As 2-álgebras de Lie simples de posto toral 3.

Carlos Rafael Payares Guevara

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemáticas
Orientador: Prof. Dr. Alexandre Grichkov

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da
CAPES

Sao Paulo, Dezembro de 2016

As 2-álgebras de Lie simples de posto toral 3.

Esta é a versão original da tese elaborada pelo
candidato (Carlos Rafael Payares Guevara), tal como
submetida a Comissão Julgadora.

As 2-álgebras de Lie simples de posto toral 3.

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 05/12/2016. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Henrique Guzzo Junior (Presidente) - IME-USP
- Prof. Dr. Juan Carlos Gutierrez Fernandez - IME-USP
- Prof. Dr. Wilian Francisco de Araujo - UTFPr
- Prof. Dr. Artem Lopatin - UNICAMP
- Prof. Dr. Ilya Gorshkov - UFABC

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente à Deus, por sua infinita misericórdia e fidelidade.

Aos meus pais, Armando Payares H., e Marlene Guevara H., razão maior da minha existência.

À minha esposa e companheira incondicional Mariela Perez A., pela paciência, amor e compreensão nas minhas ausências.

Agradeço a CAPES pelo importante apoio financeiro.

À minha família, pelo apoio, incentivo, compreensão e paciência.

Quero agradecer ao Prof. Dr. Alexandre Grichkov, pela excelente orientação.

Aos membros da banca pelas correções, sugestões e orientações, para a versão final da tese.

Sou grato aos meus amigos de doutorado, pela força e amizade.

Muito obrigado Brasil...!

Resumo

PAYARES GUEVARA, C. R. **As 2-álgebras de Lie simples de posto toral 3.**
2016. 120 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

Neste trabalho estudamos as 2-álgebras de Lie simples, de dimensão finita e de posto toral 3, sobre um corpo algebricamente fechado de característica 2. Nós conjecturamos que a única 2-álgebra de Lie simples de este tipo é $W(1, \underline{3})$. Assim, nosso principal objetivo é verificar a veracidade desta conjectura para estas álgebras de pequenas dimensões.

Como resultados, provamos que esta conjectura é certa para todas estas álgebras de dimensão menor ou igual a 16, e também em alguns casos especiais quando a dimensão é 17.

Palavras-chave: 2-álgebras de Lie , Posto toral, Simples.

Abstract

PAYARES GUEVARA, C. R. **Simple Lie 2-algebras of toral rank 3.**

2016. 120 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

In this work we study the simple Lie 2-algebras of finite dimension, and toral rank 3 over an algebraically closed field characteristic 2. We surmise that the only simple Lie 2-algebra of this type is $W(1, \underline{3})$. So, our main objective is to study the truthfulness of this conjecture for these algebras of small dimensions. As a result, we prove that this conjecture is true for all these algebras less than or equal to 16 dimension, and also in some special cases when the dimension is 17.

Keywords: Lie 2-algebras, Toral rank, Simple.

Conteúdo

Introdução	5
1 Preliminares e Notações	9
1.1 Categoria das 2-álgebras de Lie	9
1.2 Subálgebra toral e posto toral	11
1.3 Decomposição de Cartan	12
1.4 Uma 2-álgebra de Lie simples de dimensão 34 de posto toral 4.	13
1.5 Extensões de $(L, [2])$ -módulos e Lema de Schur.	19
1.6 Potência exterior de módulos	19
2 As 2-álgebras de Lie simples de $\dim_k \leq 16$ de posto toral 3	21
2.1 As 2-álgebras de Lie simples de $\dim_k \leq 6$	21
2.2 Decomposição de Cartan de uma 2-álgebra de Lie de posto toral 3. . . .	21
2.3 Análise de $L = H \oplus \sum_{\xi \in \Delta_i} \oplus L_\xi$, com $\text{card}(\Delta_i) < 7$	25
2.4 Análise de $L = H \oplus \sum_{\xi \in \Delta} \oplus L_\xi$, com $\Delta = T^* \setminus \{0\}$	33
3 Extensões de $\mathfrak{sl}_3(k)$-2-módulos	39
3.1 Os $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos irredutíveis de $\dim_k \leq 8$	39
3.1.1 2-representação irredutível de peso $(0, 0)$	39
3.1.2 2-representação irredutível de peso $(1, 0)$	40
3.1.3 2-representação irredutível de peso $(0, 1)$	40
3.1.4 2-representação irredutível de peso $(1, 1)$	41
3.2 $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de $\dim_k < 8$	42
3.2.1 $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de $\dim_k = 2$	42
3.2.2 $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de $\dim_k = 4$	43
3.2.3 $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de $\dim_k = 5$	47
3.2.4 $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de $\dim_k = 6$	48
3.2.5 $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de $\dim_k = 7$	52
3.3 $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de $\dim_k = 8$	54
3.3.1 Tabelas de alguns $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de $\dim_k = 8$	61

4	As 2-álgebras de Lie simples de $\dim_k = 17$ de posto toral 3	103
4.1	$L = T \oplus \sum_{\xi \in G} L_\xi$, onde $\dim_k(L_\xi) = 2, \forall \xi \in G$	105
4.1.1	$(L, [2])$ contém uma 2-subálgebra isomorfa a $(\mathfrak{sl}_3(k), 2)$	105
4.1.2	$(L, [2])$ contém 2-subálgebras de Lie não simples e não solúveis. .	120

Lista de Símbolos

k	Corpo algebricamente fechado de características 2.
$\mathbb{F}_2$	Corpo primo de k
L	Álgebra de Lie sobre k de dimensão finita.
$(L, [2])$	2-álgebra de Lie.
$\mathfrak{sl}_n(k)$	Álgebra de Lie das matrizes $n \times n$ de trazo zero.
$\mathfrak{o}_3(k)$	Álgebra de Lie simples sobre k de $\dim_k = 3$.
e_{ij}	Matriz cuja i, j -ésima entrada é 1 e as demais são todas nulas.
$W(1, \underline{n})$	Álgebra de Witt.
$MT(L)$	Posto toral de $(L, [2])$.
$\text{Ann}_L(T)$	Anulador de T em L .
$\mathfrak{gl}_n(k)$	Álgebra de Lie das matrizes $n \times n$ sobre k .
$\mathfrak{gl}(V)$	Álgebra de Lie dos endomorfismo de V .
$\text{End}_k(V)$	Álgebra dos endomorfismo de V .
S_n	Grupo simétrico de n letras.
$L^{(n)}$	A n -ésima subálgebra derivada de L .
$GL_3(\mathbb{F}_2)$	Grupo linear das matrizes invertível de ordem 3×3 sobre $\mathbb{F}_2$
$M \ltimes N$	Extensão de módulos de M por N .
$M_{m \times n}(F)$	Espaço das matrizes de ordem $m \times n$ sobre um corpo F .
$\Lambda^2(M)$	Segunda potência exterior de M .
$\text{Der}_k(L)$	Álgebra das derivações de L .
Card	Cardinalidade.
$\simeq$	Isomorfismo.
$\mathfrak{z}(L)$	Centro de L .
V_3	$\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos irredutível 3-dimensional.
V_0	$\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos irredutível 1-dimensional.
$[A, B]$	O subespaço gerado por $\{[x, y] : x \in A, y \in B\}$.
$\dim_k(L)$	Dimensão de L sobre k .
$\text{Ext}_{\mathfrak{sl}_3(k)}^1$	Functor Extensão.
$\mathfrak{o}_3(k)_2$	2-envolvente minimal de $\mathfrak{o}_3(k)$ ou 2-fecho de $\mathfrak{o}_3(k)$.

Introdução

A classificação das álgebras de Lie simples de dimensão finita depende da característica do seu corpo base. Como a característica de qualquer corpo é um número primo p ou é igual a 0, vamos resumir os resultados encontrados até agora sobre o problema de classificação das álgebras de Lie simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero ou prima. As álgebras de Lie simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero foram classificadas no início do século XIX por Killing e Cartan da seguinte forma (ver [Ja]):

Teorema 0.1 (W. Killing-E. Cartan, 1887-1894.). *Toda álgebra de Lie simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica 0 é isomorfa a uma das álgebras de Lie Clássicas A_n ($n \geq 1$), B_n ($n \geq 2$), C_n ($n \geq 3$), e D_n ($n \geq 4$) ou as álgebras de Lie Excepcionais G_2 , F_4 , E_6 , E_7 , E_8 .*

O problema de classificação das álgebras de Lie simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica prima $p > 0$, começou com a seguinte conjectura de Kostrikin-Shafarevich.

Conjectura (Kostrikin - Shafarevich, 1966). Toda p -álgebra (ver [Ja] pág. 187-188, definição 4.) de Lie simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica $p > 5$ é do

- *tipo Clássica* (via álgebras de Chevalley), ou
- *graduada do tipo Cartan*: $W(n; \underline{1})$, $n \geq 1$, $S(n; \underline{1})^{(1)}$, $n \geq 3$, $H(2r; \underline{1})^{(2)}$, $r \geq 1$, $K(2r+1; \underline{1})^{(1)}$, $r \geq 1$.

Mais tarde, Victor Kac, generaliza a conjectura de Kostrikin-Shafarevich da seguinte forma:

Conjectura (V. Kac 1971). Toda álgebra de Lie simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica $p > 3$ é do *tipo Clássico* ou *filtrada do tipo Cartan*.

Como resultados parciais para estas conjecturas temos:

- ▷ A conjectura de Kostrikin-Shafarevich é verdadeira para $p > 7$ (R. Block e R. Wilson, 1988).
- ▷ A conjectura de V. Kac é verdadeira para $p > 7$ (H. Strade, 1998).

- ▷ Álgebras de Melikian, só em $p = 5$. (G. Melikian, 1980).
- ▷ A conjectura de V. Kac foi resolvida por H. Strade e A. Premet, no início dos anos 2.000.

Um resumo desses resultados pode ser enunciado como o teorema de classificação de Block-Wilson-Strade-Premet, cuja demonstração pode ser encontrada em [St1], [St2], [St3] :

Teorema 0.2 (Block - Wilson - Strade - Premet, 1988-2008). *Toda álgebra de Lie simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica $p > 3$ é tipo Clássica (via álgebras de Chevalley), ou filtrada de tipo Cartan, ou uma álgebra de Melikian (só se $p = 5$).*

Portanto temos que

Teorema 0.3 (Classificação das p -álgebras de Lie simples, $p > 3$). *Toda p -álgebra de Lie simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica $p > 3$ é :*

- *tipo Clássica:* A_n , $\mathfrak{psl}_{2n}(k)$, $n \geq 1$, B_n , $n \geq 2$, C_n , $n \geq 3$, D_n , $n \geq 4$, E_6 , E_7 , E_8 , F_4 ou G_2 .
- *graduada do tipo Cartan:* $W(n; \underline{1})$, $n \geq 1$, $S(n; \underline{1})^{(1)}$, $n \geq 3$, $H(2r; \underline{1})^{(2)}$, $r \geq 1$, $K(2r+1; \underline{1})^{(1)}$, $r \geq 1$.
- *a álgebra de Melikian de dimensão 125 (só se $p = 5$).*

Depois da classificação das álgebras de Lie simples e das p -álgebras de Lie simples, de dimensão finita, sobre corpos de características $p > 3$, o principal problema ainda em aberto na categoria das álgebras de Lie de dimensão finita é a classificação de álgebras de Lie simples e das p -álgebras de Lie simples sobre um corpo algebricamente fechado de característica $p = 2$ ou $p = 3$. O primeiro passo nessa direção foi feito por S. Skryabin, (Ver [Sk]). Nesse artigo, S. Skryabin demonstrou o seguinte teorema:

Teorema 0.4 (S. Skryabin, 1998). *Seja L uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado de característica 2 e de posto toral absoluto 1 (ver [St1], pág.23, definição 1.2.1). Então L é solúvel. Isto é, não existem álgebras Lie simples de dimensão finita de posto toral absoluto 1 sobre um corpo algebricamente fechado de característica 2.*

O Teorema 0.4 é equivalente ao seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em [Gr]:

Teorema 0.5. *Seja L uma álgebra de Lie simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica 2. Então L tem posto toral absoluto maior ou igual a 2.*

A. Grichkov e A. Premet, em [GP], classificaram todas as álgebras de Lie simples de dimensão finita e de posto toral absoluto 2 sobre um corpo algebricamente fechado de característica 2. Esse resultado diz o seguinte:

Teorema 0.6 (Teorema de classificação de Premet-Grichkov). *Seja L uma álgebra de Lie simples de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado de característica 2. Se o posto toral absoluto de L é 2, então L é clássica de dimensão 3, 8, 14 ou 26.*

Como um corolário do Teorema 0.6 temos:

Corolário 0.7. *Se $(L, [2])$ é uma 2-álgebra de Lie simples de dimensão finita sobre um corpo k , algebricamente fechado de característica 2 e de posto toral 2, então L é isomorfa a: $\mathfrak{sl}_3(k)$, G_2 ou D_4 .*

Um pequeno passo na classificação das álgebras de Lie simples de dimensão finita de característica 2 é o seguinte resultado (ver [GZ]):

Teorema 0.8 (Grichkov-Zusmanovich, 2016). *Seja L uma álgebra de Lie simples de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado de característica 2 e de posto toral absoluto 2. Se L contém uma subálgebra de Cartan de posto toral 1, então $L \cong \mathfrak{o}_3(k)$.*

Para posto toral absoluto ou posto toral maior ou igual que 3 temos os seguintes problemas ainda em aberto:

Problema I. Classificar as álgebras de Lie simples de dimensão finita de posto toral absoluto maior ou igual que 3 sobre um corpo algebricamente fechado de característica 2.

Problema II. Classificar as 2-álgebras de Lie simples de dimensão finita de posto toral maior ou igual que 3 sobre um corpo algebricamente fechado de característica 2.

Para o problema I, temos o seguinte resultado devido a M. Guerreiro, A. Grischov e W. Araújo (ver [GGA]), para o caso em que o posto toral absoluto é 3:

Teorema 0.9 (M. Guerreiro - A. Grichkov - W. Araújo, 2014). *Seja L uma álgebra de Lie simples de dimensão 7 e posto toral absoluto 3 sobre um corpo k de característica 2 algebricamente fechado. Então L é isomorfa à álgebra de Witt-Zassenhaus $W(1, \underline{3})^{(1)}$, ou à álgebra de Hamilton $H(2 : (2, 1); \omega)$, onde $\omega := (1 + x^{(3)}y)dx \wedge dy$.*

Até hoje só conhecemos um exemplo concreto de 2-álgebras de Lie simples de posto toral 3 sobre um corpo algebricamente fechado de característica 2, portanto para o problema II e quando o posto toral é 3, nós propomos a seguinte conjectura:

Conjectura. A única 2-álgebra de Lie simples de posto toral 3 é $W(3, \underline{1})$.

Neste trabalho vamos a dar uma solução parcial para essa conjectura. Portanto o principal objetivo desta tese é o estudo das 2-álgebras de Lie simples de dimensão menor

ou igual a 17 de posto toral 3 sobre um corpo algebricamente fechado de característica 2.

Os resultados principais deste trabalho são:

- Não existem 2-álgebras de Lie simples de dimensão menor ou igual a 16 de posto toral 3 sobre um corpo algebricamente fechado de característica 2 (Teorema 2.9).
- Não existem 2-álgebras de Lie $(L, [2])$, simples de dimensão 17 de posto toral 3 sobre um corpo k algebricamente fechado de característica 2, cuja decomposição de Cartan respeito a subálgebra toral T é: $L := T \oplus \sum_{\xi \in G} \oplus L_\xi$, onde $G := \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ é um grupo abeliano elementar de ordem 8, $\dim_k(T) = 3$ e $\dim_k(L_\xi) \neq 2$ para algum $\xi \in G$. (Proposição 4.1)
- Não existem 2-álgebras de Lie $(L, [2])$, simples de dimensão 17 de posto toral 3 sobre um corpo k algebricamente fechado de característica 2, contendo uma cópia de $(\mathfrak{sl}_3(k), 2)$, e cuja decomposição de Cartan respeito a subálgebra toral T é: $L := T \oplus \sum_{\xi \in G} \oplus L_\xi$, onde $G := \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ é um grupo abeliano elementar de ordem 8, $\dim_k(T) = 3$ e $\dim_k(L_\xi) = 2$ para todo $\xi \in G$. (Teorema 4.2)

O trabalho está estruturado da seguinte forma (é interessante notar que estaremos trabalhando com álgebras de Lie simples de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado de característica 2). No capítulo 1 serão introduzidos os conceitos e a terminologia a serem usados ao longo de todo o trabalho. Vamos a começar o capítulo 1 com algumas definições básicas, por exemplo: 2-álgebras de Lie, posto toral, 2-representações, 2-módulos, decomposição de Cartan, etc. Também apresentaremos um exemplo de uma 2-álgebra de Lie simples de dimensão 34 de posto toral 4 achada por V.G. Kac. e B. Weisfeiler (ver [KV]). Além disso, enunciaremos alguns resultados bem conhecidos e que serão de grande importancia para o trabalho. No capítulo 2 demonstraremos que não existem as 2-álgebras de Lie simples de posto toral 3 de dimensão menor ou igual que 16 sobre um corpo k algebricamente fechado de característica 2. No capítulo 3, classificaremos os $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos irredutíveis de dimensão menor ou igual a 8 e, considerando as extensões destes $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos irredutíveis, apresentaremos uma lista dos $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de dimensão menor ou igual a 8 (e, por tabela, em casos em que as extensões cindem, e alguns casos quando as extensões não cindem). Ao final é apresentado o resultado principal deste capítulo que estabelece condições necessarias e suficientes para que exista um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -morfismo $\Lambda^2(U) \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k) \oplus k$, onde U é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo de dimensão 8. Finalmente, no capítulo 4, fazendo uso dos resultados do capítulo 1 e 3, estudaremos a 2-álgebra de Lie simples $(L, [2])$, de dimensão 17 de posto toral 3 e mostraremos em alguns casos especiais que elas não existem. Além disso, apresentamos uma forma de abordar o estudo de $(L, [2])$, quando ela contém uma 2-subálgebra de Lie não simples e não solúvel, e sua decomposição de Cartan respeito a subálgebra toral T é do jeito, $L := T \oplus \sum_{\xi \in G} \oplus L_\xi$ onde $G := \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ é um grupo abeliano elementar de ordem 8, $\dim_k(T) = 3$ e $\dim_k(L_\xi) = 2$ para todo $\xi \in G$.

Capítulo 1

Preliminares e Notações

Neste capítulo estaremos listando algumas definições e resultados básicos que julgamos necessários para a leitura desta tese por serem básicos omitiremos as demonstrações dos resultados, mas estas demonstrações podem ser encontradas em um dos seguintes livros [SF], [Ja].

1.1 Categoria das 2-álgebras de Lie

Durante todo o texto, nos referiremos a k como sendo um corpo algebricamente fechado de característica 2 contendo o corpo primo $\mathbb{F}_2$, e L uma álgebra de Lie sobre k de dimensão finita.

Definição 1.1. ([Ja]). Uma **2-álgebra de Lie** é um par $(L, [2])$ onde L é uma álgebra de Lie sobre k , e $[2] : L \rightarrow L$, $a \mapsto a^{[2]}$ é uma função (chamada 2-aplicação) tal que:

- $(a + b)^{[2]} = a^{[2]} + b^{[2]} + [a, b]$, $\forall a, b \in L$.
- $(\lambda a)^{[2]} = \lambda^2 a^{[2]}$, $\forall \lambda \in k$, $\forall a \in L$.
- $ad(b^{[2]}) = (ad(b))^2$, $\forall b \in L$.

O par $(L, [2])$ é referido como uma 2-álgebra de Lie, e a 2-aplicação $[2]$ é única para qualquer 2-álgebra de Lie $(L, [2])$ com $\mathfrak{z}(L) = 0$.

Se diz que $(L, [2])$ é uma *2-álgebra de Lie simples*, se $(L, [2])$ é uma 2-álgebra de Lie onde L é uma álgebra de Lie simples sobre k .

Sejam $(L_1, [2]_1)$ e $(L_2, [2]_2)$ 2-álgebras de Lie, $\varphi : (L_1, [2]_1) \rightarrow (L_2, [2]_2)$ é um *2-homomorfismo* de 2-álgebras de Lie se $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$ é um homomorfismo de álgebras de Lie e $\varphi(x^{[2]_1}) = (\varphi(x))^{[2]_2}$ para todo $x \in L_1$.

Exemplo 1.2. Seja A uma álgebra associativa sobre k , e seja A^- a álgebra de Lie associada a A . Defina $x^{[2]} := x^2$, para todo $x \in A$ (chama-se 2-aplicação associativa em A). Então $(A^-, 2)$ é uma 2-álgebra de Lie. Em particular, $\mathfrak{gl}(V) := \text{End}(V)^-$,

onde V é um espaço vetorial de dimensão finita sobre k , é uma 2-álgebra Lie, pela 2-aplicação associativa. Além disso, qualquer subálgebra de Lie de A , a qual é fechada pela 2-aplicação associativa em A , é uma 2-álgebra de Lie. Portanto, a álgebra das derivações de L , $\text{Der}_k(L)$, é uma 2-álgebra de Lie.

Exemplo 1.3. Seja $\mathfrak{sl}_3(k) := \{a \in \mathfrak{gl}_3(k) : \text{tr}(a) = 0\}$. Essa é uma álgebra de Lie simples sobre k de dimensão 8 com operação colchete $[x, y] := xy - yx$.

$\mathfrak{sl}_3(k)$ tem uma base canônica dada por: $\Psi := \{h_1, h_2, e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_{21}, e_{31}, e_{32}\}$, onde $h_1 := e_{11} + e_{22}$, $h_2 := e_{22} + e_{33}$, geram uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{sl}_3(k)$. Assim $\mathfrak{sl}_3(k)$ é uma 2-álgebra de Lie, com a 2-aplicação definida como: $a^{[2]} := a^2$ para todo $a \in \Psi$, tal 2-aplicação é única já que $\mathfrak{z}(\mathfrak{sl}_3(k)) = 0$. Portanto temos que $(\mathfrak{sl}_3(k), 2)$ é uma 2-álgebra de Lie simples de dimensão 8, e sua multiplicação de Lie é dada pela tabela seguinte :

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
h_1	h_1	0	0	e_{13}	e_{23}	0	e_{31}	e_{32}
h_2	0	h_2	e_{12}	e_{13}	0	e_{21}	e_{31}	0
e_{12}	0	e_{12}	0	0	e_{13}	h_1	e_{32}	0
e_{13}	e_{13}	e_{13}	0	0	0	e_{23}	$h_1 + h_2$	e_{12}
e_{23}	e_{23}	0	e_{13}	0	0	0	e_{21}	h_2
e_{21}	0	e_{21}	h_1	e_{23}	0	0	0	e_{31}
e_{31}	e_{31}	e_{31}	e_{32}	$h_1 + h_2$	e_{21}	0	0	0
e_{32}	e_{32}	0	0	e_{12}	h_2	e_{31}	0	0

Tabela 1.1: A 2-álgebra de Lie $(\mathfrak{sl}_3(k), 2)$

Os elementos da diagonal são resultados da 2-aplicação nos elementos de suas linhas ou colunas correspondentes.

Exemplo 1.4. Tem-se que: $\mathfrak{gl}_3(k) = \mathfrak{sl}_3(k) \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_3(k))$, onde $\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_3(k)) = kI_3$. Com efeito, se $a \in \mathfrak{gl}_3(k)$ e $\text{tr}(a) = \lambda$, então $a = (a + \lambda I_3) + \lambda I_3$ onde $(a + \lambda I_3) \in \mathfrak{sl}_3(k)$ e $\lambda I_3 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_3(k))$. Se $a \in \mathfrak{sl}_3(k) \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_3(k))$, então $a = \lambda I_3$ e, $0 = \text{tr}(a) = \lambda + \lambda + \lambda$ logo $\lambda = 0$, portanto $a = 0$.

Exemplo 1.5. Seja $\mathfrak{o}_3(k) := \{A = (a_{ij}) \in M_3(k) : a_{ii} = 0 \text{ e } a_{ij} = a_{ji}\}$.

A base canônica de $\mathfrak{o}_3(k)$ é dada por: $e_1 := e_{12} + e_{21}$, $e_2 := e_{13} + e_{31}$, e $e_3 := e_{23} + e_{32}$. Então $\mathfrak{o}_3(k) = ke_1 \oplus ke_2 \oplus ke_3$, com $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = e_2$, $[e_3, e_1] = e_2$ é a única (a menos de isomorfismo) álgebra de Lie simples de dimensão 3 sobre k , mas não é uma 2-álgebra de Lie. De fato, temos que $\text{ad}(e_1)^2 = e_3^2 = e_{22} + e_{33} \neq e_{22} + e_{23} = \text{ad}(e_1^2)$.

Defina $d \in \text{End}_k(\mathfrak{o}_3(k))$ por:

$$\begin{aligned} e_1 &\mapsto a_{12}e_1 \\ e_2 &\mapsto a_{13}e_2 \\ e_3 &\mapsto a_{23}e_3 \end{aligned}$$

com $a_{ij} \in k$, $1 \leq i < j \leq 3$.

Se $d \in \text{Der}_k(\mathfrak{o}_3(k))$, tem-se, $a_{23}e_3 = d(e_3) = d([e_1, e_2]) = [d(e_1), e_2] + [e_1, d(e_2)] = a_{12}e_3 + a_{13}e_3$, portanto $a_{23} = a_{12} + a_{13}$. O mesmo acontece para $d([e_1, e_3])$, e $d([e_2, e_3])$. Assim, $d \in \text{Der}_k(\mathfrak{o}_3(k))$ se, e só se, $a_{12} + a_{13} + a_{23} = 0$. Portanto:

$$\text{Der}_k(\mathfrak{o}_3(k)) = \{A = (a_{ij}) \in M_3(k) : a_{ij} = a_{ji}, a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0\}.$$

Uma base para $\text{Der}_k(\mathfrak{o}_3(k))$ é $\{h_1, h_2, e_1, e_2, e_3\}$ onde $h_1 := e_1^2 = e_{11} + e_{22}$ e $h_2 := e_2^2 = e_{11} + e_{33}$ e assim $\text{Der}_k(\mathfrak{o}_3(k)) := \text{span}\{h_1, h_2\} \oplus \mathfrak{o}_3(k)$. Pelo exemplo 1.2 temos que $\text{Der}_k(\mathfrak{o}_3(k))$ é uma 2-álgebra de Lie de dimensão 5, com multiplicação de Lie dada pela tabela seguinte:

	h_1	h_2	e_1	e_2	e_3
h_1	h_1	0	0	e_2	e_3
h_2	0	h_2	e_1	0	e_3
e_1	0	e_1	h_1	e_3	e_2
e_2	e_2	0	e_3	h_2	e_1
e_3	e_3	e_3	e_2	e_1	$h_1 + h_2$

Tabela 1.2: $\text{Der}_k(\mathfrak{o}_3(k))$

Os elementos da diagonal são resultados da 2-aplicação nos elementos de suas linhas ou colunas correspondentes.

Tem-se que $\mathfrak{o}_3(k)_2 \subset \text{Der}_k(\mathfrak{o}_3(k))$, e como $\dim_k(\mathfrak{o}_3(k)_2) = 5$. Então $\text{Der}_k(\mathfrak{o}_3(k)) = \mathfrak{o}_3(k)_2$. Assim, $\text{Der}_k(\mathfrak{o}_3(k))$ é uma 2-álgebra de Lie não solúvel de dimensão 5.

1.2 Subálgebra toral e posto toral

Definição 1.6. Seja $(L, [2])$ uma 2-álgebra de Lie.

- Um elemento $x \in (L, [2])$ é chamado **semi-simples** se x pertence a 2-subálgebra de $(L, [2])$ gerada por $x^{[2]}$, isto é, $x \in \text{span}\{x^{[2]}, x^{[2]^2} \dots\}$.
- Um elemento $x \in (L, [2])$ é chamado **2-nilpotente** se $x^{[2]^n} = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.7. Decomposição de Jordan-Chevalley-Seligman. Para qualquer $x \in (L, [2])$ existem elementos (únicos) x_s e x_n em $(L, [2])$ tal que x_s é semi-simples, x_n é 2-nilpotente e $x = x_s + x_n$, com $[x_s, x_n] = 0$.

Um subconjunto $N \subseteq (L, [2])$ é chamado 2-nilpotente se todo $x \in N$ é 2-nilpotente. Se N é uma álgebra de Lie de dimensão finita 2-nilpotente, então pelo teorema de Engel temos que N é nilpotente como álgebra de Lie ordinária.

Exemplo 1.8. Seja $x := e_{12}$, $y := e_{23}$, $z := e_{13}$ em $\mathfrak{gl}_3(k)$, então $N := \text{span}\{x, y, z\}$ com $[x, y] = z$, $[x, z] = [y, z] = 0$ e, $x^2 = y^2 = z^2 = 0$ é uma álgebra Lie 2-nilpotente.

Definição 1.9. Seja $(L, [2])$ uma 2-álgebra de Lie.

- Um elemento $t \in (L, [2])$ é chamado **toral**, se $t^{[2]} = t$.
- Uma 2-subálgebra T de $(L, [2])$ é chamada **toral ou um toro** se a 2-aplicação $[2]$ é invertível sobre T .

Qualquer subálgebra toral de $(L, [2])$ é abeliana e, por [Ja], teorema 13, pág. 192-193, um toro de $(L, [2])$ admite uma base constituída por elementos torais.

Definição 1.10. [St1] O **posto toral** de $(L, [2])$ é:

$$MT(L) := \max\{\dim(T) : T \in \Omega(L)\} \quad \text{onde} \quad \Omega(L) := \{T \subseteq L : T \text{ é um toro de } L\}$$

Exemplo 1.11. Seja $L = \mathfrak{sl}_3(k)$, como no exemplo 1.3., $T := \text{span}\{h_1, h_2\}$ é uma subálgebra toral de $\mathfrak{sl}_3(k)$ e $MT(\mathfrak{sl}_3(k)) = 2$.

Teorema 1.12. Seja $(L, [2])$ uma 2-álgebra de Lie e H subálgebra de L . Então H é uma subálgebra de Cartan se, e só se, existe um toro maximal $T \subset L$ tal que $H = \text{Ann}_L(T)$.

1.3 Decomposição de Cartan

Definição 1.13. Seja V um k -espaço vetorial.

- Uma representação $\rho_V : L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ é chamada **2-representação** de $(L, [2])$ em V se $\rho(x^{[2]}) = \rho(x)^2$ para todo $x \in L$.
- Um $(L, [2])$ -**módulo** ou **L -2-módulo** é um L -módulo V tal que $v.x^{[2]} = (v.x).x$ para todo $v \in V$ e $x \in L$.

Exemplo 1.14. Seja $(L, [2])$ uma 2-álgebra de Lie. Então $\text{ad} : L \rightarrow \mathfrak{gl}(L)$ é uma 2-representação de $(L, [2])$ em $(L, [2])$, denominada *representação adjunta*.

Seja T um toro maximal de $(L, [2])$, $H := \text{Ann}_L(T)$, e V um $(L, [2])$ -módulo de dimensão finita sobre k , com $\rho_V : L \rightarrow \text{End}(V)$, $\rho_V(x)(v) := v.x$, a correspondente 2-representação. Como T é abeliana, então $\rho_V(T)$ é abeliana e consiste de elementos semi-simples, logo V pode-se decompor em espaços pesos respeito a T :

$$V = \sum_{\lambda \in T^*} \oplus V_\lambda \quad \text{onde} \quad V_\lambda := \{v \in V : v.t = \lambda(t)v, t \in T\}.$$

O conjunto de T -pesos $\{\lambda \in T^* : V_\lambda \neq 0\}$ de V sera denotado por $\Gamma^\omega(V, T)$.

Observação 1.15. Se t é um elemento toral de T , então $\lambda(t) \in \mathbb{F}_2$, com $\lambda \in \Gamma^\omega(V, T)$. Com efeito, se $\lambda \in \Gamma^\omega(V, T)$, $0 \neq v \in V_\lambda$ e, $t \in T$ tal que $t^{[2]} = t$. Temos:

$$\lambda(t)v = v.t = v.t^{[2]} = (v.t).t = (\lambda(t)v).t = \lambda(t)(v.t) = \lambda(t)^2v.$$

Portanto, $\lambda(t) \in \mathbb{F}_2$.

1.4. UMA 2-ÁLGEBRA DE LIE SIMPLES DE DIMENSÃO 34 DE POSTO TORAL 4.13

Em particular, se V é o $(L, [2])$ -módulo adjunto, temos que $\Delta := \Gamma^\omega(L, T) \setminus \{0\}$ é o conjunto de sistemas de raízes de L respeito a T e,

$$L = H \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} \oplus L_\alpha \quad \text{onde} \quad L_\alpha := \{g \in L : \text{ad}(h)(g) = \alpha(h)g, h \in H\}$$

é o espaço de decomposição de raízes de $(L, [2])$ respeito H ou, a **Decomposição de Cartan de $(L, [2])$ respeito a H .**

Observação 1.16. Se $x \in L_\alpha$, então

$$\text{ad}(x) : L_\beta \rightarrow L_{\alpha+\beta} \quad e \quad \rho_V(x) : V_\beta \rightarrow V_{\alpha+\beta}.$$

Com efeito, sejam $x \in L_\alpha$ e $v \in V_\beta$, então

$$\begin{aligned} \rho_V(h)\rho_V(x)(v) &= \rho_V([h, x])(v) - \rho_V(x)\rho_V(h)(v) = \rho(\alpha(h)x)(v) - \rho_V(x)(\beta(h)v) = \\ &= (\alpha + \beta)(h)\rho_V(x)(v). \end{aligned}$$

Teorema 1.17. Seja $(L, [2])$ uma 2-álgebra de Lie de dimensão finita sobre k e H subálgebra de Cartan de L . Se $L = H \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} \oplus L_\alpha$ é a decomposição de Cartan de L respeito a H . Então

- Se $h \in H$ é semi-simples, então $\text{adh}|_{L_\alpha} = \alpha(h)\text{id}_{L_\alpha}$.
- Se $h \in H$ e $h := h_n + h_s$ com h_n 2-nilpotente e h_s semi-simples, então $\alpha(h) = \alpha(h_s)$ para todo $\alpha \in \Delta$.
- Definindo-se $L_\alpha^{[2]} := \{x_\alpha^{[2]} : x_\alpha \in L_\alpha\}$, então $L_\alpha^{[2]} \subset H$ para todo $\alpha \in \Delta$.
- $L_\alpha^{[2]} \subset \text{Ker}(\alpha)$, para todo $\alpha \in \Delta$.
- Se L é simples, então $H \subset [L, L] = \sum_{\alpha \in \Delta} \oplus [L_\alpha, L_\alpha]$.

A seção a seguir é baseada no artigo [KV], aí vamos apresentar uma 2-álgebra de Lie simples de dimensão 34 e de posto toral 4, que foi descoberta por V. G. Kac e V. Veisfeiler. A estrutura desta k -álgebra é semelhante ao que posteriormente vamos estudar no capítulo 4, seção 4.1.

1.4 Uma 2-álgebra de Lie simples de dimensão 34 de posto toral 4.

Suponhamos que F é um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$ e $A \in M_n(F)$. Denote por $\tilde{G}(A)$ a álgebra de Lie sobre F definida por:

$$\tilde{G}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}\{e_i, f_i, h_i : i \in I_n\}$$

cujo colchete de Lie está definido pelas seguintes relações ($i, j \in I_n$):

$$[e_i, f_j] := \delta_{ij} h_i, \quad [h_i, h_j] := 0, \quad [h_i, e_j] := a_{ij} e_{ij}, \quad [h_i, f_j] := -a_{ij} f_j.$$

Tem-se que $\tilde{G}(A)$ é uma $\mathbb{Z}$ -álgebra graduada, onde $\deg e_i = 1$, $\deg f_i = -1$, e $\deg h_i = 0$, $i \in I_n$ e, assim $\tilde{G}(A) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \tilde{G}_i(A)$. Seja $J(A)$ o único ideal maximal graduado de $\tilde{G}(A)$ tal que: $J(A) \cap (\tilde{G}_{-1}(A) \oplus \tilde{G}_0(A) \oplus \tilde{G}_1(A)) = 0$, onde

$$\tilde{G}_{-1}(A) \oplus \tilde{G}_0(A) \oplus \tilde{G}_1(A) = \left(\sum k f_i \right) \oplus \left(\sum k h_j \right) \oplus \left(\sum k e_i \right).$$

Então

$$G(A) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{G}(A)/J(A) \text{ e } G(A)/\mathfrak{z}(G(A))$$

são chamadas *álgebras de Lie congruentes* sobre F e A é sua matriz de Cartan.

Teorema 1.18 (Teorema de classificação de V. G. Kac-Weisfeiler, 1970-1991). *As álgebras de Lie congruentes simples de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado de característica $p \geq 3$ são:*

- As clássicas (Ter um pouco de cuidado com A_n , E_6 e, G_2 , ver [KV] pág. 787.)
- Uma família de álgebras de 1-parametro de dimensão 10, $L(\epsilon)$ ($\epsilon \neq 0$) consideradas primeiro por A. I. Kostrikin ($L(-1) = \mathfrak{sp}_4(F)$) em característica $p = 3$:

$$L(\epsilon) = (\mathfrak{sl}_2(F) \oplus \mathfrak{sl}_2(F)) \oplus ((2) \otimes (2)).$$

- Uma álgebra $\mathfrak{br}_{29} := (\mathfrak{sl}_2(F) \oplus L(1)) \oplus ((2) \otimes (8))$ de dimensão 29 em característica $p = 3$ descoberta em 1982 por Brow. Em 1991, S. M. Skyabin demonstrou que $\mathfrak{br}_{29} \simeq G(A)$ com

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

A classificação das álgebras de Lie congruentes simples de dimensão finita sobre k é ainda um problema em aberto. Em [KV] (pág. 787 e 790) temos uma lista de álgebras de Lie congruentes simples de dimensão finita sobre k , essas são:

- Clássicas: A_n , $(n+1) \not\equiv 0 \pmod{2}$, $A_{2l-1}^{(1)}$, F_6 , E_8 , $D_{2n+1}/D_{2n+1}^{(1)}$, $E_7/E_7^{(1)}$, $D_{2n}/D_{2n}^{(1)}$.
- Não clássicas: $G(C_{3,a})$, $G(F_{4,a})$, $a \in k \setminus \{0, 1\}$ e, $G(\Delta_n)$, $n = 1, 2, \dots$ onde :

$$C_{3,a} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad F_{4,a} := \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_n := \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & 0 \\ & 1 & 0 & & 1 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nós estamos interessados em estudar a $G(F_{4,a})$.

Tem-se que $G(F_{4,a}) := \tilde{G}(F_{4,a})/J(F_{4,a})$ é uma álgebra de Lie congradiante sobre k com $F_{4,a}$, $a \neq 0, 1$ seu matriz de Cartan, e $J(F_{4,a})$ é o único ideal maximal graduado de $G(F_{4,a})$ para o qual

$$\begin{cases} J(F_{4,a}) \cap \{h_1, h_2, h_3, h_4\} &= 0 \\ J(F_{4,a}) \cap \{e_i, f_j\} &= 0. \end{cases}$$

Pela proposição 3.6, pág. 791 de [KV] temos que $G(F_{4,a})$ é uma 2-álgebra de Lie simples de dimensão 34 e,

$$G(F_{4,a}) \simeq G(F_{4,b}) \iff a = b, \quad a = \frac{1}{b}.$$

Sejam:

$$\begin{aligned} p_1 &:= e_1e_2, p_2 := e_1e_3, p_3 := e_1e_4, p_4 := e_2e_3, p_5 := e_2e_4, p_6 := e_3e_4, p_1e_3 := (e_1e_2)e_3, \\ p_1e_4 &:= (e_1e_2)e_4, p_2e_4 := (e_1e_3)e_4, p_4e_4 := (e_2e_3)e_4, p := (e_1e_2)e_3e_4, q_1 := f_1f_2, \\ q_2 &:= f_1f_3, q_3 := f_1f_4, q_4 := f_2f_3, q_5 := f_2f_4, q_6 := f_3f_4, q_1f_3 := (f_1f_2)f_3, \\ q_1f_4 &:= (f_1f_2)f_4, q_2f_4 := (f_1f_3)f_4, p_4f_4 := (f_2f_3)f_4, \text{ e } q := (f_1f_2)f_3f_4. \end{aligned}$$

Uma base para $\tilde{G}(F_{4,a})$ é:

$$\begin{aligned} \Phi &:= \{h_i\}_{i=1}^4 \cup \{e_i\}_{i=1}^4 \cup \{p_i\}_{i=1}^6 \cup \{p_1e_3, p_1e_4, p_2e_4, p_4e_4, p\} \cup \\ &\cup \{f_i\}_{i=1}^4 \cup \{q_i\}_{i=1}^6 \cup \{q_1e_3, q_1e_4, q_2e_4, q_4e_4, q\}. \end{aligned}$$

Portanto, uma base de $G(F_{4,a})$ é $\{\bar{w} := w + J(F_{4,a}) : w \in \Phi\}$. Além disso, temos que:

$$h_1^{[2]} = \delta_1 h_1 + \delta_2 h_2 + \delta_3 h_3 + \delta_4 h_4, \text{ logo}$$

$$0 = [h_1, [h_1, e_1]] = \delta_1 [h_1, e_1] + \delta_2 [h_2, e_1] + \delta_3 [h_3, e_1] + \delta_4 [h_4, e_1] = \delta_2 a e_1 \text{ então } \delta_2 = 0.$$

$$e_2 = [h_1, [h_1, e_2]] = \delta_1 [h_1, e_2] + \delta_2 [h_2, e_2] + \delta_3 [h_3, e_2] + \delta_4 [h_4, e_2] = \delta_1 e_2 + \delta_3 e_2, \text{ então } \delta_1 + \delta_3 = 1.$$

$$0 = [h_1, [h_1, e_3]] = \delta_2 e_3 + \delta_4 e_3, \text{ então } \delta_2 = \delta_4 = 0.$$

$$0 = [h_1, [h_1, e_4]] = \delta_3 e_4, \text{ então } \delta_3 = 0.$$

$$\text{Assim, } h_1^{[2]} = h_1.$$

$$\text{Também temos: } h_2^{[2]} = \delta_1 h_1 + \delta_2 h_2 + \delta_3 h_3 + \delta_4 h_4, \text{ logo:}$$

$$a^2 e_1 = [h_2, [h_2, e_1]] = \delta_1 [h_1, e_1] + \delta_2 [h_2, e_1] + \delta_3 [h_3, e_1] + \delta_4 [h_4, e_1], \text{ então } a^2 e_1 = \delta_2 a e_1$$

portanto, $\delta_2 = a$.

$0 = [h_2, [h_2, e_2]] = [h_2^{[2]}, e_2] = \delta_1 e_2 + \delta_3 e_2$, então $\delta_1 + \delta_3 = 0$
 $e_3 = [h_2, [h_2, e_3]] = \delta_2 e_3 + \delta_4 e_3$, então $\delta_4 + \delta_2 = 1$. Assim, $\delta_4 = 1 + a := \bar{a}$.
 $0 = [h_2, [h_2, e_4]] = [h_2^{[2]}, e_4] = \delta_3 e_4$, então $\delta_3 = 0$
 Portanto, $h_2^{[2]} = ah_2 + \bar{a}h_4$.

Pelos mesmos argumentos anteriores, encontramos que : $h_3^{[2]} = h_3$, $h_4^{[2]} = h_4$ e, $w^{[2]} = 0$,
 $\forall w \in \Phi \setminus \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$. Seja $H := \text{span}\{h_i + J(F_{4,a}) : i \in I_4\}$, tem-se H é uma
 subálgebra toral de dimensão 4 de $G(F_{4,b})$ e, por **[Ja]**, teorema 13, pág. 192-193 existe
 uma base de H constituída por elementos torais. Procuremos esta base. De fato:
 seja $t_2 := xh_2 + yh_4$, com $x, y \in k$; achemos x, y em k tal que $t_2^{[2]} = t_2$. Com efeito,
 $t_2^{[2]} = (xh_2 + yh_4)^{[2]} = x^2h_2^{[2]} + xy[h_2, h_4] + y^2h_4^{[2]} = ax^2h_2 + (x^2\bar{a} + y^2)h_4$, assim

$$t_2^{[2]} = t_2 \iff x^2a = x \text{ e } \bar{a}x^2 + y^2 = y.$$

Logo as soluções (x, y) para o seguinte sistema não linear

$$\begin{cases} ax^2 + x = 0 \\ \bar{a}x^2 + y^2 + y = 0 \end{cases}$$

em $\mathbb{F}_2(a)$ são : $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(\frac{1}{a}, \frac{1}{a})$, $(\frac{1}{a}, \frac{\bar{a}}{a})$.

- Se a solução é $(0, 0)$, então $t_2 = 0$.
- Se a solução é $(0, 1)$, então $t_2 = h_4$.
- Se a solução é $(\frac{1}{a}, \frac{1}{a})$, então $t_2 = \frac{1}{a}(h_2 + h_4)$
- Se a solução é $(\frac{1}{a}, \frac{\bar{a}}{a})$, então $t_2 = \frac{1}{a}(h_2 + \bar{a}h_4)$

Assim, temos que

$$T := \text{span}\{t_i + J(F_{4,a}) : i \in I_4\}$$

onde $t_i := h_i$, $i \in I_4 \setminus \{2\}$ e, $t_2 \in \{0, h_4, \frac{1}{a}(h_2 + h_4), \frac{1}{a}(h_2 + \bar{a}h_4)\}$ são toros de $G(F_{4,a})$
 tal que $t_i^{[2]} = t_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Quando $t_2 = 0$ ou $t_2 = h_4$ temos que T é um toro de
 dimensão 3. Quando $t_2 := \frac{1}{a}(h_2 + h_4)$ ou $t_2 = \frac{1}{a}(h_2 + \bar{a}h_4)$ temos que $\{t_i + J(F_{4,a})\}_{i=1}^4$
 são bases de H , Portanto $T = H$, e assim $MT(G(F_{4,a})) = 4$.

Agora, procuramos os pesos para cada elemento da base de $\tilde{G}(F_{4,a})$ respeito a

$$H_1 = \{t_1 = h_1, t_2 = \frac{1}{a}(h_2 + h_4), t_3 = h_3, t_4 = h_4\}.$$

Com efeito,

- Para e_1 :
 $[e_1, t_1] = [e_1, h_1] = a_{11}e_1 = 0e_1$
 $[e_1, t_2] = [e_1, \frac{1}{a}(h_2 + h_4)] = \frac{1}{a}([e_1, h_2] + [e_1, h_4]) = \frac{1}{a}(ae_1) = 1e_1$.
 $[e_1, t_3] = [e_1, h_3] = a_{31}e_1 = 0e_1$
 $[e_1, t_4] = [e_1, h_4] = a_{41}e_1 = 0e_1$
 Logo, o peso de e_1 é $\beta := (0, 1, 0, 0)$.

- Para e_2 :

$$[e_2, t_1] = [e_2, h_1] = a_{12}e_2 = 1e_2$$

$$[e_2, t_2] = [e_2, \frac{1}{a}(h_2 + h_4)] = \frac{1}{a}([e_2, h_2] + [e_2, h_4]) = 0e_2.$$

$$[e_2, t_3] = [e_2, h_3] = a_{32}e_2 = 1e_2$$

$$[e_2, t_4] = [e_1, h_4] = a_{41}e_1 = 0e_1$$

O peso de e_2 é $\alpha + \gamma := (1, 0, 1, 0)$.

- Para e_3 :

$$[e_3, t_1] = [e_3, h_1] = a_{13}e_3 = 0e_3$$

$$[e_3, t_2] = [e_3, \frac{1}{a}(h_2 + h_4)] = \frac{1}{a}([e_3, h_2] + [e_3, h_4]) = 0e_3.$$

$$[e_3, t_3] = [e_3, h_3] = a_{33}e_3 = 0e_3$$

$$[e_3, t_4] = [e_3, h_4] = a_{43}e_3 = 1e_3$$

Assim, o peso de e_3 é $\lambda := (0, 0, 0, 1)$.

- Para e_4 :

$$[e_4, t_1] = [e_4, h_1] = a_{14}e_4 = 0e_4$$

$$[e_4, t_2] = [e_4, \frac{1}{a}(h_2 + h_4)] = \frac{1}{a}([e_4, h_2] + [e_4, h_4]) = 0e_4.$$

$$[e_4, t_3] = [e_4, h_3] = a_{34}e_4 = 1e_4$$

$$[e_4, t_4] = [e_4, h_4] = a_{44}e_4 = 0e_4$$

Logo, o peso de e_4 é $\gamma := (0, 0, 1, 0)$.

Como $[L_\xi, L_\mu] \subseteq L_{\xi+\mu}$ (veja a obs. 1.13) e $[h_i, f_j] = -a_{ij}f_j$, podemos encontrar os pesos dos elementos restante de Φ . Por exemplo: e_1 e e_2 tem peso β e $\alpha + \gamma$ respectivamente, então $p_1 := e_1e_2$ tem peso $\beta + (\alpha + \gamma)$, e assim p_1e_4 tem peso $(\alpha + \beta + \gamma) + \gamma = \alpha + \beta$. Portanto, os pesos dos elementos da base de $G(F_{4,a})$ são dados na tabela seguinte.

Espaços raízes	Base	Raízes
L_β	$\bar{e}_1, \bar{f}_1$	$\beta := (0, 1, 0, 0)$
$L_{\alpha+\gamma}$	$\bar{e}_2, \bar{f}_2$	$\alpha + \gamma := (1, 0, 1, 0)$
L_λ	$\bar{e}_3, \bar{f}_3$	$\lambda := (0, 0, 0, 1)$
L_γ	$\bar{e}_4, \bar{f}_4$	$\gamma := (0, 0, 1, 0)$
$L_{\alpha+\beta+\gamma}$	$\bar{p}_1, \bar{q}_1$	$\alpha + \beta + \gamma := (1, 1, 1, 0)$
$L_{\beta+\lambda}$	$\bar{p}_2, \bar{q}_2$	$\beta + \lambda := (0, 1, 0, 1)$
$L_{\beta+\gamma}$	$\bar{p}_3, \bar{q}_3$	$\beta + \gamma := (0, 1, 1, 0)$
$L_{\alpha+\gamma+\lambda}$	$\bar{p}_4, \bar{q}_4$	$\alpha + \gamma + \lambda := (1, 0, 1, 1)$
L_α	$\bar{p}_5, \bar{q}_5$	$\alpha := (1, 0, 0, 0)$
$L_{\gamma+\lambda}$	$\bar{p}_6, \bar{q}_6$	$\gamma + \lambda := (0, 0, 1, 1)$
$L_{\alpha+\beta+\gamma+\lambda}$	$\bar{p}_1\bar{e}_3, \bar{q}_1\bar{f}_3$	$\alpha + \beta + \gamma + \lambda := (1, 1, 1, 1)$
$L_{\alpha+\beta}$	$\bar{p}_1\bar{e}_4, \bar{q}_1\bar{f}_4$	$\alpha + \beta := (1, 1, 0, 0)$
$L_{\beta+\gamma+\lambda}$	$\bar{p}_2\bar{e}_4, \bar{q}_2\bar{f}_4$	$\beta + \gamma + \lambda := (0, 1, 1, 1)$
$L_{\alpha+\lambda}$	$\bar{p}_5\bar{e}_4, \bar{q}_5\bar{f}_4$	$\alpha + \lambda := (1, 0, 0, 1)$
$L_{\alpha+\beta+\lambda}$	$\bar{p}, \bar{q}$	$\alpha + \beta + \lambda := (1, 1, 0, 1)$

Tabela 1.3: *Espaços pesos de $G(F_{4,a})$.*

Se achamos os pesos dos elementos da base de $\tilde{G}(F_{4,a})$ respeito a

$$H_2 = \{t_1 = h_1, t_2 = \frac{1}{a}(h_2 + \bar{a}h_4), t_3 = h_3, t_4 = h_4\}$$

encontramos que $\Gamma^\omega(\tilde{G}(F_{4,a}), H_1) = \Gamma^\omega(\tilde{G}(F_{4,a}), H_2)$. De fato:

$[e_1, t_2] = [e_1, \frac{1}{a}(h_2 + \bar{a}h_4)] = \frac{1}{a}[e_1, h_2] + \frac{\bar{a}}{a}[e_1, h_4] = \frac{1}{a}ae_1 = e_1$. Logo, o peso de e_1 é $\beta = (0, 1, 0, 0)$.

$[e_2, t_2] = [e_2, \frac{1}{a}(h_2 + \bar{a}h_4)] = \frac{1}{a}[e_2, h_2] + \frac{\bar{a}}{a}[e_2, h_4] = 0$. Então o peso de e_2 é $\alpha + \gamma = (1, 0, 1, 0)$.

$[e_3, t_2] = [e_3, \frac{1}{a}(h_2 + \bar{a}h_4)] = \frac{1}{a}[e_3, h_2] + \frac{\bar{a}}{a}[e_3, h_4] = \frac{1}{a}e_3 + \frac{\bar{a}}{a}e_3 = \frac{(1+\bar{a})}{a}e_3 = e_3$. Portanto, o peso de e_3 é $\beta + \lambda = (0, 1, 0, 1)$.

$[e_4, t_2] = [e_4, \frac{1}{a}(h_2 + \bar{a}h_4)] = \frac{1}{a}[e_4, h_2] + \frac{\bar{a}}{a}[e_4, h_4] = 0$. Assim, o peso de e_4 é $\gamma = (0, 0, 1, 0)$.

Portanto, tem-se que a decomposição de Cartan de $G(F_{4,a})$ respeito a $\bar{H}_1 := \text{span}\{\bar{t}_i : t_i \in H_1\}$ é dada por:

$$G(F_{4,a}) = \bar{H}_1 \oplus \sum_{\xi \in G} \oplus L_\xi.$$

onde é um $\mathfrak{g}$ $G := \langle \alpha, \beta, \gamma, \lambda \rangle$ grupo abeliano elementar de ordem 16, e $\dim_k(L_\xi) = 2$ para todo $\xi \in G$.

1.5 Extensões de $(L, [2])$ -módulos e Lema de Schur.

No estudo dos módulos, assim como de qualquer outra estrutura algébrica, o procedimento padrão é examinar os submódulos e os módulos quocientes associados. Aparece assim naturalmente o problema de extensão, a saber:

Quais são os $(L, [2])$ -módulos E que podemos obter a partir de dois $(L, [2])$ -módulos N e M de modo que N seja (isomorfo a) um submódulo de E e M seja isomorfo E/N ? Nessa situação, podemos organizar N , M e E em uma sequência de $(L, [2])$ -homomorfismos de módulos

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{p} M \rightarrow 0$$

onde a imagem de cada um é o núcleo do próximo; desse modo, ι é injetora, $i(N)$ é o núcleo de p , e p é sobrejetora. Diremos nesse caso que E é uma *extensão* de L -2-módulo de M por N , denotada por $M \ltimes N$.

Um dos objetivos deste trabalho é apresentar meios para listar e classificar, em algum sentido, todas as extensões de M por N (de dimensão 8) quando $L = \mathfrak{sl}_3(k)$ e, estamos interessados em aquelas extensões de M por N onde $Ext_{\mathfrak{sl}_3(k)}^1(M, N) = 0$.

Diz-se que uma sequência exata de L -módulos $0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$ *cinde* se $Im(f) (= Ker(g))$ é um somando direto de M_2 . Nesse caso, a sequência dada é equivalente a

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_1 \oplus M_3 \rightarrow M_3 \rightarrow 0.$$

Lema 1.19. Lema de Schur. *Se V , U são L -módulos irredutíveis e $\varphi : V \rightarrow U$ um morfismo de L -módulos, então ou φ é um isomorfismo ou $\varphi \equiv 0$.*

1.6 Potência exterior de módulos

Sejam A um anel comutativo, M e N A -módulos. Lembre que, uma aplicação r -linear $f : M^r \rightarrow N$ chama-se *alternada* se $f(m_1, m_2, \dots, m_r) = 0$ sempre que $m_i = m_j$ para algum $i \neq j$.

Seja J_r ($r \geq 2$) o A -submódulo do A -módulo $M^{\otimes r}$ gerado por todos os elementos de tipo $m_1 \otimes m_2 \otimes \dots \otimes m_r$ com $m_i = m_j$ para algum $i \neq j$, ou seja,

$$J_r := \langle m_1 \otimes m_2 \otimes \dots \otimes m_r : ((m_1, \dots, m_r), (i, j)) \in M^r \times I_r; i \neq j, m_i = m_j \rangle.$$

Define-se o A -módulo quociente

$$\Lambda^r(M) := M^{\otimes r} / J_r$$

e chama-se a *potência exterior r -ésima* de M .

