**O Caráter de Chern-Connes
calculado em $\Psi_{cl}^0(S^1)$ e $\Psi_{cl}^0(S^2)$**

Lucas Santos de Sá

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. David Pires Dias

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de
Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

São Paulo, abril de 2019

O Caráter de Chern-Connes calculado em $\Psi_{cl}^0(S^1)$ e $\Psi_{cl}^0(S^2)$

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 23/04/2019. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. David Pires Dias - IME-USP
- Prof^a. Dr^a. Patricia Hess - UTFPR
- Prof. Dr. Pedro Tavares Paes Lopes - USP

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela oportunidade e recursos recebidos. Aos meus pais, Odamir e Roseli, por materializarem tais recursos e seu apoio incondicional. Ao David, meu orientador, por seus conselhos e empatia. À Patricia, Pedro e Ricardo pelas valorosas contribuições na versão final do texto. Agradeço ao Lucio por tantas horas de conversa e companhia. À Marina pelos inúmeros momentos felizes.

Aos amigos do IME, Elivelton, Erick, Evandro, Fernando, Renata, Rodrigo, Rubens, Stella, que tornaram este ambiente agradável. Aos muitos cafés e a todas as horas debatendo problemas nas lousinhas. Aos professores que compartilharam um pouco de seu conhecimento.

Aos amigos de mocidade e ao próprio Movimento Jovem Espírita que me permitiram manter o equilíbrio.

“E a esperança na alvorada, foi o que me manteve
Onde termina a estrada, onde começa o mar
Onde termina o mar, Deus me ensina a voar
Sou filho do improviso, eu danço eu me viro”
Bússola - Projeto Carrossel

Resumo

SA, Lucas. S. **O Caráter de Chern-Connes calculado em $\Psi_{cl}^0(S^1)$ e $\Psi_{cl}^0(S^2)$** . 2019. 68 f. Dissertação - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

Este trabalho busca explorar a definição dada por Connes em [Con01] do caráter de Chern para a geometria não-comutativa. Construimos os funtores K_0 e K_1 com os principais resultados para demonstrarmos a Sequência Exata de Seis Termos e a Sequência de Mayer-Vietoris. Calculamos os grupos de K-teoria de algumas álgebras de operadores pseudo-diferenciais clássicos de ordem zero. Posteriormente usamos as sequências exatas para calcular explicitamente o caráter de Chern-Connes nos C^* -sistemas dinâmicos.

Palavras-chave: Caráter de Chern-Connes, K-teoria, C^* -álgebra.

Abstract

SA, LUCAS. S. **The Chern-Connes Character calculate in $\Psi_{cl}^0(S^1)$ and $\Psi_{cl}^0(S^2)$** . 2019. 68 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

This work intends to explore the definition given by Connes in [Con01] of the Chern character for noncommutative geometry. We construct the functors K_0 and K_1 with the main results to demonstrate the Exact Sequence of Six Terms and the Sequence of Mayer Vietoris. We compute the K-groups of some algebras of classical zero-order pseudo-differential operators. We then use the exact sequences to explicitly calculate the Chern-Connes Character of C^* -dynamic systems.

Keywords: Chern-Connes Character, K-theory, C^* -álgebra.

Sumário

Lista de Símbolos	ix
Introdução	1
1 Conceitos Preliminares	3
1.1 Noções de C^* -álgebra	3
1.1.1 Unitização	5
1.2 Noções de Topologia Algébrica	6
2 K-teoria para C^*-álgebras	9
2.1 Construção de K_0	9
2.1.1 Construção de K_0 para C^* -álgebras com unidade	9
2.2 K_0 como funtor	11
2.2.1 A construção de K_0 para C^* -álgebras sem unidade	13
2.3 Construção de K_1	14
2.3.1 K_1 como funtor	15
3 Sequências Exatas de Seis Termos	17
3.1 Sequência Clássica de Seis Termos	17
3.2 Mayer-Vietoris	28
4 O caráter de Chern-Connes	35
4.1 O caráter de Chern Clássico	35
4.2 O caráter de Chern-Connes	37
5 O C^*-sistema dinâmico $(\overline{\Psi_{cl}^0(S^1)}, S^1, \alpha)$	47
6 O C^*-sistema dinâmico $(\overline{\Psi_{cl}^0(S^2)}, S^2, \alpha)$	55
A Grupo de Grothendieck	61
B Produto Tensorial e Derivada Exterior	63
Referências Bibliográficas	65
Índice Remissivo	67

Lista de Símbolos

β_A	Aplicação de Bott
α_A	Função Índice
$\sim_h$	Homotopia
S^1	$\{z \in \mathbb{C} : z = 1\}$
$\sim_0$	Relação de equivalência em K_0
$\sim_1$	Relação de equivalência em K_1
$\mathbb{D}$	$\{z \in \mathbb{C} : z \leq 1\}$
$\mathbf{1}$	Função constante de valor igual a 1
$\mathfrak{z}$	Função identidade
F_d	Transformada de Fourier discreta
m.p.f.g	Módulo projetivo finitamente gerado
$\tilde{A}$	Unitização 1.1.1
$C(X)$	Espaço das funções $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ contínuas
$B(H)$	Espaço dos operadores limitados em espaço de Hilbert
$Hom(A, B)$	Homomorfismos entre A e B

Introdução

Em 1980 Alain Connes, no artigo [Con01], expandiu a noção do caráter de Chern para o, atualmente denominado, caso não-comutativo. Sua contribuição foi perceber e adaptar resultados análogos aos da teoria clássica para o caso das C^* -álgebras.

O caráter de Chern-Connes, denotado por ch_τ ; será definido numa terna (A, G, α) , com A uma C^* -álgebra, G um grupo e α uma ação contínua, chamada de C^* -sistema dinâmico; é definido como um homomorfismo entre os grupos $K_i(A)$, de K-teoria, e os grupos de cohomologia de G .

Inicialmente definimos Ch_τ , o caráter de Chern-Connes para o caso em que o domínio é K_0 , para posteriormente, considerando o isomorfismo

$$K_0(C(S^1) \times A) \approx K_0(A) \times K_1(A),$$

conseguirmos estender a definição para o domínio incluindo o K_1 . Além disso, mostramos que os funtores se comportam de maneira independente.

Por fim explicitamos os cálculos do caráter de Chern-Connes, anteriormente definido, em dois C^* -sistemas dinâmicos cujas C^* -álgebras são dadas pelos operadores pseudo-diferenciáveis clássicos de ordem 0 de S^1 e S^2 .

O primeiro capítulo é um apanhado com resultados de C^* -álgebra e topologia algébrica que serão utilizados ao longo do texto. Enunciamos, por exemplo, o Teorema de Gelfand e a construção de $M_n(A)$ onde A é uma C^* -álgebra. Apresentamos a unitização, isto é, uma maneira de, a partir de uma dada C^* -álgebra A , construir uma outra C^* -álgebra com unidade e que tem uma cópia de A .

Definimos, para o nosso contexto, o que são seqüências exata curta, cindida e diagrama comutativo, logo após falamos sobre o Lema dos Cinco, que é uma maneira de provar a existência de isomorfismos em diagramas comutativos.

No segundo capítulo temos como objetivo construir os funtores K_0 e K_1 . $K_0(A)$ é construído, inicialmente, para A uma C^* -álgebra com unidade e tendo como base as projeções da C^* -álgebra das matrizes $M_n(A)$. Com a propriedade universal conseguimos apresentar a definição de K_0 para $*$ -homomorfismos e utilizando a seqüência exata cindida da unitização fazemos a extensão para o caso em que A não tem unidade.

O funtor K_1 é definido utilizando os elementos unitários de $M_n(\tilde{A})$. Ao contrário do caso K_0 é possível realizar a construção independente da álgebra ter ou não unidade. Mostramos que K_1 é um funtor meio-exato que cinde.

No capítulo 3 é feita a construção da seqüência exata de seis termos e da seqüência de Mayer-Vietoris, tais seqüências serão responsáveis por conectar K_0 e K_1 . Para a seqüência de seis termos é necessário definir duas aplicações: do índice e exponencial. A aplicação do índice é feita de ma-

neira tradicional e apenas enunciamos sua versão para isometrias parciais. Para construirmos a exponencial é necessário conhecer a aplicação de Bott, citamos os principais passos desta definição.

Com estes conceitos, mostramos a relação entre K_0 e K_1 , definimos suspensão e mostramos que $K_1(SA) \approx K_0(A)$. Indutivamente, fazemos a extensão para o funtor K_n e a sequência exata longa.

Damos a motivação de Mayer-Vietoris e fazemos a sua demonstração utilizando uma C^* -álgebra auxiliar $\hat{A}$. O principal passo é perceber que $K_i(\hat{A}) = K_i(A)$. Usamos o Lema dos Cinco para construir a prova. Tendo este teorema, calculamos de maneira não convencional, os grupos de K-teoria de $C(S^1)$.

No capítulo 4 é apresentado brevemente o caráter de Chern para a geometria diferencial clássica. Partindo disso vamos adaptando as definições para o caso de C^* -álgebra, particularmente, definimos conexão e curvatura.

Ao longo do capítulo 5, são calculados os grupos de K-teoria da álgebra dos operadores pseudo-diferenciais de S^1 , denotado aqui por $\overline{\Psi_{cl}^0(S^1)}$. Para encontrar estes grupos usamos a sequência exata de seis termos e um lema a respeito da sobrejetividade do índice neste contexto. Posteriormente, calculamos o seu caráter de Chern-Connes.

O capítulo 6 é uma continuação destes resultados, sendo calculados os grupos de K-teoria de $\overline{\Psi_{cl}^0(S^2)}$. Utilizamos a sequência de Mayer-Vietoris e o lema a respeito da sobrejetividade do índice. Por fim, calculamos seu caráter de Chern-Connes e deixamos em função do traço desejado.

Por fim, o apêndice A é a construção detalhada do Grupo de Grothendieck e no apêndice B é feita a definição de derivada exterior.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

Neste capítulo faremos um apanhado de resultados de C^* -álgebra e topologia algébrica que serão utilizados ao longo do trabalho. O leitor que desejar uma referência consolidada de introdução aos temas pode consultar o livro do Gerard Murphy [Mur14] que cobre vastamente os conceitos de C^* -álgebra. Além disso, uma referência mais enxuta é a apostila do Ruy Exel [Exe02].

Ao longo do texto utilizaremos também resultados e conceitos de topologia algébrica, recomendamos como bibliografia o livro do Allen Hatcher [Hat05]¹.

1.1 Noções de C^* -álgebra

Existem, essencialmente, duas maneiras de se motivar C^* -álgebra: pelo ponto de vista algébrico e do ponto de vista analítico. Algebricamente, de forma axiomática, define-se álgebras munidas de uma involução $*$, com propriedades semelhantes as da conjugação complexa. Analiticamente estuda-se as propriedades de um espaço de operadores como $C(X)$ ou $B(H)$, definindo então a estrutura de C^* -álgebra baseada nas relações entre estes operadores.

De qualquer forma, um dos exemplos mais simples e que será nosso guia para fazer a definição é o espaço de matrizes complexas $M_n(\mathbb{C})$ com as operações usuais.

Definição 1.1 (Álgebra). $(A, \cdot)$ é uma álgebra sobre $\mathbb{C}$, se A é um espaço vetorial complexo e munido da operação $\cdot : A \times A \longrightarrow A$ que é uma aplicação bilinear associativa.

Frequentemente chamaremos álgebra sobre $\mathbb{C}$ simplesmente de *álgebra complexa* ou ainda, *álgebra*. Para simplificar a notação ao invés de $(A, \cdot)$ vamos usar apenas A sempre que o contexto deixar claro qual é a operação de multiplicação.

Definição 1.2 (Álgebra Abeliana). Seja A uma álgebra. Se $a \cdot b = b \cdot a$ para todos elementos $a, b \in A$ então diremos que A é abeliana ou comutativa.

Definição 1.3 (Unidade). Seja A uma álgebra, se existir um elemento $1_A \in A$ tal que

$$a \cdot 1_A = a = 1_A \cdot a$$

para qualquer $a \in A$ diremos que 1_A é a unidade de A e chamaremos A de álgebra com unidade.

¹Assim como os demais livros do Hatcher este encontra-se gratuitamente disponível em seu site pessoal.

Definição 1.4 (Álgebra Normada). *Uma álgebra A é chamada de álgebra normada quando está munida com uma função $\|\cdot\| : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ que satisfaz os axiomas de norma e que seja submultiplicativa, isto é, dados quaisquer elementos $a, b \in A$ temos a desigualdade*

$$\|a \cdot b\| \leq \|a\| \cdot \|b\|.$$

A norma acima define, naturalmente, uma métrica na álgebra e, com isto, podemos tratar dos conceitos de completude. Uma álgebra normada completa também é dita *álgebra de Banach*.

Definição 1.5 (C^* -álgebra). *Seja A uma álgebra de Banach, uma operação $*$ é chamada de involução se tiver as seguintes propriedades:*

- $(a + b)^* = a^* + b^*$;
- $(ab)^* = b^* a^*$;
- $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$;
- $(a^*)^* = a$.

Se além destas propriedades tivermos

$$\|a^* a\| = \|a\|^2,$$

diremos que A é uma C^ -álgebra. Caso A tenha unidade diremos que ela é uma C^* -álgebra com unidade.*

Com estes axiomas podemos mostrar que, em uma C^ -álgebra, $\|a^*\| = \|a\|$, para qualquer $a \in A$.*

Daremos agora uma série de exemplos de C^* -álgebra que serão utilizados posteriormente no decorrer do texto.

Exemplo 1.6. *A álgebra nula $\{0\}$ é uma C^* -álgebra. O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ com as operações usuais também é uma C^* -álgebra.*

Exemplo 1.7. *O espaço das matrizes $M_n(\mathbb{C})$ é uma C^* -álgebra quando munido das operações usuais. A involução é definida como $A^* := \overline{A}^t$, $A \in M_n(\mathbb{C})$ e a norma é definida usando a relação única entre uma matriz e o operador linear por ela definida.*

Exemplo 1.8 (Espaço de funções). *Seja X um espaço Hausdorff topológico compacto, o espaço das funções $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ contínuas $C(X)$ é uma C^* -álgebra com as operações definidas a seguir:*

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &:= f(x) + g(x) \\ (\lambda f)(x) &:= \lambda f(x) \\ (f \cdot g)(x) &:= f(x)g(x) \\ (f^*)(x) &:= \overline{f(x)} \\ \|f\| &:= \sup_{x \in X} |f(x)|. \end{aligned}$$

São exemplos importantes os espaços $C([0, 1])$, $C(S^1)$ e $C(\mathbb{D})$, em que $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ e $\mathbb{D}$ é o disco complexo de raio 1.

Exemplo 1.9 (Funções que anulam no infinito). *Seja X um espaço Hausdorff e localmente compacto, denotaremos por $C_0(X)$ o conjunto das funções $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ o*

conjunto $\{x : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ é compacto. Diremos que estas funções se anulam no infinito. O leitor pode encontrar a demonstração de que $C_0(X)$ é uma C^* -álgebra com as operações iguais às do exemplo anterior. A demonstração com detalhes encontra-se em 1.1.3 de [Mur14]. Repare que se X é compacto então $C_0(X) = C(X)$.

Observação 1.10. Este exemplo é notável porque ele caracteriza as C^* -álgebras abelianas. Em termos mais precisos: se A é uma C^* -álgebra abeliana então A é isomorfa a $C_0(X)$, onde X é o conjunto de todos os homomorfismos não nulos de A em $\mathbb{C}$. Além disso, X é um espaço localmente compacto.

O primeiro passo para a demonstração é definir uma transformada que associa a cada elemento b um funcional linear $\tilde{b} : X \rightarrow \mathbb{C}$ definido como $\tilde{b}(\varphi) := \varphi(b)$.

Este resultado fundamental é conhecido como Teorema de Gelfand e sua demonstração completa pode ser encontrada no teorema 1.3.6 de [Mur14] ou no teorema 8.2 de [Ere02].

Exemplo 1.11 (Álgebra de Matrizes). Seja A uma C^* -álgebra, defina o conjunto $M_n(A)$ como o conjunto das matrizes de ordem n com coeficientes em A . Assim como feito em $M_n(\mathbb{C})$ podemos definir a soma de duas matrizes, produto por escalar e multiplicação. Além disso, define-se a involução $*$ inspirada na conjugação complexa:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^* := \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* & \cdots & a_{n1}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* & \cdots & a_{n2}^* \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{1n}^* & a_{2n}^* & \cdots & a_{nn}^* \end{pmatrix}$$

tal conjunto munido das operações usuais também é uma C^* -álgebra. A demonstração deste fato pode ser encontrado em 3.4.2 de [Mur14].

Definição 1.12 (C^* -subálgebra). Seja A uma C^* -álgebra e $B \subset A$, diremos que B é uma C^* -subálgebra quando B for uma subálgebra fechada pelas operações de soma e produto, além disso, fechada via involução e na topologia de A , isto é, o fecho de B em A é o próprio B . Consideraremos a restrição da norma em A como a norma de B .

Definição 1.13 (C^* -álgebra gerada). Sejam A uma C^* -álgebra e $B \subset A$ um conjunto qualquer. Podemos definir a C^* -álgebra gerada por B como a menor C^* -subálgebra de A que contém B .

Definição 1.14 (Soma Direta). Sejam A e B duas C^* -álgebras, definimos a soma direta como

$$A \oplus B = \{(a, b) \in A \times B\}$$

munindo este conjunto com as operações coordenada a coordenada e a norma do máximo temos que $A \oplus B$ é uma C^* -álgebra.

Os detalhes destas últimas definições também encontram-se em [Mur14].

1.1.1 Unitização

Uma frequente dificuldade na teoria de C^* -álgebras é trabalhar com álgebras sem unidade, como no exemplo 1.9 quando X não é compacto. Para contornar este desafio foi desenvolvida uma

maneira de criar uma álgebra equivalente que por sua vez tem unidade, chamaremos este processo de *unitização*.

Seja A uma C^* -álgebra, definiremos $\tilde{A} := A \times \mathbb{C}$ com a soma e produto por escalar definido como na soma direta entre espaços vetoriais. O problema está na definição do produto, apesar de extremamente natural fazer, para $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $(a, \lambda) \cdot (b, \mu) = (ab, \lambda\mu)$ esta operação não transforma $\tilde{A}$ em uma C^* -álgebra.

Para contornarmos este problema e definir o produto faremos:

$$(a, \lambda) \cdot (b, \mu) := (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$$

Repare que temos $1_{\tilde{A}} = (0, 1)$ como a unidade de $\tilde{A}$, além disso, se A for abeliano, $\tilde{A}$ também é abeliano. Quando munimos $\tilde{A}$ com a norma $\|(a, \lambda)\| = \|a\| + |\lambda|$ a álgebra $\tilde{A}$ se torna completa.

No caso em que A é uma C^* -álgebra com unidade podemos fazer as mesmas considerações, o que nos leva a estudar os homomorfismos entre C^* -álgebras e suas unitizações.

Dado um $*$ -homomorfismo $\varphi : A \rightarrow B$ defina a extensão $\tilde{\varphi} : \tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$ como $\tilde{\varphi}(a, \alpha) := (\varphi(a), \alpha)$. Como $\varphi(1_A) = 1_B$ podemos dizer que $\tilde{\varphi}$ preserva a unidade.

O teorema abaixo, demonstrado em 1.2 de [Mur14] para o caso de espaços de Banach e em 1.15 de [DC01] para C^* -álgebras, condensa e formaliza as informações acima.

Teorema 1.15. *Se A é uma C^* -álgebra então $\tilde{A}$, munida da norma acima, também é uma C^* -álgebra com a operação $*$ definida como*

$$(a, \lambda)^* := (a^*, \lambda).$$

1.2 Noções de Topologia Algébrica

Neste trabalho usaremos apenas conceitos básicos de topologia algébrica e sempre aplicados ao contexto de C^* -álgebras, grupos abelianos e sequências exatas. Caso o leitor deseje se aprofundar neste tópico recomendamos, como anteriormente, o livro [Hat05].

Definição 1.16 (Homotopia). *Seja X um espaço topológico, dois elementos, x e $y \in X$, são homotópicos se existir um caminho contínuo que os liga, isto é, se existir uma função contínua $f : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $f(0) = x$ e $f(1) = y$. Denotaremos por $x \sim_h y$.*

A homotopia define, naturalmente, uma relação de equivalência, pois a função constante mostra que $x \sim_h x$, o caminho inverso garante a comutatividade e a transitividade decorre da concatenação dos caminhos.

Exemplo 1.17. *Considere o espaço $\mathbb{C}$, quaisquer dois elementos são homotópicos pois, dados $x, y \in \mathbb{C}$ a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ definida como $f(t) = (1 - t)x + ty$ é um caminho contínuo entre eles.*

A partir da função do exemplo anterior podemos concluir que dois elementos numa C^* -álgebra são sempre homotópicos.

