)(g(A)u), u \rangle = \langle g(A)u, (g(A))^*u \rangle = \langle g(A)u, \bar{g}(A)u \rangle = \langle g(A)u, g(A)u \rangle \geq 0$. Logo, pelo Teorema da Representação de Riesz, existe uma medida μ_u em I tal que $\langle f(A)u, u \rangle = \int_I f(x) d\mu_u(x)$, para toda $f \in C(I)$; $C_c(I) = C(I)$, no nosso caso, pois I é compacto.

Apesar de não usarmos isto na demonstração, note que λ_u também é contínuo: de fato, seja $f \in C(I)$, $f \neq 0 \in C(I)$ e $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funções polinomiais tal que $p_n \rightarrow f$ em $C(I)$ e $p_n \neq 0 \in C(I)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, temos que

$$\frac{|\langle p_n(A)u, u \rangle|}{\|p_n\|} \leq \frac{\|p_n(A)u\| \|u\|}{\|p_n\|} \leq \frac{\|p_n(A)\| \|u\|^2}{\|p_n\|} \leq \frac{\|p_n\| \|u\|^2}{\|p_n\|} = \|u\|^2.$$

Portanto,

$$\frac{|\lambda_u(f)|}{\|f\|} = \frac{|\langle [\lim_n p_n(A)]u, u \rangle|}{\|\lim_n p_n\|} = \lim_n \frac{|\langle p_n(A)u, u \rangle|}{\|p_n\|} \leq \|u\|^2,$$

e como f era arbitrária, concluímos o desejado.

Defina, agora, o subespaço vetorial $H_u := \overline{\{A^i u : i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}}$. Vamos mostrar, agora, que existe uma única transformação linear unitária $\tilde{\Omega}_u : H_u \rightarrow L^2(I, \mu_u)$ tal que $\tilde{\Omega}_u u = 1_{C_{\mu_u}(I)}$ (veja as convenções sobre notações na Observação IV das Considerações Iniciais) e $\tilde{\Omega}_u \circ A \circ \tilde{\Omega}_u^{-1} = M_{id_{C_{\mu_u}(I)}}$. Para isso, vamos proceder por partes. Primeiro, note que $G_u := \{f(A)u : f \in C(I)\} \subseteq H_u$ e que o conjunto G_u é denso em H_u (segundo a topologia de H), pois

$$\text{span} \{A^i u : i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \subseteq \{f(A)u : f \in C(I)\},$$

e $\text{span} \{A^i u : i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ é denso em H_u , por definição. Vamos, agora, definir uma aplicação $\Omega_u : G_u \rightarrow C_{\mu_u}(I)$ por $f(A)u \xrightarrow{\Omega_u} f$. Mostremos que Ω_u é uma transformação linear unitária: Ω_u está bem definida, pois se $f, g \in C(I)$ (note a diferença de espaços, aqui: f e g pertencem a $C(I)$, e não a $C_{\mu_u}(I)$!) e $f(A)u = g(A)u$, então $(f-g)(A)u = 0$ e, portanto, $|f-g|^2(A)u = [(f-g) \cdot (f-g)](A)u = (\bar{f}-\bar{g})(A)(f-g)(A)u = 0$. Logo, $0 = \langle |f-g|^2(A)u, u \rangle = \int_I |f-g|^2(x) d\mu_u(x)$, e concluímos que $f = g$ em quase todo ponto de I , o que implica que $f = g$ em $C_{\mu_u}(I)$, e Ω_u está bem definida. Que Ω_u é linear e sobrejetora é óbvio. Verifiquemos que Ω_u preserva produto interno. De fato,

$$\begin{aligned} \langle f(A)u, g(A)u \rangle &= \langle u, [f(A)]^*(g(A)u) \rangle = \overline{\langle [f(A)]^*(g(A)u), u \rangle} = \overline{\langle \bar{f}(A)(g(A)u), u \rangle} \\ &= \overline{\langle (\bar{f} \cdot g)(A)u, u \rangle} = \overline{\int_I (\bar{f} \cdot g)(x) d\mu_u(x)} = \int_I \overline{(\bar{f} \cdot g)(x)} d\mu_u(x) = \\ &= \int_I (f \cdot \bar{g})(x) d\mu_u(x) = \langle f, g \rangle, \end{aligned}$$

para quaisquer $f, g \in C_{\mu_u}(I)$. Isto também mostra a injetividade.

Para terminar a demonstração da existência de $\tilde{\Omega}_u$ vamos precisar do:

Lema 1.2: *Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert não-triviais. Se existem $D \subseteq H_1$ um subespaço denso de H_1 , $E \subseteq H_2$ um subespaço denso de H_2 e uma transformação linear unitária $U : D \rightarrow E$, então existe uma única aplicação linear unitária $\tilde{U} : H_1 \rightarrow H_2$ e $\tilde{U}|_D = U$.*

Demonstração: Já sabemos pelo Lema 1.1 que, se definirmos $\tilde{U}$ por $\tilde{U}x := \lim_n Ux_n$, para cada $x \in H_1$, onde $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de elementos de D tal que $x_n \rightarrow x$, então $\tilde{U}$ será uma aplicação linear e contínua de H_1 em H_2 que estende U . Basta, então, mostrar que $\tilde{U}$ preserva o produto interno, é bijetora, e que só existe uma aplicação unitária que satisfaz tal propriedade. Sejam $x, y \in H_1$ e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ seqüências de elementos de D tais que $x_n \rightarrow x$ e $y_m \rightarrow y$. Então,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{U}x, \tilde{U}y \rangle &= \langle \lim_n Ux_n, \lim_m Uy_m \rangle = \lim_m \langle \lim_n Ux_n, Uy_m \rangle = \\ \lim_m (\lim_n \langle Ux_n, Uy_m \rangle) &= \lim_m (\lim_n \langle x_n, y_m \rangle) = \lim_m \langle \lim_n x_n, y_m \rangle = \\ &= \langle \lim_n x_n, \lim_m y_m \rangle = \langle x, y \rangle, \end{aligned}$$

e isso mostra que $\tilde{U}$ preserva o produto interno (em particular, está mostrado que $\tilde{U}$ é injetora). Para mostrar a sobrejetividade de $\tilde{U}$ vamos usar que E é denso em H_2 e a completude de H_1 como espaço métrico. Seja $z \in H_2$ e $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de E tal que $z_n \rightarrow z$. Da sobrejetividade de U , sabemos que existe $w_n \in D$ tal que $z_n = Uw_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\|w_n - w_m\| = \|U(w_n - w_m)\| = \|Uw_n - Uw_m\|$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, e $\{Uw_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy em H_2 (pois é convergente em H_2), concluímos que existe $w \in H_1$ tal que $\lim_n w_n = w$, pois H_1 é completo. Então, da continuidade de $\tilde{U}$ em H_1 vem que $\tilde{U}w = \tilde{U}(\lim_n w_n) = \lim_n \tilde{U}w_n = \lim_n Uw_n = \lim_n z_n = z$. A unicidade segue do Lema 1.1, já que U é unitária e, portanto, contínua em D .

Voltemos à demonstração.

Notando que G_u é denso em H_u e que $C_{\mu_u}(I)$ é denso em $L^2(I, \mu_u)$, vemos que de fato existe uma única transformação linear unitária $\tilde{\Omega}_u : H_u \rightarrow L^2(I, \mu_u)$ tal que $\tilde{\Omega}_u|_{G_u} = \Omega_u$, pelo Lema 1.2. Além disso, $\tilde{\Omega}_u u = 1_{C_{\mu_u}(I)}$, pela definição de Ω_u e $\tilde{\Omega}_u \circ A \circ \tilde{\Omega}_u^{-1} = M_{id_{C_{\mu_u}(I)}}$: de fato, sejam $f \in L^2(I, \mu_u)$ e $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funções contínuas tais que $f_n \rightarrow f$ em $L^2(I, \mu_u)$. Então,

$$\begin{aligned} (\tilde{\Omega}_u \circ A \circ \tilde{\Omega}_u^{-1})(f) &= \tilde{\Omega}_u(A(\lim_n \tilde{\Omega}_u^{-1}(f_n))) = \tilde{\Omega}_u(A(\lim_n [f_n(A)u])) = \\ \tilde{\Omega}_u(\lim_n [Af_n(A)u]) &= \tilde{\Omega}_u(\lim_n [id_{C(I)} \cdot f_n](A)u) = \end{aligned}$$

$$\lim_n \tilde{\Omega}_u([id_{C(I)} \cdot f_n](A)u) = \lim_n (id_{C_{\mu_u}(I)} \cdot f_n) = id_{C_{\mu_u}(I)} \cdot f = M_{id_{C_{\mu_u}(I)}}(f),$$

onde a penúltima igualdade (*) vem de

$$\|id_{C_{\mu_u}(I)}(f_n) - id_{C_{\mu_u}(I)}(f)\|^2 = \int_{x \in I} |x(f_n(x) - f(x))|^2 d\mu_{u_\alpha} \leq \|A\| \int_{x \in I} |(f_n(x) - f(x))|^2 d\mu_u \longrightarrow 0.$$

Agora usaremos o Lema de Zorn para decompor H como uma soma direta de subespaços fechados e dois-a-dois ortogonais. Tomemos uma indexação (bijetora) de H , $\theta : S \mapsto H$, $\theta : \alpha \mapsto u_\alpha$, e consideremos o conjunto $\Sigma := \{B \in \wp(S) : (\alpha, \beta \in B, \alpha \neq \beta) \implies (H_{u_\alpha} \perp H_{u_\beta})\}$ (lembre-se da definição de H_u dada acima), com uma ordem parcial definida pela inclusão “ $\subseteq$ ” (veja que Σ é não-vazio). Seja $\Delta \subseteq \Sigma$ uma cadeia em Σ . Então, $\bigcup \Delta$ é uma cota superior de Δ (note que $\bigcup \Delta \in \Sigma$, pois se $\alpha, \beta \in \bigcup \Delta$, $\alpha \neq \beta$, então existem $B_\alpha, B_\beta \in \Delta$ tais que $\alpha \in B_\alpha$ e $\beta \in B_\beta$; mas, como Δ é uma cadeia, devemos ter $B_\alpha \subseteq B_\beta$ ou $B_\beta \subseteq B_\alpha$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $B_\alpha \subseteq B_\beta$. Assim, $\alpha, \beta \in B_\beta$, e $H_{u_\alpha} \perp H_{u_\beta}$ pela definição de B_β). Concluimos, então, pelo Lema de Zorn, que Σ possui um elemento maximal, M . Afirmamos que $H = \overline{\bigoplus_{\alpha \in M} H_{u_\alpha}}$ (note que aqui fizemos uma identificação entre o espaço das somas finitas de elementos dos subespaços H_{u_α} e o espaço $\bigoplus_{\alpha \in M} H_{u_\alpha}$, via uma aplicação unitária canônica - observe a definição presente no Fato 7, a), das Considerações Iniciais; adotaremos tal identificação para o resto da demonstração). Suponhamos, por absurdo, que $H \neq \overline{\bigoplus_{\alpha \in M} H_{u_\alpha}}$. Então, existe $w \neq 0$ tal que $w \in (\bigoplus_{\alpha \in M} H_{u_\alpha})^\perp$. Mas $\overline{\bigoplus_{\alpha \in M} H_{u_\alpha}}$ é A -invariante, pois se $x \in \overline{\bigoplus_{\alpha \in M} H_{u_\alpha}}$ então existem subconjuntos finitos $F_m \subseteq M$, $m \in \mathbb{N}$ de modo que $x_m := \sum_{\alpha \in F_m} v_\alpha$, com $v_\alpha \in H_{u_\alpha}$ e $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de elementos de $\bigoplus_{\alpha \in M} H_{u_\alpha}$ que converge para x (note que todo ponto de $\overline{\bigoplus_{\alpha \in M} H_{u_\alpha}}$ possui uma base local enumerável de abertos). Então,

$$Ax = A(\lim_m x_m) = \lim_m A(x_m) = \lim_m A(\sum_{\alpha \in F_m} v_\alpha) = \lim_m \sum_{\alpha \in F_m} Av_\alpha$$

e, como $\sum_{\alpha \in F_m} Av_\alpha \in \bigoplus_{\alpha \in M} H_{u_\alpha}$, para todo $m \in \mathbb{N}$ (pois cada H_{u_α} é A -invariante), temos que $\overline{\bigoplus_{\alpha \in M} H_{u_\alpha}}$ é A -invariante. Como A é auto-adjunto em H , $(\bigoplus_{\alpha \in M} H_{u_\alpha})^\perp$ também é A -invariante. Logo, $\{A^i w : i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \subseteq (\bigoplus_{\alpha \in M} H_{u_\alpha})^\perp$ e, conseqüentemente, $\overline{\{A^i w : i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}} \subseteq (\bigoplus_{\alpha \in M} H_{u_\alpha})^\perp$, pois $(\bigoplus_{\alpha \in M} H_{u_\alpha})^\perp$ é fechado. Mas, então, concluímos que $H_w \perp H_{u_\alpha}$, para todo $\alpha \in M$ e, como $w = u_\beta$, para algum $\beta \in S - M$ (uma vez que $w \notin H_{u_\alpha}$, para todo $\alpha \in M$), contradissemos a maximalidade de M . Assim, segue que temos de fato a identificação $H = \overline{\bigoplus_{\alpha \in M} H_{u_\alpha}}$.

Definindo $\Omega : \bigoplus_{\alpha \in M} H_{u_\alpha} \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in M} L^2(I, \mu_{u_\alpha})$ por

$$\Omega(v_\alpha)_{\alpha \in M} := (\tilde{\Omega}_{u_\alpha} v_\alpha)_{\alpha \in M},$$

obtemos uma aplicação linear unitária Ω . Novamente, devido ao Lema 1.2, podemos estender Ω a uma única aplicação linear unitária

$$\tilde{\Omega} : \overline{\oplus_{\alpha \in M} H_{u_\alpha}} \longrightarrow \overline{\oplus_{\alpha \in M} L^2(I, \mu_{u_\alpha})},$$

sendo

$$\overline{\oplus_{\alpha \in M} L^2(I, \mu_{u_\alpha})}$$

o completamento de espaços de Hilbert de $\oplus_{\alpha \in M} L^2(I, \mu_{u_\alpha})$, e que coincide com o espaço $\tilde{l}_2$ construído na Observação XXI das Considerações Iniciais. O produto interno em $\overline{\oplus_{\alpha \in M} L^2(I, \mu_{u_\alpha})}$ é definido por $\langle (f_\alpha)_{\alpha \in M}, (g_\alpha)_{\alpha \in M} \rangle := \sum_{\alpha \in M} \langle f_\alpha, g_\alpha \rangle$, quaisquer que sejam $(f_\alpha)_{\alpha \in M}, (g_\alpha)_{\alpha \in M} \in \oplus_{\alpha \in M} L^2(I, \mu_{u_\alpha})$.

Para terminar a demonstração desta implicação no caso em que A é um operador linear contínuo, precisamos construir uma transformação linear unitária de $\oplus_{\alpha \in M} L^2(I, \mu_{u_\alpha})$ num certo espaço $L^2(N, \mu)$, para algum conjunto N e alguma medida μ . Definamos $N := \bigcup_{\alpha \in M} \{(\alpha, x) : x \in I\} = M \times I$ (em qualquer contexto futuro que necessite de uma estrutura topológica, M sempre possuirá a topologia discreta), e considere a σ -álgebra em N como sendo o conjunto dos $E \subseteq M \times I$ tais que $\pi_\alpha(E \cap (\{\alpha\} \times I))$ é um subconjunto mensurável de I , para todo $\alpha \in M$, onde $\pi_\alpha : \{\alpha\} \times I \rightarrow I$ é a projecção em I , definida por $\pi_\alpha(\alpha, x) = x$, para todo $(\alpha, x) \in \{\alpha\} \times I$. Defina, também, a medida nesta σ -álgebra por $\mu(E) = \sum_{\alpha \in M} \mu_{u_\alpha}(\pi_\alpha(E \cap (\{\alpha\} \times I)))$. Podemos definir uma aplicação Ψ que transforma cada elemento $(f_\alpha)_{\alpha \in M}$ de $\prod_{\alpha \in M} L^2(I, \mu_{u_\alpha})$ em uma classe de equivalência $\hat{f}$ de $\mathbb{C}^{M \times I}$ segundo a medida μ , definida por $\hat{f}(\alpha, x) := f_\alpha(x)$, para cada $\alpha \in M$, para todo $x \in I$. Note que, devido à própria definição de μ , tal aplicação está bem definida - logo abaixo vamos mostrar que, em particular, Ψ transforma cada elemento $(f_\alpha)_{\alpha \in M}$ de $\overline{\oplus_{\alpha \in M} L^2(I, \mu_{u_\alpha})}$ em uma função $\hat{f}$ de $L^2(N, \mu)$, considerando-se que temos a descrição explícita de $\overline{\oplus_{\alpha \in M} L^2(I, \mu_{u_\alpha})}$ dada por

$$\overline{\oplus_{\alpha \in M} L^2(I, \mu_{u_\alpha})} = \left\{ (f_\alpha)_{\alpha \in M} \in \prod_{\alpha \in M} L^2(I, \mu_{u_\alpha}) : \sum_{\alpha \in M} \|f_\alpha\|^2 < \infty \right\}$$

(pelo Fato 7, a), com $p = 2$). Vamos mostrar que Ψ é tal que $\text{Im}(\Psi) \subseteq L^2(N, \mu)$, e que esta aplicação preserva produto interno. De fato, vamos mostrar que Ψ preserva normas. Se $(f_\alpha)_{\alpha \in M} \in \overline{\oplus_{\alpha \in M} L^2(I, \mu_{u_\alpha})}$, então

$$\begin{aligned} \|(f_\alpha)_{\alpha \in M}\|^2 &:= \sum_{\alpha \in M} \int_I |f_\alpha(x)|^2 d\mu_{u_\alpha} = (*) \\ \sum_{\alpha \in M} \int_{\{\alpha\} \times I} |\hat{f}(\alpha, x)|^2 d\mu &\stackrel{(**)}{=} \int_{M \times I} |\hat{f}(\alpha, x)|^2 d\mu =: \\ &\|\hat{f}\|^2. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que $(*)$ e $(**)$ são verdadeiras:

1. se α é fixado e $E \subseteq \{\alpha\} \times I$, então

$$\mu(E) = \mu_{u_\alpha}(\{x \in I : (\alpha, x) \in E\}) = \mu_{u_\alpha}(\pi_\alpha(E));$$

se α é fixado e $F \subseteq I$, então

$$\mu_{u_\alpha}(F) = \mu_{u_\alpha}(\{x \in I : (\alpha, x) \in \pi_\alpha^{-1}(F)\}) = \mu(\{\alpha\} \times F).$$

Portanto, como também $|\hat{f}(\alpha, x)|^2 = |f_\alpha(x)|^2$, para cada $\alpha \in M$, para todo $x \in I$, temos $\int_{\{\alpha\} \times I} |\hat{f}(\alpha, x)|^2 d\mu = \int_I |f_\alpha(x)|^2 d\mu_{u_\alpha}$, para todo $\alpha \in M$, pela definição de integral. Como $\{\|f_\alpha\|^2 = \int_I |f_\alpha(x)|^2 d\mu_{u_\alpha}\}_{\alpha \in M}$ é somável em $\mathbb{R}$, concluímos pelo Fato 2 das Considerações Iniciais que

$$\sum_{\alpha \in M} \int_I |f_\alpha(x)|^2 d\mu_{u_\alpha} = \sup\left\{\sum_{\alpha \in F} \int_{\{\alpha\} \times I} |f_\alpha(x)|^2 d\mu_{u_\alpha}, F \subseteq M \text{ finito}\right\}.$$

Finalmente, como

$$\begin{aligned} \infty &> \sup\left\{\sum_{\alpha \in F} \int_I |f_\alpha(x)|^2 d\mu_{u_\alpha}, F \subseteq M \text{ finito}\right\} = \\ &\sup\left\{\sum_{\alpha \in F} \int_{\{\alpha\} \times I} |\hat{f}(\alpha, x)|^2 d\mu, F \subseteq M \text{ finito}\right\}, \end{aligned}$$

concluímos pelo Fato 1 que

$$\sup\left\{\sum_{\alpha \in F} \int_{\{\alpha\} \times I} |\hat{f}(\alpha, x)|^2 d\mu, F \subseteq M \text{ finito}\right\} = \sum_{\alpha \in M} \int_{\{\alpha\} \times I} |\hat{f}(\alpha, x)|^2 d\mu$$

e que a família $\left\{\int_{\{\alpha\} \times I} |\hat{f}(\alpha, x)|^2 d\mu\right\}_{\alpha \in M}$ é somável em $\mathbb{R}$. Estes argumentos mostram (*);

2. pelos Fatos 3 e 4, sabemos que só existe uma quantidade enumerável de elementos desta família diferentes de 0. Como todos os seus elementos são positivos e μ é uma medida positiva, podemos aplicar o teorema de rearranjo de Riemann para séries numéricas e o Teorema da Convergência Monótona para concluir que

$$\sum_{\alpha \in M} \int_{\{\alpha\} \times I} |\hat{f}(\alpha, x)|^2 d\mu = \int_{M \times I} |\hat{f}(\alpha, x)|^2 d\mu.$$

Isto conclui (**).

Mostrou-se, então, que $\text{Im}(\Psi) \subseteq L^2(N, \mu)$, e que Ψ preserva produto interno, pela identidade de polarização. Usando a definição de Ψ e o fato de ela ser uma isometria vemos que ela é sobrejetora. Além disso, pelo fato de Ψ ser uma isometria vemos que é, em particular, injetora.

Logo, a aplicação definida por $\Psi \circ \tilde{\Omega} =: U : H \longrightarrow L^2(N, \mu)$ é unitária (pois é a composição de duas aplicações unitárias). Vamos mostrar que U satisfaz $U \circ A \circ U^{-1} : \text{Dom}(M_w) \ni g \longmapsto w \cdot g \in L^2(N, \mu)$, onde w é uma função real em μ -quase toda parte e Borel-mensurável em N (na verdade, vamos mostrar, ainda, que $w = \hat{h}$, onde $h := (id_{C_{\mu_{u_\alpha}(I)}})_{\alpha \in M}$, isto é, w age como “cópias” da identidade em cada “nível” α). Tome $L^2(N, \mu) \ni \Psi((f_\alpha)_{\alpha \in M}) := \hat{f}$. Pelo Fato 7, a), sabemos que existe uma seqüência $\{l_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $\oplus_{\alpha \in M} L^2(I, \mu_{u_\alpha})$ tal que $l_n \longrightarrow (f_\alpha)_{\alpha \in M}$, de forma que existe para cada $n \in \mathbb{N}$ um conjunto finito $F_n \subseteq M$ tal que $l_n := \sum_{\alpha \in F_n} f_\alpha^n$ com $f_\alpha^n \neq 0$, se $\alpha \in F_n$ e $f_\alpha^n = 0$, caso contrário. Além disso, dado $n \in \mathbb{N}$, para cada $\alpha \in F_n$ existe uma seqüência $\{h_\alpha^{n,m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ em $C_{\mu_{u_\alpha}}(I)$ tal que $h_\alpha^{n,m} \longrightarrow f_\alpha^n$. Logo,

$$\begin{aligned} (A \circ U^{-1})(\hat{f}) &= A(\tilde{\Omega}^{-1} \Psi^{-1}(\hat{f})) = A(\tilde{\Omega}^{-1}(f_\alpha)_{\alpha \in M}) = A(\tilde{\Omega}^{-1}(\lim_n l_n)) = \\ &= A(\lim_n \tilde{\Omega}^{-1} l_n) = A(\lim_n \tilde{\Omega}^{-1}(\sum_{\alpha \in F_n} f_\alpha^n)) = A(\lim_n \sum_{\alpha \in F_n} \tilde{\Omega}^{-1}(f_\alpha^n)) = \\ &= A(\lim_n \sum_{\alpha \in F_n} \tilde{\Omega}^{-1}(\lim_m h_\alpha^{n,m})) = A(\lim_n \sum_{\alpha \in F_n} \lim_m \tilde{\Omega}^{-1}(h_\alpha^{n,m})) = \\ &= \lim_n A(\sum_{\alpha \in F_n} \lim_m h_\alpha^{n,m}(A)u_\alpha) = \lim_n \lim_m \sum_{\alpha \in F_n} (A \circ h_\alpha^{n,m}(A))u_\alpha = \\ &= \lim_n \lim_m \sum_{\alpha \in F_n} (id_{C(I)} \cdot h_\alpha^{n,m})(A)u_\alpha. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (U \circ A \circ U^{-1})(\hat{f}) &= \Psi(\lim_n \lim_m \sum_{\alpha \in F_n} \tilde{\Omega}((id_{C(I)} \cdot h_\alpha^{n,m})(A)u_\alpha)) = \\ &= \Psi(\lim_n \lim_m \sum_{\alpha \in F_n} id_{C_{\mu_{u_\alpha}}(I)} \cdot h_\alpha^{n,m}) = \Psi(\lim_n \sum_{\alpha \in F_n} \lim_m (id_{C_{\mu_{u_\alpha}}(I)} \cdot h_\alpha^{n,m})) = \\ &= \Psi(\lim_n \sum_{\alpha \in F_n} (id_{C_{\mu_{u_\alpha}}(I)} \cdot f_\alpha^n)) \stackrel{(*)}{=} \Psi((id_{C_{\mu_{u_\alpha}}(I)} \cdot f_\alpha)_{\alpha \in M}) = \\ &= w \cdot \hat{f}. \end{aligned}$$

A penúltima igualdade $(*)$ vem do fato que

$$\begin{aligned} \left\| (id_{C_{\mu_{u_\alpha}}(I)} \cdot f_\alpha^n)_{\alpha \in F_n} - (id_{C_{\mu_{u_\alpha}}(I)} \cdot f_\alpha)_{\alpha \in M} \right\|^2 &= \sum_{\alpha \in M} \left\| id_{C_{\mu_{u_\alpha}}(I)} \cdot (f_\alpha^n - f_\alpha) \right\|^2 \leq \\ &= \|A\|^2 \sum_{\alpha \in M} \|f_\alpha^n - f_\alpha\|^2 \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

onde a desigualdade vem de

$$\left\| id_{C_{\mu_{u_\alpha}(I)}} \cdot (f_\alpha^n - f_\alpha) \right\| = \left(\int_I |id_{C_{\mu_{u_\alpha}(I)}}|^2 |f_\alpha^n - f_\alpha|^2 d\mu_\alpha \right)^{1/2} \leq \|A\| \|f_\alpha^n - f_\alpha\|,$$

para cada $\alpha \in M$, e do fato que

$$\begin{aligned} & \sup \left\{ \sum_{\alpha \in F} \left\| id_{C_{\mu_{u_\alpha}(I)}} \cdot (f_\alpha^n - f_\alpha) \right\| : F \subseteq M \text{ é finito} \right\} \leq \\ & \sup \left\{ \sum_{\alpha \in F} \|A\| \|f_\alpha^n - f_\alpha\| : F \subseteq M \text{ é finito} \right\} = \\ & \|A\| \sup \left\{ \sum_{\alpha \in F} \|f_\alpha^n - f_\alpha\| : F \subseteq M \text{ é finito} \right\}. \end{aligned}$$

Agora, os Fatos 1 e 2 se encarregam de dar a conclusão desejada.

Finalizamos, assim, o teorema espectral para operadores lineares limitados auto-adjuntos. Antes de progredirmos para a demonstração no caso em que A é um operador linear não necessariamente limitado, vamos tentar dar sentido à expressão $f(A)$, com $f \in B(\mathbb{R})$ e A sendo um operador linear limitado auto-adjunto, através do homomorfismo $\Phi_B : f \mapsto f(A)$. Posteriormente, vamos demonstrar o teorema espectral para operadores normais. Para tanto, vamos utilizar a construção feita para demonstrar o teorema espectral para operadores lineares limitados auto-adjuntos.

“O Cálculo Funcional Boreliano relativamente a operadores lineares auto-adjuntos limitados”

Defina $\Phi_B : B(\mathbb{R}) \ni f \mapsto U^{-1} \circ M_{\tilde{f}} \circ U \in \mathcal{B}(H)$, onde $\tilde{f}$ é definida por $\tilde{f}(\alpha, x) := f(x)$, para todo $(\alpha, x) \in N$, isto é, $\tilde{f} := f \circ w$, w como antes (note que $\tilde{f}$ é Borel-mensurável). Se $u \in H$, denote $U(u) := \hat{u}$.

Definamos

$$S_P := \{f \in B(\mathbb{R}) : f|_I \in P(I)\}$$

e

$$S_C := \{f \in B(\mathbb{R}) : f|_I \in C(I)\},$$

notando que são subespaços vetoriais de $B(\mathbb{R})$. Como $A = U^{-1}M_wU$, temos que $p(A) = U^{-1}M_{p \circ w}U$, para todo $p \in P(I)$. Para cada $p \in P(I)$, associe um elemento $p^B \in S_P$ tal que $p^B|_I = p$ (note que tal elemento existe, fazendo $p^B(x) = 0$ em $\mathbb{R} \setminus I$, por exemplo). Então, pela definição de w , temos que $p^B \circ w = p \circ w$, de modo que $p(A) = \Phi^{-1}M_{p^B \circ w}\Phi$. Associe, também, para cada $f \in C(I)$ um elemento $f^B \in S_C$ tal que $f^B|_I = f$ (note, novamente, que tal elemento

existe, fazendo $f^B(x) = 0$ em $\mathbb{R} \setminus I$, por exemplo). Tomando uma seqüência $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funções polinomiais em I que aproximam uniformemente f , vemos que $\{p_n^B \circ w\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de funções que aproxima uniformemente $f^B \circ w$, pois

$$\sup_{y \in N} |(p_n^B - f^B) \circ w(y)| = \sup_{x \in I} |(p_n - f)(x)|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\begin{aligned} \|U^{-1}M_{p_n^B \circ w}U - U^{-1}M_{f^B \circ w}U\| &= \|M_{p_n^B \circ w} - M_{f^B \circ w}\| \leq \\ \| (p_n^B - f^B) \circ w \|_\infty &\leq^{(*)} \sup_{y \in N} |(p_n^B - f^B) \circ w(y)| = \sup_{x \in I} |(p_n - f)(x)|. \end{aligned}$$

Em $(*)$ foi usado o seguinte fato: se $g \in L^\infty(N, \mu)$ e $M > 0$, então $\|g\|_\infty \leq M$ se, e somente se, $g(x) \leq M$ em μ -quase toda parte de N . Como $p_n(A) = U^{-1}M_{p_n^B \circ w}U$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $p_n(A) \rightarrow f(A)$ em $\mathcal{B}(H)$, temos que

$$f(A) = U^{-1}M_{f^B \circ w}U.$$

Tome $f \in S_C$. Então,

$$f|_I(A) = U^{-1}M_{f \circ w}U.$$

Isto mostra que $\Phi_B(f)$ só depende do comportamento de f sobre I , para toda $f \in S_C$.

Temos que Φ_B é uma aplicação satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $\Phi_B(f) = f|_I(A) = \Phi_C(f|_I)$, qualquer que seja $f \in S_C$, de modo que Φ_B é uma espécie de extensão de Φ_C (lembre-se da definição do $*$ -homomorfismo Φ_C , definido no começo da demonstração do Teorema Espectral).
2. Φ_B é um $*$ -homomorfismo unital entre álgebras com involução: sejam $f, g \in B(\mathbb{R})$ e $z_0 \in \mathbb{C}$. Então

$$\bullet \Phi_B(f + z_0g) = U^{-1}M_{\tilde{f} + z_0\tilde{g}}U = U^{-1}(M_{\tilde{f}} + z_0M_{\tilde{g}})U =$$

$$U^{-1}M_{\tilde{f}}U + z_0(U^{-1}M_{\tilde{g}}U) = \Phi_B(f) + z_0\Phi_B(g),$$

$$\bullet \Phi_B(f)\Phi_B(g) = (U^{-1}M_{\tilde{f}}U)(U^{-1}M_{\tilde{g}}U) = U^{-1}M_{\tilde{f}\tilde{g}}U =$$

$$U^{-1}M_{\tilde{f} \cdot \tilde{g}}U = \Phi_B(f \cdot g) \text{ e}$$

$$\bullet \Phi_B(1_{B(\mathbb{R})}) = I_{\mathcal{B}(H)}. \text{ Além disso,}$$

$$(\Phi_B(f))^* \stackrel{(*)}{=} U^*M_{\tilde{f}}^*(U^{-1})^* = U^{-1}M_{\tilde{f}}^*U =$$

$$U^{-1}M_{\tilde{f}}U = \Phi_B(\bar{f}),$$

já que U é unitário (a justificativa para $(*)$ está na Observação XVIII das Considerações Iniciais).

3. se $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de funções *uniformemente limitada* em $B(\mathbb{R})$ que converge pontualmente para $h \in B(\mathbb{R})$, então $\Phi_B(h_n)u$ converge para $\Phi_B(h)u$, para todo $u \in H$. De fato, se $u \in H$, então

$$\|M_{\tilde{h}_n} U(u) - M_{\tilde{h}} U(u)\|^2 = \int_N |(\tilde{h}_n - \tilde{h})^2 \hat{u}^2| d\mu \longrightarrow 0,$$

pelo Teorema da Convergência Dominada (note que a convergência pontual de $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ para h acarreta a convergência pontual de $\{\tilde{h}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ para $\tilde{h}$). Assim, pela continuidade de U , vem o resultado.

Podemos melhorar a definição $f(A) := U^{-1} \circ M_{\tilde{f}} \circ U$, para toda $f \in B(\mathbb{R})$, ao mostrar que tal definição não depende do operador unitário U . Suponhamos, então, que Λ_1 e Λ_2 são aplicações de $B(\mathbb{R})$ em $\mathcal{B}(H)$ satisfazendo:

1. $\Lambda_1(f) = \Lambda_2(f)$, qualquer que seja $f \in S_C$;
2. Λ_1 e Λ_2 são *-homomorfismos unitais;
3. se $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de funções *uniformemente limitada* em $B(\mathbb{R})$ que converge pontualmente para $h \in B(\mathbb{R})$, então $\Lambda_i(h_n)u$ converge para $\Lambda_i(h)u$, para todo $u \in H$, para $i = 1, 2$.

Mostraremos que $\Lambda_1 = \Lambda_2$.

Sejam

$$\mathcal{B} := \{B \subseteq \mathbb{R} : B \text{ pertence à } \sigma\text{-álgebra de Borel}\}$$

e

$$\mathcal{J} := \{B \in \mathcal{B} : \Lambda_1(\chi_B) = \Lambda_2(\chi_B)\},$$

onde χ_B denota a função característica relativa ao boreliano B .