Seja $p : M^{\otimes r} \rightarrow M^{\otimes r} / J_r$ o A -morfismo quociente. Para todo $m_1, \dots, m_r \in M$ a classe $p(m_1, \dots, m_r)$ em $\Lambda^r(M)$ é denotada por $m_1 \wedge m_2 \wedge \dots \wedge m_r$. Por conveniência, poremos

$\Lambda^0(M) := A$ e, $\Lambda^1(M) := M$ (assim, $J_0 = J_1 = 0$.)

Para $r \geq 2$, a aplicação canônica $M^r \xrightarrow{\otimes} M^{\otimes r}$ é r -linear, logo a composição $\wedge := p \circ \otimes$ é uma aplicação r -linear alternada.

Teorema 1.20. Propriedade Universal da potência exterior.

Para toda aplicação r -linear alternada $f : M^r \rightarrow N$, existe uma única aplicação A -linear $\tilde{f} : \Lambda^r(M) \rightarrow N$ tal que $\tilde{f} \circ \wedge = f$.

Exemplo 1.21. Segunda potência exterior $\Lambda^2(M)$.

1. $\Lambda^2(M) = M \otimes_A M / J_2$, onde $J_2 = \langle m \otimes m : m \in M \rangle$.
2. Se $m, n \in M$ então em $\Lambda^2(M)$ temos $m \wedge m = m \otimes m + J_2 = 0$ e $m \wedge n = -n \wedge m$.
3. Existe uma única aplicação A -linear $\Lambda^2(M) \xrightarrow{\alpha_{2,M}} M^{\otimes 2}$ tal que

$$m_1 \wedge m_2 \mapsto \sum_{\sigma \in S_2} (\text{sign} \sigma) m_{\sigma(1)} \otimes m_{\sigma(2)} = m_1 \otimes m_2 - m_2 \otimes m_1.$$

De fato, seja $f : M^2 \rightarrow M^{\otimes 2}$ dada por $f(m_1, m_2) := m_1 \otimes m_2 - m_2 \otimes m_1$. f é uma aplicação bilinear e $f(m, m) = 0$ logo pela teorema 1.20 existe uma única aplicação A -linear $\Lambda^2(M) \xrightarrow{\alpha_{2,M}} M^{\otimes 2}$ tal que $\alpha_{2,M} \circ \wedge = f$.

Observação 1.22. Quando $M = V$ é um k -espaço vetorial de dimensão finita $\Lambda^2(V) \xrightarrow{\alpha_{2,V}} V^{\otimes 2}$ é injetora. Isso significa que podemos considerar a $\Lambda^2(V)$ como um subespaço de $V \otimes_k V$.

4. Se M é um A -módulo livre de posto d com base $e_1, \dots, e_d$ então, $\Lambda^2(M)$ é um A -módulo livre de posto $\binom{d}{2}$ com base $\{e_i \wedge e_j : 1 \leq i < j \leq d\}$.
5. Para quaisquer A -módulos livres M, N tem-se o isomorfismo de A -módulos:

$$\Lambda^2(M \oplus N) \simeq \sum_{p+q=2} \oplus (\Lambda^p(M) \otimes_A \Lambda^q(N)) \simeq \Lambda^2(M) \oplus (M \otimes_A N) \oplus \Lambda^2(N).$$

Sejam V e U L -módulos. Então existe uma única estrutura de L -módulo em $U \otimes_k V$ tal que

$$(u \otimes v).x := (u.x) \otimes v + u \otimes (v.x). \quad (\forall x \in L, u \in U, v \in V).$$

Agora se U e V são $(L, [2])$ -módulos, então $U \otimes_k V$ é também um objeto da categoria dos $(L, [2])$ -módulos. De fato, para $x \in L, u \in U$ e $v \in V$ temos:

$$\begin{aligned} (u \otimes v).x^{[2]} &= (u.x^{[2]}) \otimes v + u \otimes (v.x^{[2]}) \\ &= ((u.x).x) \otimes v + u \otimes ((v.x).x) \\ &= ((u.x).x) \otimes v + (u.x) \otimes (v.x) + (u.x) \otimes (v.x) + u \otimes ((v.x).x) \\ &= ((u.x) \otimes v).x + (u \otimes (v.x)).x = ((u.x) \otimes v + u \otimes (v.x)).x = ((u \otimes v).x).x. \end{aligned}$$

Portanto, se V é um k -espaço vetorial de dimensão finita então $\Lambda^2(V)$ é um $(L, [2])$ -submódulo do $(L, [2])$ -módulo $V \otimes_k V$.

Capítulo 2

As 2-álgebras de Lie simples de $\dim_k \leq 16$ de posto toral 3

Neste capítulo, vamos demonstrar que não existem 2-álgebras de Lie simples, de dimensão menor ou igual a 16, e de posto toral 3.

2.1 As 2-álgebras de Lie simples de $\dim_k \leq 6$

Teorema 2.1. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie simples sobre um corpo F algebricamente fechado de característica $p > 0$. Suponhamos que $\dim_F(\mathfrak{g}) \leq 6$. Então $\mathfrak{g}$ é de dimensão 3 ou, $p = 5$ e $\mathfrak{g} \simeq W(1, \underline{1})$.*

Demonstração. Ver teorema 2.2 em [St]. □

Suponhamos que existe uma 2-álgebra de Lie $(L, [2])$ simples de $\dim_k(L) \leq 6$. Em particular, L é uma álgebra de Lie simples sobre k de $\dim_k(L) \leq 6$; além do mais, a característica de k é $p = 2$ e, L não é isomorfa $W(1, \underline{1})$ (caso contrário, se $L \simeq W(1, \underline{1})$ então $W(1, \underline{1})$ é simples sobre k , o qual é absurdo). Então, pelo teorema 2.1, temos que L é de dimensão 3, assim $L \simeq \mathfrak{o}_3(k)$. Porém, pelo exemplo 1.5, $\mathfrak{o}_3(k)$ não é uma 2-álgebra de Lie. Portanto temos:

Corolário 2.2. *Não existem 2-álgebras de Lie simples de $\dim_k \leq 6$.*

2.2 Decomposição de Cartan de uma 2-álgebra de Lie de posto toral 3.

A decomposição de Cartan é uma ferramenta poderosa no estudo das álgebras de Lie. Portanto, vamos começar como no caso clássico, isto é, construindo a decomposição de Cartan de $(L, [2])$ respeito a uma subálgebra toral T de dimensão 3. Suponhamos que $(L, [2])$ é uma 2-álgebra de Lie simples de $\dim_k(L) \geq 7$ e $MT(L) = 3$. Logo L contém um toro maximal T de $\dim_k(T) = MT(L) = 3$.

Como $ad(T)$ é abeliana e consiste de elementos semisimples, L pode-se decompor em espaços de pesos respeito a T , isto é:

$$L = Ann_L(T) \oplus \sum_{\lambda \in T^* \setminus \{0\}} \oplus L_\lambda \quad \text{onde,} \quad L_\lambda = \{v \in L : [t, v] = \lambda(t)v, \forall t \in T\}$$

Agora, dado que T é um toro de dimensão 3, por [Ja], Teorema 13, pág. 192-193, existe uma base $\{t_i \in T : t_i^2 = t_i, i = 1, 2, 3\}$ de T tal que $\lambda(t_i) \in \mathbb{F}_2$. Portanto para qualquer $\lambda \in End(T, \mathbb{F}_2)$ temos que $\lambda := (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{F}_2^3$, com $\lambda_i \in \mathbb{F}_2$ e

$$T^* := \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}.$$

Sejam $\alpha := (1, 0, 0)$, $\beta := (1, 0, 0)$ e $\gamma := (0, 0, 1)$, logo $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ é uma base de T^* . Além disso, seja $H := Ann_L(T)$. Então pelo Teorema 1.12, H é uma subálgebra de Cartan de L , e assim, pelo Teorema 1.7 temos que $H = T \oplus N$, onde N é uma subálgebra 2-nilpotente de L e $[T, N] = 0$. Portanto temos que a decomposição em espaços de pesos de L respeito a T é:

$$L = T \oplus N \oplus L_\alpha \oplus L_\beta \oplus L_\gamma \oplus L_{\alpha+\beta} \oplus L_{\alpha+\gamma} \oplus L_{\beta+\gamma} \oplus L_{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Daquí para frente, vamos supor que existe uma 2-álgebra de Lie simples, $(L; [2])$, o qual contém uma subálgebra toral maximal T de $\dim(T) = MT(L) = 3$, cuja decomposição em espaços de pesos respeito a T é:

$$L = T \oplus N \oplus L_\alpha \oplus L_\beta \oplus L_\gamma \oplus L_{\alpha+\beta} \oplus L_{\alpha+\gamma} \oplus L_{\beta+\gamma} \oplus L_{\alpha+\beta+\gamma}.$$

ou

$$L = H \oplus \sum_{\xi \in G} \oplus L_\xi,$$

onde $G := \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ é um grupo abeliano elementar de ordem 8.

Proposição 2.3. *Existem três raízes em $T^* \setminus \{0\}$ linearmente independentes, isto é, existem ξ, δ, θ em T^* linearmente independentes tais que $L_\xi \neq 0$, $L_\delta \neq 0$ e $L_\theta \neq 0$*

Demonstração. Suponha que a proposição é falsa. Então temos os seguintes casos:

Caso I. Existem ξ, δ em $T^* \setminus \{0\}$ linearmente independentes tais que $L_\xi \neq 0$ e $L_\delta \neq 0$, ou

Caso II. Existe $\xi \in T^* \setminus \{0\}$ tal que $L_\xi \neq 0$.

No caso I, podemos estender $\{\xi, \delta\} \subseteq T^* \setminus \{0\}$ a uma base de T^* , logo existe $\lambda \in T^* \setminus \{0\}$ tal que $\{\xi, \delta, \lambda\} \subseteq T^* \setminus \{0\}$ é um conjunto linearmente independente e $L_\lambda = 0$. Pela ação do grupo $GL_3(\mathbb{F}_2)$ sobre T^* podemos considerar a seguinte mudança de base dada por:

$$\begin{array}{ccc} GL_3(\mathbb{F}_2) \times T^* & \xrightarrow{\psi_A} & T^* \\ (A, \xi) & \mapsto & A.\xi = \alpha \\ (A, \delta) & \mapsto & A.\delta := \beta \\ (A, \lambda) & \mapsto & A.\lambda := \gamma \end{array}$$

2.2. DECOMPOSIÇÃO DE CARTAN DE UMA 2-ÁLGEBRA DE LIE DE POSTO TORAL 3.23

Assim, encontramos que $L = H \oplus L_\alpha \oplus L_\beta \oplus L_{\alpha+\beta}$. Consequentemente, salvo mudança de base, L tem a forma

$$L = H \oplus L_\varepsilon \oplus L_\mu \oplus L_{\varepsilon+\mu},$$

onde $\{\varepsilon, \mu, \mu + \varepsilon\}$ é um conjunto linearmente dependente de T^* . Neste caso, L tem posto toral 2, o qual é uma contradição.

Para o caso II, estendendo $\{\xi\} \subseteq T^* \setminus \{0\}$ a uma base de T^* , temos que existem $\pi, \kappa \in T^* \setminus \{0\}$ tais que $\{\xi, \pi, \kappa\}$ é um conjunto linearmente independente tal que $L_\xi \neq 0$ e $L_\pi = L_\kappa = 0$.

Logo, pela ação de $GL_3(\mathbb{F}_2)$ sobre T^* , podemos fazer uma mudança de base, isto é, para A fixo em $GL_3(\mathbb{F}_2)$, temos:

$$\begin{array}{ccc} GL_3(\mathbb{F}_2) \times T^* & \xrightarrow{\psi_A} & T^* \\ (A, \xi) & \mapsto & A.\xi = \alpha \\ (A, \pi) & \mapsto & A.\pi := \beta \\ (A, \kappa) & \mapsto & A.\kappa := \gamma. \end{array}$$

Portanto, salvo mudança de base L tem a forma seguinte:

$$L = H \oplus L_\varepsilon$$

para algum $\varepsilon \in T^* \setminus \{0\}$. Nesse caso temos que L tem posto toral 1. Uma contradição. Portanto existem três pesos em T linearmente independentes tais que cada espaço peso associado a elas não são nulos. $\square$

Agora, se existe $\delta \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ tal que $L_\delta = 0$, então consideremos a mudança de base

$$\begin{array}{ccc} GL_3(\mathbb{F}_2) \times T^* & \xrightarrow{\psi_A} & T^* \\ (A, \alpha) & \mapsto & A.\alpha = \kappa \\ (A, \beta) & \mapsto & A.\beta := \mu \\ (A, \gamma) & \mapsto & A.\gamma := \lambda. \end{array}$$

Como $\{\kappa, \mu, \lambda\}$ são linearmente independentes, então pela Proposição 2.3, $L_\kappa \neq 0$, $L_\mu \neq 0$, e $L_\lambda \neq 0$, logo a decomposição de L fica da forma seguinte:

$$L = H \oplus L_\kappa \oplus L_\mu \oplus L_\lambda \oplus L_{\kappa+\mu} \oplus L_{\kappa+\lambda} \oplus L_{\mu+\lambda} \oplus L_{\kappa+\mu+\lambda}.$$

Assim, pode-se supor sem perda de generalidade que a decomposição em espaços de pesos de L é:

$$L = T \oplus N \oplus L_\alpha \oplus L_\beta \oplus L_\gamma \oplus L_{\alpha+\beta} \oplus L_{\alpha+\gamma} \oplus L_{\beta+\gamma} \oplus L_{\alpha+\beta+\gamma},$$

onde $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ é uma base de T^* tal que $L_\alpha \neq 0$, $L_\beta \neq 0$, e $L_\gamma \neq 0$. Suponhamos que

$$\dim_k(L_\alpha) \geq \dim_k(L_\beta) \geq \dim_k(L_\gamma) \geq \dim_k(L_\xi) > 0, \quad \forall \xi \in T^* \setminus \{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}.$$

Seja $\Delta := \{\lambda \in T^* : L_\lambda \neq 0\}$ o sistema de raízes L respeito a T , encontremos todos os $\Delta \subseteq T^*$ de tal forma que em todos os casos α, β e $\gamma \in \Delta$. Logo temos os seguintes casos:

1. Se $\text{Card}(\Delta) = 3$, temos $\Delta_1 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.
2. Se $\text{Card}(\Delta) = 4$, temos as seguintes possibilidades para Δ :

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \{\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \beta\} \\ \Delta_3 &= \{\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \gamma\} \\ \Delta_4 &= \{\alpha, \beta, \gamma, \beta + \gamma\} \\ \Delta_5 &= \{\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \beta + \gamma\}\end{aligned}$$

3. Se $\text{Card}(\Delta) = 5$, temos as seguintes possibilidades para Δ :

$$\begin{aligned}\Delta_6 &= \{\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \beta, \alpha + \gamma\} \\ \Delta_7 &= \{\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \beta, \beta + \gamma\} \\ \Delta_8 &= \{\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \beta, \alpha + \beta + \gamma\} \\ \Delta_9 &= \{\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \gamma, \beta + \gamma\} \\ \Delta_{10} &= \{\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \gamma, \alpha + \beta + \gamma\} \\ \Delta_{11} &= \{\alpha, \beta, \gamma, \beta + \gamma, \alpha + \beta + \gamma\}\end{aligned}$$

4. Se $\text{Card}(\Delta) = 6$, tem-se as seguintes possibilidades para Δ :

$$\begin{aligned}\Delta_{12} &= \{\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \beta, \alpha + \gamma, \beta + \gamma\} \\ \Delta_{13} &= \{\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \beta, \alpha + \gamma, \alpha + \beta + \gamma\} \\ \Delta_{14} &= \{\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \beta, \beta + \gamma, \alpha + \beta + \gamma\} \\ \Delta_{15} &= \{\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \gamma, \beta + \gamma, \alpha + \beta + \gamma\}\end{aligned}$$

5. Se $\text{Card}(\Delta) = 7$, então $\Delta_0 = T^* \setminus \{0\}$

Assim que, para cada Δ_i com $0 \leq i \leq 15$, temos uma **Decomposição de Cartan** de $(L, [2])$ respeito a H dada por:

$$L^{\Delta_i} = T \oplus N \oplus \sum_{\xi \in \Delta_i} \oplus L_\xi.$$

Fixando $\dim_k(L^{\Delta_i})$ estudaremos a decomposição de Cartan de cada L^{Δ_i} , e os detalhes sobre a estrutura fornecida pela decomposição de Cartan destas álgebras nos darão as ferramentas necessárias para sua classificação. Para esta finalidade, precisamos demonstrar as seguintes proposições.

Proposição 2.4. *Sejam $\alpha, \beta \in \Delta \setminus \{0\}$. Se existe $e_\alpha \in L_\alpha$ tal que $e_\alpha^{[2]} := t_\alpha + n_\alpha$, $t_\alpha \in T \setminus \{0\}$, $n_\alpha \in N$ e $\beta(t_\alpha) \neq 0$, então $L_\beta \simeq L_{\alpha+\beta}$.*

Demonstração. Seja $e_\alpha \in L_\alpha$ e consideremos $ad(e_\alpha) : L_\beta \rightarrow L_{\alpha+\beta}$ a aplicação linear adjunta. Vejamos que $ad(e_\alpha)$ é injetora. Sejam e_β, f_β em L_β tais que $ad(e_\alpha)(e_\beta) = ad(e_\alpha)(f_\beta)$. Então $[e_\alpha, e_\beta] = [e_\alpha, f_\beta]$. Logo $[e_\alpha^{[2]}, e_\beta] = [e_\alpha, [e_\alpha, e_\beta]] = [e_\alpha, [e_\alpha, f_\beta]] = [e_\alpha^{[2]}, f_\beta]$. Daí $[t_\alpha + n_\alpha, e_\beta] = [t_\alpha + n_\alpha, f_\beta]$, isto é, $\beta(t_\alpha)e_\beta + ad(n_\alpha)(e_\beta) = \beta(t_\alpha)f_\beta + ad(n_\alpha)(f_\beta)$, isto é, $\beta(t_\alpha)(e_\beta + f_\beta) = ad(n_\alpha)(e_\beta + f_\beta)$. Portanto, $ad(t_\alpha)(e_\beta + f_\beta) = ad(n_\alpha)(e_\beta + f_\beta)$. Como $ad(n_\alpha)$ é nilpotente, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $ad(n_\alpha)^m = 0$. Assim $ad(t_\alpha)^m(e_\beta + f_\beta) = 0$ e portanto $(ad(t_\alpha)(e_\beta + f_\beta))^m = 0$. Logo $ad(t_\alpha)(e_\beta + f_\beta) = 0$ e daí $\beta(t_\alpha)(e_\beta + f_\beta) = 0$. Como $\beta(t_\alpha) \neq 0$ temos $e_\beta = f_\beta$, assim $ad(e_\alpha)$ é injetora.

Por outro lado, temos que $ad(e_\alpha) : L_{\alpha+\beta} \rightarrow L_\beta$ é uma aplicação linear injetora, já que: $(\alpha + \beta)(t_\alpha) = \alpha(t_\alpha) + \beta(t_\alpha) = 0 + \beta(t_\alpha) = \beta(t_\alpha) \neq 0$. Portanto:

$\dim_k(L_\beta) = \dim_k \text{Ker}(ad(e_\alpha)) + \dim_k \text{Im}(ad(e_\alpha)) = \dim_k \text{Im}(ad(e_\alpha)) \leq \dim_k(L_{\alpha+\beta})$, e $\dim_k(L_{\alpha+\beta}) = \dim_k \text{Ker}(ad(e_\alpha)) + \dim_k \text{Im}(ad(e_\alpha)) = \dim_k \text{Im}(ad(e_\alpha)) \leq \dim_k(L_\beta)$. Assim, $\dim_k(L_\beta) = \dim_k(L_{\alpha+\beta})$. $\square$

Lema 2.5. *Seja H uma subálgebra de Cartan com posto toral maximal. Então $H \oplus L_\xi$ é uma subálgebra solúvel de L para todo ξ .*

Demonstração. Ver [GP]. $\square$

Observação 2.6. *Neste trabalho vamos supor que H é uma subálgebra de Cartan de L de posto toral maximal.*

Proposição 2.7. *Seja $L = H \oplus \sum_{\xi \in \Delta} \oplus L_\xi$. Então $[L_\xi, L_\xi] \subseteq \text{Ker}(\xi)$ para todo $\xi \in \Delta$.*

Demonstração. Seja $\xi \in \Delta$ fixo. Temos pelo lema 2.5 que $S_\xi := H \oplus L_\xi$ é uma subálgebra solúvel de L . Vejamos que $[L_\xi, L_\xi] \subseteq \text{ker}(\xi)$. Suponhamos que existe $h \in [L_\xi, L_\xi]$ tal que $\xi(h) \neq 0$. Dado que $L_\xi \subseteq S_\xi$, então $[L_\xi, L_\xi] \subseteq [S_\xi, S_\xi] = S_\xi^{(1)}$, logo $h \in S_\xi^{(1)}$. Assim $[h, S_\xi] \subseteq S_\xi^{(1)}$ e, como $\xi(h) \neq 0$, tem-se $L_\xi \subseteq S_\xi^{(1)}$. Portanto $h \in [L_\xi, L_\xi] \subseteq [S_\xi^{(1)}, S_\xi^{(1)}] = S_\xi^{(2)}$.

Agora, suponhamos que $h \in S_\xi^{(m)}$ para algum $m \in \mathbb{N}$. Como $S_\xi^{(m)}$ é um ideal de S_ξ , então $[h, S_\xi] \subseteq S_\xi^{(m)}$, portanto $L_\xi \subseteq S_\xi^{(m)}$ (já que $\xi(t) \neq 0$). Então $h \in [L_\xi, L_\xi] \subseteq [S_\xi^{(m)}, S_\xi^{(m)}] = S_\xi^{(m+1)}$, assim $h \in S_\xi^{(m+1)}$. Logo por indução, $h \in S_\xi^{(m)}$ para todo m , e como S_ξ é solúvel, então $h = 0$. Isto implica que $\xi(h) = 0$. Uma contradição. Portanto $\xi([L_\xi, L_\xi]) = 0$. $\square$

2.3 Análise de $L = H \oplus \sum_{\xi \in \Delta_i} \oplus L_\xi$, com $\text{card}(\Delta_i) < 7$.

Nesta seção vamos demonstrar que para cada Δ_i , $1 \leq i \leq 15$, a decomposição de Cartan de L , $L^{\Delta_i} = H \oplus \sum_{\xi \in \Delta_i} \oplus L_\xi$, associada a cada sistema de raízes Δ_i , geram contradições com as condições impostas a $(L, [2])$. Portanto, essas incompatibilidades permitem concluir que não existe uma 2-álgebra de Lie simples de dimensão finita de posto toral 3 com estas estruturas.

Se $\dim_k(L_\xi) = 1$ para todo $\xi \in \Delta_i$ $1 \leq i \leq 15$, então temos que $0 \neq I := N \oplus \sum_{\xi \in \Delta_i} L_\xi$ é um ideal não trivial de L , já que $[N, L_\xi] = 0 = [L_\xi, L_\xi]$, o qual é uma contradição, já que L é uma álgebra de Lie simples. Assim, nos casos seguintes vamos a supor que $\dim_k(L_\xi) \geq 2$ para todo $\xi \in \Delta_i$.

- 2.2.1. Se $\Delta_1 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, temos que: $L = T \oplus N \oplus L_\alpha \oplus L_\beta \oplus L_\gamma$.

Demonstremos que $[L_\xi, L_\xi] \subseteq N$, para todo $\xi \in \Delta_1$. Com efeito, sejam e_i^ξ e e_j^ξ elementos da base de L_ξ , então $x^\xi := [e_i^\xi, e_j^\xi] \in [L_\xi, L_\xi] \subseteq H = T \oplus N$. Logo existem $t_{ij}^\xi \in T$ e $n_{ij}^\xi \in N$ tal que: $x^\xi = t_{ij}^\xi + n_{ij}^\xi = \alpha(t_{ij}^\xi)t_1 + \beta(t_{ij}^\xi)t_2 + \gamma(t_{ij}^\xi)t_3 + n_{ij}^\xi$ pela proposição 2.7 temos $0 = \xi(x^\xi) = \xi(t_{ij}^\xi + n_{ij}^\xi)$ para todo $\xi \in \Delta_1$, e pelo teorema 1.17.b obtemos $0 = \xi(x^\xi) = \xi(t_{ij}^\xi + n_{ij}^\xi) = \xi(t_{ij}^\xi)$. Logo $\alpha(t_{ij}^\xi) = \beta(t_{ij}^\xi) = \gamma(t_{ij}^\xi) = 0$, portanto $x^\xi = n_{ij}^\xi \in N$ para todo $\xi \in \Delta_1$. Assim, pelo teorema 1.17.e temos $H = \sum_{\xi \in \Delta_1} [L_\xi, L_\xi] \subseteq N$, então $H = N$ e $T = 0$. Uma contradição.

- 2.2.2.

2.2.2.a. Se $\Delta_2 = \{\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \beta\}$, então $L = T \oplus N \oplus L_\alpha \oplus L_\beta \oplus L_\gamma \oplus L_{\alpha+\beta}$.

Sejam e_i^ξ e e_j^ξ elementos da base de L_ξ , logo $x^\xi := [e_i^\xi, e_j^\xi] \in H$, logo existem $t_{ij}^\xi \in T$ e $n_{ij}^\xi \in N$ tal que: $x^\xi = t_{ij}^\xi + n_{ij}^\xi$, assim pela proposição 2.7 e teorema 1.17.b, $0 = \xi(x^\xi) = \xi(t_{ij}^\xi + n_{ij}^\xi) = \xi(t_{ij}^\xi)$ para todo $\xi \in \Delta_2$, isto é: $\alpha(t_{ij}^\xi) = \beta(t_{ij}^\xi) = \gamma(t_{ij}^\xi) = (\alpha + \beta)(t_{ij}^\xi) = 0$. Por outro lado, pela identidade de Jacobi e como $\alpha + \gamma \notin \Delta_2$, temos que para todo $e_k^\gamma \in L_\gamma$: $0 = [e_k^\gamma, [e_i^\alpha, e_j^\alpha]] = [e_k^\gamma, x^\alpha] = [e_k^\gamma, t_{ij}^\alpha + n_{ij}^\alpha] = [e_k^\gamma, t_{ij}^\alpha] + [e_k^\gamma, n_{ij}^\alpha] = \gamma(t_{ij}^\alpha)e_k^\gamma + ad(n_{ij}^\alpha)(e_k^\gamma)$, assim $ad(n_{ij}^\alpha)|_{L_\gamma} = \gamma(t_{ij}^\alpha)|_{L_\gamma}$. Como $ad(n_{ij}^\alpha)$ é nilpotente, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $ad(n_{ij}^\alpha)^m = 0$, logo $\gamma(t_{ij}^\alpha) = 0$. Portanto: $x^\alpha = t_{ij}^\alpha + n_{ij}^\alpha = \alpha(t_{ij}^\alpha)t_1 + \beta(t_{ij}^\alpha)t_2 + \gamma(t_{ij}^\alpha)t_3 + n_{ij}^\alpha = \beta(t_{ij}^\alpha)t_2 + n_{ij}^\alpha$. Assim, $[L_\alpha, L_\alpha] \subseteq \langle t_2 \rangle \oplus N$.

Da mesma forma, pela identidade de Jacobi, e como $\alpha + \gamma, \beta + \gamma, \alpha + \beta + \gamma \notin \Delta_2$ obtemos: $\alpha(t_{ij}^\beta) = \beta(t_{ij}^\beta) = \gamma(t_{ij}^\beta) = \gamma(t_{ij}^{\alpha+\beta}) = 0$. Portanto:

$$x^\beta = t_{ij}^\beta + n_{ij}^\beta = \alpha(t_{ij}^\beta)t_1 + n_{ij}^\beta; \quad x^\gamma = t_{ij}^\gamma + n_{ij}^\gamma = n_{ij}^\gamma;$$

$$x^{\alpha+\beta} = t_{ij}^{\alpha+\beta} + n_{ij}^{\alpha+\beta} = \alpha(t_{ij}^{\alpha+\beta})t_1 + \beta(t_{ij}^{\alpha+\beta})t_2 + n_{ij}^{\alpha+\beta} \text{ com } \alpha(t_{ij}^{\alpha+\beta}) = \beta(t_{ij}^{\alpha+\beta}).$$

Assim: $[L_\beta, L_\beta] \subseteq \langle t_1 \rangle \oplus N$; $[L_\gamma, L_\gamma] \subseteq N$ e, $[L_{\alpha+\beta+\gamma}, L_{\alpha+\beta+\gamma}] \subseteq \langle t_1 + t_2 \rangle \oplus N$.

Como L é simples, temos $H = \sum_{\xi \in \Delta_2} [L_\xi, L_\xi] \subseteq \langle t_1, t_2 \rangle \oplus N$, então $\dim_k(T) \leq 2$. Uma contradição.

2.2.2.b. Se $\Delta_3 = \{\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \gamma\}$, então $L = T \oplus N \oplus L_\alpha \oplus L_\beta \oplus L_\gamma \oplus L_{\alpha+\gamma}$.

Pelo mesmo argumento do caso anterior, e como $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \alpha + \beta + \gamma$ não estão em Δ_3 encontramos que: $x^\alpha = \gamma(t_{ij}^\alpha)t_3 + n_{ij}^\alpha$; $x^\beta = n_{ij}^\beta$; $x^\gamma = \alpha(t_{ij}^\gamma)t_1 + n_{ij}^\gamma$; $x^{\alpha+\gamma} = \alpha(t_{ij}^{\alpha+\gamma})t_1 + \gamma(t_{ij}^{\alpha+\gamma})t_3 + n_{ij}^{\alpha+\gamma}$ com $\alpha(t_{ij}^{\alpha+\gamma}) = \gamma(t_{ij}^{\alpha+\gamma})$. Assim que: $[L_\alpha, L_\alpha] \subseteq \langle t_3 \rangle \oplus N$; $[L_\beta, L_\beta] \subseteq N$; $[L_\gamma, L_\gamma] \subseteq \langle t_1 \rangle \oplus N$;

$[L_{\alpha+\gamma}, L_{\alpha+\gamma}] \subseteq \langle t_1 + t_3 \rangle \oplus N$. Portanto:

$H = \sum_{\xi \in \Delta_3} [L_\xi, L_\xi] \subseteq \langle t_1, t_3 \rangle \oplus N$, assim $\dim_k(T) \leq 2$. Uma contradição.

2.2.2.c. Se $\Delta_4 = \{\alpha, \beta, \gamma, \beta + \gamma\}$, então $L = T \oplus N \oplus L_\alpha \oplus L_\beta \oplus L_\gamma \oplus L_{\beta+\gamma}$.

Como $\alpha + \beta, \alpha + \gamma, \alpha + \beta + \gamma \notin \Delta_4$ pelo mesmo raciocínio dado em

2.2.2.a obtemos:

$x^\alpha = n_{ij}^\alpha$; $x^\beta = t_{ij}^\beta + n_{ij}^\beta = \beta(t_{ij}^\beta)t_3 + n_{ij}^\beta$; $x^\gamma = t_{ij}^\gamma + n_{ij}^\gamma = \beta(t_{ij}^\gamma)t_2 + n_{ij}^\gamma$.

$x^{\beta+\gamma} = t_{ij}^{\beta+\gamma} + n_{ij}^{\beta+\gamma} = \beta(t_{ij}^{\beta+\gamma})t_2 + \gamma(t_{ij}^{\beta+\gamma})t_3 + n_{ij}^{\beta+\gamma}$, com $\beta(t_{ij}^{\beta+\gamma}) = \gamma(t_{ij}^{\beta+\gamma})$.

Portanto: $[L_\alpha, L_\alpha] \subseteq N$; $[L_\beta, L_\beta] \subseteq \langle t_3 \rangle \oplus N$; $[L_\gamma, L_\gamma] \subseteq \langle t_2 \rangle \oplus N$;

$[L_{\beta+\gamma}, L_{\beta+\gamma}] \subseteq \langle t_2 + t_3 \rangle \oplus N$. Assim $H = \sum_{\xi \in \Delta_4} [L_\xi, L_\xi] \subseteq \langle t_2, t_3 \rangle \oplus N$, logo $\dim_k(T) \leq 2$. Uma contradição.

2.2.2.d. Se $\Delta_5 = \{\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \beta + \gamma\}$, então $L = T \oplus N \oplus L_\alpha \oplus L_\beta \oplus L_\gamma \oplus L_{\alpha+\beta+\gamma}$

temos que $\alpha + \beta, \alpha + \gamma, \beta + \gamma \notin \Delta_5$ então:

$[L_\alpha, L_\alpha], [L_\beta, L_\beta], [L_\gamma, L_\gamma], [L_{\alpha+\beta+\gamma}, L_{\alpha+\beta+\gamma}] \subseteq N$. Portanto $H \subseteq N$, assim que $T = 0$. Uma contradição.

• 2.2.3.

2.2.3.a Quando $\Delta_6 = \{\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \beta, \alpha + \gamma\}$, temos

$$L = T \oplus N \oplus L_\alpha \oplus L_\beta \oplus L_\gamma \oplus L_{\alpha+\beta} \oplus L_{\alpha+\gamma}.$$

Seja e_i^ξ, e_j^ξ elementos da base de L_ξ , com $\xi \in \Delta_6$, então $x^\xi := [e_i^\xi, e_j^\xi] \in$

$[L_\xi, L_\xi] \subseteq H = T \oplus N$, logo existem $t_{ij}^\xi \in T$ e $n_{ij}^\xi \in N$ tal que:

$x^\xi = t_{ij}^\xi + n_{ij}^\xi = \alpha(t_{ij}^\xi)t_1 + \beta(t_{ij}^\xi)t_2 + \gamma(t_{ij}^\xi)t_3 + n_{ij}^\xi$, pela proposição 2.7 e

teorema 1.17.b, obtemos $0 = \xi(x^\xi) = \xi(t_{ij}^\xi + n_{ij}^\xi) = \xi(t_{ij}^\xi)$, $\forall \xi \in \Delta_6$. Logo

$\alpha(t_{ij}^\alpha) = \beta(t_{ij}^\beta) = \gamma(t_{ij}^\gamma) = (\alpha + \beta)(t_{ij}^{\alpha+\beta}) = (\alpha + \gamma)(t_{ij}^{\alpha+\gamma}) = 0$. Como

$\beta + \gamma, \alpha + \beta + \gamma \notin \Delta_6$ temos que: $x^\alpha = \beta(t_{ij}^\alpha)t_2 + \gamma(t_{ij}^\alpha)t_3 + n_{ij}^\alpha$ com $\beta(t_{ij}^\alpha) =$

$\gamma(t_{ij}^\alpha)$; $x^\beta = t_{ij}^\beta + n_{ij}^\beta = \alpha(t_{ij}^\beta)t_1 + \gamma(t_{ij}^\beta)t_3 + n_{ij}^\beta$ com $\alpha(t_{ij}^\beta) = \gamma(t_{ij}^\beta)$, logo

$0 = [e_\gamma, x^\beta] = [e_\gamma, t_{ij}^\beta] + [e_\gamma, n_{ij}^\beta] = \gamma(t_{ij}^\beta)e_\gamma + [e_\gamma, n_{ij}^\beta]$, argumentando como

em 2.2.a encontramos que $\gamma(t_{ij}^\beta) = 0$, assim $x^\beta = n_{ij}^\beta$.

$x^\gamma = \alpha(t_{ij}^\gamma)t_1 + \beta(t_{ij}^\gamma)t_2 + n_{ij}^\gamma$ com $\alpha(t_{ij}^\gamma) = \beta(t_{ij}^\gamma)$, logo $0 = [e_\beta, x^\gamma] =$

$[e_\beta, t_{ij}^\gamma] + [e_\beta, n_{ij}^\gamma] = \beta(t_{ij}^\gamma)e_\beta + [e_\beta, n_{ij}^\gamma]$ então $\beta(t_{ij}^\gamma) = 0$, portanto, $x^\gamma = n_{ij}^\gamma$.

$x^{\alpha+\beta} = t_{ij}^{\alpha+\beta} + n_{ij}^{\alpha+\beta} = \alpha(t_{ij}^{\alpha+\beta})t_1 + \beta(t_{ij}^{\alpha+\beta})t_2 + n_{ij}^{\alpha+\beta}$ com $\alpha(t_{ij}^{\alpha+\beta}) = \beta(t_{ij}^{\alpha+\beta})$

e $\gamma(t_{ij}^{\alpha+\beta}) = 0$, como $0 = [e_{\alpha+\gamma}, x^{\alpha+\beta}]$, então $\alpha(t_{ij}^{\alpha+\beta}) = 0$, logo $x^{\alpha+\beta} = n_{ij}^{\alpha+\beta}$.

$x^{\alpha+\gamma} = t_{ij}^{\alpha+\gamma} + n_{ij}^{\alpha+\gamma} = \alpha(t_{ij}^{\alpha+\gamma})t_1 + \gamma(t_{ij}^{\alpha+\gamma})t_3 + n_{ij}^{\alpha+\gamma}$ com $\alpha(t_{ij}^{\alpha+\gamma}) = \gamma(t_{ij}^{\alpha+\gamma})$

e $\beta(t_{ij}^{\alpha+\gamma}) = 0$, como $0 = [e_{\alpha+\beta}, x^{\alpha+\gamma}]$, então $\alpha(t_{ij}^{\alpha+\gamma}) = 0$, logo $x^{\alpha+\gamma} = n_{ij}^{\alpha+\gamma}$.

Portanto obtemos que: $[L_\xi, L_\xi] \subseteq N$ para todo $\xi \in \Delta_6 \setminus \{\alpha\}$

e, $[L_\alpha, L_\alpha] \subseteq \langle t_2 + t_3 \rangle \oplus N$, portanto

$H = \sum_{\xi \in \Delta_6} [L_\xi, L_\xi] \subseteq \langle t_2, t_3 \rangle \oplus N$, logo $\dim_k(T) \leq 2$. Uma contradição.

2.2.3.b. Se $\Delta_7 = \{\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \beta, \beta + \gamma\}$ temos que:

$$L = T \oplus N \oplus L_\alpha \oplus L_\beta \oplus L_\gamma \oplus L_{\alpha+\beta} \oplus L_{\beta+\gamma}.$$

Como no caso precedente, se $x^\xi := [e_i^\xi, e_j^\xi] \in [L_\xi, L_\xi] \subseteq H$, então $\xi(x^\xi) = 0$, $\forall \xi \in \Delta_7$, assim $\alpha(t_{ij}^\alpha) = \beta(t_{ij}^\beta) = \gamma(t_{ij}^\gamma) = (\alpha + \beta)(t_{ij}^{\alpha+\beta}) = (\beta + \gamma)(t_{ij}^{\beta+\gamma}) = 0$. Por outro lado, como $\alpha + \gamma, \alpha + \beta + \gamma \notin \Delta_7$ temos que: $x^\alpha = \beta(t_{ij}^\alpha)t_2 + n_{ij}^\alpha$ e assim $[e_{\beta+\gamma}, x^\alpha] = [e_{\beta+\gamma}, t_{ij}^\alpha] + [e_{\beta+\gamma}, n_{ij}^\alpha]$, então $0 = (\beta + \gamma)(t_{ij}^{\alpha+\beta}) = 0$. Também $0 = \gamma(t_{ij}^\alpha)e_\gamma + [e_\gamma, n_{ij}^\alpha]$, então $0 = \gamma(t_{ij}^\alpha)$ logo $\beta(t_{ij}^\alpha) = 0$, assim que $x^\alpha = n_{ij}^\alpha$. Como $x^\beta = \alpha(t_{ij}^\beta)t_1 + \gamma(t_{ij}^\beta)t_3 + n_{ij}^\beta$, e $(\alpha + \gamma) \notin \Delta_7$ então $\alpha(t_{ij}^\beta) = \gamma(t_{ij}^\beta)$. Agora, $x^\gamma = \alpha(t_{ij}^\gamma)t_1 + \beta(t_{ij}^\gamma)t_2 + n_{ij}^\gamma$, logo $0 = [e_\alpha, x^\gamma] = [e_\alpha, t_{ij}^\gamma] + [e_\alpha, n_{ij}^\gamma]$, então $\alpha(t_{ij}^\gamma) = 0$. Também $[e_{\alpha+\beta}, x^\gamma] = [e_{\alpha+\beta}, t_{ij}^{\alpha+\beta}] + [e_{\alpha+\beta}, n_{ij}^{\alpha+\beta}]$ então $(\alpha + \beta)(t_{ij}^{\alpha+\beta}) = 0$, isto é $\beta(t_{ij}^{\alpha+\beta}) = 0$. Assim, $x^\gamma = n_{ij}^\gamma$. Além disso, $x^{\alpha+\beta} = \alpha(t_{ij}^{\alpha+\beta})t_1 + \beta(t_{ij}^{\alpha+\beta})t_2 + n_{ij}^{\alpha+\beta}$ com $\alpha(t_{ij}^{\alpha+\beta}) = \beta(t_{ij}^{\alpha+\beta})$.

$x^{\beta+\gamma} = \beta(t_{ij}^{\beta+\gamma})t_2 + \gamma(t_{ij}^{\beta+\gamma})t_3 + n_{ij}^{\beta+\gamma}$ com $\beta(t_{ij}^{\beta+\gamma}) = \gamma(t_{ij}^{\beta+\gamma})$.

Portanto: $[L_\alpha, L_\alpha], [L_\gamma, L_\gamma] \subseteq N$; $[L_\beta, L_\beta] \subseteq \langle t_1 + t_3 \rangle \oplus N$;

$[L_{\alpha+\beta}, L_{\alpha+\beta}] \subseteq \langle t_1 + t_2 \rangle \oplus N$; $[L_{\beta+\gamma}, L_{\beta+\gamma}] \subseteq \langle t_2 + t_3 \rangle \oplus N$.

Seja $T_0 = k\{t_1 + t_3\} \oplus k\{t_1 + t_2\} \oplus k\{t_2 + t_3\}$, logo

$H \subseteq [L, L] \subseteq \sum_{\xi \in \Delta_7} [L_\xi, L_\xi] \subseteq T_0 \oplus N$.

Afirmção. $t_1 \notin [L, L]$. De fato, se $t_1 \in [L, L]$, então existem $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ em k e, $n \in N$ tal que $t_1 = \delta_1(t_1 + t_3) + \delta_2(t_1 + t_3) + \delta_3(t_2 + t_3) + n$, isto é, $(1 + \delta_1 + \delta_2)t_1 + (\delta_2 + \delta_3)t_2 + (\delta_1 + \delta_3)t_3 = n$, como $T \cap N = 0$ então $(1 + \delta_1 + \delta_2)t_1 + (\delta_2 + \delta_3)t_2 + (\delta_1 + \delta_3)t_3 = 0$. Como t_1, t_2, t_3 são linearmente independente, tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 1 + \delta_1 + \delta_2 &= 0 \\ \delta_2 + \delta_3 &= 0 \\ \delta_1 + \delta_3 &= 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos que $0\delta_1 + 0\delta_2 = 1$, o que não pode ocorrer, e assim $t_1 \notin [L, L]$. Mas a afirmação é falsa, já que $T \subseteq [L, L]$. Uma contradição.

2.2.3.c. $\Delta_8 = \{\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \beta, \alpha + \beta + \gamma\}$ temos que:

$$\underline{L = T \oplus N \oplus L_\alpha \oplus L_\beta \oplus L_\gamma \oplus L_{\alpha+\beta} \oplus L_{\alpha+\beta+\gamma}}.$$

$x^\alpha = t_{ij}^\alpha + n_{ij}^\alpha$ então $\alpha(t_{ij}^\alpha) = 0$ e, como $\alpha + \gamma \notin \Delta_8$, então $\gamma(t_{ij}^\alpha) = 0$. Agora $0 = [e_{\alpha+\beta+\gamma}, x^\alpha] = [e_{\alpha+\beta+\gamma}, t_{ij}^\alpha] + [e_{\alpha+\beta+\gamma}, n_{ij}^\alpha]$ logo $(\alpha + \beta + \gamma)(t_{ij}^\alpha) = 0$ assim $\beta(t_{ij}^\alpha) = 0$ então $x^\alpha = n_{ij}^\alpha$. Também,

$x^\beta = t_{ij}^\beta + n_{ij}^\beta$ então $\beta(t_{ij}^\beta) = 0$ e como $\beta + \gamma \notin \Delta_8$ então $\gamma(t_{ij}^\beta) = 0$. Agora $0 = [e_{\alpha+\beta+\gamma}, x^\beta] = [e_{\alpha+\beta+\gamma}, t_{ij}^\beta] + [e_{\alpha+\beta+\gamma}, n_{ij}^\beta]$ logo $(\alpha + \beta + \gamma)(t_{ij}^\beta) = 0$ assim $\alpha(t_{ij}^\beta) = 0$, então $x^\beta = n_{ij}^\beta$. Agora,

$x^\gamma = t_{ij}^\gamma + n_{ij}^\gamma$ então $\gamma(t_{ij}^\gamma) = 0$ e como $\beta + \gamma, \alpha + \gamma \notin \Delta_8$ então $\beta(t_{ij}^\gamma) = 0$ e $\alpha(t_{ij}^\gamma) = 0$. Além do mais, se

$x^{\alpha+\beta+\gamma} = t_{ij}^{\alpha+\beta+\gamma} + n_{ij}^{\alpha+\beta+\gamma}$ então $(\alpha + \beta + \gamma)(t_{ij}^{\alpha+\beta+\gamma}) = 0$ e, como $\beta + \gamma, \alpha + \gamma \notin \Delta_8$ então $\beta(t_{ij}^{\alpha+\beta+\gamma}) = 0$ e $\alpha(t_{ij}^{\alpha+\beta+\gamma}) = 0$. Assim que $x^{\alpha+\beta+\gamma} = n_{ij}^{\alpha+\beta+\gamma}$. Por outro lado, $x^{\alpha+\beta} = t_{ij}^{\alpha+\beta} + n_{ij}^{\alpha+\beta}$, então $(\alpha + \beta)(t_{ij}^{\alpha+\beta}) = 0$ logo $x^{\alpha+\beta} = \alpha(t_{ij}^{\alpha+\beta})t_1 + \beta(t_{ij}^{\alpha+\beta})t_2 + \gamma(t_{ij}^{\alpha+\beta})t_3 + n_{ij}^{\alpha+\beta}$ com $\beta(t_{ij}^{\alpha+\beta}) = \alpha(t_{ij}^{\alpha+\beta})$. Assim, $[L_\xi, L_\xi] \subseteq N$ para todo $\xi \in \Delta_8 \setminus \{\alpha + \beta\}$ e, $[L_{\alpha+\beta}, L_{\alpha+\beta}] \subseteq \langle t_1 + t_2, t_3 \rangle \oplus N$. Logo $H \subseteq \langle t_1 + t_2, t_3 \rangle \oplus N$, assim $\dim_k(H) \leq \dim_k(N) + 2$, então $\dim_k(T) \leq 2$. Uma contradição.

2.2.3.d. Se $\Delta_9 = \{\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \gamma, \beta + \gamma\}$, então

$$L = T \oplus N \oplus L_\alpha \oplus L_\beta \oplus L_\gamma \oplus L_{\alpha+\gamma} \oplus L_{\beta+\gamma}.$$

Temos que $x^\alpha = t_{ij}^\alpha + n_{ij}^\alpha$, então $\alpha(t_{ij}^\alpha) = 0$ e como $(\alpha + \beta) \notin \Delta_9$ então $0 = [e_\beta, x^\alpha] = [e_\beta, t_{ij}^\alpha] + [e_\beta, n_{ij}^\alpha]$ logo $(\beta)(t_{ij}^\alpha) = 0$. Como $(\alpha + \beta + \gamma) \notin \Delta_9$ temos $0 = [e_{\beta+\gamma}, x^\alpha] = [e_{\beta+\gamma}, t_{ij}^\alpha] + [e_{\beta+\gamma}, n_{ij}^\alpha]$ logo $(\beta + \gamma)(t_{ij}^\alpha) = 0$. Portanto $x^\alpha = n_{ij}^\alpha$. Agora se, $x^\beta = t_{ij}^\beta + n_{ij}^\beta$, então $\beta(t_{ij}^\beta) = 0$ e, como $(\alpha + \beta) \notin \Delta_9$ então $0 = [e_\alpha, x^\beta] = [e_\alpha, t_{ij}^\beta] + [e_\alpha, n_{ij}^\beta]$ logo $(\alpha)(t_{ij}^\beta) = 0$. Como $(\alpha + \beta + \gamma) \notin \Delta_9$ tem-se $0 = [e_{\alpha+\gamma}, x^\beta] = [e_{\alpha+\gamma}, t_{ij}^\beta] + [e_{\alpha+\gamma}, n_{ij}^\beta]$ logo $(\alpha + \gamma)(t_{ij}^\beta) = 0$. Portanto $x^\beta = n_{ij}^\beta$. $x^\gamma = t_{ij}^\gamma + n_{ij}^\gamma$ então $\gamma(t_{ij}^\gamma) = 0$ e, $x^\gamma = \alpha(t_{ij}^\gamma)t_1 + \beta(t_{ij}^\gamma)t_2 + n_{ij}^\gamma$. $x^{\alpha+\gamma} = t_{ij}^{\alpha+\gamma} + n_{ij}^{\alpha+\gamma}$ então $(\alpha + \gamma)(t_{ij}^{\alpha+\gamma}) = 0$ e, $\beta(t_{ij}^{\alpha+\gamma}) = 0$, como $(\alpha + \beta) \notin \Delta_9$ então $0 = [e_{\beta+\gamma}, x^{\alpha+\gamma}] = [e_{\beta+\gamma}, t_{ij}^{\alpha+\gamma}] + [e_{\beta+\gamma}, n_{ij}^{\alpha+\gamma}]$, logo $(\beta + \gamma)(t_{ij}^{\alpha+\gamma}) = 0$. Portanto $x^{\alpha+\gamma} = n_{ij}^{\alpha+\gamma}$. $x^{\beta+\gamma} = t_{ij}^{\beta+\gamma} + n_{ij}^{\beta+\gamma}$ então $(\beta + \gamma)(t_{ij}^{\beta+\gamma}) = 0$ e $\alpha(t_{ij}^{\beta+\gamma}) = 0$ e como $(\alpha + \beta) \notin \Delta_9$ então $0 = [e_{\alpha+\gamma}, x^{\beta+\gamma}] = [e_{\alpha+\gamma}, t_{ij}^{\beta+\gamma}] + [e_{\alpha+\gamma}, n_{ij}^{\beta+\gamma}]$, logo $(\alpha + \gamma)(t_{ij}^{\beta+\gamma}) = 0$. Portanto $x^{\beta+\gamma} = n_{ij}^{\beta+\gamma}$. Assim $[L_\alpha, L_\alpha], [L_\beta, L_\beta], [L_{\alpha+\gamma}, L_{\alpha+\gamma}], [L_{\beta+\gamma}, L_{\beta+\gamma}] \subseteq N$, e $[L_\gamma, L_\gamma] \subseteq \langle t_1, t_2 \rangle \oplus N$. Portanto $H = \sum_{\xi \in \Delta_9} [L_\xi, L_\xi] \subseteq \langle t_1, t_2 \rangle \oplus N$, logo $\dim_k(T) \leq 2$. Uma contradição.

2.2.3.e. Quando $\Delta_{10} = \{\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \gamma, \alpha + \beta + \gamma\}$, então

$$L = T \oplus N \oplus L_\alpha \oplus L_\beta \oplus L_\gamma \oplus L_{\alpha+\gamma} \oplus L_{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Se $x^\alpha = t_{ij}^\alpha + n_{ij}^\alpha$, então $\alpha(t_{ij}^\alpha) = 0$ e $\beta(t_{ij}^\alpha) = 0$. Também temos que, $0 = [e_{\alpha+\beta+\gamma}, x^\alpha] = [e_{\alpha+\beta+\gamma}, t_{ij}^\alpha] + [e_{\alpha+\beta+\gamma}, n_{ij}^\alpha]$ logo $(\alpha + \beta + \gamma)(t_{ij}^\alpha) = 0$ e assim $\gamma(t_{ij}^\alpha) = 0$. Portanto $x^\alpha = n_{ij}^\alpha$. Se $x^\beta = t_{ij}^\beta + n_{ij}^\beta$, então $\beta(t_{ij}^\beta) = \gamma(t_{ij}^\beta) = \alpha(t_{ij}^\beta) = 0$. Portanto $x^\beta = n_{ij}^\beta$. Se $x^\gamma = t_{ij}^\gamma + n_{ij}^\gamma$, então $\gamma(t_{ij}^\gamma) = 0$ e $\beta(t_{ij}^\gamma) = 0$. Também temos $0 = [e_{\alpha+\beta+\gamma}, x^\gamma] = [e_{\alpha+\beta+\gamma}, t_{ij}^\gamma] + [e_{\alpha+\beta+\gamma}, n_{ij}^\gamma]$ logo $(\alpha + \beta + \gamma)(t_{ij}^\gamma) = 0$ e assim $\alpha(t_{ij}^\gamma) = 0$. Portanto $x^\gamma = n_{ij}^\gamma$.

Se $x^{\alpha+\gamma} = t_{ij}^{\alpha+\gamma} + n_{ij}^{\alpha+\gamma}$ então, $(\alpha + \gamma)(t_{ij}^\alpha) = 0$, portanto:

$x^{\alpha+\gamma} = \alpha(t_{ij}^{\alpha+\gamma})t_1 + \beta(t_{ij}^{\alpha+\gamma})t_2 + \gamma(t_{ij}^{\alpha+\gamma})t_3 + n_{ij}^{\alpha+\gamma}$, com $\alpha(t_{ij}^{\alpha+\gamma}) = \gamma(t_{ij}^{\alpha+\gamma})$.

Se $x^{\alpha+\beta+\gamma} = t_{ij}^{\alpha+\beta+\gamma} + n_{ij}^{\alpha+\beta+\gamma}$ então $(\alpha + \beta + \gamma)(t_{ij}^{\alpha+\beta+\gamma}) = 0$, e como

$\alpha + \beta, \beta + \gamma \notin \Delta_{10}$, $\gamma(t_{ij}^{\alpha+\beta+\gamma}) = 0$, $\alpha(t_{ij}^{\alpha+\beta+\gamma}) = 0$ então $\beta(t_{ij}^{\alpha+\beta+\gamma}) = 0$.

Assim que: $[L_\xi, L_\xi] \subseteq N \ \forall \xi \in \Delta_{10} \setminus \{\alpha + \gamma\}$ e,

$[L_{\alpha+\gamma}, L_{\alpha+\gamma}] \subseteq \langle t_2, t_1 + t_3 \rangle \oplus N$, então a $\dim_k(T) \leq 2$. Uma contradição.

2.2.3.f. Quando $\Delta_{11} = \{\alpha, \beta, \gamma, \beta + \gamma, \alpha + \beta + \gamma\}$, então

$$L = T \oplus N \oplus L_\alpha \oplus L_\beta \oplus L_\gamma \oplus L_{\beta+\gamma} \oplus L_{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Logo se $x^\alpha = t_{ij}^\alpha + n_{ij}^\alpha$ então $\alpha(t_{ij}^\alpha) = 0$ e $\beta(t_{ij}^\alpha) = 0 = \gamma(t_{ij}^\alpha)$ portanto $x^\alpha = n_{ij}^\alpha$.

Se $x^\beta = t_{ij}^\beta + n_{ij}^\beta$ então $\alpha(t_{ij}^\beta) = 0$ e $\alpha(t_{ij}^\alpha) = 0$. Também temos que $0 = [e_{\alpha+\beta+\gamma}, x^\beta] = [e_{\alpha+\beta+\gamma}, t_{ij}^\beta] + [e_{\alpha+\beta+\gamma}, n_{ij}^\beta]$ logo $(\alpha + \beta + \gamma)(t_{ij}^\beta) = 0$, então $\gamma(t_{ij}^\beta) = 0$. Portanto, $x^\beta = n_{ij}^\beta$.

Se $x^\gamma = t_{ij}^\gamma + n_{ij}^\gamma$ então $\gamma(t_{ij}^\gamma) = 0 = \alpha(t_{ij}^\gamma)$. Por outro lado, $0 = [e_{\alpha+\beta+\gamma}, x^\gamma] = [e_{\alpha+\beta+\gamma}, t_{ij}^\gamma] + [e_{\alpha+\beta+\gamma}, n_{ij}^\gamma]$ logo $(\alpha + \beta + \gamma)(t_{ij}^\gamma) = 0$ então $\beta(t_{ij}^\gamma) = 0$. Logo $x^\gamma = t_{ij}^\gamma$.