Definição 1.18 (Homotopia entre homomorfismos). *Sejam A, B duas C^* -álgebras. Dois $*$ -homomorfismos $\varphi, \psi : A \rightarrow B$ são chamados de homotópicos, e denotados por $\varphi \sim_h \psi$, se existir*

uma função contínua de $[0, 1]$ em B com $t \mapsto \varphi_t \in \text{Hom}(A, B)$ e $a \mapsto \varphi_t(a)$ tal que

$$\varphi_0 = \varphi \text{ e } \varphi_1 = \psi.$$

Definição 1.19 (Homotopia entre C^* -álgebras). *Sejam A e B duas C^* -álgebras, diremos que elas são homotopicamente equivalentes se existir dois $*$ -homomorfismos*

$$\varphi : A \longrightarrow B \text{ e } \psi : B \longrightarrow A$$

tais que

$$\psi \circ \varphi \sim_h \text{id}_A \text{ e } \varphi \circ \psi \sim_h \text{id}_B.$$

Estudar o comportamento de $*$ -homomorfismos é um dos pontos centrais da K-teoria. Para facilitar o enunciado e demonstração das propriedades vamos, como é padrão na literatura, utilizar sequências exatas.

Definição 1.20 (Sequências Exatas). *Uma sequência de C^* -álgebras A_n e φ_n $*$ -homomorfismos será chamada de sequência exata e denotada por*

$$\dots \longrightarrow A_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} A_n \xrightarrow{\varphi_n} A_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} \dots$$

quando $\text{Im}(\varphi_n) = \ker(\varphi_{n+1})$ para todo n .

Definição 1.21 (Sequência exata curta). *Quando a sequência estiver na forma*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

diremos que ela é uma sequência exata curta. Repare que, neste caso, φ é injetor e ψ é sobrejetor.

Uma importante aplicação de sequências exatas curtas acontece quando I é um ideal de A . Neste caso podemos nos restringir em

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/I \longrightarrow 0$$

onde i é a inclusão e π a projeção no quociente.

Definição 1.22 (Sequência Cindida). *Caso a sequência exata curta admita $\lambda : B \longrightarrow A$ uma aplicação (inversa à direita), tal que $\psi \circ \lambda = \text{id}_B$ diremos que a sequência cinde e denotaremos por*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0.$$

$\swarrow \lambda$

Sequências exatas também nos fornece uma maneira elegante de escrever a unitização, apresentada na seção 1.1.1. Repare que $\tilde{A}/A \approx \mathbb{C}$,

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} \tilde{A} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C} \longrightarrow 0. \quad (1.22.1)$$

$\swarrow \lambda$

Dadas A , B , C e D quatro C^* -álgebras, diremos que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \varphi \downarrow & & \downarrow g \\ C & \xrightarrow{\psi} & D \end{array}$$

é comutativo quando

$$g \circ f = \psi \circ \varphi.$$

Este conceito será importante para expressar de forma resumida relações entre operadores e C^* -álgebras.

Vamos enunciar o resultado que é conhecido como *Lema dos Cinco* e que é extremamente útil para encontrar isomorfismos em sequências exatas.

Seja o diagrama comutativo de C^* -álgebra abaixo.

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \delta \downarrow & & \varepsilon \downarrow \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E'. \end{array}$$

Se ambas as linhas são sequência exatas, α , β , δ e ε são isomorfismos então γ também é um isomorfismo, a demonstração deste lema encontra-se na seção 2.1 de [Hat05].

Capítulo 2

K -teoria para C^* -álgebras

Neste capítulo apresentaremos as construções básicas referentes a K -teoria topológica de C^* -álgebras. Uma das primeiras referências completas e consolidadas sobre o tema é de Blackadar em [Bla86] no final da década de 80. Seguimos aqui duas referências posteriores e mais didáticas: [RLL00] e [WO93], ambas podem ser utilizadas para o leitor consultar o tema. Uma diferença entre os dois livros é que o primeiro faz as proposições usando sequências exatas curtas enquanto o segundo usa a linguagem dos ideais. Deriva dos comentários do capítulo anterior que ambas as maneiras são equivalentes.

O objetivo deste capítulo é construir dois funtores: K_0 e K_1 entre a categoria das C^* -álgebras e a categoria dos grupos abelianos. Enquanto K_0 será construído estudando as projeções de uma C^* -álgebra, K_1 será definido com base nos seus unitários.

A noção intuitiva das duas construções é bem semelhante: primeiro defina uma relação de equivalência na álgebra. Após isso, estenda a definição para a álgebra $M_n(A)$, por fim, considere uma nova relação de equivalência no conjunto $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n(A)$. O quociente resultará no grupo desejado.

2.1 Construção de K_0

A construção de K_0 é feita em duas etapas: primeiro definimos K_0 para uma C^* -álgebra com unidade. Depois, aplicando a técnica de unitização, podemos definir para uma C^* -álgebra qualquer.

2.1.1 Construção de K_0 para C^* -álgebras com unidade

Inspirado nas definições usuais e bastante comuns em álgebra linear, podemos definir projeção em uma C^* -álgebra.

Definição 2.1 (Projeção). *Seja p um elemento de uma C^* -álgebra A , diremos que p é uma projeção se*

$$p^2 = p \text{ e } p^* = p.$$

O conjunto das projeções de A será denotado por $\mathcal{P}(A)$. Além disso, definimos projeções no conjunto das matrizes $M_n(A)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina

$$\mathcal{P}_n(A) := \mathcal{P}(M_n(A)).$$

Por fim, considere

$$\mathcal{P}_\infty(A) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(M_n((A))).$$

Em $\mathcal{P}_\infty(A)$ iremos considerar a relação de equivalência de Murray-Von-Neumann dada por $p \sim q$ se, e somente se, existe $v \in M_{n \times m}(A)$ ¹ tal que $p = v^*v$ e $q = vv^*$. Defina então a operação em $\mathcal{P}_\infty(A)$:

$$p \oplus q = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}.$$

Estamos deixando implícito o tamanho de cada elemento, a rigor os zeros que aparecem nessa diagonal possuem tamanhos distintos, por exemplo, se $p \in M_n(A)$, $q \in M_m(A)$ então $p \oplus q \in M_{n+m}(A)$ e

$$p \oplus q = \begin{pmatrix} p & 0_{n \times m} \\ 0_{m \times n} & q \end{pmatrix}.$$

Tal operação, aliada a equivalência de Murray-Von-Neumann, possui propriedades que permitem que o grupo quociente seja um semigrupo abeliano.

Definição 2.2. *Seja A uma C^* -álgebra, defina*

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{P}_\infty(A) / \sim$$

É possível demonstrar que $\mathcal{D}$ é um semigrupo abeliano quando munido da operação $[p] + [q] := [p \oplus q]$. Os detalhes estão feitos na proposição 2.3.2 [RLL00].

Após estes comentários iniciais estamos prontos para a definição de K_0 .

Definição 2.3. *Seja A uma C^* -álgebra com unidade ², defina*

$$K_0(A) := G(\mathcal{D}(A)),$$

onde $G(S)$ é o Grupo de Grothendieck do semigrupo abeliano S , isto é, a construção que faz de um semigrupo abeliano um grupo abeliano.

Esta técnica está explicada em detalhes no apêndice A.

Um conceito importante definido em A.2 é o da aplicação de Grothendieck $\gamma : \mathcal{D}(A) \longrightarrow G(\mathcal{D}(A))$. A partir dela, defina $[\cdot]_0$ a função canônica:

$$\begin{aligned} [\cdot]_0 : \mathcal{P}_\infty(A) &\longrightarrow K_0(A) \\ p &\mapsto [p]_0 = \gamma([p]). \end{aligned}$$

Proposição 2.4 (Representação padrão de K_0 com unidade). *Seja A uma C^* -álgebra com unidade. Podemos dar uma descrição explícita de K_0 :*

$$K_0(A) = \{[p]_0 - [q]_0 : p, q \in \mathcal{P}_\infty(A)\}.$$

¹Posteriormente chamaremos v de uma isometria parcial.

²Para uma explicação mais detalhada da importância de se considerar A com unidade consulte o comentário 3.1.5 de [RLL00].

A demonstração decorre da construção do grupo de Grothendieck e pode ser encontrada na íntegra na proposição 3.1.7 de [RLL00].

Observação 2.5. *Com a representação padrão podemos ver que a C^* -álgebra nula $\{0\}$ é levada no grupo nulo.*

Proposição 2.6 (Propriedade Universal de K_0). *Seja A uma C^* -álgebra com unidade e G um grupo abeliano, suponha que exista uma função $\mathcal{V} : \mathcal{P}_\infty(A) \rightarrow G$ satisfazendo as três propriedades:*

1. $\mathcal{V}(p \oplus q) = \mathcal{V}(p) + \mathcal{V}(q)$;
2. $\mathcal{V}(0_A) = 0_G$;
3. *Se p e q estão em $\mathcal{P}_n(A)$ e são homotópicos ($p \sim_h q$) então $\mathcal{V}(p) = \mathcal{V}(q)$.*

Então existe um único homomorfismo $\alpha : K_0(A) \rightarrow G$ tal que $\alpha \circ [\cdot]_0 = \mathcal{V}$, ou seja, que torne o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_\infty(A) & & \\ \downarrow [\cdot]_0 & \searrow \mathcal{V} & \\ K_0(A) & \xrightarrow{\alpha} & G. \end{array}$$

2.2 K_0 como funtor

Nosso objetivo agora é mostrar que K_0 é um funtor entre a categoria das C^* -álgebras com unidade e a categoria dos grupos abelianos. Além disso, mostraremos que K_0 é um funtor meio-exato, ou seja, leva sequências exatas em sequências curtas.

Definição 2.7 (K_0 para homomorfismos com unidade). *Sejam A e B duas C^* -álgebras com unidade e $\varphi : A \rightarrow B$ um $*$ -homomorfismo. Definimos $K_0(\varphi)$ como o homomorfismo de grupos $K_0(\varphi) : K_0(A) \rightarrow K_0(B)$ tal que*

$$K_0(\varphi)([p]_0) = [\varphi(p)]_0.$$

A princípio precisamos mostrar que $K_0(\varphi)([p]_0)$ está bem definido, ou seja, que não depende da escolha de um representante da classe de equivalência $[p]_0$. Suponha dois representantes p e p' da classe $[p]_0$, por construção p e p' são equivalentes e então usando a Propriedade Universal, vista em 2.6, temos que $[\varphi(p)]_0 = [\varphi(p')]_0$.

Uma outra maneira de definir $K_0(\varphi)$ é através da Propriedade Universal, onde $K_0(\varphi)$ será o único homomorfismo que torna o diagrama abaixo comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_\infty(A) & & \\ \downarrow [\cdot]_0 & \searrow \varphi & \\ K_0(A) & \xrightarrow{K_0(\varphi)} & \mathcal{P}_\infty(B). \end{array}$$

Teorema 2.8 (Funtoriedade). *Sejam A, B, C três C^* -álgebras com unidade e $*$ -homomorfismos $\varphi : A \longrightarrow B$, $\psi : B \longrightarrow C$. As seguintes propriedades são válidas*

1. $K_0(\text{id}_A) = \text{id}_{K_0(A)}$;
2. $K_0(\psi \circ \varphi) = K_0(\psi) \circ K_0(\varphi)$;
3. O homomorfismo nulo $0 : A \longrightarrow B$ é levado no homomorfismo nulo $K_0(0) : K_0(A) \longrightarrow K_0(B)$.

Demonstração. 1. Da definição 2.7 temos que

$$K_0(\text{id}_A)([p]_0) := [\text{id}_A(p)]_0 = [p]_0.$$

Utilizando a representação padrão, vista em 2.12, temos que um elemento $x \in K_0(A)$ pode ser escrito como $x = [p]_0 - [q]_0$ para algumas projeções p e q . Logo

$$K_0(\text{id}_A)(x) = K_0(\text{id}_A)([p]_0 - [q]_0) = K_0(\text{id}_A)([p]_0) - K_0(\text{id}_A)([q]_0) = x.$$

Portanto $K_0(\text{id}_A) = \text{id}_{K_0(A)}$.

2. Novamente pela definição temos

$$\begin{aligned} K_0(\psi \circ \varphi)([p]_0) &= [\psi \circ \varphi(p)]_0 \\ &= K_0(\psi)([\varphi(p)]_0) \\ &= K_0(\psi) \circ K_0(\varphi)([p]_0). \end{aligned}$$

Novamente pela representação padrão concluímos o fato.

3. Observe que $K_0(0)([p]_0) = [0(p)]_0 = [0]_0$.

□

O primeiro resultado sobre K_0 envolvendo sequências é que, dado uma sequência exata curta de C^* -álgebras ao aplicarmos o funtor K_0 conseguimos uma sequência exata de grupos, não necessariamente curta, por isso o funtor é chamado de *meio-exato*.

Proposição 2.9 (Meio-Exato). *Seja*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

uma sequência exata curta de C^ -álgebras. K_0 induz a seguinte sequência exata de grupos*

$$K_0(I) \xrightarrow{K_0(\varphi)} K_0(A) \xrightarrow{K_0(\psi)} K_0(B).$$

A demonstração encontra-se em 3.2.4 de [RLL00]. A pergunta natural que surge é “será que K_0 leva sequências exatas curtas de C^* -álgebras em sequências exatas curtas de grupos?”. Infelizmente a resposta é não e para exemplificarmos é necessário conhecer dois grupos de K -teoria:

$$K_0(C[0, 1]) \approx \mathbb{Z} \text{ e } K_0(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

o primeiro isomorfismo encontra-se em 3.3 e o segundo em 3.3.2 de [RLL00].

Estamos agora em condições de apresentar um exemplo de sequência exata curta que não é levada em sequência exata curta de grupos. Considere a sequência

$$0 \longrightarrow C_0((0, 1)) \xrightarrow{i} C([0, 1]) \xrightarrow{\psi} \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \longrightarrow 0.$$

Aplicando o funtor K_0 temos a sequência exata de grupos

$$K_0(C_0((0, 1))) \xrightarrow{K_0(i)} K_0(C([0, 1])) \xrightarrow{K_0(\psi)} K_0(\mathbb{C}) \oplus K_0(\mathbb{C})$$

Substituindo os grupos de k-teoria temos

$$K_0(C_0((0, 1))) \xrightarrow{K_0(i)} \mathbb{Z} \xrightarrow{K_0(\psi)} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Logo $K_0(\psi)$ não pode ser sobrejetivo e então K_0 não leva sequências exatas curtas em sequências exatas curtas. Entretanto quando existe uma função que torna a sequência exata em cindida, teremos uma sequência de grupos que cinde, isto é,

Proposição 2.10. *Seja*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

$\swarrow \lambda$

uma sequência exata que cinde. K_0 induz a seguinte sequência exata cindida

$$0 \longrightarrow K_0(I) \xrightarrow{K_0(\varphi)} K_0(A) \xrightarrow{K_0(\psi)} K_0(B) \longrightarrow 0.$$

$\swarrow K_0(\lambda)$

A existência de λ garante que será possível encontrar elementos unitariamente equivalentes em $K_0(A)$. A demonstração completa encontra-se em 4.3.3 de [RLL00].

2.2.1 A construção de K_0 para C^* -álgebras sem unidade

Para definir K_0 em C^* -álgebras sem unidade vamos usar a unitização 1.1.1 e após isso aplicar a definição usada em 2.3. Considere a sequência exata da unitização

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} \tilde{A} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

$\swarrow \lambda$

onde $i(a) := (a, 0)$ é a imersão, $\pi(a, \alpha) := \alpha$ e $\lambda(\alpha) := (0, \alpha)$.

Nós queremos que a definição continue preservando sequências exatas cindidas, ou seja

$$0 \longrightarrow K_0(A) \longrightarrow K_0(\tilde{A}) \xrightarrow{K_0(\pi)} K_0(\mathbb{C}) \longrightarrow 0$$

$\swarrow K_0(\lambda)$

é uma sequência exata cindida.

Como é natural imaginar, faremos a definição de K_0 como o núcleo de $K_0(\pi)$

Definição 2.11. *Seja A uma C^* -álgebra qualquer*

$$K_0(A) := \ker(K_0(\pi)).$$

Como amplamente discutido em 4.1.1 de [RLL00], no caso de A com unidade as definições se tornam equivalentes. Uma importante aplicação para trabalhar com $K_0(A)$ é a aplicação $s : \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$ definida como $s := \lambda \circ \pi$. A relevância dessa aplicação é justificada com a próxima proposição.

Proposição 2.12. *Seja A uma C^* -álgebra sem unidade. Podemos dar uma descrição explícita de K_0 :*

$$K_0(A) = \{[p]_0 - [s(p)]_0 : p \in \mathcal{P}_\infty(\tilde{A})\}$$

em que $s := \lambda \circ \pi$.

Esta representação padrão apresenta uma grande diferença em relação ao caso com unidade. Isso decorre por conta da definição de K_0 que agora é o núcleo da aplicação π .

2.3 Construção de K_1

Quando comparado com K_0 , a construção de K_1 é um pouco mais direta, por exemplo não é necessário discriminar quando a C^* -álgebra possui ou não unidade. Como muitas das propriedades de K_0 possuem enunciados e demonstrações análogas para K_1 , esta seção será mais curta e com menos comentários que a anterior, pois evitaremos repetições.

Nossa primeira definição nasce inspirada nos operadores unitários da álgebra linear:

Definição 2.13 (Elementos Unitários). *Seja A uma C^* -álgebra com unidade. Um elemento u será chamado de unitário se*

$$u^*u = uu^* = 1_A.$$

Repare que, por definição, u é invertível e $u^{-1} = u^*$. O conjunto de todos os elementos unitários de A será denotado por $\mathcal{U}(A)$. Definiremos também unitários “maiores”, ou seja, elementos unitários na álgebra das matrizes $M_n(A)$. Para cada n natural defina

$$\mathcal{U}_n(A) := \mathcal{U}(M_n(A)).$$

Por fim, considere o conjunto

$$\mathcal{U}_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}(M_n(A)).$$

Vamos definir uma operação e uma relação de equivalência em $\mathcal{U}_\infty(A)$ de forma análoga ao feito para o caso K_0 .

Definição 2.14. *Sejam $u, v \in \mathcal{U}_\infty(A)$ defina a operação*

$$u \oplus v := \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$$

e a operação de equivalência

$$u \sim_1 v, \text{ se e somente se, existem } k > n, m \text{ tais que } u \oplus 1_{k-n} \sim_h v \oplus 1_{k-m}.$$

Definição 2.15 (K_1). *Seja A uma C^* -álgebra (com ou sem unidade) defina*

$$\begin{aligned} K_1(A) &:= \mathcal{U}_\infty(\tilde{A}) / \sim_1 \\ &= \{[u]_1 : u \in \mathcal{U}_\infty\}. \end{aligned}$$

Enunciaremos agora a Propriedade Universal de K_1 , análogo ao feito para o caso K_0 em 2.6. A demonstração desta propriedade pode ser encontrada em 8.1.5 de [RLL00].

Proposição 2.16 (Propriedade Universal de K_1). *Seja A uma C^* -álgebra e G um grupo abeliano, suponha que exista uma função $\mathcal{V} : \mathcal{U}_\infty(\tilde{A}) \rightarrow G$ satisfazendo as três propriedades:*

1. $\mathcal{V}(u \oplus v) = \mathcal{V}(u) + \mathcal{V}(v)$;
2. $\mathcal{V}(1) = 0_G$;
3. *Se u e v estão em $\mathcal{U}_n(\tilde{A})$ e são homotópicos ($u \sim_h v$) então $\mathcal{V}(u) = \mathcal{V}(v)$.*

Então existe um único homomorfismo $\alpha : K_1(A) \rightarrow G$ tal que $\alpha \circ [\cdot]_1 = \mathcal{V}$. Ou seja, que torne o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_\infty(\tilde{A}) & & \\ \downarrow [\cdot]_1 & \searrow \mathcal{V} & \\ K_1(A) & \xrightarrow{\alpha} & G. \end{array}$$

O item 2 da Propriedade Universal pode causar estranheza no início, porém ressaltamos que estamos considerando G como um grupo aditivo e então usamos a notação do seu elemento neutro como 0_G .

2.3.1 K_1 como funtor

Nosso objetivo agora é mostrar que K_1 é um funtor entre a categoria das C^* -álgebras e a categoria dos grupos abelianos. Além disso, mostraremos que K_1 é um funtor meio-exato.