Vamos mostrar que $\mathcal{J} \supseteq \mathcal{B}$ (E, portanto, vamos mostrar que $\mathcal{J}$ é igual a σ -álgebra de Borel).

$\mathcal{J}$ é uma σ -álgebra:

- $\mathbb{R} \in \mathcal{J}$, pois Λ_1 e Λ_2 são unitais;
- se $B \in \mathcal{J}$, então $\mathbb{R} \setminus B \in \mathcal{J}$, pois $\Lambda_1(\chi_{\mathbb{R} \setminus B}) = \Lambda_1(1_{B(\mathbb{R})} - \chi_B) = \Lambda_1(1_{B(\mathbb{R})}) - \Lambda_1(\chi_B) = \Lambda_2(1_{B(\mathbb{R})}) - \Lambda_2(\chi_B) = \Lambda_2(1_{B(\mathbb{R})} - \chi_B) = \Lambda_2(\chi_{\mathbb{R} \setminus B})$;
- sejam $u \in H$ e $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em $\mathcal{J}$. Queremos mostrar que $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) \in \mathcal{J}$. Pelo passo anterior, podemos sem perda de generalidade supor que $E_i \cap E_j = \emptyset$, se $i \neq j$. Se $n \in \mathbb{N}$, então

$$\Lambda_1\left(\sum_{i=1}^{i=n} \chi_{E_i}\right)u = \sum_{i=1}^{i=n} \Lambda_1(\chi_{E_i})u = \sum_{i=1}^{i=n} \Lambda_2(\chi_{E_i})u =$$

$$\Lambda_2\left(\sum_{i=1}^{i=n}\chi_{E_i}\right)u.$$

Logo, como $\sum_{i=1}^{i=n}\chi_{E_i}$ converge pontualmente para $\chi_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n}$, concluímos que

$$\Lambda_1(\chi_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n})u = \lim_n \Lambda_1\left(\sum_{i=1}^{i=n}\chi_{E_i}\right)u = \lim_n \Lambda_2\left(\sum_{i=1}^{i=n}\chi_{E_i}\right)u =$$

$$\Lambda_2(\chi_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n})u.$$

Da arbitrariedade de u , segue o resultado.

$\mathcal{J}$ contém todos os intervalos abertos da reta real: se $L \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo, pode-se facilmente construir uma seqüência de funções $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em S_C que converge pontualmente para χ_L . Logo, se $v \in H$, teremos que

$$\lim_n \Lambda_1(h_n)v = \Lambda_1(\chi_L)v$$

e

$$\lim_n \Lambda_2(h_n)v = \Lambda_2(\chi_L)v.$$

Por outro lado,

$$\Lambda_1(h_n) = h_n|_I(A) = \Lambda_2(h_n),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e, portanto, $\Lambda_1(\chi_L)v = \Lambda_2(\chi_L)v$. Concluímos, então, que $\mathcal{J} \supseteq \mathcal{B}$, pela definição da σ -álgebra de Borel. Assim, Λ_1 e Λ_2 coincidem sobre as funções características de borelianos da reta real e, portanto, pela linearidade de tais aplicações, elas coincidem também sobre as funções simples de borelianos de $\mathbb{R}$. Como toda função positiva de $B(\mathbb{R})$ é limite pontual de funções simples de borelianos de $\mathbb{R}$, concluímos que Λ_1 e Λ_2 coincidem sobre as funções positivas de $B(\mathbb{R})$. Novamente devido à linearidade de Λ_1 e Λ_2 , concluímos que estas aplicações coincidem sobre $B(\mathbb{R})$.

Logo, a expressão $f(A)$ está bem definida, qualquer que seja $f \in B(\mathbb{R})$, independentemente de U . Em particular, $\chi_B(A)$ está bem definida, para todo $B \subseteq \mathbb{R}$ boreliano. Chamaremos o $*$ -homomorfismo Φ_B de “Cálculo Funcional Boreliano”.

$\chi_B(A)$ é auto-adjunto, para todo $B \subseteq \mathbb{R}$ boreliano, uma vez que $(\chi_B(A))^* = \overline{\chi_B(A)} = \chi_B(A)$. Além disso, $\chi_B(A)$ também é uma projeção, pois $\chi_B(A) \circ \chi_B(A) = (\chi_B \cdot \chi_B)(A) = \chi_B(A)$. Portanto, pela Observação XVII das Considerações Iniciais, $\chi_B(A)$ é a projeção ortogonal sobre sua imagem ($\chi_B(A)$ é denominada a projeção espectral de A relativa ao boreliano B e, como a aplicação $B \mapsto \chi_B(A)$ possui certas propriedades que lembram uma medida, ela é chamada de medida espectral). Para ver que a comutatividade de dois operadores

lineares limitados e auto-adjuntos A_1 e A_2 implica a comutatividade dos operadores $\chi_{B_1}(A_1)$ e $\chi_{B_2}(A_2)$, quaisquer que sejam $B_1, B_2 \subseteq \mathbb{R}$ borelianos, precisamos primeiro definir o conjunto $\mathcal{J}' := \{B \subseteq \mathbb{R} : A_1 \circ \chi_B(A_2) = \chi_B(A_2) \circ A_1\}$ e mostrar que ele contém o conjunto $\mathcal{B}$, definido acima. Para ver que $\mathcal{J}'$ é uma σ -álgebra, basta argumentar de maneira análoga à feita acima. Para ver que $\mathcal{J}'$ contém os intervalos abertos, procedemos da seguinte forma: primeiro, observamos que A_1 comuta com operadores da forma $p(A_2)$, com $p \in S_P$, pois já observamos que $p(A_2) = p|_I(A_2)$, na página 53, e A_1 claramente comuta com $p|_I(A_2)$. Como toda função de $C_c(\mathbb{R}) \subseteq S_C$ é limite uniforme de elementos de S_P e

$$(p_n - f)(A_2) = (p_n - f)|_I(A_2) = \Phi_C(p_n|_I - f|_I) \longrightarrow 0,$$

sempre que $f \in C_c(\mathbb{R})$ e $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ for uma sequência de funções em S_P que converge uniformemente a f (pelo item 1, na página 53), temos que $A_1 \circ f(A_2) = f(A_2) \circ A_1$, para toda $f \in C_c(\mathbb{R})$. Finalmente, como toda função característica relativa a um intervalo limitado é limite pontual de funções de $C_c(\mathbb{R})$, temos pelo item 3 (página 54) que

$$A_1 \circ \chi_L(A_2) = \chi_L(A_2) \circ A_1,$$

para todo intervalo aberto e limitado, L . Isto mostra que $\mathcal{J}' \supseteq \mathcal{B}$. Para finalmente mostrarmos o que queremos, basta fixar um operador limitado auto-adjunto C que comuta com A_1 e repetir os mesmos passos que acabamos de fazer para ver que

$$\{B \subseteq \mathbb{R} : \chi_B(A_1) \circ C = C \circ \chi_B(A_1)\} \supseteq \mathcal{B}.$$

Em particular, fixando um boreliano da reta, B_2 , mostramos que

$$\{B \subseteq \mathbb{R} : \chi_B(A_1) \circ \chi_{B_2}(A_2) = \chi_{B_2}(A_2) \circ \chi_B(A_1)\} \supseteq \mathcal{B}.$$

Um passo intermediário para mostrarmos o teorema espectral para operadores não-limitados é mostrarmos antes uma versão sua para operadores normais e, para esse fim, precisaremos do:

“Teorema espectral para n -uplas de operadores lineares auto-adjuntos que comutam dois a dois”

Sejam $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, e $\{A_i \in \mathcal{B}(H) : 1 \leq i \leq n\}$ um conjunto finito de operadores lineares auto-adjuntos limitados que comutam dois a dois. Defina

$$I_i := [-\|A_i\|, \|A_i\|], \quad I := \prod_{1 \leq i \leq n} I_i$$

e $\mathcal{S}$ como sendo a família dos conjuntos da forma $\prod_{1 \leq i \leq n} B_i$ onde B_i é um subconjunto boreliano de I_i , para todo $1 \leq i \leq n$. Note que $\mathcal{S}$ é uma semi-álgebra em I (veja a definição na Observação XXII das Considerações Iniciais).

Defina, agora, $\mathcal{V} := \text{span}\{\chi_B : B \in \mathcal{S}\}$ e $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ como sendo a álgebra gerada por $\mathcal{S}$. Defina também o subconjunto $\mathcal{W}$ das funções $g := \sum_{1 \leq j \leq m} a_j \chi_{B^j}$ de $\mathcal{V}$ que possuem a propriedade de os B^j 's serem elementos de $\mathcal{S}$ dois a dois disjuntos. Vamos mostrar que, na verdade, tem-se $\mathcal{W} = \mathcal{V}$. Note que $\mathcal{W}$ contém os geradores de $\mathcal{V}$. Logo, a demonstração estará concluída se mostrarmos que $\mathcal{W}$ é um espaço vetorial (para mostrar isto, será importante o fato de $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ ser uma álgebra). Com este fim, mostraremos que o conjunto $\mathcal{F}$ das funções simples $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ -mensuráveis (isto é, as funções f que possuem um conjunto-imagem finito e tais que $f^{-1}[\{c\}]$ é um conjunto pertencente a $\mathcal{A}(\mathcal{S})$), que é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, coincide com $\mathcal{W}$. A inclusão $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{F}$ é imediata. Para ver a outra inclusão, tome $f \in \mathcal{F}$. Então f é uma combinação linear finita de funções características de conjuntos de $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, sendo estes conjuntos dois a dois disjuntos. Tais conjuntos são, a saber, da forma $f^{-1}[\{c\}]$, com c variando no conjunto-imagem de f . Agora, pelo resultado demonstrado na Observação XXII das Considerações Iniciais, sabemos que cada conjunto $f^{-1}[\{c\}]$, com c pertencente ao conjunto-imagem de f , é uma união disjunta de elementos de $\mathcal{S}$. Logo, f é uma combinação linear de funções características relativas a conjuntos dois a dois disjuntos de $\mathcal{S}$. Isto estabelece a outra inclusão e mostra o resultado desejado.

Vamos definir agora, para cada função $f := \chi_B$ de $\mathcal{W}$, com $B := \prod_{1 \leq k \leq n} B_k$, o operador $(\chi_B)(A_1, \dots, A_n) := \prod_{1 \leq k \leq n} \chi_{B_k}(A_k)$,²² e estenda esta definição para todas as funções de $\mathcal{W}$ por linearidade. Notemos que tal construção é bem definida: suponha que $f := \sum_{1 \leq i \leq p} b_i \chi_{B^i}$ e $g := \sum_{1 \leq j \leq q} c_j \chi_{C^j}$ são elementos de $\mathcal{W}$ tais que $f = g$. Suponha também, sem perda de generalidade, que $\bigcup_{1 \leq i \leq p} B^i = \bigcup_{1 \leq j \leq q} C^j = I$ (aliás, sempre que escrevermos um elemento de $\mathcal{W}$ por extenso, faremos esta convenção; faremos também a convenção de que, sempre que for escrita por extenso uma função de $\mathcal{W}$, nenhum dos elementos de $\mathcal{S}$ relativos aos quais foi escrita tal função seja o conjunto vazio). Note que para cada $1 \leq j \leq q$ fixado, $\sum_{1 \leq i \leq p} b_i \chi_{B^i \cap C^j} = c_j \chi_{C^j}$: se $x \in I$ não pertence a C^j , então

$$\left(\sum_{1 \leq i \leq p} b_i \chi_{B^i \cap C^j} \right)(x) = 0 = (c_j \chi_{C^j})(x).$$

Se $x \in C^j$, então existe um, e somente um, $1 \leq i_0 \leq p$ tal que $x \in B^{i_0} \cap C^j$, pois tais B^{i_0} 's são dois a dois disjuntos e $\bigcup_{1 \leq i \leq p} B^i = I$. Mas como por hipótese $\sum_{1 \leq i \leq p} b_i \chi_{B^i} = \sum_{1 \leq j \leq q} c_j \chi_{C^j}$, temos que

$$b_{i_0} = c_j.$$

Portanto, $(\sum_{1 \leq i \leq p} b_i \chi_{B^i \cap C^j})(x) = b_{i_0} \chi_{B^{i_0} \cap C^j}(x) = b_{i_0} = c_j = (c_j \chi_{C^j})(x)$. Isto estabelece a igualdade desejada.

²²Note que tais operadores estão bem-definidos, pois $\chi_{B_i}(A_i)$ e $\chi_{B_j}(A_j)$ comutam entre si, como já provamos

Concluimos, então, que

$$\begin{aligned}
f(A_1, \dots, A_n) &= \sum_{1 \leq i \leq p} (b_i \chi_{B^i})(A_1, \dots, A_n) = \sum_{1 \leq i \leq p} \left(\sum_{1 \leq j \leq q} b_i \chi_{B^i \cap C^j} \right) (A_1, \dots, A_n) = \\
&= \sum_{1 \leq i \leq p} \sum_{1 \leq j \leq q} b_i \chi_{B^i \cap C^j} (A_1, \dots, A_n) = \sum_{1 \leq j \leq q} \sum_{1 \leq i \leq p} b_i \chi_{B^i \cap C^j} (A_1, \dots, A_n) = \\
&= \sum_{1 \leq j \leq q} \left(\sum_{1 \leq i \leq p} b_i \chi_{B^i \cap C^j} \right) (A_1, \dots, A_n) = \sum_{1 \leq j \leq q} c_j \chi_{C^j} (A_1, \dots, A_n) = g(A_1, \dots, A_n),
\end{aligned}$$

mostrando que a aplicação

$$\Lambda_I : \mathcal{W} \ni f \mapsto f(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{B}(H)$$

está bem definida. Além disso, tal aplicação é claramente linear. Vamos mostrar que ela é contínua. Como $B(I)$ é um espaço normado (completo) e $\mathcal{B}(H)$ é um espaço de Banach, vamos mostrar que a aplicação Λ_I se estende linearmente e continuamente para seu fecho em $B(I)$, utilizando o Lema 1.1 (B.L.T.). Escolha um elemento $f := \sum_{1 \leq i \leq p} b_i \chi_{B^i}$ de $\mathcal{W}$, e vamos mostrar que $\|f(A_1, \dots, A_n)\| \leq \sup_{x \in I} |f(x)| = \|f\|_\infty$.²³

Sejam $P_i := \chi_{B^i}(A_1, \dots, A_n)$, para $1 \leq i \leq p$. Então $\{P_i\}_{1 \leq i \leq p}$ é uma coleção de projecções auto-adjuntas duas a duas ortogonais e, portanto, o operador $P := \sum_{1 \leq i \leq p} P_i$ também é uma projecção auto-adjunta. Logo, P e $I_{\mathcal{B}(H)} - P$ também são ortogonais e

$$\|u\|^2 = \|Pu + (u - Pu)\|^2 = \|Pu\|^2 + \|u - Pu\|^2,$$

para todo $u \in H$. Assim, se $u \in H$, $\|Pu\|^2 = \sum_{1 \leq i \leq p} \|P_i u\|^2$ e

$$\begin{aligned}
\|f(A_1, \dots, A_n)u\|^2 &= \left\| \sum_{1 \leq i \leq p} b_i \chi_{B^i}(A_1, \dots, A_n)u \right\|^2 = \\
&= \sum_{1 \leq i \leq p} |b_i|^2 \|\chi_{B^i}(A_1, \dots, A_n)u\|^2 \\
&\leq (\max\{|b_i| : 1 \leq i \leq p\})^2 \sum_{1 \leq i \leq p} \|\chi_{B^i}(A_1, \dots, A_n)u\|^2 = \\
&= (\max\{|b_i| : 1 \leq i \leq p\})^2 \|Pu\|^2 \leq (\max\{|b_i| : 1 \leq i \leq p\})^2 (\|Pu\|^2 + \|u - Pu\|^2) = \\
&= (\max\{|b_i| : 1 \leq i \leq p\})^2 \|u\|^2.
\end{aligned}$$

Para terminar a demonstração da desigualdade em questão, basta mostrar que $\max\{|b_i| : 1 \leq i \leq p\} = \|f\|_\infty$. Se $x \in I$, então existe um, e somente um, $1 \leq i_0 \leq p$ tal que $x \in B^{i_0}$ (lembre-se que convencionamos que $\bigcup_{1 \leq i \leq p} B^i = I$). Logo, $|f(x)| = |b_{i_0}| \leq \max\{|b_i| : 1 \leq i \leq p\}$, e a arbitrariedade de $x \in I$ implica $\|f\|_\infty \leq \max\{|b_i| : 1 \leq i \leq p\}$. Para cada $1 \leq i \leq p$ existe um $x_i \in B^i$ tal que

²³É esta a estimativa que mencionamos na Introdução

$|f(x_i)| = |b_i|$ (lembre-se que, pelo que convencionamos, $B^i \neq \emptyset$, para todo $1 \leq i \leq p$). Isto estabelece que existe $x \in I$ tal que $|f(x)| = \max\{|b_i| : 1 \leq i \leq p\}$. Concluimos, portanto, que

$$\max\{|b_i| : 1 \leq i \leq p\} = \|f\|_\infty,$$

como queríamos. Isto conclui a demonstração de que

$$\|f(A_1, \dots, A_n)\| \leq \|f\|_\infty,$$

qualquer que seja $f \in \mathcal{W}$.

Para podermos finalmente aplicar o Lema 1.1, precisamos mostrar que toda função $f := u + iv \in C(I)$ é limite uniforme de elementos de $\mathcal{W}$. Para tanto, seja $\epsilon > 0$. Como I é compacto, u e v são uniformemente contínuas em I e, portanto, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in I, |x - y| < \delta$ implica $|u(x) - u(y)| < \epsilon/2$ e $|v(x) - v(y)| < \epsilon/2$. Vamos construir uma função $s \in \mathcal{W}$ que seja uma combinação linear de funções características de hiperparalelepípedos (não necessariamente contendo suas respectivas fronteiras) e que satisfaça $\sup\{|s(x) - f(x)| : x \in I\} < \epsilon$. Para tanto, fixe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(\max\{2\|A_i\|/k : 1 \leq i \leq n\})\sqrt{n} < 2\delta$. Fazendo isso, temos a pretensão de construir k^n hiperparalelepípedos, de dimensões $2\|A_i\|/k, 1 \leq i \leq n$, de modo que cada um deles esteja contido em uma bola aberta de raio δ . Esta última exigência é satisfeita devido à desigualdade $(\max\{2\|A_i\|/k : 1 \leq i \leq n\})\sqrt{n} < 2\delta$, que nada mais é do que impor que a “diagonal” do hipercubo de lado $\max\{2\|A_i\|/k : 1 \leq i \leq n\}$ seja menor do que o diâmetro da bola de raio δ . Isto de fato é suficiente, pois se $x = (x_j)_{1 \leq j \leq n}$ é um ponto de um tal hiperparalelepípedo centrado num ponto $p = (p_j)_{1 \leq j \leq n}$, então

$$\|x - p\| = \sqrt{\sum_{1 \leq j \leq n} |x_j - p_j|^2} \leq \sqrt{\sum_{1 \leq j \leq n} \|A_j\|^2/k^2} \leq$$

$$\sqrt{n(\max\{\|A_j\|/k : 1 \leq j \leq n\})^2} = \sqrt{n}(\max\{\|A_j\|/k : 1 \leq j \leq n\}) < \delta.$$

Portanto, todos os hiperparalelepípedos em questão estão contidos em uma bola aberta de raio δ . Estando estabelecidos quais são os comprimentos das dimensões dos hiperparalelepípedos, vamos construir os lados destes, de modo que recubram I . Cada intervalo $I_j, 1 \leq j \leq n$, está dividido em k segmentos compactos de mesmo comprimento, $I_j^{l_j}, 1 \leq l_j \leq k$. Então definiremos cada hiperparalelepípedo como sendo da forma $\prod_{1 \leq j \leq n} I_j^{l_j}$, onde cada l_j é um inteiro entre 1 e k . Tome uma enumeração destes hiperparalelepípedos compactos $\{P_i\}_{1 \leq i \leq k^n}$. Vamos agora, obter uma coleção de hiperparalelepípedos $\{\tilde{P}_i\}_{1 \leq i \leq k^n}$ (não necessariamente compactos) de forma que continuem recobrimo I , mas sejam dois a dois disjuntos. Defina $\tilde{P}_1 := P_1$ e, para cada $2 \leq i \leq k^n$, defina $\tilde{P}_i := P_i \setminus \bigcup_{1 \leq j \leq i-1} P_j$. Então, vemos que $\bigcup_{1 \leq i \leq k^n} \tilde{P}_i = I$ e $\tilde{P}_i \cap \tilde{P}_j = \emptyset$, se $i \neq j$. Definamos, finalmente,

$$s := \sum_{1 \leq i \leq k^n} [(\min\{u(x) : x \in P_i\})\chi_{\tilde{P}_i} + i(\min\{v(x) : x \in P_i\})\chi_{\tilde{P}_i}],$$

e seja $x \in I$. Então, $x \in \tilde{P}_j$, para somente um $1 \leq j \leq k^n$ e

$$\begin{aligned} |s(x) - f(x)| &= |[(\min \{u(x) : x \in P_j\}) - u(x)] + i[(\min \{v(x) : x \in P_i\}) - v(x)]| \leq \\ &|(\min \{u(x) : x \in P_j\}) - u(x)| + |(\min \{v(x) : x \in P_i\}) - v(x)| < \\ &\epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \end{aligned}$$

Como $x \in I$ é arbitrário, resulta que $\sup \{|s(x) - f(x)| : x \in I\} < \epsilon$. Assim, como para todo $\epsilon > 0$ dado é possível achar um elemento de $\mathcal{W}$ uniformemente próximo a f , concluímos que existe uma seqüência em $\mathcal{W}$ que converge uniformemente a f .

Para toda função f de $\mathcal{W}$, temos então que $\|f(A_1, \dots, A_n)\| \leq \|f\|_\infty$ e, como toda função contínua a valores complexos definida em I é limite uniforme de funções de $\mathcal{W}$ (ou, em outras palavras, $C(I) \subseteq \overline{\mathcal{W}} \subseteq B(I)$) e $\mathcal{B}(H)$ é completo, concluímos pelo Lema 1.1 que, para toda $g \in C(I)$, pode-se definir $g(A_1, \dots, A_n) := \lim_n f_n(A_1, \dots, A_n)$, onde $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência em $\mathcal{W}$ tal que $f_n \rightarrow g$ em $C(I)$.

Tendo em vista, então, que a aplicação linear e contínua

$$C(I) \ni g \xrightarrow{\Lambda_I} g(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{B}(H)$$

está bem definida, pelos argumentos do parágrafo acima, podemos estender o teorema espectral quando $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, e $\{A_i \in \mathcal{B}(H) : 1 \leq i \leq n\}$ é um conjunto finito de operadores lineares auto-adjuntos limitados que comutam dois a dois, fazendo as seguintes adaptações:

1. assim como a aplicação Φ_C definida na página 44, Λ_I é contínuo, e um $*$ -homomorfismo unital entre $*$ -álgebras (a demonstração é análoga, com a exceção de que, agora, usamos a densidade de $\mathcal{W}$ em $C(I)$, ao invés da densidade de $P(I)$ em $C(I)$; inclusive, para mostrar a compatibilidade do homomorfismo com a multiplicação em $C(I)$, podemos tomar seqüências em $\mathcal{W}$ uniformemente limitadas, exatamente como fizemos na página 44);
2. o “ I ” agora em questão permanece sendo um conjunto compacto e Hausdorff, e podemos aplicar o Teorema da Representação de Riesz, assim como feito na página 45. “ H_u ” será agora definido por

$$H_u := \overline{\{f(A_1, \dots, A_n)u \in \mathcal{B}(H) : f \in C(I)\}},$$

e “ G_u ” será definido agora por

$$G_u := \{f(A_1, \dots, A_n)u \in \mathcal{B}(H) : f \in C(I)\}$$

- note que se tem G_u denso em H_u , por definição. Garante-se, assim, a existência da aplicação $\tilde{\Omega}_u$ (adaptada, é claro);

3. agora, ao invés de provar que $\tilde{\Omega}_u \circ A \circ \tilde{\Omega}_u^{-1} = M_{id_{C_{\mu_u}(I)}}$, como o exposto logo após o que foi tratado no item acima, devemos provar que $\tilde{\Omega}_u \circ A_i \circ \tilde{\Omega}_u^{-1} = M_{\pi_i}$, para todo $1 \leq i \leq n$, onde π_i é a i -ésima projeção canônica. Para tanto, basta substituir A por $\pi_i(A_1, \dots, A_n)$, e a demonstração segue de maneira análoga à feita anteriormente. Isso decorre de $\pi_i(A_1, \dots, A_n) = A_i$ e do fato de Λ_I ser um homomorfismo de álgebras. Vamos mostrar que $\pi_i(A_1, \dots, A_n) = A_i$. Para cada $1 \leq i \leq n$, podemos construir uma seqüência de funções simples relativas a segmentos **disjuntos** de I_i (este é um detalhe importante), $\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, que converge uniformemente à função $id_{C(I_i)}$. Defina, para cada $m \in \mathbb{N}$, a função de n variáveis dada por $g_m(x_1, \dots, x_n) := s_m(x_i)$, para todo $(x_j)_{1 \leq j \leq n} \in I$ - note que isto implica $g_m(A_1, \dots, A_n) = s_m(A_i)$, para todo $m \in \mathbb{N}$: se $s_m = \sum_{1 \leq j \leq q} a_j \chi_{B_j^i}$ com os B_j^i 's dois a dois disjuntos, então basta tomar

$$g_m := \sum_{1 \leq j \leq q} a_j (\chi_{B_j^i} \prod_{1 \leq k \leq n, k \neq i} \chi_{I_k}),$$

pois $\chi_{I_k} = 1_{C(I_k)}$. Então, $\{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de funções de $\mathcal{W}$ (veja a definição acima) que converge uniformemente à função π_i . Portanto, pela definição de Λ_I , temos que $\pi_i(A_1, \dots, A_n) = \lim_m g_m(A_1, \dots, A_n)$. Por outro lado, pela definição de g_m , temos que $\lim_m g_m(A_1, \dots, A_n) = \lim_m s_m(A_i) = id_{C(I_i)}(A_i) = A_i$. Logo, pela unicidade do limite, segue que $\pi_i(A_1, \dots, A_n) = A_i$.

4. em seguida, na aplicação do Lema de Zorn, basta substituir o A que ali aparece por $A_i = \pi_i(A_1, \dots, A_n)$, para todos $1 \leq i \leq n$, e concluiremos que $\overline{\oplus_{\alpha \in M} H_{u_\alpha}}$ é A_i -invariante, para todo $1 \leq i \leq n$, pois cada H_{u_α} é $\pi_i(A_1, \dots, A_n)$ -invariante (ou A_i -invariante), para todo $1 \leq i \leq n$. Logo, $(\overline{\oplus_{\alpha \in M} H_{u_\alpha}})^\perp$ será A_i -invariante, para todo $1 \leq i \leq n$. Logo,

$$f(A_i)w \in (\overline{\oplus_{\alpha \in M} H_{u_\alpha}})^\perp,$$

para toda $f \in C(I_i)$, $1 \leq i \leq n$ ($w \neq 0$ sendo um elemento que, por hipótese, pertence a $(\overline{\oplus_{\alpha \in M} H_{u_\alpha}})^\perp$), pois $(\overline{\oplus_{\alpha \in M} H_{u_\alpha}})^\perp$ é um subespaço vetorial fechado de H . Como toda função característica relativa a um subintervalo J_i de I_i pode ser aproximada pontualmente por uma seqüência uniformemente limitada de funções contínuas, temos que

$$\Phi_B(\chi_{J_i})w = \chi_{J_i}(A_i)w \in (\overline{\oplus_{\alpha \in M} H_{u_\alpha}})^\perp,$$

para todo $1 \leq i \leq n$, pela propriedade 3 do $*$ -homomorfismo Φ_B definido na página 52 (note que para cada $1 \leq i \leq n$ temos um Φ_B correspondente e que $\Phi_B(\chi_{J_i})$ está bem definido para todo intervalo $J_i \subseteq I_i$). Portanto, como mostramos que toda função contínua definida em I é limite uniforme de funções características relativas a produtos de subintervalos de I_i , temos pela última estimativa (desigualdade) obtida que $f(A_1, \dots, A_n)w \in (\overline{\oplus_{\alpha \in M} H_{u_\alpha}})^\perp$, para toda $f \in C(I)$. Isto estabelece a

contradição necessária, analogamente à obtida na aplicação do lema de Zorn da demonstração anterior.

5. uma última adaptação que vale a pena ser mencionada é que ao invés de mostrar que $U \circ A \circ U^{-1} : \text{Dom}(M_f) \ni g \mapsto f \cdot g \in L^2(N, \mu)$, para uma f real e Borel-mensurável, basta substituir A por $\pi_i(A_1, \dots, A_n)$, para cada $1 \leq i \leq n$, e obteremos, finalmente, o:

Teorema espectral para n -uplas de operadores lineares auto-adjuntos que comutam dois a dois: *Se H é um espaço de Hilbert, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, e $\{A_i \in \mathcal{B}(H) : 1 \leq i \leq n\}$ é um conjunto finito de operadores lineares auto-adjuntos limitados que comutam dois a dois, então existem um espaço de medida (N, μ) ($N := M \times I$, com I sendo um produto finito de intervalos) e uma transformação linear unitária $U : H \rightarrow L^2(N, \mu)$ tais que $U \circ A_i \circ U^{-1} = M_{\tilde{\pi}_i}$, para todo $1 \leq i \leq n$, com $\tilde{\pi}_i := \hat{p}_i$, sendo $p_i := ((\pi_i)_{C_{\mu_{u_\alpha}(I)}})_{\alpha \in M}$.*

Agora vamos mostrar que se $T \in \mathcal{B}(H)$, então existem operadores lineares auto-adjuntos $A, B \in \mathcal{B}(H)$ tais que $T = A + iB$, que são unicamente determinados por T (isto é possível de ser feito em qualquer C^* -álgebra). De fato, definindo

$$A := \frac{T + T^*}{2}$$

e

$$B := \frac{T - T^*}{2i},$$

vemos que $T = A + iB$ e que $\|A\| \leq \|T\|$, $\|B\| \leq \|T\|$. Temos, ainda,

$$A^* = \frac{T^* + T^{**}}{2} = \frac{T^* + T}{2} = \frac{T + T^*}{2} = A$$

e

$$B^* = \frac{[i(T^* - T)]^*}{2} = \frac{-i(T^{**} - T^*)}{2} = \frac{i(T^* - T)}{2} = \frac{T - T^*}{2i} = B,$$

mostrando que A e B são auto-adjuntos. Para verificar a unicidade basta notar que, se também $T = C + iD$ para certos operadores lineares auto-adjuntos $C, D \in \mathcal{B}(H)$, então temos a equação $0_{\mathcal{B}(H)} = T - T = (A - C) + i(B - D)$. Logo, vale também que $(A - C) + i(B - D) = 0_{\mathcal{B}(H)} = 0_{\mathcal{B}(H)}^* = (A^* - C^*) - i(B^* - D^*) = (A - C) - i(B - D)$, o que implica $B = D$. Assim, devemos ter também $0_{\mathcal{B}(H)} = A - C$, isto é, $A = C$, e está mostrada a unicidade.

O próximo passo agora é mostrar:

“O teorema espectral para operadores lineares normais”

Seja T um operador normal. Como todo operador linear normal é, em particular, limitado (por definição), podemos representar T como $T = A + iB$, sendo $A = \frac{T+T^*}{2}$ e $B = \frac{T-T^*}{2i}$. Como, ainda, T comuta com seu adjunto, temos que A e B comutam, pois

$$AB = \left(\frac{T+T^*}{2} \right) \left(\frac{T-T^*}{2i} \right) = \frac{T^2 - TT^* + T^*T - (T^*)^2}{2 \cdot 2i} =$$

$$\frac{T^2 - T^*T + TT^* - (T^*)^2}{2i \cdot 2} = \left(\frac{T-T^*}{2i} \right) \left(\frac{T+T^*}{2} \right) = BA.$$

Assim, pelo teorema espectral para n-uplas finitas de operadores lineares auto-adjuntos que comutam dois a dois, garantimos a existência de um espaço de medida (N, μ) e uma transformação linear unitária $U : H \rightarrow L^2(N, \mu)$ tais que $UAU^{-1} = M_{\tilde{\pi}_1}$ e $UBU^{-1} = M_{\tilde{\pi}_2}$, onde

$$I_1 = [-\|A\|, \|A\|], I_2 = [-\|B\|, \|B\|], N = M \times (I_1 \times I_2)$$

e $\tilde{\pi}_i := \hat{p}$, com $p := ((\pi_i)_{C_{\mu_{u_\alpha}}(I)})_{\alpha \in M}$, $i = 1, 2$. Portanto,

$$T = A + iB = U^{-1}M_{\pi_1}U + i(U^{-1}M_{\tilde{\pi}_2}U) =$$

$$U^{-1}(M_{\tilde{\pi}_1} + M_{i \cdot \tilde{\pi}_2})U = U^{-1}(M_{\tilde{\pi}_1 + i \cdot \tilde{\pi}_2})U,$$

e mostramos que $UTU^{-1} = M_f$, sendo f uma função a valores complexos e Borel-mensurável em N . Está demonstrado, assim, o teorema espectral para operadores normais.

Antes de prosseguir, vamos relembra algo que foi dito na Observação XIII das Considerações Iniciais, momento em que foram definidos os operadores de multiplicação. Dissemos lá que o espaço de medida construído no decorrer do Teorema Espectral possui a propriedade de que todo subconjunto seu de medida estritamente positiva, S , possui um subconjunto $E \subseteq S$ de medida finita e estritamente positiva. Vamos mostrar, então, que o espaço (N, μ) (sendo N e μ como acima) possui esta propriedade, assumindo as hipóteses de que $H \neq \{0\}$ e $A \neq 0$. Como $H \neq \{0\}$ e A é não-nulo, garantimos a existência de $0 \neq u_\alpha \in H$ e, consequentemente, a existência de um funcional não-nulo $\lambda_{u_\alpha} : C(I) \rightarrow \langle f(A)u_\alpha, u_\alpha \rangle$ (I sendo um intervalo compacto ou um produto de intervalos compactos). Note que $\mu \neq 0$, pois se assim não fosse, pelo Fato 1 das Considerações Iniciais teríamos

$$0 = \mu(N) = \sum_{\alpha \in M} \mu_{u_\alpha}(\pi_\alpha(\{\alpha\} \times I)) \geq$$

$$\mu_{u_\alpha}(I),$$

o que implica $\mu_{u_\alpha} = 0$. Logo, $\lambda_{u_\alpha} = 0$, o que é um absurdo, pois assim teríamos $0 = \lambda(1_{C(I)}) = \langle u_\alpha, u_\alpha \rangle$, e concluiríamos que $u_\alpha = 0$. Esta argumentação mostra que existe um elemento no domínio de μ que possui medida estritamente

positiva. Seja $S \subseteq N$ um conjunto de medida $\mu(S)$ estritamente positiva. Se $\mu(S) < \infty$, não há nada a demonstrar. Suponhamos que $\mu(S) = +\infty$. Então existe um conjunto finito $\{\beta_i\}_{1 \leq i \leq n_0} \in M$ tal que

$$\sum_{1 \leq i \leq n_0} \mu_{u_{\beta_i}}(\pi_{\beta_i}(S \cap (\{\beta_i\} \times I))) > 0,$$

pois caso contrário, teríamos $\mu(S) = 0$. Além disso, μ_{u_α} possui a propriedade de ser finita sobre compactos, o que mostra

$$0 < \sum_{1 \leq i \leq n_0} \mu_{u_{\beta_i}}(\pi_{\beta_i}(S \cap (\{\beta_i\} \times I))) := \mu(S \cap (\{\beta_i\} \times I)) < \infty.$$

Logo, $S \cap \cup_{1 \leq i \leq n_0} (\{\beta_i\} \times I)$ é o conjunto com as propriedades desejadas.