Se $x^{\beta+\gamma} = t_{ij}^{\beta+\gamma} + n_{ij}^{\beta+\gamma}$ então $(\beta + \gamma)(t_{ij}^{\beta+\gamma}) = 0$, assim

$x^{\beta+\gamma} = \alpha(t_{ij}^{\beta+\gamma})t_1 + \beta(t_{ij}^{\beta+\gamma})t_2 + \gamma(t_{ij}^{\beta+\gamma})t_3 + n_{ij}^{\beta+\gamma}$ com $\beta(t_{ij}^{\beta+\gamma}) = \gamma(t_{ij}^{\beta+\gamma})$

Se $x^{\alpha+\beta+\gamma} = t_{ij}^{\alpha+\beta+\gamma} + n_{ij}^{\alpha+\beta+\gamma}$ então $(\alpha + \beta + \gamma)(t_{ij}^{\alpha+\beta+\gamma}) = 0$, e como $\alpha + \gamma,$

$\alpha + \beta \notin \Delta_{11}$ então $\beta(t_{ij}^{\alpha+\beta+\gamma}) = \gamma(t_{ij}^{\alpha+\beta+\gamma}) = 0$. Assim:

$[L_\xi, L_\xi] \subseteq N, \ \forall \xi \in \Delta_{11} \setminus \{\beta + \gamma\}$ e, $[L_{\beta+\gamma}, L_{\beta+\gamma}] \subseteq \langle t_2, t_1 + t_3 \rangle \oplus N$

logo $H \subseteq \langle t_2, t_1 + t_3 \rangle \oplus N$, então a $\dim(T) \leq 2$. Um contradição.

• 2.2.4.

2.2.4.a. Se $\Delta_{12} = \{\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \beta, \alpha + \gamma, \beta + \gamma\}$, então

$$L = T \oplus N \oplus L_\alpha \oplus L_\beta \oplus L_\gamma \oplus L_{\alpha+\beta} \oplus L_{\alpha+\gamma} \oplus L_{\beta+\gamma}.$$

Se $x^\alpha = t^\alpha + n^\alpha \in [L_\alpha, L_\alpha]$ temos $\alpha(t^\alpha) = 0$ e como $\alpha + \beta + \gamma \notin \Delta_{12}$, então: $\beta(t^\alpha) + \gamma(t^\alpha) = 0$. Portanto $x^\alpha = \beta(t^\alpha)t_2 + \gamma(t^\alpha)t_3 + n^\alpha$ com $\beta(t^\alpha) = \gamma(t^\alpha)$.

Se $x^\beta = t^\beta + n^\beta \in [L_\beta, L_\beta]$ temos $\beta(t^\beta) = 0$ e como $(\alpha + \beta + \gamma) \notin \Delta_{12}$, então: $\alpha(t^\beta) + \gamma(t^\beta) = 0$. Por tanto $x^\beta = \alpha(t^\beta)t_1 + \gamma(t^\beta)t_3 + n^\beta$, com $\alpha(t^\beta) = \gamma(t^\beta)$.

Se $x^\gamma = t^\gamma + n^\gamma \in [L_\gamma, L_\gamma]$ temos $\gamma(t^\gamma) = 0$ e como $\alpha + \beta + \gamma \notin \Delta_{12}$, então: $\alpha(t^\gamma) + \beta(t^\gamma) = 0$. Por tanto $x^\gamma = \alpha(t^\gamma)t_1 + \beta(t^\gamma)t_2 + n^\gamma$, com $\alpha(t^\gamma) = \beta(t^\gamma)$.

Se $x^{\alpha+\beta} = t^{\alpha+\beta} + n^{\alpha+\beta} \in [L_{\alpha+\beta}, L_{\alpha+\beta}]$ temos $(\alpha + \beta)(t^{\alpha+\beta}) = 0$ e como $(\alpha + \beta + \gamma) \notin \Delta_{12}$, então $\gamma(t^{\alpha+\beta}) = 0$. Portanto

$x^{\alpha+\beta} = \alpha(t^{\alpha+\beta})t_1 + \beta(t^{\alpha+\beta})t_2 + n^{\alpha+\beta}$ com $\alpha(t^{\alpha+\beta}) = \beta(t^{\alpha+\beta})$.

Se $x^{\alpha+\gamma} = t^{\alpha+\gamma} + n^{\alpha+\gamma} \in [L_{\alpha+\gamma}, L_{\alpha+\gamma}]$ temos $(\alpha + \gamma)(t^{\alpha+\gamma}) = 0$ e como $(\alpha + \beta + \gamma) \notin \Delta_{12}$, então $\beta(t^{\alpha+\gamma}) = 0$. Portanto

$x^{\alpha+\gamma} = \alpha(t^{\alpha+\gamma})t_1 + \beta(t^{\alpha+\gamma})t_2 + n^{\alpha+\gamma}$, com $\alpha(t^{\alpha+\gamma}) = \beta(t^{\alpha+\gamma})$.

Se $x^{\beta+\gamma} = t^{\beta+\gamma} + n^{\beta+\gamma} \in [L_{\beta+\gamma}, L_{\beta+\gamma}]$ temos $(\beta + \gamma)(t^{\beta+\gamma}) = 0$ e como $(\alpha + \beta + \gamma) \notin \Delta_{12}$, então $\alpha(t^{\beta+\gamma}) = 0$. Portanto $x^{\beta+\gamma} = \beta(t^{\beta+\gamma})t_2 + \gamma(t^{\beta+\gamma})t_3 + n^{\beta+\gamma}$ com $\gamma(t^{\alpha+\gamma}) = \beta(t^{\alpha+\gamma})$.

Assim que:

$$[L_\alpha, L_\alpha], [L_{\beta+\gamma}, L_{\beta+\gamma}] \subseteq \langle t_2 + t_3 \rangle \oplus N.$$

$$[L_\beta, L_\beta], [L_{\alpha+\gamma}, L_{\alpha+\gamma}] \subseteq \langle t_1 + t_3 \rangle \oplus N.$$

$$[L_\gamma, L_\gamma], [L_{\alpha+\beta}, L_{\alpha+\beta}] \subseteq \langle t_1 + t_3 \rangle \oplus N.$$

Afirmação. $t_1 \notin [L, L]$.

Ja que, se $t_1 \in [L, L] \subseteq \sum_{\xi \in \Delta_{12}} [L_\xi, L_\xi] \subseteq T_0 \oplus N$

onde $T_0 := k\{t_2 + t_3\} \oplus k\{t_1 + t_2\} \oplus k\{t_1 + t_3\}$ então

$t_1 = \delta_1(t_2 + t_3) + \delta_2(t_1 + t_2) + \delta_3(t_1 + t_3) + n$ para algum $\delta_i \in k$ e $n \in N$, logo $(1 + \delta_2 + \delta_3)t_1 + (\delta_1 + \delta_2)t_2 + (\delta_1 + \delta_3)t_3 = n$. Como $T \cap N = 0$, então $(1 + \delta_2 + \delta_3)t_1 + (\delta_1 + \delta_2)t_2 + (\delta_1 + \delta_3)t_3 = n = 0$.

Como t_1, t_2, t_3 são linearmente independente, então temos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} 1 + \delta_2 + \delta_3 &= 0 \\ \delta_1 + \delta_2 &= 0 \\ \delta_1 + \delta_3 &= 0 \end{cases}$$

que não tem solução em k , o qual é uma contradição. Logo a afirmação contradiz o fato de $T \subseteq [L, L]$.

2.2.4.b. Quando $\Delta_{13} = \{\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \beta, \alpha + \gamma, \alpha + \beta + \gamma\}$, então

$$\underline{L = T \oplus N \oplus L_\alpha \oplus L_\beta \oplus L_\gamma \oplus L_{\alpha+\beta} \oplus L_{\alpha+\gamma} \oplus L_{\alpha+\beta+\gamma}}.$$

Temos que $[L_\alpha, L_\alpha], [L_{\alpha+\beta+\gamma}, L_{\alpha+\beta+\gamma}] \subseteq \langle t_2 + t_3 \rangle \oplus N$.

$$[L_\beta, L_\beta], [L_\gamma, L_\gamma] \subseteq \langle t_1 \rangle \oplus N.$$

$$[L_{\alpha+\beta}, L_{\alpha+\beta}], [L_{\alpha+\gamma}, L_{\alpha+\gamma}] \subseteq \langle t_1 + t_2 + t_3 \rangle \oplus N.$$

Pelo mesmo argumento do caso 2.2.4.a obtemos que $t_2 \notin [L, L]$.

Uma contradição, já que $T \subseteq [L, L]$.

2.2.4.c. Se $\Delta_{14} = \{\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \beta, \beta + \gamma, \alpha + \beta + \gamma\}$, temos

$$\underline{L = T \oplus N \oplus L_\alpha \oplus L_\beta \oplus L_\gamma \oplus L_{\alpha+\beta} \oplus L_{\beta+\gamma} \oplus L_{\alpha+\beta+\gamma}}.$$

Se $x^\alpha = t^\alpha + n^\alpha \in [L_\alpha, L_\alpha]$ então $\alpha(t^\alpha) = 0$ e como $(\alpha + \gamma) \notin \Delta_{14}$ então $\gamma(t^\alpha) = 0$ então $[L_\alpha, L_\alpha] \subseteq \langle t_2 \rangle \oplus N$.

Se $x^\beta = t^\beta + n^\beta \in [L_\beta, L_\beta]$ então $\beta(t^\beta) = 0$. $0 = [e_{\alpha+\beta+\gamma}, x^\beta] = [e_{\alpha+\beta+\gamma}, t^\beta] + [e_{\alpha+\beta+\gamma}, n^\beta] = (\alpha + \beta + \gamma)(t^\beta)e_{\alpha+\beta+\gamma} + [e_{\alpha+\beta+\gamma}, n^\beta]$ então $(\alpha + \beta + \gamma)(t^\beta) = 0$ então $(\alpha + \gamma)(t^\beta) = 0$, logo $x^\beta = \alpha(t^\beta)t_1 + \gamma(t^\beta)t_3 + n^\beta$ com $\alpha(t^\beta) = \gamma(t^\beta)$. Portanto $[L_\beta, L_\beta] \subseteq \langle t_1 + t_3 \rangle \oplus N$.

Se $x^\gamma = t^\gamma + n^\gamma \in [L_\gamma, L_\gamma]$ então $\gamma(t^\gamma) = 0$. $0 = [e_\alpha, x^\gamma] = [e_\alpha, t^\gamma] = \alpha(t^\gamma) + [e_\alpha, n^\gamma]$, então $\alpha(t^\gamma) = 0$, assim

$x^\gamma = \beta(t^\gamma)t_2 + n^\gamma$. Portanto, $[L_\gamma, L_\gamma] \subseteq \langle t_2 \rangle \oplus N$.

Se $x^{\alpha+\beta} = t^{\alpha+\beta} + n^{\alpha+\beta} \in [L_{\alpha+\beta}, L_{\alpha+\beta}]$ então $(\alpha + \beta)(t^{\alpha+\beta}) = 0$. $0 = [e_{\beta+\gamma}, x^{\alpha+\beta}] = [e_{\beta+\gamma}, t^{\alpha+\beta}] + [e_{\beta+\gamma}, n^{\alpha+\beta}] = (\beta + \gamma)(t^{\alpha+\beta})e_{\beta+\gamma} + [e_{\beta+\gamma}, n^{\alpha+\beta}]$ então $(\beta + \gamma)(t^{\alpha+\beta}) = 0$, logo $x^{\alpha+\beta} = \alpha(t^{\alpha+\beta})t_1 + \beta(t^{\alpha+\beta})t_2 + \gamma(t^{\alpha+\beta})t_3 + n^{\alpha+\beta}$ com $\alpha(t^{\alpha+\beta}) = \beta(t^{\alpha+\beta}) = \gamma(t^{\alpha+\beta})$.

Portanto, $[L_{\alpha+\beta}, L_{\alpha+\beta}] \subseteq \langle t_1 + t_2 + t_3 \rangle \oplus N$.

Se $x^{\beta+\gamma} = t^{\beta+\gamma} + n^{\beta+\gamma} \in [L_{\beta+\gamma}, L_{\beta+\gamma}]$ então

$(\beta + \gamma)(t^{\beta+\gamma}) = 0$. $0 = [e_{\alpha+\beta}, x^{\beta+\gamma}] = [e_{\alpha+\beta}, t^{\beta+\gamma}] + [e_{\alpha+\beta}, n^{\beta+\gamma}] = (\alpha + \beta)(t^{\beta+\gamma})e_{\alpha+\beta} + [e_{\alpha+\beta}, n^{\beta+\gamma}]$ então $(\alpha + \beta)(t^{\beta+\gamma}) = 0$, logo $x^{\beta+\gamma} = \alpha(t^{\beta+\gamma})t_1 + \beta(t^{\beta+\gamma})t_2 + \gamma(t^{\beta+\gamma})t_3 + n^{\beta+\gamma}$ com $\alpha(t^{\beta+\gamma}) = \beta(t^{\beta+\gamma}) = \gamma(t^{\beta+\gamma})$.

Portanto $[L_{\beta+\gamma}, L_{\beta+\gamma}] \subseteq \langle t_1 + t_2 + t_3 \rangle \oplus N$

Se $x^{\alpha+\beta+\gamma} = t^{\alpha+\beta+\gamma} + n^{\alpha+\beta+\gamma} \in [L_{\alpha+\beta+\gamma}, L_{\alpha+\beta+\gamma}]$ então $(\alpha + \beta + \gamma)(t^{\alpha+\beta+\gamma}) = 0$. $0 = [e_{\beta}, x^{\alpha+\beta+\gamma}] = [e_{\beta}, t^{\alpha+\beta+\gamma}] + [e_{\beta}, n^{\alpha+\beta+\gamma}] = \beta(t^{\alpha+\beta+\gamma})e_{\beta} + [e_{\beta}, n^{\alpha+\beta+\gamma}]$ então $\beta(t^{\alpha+\beta+\gamma}) = 0$, logo $x^{\alpha+\beta+\gamma} = \alpha(t^{\alpha+\beta+\gamma})t_1 + \beta(t^{\alpha+\beta+\gamma})t_2 + \gamma(t^{\alpha+\beta+\gamma})t_3 + n^{\alpha+\beta+\gamma}$ com $\alpha(t^{\alpha+\beta+\gamma}) = \gamma(t^{\alpha+\beta+\gamma})$.

Portanto $[L_{\alpha+\beta+\gamma}, L_{\alpha+\beta+\gamma}] \subseteq \langle t_1 + t_3 \rangle \oplus N$.

Afirmção. $t_1 \notin [L, L]$.

Já que, se $t_1 \in [L, L] \subseteq \sum_{\xi \in \Delta_{14}} [L_{\xi}, L_{\xi}] \subseteq T_0 \oplus N$

onde $T_0 := k\{t_2\} \oplus k\{t_1 + t_3\} \oplus k\{t_1 + t_2 + t_3\}$ então

$t_1 = \delta_1(t_2) + \delta_2(t_1 + t_3) + \delta_3(t_1 + t_2 + t_3) + n$ para algum $\delta_i \in k$ e $n \in N$, logo $(1 + \delta_2 + \delta_3)t_1 + (\delta_1 + \delta_2)t_2 + (\delta_1 + \delta_3)t_3 = n$. Como $T \cap N = 0$, então $(1 + \delta_2 + \delta_3)t_1 + (\delta_1 + \delta_2)t_2 + (\delta_1 + \delta_3)t_3 = n = 0$.

Como t_1, t_2, t_3 são linearmente independente, então temos o sistema

$$\begin{cases} 1 + \delta_2 + \delta_3 &= 0 \\ \delta_1 + \delta_2 &= 0 \\ \delta_1 + \delta_3 &= 0 \end{cases}$$

que não tem solução, o qual é uma contradição. Logo a afirmação contradiz o fato $T \subseteq [L, L]$.

2.2.4.d. Quando $\Delta_{15} = \{\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \gamma, \beta + \gamma, \alpha + \beta + \gamma\}$, então

$$L = T \oplus N \oplus L_{\alpha} \oplus L_{\beta} \oplus L_{\gamma} \oplus L_{\alpha+\gamma} \oplus L_{\beta+\gamma} \oplus L_{\alpha+\beta+\gamma}$$

Temos que $(\alpha + \beta) \notin \Delta_{15}$. Assim:

Se $x^{\alpha} = t^{\alpha} + n^{\alpha} \in [L_{\alpha}, L_{\alpha}]$, então $\alpha(t^{\alpha}) = 0$ e como $(\alpha + \beta) \notin \Delta_{15}$, então $\beta(t^{\alpha}) = 0$, então $[L_{\alpha}, L_{\alpha}] \subseteq \langle t_3 \rangle \oplus N$.

Se $x^{\beta} = t^{\beta} + n^{\beta} \in [L_{\beta}, L_{\beta}]$, então $\beta(t^{\beta}) = 0$ e como $(\alpha + \beta) \notin \Delta_{15}$, então $\alpha(t^{\beta}) = 0$ então $[L_{\beta}, L_{\beta}] \subseteq \langle t_3 \rangle \oplus N$.

Se $x^{\gamma} = t^{\gamma} + n^{\gamma} \in [L_{\gamma}, L_{\gamma}]$, então $\gamma(t^{\gamma}) = 0$ e como $0 = [e_{\alpha+\beta+\gamma}, x^{\gamma}] = [e_{\alpha+\beta+\gamma}, t^{\gamma}] + [e_{\alpha+\beta+\gamma}, n^{\gamma}] = (\alpha + \beta + \gamma)(t^{\gamma})e_{\alpha+\beta+\gamma} + [e_{\alpha+\beta+\gamma}, n^{\gamma}]$ então $(\alpha + \beta + \gamma)(t^{\gamma}) = 0$, logo $(\alpha + \beta)(t^{\gamma}) = 0$. Tem-se

$x^{\gamma} = \alpha(t^{\gamma})t_1 + \beta(t^{\gamma})t_2 + n^{\gamma}$ com $\alpha(t^{\gamma}) = \beta(t^{\gamma})$ e assim

$[L_{\gamma}, L_{\gamma}] \subseteq \langle t_1 + t_2 \rangle \oplus N$.

Se $x^{\alpha+\gamma} = t^{\alpha+\gamma} + n^{\alpha+\gamma} \in [L_{\alpha+\gamma}, L_{\alpha+\gamma}]$, então $(\alpha + \gamma)(t^{\alpha+\gamma}) = 0$ e como $0 = [e_{\beta+\gamma}, x^{\alpha+\gamma}] = [e_{\beta+\gamma}, t^{\alpha+\gamma}] + [e_{\beta+\gamma}, n^{\alpha+\gamma}] = (\beta + \gamma)(t^{\alpha+\gamma})e_{\beta+\gamma} + [e_{\beta+\gamma}, n^{\alpha+\gamma}]$ então $(\beta + \gamma)(t^{\alpha+\gamma}) = 0$, logo tem-se $x^{\alpha+\gamma} = \alpha(t^{\alpha+\gamma})t_1 + \beta(t^{\alpha+\gamma})t_2 + \gamma(t^{\alpha+\gamma})t_3 + n^{\alpha+\gamma}$, com $\alpha(t^{\alpha+\gamma}) = \beta(t^{\alpha+\gamma}) = \gamma(t^{\alpha+\gamma})$ e assim $[L_{\alpha+\gamma}, L_{\alpha+\gamma}] \subseteq \langle t_1 + t_2 + t_3 \rangle \oplus N$.

Se $x^{\beta+\gamma} = t^{\beta+\gamma} + n^{\beta+\gamma} \in [L_{\beta+\gamma}, L_{\beta+\gamma}]$ então $(\beta + \gamma)(t^{\beta+\gamma}) = 0$ e como $0 = [e_{\alpha+\gamma}, x^{\beta+\gamma}] = [e_{\alpha+\gamma}, t^{\beta+\gamma}] + [e_{\alpha+\gamma}, n^{\beta+\gamma}] = (\alpha + \gamma)(t^{\beta+\gamma})e_{\alpha+\gamma} + [e_{\alpha+\gamma}, n^{\beta+\gamma}]$ então $(\alpha + \gamma)(t^{\beta+\gamma}) = 0$, logo tem-se $x^{\beta+\gamma} = \alpha(t^{\beta+\gamma})t_1 + \beta(t^{\beta+\gamma})t_2 + \gamma(t^{\beta+\gamma})t_3 + n^{\beta+\gamma}$, com $\alpha(t^{\beta+\gamma}) = \beta(t^{\beta+\gamma}) = \gamma(t^{\beta+\gamma})$ e assim $[L_{\beta+\gamma}, L_{\beta+\gamma}] \subseteq \langle t_1 + t_2 + t_3 \rangle \oplus N$.

Se $x^{\alpha+\beta+\gamma} = t^{\alpha+\beta+\gamma} + n^{\alpha+\beta+\gamma} \in [L_{\alpha+\beta+\gamma}, L_{\alpha+\beta+\gamma}]$ então $(\alpha + \beta + \gamma)(t^{\alpha+\beta+\gamma}) = 0$ e como $0 = [e_\gamma, x^{\alpha+\beta+\gamma}] = [e_\gamma, t^{\alpha+\beta+\gamma}] + [e_\gamma, n^{\alpha+\beta+\gamma}] = \gamma(t^{\alpha+\beta+\gamma})e_\gamma + [e_\gamma, n^{\alpha+\beta+\gamma}]$ então $\gamma(t^{\alpha+\beta+\gamma}) = 0$, logo tem-se $x^{\alpha+\beta+\gamma} = \alpha(t^{\alpha+\beta+\gamma})t_1 + \beta(t^{\alpha+\beta+\gamma})t_2 + \gamma(t^{\alpha+\beta+\gamma})t_3 + n^{\alpha+\beta+\gamma}$, com $\alpha(t^{\alpha+\beta+\gamma}) = \beta(t^{\alpha+\beta+\gamma}) = \gamma(t^{\alpha+\beta+\gamma})$ e assim $[L_{\alpha+\beta+\gamma}, L_{\alpha+\beta+\gamma}] \subseteq \langle t_1 + t_2 \rangle \oplus N$.

Seja $T_0 = k\{t_3\} \oplus k\{t_1 + t_2\} \oplus k\{t_1 + t_2 + t_3\}$, logo $H \subseteq [L, L] \subseteq \sum_{\xi \in \Delta_{15}} [L_\xi, L_\xi] \subseteq T_0 \oplus N$. Se $t_1 \in [L, L]$ então existem $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ em k tal que $t_1 = \delta_1 t_3 + \delta_2(t_1 + t_2) + \delta_3(t_1 + t_2 + t_3)$ assim temos o sistema de equações

$$\begin{cases} 1 + \delta_2 + \delta_3 &= 0 \\ \delta_2 + \delta_3 &= 0 \\ \delta_1 + \delta_3 &= 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos que $0\delta_2 + 0\delta_3 = 1$, o que não pode ocorrer e assim $t_1 \notin [L, L]$, mas $T \subseteq [L, L]$. Uma contradição.

2.4 Análise de $L = H \oplus \sum_{\xi \in \Delta} \oplus L_\xi$, com $\Delta = T^* \setminus \{0\}$.

Na seção 2.3, se demonstrou que quando o $\text{Card}(\Delta) < 7$, não existem 2-álgebras de Lie simples de dimensão finita de posto toral 3, com decomposição de Cartan L^Δ . Nesta seção, vamos estudar a decomposição de Cartan L^Δ , quando $\text{card}(\Delta) = 7$, isto é, quando $\Delta = \Delta_0 := T^* \setminus \{0\}$.

Suponhamos que $(L, [2])$ é uma 2-álgebra de Lie simples, de posto toral 3, de dimensão maior ou igual a 10, cuja decomposição de Cartan respeito a T é:

$$L = T \oplus N \oplus L_\alpha \oplus L_\beta \oplus L_\gamma \oplus L_{\alpha+\beta} \oplus L_{\alpha+\gamma} \oplus L_{\beta+\gamma} \oplus L_{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Antes de começar a estudar estas álgebras, é conveniente que se faça o seguinte cometário sobre notação.

Observação 2.8. A 10-tupla

$$(\dim_k(L) : \dim_k(T), \dim_k(N), \dim_k(L_\alpha), \dim_k(L_\beta), \dim_k(L_\gamma), \dim_k(L_{\alpha+\beta}), \dim_k(L_{\alpha+\gamma}), \dim_k(L_{\beta+\gamma}), \dim_k(L_{\alpha+\beta+\gamma}))$$

se refere ao 2-álgebras de Lie simples $(L, [2])$ de posto toral 3 com decomposição de Cartan $L = T \oplus N \oplus \sum_{\xi \in \Delta} L_\xi$ com sua respectiva dimensão e, as dimensões de seus espaços raízes.

Lembre que nós estamos considerando :

$\dim_k(L_\alpha) \geq \dim_k(L_\beta) \geq \dim_k(L_\gamma) \geq \dim_k(L_\xi) > 0$ para $\xi \notin \Delta \setminus \{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$.

Agora fixando a dimensão de $(L, [2])$, estudaremos sua estrutura quando $\Delta = T^* \setminus \{0\}$.

- 2.3.1. Se $\dim_k(L) = 10$, temos $(10 : 3, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$, nesse caso $I := \sum_{\xi \in \Delta} L_\xi$ é um ideal de L , portanto L não é simples. Uma contradição.
- 2.3.2. Se $\dim_k(L) = 11$, temos os seguintes casos:
 - 2.3.2.a. $(11 : 3, 0, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Nesse caso, como $T \subseteq \sum_{\xi \in \Delta} [L_\xi, L_\xi] \subseteq [L_\alpha, L_\alpha]$ então a $\dim_k(T) \leq 1$. Uma contradição.
 - 2.3.2.b. $(11 : 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Então $I := N \oplus \sum_{\xi \in \Delta} L_\xi$ é um ideal de L . Uma contradição.
- 2.3.3. Se $\dim_k(L) = 12$. Temos os seguintes casos:
 - 2.3.3.a. $(12 : 3, 0, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Seja $e_\alpha \in [L_\alpha, L_\alpha]$, então existem $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in k$ tal que $e_\alpha = \delta_1 t_1 + \delta_2 t_2 + \delta_3 t_3$, logo $0 = [e_\alpha, e_\alpha] = \delta_1 \alpha(t_1) e_\alpha + \delta_2 \alpha(t_2) e_\alpha + \delta_3 \alpha(t_3) e_\alpha = \delta_1 e_\alpha$, então $\delta_1 = 0$, logo $e_\alpha = \delta_2 t_2 + \delta_3 t_3$, isto é, $e_\alpha \in \langle t_2, t_3 \rangle$, assim $[L_\alpha, L_\alpha] \subseteq \langle t_2, t_3 \rangle$. Como $T \subseteq \sum_{\xi \in \Delta} [L_\xi, L_\xi] \subseteq [L_\alpha, L_\alpha] \subseteq \langle t_2, t_3 \rangle$. Então a $\dim_k(T) \leq 2$. Uma contradição.
 - 2.3.3.b. $(12 : 3, 0, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$. Então $T \subseteq \sum_{\xi \in \Delta} [L_\xi, L_\xi] \subseteq [L_\alpha, L_\alpha] + [L_\beta, L_\beta]$ logo $\dim_k(T) \leq \dim_k([L_\alpha, L_\alpha]) + \dim_k([L_\beta, L_\beta]) \leq 1 + 1 = 2$.
 - 2.3.3.c. $(12 : 3, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$. $H \subseteq \sum_{\xi \in \Delta} [L_\xi, L_\xi] = [L_\alpha, L_\alpha]$ e como $\dim_k(L_\alpha) = 2$, então $\dim_k([L_\alpha, L_\alpha]) \leq 1$. Assim que, $\dim_k(H) \leq 1$. Uma contradição.
 - 2.3.3.d. $(12 : 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Temos que $I := N \oplus \sum_{\xi \in \Delta} L_\xi$ é um ideal de L . Uma contradição.
- 2.3.4. Se $\dim_k(L) = 13$, então temos que:
 - 2.3.4.a. $(13 : 3, 0, 4, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.
 - 2.3.4.b. $(13 : 3, 0, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$.
 - 2.3.4.c. $(13 : 3, 0, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$.
Para estes três casos temos o seguinte:
Seja $e_\beta \in L_\beta$ elemento da base de L_β . Logo $e_\beta^{[2]} := t_\beta \in T$ então existe $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in k$ tal que $e_\beta^{[2]} = \delta_1 t_1 + \delta_2 t_2 + \delta_3 t_3$, como $\beta(e_\beta^{[2]}) = 0$, então $\delta_2 = 0$. Logo $t_\beta = \delta_1 t_1 + \delta_3 t_3$ para algum $\delta_1, \delta_3 \in k$, assim $L_\beta^{[2]} \subseteq \langle t_1, t_3 \rangle$. Se escolhermos $\delta_1 \neq 0$ logo $\alpha(t_\beta) = \delta_1 \neq 0$, pela proposição 2.4 temos que $L_\alpha \simeq L_{\alpha+\beta}$, mas isto é impossível, já que $\dim_k(L_\alpha) \neq \dim_k(L_{\alpha+\beta}) = 1$.

2.3.4.d. $(13 : 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Então $I := N \oplus \sum_{\xi \in \Delta} \oplus L_\xi$ é um ideal de L . Uma contradição.

2.3.4.e. $(13 : 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$. Temos $H \subseteq \sum_{\xi \in \Delta} [L_\xi, L_\xi] = [L_\alpha, L_\alpha]$ então $\dim_k(H) \leq 1$. Uma contradição.

2.3.4.f. $(13 : 3, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 1)$. Temos $H \subseteq \sum_{\xi \in \Delta} [L_\xi, L_\xi] = [L_\alpha, L_\alpha] \subseteq \langle t_2, t_3 \rangle$, $\dim_k(H) \leq 2$. Uma contradição.

2.3.4.g. $(13 : 3, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$. Temos $H \subseteq \sum_{\xi \in \Delta} [L_\xi, L_\xi] = [L_\alpha, L_\alpha] + [L_\beta, L_\beta]$, assim que $\dim_k(H) \leq 2$. Uma contradição.

- 2.3.5. Se $\dim_k(L) = 14$. Então temos os seguintes casos:

2.3.5.a. $(14 : 3, 0, 5, 1, 1, 1, 1, 1)$

2.3.5.g. $(14 : 3, 1, 3, 2, 1, 1, 1, 1)$

2.3.5.b. $(14 : 3, 0, 4, 2, 1, 1, 1, 1)$

2.3.5.h. $(14 : 3, 1, 4, 1, 1, 1, 1, 1)$

2.3.5.c. $(14 : 3, 0, 3, 3, 1, 1, 1, 1)$

2.3.5.i. $(14 : 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$

2.3.5.d. $(14 : 3, 0, 3, 2, 2, 1, 1, 1)$

2.3.5.j. $(14 : 3, 2, 3, 1, 1, 1, 1, 1)$

2.3.5.e. $(14 : 3, 0, 2, 2, 2, 2, 1, 1)$

2.3.5.k. $(14 : 3, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$

2.3.5.f. $(14 : 3, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$

2.3.5.l. $(14 : 3, 4, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$

Seja e_β um elemento da base de L_β . Como $e_\beta^{[2]} \in L_\beta^{[2]} \subseteq H = T \oplus N$ então existem $t_\beta \in T$ e $n_\beta \in N$ tal que $e_\beta^{[2]} = t_\beta + n_\beta$. Como $t_\beta \in T$ existem $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ em k , tal que $t_\beta = \delta_1 t_1 + \delta_2 t_2 + \delta_3 t_3$. Por outro lado, $0 = [e_\beta, e_\beta^{[2]}] = \beta(t_\beta)e_\beta + [e_\beta, n_\beta]$ logo $ad(n_\beta)(e_\beta) = \beta(t_\beta)e_\beta$, como n_β é nilpotente então $ad(n_\beta)$ é nilpotente, portanto $\beta(t_\beta) = \delta_2 = 0$. Assim que, $e_\beta^{[2]} = \delta_1 t_1 + \delta_3 t_3 + n_\beta$. Escolhendo $\delta_1 \neq 0$ temos que $t_\beta \neq 0$ e $\alpha(t_\beta) = \delta_1 \neq 0$, logo pela proposição 2.4, $L_\alpha \simeq L_{\alpha+\beta}$. Portanto os casos anteriores, exceto os casos 2.3.5.e e 2.3.5.l, são impossíveis já que $\dim_k(L_\alpha) \neq \dim_k(L_{\alpha+\beta})$. Para o caso 2.3.5.e, seja e_γ um elemento da base de L_γ . Como $e_\gamma^{[2]} \in L_\gamma^{[2]} \subseteq H = T \oplus N$, então existem $t_\gamma \in T$ e $n_\gamma \in N$ tal que $e_\gamma^{[2]} = t_\gamma + n_\gamma$. Como $t_\gamma \in T$ existem $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ em k , tal que $t_\gamma = \delta_1 t_1 + \delta_2 t_2 + \delta_3 t_3$. Por outro lado $0 = [e_\gamma, e_\gamma^{[2]}] = \gamma(t_\gamma)e_\gamma + [e_\gamma, n_\gamma]$, logo $ad(n_\gamma)(e_\gamma) = \gamma(t_\gamma)e_\gamma$, como n_γ é nilpotente então $ad(n_\gamma)$ é nilpotente, portanto $\gamma(t_\gamma) = \delta_3 = 0$. Assim que, $e_\gamma^{[2]} = \delta_1 t_1 + \delta_2 t_2 + n_\gamma$. Escolhendo $\delta_3 \neq 0$ temos que $t_\gamma \neq 0$ e $\alpha(t_\gamma) = \delta_1 \neq 0$, logo pela proposição 2.4., $L_\alpha \simeq L_{\alpha+\gamma}$, isto é uma contradição, já que, $2 = \dim_k(L_\alpha) \neq \dim_k(L_{\alpha+\gamma}) = 1$. Para o caso 2.3.5.l. temos que $I := N \oplus \sum_{\xi \in \Delta} \oplus L_\xi$ é um ideal de L . Uma contradição.

- 2.3.6. Se $\dim(L) = 15$, temos os seguintes casos:

2.3.6.a. $(15 : 3, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$

2.3.6.c. $(15 : 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$

2.3.6.b. $(15 : 3, 4, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$

2.3.6.d. $(15 : 3, 2, 3, 2, 1, 1, 1, 1)$

2.3.6.e. $(15 : 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$	2.3.6.j. $(15 : 3, 0, 4, 3, 1, 1, 1, 1, 1)$
2.3.6.f. $(15 : 3, 1, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$	2.3.6.k. $(15 : 3, 0, 3, 3, 2, 1, 1, 1, 1)$
2.3.6.h. $(15 : 3, 0, 6, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$	2.3.6.l. $(15 : 3, 0, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$
2.3.6.i. $(15 : 3, 0, 5, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$	2.3.6.m. $(15 : 3, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1)$

No caso 2.3.6.a., temos que $I := N \oplus \sum_{\xi \in \Delta} \oplus L_\xi$ é um ideal de L . Uma contradição. Como no caso anterior, seja e_β um elemento da base de L_β . Como $e_\beta^{[2]} \in L_\beta^{[2]} \subseteq H = T \oplus N$, então existem $t_\beta \in T$ e $n_\beta \in N$ tal que $e_\beta^{[2]} = t_\beta + n_\beta$. Como $t_\beta \in T$ existem $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ em k , tal que $t_\beta = \delta_1 t_1 + \delta_2 t_2 + \delta_3 t_3$. Por outro lado $0 = [e_\beta, e_\beta^{[2]}] = \beta(t_\beta)e_\beta + [e_\beta, n_\beta]$, logo $ad(n_\beta)(e_\beta) = \beta(t_\beta)e_\beta$, como n_β é nilpotente então $ad(n_\beta)$ é nilpotente, portanto $\beta(t_\beta) = \delta_2 = 0$. Assim que, $e_\beta^{[2]} = \delta_1 t_1 + \delta_3 t_3 + n_\beta$. Escolhendo $\delta_1 \neq 0$ temos que $t_\beta \neq 0$ e $\alpha(t_\beta) = \delta_1 \neq 0$, logo pela proposição 2.4, $L_\alpha \simeq L_{\alpha+\beta}$. Portanto os casos 2.3.6.b. até 2.3.6.l. são impossíveis, já que $\dim_k(L_\alpha) \neq \dim_k(L_{\alpha+\beta}) = 1$.

Por outro lado, escolhendo $\delta_1 \neq \delta_3$, também temos que $(\alpha + \gamma)(t_\beta) = (\alpha + \gamma)(\delta_1 t_1 + \delta_3 t_3) = \delta_1 + \delta_3 \neq 0$, logo pela proposição 2.4 temos que $L_{\alpha+\gamma} \simeq L_{\alpha+\beta+\gamma}$, mas $2 = \dim_k(L_{\alpha+\gamma}) \neq \dim_k(L_{\alpha+\beta+\gamma}) = 1$, logo o caso 2.3.6.m. não é possível.

- 2.3.7. Se $\dim_k(L) = 16$, temos os seguintes casos:

2.3.7.1. $(16 : 3, 6, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$	2.3.7.15. $(16 : 3, 1, 4, 3, 1, 1, 1, 1, 1)$
2.3.7.2. $(16 : 3, 5, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$	2.3.7.16. $(16 : 3, 1, 4, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$
2.3.7.3. $(16 : 3, 4, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$	2.3.7.17. $(16 : 3, 1, 3, 3, 2, 1, 1, 1, 1)$
2.3.7.4. $(16 : 3, 4, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$	2.3.7.18. $(16 : 3, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$
2.3.7.5. $(16 : 3, 3, 4, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$	2.3.7.19. $(16 : 3, 0, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$
2.3.7.6. $(16 : 3, 3, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$	2.3.7.20. $(16 : 3, 0, 6, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$
2.3.7.7. $(16 : 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$	2.3.7.21. $(16 : 3, 0, 5, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$
2.3.7.8. $(16 : 3, 2, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$	2.3.7.22. $(16 : 3, 0, 4, 3, 2, 1, 1, 1, 1)$
2.3.7.9. $(16 : 3, 2, 4, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$	2.3.7.23. $(16 : 3, 0, 4, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$
2.3.7.10. $(16 : 3, 2, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 1)$	2.3.7.24. $(16 : 3, 0, 4, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$
2.3.7.11. $(16 : 3, 2, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$	2.3.7.25. $(16 : 3, 0, 4, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$
2.3.7.12. $(16 : 3, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$	2.3.7.26. $(16 : 3, 0, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1)$
2.3.7.13. $(16 : 3, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$	2.3.7.27. $(16 : 3, 0, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1)$
2.3.7.14. $(16 : 3, 1, 5, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$	2.3.7.28. $(16 : 3, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1)$

No caso 2.3.7.1., tem-se que $I := N \oplus \sum_{\xi \in \Delta} \oplus L_\xi$ é um ideal de L , o qual é uma contradição. Novamente como nos casos anteriores, e_β um elemento da base de

L_β . Como $e_\beta^{[2]} \in L_\beta^{[2]} \subseteq H = T \oplus N$, então existem $t_\beta \in T$ e $n_\beta \in N$ tal que $e_\beta^{[2]} = t_\beta + n_\beta$. Como $t_\beta \in T$ existem $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ em k , tal que $t_\beta = \delta_1 t_1 + \delta_2 t_2 + \delta_3 t_3$. Por outro lado, $0 = [e_\beta, e_\beta^{[2]}] = \beta(t_\beta)e_\beta + [e_\beta, n_\beta]$ logo $ad(n_\beta)(e_\beta) = \beta(t_\beta)e_\beta$, como n_β é nilpotente, então $ad(n_\beta)$ é nilpotente, portanto $\beta(t_\beta) = \delta_2 = 0$. Assim $e_\beta^{[2]} = \delta_1 t_1 + \delta_3 t_3 + n_\beta$. Escolhendo $\delta_1 \neq 0$ temos que $t_\beta \neq 0$ e $\alpha(t_\beta) = \delta_1 \neq 0$, logo pela proposição 2.4., $L_\alpha \cong L_{\alpha+\beta}$. Portanto os casos 2.3.7.1. até 2.3.7.27. exceto 2.3.7.12. e, 2.3.7.19. são impossivel, já que $\dim_k(L_\alpha) \neq \dim_k(L_{\alpha+\beta})$. Por outro lado, escolhendo $\delta_3 \neq 0$, também temos que $\gamma(t_\beta) = \delta_3 \neq 0$, logo pela proposição 2.4. temos que $L_\gamma \simeq L_{\beta+\gamma}$, mas $2 = \dim_k(L_\gamma) \neq \dim_k(L_{\beta+\gamma}) = 1$, logo o caso 2.3.7.12. e 2.3.7.19. não são possivel. No caso 2.3.7.28. escolhemos $\delta_1 \neq \delta_3$, temos que $(\alpha + \gamma)(t_\beta) = \delta_1 + \delta_3 \neq 0$, logo pela proposição 2.4 temos que $L_{\alpha+\gamma} \simeq L_{\alpha+\beta+\gamma}$, o qual é absurdo já que $2 = \dim_k(L_{\alpha+\gamma}) \neq \dim_k(L_{\alpha+\beta+\gamma}) = 1$, portanto este caso não se dá.

A partir do corolário 2.2 e das seções 2.3 e 2.4, se obtêm o resultado seguinte.

Teorema 2.9. *Não existem 2-álgebras de Lie simples de dimensão menor ou igual a 16, de posto toral 3.*

O análise de $L = H \oplus \sum_{\xi \in \Delta} \oplus L_\xi$, com $\Delta = T^* \setminus \{0\}$ e, $\dim_k(L) = 17$ serão abordado no capítulo 4, aí encontraremos um tipo de álgebra da forma $(17 : 3, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ que precisa um estudo diferente ao apresentado nos casos quando a $\dim_k(L) \leq 16$. Para estudar esta 2-algebra de Lie, construiremos técnicas baseadas em extensões de 2-módulos sobre $\mathfrak{sl}_3(k)$ que seram desenvolvidas no capítulo 3.

Capítulo 3

Extensões de $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos

O objetivo principal neste capítulo é encontrar os $(\mathfrak{sl}_3(k), 2)$ -módulos U de dimensão 8 via extensões de 2-módulos e, estabelecer um critério que garanta a existência de um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -morfismo $\varphi : \Lambda^2(U) \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3$.

3.1 Os $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos irredutíveis de $\dim_k \leq 8$.

Para lograr este objetivo, començamos classificando os $(\mathfrak{sl}_3(k), 2)$ -módulos irredutíveis de dimensão menor ou igual a 8.

Pelo exemplo 1.3, temos que $(\mathfrak{sl}_3(k), 2)$ é uma 2-álgebra de Lie simples de dimensão 8, com base $\Psi := \{h_1, h_2, e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_{21}, e_{31}, e_{32}\}$ onde $h_1 := e_{11} + e_{22}$, $h_2 := e_{22} + e_{33}$. Além disso $H := \text{span}\{h_1, h_2\}$ é uma subálgebra toral de $\mathfrak{sl}_3(k)$, logo a decomposição em espaços de raízes de $\mathfrak{sl}_3(k)$ respeito a H é :

$$\mathfrak{sl}_3(k) = H \oplus L_{(1,0)} \oplus L_{(0,1)} \oplus L_{(1,1)}$$

onde $L_{(1,0)} = \langle e_{23}, e_{32} \rangle$, $L_{(0,1)} = \langle e_{12}, e_{21} \rangle$, $L_{(1,1)} = \langle e_{13}, e_{31} \rangle$, com sistema de raízes $H^* = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$ e, cada uma dessas raízes tem multiplicidade 2.

Seja $B := \{V : V \text{ é um } (\mathfrak{sl}_3(k), 2)\text{-módulo irredutível}\}$. Então por um resultado de N. Jacobson (Ver [SF] capítulo 5, teorema 2.4, pág. 207.) $\dim_k(V) < \infty$ para todo $V \in B$ e, $\dim_k(V) \leq 2^4 = 16$.

Nós estamos interessados em achar os $V \in B$ de dimensão menor ou igual a 8, associados aos pesos $(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$.

3.1.1 2-representação irredutível de peso $(0,0)$

Seja $\rho : \mathfrak{sl}_3(k) \rightarrow \mathfrak{g}(1, k)$ uma representação 1-dimensional de $\mathfrak{sl}_3(k)$. Então $\rho([\mathfrak{sl}_3(k), \mathfrak{sl}_3(k)]) = 0$, como $[\mathfrak{sl}_3(k), \mathfrak{sl}_3(k)] = \mathfrak{sl}_3(k)$, então $\rho(\mathfrak{sl}_3(k)) = 0$. Assim, $\rho(A) = 0$ para todo $A \in \mathfrak{sl}_3(k)$, isto é, a única representação 1-dimensional de $\mathfrak{sl}_3(k)$ é a representação trivial. Além disso, esta é uma 2-representação de $\mathfrak{sl}_3(k)$ irredutível de peso $(0,0)$, e é denotada por V_0 , isto é, $V_0 := \langle a \rangle, a \neq 0$ onde $a \cdot \mathfrak{sl}_3(k) = 0$.

3.1.2 2-representação irredutível de peso $(1, 0)$

Sejam $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica k^3 e $\rho : \mathfrak{sl}_3(k) \rightarrow \mathfrak{gl}(k^3)$ dada por $\rho(A)(x) = x.A := xA$ a representação canônica, como $\rho(A^2)(x) = x.A^2 = xA^2 = (xA)A = \rho(A)(xA) = \rho(A)(x.A) = \rho(A)(\rho(A)(x)) = \rho(A)^2(x)$, para todo $x \in k^3$, então $\rho(A^2) = \rho(A)^2$. Portanto, ρ é uma 2-representação de $\mathfrak{sl}_3(k)$ em k^3 . Esta 2-representação é irredutível, já que $e_1.e_{1i} = e_i$ para $i = 1, 2, 3$ e assim $k^3 = e_1.\mathfrak{sl}_3(k)$ é gerado por e_1 como $\mathfrak{sl}_3(k)$ -módulo. Além disso:

$$\begin{array}{lll} e_1.h_1 = e_1h_1 = e_1 & e_2.h_1 = e_2h_1 = e_2 & e_3.h_1 = e_3h_1 = 0 \\ e_1.h_2 = e_1h_2 = 0 & e_2.h_2 = e_2h_2 = e_2 & e_3.h_2 = e_3h_2 = e_3 \end{array}$$

então os vetores e_1, e_2 e e_3 tem peso $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$ respectivamente.

Assim, podemos considerar que ρ é uma 2-representação isomorfa a $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos irredutível, $V_3 := \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ de dimensão 3 com base $\{v_1, v_2, v_3\}$, onde v_1, v_2 e v_3 são vetores de peso $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$ respectivamente e, a ação de $\mathfrak{sl}_3(k)$ sobre V_3 é dada pela tabela seguinte:

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
v_1	v_1	0	v_2	v_3	0	0	0	0
v_2	v_2	v_2	0	0	v_3	v_1	0	0
v_3	0	v_3	0	0	0	0	v_1	v_2

Tabela 3.2: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo irredutível V_3

3.1.3 2-representação irredutível de peso $(0, 1)$

Consideremos a representação dual de ρ , $\rho^* : \mathfrak{sl}_3(k) \rightarrow \mathfrak{gl}(k^3)$ dada por:

$\rho^*(A)(x) = x.A := xA^t$. Como $\rho^*(A^2)(x) = x(A^2)^t = x(A^tA^t) = (xA^t)A^t = \rho^*(A^t)(xA^t) = \rho^*(A)(\rho^*(A)(x)) = (\rho^*(A))^2(x)$, para todo $x \in \mathfrak{sl}_3(k)$, isto é, $\rho^*(A^2) = (\rho^*(A))^2$. Portanto ρ^* é uma 2-representação de $\mathfrak{sl}_3(k)$ em k^3 . Temos que $h_i^t = h_i$ para $i = 1, 2$. Portanto, como no caso anterior temos que os pesos de e_1, e_2 e e_3 tem peso $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$ respectivamente. ρ^* é uma representação irredutível, com efeito: $e_3.e_{i3} = e_i$, para $i = 1, 2, 3$ logo $k^3 = e_3.\mathfrak{sl}_3(k)$. Assim essa 2-representação irredutível, ρ^* , é isomorfa a $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo irredutível $V_3^* := \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ de dimensão 3 onde $\{w_1, w_2, w_3\}$ é uma base com w_1, w_2 e w_3 de pesos $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$ respectivamente, e a ação de $\mathfrak{sl}_3(k)$ sobre V_3^* é dada na tabela seguinte:

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
w_1	w_1	0	0	0	0	w_2	w_3	0
w_2	w_2	w_2	w_1	0	0	0	0	w_3
w_3	0	w_3	0	w_1	w_2	0	0	0

Tabela 3.3: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo irredutível V_3^*

Exemplo 3.1. Temos o seguinte $\mathfrak{sl}_3(k)$ -isomorfismo de 2-módulos

$$\mathfrak{gl}_3(k) \simeq V_3 \otimes_k V_3^*$$

logo pelo exemplo 1.4 temos que

$$V_3^* \otimes_k V_3 \simeq V_3 \otimes_k V_3^* \simeq \mathfrak{sl}_3(k) \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_3(k)) \simeq \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3.$$

onde:

$$\begin{array}{llll}
V_3 \otimes_k V_3^* & \xrightarrow[\simeq]{g} & \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3 & \\
v_1 \otimes w_1 & \mapsto & h_2 + t_3 & \\
v_2 \otimes w_2 & \mapsto & h_1 + h_2 + t_3 & \\
v_3 \otimes w_3 & \mapsto & h_1 + t_3 & \\
v_i \otimes w_j & \mapsto & e_{ji} & \\
V_3^* \otimes_k V_3 & \xrightarrow[\simeq]{f} & \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3 & \\
v_1 \otimes w_1 & \mapsto & h_2 + t_3 & \\
v_2 \otimes w_2 & \mapsto & h_1 + h_2 + t_3 & \\
v_3 \otimes w_3 & \mapsto & h_1 + t_3 & \\
v_i \otimes w_j & \mapsto & e_{ij} &
\end{array}$$

3.1.4 2-representação irredutível de peso $(1, 1)$

Sejam $\rho : \mathfrak{sl}_3(k) \rightarrow \mathfrak{gl}(V_3)$ e $\rho^* : \mathfrak{sl}_3(k) \rightarrow \mathfrak{gl}(V_3^*)$ as 2-representações encontradas nas seções 3.1.2 e 3.1.3 respetivamente. Logo existe uma única 2-representação

$\rho \otimes \rho^* : \mathfrak{sl}_3(k) \rightarrow \mathfrak{gl}(V_3 \otimes_k V_3^*)$ dada por $(\rho \otimes \rho^*)(A) = \rho(A) \otimes I_{V_3^*} + I_{V_3} \otimes \rho^*(A)$.

Pelas tabelas 3.2, 3.3 temos:

$$(\rho \otimes \rho^*)(h_1)(v_1 \otimes w_3) = (v_1 \otimes w_3).h_1 = (v_1.h_1) \otimes w_3 + v_1 \otimes (w_3.h_1) = v_1 \otimes w_3 + 0 = v_1 \otimes w_3.$$

$$(v_1 \otimes w_3).h_2 = (v_1.h_2) \otimes w_3 + v_1 \otimes (w_3.h_2) = v_1 \otimes w_3$$

Assim, o vetor $v_1 \otimes w_3$ tem peso $(1, 1)$ e é anulado pelos operadores $(\rho \otimes \rho^*)(e_{21})$, $(\rho \otimes \rho^*)(e_{31})$ e, $(\rho \otimes \rho^*)(e_{32})$.

Seja W o submódulo gerado pelas imagens sucessivas de $v_1 \otimes w_3$ baixo os operadores $(\rho \otimes \rho^*)(e_{12})$, $(\rho \otimes \rho^*)(e_{13})$ e, $(\rho \otimes \rho^*)(e_{23})$. Como $e_{13} = [e_{12}, e_{23}]$ é suficiente só aplicar $(\rho \otimes \rho^*)(e_{12})$ e $(\rho \otimes \rho^*)(e_{23})$.

Agora procuramos uma base para W :

$$(\rho \otimes \rho^*)(e_{12})(v_1 \otimes w_3) = (v_1 \otimes w_3).e_{12} = (v_1.e_{12}) \otimes w_3 + v_1 \otimes (w_3.e_{12}) = \boxed{v_2 \otimes w_3}.$$

$$(\rho \otimes \rho^*)(e_{23})(v_1 \otimes w_3) = (v_1 \otimes w_3).e_{23} = (v_1.e_{23}) \otimes w_3 + v_1 \otimes (w_3.e_{23}) = \boxed{v_1 \otimes w_2}.$$

$$(\rho \otimes \rho^*)^2(e_{12})(v_1 \otimes w_3) = (v_2 \otimes w_3).e_{12} = 0; (\rho \otimes \rho^*)^2(e_{23})(v_1 \otimes w_3) = (v_1 \otimes w_2).e_{23} = 0$$

$$(\rho \otimes \rho^*)(e_{23})(v_2 \otimes w_3) = \boxed{v_3 \otimes w_3 + v_2 \otimes w_2}; (\rho \otimes \rho^*)(e_{12})(v_1 \otimes w_2) = \boxed{v_2 \otimes w_2 + v_1 \otimes w_1}$$

$(\rho \otimes \rho^*)^2(e_{12})(v_1 \otimes w_2) = (v_2 \otimes w_2 + v_1 \otimes w_1).e_{12} = 0$; $(\rho \otimes \rho^*)^2(e_{23})(v_3 \otimes w_3 + v_2 \otimes w_2) =$
 $= (v_3 \otimes w_3 + v_2 \otimes w_2).e_{23} = 0$
 $(\rho \otimes \rho^*)(e_{12})(v_3 \otimes w_3 + v_2 \otimes w_2) = \boxed{v_2 \otimes w_1}$, $(\rho \otimes \rho^*)(e_{23})(v_2 \otimes w_2 + v_1 \otimes w_1) = \boxed{v_3 \otimes w_2}$;
 $(\rho \otimes \rho^*)^2(e_{12})(v_3 \otimes w_3 + v_2 \otimes w_2) = (v_2 \otimes w_1).e_{12} = 0$;
 $(\rho \otimes \rho^*)^2(e_{23})(v_2 \otimes w_2 + v_1 \otimes w_1) = (v_3 \otimes w_2).e_{23} = 0$.
 $(\rho \otimes \rho^*)(e_{23})(v_2 \otimes w_1) = \boxed{v_3 \otimes w_1}$; $(\rho \otimes \rho^*)(e_{12})(v_3 \otimes w_2) = v_3 \otimes w_1$.
 $(\rho \otimes \rho^*)^2(e_{23})(v_2 \otimes w_1) = (v_3 \otimes w_1).e_{23} = 0$; $(\rho \otimes \rho^*)^2(e_{12})(v_3 \otimes w_2) = (v_3 \otimes w_1).e_{12} = 0$.
 Portanto, W é um submódulo irredutível do $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $V_3 \otimes_k V_3^*$, gerado por $v_1 \otimes v_3$, de dimensão 8 com base

$$\{v_1 \otimes w_3, v_2 \otimes w_3, v_1 \otimes w_2, v_3 \otimes w_3 + v_2 \otimes w_2, v_2 \otimes w_2 + v_1 \otimes w_1, v_2 \otimes w_1, v_3 \otimes w_2, v_3 \otimes w_1\}.$$

Além disso, W é isomorfo a $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo adjunto V^{ad} (ver tabela 1.1.) via o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -isomorfismo:

$$\begin{aligned} v_2 \otimes w_2 + v_3 \otimes w_3 &\mapsto h_2 \\ v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 &\mapsto h_1 \\ v_i \otimes w_j &\mapsto e_{ji} \quad (\forall i, j \in I_3.) \end{aligned}$$

Em resumo, temos então quatro $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-representações irredutíveis de dimensão menor ou igual que 8, essas são:

- Associada ao peso $(0, 0)$: temos V_0 de dimensão 1.
- Associado ao peso $(1, 0)$: temos V_3 de dimensão 3.
- Associada ao peso $(0, 1)$: temos V_3^* de dimensão 3.
- Associada ao peso $(1, 1)$: temos V^{ad} o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -módulo adjunto de dimensão 8.

3.2 $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de $\dim_k < 8$.

Apartir dos $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos irredutíveis V_0 , V_3 , V_3^* achados na seção 3.1., construiremos extensões de $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de dimensão menor que 8, em alguns casos se mostra por tabelas a ação de $\mathfrak{sl}_3(k)$ sobre uma base de cada módulo.

3.2.1 $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de $\dim_k = 2$.