Definição 2.17 (K_1 para homomorfismos). *Sejam A, B duas C^* -álgebras e $\varphi : A \rightarrow B$ um $*$ -homomorfismo. Definimos $K_1(\varphi)$ como o homomorfismo de grupos $K_1(\varphi) : K_1(A) \rightarrow K_1(B)$ tal que*

$$K_1(\varphi)([u]_1) = [\tilde{\varphi}(u)]_1.$$

Observe que é importante considerar $\tilde{\varphi}$ pois, na definição de K_1 , consideramos os unitários da C^* -álgebra $\tilde{A}$. É a propriedade universal, vista em 2.16, quem garante que $K_1(\varphi)$ está bem definido. Iremos omitir a demonstração das proposições desta seção pois, seguem raciocínios semelhantes aos feitos para o caso de K_0 . A demonstração com todos os detalhes pode ser encontrada no capítulo 8 de [RLL00].

Teorema 2.18 (Funtoriedade). *Sejam A, B, C três C^* -álgebras, $\varphi : A \rightarrow B$ e $\psi : B \rightarrow C$ $*$ -homomorfismos. As seguintes propriedades são válidas*

1. $K_1(\text{id}) = \text{id}_{K_1(A)}$;

2. $K_1(\psi \circ \varphi) = K_1(\psi) \circ K_1(\varphi)$;
3. O homomorfismo nulo $0 : A \longrightarrow B$ é levado no homomorfismo nulo $K_1(0) : K_1(A) \longrightarrow K_1(B)$.

Proposição 2.19 (K_1 meio-exato). *Seja*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

uma sequência exata curta. K_1 induz a seguinte sequência exata

$$K_1(I) \xrightarrow{K_1(\varphi)} K_1(A) \xrightarrow{K_1(\psi)} K_1(B).$$

Proposição 2.20 (K_1 cinde). *Seja*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

$\swarrow$
 λ

uma sequência exata que cinde. K_1 induz a seguinte sequência exata cindida

$$0 \longrightarrow K_1(I) \xrightarrow{K_1(\varphi)} K_1(A) \xrightarrow{K_1(\psi)} K_1(B) \longrightarrow 0.$$

$\swarrow$
 $K_1(\lambda)$

Exemplo 2.21. Vamos calcular $K_1(M_n(\mathbb{C}))$ com $n \in \mathbb{N}$ fixo. Observe que $M_k(M_n(\mathbb{C}))$ é um conjunto conexo para qualquer k maior do que 1. Logo existe uma homotopia unitária entre todos os seus unitários. Com isto temos que o quociente $\mathcal{U}_\infty(M_n(\mathbb{C}))/\sim_1$ é igual ao grupo com apenas um elemento, ou seja, o grupo nulo. Portanto $K_1(M_n(\mathbb{C})) = 0$.

Como em muitos casos K_0 e K_1 possuem as mesmas propriedades introduziremos a notação K_i , onde i irá representar 0 ou 1.

Proposição 2.22. *Sejam A e B duas C^* -álgebras e $\varphi, \psi : A \longrightarrow B$ dois $*$ -homomorfismos. Se φ, ψ são homotópicos então:*

$$K_i(\varphi) = K_i(\psi).$$

Se A e B são homotopicamente equivalentes então:

$$K_i(A) = K_i(B).$$

Proposição 2.23 (Soma direta). *Sejam A e B duas C^* -álgebras então*

$$K_i(A \oplus B) = K_i(A) \oplus K_i(B).$$

A demonstração para $i = 0$ pode ser encontrada, respectivamente, em 4.3.4 e $i = 1$ em 8.2.6 de [RLL00].

Capítulo 3

Sequências Exatas de Seis Termos

No capítulo anterior estudamos como os funtores K_0 e K_1 transformam sequências exatas curtas de C^* -álgebras em sequências exatas de grupos abelianos, vimos também que sequências exatas que cindem são levadas em sequências exatas que cindem.

Continuaremos neste capítulo explorando as consequências e relações de sequências exatas em K -teoria. Vamos utilizar algumas técnicas amplamente difundidas, com o objetivo de desenvolver duas sequências exatas de seis termos: a sequência de Mayer-Vietoris e a sequência clássica de seis termos da K -teoria. Estas sequências serão utilizadas nos próximos capítulos para calcular os grupos de K -teoria de determinadas C^* -álgebras.

3.1 Sequência Clássica de Seis Termos

Considere a sequência exata curta de C^* -álgebras

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0.$$

O objetivo desta seção é construir duas funções principais: a aplicação do índice δ_1 e a função exponencial δ_0 . Elas irão “ligar” os grupos K_0 e K_1 e de certa forma estas funções fazem uma ponte entre as projeções e os unitários. Ao final da seção chegaremos no teorema 3.18 da sequência exata curta, com ele concluiremos que

$$\begin{array}{ccccc} K_0(I) & \xrightarrow{K_0(\varphi)} & K_0(A) & \xrightarrow{K_0(\psi)} & K_0(B) \\ \delta_1 \uparrow & & & & \downarrow \delta_0 \\ K_1(B) & \xleftarrow{K_1(\psi)} & K_1(A) & \xleftarrow{K_1(\varphi)} & K_1(I) \end{array}$$

é um diagrama comutativo.

Antes da construção da aplicação do índice o lema a seguir é fundamental, ele diz explicitamente como conseguir uma projeção de I a partir de um elemento unitário de B . A demonstração completa encontra-se em 9.1.1 de [RLL00].

Lema 3.1. *Seja a sequência exata curta de C^* -álgebra*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0.$$

Dado $u \in \mathcal{U}_n(\tilde{B})$, existem $v \in \mathcal{U}_{2n}(\tilde{A})$ e $p \in \mathcal{P}_{2n}(\tilde{I})$ tais que

$$\tilde{\psi}(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}, \quad \tilde{\varphi}(p) = v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*, \quad s(p) = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Além disso, para v e p nestas condições, se $w \in \mathcal{U}_{2n}(\tilde{A})$ e $q \in \mathcal{P}_{2n}(\tilde{I})$ são tais que

$$\tilde{\psi}(w) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}, \quad \tilde{\varphi}(q) = w \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w^*,$$

então $s(q) = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0_n \end{pmatrix}$ e $p \sim_u q$ em $\mathcal{P}_{2n}(\tilde{I})$.

Para definir δ_1 vamos utilizar a Propriedade Universal de K_1 , vista em 2.16, considerando $\mathcal{V} : \mathcal{U}_\infty(\tilde{B}) \longrightarrow K_0(I)$ como $\mathcal{V}(u) = [p]_0 - [s(p)]_0$. Repare que o lema 3.1 garante que $\mathcal{V}$ está bem definido. Cada condição abaixo é necessária para aplicar a Propriedade Universal de K_1 :

1. $\mathcal{V}(u \oplus v) = \mathcal{V}(u) + \mathcal{V}(v)$ para quaisquer $u, v \in \mathcal{U}_\infty(\tilde{B})$;
2. $\mathcal{V}(1) = 0_{K_0(I)}$;
3. Se u e v estão em $\mathcal{U}_n(\tilde{B})$ e são homotópicos ($u \sim_h v$) então $\mathcal{V}(u) = \mathcal{V}(v)$.

Para verificar em detalhes as afirmações acima são necessários alguns cálculos com matrizes e os detalhes podem ser encontrados em 9.1 de [RLL00]. Feitas estas considerações estamos agora em condições de definir a aplicação do índice.

Definição 3.2 (Aplicação do índice). *Seja a sequência exata curta de C^* -álgebras*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

defina a aplicação $\delta_1 : K_1(B) \longrightarrow K_0(I)$ como

$$\delta_1([u]_1) = [p]_0 - [s(p)]_0$$

com $u \in \mathcal{U}_n(\tilde{B})$, $v \in \mathcal{U}_{2n}(\tilde{A})$ e $p \in \mathcal{P}_{2n}(\tilde{I})$ como em 3.1, isto é:

$$\tilde{\varphi}(p) = v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^* \text{ e } \tilde{\psi}(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}.$$

Como é padrão em K -teoria, vamos mostrar que a aplicação δ_1 é natural.

Proposição 3.3 (Naturalidade do índice). *Sejam duas sequências exatas curtas de C^* -álgebras*

com α, β e γ *-homomorfismos formando o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{\varphi} & A & \xrightarrow{\psi} & B & \longrightarrow & 0 \\
 & & \gamma \downarrow & & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & I' & \xrightarrow{\varphi'} & A' & \xrightarrow{\psi'} & B' & \longrightarrow & 0
 \end{array} \tag{3.3.1}$$

considere δ_1 a aplicação do índice associada a primeira sequência exata curta e δ'_1 associada à segunda. Nestas condições, o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc}
 K_1(B) & \xrightarrow{\delta_1} & K_0(I) \\
 K_1(\beta) \downarrow & & \downarrow K_0(\gamma) \\
 K_1(B') & \xrightarrow{\delta'_1} & K_0(I')
 \end{array}$$

chamamos esta propriedade de Naturalidade do Índice.

Demonstração. Precisamos mostrar que $K_0(\gamma) \circ \delta_1 = \delta'_1 \circ K_1(\beta)$. Seja $[u]_1$ um elemento de $K_1(B)$, por construção temos que existe n com $u \in \mathcal{U}_n(\tilde{B})$. O objetivo agora é encontrar uma maneira de calcularmos $\delta'_1 \circ K_1(\beta)(u)$. Aplicando o lema 3.1 temos que existe $v \in \mathcal{U}_{2n}(\tilde{A})$ e $p \in \mathcal{P}_{2n}(\tilde{I})$ tal que

$$\tilde{\psi}(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}, \quad \tilde{\varphi}(p) = v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*, \quad s(p) = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para simplificar a notação defina $v' := \tilde{\alpha}(v)$ e $p' := \tilde{\gamma}(p)$ e façamos alguns cálculos

$$\begin{aligned}
 \tilde{\psi}'(v') = \tilde{\psi}'(\tilde{\alpha}(v)) &= \widetilde{(\psi' \circ \alpha)}(v) \\
 &= \widetilde{(\beta \circ \psi)}(v) \quad (\text{comutatividade de 3.3.1}) \\
 &= \tilde{\beta}(\tilde{\psi}(v)) \\
 &= \tilde{\beta} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \tilde{\beta}(u) & 0 \\ 0 & \tilde{\beta}(u) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}'(p') = \tilde{\varphi}'(\tilde{\gamma}(p)) &= \widetilde{(\varphi' \circ \gamma)}(p) \\
&= \widetilde{(\alpha \circ \varphi)}(p) \quad (\text{comutatividade de 3.3.1}) \\
&= \tilde{\alpha}(\tilde{\varphi}(p)) \\
&= \tilde{\alpha} \left(v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^* \right) \\
&= \tilde{\alpha}(v) \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\alpha}(v)^* \\
&= v' \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (v')^*
\end{aligned}$$

repare então que p' e v' cumprem os requisitos do lema 3.1 para $\tilde{\beta}(u)$ e então, por definição, $\delta'_1([\tilde{\beta}(u)]_1) = [p']_0 - [s(p')]_0$.

Podemos agora calcular a composta

$$\begin{aligned}
\delta'_1 \circ K_1(\beta)([u]_1) = \delta'_1([\tilde{\beta}(u)]_1) &= [p']_0 - [s(p')]_0 \\
&= [\tilde{\gamma}(p)]_0 - [s(\tilde{\gamma}(p))]_0 \\
&= K_0(\gamma)([p]_0 - [s(p)]_0) \quad (\text{pois } s \circ \tilde{\gamma}(p) = \tilde{\gamma} \circ s(p)) \\
&= K_0(\gamma)(\delta_1([u]_1)) \\
&= (K_0(\gamma) \circ \delta_1)([u]_1)
\end{aligned}$$

como $[u]_1 \in K_1(B)$ era arbitrário concluímos que $\delta'_1 \circ K_1(\beta) = K_0(\gamma) \circ \delta_1$. $\square$

Optamos por dar a definição e fazer as demonstrações acima, pois estes cálculos serão utilizados no decorrer do texto, além disso, a construção torna mais fácil a tarefa de exibir explicitamente como δ_1 se comporta. Entretanto em alguns casos será mais conveniente trabalhar com a definição do índice para isometrias parciais, a demonstração em 3.5 é um exemplo deste caso.

Vamos enunciar aqui a proposição para isometrias parciais, lembrando que $v \in A$ é dito uma *isometria parcial* se v^*v é uma projeção. Repare que toda projeção é uma isometria parcial e que se v é isometria parcial então vv^* é uma projeção.

Proposição 3.4 (Índice para isometria parcial). *Seja a sequência exata de C^* -álgebras*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

tome $u \in \mathcal{U}_n(\tilde{B})$ e $v \in M_m(\tilde{A})$ uma isometria parcial ($n \leq m$) tal que $\tilde{\psi}(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Então $1_m - v^*v = \tilde{\varphi}(p)$ e $1_m - vv^* = \tilde{\varphi}(q)$ para algumas projeções p e $q \in \mathcal{P}_m(\tilde{I})$. A aplicação do índice $\delta_1 : K_1(B) \longrightarrow K_0(I)$ será dada como

$$\delta_1([u]_1) = [p]_0 - [q]_0.$$

Ressaltamos que a demonstração segue ideias parecidas com as feitas em 3.2. Para o leitor

interessado, a demonstração com todos os detalhes está em 9.2 de [RLL00]. Podemos agora enunciar e demonstrar o principal resultado sobre a aplicação do índice.

Proposição 3.5 (Exatidão do índice). *Seja a sequência exata curta de C^* -álgebras*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

*então a seguinte sequência de grupos é exata*¹

$$\begin{array}{ccccc} K_0(I) & \xrightarrow{K_0(\varphi)} & K_0(A) & \xrightarrow{K_0(\psi)} & K_0(B) \\ \delta_1 \uparrow & & & & \\ K_1(B) & \xleftarrow{K_1(\psi)} & K_1(A) & \xleftarrow{K_1(\varphi)} & K_1(I) \end{array}$$

Demonstração. As duas sequências

$$K_0(I) \xrightarrow{K_0(\varphi)} K_0(A) \xrightarrow{K_0(\psi)} K_0(B) \text{ e } K_1(I) \xrightarrow{K_1(\varphi)} K_1(A) \xrightarrow{K_1(\psi)} K_1(B)$$

são exatas das proposições 2.9 e 2.19, respectivamente. Vamos mostrar que a parte relativa ao índice δ_1 é exata, ou seja, vamos mostrar que

$$\text{Im } K_1(\psi) = \ker \delta_1 \text{ e } \text{Im } \delta_1 = \ker K_0(\varphi).$$

Note que $\text{Im } \delta_1 \subset \ker K_0(\varphi)$, pois com u e p como no lema 3.1 temos

$$\begin{aligned} K_0(\varphi)(\delta_1([u]_1)) &= [\tilde{\varphi}(\delta_1[u]_1)]_0 \\ &= [\tilde{\varphi}(p - s(p))]_0 \\ &= [\tilde{\varphi}(p)]_0 - [\tilde{\varphi}(s(p))]_0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

A última igualdade acontece por uma consequência do lema 3.1, onde concluímos que $\tilde{\varphi}(p)$ e $\tilde{\varphi}(s(p))$ são unitariamente equivalentes.

Para ver que $\ker K_0(\varphi) \subset \text{Im } \delta_1$ tome $g \in \ker K_0(\varphi)$ usando a representação padrão de K_0 , vista em 2.12, sabemos que existe $p \in M_n(\tilde{I})$ e $w \in \mathcal{U}(M_n(\tilde{A}))$ tal que

$$g = [p]_0 - [s(p)]_0 \text{ e } wpw^* = s(p).$$

Repare que o elemento $\tilde{\psi}(w(1_n - p))$ é uma isometria parcial e $u = u_0 + 1_n - u_0^*u_0$ é um elemento unitário. Usando a proposição para isometrias parciais temos que $\delta_1([u]) = g$. A igualdade $\text{Im } K_1(\psi) = \ker \delta_1$ é feita com raciocínios análogas e pode ser encontrada em 9.3.1 de [RLL00]. □

¹Escolhemos apresentar o diagrama de forma circular para ficar coerente com o teorema da sequência exata de seis termos.

Daremos agora duas importantes definições de C^* -álgebras que serão importantes para encontrar uma relação entre K_0 e K_1 e, posteriormente, definir o funtor K_n .

Definição 3.6. *Sejam A, B duas C^* -álgebras e $\varphi : A \longrightarrow B$ um $*$ -homomorfismo. Definimos a suspensão de A como*

$$SA = \{f \in C([0, 1], A) : f(0) = f(1) = 0\} \approx C_0((0, 1), A)$$

e

$$S\varphi : SA \longrightarrow SB \text{ definida como } S\varphi(f)(t) := \varphi(f(t)).$$

O cone de A é definido como

$$CA = \{f \in C([0, 1], A) : f(0) = 0\}.$$

Podemos pensar na suspensão como um funtor e tratá-lo de forma iterada, ou seja, $S^{n+1}A := S(S^n A)$ e $S^{n+1}\varphi = S(S^n \varphi)$. Considere agora a seguinte sequência exata curta

$$0 \longrightarrow SA \xrightarrow{i} CA \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$$

onde i é a inclusão e $\pi(f) := f(1)$. Repare que a sequência é, de fato, exata curta, pois

$$\text{Im } i = \{f \in C([0, 1], A) | f(0) = 0 = f(1)\} = SA.$$

Um resultado inicialmente surpreendente é que o cone de A é homotópico a C^* -álgebra nula, como podemos ver a seguir.

Exemplo 3.7. *Como na definição 1.19, mostraremos que o cone CA é homotopicamente equivalente a C^* -álgebra nula. Considere a função*

$$\begin{aligned} \varphi_t : CA &\longrightarrow CA \\ \varphi_t(f)(x) &= f(xt) \end{aligned}$$

desta forma, $\varphi_0 = 0$ e $\varphi_1 = \text{id}$. Como $t \mapsto \varphi_t$ é contínua temos que CA é homotopicamente equivalente a C^* -álgebra nula.

Proposição 3.8. *Os grupos $K_1(A)$ e $K_0(SA)$ são isomorfos.*

Demonstração. Considere a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow SA \xrightarrow{i} CA \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$$

onde i é a imersão e $\pi(f) = f(1)$. Aplicando a exatidão do índice 3.5 temos que a seguinte sequência

de grupos é exata

$$\begin{array}{ccccc}
 K_0(SA) & \xrightarrow{K_0(i)} & K_0(CA) & \xrightarrow{K_0(\pi)} & K_0(A) \\
 \delta_1 \uparrow & & & & \\
 K_1(A) & \xleftarrow{K_1(\pi)} & K_1(CA) & \xleftarrow{K_1(i)} & K_1(SA)
 \end{array}$$

Do exemplo anterior temos que CA é homotópico à C^* -álgebra nula, com isto podemos aplicar a proposição 2.22 para concluir que $K_0(CA) = 0 = K_1(CA)$. Logo temos

$$0 \longrightarrow K_1(A) \xrightarrow{\delta_1} K_0(SA) \longrightarrow 0.$$

Da exatidão, concluimos que δ_1 é um isomorfismo e então $K_1(A)$ e $K_0(SA)$ são isomorfos. $\square$

Este resultado motiva a definição do funtor $K_n(A)$ como segue

Definição 3.9. *Sejam A, B duas C^* -álgebras, $n \in \mathbb{N}$ e $\varphi : A \longrightarrow B$ um $*$ -homomorfismo. Defina indutivamente*

$$K_{n+1}(A) = K_n(SA)$$

e

$$K_{n+1}(\varphi) = K_n(S\varphi) : K_{n+1}(A) \longrightarrow K_{n+1}(B)$$

É possível definirmos o índice para ordens maiores de n , como δ_2 , o índice associado a sequência

$$\dots \xrightarrow{K_2(\psi)} K_2(B) \xrightarrow{\delta_2} K_1(I) \xrightarrow{K_1(\varphi)} \dots$$

O próximo teorema, da sequência exata longa, está feito em [RLL00] para o caso geral, faremos aqui o caso $n = 2$ que é o que será necessário para a demonstração do principal teorema desta seção: 3.18.