“O teorema espectral para operadores lineares auto-adjuntos não-limitados”

Seja, agora, (finalmente) A um operador linear auto-adjunto, não-limitado. Pelo Teorema II (Observação XIX das Considerações Iniciais), sabemos que $(A - iI_{\mathcal{B}(H)}) : \text{Dom}(A) \rightarrow H$ é uma bijeção, isto é, garantimos a existência de um operador $(A - iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1} : H \rightarrow \text{Dom}(A)$ tal que $(A - iI_{\mathcal{B}(H)})(A - iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1} = I_{\mathcal{B}(H)}$ e $(A - iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1}(A - iI_{\mathcal{B}(H)}) = I_{\mathcal{B}(\text{Dom}(A))}$. Ainda, como para todo $u \in \text{Dom}(A - iI_{\mathcal{B}(H)}) = \text{Dom}(A)$,

$$\|(A - iI_{\mathcal{B}(H)})u\|^2 = \|Au\|^2 + i\langle Au, u \rangle - i\langle u, Au \rangle + \|u\|^2 \geq \|u\|^2$$

(note que $\langle Au, u \rangle = \langle u, Au \rangle$), temos que $(A - iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1} \in \mathcal{B}(H)$, com

$$\|(A - iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1}\| \leq 1.$$

Pela Observação XVIII, obtemos

$$((A - iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1})^*(A - iI_{\mathcal{B}(H)})^* \subset I_{\mathcal{B}(H)}$$

e

$$(A - iI_{\mathcal{B}(H)})^*((A - iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1})^* = (I_{\mathcal{B}(\text{Dom}(A))})^* = I_{\mathcal{B}(H)},$$

mostrando que

$$((A - iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1})^* = ((A - iI_{\mathcal{B}(H)})^*)^{-1} = (A + iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1}$$

(note que, como $\|(A - iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1}\| = \|((A - iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1})^*\|$, segue que $(A + iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1} = ((A - iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1})^*$ também é limitado). Vamos mostrar que $(A - iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1}$ é normal. Pelo Teorema II, $(A - iI_{\mathcal{B}(H)})$ e $(A + iI_{\mathcal{B}(H)})$ são bijetores, e portanto as compostas $(A - iI_{\mathcal{B}(H)})(A + iI_{\mathcal{B}(H)})$ e $(A + iI_{\mathcal{B}(H)})(A - iI_{\mathcal{B}(H)})$ também o são. Definindo, então,

$$D := \{u \in \text{Dom}(A) : Au \in \text{Dom}(A)\} = \text{Dom}((A + iI_{\mathcal{B}(H)})(A - iI_{\mathcal{B}(H)})) =$$

$$\text{Dom}((A - iI_{\mathcal{B}(H)})(A + iI_{\mathcal{B}(H)})),$$

sabemos que existe uma única aplicação $L : H \rightarrow D$ tal que

$$[(A - iI_{\mathcal{B}(H)})(A + iI_{\mathcal{B}(H)})]L = I_{\mathcal{B}(H)}$$

e

$$L[(A - iI_{\mathcal{B}(H)})(A + iI_{\mathcal{B}(H)})] = I_{\mathcal{B}(D)}.$$

Mas

$$(A - iI_{\mathcal{B}(H)})(A + iI_{\mathcal{B}(H)}) = (A + iI_{\mathcal{B}(H)})(A - iI_{\mathcal{B}(H)})$$

em D (lembre-se que D é o domínio da composição $(A - iI_{\mathcal{B}(H)})(A + iI_{\mathcal{B}(H)}) = (A + iI_{\mathcal{B}(H)})(A - iI_{\mathcal{B}(H)})$ - veja a Observação VI). Portanto

$$(A + iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1}(A - iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1} = [(A - iI_{\mathcal{B}(H)})(A + iI_{\mathcal{B}(H)})]^{-1} =$$

$$[(A + iI_{\mathcal{B}(H)})(A - iI_{\mathcal{B}(H)})]^{-1} = (A - iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1}(A + iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1},$$

e vemos que

$$((A - iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1})^*(A - iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1} = (A + iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1}(A - iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1} = L =$$

$$(A - iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1}(A + iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1} = (A - iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1}((A - iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1})^*,$$

concluindo que $(A - iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1}$ é normal. Logo, pelo teorema espectral para operadores normais garantimos a existência de um espaço de medida (N, μ) , com $N := M \times ([-\|B\|, \|B\|] \times [-\|C\|, \|C\|])$, sendo $(A - iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1} = B + iC$, B e C auto-adjuntos e limitados, e uma transformação linear unitária $U : H \rightarrow L^2(N, \mu)$ tal que $(A - iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1} = U^{-1}M_fU$, sendo f uma função essencialmente limitada (por 3 da Observação XIII das Considerações Iniciais) a valores complexos e Borel-mensurável em N (na verdade, temos $f(\alpha, (x, y)) = x + iy, \alpha \in M, x \in [-\|B\|, \|B\|], y \in [-\|C\|, \|C\|]$ em μ -quase toda parte de N). $f \neq 0$ em μ -quase toda parte de N , pois $(A - iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1}$ é injetor. De fato, suponhamos que f seja igual a zero num conjunto E de medida positiva. Então, como U é uma bijeção, existe um único vetor (não-nulo) v em H tal que $\chi_E = U(v)$. Além disso, $\chi_E \in \text{Dom}(M_f) = L^2(N, \mu)$ e $(M_fU)(v) = 0 \in L^2(N, \mu)$. Portanto, $(U^{-1}M_fU)(v) = 0$, e $(A - iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1}v = 0$ para um vetor não-nulo de H , um absurdo, pois $(A - iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1}$ é injetor. Logo, $f \neq 0$ em μ -quase toda parte de N e está bem definida a função $f^{-1} \in L^2(N, \mu)$. Definindo $\tilde{1}_{C(I)} : N \rightarrow \mathbb{C}$ por $\tilde{1}_{C(I)}(\alpha, (x, y)) := 1$, para cada $\alpha \in M, (x, y) \in [-\|B\|, \|B\|] \times [-\|C\|, \|C\|]$ (como sempre, o “til” sobre a função indica que tal função age como várias “cópias” de $1_{C(I)}$ em cada “nível” α), temos que $f^{-1} + i \cdot \tilde{1}_{C(I)}$ é uma função Borel-mensurável em N . Definindo $g := f^{-1} + i \cdot \tilde{1}_{C(I)}$, notamos que $g(\alpha, x, y) = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{x^2+y^2-y}{x^2+y^2}i$ em μ -quase toda parte de N . Temos $A = U^{-1}M_gU$, pois:

1. $\text{Dom}(U^{-1}M_gU) = \text{Dom}(A)$, uma vez que $u \in \text{Dom}(A)$ se, e somente se, $U(u) \in \text{Dom}(M_g)$: se $u \in \text{Dom}(A)$, então $u = (A - iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1}v$, para algum $v \in H$. Portanto, $U(u) = U((A - iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1}v)$, o que implica $g \cdot (U(u)) = g \cdot (M_f U(v))$. Como $g \cdot f$ é uma função essencialmente limitada, segue que

$$g \cdot (U(u)) = g \cdot (f \cdot (U(v))) \in L^2(M, \mu),$$

mostrando que $U(u) \in \text{Dom}(M_g)$. Por outro lado, se $U(u) \in \text{Dom}(M_g)$, então $g \cdot (U(u)) \in L^2(M, \mu)$, e portanto

$$f^{-1} \cdot (U(u)) = [g - (i \cdot \tilde{I}_{C(I)})] \cdot (U(u)) \in L^2(M, \mu).$$

Da sobrejetividade de U , garantimos a existência de $v \in H$ tal que $U(v) = f^{-1} \cdot (U(u))$, e daí, decorre que

$$\text{Dom}(A) \ni (A - iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1}v = (U^{-1}M_fU)v = (U^{-1}M_g)(U(v)) =$$

$$(U^{-1}M_g)[f^{-1} \cdot (U(u))] = u,$$

finalizando a demonstração;

2. se $u \in \text{Dom}(A)$, então existe $v \in H$ tal que $u = (A - iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1}v$. Logo, $(A - iI_{\mathcal{B}(H)})u = ((A - iI_{\mathcal{B}(H)})(A - iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1})v = I_{\mathcal{B}(H)}v = v$, e vem que $Au = v + iu$. Portanto,

$$U(Au) = U(v + iu) = U(v) + iU(u) = M_{f^{-1}}U(u) + iU(u) =$$

$$(M_{f^{-1}} + iI_{L^2(N, \mu)})(U(u)) = M_{f^{-1} + i\tilde{I}_{C(I)}}(U(u)) = M_g(U(u)),$$

onde na 3a. igualdade foi usado que $u = (A - iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1}v = (U^{-1}M_fU)v$. Da arbitrariedade de u , e do fato que $\text{Im}(U|_{\text{Dom}(A)}) = \text{Dom}(M_g)$, como foi mostrado acima, podemos substituir u por $U^{-1}\psi$, onde $\psi \in \text{Dom}(M_g)$, e concluir que $UAU^{-1} = M_g$, que é o resultado que queríamos mostrar.

Como A é auto-adjunto, temos pelo item 2 da Observação XVIII que

$$U^{-1}M_gU = A = ((U^{-1}M_gU)^* \supseteq U^*(U^{-1}M_g)^* \supseteq U^*(M_g^*U) = U^{-1}M_g^*U,$$

de onde vem que $M_g^* \subseteq M_g$. Como foi provado no item 2 da Observação XIII que $M_{\bar{g}} \subseteq (M_g)^*$, devemos ter $M_{\bar{g}} = M_g$, uma vez que $\text{Dom}(M_{\bar{g}}) = \text{Dom}(M_g)$. Logo, $g = f^{-1} + i \cdot \tilde{I}_{C(I)}$ é uma função a valores reais e Borel-mensurável em N , pelo Corolário do item 3 da Observação XIII, das Considerações Iniciais. Finalizamos, assim, a demonstração de uma das implicações do Teorema Espectral.

Havíamos notado que $g(\alpha, x, y) = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{x^2+y^2-y}{x^2+y^2}i$ em μ -quase toda parte de N . Impondo-se, agora, a conclusão de que g é real em μ -quase toda parte de N , concluímos que $x^2 + y^2 - y = 0$ em μ -quase toda parte de N e, portanto, $g(\alpha, x, y) = \frac{x}{y}$ em μ -quase toda parte de N . Como a demonstração feita para operadores não limitados poderia ser feita supondo-se A limitado, poderíamos

ter a impressão de que existe uma contradição com o resultado obtido anteriormente para operadores limitados auto-adjuntos. A razão para tal impressão é a afirmação do teorema espectral para operadores auto-adjuntos limitados de que A é unitariamente equivalente à função $id(\alpha, x) := x, x \in [-\|A\|, \|A\|]$ em $\tilde{\mu}$ -quase toda parte de $\tilde{M} \times [-\|A\|, \|A\|]$ (note que a medida $\tilde{\mu}$ em questão não é a mesma medida μ utilizada acima, proveniente do teorema espectral para operadores normais), pois a função x/y com o domínio acima especificado não tem a “cara” da função id , principalmente porque, para cada $x \in [-\|B\|, \|B\|]$ fixado, $\lim_{y \rightarrow 0} |x|/|y| = +\infty$. Vamos mostrar que esta aparente contradição não passa de uma ilusão. Seja, então, A um operador auto-adjunto limitado. Como já observamos anteriormente, podemos escrever $(A - iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1} = B + iC$, de forma que $C = [(A - iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1} - (A + iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1}]/2i$. Pelo teorema espectral para operadores auto-adjuntos limitados, concluímos que A é unitariamente equivalente à função $id(\alpha, x) := x, x \in [-\|A\|, \|A\|]$ em $\tilde{\mu}$ -quase toda parte de $\tilde{M} \times [-\|A\|, \|A\|]$ e, portanto, pelo Cálculo Funcional desenvolvido, temos que C é unitariamente equivalente ao operador de multiplicação M_f , onde $f(\alpha, x) := 1/(x^2 + 1)$, em $\tilde{\mu}$ -quase toda parte de $\tilde{M} \times [-\|A\|, \|A\|]$. Logo, como tal operador é claramente inversível em $B(L^2(\tilde{M} \times [-\|A\|, \|A\|], \tilde{\mu}))$, segue que $0 \notin \sigma(M_f) = \sigma(C) = \sigma(M_{\tilde{\pi}_{[-\|C\|, \|C\|]}})$, onde $\tilde{\pi}_{[-\|C\|, \|C\|]}(\alpha, x, y) = y$ em μ -quase toda parte de N . Assim, como o espectro do operador $M_{\tilde{\pi}_{[-\|C\|, \|C\|]}}$ é a imagem essencial de $\tilde{\pi}_{[-\|C\|, \|C\|]}$ (pelo item 4 da Observação XIII), concluímos que existe $r > 0$ tal que $\mu(\{(\alpha, x, y) \in N : |y| = |\tilde{\pi}_{[-\|C\|, \|C\|]}(\alpha, x, y) - 0| < r\}) = 0$. Portanto, $|y| \geq r > 0$ em μ -quase toda parte de N . Isto mostra que $|x|/|y| \leq \|B\|r$ em μ -quase toda parte de N , garantindo que $\|A\| = \|M_g\| = \|g\|_\infty \leq \|B\|r < \infty$.

Reciprocamente, suponha que existem um espaço de medida (N, μ) positiva e uma transformação linear unitária $U : H \rightarrow L^2(N, \mu)$ tal que $UAU^{-1} : \text{Dom}(M_f) \ni g \mapsto f \cdot g \in L^2(N, \mu)$, onde f é uma função a valores reais e Borel-mensurável em N . Então, novamente pelo item 2 da observação XIII das Considerações Iniciais, concluímos que $M_f = UAU^{-1}$ é auto-adjunto. Portanto, $UAU^{-1} = (UAU^{-1})^* = ((UA)U^{-1})^* \supseteq (U^{-1})^*(UA)^* \supseteq U(A^*U^*) = UA^*U^{-1}$, pelo item 2 da observação inicial XVIII, e vem que $A \supseteq A^*$. Como $A \subseteq A^*$ por hipótese, concluímos que $A = A^*$, e A é auto-adjunto.

Concluímos, assim, o teorema espectral para operadores lineares auto-adjuntos não-limitados.

“O Cálculo Funcional Boreliano relativamente a operadores lineares auto-adjuntos não-limitados”

Antes de finalizar este capítulo, lembremos que logo após a demonstração do teorema espectral para operadores lineares limitados auto-adjuntos, estabelecemos a existência e unicidade do Cálculo Funcional sobre $B(\mathbb{R})$ através do

*-homomorfismo unital $\Phi_B : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{B}(H)$. No caso em que A é um operador linear não-limitado (i.e., $\|A\| = +\infty$) podemos também estabelecer **a existência e a unicidade** de um *-homomorfismo unital $\Phi'_B : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{B}(H)$, devido ao Teorema Espectral que acabamos de provar. Para mostrar **a existência**, basta reproduzir a mesma filosofia feita antes: se $A = UM_fU^{-1}$ definimos

$$\Phi'_B(g) := U^{-1}M_{g \circ f}U.$$

Basta repetir a argumentação feita no caso limitado para ver que:

2'. Φ'_B é um *-homomorfismo unital entre álgebras com involução;

3'. se $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de funções *uniformemente limitada* em $B(\mathbb{R})$ que converge pontualmente para $h \in B(\mathbb{R})$, então $\Phi'_B(h_n)u$ converge para $\Phi'_B(h)u$, para todo $u \in H$.

No entanto, como não temos um Cálculo Funcional para A estabelecido sobre $C(I)$, não podemos proceder de maneira análoga à feita lá para obter a propriedade

1'. $\Phi_B(f) = f|_I(A) = \Phi_C(f|_I)$, qualquer que seja $f \in C_0(\mathbb{R})$ ²⁴

Tal complicação se deve ao fato de expressões da forma $\sum_{0 \leq i \leq n} a_i A^i$, $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{C}$, (i.e., polinômios avaliados em A) não estarem bem definidas em geral, já que a operação de composição entre operadores não-limitados não é bem definida, em geral (pois não temos, necessariamente, que $\text{Dom}(A) = H$). Em contrapartida, sabemos que o operador M_{f+i} é invertível, com $(M_{f+i})^{-1} = M_{\frac{1}{f+i}}$ (note que $M_{\frac{1}{f+i}}$ é limitado, com $\|M_{\frac{1}{f+i}}\| \leq 1$, pois $\text{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}$) e, portanto, como $A = UM_fU^{-1}$, concluímos que $(A+i)^{-1} = UM_{\frac{1}{f+i}}U^{-1} = \Phi'_B(\frac{1}{f+i})$ (veja que isso é consistente com a Observação XIX das Considerações Iniciais!). Vamos ver que se substituirmos a propriedade 1' pela propriedade

1''. $\Phi'_B(\frac{1}{f+i}) = (A+i)^{-1}$ (veja como o membro da direita **não** depende de U),

e acrescentarmos a hipótese de que $\Phi'_B|_{C_0(\mathbb{R})}$ seja contínuo em 2':

2''. Φ'_B é um *-homomorfismo unital entre álgebras com involução tal que $\Phi'_B|_{C_0(\mathbb{R})}$ é contínuo,

²⁴Enfatizamos que a unicidade do Cálculo Funcional estabelecido anteriormente continuaria válida se substituíssemos S_C por $C_0(\mathbb{R})$ - se X é um espaço topológico localmente compacto, definimos o espaço $C_0(X)$ como sendo o conjunto das funções contínuas definidas em $\mathbb{R}$ a valores complexos tais que, para todo $\epsilon > 0$, existe um compacto $K_\epsilon \subseteq \mathbb{R}$ tal que $|f| < \epsilon$, em todo ponto de $\mathbb{R} \setminus K_\epsilon$; este é um espaço de Banach com a norma do sup: $f \mapsto \|f\|_\infty$. Assim, existe um único *-homomorfismo unital de álgebras com involução de $B(\mathbb{R})$ em $\mathcal{B}(H)$ satisfazendo 1, substituindo-se S_C por $C_0(\mathbb{R})$, e 3. Convencionaremos que o Cálculo Funcional Boreliano utilizado neste trabalho será o proveniente de tal substituição

(na verdade, Φ'_B é contínuo sobre todo $B(\mathbb{R})$, pois $\|\Phi'_B(f)\| \leq \|f\|_\infty$, pela Observação XIII das Considerações Iniciais) é possível estabelecer a **unicidade** do Cálculo Funcional Boreliano para o operador não-limitado A , ou melhor: se A é um operador linear auto-adjunto não-limitado e Λ'_1 e Λ'_2 são aplicações definidas em $B(\mathbb{R})$ a valores em $\mathcal{B}(H)$ satisfazendo as propriedades 1", 2" e 3' apontadas acima, então $\Lambda'_1 = \Lambda'_2$. Vamos precisar do seguinte teorema:

Teorema da Aproximação de Stone-Weierstrass para espaços localmente compactos:²⁵ *Se X é um espaço topológico localmente compacto e $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$ é uma *-subálgebra completamente separante²⁶ de $C_0(X)$, então $\mathcal{A}$ é densa em $C_0(X)$.*

Vamos à demonstração.

Seja $\mathcal{A}$ a *-subálgebra gerada pela função

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{1}{x+i}$$

de $C_0(X)$. Tal *-subálgebra satisfaz as hipóteses do teorema acima, pois o conjunto $\{x \mapsto \frac{1}{x+i}\}$ é completamente separante. Logo, $\mathcal{A}$ é densa em $C_0(X)$. Como Λ'_1 e Λ'_2 satisfazem

$$\Lambda'_1 \left(\frac{1}{x+i} \right) = (A+i)^{-1} = \Lambda'_2 \left(\frac{1}{x+i} \right),$$

e são *-homomorfismos definidos em $B(\mathbb{R})$, por hipótese, eles devem coincidir sobre $\mathcal{A}$. Assim, pela continuidade de Λ'_1 e Λ'_2 sobre $C_0(\mathbb{R})$, temos que $\Lambda'_1|_{C_0(\mathbb{R})} = \Lambda'_2|_{C_0(\mathbb{R})}$. Logo, pelo resultado de unicidade estabelecido no caso em que A era um operador limitado - a saber, que se Λ_1 e Λ_2 são *-homomorfismos unitais de $B(\mathbb{R})$ em $\mathcal{B}(H)$ que coincidem sobre os elementos de $C_0(\mathbb{R})$ e satisfazem 3', então $\Lambda_1 = \Lambda_2$ - temos que $\Lambda'_1 = \Lambda'_2$.

Isto estabelece a unicidade do Cálculo Funcional para operadores lineares auto-adjuntos não-limitados. Portanto, podemos escrever sem ambiguidades $g(A)$ para designar o objeto $\Phi'_B(g)$, qualquer que seja $g \in B(\mathbb{R})$.

No Apêndice A, daremos uma demonstração alternativa para o Teorema Espectral.

²⁵Veja [14]

²⁶Uma família de funções $\mathcal{A}$ é separante se, dados $x, y \in X, x \neq y$, existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Se tal família, além de separante, for tal que: para todo $x \in X$, existe $f \in \mathcal{A}$ satisfazendo $f(x) \neq 0$, então esta família será denominada completamente separante

2 O Teorema de Kato-Rellich

Os espaços de medida neste capítulo serão sempre em relação à medida de Lebesgue.

Definição 2.1: *Seja A um operador densamente definido num espaço de Hilbert H . Então, se A é fechado e $D \subseteq \text{Dom}(A)$ é um subespaço vetorial de H , então dizemos que D é um core (ou cerne) de A se $\overline{A|_D} = A$.*

Definição 2.2: *Se A e B são operadores densamente definidos simétricos num espaço de Hilbert H , dizemos que B é A -limitado se $\text{Dom}(B) \supseteq \text{Dom}(A)$ e existem $a, b \geq 0$ tais que*

$$\|Bv\| \leq a\|Av\| + b\|v\|,$$

para todo $v \in \text{Dom}(A)$. O ínfimo de tais $a \geq 0$ é denominada a cota de B relativa a A , e será denotada por $N_A(B)$. Uma formulação equivalente desta definição será utilizada (e devidamente justificada) ao final do capítulo 3.

Definição 2.3: *Seja A um operador densamente definido e simétrico num espaço de Hilbert H . Dizemos que A é limitado inferiormente se existe um número real M tal que $\langle Au, u \rangle \geq M\|u\|^2$, para todo $u \in \text{Dom}(A)$. Neste caso, dizemos que A é limitado inferiormente por M .*

Vamos começar este capítulo com os seguintes lemas:

Lema 2.1: *Seja A um operador auto-adjunto num espaço de Hilbert H limitado inferiormente por M . Se A é um operador auto-adjunto unitariamente equivalente a um operador de multiplicação M_f (sendo (N, μ) o espaço de medida subjacente construído na demonstração do Teorema Espectral), então $f \geq M$ em μ -quase toda parte de N .*

Demonstração: Pela hipótese, $\langle (U^{-1}M_fU)u, u \rangle \geq M\|u\|^2$, e isto implica $\langle M_f(Uu), Uu \rangle \geq M\|u\|^2$, para todo $u \in \text{Dom}(A)$. Como U aplica $\text{Dom}(A)$ em $\text{Dom}(M_f)$ de maneira sobrejetora, tal afirmação é equivalente a

$$\int_N f|\phi|^2 d\mu \geq M \int_N |\phi|^2 d\mu,$$

para toda $\phi \in \text{Dom}(M_f)$. Suponha, por absurdo, que exista um conjunto $P \subseteq N$ de medida estritamente positiva tal que $f < M$ em P . Então, garantimos a existência de um conjunto de medida finita e estritamente positiva, $Q \subseteq P$, devido à natureza do espaço de medida em questão (veja a primeira Observação Importante referente à Observação XIII). Temos, ainda, que

$$Q = (\cup_{n \in \mathbb{N}} (Q \cap f^{-1}[-n, 0])) \cup (\cup_{n \in \mathbb{N}} (Q \cap f^{-1}[0, n])).$$

Temos dois casos a considerar:

1. existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\infty > \mu(Q \cap f^{-1}[0, n]) > 0$: a definição de Q implica que

$$\begin{aligned} \int_N f |\chi_{Q \cap f^{-1}[0, n_0]}|^2 d\mu &= \int_{Q \cap f^{-1}[0, n_0]} f d\mu < \\ \int_{Q \cap f^{-1}[0, n_0]} M d\mu &= \int_N M |\chi_{Q \cap f^{-1}[0, n_0]}|^2 d\mu, \end{aligned}$$

o que contradiz a hipótese do enunciado, pois $\chi_{Q \cap f^{-1}[0, n_0]}$ pertence ao domínio de M_f ;

2. $f < 0$ em μ -quase toda parte de Q : neste caso, deve existir um $n_1 \in \mathbb{N}$ satisfazendo $\infty > \mu(Q \cap f^{-1}[-n_1, 0]) > 0$. Portanto, $\max\{0, -M\} < -f < n_1$ sobre $Q \cap f^{-1}[-n_1, 0]$, e concluímos como no item anterior que

$$\begin{aligned} \int_N (-f) |\chi_{Q \cap f^{-1}[-n_0, 0]}|^2 d\mu &= \int_{Q \cap f^{-1}[-n_0, 0]} (-f) d\mu > \\ \int_{Q \cap f^{-1}[-n_0, 0]} (-M) d\mu &= \int_N (-M) |\chi_{Q \cap f^{-1}[-n_0, 0]}|^2 d\mu, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_N f |\chi_{Q \cap f^{-1}[-n_0, 0]}|^2 d\mu < \int_N M |\chi_{Q \cap f^{-1}[-n_0, 0]}|^2 d\mu,$$

o que novamente é uma contradição.

Isto mostra que devemos ter $f \geq M$ em μ -quase toda parte de N , como queríamos.

Lema 2.2: *Seja A um operador auto-adjunto num espaço de Hilbert H . Então, A é limitado inferiormente por M se, e somente se, $\sigma(A) \subseteq [M, +\infty)$.*²⁷

Demonstração: Vamos mostrar primeiro a implicação $(\Rightarrow)$. Fixe $\gamma < M$. Por hipótese, sabemos que $\langle Au, u \rangle \geq M\|u\|^2$, para todo $u \in \text{Dom}(A)$. Somando $-\gamma\langle u, u \rangle$ em ambos os membros, obtemos $\langle (A - \gamma)u, u \rangle \geq (M - \gamma)\|u\|^2$, para todo $u \in \text{Dom}(A)$. Uma aplicação da desigualdade de Cauchy-Schwartz nos dá

$$\|(A - \gamma)u\| \geq (M - \gamma)\|u\|,$$

para todo $u \in \text{Dom}(A)$, e vemos imediatamente que $A - \gamma$ é injetor e que o operador inverso $(A - \gamma)^{-1} : \text{Im}(A - \gamma) \rightarrow \text{Dom}(A)$ é limitado, com norma menor ou igual a $(M - \gamma)^{-1}$. De $\text{Ker}(A - \gamma) = \{0\}$ e da validade da identidade $\text{Ker}(T^*) = (\text{Im}(T))^\perp$, para qualquer operador densamente definido em H ,

²⁷A demonstração da implicação $(\Leftarrow)$ foi adaptada de [12]; ao invés de usar o procedimento lá feito - que utiliza integração em espaços de Banach -, aqui a demonstração é feita utilizando-se o Teorema Espectral e o Cálculo Funcional Boreliano

temos que a imagem de $M - \gamma$ é densa em H . Para ver que tal imagem é fechada, basta utilizar novamente a desigualdade que obtivemos e proceder como na demonstração da implicação $(2 \Rightarrow 3)$ da Observação XIX das Considerações Iniciais. Logo, $\gamma \in \rho(A)$, estabelecendo o desejado.

Para mostrar $(\Leftarrow)$ vamos supor, sem perda de generalidade, que $\sigma(A) \subseteq [0, +\infty)$. Vamos mostrar que A é positivo (i.e., $\langle Au, u \rangle \geq 0$, para todo $u \in \text{Dom}(A)$). Pelo Teorema Espectral, A é unitariamente equivalente (via uma aplicação unitária $\tilde{U} : H \rightarrow L^2(\tilde{M}, \tilde{\mu})$) a um operador de multiplicação M_f agindo em $L^2(\tilde{M}, \tilde{\mu})$, para um certo espaço de medida positiva $(\tilde{M}, \tilde{\mu})$ e uma certa função f , real em $\tilde{\mu}$ -quase toda parte de $\tilde{M}$. Pelo item 4 da Observação XIII, das Considerações Iniciais (veja a Observação Importante presente na demonstração, na página 22), temos que $\sigma(A) = \sigma(M_f) = \text{Im}_{\text{ess}}(f)$. Como por hipótese, $\text{Im}_{\text{ess}}(f) \subseteq [0, +\infty)$, a definição de $\text{Im}_{\text{ess}}(f)$ implica que, para cada $x \in (-\infty, 0)$, existe um $\epsilon_x > 0$ tal que $\mu(f^{-1}[(x - \epsilon_x, x + \epsilon_x)]) = \mu(\{m \in \tilde{M} : |f(m) - x| < \epsilon_x\}) = 0$. Além disso, como $(-\infty, 0)$ possui uma base enumerável de abertos $\mathcal{B}$ sabemos que, para cada $x \in (-\infty, 0)$, existe um conjunto $B_x \in \mathcal{B}$ satisfazendo $B_x \subseteq (x - \epsilon_x, x + \epsilon_x)$. Portanto, como

$$f^{-1}[(-\infty, 0)] \subseteq f^{-1}\left[\bigcup_{x \in (-\infty, 0)} B_x\right],$$

segue da subaditividade de $\tilde{\mu}$ e da enumerabilidade de $\mathcal{B}$ que

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(\{m \in \tilde{M} : f(m) \in (-\infty, 0)\}) &= \tilde{\mu}(f^{-1}[(-\infty, 0)]) \leq \\ &\tilde{\mu}\left(f^{-1}\left[\bigcup_{x \in (-\infty, 0)} B_x\right]\right) = 0, \end{aligned}$$

pois a união enumerável de conjuntos de medida nula possui medida nula. Logo, $f \geq 0$ em $\tilde{\mu}$ -quase toda parte de $\tilde{M}$. Esta conclusão implica que, se tomarmos $t > 0$ e definirmos a função

$$g(x) := \begin{cases} 1/(x + t), & \text{se } x \in [0, +\infty) \\ 0, & \text{se } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

a composição $g \circ f$ é uma função satisfazendo

$$(g \circ f)(m) = \frac{1}{f(m) + t},$$

para $\tilde{\mu}$ -quase todo m de $\tilde{M}$. Portanto, $A + t = \tilde{U}^{-1}M_{f+t}\tilde{U}$ e $(A + t)^{-1} = \tilde{U}^{-1}M_{g \circ f}\tilde{U}$, pelo Cálculo Funcional estabelecido no capítulo anterior (note que $g \in B(\mathbb{R})$). Ainda, pela notação que convencionamos lá, $(A + t)^{-1} = g(A)$. Como $g \geq 0$, existe uma função $h \in B(\mathbb{R})$ satisfazendo $h^2 = g$, a saber

$$h(x) := \begin{cases} 1/\sqrt{x+t}, & \text{se } x \in [0, +\infty) \\ 0, & \text{se } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Portanto, como o Cálculo Funcional é um $*$ -homomorfismo,

$$\begin{aligned} \langle (A+t)^{-1}u, u \rangle &= \langle g(A)u, u \rangle = \langle h^2(A)u, u \rangle = \langle h(A)(h(A)u), u \rangle = \\ &= \langle h(A)u, (h(A))^*u \rangle = \langle h(A)u, \bar{h}(A)u \rangle = \langle h(A)u, h(A)u \rangle \geq 0, \end{aligned}$$

para todo $u \in \text{Dom}(A)$. Logo, $(A+t)^{-1}$ é um operador positivo. Por hipótese, $-t \in \rho(A)$. Logo, para cada $u \in \text{Dom}(A)$, existe $v \in H$ tal que $u = (A+t)^{-1}v$, de modo que

$$\langle (A+t)u, u \rangle = \langle v, (A+t)^{-1}v \rangle = \langle (A+t)^{-1}v, v \rangle \geq 0,$$

para todo $u \in \text{Dom}(A)$ (usamos que $(A+t)^{-1}$ é auto-adjunto, na última igualdade). Como $t > 0$ era arbitrário, podemos tomar o limite $t \rightarrow 0$ e obter $\langle Au, u \rangle \geq 0$, para todo $u \in \text{Dom}(A)$, estabelecendo que A é positivo.

Isto encerra a demonstração.

Temos como um corolário imediato do Lema 2.2 que, se A é um operador auto-adjunto positivo, então $(A+t)^{-1}$ é um operador auto-adjunto positivo, para todo $t > 0$. Conforme veremos no Capítulo 3, o operador H_0 (que é o operador $-\Delta$ definido no seu domínio de “self-adjointness”, $\text{Dom}(-\Delta) = H^2(\mathbb{R}^n)$) é positivo, pois $\sigma(H_0) = \text{Im}_{\text{ess}}(x \mapsto |x|^2 := \sum_{1 \leq i \leq n} |x_i|^2) = [0, +\infty)$, pela Observação XIII. Logo, o operador $(H_0+t)^{-1}$ é positivo, para todo $t > 0$.