Seja $E := V_0 \ltimes V_0$ que é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de dimensão 2, então existe uma sequência exata curta

$$0 \rightarrow V_0 \xrightarrow{\iota} V_0 \ltimes V_0 \xrightarrow{p} V_0 \rightarrow 0$$

tal que $V_0 := \langle v \rangle$ é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-submódulos de E e $E/V_0 \simeq V_0$. Vejamos como é a ação de $\mathfrak{sl}_3(k)$ sobre E . Dado $a \in E/V_0$ existe $w \in E$ tal que $p(w) = a$. Logo, $p(w.h_i) = a.h_i = 0$, $p(w.e_{ij}) = a.e_{ij} = 0$, assim que, $w.h_i, w.e_{ij} \in \text{Ker } p = \text{Im}(\iota) = V_0$, então existe $\lambda_i, \lambda_{ij} \in k$ tal que $w.h_i = \lambda_i v$ e, $w.e_{ij} = \lambda_{ij} v$. Como $w.h_i = w.h_i^2 =$

$(w.h_i).h_i = \lambda_i(v.h_i) = 0$, logo $\lambda_i = 0$, para $i = 1, 2$. Por outro lado, como $w.e_{ij}$ tem peso diferente de $(0, 0)$ (ver observação 1.16) e v tem peso $(0, 0)$ então $\lambda_{ij} = 0$, logo $w.\mathfrak{sl}_3(k) = 0$. Por tanto, $E := V_0 \ltimes V_0 = \langle v, w \rangle$ é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de dimensão 2, onde $E.\mathfrak{sl}_3(k) = 0$ e $V_0 \ltimes V_0 \simeq V_0 \oplus V_0$.

3.2.2 $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de $\dim_k = 4$.

Via extensões de módulos, podemos achar os $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de dimensão 4, usando os $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos irredutíveis de dimensão 1 e 3. Assim, tem-se as extensões:

1. $V_3 \ltimes V_0$
2. $V_0 \ltimes V_3$
3. $V_3^* \ltimes V_0$
4. $V_0 \ltimes V_3^*$

Agora vamos a construir e classificar estes $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de dimensão 4:

1. Seja $E := V_3 \ltimes V_0$, isto significa que existe uma sequência exata curta

$$0 \rightarrow V_0 \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{p} V_3 \rightarrow 0$$

onde $V_0 := \langle a \rangle$ é um submódulo de E e $V_3 \simeq E/V_0$.

Como $V_3 := \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ existem $a_1, a_2, a_3 \in E$ tal que $p(a_i) = v_i$.

Assim, se $p(a_1) = v_1$, então $p(a_1.h_1) = p(a_1).h_1 = v_1.h_1 = v_1 = p(a_1)$, logo $(a_1.h_1 - a_1) \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_0$, então existe $\delta \in k$ tal que $a_1.h_1 = a_1 + \delta a$. Também $p(a_1.h_2) = p(a_1).h_2 = v_1.h_2 = 0$, logo $a_1.h_2 \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_0$, então $a_1.h_2 = \kappa a$, para algum $\kappa \in k$.

Pela estrutura de $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de V_3 temos que $a_1.h_2 = a_1.h_2^2 = (a_1.h_2).h_2 = (\kappa a).h_2 = \kappa(a.h_2) = 0$, portanto $\kappa = 0$.

Logo temos que

$$a_1.h_1 = a_1 + \delta a, \quad a_1.h_2 = 0.$$

Da mesma forma obtemos que:

$$a_2.h_1 = a_2 + \lambda a, \quad a_2.h_2 = a_2 + \mu a, \quad a_3.h_1 = 0, \quad a_3.h_2 = a_3 + \zeta a, \quad \text{para } \lambda, \mu, \zeta \in k$$

Do sistema de equações

$$\begin{cases} a_1.h_1 &= a_1 + \delta a \\ a_1.h_2 &= 0 \end{cases}$$

temos que $a_1.h_1 = (a_1 + \delta_1 a).h_1$ e $a_1.h_2 = (a_1 + \delta_1 a).h_2 = 0$. Mas,

$$(a_1 + \delta_1 a).h_1 = a_1.h_1 = a_1 + \delta a$$

$$(a_1 + \delta_1 a).h_2 = a_1.h_2 = 0$$

então $(a_1 + \delta a)$ tem peso $(1, 0)$. Assim que $a_1.h_1$ tem peso $(1, 0)$, como h_1 é de peso $(0, 0)$ então a_1 é de peso $(1, 0)$. Argumentando da mesma forma, encontramos que a_2 tem peso $(1, 1)$ e a_3 tem peso $(0, 1)$. Por outro lado, com a ajuda da tabela 3.2 temos:

$p(a_1.e_{12}) = p(a_1).e_{12} = v_1.e_{12} = v_2 = p(a_2)$, logo $(a_1.e_{12} - a_2) \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_0$, então existe $\delta_1 \in k$ tal que **a.** $a_1.e_{12} = a_2 + \delta_1 a$

$p(a_1.e_{13}) = p(a_1).e_{13} = v_1.e_{13} = v_3 = p(a_3)$, logo $(a_1.e_{13} - a_3) \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_0$, então existe $\delta_2 \in k$ tal que **b.** $a_1.e_{13} = a_3 + \delta_2 a$

$p(a_1.e_{23}) = p(a_1).e_{23} = v_1.e_{23} = 0$, logo $a_1.e_{23} \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_0$ então existe $\delta_3 \in k$ tal que **c.** $a_1.e_{23} = \delta_3 a$

$p(a_1.e_{21}) = p(a_1).e_{21} = v_1.e_{21} = 0$, logo $a_1.e_{21} \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_0$, então existe $\delta_4 \in k$ tal que **d.** $a_1.e_{21} = \delta_4 a$

$p(a_1.e_{31}) = p(a_1).e_{31} = v_1.e_{31} = 0$, logo $a_1.e_{31} \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_0$, então existe $\delta_5 \in k$ tal que **e.** $a_1.e_{31} = \delta_5 a$

$p(a_1.e_{32}) = p(a_1).e_{32} = v_1.e_{32} = 0$, logo $a_1.e_{32} \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_0$ então existe $\delta_6 \in k$ tal que **f.** $a_1.e_{32} = \delta_6 a$

Também temos que: $p(a_2.e_{12}) = p(a_2).e_{12} = v_2.e_{12} = 0$, logo $a_2.e_{12} \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_0$, então existe $\delta_7 \in k$ tal que **g.** $a_2.e_{12} = \delta_7 a$.

$p(a_2.e_{13}) = p(a_2).e_{13} = v_2.e_{13} = 0$, logo $a_2.e_{13} \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_0$, então existe $\delta_8 \in k$ tal que **h.** $a_2.e_{13} = \delta_8 a$

$p(a_2.e_{23}) = p(a_2).e_{23} = v_2.e_{23} = v_3 = p(a_3)$, logo $(a_2.e_{23} - a_3) \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_0$, então existe $\delta_9 \in k$ tal que **i.** $a_2.e_{23} = a_3 + \delta_9 a$.

$p(a_2.e_{21}) = p(a_2).e_{21} = v_2.e_{21} = v_1 = p(a_1)$, logo $(a_2.e_{21} - a_1) \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_0$, então existe $\delta_{10} \in k$ tal que **j.** $a_2.e_{21} = a_1 + \delta_{10} a$.

$p(a_2.e_{31}) = p(a_2).e_{31} = v_2.e_{31} = 0$, logo $a_2.e_{31} \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_0$, então existe $\delta_{11} \in k$ tal que **k.** $a_2.e_{31} = \delta_{11} a$

$p(a_2.e_{32}) = p(a_2).e_{32} = v_2.e_{32} = 0$, logo $a_2.e_{32} \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_0$ então existe $\delta_{12} \in k$ tal que **l.** $a_2.e_{32} = \delta_{12} a$

Finalmente, temos: $p(a_3.e_{12}) = p(a_3).e_{12} = v_3.e_{12} = 0$, logo $a_3.e_{12} \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_0$, então existe $\delta_{13} \in k$ tal que **m.** $a_3.e_{12} = \delta_{13} a$

$p(a_3.e_{13}) = p(a_3).e_{13} = v_3.e_{13} = 0$, logo $a_3.e_{13} \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_0$, então existe $\delta_{14} \in k$ tal que **n.** $a_3.e_{13} = \delta_{14} a$

$p(a_3.e_{23}) = p(a_3).e_{23} = v_3.e_{23} = 0$, logo $a_3.e_{23} \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_0$, então existe $\delta_{15} \in k$ tal que **o.** $a_3.e_{23} = \delta_{15} a$

$p(a_3.e_{21}) = p(a_3).e_{21} = v_3.e_{21} = 0$, logo $a_3.e_{21} \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_0$, então existe $\delta_{16} \in k$ tal que **p.** $a_3.e_{21} = \delta_{16} a$

$p(a_3.e_{31}) = p(a_3).e_{31} = v_3.e_{31} = v_1 = p(a_1)$, logo $(a_3.e_{31} - a_1) \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_0$, então existe $\delta_{17} \in k$ tal que **q.** $a_3.e_{31} = a_1 + \delta_{17} a$.

$p(a_3.e_{32}) = p(a_3).e_{32} = v_3.e_{32} = v_2 = p(a_2)$, logo $(a_3.e_{32} - a_2) \in \text{Ker}(p) =$

$Im(\iota) = V_0$, então existe $\delta_{18} \in k$ tal que $\boxed{\mathbf{r.} \quad a_3.e_{32} = a_2 + \delta_{18}a}$

Assim temos um sistema de 18 equações com 18 incógnitas, agora pela estrutura de $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de V_0 e V_3 resolvemos este sistema para os δ_i .

De a. temos: $0 = a_1.0 = a_1.e_{12}^2 = ((a_1.e_{12}).e_{12}) = a_2.e_{12} + (\delta_1 a)e_{12} = a_2.e_{12}$ logo de g. tem-se $\delta_7 = 0$. Usando este mesmo raciocínio em b., i., j., q., e, r., encontramos que: $\delta_4 = \delta_5 = \delta_{12} = \delta_{14} = \delta_{15} = 0$. Por outro lado, de j., e a., temos $a_2 = 0 + a_2 = a_2.e_{12} + h_1.a_2 = (a_2.e_{12}).e_{21} + a_2.[e_{21}, e_{12}] = (a_2.e_{21}).e_{12} = (a_1 + \delta_{10}a).e_{12} = a_1.e_{12} = a_2 + \delta_1 a$, então $\delta_1 a = 0$, isto é $\delta_1 = 0$. Também de r., e i., temos: $a_3 = 0 + a_3 = a_3.e_{23} + h_2.a_3 = (a_3.e_{23}).e_{32} + a_3.[e_{32}, e_{23}] = (a_3.e_{32}).e_{23} = (a_2 + \delta_{18}a).e_{23} = a_2.e_{23} = a_3 + \delta_9 a$, então $\delta_9 a = 0$, isto é $\delta_9 = 0$. De b., e q., $a_1 = 0 + a_1 = a_1.e_{31} + (h_1 + h_2).a_1 = (a_1.e_{31}).e_{13} + [e_{31}, e_{13}].a_1 = (a_1.e_{13}).e_{31} = (a_3 + \delta_2 a).e_{31} = a_3.e_{31} = a_1 + \delta_{17}a$, então $\delta_{17}a = 0$, isto é $\delta_{17} = 0$. Da mesma forma obtemos que: $\delta_2 = \delta_{10} = \delta_{18} = 0$.

Também de i., e j., temos que $(a_2.e_{23}).e_{21} = (a_3 + \delta_9 a).e_{21} = a_3.e_{21}$, mas $(a_2.e_{23}).e_{21} = (a_2.e_{21}).e_{23} + a_2.[e_{21}, e_{23}] = (a_1 + \delta_{10}a).e_{23} + 0.a_2 = a_1.e_{23}$, logo $a_1.e_{23} = a_3.e_{21}$ e assim $\delta_{16} = \delta_3$. Da mesma forma obtemos que $\delta_{13} = \delta_8$ e $\delta_{11} = \delta_6$.

Sejam $\delta_6 = \kappa = \delta_{11}$, $\delta_3 = \beta = \delta_{16}$ e $\delta_{13} = \gamma = \delta_8$ com $\beta, \gamma, \kappa \in k$, logo a ação de $\mathfrak{sl}_3(k)$ sobre E , é dada na tabela seguinte:

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
a	0	0	0	0	0	0	0	0
a_1	a_1	0	a_2	a_3	βa	0	0	κa
a_2	a_2	a_2	0	γa	a_3	a_1	κa	0
a_3	0	a_3	γa	0	0	βa	a_1	a_2

Tabela 3.4: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $V_3 \ltimes V_0$

Assim, $E := V_3 \ltimes V_0 = \langle a, a_1, a_2, a_3 \rangle$, é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de dimensão 4 que depende dos parametros β, γ e κ , isto é, $V_3 \ltimes V_0 = E(\beta, \gamma, \kappa)$ com $\beta, \gamma, \kappa \in k$. Agora procuremos quando $Ext_{\mathfrak{sl}_3(k)}^1(V_3, V_0) = 0$ ou $Ext_{\mathfrak{sl}_3(k)}^1(V_3, V_0) \neq 0$.

- Se $\beta = \gamma = \kappa = 0$ temos que existe $N := \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ submódulo de E tal que $N \simeq V_3$ e $V_0 \oplus N = E$, logo E cinde. Assim, $V_3 \ltimes V_0 \simeq V_0 \oplus V_3$.
- Se $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ ou $\kappa \neq 0$, sem perda de generalidade podemos supor que $\gamma = 1$, logo temos que $V_3 \ltimes V_0 := E(\beta, \kappa)$ e E não cinde. Além disso, $E(\beta, \kappa) \simeq E(\beta', \kappa') \iff \beta = \beta' \text{ e } \kappa = \kappa'$.

Pelo mesmo raciocínio como no caso anterior, podemos descrever os $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos $V_0 \ltimes V_3$, $V_3^* \ltimes V_0$ e $V_0 \ltimes V_3^*$ da forma seguinte:

2. $E := V_0 \ltimes V_3$. A ação de $\mathfrak{sl}_3(k)$ sobre E é dada na tabela seguinte:

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
v	0	0	ωv_3	θv_2	θv_1	σv_3	σv_2	ωv_1
v_1	v_1	0	v_2	v_3	0	0	0	0
v_2	v_2	v_2	0	0	v_3	v_1	0	0
v_3	0	v_3	0	0	0	0	v_1	v_2

Tabela 3.5: $O \mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos $V_0 \ltimes V_3$

com $\omega, \theta, \sigma \in k$.

Assim que, $E := V_0 \ltimes V_3 = \langle v, v_1, v_2, v_3 \rangle$, é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de dimensão 4 que depende dos parametros ω, σ e θ , isto é, $V_0 \ltimes V_3 = E(\omega, \sigma, \theta)$ com $\omega, \sigma, \theta \in k$.

- $Ext_{\mathfrak{sl}_3(k)}^1(V_0, V_3) = 0$. Se $\omega = \sigma = \theta = 0$ temos que E cinde, isto é, $E := V_0 \ltimes V_3 \simeq V_3 \oplus V_0$.
- $Ext_{\mathfrak{sl}_3(k)}^1(V_0, V_3) \neq 0$. Se $\omega \neq 0$, $\sigma \neq 0$ ou $\theta \neq 0$, então sem perda de generalidade podemos supor que $\omega = 1$, logo temos que $V_0 \ltimes V_3 := E(\sigma, \theta)$ Assim $V_0 \ltimes V_3$ não cinde, e

$$E(\sigma, \theta) \simeq E(\sigma', \theta') \iff \sigma = \sigma' \text{ e } \theta = \theta'.$$

3. Se $E := V_3^* \ltimes V_0$. Encontramos que a ação de $\mathfrak{sl}_3(k)$ sobre E é dada na tabela seguinte: com $\pi, \lambda, \xi \in k$.

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
a	0	0	0	0	0	0	0	0
u_1	u_1	0	0	0	πa	u_2	u_3	λa
u_2	u_2	u_2	u_1	πa	0	0	ξa	u_3
u_3	0	u_3	λa	u_1	u_2	ξa	0	0

Tabela 3.6: $O \mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $V_3^* \ltimes V_0$

Assim que, $E := V_3^* \ltimes V_0 = \langle a, u_1, u_2, u_3 \rangle$, é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de dimensão 4 que depende dos parametros π, λ e ξ , isto é,

$$V_3^* \ltimes V_0 = E(\pi, \lambda, \xi)$$

com $\pi, \lambda, \xi \in k$.

- $Ext_{\mathfrak{sl}_3(k)}^1(V_3^*, V_0) = 0$. Se $\pi = \lambda = \xi = 0$ então E cinde, isto é, $E := V_3^* \ltimes V_0 \simeq V_0 \oplus V_3^*$.

- $Ext_{\mathfrak{sl}_3(k)}^1(V_3^*, V_0) \neq 0$. Se $\pi \neq 0$, $\lambda \neq 0$ ou $\xi \neq 0$ podemos supor que $\pi = 1$, logo temos que $V_3^* \ltimes V_0 := E(\lambda, \xi)$, E não cinde e,

$$E(\lambda, \xi) \simeq E(\lambda', \xi') \iff \lambda = \lambda' \text{ e } \xi = \xi'.$$

4. Se $E := V_0 \ltimes V_3^*$, a ação de $\mathfrak{sl}_3(k)$ sobre E é dada na tabela seguinte: com $\delta, \alpha, \zeta \in k$

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
w	0	0	δw_3	δw_2	αw_1	αw_3	ζw_2	ζw_1
w_1	w_1	0	0	0	0	w_2	w_3	0
w_2	w_2	w_2	w_1	0	0	0	0	w_3
w_3	0	w_3	0	w_1	w_2	0	0	0

Tabela 3.7: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos $V_0 \ltimes V_3^*$

Assim que, $E := V_0 \ltimes V_3^* = \langle w, w_1, w_2, w_3 \rangle$, é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de dimensão 4 que depende dos parametros δ, α e ζ , isto é, $V_0 \ltimes V_3^* = E(\delta, \alpha, \zeta)$ com $\delta, \alpha, \zeta \in k$.

- $Ext_{\mathfrak{sl}_3(k)}^1(V_0, V_3^*) = 0$. $\alpha = \delta = \zeta = 0 \iff E \simeq V_3^* \oplus V_0$.
- $Ext_{\mathfrak{sl}_3(k)}^1(V_0, V_3^*) = 0$. Se $\delta \neq 0$, $\alpha \neq 0$ ou $\zeta \neq 0$, podemos supor que $\delta = 1$, logo temos que $V_0 \ltimes V_3^* := E(\alpha, \zeta)$, E não cinde e,

$$E(\alpha, \zeta) \simeq E(\alpha', \zeta') \iff \alpha = \alpha' \text{ e } \zeta = \zeta'.$$

3.2.3 $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de $\dim_k = 5$.

Usando as extensões de 2-módulos podemos construir os $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de dimensão 5, por meio dos $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de dimensão 3 e 2 ou por meio dos $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de dimensão 4 e 1. Logo temos os seguintes:

1. $V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$	7. $(V_0 \ltimes V_3) \ltimes V_0$
2. $(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3$	8. $V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3)$
3. $V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$	9. $(V_3^* \ltimes V_0) \ltimes V_0$
4. $(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3^*$	10. $V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)$
5. $(V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_0$	11. $(V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes V_0$
6. $V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_0)$	12. $V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)$

Agora, fazendo o mesmo raciocínio como na seção 3.2.2.1 podemos apresentar tabelas de ação de $(\mathfrak{sl}_3(k), 2)$ em alguns daqueles 2-módulos que depois precisamos.

1. Seja $E := V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0) = \langle x, y, x_1, x_2, x_3 \rangle$, a tabela de ação de $(\mathfrak{sl}_3(k), 2)$ sobre E é :

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
x	0	0	0	0	0	0	0	0
y	0	0	0	0	0	0	0	0
x_1	x_1	0	x_2	x_3	$\tau_1 x + \tau_2 y$	0	0	$\tau_3 x + \tau_4 y$
x_2	x_2	x_2	0	$\tau_5 x + \tau_6 y$	x_3	x_1	$\tau_7 x + \tau_8 y$	0
x_3	0	x_3	$\tau_9 x + \tau_{10} y$	0	0	$\tau_{11} x + \tau_{12} y$	x_1	x_2

Tabela 3.8: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$

com $\tau_i \in k$, $i = 1, \dots, 12$.

$$E \simeq (V_0 \ltimes V_0) \oplus V_3 \iff \tau_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, 12.$$

3. Seja $E := V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0) = \langle v, w, w_1, w_2, w_3 \rangle$, a tabela de ação de $(\mathfrak{sl}_3(k), 2)$ sobre E é dada na tabela a seguir:

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
v	0	0	0	0	0	0	0	0
w	0	0	0	0	0	0	0	0
w_1	w_1	0	0	0	$\chi_1 v + \chi_2 w$	w_2	w_3	$\chi_3 v + \chi_4 w$
w_2	w_2	w_2	w_1	$\chi_1 v + \chi_2 w$	0	0	$\chi_5 v + \chi_6 w$	w_3
w_3	0	w_3	$\chi_3 v + \chi_4 w$	w_1	w_2	$\chi_5 v + \chi_6 w$	0	0

Tabela 3.9: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos $E := V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$

com $\chi_i \in k$.

Daí concluímos que:

$$E \simeq (V_0 \ltimes V_0) \oplus V_3^* \iff \chi_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, 6.$$

3.2.4 $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de $\dim_k = 6$.

Por meio das extensões de módulos e usando os $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de dimensão 3 ou, $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de dimensão 2 e 4, ou $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de dimensão 1 e 5, obtemos os seguintes $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de dimensão 6.

1. $V_3^* \ltimes V_3$
2. $V_3 \ltimes V_3$
3. $V_3 \ltimes V_3^*$
4. $V_3^* \ltimes V_3^*$
5. $(V_3 \ltimes V_0) \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
6. $(V_0 \ltimes V_0) \ltimes (V_3 \ltimes V_0)$

7. $(V_0 \ltimes V_3) \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$	22. $[V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)] \ltimes V_0$
8. $(V_0 \ltimes V_0) \ltimes (V_0 \ltimes V_3)$	23. $[(V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes V_0] \ltimes V_0$
9. $(V_3^* \ltimes V_0) \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$	24. $[V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)] \ltimes V_0$
10. $(V_0 \ltimes V_0) \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)$	25. $V_0 \ltimes [V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)]$
11. $(V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$	26. $V_0 \ltimes [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3]$
12. $(V_0 \ltimes V_0) \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)$	27. $V_0 \ltimes [V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)]$
13. $[V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes V_0$	28. $V_0 \ltimes [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3^*]$
14. $[(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3] \ltimes V_0$	29. $V_0 \ltimes [(V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_0]$
15. $[V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes V_0$	30. $V_0 \ltimes [V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_0)]$
16. $[(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3^*] \ltimes V_0$	31. $V_0 \ltimes [(V_0 \ltimes V_3) \ltimes V_0]$
17. $[(V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_0] \ltimes V_0$	32. $V_0 \ltimes [V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3)]$
18. $[V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_0)] \ltimes V_0$	33. $V_0 \ltimes [(V_3^* \ltimes V_0) \ltimes V_0]$
19. $[(V_0 \ltimes V_3) \ltimes V_0] \ltimes V_0$	34. $V_0 \ltimes [V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)]$
20. $[V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3)] \ltimes V_0$	35. $V_0 \ltimes [(V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes V_0]$
21. $[(V_3^* \ltimes V_0) \ltimes V_0] \ltimes V_0$	36. $V_0 \ltimes [V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)]$

Agora descreveremos as extensões dos $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos 1 e 3 da lista anterior.

1. Seja $E := V_3^* \ltimes V_3 := \langle v_1, v_2, v_3, u_1, u_2, u_3 \rangle$ um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo de dimensão 6; lembre que a notação $V_3^* \ltimes V_3$ indica que $V_3 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-submódulo de E e $E/V_3 \simeq V_3^*$, portanto temos a sequência exata curta:

$$0 \rightarrow V_3 \xrightarrow{\iota} V_3^* \ltimes V_3 \xrightarrow{p} V_3^* \rightarrow 0.$$

Vejamos como é a ação de $\mathfrak{sl}_3(k)$ sobre E . Como $V_3^* := \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ existem $u_1, u_2, u_3 \in E$ tal que $p(u_i) = w_i$. Logo temos que:

$p(u_1.e_{12}) = p(u_1).e_{12} = w_1.e_{12} = 0$, então $u_1.e_{12} \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_3$, como

$u_1.e_{12}$ é de peso $(1, 1)$, então existe $\delta_1 \in k$ tal que $\boxed{u_1.e_{12} = \delta_1 v_2}$.

$p(u_1.e_{13}) = p(u_1).e_{13} = w_1.e_{13} = 0$, então $u_1.e_{13} \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_3$, como

$u_1.e_{13}$ é de peso $(0, 1)$, então existe $\delta_2 \in k$ tal que $\boxed{u_1.e_{13} = \delta_2 v_3}$.

$p(u_1.e_{23}) = p(u_1).e_{23} = w_1.e_{23} = 0$, então $u_1.e_{23} \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_3$, como

$u_1.e_{23}$ é de peso $(0, 0)$, então $\boxed{u_1.e_{23} = 0}$.

$p(u_1.e_{21}) = p(u_1).e_{21} = w_1.e_{21} = w_2 = \rho(u_2)$, então $(u_1.e_{21} - u_2) \in \text{Ker}(p) =$

$\text{Im}(\iota) = V_3$, como $u_1.e_{21}$ é de peso $(1, 1)$, então existe $\delta_3 \in k$ tal que $\boxed{u_1.e_{21} = u_2 + \delta_3 v_2}$.

$p(u_1.e_{31}) = p(u_1).e_{31} = w_1.e_{31} = w_3 = \rho(u_3)$, então $(u_1.e_{31} - u_3) \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_3$, como $u_1.e_{31}$ é de peso $(0, 1)$, então existe $\delta_4 \in k$ tal que $\boxed{u_1.e_{31} = u_3 + \delta_4 v_3}$.
 $p(u_1.e_{32}) = p(u_1).e_{32} = w_1.e_{32} = 0$, então $u_1.e_{32} \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_3$, como $u_1.e_{32}$ é de peso $(0, 0)$, então $\boxed{u_1.e_{32} = 0}$.
 $p(u_2.e_{12}) = p(u_2).e_{12} = w_2.e_{12} = w_1 = \rho(u_1)$, então $(u_2.e_{12} - u_1) \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_3$, como $u_2.e_{12}$ é de peso $(1, 0)$ então existe $\delta_5 \in k$ tal que $\boxed{u_2.e_{12} = u_1 + \delta_5 v_1}$.
 $p(u_2.e_{13}) = p(u_2).e_{13} = w_2.e_{13} = 0$ então $u_2.e_{13} \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_3$, como $u_2.e_{13}$ é de peso $(0, 0)$, então $\boxed{u_2.e_{13} = 0}$.
 $p(u_2.e_{23}) = p(u_2).e_{23} = w_2.e_{23} = 0$, então $u_2.e_{23} \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_3$, como $u_2.e_{23}$ é de peso $(0, 1)$, então existe $\delta_6 \in k$ tal que $\boxed{u_2.e_{23} = \delta_6 v_3}$.
 $p(u_2.e_{21}) = p(u_2).e_{21} = w_2.e_{21} = 0$, então $u_2.e_{21} \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_3$, como $u_2.e_{21}$ é de peso $(1, 0)$, então existe $\delta_7 \in k$ tal que $\boxed{u_2.e_{21} = \delta_7 v_1}$.
 $p(u_2.e_{31}) = p(u_2).e_{31} = w_2.e_{31} = 0$, então $u_2.e_{31} \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_3$, como $u_2.e_{31}$ é de peso $(0, 0)$, então $\boxed{u_2.e_{31} = 0}$.
 $p(u_2.e_{32}) = p(u_2).e_{32} = w_2.e_{32} = w_3 = \rho(u_3)$ então $(u_2.e_{32} - u_3) \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_3$, como $u_2.e_{32}$ é de peso $(0, 1)$, então existe $\delta_8 \in k$ tal que $\boxed{u_2.e_{32} = u_3 + \delta_8 v_3}$.
 $p(u_3.e_{12}) = p(u_3).e_{12} = w_3.e_{12} = 0$, então $u_3.e_{12} \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_3$, como $u_3.e_{12}$ é de peso $(0, 0)$, então $\boxed{u_3.e_{12} = 0}$.
 $p(u_3.e_{13}) = p(u_3).e_{13} = w_3.e_{13} = w_1 = \rho(u_1)$, então $(u_3.e_{13} - u_1) \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_3$, como $u_3.e_{13}$ é de peso $(1, 0)$, então existe $\delta_9 \in k$ tal que $\boxed{u_3.e_{13} = u_1 + \delta_9 v_1}$.
 $p(u_3.e_{23}) = p(u_3).e_{23} = w_3.e_{23} = w_2 = \rho(u_2)$, então $(u_3.e_{23} - u_2) \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_3$, como $u_3.e_{23}$ é de peso $(1, 1)$, então existe $\delta_{10} \in k$ tal que $\boxed{u_3.e_{23} = u_2 + \delta_{10} v_2}$.
 $p(u_3.e_{21}) = p(u_3).e_{21} = w_3.e_{21} = 0$, então $u_3.e_{21} \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_3$, como $u_3.e_{21}$ é de peso $(0, 0)$, então $\boxed{u_3.e_{21} = 0}$.
 $p(u_3.e_{31}) = p(u_3).e_{31} = w_3.e_{31} = 0$, então $u_3.e_{31} \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_3$, como $u_3.e_{31}$ é de peso $(0, 1)$, então existe $\delta_{11} \in k$ tal que $\boxed{u_3.e_{31} = \delta_{11} v_3}$.
 $p(u_3.e_{32}) = p(u_3).e_{32} = w_3.e_{32} = 0$, então $u_3.e_{32} \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(\iota) = V_3$, como $u_3.e_{32}$ é de peso $(1, 1)$, então existe $\delta_{12} \in k$ tal que $\boxed{u_3.e_{32} = \delta_{12} v_2}$.
Agora, pela estrutura de $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de V_3 e V_3^* , podemos calcular os δ_i :
 $(u_1.e_{13}).e_{31} = \delta_2 v_3.e_{31} = \delta_2 v_1$, como $(u_1.e_{31}).e_{13} = (u_1.e_{13}).e_{31} + u_1.(h_1 + h_2) = u_3.e_{13} + u_1 = u_1 + \delta_9 v_1 + u_1 = \delta_9 v_1$, então $\boxed{\delta_2 = \delta_9}$.
 $(u_1.e_{12}).e_{21} = \delta_1 v_2.e_{21} = \delta_1 v_1$, como $(u_1.e_{12}).e_{21} = (u_1.e_{21}).e_{12} + u_1.h_1 = u_2.e_{12} + u_1 = u_1 + \delta_1 v_1 + u_1 = \delta_1 v_1$, então $\boxed{\delta_1 = \delta_5}$.
 $(u_1.e_{12}).e_{23} = \delta_1 v_2.e_{23} = \delta_1 v_3$, como $(u_1.e_{12}).e_{23} = (u_1.e_{23}).e_{12} + u_1.e_{13} = \delta_2 v_3$, então $\boxed{\delta_1 = \delta_2}$.
 $0 = (u_1.e_{21}).e_{21} = u_2.e_{21} + \delta_3 v_2.e_{21} = \delta_7 v_1 + \delta_3 v_1$, então $\boxed{\delta_7 = \delta_3}$.
 $(u_2.e_{23}).e_{31} = \delta_6 v_3.e_{31} = \delta_6 v_1$, como $(u_2.e_{23}).e_{31} = (u_2.e_{31}).e_{23} + u_2.e_{21} = \delta_7 v_1$, então $\boxed{\delta_7 = \delta_6}$.
 $(u_2.e_{23}).e_{32} = \delta_6 v_3.e_{32} = \delta_6 v_2$, como $(u_2.e_{23}).e_{32} = (u_2.e_{32}).e_{23} + u_2.h_2 = u_3.e_{23} + u_2 = u_2 + \delta_{10} v_2 + u_2 = \delta_{10} v_2$, então $\boxed{\delta_{10} = \delta_6}$.
 $(u_1.e_{21}).e_{32} = u_2.e_{32} + \delta_3 v_2.e_{32} = u_3 + \delta_8 v_3$, como $(u_1.e_{21}).e_{32} = (u_1.e_{32}).e_{21} +$

$u_1 e_{31} = u_1 \cdot e_{31} = u_3 + \delta_4 v_3$, então $\boxed{\delta_4 = \delta_8}$.

$(u_3 \cdot e_{31}) \cdot e_{12} = \delta_{11} v_1 \cdot e_{12} = \delta_{11} v_2$, como $(u_3 \cdot e_{31}) \cdot e_{12} = (u_3 \cdot e_{12}) \cdot e_{31} + u_3 \cdot e_{32} = \delta_{12} v_2$, então $\boxed{\delta_{11} = \delta_{12}}$.

$0 = (u_1 \cdot e_{31}) \cdot e_{31} = u_3 \cdot e_{31} + \delta_4 v_3 \cdot e_{31} = \delta_1 v_3 + \delta_4 v_1$, então $\boxed{\delta_4 = \delta_{11}}$.

Agora fazemos $\alpha := \delta_1 = \delta_2 = \delta_5 = \delta_9$, $\beta := \delta_4 = \delta_8 = \delta_{11} = \delta_{12}$, e $\gamma := \delta_3 = \delta_6 = \delta_7 = \delta_{10}$ com $\alpha, \beta, \gamma \in k$.

Assim, la ação de $\mathfrak{sl}_3(k)$ sobre E é dada tabela seguinte.

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
v_1	v_1	0	v_2	v_3	0	0	0	0
v_2	v_2	v_2	0	0	v_3	v_1	0	0
v_3	0	v_3	0	0	0	0	v_1	v_2
u_1	u_1	0	αv_2	αv_3	0	$u_2 + \gamma v_2$	$u_3 + \beta v_3$	0
u_2	u_2	u_2	$u_1 + \alpha v_1$	0	γv_3	γv_1	0	$u_3 + \beta v_3$
u_3	0	u_3	0	$u_1 + \alpha v_1$	$u_2 + \gamma v_2$	0	βv_1	βv_2

Tabela 3.10: $O \mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos $V_3^* \ltimes V_3$

Dessa tabela vemos que:

$E := V_3^* \ltimes V_3$, é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de dimensão 6 que depende dos parametros α, β e γ , isto é, $V_3^* \ltimes V_3 = E(\alpha, \beta, \gamma)$ com $\alpha, \beta, \gamma \in k$. Além disso:

- $Ext_{\mathfrak{sl}_3(k)}^1(V_3^*, V_3) = 0$. Se $\alpha = \beta = \gamma = 0$ temos que $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle \simeq V_3^*$, logo E cinde, isto é, $E := V_3^* \ltimes V_3 \simeq V_3^* \oplus V_3$.
- $Ext_{\mathfrak{sl}_3(k)}^1(V_3^*, V_3) \neq 0$. Se $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ ou $\gamma \neq 0$, sem perda de generalidade podemos supor que $\gamma = 1$, logo temos que $V_3^* \ltimes V_3 := E(\alpha, \beta)$ não cinde e $E(\alpha, \beta) \simeq E(\alpha', \beta') \iff \exists t \in k^*$ tal que $\alpha = \alpha' t$ e $\beta = \beta' t$.

3. Seja $E := V_3 \ltimes V_3^* = \langle w_1, w_2, w_3, u_1, u_2, u_3 \rangle$, um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo de dimensão 6 onde $V_3^* = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ é $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-submódulo de E e u_1, u_2, u_3 tem peso $(1, 0), (1, 1), (0, 1)$ respectivamente. Argumentando da mesma forma como no caso anterior, 3.2.4.1., temos que a ação de $\mathfrak{sl}_3(k)$ sobre E é dada na tabela seguinte:

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
w_1	w_1	0	0	0	0	w_2	w_3	0
w_2	w_2	w_2	w_1	0	0	0	0	w_3
w_3	0	w_3	0	w_1	w_2	0	0	0
u_1	u_1	0	$u_2 + \alpha w_2$	$u_3 + \gamma w_3$	0	βw_2	βw_3	0
u_2	u_2	u_2	αw_1	0	$u_3 + \gamma w_3$	$u_1 + \beta w_1$	0	αw_3
u_3	0	u_3	0	γw_1	γw_2	0	$u_1 + \beta w_1$	$u_2 + \alpha w_2$

Tabela 3.11: $O \mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos $V_3 \ltimes V_3^*$

Assim, $E := V_3 \ltimes V_3^*$, é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo de dimensão 6 que depende dos parâmetros α, β e γ , isto é, $V_3 \ltimes V_3^* = E(\alpha, \beta, \gamma)$ com $\alpha, \beta, \gamma \in k$.

- $Ext_{\mathfrak{sl}_3(k)}^1(V_3, V_3^*) = 0$. Quando $\alpha = \beta = \gamma = 0$ temos que $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle \simeq V_3$, logo E cinde, isto é, $E := V_3 \ltimes V_3^* \simeq V_3 \oplus V_3^*$
- $Ext_{\mathfrak{sl}_3(k)}^1(V_3, V_3^*) \neq 0$. Quando $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ ou $\gamma \neq 0$, sem perda de generalidade podemos supor que $\gamma = 1$, logo temos que $V_3 \ltimes V_3^* := E(\alpha, \beta)$ e $E(\alpha, \beta) \simeq E(\alpha', \beta') \iff \exists t \in k^*$ tal que $\alpha = \alpha' t$ e $\beta = \beta' t$.

3.2.5 $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de $\dim_k = 7$.

Podemos construir $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de dimensão 7 por meio de extensões de módulos, usando os $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de dimensão 3 e 4, ou de dimensão 5 e 2, ou de dimensão 6 e 1, os quais seram apresentados na lista seguinte:

1. $(V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_3$	20. $[(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3^*] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
2. $V_3 \ltimes (V_3 \ltimes V_0)$	21. $[(V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_0] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
3. $(V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_3^*$	22. $[V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_0)] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
4. $V_3^* \ltimes (V_3 \ltimes V_0)$	23. $[(V_0 \ltimes V_3) \ltimes V_0] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
5. $(V_0 \ltimes V_3) \ltimes V_3$	24. $[V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3)] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
6. $V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_3)$	25. $[V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
7. $(V_0 \ltimes V_3) \ltimes V_3^*$	26. $[(V_3^* \ltimes V_0) \ltimes V_0] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
8. $V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_3)$	27. $(V_0 \ltimes V_0) \ltimes [V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)]$
9. $(V_3^* \ltimes V_0) \ltimes V_3$	28. $(V_0 \ltimes V_0) \ltimes [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3]$
10. $V_3 \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)$	29. $(V_0 \ltimes V_0) \ltimes [V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)]$
11. $(V_3^* \ltimes V_0) \ltimes V_3^*$	30. $(V_0 \ltimes V_0) \ltimes [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3^*]$
12. $V_3^* \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)$	31. $(V_0 \ltimes V_0) \ltimes [V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_0)]$
13. $(V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes V_3$	32. $(V_0 \ltimes V_0) \ltimes [(V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_0]$
14. $V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)$	33. $(V_0 \ltimes V_0) \ltimes [V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3)]$
15. $(V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes V_3^*$	34. $(V_0 \ltimes V_0) \ltimes [(V_0 \ltimes V_3) \ltimes V_0]$
16. $V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)$	35. $(V_0 \ltimes V_0) \ltimes [V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)]$
17. $[V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$	36. $(V_0 \ltimes V_0) \ltimes [(V_3^* \ltimes V_0) \ltimes V_0]$
18. $[(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$	37. $[(V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes V_0] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
19. $[V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$	38. $[V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$

39. $(V_0 \ltimes V_0) \ltimes [(V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes V_0]$
40. $(V_0 \ltimes V_0) \ltimes [V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)]$
41. $(V_3 \ltimes V_3) \ltimes V_0$
42. $(V_3^* \ltimes V_3) \ltimes V_0$
43. $V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_3^*)$
44. $(V_3 \ltimes V_3^*) \ltimes V_0$
45. $V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes V_3^*)$
46. $(V_3^* \ltimes V_3^*) \ltimes V_0$
47. $V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_3)$
48. $V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes V_3)$
49. $V_0 \ltimes [(V_3 \ltimes V_0) \ltimes (V_0 \ltimes V_0)]$
50. $V_0 \ltimes [(V_0 \ltimes V_3) \ltimes (V_0 \ltimes V_0)]$
51. $V_0 \ltimes [(V_3^* \ltimes V_0) \ltimes (V_0 \ltimes V_0)]$
52. $V_0 \ltimes [(V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes (V_0 \ltimes V_0)]$
53. $V_0 \ltimes [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes (V_3 \ltimes V_0)]$
54. $V_0 \ltimes [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes (V_0 \ltimes V_3)]$
55. $V_0 \ltimes [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)]$
56. $V_0 \ltimes [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)]$
57. $[(V_3 \ltimes V_0) \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes V_0$
58. $[(V_0 \ltimes V_3) \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes V_0$
59. $[(V_3^* \ltimes V_0) \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes V_0$
60. $[(V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes V_0$
61. $[(V_0 \ltimes V_0) \ltimes (V_3 \ltimes V_0)] \ltimes V_0$
62. $[(V_0 \ltimes V_0) \ltimes (V_0 \ltimes V_3)] \ltimes V_0$
63. $[(V_0 \ltimes V_0) \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)] \ltimes V_0$
64. $[(V_0 \ltimes V_0) \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)] \ltimes V_0$
65. $[(V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)) \ltimes V_0] \ltimes V_0$
66. $[(V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)) \ltimes V_0] \ltimes V_0$
67. $[(V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_0)) \ltimes V_0] \ltimes V_0$
68. $[(V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3)) \ltimes V_0] \ltimes V_0$
69. $[(V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)) \ltimes V_0] \ltimes V_0$
70. $[(V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)) \ltimes V_0] \ltimes V_0$
71. $[((V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3) \ltimes V_0] \ltimes V_0$
72. $[((V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3^*) \ltimes V_0] \ltimes V_0$
73. $[((V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_0) \ltimes V_0] \ltimes V_0$
74. $[((V_0 \ltimes V_3) \ltimes V_0) \ltimes V_0] \ltimes V_0$
75. $[((V_3^* \ltimes V_0) \ltimes V_0) \ltimes V_0] \ltimes V_0$
76. $[((V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes V_0) \ltimes V_0] \ltimes V_0$
77. $V_0 \ltimes [(V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_0)]$
78. $V_0 \ltimes [(V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_0)]$
79. $V_0 \ltimes [(V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_0)]$
80. $V_0 \ltimes [(V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3) \ltimes V_0)]$
81. $V_0 \ltimes [(V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes V_0) \ltimes V_0)]$
82. $V_0 \ltimes [(V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes V_0)]$
83. $V_0 \ltimes [((V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3) \ltimes V_0]$
84. $V_0 \ltimes [((V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3^*) \ltimes V_0]$
85. $V_0 \ltimes [((V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_0) \ltimes V_0]$
86. $V_0 \ltimes [((V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_0)) \ltimes V_0)]$
87. $V_0 \ltimes [((V_0 \ltimes V_3) \ltimes V_0) \ltimes V_0]$
88. $V_0 \ltimes [((V_3^* \ltimes V_0) \ltimes V_0) \ltimes V_0]$
89. $V_0 \ltimes [((V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes V_0) \ltimes V_0]$
90. $[V_0 \ltimes (V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0))] \ltimes V_0$
91. $[V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0))] \ltimes V_0$
92. $[V_0 \ltimes (V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_0))] \ltimes V_0$
93. $[V_0 \ltimes (V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3))] \ltimes V_0$
94. $[V_0 \ltimes (V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes V_0))] \ltimes V_0$
95. $[V_0 \ltimes (V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*))] \ltimes V_0$

96. $[V_0 \ltimes ((V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3)] \ltimes V_0$	106. $V_0 \ltimes [V_0 \ltimes (V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3))]$
97. $[V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0))] \ltimes V_0$	107. $V_0 \ltimes [V_0 \ltimes (V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes V_0))]$
98. $[V_0 \ltimes ((V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3^*)] \ltimes V_0$	108. $V_0 \ltimes [V_0 \ltimes (V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*))]$
99. $[V_0 \ltimes ((V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_0)] \ltimes V_0$	109. $V_0 \ltimes [V_0 \ltimes ((V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3)]$
100. $[V_0 \ltimes ((V_0 \ltimes V_3) \ltimes V_0)] \ltimes V_0$	110. $V_0 \ltimes [V_0 \ltimes ((V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3^*)]$
101. $[V_0 \ltimes ((V_3^* \ltimes V_0) \ltimes V_0)] \ltimes V_0$	111. $V_0 \ltimes [V_0 \ltimes ((V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_0)]$
102. $[V_0 \ltimes ((V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes V_0)] \ltimes V_0$	112. $V_0 \ltimes [V_0 \ltimes ((V_0 \ltimes V_3) \ltimes V_0)]$
103. $V_0 \ltimes [V_0 \ltimes (V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0))]$	113. $V_0 \ltimes [V_0 \ltimes ((V_3^* \ltimes V_0) \ltimes V_0)]$
104. $V_0 \ltimes [V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0))]$	114. $V_0 \ltimes [V_0 \ltimes ((V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes V_0)]$
105. $V_0 \ltimes [V_0 \ltimes (V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_0))]$	

3.3 $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de $\dim_k = 8$.

Os $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos que agora vamos a calcular são fundamentais para a construção da 2-álgebra de Lie da forma $(17 : 3, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ (ver obs. 2.8.) via as 2-representações de $\mathfrak{sl}_3(k)$ em um k -espaço vetorial de dimensão 8. Usando os $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de dimensão 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (listados nas seções 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, 3.2.5) e suas correspondentes extensões podemos achar todos os $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos U de dimensão 8 da forma seguinte.

Seja E um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de $\dim_k(E) < 8$. Então temos as seguintes possibilidades:

- Se E é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de dimensão 4 enumerado na seção 3.2.2, nós podemos construir, via extensões de módulos, $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de dimensão 8 do tipo $E \ltimes E$ onde $E \in \{V_3 \ltimes V_0, V_0 \ltimes V_3, V_3^* \ltimes V_0, V_0 \ltimes V_3^*\}$, em total vamos ter 16 $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos U de dimensão 8 desse tipo.
- Se E é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de dimensão 5 listado na seção 3.2.3, podemos construir $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de dimensão 8 da forma: $E \ltimes V_3, V_3 \ltimes E, E \ltimes V_3^*, V_3^* \ltimes E$. Como temos 12 desses módulos E , então vamos ter 48 $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos U de dimensão 8 desse tipo.
- Se E percorre todos os $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de dimensão 6 apresentados na seção 3.2.4, podemos construir $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de dimensão 8 do tipo $E \ltimes V_0$ e $V_0 \ltimes E$, como temos 36 desses módulos E , então vamos ter 72 $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos U de dimensão 8.
- Se E é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de dimensão 7, construiremos $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de dimensão 8 do tipo $E \ltimes V_0$ e $V_0 \ltimes E$ onde E percorre todos os $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de dimensão 7 apresentados na seção 3.2.5; como temos 114 desses módulos E , então vamos ter 228 $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos U de dimensão 8 desse tipo.

- O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -módulo adjunto V^{ad} , também é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo de dimensão 8.

Assim, em total teremos 365 $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de dimensão 8, que são :

1. $U^1 = (V_3^* \ltimes V_0) \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)$
2. $U^2 = (V_3 \ltimes V_0) \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)$
3. $U^3 = (V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)$
4. $U^4 = (V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes (V_3 \ltimes V_0)$
5. $U^5 = (V_3^* \ltimes V_0) \ltimes (V_3 \ltimes V_0)$
6. $U^6 = (V_3 \ltimes V_0) \ltimes (V_3 \ltimes V_0)$
7. $U^7 = (V_0 \ltimes V_3) \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)$
8. $U^8 = (V_0 \ltimes V_3) \ltimes (V_3 \ltimes V_0)$
9. $U^9 = (V_3^* \ltimes V_0) \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)$
10. $U^{10} = (V_3^* \ltimes V_0) \ltimes (V_0 \ltimes V_3)$
11. $U^{11} = (V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)$
12. $U^{12} = (V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes (V_0 \ltimes V_3)$
13. $U^{13} = (V_3 \ltimes V_0) \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)$
14. $U^{14} = (V_3 \ltimes V_0) \ltimes (V_0 \ltimes V_3)$
15. $U^{15} = (V_0 \ltimes V_3) \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)$
16. $U^{16} = (V_0 \ltimes V_3) \ltimes (V_0 \ltimes V_3)$
17. $U^{17} = [V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes V_3$
18. $U^{18} = [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3] \ltimes V_3$
19. $U^{19} = [V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes V_3$
20. $U^{20} = [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3^*] \ltimes V_3$
21. $U^{21} = [(V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_0] \ltimes V_3$
22. $U^{22} = [V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_0)] \ltimes V_3$
23. $U^{23} = [(V_0 \ltimes V_3) \ltimes V_0] \ltimes V_3$
24. $U^{24} = [V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3)] \ltimes V_3$
25. $U^{25} = [(V_3^* \ltimes V_0) \ltimes V_0] \ltimes V_3$
26. $U^{26} = [V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)] \ltimes V_3$
27. $U^{27} = [(V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes V_0] \ltimes V_3$
28. $U^{28} = [V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)] \ltimes V_3$
29. $U^{29} = V_3 \ltimes [V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)]$
30. $U^{30} = V_3 \ltimes [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3]$
31. $U^{31} = V_3 \ltimes [V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)]$
32. $U^{32} = V_3 \ltimes [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3^*]$
33. $U^{33} = V_3 \ltimes [(V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_0]$
34. $U^{34} = V_3 \ltimes [V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_0)]$
35. $U^{35} = V_3 \ltimes [(V_0 \ltimes V_3) \ltimes V_0]$
36. $U^{36} = V_3 \ltimes [V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3)]$
37. $U^{37} = V_3 \ltimes [(V_3^* \ltimes V_0) \ltimes V_0]$
38. $U^{38} = V_3 \ltimes [V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)]$
39. $U^{39} = V_3 \ltimes [(V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes V_0]$
40. $U^{40} = V_3 \ltimes [V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)]$
41. $U^{41} = [V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes V_3^*$
42. $U^{42} = [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3] \ltimes V_3^*$
43. $U^{43} = [V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes V_3^*$
44. $U^{44} = [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3^*] \ltimes V_3^*$
45. $U^{45} = [(V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_0] \ltimes V_3^*$
46. $U^{46} = [V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_0)] \ltimes V_3^*$
47. $U^{47} = [(V_0 \ltimes V_3) \ltimes V_0] \ltimes V_3^*$
48. $U^{48} = [V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3)] \ltimes V_3^*$
49. $U^{49} = [(V_3^* \ltimes V_0) \ltimes V_0] \ltimes V_3^*$
50. $U^{50} = [V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)] \ltimes V_3^*$
51. $U^{51} = [(V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes V_0] \ltimes V_3^*$
52. $U^{52} = [V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)] \ltimes V_3^*$
53. $U^{53} = V_3^* \ltimes [V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)]$

54. $U^{54} = V_3^* \ltimes [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3]$
55. $U^{55} = V_3^* \ltimes [V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)]$
56. $U^{56} = V_3^* \ltimes [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3^*]$
57. $U^{57} = V_3^* \ltimes [(V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_0]$
58. $U^{58} = V_3^* \ltimes [V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_0)]$
59. $U^{59} = V_3^* \ltimes [(V_0 \ltimes V_3) \ltimes V_0]$
60. $U^{60} = V_3^* \ltimes [V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3)]$
61. $U^{61} = V_3^* \ltimes [(V_3^* \ltimes V_0) \ltimes V_0]$
62. $U^{62} = V_3^* \ltimes [V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)]$
63. $U^{63} = V_3^* \ltimes [(V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes V_0]$
64. $U^{64} = V_3^* \ltimes [V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)]$
65. $U^{65} = (V_3^* \ltimes V_3) \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
66. $U^{66} = (V_3 \ltimes V_3) \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
67. $U^{67} = (V_3 \ltimes V_3^*) \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
68. $U^{68} = (V_3^* \ltimes V_3^*) \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
69. $U^{69} = [(V_3 \ltimes V_0) \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
70. $U^{70} = [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes (V_3 \ltimes V_0)] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
71. $U^{71} = [(V_0 \ltimes V_3) \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
72. $U^{72} = [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes (V_0 \ltimes V_3)] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
73. $U^{73} = [(V_3^* \ltimes V_0) \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
74. $U^{74} = [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
75. $U^{75} = [(V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
76. $U^{76} = [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
77. $U^{77} = [(V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)) \ltimes V_0] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
78. $U^{78} = [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3] \ltimes V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
79. $U^{79} = [(V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)) \ltimes V_0] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
80. $U^{80} = [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3^*] \ltimes V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
81. $U^{81} = [(V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_0] \ltimes V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
82. $U^{82} = [(V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_0)) \ltimes V_0] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
83. $U^{83} = [(V_0 \ltimes V_3) \ltimes V_0] \ltimes V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
84. $U^{84} = [(V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3)) \ltimes V_0] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
85. $U^{85} = [(V_3^* \ltimes V_0) \ltimes V_0] \ltimes V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
86. $U^{86} = [(V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)) \ltimes V_0] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
87. $U^{87} = [(V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes V_0] \ltimes V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
88. $U^{88} = [(V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)) \ltimes V_0] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
89. $U^{89} = [V_0 \ltimes [V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)]] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
90. $U^{90} = [V_0 \ltimes [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3]] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
91. $U^{91} = [V_0 \ltimes [V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)]] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
92. $U^{92} = [V_0 \ltimes [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3^*]] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
93. $U^{93} = [V_0 \ltimes [(V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_0]] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
94. $U^{94} = [V_0 \ltimes [V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_0)]] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
95. $U^{95} = [V_0 \ltimes [(V_0 \ltimes V_3) \ltimes V_0]] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
96. $U^{96} = [V_0 \ltimes [V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3)]] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
97. $U^{97} = [V_0 \ltimes [(V_3^* \ltimes V_0) \ltimes V_0]] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
98. $U^{98} = [V_0 \ltimes [V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)]] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
99. $U^{99} = [V_0 \ltimes [(V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes V_0]] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
100. $U^{100} = [V_0 \ltimes [V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)]] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$
101. $U^{101} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes (V_3^* \ltimes V_3)$
102. $U^{102} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes (V_3 \ltimes V_3)$
103. $U^{103} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes (V_3 \ltimes V_3^*)$
104. $U^{104} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes (V_3^* \ltimes V_3^*)$
105. $U^{105} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes [(V_3 \ltimes V_0) \ltimes (V_0 \ltimes V_0)]$
106. $U^{106} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes (V_3 \ltimes V_0)]$
107. $U^{107} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes [(V_0 \ltimes V_3) \ltimes (V_0 \ltimes V_0)]$
108. $U^{108} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes (V_0 \ltimes V_3)]$
109. $U^{109} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes [(V_3^* \ltimes V_0) \ltimes (V_0 \ltimes V_0)]$
110. $U^{110} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)]$

111. $U^{111} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes [(V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes (V_0 \ltimes V_0)]$
112. $U^{112} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)]$
113. $U^{113} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes [[V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes V_0]$
114. $U^{114} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes [[V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes V_0]$
115. $U^{115} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes [[V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes V_0]$
116. $U^{116} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes [[V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes V_0]$
117. $U^{117} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes [[V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes V_0]$
118. $U^{118} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes [[V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_0)] \ltimes V_0]$
119. $U^{119} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes [[V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_0)] \ltimes V_0]$
120. $U^{120} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes [[V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3)] \ltimes V_0]$
121. $U^{121} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes [[V_3^* \ltimes V_0] \ltimes V_0]$
122. $U^{122} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes [[V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)] \ltimes V_0]$
123. $U^{123} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes [[V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)] \ltimes V_0]$
124. $U^{124} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes [[V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)] \ltimes V_0]$
125. $U^{125} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes [V_0 \ltimes [V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)]]$
126. $U^{126} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes [V_0 \ltimes [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3]]$
127. $U^{127} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes [V_0 \ltimes [V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)]]$
128. $U^{128} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes [V_0 \ltimes [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3^*]]$
129. $U^{129} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes [V_0 \ltimes [(V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_0]]$
130. $U^{130} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes [V_0 \ltimes [V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_0)]]$
131. $U^{131} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes [V_0 \ltimes [(V_0 \ltimes V_3) \ltimes V_0]]$
132. $U^{132} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes [V_0 \ltimes [V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3)]]$
133. $U^{133} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes [V_0 \ltimes [(V_3^* \ltimes V_0) \ltimes V_0]]$
134. $U^{134} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes [V_0 \ltimes [V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)]]$
135. $U^{135} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes [V_0 \ltimes [(V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes V_0]]$
136. $U^{136} = (V_0 \ltimes V_0) \ltimes [V_0 \ltimes [V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)]]$
137. $U^{137} = [(V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_3] \ltimes V_0$
138. $U^{138} = [V_3 \ltimes (V_3 \ltimes V_0)] \ltimes V_0$
139. $U^{139} = [(V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_3^*] \ltimes V_0$
140. $U^{140} = [V_3^* \ltimes (V_3 \ltimes V_0)] \ltimes V_0$
141. $U^{141} = [(V_0 \ltimes V_3) \ltimes V_3] \ltimes V_0$
142. $U^{142} = [V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_3)] \ltimes V_0$
143. $U^{143} = [(V_0 \ltimes V_3) \ltimes V_3^*] \ltimes V_0$
144. $U^{144} = [V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_3)] \ltimes V_0$
145. $U^{145} = [(V_3^* \ltimes V_0) \ltimes V_3] \ltimes V_0$
146. $U^{146} = [V_3 \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)] \ltimes V_0$
147. $U^{147} = [(V_3^* \ltimes V_0) \ltimes V_3^*] \ltimes V_0$
148. $U^{148} = [V_3^* \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)] \ltimes V_0$
149. $U^{149} = [(V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes V_3] \ltimes V_0$
150. $U^{150} = [V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)] \ltimes V_0$
151. $U^{151} = [(V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes V_3^*] \ltimes V_0$
152. $U^{152} = [V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)] \ltimes V_0$
153. $U^{153} = [[V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes V_0$
154. $U^{154} = [[V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes V_0$
155. $U^{155} = [[V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes V_0$
156. $U^{156} = [[V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes V_0$
157. $U^{157} = [[V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes V_0$
158. $U^{158} = [[V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_0)] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes V_0$
159. $U^{159} = [[V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_0)] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes V_0$
160. $U^{160} = [[V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3)] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes V_0$
161. $U^{161} = [[V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes V_0$
162. $U^{162} = [[V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes V_0$
163. $U^{163} = [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes [V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)]] \ltimes V_0$
164. $U^{164} = [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3]] \ltimes V_0$
165. $U^{165} = [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes [V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)]] \ltimes V_0$
166. $U^{166} = [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3^*]] \ltimes V_0$
167. $U^{167} = [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes [V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_0)]] \ltimes V_0$