Proposição 3.10. *Considere a sequência de C^* -álgebras*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

a seguinte sequência de K grupos induzida é exata

$$K_2(A) \xrightarrow{K_2(\psi)} K_2(B) \xrightarrow{\delta_2} K_1(I) \xrightarrow{K_1(\varphi)} K_1(A) \xrightarrow{K_1(\psi)} K_1(B) \xrightarrow{\delta_1} K_0(I) \xrightarrow{K_0(\varphi)} K_0(A) \xrightarrow{K_0(\psi)} K_0(B).$$

Demonstração. Seja $\bar{\delta}_1 : K_1(SB) \longrightarrow K_0(SI)$ a aplicação do índice associado a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow SI \xrightarrow{S\varphi} SA \xrightarrow{S\psi} SB \longrightarrow 0$$

a proposição 3.8 garante o isomorfismo entre $K_1(C)$ e $K_0(SC)$ para C uma C^* -álgebra qualquer,

ou seja, podemos escrever

$$\begin{array}{ccccccccc}
 K_2(I) & \longrightarrow & K_2(A) & \longrightarrow & K_2(B) & \xrightarrow{\delta_2} & K_1(I) & \longrightarrow & K_1(A) & \longrightarrow & K_1(B) \\
 \parallel & & \parallel & & \downarrow \sigma_1 & & \approx \downarrow \sigma_2 & & \approx \downarrow & & \approx \downarrow \\
 K_1(SI) & \longrightarrow & K_1(SA) & \longrightarrow & K_1(SB) & \xrightarrow{\bar{\delta}_1} & K_0(SI) & \longrightarrow & K_0(SA) & \longrightarrow & K_0(SB)
 \end{array}$$

repare ainda que, pela propriedade do índice, a linha de baixo é exata. Utilizando o lema dos cinco, visto em 1.2, concluímos que a linha de cima será exata. Explicitamente teremos que

$$\delta_2 := \sigma_2^{-1} \circ \bar{\delta}_1 \circ \sigma_1.$$

□

Nosso próximo objetivo é definir a *Aplicação de Bott*, uma aplicação entre $K_0(A)$ e $K_1(SA)$. Para tal será necessário definir inicialmente para A uma C^* -álgebra unitária. Defina a função auxiliar f_p chamada de *laço de projeção*

$$\begin{aligned}
 f_p : S^1 &\longrightarrow \mathcal{U}_n(A) \\
 z &\mapsto f_p(z) = zp + (1_n - p).
 \end{aligned}$$

Podemos enxergar f_p como um elemento do grupo abeliano $C(S^1, \mathcal{U}_n(A))$. De forma análoga ao feito com o índice, queremos utilizar a Propriedade Universal de K_0 , vista em 2.6, considerando $\mathcal{V} : \mathcal{P}_\infty(A) \longrightarrow C(S^1, \mathcal{U}_n(A))$ como $\mathcal{V}(p) = f_p$. Vamos então verificar cada condição necessária:

1. $\mathcal{V}(p \oplus q) = f_{p \oplus q}$.

Aplicando em z temos

$$\begin{aligned}
 f_{p \oplus q}(z) &= z(p \oplus q) + (1_{n+m} - (p \oplus q)) \\
 &= z \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 1_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \right] \\
 &= f_p \oplus f_q \\
 &= v_p \oplus v_q;
 \end{aligned}$$

2. $\mathcal{V}(0_A) = f_0 \equiv 1_n = 0_{C(S^1, \mathcal{U}_n(A))}$;

3. Se p e q estão em $\mathcal{P}_n(A)$ e são homotópicos ($p \sim_h q$) então, fazendo algumas composições, $\mathcal{V}(p) = \mathcal{V}(q)$.

Com estas condições podemos dar a seguinte definição:

Definição 3.11 (Aplicação de Bott). *Seja A uma C^* -álgebra com unidade, definimos a aplicação de Bott como a aplicação $\beta_A : K_0(A) \longrightarrow K_1(SA)$ dada por*

$$\beta_A([p]_0) = [f_p]_1$$

com f_p o laço de p .

Os comentários acima garantem que a Aplicação de Bott está bem definida, ou seja, dois representantes p e p' da mesma classe de equivalência $[p]_0$ são levados até a mesma classe $[f_p]_1$.

Assim como nas demais definições de aplicações em K -teoria, vamos mostrar a noção de naturalidade na aplicação de Bott.

Proposição 3.12 (Naturalidade de Bott). *Seja $\psi : A \longrightarrow B$ um $*$ -homomorfismo que preserva a unidade. Considere $\beta_A : K_0(A) \longrightarrow K_1(SA)$ e $\beta_B : K_0(B) \longrightarrow K_1(SB)$ as funções de Bott, respectivamente de A e B . Nestas condições*

$$\begin{array}{ccc} K_0(A) & \xrightarrow{K_0(\psi)} & K_0(B) \\ \beta_A \downarrow & & \downarrow \beta_B \\ K_1(SA) & \xrightarrow{K_1(S\psi)} & K_1(SB) \end{array}$$

é um diagrama comutativo.

Demonstração. Precisamos mostrar que $\beta_B \circ K_0(\psi) = K_1(S\psi) \circ \beta_A$. Para isto tome $a \in K_0(A)$, usando a representação padrão de K_0 , vista em 2.12. Temos que $a = [p]_0 - [q]_0$ (lembre que A tem unidade) para algumas projeções $p, q \in \mathcal{P}_\infty(A)$. Vejamos inicialmente que

$$S\psi(f_p)(t) = \psi(f_p(t)) = \psi(tp + (1_n - p)) = t\psi(p) + (1_n - \psi(p)) = f_p(\psi(p))(t),$$

logo

$$\begin{aligned} K_1(S\psi) \circ \beta_A([p]_0) &= K_1(S\psi)([f_p]_1) \\ &= [S\psi(f_p)]_1 \\ &= [f_{\psi(p)}]_1 \\ &= \beta_B([\psi(p)]_0) \\ &= \beta_B(K_0(\psi)([p]_0)) \\ &= \beta_B \circ K_0(\psi)([p]_0). \end{aligned}$$

□

A princípio a definição da aplicação de Bott foi feita apenas para C^* -álgebra com unidade. A extensão desse conceito para o caso geral é feito utilizando a sequência da unitização (1.22.1) da seguinte maneira

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K_0(A) & \longrightarrow & K_0(\tilde{A}) & \xrightleftharpoons{\quad} & K_0(\mathbb{C}) \longrightarrow 0 \\ & & \beta_A \downarrow & & \beta_{\tilde{A}} \downarrow & & \beta_{\tilde{\mathbb{C}}} \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & K_1(SA) & \longrightarrow & K_1(S\tilde{A}) & \xrightleftharpoons{\quad} & K_1(S\mathbb{C}) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Repare que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} K_0(\tilde{A}) & \xrightarrow{K_0(\psi)} & K_0(\mathbb{C}) \\ \beta_A \downarrow & & \downarrow \beta_{\mathbb{C}} \\ K_1(SA) & \xrightarrow{K_1(S\psi)} & K_1(S\mathbb{C}) \end{array}$$

é comutativo justamente pela naturalidade da aplicação de Bott, vista em 3.12. Além disso, cada linha acima é uma sequência exata curta que cinde, logo existe um único homomorfismo β_A que torna o diagrama comutativo. O principal resultado sobre esta aplicação é chamado de *Periodicidade de Bott* e está compilado no próximo teorema.

Teorema 3.13 (Periodicidade de Bott). *Dada uma C^* -álgebra A a aplicação de Bott $\beta_A : K_0(A) \longrightarrow K_1(SA)$ é um isomorfismo.*

A demonstração é feita através de uma série de lemas, onde são definidos conjuntos auxiliares com intenção de encontrar funções homotopicamente equivalentes às f_p . Todos os detalhes são desenvolvidos ao longo do capítulo 11 de [RLL00].

Em 3.8 mostramos que $K_1(A) \approx K_0(SA)$, complementando este resultado vamos mostrar que $K_n(A) \approx K_{n+2}(A)$.

Proposição 3.14. *Seja $n \in \mathbb{N}$ e A uma C^* -álgebra então $K_n(A) \approx K_{n+2}(A)$.*

Demonstração. Vamos utilizar indução. Se $n = 2$ temos que $K_2(A) := K_1(SA) \approx K_0(A)$. Suponha agora a proposição válida para n , isto é, $K_n(A) \approx K_{n+2}(A)$. Repare que

$$\begin{aligned} K_{n+1}(A) &= K_n(SA) \\ &\approx K_{n+2}(SA) \\ &= K_{n+3}(A) \end{aligned}$$

e com isto concluímos que $K_n(A) \approx K_{n+2}(A)$ para todos valores de $n \in \mathbb{N}$. □

Definição 3.15 (Aplicação Exponencial). *Seja a sequência exata curta de C^* -álgebra*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0.$$

A função exponencial $\delta_0 : K_0(B) \longrightarrow K_1(I)$ é definida como a composta $\delta_0 := \delta_2 \circ \beta_B$.

Proposição 3.16 (Naturalidade da Exponencial). *Sejam duas sequências exatas curtas de C^* -álgebras com α, β e γ $*$ -homomorfismos formando o seguinte diagrama:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{\varphi} & A & \xrightarrow{\psi} & B & \longrightarrow & 0 \\ & & \gamma \downarrow & & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & I' & \xrightarrow{\varphi'} & A' & \xrightarrow{\psi'} & B' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Considere δ_0 a função exponencial associada a primeira sequência exata curta e δ'_0 associada à segunda. Nestas condições, o diagrama de grupos

$$\begin{array}{ccc} K_0(B) & \xrightarrow{\delta_0} & K_1(I) \\ K_0(\beta) \downarrow & & \downarrow K_1(\gamma) \\ K_0(B') & \xrightarrow{\delta'_0} & K_1(I') \end{array} \quad (3.16.1)$$

é comutativo. Chamamos esta propriedade de Naturalidade da Função Exponencial.

Demonstração. Usando que $\delta_0 = \delta_2 \circ \beta_B$ e $\delta'_0 = \delta'_2 \circ \beta_{B'}$ Podemos escrever 3.16.1 da seguinte forma

$$\begin{array}{ccccc} K_0(B) & \xrightarrow{\beta_B} & K_2(B) & \xrightarrow{\delta_2} & K_1(I) \\ K_0(\beta) \downarrow & & K_2(\beta) \downarrow & & \downarrow K_1(\gamma) \\ K_0(B') & \xrightarrow{\beta_{B'}} & K_2(B') & \xrightarrow{\delta'_2} & K_1(I') \end{array}$$

a parte esquerda é comutativa pela naturalidade de Bott 3.12 e a parte direita pela sequência exata longa 3.10. $\square$

É possível descrever explicitamente a função exponencial. Esta descrição que, talvez, justifique o nome exponencial. A demonstração da proposição abaixo pode ser encontrada em [RLL00].

Proposição 3.17. *Seja a sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

e $\delta_0 : K_0(B) \longrightarrow K_1(I)$ a aplicação exponencial. Tome $g \in K_0(B)$ e escreva $g = [p]_0 - [s(p)]_0$. Seja $a \in M_n(\tilde{A})$ um elemento autoadjunto tal que $\tilde{\psi}(a) = p$. Nestas condições, existe exatamente um elemento $u \in \tilde{\mathcal{U}}_n(I)$ tal que $\tilde{\varphi}(u) = e^{(2\pi i a)}$ e $\delta_0(g) = -[u]_1$.

Teorema 3.18 (Sequência de seis termos). *Seja uma sequência exata curta de C^* -álgebras*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

então a sequência de grupos associada é exata

$$\begin{array}{ccccc} K_0(I) & \xrightarrow{K_0(\varphi)} & K_0(A) & \xrightarrow{K_0(\psi)} & K_0(B) \\ \delta_1 \uparrow & & & & \downarrow \delta_0 \\ K_1(B) & \xleftarrow{K_1(\psi)} & K_1(A) & \xleftarrow{K_1(\varphi)} & K_1(I). \end{array}$$

Demonstração. As duas seqüências

$$K_0(I) \xrightarrow{K_0(\varphi)} K_0(A) \xrightarrow{K_0(\psi)} K_0(B) \text{ e } K_1(I) \xrightarrow{K_1(\varphi)} K_1(A) \xrightarrow{K_1(\psi)} K_1(B)$$

são exatas pelas proposições 2.9 e 2.19, respectivamente. Além disso, a proposição 3.5 garante que a parte relativa a δ_1 é exata. Precisamos então mostrar a exatidão apenas em δ_0 . Para isto considere o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} K_2(A) & \xrightarrow{K_2(\psi)} & K_2(B) & \xrightarrow{\delta_2} & K_1(I) & \xrightarrow{K_0(\varphi)} & K_1(A) \\ \beta_A \uparrow & & \beta_B \uparrow & & \parallel & & \parallel \\ K_0(A) & \xrightarrow{K_0(\psi)} & K_0(B) & \xrightarrow{\delta_0} & K_1(I) & \xrightarrow{K_1(\varphi)} & K_1(A). \end{array} \quad (3.18.1)$$

Repare que a naturalidade da aplicação de Bott 3.12 nos diz que

$$\begin{array}{ccc} K_1(SA) & \xrightarrow{K_1(S\psi)} & K_1(SB) \\ \beta_A \uparrow & & \uparrow \beta_B \\ K_0(A) & \xrightarrow{K_0(\psi)} & K_0(B) \end{array}$$

é um diagrama comutativo. Utilizando a definição $K_2(A) = K_1(SA)$ (3.9) neste diagrama temos que o quadrado do lado esquerdo de 3.18.1 é comutativo. O quadrado do meio de 3.18.1 comuta pela simples definição da função exponencial. Por fim, a linha

$$K_2(A) \xrightarrow{K_2(\psi)} K_2(B) \xrightarrow{\delta_2} K_1(I) \xrightarrow{K_1(\varphi)} K_1(A)$$

é exata graças a proposição 3.10. Logo a linha debaixo também é exata e com isto concluímos a exatidão de 3.18.1. $\square$

3.2 Mayer-Vietoris

A motivação da sequência de Mayer-Vietoris nasce do estudo de um espaço de Hausdorff compacto X que é a união de dois subespaços compactos X_1 e X_2 tendo uma intersecção não vazia. Analisando o conjunto das funções contínuas temos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} C(X) & \longrightarrow & C(X_1) \\ \downarrow & & \uparrow \\ C(X_2) & \longrightarrow & C(X_1 \cap X_2) \end{array}$$

em que cada aplicação representa as projeções/restrições naturais. Repare que, com estas condições, podemos descrever

$$C(X) = \{(f_1, f_2) \in C(X_1) \oplus C(X_2) \mid f_1|_{X_1 \cap X_2} = f_2|_{X_1 \cap X_2}\}.$$

Inicialmente o matemático Mayer provou este resultado, no contexto de topologia algébrica, para o toro como união de dois cilindros. Vietoris estendeu o resultado para grupos de cohomologia. Posteriormente este teorema foi adaptado para a linguagem de C^* -álgebras.

Podemos agora enunciar o teorema na sua versão geral, baseada na demonstração feita ao longo da seção 7.2 de [POL].

Teorema 3.19 (Mayer-Vietoris). *Sejam B_1, B_2 duas C^* -álgebras e A uma C^* -álgebra tal que $A = \{(b_1, b_2) \in B_1 \oplus B_2 \mid \pi_1(b_1) = \pi_2(b_2)\}$ formando o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{pr_1} & B_1 \\ pr_2 \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ B_2 & \xrightarrow{\pi_2} & D \end{array}$$

com pr_1, pr_2 projeções naturais e π_1, π_2 $*$ -homomorfismos sobrejetores. Então a seguinte sequência de seis termos é exata

$$\begin{array}{ccccc} K_0(A) & \xrightarrow{(K_0(pr_1), K_0(pr_2))} & K_0(B_1) \oplus K_0(B_2) & \xrightarrow{K_0(\pi_2) - K_0(\pi_1)} & K_0(D) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(D) & \xleftarrow{K_1(\pi_2) - K_1(\pi_1)} & K_1(B_1) \oplus K_1(B_2) & \xleftarrow{(K_1(pr_1), K_1(pr_2))} & K_1(A). \end{array} \quad (3.19.1)$$

No enunciado do teorema estamos cometendo um pequeno abuso de notação, visto que, a princípio, $K_0(\pi_2) - K_0(\pi_1)$ não está definido, pois cada parcela possui domínios diferentes. Como é padrão na literatura, vamos definir:

$$\begin{aligned} K_0(\pi_2) - K_0(\pi_1) : K_0(B_1) \oplus K_0(B_2) &\longrightarrow K_0(D) \\ (K_0(\pi_2) - K_0(\pi_1))(b_1, b_2) &:= K_0(\pi_2)(b_2) - K_0(\pi_1)(b_1). \end{aligned}$$

Para a demonstração deste teorema vamos definir o conjunto auxiliar $\hat{A}$ da seguinte maneira

$$\hat{A} = \{(b_1, b_2, \omega) : b_1 \in B_1, b_2 \in B_2, \omega \in C([0, 1], D) \text{ com } \omega(0) = \pi_1(b_1), \omega(1) = \pi_2(b_2)\}$$

com as operações naturais $\hat{A}$ é uma C^* -álgebra.

Lema 3.20. *Seja A uma C^* -álgebra nas condições do teorema de Mayer-Vietoris, visto em 3.19, então*

$$K_0(\hat{A}) = K_0(A) \text{ e } K_1(\hat{A}) = K_1(A).$$

Para tornar mais claro a demonstração, vamos assumir o lema e provar o teorema de Mayer-Vietoris. Caso o leitor prefira seguir de forma linear, a demonstração do lema será feita em 3.2.

Demonstração. (teorema) Considere a seguinte sequência

$$0 \longrightarrow C_0((0, 1), D) \xrightarrow{\varphi} \hat{A} \xrightarrow{\psi} B_1 \oplus B_2 \longrightarrow 0 \quad (3.20.1)$$

com $\varphi(\omega) = (0, 0, \omega)$ e $\psi(b_1, b_2, \omega) = (b_1, b_2)$, repare que φ é injetor e ψ é sobrejetor. Além disso

$$\text{Im } \varphi = \ker \psi$$

e então a sequência (3.20.1) é exata curta. Aplicando o teorema 3.18 da sequência clássica de seis termos temos que

$$\begin{array}{ccccc} K_0(C_0((0, 1), D)) & \xrightarrow{K_0(\varphi)} & K_0(\hat{A}) & \xrightarrow{K_0(\psi)} & K_0(B_1 \oplus B_2) \\ \delta_1 \uparrow & & & & \downarrow \delta_0 \\ K_1(B_1 \oplus B_2) & \xleftarrow{K_1(\psi)} & K_1(\hat{A}) & \xleftarrow{K_1(\varphi)} & K_1(C_0((0, 1), D)) \end{array}$$

é um diagrama comutativo. Por definição $C_0((0, 1), D) = S D$, logo a periodicidade de Bott, vista em 3.13, nos diz que

$$K_0(C_0((0, 1), D)) = K_0(S D) = K_1(D).$$

E a proposição 3.8 garante

$$K_1(C_0((0, 1), D)) = K_1(S D) = K_0(D).$$

Usando estas duas informações, a proposição $K_i(B_1 \oplus B_2) = K_i(B_1) \oplus K_i(B_2)$, vide 2.23, e o lema 3.20 chegamos em

$$\begin{array}{ccccc} K_1(D) & \xrightarrow{K_0(\varphi)} & K_0(A) & \xrightarrow{K_0(\psi)} & K_0(B_1) \oplus K_0(B_2) \\ \delta_1 \uparrow & & & & \downarrow \delta_0 \\ K_1(B_1) \oplus K_1(B_2) & \xleftarrow{K_1(\psi)} & K_1(A) & \xleftarrow{K_1(\varphi)} & K_0(D) \end{array}$$

rotacionando o diagrama temos

$$\begin{array}{ccccc} K_0(A) & \xrightarrow{K_0(\psi)} & K_0(B_1) \oplus K_0(B_2) & \xrightarrow{\delta_0} & K_0(D) \\ K_0(\varphi) \uparrow & & & & \downarrow K_1(\varphi) \\ K_1(D) & \xleftarrow{\delta_1} & K_1(B_1) \oplus K_1(B_2) & \xleftarrow{K_1(\psi)} & K_1(A). \end{array}$$

□

Precisamos verificar um detalhe, que as funções do diagrama acima correspondem com as do enunciado. Veja que

$$K_0(\psi)[(b_1, b_2, \omega)]_0 = [\psi(b_1, b_2, \omega)]_0 = [(b_1, b_2)]_0 = ([b_1]_0, [b_2]_0).$$

De forma análoga conseguimos que $K_1(\psi)[(b_1, b_2, \omega)]_1 = ([b_1]_1, [b_2]_1)$. E, além disso, desenvolvendo cálculos análogos para φ temos

$$K_i(\varphi) = (K_i(pr_1), K_i(pr_2)).$$

Antes da demonstração do lema 3.20, façamos algumas considerações preliminares a respeito da imersão $i : A \longrightarrow \hat{A}$ definida por $i(b_1, b_2) \mapsto (b_1, b_2, \overline{\pi_1(b_1)})$. Note que i é um $*$ -homomorfismo de C^* -álgebra. Defina então o ideal

$$\begin{aligned} I := \ker(pr_1) &= \{a \in A : pr_1(a) = 0\} \\ &= \{(b_1, b_2) \in A : pr_1(b_1, b_2) = 0\} \\ &= \{(b_1, b_2) \in B_1 \oplus B_2 : \pi_2(b_2) = \pi_1(b_1) = 0\} \end{aligned}$$

repare que temos o isomorfismo $I \approx \ker(\pi_2)$ pois

$$\begin{aligned} \ker(\pi_2) &= \{b_2 \in B_2 : \pi_2(b_2) = 0\} \\ &\approx \{(0, b_2) \in A : \pi_2(0, b_2) = 0\} \\ &= \ker(pr_1) = I. \end{aligned}$$

A imagem do ideal I por i é:

$$\begin{aligned} i(I) := i(\ker(pr_1)) &= \{i((0, b_2)) : \pi_2(b_2) = 0\} \\ &= \{(0, b_2, 0) : \pi(b_2) = 0\} \\ &\approx I. \end{aligned}$$

Logo podemos considerar o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A/I & \longrightarrow & 0 \\ & & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & i(I) & \longrightarrow & \hat{A} & \longrightarrow & \hat{A}/\hat{I} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

onde α é isomorfismo, $\beta := i$ e γ são injetivos. Além disso, $i(I) := \hat{I}$.