Na Mecânica Clássica, se o potencial V em $\mathbb{R}^n$ é limitado inferiormente por M (ou seja, $V(x) \geq M$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$), então a energia mecânica de uma partícula dada por, digamos,

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x),$$

não pode ser menor do que M , pois caso contrário concluiríamos que $p^2 < 0$. A situação análoga na Mecânica Quântica é descrita pelo seguinte:

Corolário:²⁸ *Sejam A um operador positivo auto-adjunto em $L^2(\mathbb{R}^n)$ e V uma função Lebesgue-mensurável. Se M_V é limitado inferiormente por $M \in \mathbb{R}$, $A + M_V$ é auto-adjunto em $\text{Dom}(A + M_V)$ e $\text{Dom}(A) \subseteq \text{Dom}(M_V)$, então $\sigma(A + M_V) \subseteq [M, +\infty)$ (veja que este corolário também se aplica para $A = H_0$).*

Demonstração: Como M_V é limitado inferiormente por M e A é positivo, temos que $A + M_V$ é limitado inferiormente por M . Pelo Lema 2.2, concluímos que $\sigma(A + M_V) \subseteq [M, +\infty)$, uma vez que $A + M_V$ é auto-adjunto em

²⁸Retirado de [6]

$\text{Dom}(A + M_V)$.

Próximo ao contexto deste último corolário, está o:²⁹

Teorema de Kato-Rellich: *Sejam H um espaço de Hilbert, A um operador linear auto-adjunto em $\text{Dom}(A) \subseteq H$ e B um operador linear simétrico e fechado³⁰ em $\text{Dom}(B) \subseteq H$ que é A -limitado (em particular, $\text{Dom}(A) \subseteq \text{Dom}(B)$), de forma que a cota de B relativa a A é $a < 1$ (isto é, $N_A(B) := a < 1$). Então, $A + B$ é auto-adjunto em $\text{Dom}(A)$ e é essencialmente auto-adjunto em todo core de A (note que, como A é auto-adjunto, A é fechado). Além disso, se A é limitado inferiormente por M , então $A + B$ é limitado inferiormente por $M - \max\{b/(1-a), a|M| + b\}$.*

Demonstração: Vamos mostrar que existe $\mu > 0$ tal que $\text{Im}(A + B \pm \mu i) = H$. Seja $u \in \text{Dom}(A)$. Como A é, em particular, simétrico, temos que $\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$, para todo $v \in \text{Dom}(A)$ e, portanto,

$$(i) \quad \|(A - \mu i)u\|^2 = \|Au\|^2 + i\mu\langle Au, u \rangle - i\mu\langle u, Au \rangle + \mu^2 \|u\|^2 = \|Au\|^2 + \mu^2 \|u\|^2,$$

para todo $\mu > 0$ (lembremos que $\text{Dom}(A - \mu i) := \text{Dom}(A) \cap \text{Dom}(-\mu i) = \text{Dom}(A) \cap H = \text{Dom}(A)$ - veja a Observação VI das Considerações Iniciais). Como A é auto-adjunto, pelo Teorema II das observações iniciais garantimos a existência de um operador linear $(A - \mu i)^{-1} : H \rightarrow \text{Dom}(A)$ tal que $(A - \mu i)^{-1}(A - \mu i) = I_{B(\text{Dom}(A))}$ e $(A - \mu i)(A - \mu i)^{-1} = I_{B(H)}$, para todo $\mu > 0$. Logo, da equação (i), concluímos que, para todo $v \in \text{Dom}((A - \mu i)^{-1}) = H$,

$$\mu^{-1} \|v\| \geq \|(A - \mu i)^{-1}v\|$$

e

$$\|v\| \geq \|A((A - \mu i)^{-1}v)\|,$$

para todo $\mu > 0$, e obtemos as relações

$$\|(A - \mu i)^{-1}\| \leq \mu^{-1}$$

e

$$\|A(A - \mu i)^{-1}\| \leq 1.$$

Pela hipótese do enunciado, existe $b \geq 0$ tal que a equação

$$(ii) \quad \|Bv\| \leq a \|Av\| + b \|v\|$$

é válida para todo $v \in \text{Dom}(A)$. Logo, concluímos que, para todo $v \in \text{Dom}((A - \mu i)^{-1}) = H$, temos

$$\|B(A - \mu i)^{-1}v\| \leq a \|A(A - \mu i)^{-1}v\| + b \|(A - \mu i)^{-1}v\|$$

²⁹Os três últimos teoremas deste capítulo são versões detalhadas da exposição feita em [20]

³⁰Em [20] não é colocada a hipótese de B ser fechado

(note que $\text{Dom}(A(A - \mu i)^{-1}) \subseteq \text{Dom}(B(A - \mu i)^{-1})$, pois $H = \text{Dom}(A(A - \mu i)^{-1}) = \text{Dom}(B(A - \mu i)^{-1})$, de modo que a avaliação $B((A - \mu i)^{-1}v)$ está bem definida), e desta última equação decorre que

$$\|B(A - \mu i)^{-1}\| \leq a \|A(A - \mu i)^{-1}\| + b \|(A - \mu i)^{-1}\| \leq a + b(\mu^{-1}),$$

para todo $\mu > 0$. Escolha um $\mu > 0$ suficientemente grande para que tenhamos $\|B(A - \mu i)^{-1}\| < 1$. Então, como $\mathcal{B}(H)$ é uma C^* -álgebra unital, garantimos que $I_{\mathcal{B}(H)} + B(A - \mu i)^{-1}$ é inversível em $\mathcal{B}(H)$, isto é, $-1 \notin \sigma(B(A - \mu i)^{-1})$ - veja o primeiro comentário feito a respeito de C^* -álgebras na introdução (no entanto, enfatizamos que somente a sobrejetividade de $I_{\mathcal{B}(H)} + B(A - \mu i)^{-1}$ será usada na demonstração). Devido ao Teorema II da observação XIX das Considerações Iniciais, temos que o operador $A - \mu i$ é sobrejetor. Portanto, $A + B - \mu i = (I_{\mathcal{B}(H)} + B(A - \mu i)^{-1})(A - \mu i)$, sendo a composta de dois operadores sobrejetores, é também sobrejetor. Argumentando de maneira análoga, concluímos também que $A + B + \mu i$ é sobrejetor. Logo, novamente pelo Teorema II, temos que $A + B$ é auto-adjunto em $\text{Dom}(A + B) := \text{Dom}(A)$.

Vamos mostrar que $A + B$ é essencialmente auto-adjunto em todo *core* de A . Para tanto, basta mostrar que $\overline{(A + B)|_D} = A + B$, uma vez que já foi mostrado que $A + B$ é auto-adjunto em $\text{Dom}(A + B) = \text{Dom}(A)$. Seja $D \subseteq \text{Dom}(A)$ um *core* de A , e seja $u \in \text{Dom}(A)$. Então, $A|_D = A$ e, portanto, existem uma seqüência $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em D tal que $u_n \rightarrow u$ e uma seqüência $\{Au_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $Au_n \rightarrow Au$. Agora, como $\|Bv\| \leq a\|Av\| + b\|v\|$, para todo $v \in \text{Dom}(A)$, os fatos de $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{Au_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ serem seqüências de Cauchy em H implicam que $\{Bu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ seja, também, uma seqüência de Cauchy em H . Da completude de H , segue a existência de $w \in H$ tal que $Bu_n \rightarrow w$. Por outro lado, como $u_n \in \text{Dom}(B)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (pois $\text{Dom}(B) \supset \text{Dom}(A)$, por definição), e B é fechado, temos que $u \in \text{Dom}(B)$ e $w = Bu$. Isto nos leva à conclusão de que $(u, (A + B)u) \in \text{Gr}(\overline{(A + B)|_D})$. Em particular, mostramos que $\overline{\text{Dom}(A + B)} = \text{Dom}(A) \subseteq \text{Dom}(\overline{(A + B)|_D})$. Como já sabíamos que $\overline{(A + B)|_D} \subset A + B$ (pois $A + B$ é auto-adjunto e, portanto, é uma extensão fechada de $(A + B)|_D$), concluímos que $\overline{(A + B)|_D} = A + B$.

Suponhamos que A é limitado inferiormente por M . Pelo Teorema Espectral, sabemos que existem um espaço de medida (N, μ) positiva e uma transformação linear unitária $U : H \rightarrow L^2(N, \mu)$ tal que $U \circ A \circ U^{-1} : \text{Dom}(M_f) \ni g \mapsto f \cdot g \in L^2(N, \mu)$, onde f é uma função a valores reais e Borel-mensurável em N . Então, temos pelo Lema 2.1 que $f(x) \geq M$ em μ -quase toda parte de N . Esta informação será de vital importância para podermos utilizar o Cálculo Funcional e obter as estimativas que queremos. Seja $t < M$. Então $t \in \rho(A)$, pelo lema que mostramos, e

$$\|B(A - t)^{-1}\| \leq a \|A(A - t)^{-1}\| + b \|(A - t)^{-1}\|,$$

por (ii). Ambas as funções

$$f_1(s) := \begin{cases} s/(s-t), & \text{se } s \in [M, +\infty) \\ 0, & \text{se } s \notin [M, +\infty) \end{cases}$$

e

$$f_2(s) := \begin{cases} 1/(s-t), & \text{se } s \in [M, +\infty) \\ 0, & \text{se } s \notin [M, +\infty) \end{cases}$$

pertencem a $B(\mathbb{R})$. Como $|f_1| \leq \max\{1, |M|/(M-t)\}$ (pois $f_1|_{[M, +\infty)}$ ou é monótona, se $t \neq 0$, ou é igual a 1 em todos os pontos de $[M, +\infty)$. Além disso, $\lim_{s \rightarrow +\infty} f_1(s) = 1$), pelo Cálculo Funcional desenvolvido, sabemos que

$$\|A(A-t)^{-1}\| = \|f_1 \circ f\|_\infty \leq \sup\{|f_1(s)| : s \in [M, +\infty)\} \leq \max\{1, |M|/(M-t)\}$$

(note que para concluir a segunda desigualdade usou-se que

$$|f_1 \circ f| \leq \sup\{|f_1(s)| : s \in [M, +\infty)\}$$

em μ -quase toda parte de N . Para a primeira igualdade, veja o item 3 da Observação XIII, nas Considerações Iniciais). $f_2|_{[M, +\infty)}$ é estritamente decrescente e

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} f_2(s) = 0,$$

mostrando que $|f_2| \leq 1/(M-t)$. Novamente pelo Cálculo Funcional obtemos de maneira análoga à feita acima que

$$\|(A-t)^{-1}\| \leq \|f_2 \circ f\|_\infty \leq \sup\{|f_2(s)| : s \in [M, +\infty)\} \leq 1/(M-t).$$

Portanto, temos que $\|B(A-t)^{-1}\| \leq a \max\{1, |M|/(M-t)\} + b/(M-t)$. Se tivermos

$$a \max\{1, |M|/(M-t)\} + \frac{b}{M-t} < 1,$$

concluiremos que $A+B-t$ é inversível, pois

$$A+B-t = (I_{\mathcal{B}(H)} + B(A-t)^{-1})(A-t)$$

e $A-t$ é inversível, com inversa limitada, uma vez que $t \in \rho(A)$. Mas se

$$M-t > \max\{a|M|+b, b/(1-a)\},$$

então temos que

$$a \max\left\{1, \frac{|M|}{M-t}\right\} + \frac{b}{M-t} < 1.$$

De fato, se $\max\{1, |M|/(M-t)\} = 1$, então

$$a \max\left\{1, \frac{|M|}{M-t}\right\} + \frac{b}{M-t} = a + \frac{b}{M-t} <$$

$$a + b \cdot \frac{1-a}{b} = a + (1-a) = 1;$$

por outro lado, se $\max\{1, |M|/(M-t)\} = |M|/(M-t)$, então

$$a \max\left\{1, \frac{|M|}{M-t}\right\} + \frac{b}{M-t} = a \frac{|M|}{M-t} + \frac{b}{M-t} < (a|M| + b) \cdot \frac{1}{a|M| + b} = 1.$$

Portanto, se

$$t < \min\left\{M, M - \max\left\{a|M| + b, \frac{b}{1-a}\right\}\right\} = M - \max\left\{a|M| + b, \frac{b}{1-a}\right\},$$

então $t \in \rho(A+B)$. Logo,

$$\sigma(A+B) \subseteq [M - \max\{b/(1-a), a|M| + b\}, +\infty).$$

Pelo Lema 2.2, temos que $A+B$ é limitado inferiormente por

$$M - \max\left\{a|M| + b, \frac{b}{1-a}\right\}.$$

Existe o seguinte corolário, que é uma forma simétrica do Teorema de Kato-Rellich:

Teorema: *Sejam A e C operadores densamente definidos e simétricos em um espaço de Hilbert H , e suponha que $D \subseteq \text{Dom}(A) \cap \text{Dom}(C)$ é um subespaço vetorial de H tal que*

$$(*) \quad \|(A-C)v\| \leq a(\|Av\| + \|Cv\|) + b\|v\|,$$

para todo $v \in D$, com $a < 1$. Então, A é essencialmente auto-adjunto em D se, e somente se, C é essencialmente auto-adjunto em D .

Demonstração: Vamos mostrar, primeiramente, que se S e T são operadores lineares simétricos (logo, fecháveis) com $D = \text{Dom}(S) = \text{Dom}(T)$, tais que

$$(*)' \quad M\|Sv\| \leq N\|Tv\| + P\|v\|,$$

para todo $v \in D$, com $M, N > 0, P \geq 0$, então $\text{Dom}(\overline{S}) \supseteq \text{Dom}(\overline{T})$. Em particular, se $\overline{T}$ for densamente definido, $\overline{S}$ também será. Seja $u \in \text{Dom}(\overline{T})$. Então existem seqüências $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em D e $\{Tu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $\text{Im}(T)$ tais que $u_n \rightarrow u$ e $Tu_n \rightarrow \overline{T}u$. $(*)'$ implica que $\{Su_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy em H , uma vez que $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em D e $\{Tu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ são seqüências de Cauchy em H . Como H é um espaço métrico completo, existe $\lim_n Su_n$. Como $\overline{S}$ é um operador fechado, $u \in \text{Dom}(\overline{S})$ e $\lim_n Su_n = \overline{S}u$. Isto mostra a inclusão $\text{Dom}(\overline{S}) \supseteq \text{Dom}(\overline{T})$ (note que, em particular, mostramos que $(*)'$ implica

$$M\|(\overline{S})v\| \leq N\|(\overline{T})v\| + P\|v\|,$$

para todo $v \in \text{Dom}(\overline{T})$, devido à continuidade da norma).

Vemos que (*) implica $(1-a)\|Av\| \leq (1+a)\|Cv\| + b\|v\|$ e $(1-a)\|Cv\| \leq (1+a)\|Av\| + b\|v\|$, para todo $v \in D$ e, portanto, em particular, $\text{Dom}(A|_D) = \text{Dom}(C|_D)$, pelo que demonstramos acima.

Vamos à demonstração.

Suponha que C é essencialmente auto-adjunto em D . Defina $B := A - C$ e o caminho $F(\alpha) := C + \alpha B, 0 \leq \alpha \leq 1$, de modo que $C = F(\alpha) - \alpha B$ e $A = C + B = F(\alpha) + (1-\alpha)B$. Utilizando a desigualdade triangular, (*) se transforma em

$$\|Bv\| \leq a(\|F(\alpha)v\| + \|(1-\alpha)Bv\| + \|F(\alpha)v\| + \|\alpha Bv\|) + b\|v\|,$$

de modo que obtemos

$$(**) \quad \|Bv\| \leq \frac{2a}{1-a}\|F(\alpha)v\| + \frac{b}{1-a}\|v\|,$$

para todo $v \in D$ e **todo** $\alpha \in [0, 1]$ (na verdade, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$). Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2a}{n(1-a)} < 1$. Multiplicando os dois membros de (**) por $1/n$, obtemos

$$(**') \quad \|(1/n)Bv\| \leq \frac{2a}{n(1-a)}\|F(\alpha)v\| + \frac{b}{n(1-a)}\|v\|,$$

para todo $v \in D$ e **todo** $\alpha \in [0, 1]$. Escolhendo $\alpha = 0$ em (**'), podemos utilizar a argumentação feita no início da demonstração para concluir que possuímos todas as hipóteses do Teorema de Kato-Rellich e inferir que $\overline{C|_D + (1/n)B|_D}$ é auto-adjunto em $\text{Dom}(\overline{C|_D})$ (lembre-se de que, pelo que foi mostrado no início da demonstração,

$$\|\overline{(1/n)B|_D}v\| \leq \frac{2a}{n(1-a)}\|\overline{C|_D}v\| + \frac{b}{n(1-a)}\|v\|,$$

para todo $v \in \text{Dom}(\overline{C|_D})$, e $\text{Dom}(\overline{B|_D}) \supseteq \text{Dom}(\overline{C|_D})$. Usamos também que o fecho de um operador simétrico é simétrico).

Vamos mostrar que $\overline{C|_D + (1/n)B|_D} = \overline{C|_D + (1/n)B|_D}$. Já sabemos que

$$\overline{C|_D + (1/n)B|_D} \supset \overline{C|_D + (1/n)B|_D},$$

pois $\overline{C|_D + (1/n)B|_D}$ é auto-adjunto em $\text{Dom}(\overline{C|_D})$ e, portanto, é uma extensão fechada de $C|_D + (1/n)B|_D$. Verifiquemos que

$$\overline{C|_D + (1/n)B|_D} \subset \overline{C|_D + (1/n)B|_D} :$$

tome $(v, \overline{C|_D + (1/n)B|_D}v) \in \text{Gr}(\overline{C|_D + (1/n)B|_D})$. Como

$$v \in \text{Dom}(\overline{C|_D}) = \text{Dom}(\overline{C|_D + (1/n)B|_D}),$$

(lembre-se de que $\text{Dom}(\overline{B|_D}) \supseteq \text{Dom}(\overline{C|_D})$), existem seqüências $\{v_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ em D e $\{Cv_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ em $\text{Im}(C|_D)$ tais que $v_m \rightarrow v$ e $Cv_m \rightarrow \overline{C|_D}v$. Logo, por $(**')$ e um argumento análogo ao feito logo no início da demonstração, concluímos que

$$(1/n)B|_D v_m \rightarrow \overline{(1/n)B|_D}v$$

e

$$(C|_D + (1/n)B|_D)v_m \rightarrow (\overline{C|_D} + \overline{(1/n)B|_D})v.$$

Portanto, $\{v_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência em D convergente em H e

$$\{(C|_D + (1/n)B|_D)v_m\}_{m \in \mathbb{N}}$$

é uma seqüência convergente em H . Pela unicidade do limite e a definição de fecho de um operador, temos que

$$(\overline{C|_D} + \overline{(1/n)B|_D})v \subset \overline{C|_D + (1/n)B|_D}v.$$

Isto mostra a inclusão desejada e estabelece que

$$\overline{C|_D + (1/n)B|_D} = \overline{C|_D} + \overline{(1/n)B|_D},$$

como queríamos.

Em resumo, para $\alpha = 0$, temos que

$$\overline{C|_D + (1/n)B|_D} = \overline{C|_D} + \overline{(1/n)B|_D}$$

é um operador auto-adjunto em $\text{Dom}(\overline{C|_D})$.

Podemos também utilizar $(**)'$ com $\alpha = 1/n$ de modo que, pelas observações no início da demonstração, possuímos as hipóteses necessárias para poder aplicar o Teorema de Kato-Rellich e concluir que

$$\overline{C|_D + (1/n)B|_D} + \overline{(1/n)B|_D}$$

é auto-adjunto em $\text{Dom}(\overline{C|_D + (1/n)B|_D}) = \text{Dom}(\overline{C|_D})$.

De maneira análoga à feita para mostrar que

$$\overline{C|_D} + \overline{(1/n)B|_D} = \overline{C|_D + (1/n)B|_D},$$

podemos provar que

$$\overline{C|_D + (2/n)B|_D} = \overline{C|_D + (1/n)B|_D} + \overline{(1/n)B|_D}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \overline{C|_D + (2/n)B|_D} &= \overline{C|_D + (1/n)B|_D} + \overline{(1/n)B|_D} = \\ &\quad \overline{C|_D} + \overline{(1/n)B|_D} + \overline{(1/n)B|_D} \end{aligned}$$

é um operador auto-adjunto em $\text{Dom}(\overline{C|_D})$.

Suponha, agora, que $2 \leq j \leq n-1$ é um natural que possui a seguinte propriedade:

$$\overline{C|_D + (j/n)B|_D} = \overline{C|_D + ((j-1)/n)B|_D} + \overline{(1/n)B|_D} = \overline{C|_D} + \sum_{1 \leq i \leq j} \overline{(1/n)B|_D}$$

e $\overline{C|_D + (j/n)B|_D}$ é auto-adjunto em $\text{Dom}(\overline{C|_D})$. Vamos mostrar que tal propriedade também é válida para $j+1$. Aplicando Kato-Rellich para $\alpha = j/n$ e o fato de que $\overline{C|_D + (j/n)B|_D} = \overline{C|_D} + \sum_{1 \leq i \leq j} \overline{(1/n)B|_D}$, concluímos que o operador

$$\overline{C|_D + (j/n)B|_D} + \overline{(1/n)B|_D}$$

é auto-adjunto em $\text{Dom}(C|_D)$. Fazendo um procedimento análogo ao feito para demonstrar que $\overline{C|_D + (1/n)B|_D} = \overline{C|_D} + \overline{(1/n)B|_D}$, concluímos que

$$\overline{C|_D + ((j+1)/n)B|_D} = \overline{C|_D + (j/n)B|_D} + \overline{(1/n)B|_D}.$$

Logo, temos que

$$\overline{C|_D + ((j+1)/n)B|_D}$$

é um operador auto-adjunto em $\text{Dom}(\overline{C|_D})$.

Fica mostrado, então, que

$$\overline{C|_D + (j/n)B|_D}$$

é um operador auto-adjunto em $\text{Dom}(C|_D)$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Em particular, fazendo $j = n$, concluímos que $\overline{C|_D + B|_D} = \overline{C|_D} + \overline{(A|_D - C|_D)} = \overline{A|_D}$ é auto-adjunto em $\text{Dom}(\overline{C|_D}) = \text{Dom}(A|_D)$, terminando a demonstração de uma das implicações.

Como podemos escrever (*) como

$$(*) \quad \|(C - A)v\| \leq a(\|Cv\| + \|Av\|) + b\|v\|,$$

para todo $v \in D$, a recíproca é uma mera repetição da demonstração que acabamos de terminar.

Quando a cota de B relativa a A é igual a 1, temos uma conclusão um pouco mais fraca do que a do Teorema de Kato-Rellich:

Teorema (Wüst): *Sejam H um espaço de Hilbert, A um operador linear auto-adjunto em H e B um operador linear simétrico e fechado em H que é A -limitado, de forma que a cota de B relativa a A é $a = 1$. Então, $A + B$ é essencialmente auto-adjunto em $\text{Dom}(A)$ (e em todo core de A).*

Demonstração: Seja $w \in \text{Ker}((A + B + i)^*)$. Como

$$(I) \quad \|Bv\| \leq \|Av\| + b\|v\|,$$

para todo $v \in \text{Dom}(A)$, multiplicando-se os dois membros por $0 < t < 1$, sabemos pelo Teorema de Kato-Rellich que $A + tB$ é auto-adjunto em $\text{Dom}(A)$. Logo, para cada $0 < t < 1$, existe $y_t \in \text{Dom}(A)$ tal que $(A + tB + i)y_t = w$. Defina $z_t := w - tBy_t + By_t = (A + tB + i)y_t - tBy_t + By_t = (A + B + i)y_t$. Então,

$$\langle z_t, w \rangle = \langle (A + B + i)y_t, w \rangle = \langle y_t, (A + B + i)^* w \rangle = 0,$$

qualquer que seja $0 < t < 1$. Ainda, como $A + tB$ é simétrico,

$$\|w\|^2 = \|(A + tB + i)y_t\|^2 = \|(A + tB)y_t\|^2 + \|y_t\|^2,$$

mostrando que

$$(II) \quad \|y_t\| \leq \|w\|$$

e

$$(III) \quad \|(A + tB)y_t\| \leq \|w\|,$$

para todo $0 < t < 1$. Pela desigualdade triangular e (I) multiplicado por t , temos

$$\|Ay_t\| \leq \|(A + tB)y_t\| + t\|By_t\| \leq \|(A + tB)y_t\| + t(\|Ay_t\| + b\|y_t\|),$$

e concluímos por (III) que

$$(1 - t)\|Ay_t\| \leq \|(A + tB)y_t\| + tb\|y_t\| \leq \|w\| + tb\|w\|,$$

para todo $0 < t < 1$, mostrando que $\sup \{(1 - t)\|Ay_t\| : t \in (0, 1)\} < \infty$. Logo, por (I) multiplicado por $1 - t$ e (II), concluímos que

$$\sup \{(1 - t)\|By_t\| : t \in (0, 1)\} < \infty$$

e, portanto, $\sup \{\|z_t\| : t \in (0, 1)\} = \sup \{\|w - (1 - t)By_t\| : t \in (0, 1)\} \leq M$, para algum $M > 0$ real.

Seja $\eta \in \text{Dom}(A)$. Para todo $0 < t < 1$,

$$\langle \eta, z_t \rangle - \langle \eta, w \rangle = \langle \eta, (1 - t)By_t \rangle = (1 - t)\langle B\eta, y_t \rangle,$$

e concluímos que

$$|\langle \eta, z_t - w \rangle| \leq (1 - t)\|B\eta\|\|y_t\| \leq (1 - t)\|B\eta\|\|w\|.$$

Logo, o limite lateral $\lim_{t \rightarrow 1^-} \langle \eta, z_t \rangle$ existe e é igual a $\langle \eta, w \rangle$, para todo $\eta \in \text{Dom}(A)$. Seja $x \in H$, e seja $\epsilon > 0$. Da densidade de $\text{Dom}(A)$ em H , segue que existe $\eta \in \text{Dom}(A)$ tal que

$$\|x - \eta\| < \min \{\epsilon/3M, \epsilon/3(\|w\| + 1)\}.$$

Pelo que acabou de ser argumentado, garantimos a existência de um $\delta > 0$ tal que se $t \in (0, 1)$ satisfaz $|t - 1| < \delta$, então $|\langle \eta, z_t \rangle - \langle \eta, w \rangle| < \epsilon/3$. Logo,

$$|\langle x, z_t \rangle - \langle x, w \rangle| \leq |\langle x, z_t \rangle - \langle \eta, z_t \rangle| + |\langle \eta, z_t \rangle - \langle \eta, w \rangle| + |\langle \eta, w \rangle - \langle x, w \rangle| \leq$$

$$\|x - \eta\|M + \epsilon/3 + \|\eta - x\|\|w\| < \frac{M\epsilon}{3M} + \epsilon/3 + \frac{\epsilon}{3(\|w\| + 1)}\|w\| < \epsilon.$$

Isto estabelece que $\lim_{t \rightarrow 1^-} \langle x, z_t \rangle = \langle x, w \rangle$, qualquer que seja $x \in H$. Em particular, tomando $x = w$, obtemos $\lim_{t \rightarrow 1^-} \langle w, z_t \rangle = \langle w, w \rangle$. Como foi visto anteriormente que $\langle z_t, w \rangle = 0$, para todo $0 < t < 1$, temos que $\|w\| = 0$. Logo, $w = 0$ e, da arbitrariedade de w , concluímos que $\text{Im}((A + B + i))^\perp = \text{Ker}((A + B + i)^*) = \{0\}$. Analogamente, podemos repetir os passos feitos acima e ver também que $\text{Im}((A + B - i))^\perp = \{0\}$. Portanto, $\text{Im}((A + B \pm i))$ são densos em H , e temos que $A + B$ é essencialmente auto-adjunto em $\text{Dom}(A)$, pela Observação XIX.

Um exemplo simples para ver que a tese “ $A + B$ é essencialmente auto-adjunto em $\text{Dom}(A)$ ” do último teorema não pode ser melhorada para “ $A + B$ é auto-adjunto em $\text{Dom}(A)$ ” é tomar $B := -A$. Vemos que todas as hipóteses do teorema se mantêm, mas

$$A + B = 0_{\text{Dom}(A)},$$

mostrando que $A + B$ não é auto-adjunto, pois $(0_{\text{Dom}(A)})^* = 0_{\mathcal{B}(H)} \neq 0_{\text{Dom}(A)}$. No entanto, note que $\overline{0_{\text{Dom}(A)}} = 0_{\mathcal{B}(H)}$, de modo que o operador $0_{\mathcal{B}(H)}$ é essencialmente auto-adjunto.

3 Aplicações do Teorema de Kato-Rellich

(Observação: os espaços de medida neste capítulo serão sempre em relação à medida de Lebesgue.)

Seja $S(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} (1 + \|x\|)^m |D_\beta \phi| = 0,$$

para todos $m \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{N}^n$, isto é, o espaço de Schwartz das funções infinitamente diferenciáveis de rápido decrescimento *cujas derivadas também são de rápido decrescimento*. Mostra-se que a transformada de Fourier está bem definida por

$$\tilde{\mathfrak{F}} : \phi \mapsto \tilde{\mathfrak{F}}(\phi)(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \phi(x) dx$$

em $S(\mathbb{R}^n)$, e assume valores em $S(\mathbb{R}^n)$. Prova-se também que se munirmos $S(\mathbb{R}^n)$ da norma de $L^2(\mathbb{R}^n)$ (uma vez que $S(\mathbb{R}^n)$ é um subespaço vetorial de $L^2(\mathbb{R}^n)$), então $\tilde{\mathfrak{F}} : S(\mathbb{R}^n) \rightarrow S(\mathbb{R}^n)$ será uma isometria sobrejetora. Utilizando a propriedade de comutação da transformada de Fourier com a operação de derivação parcial, é possível ver que $\tilde{\mathfrak{F}}(-\Delta)\tilde{\mathfrak{F}}^{-1} = (M_{|\xi|^2})|_{S(\mathbb{R}^n)}$,³¹ onde $M_{|\xi|^2}$ é o operador de multiplicação

$$M_{|\xi|^2} : \text{Dom}(M_{|\xi|^2}) \ni \phi \mapsto |\xi|^2 \phi(\xi)$$

(note que $S(\mathbb{R}^n) \subseteq \text{Dom}(M_{|\xi|^2})$). Como $S(\mathbb{R}^n)$, sob essas circunstâncias, é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$, temos pelo Lema 1.2 do capítulo 1 que existe uma única extensão unitária de $\tilde{\mathfrak{F}}$ a $L^2(\mathbb{R}^n)$, que denotaremos por $\mathfrak{F}$. Foi mostrado na Observação XIII (no item 2) das Considerações Iniciais que $M_{|\xi|^2}$ é auto-adjunto em $\text{Dom}(M_{|\xi|^2})$. Definindo, então, $\text{Dom}(H_0) := \mathfrak{F}^{-1}\text{Dom}(M_{|\xi|^2})$ e $H_0 := \mathfrak{F}^{-1}M_{|\xi|^2}\mathfrak{F}$, então sua ação estenderá a ação usual de $-\Delta$ em $S(\mathbb{R}^n)$, e tal operador será auto-adjunto, uma vez que é unitariamente equivalente a um operador auto-adjunto. Mas quem é $\text{Dom}(H_0)$? Uma vez que a derivação fraca é uma operação que estende a derivação usual em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, uma boa sugestão para tentar desmistificar tal domínio (e a subsequente ação do operador H_0) seria (possivelmente) explorando esta ideia. É esta a tentativa que faremos agora. Mas, antes, vamos deixar claro qual é a definição de derivada fraca, apresentando os espaços de Sobolev:

“O domínio de ‘self-adjointness’ do operador $-\Delta$ ”

Definição: Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto. Definimos o espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ como sendo o conjunto das $u \in L^p(\Omega)$ satisfazendo a seguinte propriedade:

$$\text{existem } g_i \in L^p(\Omega), 1 \leq i \leq n, \text{ tais que } \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \phi dx,$$

³¹ $|\xi|^2 := \sum_{1 \leq i \leq n} |\xi_i|^2$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $1 \leq i \leq n$. Denotaremos g_i por $D_i u$. Procedendo de maneira recursiva, dado um natural $m \geq 1$, podemos definir o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ como sendo o conjunto das $u \in L^p(\Omega)$ satisfazendo a seguinte propriedade: para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^m$, com $|\alpha| \leq m$,

$$\text{existem } g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ tais que } \int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g_\alpha \phi dx,$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ (pode-se mostrar que esta propriedade implica a validade da mesma trocando-se $C_c^\infty(\Omega)$ por $S(\mathbb{R}^n)$ - usaremos este fato mais tarde, neste capítulo). $W^{m,p}(\Omega)$ se torna um espaço de Banach com a norma definida por

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

(se $p = 2$, $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert). As g_i 's e g_α 's são chamadas de derivadas fracas de u . É usual na literatura denotar-se $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$, e faremos o mesmo, aqui. Neste texto, tais espaços $W^{m,p}(\Omega)$ serão normalmente considerados como subespaços normados de $L^p(\mathbb{R}^n)$, de modo que ao invés de espaços de Banach eles serão subespaços densos de $L^p(\mathbb{R}^n)$ (pois eles contêm $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, que é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$ - tal densidade será usada com frequência neste capítulo). Caso eles sejam utilizados com a sua norma de Banach, haverá um cuidado especial com a notação (como na demonstração do Teorema 3.2, por exemplo).

Vamos dividir a demonstração em partes. Primeiramente, temos o seguinte lema:

$\text{Dom}(H_0) \subseteq H^2(\mathbb{R}^n)$ e $-\tilde{\Delta}|_{H^2(\mathbb{R}^n)} = H_0$ ($\tilde{\Delta}$ denota o Laplaciano correspondente às derivações fracas):

Seja $f \in \text{Dom}(H_0)$, isto é, uma função $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $M_{|\xi|^2}(\mathfrak{F}f) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Vamos mostrar que $f \in H^2(\mathbb{R}^n)$. Para tanto, vamos mostrar que $(-\mathfrak{S}^{-1}M_{\xi_i \cdot \xi_j} \mathfrak{S})(f) = (\tilde{D}_i \tilde{D}_j)(f)$ ($\tilde{D}_i$ denota a derivada fraca com respeito à i -ésima coordenada):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (-\mathfrak{S}^{-1}M_{\xi_i \cdot \xi_j} \mathfrak{S})(f)(x) \phi(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (-M_{\xi_i \cdot \xi_j} \mathfrak{S})(f)(x) (\mathfrak{S}^{-1} \phi)(x) dx = \\ \int_{\mathbb{R}^n} -x_i x_j \mathfrak{S} f(x) \mathfrak{S}^{-1} \phi(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathfrak{S} f(x) [(-i)^2 x_i x_j \mathfrak{S}^{-1} \phi(x)] dx = \\ \int_{\mathbb{R}^n} \mathfrak{S} f(x) \mathfrak{S}^{-1} (\tilde{D}_i \tilde{D}_j \phi)(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (\mathfrak{S}^{-1}(\mathfrak{S} f))(x) (\tilde{D}_i \tilde{D}_j \phi)(x) dx = \\ \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (\tilde{D}_i \tilde{D}_j \phi)(x) dx, \end{aligned}$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Isto estabelece a inclusão $\text{Dom}(H_0) \subseteq H^2(\mathbb{R}^n)$ e, em particular, que $(\mathfrak{S}^{-1}M_{|\xi|^2}\mathfrak{S})(f) = -\sum_{1 \leq i \leq n} \tilde{D}_i^2(f) = -\tilde{\Delta}(f)$, qualquer que seja $f \in \text{Dom}(H_0)$.