- [illegible]

225. $U^{225} = [V_0 \angle (((V_0 \angle V_3^*) \angle V_0) \angle V_0)] \angle V_0$
 226. $U^{226} = [[V_0 \angle (V_3 \angle (V_0 \angle V_0))] \angle V_0] \angle V_0$
 227. $U^{227} = [[V_0 \angle (V_3^* \angle (V_0 \angle V_0))] \angle V_0] \angle V_0$
 228. $U^{228} = [[V_0 \angle (V_0 \angle (V_3 \angle V_0))] \angle V_0] \angle V_0$
 229. $U^{229} = [[V_0 \angle (V_0 \angle (V_0 \angle V_3))] \angle V_0] \angle V_0$
 230. $U^{230} = [[V_0 \angle (V_0 \angle (V_3^* \angle V_0))] \angle V_0] \angle V_0$
 231. $U^{231} = [[V_0 \angle (V_0 \angle (V_0 \angle V_3^*))] \angle V_0] \angle V_0$
 232. $U^{232} = [[V_0 \angle ((V_0 \angle V_0) \angle V_3)] \angle V_0] \angle V_0$
 233. $U^{233} = [[V_0 \angle ((V_0 \angle V_0) \angle V_3)] \angle V_0] \angle V_0$
 234. $U^{234} = [[V_0 \angle ((V_0 \angle V_0) \angle V_3^*)] \angle V_0] \angle V_0$
 235. $U^{235} = [[V_0 \angle ((V_3 \angle V_0) \angle V_0)] \angle V_0] \angle V_0$
 236. $U^{236} = [[V_0 \angle ((V_0 \angle V_3) \angle V_0)] \angle V_0] \angle V_0$
 237. $U^{237} = [[V_0 \angle ((V_3^* \angle V_0) \angle V_0)] \angle V_0] \angle V_0$
 238. $U^{238} = [[V_0 \angle ((V_0 \angle V_3^*) \angle V_0)] \angle V_0] \angle V_0$
 239. $U^{239} = [V_0 \angle [V_0 \angle (V_3 \angle (V_0 \angle V_0))]] \angle V_0$
 240. $U^{240} = [V_0 \angle [V_0 \angle (V_3^* \angle (V_0 \angle V_0))]] \angle V_0$
 241. $U^{241} = [V_0 \angle [V_0 \angle (V_0 \angle (V_3 \angle V_0))]] \angle V_0$
 242. $U^{242} = [V_0 \angle [V_0 \angle (V_0 \angle (V_0 \angle V_3))]] \angle V_0$
 243. $U^{243} = [V_0 \angle [V_0 \angle (V_0 \angle (V_3^* \angle V_0))]] \angle V_0$
 244. $U^{244} = [V_0 \angle [V_0 \angle (V_0 \angle (V_0 \angle V_3^*))]] \angle V_0$
 245. $U^{245} = [V_0 \angle [V_0 \angle ((V_0 \angle V_0) \angle V_3)]] \angle V_0$
 246. $U^{246} = [V_0 \angle [V_0 \angle ((V_0 \angle V_0) \angle V_3^*)]] \angle V_0$
 247. $U^{247} = [V_0 \angle [V_0 \angle ((V_3 \angle V_0) \angle V_0)]] \angle V_0$
 248. $U^{248} = [V_0 \angle [V_0 \angle ((V_0 \angle V_3) \angle V_0)]] \angle V_0$
 249. $U^{249} = [V_0 \angle [V_0 \angle ((V_3^* \angle V_0) \angle V_0)]] \angle V_0$
 250. $U^{250} = [V_0 \angle [V_0 \angle ((V_0 \angle V_3^*) \angle V_0)]] \angle V_0$
 251. $U^{251} = V_0 \angle [(V_3 \angle V_0) \angle V_3]$
 252. $U^{252} = V_0 \angle [V_3 \angle (V_3 \angle V_0)]$
 253. $U^{253} = V_0 \angle [(V_3 \angle V_0) \angle V_3^*]$
 254. $U^{254} = V_0 \angle [V_3^* \angle (V_3 \angle V_0)]$
 255. $U^{255} = V_0 \angle [(V_0 \angle V_3) \angle V_3]$
 256. $U^{256} = V_0 \angle [V_3 \angle (V_0 \angle V_3)]$
 257. $U^{257} = V_0 \angle [(V_0 \angle V_3) \angle V_3^*]$
 258. $U^{258} = V_0 \angle [V_3^* \angle (V_0 \angle V_3)]$
 259. $U^{259} = V_0 \angle [(V_3^* \angle V_0) \angle V_3]$
 260. $U^{260} = V_0 \angle [V_3 \angle (V_3^* \angle V_0)]$
 261. $U^{261} = V_0 \angle [(V_3^* \angle V_0) \angle V_3^*]$
 262. $U^{262} = V_0 \angle [V_3^* \angle (V_3^* \angle V_0)]$
 263. $U^{263} = V_0 \angle [(V_0 \angle V_3^*) \angle V_3]$
 264. $U^{264} = V_0 \angle [V_3 \angle (V_0 \angle V_3^*)]$
 265. $U^{265} = V_0 \angle [(V_0 \angle V_3^*) \angle V_3^*]$
 266. $U^{266} = V_0 \angle [V_3^* \angle (V_0 \angle V_3^*)]$
 267. $U^{267} = V_0 \angle [[V_3 \angle (V_0 \angle V_0)] \angle (V_0 \angle V_0)]$
 268. $U^{268} = V_0 \angle [[[V_0 \angle V_0] \angle V_3] \angle (V_0 \angle V_0)]$
 269. $U^{269} = V_0 \angle [[V_3^* \angle (V_0 \angle V_0)] \angle (V_0 \angle V_0)]$
 270. $U^{270} = V_0 \angle [[V_0 \angle V_0] \angle V_3^*] \angle (V_0 \angle V_0)]$
 271. $U^{271} = V_0 \angle [[[V_3 \angle V_0] \angle V_0] \angle (V_0 \angle V_0)]$
 272. $U^{272} = V_0 \angle [[V_0 \angle (V_3 \angle V_0)] \angle (V_0 \angle V_0)]$
 273. $U^{273} = V_0 \angle [[V_0 \angle V_3] \angle V_0] \angle (V_0 \angle V_0)]$
 274. $U^{274} = V_0 \angle [[V_0 \angle (V_0 \angle V_3)] \angle (V_0 \angle V_0)]$
 275. $U^{275} = V_0 \angle [[V_0 \angle (V_3^* \angle V_0)] \angle (V_0 \angle V_0)]$
 276. $U^{276} = V_0 \angle [[[V_3^* \angle V_0] \angle V_0] \angle (V_0 \angle V_0)]$
 277. $U^{277} = V_0 \angle [(V_0 \angle V_0) \angle [V_3 \angle (V_0 \angle V_0)]]$
 278. $U^{278} = V_0 \angle [(V_0 \angle V_0) \angle [(V_0 \angle V_0) \angle V_3]]$
 279. $U^{279} = V_0 \angle [(V_0 \angle V_0) \angle [V_3^* \angle (V_0 \angle V_0)]]$
 280. $U^{280} = V_0 \angle [(V_0 \angle V_0) \angle [(V_0 \angle V_0) \angle V_3^*]]$
 281. $U^{281} = V_0 \angle [(V_0 \angle V_0) \angle [V_0 \angle (V_3 \angle V_0)]]$

- [illegible]

339. $U^{339} = V_0 \ltimes [V_0 \ltimes [(V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes V_0] \ltimes V_0]$ 353. $U^{353} = V_0 \ltimes [V_0 \ltimes [V_0 \ltimes (V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0))]]$
340. $U^{340} = V_0 \ltimes [[V_0 \ltimes (V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0))] \ltimes V_0]$ 354. $U^{354} = V_0 \ltimes [V_0 \ltimes [V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0))]]$
341. $U^{341} = V_0 \ltimes [V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0))] \ltimes V_0$ 355. $U^{355} = V_0 \ltimes [V_0 \ltimes [V_0 \ltimes (V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_0))]]$
342. $U^{342} = V_0 \ltimes [[V_0 \ltimes (V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_0))] \ltimes V_0]$ 356. $U^{356} = V_0 \ltimes [V_0 \ltimes [V_0 \ltimes (V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3))]]$
343. $U^{343} = V_0 \ltimes [[V_0 \ltimes (V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3))] \ltimes V_0]$ 357. $U^{357} = V_0 \ltimes [V_0 \ltimes [V_0 \ltimes (V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes V_0))]]$
344. $U^{344} = V_0 \ltimes [[V_0 \ltimes (V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes V_0))] \ltimes V_0]$ 358. $U^{358} = V_0 \ltimes [V_0 \ltimes [V_0 \ltimes (V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*))]]$
345. $U^{345} = V_0 \ltimes [[V_0 \ltimes (V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*))] \ltimes V_0]$ 359. $U^{359} = V_0 \ltimes [V_0 \ltimes [V_0 \ltimes ((V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3)]]$
346. $U^{346} = V_0 \ltimes [[V_0 \ltimes ((V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3)] \ltimes V_0]$ 360. $U^{360} = V_0 \ltimes [V_0 \ltimes [V_0 \ltimes ((V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3^*)]]$
347. $U^{347} = V_0 \ltimes [[V_0 \ltimes ((V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3)] \ltimes V_0]$ 361. $U^{361} = V_0 \ltimes [V_0 \ltimes [V_0 \ltimes ((V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_0)]]$
348. $U^{348} = V_0 \ltimes [[V_0 \ltimes ((V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3^*)] \ltimes V_0]$ 362. $U^{362} = V_0 \ltimes [V_0 \ltimes [V_0 \ltimes ((V_0 \ltimes V_3) \ltimes V_0)]]$
349. $U^{349} = V_0 \ltimes [[V_0 \ltimes ((V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_0)] \ltimes V_0]$ 363. $U^{363} = V_0 \ltimes [V_0 \ltimes [V_0 \ltimes ((V_3^* \ltimes V_0) \ltimes V_0)]]$
350. $U^{350} = V_0 \ltimes [[V_0 \ltimes ((V_0 \ltimes V_3) \ltimes V_0)] \ltimes V_0]$ 364. $U^{364} = V_0 \ltimes [V_0 \ltimes [V_0 \ltimes ((V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes V_0)]]$
351. $U^{351} = V_0 \ltimes [[V_0 \ltimes ((V_3^* \ltimes V_0) \ltimes V_0)] \ltimes V_0]$ 365. $U^{365} = V^{ad}$, o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo adjunto.
352. $U^{352} = V_0 \ltimes [[V_0 \ltimes ((V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes V_0)] \ltimes V_0]$

3.3.1 Tabelas de alguns $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de $\dim_k = 8$.

Aquí apresentamos tabelas que mostram as $\mathfrak{sl}_3(k)$ -ação de alguns extensões dos $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos achados na seção anterior e focamos no caso de aquelas extensões que cindem.

1. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^2 := (V_3 \ltimes V_0) \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)$.**

Temos a sequência exata curta:

$$0 \rightarrow V_3^* \ltimes V_0 \xrightarrow{\iota} U^2 \xrightarrow{\pi} V_3 \ltimes V_0 \rightarrow 0$$

onde $V_3^* \ltimes V_0 := \langle u, u_1, u_2, u_3 \rangle$ é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -submódulo de U^2 com u, u_1, u_2 e u_3 elementos de peso $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$ respectivamente e, $U^2/(V_3^* \ltimes V_0) \simeq V_3 \ltimes V_0$. Como $V_3 \ltimes V_0 := \langle a, a_1, a_2, a_3 \rangle$ existem elementos $x, x_1, x_2, x_3 \in U^2$ tal que $\pi(x) = a$ e $\pi(x_i) = a_i$ com $i = 1, 2, 3$. Suponhamos que x, x_1, x_2 e x_3 são de peso $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$ respectivamente. Então argumentando da mesma forma como no caso 3.2.4.1 temos o seguinte sistema de

24 equações com 24 incógnitas para δ_i , $i = 1, \dots, 24$.

$$\left\{ \begin{array}{ll} x.e_{12} + \delta_1 u_3 & = 0 \\ x.e_{13} + \delta_2 u_2 & = 0 \\ x.e_{23} + \delta_3 u_1 & = 0 \\ x.e_{21} + \delta_4 u_3 & = 0 \\ x.e_{31} + \delta_5 u_2 & = 0 \\ x.e_{32} + \delta_6 u_1 & = 0 \\ x_1.e_{12} + x_2 + \delta_7 u_2 & = 0 \\ x_1.e_{13} + x_3 + \delta_8 u_3 & = 0 \\ x_1.e_{23} + \beta x + \delta_9 u & = 0 \\ x_1.e_{21} + \delta_{10} u_2 & = 0 \\ x_1.e_{31} + \delta_{11} u_3 & = 0 \\ x_1.e_{32} + \kappa x + \delta_{12} u & = 0 \\ x_2.e_{12} + \delta_{13} u_1 & = 0 \\ x_2.e_{13} + \gamma x + \delta_{14} u & = 0 \\ x_2.e_{23} + x_3 + \delta_{15} u_3 & = 0 \\ x_2.e_{21} + x_1 + \delta_{16} u_1 & = 0 \\ x_2.e_{31} + \kappa x + \delta_{17} u & = 0 \\ x_2.e_{32} + \delta_{18} u_3 & = 0 \\ x_3.e_{12} + \gamma x + \delta_{19} u & = 0 \\ x_3.e_{13} + \delta_{20} u_1 & = 0 \\ x_3.e_{23} + \delta_{21} u_2 & = 0 \\ x_3.e_{21} + \beta x + \delta_{22} u & = 0 \\ x_3.e_{31} + x_1 + \delta_{23} u_1 & = 0 \\ x_3.e_{32} + x_2 + \delta_{24} u_2 & = 0 \end{array} \right.$$

Daí resulta que:

$\delta_1 = \delta_2$, $\delta_3 = \delta_4$, $\delta_5 = \delta_6$, $\delta_7 = \delta_{13}$, $\delta_8 = \delta_{20}$, $\delta_{10} = \delta_{16}$, $\delta_{11} = \delta_{23}$, $\delta_{15} = \delta_{21}$,
 $\delta_{18} = \delta_{24}$, $\delta_{19} + \delta_{14} = \delta_{15}\lambda + \delta_{13}\pi$, $\delta_9 + \delta_{22} = \delta_{23}\pi + \delta_{21}\xi$, $\delta_{17} + \delta_{12} = \delta_{16}\lambda + \delta_{18}\xi$,
 $\kappa\delta_1 + \delta_{18} = \delta_7$, $\kappa\delta_4 = \delta_{11} + \delta_{16}$, $\kappa\delta_2 = \delta_7 + \delta_{24}$, $\beta\delta_1 = \beta\delta_2 = \xi\delta_2 = \pi\delta_2 = \gamma\delta_3 =$
 $\xi\delta_3 = \lambda\delta_3 = \gamma\lambda_2 = \gamma\delta_1 = \pi\delta_1 = \lambda\delta_1 = \kappa\delta_5 = 0$, $\gamma\delta_6 = \gamma\delta_5 = \kappa\delta_2 = \kappa\delta_1$, $\kappa\delta_4 =$
 $\kappa\delta_6$, $\beta\delta_6 = \beta\delta_5 = \lambda\delta_4 = \kappa\delta_3$, $\lambda\delta_3 = \delta_6\pi$, $\xi\delta_1 = \lambda\delta_4$, $\pi\delta_5 = \xi\delta_2$, $\pi\delta_{20} = \pi\delta_{21}$,
 $\xi\delta_8 = \xi\delta_{21}$.

Sejam:

$$\begin{array}{lllll} \mu_1 := \delta_1 = \delta_2 & \mu_4 := \delta_7 = \delta_{13} & \mu_7 := \delta_{11} = \delta_{23} & \mu_{10} := \delta_9 & \mu_{11} := \delta_{22} \\ \mu_2 := \delta_3 = \delta_4 & \mu_5 := \delta_8 = \delta_{20} & \mu_8 := \delta_{18} = \delta_{24} & \mu_{12} := \delta_{19} & \mu_{15} := \delta_{12} \\ \mu_3 := \delta_5 = \delta_6 & \mu_6 := \delta_{10} = \delta_{16} & \mu_9 := \delta_{21} = \delta_{15} & \mu_{13} := \delta_{14} & \mu_{14} := \delta_{17} \end{array}$$

onde:

$$\begin{array}{l} \mu_{12} + \mu_{14} = \mu_9\lambda + \mu_4\pi; \mu_{10} + \mu_{11} = \mu_7\pi + \mu_9\xi; \mu_{14} + \mu_{15} = \mu_6\lambda + \mu_8\xi \\ \beta\mu_1 = \xi\mu_1 = \pi\mu_1 = \gamma\mu_2 = \xi\mu_2 = \lambda\mu_2 = \gamma\mu_1 = \pi\mu_1 = \lambda\mu_1 = \kappa\mu_3 = \kappa\mu_2 = \beta\mu_3 \end{array}$$

$$\gamma\mu_3 = \kappa\mu_1; \kappa\mu_2 = \kappa\mu_3; \lambda\mu_2 = \mu_3\pi; \xi\mu_1 = \lambda\mu_2; \pi\mu_3 = \xi\mu_1; \pi\mu_5 = \pi\mu_9; \xi\mu_5 = \xi\mu_9.$$

Seja $\{u, u_1, u_2, u_3, x, x_1, x_2, x_3\}$ base de U^2 , logo a ação de $\mathfrak{sl}_3(k)$ sobre esta base é dada na tabela seguinte:

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
u	0	0	0	0	0	0	0	0
u_1	u_1	0	0	0	πu	u_2	u_3	λu
u_2	u_2	u_2	u_1	πu	0	0	ξu	u_3
u_3	0	u_3	λu	u_1	u_2	ξu	0	0
x	0	0	$\mu_1 u_3$	$\mu_1 u_2$	$\mu_2 u_1$	$\mu_2 u_3$	$\mu_3 u_2$	$\mu_3 u_1$
x_1	x_1	0	$x_2 + \mu_4 u_2$	$x_3 + \mu_5 u_3$	$\beta x + \mu_{10} u$	$\mu_6 u_2$	$\mu_7 u_3$	$\kappa x + \mu_{15} u$
x_2	x_2	x_2	$\mu_4 u_1$	$\gamma x + \mu_{13} u$	$x_3 + \mu_9 u_3$	$x_1 + \mu_6 u_1$	$\kappa x + \mu_{14} u$	$\mu_8 u_3$
x_3	0	x_3	$\gamma x + \mu_{12} u$	$\mu_5 u_1$	$\mu_9 u_2$	$\beta x + \mu_{11} u$	$x_1 + \mu_7 u_1$	$x_2 + \mu_8 u_2$

Tabela 3.13: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^2 := (V_3 \ltimes V_0) \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)$.

Agora, se na tabela anterior fazemos $\mu_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, 15$, então a ação de $\mathfrak{sl}_3(k)$ sobre U^2 fica como na tabela 3.14 de baixo. Dessa tabela tem-se que:

$$U^2 \text{ cinde} \iff \mu_i = 0 \ \forall \ i = 1, \dots, 15 \text{ e } U^2 \simeq (V_3^* \ltimes V_0) \oplus (V_3 \ltimes V_0)$$

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
u	0	0	0	0	0	0	0	0
u_1	u_1	0	0	0	πu	u_2	u_3	λu
u_2	u_2	u_2	u_1	πu	0	0	ξu	u_3
u_3	0	u_3	λu	u_1	u_2	ξu	0	0
x	0	0	0	0	0	0	0	0
x_1	x_1	0	x_2	x_3	βx	0	0	κx
x_2	x_2	x_2	0	γx	x_3	x_1	κx	0
x_3	0	x_3	γx	0	0	βx	x_1	x_2

Tabela 3.14: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^2 \simeq (V_3 \ltimes V_0) \oplus (V_3^* \ltimes V_0)$.

As tabelas dadas a continuação são feitas da mesma forma como em 3.3.1.1. Nós estamos interessados em achar condições necessárias e suficientes para que tais módulos cindam.

2. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^4 := (V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes (V_3 \ltimes V_0)$.**

Seja $U^4 := \langle a, a_1, a_2, a_3, z, z_1, z_2, z_3 \rangle$ onde a ação de $\mathfrak{sl}_3(k)$ sobre a base $\{a, a_1, a_2, a_3, z, z_1, z_2, z_3\}$ U^4 é dada na tabela seguinte:

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
a	0	0	0	0	0	0	0	0
a_1	a_1	0	a_2	a_3	βa	0	0	κa
a_2	a_2	a_2	0	γa	a_3	a_1	κa	0
a_3	0	a_3	γa	0	0	βa	a_1	a_2
z	0	0	$\delta z_3 + \delta_1 a_3$	$\delta z_2 + \delta_2 a_2$	$\alpha z_1 + \delta_3 a_1$	$\alpha z_3 + \delta_4 a_3$	$\zeta z_2 + \delta_5 a_2$	$\zeta z_1 + \delta_6 a_1$
z_1	z_1	0	$\delta_7 a_2$	$\delta_8 a_3$	$\delta_9 a$	$z_2 + \delta_{10} a_2$	$z_3 + \delta_{11} a_3$	$\delta_{12} a$
z_2	z_2	z_2	$z_1 + \delta_{13} a_1$	$\delta_{14} a$	$\delta_{15} a_3$	$\delta_{16} a_1$	$\delta_{17} a$	$z_3 + \delta_{18} a_3$
z_3	0	z_3	$\delta_{19} a$	$z_1 + \delta_{20} a_1$	$z_2 + \delta_{21} a_2$	$\delta_{22} a$	$\delta_{23} a_1$	$\delta_{24} a_2$

Tabela 3.15: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^4 := (V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes (V_3 \ltimes V_0)$.

Dessa tabela podemos ver que: $U^4 \simeq (V_0 \ltimes V_3^*) \oplus (V_3 \ltimes V_0) \iff \delta_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, 24$. Além disso, por 3.2.2.4 temos que $V_0 \ltimes V_3^*$ cinde $\iff \delta = \alpha = \zeta = 0$. Portanto:

$$U^4 \simeq (V_0 \oplus V_3^*) \oplus (V_3 \ltimes V_0) \iff \delta_i = 0 = \delta = \alpha = \zeta \quad \forall \quad i = 1, \dots, 24.$$

Ver tabela 3.16, abaixo.

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
a	0	0	0	0	0	0	0	0
a_1	a_1	0	a_2	a_3	βa	0	0	κa
a_2	a_2	a_2	0	γa	a_3	a_1	κa	0
a_3	0	a_3	γa	0	0	βa	a_1	a_2
z	0	0	0	0	0	0	0	0
z_1	z_1	0	0	0	0	z_2	z_3	0
z_2	z_2	z_2	z_1	0	0	0	0	z_3
z_3	0	z_3	0	z_1	z_2	0	0	0

Tabela 3.16: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^4 \simeq (V_0 \oplus V_3^*) \oplus (V_3 \ltimes V_0)$.

3. *Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^5 := (V_3^* \ltimes V_0) \ltimes (V_3 \ltimes V_0)$.*

Seja $U^5 := \langle a, a_1, a_2, a_3, d, d_1, d_2, d_3 \rangle$, logo a ação de $\mathfrak{sl}_3(k)$ sobre os elementos da base $\{a, a_1, a_2, a_3, d, d_1, d_2, d_3\}$ de U^5 é dada na tabela seguinte:

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
a	0	0	0	0	0	0	0	0
a_1	a_1	0	a_2	a_3	βa	0	0	κa
a_2	a_2	a_2	0	γa	a_3	a_1	κa	0
a_3	0	a_3	γa	0	0	βa	a_1	a_2
d	0	0	$\delta_1 a_3$	$\delta_2 a_2$	$\delta_3 a_1$	$\delta_4 a_3$	$\delta_5 a_2$	$\delta_6 a_1$
d_1	d_1	0	$\delta_7 a_2$	$\delta_8 a_3$	$\pi d + \delta_9 a$	$d_2 + \delta_{10} a_2$	$d_3 + \delta_{11} a_3$	$\lambda d + \delta_{12} a$
d_2	d_2	d_2	$d_1 + \delta_{13} a_1$	$\pi d + \delta_{14} a$	$\delta_{15} a_3$	$\delta_{16} a_1$	$\xi d + \delta_{17} a$	$d_3 + \delta_{18} a_3$
d_3	0	d_3	$\lambda d + \delta_{19} a$	$d_1 + \delta_{20} a_1$	$d_2 + \delta_{21} a_2$	$\xi d + \delta_{22} a$	$\delta_{23} a_1$	$\delta_{24} a_2$

Tabela 3.17: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^5 := (V_3^* \ltimes V_0) \ltimes (V_3 \ltimes V_0)$.

Desta tabela temos:

$$U^5 \simeq (V_3^* \ltimes V_0) \oplus (V_3 \ltimes V_0) \iff \delta_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, 24.$$

4. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^7 := (V_0 \ltimes V_3) \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)$.**

Seja $\{u, u_1, u_2, u_3, y, y_1, y_2, y_3\}$ uma base de U^7 , a ação de $\mathfrak{sl}_3(k)$ sobre U^7 é dada pela tabela a seguir:

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
u	0	0	0	0	0	0	0	0
u_1	u_1	0	0	0	πu	u_2	u_3	λu
u_2	u_2	u_2	u_1	πu	0	0	ξu	u_3
u_3	0	u_3	λu	u_1	u_2	ξu	0	0
y	0	0	$\omega y_3 + \delta_1 u_3$	$\theta y_2 + \delta_2 u_2$	$\theta y_1 + \delta_3 u_1$	$\sigma y_3 + \delta_4 u_3$	$\sigma y_2 + \delta_5 u_2$	$\omega y_1 + \delta_6 u_1$
y_1	y_1	0	$y_2 + \delta_7 u_2$	$y_3 + \delta_8 u_3$	$\delta_9 u$	$\delta_{10} u_2$	$\delta_{11} u_3$	$\delta_{12} u$
y_2	y_2	y_2	$\delta_{13} u_1$	$\delta_{14} u$	$y_3 + \delta_{15} u_3$	$y_1 + \delta_{16} u_1$	$\delta_{17} u$	$\delta_{18} u_3$
y_3	0	y_3	$\delta_{19} u$	$\delta_{20} u_1$	$\delta_{21} u_2$	$\delta_{22} u$	$y_1 + \delta_{23} u_1$	$y_2 + \delta_{24} u_2$

Tabela 3.18: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^7 := (V_0 \ltimes V_3) \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)$.

Dessa tabela, podemos inferir que U^7 cinde se, e só se, $\delta_i = 0$ para $i = 1, 2, \dots, 24$, isto é, $U^7 \simeq (V_0 \ltimes V_3) \oplus (V_3^* \ltimes V_0) \iff \delta_i = 0$ para $i = 1, \dots, 24$ e, também de 3.2.2.2 temos que $V_0 \ltimes V_3$ cinde $\iff \omega = \theta = \sigma = 0$. Portanto,

$$U^7 \simeq (V_0 \oplus V_3) \oplus (V_3^* \ltimes V_0) \iff \delta_i = 0 = \omega = \sigma = \theta \text{ para } i = 1, \dots, 24.$$

5. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{10} := (V_3^* \ltimes V_0) \ltimes (V_0 \ltimes V_3)$.**

Seja $U^{10} := \langle v, v_1, v_2, v_3, b, b_1, b_2, b_3 \rangle$ onde a ação de $\mathfrak{sl}_3(k)$ sobre a base $\{v, v_1, v_2, v_3, b, b_1, b_2, b_3\}$ de U^{10} é dada na tabela seguinte:

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
v	0	0	ωv_3	θv_2	θv_1	σv_3	σv_2	ωv_1
v_1	v_1	0	v_2	v_3	0	0	0	0
v_2	v_2	v_2	0	0	v_3	v_1	0	0
v_3	0	v_3	0	0	0	0	v_1	v_2
b	0	0	$\epsilon_2 v_3$	$\epsilon_1 v_2$	$\epsilon_1 v_1$	$\epsilon_3 v_3$	$\epsilon_3 v_2$	$\epsilon_2 v_1$
b_1	b_1	0	$\epsilon_4 v_2$	$\epsilon_5 v_3$	$\pi b + \delta_9 v$	$b_2 + \epsilon_6 v_2$	$b_3 + \epsilon_7 v_3$	$\lambda b + \delta_{12} v$
b_2	b_2	b_2	$b_1 + \epsilon_4 v_1$	$\pi b + \delta_{14} v$	$\epsilon_8 v_3$	$\epsilon_6 v_1$	$\xi b + \delta_{17} v$	$b_3 + \epsilon_9 v_3$
b_3	0	b_3	$\lambda b + \delta_{19} v$	$b_1 + \epsilon_5 v_1$	$b_2 + \epsilon_8 v_2$	$\xi b + \delta_{22} v$	$\epsilon_7 v_1$	$\epsilon_9 v_2$

Tabela 3.19: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{10} := (V_3^* \ltimes V_0) \ltimes (V_0 \ltimes V_3)$.

Como no caso anterior temos que U^{10} cinde se, e só se, $\epsilon_i = 0$ para todo $i=1, 2, \dots, 15$, isto é:

$$U^{10} \simeq (V_3^* \ltimes V_0) \oplus (V_0 \ltimes V_3) \iff \epsilon_i = 0$$

Além disso, por 3.2.2.2 sabemos que $(V_0 \ltimes V_3) \simeq V_0 \oplus V_3$ se, e só se, $\omega = \sigma = \theta = 0$.
Portanto

$$U^{10} \simeq (V_3^* \ltimes V_0) \oplus (V_0 \oplus V_3) \iff \epsilon_i = 0 = \omega = \theta = \sigma, \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, 15$$

nesse caso a ação de $\mathfrak{sl}_3(k)$ sobre U^{10} cindido fica como na tabela seguinte.

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
v	0	0	0	0	0	0	0	0
v_1	v_1	0	v_2	v_3	0	0	0	0
v_2	v_2	v_2	0	0	v_3	v_1	0	0
v_3	0	v_3	0	0	0	0	v_1	v_2
b	0	0	0	0	0	0	0	0
b_1	b_1	0	0	0	πb	b_2	b_3	λb
b_2	b_2	b_2	b_1	πb	0	0	ξb	b_3
b_3	0	b_3	λb	b_1	b_2	ξb	0	0

Tabela 3.20: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{10} := (V_3^* \ltimes V_0) \oplus (V_0 \oplus V_3)$.

6. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{12} := (V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes (V_0 \ltimes V_3)$.**

Seja $U^{12} := \langle v, v_1, v_2, v_3, k, k_1, k_2, k_3 \rangle$ com base $\{v, v_1, v_2, v_3, k, k_1, k_2, k_3\}$; a ação de $\mathfrak{sl}_3(k)$ sobre essa base é dada pela tabela seguinte:

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
v	0	0	ωv_3	θv_2	θv_1	σv_3	σv_2	ωv_1
v_1	v_1	0	v_2	v_3	0	0	0	0
v_2	v_2	v_2	0	0	v_3	v_1	0	0
v_3	0	v_3	0	0	0	0	v_1	v_2
k	0	0	$\delta k_3 + \delta_1 v_3$	$\delta k_2 + \delta_2 v_2$	$\alpha k_1 + \delta_3 v_1$	$\alpha k_3 + \delta_4 v_3$	$\zeta k_2 + \delta_5 v_2$	$\zeta k_1 + \delta_6 v_1$
k_1	k_1	0	$\delta_7 v_2$	$\delta_8 v_3$	$\delta_9 v$	$k_2 + \delta_{10} v_2$	$k_3 + \delta_{11} v_3$	$\delta_{12} v$
k_2	k_2	k_2	$k_1 + \delta_{13} v_1$	$\delta_{14} v$	$\delta_{15} v_3$	$\delta_{16} v_1$	$\delta_{17} v$	$k_3 + \delta_{18} v_3$
k_3	0	k_3	$\delta_{19} v$	$k_1 + \delta_{20} v_1$	$k_2 + \delta_{21} v_2$	$\delta_{22} v$	$\delta_{23} v_1$	$\delta_{24} v_2$

Tabela 3.21: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{12} := (V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes (V_0 \ltimes V_3)$.

Dessa tabela concluímos que

$$U^{12} \simeq (V_0 \ltimes V_3^*) \oplus (V_0 \ltimes V_3) \iff \delta_i = 0, \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, 24.$$

Além disso, por 3.2.2.4 e 3.2.2.2 temos que

$$V_0 \ltimes V_3^* \simeq V_0 \oplus V_3^* \iff \delta = \alpha = \zeta = 0$$

e

$$V_0 \ltimes V_3 \simeq V_0 \oplus V_3 \iff \omega = \theta = \sigma = 0.$$

Portanto,

$$U^{12} \simeq (V_0 \oplus V_3^*) \oplus (V_0 \oplus V_3) \iff \delta_i = 0 = \omega = \theta = \sigma = \delta = \alpha = \zeta.$$

nesse caso obtemos a seguinte tabela da $\mathfrak{sl}_3(k)$ -ação sobre U^{12} cindido.

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
v	0	0	0	0	0	0	0	0
v_1	v_1	0	v_2	v_3	0	0	0	0
v_2	v_2	v_2	0	0	v_3	v_1	0	0
v_3	0	v_3	0	0	0	0	v_1	v_2
k	0	0	0	0	0	0	0	0
k_1	k_1	0	0	0	0	k_2	k_3	0
k_2	k_2	k_2	k_1	0	0	0	0	k_3
k_3	0	k_3	0	k_1	k_2	0	0	0

Tabela 3.22: $O \mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{12} := (V_0 \oplus V_3^*) \oplus (V_0 \oplus V_3)$.7. *Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{13} := (V_3 \ltimes V_0) \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)$.*

Seja $U^{13} := \langle w, w_1, w_2, w_3, e, e_1, e_2, e_3 \rangle$ logo temos que a ação de $\mathfrak{sl}_3(k)$ sobre a base $\{w, w_1, w_2, w_3, e, e_1, e_2, e_3\}$ de U^{13} é:

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
w	0	0	δw_3	δw_2	αw_1	αw_3	ζw_2	ζw_1
w_1	w_1	0	0	0	0	w_2	w_3	0
w_2	w_2	w_2	w_1	0	0	0	0	w_3
w_3	0	w_3	0	w_1	w_2	0	0	0
e	0	0	$\delta_1 w_3$	$\delta_1 w_2$	$\delta_2 w_1$	$\delta_2 w_3$	$\delta_3 w_2$	$\delta_3 w_1$
e_1	e_1	0	$e_2 + \delta_4 w_2$	$e_3 + \delta_5 w_3$	$\beta e + \delta_6 w$	$\delta_7 w_2$	$\delta_8 w_3$	$\lambda e + \delta_9 w$
e_2	e_2	e_2	$\delta_4 w_1$	$\gamma e + \delta_{12} w$	$e_3 + \delta_{10} w_3$	$e_1 + \delta_7 w_1$	$\lambda e + \delta_9 w$	$\delta_{11} w_3$
e_3	0	e_3	$\gamma e + \delta_{12} w$	$\delta_5 w_1$	$\delta_{10} w_2$	$\beta e + \delta_6 w$	$e_1 + \delta_8 w_1$	$e_2 + \delta_{11} w_2$

Tabela 3.23: $O \mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{13} := (V_3 \ltimes V_0) \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)$.

Dessa tabela observamos que: $U^{13} \simeq (V_3 \ltimes V_0) \oplus (V_0 \ltimes V_3^*) \iff \delta_i = 0, \forall i=1, \dots, 12$
Agora, por 3.2.2.4 temos que

$$V_0 \ltimes V_3^* \text{ cinde } \iff \delta = \alpha = \zeta = 0.$$

Portanto:

$$U^{13} \simeq (V_3 \ltimes V_0) \oplus (V_0 \oplus V_3^*) \iff \delta_i = 0 = \delta = \alpha = \zeta, \forall i = 1, \dots, 12.$$

8. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{15} := (V_0 \ltimes V_3) \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)$.**

Seja $U^{15} := \langle w, w_1, w_2, w_3, f, f_1, f_2, f_3 \rangle$, logo temos que a ação de $\mathfrak{sl}_3(k)$ sobre a base $\{w, w_1, w_2, w_3, f, f_1, f_2, f_3\}$ de U^{15} é:

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
w	0	0	δw_3	δw_2	αw_1	αw_3	ζw_2	ζw_1
w_1	w_1	0	0	0	0	w_2	w_3	0
w_2	w_2	w_2	w_1	0	0	0	0	w_3
w_3	0	w_3	0	w_1	w_2	0	0	0
f	0	0	$\omega f_3 + \delta_1 w_3$	$\theta f_2 + \delta_2 w_2$	$\theta f_1 + \delta_3 w_1$	$\sigma f_3 + \delta_4 w_3$	$\sigma f_2 + \delta_5 w_2$	$\alpha f_1 + \delta_6 w_1$
f_1	f_1	0	$f_2 + \delta_7 w_2$	$f_3 + \delta_8 w_3$	$\delta_9 w$	$\delta_{10} w_2$	$\delta_{11} w_3$	$\delta_{12} w$
f_2	f_2	f_2	$\delta_{13} w_1$	$\delta_{14} w$	$f_3 + \delta_{15} w_3$	$f_1 + \delta_{16} w_1$	$\delta_{17} w$	$\delta_{18} w_3$
f_3	0	f_3	$\delta_{19} w$	$\delta_{20} w_1$	$\delta_{21} w_2$	$\delta_{22} w$	$f_1 + \delta_{23} w_1$	$f_2 + \delta_{24} w_2$

Tabela 3.24: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{15} := (V_0 \ltimes V_3) \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)$.

Da tabela anterior tem-se:

$$(V_0 \ltimes V_3) \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*) \simeq (V_0 \ltimes V_3) \oplus (V_0 \ltimes V_3^*) = 0 \iff \delta_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, 24.$$

Além disso, por 3.2.2.2 e 3.2.2.4 tem-se

$$V_0 \ltimes V_3 \simeq V_0 \oplus V_3 \iff \omega = \theta = \sigma = 0$$

e

$$V_0 \ltimes V_3^* \simeq V_0 \oplus V_3^* \iff \delta = \alpha = \zeta = 0.$$

Portanto temos que:

$$U^{15} \simeq (V_0 \oplus V_3) \oplus (V_0 \oplus V_3^*) \iff \delta_i = 0 = \omega = \theta = \sigma = \delta = \alpha = \zeta, \quad \forall i = 1, \dots, 24.$$

9. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{19} := [V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes V_3$**

Seja $U^{19} := \langle v_1, v_2, v_3, v, g, g_1, g_2, g_3 \rangle$ logo por meio das tabelas 3.2 e 3.9 podemos obter que a ação $\mathfrak{sl}_3(k)$ sobre a base $\{v_1, v_2, v_3, v, g, g_1, g_2, g_3\}$ sobre U^{19} é dada na tabela seguinte:

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
v_1	v_1	0	v_2	v_3	0	0	0	0
v_2	v_2	v_2	0	0	v_3	v_1	0	0
v_3	0	v_3	0	0	0	0	v_1	v_2
v	0	0	$\delta_1 v_3$	$\delta_2 v_2$	$\delta_3 v_1$	$\delta_4 v_3$	$\delta_5 v_2$	$\delta_6 v_1$
g	0	0	$\delta_7 v_3$	$\delta_8 v_2$	$\delta_9 v_1$	$\delta_{10} v_3$	$\delta_{11} v_2$	$\delta_{12} v_1$
g_1	g_1	0	$\delta_{13} v_2$	$\delta_{14} v_3$	$\chi_1 v + \chi_2 g$	$g_2 + \delta_{15} v_2$	$g_3 + \delta_{16} v_3$	$\chi_3 v + \chi_4 g$
g_2	g_2	g_2	$g_1 + \delta_{17} v_1$	$\chi_1 v + \chi_2 g$	$\delta_{18} v_3$	$\delta_{19} v_1$	$\chi_5 v + \chi_6 g$	$g_3 + \delta_{20} v_3$
g_3	0	g_3	$\chi_3 v + \chi_4 g$	$g_1 + \delta_{21} v_1$	$g_2 + \delta_{22} v_2$	$\chi_5 v + \chi_6 g$	$\delta_{23} v_1$	$\delta_{24} v_2$

Tabela 3.25: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{19} := [V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes V_3$

Da tabela anterior concluímos que

$$U^{19} \simeq [V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \oplus V_3 \iff \delta_i = 0 \quad i = 1, \dots, 24.$$

nesse caso a ação de $\mathfrak{sl}_3(k)$ sobre U^{19} cindido fica assim:

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
v_1	v_1	0	v_2	v_3	0	0	0	0
v_2	v_2	v_2	0	0	v_3	v_1	0	0
v_3	0	v_3	0	0	0	0	v_1	v_2
v	0	0	0	0	0	0	0	0
g	0	0	0	0	0	0	0	0
g_1	g_1	0	0	0	$\chi_1 v + \chi_2 g$	g_2	g_3	$\chi_3 v + \chi_4 g$
g_2	g_2	g_2	g_1	$\chi_1 v + \chi_2 g$	0	0	$\chi_5 v + \chi_6 g$	g_3
g_3	0	g_3	$\chi_3 v + \chi_4 g$	g_1	g_2	$\chi_5 v + \chi_6 g$	0	0

Tabela 3.26: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{19} := [V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \oplus V_3$

com $\chi_i \in k$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

10. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{20} := [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3^*] \ltimes V_3$**

Seja $U^{20} := \langle v_1, v_2, v_3, i, j, i_1, i_2, i_3 \rangle$. A tabela de ação de $\mathfrak{sl}_3(k)$ sobre a base $\{v_1, v_2, v_3, i, j, i_1, i_2, i_3\}$ de U^{20} é dada por:

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
v_1	v_1	0	v_2	v_3	0	0	0	0
v_2	v_2	v_2	0	0	v_3	v_1	0	0
v_3	0	v_3	0	0	0	0	v_1	v_2
i	0	0	$\tau i_3 + \delta_1 v_3$	$\tau i_2 + \delta_2 v_2$	$\rho i_1 + \delta_3 v_1$	$\rho i_3 + \delta_4 v_3$	$\varrho i_2 + \delta_5 v_2$	$\varrho i_1 + \delta_6 v_1$
j	0	0	$\tau_1 j_3 + \delta_7 v_3$	$\tau_1 j_2 + \delta_8 v_2$	$\rho_1 j_1 + \delta_9 v_1$	$\rho_1 + j_3 \delta_{10} v_3$	$\varrho_1 j_2 + \delta_{11} v_2$	$\varrho_1 j_1 + \delta_{12} v_1$
i_1	i_1	0	$\delta_{13} v_2$	$\delta_{14} v_3$	0	$i_2 + \delta_{15} v_2$	$i_3 + \delta_{16} v_3$	0
i_2	i_2	i_2	$i_1 + \delta_{17} v_1$	0	$\delta_{18} v_3$	$\delta_{19} v_1$	0	$i_3 + \delta_{20} v_3$
i_3	0	i_3	0	$i_1 + \delta_{21} v_1$	$i_2 + \delta_{22} v_2$	0	$\delta_{23} v_1$	$\delta_{24} v_2$

Tabela 3.27: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{20} := [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3^*] \ltimes V_3$

Da tabela anterior

$$U^{20} \simeq [(V_0 \ltimes V_0) \oplus V_3^*] \oplus V_3 \iff \delta_i = \tau = \rho = \varrho = \tau_1 = \rho_1 = \varrho_1 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 24.$$

11. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{25} := [(V_3^* \ltimes V_0) \ltimes V_0] \ltimes V_3$**

Seja $U^{25} := \langle i, v_1, v_2, v_3, j, j_1, j_2, j_3 \rangle$ a tabela de ação de $\mathfrak{sl}_3(k)$ sobre U^{25} é dada assim:

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
v_1	v_1	0	v_2	v_3	0	0	0	0
v_2	v_2	v_2	0	0	v_3	v_1	0	0
v_3	0	v_3	0	0	0	0	v_1	v_2
i	0	0	$\delta_1 v_3$	$\delta_2 v_2$	$\delta_3 v_1$	$\delta_4 v_3$	$\delta_5 v_2$	$\delta_6 v_1$
j	0	0	$\delta_7 v_3$	$\delta_8 v_2$	$\delta_9 v_1$	$\delta_{10} v_3$	$\delta_{11} v_2$	$\delta_{12} v_1$
j_1	j_1	0	$\delta_{13} v_2$	$\delta_{14} v_3$	$\pi j + \triangle_1 i$	$j_2 + \delta_{15} v_2$	$j_3 + \delta_{16} v_3$	$\lambda j + \triangle_2 i$
j_2	j_2	j_2	$j_1 + \delta_{17} v_1$	$\pi j + \triangle_3 i$	$\delta_{18} v_3$	$\delta_{19} v_1$	$\xi j + \triangle_4 i$	$j_3 + \delta_{20} v_3$
j_3	0	j_3	$\lambda j + \triangle_5 i$	$j_1 + \delta_{21} v_1$	$j_2 + \delta_{22} v_2$	$\xi j + \triangle_6 v$	$\delta_{23} v_1$	$\delta_{24} v_2$

Tabela 3.28: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{25} := [(V_3^* \ltimes V_0) \ltimes V_0] \ltimes V_3$

Da tabela anterior

$$U^{25} \simeq [(V_3^* \ltimes V_0) \oplus V_0] \oplus V_3 \iff \delta_i = \triangle_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 24 \text{ e } j = 1, \dots, 6.$$

12. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{26} := [V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)] \ltimes V_3$**

Seja $U^{26} := \langle v_1, v_2, v_3, k, k_1, k_2, k_3, x \rangle$ onde a ação de $\mathfrak{sl}_3(k)$ sobre a base $\{k, x, v_1, v_2, v_3, k_1, k_2, k_3\}$ de U^{26} é dada por:

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
v_1	v_1	0	v_2	v_3	0	0	0	0
v_2	v_2	v_2	0	0	v_3	v_1	0	0
v_3	0	v_3	0	0	0	0	v_1	v_2
k	0	0	$\delta_1 v_3$	$\delta_2 v_2$	$\delta_3 v_1$	$\delta_4 v_3$	$\delta_5 v_2$	$\delta_6 v_1$
k_1	k_1	0	$\delta_7 v_2$	$\delta_8 v_3$	πk	$k_2 + \delta_9 v_2$	$k_3 + \delta_{10} v_3$	λk
k_2	k_2	k_2	$k_1 + \delta_{11} v_1$	πk	$\delta_{12} v_3$	$\delta_{13} v_1$	ξk	$k_3 + \delta_{14} v_3$
k_3	0	k_3	λk	$k_1 + \delta_{15} v_1$	$k_2 + \delta_{16} v_2$	ξk	$\delta_{17} v_1$	$\delta_{18} v_2$
x	0	0	$\psi k_3 + \delta_{19} v_3$	$\psi k_2 + \delta_{20} v_2$	$\varphi k_1 + \delta_{21} v_1$	$\varphi k_3 + \delta_{22} v_3$	$ok_2 + \delta_{23} v_2$	$ok_1 + \delta_{24} v_1$

Tabela 3.29: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{26} := [V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)] \ltimes V_3$

Da tabela anterior obtemos que:

$$U^{26} \simeq [V_0 \oplus (V_3^* \ltimes V_0)] \oplus V_3 \iff \delta_i = 0 = \psi = \varphi = o$$

13. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{27} := [(V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes V_0] \ltimes V_3$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
v_1	v_1	0	v_2	v_3	0	0	0	0
v_2	v_2	v_2	0	0	v_3	v_1	0	0
v_3	0	v_3	0	0	0	0	v_1	v_2
y	0	0	$\delta y_3 + \delta_1 v_3$	$\delta y_2 + \delta_2 v_2$	$\alpha y_1 + \delta_3 v_1$	$\alpha y_3 + \delta_4 v_3$	$\zeta y_2 + \delta_5 v_2$	$\zeta y_1 + \delta_6 v_1$
y_1	y_1	0	$\delta_7 v_2$	$\delta_8 v_3$	$\lambda_1 z$	$y_2 + \delta_9 v_2$	$y_3 + \delta_{10} v_3$	$\lambda_2 z$
y_2	y_2	y_2	$y_1 + \delta_{11} v_1$	$\lambda_3 z$	$\delta_{12} v_3$	$\delta_{13} v_1$	$\lambda_4 z$	$y_3 + \delta_{14} v_3$
y_3	0	y_3	$\lambda_5 z$	$y_1 + \delta_{15} v_1$	$y_2 + \delta_{16} v_2$	$\lambda_6 z$	$\delta_{17} v_1$	$\delta_{18} v_2$
z	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 3.30: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{27} := [(V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes V_0] \ltimes V_3$

Dessa tabela tem-se:

$$U^{27} \simeq [(V_0 \oplus V_3^*) \oplus V_0] \oplus V_3 \iff \delta_i = 0 = \lambda_j = \delta = \alpha = \zeta$$

14. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{28} := [V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)] \ltimes V_3$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
v_1	v_1	0	v_2	v_3	0	0	0	0
v_2	v_2	v_2	0	0	v_3	v_1	0	0
v_3	0	v_3	0	0	0	0	v_1	v_2
b	0	0	$\delta b_3 + \delta_1 v_3$	$\delta b_2 + \delta_2 v_2$	$\alpha b_1 + \delta_3 v_1$	$\alpha b_3 + \delta_4 v_3$	$\zeta b_2 + \delta_5 v_2$	$\zeta b_1 + \delta_6 v_1$
b_1	b_1	0	$\delta_7 v_2$	$\delta_8 v_3$	0	$b_2 + \delta_9 v_2$	$b_3 + \delta_{10} v_3$	0
b_2	b_2	b_2	$b_1 + \delta_{11} v_1$	0	$\delta_{12} v_3$	$\delta_{13} v_1$	0	$b_3 + \delta_{14} v_3$
b_3	0	b_3	0	$b_1 + \delta_{15} v_1$	$b_2 + \delta_{16} v_2$	0	$\delta_{17} v_1$	$\delta_{18} v_2$
f	0	0	$\phi_2 b_3 + \delta_{19} v_3$	$\phi_2 b_2 + \delta_{20} v_2$	$\phi_2 b_1 + \delta_{21} v_1$	$\phi_2 b_3 + \delta_{22} v_3$	$\phi_3 b_2 + \delta_{23} v_2$	$\phi_3 b_1 + \delta_{24} v_1$

Tabela 3.31: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{28} := [V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)] \ltimes V_3$

Desta tabela:

$$U^{28} \simeq [V_0 \oplus (V_0 \oplus V_3^*)] \oplus V_3 \iff \delta_i = \delta = \alpha = \zeta = \phi_i = 0.$$

15. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{31} := V_3 \ltimes [V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)]$**

Seja $\{v, w, w_1, w_2, w_3, v_1, v_2, v_3\}$ base de U^{31} , logo a ação de $\mathfrak{sl}_3(k)$ sobre U^{31} é:

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
v	0	0	0	0	0	0	0	0
w	0	0	0	0	0	0	0	0
w_1	w_1	0	0	0	$\chi_1 v + \chi_2 w$	w_2	w_3	$\chi_3 v + \chi_4 w$
w_2	w_2	w_2	w_1	$\chi_1 v + \chi_2 w$	0	0	$\chi_5 v + \chi_6 w$	w_3
w_3	0	w_3	$\chi_3 v + \chi_4 w$	w_1	w_2	$\chi_5 v + \chi_6 w$	0	0
v_1	v_1	0	$v_2 + \delta_1 w_2$	$v_3 + \delta_2 w_3$	$\delta_3 v + \delta_4 w$	$\delta_5 w_2$	$\delta_6 w_3$	$\delta_7 v + \delta_8 w$
v_2	v_2	v_2	$\delta_9 w_1$	$\delta_{10} v + \delta_{11} w$	$v_3 + \delta_{12} w_3$	$v_1 + \delta_{13} w_1$	$\delta_{14} v + \delta_{15} w$	$\delta_{16} w_3$
v_3	0	v_3	$\delta_{17} v + \delta_{18} w$	$\delta_{19} w_1$	$\delta_{20} w_2$	$\delta_{21} v + \delta_{22} w$	$v_1 + \delta_{23} w_1$	$v_2 + \delta_{29} w_2$

Tabela 3.32: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{31} := V_3 \ltimes [V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)]$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{31} \simeq V_3 \oplus [V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \iff \delta_i = 0.$$

16. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{32} := V_3 \ltimes [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3^*]$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
w_1	w_1	0	0	0	0	w_2	w_3	0
w_2	w_2	w_2	w_1	0	0	0	0	w_3
w_3	0	w_3	0	w_1	w_2	0	0	0
w	0	0	τw_3	τw_2	ρw_1	ρw_3	ϱw_2	ϱw_1
v	0	0	$\tau_1 w_3$	$\tau_1 w_2$	$\rho_1 w_1$	$\rho_1 w_3$	$\varrho_1 w_2$	$\varrho_1 w_1$
v_1	v_1	0	$v_2 + \delta_1 w_2$	$v_3 + \delta_2 w_3$	$\delta_3 v + \delta_4 w$	$\delta_5 w_2$	$\delta_6 w_3$	$\delta_7 v + \delta_8 w$
v_2	v_2	v_2	$\delta_9 w_1$	$\delta_{10} v + \delta_{11} w$	$v_3 + \delta_{12} w_3$	$v_1 + \delta_{13} w_1$	$\delta_{14} v + \delta_{15} w$	$\delta_{16} w_3$
v_3	0	v_3	$\delta_{17} v + \delta_{18} w$	$\delta_{19} w_1$	$\delta_{20} w_2$	$\delta_{21} v + \delta_{22} w$	$v_1 + \delta_{23} w_1$	$v_2 + \delta_{29} w_2$

Tabela 3.33: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{32} := V_3 \ltimes [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3^*]$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{32} \simeq V_3 \oplus [(V_0 \ltimes V_0) \oplus V_3^*] \iff \delta_i = \tau = \rho = \varrho = \tau_1 = \rho_1 = \varrho_1 = 0.$$

17. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{37} := V_3 \ltimes [(V_3^* \ltimes V_0) \ltimes V_0]$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
v	0	0	0	0	0	0	0	0
w	0	0	0	0	0	0	0	0
w_1	w_1	0	0	0	$\pi w + \triangle_1 v$	w_2	w_3	$\lambda w + \triangle_2 v$
w_2	w_2	w_2	w_1	$\pi w + \triangle_3 v$	0	0	$\xi w + \triangle_4 v$	w_3
w_3	0	w_3	$\lambda w + \triangle_5 v$	w_1	w_2	$\xi w + \triangle_6 v$	0	0
v_1	v_1	0	$v_2 + \delta_1 w_2$	$v_3 + \delta_2 w_3$	$\delta_3 v + \delta_4 w$	$\delta_5 w_2$	$\delta_6 w_3$	$\delta_7 v + \delta_8 w$
v_2	v_2	v_2	$\delta_9 w_1$	$\delta_{10} v + \delta_{11} w$	$v_3 + \delta_{12} w_3$	$v_1 + \delta_{13} w_1$	$\delta_{14} v + \delta_{15} w$	$\delta_{16} w_3$
v_3	0	v_3	$\delta_{17} v + \delta_{18} w$	$\delta_{19} w_1$	$\delta_{20} w_2$	$\delta_{21} v + \delta_{22} w$	$v_1 + \delta_{23} w_1$	$v_2 + \delta_{29} w_2$