Para tornar as ideias mais claras denotaremos por $\bar{x}$ a função constante de valor x .

Lema 3.21. *Seja A uma C^* -álgebra, A/I é homotopicamente equivalente a $\hat{A}/\hat{I}$.*

Demonstração. Defina as seguintes funções

$$\begin{aligned}\varphi: \hat{B}_1 &\longrightarrow B \approx A/I \\ \varphi(b_1, \omega) &= b_1\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\psi: B &\longrightarrow \hat{B}_1 \\ \psi(b_1) &= (b_1, \overline{\pi_1(b_1)})\end{aligned}$$

temos então

$$\varphi \circ \psi = \text{id}_B \quad \text{e} \quad \psi \circ \varphi(b_1, \omega) = (b_1, \overline{\pi_1(b_1)}).$$

Defina agora

$$\begin{aligned}\varphi_t: \hat{B}_1 \approx \hat{A}/\hat{I} &\longrightarrow \hat{B}_1 \\ \varphi_t(b_1, \omega) &= (b_1, (1-t)\omega + \overline{t\pi_1(b_1)})\end{aligned}$$

com isto temos $\varphi_0 = \text{id}$ e $\varphi_1 = \psi \circ \varphi$ e podemos seguir para a conclusão do lema. $\square$

Uma conclusão do lema anterior é de que, usando a proposição 2.22, $K_0(\gamma)$ e $K_1(\gamma)$ são isomorfismos. Façamos agora a demonstração do lema 3.20, isto é, a demonstração de que $K_0(\hat{A}) = K_0(A)$ e $K_1(\hat{A}) = K_1(A)$.

Demonstração. (lema 3.20) Considere o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} K_0(I) & \xrightarrow{\quad} & K_0(A) & \xrightarrow{\quad} & K_0(A/I) \\ & \searrow K_0(\alpha) & \downarrow K_0(\beta) & & \swarrow K_0(\gamma) \\ & & K_0(\hat{I}) & \xrightarrow{\quad} & K_0(\hat{A}) & \xrightarrow{\quad} & K_0(\hat{A}/\hat{I}) \\ & & \uparrow & & \downarrow & & \\ & & K_1(\hat{A}/\hat{I}) & \xleftarrow{\quad} & K_1(\hat{A}) & \xleftarrow{\quad} & K_1(\hat{I}) \\ & \swarrow K_1(\gamma) & \uparrow K_1(\beta) & & \swarrow K_1(\alpha) & & \\ K_1(A/I) & \xleftarrow{\quad} & K_1(A) & \xleftarrow{\quad} & K_1(I) \end{array}$$

como $K_0(\alpha)$ e $K_0(\gamma)$ são isomorfismos, o lema dos cinco, vide 1.2, garante que $K_0(\beta)$ é isomorfismo. Com o mesmo raciocínio concluímos que $K_1(\beta)$ é isomorfismo. $\square$

Utilizaremos agora Mayer-Vietoris para calcular, de maneira não convencional, a K-teoria de $C(S^1)$.

Exemplo 3.22. Calcularemos a K-teoria de $C(S^1) := \{f : S^1 \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ é contínua}\}$. Para isto vamos enxergar S^1 como a união de dois “intervalos” disjuntos ou, mais precisamente, usar o homeomorfismo $S^1 \approx I_1 \cup I_2$, com $I_1 = [-1, 1]$ e $I_2 = [-1, 1]$. Graficamente temos:

Figura 3.1: Decomposição de S^1 .

Veja que $C(I_1) \approx C(I_2)$ e $C(I_1 \cap I_2) = C(\{-1, 1\}) \approx \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ e então considere agora o diagrama

$$\begin{array}{ccc} C(S^1) & \longrightarrow & C(I) \\ \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ C(I) & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \end{array}$$

onde $\pi_1(f) = (f(-1), f(1))$ e $\pi_2(f) = (f(1), f(-1))$. Aplicando Mayer-Vietoris temos que

$$\begin{array}{ccccc} K_0(C(S^1)) & \longrightarrow & K_0(C(I)) \oplus K_0(C(I)) & \xrightarrow{K_0(\pi_2) - K_0(\pi_1)} & K_0(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) & \xleftarrow{K_1(\pi_2) - K_1(\pi_1)} & K_1(C(I)) \oplus K_1(C(I)) & \xleftarrow{} & K_1(C(S^1)). \end{array}$$

Para facilitar a notação, definimos $\xi_0 := K_0(\pi_2) - K_0(\pi_1)$ e $\xi_1 := K_1(\pi_2) - K_1(\pi_1)$.

Como $K_0(\mathbb{C}) = [\mathbf{1}]_0 \cdot \mathbb{Z} = K_0(C(I))$ e $K_1(\mathbb{C}) = 0 = K_1(C(I))$, onde $\mathbf{1}$ representa a função constante com valor igual a 1. Logo nosso diagrama fica

$$0 \longrightarrow K_0(C(S^1)) \longrightarrow ([\mathbf{1}]_0, 0)\mathbb{Z} \oplus (0, [\mathbf{1}]_0)\mathbb{Z} \xrightarrow{\xi_0} ([\mathbf{1}]_0, 0)\mathbb{Z} \oplus (0, [\mathbf{1}]_0)\mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} K_1(C(S^1)) \longrightarrow 0.$$

Vamos calcular agora ξ_0 nos geradores:

$$\begin{aligned} \xi_0(\mathbf{1}, \mathbf{o}) &= (K_0(\pi_2) - K_0(\pi_1))(\mathbf{1}, \mathbf{o}) = K_0(\pi_2)([\mathbf{1}], \mathbf{o}) - K_0(\pi_1)([\mathbf{1}], \mathbf{o}) \\ &= [\pi_2(\mathbf{o})]_0 - [\pi_1(\mathbf{1})]_0 \\ &= 0 - [(\mathbf{1}, \mathbf{1})]_0 \\ &= -([\mathbf{1}]_0, [\mathbf{1}]_0) \end{aligned}$$

e analogamente concluímos que $\xi_0([\mathbf{o}]_0, [\mathbf{1}]_0) = (K_0(\pi_2) - K_0(\pi_1))([\mathbf{o}]_0, [\mathbf{1}]_0) = ([\mathbf{1}]_0, [\mathbf{1}]_0)$. Logo a imagem $\Delta := \text{Im}(K_0(\pi_2) - K_0(\pi_1))$ é a diagonal do grupo $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ gerada por $([\mathbf{1}]_0, [\mathbf{1}]_0)$.

Como ψ é sobrejetora, pelo teorema do homomorfismo temos que

$$K_1(C(S^1)) = \text{Im} \psi \approx \frac{\text{Dom } \psi}{\ker \psi} = \frac{([\mathbf{1}]_0, 0)\mathbb{Z} \oplus (0, [\mathbf{1}]_0)\mathbb{Z}}{\Delta} = [\mathbf{1}]_0\mathbb{Z}.$$

Para encontrar K_0 observe, a partir dos cálculos anteriores nos geradores, que $\ker(K_0(\pi_2) - K_0(\pi_1)) = \Delta$. Logo pela exatidão

$$K_0(C(S^1)) = [\mathbf{1}]_0\mathbb{Z} \oplus [\mathbf{1}]_0\mathbb{Z}.$$

Capítulo 4

O caráter de Chern-Connes

Alain Connes foi um dos matemáticos que sistematizou a geometria não comutativa, uma referência que compila diversos resultados é [Con98]. Um dos conceitos generalizados por ele é do *Caráter de Chern*, que por este motivo designamos *Caráter de Chern-Connes*, apresentado em [Con01]. Posteriormente, David Dias, em [Dia08], calculou alguns exemplos que aqui foram desenvolvidos nos capítulos finais.

Começamos este capítulo com uma breve apresentação das definições usuais da geometria diferencial para depois fazermos a generalização introduzida por Connes. O objetivo é comparar as semelhanças entre ambas definições.

4.1 O caráter de Chern Clássico

Antes de fazer a definição do caráter de Chern precisamos do conceito de *Classes de Chern*. Informalmente, uma classe característica é uma aplicação (com algumas propriedades boas) que leva um espaço topológico compacto X até uma família de fibrados vetoriais (definidos precisamente abaixo) sobre X a $H^*(X)$, que é a cohomologia singular de X .

Lembramos que uma classe característica é uma classe de cohomologia associada à fibrados vetoriais. Alguns exemplos centrais na matemática são as classes de Stiefel-Whitney, Pontryain e as classes de Euler. Seja M uma variedade diferenciável defina a álgebra comutativa graduada

$$\Omega(M) = \bigoplus_{k=0}^{\dim M} \Omega^k(M).$$

Denote também por $\text{Der}_k \Omega(M)$ o espaço graduado das derivações de grau k , onde uma derivação D é uma transformação linear tal que

$$D(\varphi \wedge \psi) = D(\varphi) \wedge \psi + (-1)^{kl} \varphi \wedge D(\psi).$$

Em [Mic08] encontra-se a demonstração de que $\text{Der}_k(\Omega)$ é uma álgebra de Lie.

Definição 4.1. Chamamos de fibrado vetorial a tripla (E, π_E, X) onde E, X são espaços topológicos, $\pi_E : E \rightarrow X$ uma projeção (isto é, sobrejetora e contínua) e tal que o conjunto $E_x := \pi_E^{-1}(\{x\})$ satisfaz duas condições

- Existem uma vizinhança aberta U de x , $n \in \mathbb{N}$ e um homeomorfismo

$$\varphi_U : \pi_E^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{C}^n \text{ tal que } \varphi_U(E_x) = \{x\} \times \mathbb{C}^n;$$

- $\varphi_U|_{E_x}$ é uma aplicação linear entre E_x e $\{x\} \times \mathbb{C}^n$.

Frequentemente faremos a referência ao fibrado apenas como E , nestes casos fica subentendido quem é o espaço base X e a projeção π_E . Um dos principais exemplos de fibrados vetoriais são os fibrados tangentes e cotangentes de uma variedade. Tais conceitos derivam da noção de espaço tangente do cálculo diferencial. Um exemplo simples de fibrado é $(X \times \mathbb{C}^n, \pi, X)$, na literatura tal exemplo é chamado de fibrado trivial.

Dados dois fibrados E e F , uma aplicação contínua $f : E \longrightarrow F$ é chamada de *aplicação fibrada* quando

- $\pi \circ f = \pi$;
- $f_x := f|_{E_x}$ é uma aplicação linear $f_x : E_x \longrightarrow F_x$.

Caso f seja, além disso, um homeomorfismo chamaremos de *isomorfismo de fibrado*.

Nosso objetivo agora é definir uma noção de derivada nos espaços que estamos trabalhando e, para isso, devemos nos perguntar: quais as principais propriedades do operador derivação D que queremos manter? D é um operador linear e possui uma singular propriedade para o produto, tradicionalmente chamada de regra de Leibniz:

$$D(f \cdot g) = D(f)g + fD(g).$$

Considere então o conjunto $C^\infty(X)$ das funções $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ onde f é de classe C^∞ . Dado um fibrado vetorial vamos considerar o fibrado da aplicação linear tangente $T_p : TE \longrightarrow TM$ e denote $\ker T_p := VE^1$. Daremos agora duas definições da geometria diferencial clássica que possuem definições análogas na geometria não comutativa definidas em 4.4 e 4.8.

Definição 4.2. Definimos conexão no fibrado vetorial (E, π, X) como uma 1-forma $\Psi \in \Omega^1(E, VE) = \Omega^1(E, \ker T_p)$ tal que

$$\Psi \circ \Psi = \Psi \text{ e } \text{Im } \Psi = VE$$

em outras palavras, Ψ é uma projeção $TE \longrightarrow VE$.

Definição 4.3. Seja $\Psi : TE \longrightarrow VE$ uma conexão no fibrado. Definimos a curvatura R como

$$R(X, Y) = \frac{1}{2}[\Psi, \Psi](X, Y)$$

Agora estamos em condições de introduzir e caracterizar o caráter de Chern, definiremos ele como uma aplicação linear das classes de Chern $\Omega(X)$ até a cohomologia singular $H^*(X)$. Quando

¹Em determinados locais da literatura este núcleo é chamado de *fibrado vertical* de E .

X é uma variedade compacta podemos descrever explicitamente:

$$\begin{aligned} ch(E) &= \overline{tr} \left(\exp \left(\frac{\nabla^2}{2\pi i} \right) \right) \\ &= \overline{tr} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^k \frac{1}{k!} (\nabla^2)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^k \frac{1}{k!} \overline{tr}((\nabla^2)^k). \end{aligned}$$

Apesar da definição conter uma conexão ∇ pode se demonstrar que o valor de $ch(E)$ é independente da escolha desta conexão. Faremos esta demonstração para o caso na geometria não comutativa em 4.6.

Pode-se mostrar que a definição é coerente, pois existe uma única aplicação linear entre as classes de Chern $\Omega(M)$ e a cohomologia singular $H^*(M)$.

4.2 O caráter de Chern-Connes

Sejam A uma C^* -álgebra com unidade, G um grupo de Lie (isto é, uma variedade diferenciável com estrutura de grupo) e $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(A)$ uma ação contínua na topologia forte de operadores. Nestas condições dizemos que (A, G, α) é um C^* -sistema dinâmico.

Seja $a \in A$, dizemos que a é de classe C^k se $\alpha(a) : A \rightarrow A$ é de classe C^k , onde $1 \leq k \leq \infty$. Isto nos permite definir um importante conjunto auxiliar para este trabalho

$$A^\infty := \{a \in A : a \text{ é de classe } C^\infty\}.$$

O primeiro fato a notarmos sobre A^∞ é que este conjunto, não necessariamente, é uma C^* -álgebra, entretanto ela sempre será uma álgebra de Fréchet. Além disso, A^∞ é um conjunto denso em A , tal resultado é consequência imediata do Teorema de Garding cujo enunciado preciso e demonstração pode-se encontrar no apêndice A de [Dia08]. Podemos utilizar o teorema visto no apêndice 3 de [Con81] e então concluir que a subálgebra A^∞ é invariante pelo cálculo funcional holomorfo o que faz com que a inclusão de A^∞ em A induza a um isomorfismo. Sinteticamente temos

$$K_0(A^\infty) \approx K_0(A) \text{ e } K_1(A^\infty) \approx K_1(A).$$

Veja que $\alpha_g(a^{-1}) = \alpha_g(a)^{-1}$ pois, $\alpha_g(a) \cdot \alpha_g(a^{-1}) = \alpha(1_A) = \text{id}_A$. Como em uma C^* -álgebra o conjunto dos invertíveis é aberto temos que o conjunto dos invertíveis de A^∞ também é aberto. Logo a aplicação $a \mapsto a^{-1}$ é contínua.

Estas considerações nos dizem que no lugar de um módulo projetivo finitamente gerado, que a partir de agora denotaremos apenas por um *m.p.f.g.*, M sobre A podemos simplesmente tomar M^∞ sobre A^∞ . A grande vantagem nesta troca está expressa na próxima proposição.

Como consequência da proposição 3.10 de [Jac80], com raciocínio descrito nas preliminares do capítulo 1 de [Dia08], concluímos que dado um M m.p.f.g. existe uma projeção p tal que

$$p((A^\infty)^n) \approx M^\infty.$$

A partir de agora, sempre que estivermos trabalhando com M ficará implícito p a projeção que descreve M . Durante todo este trabalho denotaremos por $\mathfrak{g}$ a *Álgebra de Lie do grupo* G . Considere δ como uma representação de $\mathfrak{g}$ na álgebra de Lie das derivações de A^∞

$$\delta_X(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha_{gt}(a) - a}{t}.$$

A demonstração com detalhes de que δ é uma representação está no apêndice A de [Dia08].

Ao longo de todo este texto a propriedade de δ_X que mais utilizaremos é aquela análoga a regra de Leibniz:

$$\delta_X(ab) = \delta_X(a)b + a\delta_X(b).$$

No apêndice B definimos o produto tensorial e derivada exterior, conceitos estes que serão usados daqui em diante. A próxima proposição é um apanhado de propriedades que a derivada exterior possui quando aplicada numa projeção. Lembrando que $\mathfrak{g}^*$ representa o conjunto dual de $\mathfrak{g}$.

Definição 4.4 (Conexão). *Dado um m.p.f.g. M^∞ sobre A^∞ , chamamos ∇ de conexão sobre M^∞ se $\nabla_X : M^\infty \rightarrow M^\infty \otimes \mathfrak{g}^*$ é uma aplicação linear que satisfaz:*

$$\nabla_X(\xi a) = \nabla_X(\xi)a + \xi\delta_X(a),$$

para quaisquer que sejam $\xi \in M^\infty$, $X \in \mathfrak{g}$ e $a \in A^\infty$.

Uma das conexões mais importantes na literatura e a que será constantemente utilizada neste trabalho é chamada de *Levi-Civita*². Ela possui a propriedade de caracterizar todas as outras conexões, fato este que está demonstrado em 4.6.

Definição 4.5 (Levi-Civita). *A conexão de Levi-Civita é denotada por ∇^0 e definida como*

$$\begin{aligned} \nabla^0 : M^\infty &\rightarrow M^\infty \otimes \mathfrak{g}^* \\ \nabla_X^0(\xi) &= p\delta_X(\xi). \end{aligned}$$

Repare que ∇_X^0 realmente satisfaz as condições necessárias de conexão, ela é linear pois δ_X é uma representação, calculemos agora:

$$\begin{aligned} \nabla_X^0(\xi a) = p\delta_X(\xi a) &= p\delta_X(\xi)a + p\xi\delta_X(a) \\ &= \nabla_X^0(\xi)a + p\xi\delta_X(a). \end{aligned}$$

Do isomorfismo $p((A^\infty)^n) \approx M^\infty$ e usando que p é projeção concluímos que $p\xi\delta_X(a) \approx \xi\delta_X(a)$, disto decorre da última igualdade que

$$\nabla_X^0(\xi a) = \nabla_X^0(\xi)a + \xi\delta_X(a).$$

Proposição 4.6. *Seja (A, G, α) um C^* -sistema dinâmico e ∇ uma conexão qualquer sobre M^∞ então existe um único $\Gamma \in pM_n(\Omega^1)p$ tal que podemos escrever ∇ como*

$$\nabla_X(\xi) = \nabla_X^0(\xi) + \Gamma_X(\xi)$$

²Parte da literatura chama esta conexão de grassmanianna.

para todo $\xi \in p((A^\infty)^n)$ e $X \in (g)$.

A demonstração completa encontra-se no Lema 1.3 de [Dia08]. Ela também exhibe explicitamente Γ .

Proposição 4.7. *Seja $p \in M_n(A^\infty)$ uma projeção e d a derivação exterior então*

1. $p(dp)p = 0$;
2. $pdp \wedge dp = p(dp \wedge dp)p = (dp \wedge dp)p$;
3. $(2p - 1)dp = -dp(2p - 1)$;
4. $(pdp \wedge dp)^k = p(dp \wedge dp)^k$;
5. $d(pdp \wedge dp) = dp \wedge (pdp \wedge dp) + (pdp \wedge dp) \wedge dp$.

Demonstração. (1) Como p é projeção temos que $p^2 = p$, aplicando d dos dois lados e usando a regra de Leibniz temos que $(dp)p + pdp = dp$, multiplicando por p pela esquerda e pela direita temos $p(dp)p + p(dp)p = p(dp)p$. Logo $p(dp)p = 0$.

(2) Do item anterior concluímos que $d(pdp) = 0$, desenvolvendo o lado esquerdo temos

$$dp \wedge dpp + p d^2 pp - p dp \wedge dp = 0.$$

Logo $dp \wedge dpp = p dp \wedge dp$.

(3) Vejamos que

$$\begin{aligned} (2p - 1)dp &= 2pdp - dp &= pdp + (pdp - dp) \\ &= pdp - dpp \text{ pela relação de (1)} \\ &= (dp - dpp) - dpp \text{ novamente por (1)} \\ &= -2(dp)p + dp \\ &= -dp(2p - 1). \end{aligned}$$

(4) Basta vermos que p comuta com $dp \wedge dp$ por (2) e $p^k = p$.