Para mostrar a inclusão $H^2(\mathbb{R}^n) \subseteq \text{Dom}(H_0)$, faremos (levemente) o uso do conceito de distribuições (poderíamos fazê-lo sem utilizar tal conceito, mas os cálculos se tornam mais “limpos” com esta abordagem).

Representaremos o conjunto das distribuições $u : S(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ por $S'(\mathbb{R}^n)$. Tais objetos são funcionais lineares contínuos sobre $S(\mathbb{R}^n)$, de modo que o conceito de continuidade pode ser traduzido da seguinte forma: u é contínuo se, e somente se, toda sequência $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ em $S(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi_j \rightarrow 0$ em $S(\mathbb{R}^n)$ implica $u(\phi_j) \rightarrow 0$ em $\mathbb{C}$, de modo que $\phi_j \rightarrow 0$ significa $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + \|x\|)^m |D_\beta \phi_j(x)| \rightarrow 0$ em $\mathbb{C}$ para todos $m \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{N}^n$.

O conjunto das distribuições $u : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ será denotado por $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (não utilizaremos estas distribuições neste capítulo, somente as distribuições provenientes de $S'(\mathbb{R}^n)$; as distribuições de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ serão utilizadas fortemente no Capítulo 4). Esta notação vem do fato de que denota-se por $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ o espaço $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, na literatura tradicional.³²

Quando se trata de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, existem certos elementos que são particularmente importantes. Tome $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} : \int_K |f| dx < \infty, \text{ para qualquer } K \subseteq \mathbb{R}^n\}$ e $m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $m \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}^n} m dx = 1$ - por exemplo, tomando m tal que

$$m(x) := \begin{cases} ce^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & \text{se } |x| < 1 \\ 0, & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

e c é uma constante real escolhida de modo que se tenha $\int_{\mathbb{R}^n} m dx = 1$. Para cada $r > 0$, definimos

$$m_r(x) := \frac{1}{r^n} m\left(\frac{x}{r}\right) \text{ e } u^{(r)} := u * m_r,$$

sendo $u * m_r$ o denominado produto de convolução entre u e m_r , definido por

$$(u * m_r)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} u(y) m_r(x - y) dy,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Dois fatos importantes a respeito destas funções são que $u^{(r)} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e que $u^{(r)} \rightarrow u$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$, para todo $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, se

³²Em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, a continuidade pode ser traduzida da seguinte forma: u é contínuo se, e somente se, para toda sequência $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi_j \rightarrow 0$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, tem-se que $u(\phi_j) \rightarrow 0$ em $\mathbb{C}$, sendo que $\phi_j \rightarrow 0$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ significa que existem $n_0 \in \mathbb{N}$ e um compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $\text{supp}(\phi_j) \subseteq K$, para $j \geq n_0$ e $\|D^\alpha \phi_j\|_\infty \rightarrow 0$, para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

$$1 \leq p < +\infty.$$

Um resultado básico e essencial para motivar certas definições na teoria de distribuições é a seguinte:

Proposição: *Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ é tal que $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx = 0$, qualquer que seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $f = 0$ em quase toda parte de $\mathbb{R}^n$ (note que tal proposição continua válida se trocarmos $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ por $S(\mathbb{R}^n)$, uma vez que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq S(\mathbb{R}^n)$).³³*

Demonstração: É um fato bastante conhecido que, dado um compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ existe uma função $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \leq \phi \leq 1$ e $\phi|_K = 1$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos fixar uma $\psi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo $0 \leq \psi_n \leq 1$ e $\psi_n(x) = 1$, para todo $x \in \overline{B(0, n)} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq n\}$.³⁴ Dessa forma, $f\psi_n \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e

$$((f\psi_n) * m_r)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\psi_n(y)m_r(x-y)dy,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Como para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fixado, a aplicação $y \mapsto \psi_n(y)m_r(x-y)$ pertence a $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos por hipótese que $((f\psi_n) * m_r)(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Ainda, como havíamos observado que $((f\psi_n) * m_r)(x) \rightarrow f\psi_n$ quando $r \rightarrow 0$, concluímos que $f\psi_n = 0$ em quase toda parte de $\mathbb{R}^n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Em particular, $f = 0$ em quase toda parte de $\overline{B(0, n)}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Logo, $f = 0$ em quase toda parte de $\mathbb{R}^n$.

Esta Proposição é muito importante, pois se definirmos W como sendo o espaço vetorial das $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tais que existem $C > 0, N \in \mathbb{N}$ satisfazendo $|f(x)| \leq C(1 + |x|^2)^N$ em quase toda parte de $\mathbb{R}^n$ (note que W contém $L^p(\mathbb{R}^n)$, para todo $1 \leq p \leq +\infty$), garantimos a existência de uma aplicação injetora $j_S : W \rightarrow S'(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$j_S(u)(\phi) := \int_{\mathbb{R}^n} u\phi dx,$$

para toda $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$, uma vez que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq S(\mathbb{R}^n)$.³⁵

Vamos ver como isto pode ser usado em nossa demonstração.

³³Retirada de [4], Teorema 1.7

³⁴ $B(0, n) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < n\}$

³⁵Também tem-se a existência de uma aplicação injetora $j_{\mathcal{D}} : L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$j_{\mathcal{D}}(u)(\phi) := \int_{\mathbb{R}^n} u\phi dx,$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ - ao contrário do observado na aplicação $j_{\mathcal{D}}$, não é toda função de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ que define uma distribuição de $S'(\mathbb{R}^n)$

Sejam $A : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n)$ uma aplicação linear contínua e $B : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n)$ uma aplicação linear contínua que satisfazem

$$\int_{\mathbb{R}^n} A\phi\psi dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi B\psi dx,$$

para todos $\phi, \psi \in S(\mathbb{R}^n)$.³⁶ Então, a aplicação

$$\Lambda_A : S'(\mathbb{R}^n) \ni u \longmapsto u \circ B \in S'(\mathbb{R}^n)$$

está bem definida, e ela estende a aplicação A a $S'(\mathbb{R}^n)$, no sentido em que

$$j_S \circ A = \Lambda_A \circ (j_S)|_{S(\mathbb{R}^n)},$$

já que $(j_S)|_{S(\mathbb{R}^n)}$ é uma aplicação injetora (observamos aqui que, se B for um isomorfismo - ou seja, um isomorfismo algébrico que é um homeomorfismo - então Λ_A será um isomorfismo algébrico; usaremos isto mais tarde). Logo, como as operações $M^\alpha : \phi \longmapsto x^\alpha \phi$, $D^\alpha : \phi \longmapsto D^\alpha \phi$ e $\mathfrak{I}$ são operadores lineares contínuos em $S(\mathbb{R}^n)$ e satisfazem

$$\int_{\mathbb{R}^n} (M^\alpha \phi)\psi dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(M^\alpha \psi) dx,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha \phi)\psi dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi[(-1)^{|\alpha|} D^\alpha \psi] dx$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathfrak{I}\phi)\psi dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\mathfrak{I}\psi) dx,$$

para todos $\phi, \psi \in S(\mathbb{R}^n)$, podemos definir as respectivas extensões $\Lambda_{M^\alpha}, \Lambda_{D^\alpha}$ e $\Lambda_{\mathfrak{I}}$ em $S'(\mathbb{R}^n)$ (toda a discussão feita neste parágrafo pode ser repetida substituindo-se $S(\mathbb{R}^n)$ por $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $S'(\mathbb{R}^n)$ por $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e j_S por $j_{\mathcal{D}}$, com exceção da transformada de Fourier).

Observamos para um uso posterior que se $A := \tilde{\Delta}$ e $B := \Delta : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n)$, então $A : H^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ não se encaixa nas hipóteses acima (não é um operador em $S(\mathbb{R}^n)$), mas conseguimos definir apropriadamente a aplicação

$$\Lambda_{\tilde{\Delta}} : S'(\mathbb{R}^n) \ni u \longmapsto u \circ \Delta \in S'(\mathbb{R}^n)$$

de modo que esta estenda a aplicação A para $S'(\mathbb{R}^n)$, ou seja,

$$(*) \quad j_S \circ A = \Lambda_{\tilde{\Delta}} \circ (j_S)|_{H^2(\mathbb{R}^n)},$$

pela definição de derivação fraca e pela observação (presente na definição da página 86) de que podemos trocar $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ por $S(\mathbb{R}^n)$.

³⁶Na verdade, não precisamos exigir nem a linearidade nem a continuidade da aplicação A : a linearidade de B implica a linearidade de A , e uma versão do Teorema do Gráfico Fechado para espaços de Frechét implica a continuidade de A

De maneira similar, se $A := \Im : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ e $B := \tilde{\Im}$, podemos definir também a aplicação

$$\Lambda_{\Im} : S'(\mathbb{R}^n) \ni u \longmapsto u \circ \tilde{\Im} \in S'(\mathbb{R}^n),$$

de modo que temos a igualdade

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Im f) \psi dx = \int_{\mathbb{R}^n} f (\Im \psi) dx,$$

para todos $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$. De fato, como $S(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$ (pois $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$), seja $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em $S(\mathbb{R}^n)$ que converge a $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Então,

$$\begin{aligned} \langle \Im \phi_j, \bar{\psi} \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \Im \phi_j \bar{\bar{\psi}} dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi_j \Im \bar{\psi} dx = \langle \phi_j, \Im \bar{\psi} \rangle = \langle \phi_j, \overline{\Im \psi} \rangle, \end{aligned}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, pelo que já sabemos. Assim, pela continuidade do produto interno e da transformada de Fourier, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Im f \bar{\psi} dx = \langle \Im f, \bar{\psi} \rangle = \langle f, \overline{\Im \psi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f \Im \psi dx,$$

provando a asserção. Portanto,

$$(**) \quad (j_S \circ \Im)(f) = (\Lambda_{\Im} \circ (j_S)|_{L^2(\mathbb{R}^n)})(f),$$

qualquer que seja $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Assim, mostramos que $\Lambda_{\Im}$ estende a aplicação $\Im : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ para $S'(\mathbb{R}^n)$.

Vamos mostrar agora que

$$H^2(\mathbb{R}^n) \subseteq \text{Dom}(H_0):$$

Seja $f \in H^2(\mathbb{R}^n)$.

Como $M_{|\xi|^2}$ é auto-adjunto em $\text{Dom}(|\xi|^2)$ (que contém $S(\mathbb{R}^n)$), temos que $\tilde{\Im}(-\Delta)\tilde{\Im}^{-1} = \tilde{\Im}^{-1}(-\Delta)\tilde{\Im}$, e da definição da aplicação $\Lambda_{\tilde{\Im}}$ vemos que

$$(***) \quad \Lambda_{\tilde{\Im}^{-1}(-\Delta)\tilde{\Im}} = \Lambda_{(M_{|\xi|^2})|_{S(\mathbb{R}^n)}}.$$

Ainda, como por definição

$$\Lambda_{\tilde{\Im}^{-1}(-\Delta)\tilde{\Im}} = \Lambda_{\tilde{\Im}} \circ \Lambda_{-\Delta} \circ \Lambda_{\tilde{\Im}^{-1}},$$

(note que $\Lambda_{\tilde{\mathfrak{S}}^{-1}}$ está bem definida, pois $\tilde{\mathfrak{S}}^{-1}$ é um isomorfismo sobre $S(\mathbb{R}^n)$) compondo os dois membros de $(**)$ com $\Lambda_{\tilde{\mathfrak{S}}}$, obtemos

$$\Lambda_{\tilde{\mathfrak{S}}} \circ \Lambda_{-\Delta} = \Lambda_{(M_{|\xi|^2})|_{S(\mathbb{R}^n)}} \circ \Lambda_{\tilde{\mathfrak{S}}}.$$

Aplicando esta igualdade na distribuição $j_S(f)$ obtemos

$$(\Lambda_{\tilde{\mathfrak{S}}} \circ \Lambda_{-\Delta})(j_S(f)) = (\Lambda_{(M_{|\xi|^2})|_{S(\mathbb{R}^n)}} \circ \Lambda_{\tilde{\mathfrak{S}}})(j_S(f)),$$

que em notação integral significa que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)[- \Delta(\tilde{\mathfrak{S}}\psi)(x)] dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)[(\tilde{\mathfrak{S}}(|\xi|^2\psi))(x)] dx,$$

qualquer que seja $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$. Por $(*)$ e $(**)$, o membro da esquerda torna-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)[- \Delta(\tilde{\mathfrak{S}}\psi)(x)] dx = \int_{\mathbb{R}^n} [\Im(-\Delta f)](x)\psi(x) dx,$$

qualquer que seja $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$. Por outro lado, aplicando $(**)$ no membro da direita obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)[(\tilde{\mathfrak{S}}(|\xi|^2\psi))(x)] dx = \int_{\mathbb{R}^n} [|x|^2(\Im f)(x)]\psi(x) dx,$$

para toda $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$. Combinando as três últimas igualdades, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} [\Im(-\tilde{\Delta} f)](x)\psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} [|x|^2(\Im f)(x)]\psi(x) dx,$$

para toda $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$. Como $\Im(-\tilde{\Delta} f) \in L^2(\mathbb{R}^n) \subseteq L^2_{loc}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $|x|^2(\Im f)(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (pois é o produto de duas funções de $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$), concluímos pela Proposição da página 88 que

$$|x|^2(\Im f)(x) = \Im(-\tilde{\Delta} f) \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Logo, $\Im f \in \text{Dom}(M_{|x|^2})$ e, portanto, $f \in \text{Dom}(-\tilde{\Delta})$, uma vez que $f \in \text{Dom}(-\tilde{\Delta})$ se, e somente se, $\Im f \in \text{Dom}(M_{|x|^2})$. Isso finaliza a demonstração de que

$$\text{Dom}(H_0) = H^2(\mathbb{R}^n).$$

Na literatura tradicional, o operador “menos” Laplaciano (fraco) $-\tilde{\Delta}$, considerado sobre seu domínio de “*self-adjointness*” $H^2(\mathbb{R}^n)$, é denotado por H_0 . Seguiremos tal convenção, a partir de agora. Além disso, vamos começar a denotar o operador $\tilde{\Delta}$ simplesmente por Δ , por uma questão de simplicidade.

Vamos agora demonstrar dois lemas³⁷ que serão necessários para fornecer uma aplicação do Teorema de Kato-Rellich:

³⁷Suas demonstrações foram inspiradas na exposição feita em [20]

Lema 3.1: *Seja n um natural tal que $0 < n \leq 3$. Dado $a > 0$ existe $b > 0$ tal que $\|\psi\|_\infty \leq a\|H_0\psi\|_2 + b\|\psi\|_2$, para toda $\psi \in \text{Dom}(H_0)$.*

Demonstração: Devido às definições da transformada de Fourier e da norma $\|\cdot\|_\infty$, sabemos que $\|\mathfrak{F}^{-1}\psi\|_\infty \leq \|\psi\|_1$, qualquer que seja $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Tome uma $\psi \in \text{Dom}(H_0)$. Devido ao que acabou de ser dito, se mostrarmos que $\mathfrak{F}\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e que para cada $a > 0$ existe $b \in \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\|\mathfrak{F}\psi\|_1 \leq a\|M_{|\lambda|^2}\mathfrak{F}\psi\|_2 + b\|\mathfrak{F}\psi\|_2,$$

obteremos o resultado desejado, uma vez que a transformada de Fourier é uma isometria sobrejetora em $L^2(\mathbb{R}^n)$ (e a sua inversa também). Seja $a > 0$. Como $\psi \in \text{Dom}(H_0)$ se, e somente se, $\mathfrak{F}\psi \in \text{Dom}(M_{|\lambda|^2})$, temos que $|\lambda|^2(\mathfrak{F}\psi)(\lambda) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Assim, como também $\frac{1}{1+|\lambda|^2} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ (foi aqui que usamos $n \leq 3$), pela desigualdade de Hölder garantimos que $[(1+|\lambda|^2)(\mathfrak{F}\psi)] \cdot \frac{1}{(1+|\lambda|^2)} = \mathfrak{F}\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e

$$\begin{aligned} (*) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |(\mathfrak{F}\psi)(\lambda)| d\lambda &\leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\lambda|^2)^2 |\mathfrak{F}\psi|^2(\lambda) d\lambda} \cdot \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|\lambda|^2)^2} d\lambda} \\ &\leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|\lambda|^2)^2} d\lambda} (\| |\lambda|^2(\mathfrak{F}\psi)(\lambda) \|_2 + \|(\mathfrak{F}\psi)\|_2). \end{aligned}$$

Defina, para cada $r > 0$ a função $(\mathfrak{F}\psi)_r$ por $(\mathfrak{F}\psi)_r(\lambda) := r^n(\mathfrak{F}\psi)(r\lambda)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Então valem as relações $\|(\mathfrak{F}\psi)_r\|_1 = \|(\mathfrak{F}\psi)\|_1$, $\|(\mathfrak{F}\psi)_r\|_2 = r^{n/2}\|(\mathfrak{F}\psi)\|_2$ e $\| |\lambda|^2(\mathfrak{F}\psi)_r(\lambda) \|_2 = r^{\frac{n-4}{2}}\| |\lambda|^2(\mathfrak{F}\psi)(\lambda) \|_2$ pois

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |r^n(\mathfrak{F}\psi)(r\lambda)| d\lambda &= r^n \int_{\mathbb{R}^n} |(\mathfrak{F}\psi)(y)| \frac{1}{r^n} dy = \int_{\mathbb{R}^n} |(\mathfrak{F}\psi)(y)| dy, \\ \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |r^n(\mathfrak{F}\psi)(r\lambda)|^2 d\lambda} &= r^n \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |(\mathfrak{F}\psi)(y)|^2 \frac{1}{r^n} dy} = r^{n/2} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |(\mathfrak{F}\psi)(y)|^2 dy} \\ \text{e} \quad \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |r^n |\lambda|^2(\mathfrak{F}\psi)(r\lambda)|^2 d\lambda} &= r^n \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{y}{r} \right|^2 |(\mathfrak{F}\psi)(y)|^2 \frac{1}{r^n} dy} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &r^{(n-\frac{n-4}{2})} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |y|^2 |(\mathfrak{F}\psi)(y)|^2 dy} = \\ &r^{\frac{n-4}{2}} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |y|^2 |(\mathfrak{F}\psi)(y)|^2 dy}. \end{aligned}$$

Assim, $(\mathfrak{F}\psi)_r \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e podemos substituir $(\mathfrak{F}\psi)$ por $(\mathfrak{F}\psi)_r$ em (*), de onde obtemos

$$\|(\mathfrak{F}\psi)\|_1 = \|(\mathfrak{F}\psi)_r\|_1 \leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|\lambda|^2)^2} d\lambda} (r^{\frac{n-4}{2}} \| |\lambda|^2(\mathfrak{F}\psi)(\lambda) \|_2 + r^{n/2} \|(\mathfrak{F}\psi)\|_2).$$

Como $n \leq 3$, e a última desigualdade obtida é válida para todo $r > 0$, podemos escolher um $r > 0$ grande o suficiente para que tenhamos $\sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|\lambda|^2)} d\lambda} r^{\frac{n-4}{2}} < a$. Assim, concluímos a validade da desigualdade

$$\|\Im\psi\|_1 \leq a\|M_{|\lambda|^2}\Im\psi\|_2 + b\|\Im\psi\|_2$$

para algum $b > 0$ e, conseqüentemente, o resultado que queríamos provar.

Teorema 3.2 (Kato): *Seja V uma função Lebesgue-mensurável definida em $\mathbb{R}^n$, $0 < n \leq 3$, que assume somente valores reais. Assuma que $V \in L^2(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n)$, isto é, que existem $V_1 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $V_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que $V = V_1 + V_2$. Então, o operador $H_0 + M_V$ é essencialmente auto-adjunto em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e auto-adjunto em $\text{Dom}(H_0) := H^2(\mathbb{R}^n)$ (seguindo a literatura usual, representaremos o operador M_V simplesmente por V).*

Demonstração: Pelo resultado mostrado no item 2 da Observação XIII das Considerações Iniciais, sabemos que o operador de multiplicação V é auto-adjunto (e, portanto, em particular, é fechado e simétrico). Para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos a desigualdade

$$\begin{aligned} \|V\phi\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |V_1\phi + V_2\phi|^2 dx \leq \\ &\int_{\mathbb{R}^n} |V_1\phi|^2 dx + 2 \int_{\mathbb{R}^n} |V_1\phi||V_2\phi| dx + \int_{\mathbb{R}^n} |V_2\phi|^2 dx \\ &\leq \|V_1\|_2^2 \|\phi\|_\infty^2 + 2\|V_1\phi\|_1 \|V_2\|_\infty \|\phi\|_\infty + \|V_2\|_2^2 \|\phi\|_\infty^2 \leq^{(*)} \\ &\|V_1\|_2^2 \|\phi\|_\infty^2 + 2\|V_1\|_2 \|\phi\|_2 \|V_2\|_\infty \|\phi\|_\infty + \|V_2\|_2^2 \|\phi\|_\infty^2 = \\ &(\|V_1\|_2 \|\phi\|_\infty + \|\phi\|_2 \|V_2\|_\infty)^2, \end{aligned}$$

o que mostra $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \text{Dom}(V)$ (em $(*)$ usamos a desigualdade de Hölder). Aplicando o resultado do Lema 3.1 na desigualdade acima obtida, concluímos que, tomando $a := \frac{1}{1+\|V_1\|_2} > 0$, existe $b > 0$ tal que

$$\|V\phi\|_2 \leq a\|V_1\|_2 \|H_0\phi\|_2 + (b\|V_1\|_2 + \|V_2\|_\infty) \|\phi\|_2,$$

qualquer que seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Para podermos aplicar o Teorema de Kato-Rellich à última desigualdade, precisamos, antes de mais nada, garantir que $\text{Dom}(V) \supseteq H^2(\mathbb{R}^n)$. Tome, então, $\psi \in \text{Dom}(H_0)$. Como $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^2(\mathbb{R}^n)$ (este é um fato não-trivial que vamos usar, e que cuja demonstração pode ser encontrada extraindo-se informações de [15] e [23]), garantimos a existência de uma seqüência $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi_n \rightarrow \psi$ em $H^2(\mathbb{R}^n)$. Assim, ela é também uma seqüência de Cauchy em $H^2(\mathbb{R}^n)$. Mas, então, $\{V\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^n)$, pois

$$\|V\phi_n - V\phi_m\|_2 \leq (\max\{a\|V_1\|_2, (b\|V_1\|_2 + \|V_2\|_\infty)\}) \|\phi_n - \phi_m\|_{H^2(\mathbb{R}^n)},$$

para todos $m, n \in \mathbb{N}$. Da completude de $L^2(\mathbb{R}^n)$, segue a existência de $\lim_n V\phi_n$. Como V é um operador fechado, concluímos que $\psi \in \text{Dom}(V)$ e $\lim_n V\phi_n = V\psi$. Isto mostra que $\text{Dom}(V) \supseteq H^2(\mathbb{R}^n)$. Além disso, o argumento acima nos mostra que

$$\|V\psi\|_2 \leq v\|H_0\psi\|_2 + (b\|V_1\|_2 + \|V_2\|_\infty)\|\psi\|_2,$$

para um certo $0 \leq v < 1$ e um certo $b > 0$, qualquer que seja $\psi \in H^2(\mathbb{R}^n)$, de modo que, pelo Teorema de Kato-Rellich, temos que $H_0 + V$ é auto-adjunto em $\text{Dom}(H_0) = H^2(\mathbb{R}^n)$ e essencialmente auto-adjunto em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, uma vez que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é um *core* de H_0 .

Finalmente, vamos dar as aplicações prometidas.³⁸

“O átomo de hidrogênio e um átomo qualquer”

O Hamiltoniano quântico não-relativístico correspondente ao sistema composto por uma partícula de massa m sujeita a ação do potencial V é dado pelo operador de Schrödinger

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x)$$

agindo em $L^2(\mathbb{R}^3)$.

A função $V : \mathbb{R}^n \ni x \mapsto V(x) := -\frac{\kappa}{\|x\|}$, onde $\kappa \in \mathbb{R}$, é denominada potencial de Coulomb, e representa a interação eletrostática entre duas partículas carregadas, em que é feita a aproximação de que uma das partículas possui uma massa muito grande em relação à da outra, de modo que a partícula com “massa grande” permanece em repouso na origem. Se $\kappa = -e^2$, onde $-e$ é a carga de um elétron ($e > 0$), então V representa o potencial Coulombiano correspondente ao átomo de hidrogênio.

Como para um $r > 0$ fixado,

$$V = V\chi_{B(0,r)} + V\chi_{\mathbb{R}^3 \setminus B(0,r)},$$

$V\chi_{B(0,r)} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ e $V\chi_{\mathbb{R}^3 \setminus B(0,r)} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, vemos pelo Teorema 3.2 que $H = H_0 + V(x)$ é auto-adjunto em $H^2(\mathbb{R}^3)$, e representa o observável de energia total do sistema em questão. Além disso, de acordo com a Mecânica Clássica, o átomo de hidrogênio é instável: conforme o elétron orbita o núcleo ele irradia energia e colapsa no núcleo. Em Mecânica Quântica, a propriedade de estabilidade do átomo de hidrogênio é expressa matematicamente pelo fato de o Hamiltoniano ser um operador auto-adjunto limitado inferiormente. Como $\sigma(H_0) = [0, +\infty)$ ³⁹(e, portanto, H_0 é limitado inferiormente por 0, pelo Lema 2.2), vemos pelas estimativas obtidas no Teorema de Kato-Rellich que

$$\sigma(H) \subseteq [-\max\{b/(1-a), b\}, +\infty)$$

³⁸Tais aplicações foram retiradas de [20], [6], [8] e [12]

³⁹Pelo que provamos neste capítulo e pelo item 4 da Observação XIII

e, portanto, H é limitado inferiormente, pelo Lema 2.2. Assim, a Mecânica Quântica dá a predição (correta) de que o átomo de hidrogênio é estável, que foi um dos primeiros grandes triunfos desta teoria.

Podemos estender este resultado para um Hamiltoniano (aproximado) de um átomo qualquer, dado por

$$-\sum_{1 \leq i \leq n} \Delta_i - \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{ne^2}{\|x_i\|} + \sum_{1 \leq i, j \leq n, i < j} \frac{e^2}{\|x_i - x_j\|},$$

(note que $\sum_{1 \leq i \leq n} \Delta_i = \Delta$, onde Δ é o Laplaciano em $3n$ dimensões) agindo em $L^2(\mathbb{R}^{3n})$, e mostrar que ele é auto-adjunto em $\text{Dom}(H_0) = H^2(\mathbb{R}^{3n})$, e essencialmente auto-adjunto em $C_c^\infty(\mathbb{R}^{3n})$. Seja V uma função real e mensurável definida em $\mathbb{R}^3$, e que pertence a $L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$ (na verdade, V é uma função real e mensurável definida em $\mathbb{R}^{3n}$, mas que possui dependência efetiva de somente três dessas variáveis; em relação a estas três variáveis, pedimos que as funções pertençam a $L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$). Suponha que $y = (\vec{y}_j)_{1 \leq j \leq n}$ e $V(\vec{y}_k)$ é um operador de multiplicação em $L^2(\mathbb{R}^{3n})$, onde $\vec{y}_k$ é um vetor que possui três das coordenadas de $\mathbb{R}^{3n}$, relativamente às quais V possui dependência. Usando o fato de o operador $-\Delta$ ser invariante por rotações de coordenadas, podemos assumir sem perda de generalidade que as variáveis das quais V depende são y_1, y_2 e y_3 . Denotemos por Δ_1 o Laplaciano correspondente a estas três variáveis. Como as normas $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ são invariantes por rotações de coordenadas e por um passo intermediário presente na demonstração do Teorema 3.2 concluímos que, para toda $\phi \in \mathbb{R}^{3n}$ temos, fixando todas as variáveis $\vec{y}_j, 2 \leq j \leq n$ que, dado $a > 0$, existe $b > 0$ satisfazendo

$$\begin{aligned} \|V\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &\leq (a\|V_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\| - \Delta_1\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + (b\|V_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|V_2\|_\infty)\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)})^2 = \\ &a^2\|V_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2\| - \Delta_1\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + (b\|V_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|V_2\|_\infty)^2\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \\ &2a\|V_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\| - \Delta_1\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}(b\|V_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|V_2\|_\infty)\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

Mas, desenvolvendo a identidade

$$\left(rs - \frac{1}{r}t\right)^2 \geq 0,$$

onde $r, s, t \in \mathbb{R}$, obtemos a desigualdade

$$2st \leq r^2s^2 + \frac{1}{r^2}t^2.$$

Fazendo $s := a\|V_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\| - \Delta_1\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ e $t := (b\|V_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|V_2\|_\infty)\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$, podemos utilizar esta última desigualdade para obtermos

$$\begin{aligned} \text{(D)} \quad \|V\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &\leq (1 + r^2) a^2\|V_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2\| - \Delta_1\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \\ &\left(1 + \frac{1}{r^2}\right) (b\|V_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|V_2\|_\infty)^2\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2. \end{aligned}$$

Agora, como

$$-\Delta_1 = \tilde{\mathfrak{S}}^{-1} M_{\sum_{i=1}^3 |y_i|^2} \tilde{\mathfrak{S}}$$

e $\tilde{\mathfrak{S}}$ é uma aplicação unitária em $S(\mathbb{R}^3)$ (considerando-se $S(\mathbb{R}^3)$ como um subespaço normado de $L^2(\mathbb{R}^3)$), temos que

$$\begin{aligned} \|-\Delta_1 \phi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &= \left\| \left(\tilde{\mathfrak{S}}^{-1} M_{\sum_{i=1}^3 |y_i|^2} \tilde{\mathfrak{S}} \right) \phi(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = \\ &= \left\| \left(M_{\sum_{i=1}^3 |y_i|^2} \right) (\tilde{\mathfrak{S}} \phi)(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\sum_{i=1}^3 |y_i|^2 \right)^2 |(\tilde{\mathfrak{S}} \phi)(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)|^2 dy_1 dy_2 dy_3 \leq^{(*)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\sum_{i=1}^{3n} |y_i|^2 \right)^2 |(\tilde{\mathfrak{S}} \phi)(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)|^2 dy_1 dy_2 dy_3 \end{aligned}$$

(*) lembre-se de que as variáveis $\vec{y}_j$, $2 \leq j \leq n$ estão fixas). Assim, da desigualdade (D) vem que

$$\begin{aligned} \|V \phi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} |V(\vec{y}_1) \phi(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)|^2 dy_1 dy_2 dy_3 \leq \\ &= (1 + r^2) a^2 \|V_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \int_{\mathbb{R}^3} \left(\sum_{i=1}^{3n} |y_i|^2 \right)^2 |(\tilde{\mathfrak{S}} \phi)(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)|^2 dy_1 dy_2 dy_3 + \\ &+ \left(1 + \frac{1}{r^2} \right) (b \|V_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|V_2\|_{\infty})^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\phi(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)|^2 dy_1 dy_2 dy_3. \end{aligned}$$

Finalmente, integrando-se as outras dimensões, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^{3n-3}} \left[\int_{\mathbb{R}^3} |V(\vec{y}_1) \phi(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)|^2 dy_1 dy_2 dy_3 \right] \dots dy_{3n} \leq \\ &(1 + r^2) a^2 \|V_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \int_{\mathbb{R}^{3n-3}} \left[\int_{\mathbb{R}^3} \left(\sum_{i=1}^{3n} |y_i|^2 \right)^2 |(\tilde{\mathfrak{S}} \phi)(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)|^2 dy_1 dy_2 dy_3 \right] \dots dy_{3n} \\ &+ \\ &\left(1 + \frac{1}{r^2} \right) (b \|V_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|V_2\|_{\infty})^2 \int_{\mathbb{R}^{3n-3}} \left[\int_{\mathbb{R}^3} |\phi(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)|^2 dy_1 dy_2 dy_3 \right] \dots dy_{3n} \end{aligned}$$

e, pelo Teorema de Fubini, vemos que

$$\begin{aligned} \|V \phi\|_{L^2(\mathbb{R}^{3n})}^2 &= \int_{\mathbb{R}^{3n}} |V(\vec{y}_1) \phi(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)|^2 dy_1 dy_2 dy_3 \dots dy_{3n} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{3n-3}} \left[\int_{\mathbb{R}^3} |V(\vec{y}_1) \phi(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)|^2 dy_1 dy_2 dy_3 \right] \dots dy_{3n} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1+r^2) a^2 \|V_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \int_{\mathbb{R}^{3n}} \left(\sum_{i=1}^{3n} |y_i|^2 \right)^2 |(\tilde{\mathfrak{S}}\phi)(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)|^2 dy_1 \dots dy_{3n} + \\
& \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) (b\|V_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|V_2\|_\infty)^2 \int_{\mathbb{R}^{3n}} |\phi(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)|^2 dy_1 \dots dy_{3n} = \\
& (1+r^2) a^2 \|V_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \left\| \left(\sum_{i=1}^{3n} |y_i|^2 \right) (\tilde{\mathfrak{S}}\phi)(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{3n})}^2 + \\
& \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) (b\|V_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|V_2\|_\infty)^2 \|\phi(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^{3n})}^2 = \\
& (1+r^2) a^2 \|V_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|H_0\phi(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^{3n})}^2 + \\
& \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) (b\|V_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|V_2\|_\infty)^2 \|\phi(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^{3n})}^2.
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que, para todo $a > 0$ existe $b > 0$ satisfazendo a desigualdade

$$\begin{aligned}
\text{(E)} \quad & \|V\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^{3n})}^2 \leq \\
& (1+r^2) a^2 \|V_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|H_0\phi(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^{3n})}^2 + \\
& \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) (b\|V_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|V_2\|_\infty)^2 \|\phi(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^{3n})}^2,
\end{aligned}$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{3n})$ e todo $0 \neq r \in \mathbb{R}$. Na realidade, argumentando como na demonstração do Teorema 3.2, garantimos a validade da desigualdade (E) para toda $\phi \in H^2(\mathbb{R}^{3n})$.