Tabela 3.34: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{37} := V_3 \ltimes [(V_3^* \ltimes V_0) \ltimes V_0]$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{37} \simeq V_3 \oplus [(V_3^* \ltimes V_0) \oplus V_0] \iff \delta_i = \Delta_j = 0.$$

18. *Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{38} := V_3 \ltimes [V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)]$*

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
w	0	0	0	0	0	0	0	0
w_1	w_1	0	0	0	πw	w_2	w_3	λw
w_2	w_2	w_2	w_1	πw	0	0	ξw	u_3
w_3	0	w_3	λw	w_1	w_2	ξw	0	0
v	0	0	ψw_3	ψw_2	φw_1	φw_3	ow_2	ow_1
v_1	v_1	0	$v_2 + \delta_1 w_2$	$v_3 + \delta_2 w_3$	$\delta_3 v + \delta_4 w$	$\delta_5 w_2$	$\delta_6 w_3$	$\delta_7 v + \delta_8 w$
v_2	v_2	v_2	$\delta_9 w_1$	$\delta_{10} v + \delta_{11} w$	$v_3 + \delta_{12} w_3$	$v_1 + \delta_{13} w_1$	$\delta_{14} v + \delta_{15} w$	$\delta_{16} w_3$
v_3	0	v_3	$\delta_{17} v + \delta_{18} w$	$\delta_{19} w_1$	$\delta_{20} w_2$	$\delta_{21} v + \delta_{22} w$	$v_1 + \delta_{23} w_1$	$v_2 + \delta_{29} w_2$

Tabela 3.35: $O \mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{38} := V_3 \ltimes [V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)]$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{38} \simeq V_3 \oplus [V_0 \oplus (V_3^* \ltimes V_0)] \iff \delta_i = \phi = o = \varphi = 0.$$

19. *Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{39} := V_3 \ltimes [(V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes V_0]$*

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
w	0	0	δw_3	δw_2	αw_1	αw_3	ζw_2	ζw_1
w_1	w_1	0	0	0	$\lambda_1 v$	w_2	w_3	$\lambda_2 v$
w_2	w_2	w_2	w_1	$\lambda_3 v$	0	0	$\lambda_4 v$	w_3
w_3	0	w_3	$\lambda_5 v$	w_1	w_2	$\lambda_6 v$	0	0
v	0	0	0	0	0	0	0	0
v_1	v_1	0	$v_2 + \delta_1 w_2$	$v_3 + \delta_2 w_3$	$\delta_3 v + \delta_4 w$	$\delta_5 w_2$	$\delta_6 w_3$	$\delta_7 v + \delta_8 w$
v_2	v_2	v_2	$\delta_9 w_1$	$\delta_{10} v + \delta_{11} w$	$v_3 + \delta_{12} w_3$	$v_1 + \delta_{13} w_1$	$\delta_{14} v + \delta_{15} w$	$\delta_{16} w_3$
v_3	0	v_3	$\delta_{17} v + \delta_{18} w$	$\delta_{19} w_1$	$\delta_{20} w_2$	$\delta_{21} v + \delta_{22} w$	$v_1 + \delta_{23} w_1$	$v_2 + \delta_{29} w_2$

Tabela 3.36: $O \mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{39} := V_3 \ltimes [(V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes V_0]$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{39} \simeq V_3 \oplus [(V_0 \oplus V_3^*) \oplus V_0] \iff \delta_i = \alpha = \zeta = \delta = \lambda_j = 0.$$

20. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{40} := V_3 \ltimes [V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)]$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
w	0	0	δw_3	δw_2	αw_1	αw_3	ζw_2	ζw_1
w_1	w_1	0	0	0	0	w_2	w_3	0
w_2	w_2	w_2	w_1	0	0	0	0	w_3
w_3	0	w_3	0	w_1	w_2	0	0	0
v	0	0	$\phi_1 w_3$	$\phi_1 w_2$	$\phi_2 w_1$	$\phi_2 w_3$	$\phi_3 w_2$	$\phi_3 w_1$
v_1	v_1	0	$v_2 + \delta_1 w_2$	$v_3 + \delta_2 w_3$	$\delta_3 v + \delta_4 w$	$\delta_5 w_2$	$\delta_6 w_3$	$\delta_7 v + \delta_8 w$
v_2	v_2	v_2	$\delta_9 w_1$	$\delta_{10} v + \delta_{11} w$	$v_3 + \delta_{12} w_3$	$v_1 + \delta_{13} w_1$	$\delta_{14} v + \delta_{15} w$	$\delta_{16} w_3$
v_3	0	v_3	$\delta_{17} v + \delta_{18} w$	$\delta_{19} w_1$	$\delta_{20} w_2$	$\delta_{21} v + \delta_{22} w$	$v_1 + \delta_{23} w_1$	$v_2 + \delta_{29} w_2$

Tabela 3.37: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{40} := V_3 \ltimes [V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)]$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{40} \simeq V_3 \ltimes [V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)] \iff \delta_i = \alpha = \zeta = \delta = \phi_j = 0.$$

21. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{41} := [V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes V_3^*$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
v	0	0	$\delta_1 w_3$	$\delta_2 w_2$	$\delta_3 w_1$	$\delta_4 w_3$	$\delta_5 w_2$	$\delta_6 w_1$
w	0	0	$\delta_7 w_3$	$\delta_8 w_2$	$\delta_9 w_1$	$\delta_{10} w_3$	$\delta_{11} w_2$	$\delta_{12} w_1$
w_1	w_1	0	0	0	0	w_2	w_3	0
w_2	w_2	w_2	w_1	0	0	0	0	w_3
w_3	0	w_3	0	w_1	w_2	0	0	0
a_1	a_1	0	$a_2 + \delta_{13} w_2$	$a_3 + \delta_{14} w_3$	$\tau_1 v + \tau_2 w$	$\delta_{15} w_2$	$\delta_{16} w_3$	$\tau_3 v + \tau_4 w$
a_2	a_2	a_2	$\delta_{17} w_1$	$\tau_5 v + \tau_6 w$	$a_3 + \delta_{18} w_3$	$a_1 + \delta_{19} w_1$	$\tau_7 v + \tau_8 w$	$\delta_{20} w_3$
a_3	0	a_3	$\tau_9 v + \tau_{10} w$	$\delta_{21} w_1$	$\delta_{22} w_2$	$\tau_{11} v + \tau_{12} w$	$a_1 + \delta_{23} w_1$	$a_2 + \delta_{24} w_2$

Tabela 3.38: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{41} := [V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes V_3^*$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{41} \simeq [V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \oplus V_3^* \iff \delta_i = 0.$$

22. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{42} := [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3] \ltimes V_3^*$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
v	0	0	$\vartheta_1 a_3 + \delta_{19} w_3$	$\eta_1 a_2 + \delta_{20} w_2$	$\eta_1 a_1 + \delta_{21} w_1$	$\iota_1 a_3 + \delta_{22} w_3$	$\iota_1 a_2 + \delta_{23} w_2$	$\vartheta_1 a_1 + \delta_{24} w_1$
w	0	0	$\vartheta a_3 + \delta_{13} w_3$	$\eta a_2 + \delta_{14} w_2$	$\eta a_1 + \delta_{15} w_1$	$\iota a_3 + \delta_{16} w_3$	$\iota a_2 + \delta_{17} w_2$	$\vartheta a_1 + \delta_{18} w_1$
w_1	w_1	0	0	0	0	w_2	w_3	0
w_2	w_2	w_2	w_1	0	0	0	0	w_3
w_3	0	w_3	0	w_1	w_2	0	0	0
a_1	a_1	0	$a_2 + \delta_1 w_2$	$a_3 + \delta_2 w_3$	0	$\delta_3 w_2$	$\delta_4 w_3$	0
a_2	a_2	a_2	$\delta_5 w_1$	0	$a_3 + \delta_6 w_3$	$a_1 + \delta_7 w_1$	0	$\delta_8 w_3$
a_3	0	a_3	0	$\delta_9 w_1$	$\delta_{10} w_2$	0	$a_1 + \delta_{11} w_1$	$a_2 + \delta_{12} w_2$

Tabela 3.39: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{42} := [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3] \ltimes V_3^*$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{42} \simeq [(V_0 \ltimes V_0) \oplus V_3] \oplus V_3^* \iff \delta_i = \eta = \vartheta = \iota = \eta_1 = \vartheta_1 = \iota_1 = 0.$$

23. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{45} := [(V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_0] \ltimes V_3^*$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
v	0	0	$\delta_1 w_3$	$\delta_2 w_2$	$\delta_3 w_1$	$\delta_4 w_3$	$\delta_5 w_2$	$\delta_6 w_1$
w	0	0	$\delta_7 w_3$	$\delta_8 w_2$	$\delta_9 w_1$	$\delta_{10} w_3$	$\delta_{11} w_2$	$\delta_{12} w_1$
w_1	w_1	0	0	0	0	w_2	w_3	0
w_2	w_2	w_2	w_1	0	0	0	0	w_3
w_3	0	w_3	0	w_1	w_2	0	0	0
a_1	a_1	0	$a_2 + \delta_{13} w_2$	$a_3 + \delta_{14} w_3$	$\beta w + \mu_1 v$	$\delta_{15} w_2$	$\delta_{16} w_3$	$\kappa w + \mu_2 v$
a_2	a_2	a_2	$\delta_{17} w_1$	$\gamma w + \mu_3 v$	$a_3 + \delta_{18} w_3$	$a_1 + \delta_{19} w_1$	$\kappa w + \mu_4 v$	$\delta_{20} w_3$
a_3	0	a_3	$\gamma w + \mu_5 v$	$\delta_{21} w_1$	$\delta_{22} w_2$	$\beta w + \mu_6 v$	$a_1 + \delta_{23} w_1$	$a_2 + \delta_{24} w_2$

Tabela 3.40: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{45} := [(V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_0] \ltimes V_3^*$

Da tabela:

$$U^{45} \simeq [(V_3 \ltimes V_0) \oplus V_0] \oplus V_3^* \iff \delta_i = \mu_j = 0.$$

24. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{46} := [V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_0)] \ltimes V_3^*$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
v	0	0	$\delta_1 w_3$	$\delta_2 w_2$	$\delta_3 w_1$	$\delta_4 w_3$	$\delta_5 w_2$	$\delta_6 w_1$
w	0	0	$\psi a_3 + \delta_7 w_3$	$\varpi a_2 + \delta_8 w_2$	$\varpi a_1 + \delta_9 w_1$	$\varsigma a_3 + \delta_{10} w_3$	$\varsigma a_2 + \delta_{11} w_2$	$\psi a_1 + \delta_{12} w_1$
w_1	w_1	0	0	0	0	w_2	w_3	0
w_2	w_2	w_2	w_1	0	0	0	0	w_3
w_3	0	w_3	0	w_1	w_2	0	0	0
a_1	a_1	0	$a_2 + \delta_{13} w_2$	$a_3 + \delta_{14} w_3$	βv	$\delta_{15} w_2$	$\delta_{16} w_3$	κv
a_2	a_2	a_2	$\delta_{17} w_1$	γv	$a_3 + \delta_{18} w_3$	$a_1 + \delta_{19} w_1$	κv	$\delta_{20} w_3$
a_3	0	a_3	γv	$\delta_{21} w_1$	$\delta_{22} w_2$	βv	$a_1 + \delta_{23} w_1$	$a_2 + \delta_{24} w_2$

Tabela 3.41: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{46} := [V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_0)] \ltimes V_3^*$

Da tabela:

$$U^{46} \simeq [V_0 \oplus (V_3 \ltimes V_0)] \oplus V_3^* \iff \delta_i = \varpi = \psi = \varsigma = 0.$$

25. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{47} := [(V_0 \ltimes V_3) \ltimes V_0] \ltimes V_3^*$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
v	0	0	$\delta_1 w_3$	$\delta_2 w_2$	$\delta_3 w_1$	$\delta_4 w_3$	$\delta_5 w_2$	$\delta_6 w_1$
w	0	0	$\omega a_3 + \delta_7 w_3$	$\theta a_2 + \delta_8 w_2$	$\theta a_1 + \delta_9 w_1$	$\sigma a_3 + \delta_{10} w_3$	$\sigma a_2 + \delta_{11} w_2$	$\omega a_1 + \delta_{12} w_1$
w_1	w_1	0	0	0	0	w_2	w_3	0
w_2	w_2	w_2	w_1	0	0	0	0	w_3
w_3	0	w_3	0	w_1	w_2	0	0	0
a_1	a_1	0	$a_2 + \delta_{13} w_2$	$a_3 + \delta_{14} w_3$	$\lambda_1 v$	$\delta_{15} w_2$	$\delta_{16} w_3$	$\lambda_2 v$
a_2	a_2	a_2	$\delta_{17} w_1$	$\lambda_3 v$	$a_3 + \delta_{18} w_3$	$a_1 + \delta_{19} w_1$	$\lambda_4 v$	$\delta_{20} w_3$
a_3	0	a_3	$\lambda_5 v$	$\delta_{21} w_1$	$\delta_{22} w_2$	$\lambda_6 v$	$a_1 + \delta_{23} w_1$	$a_2 + \delta_{24} w_2$

Tabela 3.42: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{47} := [(V_0 \ltimes V_3) \ltimes V_0] \ltimes V_3^*$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{47} \simeq [(V_0 \oplus V_3) \oplus V_0] \oplus V_3^* \iff \delta_i = \lambda_j = \theta = \eta = \iota = 0.$$

26. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{48} := [V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3)] \ltimes V_3^*$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
v	0	0	$\omega a_3 + \delta_1 w_3$	$\theta a_2 + \delta_2 w_2$	$\theta a_1 + \delta_3 w_1$	$\sigma a_3 + \delta_4 w_3$	$\sigma a_2 + \delta_5 w_2$	$\omega a_1 + \delta_6 w_1$
w	0	0	$\psi a_3 + \delta_7 w_3$	$\varpi a_2 + \delta_8 w_2$	$\varpi a_1 + \delta_9 w_1$	$\varsigma a_3 + \delta_{10} w_3$	$\varsigma a_2 + \delta_{11} w_2$	$\psi a_1 + \delta_{12} w_1$
w_1	w_1	0	0	0	0	w_2	w_3	0
w_2	w_2	w_2	w_1	0	0	0	0	w_3
w_3	0	w_3	0	w_1	w_2	0	0	0
a_1	a_1	0	$a_2 + \delta_{13} w_2$	$a_3 + \delta_{14} w_3$	0	$\delta_{15} w_2$	$\delta_{16} w_3$	0
a_2	a_2	a_2	$\delta_{17} w_1$	0	$a_3 + \delta_{18} w_3$	$a_1 + \delta_{19} w_1$	0	$\delta_{20} w_3$
a_3	0	a_3	0	$\delta_{21} w_1$	$\delta_{22} w_2$	0	$a_1 + \delta_{23} w_1$	$a_2 + \delta_{24} w_2$

Tabela 3.43: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{48} := [V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3)] \ltimes V_3^*$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{48} \simeq [V_0 \oplus (V_0 \oplus V_3)] \oplus V_3^* \iff \delta_i = \omega = \theta = \sigma = \psi = \varpi = \varsigma = \theta = \eta = \iota = 0.$$

27. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{53} := V_3^* \ltimes [V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)]$**

Com ajuda das tabelas 3.3 e 3.8 temos que a ação de $\mathfrak{sl}_3(k)$ sobre a base $\{x, y, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3\}$ de U^{35} é dada na tabela seguinte:

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
x	0	0	0	0	0	0	0	0
y	0	0	0	0	0	0	0	0
x_1	x_1	0	x_2	x_3	$\tau_1 x + \tau_2 y$	0	0	$\tau_3 x + \tau_4 y$
x_2	x_2	x_2	0	$\tau_5 x + \tau_6 y$	x_3	x_1	$\tau_7 x + \tau_8 y$	0
x_3	0	x_3	$\tau_9 x + \tau_{10} y$	0	0	$\tau_{11} x + \tau_{12} y$	x_1	x_2
y_1	y_1	0	$\delta_1 x_2$	$\delta_2 x_3$	$\delta_3 x + \delta_4 y$	$y_2 + \delta_5 x_2$	$y_3 + \delta_6 x_3$	$\delta_7 x + \delta_8 y$
y_2	y_2	y_2	$y_1 + \delta_9 x_1$	$\delta_{10} x + \delta_{11} y$	$\delta_{12} x_3$	$\delta_{13} x_1$	$\delta_{14} x + \delta_{15} y$	$y_3 + \delta_{16} x_3$
y_3	0	y_3	$\delta_{17} x + \delta_{18} y$	$y_1 + \delta_{19} x_1$	$y_2 + \delta_{20} x_2$	$\delta_{21} x + \delta_{22} y$	$\delta_{23} x_1$	$\delta_{24} x_2$

Tabela 3.44: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{53} := V_3^* \ltimes [V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)]$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{53} \simeq V_3^* \oplus [V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \iff \delta_i = 0.$$

Nesse caso, a tabela anterior fica assim:

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
x	0	0	0	0	0	0	0	0
y	0	0	0	0	0	0	0	0
x_1	x_1	0	x_2	x_3	$\tau_1 x + \tau_2 y$	0	0	$\tau_3 x + \tau_4 y$
x_2	x_2	x_2	0	$\tau_5 x + \tau_6 y$	x_3	x_1	$\tau_7 x + \tau_8 y$	0
x_3	0	x_3	$\tau_9 x + \tau_{10} y$	0	0	$\tau_{11} x + \tau_{12} y$	x_1	x_2
y_1	y_1	0	0	0	0	y_2	y_3	0
y_2	y_2	y_2	y_1	0	0	0	0	y_3
y_3	0	y_3	0	y_1	y_2	0	0	0

Tabela 3.45: $O \mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{53} := V_3^* \oplus [V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)]$

28. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{54} := V_3^* \ltimes [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3]$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
a	0	0	ϑv_3	ηv_2	ηv_1	ιv_3	ιv_2	ϑv_1
b	0	0	$\vartheta_1 v_3$	$\eta_1 v_2$	$\eta_1 v_1$	$\iota_1 v_3$	$\iota_1 v_2$	$\vartheta_1 v_1$
v_1	v_1	0	v_2	v_3	0	0	0	0
v_2	v_2	v_2	0	0	v_3	v_1	0	0
v_3	0	v_3	0	0	0	0	v_1	v_2
y_1	y_1	0	$\delta_1 v_2$	$\delta_2 v_3$	$\delta_3 a + \delta_4 b$	$y_2 + \delta_5 v_2$	$y_3 + \delta_6 v_3$	$\delta_7 a + \delta_8 b$
y_2	y_2	y_2	$y_1 + \delta_9 v_1$	$\delta_{10} a + \delta_{11} b$	$\delta_{12} v_3$	$\delta_{13} v_1$	$\delta_{14} a + \delta_{15} b$	$y_3 + \delta_{16} v_3$
y_3	0	y_3	$\delta_{17} a + \delta_{18} b$	$y_1 + \delta_{19} v_1$	$y_2 + \delta_{20} v_2$	$\delta_{21} a + \delta_{22} b$	$\delta_{23} v_1$	$\delta_{24} v_2$

Tabela 3.46: $O \mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{54} := V_3^* \ltimes [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3]$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{54} \simeq V_3^* \oplus [(V_0 \ltimes V_0) \oplus V_3] \iff \delta_i = \vartheta = \iota = \eta = \vartheta_1 = \iota_1 = \eta_1 = 0.$$

29. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{57} := V_3^* \ltimes [(V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_0]$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
v	0	0	0	0	0	0	0	0
j	0	0	0	0	0	0	0	0
j_1	j_1	0	j_2	j_3	$\beta j + \mu_1 v$	0	0	$\kappa j + \mu_2 v$
j_2	j_2	j_2	0	$\gamma j + \mu_3 v$	j_3	j_1	$\kappa j + \mu_4 v$	0
j_3	0	j_3	$\gamma j + \mu_5 v$	0	0	$\beta j + \mu_6 v$	j_1	j_2
y_1	y_1	0	$\delta_1 j_2$	$\delta_2 j_3$	$\delta_3 v + \delta_4 j$	$y_2 + \delta_5 j_2$	$y_3 + \delta_6 j_3$	$\delta_7 v + \delta_8 j$
y_2	y_2	y_2	$y_1 + \delta_9 j_1$	$\delta_{10} v + \delta_{11} j$	$\delta_{12} j_3$	$\delta_{13} j_1$	$\delta_{14} v + \delta_{15} j$	$y_3 + \delta_{16} j_3$
y_3	0	y_3	$\delta_{17} v + \delta_{18} j$	$y_1 + \delta_{19} j_1$	$y_2 + \delta_{20} j_2$	$\delta_{21} v + \delta_{22} j$	$\delta_{23} j_1$	$\delta_{24} j_2$

Tabela 3.47: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{57} := V_3^* \ltimes [(V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_0]$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{57} \simeq V_3^* \oplus [(V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_0] \iff \delta_i = 0$$

30. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{58} := V_3^* \ltimes [V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_0)]$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
v	0	0	ψa_3	ϖa_2	ϖa_1	ςa_3	ςa_2	ψa_3
a	0	0	0	0	0	0	0	0
a_1	a_1	0	a_2	a_3	βa	0	0	κj
a_2	a_2	a_2	0	γa	a_3	a_1	κa	0
a_3	0	a_3	γa	0	0	βa	a_1	a_2
y_1	y_1	0	$\delta_1 a_2$	$\delta_2 a_3$	$\delta_3 v + \delta_4 a$	$y_2 + \delta_5 a_2$	$y_3 + \delta_6 a_3$	$\delta_7 v + \delta_8 a$
y_2	y_2	y_2	$y_1 + \delta_9 a_1$	$\delta_{10} v + \delta_{11} a$	$\delta_{12} a_3$	$\delta_{13} a_1$	$\delta_{14} v + \delta_{15} a$	$y_3 + \delta_{16} j_3$
y_3	0	y_3	$\delta_{17} v + \delta_{18} a$	$y_1 + \delta_{19} a_1$	$y_2 + \delta_{20} a_2$	$\delta_{21} v + \delta_{22} a$	$\delta_{23} a_1$	$\delta_{24} a_2$

Tabela 3.48: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{58} := V_3^* \ltimes [V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_0)]$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{58} \simeq V_3^* \oplus [V_0 \oplus (V_3 \ltimes V_0)] \iff \delta_i = \varpi = \psi = \varsigma = 0$$

31. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{59} := V_3^* \ltimes [(V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_0]$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
a	0	0	0	0	0	0	0	0
j	0	0	ωj_3	θj_2	θj_1	σj_3	σj_2	ωj_1
j_1	j_1	0	j_2	j_3	$\lambda_1 a$	0	0	$\lambda_2 a$
j_2	j_2	j_2	0	$\lambda_3 a$	j_3	j_1	$\lambda_4 a$	0
j_3	0	j_3	$\lambda_5 a$	0	0	$\lambda_6 a$	j_1	j_2
y_1	y_1	0	$\delta_1 j_2$	$\delta_2 j_3$	$\delta_3 a + \delta_4 j$	$y_2 + \delta_5 j_2$	$y_3 + \delta_6 j_3$	$\delta_7 a + \delta_8 j$
y_2	y_2	y_2	$y_1 + \delta_9 j_1$	$\delta_{10} a + \delta_{11} j$	$\delta_{12} j_3$	$\delta_{13} j_1$	$\delta_{14} a + \delta_{15} j$	$y_3 + \delta_{16} j_3$
y_3	0	y_3	$\delta_{17} a + \delta_{18} j$	$y_1 + \delta_{19} j_1$	$y_2 + \delta_{20} j_2$	$\delta_{21} a + \delta_{22} j$	$\delta_{23} j_1$	$\delta_{24} j_2$

Tabela 3.49: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{59} := V_3^* \ltimes [(V_0 \ltimes V_3) \ltimes V_0]$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{59} \simeq V_3^* \oplus [(V_3 \ltimes V_0) \oplus V_0] \iff \delta_i = \lambda_j = 0$$

32. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{60} := V_3^* \ltimes [V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3)]$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
w	0	0	ψa_3	ϖv_2	ϖv_1	ςv_3	ςv_2	ψv_3
v	0	0	ωv_3	θv_2	θv_1	σv_3	σv_2	ωv_1
v_1	v_1	0	v_2	v_3	0	0	0	0
v_2	v_2	v_2	0	0	v_3	v_1	0	0
v_3	0	v_3	0	0	0	0	v_1	v_2
y_1	y_1	0	$\delta_1 v_2$	$\delta_2 v_3$	$\delta_3 v + \delta_4 w$	$y_2 + \delta_5 v_2$	$y_3 + \delta_6 v_3$	$\delta_7 v + \delta_8 w$
y_2	y_2	y_2	$y_1 + \delta_9 v_1$	$\delta_{10} v + \delta_{11} w$	$\delta_{12} v_3$	$\delta_{13} v_1$	$\delta_{14} v + \delta_{15} w$	$y_3 + \delta_{16} j_3$
y_3	0	y_3	$\delta_{17} v + \delta_{18} w$	$y_1 + \delta_{19} v_1$	$y_2 + \delta_{20} v_2$	$\delta_{21} v + \delta_{22} w$	$\delta_{23} v_1$	$\delta_{24} v_2$

Tabela 3.50: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{60} := V_3^* \ltimes [V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3)]$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{60} \simeq V_3^* \oplus [V_0 \oplus (V_0 \ltimes V_3)] \iff \delta_i = \varpi = \psi = \varsigma = \omega = \theta = \sigma = 0$$

33. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{65} := (V_3^* \ltimes V_3) \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
v	0	0	0	0	0	0	0	0
w	0	0	0	0	0	0	0	0
v_1	v_1	0	v_2	v_3	$\delta_1 v + \delta_2 w$	0	0	$\delta_3 v + \delta_4 w$
v_2	v_2	v_2	0	$\delta_5 v + \delta_6 w$	v_3	v_1	$\delta_7 v + \delta_8 w$	0
v_3	0	v_3	$\delta_9 v + \delta_{10} w$	0	0	$\delta_{11} v + \delta_{12} w$	v_1	v_2
u_1	u_1	0	αv_2	αv_3	$\delta_{13} v + \delta_{14} w$	$u_2 + \gamma v_2$	$u_3 + \beta v_3$	$\delta_{15} v + \delta_{16} w$
u_2	u_2	u_2	$u_1 + \alpha v_1$	$\delta_{17} v + \delta_{18} w$	γv_3	γv_1	$\delta_{19} v + \delta_{20} w$	$u_3 + \beta v_3$
u_3	0	u_3	$\delta_{21} v + \delta_{22} w$	$u_1 + \alpha v_1$	$u_2 + \gamma v_2$	$\delta_{23} v + \delta_{24} w$	βv_1	βv_2

Tabela 3.51: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{65} := (V_3^* \ltimes V_3) \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$

Da tabela anterior e de 3.2.4.1 temos que:

$$U^{65} \simeq (V_3^* \oplus V_3) \oplus (V_0 \oplus V_0) \iff \delta_i = \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

34. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{67} := (V_3 \ltimes V_3^*) \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
v	0	0	0	0	0	0	0	0
w	0	0	0	0	0	0	0	0
w_1	w_1	0	0	0	$\delta_1 v + \delta_2 w$	w_2	w_3	0
w_2	w_2	w_2	w_1	$\delta_5 v + \delta_6 w$	0	0	$\delta_7 v + \delta_8 w$	w_3
w_3	0	w_3	$\delta_9 v + \delta_{10} w$	w_1	w_2	$\delta_{11} v + \delta_{12} w$	0	0
u_1	u_1	0	$u_2 + \alpha w_2$	$u_3 + \gamma w_3$	$\delta_{13} v + \delta_{14} w$	βw_2	βw_3	$\delta_{15} v + \delta_{16} w$
u_2	u_2	u_2	αw_1	$\delta_{17} v + \delta_{18} w$	$u_3 + \gamma w_3$	$u_1 + \beta v_1$	$\delta_{19} v + \delta_{20} w$	αw_3
u_3	0	u_3	$\delta_{21} v + \delta_{22} w$	γw_1	γw_2	$\delta_{23} v + \delta_{24} w$	$u_1 + \beta w_1$	$u_2 + \alpha w_2$

Tabela 3.52: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{67} := (V_3 \ltimes V_3^*) \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$

Da tabela anterior e de 3.2.4.3. temos que:

$$U^{67} \simeq (V_3^* \oplus V_3) \oplus (V_0 \oplus V_0) \iff \delta_i = \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

35. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{101} := (V_0 \ltimes V_0) \ltimes (V_3^* \ltimes V_3)$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
v_1	v_1	0	v_2	v_3	0	0	0	0
v_2	v_2	v_2	0	0	v_3	v_1	0	0
v_3	0	v_3	0	0	0	0	v_1	v_2
u_1	u_1	0	αv_2	αv_3	0	$u_2 + \gamma v_2$	$u_3 + \beta v_3$	0
u_2	u_2	u_2	$u_1 + \alpha v_1$	0	γv_3	γv_1	0	$u_3 + \beta v_3$
u_3	0	u_3	0	$u_1 + \alpha v_1$	$u_2 + \gamma v_2$	0	βv_1	βv_2
u	0	0	$\delta_1 v_3 + \delta_2 u_3$	$\delta_3 v_2 + \delta_4 u_2$	$\delta_5 v_1 + \delta_6 u_1$	$\delta_7 v_3 + \delta_8 u_3$	$\delta_9 v_2 + \delta_{10} u_2$	$\delta_{11} v_1 + \delta_{12} u_1$
v	0	0	$\delta_{13} v_3 + \delta_{14} u_3$	$\delta_{15} v_2 + \delta_{16} u_2$	$\delta_{17} v_1 + \delta_{18} u_1$	$\delta_{19} v_3 + \delta_{20} u_3$	$\delta_{21} v_2 + \delta_{22} u_2$	$\delta_{23} v_1 + \delta_{24} u_1$

Tabela 3.53: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos $U^{101} := (V_0 \ltimes V_0) \ltimes (V_3^* \ltimes V_3)$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{101} \simeq (V_0 \oplus V_0) \oplus (V_3^* \oplus V_3) \iff \delta_i = \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

36. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{103} := (V_0 \ltimes V_0) \ltimes (V_3 \ltimes V_3^*)$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
w_1	w_1	0	0	0	0	v_2	w_3	0
w_2	w_2	w_2	w_1	0	0	0	0	w_3
w_3	0	w_3	0	w_1	w_2	0	0	0
u_1	u_1	0	$u_2 + \alpha w_2$	$u_3 + \gamma w_3$	0	βw_2	βw_3	0
u_2	u_2	u_2	αw_1	0	$u_3 + \gamma w_3$	$u_1 + \beta w_1$	0	αw_3
u_3	0	u_3	0	γw_1	γw_2	0	$u_1 + \beta w_1$	$u_2 + \alpha w_2$
w	0	0	$\delta_1 w_3 + \delta_2 u_3$	$\delta_3 w_2 + \delta_4 u_2$	$\delta_5 w_1 + \delta_6 u_1$	$\delta_7 w_3 + \delta_8 u_3$	$\delta_9 w_2 + \delta_{10} u_2$	$\delta_{11} w_1 + \delta_{12} u_1$
u	0	0	$\delta_{13} w_3 + \delta_{14} u_3$	$\delta_{15} w_2 + \delta_{16} u_2$	$\delta_{17} w_1 + \delta_{18} u_1$	$\delta_{19} w_3 + \delta_{20} u_3$	$\delta_{21} w_2 + \delta_{22} u_2$	$\delta_{23} w_1 + \delta_{24} u_1$

Tabela 3.54: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos $U^{103} := (V_0 \ltimes V_0) \ltimes (V_3 \ltimes V_3^*)$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{103} \simeq (V_0 \oplus V_0) \oplus (V_3 \oplus V_3^*) \iff \delta_i = \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

37. *Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{138} := [(V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_3^*] \ltimes V_0$*

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
a	0	0	0	0	0	0	0	0
a_1	a_1	0	0	0	$\lambda_1 a$	a_2	a_3	$\lambda_2 a$
a_2	a_2	a_2	a_1	$\lambda_3 a$	0	0	$\lambda_4 a$	0
a_3	0	a_3	$\lambda_5 a$	a_1	a_2	$\lambda_6 a$	0	0
b	0	0	$\delta_1 a_3$	$\delta_2 a_2$	$\delta_3 a_1$	$\delta_4 a_3$	$\delta_5 a_2$	$\delta_6 a_1$
b_1	b_1	0	$b_2 + \delta_7 a_2$	$b_3 + \delta_8 a_3$	$\beta b + \lambda_7 a$	$\delta_9 a_2$	$\delta_{10} a_3$	$\kappa b + \lambda_8 a$
b_2	b_2	b_2	$\delta_{11} a_1$	$\gamma b + \lambda_9 a$	$b_3 + \delta_{12} a_3$	$b_1 + \delta_{13} a_1$	$\kappa b + \lambda_{10} a$	$\delta_{14} a_3$
b_3	0	b_3	$\gamma b + \lambda_{11} a$	$\delta_{15} a_1$	$\delta_{16} a_2$	$\beta b + \lambda_{12} a$	$b_1 + \delta_{17} a_1$	$b_2 + \delta_{18} a_2$

Tabela 3.55: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos $U^{138} := [(V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_3^*] \ltimes V_0$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{138} \simeq [(V_3 \oplus V_0) \oplus V_3^*] \oplus V_0 \iff \delta_i = \lambda_j = \kappa = \beta = \gamma = 0.$$

38. *Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{139} := [V_3^* \ltimes (V_3 \ltimes V_0)] \ltimes V_0$*

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
i	0	0	0	0	0	0	0	0
i_1	i_1	0	i_2	i_3	$\beta i + \lambda_1 a$	0	0	$\kappa i + \lambda_2 a$
i_2	i_2	i_2	0	$\gamma i + \lambda_3 a$	i_3	i_1	$\kappa i + \lambda_4 a$	0
i_3	0	i_3	$\gamma i + \lambda_5 a$	0	0	$\beta i + \lambda_6 a$	i_1	i_2
a_1	a_1	0	$\delta_1 i_2$	$\delta_2 i_3$	$\delta_3 i + \lambda a$	$a_2 + \delta_4 i_2$	$a_3 + \delta_5 i_3$	$\delta_6 i + \lambda_8 a$
a_2	a_2	a_2	$a_1 + \delta_7 i_1$	$\delta_8 i + \lambda_9 a$	$\delta_9 i_3$	$\delta_{10} i_1$	$\delta_{11} i + \lambda_{10} a$	$a_3 + \delta_{12} i_3$
a_3	0	a_3	$\delta_{13} i + \lambda_{11} a$	$a_1 + \delta_{14} i_1$	$a_2 + \delta_{15} i_2$	$\delta_{16} i + \lambda_{12} a$	$\delta_{17} i_1$	$\delta_{18} i_2$
a	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 3.56: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos $U^{139} := [V_3^* \ltimes (V_3 \ltimes V_0)] \ltimes V_0$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{139} \simeq [V_3^* \oplus (V_3 \oplus V_0)] \oplus V_0 \iff \delta_i = \lambda_j = \kappa = \beta = \gamma = 0.$$

39. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{142} := [(V_0 \ltimes V_3) \ltimes V_3^*] \ltimes V_0$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
x	0	0	0	0	0	0	0	0
x_1	x_1	0	0	0	$\lambda_1 x$	x_2	x_3	$\lambda_2 x$
x_2	x_2	x_2	x_1	$\lambda_3 x$	0	0	$\lambda_4 x$	x_3
x_3	0	x_3	$\lambda_5 x$	x_1	x_2	$\lambda_6 x$	0	0
a_1	a_1	0	$a_2 + \delta_7 x_2$	$a_3 + \delta_8 x_3$	$\lambda_7 x$	$\delta_{10} x_2$	$\delta_{11} x_3$	$\lambda_8 x$
a_2	a_2	a_2	$\delta_7 x_1$	$\lambda_9 x$	$a_3 + \delta_9 x_3$	$a_1 + \delta_{10} x_1$	$\lambda_{10} x$	$\delta_{12} x_3$
a_3	0	a_3	$\lambda_{11} x$	$\delta_8 x_1$	$\delta_9 x_2$	$\lambda_{12} x$	$a_1 + \delta_{11} x_1$	$a_2 + \delta_{12} x_2$
a	0	0	$\omega a_3 + \delta_1 x_3$	$\theta a_2 + \delta_2 x_2$	$\theta a_1 + \delta_3 x_1$	$\sigma a_3 + \delta_4 x_3$	$\sigma a_2 + \delta_5 x_2$	$\omega a_1 + \delta_6 x_1$

Tabela 3.57: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos $U^{142} := [(V_0 \ltimes V_3) \ltimes V_3^*] \ltimes V_0$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{142} \simeq [(V_0 \oplus V_3) \oplus V_3^*] \oplus V_0 \iff \delta_i = \lambda_j = \omega = \theta = \sigma = 0.$$

40. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{143} := [V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_3)] \ltimes V_0$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
v	0	0	αv_3	ξv_2	ξv_1	βv_3	βv_2	αv_1
v_1	v_1	0	v_2	v_3	$\lambda_1 y$	0	0	$\lambda_2 y$
v_2	v_2	v_2	0	$\lambda_3 y$	v_3	v_1	$\lambda_4 y$	0
v_3	0	v_3	$\lambda_5 y$	0	0	$\lambda_6 y$	v_1	v_2
y_1	y_1	0	$\delta_1 v_2$	$\delta_2 v_3$	$\delta_3 v + \lambda_7 y$	$\delta_4 v_2$	$\delta_5 v_3$	$\delta_6 + \lambda_8 y$
y_2	y_2	y_2	$y_1 + \delta_7 v_1$	$\delta_8 v + \lambda_9 y$	$\delta_9 v_3$	$\delta_{10} v_1$	$\delta_{11} v + \lambda_{10} y$	$y_3 + \delta_{12} v_3$
y_3	0	y_3	$\delta_{13} v + \lambda_{11} y$	$y_1 + \delta_{14} v_1$	$y_2 + \delta_{15} v_2$	$\delta_{16} v + \lambda_{12} y$	$\delta_{17} v_1$	$\delta_{18} v_2$
y	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 3.58: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos $U^{143} := [V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_3)] \ltimes V_0$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{143} \simeq [V_3^* \oplus (V_0 \oplus V_3)] \oplus V_0 \iff \delta_i = \lambda_j = \alpha = \beta = \xi = 0.$$

41. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{144} := [(V_3^* \ltimes V_0) \ltimes V_3] \ltimes V_0$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
v	0	0	0	0	0	0	0	0
v_1	v_1	0	v_2	v_3	$\lambda_1 v$	0	0	$\lambda_2 v$
v_2	v_2	v_2	0	$\lambda_3 v$	v_3	v_1	$\lambda_4 v$	0
v_3	0	v_3	$\lambda_5 v$	0	0	$\lambda_6 v$	v_1	v_2
u_1	u_1	0	$\delta_7 v_2$	$\delta_8 v_3$	$\pi u + \lambda_1 v$	$u_2 + \delta_9 v_2$	$u_3 + \delta_{10} v_3$	$\lambda u + \lambda_2 v$
u_2	u_2	u_2	$u_1 + \delta_{11} v_1$	$\pi u + \lambda_3 v$	$\delta_{12} v_3$	$\delta_{13} v_1$	$\xi u + \lambda_4 v$	$u_3 + \delta_{14} v_3$
u_3	0	u_3	$\lambda u + \lambda_5 v$	$u_1 + \delta_{15} v_1$	$u_2 + \delta_{16} v_2$	$\xi u + \lambda_6 v$	$\delta_{17} v_1$	$\delta_{18} v_2$
u	0	0	$\delta_1 v_3$	$\delta_2 v_2$	$\delta_3 v_1$	$\delta_4 v_3$	$\delta_5 v_2$	$\delta_6 v_1$

Tabela 3.59: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos $U^{144} := [(V_3^* \ltimes V_0) \ltimes V_3] \ltimes V_0$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{144} \simeq [(V_3^* \oplus V_0) \oplus V_3] \oplus V_0 \iff \delta_i = \lambda_j = \pi = \lambda = \xi = 0.$$

42. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{145} := [V_3 \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)] \ltimes V_0$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
u	0	0	0	0	0	0	0	0
u_1	u_1	0	0	0	$\pi u + \lambda_1 g$	u_2	u_3	$\lambda u + \lambda_2 g$
u_2	u_2	u_2	u_1	$\pi u + \lambda_3 g$	0	0	$\xi u + \lambda_4 g$	u_3
u_3	0	u_3	$\lambda u + \lambda_5 g$	u_1	u_2	$\xi u + \lambda_6 g$	0	0
g_1	g_1	0	$g_2 + \delta_1 u_2$	$g_3 + \delta_2 u_3$	$\delta_3 u + \lambda_7 g$	$\delta_4 u_2$	$\delta_5 u_3$	$\delta_6 + \lambda_8 g$
g_2	g_2	g_2	$\delta_7 u_1$	$\delta_8 u + \lambda_9 g$	$g_3 + \delta_9 u_3$	$g_1 + \delta_{10} u_1$	$\delta_{11} u + \lambda_{10} g$	$\delta_{12} u_3$
g_3	0	g_3	$\delta_{13} u + \lambda_{11} g$	$\delta_{14} u_1$	$\delta_{15} u_2$	$\delta_{16} u + \lambda_{12} g$	$g_1 + \delta_{17} u_1$	$g_2 + \delta_{18} u_2$
g	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 3.60: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos $U^{145} := [V_3 \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)] \ltimes V_0$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{145} \simeq [V_3 \oplus (V_3^* \oplus V_0)] \oplus V_0 \iff \delta_i = \lambda_j = \pi = \xi = \lambda = 0.$$

43. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{148} := [(V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes V_3] \ltimes V_0$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
v	0	0	0	0	0	0	0	0
v_1	v_1	0	v_2	v_3	$\lambda_1 v$	0	0	$\lambda_2 v$
v_2	v_2	v_2	0	$\lambda_3 v$	v_3	v_1	$\lambda_4 v$	0
v_3	0	v_3	$\lambda_5 v$	0	0	$\lambda_6 v$	v_1	v_2
o_1	o_1	0	$\delta_7 v_2$	$\delta_8 v_3$	$\lambda_7 v$	$o_2 + \delta_9 v_2$	$o_3 + \delta_{10} v_3$	$\lambda_8 v$
o_2	o_2	o_2	$o_1 + \delta_{11} v_1$	$\lambda_9 v$	$\delta_{12} v_3$	$\delta_{13} v_1$	$\lambda_{10} v$	$o_3 + \delta_{14} v_3$
o_3	0	o_3	$\lambda_{11} v$	$o_1 + \delta_{15} v_1$	$o_2 + \delta_{16} v_2$	$\lambda_{12} v$	$\delta_{17} v_1$	$\delta_{18} v_2$
o	0	0	$\delta o_3 + \delta_1 v_3$	$\delta o_2 + \delta_2 v_2$	$\alpha o_1 + \delta_3 v_1$	$\alpha o_3 + \delta_4 v_3$	$\zeta o_2 + \delta_5 v_2$	$\zeta o_1 + \delta_6 v_1$

Tabela 3.61: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos $U^{148} := [(V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes V_3] \ltimes V_0$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{148} \simeq [(V_0 \oplus V_3^*) \oplus V_3] \oplus V_0 \iff \delta_i = \lambda_j = \delta = \alpha = \zeta = 0.$$

44. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{149} := [V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)] \ltimes V_0$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
y	0	0	0	0	0	0	0	0
w_1	w_1	0	0	0	$\lambda_1 y$	w_2	w_3	$\lambda_2 y$
w_2	w_2	w_2	w_1	$\lambda_3 y$	0	0	$\lambda_4 y$	w_3
w_3	0	w_3	$\lambda_5 y$	w_1	w_2	$\lambda_6 y$	0	0
y_1	y_1	0	$y_2 + \delta_1 w_2$	$y_3 + \delta_2 w_3$	$\delta_3 w + \lambda_7 y$	$\delta_4 w_2$	$\delta_5 w_3$	$\delta_6 w + \lambda_8 y$
y_2	y_2	y_2	$\delta_7 w_1$	$\delta_8 w + \lambda_9 y$	$y_3 + \delta_9 w_3$	$y_1 + \delta_{10} w_1$	$\delta_{11} w + \lambda_{10} y$	$\delta_{12} w_3$
y_3	0	y_3	$\delta_{13} w + \lambda_{11} y$	$\delta_{14} w_1$	$\delta_{15} w_2$	$\delta_{16} w + \lambda_{12} y$	$y_1 + \delta_{17} w_1$	$y_2 + \delta_{18} w_2$
w	0	0	δw_3	δw_2	αw_1	αw_3	ζw_2	ζw_1

Tabela 3.62: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos $U^{149} := [V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)] \ltimes V_0$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{149} \simeq [V_3 \oplus (V_0 \oplus V_3^*)] \oplus V_0 \iff \delta_i = \lambda_j = \delta = \alpha = \zeta = 0.$$

45. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{178} := [(V_3^* \ltimes V_3) \ltimes V_0] \ltimes V_0$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
x	0	0	0	0	0	0	0	0
x_1	x_1	0	x_2	x_3	$\delta_1 x + \lambda_1 y$	0	0	$\delta_2 x + \lambda_2 y$
x_2	x_2	x_2	0	$\delta_3 x + \lambda_3 y$	x_3	x_1	$\delta_4 x + \lambda_4 y$	0
x_3	0	x_3	$\delta_5 x + \lambda_5 y$	0	0	$\delta_6 x + \lambda_6 y$	x_1	x_2
y_1	y_1	0	αx_2	αx_3	$\delta_7 x + \lambda_7 y$	$y_2 + \gamma x_2$	$y_3 + \beta x_3$	$\delta_8 x + \lambda_8 y$
y_2	y_2	y_2	$y_1 + \alpha x_1$	$\delta_9 x + \lambda_9 y$	γx_3	γx_1	$\delta_{10} x + \lambda_{10} y$	$y_3 + \beta x_3$
y_3	0	y_3	$\delta_{11} x + \lambda_{11} y$	$y_1 + \alpha y_1$	$y_2 + \gamma x_2$	$\delta_{12} x + \lambda_{12} y$	βx_1	βx_2
y	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 3.63: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos $U^{178} := [(V_3^* \ltimes V_3) \ltimes V_0] \ltimes V_0$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{178} \simeq [(V_3^* \oplus V_3) \oplus V_0] \oplus V_0 \iff \delta_i = \lambda_j = \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

46. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{179} := [V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_3^*)] \ltimes V_0$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
x	0	0	$\delta_1 x_3 + \delta_2 y_3$	$\delta_3 x_2 + \delta_4 y_2$	$\delta_5 x_1 + \delta_6 y_1$	$\delta_7 x_3 + \delta_8 y_3$	$\delta_9 x_2 + \delta_{10} y_2$	$\delta_{11} x_1 + \delta_{12} y_1$
x_1	x_1	0	0	0	$\lambda_1 y$	x_2	x_3	$\lambda_2 y$
x_2	x_2	x_2	x_1	$\lambda_3 y$	0	0	$\lambda_4 y$	x_3
x_3	0	x_3	$\lambda_5 y$	x_1	x_2	$\lambda_6 y$	0	0
y_1	y_1	0	$y_2 + \alpha x_2$	$y_3 + \gamma x_3$	$\lambda_7 y$	βx_2	βx_3	$\lambda_8 y$
y_2	y_2	y_2	αx_1	$\lambda_9 y$	$y_3 + \gamma x_3$	$y_1 + \beta x_1$	$\lambda_{10} y$	0
y_3	0	y_3	$\lambda_{11} y$	γx_1	γx_2	$\lambda_{12} y$	$y_1 + \beta x_1$	x_2
y	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 3.64: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos $U^{179} := [V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_3^*)] \ltimes V_0$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{179} \simeq [V_0 \oplus (V_3 \oplus V_3^*)] \oplus V_0 \iff \delta_i = \lambda_j = \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

47. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{180} := [(V_3 \ltimes V_3^*) \ltimes V_0] \ltimes V_0$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
k	0	0	0	0	0	0	0	0
k_1	k_1	0	0	0	$\delta_1 k + \lambda_1 n$	k_2	k_3	$\delta_2 k + \lambda_2 n$
k_2	k_2	k_2	k_1	$\delta_3 k + \lambda_3 n$	0	0	$\delta_4 k + \lambda_4 n$	k_3
k_3	0	k_3	$\delta_5 k + \lambda_5 n$	k_1	k_2	$\delta_6 k + \lambda_6 n$	0	0
n_1	n_1	0	$n_2 + \alpha k_2$	$n_3 + \gamma k_3$	$\delta_7 k + \lambda_7 n$	βk_2	βk_3	$\delta_8 k + \lambda_8 n$
n_2	n_2	n_2	αk_1	$\delta_9 k + \lambda_9 n$	$n_3 + \gamma k_3$	$n_1 + \beta k_1$	$\delta_{10} k + \lambda_{10} n$	αk_3
n_3	0	n_3	$\delta_{11} k + \lambda_{11} n$	γk_1	γk_2	$\delta_{12} k + \lambda_{12} n$	$n_1 + \beta k_1$	$n_2 + \alpha k_2$
n	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 3.65: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos $U^{180} := [(V_3 \ltimes V_3^*) \ltimes V_0] \ltimes V_0$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{180} \simeq [(V_3 \oplus V_3^*) \oplus V_0] \oplus V_0 \iff \delta_i = \lambda_j = \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

48. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{184} := [V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes V_3)] \ltimes V_0$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
x	0	0	$\delta_1 x_3 + \delta_2 y_3$	$\delta_3 x_2 + \delta_4 y_2$	$\delta_5 x_1 + \delta_6 y_1$	$\delta_7 x_3 + \delta_8 y_3$	$\delta_9 x_2 + \delta_{10} y_2$	$\delta_{11} x_1 + \delta_{12} y_1$
x_1	x_1	0	x_2	x_3	$\delta_{13} y$	0	0	$\delta_{14} y$
x_2	x_2	x_2	0	$\delta_{15} y$	x_3	x_1	$\delta_{16} y$	0
x_3	0	x_3	$\delta_{17} y$	0	0	$\delta_{18} y$	x_1	x_2
y_1	y_1	0	αx_2	γx_3	$\delta_{19} y$	$y_2 + \gamma x_2$	$y_3 + \beta x_3$	$\delta_{20} y$
y_2	y_2	y_2	$y_1 + \alpha x_1$	$\delta_{21} y$	γx_3	γx_1	$\delta_{22} y$	$y_3 + \beta x_3$
y_3	0	y_3	$\delta_{23} y$	$y_1 + \alpha x_1$	$y_2 + \gamma x_2$	$\delta_{24} y$	βx_1	βx_2
y	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 3.66: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos $U^{184} := [V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes V_3)] \ltimes V_0$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{184} \simeq [V_0 \oplus (V_3^* \oplus V_3)] \oplus V_0 \iff \delta_i = \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

49. *Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{253} := V_0 \ltimes [(V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_3^*]$*

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
l_1	l_1	0	0	0	0	l_2	l_3	0
l_2	l_2	l_2	l_1	0	0	0	0	l_3
l_3	0	l_3	0	l_1	l_2	0	0	0
u_1	u_1	0	$u_2 + \delta_7 l_2$	$u_3 + \delta_8 l_3$	βu	$\delta_9 l_2$	$\delta_{10} l_3$	κu
u_2	u_2	u_2	$\delta_{11} l_1$	γu	$u_3 + \delta_{12} l_3$	$u_1 + \delta_{13} l_1$	λu	$\delta_{14} l_3$
u_3	0	u_3	γu	$\delta_{15} l_1$	$\delta_{16} l_2$	βu	$u_1 + \delta_{17} l_1$	$u_2 + \delta_{18} l_2$
b	0	0	$\delta_{18} l_3 + \delta_{19} u_3$	$\delta_{20} l_2 + \delta_{21} u_2$	$\delta_{22} l_1 + \delta_{23} u_1$	$\delta_{24} l_3 + \delta_{25} u_3$	$\delta_{26} l_2 + \delta_{27} u_2$	$\delta_{28} l_1 + \delta_{29} u_1$
u	0	0	$\delta_1 l_3$	$\delta_2 l_2$	$\delta_3 l_1$	$\delta_4 l_3$	$\delta_5 l_2$	$\delta_6 l_1$

Tabela 3.67: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos $U^{253} := V_0 \ltimes [(V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_3^*]$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{253} \simeq V_0 \oplus [(V_3 \ltimes V_0) \oplus V_3^*] \iff \delta_i = 0.$$

50. *Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{254} := V_0 \ltimes [V_3^* \ltimes (V_3 \ltimes V_0)]$*

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
a	0	0	0	0	0	0	0	0
a_1	a_1	0	a_2	a_3	βa	0	0	κa
a_2	a_2	a_2	0	γa	a_3	a_1	κa	0
a_3	0	a_3	γa	0	0	βa	a_1	a_2
c_1	c_1	0	$\delta_1 a_2$	$\delta_2 a_3$	$\delta_3 a$	$c_2 + \delta_4 a_2$	$c_3 + \delta_5 a_3$	$\delta_6 a$
c_2	c_2	c_2	$c_1 + \delta_7 a_1$	$\delta_8 a$	$\delta_9 a_3$	$\delta_{10} a_1$	$\delta_{11} a$	$c_3 + \delta_{12} a_3$
c_3	0	c_3	$\delta_{13} a$	$c_1 + \delta_{14} a_1$	$c_2 + \delta_{15} a_2$	$\delta_{16} a$	$\delta_{17} a_1$	$\delta_{18} a_2$
u	0	0	$\delta_{19} a_3 + \delta_{20} c_3$	$\delta_{21} a_2 + \delta_{22} c_2$	$\delta_{23} a_1 + \delta_{24} c_1$	$\delta_{25} a_3 + \delta_{26} c_3$	$\delta_{27} a_2 + \delta_{28} c_2$	$\delta_{29} a_1 + \delta_{30} c_1$

Tabela 3.68: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos $U^{254} := V_0 \ltimes [V_3^* \ltimes (V_3 \ltimes V_0)]$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{254} \simeq V_0 \oplus [(V_3^* \oplus (V_3 \ltimes V_0))] \iff \delta_i = 0.$$

51. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{257} := V_0 \ltimes [(V_0 \ltimes V_3) \ltimes V_3^*]$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
l_1	0	0	0	0	0	l_2	l_3	0
l_2	l_2	l_2	l_1	0	0	0	0	l_3
l_3	0	l_3	0	l_1	l_2	0	0	0
i	0	0	$\omega i_3 + \delta_1 l_3$	$\theta i_2 + \delta_2 l_2$	$\theta i_1 + \delta_3 l_1$	$\sigma i_3 + \delta_4 l_3$	$\sigma i_2 + \delta_5 l_2$	$\omega i_1 + \delta_6 l_1$
i_1	i_1	0	$i_2 + \delta_7 l_2$	$i_3 + \delta_8 l_3$	0	$\delta_{10} l_2$	$\delta_{11} l_3$	0
i_2	i_2	i_2	$\delta_7 l_2$	0	$i_3 + \delta_9 l_3$	$i_1 + \delta_{10} l_1$	0	$\delta_{12} l_3$
i_3	0	i_3	0	$\delta_8 l_1$	$\delta_9 l_2$	0	$i_1 + \delta_{11} l_1$	$a_2 + \delta_{12} l_2$
u	0	0	$\delta_{13} i_3 + \delta_{14} l_3$	$\delta_{15} i_2 + \delta_{16} l_2$	$\delta_{17} i_1 + \delta_{18} l_1$	$\delta_{19} i_3 + \delta_{20} l_3$	$\delta_{21} i_2 + \delta_{22} l_2$	$\delta_{23} i_1 + \delta_{24} l_1$

Tabela 3.69: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{257} := V_0 \ltimes [(V_0 \ltimes V_3) \ltimes V_3^*]$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{257} \simeq V_0 \oplus [(V_0 \oplus V_3) \oplus V_3^*] \iff \delta_i = \omega = \theta = \sigma = 0$$

52. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{258} := V_0 \ltimes [V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_3)]$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
v	0	0	ωv_3	θv_2	θv_1	σv_3	σv_2	ωv_1
v_1	v_1	0	v_2	v_3	0	0	0	0
v_2	v_2	v_2	0	0	v_3	v_1	0	0
v_3	0	v_3	0	0	0	0	v_1	v_2
i_1	i_1	0	$\delta_1 v_2$	$\delta_2 v_3$	$\delta_3 v$	$i_2 + \delta_4 v_2$	$i_3 + \delta_5 v_3$	$\delta_6 v$
i_2	i_2	i_2	$i_1 + \delta_7 v_2$	$\delta_6 v$	$\delta_8 v_3$	$\delta_9 v_1$	$\delta_{10} v$	$i_3 + \delta_{11} v_3$
i_3	0	i_3	$\delta_{12} v$	$i_1 + \delta_{13} v_1$	$i_2 + \delta_{14} v_2$	$\delta_{15} v$	$\delta_{16} v_1$	$\delta_{17} v_2$
u	0	0	$\delta_{18} i_3 + \delta_{19} v_3$	$\delta_{20} i_2 + \delta_{21} v_2$	$\delta_{22} i_1 + \delta_{23} v_1$	$\delta_{24} i_3 + \delta_{25} v_3$	$\delta_{26} i_2 + \delta_{27} v_2$	$\delta_{28} i_1 + \delta_{29} v_1$