(5) Usando a igualdade $pdp \wedge dp = p(dp \wedge dp)p$ de (2) temos:

$$\begin{aligned} d(pdp \wedge dp) &= d(p(dp \wedge dp)p) &= dp \wedge dp \wedge dpp + pdp \wedge dp \wedge dp \\ &= dp \wedge (pdp \wedge dp) + (pdp \wedge dp) \wedge dp. \end{aligned}$$

□

Definição 4.8. *Seja ∇ uma conexão sobre o m.p.f.g. M^∞ , definimos a curvatura associada a ∇ como o elemento $\Theta \in \text{End}_{A^\infty}(M^\infty) \otimes \Lambda^2 \mathfrak{g}^*$, onde $\text{End}(M^\infty)$ representa o conjunto dos endomorfismos de M^∞ . Θ é definido como*

$$\Theta(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}.$$

Exemplo 4.9. A curvatura Θ_0 associada a conexão de Levi-Civita é dada por

$$\Theta_0 = p \, d p \wedge d p.$$

Usando o resultado em 4.6, que uma conexão ∇ qualquer se escreve como $\nabla = \nabla^0 + \Gamma$, podemos encontrar uma forma explícita para a curvatura de ∇ :

$$\Theta = \Theta_0 + p(d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma)p.$$

O leitor interessado encontrará a demonstração na proposição 1.6 de [Dia08].

É de conhecimento geral que, dada uma matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

o seu traço Tr é a soma da diagonal principal, isto é,

$$\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

O objetivo agora é generalizar este conceito para uma C^* -álgebra qualquer, queremos preservar, principalmente, a linearidade e uma propriedade análoga a da comutatividade. Além disso, desejamos que o traço seja G -invariante no caso do (A, G, α) um C^* -sistema dinâmico.

Definição 4.10. Seja (A, G, α) um C^* -sistema dinâmico, um funcional linear contínuo $\tau : A \longrightarrow \mathbb{C}$ é chamado de traço finito G -invariante se

- $\tau(ab) = \tau(ba)$;
- τ é positivo, isto é, $\tau(a^*) = \overline{\tau(a)}$;
- $\tau(\alpha_g(a)) = \tau(a)$.

Cabe observar que, se duas projeções em uma C^* -álgebra são tais que $p \sim_0 q$ então $\tau(p) = \tau(q)$. Por consequência

$$K_0(\tau)([p]_0) = K_0(\tau)([q]_0).$$

Faremos duas extensões da definição de traço, a primeira para projeções maiores ou seja, para $M_n(A)$ e a segunda para uma aplicação k -linear num espaço vetorial Ω . Seja $p \in M_n(A)$ uma projeção definiremos $\tau(p) := \tau \circ \text{Tr}(p)$, onde Tr é o traço usual das matrizes. Vamos agora estender, para k natural, um traço τ para uma aplicação k -linear

$$\tau_k : \underbrace{\Omega \times \Omega \cdots \times \Omega}_k \longrightarrow \Lambda \mathfrak{g}^*$$

da seguinte maneira

$$\tau_k(a_1 \otimes \omega_1, \dots, a_k \otimes \omega_k) := \tau(a_1 \dots a_k) \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k.$$

A principal relação que utilizaremos sobre o traço estendido é conseguida após alguns cálculos:

$$\tau_k(a_1 \otimes w_1, \dots, a_k \otimes w_k) = \tau_1(a_1 \dots a_k \otimes w_1 \wedge \dots \wedge w_k).$$

Como os elementos de Ω possuem mais de uma representação é necessário verificar que τ_k está bem definido.

Lema 4.11. *Nas condições acima, τ_k está bem definido para qualquer $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Sejam Ω e $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ uma base qualquer de $\mathfrak{g}$ e tome dois elementos quaisquer com mesma representação $\sum_{i=1}^N a_i \otimes w_i = \sum_{j=1}^M b_j \otimes \lambda_j$. Segue que

$$\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N w_i(X_k) a_i \right) \otimes \hat{X}_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^M \lambda_j(X_k) b_j \right) \otimes \hat{X}_k,$$

E então

$$\sum_{i=1}^N w_i(X_k) a_i = \sum_{j=1}^M \lambda_j(X_k) b_j.$$

Calculando o traço podemos concluir que

$$\tau_1 \left(\sum_{i=1}^N a_i \otimes w_i \right) = \sum_{i=1}^N \tau(a_i) w_i.$$

Como $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ é base, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \tau(a_i) \sum_{k=1}^n w_i(X_k) \hat{X}_k &= \sum_{k=1}^n \tau \left(\sum_{i=1}^N w_i(X_k) a_i \right) \hat{X}_k \\ &= \sum_{k=1}^n \tau \left(\sum_{j=1}^M \lambda_j(X_k) b_j \right) \hat{X}_k \\ &= \sum_{j=1}^M \tau(b_j) \sum_{k=1}^n \lambda_j(X_k) \hat{X}_k. \end{aligned}$$

Novamente por ser base temos

$$\sum_{j=1}^M \tau(b_j) \lambda_j = \tau_1 \left(\sum_{j=1}^M b_j \otimes \lambda_j \right).$$

Logo τ_1 está bem definido, escrevendo τ_k em função de τ_1 concluímos que τ_k também está bem definido. $\square$

Pode-se mostrar que τ_k possui propriedades semelhantes às do determinante, como aquelas relativas à permutação. A demonstração é parecida com a feita para funções k -alternadas, no caso de álgebra linear. O leitor pode encontrar esta generalização no Lema 1.9 de [Dia08].

Lema 4.12. *A derivada exterior comuta com o traço 1-linear, isto é, $\tau_1 \circ d = d \circ \tau_1$.*

Demonstração. Utilizaremos a igualdade $\tau(\delta_X(a)) = 0$. Para enxergá-la basta calcular:

$$\begin{aligned}\tau(\delta_X(a)) &= \tau\left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha_{gt}(a) - a}{t}\right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau(\alpha_{gt}(a)) - \tau(a)}{t} \quad (\text{pela continuidade de } \tau) \\ &= 0 \quad (\text{Propriedade 3. do traço 4.10})\end{aligned}$$

Desenvolvendo o lado direito da igualdade temos

$$d(\tau_1(a \otimes w)) = d(\tau(a)w) = \tau(a) \, d w \quad (\text{lembre que } \tau(a) \in \mathbb{C})$$

por outro lado

$$\begin{aligned}\tau_1(d(a \otimes w)) &= \tau_1(\delta(a)w + a \, d w) \\ &= \tau(\delta(a))w + \tau(a) \, d w \\ &= \tau(a) \, d w\end{aligned}$$

e portanto, como $a \otimes w$ era arbitrário, $\tau_1 \circ d = d \circ \tau_1$. $\square$

O próximo exemplo utiliza algumas propriedades de d vistas até aqui, além disso, será importante na demonstração de que τ_k é uma forma fechada.

Exemplo 4.13. *Se p é uma projeção então $\tau_1(d p^{2k+1}) = 0$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}\tau_1(d p^{2k+1}) &= \tau_1((2p - 1)^2 d p^{2k+1}) \\ &= \tau_1((2p - 1) d p^{2k+1} (2p - 1)).\end{aligned}$$

Utilizando as propriedades de d vistas em 4.7

$$\begin{aligned}\tau_1(d p^{2k+1}) &= -\tau_1(-(2p - 1) d p^{2k+1} (2p - 1)) \\ &= -\tau_1(-(-1)^{2k+1} (2p - 1)^2 d p^{2k+1}) \\ &= -\tau_1(d p^{2k+1}).\end{aligned}$$

$\square$

Lema 4.14. *A classe de cohomologia da forma diferencial $\tau_k(\Theta, \Theta, \dots, \Theta)$ independe da conexão escolhida em M^∞ .*

Demonstração. Mostraremos que

$$\tau_k(\Theta, \Theta, \dots, \Theta) - \tau_k(\Theta_0, \Theta_0, \dots, \Theta_0) = 0.$$

Defina $\nabla_t := \nabla^0 + t\Gamma$, para $t \in [0, 1]$, um caminho entre ∇ e ∇^0 , a justificativa desse caminho é que toda conexão pode ser escrita em função de ∇^0 . Denotaremos a curvatura de ∇_t por Θ_t . De 4.2 e 4.9 temos que

$$\Theta_t = \Theta_0 + p(d(t\Gamma) + t\Gamma \wedge t\Gamma)p.$$

Derivando em função de t temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\tau_k(\Theta_t, \dots, \Theta_t) &= \sum_{i=0}^{k-1} \tau_k(\underbrace{\Theta_t, \dots, \Theta_t}_i, \frac{d}{dt}\Theta_t, \underbrace{\Theta_t, \dots, \Theta_t}_{k-i-1}) \\
&= k\tau_k(\frac{d}{dt}\Theta_t, \Theta_t, \dots, \Theta_t) \\
&= k\tau_k(pd(\Gamma)p, \Theta_t, \dots, \Theta_t) \\
&= d(k\tau_k(\Gamma, \Theta_t, \dots, \Theta_t)).
\end{aligned}$$

Como $\tau_k(\Theta, \Theta, \dots, \Theta) - \tau_k(\Theta_0, \Theta_0, \dots, \Theta_0) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\tau_k(\Theta_t, \dots, \Theta_t) dt$ e esta integração comuta com d e também do fato de $\frac{d}{dt}\tau_k(\Theta_t, \dots, \Theta_t) = d(k\tau_k(\Gamma, \Theta_t, \dots, \Theta_t))$, podemos concluir que esta forma fechada independe da conexão tomada em M^∞ . $\square$

Proposição 4.15. *A forma diferencial $\tau_k(\Theta, \Theta, \dots, \Theta) \in \Lambda^{2k}\mathfrak{g}^*$ é fechada.*

Pelo resultado anterior, basta provarmos que $\tau_k(\Theta_0, \Theta_0, \dots, \Theta_0)$ é uma forma fechada, ou seja, $d(\tau_k(\Theta_0, \Theta_0, \dots, \Theta_0)) = 0$. Da definição

$$\begin{aligned}
\tau_k(\Theta_0, \Theta_0, \dots, \Theta_0) &= \tau_k(p dp \wedge dp, \dots, p dp \wedge dp) \\
&= \tau(p^k) dp \wedge dp \wedge \dots \wedge dp \wedge dp \\
&= \tau(p)(dp \wedge dp)^k = \tau_1(p(dp \wedge dp)^k).
\end{aligned}$$

Como a derivada exterior comuta com τ_1 temos

$$\begin{aligned}
d(\tau_k(\Theta_0, \Theta_0, \dots, \Theta_0)) &= d(\tau_1(p dp^{2k})) \\
&= \tau_1(d(p dp^{2k})) \\
&= \tau_1(dp \wedge dp^{2k}) \\
&= \tau_1(dp^{2k+1}) = 0 \quad (\text{exemplo 4.13}).
\end{aligned}$$

A próxima proposição descreve a imagem do que virá a ser o Caráter de Chern.

Proposição 4.16. *Seja $p \in M_n(A^\infty)$ uma projeção, então $(\frac{1}{2\pi i})^k \frac{1}{k!}\tau_k(\Theta, \dots, \Theta)$ é uma forma real, ou seja, é um elemento de $H_{\mathbb{R}}^{par}(G)$.*

Demonstração. Repare inicialmente que, se $da \wedge db \in A^\infty \otimes \Omega^2$, temos $(da \wedge db)^* = -(db^* \wedge da^*)$. Calculemos agora

$$\begin{aligned}
\overline{\tau_1(p(dp \wedge dp)^k)} &= \tau_1((p(dp \wedge dp)^k)^*) \\
&= \tau_1((-1)^k(dp \wedge dp)^k p) \\
&= (-1)^k \tau_1(p(dp \wedge dp)^k)
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi i)^k} \tau_1(p(dp \wedge dp)^k) &= \frac{-i^k}{(2\pi)^k} \tau_1(p(dp \wedge dp)^k) \\
&= \frac{-i^k}{(2\pi)^k} (-1)^k \tau_1(p(dp \wedge dp)^k).
\end{aligned}$$

Concluimos então que $\frac{1}{(2\pi i)^k} \tau_1(p(dp \wedge dp)^k) \in \mathbb{R}$. $\square$

Definição 4.17. *Seja (A, G, α) um C^* -sistema dinâmico, definimos o Caráter de Chern-Connes (para o caso par) como o homomorfismo $Ch_\tau : K_0(A) \longrightarrow H_{\mathbb{R}}^{par}(G)$*

$$\begin{aligned} Ch_\tau([p]_0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^k \frac{1}{k!} \tau_k(\Theta, \dots, \Theta) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^k \frac{1}{k!} \tau_k(\Theta_0, \dots, \Theta_0) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^k \frac{1}{k!} \tau_1(p(d p \wedge d p)^k). \end{aligned}$$

Nesta definição estamos cometendo novamente um pequeno abuso de notação, como já ocorreu em 4.10, pois $\tau_k(\underbrace{\Theta, \dots, \Theta}_k)$, a princípio, só faz sentido quando $k > 0$. A definição precisa é

$$\begin{aligned} Ch_\tau([p]_0) &= \tau_0(p) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^k \frac{1}{k!} \tau_k(\Theta, \dots, \Theta) \\ &= \tau_0(p) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^k \frac{1}{k!} \tau_1(p(d p \wedge d p)^k) \\ &= \tau_0(p) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^k \frac{1}{k!} \tau_1(p(d p \wedge d p)^k). \end{aligned}$$

Para tornarmos a escrita mais concisa vamos escrever simplesmente $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^k \frac{1}{k!} \tau_1(p(d p \wedge d p)^k)$ e ficará implícito que em $k = 0$ a parcela a ser somada é $\tau_0(p)$ ³.

No exemplos calculados neste trabalho, o somatório da definição é sempre finito, pois todas as parcelas serão nulas após o índice superar a dimensão do grupo de cohomologia. Calculemos agora um exemplo simples para ilustrar a definição.

Exemplo 4.18. *Seja $(\mathbb{C}, \mathbb{C}, \alpha)$ um C^* -sistema dinâmico, onde $\alpha : \mathbb{C} \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{C})$ é o operador de multiplicação. O caráter de Chern-Connes será o homomorfismo*

$$\begin{aligned} Ch_\tau : K_0(A) &\longrightarrow H_{\mathbb{R}}^{par}(\mathbb{C}) \\ Ch_\tau([p]_0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^k \frac{1}{k!} \tau_1(p(d p \wedge d p)^k). \end{aligned}$$

³Tal fato não deve causar confusão visto que frequentemente abusos como estes são cometidos, por exemplo, ao escrevermos a série de Taylor.

Sabemos que $K_0(\mathbb{C}) = [\mathbf{1}]_0\mathbb{Z}$, logo precisamos calcular apenas $Ch_\tau([1]_0)$

$$\begin{aligned} Ch_\tau([1]_0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^k \frac{1}{k!} \tau_1(\mathbf{1}(\mathrm{d}\mathbf{1} \wedge \mathrm{d}\mathbf{1})^k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^k \frac{1}{k!} \tau_1((\mathrm{d}\mathbf{1} \wedge \mathrm{d}\mathbf{1})^k) \\ &= 0 \end{aligned}$$

pois, como $\mathbf{1}$ é a função constante $\mathrm{d}\mathbf{1} = 0$.

Nosso objetivo agora é definir o Caráter de Chern-Connes para o caso ímpar, isto é, com domínio $K_1(A)$.

Lema 4.19. *Seja A uma C^* -álgebra temos que $K_0(C(S^1) \otimes A) \approx K_0(A) \oplus K_1(A)$.*

Demonstração. Temos um isomorfismo entre as C^* -álgebras $C(S^1, A)$ e $C(S^1) \otimes A$. Considere a sequência exata curta que cinde

$$0 \longrightarrow S A \longrightarrow C(S^1, A) \xrightarrow{\quad} A \longrightarrow 0.$$

$\nwarrow \lambda$

Aplicando a propriedade de K_0 para sequências exatas cindidas 2.10 e o isomorfismo $K_0(S A) \approx K_1(A)$ temos que

$$0 \longrightarrow K_0(S A) \longrightarrow K_0(C(S^1, A)) \longrightarrow K_0(A) \longrightarrow 0$$

é exata curta (e cinde). Logo $K_0(C(S^1, A)) \approx K_0(A) \oplus K_1(A)$ □

Nossa intenção agora é explicitar a definição do Caráter de Chern, usaremos estes cálculos no final do capítulo] 5. Tome $[u]_1 \in K_1(A)$, isto é, $u \in \mathcal{U}_n(\tilde{A})$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Retomando o isomorfismo, visto em 3.2, $\delta_1 : K_1(A) \longrightarrow K_0(S A)$, com $\delta_1([u]_1) = [p]_0 - [p_n]_0$, onde p e p_n projeções em $\mathcal{P}_{2n}(S A)$, além disso $p_n = s(p) = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0_n \end{pmatrix}$ e, para $\theta \in [0, 2\pi]$, $p_\theta = w_\theta p_n w_\theta^*$. Wegge-Olsen em [WO93] explicitou w_θ , chegando em

$$w_\theta = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{4}) & -\sin(\frac{\theta}{4}) \\ \sin(\frac{\theta}{4}) & \cos(\frac{\theta}{4}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{4}) & \sin(\frac{\theta}{4}) \\ -\sin(\frac{\theta}{4}) & \cos(\frac{\theta}{4}) \end{pmatrix}.$$

Fazendo as multiplicações temos

$$\begin{aligned} w_\theta &= \begin{pmatrix} u \cos(\frac{\theta}{4}) & -u \sin(\frac{\theta}{4}) \\ \sin(\frac{\theta}{4}) & \cos(\frac{\theta}{4}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^* \cos(\frac{\theta}{4}) & u^* \sin(\frac{\theta}{4}) \\ -\sin(\frac{\theta}{4}) & \cos(\frac{\theta}{4}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} uu^* \cos^2(\frac{\theta}{4}) + u \sin^2(\frac{\theta}{4}) & uu^* \cos(\frac{\theta}{4}) \sin(\frac{\theta}{4}) - u \cos(\frac{\theta}{4}) \sin(\frac{\theta}{4}) \\ u^* \cos(\frac{\theta}{4}) \sin(\frac{\theta}{4}) \cos(\frac{\theta}{4}) + \cos(\frac{\theta}{4}) \sin(\frac{\theta}{4}) & \cos(\frac{\theta}{4}) u^* \sin^2(\frac{\theta}{4}) + u \sin^2(\frac{\theta}{4}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Em [Dia08] foram feitas as devidas simplificações chegando em

$$p_\theta = \begin{pmatrix} 1_n - \frac{\sin^2(\theta/2)}{4}(1-u)(1-u^*) & (u-1)\frac{\sin(\theta/2)}{2} \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{4}\right) + u \sin^2\left(\frac{\theta}{4}\right) \right] \\ (u^*-1)\frac{\sin(\theta/2)}{2} \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{4}\right) + u^* \sin^2\left(\frac{\theta}{4}\right) \right] & \frac{\sin^2(\theta/2)}{4}(1-u)(1-u^*) \end{pmatrix} \quad (4.19.1)$$

Definição 4.20. *Seja A uma C^* -álgebra definimos o Caráter de Chern Connes (para o caso ímpar) ch_τ como o homomorfismo $K_1(A) \longrightarrow H^*(G)$ dado por*

$$ch_\tau([u]_1) = Ch_\tau([p]_0 - [p_n]_0).$$

Capítulo 5

O C^* -sistema dinâmico $(\overline{\Psi_{cl}^0(S^1)}, S^1, \alpha)$

Utilizaremos a definição de [Hör85] e [Mel05] para denotar $\Psi^0(X)$ como o conjunto de todos elementos de ordem zero na classe de Hörmander. A subclasse dos operadores pseudo-diferenciais cujos símbolos possuem expansões assintóticas em componentes homogêneos de grau decrescente será denotado por $\Psi_{cl}^0(X)$. As definições com todos os detalhes encontram-se em [Hör85].

Seguindo o roteiro proposto em [Dia08] vamos calcular o caráter de Chern-Connes para o C^* -sistema dinâmico $(\overline{\Psi_{cl}^0(S^1)}, S^1, \alpha)$ em que $\overline{\Psi_{cl}^0(S^1)}$ é a C^* -álgebra gerada pelos operadores pseudo-diferenciais clássicos de ordem zero na variedade S^1 e α a ação contínua da conjugação por translação agindo no grupo S^1 .