Veja que tal argumento continuaria válido se V , ao invés de pertencer a $L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$ (no sentido explicitado acima), fosse uma função que dependesse efetivamente de algumas (ou todas) as coordenadas $\vec{y}_j, 1 \leq j \leq n$ e tal que exista uma coordenada $\vec{y}_{j_0}$ com a propriedade de que, fixadas todas as outras coordenadas, a função $\vec{y}_{j_0} \mapsto V(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{j_0}, \dots, \vec{y}_n)$ pertença a $L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Em particular, se $j \neq k$, então fixando $\vec{y}_j$, a função $\vec{y}_k \mapsto V(\vec{y}_k - \vec{y}_j)$ (que será de nosso interesse, em breve) satisfaz essa propriedade: de maneira análoga, podemos assumir sem perda de generalidade que V depende de $\vec{y}_1$ (isto é, $\vec{y}_1 \mapsto V(\vec{y}_1 - \vec{y}_j)$) com $j \neq 1$ e, fixando todas as outras coordenadas $\vec{y}_i, 2 \leq i \leq n$, obter uma desigualdade

$$\begin{aligned}
& \|V(\vec{y}_1 - \vec{y}_j)\phi(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \\
& (1+r^2) a^2 \|V_1(\vec{y}_1 - \vec{y}_j)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|\Delta_1\phi(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \\
& \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) (b\|V_1(\vec{y}_1 - \vec{y}_j)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|V_2(\vec{y}_1 - \vec{y}_j)\|_\infty)^2 \|\phi(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2;
\end{aligned}$$

procedendo de maneira análoga, também concluímos que, para todo $a > 0$ existe $b > 0$ satisfazendo a desigualdade

$$(E') \quad \|V(\vec{y}_1 - \vec{y}_j)\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^{3n})}^2 \leq \\ (1 + r^2) a^2 \|V_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|H_0\phi(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^{3n})}^2 + \\ \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) (b\|V_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|V_2\|_\infty)^2 \|\phi(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^{3n})}^2,$$

para toda $\phi \in H^2(\mathbb{R}^{3n})$ e todo $0 \neq r \in \mathbb{R}$.

Vamos agora utilizar estes resultados para mostrar o resultado que prometemos.

Sejam $n, m \in \mathbb{N}$ maiores do que 0 e V uma função real e mensurável definida em $\mathbb{R}^3$, e que pertence a $L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$ (novamente, cada V_k é uma função real e mensurável definida em $\mathbb{R}^{3n}$, mas que possui dependência efetiva de somente três dessas variáveis). Então, o operador

$$H = H_0 + \tilde{V}(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n),$$

agindo em $L^2(\mathbb{R}^{3n})$, onde

$$\tilde{V}(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n) := -\kappa_1 \sum_{1 \leq k \leq n} V(y_k) + \kappa_2 \sum_{1 \leq i, j \leq n, i < j} V(\vec{y}_i - \vec{y}_j),$$

$\kappa_1, \kappa_2 > 0$, é auto-adjunto em $\text{Dom}(H_0) = H^2(\mathbb{R}^{3n})$, e essencialmente auto-adjunto em $C_c^\infty(\mathbb{R}^{3n})$: tomando $r = 1$ em (E) e (E') ,

$$\delta := \max\{\kappa_1, \kappa_2\} \left(n + \frac{n(n-1)}{2}\right),$$

usando que

$$\left\| \left(-\kappa_1 \sum_{1 \leq k \leq n} V(y_k) + \kappa_2 \sum_{1 \leq i, j \leq n, i < j} V(\vec{y}_i - \vec{y}_j) \right) \phi \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{3n})}^2 \leq^{(**)} \\ \delta \left(\sum_{1 \leq k \leq n} \|V(y_k)\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^{3n})}^2 + \sum_{1 \leq i, j \leq n, i < j} \|V(\vec{y}_i - \vec{y}_j)\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^{3n})}^2 \right)$$

(**) basta usar a desigualdade triangular e a desigualdade

$$\left(\sum_{1 \leq k \leq m} r_k \right)^2 = \sum_{1 \leq k, l \leq m} r_k r_l \leq \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k, l \leq m} (r_k^2 + r_l^2) =$$

$$\left(\frac{1}{2} \sum_{1 \leq k \leq m} \sum_{1 \leq l \leq m} r_k^2\right) + \left(\frac{1}{2} \sum_{1 \leq k \leq m} \sum_{1 \leq l \leq m} r_l^2\right) = m \sum_{1 \leq i \leq m} r_i^2,$$

com $r_k \geq 0$, para todo $1 \leq k \leq m$), para toda $\phi \in H^2(\mathbb{R}^{3n})$, e escolhendo-se a suficientemente pequeno, mostra-se que existem $0 \leq a' < 1$ e $b' > 0$ satisfazendo

$$\left\| \tilde{V}(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n) \phi \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{3n})}^2 \leq (a')^2 \|H_0 \phi\|_{L^2(\mathbb{R}^{3n})}^2 + (b')^2 \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^{3n})}^2,$$

para toda $\phi \in H^2(\mathbb{R}^{3n})$. Para podermos aplicar o Teorema de Kato-Rellich, precisamos verificar que a Definição 2.2 é equivalente à seguinte definição: *se A e B são operadores densamente definidos simétricos num espaço de Hilbert H , dizemos que B é A -limitado se $\text{Dom}(B) \supseteq \text{Dom}(A)$ e existem $a, b \geq 0$ tais que*

$$\|Bv\|^2 \leq a^2 \|Av\|^2 + b^2 \|v\|^2,$$

para todo $v \in \text{Dom}(A)$. O ínfimo de tais $a \geq 0$ é denominada a cota de B relativa a A , e será denotado por $N'_A(B)$. Sejam $a, b \geq 0$ satisfazendo a desigualdade presente na Definição 2.2. Elevando os dois membros da desigualdade ao quadrado obtemos

$$\|Bv\|^2 \leq a^2 \|Av\|^2 + b^2 \|v\|^2 + 2ab \|Av\| \|v\|,$$

para todo $v \in \text{Dom}(A)$. Utilizando a desigualdade

$$2st \leq r^2 s^2 + \frac{1}{r^2} t^2$$

da página 95, temos que para qualquer $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\|Bv\|^2 \leq (1 + r^2) a^2 \|Av\|^2 + \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) b^2 \|v\|^2,$$

para todo $v \in \text{Dom}(A)$. Assim, como tal desigualdade é válida para r 's arbitrariamente pequenos, vemos que a Definição 2.2 implica a outra, mencionada logo acima, e que $N'_A(B) \leq N_A(B)$. Para ver a outra implicação basta ver que, se

$$\|Bv\|^2 \leq a^2 \|Av\|^2 + b^2 \|v\|^2,$$

para todo $v \in \text{Dom}(A)$, então

$$\|Bv\|^2 \leq a^2 \|Av\|^2 + b^2 \|v\|^2 + 2ab \|Av\| \|v\| = (a \|Av\| + b \|v\|)^2,$$

para todo $v \in \text{Dom}(A)$, mostrando que

$$\|Bv\| \leq a \|Av\| + b \|v\|,$$

para todo $v \in \text{Dom}(A)$. Isto estabelece $N_A(B) \leq N'_A(B)$, e mostra a equivalência das duas definições.

Assim, podemos aplicar o Teorema de Kato-Rellich e concluir, finalmente, que o operador

$$H = H_0 + \tilde{V}(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)$$

acima é auto-adjunto em $\text{Dom}(H_0) = H^2(\mathbb{R}^{3n})$, e essencialmente auto-adjunto em $C_c^\infty(\mathbb{R}^{3n})$. Concluimos, em particular, que o operador de Schrödinger

$$- \sum_{1 \leq i \leq n} \Delta_i - \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{ne^2}{\|x_i\|} + \sum_{1 \leq i, j \leq n, i < j} \frac{e^2}{\|x_i - x_j\|},$$

(note que $\sum_{1 \leq i \leq n} \Delta_i = \Delta$, onde Δ é o Laplaciano em $3n$ dimensões) agindo em $L^2(\mathbb{R}^{3n})$ é auto-adjunto em $\text{Dom}(H_0) = H^2(\mathbb{R}^{3n})$, e essencialmente auto-adjunto em $C_c^\infty(\mathbb{R}^{3n})$, uma vez que $C_c^\infty(\mathbb{R}^{3n})$ é um *core* de H_0 .

Terminamos este capítulo observando que, na verdade, o Teorema 3.2 nos permite concluir que o Hamiltoniano dado por $H = H_0 - \frac{\kappa}{\|x\|^\alpha}$, com $0 < \alpha < 3/2$ e $\kappa \in \mathbb{R}$, é auto-adjunto em $\text{Dom}(H_0) = H^2(\mathbb{R}^3)$, e essencialmente auto-adjunto em $C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$.

O Hamiltoniano com o potencial de Yukawa dado por

$$H = H_0 - \frac{\kappa}{\|x\|} e^{-\mu\|x\|},$$

$\kappa, \mu > 0$, também é auto-adjunto em $\text{Dom}(H_0)$ e essencialmente auto-adjunto em $C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$, pelo Teorema 3.2, pois $V(x) = -\frac{\kappa}{\|x\|} e^{-\mu\|x\|} \in L^2(\mathbb{R}^3)$. O potencial de Yukawa representa um modelo aproximado de forças nucleares transmitidas por uma partícula de massa $\mu > 0$.

4 A desigualdade de Kato⁴⁰

Neste capítulo, introduzimos o conceito de positividade para distribuições. Dizemos que $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é positiva (e denotamos por $u \geq^d 0$) se $u(\phi) \geq 0$, para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi \geq 0$. Isto induz uma ordem parcial em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$: dadas duas distribuições $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, diremos que $u \geq^d v$ se $u - v \geq^d 0$.

Para todo $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ e $\epsilon > 0$, defina $u_\epsilon := \sqrt{|u|^2 + \epsilon^2}$,

$$\operatorname{sgn} u(x) := \begin{cases} 0, & \text{se } u(x) = 0 \\ \bar{u}/|u|, & \text{se } u(x) \neq 0 \end{cases}$$

e

$$\operatorname{sgn}_\epsilon u := \bar{u}/u_\epsilon.$$

Estas notações serão utilizadas ao longo do capítulo e, como nos dois capítulos anteriores, a medida em questão neste capítulo será sempre a medida de Lebesgue:

Lema 4.1: *Se $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, então vale a desigualdade*

$$\Delta(\rho_\epsilon)(x) \geq \operatorname{Re} ((\operatorname{sgn}_\epsilon \rho) \Delta \rho)(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração: Por definição,

$$\rho_\epsilon^2 = |\rho|^2 + \epsilon^2$$

e, tomando a diferencial nos dois membros da equação - ou melhor, o gradiente nos dois membros da equação -, obtemos no membro da direita

$$((\partial_i \rho) \bar{\rho} + \rho \overline{(\partial_i \rho)})_{1 \leq i \leq n} = (\bar{\rho}(\partial_i \rho) + \overline{\rho(\partial_i \rho)})_{1 \leq i \leq n} =$$

$$(2 \operatorname{Re} \bar{\rho}(\partial_i \rho))_{1 \leq i \leq n}$$

e (lembre-se que ρ_ϵ é uma função a valores reais)

$$(2\rho_\epsilon(\partial_i \rho_\epsilon))_{1 \leq i \leq n} = 2\rho_\epsilon \nabla \rho_\epsilon$$

na esquerda, isto é,

$$\operatorname{Re} (\bar{\rho}(\nabla \rho)) := (\operatorname{Re} (\bar{\rho}(\partial_i \rho)))_{1 \leq i \leq n} = \rho_\epsilon \nabla \rho_\epsilon.$$

⁴⁰A demonstração da desigualdade de Kato e de seu corolário foram inspiradas na exposição feita em [6]

Desta última equação derivam duas outras: a primeira é obtida tomando o divergente desta:

$$\begin{aligned} \|\nabla \rho\|^2 + \operatorname{Re} (\bar{\rho} \Delta \rho) &= \\ \nabla \cdot (\operatorname{Re} (\bar{\rho} (\partial_i \rho)))_{1 \leq i \leq n} &= \nabla \cdot (\rho_\epsilon \nabla \rho_\epsilon) = \\ \|\nabla \rho_\epsilon\|^2 + \rho_\epsilon \Delta \rho_\epsilon. \end{aligned}$$

A segunda é (lembre-se que ρ_ϵ não se anula em $\mathbb{R}^n$, e que $\rho_\epsilon \geq |\rho|$)

$$\|\nabla \rho_\epsilon\| = \frac{\|\operatorname{Re} (\bar{\rho} (\nabla \rho))\|}{\rho_\epsilon} \leq \frac{\|\bar{\rho} (\nabla \rho)\|}{|\rho|} \leq \|\nabla \rho\|.$$

Combinando estas duas relações, obtemos a relação

$$\rho_\epsilon \Delta \rho_\epsilon - \operatorname{Re} (\bar{\rho} \Delta \rho) \geq 0$$

e, dividindo os dois membros por ρ_ϵ , concluimos que

$$\Delta \rho_\epsilon \geq \frac{\operatorname{Re} (\bar{\rho} \Delta \rho)}{\rho_\epsilon} = \operatorname{Re} ((\operatorname{sgn}_\epsilon \rho) \Delta \rho).$$

Isto mostra o que desejamos. Note que, em particular, também vale a desigualdade distribucional

$$\Delta \rho_\epsilon \geq^d \operatorname{Re} ((\operatorname{sgn}_\epsilon \rho) \Delta \rho),$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\epsilon \Delta \phi \, dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Re} ((\operatorname{sgn}_\epsilon \rho) \Delta \rho) \phi \, dx = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^n} (\operatorname{sgn}_\epsilon \rho) \Delta \rho \phi \, dx,$$

qualquer que seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $\phi \geq 0$.

Definição: Seja $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$. Dizemos que uma sequência de funções $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ converge a u em $L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ se para todo compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ tem-se que

$$\int_K |u_n - u| \, dx \longrightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow +\infty$.

Lema 4.2: (Muitas notações utilizadas aqui foram definidas no capítulo anterior) Se $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int_K |u^{(r)} - u| \, dx \longrightarrow 0,$$

para todo $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto, quando $r \rightarrow 0$. Além disso, se $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ é uma sequência real de elementos não-nulos tal que $x_m \longrightarrow 0$, então podemos extrair uma subsequência $\{y_{m_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ de $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ tal que $u^{(y_{m_j})} \longrightarrow u$ pontualmente em

quase toda parte de $\mathbb{R}^n$ e tal que $u^{(y_{m_j})}$ converge a u em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Seja $K \subseteq \mathbb{R}^n$ um compacto. Vamos mostrar que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_K |u^{(r)} - u| dx = 0.$$

Tome $\epsilon > 0$. Para cada real $r > 0$ fixado, temos que

$$\begin{aligned} \int_K |u^{(r)} - u| dx &= \int_K \left| \left(\int_{\mathbb{R}^n} u(x-y) \frac{1}{r^n} m\left(\frac{y}{r}\right) dy \right) - \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \frac{1}{r^n} m\left(\frac{y}{r}\right) dy \right| dx \leq \\ &= \int_K \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x-y) - u(x)| \frac{1}{r^n} m\left(\frac{y}{r}\right) dy \right) dx = \\ &= \int_K \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x-ry) - u(x)| m(y) dy \right) dx = \\ &= \int_{\text{supp}(m)} \left(\int_K |u(x-ry) - u(x)| dx \right) m(y) dy. \end{aligned}$$

Vamos analisar a integral

$$\int_K |u(x-ry) - u(x)| dx,$$

segundo os parâmetros r e y . Tome uma bola aberta $B(0, a)$, $a > 0$ tal que $\text{supp}(m) \subseteq B(0, a)$ e Ω uma bola aberta com raio suficientemente grande para que se tenha

$$r_1 K + r_2 B(0, a) \subseteq \Omega,$$

para todos $r_1, r_2 \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ (note que, em particular, $K \subset \Omega$) e $\text{dist}(K, \partial\Omega) := \inf\{|k - x| : x \in \partial\Omega, k \in K\} > 0$. Fixe $y \in \text{supp}(m)$. A função $u\chi_\Omega$ pertence a $L^1(\Omega)$, de modo que existe $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que

$$\int_K |u(x) - \phi(x)| dx \leq \int_\Omega |u(x) - \phi(x)| dx < \frac{\epsilon}{3}.$$

Fixe, agora, $r \in [-1, 1] \setminus \{0\}$. É também verdade que (agora vamos usar a exigência de que $r_1 K + r_2 B(0, a) \subseteq \Omega$, para todos $r_1, r_2 \in [-1, 1] \setminus \{0\}$)

$$\begin{aligned} \int_K |u(x-ry) - \phi(x-ry)| dx &= \int_{rK} \frac{1}{r^n} \left| u\left(\frac{x}{r} - ry\right) - \phi\left(\frac{x}{r} - ry\right) \right| dx = \\ &= \int_{r^2 y + rK} \frac{1}{r^n} \left| u\left(\frac{x}{r}\right) - \phi\left(\frac{x}{r}\right) \right| dx = \int_{ry+K} |u(x) - \phi(x)| dx \leq \\ &= \int_\Omega |u(x) - \phi(x)| dx < \frac{\epsilon}{3}. \end{aligned}$$

Temos então que, para cada $y \in \text{supp}(m)$ e todo $r \in [-1, 1] \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} & \int_K |u(x - ry) - u(x)| dx \leq \\ & \int_K |u(x - ry) - \phi(x - ry)| dx + \int_K |\phi(x - ry) - \phi(x)| dx + \int_K |\phi(x) - u(x)| dx < \\ & \frac{\epsilon}{3} + \int_K |\phi(x - ry) - \phi(x)| dx + \frac{\epsilon}{3}. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que existe $r_0 > 0$ possuindo a propriedade de que, para todo $r \in (-r_0, r_0) \setminus \{0\}$,

$$\int_K |\phi(x - ry) - \phi(x)| dx < \frac{\epsilon}{3},$$

qualquer que seja $y \in \text{supp}(m)$. Fixe $y \in \text{supp}(m)$. Estendendo ϕ continuamente ao bordo $\partial\Omega$ (fazendo $\phi = 0$ em $\partial\Omega$), temos que ϕ é uniformemente contínua em $\overline{\Omega}$ (uma vez que este conjunto é compacto), e garantimos a existência de $\text{dist}(K, \partial\Omega) > \delta > 0$ de modo que, se $x_1, x_2 \in \overline{\Omega}$ e $|x_1 - x_2| < \delta$, então

$$|\phi(x_1) - \phi(x_2)| < \frac{\epsilon}{3(\mu_L(K) + 1)},$$

$\mu_L(K)$ sendo a medida de Lebesgue de K , que é finita. Da compacidade de K , sabemos que existe um conjunto finito de pontos $\{k_i\}_{1 \leq i \leq p}$ de K satisfazendo $K \subseteq \cup_{1 \leq i \leq p} B(k_i, \delta/2)$ (note que $\cup_{1 \leq i \leq p} B(k_i, \delta/2) \subseteq \Omega$, pois $0 < \text{dist}(K, \partial\Omega) < \delta$). Faça $r_0 := \frac{\delta}{2a}$. Para cada $x \in K$, o vetor $x + ry$ satisfaz, para todo $r \in (-r_0, r_0) \setminus \{0\}$, a propriedade de que $|ry| = |r||y| < r_0 a = \delta/2$. Além disso, se $x \in K$, então $|x - k_i| < \delta/2$ para algum $1 \leq i \leq p$ e

$$|(x + ry) - k_i| \leq |(x + ry) - x| + |x - k_i| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

mostrando que $x + ry \in B(k_i, \delta) \subseteq \Omega$, para todo $r \in (-r_0, r_0) \setminus \{0\}$. Estes últimos argumentos nos dizem que se $r \in (-r_0, r_0) \setminus \{0\}$, a diferença $|\phi(x - ry) - \phi(x)|$ é menor do que $\frac{\epsilon}{3(\mu_L(K) + 1)}$, quaisquer que sejam $x \in K, y \in \text{supp}(m)$ e, portanto, que

$$\int_K |\phi(x - ry) - \phi(x)| dx < \frac{\epsilon}{3}.$$

Juntando todos os argumentos acima vemos que, se $0 \neq |r| \leq 1$ e $|r| < r_0$, então

$$\int_K |u(x - ry) - u(x)| dx < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Isto estabelece que

$$\int_{\text{supp}(m)} \left(\int_K |u(x - ry) - u(x)| dx \right) m(y) dy \leq \epsilon \int_{\text{supp}(m)} m(y) dy = \epsilon,$$

e termina a demonstração de que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_K |u^{(r)} - u| dx = 0.$$

Seja $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ uma seqüência como no enunciado. Pelo que acabou de ser provado é claro que

$$\int_K |u^{(x_m)} - u| dx \longrightarrow 0,$$

qualquer que seja o compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Vamos extrair desta seqüência uma subsequência como no enunciado. $\mathbb{R}^n$ é σ -compacto com, por exemplo, $\mathbb{R}^n = \cup_{l \in \mathbb{N}} K_l$, sendo $K_l := \overline{B(0, l)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq l\}$. Temos que

$$\int_{K_1} |u^{(x_m)} - u| dx \longrightarrow 0,$$

pelo que provamos há pouco. Portanto, existe uma subsequência $\{x_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ tal que

$$u^{(x_{m_k^1})} \longrightarrow u$$

pontualmente em todo ponto de um certo subconjunto $A_1 \subseteq K_1$ tal que

$$\mu_L(K_1 \setminus A_1) = 0.$$

Tal subsequência também satisfaz $x_{m_k^1} \longrightarrow 0$ e, portanto,

$$\int_{K_2} |u^{(x_{m_k^1})} - u| dx \longrightarrow 0.$$

Logo, existe uma subsequência de $\{x_{m_k^1}\}_{k \in \mathbb{N}}$, digamos, $\{x_{m_k^2}\}_{k \in \mathbb{N}}$, tal que

$$u^{(x_{m_k^2})} \longrightarrow u$$

pontualmente em todo ponto de um certo subconjunto $A_2 \subseteq K_2$ tal que

$$\mu_L(K_2 \setminus A_2) = 0.$$

Aplicando este argumento recursivamente, dada a subsequência $\{x_{m_k^j}\}_{k \in \mathbb{N}}$ que satisfaz

$$u^{(x_{m_k^j})} \longrightarrow u$$

em todo ponto de um certo subconjunto $A_j \subseteq K_j$ satisfazendo $\mu_L(K_j \setminus A_j) = 0$, podemos sempre extrair uma subsequência $\{x_{m_k^{j+1}}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{x_{m_k^j}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

$$u^{(x_{m_k^{j+1}})} \longrightarrow u$$

pontualmente em todo ponto de um certo subconjunto $A_{j+1} \subseteq K_{j+1}$ satisfazendo $\mu_L(K_{j+1} \setminus A_{j+1}) = 0$. Tome a sequência $\{x_{m_j^j}\}_{j \in \mathbb{N}}$. Então $\{x_{m_j^j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ é uma subsequência de $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ (note que $m_{j+1}^{j+1} > m_j^{j+1} \geq m_j^j$) e

$$u\left(x_{m_j^j}\right) \longrightarrow u$$

pontualmente em quase toda parte de $\mathbb{R}^n$. De fato, se $x \in \cup A_j$, então existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_j$ e, como $\{x_{m_k^k}\}_{k \geq j}$ é uma subsequência de $\{x_{m_k^j}\}_{k \in \mathbb{N}}$, temos que

$$u\left(x_{m_k^k}\right)(x) \longrightarrow u(x).$$

Além disso,

$$\mathbb{R}^n = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n \setminus A_n\right)$$

e $\mu_L\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n \setminus A_n\right) = 0$. Como $x_{m_j^j} \longrightarrow 0$, vale também que

$$\int_K |u\left(x_{m_j^j}\right) - u| dx \longrightarrow 0,$$

qualquer que seja o compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$.

Antes de ir para o teorema principal da seção, façamos uma breve pausa para discutir algumas notações. De acordo com o que foi discutido no capítulo anterior à respeito da aplicação j_D ,⁴¹ podemos identificar as funções $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ com as distribuições $j_D(u)$, de acordo com a literatura usual, e é isso o que faremos agora.

Assim, diremos que uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ está em $L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ se existir alguma $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $u = j_D(f)$, e representaremos, por um abuso de notação, $u = f$. Também estenderemos a filosofia discutida lá para definirmos a diferenciação em distribuições de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ por

$$D^\alpha(u)(\phi) := (-1)^{|\alpha|} u(D^\alpha \phi),$$

para todo multi-índice $\alpha \in N^n$ e toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (note que também simplificamos a notação aqui, e estamos escrevendo D^α ao invés de Λ_{D^α}).

Desigualdade de Kato: Se $\psi \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ e $\Delta\psi$ é uma distribuição em $L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, então vale a desigualdade distribucional

$$\Delta|\psi| =^d \Delta((\operatorname{sgn} \psi)\psi) \geq^d \operatorname{Re}((\operatorname{sgn} \psi)\Delta\psi),$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\psi| \Delta\phi \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\operatorname{sgn} \psi) \psi \Delta\phi \, dx \geq \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^n} (\operatorname{sgn} \psi) [\Delta\psi] \phi \, dx,$$

⁴¹Veja a nota de rodapé na página 88

para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $\phi \geq 0$.

Demonstração: Como $\psi^{(r)} \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, sabemos pelo Lema 4.1 que

$$(*) \quad \int_{\mathbb{R}^n} (\psi^{(r)})_\epsilon \Delta \phi \, dx \geq \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{sgn}_\epsilon(\psi^{(r)}) \Delta(\psi^{(r)}) \phi \, dx,$$

quaisquer que sejam $r > 0, \epsilon > 0$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \phi \geq 0$. A estratégia da demonstração consiste em, primeiramente, fazer $r \rightarrow 0$ e, depois, fazer $\epsilon \rightarrow 0$. Vamos, então, mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi_\epsilon \Delta \phi \, dx \geq \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^n} (\operatorname{sgn}_\epsilon \psi) [\Delta \psi] \phi \, dx.$$

Fixe $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \phi \geq 0$ e $\epsilon > 0$. É válida a desigualdade

$$\begin{aligned} |(\psi^{(r)})_\epsilon - \psi_\epsilon| &= |(|\psi^{(r)}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}} - (|\psi|^2 + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}}| = \\ &= \frac{|(|\psi^{(r)}|^2 + \epsilon^2) - (|\psi|^2 + \epsilon^2)|}{(|\psi^{(r)}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}} + (|\psi|^2 + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= |\psi^{(r)} - \psi| \frac{|\psi^{(r)} + \psi|}{(|\psi^{(r)}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}} + (|\psi|^2 + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}}} \leq \\ &= |\psi^{(r)} - \psi| \frac{(|\psi^{(r)}|^2)^{\frac{1}{2}} + (|\psi|^2)^{\frac{1}{2}}}{(|\psi^{(r)}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}} + (|\psi|^2 + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}}} < \\ &= |\psi^{(r)} - \psi|. \end{aligned}$$

Pelo Lema 4.2 sabemos que para todo compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ temos

$$\int_K |\psi^{(r)} - \psi| \, dx \rightarrow 0,$$

de modo que podemos extrair uma subsequência $\{\psi^{(1/m_k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{\psi^{(1/m)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ tal que $\psi^{(1/m_k)} \rightarrow \psi$ pontualmente em quase toda parte de $\mathbb{R}^n$ (extraímos tal subsequência para aplicar o Teorema da Convergência Dominada, em breve). Pela desigualdade acima,

$$\int_K |(\psi^{(1/m_k)})_\epsilon - \psi_\epsilon| \, dx \rightarrow 0,$$

quando $k \rightarrow +\infty$, qualquer que seja o compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$, pelo Lema 4.2. Pelo que acabamos de argumentar, vemos no membro esquerdo de (*) que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} [(\psi^{(1/m_k)})_\epsilon - \psi_\epsilon] \Delta \phi \, dx \right| \leq \|\Delta \phi\|_\infty \int_{\operatorname{supp}(\Delta \phi)} |(\psi^{(1/m_k)})_\epsilon - \psi_\epsilon| \, dx \rightarrow 0.$$

Isto mostra a convergência desejada do membro da esquerda. Novamente, devido ao Lema 4.2, temos que (usando que $\Delta\psi^{(1/m_k)} = (\Delta\psi)^{(1/m_k)}$)

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} [\Delta\psi^{(1/m_k)} - \Delta\psi] \phi \, dx \right| \leq \|\phi\|_\infty \int_{\text{supp}(\phi)} |\Delta\psi^{(1/m_k)} - \Delta\psi| \, dx \longrightarrow 0,$$

e, portanto,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \text{sgn}_\epsilon(\psi)^{(1/m_k)} [\Delta\psi^{(1/m_k)} - \Delta\psi] \phi \, dx \right| \longrightarrow 0,$$

pois $\text{sgn}_\epsilon(\psi)^{(1/m_k)} \leq 1$. A convergência $\psi^{(1/m_k)} \longrightarrow \psi$ pontual em quase toda parte de $\mathbb{R}^n$ acarreta

$$\text{sgn}_\epsilon(\psi)^{(1/m_k)} [\Delta\psi] \phi \chi_{\text{supp}(\phi)} \longrightarrow (\text{sgn}_\epsilon \psi) [\Delta\psi] \phi \chi_{\text{supp}(\phi)}$$

pontualmente em quase toda parte de $\mathbb{R}^n$. Como também

$$\text{sgn}_\epsilon(\psi)^{(1/m_k)} [\Delta\psi] \phi \chi_{\text{supp}(\phi)} \leq [\Delta\psi] \phi \chi_{\text{supp}(\phi)},$$

e

$$[\Delta\psi] \phi \chi_{\text{supp}(\phi)} \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

temos pelo Teorema da Convergência Dominada que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \text{sgn}_\epsilon(\psi)^{(1/m_k)} [\Delta\psi] \phi \, dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} (\text{sgn}_\epsilon \psi) [\Delta\psi] \phi \, dx.$$

Combinando as duas últimas convergências de integrais, concluímos que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \text{sgn}_\epsilon(\psi)^{(1/m_k)} [\Delta\psi^{(1/m_k)}] \phi \, dx = \\ & \left(\int_{\mathbb{R}^n} \text{sgn}_\epsilon(\psi)^{(1/m_k)} [\Delta\psi^{(1/m_k)}] \phi \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} \text{sgn}_\epsilon(\psi)^{(1/m_k)} [\Delta\psi] \phi \, dx \right) + \\ & \int_{\mathbb{R}^n} \text{sgn}_\epsilon(\psi)^{(1/m_k)} [\Delta\psi] \phi \, dx \longrightarrow \\ & 0 + \int_{\mathbb{R}^n} (\text{sgn}_\epsilon \psi) [\Delta\psi] \phi \, dx. \end{aligned}$$

Isto mostra a convergência desejada no membro direito, de forma que obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi_\epsilon \Delta\phi \, dx \geq \text{Re} \int_{\mathbb{R}^n} (\text{sgn}_\epsilon \psi) [\Delta\psi] \phi \, dx,$$

qualquer que seja $\epsilon > 0$. A ideia agora é fazer $\epsilon \rightarrow 0$, para obtermos a desigualdade final desejada. Sabemos que é válida a desigualdade

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi_{1/m} \Delta\phi \, dx \geq \text{Re} \int_{\mathbb{R}^n} (\text{sgn}_{1/m} \psi) [\Delta\psi] \phi \, dx,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Temos

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^n} \psi_{1/m} \Delta \phi \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} |\psi| \Delta \phi \, dx \right| \leq \\ & \int_{\mathbb{R}^n} |\psi_{1/m} - |\psi|| |\Delta \phi| \, dx = \\ & \int_{\text{supp}(\Delta \phi)} \frac{(1/m)^2}{(|\psi|^2 + (1/m)^2)^{1/2} + |\psi|} |\Delta \phi| \, dx \leq \\ & \frac{1}{m} \|\Delta \phi\|_{\infty} \int_{\text{supp}(\Delta \phi)} dx \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $m \rightarrow +\infty$, de modo que o membro da esquerda tende a $\int_{\mathbb{R}^n} |\psi| \Delta \phi \, dx$. Como

$$\text{sgn}_{1/m} \psi \longrightarrow \text{sgn } \psi$$

pontualmente, uma aplicação do Teorema da Convergência Dominada nos mostra que o membro da direita tende a $\text{Re} \int_{\mathbb{R}^n} (\text{sgn } \psi) [\Delta \psi] \phi \, dx$, quando $m \rightarrow +\infty$. Isto encerra a demonstração da desigualdade de Kato.

Lema 4.3 *Se $\psi \in H^2(\mathbb{R}^n)$ e $\langle \psi, H_0 \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \psi \overline{H_0 \psi} \, dx = 0$, então $\psi = 0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração: Sabemos do Capítulo 3 que

$$H_0 = \mathfrak{S}^{-1} M_{|\lambda|^2} \mathfrak{S}, \text{ com } \text{Dom}(H_0) = H^2(\mathbb{R}^n).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle \psi, H_0 \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \langle \psi(\lambda), \mathfrak{S}^{-1} M_{|\lambda|^2} \mathfrak{S} \psi(\lambda) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \\ \langle (\mathfrak{S} \psi)(\lambda), M_{\lambda}^{-1} [M_{\lambda} (\mathfrak{S} \psi)(\lambda)] \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \langle M_{\lambda} (\mathfrak{S} \psi)(\lambda), M_{\lambda} (\mathfrak{S} \psi)(\lambda) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \\ &= \|M_{\lambda} (\mathfrak{S} \psi)(\lambda)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2. \end{aligned}$$

Portanto, a função $\lambda(\mathfrak{S} \psi(\lambda))$ é zero em quase toda parte de $\mathbb{R}^n$, segundo a medida de Lebesgue. Como a função $\lambda \mapsto \lambda$ é zero se, e somente se, $\lambda = 0$, temos que $(\mathfrak{S} \psi)(\lambda)$ é zero em quase toda parte, segundo a medida de Lebesgue. Logo, $(\mathfrak{S} \psi)(\lambda) = 0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e, como $\mathfrak{S}$ é um operador unitário em $L^2(\mathbb{R}^n)$ (e, em particular, é uma aplicação linear injetora), concluímos que $\psi = 0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

“Um corolário da desigualdade de Kato”

Corolário da desigualdade de Kato: *Seja $V \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$ tal que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ satisfazendo $V(x) \geq \alpha$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Então, o operador*

$$H = H_0 + V,$$

com $\text{Dom}(V) = C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$ é essencialmente auto-adjunto.

Observação: antes de demonstrarmos o corolário, observamos que $V \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$ é a condição minimal para que o operador de multiplicação M_V esteja bem definido sobre $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$: se $V \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$, então é claro que $V\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, qualquer que seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Suponhamos que $\text{Im}((M_V)|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)}) \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$, e vamos mostrar que $V \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$. Seja $K \subseteq \mathbb{R}^n$ um compacto. Como existe uma $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo $\phi|_K = 1$, vemos que

$$\int_K |V|^2 dx = \int_K |V\phi|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |V\phi|^2 dx < +\infty,$$

mostrando que $V \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$. Vamos à demonstração.