Tabela 3.70: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{258} := V_0 \ltimes [V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_3)]$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{258} \simeq V_0 \oplus [V_3^* \oplus (V_0 \oplus V_3)] \iff \delta_i = \omega = \theta = \sigma = 0$$

53. *Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{259} := V_0 \ltimes [(V_3^* \ltimes V_0) \ltimes V_3]$*

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
i	0	0	$\delta_1 v_3$	$\delta_2 v_2$	$\delta_3 v_1$	$\delta_4 v_3$	$\delta_5 v_2$	$\delta_6 v_1$
v_1	v_1	0	v_2	v_3	0	0	0	0
v_2	v_2	v_2	0	0	v_3	v_1	0	0
v_3	0	v_3	0	0	0	0	v_1	v_2
i_1	i_1	0	$\delta_7 v_2$	$\delta_8 v_3$	πi	$i_2 + \delta_9 v_2$	$i_3 + \delta_{10} v_3$	λi
i_2	i_2	i_2	$i_1 + \delta_{11} v_2$	πi	$\delta_{12} v_3$	$\delta_{13} v_1$	ξi	$i_3 + \delta_{14} v_3$
i_3	0	i_3	λi	$i_1 + \delta_{15} v_1$	$i_2 + \delta_{16} v_2$	ξi	$\delta_{17} v_1$	$\delta_{18} v_2$
u	0	0	$\delta_{19} i_3 + \delta_{20} v_3$	$\delta_{21} i_2 + \delta_{22} v_2$	$\delta_{23} i_1 + \delta_{24} v_1$	$\delta_{25} i_3 + \delta_{26} v_3$	$\delta_{27} i_2 + \delta_{28} v_2$	$\delta_{29} i_1 + \delta_{30} v_1$

Tabela 3.71: $O \mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos $U^{259} := V_0 \ltimes [(V_3^* \ltimes V_0) \ltimes V_3]$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{259} \simeq V_0 \oplus [(V_3^* \ltimes V_0) \oplus V_3] \iff \delta_i = 0.$$

54. *Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{260} := V_0 \ltimes [V_3 \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)]$*

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
u	0	0	0	0	0	0	0	0
u_1	u_1	0	0	0	πu	u_2	u_3	λu
u_2	u_2	u_2	u_1	πu	0	0	ξu	u_3
u_3	0	u_3	λu	u_1	u_2	ξu	0	0
g_1	g_1	0	$\delta_1 u_2$	$\delta_2 u_3$	$\delta_3 u$	$g_2 + \delta_4 u_2$	$g_3 + \delta_5 u_3$	$\delta_6 u$
g_2	g_2	g_2	$g_1 + \delta_7 u_1$	$\delta_8 u$	$\delta_9 u_3$	$\delta_{10} u_1$	$\delta_{11} u$	$g_3 + \delta_{12} u_3$
g_3	0	g_3	$\delta_{13} u$	$g_1 + \delta_{14} u_1$	$g_2 + \delta_{15} u_2$	$\delta_{16} u$	$\delta_{17} u_1$	$\delta_{18} u_2$
g	0	0	$\delta_{19} g_3 + \delta_{20} u_3$	$\delta_{21} g_2 + \delta_{22} u_2$	$\delta_{23} g_1 + \delta_{24} u_1$	$\delta_{25} g_3 + \delta_{26} u_3$	$\delta_{27} g_2 + \delta_{28} u_2$	$\delta_{29} g_1 + \delta_{30} u_1$

Tabela 3.72: $O \mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos $U^{260} := V_0 \ltimes [V_3 \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)]$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{260} \simeq V_0 \oplus [V_3 \oplus (V_3^* \ltimes V_0)] \iff \delta_i = 0.$$

55. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{263} := V_0 \ltimes [(V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes V_3]$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
v_1	0	0	v_2	v_3	0	0	0	0
v_2	v_2	v_2	0	0	v_3	v_1	0	0
v_3	0	v_3	0	0	0	0	v_1	v_2
g	0	0	$\delta g_3 + \delta_1 v_3$	$\delta g_2 + \delta_2 v_2$	$\alpha g_1 + \delta_3 v_1$	$\alpha g_3 + \delta_4 v_3$	$\zeta g_2 + \delta_5 v_2$	$\zeta g_1 + \delta_6 v_1$
g_1	g_1	0	$\delta_7 v_2$	$\delta_8 v_3$	0	$g_2 + \delta_9 v_2$	$g_3 + \delta_{10} v_3$	0
g_2	g_2	g_2	$g_1 + \delta_{11} v_1$	0	$\delta_{12} v_3$	$\delta_{13} v_1$	0	$g_3 + \delta_{14} v_3$
g_3	0	g_3	0	$g_1 + \delta_{15} v_1$	$g_2 + \delta_{16} v_2$	0	$\delta_{17} v_1$	$\delta_{18} v_2$
v	0	0	$\delta_{19} g_3 + \delta_{20} v_3$	$\delta_{21} g_2 + \delta_{22} v_2$	$\delta_{23} g_1 + \delta_{24} v_1$	$\delta_{25} g_3 + \delta_{26} v_3$	$\delta_{27} g_2 + \delta_{28} v_2$	$\delta_{29} g_1 + \delta_{30} v_1$

Tabela 3.73: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos $U^{263} := V_0 \ltimes [(V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes V_3]$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{263} \simeq V_0 \oplus [(V_0 \oplus V_3^*) \oplus V_3] \iff \delta_i = \alpha = \delta = \zeta = 0.$$

56. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{264} := V_0 \ltimes [V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)]$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
l	0	0	δl_3	δl_2	αl_1	αl_3	ζl_2	ζl_1
l_1	l_1	0	0	0	0	l_2	l_3	0
l_2	l_2	l_1	0	0	0	0	0	l_3
l_3	0	l_3	0	l_1	l_2	0	0	0
g_1	g_1	0	$g_2 + \delta_1 l_2$	$g_3 + \delta_2 l_3$	0	$\delta_3 l_2$	$\delta_4 l_3$	0
g_2	g_2	g_2	$g_1 + \delta_5 l_1$	0	$\delta_6 l_3$	$\delta_7 l_1$	0	$g_3 + \delta_8 l_3$
g_3	0	g_3	0	$g_1 + \delta_9 l_1$	$g_2 + \delta_{10} l_2$	0	$\delta_{11} l_1$	$\delta_{12} l_2$
g	0	0	$\delta_{13} g_3 + \delta_{14} l_3$	$\delta_{15} g_2 + \delta_{16} l_2$	$\delta_{17} g_1 + \delta_{18} l_1$	$\delta_{19} g_3 + \delta_{20} l_3$	$\delta_{21} g_2 + \delta_{22} l_2$	$\delta_{23} g_1 + \delta_{24} l_1$

Tabela 3.74: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos $U^{263} := V_0 \ltimes [V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_3^*)]$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{263} \simeq V_0 \oplus [V_3 \oplus (V_0 \oplus V_3^*)] \iff \delta_i = \alpha = \delta = \zeta = 0.$$

57. *Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{292} := V_0 \ltimes [(V_3^* \ltimes V_3) \ltimes V_0]$*

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
a	0	0	0	0	0	0	0	0
a_1	a_1	0	a_2	a_3	$\delta_1 a$	0	0	$\delta_2 a$
a_2	a_2	a_2	0	$\delta_3 a$	a_3	a_1	$\delta_4 a$	0
a_3	0	a_3	$\delta_5 a$	0	0	$\delta_6 a$	a_1	a_2
u_1	u_1	0	αa_2	αa_3	$\delta_7 a$	$u_2 + \gamma a_2$	$u_3 + \beta a_3$	$\delta_8 a$
u_2	u_2	u_2	$u_1 + \alpha a_1$	$\delta_9 a$	γa_3	γa_1	$\delta_{10} a$	$u_3 + \beta a_3$
u_3	0	u_3	$\delta_{11} a$	$u_1 + \alpha a_1$	$u_2 + \gamma a_2$	$\delta_{12} a$	βa_1	βa_2
u	0	0	$\delta_{13} a_3 + \delta_{14} u_3$	$\delta_{15} a_2 + \delta_{16} u_2$	$\delta_{17} a_1 + \delta_{18} u_1$	$\delta_{19} a_3 + \delta_{20} u_3$	$\delta_{21} a_2 + \delta_{22} u_2$	$\delta_{23} a_1 + \delta_{24} u_1$

Tabela 3.75: $O \mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos $U^{292} := V_0 \ltimes [(V_3^* \ltimes V_3) \ltimes V_0]$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{292} \simeq V_0 \oplus [(V_3^* \oplus V_3) \oplus V_0] \iff \delta_i = \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

58. *Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{293} := V_0 \ltimes [V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_3^*)]$*

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
w_1	w_1	0	0	0	0	w_2	w_3	0
w_2	w_2	w_2	w_1	0	0	0	0	w_3
w_3	0	w_3	0	w_1	w_2	0	0	0
u_1	u_1	0	$u_2 + \alpha w_2$	$u_3 + \gamma w_3$	0	βw_2	βw_3	0
u_2	u_2	u_2	αw_1	0	$u_3 + \gamma w_3$	$u_1 + \beta w_1$	0	αw_3
u_3	0	u_3	0	γw_1	γw_2	0	$u_1 + \beta w_1$	$u_2 + \alpha w_2$
y	0	0	$\delta_1 w_3 + \delta_2 u_3$	$\delta_3 w_2 + \delta_4 u_2$	$\delta_5 w_1 + \delta_6 u_1$	$\delta_7 w_3 + \delta_8 u_3$	$\delta_9 w_2 + \delta_{10} u_2$	$\delta_{11} w_1 + \delta_{12} u_1$
x	0	0	$\delta_{13} w_3 + \delta_{14} u_3$	$\delta_{15} w_2 + \delta_{16} u_2$	$\delta_{17} w_1 + \delta_{18} u_1$	$\delta_{19} w_3 + \delta_{20} u_3$	$\delta_{21} w_2 + \delta_{22} u_2$	$\delta_{23} w_1 + \delta_{24} u_1$

Tabela 3.76: $O \mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos $U^{293} = V_0 \ltimes [V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_3^*)]$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{293} \simeq V_0 \oplus [V_0 \oplus (V_3 \oplus V_3^*)] \iff \delta_i = \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

59. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{294} := V_0 \ltimes [(V_3 \ltimes V_3^*) \ltimes V_0]$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
b	0	0	0	0	0	0	0	0
b_1	b_1	0	0	0	$\delta_1 b$	b_2	b_3	$\delta_2 b$
b_2	b_2	b_2	b_1	$\delta_3 b$	0	0	$\delta_4 b$	b_3
b_3	0	b_3	$\delta_5 b$	b_1	b_2	$\delta_6 b$	0	0
d_1	d_1	0	$d_2 + \alpha b_2$	$d_3 + \gamma b_3$	$\delta_7 b$	βb_2	βb_3	$\delta_8 b$
d_2	d_2	d_2	αb_1	$\delta_9 b$	$d_3 + \gamma b_3$	$d_1 + \beta b_1$	$\delta_{10} b$	αb_3
d_3	0	d_3	$\delta_{11} b$	γb_1	γb_2	$\delta_{12} b$	$d_1 + \beta b_1$	$d_2 + \alpha b_2$
d	0	0	$\delta_{13} b_3 + \delta_{14} d_3$	$\delta_{15} b_2 + \delta_{16} d_2$	$\delta_{17} b_1 + \delta_{18} d_1$	$\delta_{19} b_3 + \delta_{20} d_3$	$\delta_{21} b_2 + \delta_{22} d_2$	$\delta_{23} b_1 + \delta_{24} d_1$

Tabela 3.77: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos $U^{294} := V_0 \ltimes [(V_3 \ltimes V_3^*) \ltimes V_0]$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{294} \simeq V_0 \oplus [(V_3 \oplus V_3^*) \oplus V_0] \iff \delta_i = \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

60. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^{298} := V_0 \ltimes [V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes V_3)]$**

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
v_1	v_1	0	v_2	v_3	0	0	0	0
v_2	v_2	v_2	0	0	v_3	v_1	0	0
v_3	0	v_3	0	0	0	0	v_1	v_2
u_1	u_1	0	αv_2	αv_3	0	$u_2 + \gamma v_2$	$u_3 + \beta v_3$	0
u_2	u_2	u_2	$u_1 + \alpha v_1$	0	γv_3	γv_1	0	$u_3 + \beta v_3$
u_3	0	u_3	0	$u_1 + \alpha v_1$	$u_2 + \gamma v_2$	0	βv_1	βv_2
a	0	0	$\delta_1 v_3 + \delta_2 u_3$	$\delta_3 v_2 + \delta_4 u_2$	$\delta_5 v_1 + \delta_6 u_1$	$\delta_7 v_3 + \delta_8 u_3$	$\delta_9 v_2 + \delta_{10} u_2$	$\delta_{11} v_1 + \delta_{12} u_1$
b	0	0	$\delta_{13} v_3 + \delta_{14} u_3$	$\delta_{15} v_2 + \delta_{16} u_2$	$\delta_{17} v_1 + \delta_{18} u_1$	$\delta_{19} v_3 + \delta_{20} u_3$	$\delta_{21} v_2 + \delta_{22} u_2$	$\delta_{23} v_1 + \delta_{24} u_1$

Tabela 3.78: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos $U^{298} := V_0 \ltimes [V_0 \ltimes (V_3^* \ltimes V_3)]$

Da tabela anterior temos que:

$$U^{294} \simeq V_0 \oplus [V_0 \oplus (V_3^* \oplus V_3)] \iff \delta_i = \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

61. **Tabela para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^1 := (V_3^* \ltimes V_0) \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)$.**

Seja $\{a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3\}$ uma base de U^1 , a ação de $\mathfrak{sl}_3(k)$ sobre U^1 é dada pela tabela seguinte.

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
a_0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_1	a_1	0	0	0	πa_0	a_2	a_3	λa_0
a_2	a_2	a_2	a_1	πa_0	0	0	ξa_0	a_3
a_3	0	a_3	λa_0	a_1	a_2	ξa_0	0	0
b_0	0	0	$\delta_1 a_3$	$\delta_2 a_2$	$\delta_3 a_1$	$\delta_4 a_3$	$\delta_5 a_2$	$\delta_6 a_1$
b_1	b_1	0	$\delta_7 a_2$	$\delta_8 a_3$	$\delta_9 a_0 + \pi b_0$	$b_2 + \delta_{10} a_2$	$b_3 + \delta_{11} a_3$	$\lambda b_0 + \delta_{12} a_0$
b_2	b_2	b_2	$b_1 + \delta_{13} a_1$	$\pi b_0 + \delta_{14} a_0$	$\delta_{15} a_3$	$\delta_{16} a_1$	$\xi b_0 + \delta_{17} a_0$	$b_3 + \delta_{18} a_3$
b_3	0	b_3	$\lambda b_0 + \delta_{19} a_0$	$b_1 + \delta_{20} a_1$	$b_1 + \delta_{21} a_2$	$\xi b_0 + \delta_{22} a_0$	$\delta_{23} a_1$	$\delta_{24} a_3$

Tabela 3.79: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^1 := (V_3^* \ltimes V_0) \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)$.

Dessa tabela, podemos inferir que U^1 cinde se, e só se, $\delta_i = 0$ para $i=1, 2, \dots, 24$, isto é,

$$U^1 \simeq (V_3^* \ltimes V_0) \oplus (V_3^* \ltimes V_0) \iff \delta_i = 0 \text{ para } i = 1, \dots, 24$$

e, também de 3.2.2.3 temos, $V_3^* \ltimes V_0$ cinde $\iff \pi = \lambda = \xi = 0$.

Portanto:

$$U^1 \simeq (V_3^* \oplus V_0) \oplus (V_3^* \oplus V_0) \iff \delta_i = 0 = \pi = \lambda = \xi \text{ para } i = 1, \dots, 24.$$

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
a_0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_1	a_1	0	0	0	πa_0	a_2	a_3	λa_0
a_2	a_2	a_2	a_1	πa_0	0	0	ξa_0	a_3
a_3	0	a_3	λa_0	a_1	a_2	ξa_0	0	0
b_0	0	0	0	0	0	0	0	0
b_1	b_1	0	0	0	πb_0	b_2	b_3	λb_0
b_2	b_2	b_2	b_1	πb_0	0	0	ξb_0	b_3
b_3	0	b_3	λb_0	b_1	b_1	ξb_0	0	0

Tabela 3.80: O $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^1 := (V_3^* \ltimes V_0) \oplus (V_3^* \ltimes V_0)$.

Finalizamos este capítulo, demonstrando o seguinte teorema, o qual dá um critério que posteriormente nós permitirá decidir quando o k -espaço vetorial $\mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3 \oplus U^i$ tem estrutura de k -álgebra, para todo $1 \leq i \leq 365$.

Teorema 3.2. *Seja U^i qualquer $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo de dimensão 8 listado na seção 3.3, para $1 \leq i \leq 365$. Então as seguintes proposições são equivalentes.*

1. *Existem $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-submódulos Q_1, Q_2, P_3 e P_4 de U^i tais que:*
 - a. $Q_2 \subset Q_1, Q_1/Q_2 \simeq V_3$ e $Q_1 \oplus Q = U^i$, para algum $\mathfrak{sl}_3(k)$ -submódulo Q de U^i .
 - b. $P_4 \subset P_3, P_3/P_4 \simeq V_3^*$ e $P_3 \oplus P = U^i$, para algum $\mathfrak{sl}_3(k)$ -submódulo P de U^i .
2. *Existe um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -morfismo $0 \neq \varphi : \Lambda^2(U^i) \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3$.*

Demonstração. (1.) $\Rightarrow$ (2.). Seja U qualquer $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo de dimensão 8 enumerado na seção 3.3. satisfazendo a condição 1. do teorema. De a. e b. temos a seguintes sequência exata curtas

$$0 \rightarrow Q_2 \hookrightarrow Q_1 \rightarrow Q_1/Q_2 \rightarrow 0 \quad e \quad 0 \rightarrow P_4 \hookrightarrow P_3 \rightarrow P_3/P_4 \rightarrow 0$$

portanto, podemos construir as sequências exatas

$$0 \rightarrow Q_2 \oplus Q \hookrightarrow Q_1 \oplus Q \rightarrow Q_1/Q_2 \rightarrow 0 \quad e \quad 0 \rightarrow P_4 \oplus P \hookrightarrow P_3 \oplus P \rightarrow P_3/P_4 \rightarrow 0.$$

Assim, pelo teorema de isomorfismo de $\mathfrak{sl}_3(k)$ -módulos se obtêm:

$$(Q_1 \oplus Q)/(Q_2 \oplus Q) \simeq Q_1/Q_2 \quad e \quad (P_3 \oplus P)/(P_4 \oplus P) \simeq P_3/P_4.$$

Como $Q_1 \oplus Q = U = P_3 \oplus P$, $Q_1/Q_2 \simeq V_3$ e, $P_3/P_4 \simeq V_3^*$, então se tem os seguintes $\mathfrak{sl}_3(k)$ -isomorfismos: $U/(Q_2 \oplus Q) \simeq V_3$ e $U/(P_4 \oplus P) \simeq V_3^*$. Assim, temos o seguinte $\mathfrak{sl}_3(k)$ -isomorfismo de módulos:

$$\sigma : U/(Q_2 \oplus Q) \otimes_k U/(P_4 \oplus P) \simeq V_3 \otimes V_3^* \simeq \mathfrak{sl}_3(k) \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_3(k)) \simeq \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3.$$

Agora, os $\mathfrak{sl}_3(k)$ -morfismos quocientes

$$p_1 : U \rightarrow U/(Q_2 \oplus Q) \quad e \quad p_2 : U \rightarrow U/(P_4 \oplus P)$$

induzem o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -morfismo de módulos

$$p_1 \otimes p_2 : U \otimes_k U \rightarrow U/(Q_2 \oplus Q) \otimes_k U/(P_4 \oplus P)$$

definido por: $(p_1 \otimes p_2)(u \otimes v) := p_1(u) \otimes p_2(v)$ para todo $u, v \in U$.

Portanto, existe um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -morfismo φ definido pela seguinte composição de $\mathfrak{sl}_3(k)$ -morfismo

$$\varphi : \Lambda^2(U) \xrightarrow{\alpha_{2,U}} U \otimes_k U \xrightarrow{p_1 \otimes p_2} U/(Q_2 \oplus Q) \otimes_k U/(P_4 \oplus P) \xrightarrow{\sigma} \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3$$

onde $\alpha_{2,U}$ é definido como o exemplo 1.21.3.

(2.) $\Rightarrow$ (1.). Esboço da prova. O primeiro passo para abordar a prova é pegar cada um dos módulos U^i de dimensão 8 enumerados na seção 3.3 com suas respectivas

tabelas de $\mathfrak{sl}_3(k)$ -ação, e provar esta implicação para cada um desses 365, $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo U^i , argumentando por contradição, isto é, supor que existe um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -morfismo $\varphi : \Lambda^2(U^i) \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3$ não nulo para cada $i \in I_{365}$, e que não ocorre a condição (1.) do teorema. Por exemplo, suponhamos que existe um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -morfismo $0 \neq \varphi : \Lambda^2(U^i) \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3$ para cada $i \in I_{365}$ e não ocorre a condição a. do teorema 3.2. Vejamos que acontece para $i = 1$: peguemos o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^1 := (V_3^* \oplus V_0) \oplus (V_3^* \oplus V_0)$ ver tabelas 3.80, 3.3, e suponhamos que existe um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -morfismo $0 \neq \varphi : \Lambda^2(U^1) \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3$, e U^1 não cumpre a condição a. do teorema 3.2. Pelo exemplo 1.21.5 tem-se:

$$\begin{aligned} \Lambda^2(U^1) &\simeq \Lambda^2(V_0 \oplus V_3^*) \oplus ((V_0 \oplus V_3^*) \otimes (V_0 \oplus V_3^*)) \oplus \Lambda^2(V_0 \oplus V_3^*) \\ &\simeq (V_0 \wedge V_0) \oplus (V_0 \otimes_k V_3^*) \oplus (V_3^* \wedge V_3^*) \oplus (V_0 \otimes_k V_0) \oplus (V_0 \otimes_k V_3^*) \\ &\quad \oplus (V_3^* \otimes_k V_0) \oplus (V_3^* \otimes_k V_3^*) \oplus (V_0 \wedge V_0) \oplus (V_0 \otimes_k V_3^*) \oplus (V_3^* \wedge V_3^*) \\ &\simeq (V_0 \otimes_k V_3^*) \oplus (V_3^* \wedge V_3^*) \oplus (V_0 \otimes_k V_0) \oplus (V_0 \otimes_k V_3^*) \\ &\quad \oplus (V_3^* \otimes_k V_0) \oplus (V_3^* \otimes_k V_3^*) \oplus (V_0 \otimes_k V_3^*) \oplus (V_3^* \wedge V_3^*). \end{aligned}$$

Logo, temos os seguintes $\mathfrak{sl}_3(k)$ -submódulos de $\Lambda^2(U^1)$:

- $W_1 := V_0 \otimes_k V_3^* \simeq V_3^* \otimes V_0 \simeq V_3^*$.
- $W_2 := V_3^* \wedge V_3^* \simeq V_3^*$.
- $W_3 := V_3^* \otimes_k V_3^*$.
- $W_4 := V_0 \otimes_k V_0 \simeq V_0$

Vejamos como está definida $\varphi|_{W_i}$ para todo $i=1, 2, 3, 4$.

Tem-se, $\mathfrak{sl}_3(k)$ -morfismo $0 \neq \varphi : \Lambda^2(U^1) \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3$, então o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -morfismo $p \circ \varphi : \Lambda^2(U^1) \rightarrow kt_3$ é sobrejetor (já que kt_3 é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -módulo irredutível) onde $p : \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3 \rightarrow kt_3$, (ou também pode escolher $p : \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3 \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k)$) e $\text{Ker}(p \circ \varphi) = \varphi^{-1}(\mathfrak{sl}_3(k))$. Portanto, $\Lambda^2(U^1)/\varphi^{-1}(\mathfrak{sl}_3(k)) \simeq kt_3$, e assim $\Lambda^2(U^1)/\varphi^{-1}(\mathfrak{sl}_3(k))$ é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -módulo irredutível. Então $\varphi^{-1}(\mathfrak{sl}_3(k))$ é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -submódulo maximal de $\Lambda^2(U^1)$, e da tabela 3.3 se pode ver que $W_i \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{sl}_3(k))$, já que cada elemento da base de $V_3^* \wedge V_3^*$ tem peso $(1,0), (1,1), (0,1)$, $p \circ \varphi$ é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -morfismo e, $kt_3 \cdot \mathfrak{sl}_3(k) = 0$. Assim, $\varphi(W_i) \subseteq \mathfrak{sl}_3(k)$ para $i=1, 2, 3, 4$. Logo, para $i=1, 2, 4$, $\varphi|_{W_i} : W_i \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k)$ é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -isomorfismo, já que W_i e $\mathfrak{sl}_3(k)$ são $\mathfrak{sl}_3(k)$ -módulo irredutíveis, o qual é absurdo. Portanto, pelo lema de Schur (lema 1.19), $\varphi|_{W_i} = 0$ para todo $i = 1, 2, 4$. Para $i = 3$, temos que W_2 é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -submódulo de W_3 , então $\varphi|_{W_3}(W_2) = 0$, já que $\varphi|_{W_2} = 0$, assim $W_2 \subseteq \text{Ker}(\varphi|_{W_3})$. Por outro lado, $W_3/\text{Ker}(\varphi|_{W_3}) \simeq \mathfrak{sl}_3(k)$, então $\text{Ker}(\varphi|_{W_3}) \simeq k$. Portanto, $W_2 = k$ ou $W_2 = 0$, o qual é absurdo, e assim $\varphi|_{W_3} = 0$. Daí se segue que $\varphi \equiv 0$. Uma contradição. Pelo mesmo argumento anterior, podemos ver que o mesmo acontece para os $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos U^i para $i=3, 9, 11, 43, 44, 49, 50, 51, 52, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 68, 73, 74, 75, 76, 79, 80, 85, 86, 87, 88, 91, 92, 97, 98, 99, 100, 104, 109, 110, 111, 112, 115, 116, 121, 122, 123, 124, 127, 128, 133, 134, 135, 136, 147, 148, 151, 152, 155, 156, 161, 162, 165, 166, 171, 172, 173, 174, 175, 176,$

181, 182, 187, 188, 191, 192, 195, 196, 199, 200, 202, 205, 206, 208, 211, 212, 214, 217, 218, 220, 224, 225, 227, 230, 231, 234, 237, 238, 240, 243, 244, 246, 249, 250, 261, 262, 265, 266, 269, 270, 275, 276, 279, 280, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 295, 296, 301, 302, 305, 306, 309, 310, 313, 314, 316, 319, 320, 322, 325, 326, 328, 331, 332, 334, 338, 339, 341, 344, 345, 348, 351, 352, 354, 357, 358, 360, 363, 364, 365 já que eles não satisfazem automaticamente a condição a. do teorema 3.2. Agora, consideremos os $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos U^i para $i=6, 8, 34, 130, 252, 281, 303, 355$. Vamos ver que nenhum deles podem cindir, caso contrário satisfazem a condição a. do teorema. De fato, se $U^6 = (V_3 \ltimes V_0) \oplus (V_3 \ltimes V_0)$ então pegando $Q_1 := (V_3 \ltimes V_0)$, $Q_2 := V_0$ e $Q := (V_3 \ltimes V_0)$ temos que $Q_1/Q_2 \simeq V_3$ e $Q_1 \oplus Q = U^6$. Portanto se U^6 cinde tem-se que cumprem a. o qual é uma contradição. Assim que, $U^6 \neq (V_3 \ltimes V_0) \oplus (V_3 \ltimes V_0)$. O mesmo acontece com U^8 , isto é, se $U^8 = (V_0 \ltimes V_3) \oplus (V_3 \ltimes V_0)$ e pegamos $Q_1 := V_3 \ltimes V_0$, $Q_2 := V_0$ e, $Q := V_0 \ltimes V_3$ temos que $Q_1/Q_2 \simeq V_3$ e $Q \oplus Q_1 = U^8$. Para $U^{34} = V_3 \oplus [V_0 \oplus (V_3 \ltimes V_0)]$ com $Q_1 := V_3 \ltimes V_0$, $Q_2 := V_0$ e, $Q := V_3 \oplus V_0$ temos que $Q_1/Q_2 \simeq V_3$ e $Q \oplus Q_1 = U^{34}$, e assim U^{34} cumprem a., portanto $U^{34} \neq V_3 \oplus [V_0 \oplus (V_3 \ltimes V_0)]$.

$U^{130} \neq (V_0 \ltimes V_0) \oplus (V_0 \oplus V_0) \oplus (V_3 \ltimes V_0)$, do contrario cumprem a., já que se $Q_1 := V_3 \ltimes V_0$, $Q_2 := V_0$ e $Q := (V_0 \ltimes V_0) \oplus (V_0 \oplus V_0)$ tem-se $Q_1/Q_2 \simeq V_3$ e $Q \oplus Q_1 = U^{130}$.

$U^{252} \neq (V_0 \oplus V_3) \oplus (V_3 \ltimes V_0)$, caso contrário satisfaz a condição a., com efeito, pegando $Q_1 := V_3 \ltimes V_0$, $Q_2 := V_0$ e $Q := V_3 \oplus V_0$ obtemos $Q_1/Q_2 \simeq V_3$ e $Q \oplus Q_1 = U^{252}$.

Quando $U^{281} = (V_0 \oplus V_0) \oplus (V_0 \ltimes V_0) \oplus (V_3 \ltimes V_0)$ então, para $Q_1 := V_3 \ltimes V_0$, $Q_2 := V_0$ e $Q := (V_0 \oplus V_0) \oplus (V_0 \ltimes V_0)$ tem-se que $Q_1/Q_2 \simeq V_3$ e $Q \oplus Q_1 = U^{281}$, logo U^{281} dessa forma cumprem a condição a. do teorema, o qual não pode ser. O mesmo acontece para $U^{303} = (V_0 \oplus V_0) \oplus (V_0 \ltimes V_0) \oplus (V_3 \ltimes V_0)$.

Se $U^{355} = (V_0 \oplus V_0 \oplus V_0 \oplus V_0) \oplus (V_3 \ltimes V_0)$ e $Q_1 := V_3 \ltimes V_0$, $Q_2 := V_0$, $Q := V_0^{\oplus 4}$ temos que U^{355} cumprem a. do teorema. Uma contradição. Logo, para $i=6, 8, 34, 130, 252, 281, 303, 355$ observamos que $V_3 \ltimes V_0$ é $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-submódulos de U^i , e assim $(V_3 \ltimes V_0) \wedge (V_3 \ltimes V_0)$ é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-submódulos $\Lambda^2(U^i)$, mas

$(V_3 \ltimes V_0) \wedge (V_3 \ltimes V_0) \simeq V_3 \wedge V_0 \simeq V_3$, portanto o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -morfismo sobrejetor $p \circ \varphi \circ \iota : V_3 \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k)$ é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -isomorfismo, o qual é absurdo. Se continuamos procurando os submódulos de $\Lambda^2(U^i)$ (note que não é possível achar uma cópia de V_3^* em $\Lambda^2(U^i)$) e argumentamos como no caso $i = 1$ achamos que $\varphi = 0$. Agora, seja $i=14, 16, 17, 18, 21, 22, 23, 24, 30, 36, 102, 126, 132, 251, 255, 256, 278, 283, 304, 356, 359$. Para estes i temos que U^i não cinde. De fato, para $i = 14$, $U^{14} \neq (V_3 \ltimes V_0) \oplus (V_0 \ltimes V_3)$ do contrário, se $Q_1 := V_3 \ltimes V_0$, $Q_2 := V_0$ e $Q := V_0 \ltimes V_3$ então $Q_1/Q_2 \simeq V_3$ e $Q \oplus Q_1 = U^{14}$, portanto cumpre a., o qual é absurdo.

Se $U^{16} = (V_0 \ltimes V_3) \oplus (V_0 \ltimes V_3)$, $Q_1 := V_3$, $Q_2 := 0$ e, $Q := (V_0 \ltimes V_3) \oplus V_0$ então se cumpre a. do teorema, o qual é absurdo. Quando $U^{17} = [V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \oplus V_3$, $Q_1 := V_3$, $Q_2 := 0$ e, $Q := V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$ então se cumpre a. do teorema, o qual é absurdo.

Se $U^{18} = [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3] \ltimes V_3$, $Q_1 := V_3$, $Q_2 := 0$ e, $Q := (V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3$, então se cumpre a. do teorema, o qual é absurdo.

Quando $U^{21} = [(V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_0] \oplus V_3$, $Q_1 := V_3$, $Q_2 := 0$ e, $Q := (V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_0$, então se cumpre a. do teorema, o qual é absurdo.

Se $U^{22} = [V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_0)] \oplus V_3$, $Q_1 := V_3$, $Q_2 := 0$ e, $Q := V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_0)$ então se

cumpra a. do teorema, o qual é absurdo.

Se $U^{23} = [(V_0 \ltimes V_3) \ltimes V_0] \oplus V_3$, $Q_1 := V_3$, $Q_2 := 0$ e, $Q := (V_0 \ltimes V_3) \ltimes V_0$, então se cumpre a. do teorema, o qual é absurdo.

Se $U^{24} = [V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3)] \oplus V_3$, $Q_1 := V_3$, $Q_2 := 0$ e, $Q := V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3)$, então se cumpre a. do teorema, o qual é absurdo.

Quando $U^{30} = V_3 \oplus [(V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3]$, $Q_1 := V_3$, $Q_2 := 0$ e, $Q := (V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3$, então se cumpre a. do teorema, o qual é absurdo.

Se $U^{36} = V_3 \oplus [V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3)]$, $Q_1 := V_3$, $Q_2 := 0$ e, $Q := (V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3))$, então se cumpre a. do teorema, o qual é absurdo.

Quando $U^{102} = (V_0 \ltimes V_0) \oplus (V_3 \ltimes V_3)$, $Q_1 := V_3 \ltimes V_3$, $Q_2 := V_3$ e, $Q := (V_0 \ltimes V_0)$ então se cumpre a. do teorema, o qual é absurdo.

Quando $U^{126} = (V_0 \ltimes V_0) \oplus [V_0 \oplus (V_0 \ltimes V_0) \oplus V_3]$, $Q_1 := V_3$, $Q_2 := 0$ e,

$Q := (V_0 \ltimes V_0) \oplus (V_0 \ltimes V_0) \oplus V_0$, então se cumpre a. do teorema, o qual é absurdo.

Portanto $U^{126} \neq (V_0 \ltimes V_0) \oplus [V_0 \oplus (V_0 \ltimes V_0) \oplus V_3]$.

Se $U^{132} = (V_0 \ltimes V_0) \oplus (V_0 \oplus V_0) \oplus (V_0 \ltimes V_3)$, $Q_1 = V_3$, $Q_2 = 0$ e,

$Q = (V_0 \ltimes V_0) \oplus (V_0 \oplus V_0)$ então se cumpre a. do teorema, o qual é absurdo. Portanto $U^{132} \neq (V_0 \ltimes V_0) \oplus (V_0 \oplus V_0) \oplus (V_0 \ltimes V_3)$.

Se $U^{251} = V_0 \oplus (V_3 \ltimes V_0) \oplus V_3$, $Q_1 := V_3 \ltimes V_0$, $Q_2 := V_0$ e, $Q = V_0 \oplus V_3$, então se cumpre a. do teorema, o qual é absurdo. Portanto $U^{251} \neq V_0 \oplus (V_3 \ltimes V_0) \oplus V_3$.

Se $U^{255}, U^{256} = V_0 \oplus (V_0 \ltimes V_3) \oplus V_3$, $Q_1 := V_3$, $Q_2 := 0$ e, $Q = V_0 \oplus V_3$ então se cumpre a. do teorema, o qual é absurdo. Portanto, $U^{255}, U^{256} \neq V_0 \oplus (V_0 \ltimes V_3) \oplus V_3$.

Se $U^{278} = V_0 \oplus [(V_0 \ltimes V_0) \oplus (V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3]$, $Q_1 = V_3$, $Q_2 = 0$ e,

$Q = (V_0 \ltimes V_0) \oplus (V_0 \ltimes V_0) \oplus V_0$ então se cumpre a. do teorema, o qual é absurdo.

Portanto $U^{278} \neq V_0 \oplus [(V_0 \ltimes V_0) \oplus (V_0 \ltimes V_0) \ltimes V_3]$

Se $U^{283}, U^{304}, U^{356}, U^{359} = V_0^{\oplus 4} \oplus V_3$, $Q_1 := V_3$, $Q_2 := 0$ e, $Q := V_0^{\oplus 4}$ então se cumpre a. do teorema, o qual é absurdo. Portanto $U^{283}, U^{304}, U^{356}, U^{359} \neq V_0^{\oplus 4} \oplus V_3$.

Observe-se que, V_3 é $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-submódulo de U^i e assim $V_3 \wedge V_3$ é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-submódulo $\Lambda^2(U^i)$, para todo $i=14, 16, 17, 18, 21, 22, 23, 24, 30, 36, 102, 126, 132, 251, 255, 256, 278, 283, 304, 356, 359$, portanto o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -morfismo sobrejetor $p \circ \varphi \circ \iota : V_3 \wedge V_3 \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k)$ é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -isomorfismo, já que $V_3 \wedge V_3 \simeq V_3$, o qual é uma contradição, assim que novamente considerando os submódulos (que não são isomorfos a V_3^*) de esses $\Lambda^2(U^i)$ vamos ter alguns contradições. Para os $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos U^i para todo $i=29, 33, 34, 35, 36, 66, 69, 70, 71, 72, 77, 78, 81, 82, 83, 84, 89, 90, 93, 94, 95, 96, 105, 106, 107, 108, 113, 114, 117, 118, 119, 120, 125, 129, 131, 137, 138, 140, 141, 153, 154, 157, 158, 158, 160, 163, 164, 167, 168, 169, 170, 177, 183, 185, 186, 189, 190, 193, 194, 197, 198, 201, 203, 204, 207, 209, 210, 213, 215, 216, 219, 221, 222, 223, 226, 228, 229, 232, 233, 235, 236, 239, 241, 242, 245, 247, 248, 267, 268, 271, 272, 273, 274, 277, 282, 284, 297, 299, 300, 307, 308, 311, 312, 315, 317, 318, 321, 323, 324, 327, 329, 330, 333, 335, 337, 340, 342, 343, 346, 347, 349, 350, 353, 361, 362$, tem-se que eles não cindem, caso contrário se cumpre a condição a. do teorema. De fato, os módulos $U^{29} \neq V_3 \oplus (V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0))$, $U^{33} \neq V_3 \oplus ((V_3 \ltimes V_0) \ltimes V_0)$, $U^{34} \neq V_3 \oplus (V_0 \ltimes (V_3 \ltimes V_0))$, $U^{35} \neq V_3 \oplus ((V_0 \ltimes V_3) \ltimes V_0)$, $U^{36} \neq V_3 \oplus (V_0 \ltimes (V_0 \ltimes V_3))$, $U^{66} \neq (V_3 \oplus V_3) \oplus (V \ltimes V_0)$, caso contrário com $Q_1 := V_3$, $Q_2 := 0$ e Q o complementar de V_3 se satisfaz a. do teorema. Também os módulos

$U^{69}, U^{70}, U^{81}, U^{82}, U^{93}, U^{94}, U^{105}, U^{106}, U^{117}, U^{118}, U^{129}, U^{137}, U^{138}, U^{157}, U^{158}, U^{167}, U^{168}, U^{185}, U^{189}, U^{193}, U^{197}, U^{203}, U^{209}, U^{215}, U^{221}, U^{222}, U^{228}, U^{235}, U^{241}, U^{242}, U^{247}, U^{271}, U^{272}, U^{282}, U^{299}, U^{307}, U^{311}, U^{317}, U^{323}, U^{329}, U^{335}, U^{342}, U^{349}, U^{361} \neq (V_0 \ltimes V_0) \oplus (V_0 \ltimes V_0) \oplus (V_3 \ltimes V_0)$, caso contrário, com $Q_1 := V_3 \ltimes V_0$, $Q_2 := V_0$ e $Q := (V_0 \ltimes V_0)^{\oplus 2}$ tem-se a. do teorema. Agora, $U^i \neq V_3 \oplus V_0^{\oplus 5}$ para todo $i=71, 72, 77, 83, 84, 89, 90, 93, 95, 96, 107, 108, 113, 114, 119, 120, 125, 131, 140, 141, 153, 154, 159, 160, 163, 164, 169, 170, 177, 183, 186, 190, 194, 198, 201, 204, 207, 210, 213, 216, 219, 223, 226, 229, 232, 233, 236, 239, 242, 245, 248, 267, 268, 273, 274, 277, 284, 297, 300, 308, 312, 315, 318, 321, 324, 327, 330, 333, 337, 340, 343, 346, 347, 350, 353, 362$, porque se temos a igualdade, e $Q_1 := V_3$, $Q_2 := 0$ e $Q := V_0^{\oplus 5}$ temos a condição a. do teorema. Finalmente, consideremos os $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos U^i para $i=2, 4, 5, 7, 10, 12, 13, 15, 19, 20, 25, 26, 27, 28, 31, 32, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 45, 46, 47, 48, 53, 54, 57, 58, 59, 60, 65, 67, 101, 103, 138, 139, 140, 143, 144, 145, 148, 149, 178, 179, 180, 184, 253, 254, 257, 258, 259, 260, 263, 264, 292, 293, 294, 298$, cujas tabelas são dadas na seção 3.3.1. Como nos casos anteriores, estes módulos não podem cindir, porque se eles cindem, satisfazem a condição a. do teorema, e isso contradiz a hipótese. De fato, na seção 4.1.1.2 do capítulo 4 é provado que se U^i cinde para todo i , então eles cumprem a condição 1 do teorema. Agora, os módulos U^2, U^7, U^{38} tem a $V_3^* \ltimes V_0$ como submódulo, logo $(V_3^* \ltimes V_0) \wedge (V_3^* \ltimes V_0)$ é submódulo irreductível de $\Lambda^2(U^i)$ para todo $i = 2, 7, 38$ já que $(V_3^* \ltimes V_0) \wedge (V_3^* \ltimes V_0) \simeq V_3^*$. Portanto o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -morfismo sobrejetor $p \circ \varphi \circ \iota : \Lambda^2(V_3^* \ltimes V_0) \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k)$ é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -isomorfismo. Uma contradição. Também $V_3 \ltimes V_0$ é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-submódulo de U^i e assim $(V_3 \ltimes V_0) \wedge (V_3 \ltimes V_0) \simeq V_3$ é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-submódulo irreductível de $\Lambda^2(U^i)$, para todo $i=4, 5, 58, 254$. Logo $p \circ \varphi \circ \iota : \Lambda^2(V_3 \ltimes V_0) \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k)$ é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -isomorfismo. Uma contradição. V_3 é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-submódulo de U^i e assim $V_3 \wedge V_3 \simeq V_3$ é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-submódulo irreductível de $\Lambda^2(U^i)$, para todo $i=10, 12, 19, 20, 25, 26, 27, 28, 54, 60, 101, 258, 259, 263, 298$. se segue que, $V_3 \wedge V_3 \simeq \mathfrak{sl}_3(k)$, o qual é absurdo. Da mesma forma tem-se que V_3^* é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-submódulo de U^i e assim $V_3^* \wedge V_3^* \simeq V_3^*$ é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-submódulo irreductível de $\Lambda^2(U^i)$, para todo $i=13, 15, 32, 40, 41, 42, 45, 46, 47, 48, 103, 253, 257, 264, 293$. se segue que, $V_3^* \wedge V_3^* \simeq \mathfrak{sl}_3(k)$, o qual também é absurdo. Por outro lado, $V_0 \wedge V_0$ é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-submódulo de U^i para $i=31, 53, 65, 67$, também $V_0 \ltimes V_0$ é $\mathfrak{sl}_3(k)$ -módulo de U^i para $i=37, 57, 140, 146, 178, 180$ (ver tabelas: 3.34, 3.47, 3.56, 3.60, 3.63, 3.65 respectivamente.) e assim $V_0 \wedge V_0$ é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-submódulo irreductível de $\Lambda^2(U^i)$, logo $p \circ \varphi \circ \iota : \Lambda^2(V_0 \ltimes V_0) \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k)$ é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -isomorfismo. Uma contradição. Por ultimo, V_0 é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-submódulo de U^i e assim $V_0 \wedge V_0 = 0$ é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-submódulo de $\Lambda^2(U^i)$, para todo $i=39, 59, 139, 143, 144, 145, 148, 149, 179, 184, 254, 260, 292, 294$, se segue que, $0 = V_0 \wedge V_0 \simeq \mathfrak{sl}_3(k)$, o qual é absurdo.

Se continuamos argumentando da mesma forma como no caso $i = 1$, procurando os submódulos tal como foi feito anteriormente em alguns casos de cima, logramos demonstrar (com fé, paciência e tiempo) essa implicação, note que nenhum desses $\mathfrak{sl}_3(k)$ -módulos $\Lambda^2(U^i) \subseteq U^i \otimes U^i$ contém $\mathfrak{sl}_3(k)$ -submódulos A e B irreductíveis de tal jeito que $A \otimes_k B \simeq (V_3 \otimes_k V_3^*)/k \simeq \mathfrak{sl}_3(k)$.

□

Capítulo 4

As 2-álgebras de Lie simples de $\dim_k = 17$ de posto toral 3

Neste capítulo vamos estudar as 2-álgebras de Lie simples de dimensão 17 de posto toral 3, especialmente aquela da forma $(17 : 3, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$. Mostraremos que não existe uma 2-álgebra de Lie de tipo $(17 : 3, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ contendo uma 2-subálgebra de Lie simples, e além disso, apresentaremos um método para tratar o caso quando esta álgebra contém uma 2-subálgebra de Lie não simples e não solúvel.

Em todo o capítulo, vamos supor que $(L, [2])$ é uma 2-álgebra de Lie simples de dimensão 17, de $MT(L) = 3$, cuja decomposição de Cartan respeito a uma subálgebra de Cartan $H := T \oplus N$ de L , é: $L = H \oplus \sum_{\xi \in G} \oplus L_\xi$, onde $G := \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ é um grupo abeliano elementar de ordem 8, T é uma subálgebra toral de dimensão 3, e N é uma subálgebra de Lie 2-nilpotente.

Seguindo com o espírito da seção 2.4, temos os seguintes casos de 2-álgebras de Lie simples de dimensão 17, de $MT(L) = 3$:

1. $(17 : 3, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$	10. $(17 : 3, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 1)$
2. $(17 : 3, 6, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$	11. $(17 : 3, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1)$
3. $(17 : 3, 5, 3, 1, 1, 1, 1, 1)$	12. $(17 : 3, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1)$
4. $(17 : 3, 5, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$	13. $(17 : 3, 2, 6, 1, 1, 1, 1, 1)$
5. $(17 : 3, 4, 4, 1, 1, 1, 1, 1)$	14. $(17 : 3, 2, 5, 2, 1, 1, 1, 1)$
6. $(17 : 3, 4, 3, 2, 1, 1, 1, 1)$	15. $(17 : 3, 2, 4, 3, 1, 1, 1, 1)$
7. $(17 : 3, 4, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$	16. $(17 : 3, 2, 4, 2, 2, 1, 1, 1)$
8. $(17 : 3, 3, 5, 1, 1, 1, 1, 1)$	17. $(17 : 3, 2, 3, 3, 2, 1, 1, 1)$
9. $(17 : 3, 3, 4, 2, 1, 1, 1, 1)$	18. $(17 : 3, 2, 3, 2, 2, 2, 1, 1)$

19. $(17 : 3, 1, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$	31. $(17 : 3, 0, 6, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$
20. $(17 : 3, 1, 6, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$	32. $(17 : 3, 0, 5, 4, 1, 1, 1, 1, 1)$
21. $(17 : 3, 1, 5, 3, 1, 1, 1, 1, 1)$	33. $(17 : 3, 0, 5, 3, 2, 1, 1, 1, 1)$
22. $(17 : 3, 1, 5, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$	34. $(17 : 3, 0, 5, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$
23. $(17 : 3, 1, 4, 3, 2, 1, 1, 1, 1)$	35. $(17 : 3, 0, 4, 4, 2, 1, 1, 1, 1)$
24. $(17 : 3, 1, 4, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$	36. $(17 : 3, 0, 4, 3, 3, 1, 1, 1, 1)$
25. $(17 : 3, 1, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1)$	37. $(17 : 3, 0, 4, 3, 2, 2, 1, 1, 1)$
26. $(17 : 3, 1, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1)$	38. $(17 : 3, 0, 4, 2, 2, 2, 2, 1, 1)$
27. $(17 : 3, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1)$	39. $(17 : 3, 0, 3, 3, 3, 2, 1, 1, 1)$
28. $(17 : 3, 0, 8, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$	40. $(17 : 3, 0, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1)$
29. $(17 : 3, 0, 7, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$	41. $(17 : 3, 0, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 1)$
30. $(17 : 3, 0, 6, 3, 1, 1, 1, 1, 1)$	42. $(17:3,0,2,2,2,2,2,2,2)$.

No caso 1., temos que $I := N \oplus \sum_{\xi \in \Delta} \oplus L_\xi$ é um ideal de L . Uma contradição. Seja e_γ um elemento da base de L_γ . Como $e_\gamma^{[2]} \in L_\gamma^{[2]} \subseteq H = T \oplus N$, então existem $t_\gamma \in T$ e $n_\gamma \in N$ tais que $e_\gamma^{[2]} = t_\gamma + n_\gamma$. Como $t_\gamma \in T$, existem $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ em k , tais que $t_\gamma = \delta_1 t_1 + \delta_2 t_2 + \delta_3 t_3$. Por outro lado, $0 = [e_\gamma, e_\gamma^{[2]}] = \gamma(t_\gamma)e_\gamma + [e_\gamma, n_\gamma]$, logo $ad(n_\gamma)(e_\gamma) = \gamma(t_\gamma)e_\gamma$. Como n_γ é nilpotente, então $ad(n_\gamma)$ é nilpotente, portanto $\gamma(t_\gamma) = \delta_3 = 0$. Assim, $e_\gamma^{[2]} = \delta_1 t_1 + \delta_2 t_2 + n_\gamma$. Escolhendo $\delta_1 \neq 0$ temos que $t_\gamma \neq 0$ e $\alpha(t_\gamma) = \delta_1 \neq 0$, logo, pela proposição 2.4, $L_\alpha \simeq L_{\alpha+\gamma}$. Portanto os casos 2. até 41. exceto 27. são impossíveis, já que $\dim_k(L_\alpha) \neq \dim_k(L_{\alpha+\gamma})$. Para o caso 27. temos o seguinte: escolhendo $\delta_1 \neq \delta_2$, temos que $(\alpha + \beta)(t_\gamma) = (\alpha + \beta)(\delta_1 t_1 + \delta_2 t_2) = \delta_1 + \delta_2 \neq 0$, logo pela proposição 2.4. temos que $L_{\alpha+\gamma} \simeq L_{\alpha+\beta+\gamma}$, mas $2 = \dim_k(L_{\alpha+\gamma}) \neq \dim_k(L_{\alpha+\beta+\gamma}) = 1$, logo o caso 27. não é possível. Portanto,

Proposição 4.1. *Não existem 2-álgebras de Lie $(L, [2])$, simples de dimensão 17 de posto toral 3, com decomposição de Cartan respeito a T dada por: $L := T \oplus \sum_{\xi \in G} \oplus L_\xi$, onde $G := \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ é um grupo abeliano elementar de ordem 8 e $\dim_k(L_\xi) \neq 2$ para algum $\xi \in G$.*

A álgebra de Lie do item 42. é abordada na seção seguinte.

4.1 $L = T \oplus \sum_{\xi \in G} \oplus L_\xi$, onde $\dim_k(L_\xi) = 2, \forall \xi \in G$.

Aqui propomos uma maneira de abordar o estudo de $(17 : 3, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ via teoria de representação de álgebras.

Pode acontecer que $(L, [2])$ contenha uma 2-subálgebra de Lie :

- a. Simples
- b. Não simples e não solúvel
- c. Solúvel

Agora, estudemos $(L, [2])$ da forma $(17 : 3, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ quando uma 2-subálgebra de Lie de tipo $a.$, $b.$, ou $c.$ fique mergulhada nela. Primeiro estudemos o caso quando $(L, [2])$ contém uma 2-subálgebra de Lie simples.

4.1.1 $(L, [2])$ contém uma 2-subálgebra isomorfa a $(\mathfrak{sl}_3(k), 2)$

Vai ser apresentada aqui uma construção de $(L, [2])$ baseada na representação de $\mathfrak{sl}_3(k)$ em 2-módulos de dimensão 8 tal como foi feita na seção 3.3. A idéia dessa construção vem da observação de que $(\mathfrak{sl}_3(k), 2)$ aparece como 2-subálgebra de $(L, [2])$. De fato, considere a subálgebra de Lie de L

$$S_{\alpha, \beta} := \text{span}\{t_1, t_2, a_1^\alpha, a_2^\alpha, b_1^\beta, b_2^\beta, c_1^{\alpha+\beta}, c_2^{\alpha+\beta}\}$$

com multiplicação de Lie dada na tabela seguinte

	t_1	t_2	a_1^α	a_2^α	b_1^β	b_2^β	$c_1^{\alpha+\beta}$	$c_2^{\alpha+\beta}$
t_1	t_1	0	a_1^α	a_2^α	0	0	$c_1^{\alpha+\beta}$	$c_2^{\alpha+\beta}$
t_2	0	t_2	0	0	b_1^β	b_2^β	$c_1^{\alpha+\beta}$	$c_2^{\alpha+\beta}$
a_1^α	a_1^α	0	0	t_2	$c_1^{\alpha+\beta}$	0	0	b_2^β
a_2^α	a_2^α	0	t_2	0	0	$c_2^{\alpha+\beta}$	b_1^β	0
b_1^β	0	b_1^β	$c_1^{\alpha+\beta}$	0	0	t_1	0	a_2^α
b_2^β	0	b_2^β	0	$c_2^{\alpha+\beta}$	t_1	0	a_1^α	0
$c_1^{\alpha+\beta}$	$c_1^{\alpha+\beta}$	$c_1^{\alpha+\beta}$	0	b_1^β	0	a_1^α	0	$t_1 + t_2$
$c_2^{\alpha+\beta}$	$c_2^{\alpha+\beta}$	$c_2^{\alpha+\beta}$	b_2^β	0	a_2^α	0	$t_1 + t_2$	0

Tabela 4.1: A 2-álgebra de Lie $S_{\alpha, \beta}$

onde os elementos da diagonal são resultados da 2-aplicação nas elementos de suas linhas ou colunas correspondentes.

$S_{\alpha,\beta}$ é uma 2-subálgebra de Lie simples de $(L, [2])$ de dimensão 8, que é isomorfa a $(\mathfrak{sl}_3(k), 2)$, por meio da seguinte identificação:

$$\begin{array}{ccc} S_{\alpha,\beta} & \xrightarrow[\cong]{\phi} & \mathfrak{sl}_3(k) \\ t_1 & \mapsto & h_2 \\ t_2 & \mapsto & h_1 \\ a_1^\alpha & \mapsto & e_{12} \\ a_2^\alpha & \mapsto & e_{21} \\ b_1^\beta & \mapsto & e_{23} \\ b_2^\beta & \mapsto & e_{32} \\ c_1^{\alpha+\beta} & \mapsto & e_{13} \\ c_2^{\alpha+\beta} & \mapsto & e_{31} \end{array}$$

Dessa forma, $(\mathfrak{sl}_3(k), 2)$ se representa na álgebra $(L, [2])$ via a representação adjunta. É natural, portanto, procurar a realização de $(L, [2])$ em espaços de representação de dimensão 17 de $(\mathfrak{sl}_3(k), 2)$. Isso é feito da seguinte maneira: a álgebra $(\mathfrak{sl}_3(k), 2)$ se representa em um k -espaço vetorial de dimensão 8, onde os elementos da base destes espaços tem pesos $(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)$ (cada um com multiplicidade 2), mas isso já foi feito na seção 3.3. Logo a álgebra $(L, [2])$ é construída sobre o k -espaço vetorial

$$G(U^i) := \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3 \oplus U^i \text{ para todo } 1 \leq i \leq 365$$

onde U^i são os $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos de dimensão 8 que foram achados e enumerados na seção 3.3

4.1.1.1. $(G(U^i), [,])$ é uma k -álgebra

Para que $G(U^i)$ tenha estrutura de k -álgebra, precisamos definir uma aplicação k -bilinear

$$[,]: G(U^i) \times G(U^i) \rightarrow G(U^i).$$

Essa aplicação k -bilinear será definida em pares de elementos nos diferentes subespaços que compõem $G(U^i)$. Definir esta aplicação entre os elementos de $\mathfrak{sl}_3(k)$ com $\mathfrak{sl}_3(k)$ ou, $\mathfrak{sl}_3(k)$ com kt_3 ou, $\mathfrak{sl}_3(k)$ com U^i ou, kt_3 com U^i pode ser feito como segue:

A₁. O colchete entre dois elementos de $\mathfrak{sl}_3(k)$ é o usual, isto é:

$$[e_{ij}, e_{kl}] := \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj} \text{ para todo } e_{ij} \in \mathfrak{sl}_3(k).$$

A₂. Se $A \in \mathfrak{sl}_3(k)$ e $u \in U^i$, então $[A, u] := u.A$, isto é, o colchete é dado pela 2-representação de $\mathfrak{sl}_3(k)$ em U^i .