Ao longo de todo restante do capítulo, utilizaremos os resultados de Severino Melo em [Mel97] de que a C^* -álgebra $\overline{\Psi_{cl}^0(S^1)}$ é isomorfa a $\mathcal{A}$ definida a seguir, com esta identificação será possível calcular os grupos de K-teoria de $\mathcal{A}$. A definição de $\mathcal{A}$ irá exigir alguns operadores e conjuntos auxiliares clássicos:

- Considere o conjunto $CS(\mathbb{Z})$ das sequências complexas indexadas em $\mathbb{Z}$ que admitem limites em $-\infty$ e $+\infty$, isto é,

$$CS(\mathbb{Z}) := \{(a_i)_{i \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C} : a(\infty) := \lim_{i \rightarrow \infty} a_i \text{ e } a(-\infty) := \lim_{i \rightarrow -\infty} a_i \text{ existem}\};$$

- Defina M_a como o operador de multiplicação pela sequência $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in CS(\mathbb{Z})$;
- Seja u uma função em S^1 , definimos a parametrização $\tilde{u}$ como

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\theta) :] - \pi, \pi[&\longrightarrow \mathbb{C} \\ \tilde{u}(\theta) &:= u(e^{i\theta}); \end{aligned}$$

- Lembrando a definição da transformada de Fourier discreta F_d ;

$$\begin{aligned} F_d : L^2(S^1) &\longrightarrow l^2(\mathbb{Z}) \\ (F_d u)_j &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{u}(\theta) e^{-ij\theta} d\theta \end{aligned}$$

- A inversa da transformada de Fourier será então

$$F_d^{-1} : l^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow L^2(S^1)$$

$$(a_j) \mapsto F_d^{-1}(a_j) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{ij\theta};$$

- $a(D_\theta) := F_d^{-1} M_a F_d$;
- $\mathcal{A}_1 := \{M_a : a \in C^\infty(S^1)\}$;
- $\mathcal{A}_2 := \{b(D_\theta) : b \in CS(\mathbb{Z})\}$.

Com estas ferramentas estamos em condições de definir a álgebra $\mathcal{A}$.

Definição 5.1. Chamamos de $\mathcal{A}$ a C^* -subálgebra de $\mathcal{B}(L^2(S^1))$ gerada por $\mathcal{A}_1 = \{M_a : a \in C^\infty(S^1)\}$ e $\mathcal{A}_2 = \{b(D_\theta) : b \in CS(\mathbb{Z})\}$, onde $\mathcal{A}_1 := \{M_a : a \in C^\infty(S^1)\}$ e $\mathcal{A}_2 := \{b(D_\theta) : b \in CS(\mathbb{Z})\}$.

O resultado sobre C^* -álgebra geradas, visto em 1.13, garante que $\mathcal{A}$ é uma C^* -álgebra. A seção 2 de [Mel05] mostrou que os operadores compactos $\mathcal{K}$ estão em $\mathcal{A}$. Além disso, mostrou que a sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{i} \mathcal{A} \xrightarrow{\pi} \mathcal{A}/\mathcal{K} \longrightarrow 0 \quad (5.1.1)$$

é exata, onde i representa a inclusão e π a projeção no quociente. O corolário 2 de [Mel05] mostra que existe um isomorfismo $\varphi : \mathcal{A}/\mathcal{K} \longrightarrow C(S^*S^1)$. Considere também o isomorfismo natural $\psi : C(S^*S^1) \longrightarrow C(S^1 \times \{-\infty, +\infty\})$, resumidamente temos

$$\mathcal{A} = \Psi_{cl}^0(S^1) \xrightarrow{\pi} \mathcal{A}/\mathcal{K} \xrightarrow{\sim} C(S^*S^1) \xrightarrow{\sim} C(S^1 \times \{-\infty, \infty\}).$$

Uma importante ferramenta na teoria dos operadores pseudo-diferenciais é a utilização do *símbolo principal*. Definiremos aqui como a aplicação sobrejetora $\sigma : \mathcal{A} \longrightarrow C(S^*S^1)$ $\sigma := \varphi \circ \pi$. Calculemos agora o símbolo principal nos geradores da álgebra $\mathcal{A}$, isto é, em M_a e $b(D_\theta)$.

$$\begin{aligned} \psi \circ \sigma(M_a) &= \psi(\sigma(M_a)) \\ &= \psi(\varphi(\pi(M_a))) \\ &= \psi(a) \\ &= (a, a) \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

e

$$\begin{aligned} \psi \circ \sigma([b(D_\theta)]) &= \psi(\sigma([b(D_\theta)])) \\ &= \psi(\varphi(\pi([b(D_\theta)]))) \\ &= \psi(\varphi([b(D_\theta)]_{\mathcal{K}})) \\ &= (b(-\infty), b(+\infty)). \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Aplicando o teorema da sequência exata curta, visto em 3.18, na sequência (5.1.1) temos que

$$\begin{array}{ccccc}
 K_0(\mathcal{K}) & \xrightarrow{K_0(i)} & K_0(\mathcal{A}) & \xrightarrow{K_0(\pi)} & K_0(\mathcal{A}/\mathcal{K}) \\
 \delta_1 \uparrow & & & & \downarrow \delta_0 \\
 K_1(\mathcal{A}/\mathcal{K}) & \xleftarrow{K_1(\pi)} & K_1(\mathcal{A}) & \xleftarrow{K_1(i)} & K_1(\mathcal{K})
 \end{array} \tag{5.1.4}$$

é uma sequência exata de grupos. Encontra-se em 6.4.2 e 8.2.9 de [RLL00] que, respectivamente,

$$K_0(\mathcal{K}) = [1]_0\mathbb{Z} \text{ e } K_1(\mathcal{K}) = 0.$$

Substituindo no diagrama ficamos com

$$\begin{array}{ccccc}
 [1]_0\mathbb{Z} & \xrightarrow{K_0(i)} & K_0(\mathcal{A}) & \xrightarrow{K_0(\pi)} & K_0(\mathcal{A}/\mathcal{K}) \\
 \delta_1 \uparrow & & & & \downarrow \delta_0 \\
 K_1(\mathcal{A}/\mathcal{K}) & \xleftarrow{K_1(\pi)} & K_1(\mathcal{A}) & \xleftarrow{K_1(i)} & 0
 \end{array} \tag{5.1.5}$$

segue de $\mathcal{A}/\mathcal{K} \approx C(S^1 \times \{-\infty, \infty\})$ que

$$K_0(\mathcal{A}/\mathcal{K}) \approx K_0(C(S^1 \times \{-\infty, +\infty\}))$$

e

$$K_1(\mathcal{A}/\mathcal{K}) \approx K_1(C(S^1 \times \{-\infty, +\infty\})).$$

Seja X um espaço topológico, os seguintes isomorfismos surgem de maneira natural

$$C(S^1 \times X) \approx C(S^1) \otimes C(X) \approx C(S^1, C(X)).$$

Usando a definição de suspensão, podemos construir a sequência exata cindida

$$0 \longrightarrow SC(X) \xrightarrow{i} C(S^1, C(X)) \longrightarrow C(X) \longrightarrow 0$$

aplicando o funtor K_i conseguimos que

$$K_i(C(S^1, X)) \approx K_i(C(S^1, C(X))) \approx K_{1-i}(C(X))$$

Particularmente, se $X = \{-\infty, +\infty\}$,

$$K_i(C(S^1, \{-\infty, +\infty\})) \approx K_i(C(S^1, C(\{-\infty, +\infty\}))) \approx K_{1-i}(\{-\infty, +\infty\}).$$

Usando o exemplo 3.22, para concluir, temos

$$K_0(\mathcal{A}/\mathcal{K}) \approx K_0(C(S^1 \times \{-\infty, +\infty\})) \approx [\mathbf{1}, \mathbf{0}]_0 \mathbb{Z} \oplus [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_0 \mathbb{Z}$$

e

$$K_1(\mathcal{A}/\mathcal{K}) \approx K_1(C(S^1 \times \{-\infty, +\infty\})) \approx [\mathbf{1}, \mathbf{0}]_1 \mathbb{Z} \oplus [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_1 \mathbb{Z}.$$

Como visto em 8.3.2 de [Bla86], no caso particular dos operadores compactos $\mathcal{K}$ a aplicação do índice δ_1 , definida em 3.11, coincide com o índice de Fredholm. Além disso, δ_1 será sobrejetora, como demonstrado a seguir:

Proposição 5.2. *A aplicação $\delta_1 : K_1(\mathcal{A}/\mathcal{K}) \longrightarrow K_0(\mathcal{K})$ é sobrejetora.*

Demonstração. Nossa estratégia será definir um operador $B \in \mathcal{A}$ tal que $\delta_1([B]_{\mathcal{K}})_1 = 1$, ou seja, o operador B será levado até o gerador de $K_0(\mathcal{K}) = \mathbb{Z}$ e portanto δ_1 será sobrejetora. Para isto utilizaremos a transformada de Fourier discreta e três aplicações auxiliares b_j , H e a , definidas abaixo.

$$b_j = \begin{cases} 1, & \text{se } j \geq 0 \\ z, & \text{se } j < 0 \end{cases} \quad H(j) = \begin{cases} 1, & \text{se } j \geq 0 \\ 0, & \text{se } j < 0 \end{cases} \quad a(z) = z$$

com isto, defina o operador B como

$$B(u(z)) := \sum_{j \in \mathbb{Z}} z^j b_j(z) \hat{u}_j.$$

B está em $\mathcal{A}$ pois $B = M_a(I - H(D_\theta)) + H(D_\theta)$. Utilizando a transformada de Fourier discreta definida no início do capítulo vamos calcular $F_d B F_d^{-1}$. Seja $(u_j) \in \ell^2(\mathbb{Z})$

$$B(F_d^{-1}(u_j)) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} z^j b_j(z) F_d^{-1}(u_j),$$

logo

$$F_d(B(F_d^{-1}(u_j))) = (F_d B(F_d^{-1}(u_j)))_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}} z^j b_j(e^{i\theta}) F_d^{-1}(u_j).$$

e portanto

$$F_d B F_d^{-1}(u_j)_{j \in \mathbb{Z}} = \begin{cases} u_{k-1}, & \text{se } k < 0 \\ u_0 + u_{-1}, & \text{se } k = 0 \\ u_k, & \text{se } k > 0 \end{cases}$$

Como a conjugação pela transformada não altera o núcleo do operador temos

$$\ker B = \ker(F_d B F_d^{-1}) = \{(u_j) : u_k = 0 \text{ para } k \neq 0, 1 \text{ e } u_0 = -u_{-1}\}.$$

Ou seja, o núcleo possui dimensão 1. Lembrando que o índice de Fredholm é a dimensão do núcleo

menos a codimensão da imagem do operador temos

$$\begin{aligned}
 \delta_1([B]_{\mathcal{K}})_1 &= \text{indice}([B]_{\mathcal{K}}) \\
 &= \dim \ker B - \text{codim Im } B \\
 &= 1 - 0 \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

□

Tendo este resultado, podemos voltar a estudar o diagrama 5.1.4. Substituindo os grupos de K -teoria já conhecidos temos:

$$\begin{array}{ccccc}
 [(\mathbf{1}, \mathbf{o})]_0 \mathbb{Z} & \longrightarrow & K_0(\mathcal{A}) & \xrightarrow{K_0(\pi)} & [(\mathbf{1}, \mathbf{o})]_0 \mathbb{Z} \oplus [(\mathbf{o}, \mathbf{1})]_0 \mathbb{Z} \\
 \delta_1 \uparrow & & & & \downarrow \delta_0 \\
 [(\mathbf{1}, \mathbf{o})]_0 \mathbb{Z} \oplus [(\mathbf{o}, \mathbf{1})]_0 \mathbb{Z} & \xleftarrow{K_1(\pi)} & K_1(\mathcal{A}) & \xleftarrow{\quad} & 0
 \end{array}$$

da exatidão concluímos que δ_0 é sobrejetora e então $K_0(A) = [(\mathbf{1}, \mathbf{o})]_0 \mathbb{Z} \oplus [(\mathbf{o}, \mathbf{1})]_0 \mathbb{Z}$. Observando as relações 5.1.2 e 5.1.3 chegamos em

$$K_0(A) = [[H(D_\theta)]_{\mathcal{K}}]_0 \mathbb{Z} \oplus [[I - H(D_\theta)]_{\mathcal{K}}]_0 \mathbb{Z}.$$

Ainda pela exatidão temos $K_1(A) = \ker \delta_1$. Além disso $\delta_1([(\mathbf{1}, \mathbf{1})]) = 0$. Com isto, concluímos que

$$K_1(A) = [[\mathbf{3}]_{\mathcal{K}}]_1 \mathbb{Z}.$$

Como os grupos de cohomologia de S^1 são dados por

$$H_{\mathbb{R}}^*(S^1) = H_{\mathbb{R}}^0 \oplus H_{\mathbb{R}}^1 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}.$$

Como visto em [War13a] $H^n(S^1) = 0$, para $n \geq 2$. Pelo exposto no capítulo 4 a imagem do caráter de Chern-Connes para o caso par são as cohomologias pares e, analogamente, a imagem para o caso ímpar são as cohomologias ímpares. Logo, juntando as duas informações, no caso par a única parcela que não se anula é quando $k = 0$ e no caso ímpar quando $k = 1$. O caráter de Chern-Connes para o C^* - sistema dinâmico $(\Psi_{cl}^0(S^1), S^1, \alpha)$ será o homomorfismo

$$ch_\tau : [[H(D_\theta)]_{\mathcal{K}}]_0 \mathbb{Z} \oplus [[I - H(D_\theta)]_{\mathcal{K}}]_0 \mathbb{Z} \oplus [[\mathbf{3}]_{\mathcal{K}}]_1 \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}.$$

Para o caso par temos então:

$$\begin{aligned}
 Ch_\tau([p]_0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^k \frac{1}{k!} \tau_1(p(\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}p)^k) \\
 &= \tau_0(p) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^k \frac{1}{k!} \tau_1(p(\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}p)^k) \\
 &= \tau_0(p) \\
 &= \tau(p).
 \end{aligned}$$

Lembrando que $p_n = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e portanto $\mathrm{d}p_n = 0$. Calculemos agora o caráter de Chern-Connes para o caso ímpar, isto é,

$$\begin{aligned}
 ch_\tau([u]_1) &= Ch_\tau([p]_0 - [p_n]_0) \\
 &= Ch_\tau([p]_0) - Ch([p_n]_0) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^k \frac{1}{k!} \tau_1(p(\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}p)^k) - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^k \frac{1}{k!} \tau_1(p_n(\mathrm{d}p_n \wedge \mathrm{d}p_n)^k) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^k \frac{1}{k!} \tau_1(p(\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}p)^k) \\
 &= 0 + \tau_1(p \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}p) + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^k \frac{1}{k!} \tau_1(p(\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}p)^k) \\
 &= \tau_1(p \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}p).
 \end{aligned}$$

O leitor desconfiado poderia se questionar quanto a validade do argumento a respeito da paridade da dimensão da cohomologia de S^1 , para exemplificar calcularemos explicitamente a parcela referente a $k = 0$. Lembrando da matriz apresentada em 4.19.1 temos que

$$p - p_n = \begin{pmatrix} -\frac{\sin^2(\theta/2)}{4}(1-u)(1-u^*) & (u-1)\frac{\sin(\theta/2)}{2} \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{4}\right) + u \sin^2\left(\frac{\theta}{4}\right) \right] \\ (u^*-1)\frac{\sin(\theta/2)}{2} \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{4}\right) + u^* \sin^2\left(\frac{\theta}{4}\right) \right] & \frac{\sin^2(\theta/2)}{4}(1-u)(1-u^*) \end{pmatrix}$$

logo, lembrando a definição de τ para projeções $\tau_0(p - p_n) = \tau(p - p_n) = \tau(\mathrm{Tr}(p - p_n)) = 0$. Como o caráter de Chern-Connes é um homomorfismo podemos escrever a sua matriz de transformação, para isso precisamos estudar a forma do traço τ .

Como estudado em [Mel05], todo traço τ em $C(S^1 \times \{-\infty, +\infty\})$ é a combinação linear de duas integrais sobre “cópias de S^1 ”, ou seja, existem constantes reais c_1 e c_2 , tais que

$$\tau(a) = \frac{c_1}{2\pi} \int_{S^1} \sigma_a(z, \infty) \mathrm{d}z + \frac{c_2}{2\pi} \int_{S^1} \sigma_a(z, -\infty) \mathrm{d}z.$$

Calculemos então τ nos geradores do grupo

$$\begin{aligned}
 \tau([H(D_\theta)]\mathcal{K}]_0) &= \frac{c_1}{2\pi} \int_{S^1} \sigma_{H(D_\theta)}(z, \infty) \mathrm{d}z + \frac{c_2}{2\pi} \int_{S^1} \sigma_{H(D_\theta)}(z, -\infty) \mathrm{d}z \\
 &= c_1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau([I - H(D_\theta)]\kappa)_0 &= \frac{c_1}{2\pi} \int_{S^1} \sigma_{I-H(D_\theta)}(z, \infty) \, dz + \frac{c_2}{2\pi} \int_{S^1} \sigma_{I-H(D_\theta)}(z, -\infty) \, dz \\
&= c_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau(\mathfrak{z}^{-1} d(\mathfrak{z})) &= \frac{c_1}{2\pi} \int_{S^1} \sigma_z(z, \infty) \, dz + \frac{c_2}{2\pi} \int_{S^1} \sigma_z(z, -\infty) \, dz \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Omitimos os detalhes a respeito do cálculo dessas integrais, lembramos que estes resultados são esperados em determinado sentido já que a definição de símbolo principal é justamente a integral sobre S^1 .

Capítulo 6

O C^* -sistema dinâmico $(\overline{\Psi_{cl}^0(S^2)}, S^2, \alpha)$

O objetivo agora é estender o resultado do capítulo anterior considerando o C^* -sistema dinâmico $(\overline{\Psi^0(S^2)}, SO(3), \alpha)$ onde $\Psi_{cl}^0(S^2)$ é a C^* -álgebra dos operadores pseudo-diferenciais clássicos de ordem 0 de S^2 e $\alpha : SO(3) \rightarrow \text{Aut}(\Psi_{cl}^0(S^2))$ o operador de conjugação que leva $g \in SO(3)$ em $\alpha(g) = T_g A T_g^{-1}$ onde $T_g u(x) = u(g^{-1}x)$.

Para explicitarmos o caráter de Chern-Connes é necessário conhecer os grupos de K -teoria das álgebras analisadas, $K_0(\mathcal{A})$ e $K_1(\mathcal{A})$. Assim como fizemos no capítulo anterior, usaremos que a sequência dos operadores compactos é exata, isto é,

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{K} \longrightarrow 0.$$

Ao longo de todo capítulo, iremos considerar o isomorfismo, visto no capítulo em VI.2 de [Cor87]:

$$\mathcal{A}/\mathcal{K} \approx C(S^*S^2) \approx C(SS^2).$$

Feitas estas considerações iniciais, transformamos o problema inicial para conhecer os grupos de K -teoria da C^* -álgebra $C(SS^2)$. Para isto, aplicaremos a sequência de Mayer-Vietoris, vista em 3.19, no diagrama

$$\begin{array}{ccc} C(SS^2) & \xrightarrow{pr_1} & C(\mathbb{D} \times S^1) \\ pr_2 \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ C(\mathbb{D} \times S^1) & \xrightarrow{\pi_2} & C(S^1 \times S^1) \end{array} \quad (6.0.1)$$

onde pr_1, pr_2 são as projeções naturais e

$$\begin{aligned} \pi_1 : C(\mathbb{D} \times S^1) &\longrightarrow C(S^1 \times S^1) \\ \varphi &\mapsto \varphi|_{S^1 \times S^1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \pi_2 : C(\mathbb{D} \times S^1) &\longrightarrow C(S^1 \times S^1) \\ \varphi(z, w) &\mapsto \varphi|_{S^1 \times S^1}(z, -z^2 \bar{w}). \end{aligned}$$

A rigor, antes de usarmos Mayer-Vietoris é necessário verificar que

$$C(SS^2) \approx \{(a_1, a_2) \in C(\mathbb{D} \times S^1) \oplus C(\mathbb{D} \times S^1) : a_1|_{S^1 \times S^1} = a_2|_{S^1 \times S^1}\}.$$

Para isto, é preciso estudar as projeções π_1 e π_2 . A essência desta verificação está na projeção estereográfica $\varepsilon_N : S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, são estes cálculos que justificam a forma como definimos π_1 e, principalmente, a definição de π_2 . Todos os detalhes encontram-se no Lema 3.2 de [Dia08]. Finalmente, usando Mayer-Vietoris 3.19 em 6.0.1 temos que a sequência¹

$$\begin{array}{ccccc} K_0(C(SS^2)) & \xrightarrow{(K_0(pr_1), K_0(pr_2))} & K_0(C(\mathbb{D} \times S^1))^2 & \xrightarrow{K_0(\pi_2) - K_0(\pi_1)} & K_0(C(S^1 \times S^1)) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(C(S^1 \times S^1)) & \xleftarrow{K_1(\pi_2) - K_1(\pi_1)} & K_1(C(\mathbb{D} \times S^1))^2 & \xleftarrow{(K_1(pr_1), K_1(pr_2))} & K_1(\mathcal{A}) \end{array} \quad (6.0.2)$$

é exata. O próximo lema exhibe um isomorfismo que facilitará os nossos cálculos.