Demonstração: Tome $\beta \in \mathbb{R}$ satisfazendo $\alpha + \beta > 0$, e seja $\psi \in \text{Ker}((H + \beta)^*)$. Vamos mostrar que $\psi = 0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Usando a definição de adjunto, temos que

$$\langle (H + \beta)\phi, \psi \rangle = \langle \phi, (H + \beta)^*\psi \rangle = 0,$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Logo,

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} \psi \overline{[(H_0 + V + \beta)\phi]} dx,$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Como o Laplaciano comuta com a conjugação complexa, V é uma função a valores reais e β é real, obtemos

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} \psi [(-\Delta + V + \beta)\phi] dx,$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, o que implica

$$(V + \beta)\psi =^d \Delta\psi.$$

Logo, $\Delta\psi \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, e pela desigualdade de Kato vem que

$$\Delta|\psi| =^d \Delta(\text{sgn } \psi)\psi \geq^d \text{Re } (\text{sgn } \psi(\Delta\psi)) =^d \text{Re } (\text{sgn } \psi((V + \beta)\psi)) =^d$$

$$\text{Re } ((V + \beta)|\psi|) =^d (V + \beta)|\psi| \geq^d 0.$$

Fixe $x \in \mathbb{R}^n$. Pelo que acabou de ser argumentado, temos que

$$\Delta(|\psi|^{(1/j)})(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |\psi|(y) \Delta m_{(1/j)}(x - y) dy \geq 0,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, pois

$$(y \mapsto m_{(1/j)}(x - y)) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

e $m_{(1/j)}(x - y) \geq 0$, qualquer que seja $y \in \mathbb{R}^n$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Notemos que $|\psi|^{(1/j)} \in H^2(\mathbb{R}^n)$, para todo $j \in \mathbb{N}$, pela desigualdade de Young⁴², pois $|\psi| \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $D^\alpha(m_{1/j}) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Assim, concluímos que

$$\langle |\psi|^{(1/j)}, \Delta(|\psi|^{(1/j)}) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} |\psi|^{(1/j)} \Delta(|\psi|^{(1/j)}) dx \geq 0,$$

ou ainda

$$\langle |\psi|^{(1/j)}, H_0(|\psi|^{(1/j)}) \rangle \leq 0.$$

Argumentando de maneira análoga à feita na desigualdade acima (na qual foi usada a desigualdade de Kato), vem que

$$\langle |\psi|^{(1/j)}, H_0(|\psi|^{(1/j)}) \rangle \geq 0,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, de forma que temos $|\psi|^{(1/j)} = 0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, qualquer que seja $j \in \mathbb{N}$, pelo Lema 4.3. Para cada $j \in \mathbb{N}$, existe um subconjunto $A_j \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $|\psi|^{(1/j)} = 0$ em A_j e a medida de $\mathbb{R}^n \setminus A_j$ é 0. Pelo Lema 4.2,

$$\int_K ||\psi|^{(1/j)} - |\psi|| dx \longrightarrow 0$$

sobre todos os compactos de $\mathbb{R}^n$ e existe uma subsequência $\{1/j_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{1/j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $|\psi|^{(1/j_k)} \longrightarrow |\psi|$ em todos os pontos de um certo conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, de forma que a medida de $\mathbb{R}^n \setminus A$ é 0. Assim, escolhendo um ponto x de

$$A \cap (\cap_{j \in \mathbb{N}} A_j),$$

vemos que $|\psi|^{(1/j_k)}(x) = 0$, **qualquer que seja** $k \in \mathbb{N}$ e, tomando o limite quando $k \longrightarrow +\infty$, vemos que $|\psi|(x) = 0$. Como

$$\mathbb{R}^n \setminus (A \cap (\cap_{j \in \mathbb{N}} A_j)) = (\mathbb{R}^n \setminus A) \cup (\cup_{j \in \mathbb{N}} (\mathbb{R}^n \setminus A_j))$$

possui medida zero, concluímos que $\psi = 0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Assim, pelo lema da Observação XIX, vemos que $\text{Im}(\bar{H} + \beta)^\perp = \text{Ker}(H^* + \beta) = \{0\}$, e que $\text{Im}(\bar{H} + \beta)$ é densa em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Mas, como $\langle (H + \beta)\phi, \phi \rangle \geq \langle (\alpha + \beta)\phi, \phi \rangle$, para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (lembre-se de que $\langle -\Delta\phi, \phi \rangle \geq 0$, para toda $\phi \in H^2(\mathbb{R}^n)$), temos que $\|(H + \beta)\phi\| \geq (\alpha + \beta)\|\phi\|$, para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, por Cauchy-Schwartz. Logo, $\|(\bar{H} + \beta)\phi\| \geq (\alpha + \beta)\|\phi\|$, para toda $\phi \in \text{Dom}(\bar{H})$ (pois $H + \beta = \bar{H} + \beta$), mostrando que a imagem de $\bar{H} + \beta$ é fechada em $L^2(\mathbb{R}^n)$, já que $\bar{H} + \beta$ é um operador fechado (a soma de um operador fechado com um operador limitado é sempre um operador fechado). Logo, $\text{Im}(\bar{H} + \beta) = L^2(\mathbb{R}^n)$, e concluímos pelo lema da Observação XIX que H é essencialmente auto-adjunto em $\text{Dom}(H) = C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

⁴²Se $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq +\infty$, e $v \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $(u * v)(x)$ está bem definido para quase todo x e $\|u * v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|v\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$

“Aplicações do corolário da desigualdade de Kato”

A propriedade de um operador densamente definido e simétrico ser essencialmente auto-adjunto é importante pois, como demonstramos na seção “Teorema de Von Neumann”, do Apêndice A, ela é equivalente ao fato de haver somente uma extensão auto-adjunta deste operador. Algumas aplicações do corolário da desigualdade de Kato são as seguintes:⁴³

1. **o Hamiltoniano relativo à interação Coulombiana entre duas partículas carregadas em dimensão 1, dado por $H = H_0 + \kappa\|x\|$, $\kappa > 0$, é essencialmente auto-adjunto em $C_c^\infty(\mathbb{R})$:** basta ver que $V_1(x) = \kappa\|x\| \in L_{loc}^2(\mathbb{R})$ e M_{V_1} é um operador positivo. O caso de interações Coulombianas em três dimensões foi tratada no Capítulo 3. O caso bidimensional com $V_2(x) = \kappa \ln|x|$, $\kappa > 0$, precisa de outras técnicas para ser tratado, e pode ser encontrado em [10]. Às vezes, considera-se o potencial $V(x) = -\frac{\kappa}{\|x\|}$ para os Hamiltonianos em 1 e 2 dimensões, e inspeciona-se a existência de extensões auto-adjuntas (nestes casos, precisa-se retirar a origem do espaço para que o operador Hamiltoniano fique bem-definido, isto é, define-se H sobre $C_c^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ e $C_c^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, respectivamente). Ao contrário do que acontece quando se coloca os potenciais V_1 e V_2 mencionados acima (que são as soluções fundamentais da equação de Laplace), tais operadores terão infinitas extensões auto-adjuntas. Isto pode ser visto em [7];⁴⁴
2. **o Hamiltoniano do oscilador harmônico, $H = H_0 + \frac{k}{2}\|x\|^2$, $k > 0$:** é a versão da Mecânica Quântica para o Hamiltoniano de uma partícula oscilante em torno de um ponto de equilíbrio sujeito a uma força restauradora $F(x) = -kx$. Como o potencial $V(x) = \frac{k}{2}\|x\|^2$, $k > 0$, pertence a $L_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$ e o operador M_V é positivo, o corolário da desigualdade de Kato nos diz que o operador de Schrödinger $H = H_0 + \frac{k}{2}\|x\|^2$, com $k > 0$, é essencialmente auto-adjunto em $\text{Dom}(H) := C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Na verdade, qualquer operador da forma $H = H_0 + \sum_{1 \leq k \leq m} \|x\|^{2k}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ (que são Hamiltonianos quânticos relativos a potenciais não-harmônicos) são essencialmente auto-adjuntos, pelo corolário;
3. **o Hamiltoniano $H = -\sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{2m_k} (\partial_k - ia_k)^2 + V$, onde a_k é uma função a valores reais que pertence a $C^1(\mathbb{R}^n)$, $V = V_1 + V_2$, com $V_1 \geq 0$, $V_1 \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$ e V_2 sendo Δ -limitado com cota $0 \leq a < 1$, é essencialmente auto-adjunto em $C_c(\mathbb{R}^n)$:** este teorema é provado em [20], utilizando-se uma versão mais sofisticada da desigualdade de Kato: considere os operadores

$$u \ni \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \mapsto D_k(u) := \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial x_k} - a_k u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),$$

⁴³Tais aplicações foram retiradas principalmente de [20]

⁴⁴Agradeço ao professor Frank M. Forger pela conversa elucidativa sobre este artigo

a_k como acima. Se $D^2 := \sum_{1 \leq k \leq n} D_k^2$, então para toda $u \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$ que satisfaça $D^2 u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, tem-se a desigualdade distribucional

$$\Delta|u| \geq^d -\operatorname{Re}((\operatorname{sgn} u)D^2 u).$$

Uma vez demonstrada esta desigualdade aprimorada (cuja demonstração segue uma ideia parecida com a da demonstração da desigualdade de Kato) mostra-se, seguindo uma linha semelhante à do corolário da desigualdade de Kato, o resultado mencionado. Em particular, mostra-se que o Hamiltoniano de um átomo com N elétrons de massa m (cujo núcleo possui massa M) sujeito à ação externa de um campo magnético constante B_0 dado por

$$\begin{aligned} H = & -\frac{1}{2M}(\nabla_0 - iNea(x_0)/c)^2 - \frac{1}{2m} \sum_{1 \leq k \leq N} (\nabla_k + iea(x_k)/c)^2 \\ & - \sum_{1 \leq k \leq N} \frac{Ne^2}{\|x_k - x_0\|} + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k, l \leq N, k \neq l} \frac{e^2}{\|x_k - x_l\|}, \end{aligned}$$

onde $a(x) = \frac{1}{2}x \times B_0$ (os x_k 's, os x_l 's e o x_0 são variáveis tridimensionais), é essencialmente auto-adjunto em $C_c^\infty(\mathbb{R}^{3N+3})$, pois $V = V_1 + V_2$, com

$$V_1 = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k, l \leq N, k \neq l} \frac{e^2}{\|x_k - x_l\|} \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^{3N+3})$$

sendo positivo e

$$V_2 = - \sum_{1 \leq k \leq N} \frac{Ne^2}{\|x_k - x_0\|} \in L^2(\mathbb{R}^{3N+3}) + L^\infty(\mathbb{R}^{3N+3}).$$

Em [22], considera-se $\operatorname{div}(a) = 0$ e tenta-se enfraquecer as hipóteses de regularidade sobre a , de modo a obter-se as mesmas conclusões de que H é essencialmente auto-adjunto sobre as funções C^∞ de suporte compacto. A desigualdade de Kato refinada, acima, é deduzida novamente neste contexto do a “menos regular”.

5 Apêndice A⁴⁵

Conforme visto no Capítulo 1, a maior dificuldade da demonstração do Teorema Espectral foi demonstrar sua validade para operadores normais. Uma vez mostrada esta versão do Teorema, o resultado mais geral é concluído sem grandes dificuldades. Existe uma maneira mais abstrata de demonstrar o teorema espectral para operadores normais e, para contemplá-la, precisaremos utilizar um pouco da teoria das C^* -álgebras: (perceba a grande semelhança desta demonstração com a que fizemos anteriormente)

Vamos agora ao

“Teorema espectral para operadores normais via C^* -álgebras”

Definição: Se H é um espaço de Hilbert e

$$\mathfrak{S} \subseteq \mathcal{B}(H) := \{T : H \longrightarrow H : T \text{ é linear e limitado} \}$$

é uma sub C^* -álgebra de $\mathcal{B}(H)$ que contém $I_{\mathcal{B}(H)}$, dizemos que $v \in H$ é um vetor $\mathfrak{S}$ -cíclico se o conjunto $\mathfrak{S}v := \{Tv : T \in \mathfrak{S}\}$ é denso em H .

Teorema 1: Se H é um espaço de Hilbert e $\mathfrak{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$ é uma sub C^* -álgebra **comutativa** de $\mathcal{B}(H)$ que contém $I_{\mathcal{B}(H)}$ tal que $v \in H$ é um vetor $\mathfrak{S}$ -cíclico, então existem um espaço de medida finita (X, μ) e uma transformação linear unitária $U : L^2(X, \mu) \longrightarrow H$ de forma que, para cada $A \in \mathfrak{S}$, existe um operador de multiplicação $M_{f_A} : L^2(X, \mu) \ni g \longmapsto f_A g \in L^2(X, \mu)$ que satisfaz $U^{-1}AU = M_{f_A}$, onde $f_A \in C_\mu(X)$, sendo $C_\mu(X)$ a $*$ -álgebra $C(X)$ das funções contínuas definidas em X a valores complexos munida da norma do espaço $L^2(X, \mu)$, isto é, $C_\mu(X) \subseteq L^2(X, \mu)$ é um subespaço normado de $L^2(X, \mu)$ (e uma $*$ -álgebra também).

Demonstração: Sabemos que $\mathfrak{S}$ é $*$ -isomorfa a $C(X)$, para algum espaço Hausdorff compacto X , com $C(X)$ munida da norma do sup. Para cada $f \in C(X)$, seja $T_f \in \mathfrak{S}$ o correspondente por tal $*$ -isomorfismo. Considere o funcional linear $C(X) \ni f \longmapsto \langle T_f v, v \rangle$. Tal funcional é positivo, pois se $f \geq 0$, então $f = g^2$, para alguma $g \in C(X)$ não-negativa, e temos que $\langle T_f v, v \rangle = \langle T_{g^2} v, v \rangle = \langle [T_g(T_g)]v, v \rangle = \langle T_g v, (T_g)^* v \rangle = \langle T_g v, (T_{\bar{g}})v \rangle = \langle T_g v, T_{\bar{g}} v \rangle = \|T_g v\|^2 \geq 0$. Pelo Teorema da Representação de Riesz (note que, no nosso caso, $C_c(X) = C(X)$, pois X é compacto) garantimos a existência de uma medida μ (que depende, é claro, de v) que satisfaz $\langle T_f v, v \rangle = \int_X f d\mu$, para toda $f \in C(X)$. Vamos definir,

⁴⁵O desenvolvimento deste apêndice foi inspirado na leitura das exposições feitas em [5], [16], e [6]

agora, uma transformação linear unitária $U : L^2(X, \mu) \longrightarrow H$ definindo, primeiramente, uma aplicação unitária $\tilde{U} : C_\mu(X) \longrightarrow \text{Im}(U) := \{\tilde{U}g : g \in C_\mu(X)\}$. Definamos a aplicação

$$V : \mathfrak{S}v \ni T_f v \longmapsto f \in C_\mu(X).$$

Ela está bem definida, pois se $T_f v = T_g v$, com $f, g \in C(X)$, então $T_{f-g} v = 0$, pois $f \longmapsto T_f$ é um homomorfismo de álgebras e portanto é, em particular, linear. Assim, $0 = \langle T_{f-g} v, v \rangle = \int_X (f - g) d\mu$, mostrando que $f = g$ em μ -quase toda parte de X , e que V está bem definida. Além disso, V é sobrejetora e é uma isometria, pois

$$\begin{aligned} \|T_f v\|^2 &= \langle T_f v, T_f v \rangle = \langle (T_f)^* T_f v, v \rangle = \langle T_{\bar{f}} T_f v, v \rangle = \\ &= \langle T_{\bar{f}f} v, v \rangle = \int_X |f|^2 d\mu = \|f\|^2. \end{aligned}$$

Portanto, pela identidade de polarização, vemos que $V : \mathfrak{S}v \longrightarrow C_\mu(X)$ é uma aplicação unitária, sendo portanto $\tilde{U} := V^{-1} : C_\mu(X) \longrightarrow \mathfrak{S}v$ também uma aplicação unitária. Utilizando o Lema 1.2, obtemos uma extensão unitária $U : L^2(X, \mu) \longrightarrow H$ de $\tilde{U}$, devido à ciclicidade de v com respeito a $\mathfrak{S}$ e ao fato de μ satisfazer as propriedades do Teorema da Representação de Riesz, pois este fato implica a densidade de $C_\mu(X)$ em $L^2(X, \mu)$.

Tome $T_f \in \mathfrak{S}$. Então, para toda $g \in C_\mu(X)$, $T_f U(g) = T_f(\tilde{U}g) = T_f T_g v = T_{fg} v = U(fg) = U M_f g$ (note que $\text{Dom}(M_f) = L^2(X, \mu)$, pois $f \in C_\mu(X)$). Assim, como $T_f U = U M_f$ num subconjunto denso de $L^2(X, \mu)$, e $T_f U$ e $U M_f$ são ambas transformações lineares e contínuas definidas em $L^2(x, \mu)$, segue que $T_f U = U M_f$, pelo Lema 1.1.

Definição: Se F é um subespaço fechado de um espaço de Hilbert H e $\mathfrak{S}$ é uma sub C^* -álgebra de $\mathcal{B}(H)$ que contém $I_{\mathcal{B}(H)}$, de forma que F é $\mathfrak{S}$ -invariante, isto é, $\mathfrak{S}F := \{Tv : T \in \mathcal{B}(H), v \in F\} \subseteq F$, dizemos que $v \in F$ é um vetor $\mathfrak{S}$ - F -cíclico se o conjunto $\mathfrak{S}v$ é denso em F (neste caso, F será dito ser um subespaço $\mathfrak{S}$ -cíclico).

Teorema 2: Se H é um espaço de Hilbert e $\mathfrak{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$ é uma sub C^* -álgebra de $\mathcal{B}(H)$ que contém $I_{\mathcal{B}(H)}$, então existe uma família de subespaços fechados $\Omega := \{H_\alpha : \alpha \in M\}$, dois a dois ortogonais, $\mathfrak{S}$ -invariantes e $\mathfrak{S}$ -cíclicos de H , tal que

$$H = \overline{\oplus H_\alpha} = \left\{ (h_\alpha)_{\alpha \in M} \in \prod_{\alpha \in M} H_\alpha : \sum_{\alpha \in M} \|h_\alpha\|^2 < \infty \right\}$$

(na literatura usual costuma-se omitir o fecho na segunda igualdade).

Demonstração: Basta aplicar o Lema de Zorn no conjunto das famílias de subespaços fechados, dois a dois ortogonais $\mathfrak{S}$ -invariantes e $\mathfrak{S}$ -cíclicos de H ,

parcialmente ordenado pela relação de inclusão.

O Teorema 1 fornecerá os “átomos” do teorema espectral, e o Teorema 2 tratará de reuni-los:

Teorema espectral para operadores normais: *Se $A \in \mathcal{B}(H)$ é um operador linear normal sobre o espaço de Hilbert H , então existem um espaço de medida finita (X, μ) e uma transformação unitária $U : L^2(X, \mu) \rightarrow H$ que satisfaz $U^{-1}AU = M_f$, onde f é uma função mensurável (na verdade, contínua).*

Demonstração: Seja $\mathfrak{S}$ a C^* -álgebra gerada por A e $I_{\mathcal{B}(H)}$, isto é, $\mathfrak{S} = C^*(A)$. Pelo Teorema 2, sabemos que existe uma família de subespaços fechados, dois a dois ortogonais, $\mathfrak{S}$ -invariantes e $\mathfrak{S}$ -cíclicos de H , $\Omega := \{H_\alpha : \alpha \in M\}$, tal que $H = \bigoplus H_\alpha$. Defina $A_\alpha := A|_{H_\alpha}$. Pelo Teorema 1, sabemos que existem espaços de medida finita (X_α, μ_α) e transformações lineares unitárias $U_\alpha : L^2(X_\alpha, \mu_\alpha) \rightarrow H_\alpha$ de forma que, para cada α , existe um operador de multiplicação $M_{f_\alpha} : L^2(X_\alpha, \mu_\alpha) \ni g \mapsto f_\alpha g \in L^2(X_\alpha, \mu_\alpha)$ que satisfaz $U_\alpha^{-1}A_\alpha U_\alpha = M_{f_\alpha}$, onde $f_\alpha \in C_{\mu_\alpha}(X_\alpha)$ (basta substituir $\mathfrak{S}$ por $C^*(A_\alpha)$ no Teorema 1, onde $C^*(A_\alpha)$ é a C^* -álgebra gerada por A_α e $I_\alpha := I_{\mathcal{B}(H)}|_{H_\alpha}$; assim, pelo que mostramos na página 37, a respeito do Cálculo Funcional Contínuo, sabemos que podemos tomar $X_\alpha = \sigma(A_\alpha)$). Para cada $\alpha \in M$, seja $\tilde{X}_\alpha := \{\alpha\} \times X_\alpha$, e defina $X := \bigcup_{\alpha \in M} \tilde{X}_\alpha$, ou seja, X é a união disjunta dos $\tilde{X}_\alpha$. O operador $U := \bigoplus U_\alpha : \bigoplus_{\alpha \in M} L^2(X_\alpha, \mu_\alpha) \rightarrow \bigoplus H_\alpha = H$ definido por $U(g_\alpha)_{\alpha \in M} = (U_\alpha g_\alpha)_{\alpha \in M}$ é uma isometria, pois

$$\|(Ug_\alpha)_{\alpha \in M}\|^2 := \sum_{\alpha \in M} \|U_\alpha g_\alpha\|^2 = \sum_{\alpha \in M} \|g_\alpha\|^2 = \|(g_\alpha)_{\alpha \in M}\|^2.$$

O fato de U ser linear e sobrejetor decorre diretamente de cada U_α ser linear e sobrejetor. Vamos definir agora uma medida em X , para depois sermos capazes de definir um operador $\Lambda : L^2(X, \mu) \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in M} L^2(X_\alpha, \mu_\alpha)$ unitário. Defina, primeiramente, uma σ -álgebra em X como sendo a família dos conjuntos E tais que $\pi_\alpha(E \cap \tilde{X}_\alpha)$ é um conjunto mensurável de X_α , para todo $\alpha \in M$, onde $\pi_\alpha : \{\alpha\} \times X_\alpha \ni (\alpha, x) \mapsto x \in X_\alpha$ é uma projeção em X_α . Então, definimos uma medida μ nesta σ -álgebra impondo que, para cada $\alpha \in M$, $\mu(\{\alpha\} \times F) = \mu_\alpha(F)$, para todo F que seja μ_α -mensurável, e depois, definimos $\mu(E) := \sum_{\alpha \in M} \mu_\alpha(E \cap \tilde{X}_\alpha)$, para todo $E \subseteq X$ que seja mensurável em X . Considere a aplicação $\Lambda : L^2(X, \mu) \ni g \mapsto (g_\alpha)_{\alpha \in M} \in \bigoplus_{\alpha \in M} L^2(X_\alpha, \mu_\alpha)$, com $g_\alpha := g|_{\{\alpha\} \times X_\alpha} = g|_{\tilde{X}_\alpha}$. Então, Λ é uma sobrejeção linear. Agora, notemos que, se α é fixado e $E \subseteq \{\alpha\} \times I$ é mensurável em X , então

$$\mu(E) = \mu_\alpha(\pi_\alpha(E))$$

e, se α é fixado e $F \subseteq I$ é mensurável em X_α , então

$$\mu_\alpha(F) = \mu(\{\alpha\} \times F).$$

Portanto, como também $g(\alpha, x) = g_\alpha(x)$, para cada $\alpha \in M$, para todo $x \in X_\alpha$, temos $\int_{\tilde{X}_\alpha} |g(\alpha, x)|^2 d\mu = \int_{\{\alpha\} \times X_\alpha} |g(\alpha, x)|^2 d\mu = \int_{X_\alpha} |g_\alpha(x)|^2 d\mu_\alpha$, para todo $\alpha \in M$, pela definição de integral. Logo,

$$\begin{aligned} \|g\|^2 &:= \int_{\bigcup_{\alpha \in M} \tilde{X}_\alpha} |g(\alpha, x)|^2 d\mu = \sum_{\alpha \in M} \int_{\tilde{X}_\alpha} |g(\alpha, x)|^2 d\mu = \\ &= \sum_{\alpha \in M} \int_{X_\alpha} |g_\alpha(x)|^2 d\mu_\alpha =: \|(g_\alpha)_{\alpha \in M}\|^2, \end{aligned}$$

para todo $g \in L^2(X, \mu)$, mostrando que Λ é uma isometria. Concluimos, então, que Λ é uma transformação unitária.

Assim, $W := U \circ \Lambda$ é uma transformação unitária. Tomando $(g_\alpha)_{\alpha \in M} \in \oplus_{\alpha \in M} L^2(X_\alpha, \mu_\alpha)$ e definindo $g := \Lambda^{-1}(g_\alpha)_{\alpha \in M}$, $f := \Lambda^{-1}(f_\alpha)_{\alpha \in M}$,

$$WM_f g = U\Lambda(fg) = U(f_\alpha g_\alpha)_{\alpha \in M} = (U_\alpha M_{f_\alpha} g_\alpha)_{\alpha \in M} = (A_\alpha U_\alpha g_\alpha)_{\alpha \in M} =$$

$$\oplus_{\alpha \in M} A_\alpha U(g_\alpha)_{\alpha \in M} = \oplus_{\alpha \in M} A_\alpha U\Lambda g = \oplus_{\alpha \in M} A_\alpha Wg.$$

Identificando A com $\oplus_{\alpha \in M} A_\alpha$ (ao se identificar H com $\oplus H_\alpha$), finalizamos a demonstração.

“Teorema de Von Neumann”

Seja T um operador linear densamente definido e simétrico num espaço de Hilbert H . Podemos associar a este um operador linear (denominado transformação de Cayley)

$$W_T : \text{Im}(T + iI_{\mathcal{B}(H)}) \ni (T + iI_{\mathcal{B}(H)})\xi \longmapsto (T - iI_{\mathcal{B}(H)})\xi \in \text{Im}(T - iI_{\mathcal{B}(H)}),$$

via uma aplicação $W : T \longmapsto W_T$. Pelo fato de T ser simétrico, tal operador está bem definido: se $\xi_1, \xi_2 \in \text{Dom}(T)$ e $(T + iI_{\mathcal{B}(H)})\xi_1 = (T + iI_{\mathcal{B}(H)})\xi_2$, então $(T + iI_{\mathcal{B}(H)})(\xi_1 - \xi_2) = 0$. Como um auto-valor de T deve ser necessariamente real (de fato, se $0 \neq u \in \text{Dom}(T)$ satisfaz $Tu = \lambda u$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}$, então $\lambda \langle u, u \rangle = \langle Tu, u \rangle = \langle u, Tu \rangle = \bar{\lambda} \langle u, u \rangle$), devemos ter $\xi_1 - \xi_2 = 0$, mostrando que tal aplicação está, de fato, bem definida (note que este argumento é equivalente ao fato de $T + iI_{\mathcal{B}(H)}$ ser injetor e, portanto, $W_T := (T - iI_{\mathcal{B}(H)})(T + iI_{\mathcal{B}(H)})^{-1}$). Além de ser claramente linear notamos, também, que por T ser simétrico, W_T é uma isometria e, portanto, é uma aplicação injetora. Devido a sua definição vemos que, dado $\eta =: (T + iI_{\mathcal{B}(H)})\xi \in \text{Im}(T + iI_{\mathcal{B}(H)}) := \text{Dom}(W_T)$, temos que $(I_{\mathcal{B}(H)} - W_T)\eta = (T + iI_{\mathcal{B}(H)})\xi - (T - iI_{\mathcal{B}(H)})\xi = 2i\xi \in \text{Dom}(T)$. Como tal argumento é reversível, nota-se que $\text{Im}(I_{\mathcal{B}(H)} - W_T) = \text{Dom}(T)$. Além disso, se $\eta \in \text{Dom}(W_T)$ e $\xi \in \text{Ker}(I_{\mathcal{B}(H)} - W_T)$, então $W_T \xi = \xi$ e

$$\langle \xi, (I_{\mathcal{B}(H)} - W_T)\eta \rangle = \langle \xi, I_{\mathcal{B}(H)}\eta \rangle - \langle \xi, W_T\eta \rangle =$$

$$\langle \xi, \eta \rangle - \langle W_T \xi, W_T \eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle - \langle \xi, \eta \rangle = 0.$$

Como $\text{Im}(I_{\mathcal{B}(H)} - W_T)$ é densa em H , concluímos que $\xi = 0$, e que $I_{\mathcal{B}(H)} - W_T$ é injetor. Note que para chegar a tal conclusão não usamos a definição de W_T , mas somente os fatos de que $\text{Im}(I_{\mathcal{B}(H)} - W_T)$ é densa em H e W_T é uma isometria. Chegamos, assim, à conclusão de que, se $U : \text{Dom}(U) \rightarrow H$ é uma isometria linear tal que $\text{Im}(I_{\mathcal{B}(H)} - U)$ é densa em H , então $I_{\mathcal{B}(H)} - U$ é injetor.

Usando o fato de que $\text{Im}(I_{\mathcal{B}(H)} - W_T) = \text{Dom}(T)$ é denso em H podemos, baseados num argumento de dualidade, definir um operador linear densamente definido $\tilde{A}_{W_T} : \text{Im}(I_{\mathcal{B}(H)} - W_T) \ni (I_{\mathcal{B}(H)} - W_T)\eta \mapsto (I_{\mathcal{B}(H)} + W_T)\eta \in \text{Im}(I_{\mathcal{B}(H)} + W_T)$ (pois ao invés de construir uma isometria a partir de um operador densamente definido, queremos realizar o processo inverso), seguindo uma filosofia análoga à utilizada para definir W_T via uma aplicação $\tilde{A} : W_T \mapsto \tilde{A}_{W_T}$ (note que $\tilde{A}_{W_T}$ está bem definida, pois $I_{\mathcal{B}(H)} - W_T$ é injetora). Seja $\xi \in \text{Dom}(T)$. Então, escrevendo $\eta := (T + iI_{\mathcal{B}(H)})\xi$, temos $\tilde{A}_{W_T}((I_{\mathcal{B}(H)} - W_T)\eta) = (I_{\mathcal{B}(H)} + W_T)\eta = (I_{\mathcal{B}(H)} + W_T)((T + iI_{\mathcal{B}(H)})\xi) = (T\xi + i\xi) + (T\xi - i\xi) = 2T\xi$. Por outro lado, $\tilde{A}_{W_T}((I_{\mathcal{B}(H)} - W_T)\eta) = \tilde{A}_{W_T}((I_{\mathcal{B}(H)} - W_T)(T + iI_{\mathcal{B}(H)})\xi) = \tilde{A}_{W_T}((T + iI_{\mathcal{B}(H)})\xi - (T - iI_{\mathcal{B}(H)})\xi) = 2i\tilde{A}_{W_T}\xi$. Portanto, definindo a aplicação $A := i\tilde{A}$, temos que $A_{W_T} = T$, para todo T linear, densamente definido em H e simétrico. Esta argumentação nos indica que se $U : \text{Dom}(U) \rightarrow H$ for uma isometria linear tal que $\text{Im}(I_{\mathcal{B}(H)} - U)$ é densa em H , então

$$A_U : \text{Im}(I_{\mathcal{B}(H)} - U) \ni (I_{\mathcal{B}(H)} - U)\eta \mapsto i(I_{\mathcal{B}(H)} + U)\eta \in \text{Im}(I_{\mathcal{B}(H)} + U)$$

é um operador linear densamente definido e simétrico (a densidade foi verificada no parágrafo anterior). Vamos verificar a simetria: dados $u, v \in \text{Dom}(A_U) := \text{Im}(I_{\mathcal{B}(H)} - U)$, temos $u := (I_{\mathcal{B}(H)} - U)\xi_1$ e $v := (I_{\mathcal{B}(H)} - U)\xi_2$ para certos $\xi_1, \xi_2 \in \text{Dom}(U)$,

$$\begin{aligned} \langle A_U u, v \rangle &= i\langle \xi_1 + U\xi_1, \xi_2 - U\xi_2 \rangle = \\ i\langle \xi_1, \xi_2 \rangle - i\langle \xi_1, U\xi_2 \rangle + i\langle U\xi_1, \xi_2 \rangle - i\langle U\xi_1, U\xi_2 \rangle &= \\ i\langle \xi_1, \xi_2 \rangle - i\langle \xi_1, U\xi_2 \rangle + i\langle U\xi_1, \xi_2 \rangle - i\langle \xi_1, \xi_2 \rangle &= \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle u, A_U v \rangle &= -i\langle \xi_1 - U\xi_1, \xi_2 + U\xi_2 \rangle = \\ -i\langle \xi_1, \xi_2 \rangle - i\langle \xi_1, U\xi_2 \rangle + i\langle U\xi_1, \xi_2 \rangle + i\langle U\xi_1, U\xi_2 \rangle &= \\ -i\langle \xi_1, \xi_2 \rangle - i\langle \xi_1, U\xi_2 \rangle + i\langle U\xi_1, \xi_2 \rangle + i\langle \xi_1, \xi_2 \rangle. & \end{aligned}$$

Isto mostra a simetria de A_U . Está bem definida então, a isometria $W_{A_U} : \text{Im}(A_U + iI_{\mathcal{B}(H)}) \ni (A_U + iI_{\mathcal{B}(H)})\eta \mapsto (A_U - iI_{\mathcal{B}(H)})\eta \in \text{Im}(A_U - iI_{\mathcal{B}(H)})$, se $U : \text{Dom}(U) \rightarrow H$ for uma isometria linear tal que $\text{Im}(I_{\mathcal{B}(H)} - U)$ é densa em H . Mas

$$\begin{aligned} \text{Im}(A_U + iI_{\mathcal{B}(H)}) &= \\ \{(A_U + iI_{\mathcal{B}(H)})\eta : \eta \in \text{Dom}(A_U) := \text{Im}(I_{\mathcal{B}(H)} - U)\} &= \\ \{(A_U + iI_{\mathcal{B}(H)})(I_{\mathcal{B}(H)} - U)\xi : \xi \in \text{Dom}(U)\} &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{i(I_{\mathcal{B}(H)} + U)\xi + i(I_{\mathcal{B}(H)} - U)\xi : \xi \in \text{Dom}(U)\} = \\ \{2i\xi : \xi \in \text{Dom}(U)\} = \text{Dom}(U) \end{aligned}$$

e, se $\eta := (I_{\mathcal{B}(H)} - U)\xi$, $\xi \in \text{Dom}(U)$, então $W_{A_U}(A_U + iI_{\mathcal{B}(H)})\eta = (A_U - iI_{\mathcal{B}(H)})\eta = (A_U - iI_{\mathcal{B}(H)})(I_{\mathcal{B}(H)} - U)\xi = i(I_{\mathcal{B}(H)} + U)\xi - i(I_{\mathcal{B}(H)} - U)\xi = 2iU\xi$. Logo, devido aos primeiro e último conjuntos que figuram na sequência de igualdades acima, concluímos que $W_{A_U} = U$.