Lema 6.1. *As seguintes C^* -álgebras são isomorfas $C(\mathbb{D} \times S^1) \approx C(S^1, C(\mathbb{D}))$ e $C(S^1 \times S^1) \approx C(S^1, C(S^1))$.*

Demonstração. Para $C(\mathbb{D} \times S^1) \approx C(S^1, C(\mathbb{D}))$ considere o isomorfismo:

$$\begin{aligned} \varphi : C(\mathbb{D} \times S^1) &\longrightarrow C(S^1, C(\mathbb{D})) \\ \varphi(f)(z) &= f(d, z) \end{aligned}$$

de forma análoga, para $C(S^1 \times S^1) \approx C(S^1, C(S^1))$ considere o isomorfismo:

$$\begin{aligned} \varphi : C(S^1 \times S^1) &\longrightarrow C(S^1, C(S^1)) \\ \varphi(f)(z) &= f(w, z). \end{aligned}$$

□

Para calcularmos os grupos de K-teoria de $C(S^1, C(\mathbb{D}))$ analise a sequência exata curta que cinde

$$0 \longrightarrow SC(\mathbb{D}) \longrightarrow C(S^1, C(\mathbb{D})) \longrightarrow C(\mathbb{D}) \longrightarrow 0 \quad (6.1.1)$$

como K_0 preserva sequências exatas que cindem, como visto em 2.10, temos que a sequência de exata de grupos é exata

$$0 \longrightarrow K_0(SC(\mathbb{D})) \longrightarrow K_0(C(S^1, C(\mathbb{D}))) \longrightarrow K_0(C(\mathbb{D})) \longrightarrow 0.$$

Logo

$$K_0(C(\mathbb{D} \times S^1)) = K_1(C(\mathbb{D})) \oplus K_0(C(\mathbb{D})).$$

¹Substituímos $K_0(C(\mathbb{D} \times S^1)) \oplus K_0(C(\mathbb{D} \times S^1))$ por $K_0(C(\mathbb{D} \times S^1))^2$.

Dos exemplos 3.3 e 8.2 de [RLL00] temos

$$K_0(C(\mathbb{D} \times S^1)) = [\mathbf{1}]_0 \mathbb{Z}$$

Aplicando o funtor K_1 na sequência 6.1.1 temos

$$\begin{aligned} K_1(C(\mathbb{D} \times S^1)) &= K_0(C(\mathbb{D})) \oplus K_1(C(\mathbb{D})) \\ &= [\mathfrak{w}]_1 \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Denotamos o gerador por $[\mathfrak{w}]_1$, para diferenciar de $[\mathfrak{z}]$, a outra cópia de S^1 . Tome agora a sequência exata que cinde

$$0 \longrightarrow SC(S^1) \longrightarrow C(S^1, C(S^1)) \longrightarrow C(S^1) \longrightarrow 0$$

aplicando o mesmo raciocínio anterior temos

$$K_0(C(S^1 \times S^1)) = K_1(C(S^1)) \oplus K_0(C(S^1))$$

e

$$K_1(C(S^1 \times S^1)) = K_0(C(S^1)) \oplus K_1(C(S^1))$$

com isto conseguimos que

$$K_0(C(S^1 \times S^1)) = [\mathbf{1}]_0 \mathbb{Z} \oplus [\theta]_0 \mathbb{Z}$$

e

$$K_1(C(S^1 \times S^1)) = [\mathfrak{z}]_1 \mathbb{Z} \oplus [\mathfrak{w}]_1 \mathbb{Z}$$

com $\mathbf{1}$ é a função constante igual a um, $\mathfrak{z}$ a função $z(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$. Logo o diagrama (6.0.2) se transforma em

$$\begin{array}{ccccc} K_0(C(SS^2)) & \xrightarrow{(K_0(pr_1), K_0(pr_2))} & [\mathbf{1}]_0 \mathbb{Z} \oplus [\mathbf{1}]_0 \mathbb{Z} & \xrightarrow{K_0(\pi_2) - K_0(\pi_1)} & [\mathbf{1}]_0 \mathbb{Z} \oplus [\theta]_0 \mathbb{Z} \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ [\mathfrak{z}]_1 \mathbb{Z} \oplus [\mathfrak{w}]_1 \mathbb{Z} & \xleftarrow{K_1(\pi_2) - K_1(\pi_1)} & [\mathfrak{w}]_1 \mathbb{Z} \oplus [\mathfrak{w}]_1 \mathbb{Z} & \xleftarrow{(K_1(pr_1), K_1(pr_2))} & K_1(C(SS^2)). \end{array}$$

Com as igualdades acima podemos calcular explicitamente o valor de $K_i(\pi_1)$ e $K_i(\pi_2)$:

$$\begin{aligned} K_0(\pi_1)[\varphi(x, z)]_0 &= [\pi_1(\varphi(x, z))]_0 \\ &= [\varphi|_{S^1 \times S^1}(z, z)]_0 \end{aligned}$$

$$K_0(\pi_1)(x, y) = (x, 0) \text{ e } K_1(\pi_1)(x, y) = (x, 0).$$

Para π_2 temos

$$K_0(\pi_2)(x, y) = (x, 0) \text{ e } K_1(\pi_2)(x, y) = (x, 0)$$

logo

$$K_0(\pi_2) - K_0(\pi_1)(x, y) = (y - x, 0)$$

e

$$K_1(\pi_2) - K_1(\pi_1)(x, y) = (2y, -y - x).$$

Como $K_1(\pi_2) - K_1(\pi_1)(x, y) = (2y, -y - x)$ é injetora concluímos, pela exatidão, que

$$0 \longrightarrow [\mathbf{1}, \mathbf{1}]\mathbb{Z} \longrightarrow K_1(C(SS^2)) \longrightarrow 0$$

e então $K_1(C(SS^2)) \approx [\mathbf{1}, \mathbf{1}]\mathbb{Z}$.

Por outro lado, $\ker(K_0(\pi_2) - K_0(\pi_1)) \approx [\mathbf{1}, \mathbf{1}]\mathbb{Z}$. Além disso, $\text{Im}(K_1(\pi_2) - K_1(\pi_1)) \approx 2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Logo podemos construir a seguinte sequência exata curta

$$0 \longrightarrow [(\mathbf{1}, \mathbf{o})]\mathbb{Z}_2 \longrightarrow K_0(C(SS^2)) \longrightarrow [\mathbf{1}, \mathbf{1}]\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

com isto temos que $K_0(C(S^*S^2)) \approx [(\mathbf{1}, \mathbf{1})]_0\mathbb{Z} \oplus [(\mathbf{1}, \mathbf{o})]\mathbb{Z}_2$.

Considere agora a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{A} \xrightarrow{\pi} \mathcal{A}/\mathcal{K} \longrightarrow 0.$$

Usando o teorema da sequência exata de seis termos, visto em 3.18, obtemos o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} K_0(\mathcal{K}) & \xrightarrow{K_0(\varphi)} & K_0(\mathcal{A}) & \xrightarrow{K_0(\pi)} & K_0(\mathcal{A}/\mathcal{K}) \\ \delta_1 \uparrow & & & & \downarrow \delta_0 \\ K_1(\mathcal{A}/\mathcal{K}) & \xleftarrow{K_1(\pi)} & K_1(\mathcal{A}) & \xleftarrow{K_1(\varphi)} & K_1(\mathcal{K}) \end{array}$$

substituindo os grupos de K -teoria que já conhecemos ficamos com

$$\begin{array}{ccccc} [\mathbf{1}]_0\mathbb{Z} & \xrightarrow{K_0(\psi)} & K_0(\mathcal{A}) & \xrightarrow{K_0(\pi)} & [\mathbf{1}, \mathbf{1}]_0\mathbb{Z} \oplus [\mathbf{1}, \mathbf{o}]_0\mathbb{Z}_2 \\ \delta_1 \uparrow & & & & \downarrow \delta_0 \\ [\mathbf{o}, \mathbf{1}]_1\mathbb{Z} & \xleftarrow{K_1(\pi)} & K_1(\mathcal{A}) & \xleftarrow{K_1(\psi)} & 0. \end{array}$$

Novamente vamos utilizar a sobrejetividade de $\delta_1 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ vista no capítulo anterior. Tal resultado também foi usado e justificado por [Dia08]. Como $\delta_1 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ é um homomorfismo de grupos sobrejetor ele também é injetor logo, pela exatidão, $K_1(\psi) = 0$ e então

$$0 \longrightarrow K_1(\mathcal{A}) \longrightarrow 0$$

ou seja,

$$K_1(\mathcal{A}) = 0.$$

Ainda pela exatidão concluímos que $K_0(\psi)$ é uma aplicação nula, e ficamos com

$$0 \longrightarrow K_0(\mathcal{A}) \longrightarrow [\mathbf{1}, \mathbf{1}]\mathbb{Z} \oplus [\mathbf{1}, \mathbf{o}]\mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

portanto

$$K_0(\mathcal{A}) = [\mathbf{1}, \mathbf{1}]\mathbb{Z} \oplus [\mathbf{1}, \mathbf{o}]\mathbb{Z}_2.$$

Repare que um homomorfismo $f : K_0(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{R}$ pode ser fatorado em dois homomorfismos

$$g := f|_{[\mathbf{1}, \mathbf{1}]\mathbb{Z}} \quad e \quad h := f|_{[\mathbf{1}, \mathbf{o}]\mathbb{Z}_2}$$

, entretanto f_2 será sempre nulo, pois está definido sobre $\mathbb{Z}_2$, onde $1 + 1 = 0$ e então usando a linearidade:

$$0 = h(0) = h(2) = h(1 + 1) = h(1) + h(1) = 2h(1) \implies h(1) = 0.$$

Vamos agora calcular o caráter de Chern-Connes para o C^* -sistema dinâmico $(\overline{\Psi^0(S^2)}, SO(3), \alpha)$. Pela definição dada em 4.17 temos

$$Ch_\tau : K_0(A) \oplus K_1(\mathcal{A}) \longrightarrow H_{\mathbb{R}}^{par}(SO(3))$$

ou seja,

$$Ch_\tau : [\mathbf{1}, \mathbf{1}]_0\mathbb{Z} \oplus [\mathbf{1}, \mathbf{o}]\mathbb{Z}_2 \oplus 0 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Como $K_1(A)$ é zero e, além disso, o único gerador cuja imagem não é nula é $[\mathbf{1}, \mathbf{1}]$, podemos escrever o caráter como

$$\begin{aligned} Ch_\tau : [\mathbf{1}, \mathbf{1}]_0\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ Ch_\tau([\mathbf{1}, \mathbf{1}]_0) &= \tau(z). \end{aligned}$$

Apêndice A

Grupo de Grothendieck

O *Grupo de Grothendieck* é uma maneira de gerar, a partir de um semigrupo abeliano S , um grupo abeliano. A ideia é considerar um quociente do produto cartesiano $S \times S$.

Seja $(S, +)$ um semigrupo abeliano, isto é, a operação binária $+: S \times S \rightarrow S$ é associativa e comutativa. Considere a relação $\sim$ em $S \times S$ definida por

$$(x, y) \sim (\tilde{x}, \tilde{y}) \Leftrightarrow \exists z \in S \text{ tal que } x + \tilde{y} + z = \tilde{x} + y + z.$$

A relação $\sim$ é baseada na regra do cancelamento e define uma relação de equivalência em $S \times S$. Com isto podemos definir o conjunto quociente $(S \times S) / \sim$. Denotaremos tal conjunto por $G(S)$, este será o grupo abeliano obtido através da construção de Grothendieck para o semigrupo abeliano S . O objetivo desta seção é definir uma operação e mostrar que $G(S)$ é, de fato, um grupo.

Defina $+: G(S) \times G(S) \rightarrow G(S)$ como:

$$[(x, y)] + [(z, w)] = [(x + z, y + w)].$$

Lema A.1. *A operação $+: G(S) \times G(S) \rightarrow G(S)$ definida acima está bem definida.*

Demonstração. Sejam $(x', y'), (z', w') \in S \times S$ tais que $(x', y') \sim (x, y)$ e $(z', w') \sim (z, w)$. Calculemos a soma

$$[(x', y')] + [(z', w')] = [(x' + z', y' + w')] \sim [(x + z, y + w)].$$

□

A associatividade e a comutatividade em $G(S)$ seguem das respectivas propriedades em S . Note agora que para quaisquer $x, y \in S$ temos $[(x, y)] + [(x, x)] = [(x, y)]$. Logo $G(S)$ possui como elemento neutro $0_{G(S)} = [(x, x)]$. Por fim veja que

$$[(x, y)] + [(y, x)] = [(x + y, x + y)] = 0_{G(S)}$$

com isto, todo elemento possui oposto e $-[(x, y)] = [(y, x)]$.

Definição A.2. *A função $\gamma_S : S \rightarrow G(S)$ que faz $x \mapsto [(x + y, y)]$ é chamada de Função de Grothendieck.*

Repare que, como S é comutativo, γ_S é independente da escolha de y , pois $[(x+y, y)] = [(x+z, z)]$ quaisquer que sejam x , y ou z .

Observação A.3. *A função de Grothendieck nos fornece uma maneira prática de escrever o grupo:*

$$G(S) = \{\gamma_S(x) - \gamma_S(y) : x, y \in S\}$$

esta representação é a base para a representação padrão de K_0 , vista em 2.12. Para chegar na representação basta calcular

$$\begin{aligned} \gamma_S(x) - \gamma_S(y) &= [(x+y, y)] - [(y+x, x)] \\ &= [(x+y, y)] + [(x, y+x)] \\ &= [(x+y+x, y+y+x)] \\ &= [(x, y)]. \end{aligned}$$

Apêndice B

Produto Tensorial e Derivada Exterior

Escreveremos aqui uma breve definição de produto tensorial e derivada exterior. Não temos a menor pretensão de esgotar esses temas, dando apenas suporte para o leitor que nunca teve contato com tais conceitos. Aqueles que quiserem verificar os detalhes e aprofundar podem consultar [War13b].

Considere V e W espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}^1$. Defina $\mathfrak{F}(V, W)$ como o espaço vetorial gerado por todos elementos de $V \times W$, isto é, $\mathfrak{F}(V, W) = \text{span}\{V \times W\}$. Defina $\mathfrak{R}(V, W)$ como o subespaço gerado por todas as combinações lineares naturais de $\mathfrak{F}(V, W)$, ou seja, gerado por

$$\begin{aligned} (v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w) \\ (v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2) \\ (av, w) - a(v, w) \\ (v, aw) - a(v, w) \end{aligned}$$

onde $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ e $a \in \mathbb{K}$. Definimos o *produto tensorial* de V e W como o quociente $\mathfrak{F}(V, W)/\mathfrak{R}(V, W)$.

Uma das propriedades mais importantes a respeito do produto tensorial é a *Propriedade da Aplicação Universal* utilizada por [Coo15] para fazer a definição

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\varphi} & V \otimes W \\ \downarrow l & \swarrow & \\ U & & \end{array}$$

Definimos o espaço tensorial $V_{r,s}$ como o produto tensorial

$$\underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_r \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_s$$

Definição B.1. *Seja M uma variedade diferenciável, definimos o k -fibrado exterior sobre M como o conjunto:*

$$\Omega_k^*(M) = \bigcup_{m \in M} \Omega_k^*(M_m^*).$$

Definição B.2. *Seja d uma forma bilinear anti simétrica em $\Omega_k^*(M)$. Chamaremos d de derivada exterior. O conjunto de todas as derivadas exteriores de ordem p em $m \in M$ será denotado por $\Omega_m^p(M)$.*

¹para nossos objetivos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Referências Bibliográficas

- [Bla86] Bruce Blackadar. *K-theory for operator algebras*, volume 5. Cambridge University Press, 1986. [9](#), [50](#)
- [Con81] Alain Connes. An analogue of the thom isomorphism for crossed products of a C^* algebra by an action of $\mathbb{R}$. *Advances in mathematics*, 39(1):31–55, 1981. [37](#)
- [Con98] Alain Connes. Noncommutative geometry. Em *Visions in Mathematics*, páginas 481–559. Springer, 1998. [35](#)
- [Con01] Alain Connes. C^* algebras and differential geometry. *arXiv preprint hep-th/0101093*, 2001. [iii](#), [v](#), [1](#), [35](#)
- [Coo15] Bruce Cooperstein. *Advanced linear algebra*. Chapman and Hall/CRC, 2015. [63](#)
- [Cor87] Heinz Otto Cordes. *Spectral theory of linear differential operators and comparison algebras*, volume 76. Cambridge University Press, 1987. [55](#)
- [DC01] David Pires Dias e Cristina Cerri. O produto cruzado de C^* -álgebras por grupos medievais. 2001. [6](#)
- [Dia08] David P Dias. O caráter de chern-connes para c^* -sistemas dinâmicos calculado em algumas álgebras de operadores pseudodiferenciais. *arXiv preprint arXiv:0808.0512*, 2008. [35](#), [37](#), [38](#), [39](#), [40](#), [41](#), [46](#), [47](#), [56](#), [58](#)
- [Exe02] Ruy Exel. Uma introdução às C^* -álgebras. *Primeira Bienal de Matemática, Minas Gerais*, 2002. [3](#), [5](#)
- [Hat05] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. , 2005. [3](#), [6](#), [8](#)
- [Hör85] Lars Hörmander. The analysis of linear differential operators iii. *Grundlehren Math. Wiss*, 274, 1985. [47](#)
- [Jac80] Nathan Jacobson. Basic algebra ii, ch. 9, 1980. [37](#)
- [Mel97] Severino T. Melo. Characterizations of pseudodifferential operators on the circle. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 125(5):1407–1412, 1997. [47](#)
- [Mel05] Severino T. Melo. Norm closure of classical pseudodifferential operators does not contain hörmander’s class. *Geometric Analysis of PDE and Several Complex Variables: Dedicated to François Trèves*, 368:329, 2005. [47](#), [48](#), [52](#)
- [Mic08] Peter W Michor. *Topics in differential geometry*, volume 93. American Mathematical Soc., 2008. [35](#)
- [Mur14] Gerald J Murphy. *C^* -algebras and operator theory*. Academic press, 2014. [3](#), [5](#), [6](#)
- [POL] *Lectures notes on the K-Theory of operator Algebras*, author=Rainer Matthes, Wojciech Szymański, journal=Notas de aula, year=2001. [29](#)

- [RLL00] Mikael Rørdam, Flemming Larsen e N Larsen. *An Introduction to K-theory for C^* -algebras*, volume 49. Cambridge University Press, 2000. [9](#), [10](#), [11](#), [12](#), [13](#), [14](#), [15](#), [16](#), [17](#), [18](#), [21](#), [23](#), [26](#), [27](#), [49](#), [57](#)
- [War13a] Frank W Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, volume 94. Springer Science & Business Media, 2013. [51](#)
- [War13b] Frank W Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, volume 94. Springer Science & Business Media, 2013. [63](#)
- [WO93] Niels Erik Wegge-Olsen. *K-theory and C^* -algebras: a Friendly Approach*, volume 1050. Oxford university press Oxford, 1993. [9](#), [45](#)

Índice Remissivo

A

Álgebra, 3
 Abeliana, 3
 com Unidade, 3
 de Matrizes, 5
 de Banach, 4
 Normada, 4
Aplicação de Bott, 24
Aplicação do índice, 18
Aplicação Exponencial, 26
 Descrição Explícita, 27

B

Bott
 Naturalidade, 25
 Definição, 24
 Periodicidade de, 26

C

C*
 Gerada, 5
 Subálgebra, 5
C* álgebra, 4
C* sistema dinâmico, 37
Caráter de Chern-Connes
 Ímpar, 46
 Par, 44
Cone, 22
Conexão, 38
 de Levi-Civita, 38
Curvatura, 39

D

Diagrama Comutativo, 8

E

Exponencial
 Definição, 26
 Naturalidade da, 26

G

Grothendieck
 Função de, 61
 Representação de, 62

H

Homotopia, 6

I

Índice
 Representação com isometria parcial, 20
 Definição, 18
 Naturalidade do, 18
Isometria parcial, 20

K

K_0
 Cinde, 13
 Definição, 13
 Funtor, 11
 meio-exato, 12
 Propriedade Universal de, 11
 Construção para álgebras sem unidade, 13
 Construção para C*-álgebras com unidade,
 9
 Representação padrão com unidade, 10

K_1

 Cinde, 16
 Funtor, 15
 meio-exato, 16
 Propriedade Universal de, 15
 Construção, 14
 Definição, 15
 Funtoriedade, 15

K_n , 23

L

Lema dos Cinco, 8

M

Mayer-Vietoris, 29
Murray-Von-Neumann, 10

P

Produto Tensorial, 63
 Aplicação Universal, 63
Projeção, 9
 Laço de, 24

S

Sequência

 Cindida, [7](#)

 Exata Curta, [7](#)

Sequência de seis termos, [27](#)

Soma Direta, [5](#)

Suspensão, [22](#)

T

Traço, [40](#)

U

Unitário, [14](#)

Unitização, [5](#)