Concluimos, então, nestes dois últimos parágrafos, que existe uma bijeção entre os operadores lineares densamente definidos e simétricos

$$T : \text{Dom}(T) \longrightarrow H,$$

de H , e as isometrias lineares

$$U : \text{Dom}(U) \longrightarrow H$$

tais que $\text{Im}(I_{\mathcal{B}(H)} - U)$ é densa em H , sendo W e A as aplicações que ilustram esta verdade pois, como foi visto acima, uma é a inversa da outra. Além disso, ao pensarmos em operadores como gráficos, vemos facilmente que tais aplicações preservam inclusões, isto é, se T e S são operadores lineares densamente definidos e simétricos, então

$$T \subset S \text{ se, e somente se, } W_T \subset W_S.$$

(e, dessa forma, temos que

$$T = S \text{ se, e somente se, } W_T = W_S).$$

Concluimos também que, se T é um operador linear densamente definido e simétrico, existe uma correspondência biunívoca entre suas extensões simétricas e as isometrias que estendem W_T (para ver a sobrejetividade da aplicação que leva tais extensões simétricas, tome U uma isometria linear tal que $W_T \subset U$. Como $I_{\mathcal{B}(H)} - W_T$ tem imagem densa em H e $I_{\mathcal{B}(H)} - W_T \subset I_{\mathcal{B}(H)} - U$ concluimos que $I_{\mathcal{B}(H)} - U$ também possui imagem densa em H . Logo, pelo que foi argumentado logo acima, neste mesmo parágrafo, garantimos a existência de um operador linear densamente definido simétrico, S , tal que $T \subset S$ e $U = W_S$).

Definamos $n_+ := \dim(\text{Im}(T + iI_{\mathcal{B}(H)})^\perp)$ e $n_- := \dim(\text{Im}(T - iI_{\mathcal{B}(H)})^\perp)$ (a dimensão aqui deve ser interpretada como a dimensão de espaço de Hilbert). Dado T um operador linear densamente definido num espaço de Hilbert H e simétrico, podemos nos perguntar se é possível aumentar seu domínio e definir nele um operador que o estenda e seja auto-adjunto. Em outras palavras, queremos saber se T possui extensões auto-adjuntas:

Teorema: *T possui extensões auto-adjuntas se, e somente se, $n_+ = n_-$.*

Demonstração: Notamos primeiramente que, dado um operador linear $U : H \rightarrow G$, onde H e G são espaços de Hilbert, U será uma isometria se, e somente se, U manda bases (hilbertianas) de H em bases (hilbertianas) em G . Suponhamos, então, que T possua uma extensão auto-adjunta, S . Então, $\text{Dom}(W_S) = \text{Im}(S + iI_{\mathcal{B}(H)}) = H$ e $\text{Im}(W_S) = \text{Im}(S - iI_{\mathcal{B}(H)}) = H$, pela observação XIX). Portanto, como $H = \overline{\text{Im}(T + iI_{\mathcal{B}(H)})} \oplus \text{Im}(T + iI_{\mathcal{B}(H)})^\perp$ e $W_T \subset W_S$,

$$W_S|_{\text{Im}(T + iI_{\mathcal{B}(H)})^\perp} : \text{Im}(T + iI_{\mathcal{B}(H)})^\perp \rightarrow \text{Im}(T - iI_{\mathcal{B}(H)})^\perp$$

é uma isometria sobrejetora, pois é a restrição de um operador unitário, e W_S preserva ângulos (note que o contradomínio de $W_S|_{\text{Im}(T + iI_{\mathcal{B}(H)})^\perp}$ é, de fato, $\text{Im}(T - iI_{\mathcal{B}(H)})^\perp$: seja $\phi \in \text{Im}(T + iI_{\mathcal{B}(H)})^\perp$. Dado $\eta \in \text{Im}(T - iI_{\mathcal{B}(H)})$, temos que $\eta = W_T \xi$, para algum $\xi \in \text{Dom}(W_T) := \text{Im}(T + iI_{\mathcal{B}(H)})$, e

$$\langle W_S \phi, \eta \rangle = \langle W_S \phi, W_T \xi \rangle = \langle W_S \phi, W_S \xi \rangle = \langle \phi, \xi \rangle = 0.$$

Da arbitrariedade de η segue que

$$\text{Im}(W_S|_{\text{Im}(T + iI_{\mathcal{B}(H)})^\perp}) \subseteq \text{Im}(T - iI_{\mathcal{B}(H)})^\perp.$$

Para ver a sobrejetividade, tome $\phi \in \text{Im}(T + iI_{\mathcal{B}(H)})^\perp$. Da sobrejetividade de W_S segue que existem $\xi_1 \in \overline{\text{Im}(T + iI_{\mathcal{B}(H)})}$ e $\xi_2 \in \text{Im}(T + iI_{\mathcal{B}(H)})^\perp$ tais que $W_S(\xi_1 + \xi_2) = \tilde{W}_T(\xi_1) + W_S(\xi_2) = \phi$, onde $\tilde{W}_T : \overline{\text{Im}(T + iI_{\mathcal{B}(H)})} \rightarrow \overline{\text{Im}(T - iI_{\mathcal{B}(H)})}$ denota a única extensão linear isométrica de W_T ao fecho de seu domínio, cuja existência é garantida pelo Lema 1.2 (página 47). A última igualdade, combinada com o que acabou de ser mostrado, termina a demonstração). Assim, a equivalência mencionada no início da demonstração conclui o resultado. Suponhamos, agora, que $n_+ = n_-$. Sejam $\mathfrak{S}_1 := \{e_i\}_{i \in I}$ e $\mathfrak{S}_2$ bases hilbertianas de $\text{Im}(T + iI_{\mathcal{B}(H)})^\perp$ e $\text{Im}(T - iI_{\mathcal{B}(H)})^\perp$, respectivamente. Vamos construir uma isometria linear entre $\text{Im}(T + iI_{\mathcal{B}(H)})^\perp$ e $\text{Im}(T - iI_{\mathcal{B}(H)})^\perp$, digamos W , a partir da definição de uma aplicação $\tilde{W}$. Por hipótese, existe uma bijeção $\phi : \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2$. Defina $\tilde{W}(e_i) := \phi(e_i)$, para todo $i \in I$. Estendendo $\tilde{W}$ por linearidade, vemos que $\tilde{W}$ é uma aplicação (isométrica) definida no conjunto de todas as combinações lineares de elementos de $\mathfrak{S}_1$ a valores no conjunto de todas as combinações lineares de elementos de $\mathfrak{S}_2$. Como tais conjuntos são densos em $\text{Im}(T + iI_{\mathcal{B}(H)})^\perp$ e $\text{Im}(T - iI_{\mathcal{B}(H)})^\perp$ (pois $\mathfrak{S}_1$ e $\mathfrak{S}_2$ são bases hilbertianas de $\text{Im}(T + iI_{\mathcal{B}(H)})^\perp$ e $\text{Im}(T - iI_{\mathcal{B}(H)})^\perp$, respectivamente), concluímos pelo Lema 1.2 que existe uma única isometria linear $W : \text{Im}(T + iI_{\mathcal{B}(H)})^\perp \rightarrow \text{Im}(T - iI_{\mathcal{B}(H)})^\perp$ que estende $\tilde{W}$. Assim, $U := \tilde{W}_T \oplus W$ ($\tilde{W}_T$ como antes) é uma aplicação unitária de H que estende W_T e, portanto, é tal que $\text{Im}(I_{\mathcal{B}(H)} - U)$ é densa em H , pois como $W_T \subset U$, temos que $I_{\mathcal{B}(H)} - W_T \subset I_{\mathcal{B}(H)} - U$, o que implica $\text{Im}(I_{\mathcal{B}(H)} - W_T) \subseteq \text{Im}(I_{\mathcal{B}(H)} - U)$ (lembre-se que $\text{Im}(I_{\mathcal{B}(H)} - W_T) = \text{Dom}(T)$). Logo, A_U é uma extensão auto-adjunta de T : de fato, $W_{A_U} = U$ e, como $H = \text{Dom}(U) = \text{Dom}(W_{A_U}) := \text{Im}(A_U + iI_{\mathcal{B}(H)})$ e $H = \text{Im}(U) = \text{Im}(W_{A_U}) := \text{Im}(A_U - iI_{\mathcal{B}(H)})$, concluímos pela Observação

XIX que A_U é auto-adjunto.

Notamos que a demonstração também mostra que, se $n_+ = n_- \geq 1$, então existe uma infinidade de extensões auto-adjuntas de T (para cada base hilbertiana $\mathfrak{S}_2$ e cada bijeção ϕ escolhida, teremos uma isometria W diferente e, conseqüentemente, uma U e uma extensão A_U diferentes). Além disso, vemos que T é essencialmente auto-adjunto se, e somente se, $n_+ = n_- = 0$, pela Observação XIX.

Notamos também que se T e S são operadores lineares densamente definidos e simétricos tais que $T \subset S$, então $S^* \subset T^*$, pela própria definição de adjunto. Logo, $T \subset S \subset S^* \subset T^*$. Isto implica que, dado um operador linear densamente definido e simétrico, T , suas extensões auto-adjuntas são extensões maximais. De fato, se S é uma extensão auto-adjunta de T e R é uma extensão simétrica de S , então $S \subset R \subset R^* \subset S^*$. Como $S = S^*$, vem que $R = S$ (e $R = R^*$). Assim, T é essencialmente auto-adjunto se, e somente se, possui uma única extensão auto-adjunta: se T é essencialmente auto-adjunto, então tome uma extensão auto-adjunta S de T . Como $\overline{T}^* = T^*$ e S é, em particular, simétrica, temos pela análise feita acima que $T \subset S = S^* \subset T^* = \overline{T}^* = \overline{T}$. Como S^* é uma extensão fechada de T , da definição de fecho de um operador, temos que $\overline{T} \subset S = S^* \subset T^* = \overline{T}$, mostrando que $S = \overline{T} = T^* = \overline{T}^*$, e que a única extensão auto-adjunta é o seu fecho. Reciprocamente, suponha que exista apenas uma extensão auto-adjunta de T . Se T não fosse essencialmente auto-adjunto, então pelo que observamos acima, ou $n_+ = n_- \geq 1$ ou $n_+ \neq n_-$. No primeiro caso, obteríamos uma infinidade de extensões auto-adjuntas, o que é absurdo. No segundo caso, não poderíamos ter nenhuma extensão auto-adjunta, o que contradiz a hipótese. Logo, T deve ser essencialmente auto-adjunto.

Para terminar este capítulo, vamos demonstrar a implicação ($\implies$) do teorema espectral para operadores lineares auto-adjuntos não-limitados, utilizando a demonstração para operadores normais, via C^* -álgebras, e utilizando o Teorema de Von Neumann, acima.

“O Teorema Espectral - uma outra demonstração”

Precisaremos de dois lemas:

Lema 3: *Se f é uma função real e mensurável relativamente a um espaço de medida positiva (M, μ) , então $W_{M_f} = M_\phi$, sendo $\phi : M \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\phi := (f - i)(f + i)^{-1}$.*

Demonstração: $\text{Im}(M_f + iI_{\mathcal{B}(H)}) =: \text{Dom}(W_{M_f}) = L^2(M, \mu)$, pois se $\psi \in L^2(M, \mu)$, então $\psi = (f + i)(f + i)^{-1}\psi$ e, como $(f + i)^{-1}\psi \in \text{Dom}(M_f) = \text{Dom}(M_f + iI_{\mathcal{B}(H)})$ (pois $|(f + i)^{-1}\psi| \leq |\psi|$ - o que implica $(f + i)^{-1}\psi \in L^2(M, \mu)$ - e $|f(f + i)^{-1}\psi| \leq |\psi|$ - o que implica $f(f + i)^{-1}\psi \in L^2(M, \mu)$), mostramos que $L^2(M, \mu) \subseteq \text{Im}(M_f + iI_{\mathcal{B}(H)})$. Seja $\psi \in L^2(M, \mu)$. Temos $W_{M_f}\psi =$

$W_{M_f}(f+i)(f+i)^{-1}\psi = (f-i)(f+i)^{-1}\psi = \phi\psi$, mostrando que $W_{M_f} \supset M_\phi$. Mas $\text{Dom}(M_\phi) = L^2(M, \mu)$, pois $|(f-i)(f+i)^{-1}| = 1$. Isto mostra que $W_{M_f} = M_\phi$.

Lema 4: *Sejam T, S operadores lineares densamente definidos num espaço de Hilbert. Então, T e S são unitariamente equivalentes se, e somente se, W_T e W_S são unitariamente equivalentes.*

Teorema Espectral: *Se H é um espaço de Hilbert e A é um operador linear densamente definido em H e auto-adjunto, existem um espaço de medida (X, μ) positiva e uma transformação linear unitária $\Phi : H \rightarrow L^2(X, \mu)$ tal que $\Phi \circ A \circ \Phi^{-1} : \text{Dom}(M_f) \ni g \mapsto f \cdot g \in L^2(X, \mu)$, onde f é uma função a valores reais e Borel-mensurável em X . (isto é $\Phi \circ A \circ \Phi^{-1} = M_f$, para uma certa f real e Borel-mensurável em X . Note que X está provido de uma certa topologia, pois caso contrário não faria sentido falar em funções Borel-mensuráveis definidas em X).*

Demonstração: Suponhamos $H \neq \{0\}$ e $A \neq 0$ pois, caso contrário, o teorema é trivial. Seja W_A a transformação de Cayley associada a A . Pelo teorema espectral para operadores normais, sabemos que existem um espaço de medida positiva (X, μ) e uma transformação linear unitária $\Phi : H \rightarrow L^2(X, \mu)$ tal que $\Phi \circ W_A \circ \Phi^{-1} : \text{Dom}(M_f) \ni g \mapsto f \cdot g \in L^2(X, \mu)$, onde f é uma função a valores complexos e Borel-mensurável em

$$X := \bigcup_{\alpha \in M} \{\alpha\} \times X_\alpha,$$

sendo $X_\alpha = \sigma(W_A|_{H_\alpha})$, usando a notação do teorema espectral para operadores normais, na página 116 (na verdade, $f(\alpha, x+iy) = x+iy$, para todo $(\alpha, x+iy) \in \{\alpha\} \times X_\alpha$). Vamos procurar uma função mensurável em X e a valores reais, ϕ , tal que $W_{M_\phi} = M_f$. O Lema 3 **nos sugere** que procuremos uma ϕ que satisfaça $(\phi - i)(\phi + i)^{-1} = f$, ou melhor, $\phi = i(1 + f)(1 - f)^{-1}$. Precisamos verificar duas coisas: que f é diferente de 1 em μ -quase toda parte de X e que ϕ é real. Se f fosse igual a 1 num conjunto de medida positiva **e finita**, E (note que tal conjunto existe, pois pode-se mostrar de maneira análoga à feita no Capítulo 1, páginas 63 e 64, que todo conjunto de medida estritamente positiva de X possui um subconjunto de medida finita e estritamente positiva), então $(I_{L^2(X, \mu)} - M_f)\chi_E = 0$, e concluiríamos que M_f não é injetor. Mas isto é um absurdo, pois M_f é unitariamente equivalente a W_A , que é injetor. Logo, $f \neq 1$ em μ -quase toda parte de X . Vamos mostrar que ϕ é real em μ -quase toda parte de X . Primeiramente, vamos mostrar que $x^2 + y^2 = 1$ em μ -quase toda parte de X . $\sigma(M_f) = \sigma(W_A) \subseteq \{v \in \mathbb{C} : |v| = 1\}$, pois W_A é unitário (veja a página 39). Como $\sigma(M_f)$ é a imagem essencial de f (veja o item 4 da Observação XIII, das Considerações Iniciais) sabemos que, para todo $z \notin \{v \in \mathbb{C} : |v| = 1\}$, existe $\epsilon_z > 0$ tal que $\mu(\{w \in X : |z - f(w)| < \epsilon_z\}) = \mu(f^{-1}[B(z, \epsilon_z)]) = 0$.⁴⁶ Como $\mathbb{C}$ é segundo-contável (isto é, possui uma base enumerável Λ de abertos),

⁴⁶ $B(z, \epsilon_z) := \{v \in \mathbb{C} : |v - z| < \epsilon_z\}$

garantimos que para cada $z \notin \{v \in \mathbb{C} : |v| = 1\}$ existe um elemento $B_z \in \Lambda$ satisfazendo $B_z \subseteq B(z, \epsilon_z)$. Logo, como

$$f^{-1}[\{v \in \mathbb{C} : |v| \neq 1\}] \subseteq f^{-1} \left[\bigcup_{z \in \{v \in \mathbb{C} : |v| \neq 1\}} B_z \right],$$

vem da subaditividade de μ e da enumerabilidade de Λ que

$$\mu(\{w \in X : |f(w)| \neq 1\}) = \mu(f^{-1}[\{v \in \mathbb{C} : |v| \neq 1\}]) \leq$$

$$\mu \left(f^{-1} \left[\bigcup_{z \in \{v \in \mathbb{C} : |v| \neq 1\}} B_z \right] \right) = 0,$$

mostrando que $x^2 + y^2 = 1$ em μ -quase toda parte de X . Agora, para μ -quase todo $(\alpha, x + iy) \in X$ obtemos, fazendo alguns cálculos, que

$$\phi(\alpha, x + iy) = i(1 + f(\alpha, x + iy))(1 - f(\alpha, x + iy))^{-1} =$$

$$i(1 + x + iy)(1 - x - iy)^{-1} = \frac{(1 - x^2 - y^2)i - 2y}{1 - 2x + x^2 + y^2} = \frac{-y}{1 - x},$$

provando que ϕ é real em μ -quase toda parte de X (note que ϕ está bem definida, pois como já vimos antes, $x \neq 1$ em μ -quase toda parte de X). Aplicando, então, o Lema 3, concluímos que $W_{M_\phi} = M_f$. Assim, W_{M_ϕ} é unitariamente equivalente a W_A e, pelo Lema 4, obtemos que A é unitariamente equivalente a M_ϕ , como queríamos demonstrar.

6 Apêndice B

Agora, vamos demonstrar o teorema espectral para coleções arbitrariamente grandes de operadores lineares auto-adjuntos que comutam dois a dois, com o auxílio da teoria de C^* -álgebras.

“O teorema espectral para coleções de operadores limitados auto-adjuntos que comutam dois a dois”

Seja $\{A_l\}_{l \in L}$ uma coleção não-vazia de operadores lineares limitados auto-adjuntos que comutam dois a dois, definidos em H . Definamos $\mathcal{A}_l$ como sendo a C^* -álgebra gerada por A_l e $I_{B(H)}$ (que é $C^*(A_l)$, seguindo a notação estabelecida anteriormente), para todo $l \in L$, e $\mathcal{A}$ como sendo a C^* -álgebra gerada por todos os operadores A_l juntamente com o operador identidade $I_{B(H)}$ (note que $\mathcal{A}_l \subseteq \mathcal{A}$, para todo $l \in L$). O objetivo, no momento, é mostrar que existe um $*$ -homomorfismo unital de C^* -álgebras $\Gamma : C(K) \rightarrow \mathcal{A}$, onde K é um subespaço topológico fechado de $\prod_{l \in L} \sigma(A_l)$. Pode-se mostrar que todos os elementos ϕ de $\Omega_{C(X)}$ (veja a definição de $\Omega_{C(X)}$ no resumo sobre C^* -álgebras feito anteriormente) são da forma $\phi : f \mapsto \phi(f)$, com $\phi(f) = f(x_\phi)$, para algum $x_\phi \in X$, quando X é um espaço topológico compacto Hausdorff. E se $X = \sigma(A_l)$, por exemplo, tal x_ϕ é único, pois se $x \in \sigma(A_l)$ também satisfizesse tal propriedade, aplicando-se ϕ à função $id_{C(\sigma(A_l))}$ concluímos que $x = x_\phi$. Isto nos permite definir uma função

$$i_l : \Omega_{C(\sigma(A_l))} \ni \phi \mapsto i_l(\phi) := x_\phi \in \sigma(A_l),$$

para todo $l \in L$. Seja

$$\psi_l : C(\sigma(A_l)) \rightarrow \mathcal{A}_l$$

o Cálculo Funcional estabelecido antes, ou seja, ψ_l é o único $*$ -isomorfismo de $C(\sigma(A_l))$ em $\mathcal{A}_l$ tal que $\psi_l(id_{C(\sigma(A_l))}) = A_l$ e $\psi_l(1_{C(\sigma(A_l))}) = I_{B(H)}$, para cada $l \in L$. Então, para qualquer $w \in \Omega_{\mathcal{A}}$, temos que $(w \circ \psi_l)(f) = f(x_{w \circ \psi_l})$, para toda $f \in C(\sigma(A_l))$, uma vez que $w \circ \psi_l \in \Omega_{C(\sigma(A_l))}$ (e $i_l(w \circ \psi_l) = x_{w \circ \psi_l}$). Vamos definir agora uma aplicação

$$i : \Omega_{\mathcal{A}} \rightarrow \prod_{l \in L} \sigma(A_l)$$

por

$$i : w \mapsto (i_l(w \circ \psi_l))_{l \in L}$$

e mostrar que ela é um homeomorfismo. Que ela está bem definida é decorrência do fato de todas as i_l 's estarem bem definidos. Para ver a continuidade de i tome $\{w_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{M}}$ uma rede de elementos de $\Omega_{\mathcal{A}}$ tal que $w_\alpha \rightarrow w$ em $\Omega_{\mathcal{A}}$. Então para todo $l \in L$

$$x_{w_\alpha \circ \psi_l} = id_{C(\sigma(A_l))}(x_{w_\alpha \circ \psi_l}) = (w_\alpha \circ \psi_l)(id_{C(\sigma(A_l))}) =$$

$$w_\alpha(A_l) \longrightarrow w(A_l) = \\ (w \circ \psi_l)(id_{C(\sigma_{A_l})}) = id_{C(\sigma(A_l))}(x_{w \circ \psi_l}) = x_{w \circ \psi_l}.$$

Isto mostra que $\pi_l \circ i$ é contínua, para todo $l \in L$ e, por um teorema de topologia geral,⁴⁷ concluímos que i é contínua.

Vamos mostrar a injetividade. Se $i(w_1) = i(w_2)$, para $w_1, w_2 \in \Omega_{\mathcal{A}}$, então para todo $l \in L$ tem-se que $x_{w_1 \circ \psi_l} = x_{w_2 \circ \psi_l}$. Logo, para cada $l \in L$, as aplicações $w_1 \circ \psi_l$ e $w_2 \circ \psi_l$ coincidem sobre as funções polinomiais definidas em $\sigma(A_l)$. Pelo Teorema da Aproximação de Stone-Weierstrass, concluímos que $w_1 \circ \psi_l = w_2 \circ \psi_l$ (em $C(\sigma(A_l))$). Da sobrejetividade de ψ_l , vem que $w_1 = w_2$ em $\mathcal{A}_l$. Pela definição de $\mathcal{A}$, concluímos que $w_1 = w_2$. Isto estabelece a injetividade de i . Agora, como $\Omega_{\mathcal{A}}$ é compacto e $\prod_{l \in L} \sigma(A_l)$ é Hausdorff, segue que i é um homeomorfismo sobre sua imagem. Logo, a aplicação

$$\gamma : C(i[\Omega_{\mathcal{A}}]) \longrightarrow C(\Omega_{\mathcal{A}})$$

dada por

$$\gamma : f \longmapsto f \circ i$$

é um $*$ -isomorfismo entre C^* -álgebras. Sejam F um $*$ -isomorfismo entre $C(\Omega_{\mathcal{A}})$ e $\mathcal{A}$ (faça $F := (\cdot)^{-1}$, por exemplo, i.e, defina F como sendo a inversa da aplicação de Gelfand, estabelecida anteriormente nas informações sobre C^* -álgebras). Então, definindo $K := i[\Omega_{\mathcal{A}}]$ e

$$\Gamma := F \circ \gamma,$$

temos que Γ é um $*$ -isomorfismo entre $C(K)$ e $\mathcal{A}$ e, portanto, é uma isometria, como já observamos nas observações feitas acerca de C^* -álgebras. Defina

$$\mathcal{R} : C\left(\prod_{l \in L} \sigma(A_l)\right) \ni f \longmapsto f|_K \in C(K)$$

como sendo a aplicação de restrição. Então, para toda $f \in C(\prod_{l \in L} \sigma(A_l))$ temos a estimativa

$$\|(\Gamma \circ \mathcal{R})(f)\| = \|\mathcal{R}(f)\| \leq \|f\|.$$

Considere a $*$ -subálgebra $\mathcal{P}$ gerada pelas projeções canônicas π_l e a aplicação constante igual a 1, $1_{C(\prod_{l \in L} [-\|A_l\|, \|A_l\|])}$. Tal $*$ -subálgebra separa pontos e contém as aplicações constantes e, como $\prod_{l \in L} [-\|A_l\|, \|A_l\|]$ é compacto (pelo Teorema de Tychonoff⁴⁸) e Hausdorff, temos pelo Teorema da Aproximação de Weierstrass que $\mathcal{P}$ é denso em $C(\prod_{l \in L} \sigma(A_l))$.

Está definida, portanto, uma aplicação linear

$$\Lambda : C\left(\prod_{l \in L} \sigma(A_l)\right) \longrightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H),$$

⁴⁷Seja X um espaço topológico e $\{X_i\}_{i \in I}$, $I \neq \emptyset$ uma coleção de espaços topológicos. Então, $f : X \longrightarrow \prod_{i \in I} X_i$ é contínua se, e somente se, $\pi_i \circ f$ é contínua para todo $i \in I$

⁴⁸Se $I \neq \emptyset$ e X_i é um espaço topológico compacto e não-vazio, para todo $i \in I$, então $\prod_{i \in I} X_i$ é compacto

dada por $\Lambda := \Gamma \circ \mathcal{R}$, que é contínua, devido à estimativa

$$\|\Lambda(f)\| = \|(\Gamma \circ \mathcal{R})(f)\| = \|\mathcal{R}(f)\| \leq \|f\|,$$

para toda $f \in C(\prod_{l \in L} [-\|A_l\|, \|A_l\|])$ ($\mathcal{P} \subseteq C(\prod_{l \in L} [-\|A_l\|, \|A_l\|])$). Podemos mostrar o teorema espectral para uma coleção de operadores lineares auto-adjuntos que comutam dois a dois, assim como foi feito para o caso em tínhamos apenas um operador linear limitado auto-adjunto, mas fazendo algumas modificações:

1. assim como a aplicação Φ_C definida na página 44, Λ é contínuo, e um $*$ -homomorfismo unital entre $*$ -álgebras, pois é a composta de dois $*$ -homomorfismos contínuos unitais;
2. o “ K ”, agora em questão, permanece sendo um conjunto compacto e Hausdorff, e podemos aplicar o Teorema da Representação de Riesz, assim como feito na página 45. “ H_u ” será agora definido por

$$H_u := \overline{\{f((A_l)_{l \in L})u \in \mathcal{B}(H) : f \in C(K)\}},$$

e “ G_u ” será definido agora por

$$G_u := \{f((A_l)_{l \in L})u \in \mathcal{B}(H) : f \in C(K)\},$$

- de modo que temos G_u denso em H_u . Garante-se, assim, a existência da aplicação $\tilde{\Omega}_u$ (adaptada, é claro);

3. agora, ao invés de provar que $\tilde{\Omega}_u \circ A \circ \tilde{\Omega}_u^{-1} = M_{id_{C_{\mu_u}(I)}}$, devemos provar que $\tilde{\Omega}_u \circ A_j \circ \tilde{\Omega}_u^{-1} = M_{\pi_j}$, para todo $j \in L$, onde π_j é a j -ésima projeção canônica. Para tanto, basta substituir A por $\pi_j((A_l)_{l \in L})$, e a demonstração segue de maneira análoga à feita anteriormente. Isso decorre dos fatos que $\pi_j((A_l)_{l \in L}) = A_j$ e Λ é um homomorfismo de álgebras. Vamos mostrar que $\pi_j((A_l)_{l \in L}) = A_j$. Para cada $j \in L$, vemos que

$$\Lambda(\pi_j) = (F \circ \gamma \circ \mathcal{R})(\pi_j) = F(\pi_j|_K \circ i),$$

onde

$$\pi_j|_K \circ i : \Omega_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Vejamos quem é $\pi_j|_K \circ i$. Para cada $\phi \in \Omega_{\mathcal{A}}$, vemos que

$$(\pi_j|_K \circ i)(\phi) = \pi_j|_K(i_l(\phi \circ \psi_l))_{l \in L} = \pi_j|_K(x_{\phi \circ \psi_l})_{l \in L} =$$

$$x_{\phi \circ \psi_j} = id_{C(\sigma(A_j))}(x_{\phi \circ \psi_j}) = (\phi \circ \psi_j)(id_{C(\sigma(A_j))}) =$$

$$\phi(A_j) = (\hat{A}_j)(\phi) = (F^{-1}(A_j))(\phi).$$

Portanto,

$$F(\pi_j|_K \circ i) = F(F^{-1}(A_j)) = A_j$$

e

$$\pi_j((A_l)_{l \in L}) := \Lambda(\pi_j) = A_j,$$

qualquer que seja $j \in L$;

4. em seguida, na aplicação do Lema de Zorn, basta substituir o A que ali aparece por $A_j = \pi_j((A_l)_{l \in L})$, para todo $j \in L$, e concluiremos que $\overline{\oplus_{\alpha \in M} H_{u_\alpha}}$ é A_j -invariante, para todo $j \in L$, pois cada H_{u_α} é $\pi_j((A_l)_{l \in L})$ -invariante, para todo $j \in L$. Assim, da densidade de $\mathcal{P}$ em $C(\prod_{l \in L} \sigma(A_l))$, temos que

$$f((A_l)_{l \in L})w \in (\overline{\oplus_{\alpha \in M} H_{u_\alpha}})^\perp,$$

para toda $f \in C(\prod_{l \in L} \sigma(A_l))$ ($w \neq 0$ sendo um elemento que, por hipótese, pertence a $(\overline{\oplus_{\alpha \in M} H_{u_\alpha}})^\perp$).

Isto estabelece a contradição necessária, analogamente à obtida na aplicação do lema de Zorn da demonstração anterior;

5. a última adaptação que vale a pena ser mencionada é na página 51. Ao invés de mostrar que $U \circ A \circ U^{-1} : \text{Dom}(M_f) \ni g \mapsto f \cdot g \in L^2(N, \mu)$, para uma f real e Borel-mensurável, basta substituir A por $\pi_j((A_l)_{l \in L}) = A_j$, para cada $j \in L$, e obteremos, finalmente, o

Teorema espectral para uma coleção arbitrária $\{A_l\}_{l \in L}$ de operadores limitados auto-adjuntos que comutam dois a dois: *Se H é um espaço de Hilbert e $\{A_l\}_{l \in L}$ é um conjunto de operadores lineares auto-adjuntos limitados que comutam dois a dois, então existem um espaço de medida (N, μ) e uma transformação linear unitária $U : H \rightarrow L^2(N, \mu)$ tal que $\Phi \circ A_j \circ \Phi^{-1} : \{g \in L^2(N, \mu) : \tilde{\pi}_j \cdot g \in L^2(N, \mu)\} \ni g \mapsto \tilde{\pi}_j \cdot g \in L^2(N, \mu)$, com $\tilde{\pi}_j := \hat{p}_j$, com*

$$p_j := ((\pi_j)_{C_{\mu_{u_\alpha}}(\prod_{l \in L} \sigma(A_l))})_{\alpha \in M}$$

(em outras palavras, $\Phi \circ A_j \circ \Phi^{-1} = M_{\tilde{\pi}_j}$, para todo $j \in L$).

Referências

- [1] Barata, João C. A., “*Curso de Física-Matemática*” (online)
- [2] Brezis, Haim, “*Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*”, Springer Science+Business Media, 2011
- [3] Cordaro, Paulo D., “*Tópicos de Análise Funcional*”, notas de aula do aluno Pedro H. Pontes
- [4] Carlsson, Hasse,
“[www.math.chalmers.se/~hasse/distributioner\(underline\)eng.pdf](http://www.math.chalmers.se/~hasse/distributioner(underline)eng.pdf)”
- [5] de Faria, Edson; de Melo, Welington, “*Mathematical Aspects of Quantum Field Theory*”, Cambridge University Press, 2011
- [6] de Oliveira, César R., “*Intermediate Spectral Theory and Quantum Mechanics*”, Birkhäuser Verlag AG, 2009
- [7] de Oliveira, César R.; Verri, Alessandra A., “*Self-adjoint Extensions of Coulomb Systems in 1, 2 and 3 Dimensions*”, Annals Of Physics 324, 251-266, 2009
- [8] Dimock, Jonathan, “*Quantum Mechanics and Quantum Field Theory - A Mathematical Primer*”, Cambridge University Press, 2011
- [9] Fernandez, Pedro J., “*Medida e Integração*”, Projeto Euclides, 1996
- [10] Gesztesy, F.; Pittner, L., “*Electrons in Logarithmic Potentials I. Solutions of the Schrödinger Equation*”, J. Phys. A: Math Gen 11 679, 1978
- [11] Groetsch, Charles W., “*Stable Approximate Evaluation of Unbounded Operators*”, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007
- [12] Gustafson, Stephen J.; Sigal, Israel M., “*Mathematical Concepts of Quantum Mechanics*”, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003, 2006
- [13] Honig, Samuel C., “*Análise Funcional e Aplicações*”, Publicações do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1970
- [14] Honig, Samuel, C., “*Aplicações da Topologia à Análise*”, Editora Livraria da Física, 2011
- [15] Leoni, Giovanni, “*A First Course in Sobolev Spaces*”, Graduate Studies In Mathematics, Volume 105, 2009
- [16] MacCluer, Barbara D., “*Elementary Functional Analysis*”, Springer Science + Business Media, LLC, 2009
- [17] Murphy, Gerard J., “*C*-Algebras and Operator Theory*”, Academic Press, 1990

- [18] Nelson, Edward, “*Topics in Dynamics I: Flows*”, Princeton Press And The University Of Tokyo Press, 1969
- [19] Reed, Michael; Simon, Barry, “*Methods of Mathematical Physics I: Functional Analysis*”, Academic Press, 1980
- [20] Reed, Michael; Simon, Barry, “*Methods of Mathematical Physics II: Fourier Analysis, Self-Adjointness*”, Academic Press, 1975
- [21] Rudin, Walter, “*Real and Complex Analysis*”, McGraw-Hill Book Company, 1966
- [22] Simon, Barry, “*Schrödinger Operators with Singular Magnetic Vector Potentials*”, Mathematische Zeitschrift, 1973, Volume 131, Issue 4, pp 361-370
- [23] Treves, François, “*Basic Linear Partial Differential Equations*”, Academic Press, 1975