A₃. Como $\text{Ann}_L(t_3) = \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3$, então $[A, t_3] := 0$ para todo $A \in \mathfrak{sl}_3(k)$.

A₄. Como $\gamma(t_3) = 1$ temos: $[u, t_3] := u$ para todo $u \in U^i$.

O teorema 3.2 permite definir uma aplicação k -bilinear entre elementos de U^i , isto é, o teorema 3.2 garante a existencia de um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -morfismo

$\Lambda^2(U^i) \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3$, o qual nos permite definir o colchete entre dois elementos de U^i assim:

A_5 . Se existe um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -morfismo $\varphi : \Lambda^2(U^i) \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3$, definimos o colchete entre dois elementos de U^i como: $[u, v] := \varphi(u \wedge v)$ para todo $u, v \in U^i$.

Em resumo, as expressões A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5 definem aplicações k -bilineares a valores em $(G(U^i), [,])$ e definidas em $U^i \times U^i, \mathfrak{sl}_3(k) \times \mathfrak{sl}_3(k)$, etc. Essas aplicações se estendem por bilinearidade a uma aplicação k -bilinear alternada $[\cdot, \cdot] : G(U^i) \times G(U^i) \rightarrow G(U^i)$. Portanto, se $(G(U^i), [,])$ satisfaz os critérios A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 , então $(G(U^i), [,]) := (\mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3 \oplus U^i, [,])$ é uma k -álgebra de dimensão 17.

4.1.1.2. Existencia de um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -morfismo $\varphi : \Lambda^2(U^i) \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3$.

Na seção 3.3, temos uma lista de 365 $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos U^i de dimensão 8. Nesta seção procuramos os módulos U^i dessa lista que cumprem as condições a. e b. do teorema 3.2 (e portanto A_5). Estamos interessados em aqueles $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos U^i que cindem como é sugerido pelo teorema 3.2.

Os $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos U^i , para $i=1, 3, 6, 8, 9, 11, 14, 16, 17, 18, 21, 22, 23, 24, 29, 30, 33, 34, 35, 36, 43, 44, 49, 50, 51, 52, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 66, 68, 69$ até 100, 102, 104 até 137, 140, 141, 146, 147, 150 até 177, 181 até 252, 255, 256, 261, 262, 265 até 291, 295 até 297, 299 até 364 e, 365 não satisfazem a condições a. e b. do teorema 3.2. Já que, pelo geral eles não cindem, pois dependem de alguns parametros que pertencem a k ; se eles cindem (isto somente acontece se todos os parametros são nulos) vamos ter que eles podem satisfazer a condição a. ou a condição b. do teorema 3.2, mas não cumprem simultaneamente estas condições. Por exemplo, da tabela 3.79 tem-se que o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo $U^1 := (V_3^* \ltimes V_0) \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)$ cinde se, e só se, $\delta_i = 0$. Além do mais, se $P_3 := V_3^* \ltimes V_0$, $P_4 := V_0$ e $P := V_3^* \ltimes V_0$, então $P_4 \subseteq P_3$, $P_3/P_4 \simeq V_3^*$, e $P \oplus P_3 = U^1$. Portanto U^1 cumpre a condição b. do teorema 3.2, mas não satisfaz a condição a. Assim, não é possível achar um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-morfismo $\varphi : \Lambda^2(U^i) \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3$.

Agora, estudemos os $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos restante da lista.

1. Seja $U^2 := (V_3 \ltimes V_0) \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)$. Como vimos na seção 3.3.1.1:

$$U^2 \simeq (V_3 \ltimes V_0) \oplus (V_3^* \ltimes V_0) \iff \mu_i = 0$$

Se $U^2 \simeq (V_3 \ltimes V_0) \oplus (V_3^* \ltimes V_0)$, então U^2 cumpre a. e b. do teorema 3.2. De fato, se $Q_1 := V_3 \ltimes V_0$, $Q_2 := V_0$, $P_3 := V_3^* \ltimes V_0$, $P_4 := V_0$, $Q := V_3^* \ltimes V_0$ e $P := V_3 \ltimes V_0$ temos que:

- a) $Q_2 \subseteq Q_1$, $Q_1/Q_2 \simeq V_3$ e, $Q_1 \oplus Q = U^2$.
- b) $P_4 \subseteq P_3$, $P_3/P_4 \simeq V_3^*$ e, $P_3 \oplus P = U^2$.

Assim, se $U^2 \simeq (V_3 \ltimes V_0) \oplus (V_3^* \ltimes V_0)$, então pelo teorema 3.2 existe um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -morfismo $\varphi : \Lambda^2(U^2) \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3$.

Pela seção 3.3.1.3 temos que: $U^5 \simeq (V_3 \ltimes V_0) \oplus (V_3^* \ltimes V_0) \iff \delta_i = 0$. Portanto, argumentando da mesma forma como acima também temos que existe um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -morfismo $\varphi : \Lambda^2(U^5) \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3$.

2. Seja $U^4 := (V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes (V_3 \ltimes V_0)$. Temos que U^4 satisfaz a. e b. do teorema 3.2, se $U^4 \simeq (V_0 \oplus V_3^*) \oplus (V_3 \ltimes V_0) \iff \delta_i = \delta = \alpha = \zeta = 0$ (ver seção 3.3.1.2). De fato, se $Q_1 := V_3 \ltimes V_0$, $Q_2 := V_0$, $P_3 := V_3^*$, $P_4 := 0$, $Q := V_0 \oplus V_3^*$ e, $P := (V_3 \ltimes V_0) \oplus V_0$ temos :

- a) $Q_2 \subseteq Q_1$, $Q_1/Q_2 \simeq V_3$ e, $Q_1 \oplus Q = U^4$.
b) $P_4 \subseteq P_3$, $P_3/P_4 \simeq V_3^*$ e, $P_3 \oplus P = U^4$.

Portanto, existe um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -morfismo $\varphi : \Lambda^2(U^4) \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3$.

Analogamente, acontece com os $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2- módulos: U^{13} , U^{45} , U^{46} , U^{57} , U^{58} , U^{138} , U^{139} , U^{253} e U^{254} (ver seções: 3.3.1.7., 3.3.1.23., 3.3.1.24., 3.3.1.29., 3.3.1.30., 3.3.1.37., 3.3.1.38., 3.3.1.49. e, 3.3.1.50.).

3. Seja $U^7 := (V_0 \ltimes V_3) \ltimes (V_3^* \ltimes V_0)$. Pela seção 3.3.1.4 temos que

$$U^7 \simeq (V_0 \oplus V_3) \oplus (V_3^* \ltimes V_0) \iff \delta_i = \omega = \sigma = \theta = 0$$

além disso, U^7 cumpre a. e b. do teorema 3.2 se, e somente se,

$U^7 \simeq (V_0 \oplus V_3) \oplus (V_3^* \ltimes V_0)$. De fato, se $Q_1 := V_3$, $Q_2 := 0$, $P_3 := V_3^* \ltimes V_0$, $P_4 := V_0$, $Q := (V_3^* \ltimes V_0) \oplus V_0$ e, $P := V_0 \oplus V_3$, então

- a) $Q_2 \subseteq Q_1$, $Q_1/Q_2 \simeq V_3$ e $Q_1 \oplus Q = U^7$.
b) $P_4 \subseteq P_3$, $P_3/P_4 \simeq V_3^*$ e $P_3 \oplus P = U^7$.

Então pelo teorema 3.2 existe um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -morfismo $\varphi : \Lambda^2(U^7) \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3$.

Da mesma forma tem-se para os módulos: U^{10} , U^{25} , U^{26} , U^{37} , U^{38} , U^{144} , U^{145} , U^{259} , U^{260} (ver seções: 3.3.1.5., 3.3.1.11., 3.3.1.12., 3.3.1.17., 3.3.1.18., 3.3.1.41, 3.3.1.42., 3.3.1.42., 3.3.1.53. e, 3.3.1.54.).

4. Seja $U^{12} := (V_0 \ltimes V_3^*) \ltimes (V_0 \ltimes V_3)$. Pela seção 3.3.1.6 vemos que

$$U^{12} \simeq (V_0 \oplus V_3^*) \oplus (V_0 \oplus V_3) \iff \delta_i = \omega = \theta = \sigma = \delta = \alpha = \zeta = 0$$

e se $U^{12} \simeq (V_0 \oplus V_3^*) \oplus (V_0 \oplus V_3)$, então temos a. e b. do teorema 3.2. De fato, se $Q_1 := V_3$, $Q_2 := 0$, $P_3 := V_3^*$, $P_4 := 0$, $Q := (V_0 \oplus V_3^*) \oplus V_0$ e $P := (V_0 \oplus V_3) \oplus V_0$ então

- a) $Q_2 \subseteq Q_1$, $Q_1/Q_2 \simeq V_3$ e, $Q_1 \oplus Q = U^{12}$.
b) $P_4 \subseteq P_3$, $P_3/P_4 \simeq V_3^*$ e, $P_3 \oplus P = U^{12}$.

Pelo teorema 3.2 existe um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -morfismo $\varphi : \Lambda^2(U^{12}) \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3$. Da mesma forma, também tem-se para os módulos: U^{15} , U^{20} , U^{27} , U^{28} , U^{32} , U^{39} , U^{40} , U^{42} , U^{47} , U^{48} , U^{54} , U^{59} , U^{60} , U^{65} , U^{67} , U^{101} , U^{103} , U^{142} , U^{143} , U^{148} , U^{149} , U^{178} , U^{179} , U^{180} , U^{184} , U^{257} , U^{258} , U^{263} , U^{264} , U^{292} , U^{293} , U^{294} , U^{298} (ver seções: 3.3.1.8, 3.3.1.10, 3.3.1.13, 3.3.1.14, 3.3.1.16, 3.3.1.19, 3.3.1.20., 3.3.1.22., 3.3.1.25., 3.3.1.26., 3.3.1.28., 3.3.1.31., 3.3.1.32., 3.3.1.33., 3.3.1.34., 3.3.1.35., 3.3.1.36., 3.3.1.39., 3.3.1.40., 3.3.1.43., 3.3.1.44., 3.3.1.45., 3.3.1.46., 3.3.1.47., 3.3.1.48., 3.3.1.51., 3.3.1.52., 3.3.1.55., 3.3.1.56., 3.3.1.57., 3.3.1.58., 3.3.1.59., 3.3.1.60.).

5. Seja $U^{19} := [V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes V_3$. Pela seção 3.3.1.9. temos que

$$U^{19} \simeq [V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \oplus V_3 \iff \delta_i = 0.$$

Além disso, se $U^{19} \simeq [V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \oplus V_3$, então temos a. e b. do teorema 3.2. De fato, se $Q_1 := V_3, Q_2 := 0, P_3 := V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0), P_4 := V_0 \ltimes V_0, Q := V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$ e $P := V_3$, então

- a) $Q_2 \subseteq Q_1, Q_1/Q_2 \simeq V_3$ e, $Q_1 \oplus Q = U^{19}$.
- b) $P_4 \subseteq P_3, P_3/P_4 \simeq V_3^*$ e, $P_3 \oplus P = U^{19}$.

Pelo teorema 3.2 existe um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -morfismo $\varphi : \Lambda^2(U^{19}) \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3$. Da mesma forma, isto tem-se para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -módulo U^{31} (ver seção 3.3.1.15).

6. Seja $U^{41} := [V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \ltimes V_3^*$. Pela seção 3.3.1.21 temos que

$$U^{41} \simeq [V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \oplus V_3^* \iff \delta_i = 0.$$

Além disso, Se $U^{41} \simeq [V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)] \oplus V_3^*$ então temos a. e b. do teorema 3.2. De fato, se $Q_1 := V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0), Q_2 := V_0 \ltimes V_0, P_3 := V_3^*, P_4 := 0, Q := V_3^*$ e $P := V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)$, então

- a) $Q_2 \subseteq Q_1, Q_1/Q_2 \simeq V_3$ e, $Q_1 \oplus Q = U^{41}$.
- b) $P_4 \subseteq P_3, P_3/P_4 \simeq V_3^*$ e, $P_3 \oplus P = U^{41}$.

Pelo teorema 3.2 existe um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -morfismo $\varphi : \Lambda^2(U^{41}) \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3$. Da mesma forma, também tem-se para o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulo U^{53} (ver seção 3.3.1.27).

Em resumo, temos que os seguintes $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos U da forma:

- a) $U^a := (V_0 \oplus V_3^*) \oplus (V_0 \oplus V_3)$
- b) $U^b := (V_0 \oplus V_3^*) \oplus (V_3 \ltimes V_0)$
- c) $U^c := (V_0 \oplus V_3) \oplus (V_3^* \ltimes V_0)$
- d) $U^d := (V_3^* \ltimes V_0) \oplus (V_3 \ltimes V_0)$
- e) $U^e := V_3^* \oplus [V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)]$
- f) $U^f := V_3 \oplus [V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)]$

cumprem a condição 1. do teorema 3.2., portanto existe um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -morfismo

$$\varphi : \Lambda^2(U^j) \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3$$

para todo $j = a, b, c, d, e, f$.

Assim que, das condições A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5 temos que $(G(U^j), [,])$ é uma k -álgebra de dimensão 17, para todo $j = a, b, c, d, e, f$.

4.1.1.3. $(G(U^j), [,])$ k -álgebra de Lie.

Temos que o par $(G(U^j), [,])$, para $j = a, b, c, d, e, f$ é uma k -álgebra, além disso $[,]$ é uma aplicação k -bilinear alternada. Assim, para ver que $(G(U^j), [,])$ (para $j = a, b, c, d, e, f$) é uma álgebra de Lie sobre k é necessario mostrar a identidade de Jacobi. Isso é feito considerando ternas de elementos nos diferentes espaços $\mathfrak{sl}_3(k)$, kt_3 , U^j . A identidade de Jacobi será tomada na forma

$$0 = J(a, b, c) := [a, [b, c]] + [b, [a, c]] + [c, [a, b]].$$

Agora, para cada $\mathfrak{sl}_3(k)$ -2-módulos U^j , com $j = a, b, c, d, e, f$, vejamos se $(G(U^j), [,])$ tem estrutura de k -álgebra de Lie, verificando a identidade de Jacobi.

a) Temos que

$$G(U^a) = \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3 \oplus U^a$$

é uma k -álgebra. Precisamos saber se ela é uma k -álgebra de Lie, para isso, primeiro definamos explicitamente o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -morfismo

$\varphi : \Lambda^2(U^a) \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3$, e logo verificamos a identidade de Jacobi. De fato, seja $U^a := \langle v, v_1, v_2, v_3, k, k_1, k_2, k_3 \rangle$ (ver tabela 3.22).

Como $U^a := (V_0 \oplus V_3^*) \oplus (V_0 \oplus V_3)$ então pelo exemplo 1.21.5 :

$$\begin{aligned} \Lambda^2(U^a) &\simeq \Lambda^2(V_0 \oplus V_3^*) \oplus ((V_0 \oplus V_3^*) \otimes (V_0 \oplus V_3)) \oplus \Lambda^2(V_0 \oplus V_3) \\ &\simeq (V_0 \wedge V_0) \oplus (V_0 \otimes_k V_3^*) \oplus (V_3^* \wedge V_3^*) \oplus (V_0 \otimes_k V_0) \oplus (V_0 \otimes_k V_3) \\ &\quad \oplus (V_3^* \otimes_k V_0) \oplus (V_3^* \otimes_k V_3) \oplus (V_0 \wedge V_0) \oplus (V_0 \otimes_k V_3) \oplus (V_3 \wedge V_3) \\ &\simeq (V_0 \otimes_k V_3^*) \oplus (V_3^* \wedge V_3^*) \oplus (V_0 \otimes_k V_0) \oplus (V_0 \otimes_k V_3) \\ &\quad \oplus (V_3^* \otimes_k V_0) \oplus (V_3^* \otimes_k V_3) \oplus (V_0 \otimes_k V_3) \oplus (V_3 \wedge V_3). \end{aligned}$$

Logo temos os seguintes $\mathfrak{sl}_3(k)$ -submódulos de $U^a \wedge U^a$:

- $U_1^a := (V_0 \otimes_k V_3) \simeq (V_0 \wedge V_3) = \langle v \wedge v_1, v \wedge v_2, v \wedge v_3 \rangle \simeq V_3$.
- $U_2^a := (V_3 \otimes_k V_0) \simeq (V_3 \wedge V_0) = \langle v_1 \wedge k, v_2 \wedge k, v_3 \wedge k \rangle \simeq V_3$.
- $U_3^a := (V_3^* \otimes_k V_0) \simeq (V_3^* \wedge V_0) = \langle v \wedge k_1, v \wedge k_2, v \wedge k_3 \rangle \simeq V_3^*$.
- $U_4^a := (V_0 \otimes_k V_3^*) \simeq (V_0 \wedge V_3^*) = \langle k \wedge k_1, k \wedge k_2, k \wedge k_3 \rangle \simeq V_3^*$.
- $U_5^a := (V_3 \wedge V_3) = \langle v_1 \wedge v_2, v_1 \wedge v_3, v_2 \wedge v_3 \rangle \simeq V_3$.
- $U_6^a := (V_3^* \wedge V_3^*) = \langle k_1 \wedge k_2, k_1 \wedge k_3, k_2 \wedge k_3 \rangle \simeq V_3^*$.
- $U_7^a := (V_3 \otimes_k V_3^*) \simeq (V_3 \wedge V_3^*) = \langle v_1 \wedge k_j, v_2 \wedge k_j, v_3 \wedge k_j : j = 1, 2, 3 \rangle$.
- $U_8^a := V_0 \otimes_k V_0 \simeq V_0 \wedge V_0 = \langle v \wedge k \rangle$

Vejamos como está definida φ em cada um destes submódulos, isto é, achemos $\varphi|_{U_i^a}$. Então temos que $\varphi(U_i^a)$ é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -submódulos de $\mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3$, para cada $i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ assim:

$$U_i^a \rightarrow kt_3, \text{ ou } U_i^a \rightarrow 0, \text{ ou } U_i^a \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k).$$

Suponhamos que $U_i^a \rightarrow kt_3$ ($U_i^a \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k)$) para $i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$. Como V_3, V_3^*, kt_3 são $\mathfrak{sl}_3(k)$ -módulos irredutíveis, então pelo lema de Schur (lema

1.19) temos que $U_i^a \simeq kt_3$ ($U_i^a \simeq \mathfrak{sl}_3(k)$) para todo $i=1, 2, \dots, 6, 8$. Uma contradição. Portanto $\varphi|_{U_i^a} = 0$, para $i=1, \dots, 6, 8$.

Graças ao exemplo 3.1 temos que $\varphi|_{U_7^a} = g$. Assim, φ é definida como:

$$\begin{array}{lll} \Lambda^2(U^a) & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3 \\ v \wedge v_i & \mapsto & 0 \quad i = 1, 2, 3. \\ v \wedge k_i & \mapsto & 0 \quad i = 1, 2, 3. \\ v_i \wedge k & \mapsto & 0 \quad i = 1, 2, 3. \\ k \wedge k_i & \mapsto & 0 \quad i = 1, 2, 3. \\ v_i \wedge v_k & \mapsto & 0 \quad 1 \leq i < j \leq 3. \\ k_i \wedge k_j & \mapsto & 0 \quad 1 \leq i < j \leq 3. \\ v \wedge k & \mapsto & 0 \\ \varphi|_{U_7^a} & = & g \end{array}$$

Agora, pela tabela 3.22 temos:

$$\begin{aligned} J(v_1, k_1, k_2) &= [v_1, [k_1, k_2]] + [k_1, [v_1, k_2]] + [k_2, [v_1, k_1]] = \\ &= [k_1, e_{21}] + [k_2, h_2 + t_3] = k_2 + k_2 + k_2 = k_2 \neq 0. \end{aligned}$$

Portanto $G(U^a)$ não é uma k -álgebra de Lie sobre k .

b) Seja a k -álgebra

$$G(U^b) = \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3 \oplus U^b.$$

Vejamos se ela é uma k -álgebra de Lie verificando a identidade de Jacobi, para isso, definamos explicitamente $\mathfrak{sl}_3(k)$ -morfismo $\varphi : \Lambda^2(U^b) \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3$. De fato, como $U^b := (V_0 \oplus V_3^*) \oplus (V_3 \ltimes V_0)$ (ver tab. 3.16), pelo exemplo 1.21.5:

$$\begin{aligned} \Lambda^2(U^b) &\simeq \Lambda^2(V_0 \oplus V_3^*) \oplus ((V_0 \oplus V_3^*) \otimes_k (V_3 \ltimes V_0)) \oplus \Lambda^2(V_3 \ltimes V_0) \\ &\simeq (V_0 \wedge V_0) \oplus (V_0 \otimes_k V_3^*) \oplus (V_3^* \wedge V_3^*) \oplus (V_3 \ltimes V_0) \otimes_k V_0 \oplus \\ &\quad \oplus (V_3 \ltimes V_0) \otimes_k V_3^* \oplus (V_3 \ltimes V_0) \wedge (V_3 \ltimes V_0). \end{aligned}$$

Agora, consideremos os seguintes $\mathfrak{sl}_3(k)$ -submódulos de $U^b \wedge U^b$:

- $U_1^b = V_0 \wedge V_0 = 0$
- $U_2^b := (V_0 \otimes_k V_3^*) \simeq (V_0 \wedge V_3^*) \simeq V_3^* \wedge V_0 \simeq V_3^*$.
- $U_3^b := V_3^* \wedge V_3^* \simeq V_3^*$.
- $U_4^b := (V_3 \ltimes V_0) \otimes_k V_0 \simeq (V_3 \ltimes V_0) \wedge V_0 \simeq V_0 \wedge (V_3 \ltimes V_0)$.
- $U_5^b := V_3^* \otimes_k (V_3 \ltimes V_0) \simeq V_3^* \wedge (V_3 \ltimes V_0) \simeq (V_3 \ltimes V_0) \wedge V_3^*$.
- $U_6^b := (V_3 \ltimes V_0) \wedge (V_3 \ltimes V_0)$.

Pelo mesmos argumentos como no caso anterior, temos que $\varphi(U_i^b)$ é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -submódulo de $\mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3$ para $i = 1, 2, 3, 4, 6$, assim: $U_i^b \rightarrow kt_3$, ou $U_i^b \rightarrow 0$, ou $U_i^b \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k)$. Suponhamos que $U_i^b \rightarrow kt_3$ ($U_i^b \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k)$) para $i = 2, 3, 4, 6$. Então, para $i = 2, 3$ temos que U_2^b, U_3^b são $\mathfrak{sl}_3(k)$ -módulos irredutíveis, então pelo lema de Schur eles são isomorfos a k ($\mathfrak{sl}_3(k)$), o qual

é absurdo. Portanto $\varphi|_{U_i^b} = 0$ para $i=2, 3$.

Para $i = 4$, $U_4^b = \langle a \wedge z, a_1 \wedge z, a_2 \wedge z, a_3 \wedge z \rangle$, onde a ação de $\mathfrak{sl}_3(k)$ sobre U_4^b é dada na tabela 4.2:

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
$a \wedge z$	0	0	0	0	0	0	0	0
$a_1 \wedge z$	$a_1 \wedge z$	0	$a_2 \wedge z$	$a_3 \wedge z$	$\beta(a \wedge z)$	0	0	$\kappa(a \wedge z)$
$a_2 \wedge z$	$a_2 \wedge z$	$a_2 \wedge z$	0	$\gamma(a \wedge z)$	$a_3 \wedge z$	$a_1 \wedge z$	$\kappa(a \wedge z)$	0
$a_3 \wedge z$	0	$a_3 \wedge z$	$\gamma(a \wedge z)$	0	0	$\beta(a \wedge z)$	$a_1 \wedge z$	$a_2 \wedge z$

Tabela 4.2: $O(\mathfrak{sl}_3(k), 2)$ -módulo $(V_3 \ltimes V_0) \wedge V_0$

Da tabela 4.2, note que, $W := \langle a \wedge z \rangle$ é um $(\mathfrak{sl}_3(k), 2)$ -submódulo de U_4^b , e $U_4^b/W \simeq V_3$. Além do mais, $0 = \varphi(a_2 \wedge z).e_{13} = \varphi((a_2 \wedge z)e_{13}) = \varphi(\gamma(a \wedge z)) = \gamma\varphi(a \wedge z)$, como $\gamma \neq 0$, então $\varphi(a \wedge z) = 0$, portanto $W \subseteq \text{Ker}(\varphi|_{U_4^b})$. Logo, $\text{Ker}(\varphi|_{U_4^b})/W$ é submódulo de $U_4^b/W \simeq V_3$, como V_3 é irredutível, temos que $\text{Ker}(\varphi|_{U_4^b}) = W$ ou $\text{Ker}(\varphi|_{U_4^b}) = U_4^b$. Por outro lado, como $\varphi|_{U_4^b} : U_4^b \rightarrow kt_3$ é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -morfismo sobrejetor, temos que $U_4^b/\text{Ker}(\varphi|_{U_4^b}) \simeq k$. Assim, se $\text{Ker}(\varphi|_{U_4^b}) = W$, então $V_3 \simeq k$ ou, se $\text{Ker}(\varphi|_{U_4^b}) = U_4^b$, então $0 \simeq k$. Uma contradição. Agora, se $U_4^b \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k)$, então do $\mathfrak{sl}_3(k)$ -morfismo sobrejetor $U_4^b \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k)$ obtemos $\dim_k(U_4^b) \geq 8$, o qual é absurdo. Assim, $\varphi|_{U_4^b} = 0$.

Para $i = 6$ temos $U_6^b = \langle p_1, p_2, p_3, p_{12}, p_{13}, p_{23} \rangle$, onde $p_i := a \wedge a_i$, $p_{ij} := a_i \wedge a_j$ com $1 \leq i < j \leq 3$. (ver tab. 4.3).

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
p_1	p_1	0	p_2	p_3	0	0	0	0
p_2	p_2	p_2	0	0	p_3	p_1	0	0
p_3	0	p_3	0	0	0	0	p_1	p_2
p_{12}	0	p_{12}	0	$p_{32} + \gamma p_1$	$p_{13} + \beta p_2$	0	κp_1	κp_2
p_{13}	p_{13}	p_{13}	$p_{23} + \gamma p_1$	0	βp_3	βp_1	0	$p_{12} + \kappa p_3$
p_{23}	p_{23}	0	γp_2	γp_3	0	$p_{13} + \beta p_2$	$p_{21} + \gamma p_3$	0

Tabela 4.3: $O(\mathfrak{sl}_3(k), 2)$ -módulo $\Lambda^2(V_3 \ltimes V_0)$

Note que, $S := \langle p_1, p_2, p_3 \rangle \simeq V_3$ é um $(\mathfrak{sl}_3(k), 2)$ -submódulo de U_6^b e, $U_6^b/S \simeq V_3^*$. Também, se $\varphi|_{U_6^b} : U_6^b \rightarrow kt_3$, temos que $S \subset \text{Ker}(\varphi|_{U_6^b})$. De fato, $0 = \varphi(p_i)h_i = \varphi(p_i.h_i) = \varphi(p_i)$. Então $\text{Ker}(\varphi)/S \leq U_6^b/S \simeq V_3^*$, e assim $\text{Ker}(\varphi|_{U_6^b}) = U_6^b$, ou $\text{Ker}(\varphi|_{U_6^b}) = S$, pelo mesmo argumento do caso anterior chegamos a um absurdo. Agora, se temos $\varphi|_{U_6^b} : U_6^b \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k)$, obtemos que $\dim_k U_6^b \geq 8$, o qual é falso. Portanto $\varphi|_{U_6^b} = 0$. Para $i = 5$, temos $U_5^b = \langle z_i \wedge a, z_i \wedge a_j : 1 \leq i < j \leq 3 \rangle$, onde a $\mathfrak{sl}_3(k)$ -ação sobre U_5^b é dada na tabela 4.4.

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
q_1	q_1	0	0	0	0	q_2	q_3	0
q_2	q_2	q_2	q_1	0	0	0	0	q_3
q_3	0	q_3	0	q_1	q_2	0	0	0
q_{11}	0	0	q_{12}	q_{13}	βq_1	q_{21}	q_{31}	κq_1
q_{22}	0	0	q_{12}	γq_2	q_{23}	q_{21}	0	q_{32}
q_{12}	0	q_{12}	0	γq_1	q_{13}	$q_{22} + q_{11}$	$q_{32} + \kappa q_1$	0
q_{13}	q_{13}	q_{13}	γq_1	0	0	$q_{23} + \beta q_1$	$q_{33} + q_{11}$	q_{12}
q_{23}	q_{23}	0	$q_{13} + \gamma q_2$	0	βq_2	βq_2	q_{21}	$q_{33} + q_{22}$
q_{21}	0	q_{21}	$q_{11} + q_{22}$	q_{23}	βq_2	0	0	$q_{31} + \kappa q_2$
q_{31}	q_{31}	q_{31}	q_{32}	$q_{11} + q_{33}$	$q_{21} + \beta q_3$	0	0	0
q_{32}	q_{32}	0	0	$q_{12} + \gamma q_3$	$q_{22} + q_{33}$	q_{31}	κq_3	0
q_{33}	0	0	γq_3	q_{13}	q_{23}	βq_3	q_{31}	q_{32}

Tabela 4.4: $O(\mathfrak{sl}_3(k), 2)$ -módulo $V_3^* \wedge (V_3 \ltimes V_0)$

onde: $q_i := z_i \wedge a$, $q_{ii} := z_i \wedge a_i$, para $i=1, 2, 3$; $q_{12} := z_1 \wedge a_2$, $q_{13} := z_1 \wedge a_3$,
 $q_{23} := z_2 \wedge a_3$, $q_{21} := z_2 \wedge a_1$, $q_{31} := z_3 \wedge a_1$, $q_{32} := z_3 \wedge a_2$.

Seja $W := \langle q_1, q_2, q_3 \rangle$, da tabela 4.4 vemos que

$$U_5^b/W \simeq V_3^* \otimes_k V_3 \simeq V_3^* \wedge V_3 \xrightarrow[\simeq]{f} \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3$$

onde f é dada no exemplo 3.1. Portanto, podemos definir $\varphi|_{U_5^b} := f \circ p$, onde $p : U_5^b \rightarrow U_5^b/W$ é o morfismo quociente. Agora, pela tabela 3.16 encontramos que:

$$J(a_1, z_1, z_3) = [a_1, [z_1, z_3]] + [z_1, [a_1, z_3]] + [z_3, [a_1, z_1]] = z_1 e_{31} + z_3(h_2 + t_3) = z_3 + z_3 + z_3 = z_3 \neq 0.$$

Portanto, $G(U^b)$ não é uma álgebra de Lie sobre k .

c) Pelo exemplo 1.21.5 achamos que:

$$\begin{aligned} \Lambda^2(U^c) &\simeq (V_0 \wedge V_0) \oplus (V_0 \otimes_k V_3) \oplus (V_3 \wedge V_3) \oplus ((V_3^* \ltimes V_0) \otimes V_0) \oplus \\ &\oplus ((V_3^* \ltimes V_0) \otimes_k V_3) \oplus ((V_3^* \ltimes V_0) \wedge (V_3^* \ltimes V_0)). \end{aligned}$$

Assim, temos os seguintes $\mathfrak{sl}_3(k)$ -submódulos de $\Lambda^2(U^c)$:

- $U_1^c = V_0 \wedge V_0 = 0$
- $U_2^c := V_0 \otimes_k V_3 \simeq V_0 \wedge V_3 \simeq V_3 \wedge V_0 \simeq V_3$.
- $U_3^c := V_3 \wedge V_3 \simeq V_3$.
- $U_4^c := (V_3^* \ltimes V_0) \otimes V_0 \simeq (V_3^* \ltimes V_0) \wedge V_0 \simeq V_0 \wedge (V_3^* \ltimes V_0)$.
- $U_5^c := V_3 \otimes_k (V_3^* \ltimes V_0) \simeq V_3 \wedge (V_3^* \ltimes V_0) \simeq (V_3^* \ltimes V_0) \wedge V_3$.
- $U_6^c := (V_3^* \ltimes V_0) \wedge (V_3^* \ltimes V_0)$.

Vejamos como é $\varphi|_{U_i^c}$ para todo $i = 2, 3, 4, 5, 6$. Se $\varphi|_{U_i^c} : U_i^c \rightarrow kt_3$ ou $\varphi|_{U_i^c} : U_i^c \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k)$ para $i = 2, 3$ se segue, pelo lema de Schur, que $U_i^c \simeq kt_3$ ou $U_i^c \simeq \mathfrak{sl}_3(k)$, já que U_i^c é irredutível. Uma contradição. Portanto

$\varphi|_{U_i^c} = 0$ para $i = 2, 3$. Para $i = 4$ suponhamos que $\varphi|_{U_4^c} : U_4^c \rightarrow kt_3$, então $U_4^c / \text{Ker}(\varphi|_{U_4^c}) \simeq kt_3$. Por outro lado, se $s_i := b_i \wedge v$ e $s := b \wedge v$, então $U_4^c = \langle s, s_i : i = 1, 2, 3 \rangle \subseteq \text{Ker}(\varphi|_{U_4^c})$. De fato, $0 = \varphi(s_1) \cdot e_{23} = \varphi(s_1 e_{23}) = \pi \varphi(s)$ então, $\pi = 0$ ou $\varphi(s) = 0$, como $\pi \neq 0$, então $\varphi(s) = 0$. Também: $0 = \varphi(s_i) \cdot h_i = \varphi(s_i \cdot h_i) = \varphi(s_i)$, $i = 1, 2$; $0 = h_2 \varphi(s_3) \cdot h_2 = \varphi(s_3 h_2) = \varphi(s_3)$. Assim, temos que $0 = \text{Im}(\varphi|_{U_4^c}) = kt_3$, uma contradição.

Agora, $\varphi|_{U_4^c} : U_4^c \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k)$ é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -morfismo sobrejetor, assim $\dim_k(U_4^c) \geq 8$, o qual é falso. Portanto $\varphi|_{U_4^c} = 0$.

Para $i = 6$, temos $U_6^c = \langle f_1, f_2, f_3, f_{12}, f_{13}, f_{23} \rangle$ (ver tab. 4.5 abaixo), onde $f_i := b \wedge b_i$ para $1, 2, 3$ e, $f_{ij} := b_i \wedge b_j$ com $1 \leq i < j \leq 3$.

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
f_1	f_1	0	0	0	0	f_2	f_3	0
f_2	f_2	f_1	0	0	0	0	0	f_3
f_3	0	f_3	0	f_1	f_2	0	0	0
f_{12}	0	f_{12}	0	πf_1	πf_2	0	$\xi f_2 + f_{32}$	$\lambda f_2 + f_{13}$
f_{13}	f_{13}	f_{13}	λf_1	0	$\pi f_3 + f_{12}$	$\xi f_1 + f_{23}$	0	λf_3
f_{23}	f_{23}	0	$\lambda f_2 + f_{13}$	πf_{12}	0	ξf_2	ξf_3	0

Tabela 4.5: $O(\mathfrak{sl}_3(k), 2)$ -módulo $\Lambda^2(V_3^* \ltimes V_0)$

Suponhamos que $\varphi|_{U_6^c} : U_6^c \rightarrow kt_3$ ($\varphi|_{U_6^c} : U_6^c \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k)$).

Seja $W := \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$, da tabela 4.5 vemos que W é submódulo de U_6^c , que é isomorfo a V_3^* . Logo, o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -morfismo $\varphi|_{U_6^c} \circ \iota : W \rightarrow kt_3$

($\varphi|_{U_6^c} \circ \iota : W \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k)$) é um isomorfismo, pelo lema de Shur. Portanto, $V_3^* \simeq kt_3$ ($V_3^* \simeq \mathfrak{sl}_3(k)$). Uma contradição. Assim, $\varphi|_{U_6^c} \circ \iota = 0$, portanto $W \subseteq \text{Ker}(\varphi|_{U_6^c})$, logo $\text{Ker}(\varphi|_{U_6^c})/W \leq U_6^c/W \simeq V_3$, segue-se que $\text{Ker}(\varphi|_{U_6^c}) = W$ ou $\text{Ker}(\varphi|_{U_6^c}) = U_6^c$. Portanto, $0 \simeq kt_3(\mathfrak{sl}_3(k))$ ou $V_3 \simeq kt_3(\mathfrak{sl}_3(k))$, o qual é absurdo. Assim, $\varphi|_{U_6^c} = 0$.

Para $i = 5$, temos que $W := \langle v_1 \wedge b, v_2 \wedge b, v_3 \wedge b \rangle$ é submódulo de U_5^c e

$$U_5^c/W \simeq V_3 \wedge V_3^* \xrightarrow{g} \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3.$$

Podemos definir, $\varphi|_{U_5^c} = g \circ p$, onde $p : U_5^b \rightarrow U_5^b/W$ é o morfismo quociente e g como no exemplo 3.1. Assim, pela tabela 3.20 obtemos:

$$J(b_1, v_1, v_2) = [b_1, [v_1, v_2]] + [v_1, [b_1, v_2]] + [v_2, [b_1, v_1]] = v_1 e_{12} + v_2(h_2 + t_3) = v_2 + v_2 + v_2 = v_2 \neq 0.$$

Portanto, $G(U^c)$ não é uma álgebra de Lie sobre k .

- d) $G(U^d) := \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3 \oplus U^d$ é uma k -álgebra. Vejamos se ela é uma k -álgebra de Lie. Para isso, precisamos definir explicitamente o $\mathfrak{sl}_3(k)$ -morfismo

$$\varphi : \Lambda^2(U^d) \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3.$$

De fato, como $U^d := (V_3^* \ltimes V_0) \oplus (V_3 \ltimes V_0)$ (Ver tab. 3.14) então:

$$\Lambda^2(U^d) \simeq \Lambda^2(V_3^* \ltimes V_0) \oplus (V_3^* \ltimes V_0) \otimes_k (V_3 \ltimes V_0) \oplus \Lambda^2(V_3 \ltimes V_0)$$

Agora, consideremos os seguintes $\mathfrak{sl}_3(k)$ -submódulos de $U^d \wedge U^d$:

- $U_1^d := (V_3 \ltimes V_0) \wedge (V_3 \ltimes V_0)$
- $U_2^d := (V_3^* \ltimes V_0) \wedge (V_3^* \ltimes V_0)$
- $U_3^d := (V_3^* \ltimes V_0) \otimes_k (V_3 \ltimes V_0) \simeq (V_3 \ltimes V_0) \wedge (V_3^* \ltimes V_0) \simeq (V_3^* \ltimes V_0) \wedge (V_3 \ltimes V_0)$

Então $\varphi(U_i^d)$ é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -submódulo de $\mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3$ para $i = 1, 2, 3$. Assim: $U_i^d \rightarrow kt_3$, ou $U_i^d \rightarrow 0$, ou $U_i^d \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k)$. Suponhamos que $U_i^d \xrightarrow{\varphi} kt_3$ ($U_i^d \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{sl}_3(k)$) para $i = 1, 2$.

Para $i = 1$, com o mesmo argumento aplicado a U_6^b do caso b . (ver tab. 4.3) temos que: $\varphi|_{U_1^d} = 0$.

Para $i = 2$, aplicando o mesmo argumento usado em U_6^c de c . (ver tab. 4.5) encontramos que $U_4^d \xrightarrow{\varphi} 0$ Para $i = 3$.

Tem-se $U_3^d = \langle l, l_i, l_{ii}, l_{ij}, s_i : 1 \leq i < j \leq 3 \rangle$ onde $l := u \wedge x$, $l_i := u_i \wedge x$, $l_{ii} := u_i \wedge x_i$, $l_{ij} := u_i \wedge x_j$ e, $s_i := x_i \wedge u$, com $1 \leq i < j \leq 3$, (ver tab. 4.6).

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
l_1	l_1	0	0	0	πl	l_2	l_3	λl
l_2	l_2	l_2	l_1	πl	0	0	ξl	l_3
l_3	0	l_3	λl	l_1	l_2	ξl	0	0
l_{11}	0	0	l_{12}	l_{13}	$\beta l_1 + \pi s_1$	l_{21}	l_{31}	$\alpha l_1 + \lambda s_1$
l_{22}	0	0	l_{12}	$\gamma l_2 + \pi s_2$	l_{23}	l_{21}	$\xi s_2 + \alpha l_2$	l_{32}
l_{12}	0	l_{12}	0	γl_1	$l_{13} + \pi s_2$	$l_{22} + l_{11}$	$l_{32} + \alpha l_1$	λs_2
l_{13}	l_{13}	l_{13}	γl_1	0	πs_3	$l_{23} + \beta l_2$	$l_{33} + l_{11}$	$l_{12} + \lambda s_3$
l_{23}	l_{23}	0	$l_{13} + \gamma l_2$	πs_3	0	βl_2	$l_{21} + \xi s_3$	$l_{33} + l_{22}$
l_{21}	0	l_{21}	$l_{11} + l_{22}$	$l_{23} + \pi s_1$	βl_2	0	ξs_1	$l_{31} + \alpha l_2$
l_{31}	l_{31}	l_{31}	$l_{32} + \lambda s_1$	$l_{11} + l_{33}$	$l_{21} + \beta l_3$	ξs_1	0	αl_3
l_{32}	l_{32}	0	λs_2	$l_{12} + \gamma l_3$	$l_{22} + l_{33}$	$l_{31} + \xi s_2$	αl_3	0
l_{33}	0	0	$\gamma l_3 + \lambda s_3$	l_{13}	l_{23}	$\xi s_3 + \beta l_3$	l_{31}	l_{32}
l	0	0	0	0	0	0	0	0
s_1	s_1	0	s_2	s_3	βl	0	0	αl
s_2	s_2	s_2	0	γl	s_3	s_1	αl	0
s_3	0	s_3	γl	0	0	βl	s_1	s_2

Tabela 4.6: $O(\mathfrak{sl}_3(k), 2)$ -módulo $(V_3^* \ltimes V_0) \wedge (V_3 \ltimes V_0)$

Da tabela 4.6, observamos que $W := \langle l, l_1, l_2, l_3, s_1, s_2, s_3 \rangle$ é um submódulo de U_3^d , e

$$U_3^d/W \simeq V_3 \wedge V_3^* \xrightarrow[\simeq]{f} \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3.$$

logo $\varphi|_{U_3^d} := f \circ p$ com $p : U_3^d \rightarrow U_3^d/W$ o morfismo quociente e f como no exemplo 3.1. Por outro lado, pela tabela 3.14 obtemos que

$$J(u_1, x_1, x_2) = [x_1, [u_1, x_2]] + [x_2, [u_1, x_1]] = [x_1, e_{12}] + [x_2, h_2 + t_3] = x_2 \neq 0.$$

Portanto, temos que $G(U^d)$ não é uma álgebra de Lie sobre k .

e) Como $U^e = V_3^* \oplus [V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)]$ (ver tab. 3.44). Achamos $\Lambda^2(U^e)$:

$$\Lambda^2(U^e) \simeq \Lambda^2(V_3^*) \oplus (V_3^* \otimes_k (V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0))) \oplus \Lambda^2(V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0))$$

Agora, consideremos os seguintes $\mathfrak{sl}_3(k)$ -submódulos de $U^e \wedge U^e$:

- $U_1^e := V_3^* \wedge V_3^* \simeq V_3^*$
- $U_2^e := V_3^* \otimes_k (V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)) \simeq V_3^* \wedge (V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0))$.
- $U_3^e := (V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0)) \wedge (V_3 \ltimes (V_0 \ltimes V_0))$

Vejamos como está definida $\varphi|_{U_i^e}$, $i = 1, 2, 3$. Se $\varphi|_{U_1^e} : U_1^e \rightarrow kt_3$, então $V_3^* \simeq U_1^e \simeq kt_3$ ($\mathfrak{sl}_3(k)$). Uma contradição. Portanto $\varphi|_{U_1^e} = 0$. Seja, $U_3^e = \langle n, n_i, m_i, m_{ij} : 1 \leq i < j \leq 3 \rangle$, onde $n := x \wedge y$, $n_i := x \wedge x_i$, $m_i := y \wedge x_i$, $m_{ij} := x_i \wedge x_j$, para $1 \leq i < j \leq 3$. Usando a tabela 3.8 se pode construir a tabela para U_3^e (ver página seguinte tabela 4.8). Da tabela 4.8, vemos que $W := \langle n, m_i, n_i : i = 1, 2, 3 \rangle$ é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -submódulo de U_3^e e $U_3^e/W = \langle m_{ij} + W : 1 \leq i < j \leq 3 \rangle \simeq V_3$.

Se temos, $\varphi|_{U_3^e} : U_3^e \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k)$, então $U_3^e/W \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k)/\varphi|_{U_3^e}(W)$ é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -morfismo sobrejetor, já que $\varphi|_{U_3^e}$ é sobrejetor. Como U_3^e/W é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -módulo irredutível, então $V_3 \simeq \mathfrak{sl}_3(k)/\varphi|_{U_3^e}(W)$, e pela irredutibilidade do $\mathfrak{sl}_3(k)$ -módulo adjunto, tem-se $\varphi|_{U_3^e}(W) = 0$ ou $\varphi|_{U_3^e}(W) = \mathfrak{sl}_3(k)$. Portanto, $V_3 \simeq \mathfrak{sl}_3(k)$ ou $V_3 \simeq 0$. Uma contradição.

Suponhamos que $\varphi|_{U_3^e} : U_3^e \rightarrow kt_3$, então pelos os mesmos argumentos do parágrafo anterior achamos que, $V_3 \simeq kt_3$ ou $V_3 \simeq 0$. Uma contradição. Portanto, $\varphi|_{U_3^e} = 0$. Por outro lado,

$$U_2^e = \langle a_i, b_i, a_{ii}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{21}, a_{31}, a_{32} : i = 1, 2, 3 \rangle$$

onde $a_i := y_i \wedge x$, $b_i := y_i \wedge y$ e, $a_{ii} := y_i \wedge x_i$, para todo $i=1, 2, 3$, $a_{12} := y_1 \wedge x_2$, $a_{13} := y_1 \wedge x_3$, $a_{23} := y_2 \wedge x_3$, $a_{21} := y_2 \wedge x_1$, $a_{31} := y_3 \wedge x_1$, e $a_{32} := y_3 \wedge x_2$. Para achar $\varphi|_{U_2^e}$, precisamos da ação de $\mathfrak{sl}_3(k)$ sobre U_2^e , veja a tabela 4.10 (ver páginas seguintes). Seja

$$W := \langle y_i \wedge x, y_i \wedge y : i = 1, 2, 3 \rangle \simeq (V_3^* \wedge V_0) \oplus (V_3^* \wedge V_0)$$

é um submódulo de U_2^e e da tabela 4.10. vemos que:

$$U_2^e/W \simeq V_3^* \wedge V_3 \xrightarrow[\simeq]{f} \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3$$

logo $\varphi|_{U_2^e} := f \circ p$ com f definida como no exemplo 3.1 e, $p : U_2^e \rightarrow U_2^e/W$. Além disso, da tabela 3.44:

$$J(x_1, y_1, y_2) = [y_1, [x_1, y_2]] + [y_2, [x_1, y_1]] = [y_1, e_{21}] + [y_2, h_2 + t_3] = y_2 \neq 0.$$

Portanto, $G(U^e)$ não é uma álgebra de Lie sobre k .

4.1. $L = T \oplus \sum_{\xi \in G} L_{\xi}$, ONDE $DIM_K(L_{\xi}) = 2, \forall \xi \in G$.

117

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
n	0	0	0	0	0	0	0	0
n_1	n_1	0	n_2	n_3	$\tau_2 n$	0	0	$\tau_4 n$
n_2	n_2	n_2	0	$\tau_6 n$	n_3	n_1	$\tau_8 n$	0
n_3	0	n_3	τ_{10}	0	0	$\tau_{12} n$	n_1	n_2
m_1	m_1	0	m_2	m_3	$\tau_1 n$	0	0	$\tau_3 n$
m_2	m_2	m_2	0	$\tau_5 n$	m_3	m_1	$\tau_7 n$	0
m_3	0	m_3	$\tau_4 n$	0	0	$\tau_1 n$	m_1	n_2
m_{12}	m_{12}	0	0	$m_{23} + \tau_1 n_1 + \tau_2 m_1$	$m_{13} + \tau_1 n_2 + \tau_2 m_2$	0	$\tau_7 n_1 + \tau_8 m_1$	$\tau_3 n_2 + \tau_4 m_2$
m_{13}	m_{13}	m_{13}	$m_{23} + \tau_9 n_1 + \tau_{10} n$	0	$\tau_1 n_3 + \tau_2 m_3$	$\tau_{11} n_1 + \tau_{12} m_1$	0	$\tau_3 n_3 + \tau_4 m_3$
m_{23}	0	m_{23}	$\tau_9 n_2 + \tau_{10} m_2$	$\tau_5 n_3 + \tau_6 m_3$	0	$m_{13} + \tau_{11} n_2 + \tau_{12} m_2$	$m_{21} + \tau_7 n_3 + \tau_8 m_3$	0

Tabela 4.8: $O(\mathfrak{sl}_3(k), 2)$ -módulo $\Lambda^2(V_3 \times (V_0 \times V_0))$

	h_1	h_2	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{21}	e_{31}	e_{32}
a_1	a_1	0	0	0	0	a_2	a_3	0
a_2	a_2	a_2	a_1	0	0	0	0	a_3
a_3	0	a_3	0	a_1	a_2	0	0	0
a_{11}	0	0	a_{12}	a_{13}	$\tau_1 a_1 + \tau_2 b_1$	a_{21}	a_{31}	$\tau_3 a_1 + \tau_4 b_1$
a_{22}	0	0	a_{12}	$\tau_5 a_2 + \tau_5 b_2$	a_{23}	a_{21}	0	a_{32}
a_{12}	0	a_{12}	0	$\tau_5 a_1 + \tau_6 b_1$	a_{13}	$a_{22} + a_{11}$	$a_{32} + \tau_7 a_1 + \tau_8 b_1$	0
a_{13}	a_{13}	a_{13}	$\tau_9 a_1 + \tau_{10} b_1$	0	0	$a_{23} + \tau_{11} a_1 + \tau_{12} b_1$	$a_{33} + a_{11}$	a_{12}
a_{23}	a_{23}	0	a_{13}	0	0	$\tau_{11} a_2 + \tau_{12} b_2$	a_{21}	$a_{33} + a_{22}$
a_{21}	0	a_{21}	$a_{11} + a_{22}$	a_{23}	$\tau_1 a_2 + \tau_2 b_2$	0	0	$a_{31} + \tau_3 a_2 + \tau_4 b_2$
a_{31}	a_{31}	a_{31}	a_{32}	$a_{11} + a_{33}$	$a_{21} + \tau_1 a_3 + \tau_2 b_3$	0	0	$\tau_3 a_3 + \tau_4 b_3$
a_{32}	a_{32}	0	0	$a_{12} + \tau_5 a_3 + \tau_6 b_3$	$a_{22} + a_{33}$	a_{31}	$\tau_7 a_3 + \tau_8 b_3$	0
a_{33}	0	0	$\tau_9 a_3 + \tau_{10} b_3$	a_{13}	a_{23}	$\tau_{11} b_3 + \tau_{12} a_3$	a_{31}	a_{32}
b_1	b_1	0	0	0	0	b_2	b_3	0
b_2	b_2	b_2	b_1	0	0	0	0	b_3
b_3	0	b_3	0	b_1	b_2	0	0	0

Tabela 4.10: $O(\mathfrak{sl}_3(k), 2)$ -módulo $V_3^* \wedge (V_3 \times (V_0 \times V_0))$

Finalmente,

f) Seja $U^f = V_3 \oplus [V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)]$ (Ver tab. 26). Pelo exemplo 1.21.5 tem-se:

$$\Lambda^2(U^f) \simeq \Lambda^2(V_3) \oplus (V_3 \otimes_k [V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)]) \oplus \Lambda^2(V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0))$$

e assim, temos os seguintes $\mathfrak{sl}_3(k)$ -submódulos de $U^f \wedge U^f$:

- $U_1^f := V_3 \wedge V_3 \simeq V_3$
- $U_2^f := V_3 \wedge [V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)]$
- $U_3^f := (V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0)) \wedge (V_3^* \ltimes (V_0 \ltimes V_0))$

e novamente pelos mesmos argumentos usados em U_1^e, U_2^e, U_3^e do caso e . anterior, tem-se:

$\varphi|_{U_1^f} = 0$: já que, se $U_1^f \rightarrow kt_3$, ou $U_1^f \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k)$, então pelo lema de Schur, $V_3 \simeq kt_3$, ou $V_3 \simeq \mathfrak{sl}_3(k)$, o qual é absurdo.

$\varphi|_{U_3^f} = 0$: já que, se $U_3^f \rightarrow kt_3$, ou $U_3^f \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k)$, encontramos que U_3^f tem um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -submódulo $S := \langle v \wedge g, v \wedge g_1, v \wedge g_2, v \wedge g_3, g \wedge g_1, g \wedge g_2, g \wedge g_3 \rangle$ tal que: $U_3^f/W \simeq V_3^*$. Além disso, $U_3^f/S \rightarrow kt_3/\varphi|_{U_3^f}(S)$ ($U_3^f/S \rightarrow \mathfrak{sl}_3(k)/\varphi|_{U_3^f}(S)$) é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -isomorfismo. Então $V_3^* \simeq kt_3(\mathfrak{sl}_3(k))$ ou $V_3^* \simeq 0$ o qual é uma contradição. Agora, para U_2^f temos que,

$$W := \langle v_i \wedge g, g_i \wedge v : i = 1, 2, 3 \rangle \simeq (V_3 \wedge V_0) \oplus (V_3 \wedge V_0)$$

é um $\mathfrak{sl}_3(k)$ -submódulo de U_2^f e

$$U_2^f/W \simeq V_3 \wedge V_3^* \xrightarrow[\simeq]{g} \mathfrak{sl}_3(k) \oplus kt_3$$

logo $\varphi|_{U_2^f} := g \circ p$ com $p : U_2^f \rightarrow U_2^f/W$ e g definida como no exemplo 3.1.

$G(U^f)$ não é uma álgebra Lie sobre k , já que pela tabela 3.26 temos que :

$$J(v_1, g_1, g_2) = g_2 \neq 0.$$

Portanto, as k -álgebras $G(U^j)$ para $j = a, b, c, d, e, f$ não são k -álgebras de Lie.

Em conclusão, se $(L, [2])$ contém uma 2-subálgebra de Lie simples, então não existem 2-álgebras de Lie simple de dimensão 17 de posto toral 3, da forma $(17 : 3, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$, isto é:

Teorema 4.2. *Não existem 2-álgebras de Lie $(L, [2])$, simples de $\dim_k = 17$ de posto toral 3, contendo a $(\mathfrak{sl}_3(k), 2)$ como 2-subálgebra de Lie, e com decomposição de Cartan respeito T dada por: $L = T \oplus \sum_{\xi \in G} L_\xi$, onde $G := \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ é um grupo abeliano elementar de ordem 8, e $\dim_k(L_\xi) = 2$ para todo $\xi \in G$.*

Agora vejamos que acontece se $(L, [2])$ contém uma 2-subálgebra de Lie, não simples e não solúvel.

4.1.2 $(L, [2])$ contém 2-subálgebras de Lie não simples e não solúveis.

Afirmção. $(L, [2])$ contém uma subálgebra de Lie simples de dimensão 3.

De fato, sejam $e_\alpha \in L_\alpha$ e $e_\beta \in L_\beta$ elementos da base de L_α e L_β respectivamente, e seja

$$e_{\alpha+\beta} := [e_\alpha, e_\beta] \in L_{\alpha+\beta}.$$

Além disso,

$$e_\alpha^{[2]} = \delta t_2 + \eta t_3 \quad e \quad e_\beta^{[2]} = \lambda t_1 + \xi t_3$$

com $\delta, \eta, \lambda, \xi \in \mathbb{F}_2$. Logo

$$[e_\alpha, e_{\alpha+\beta}] = [e_\alpha, [e_\alpha, e_\beta]] = [e_\alpha^{[2]}, e_\beta] = \delta e_\beta.$$

$$[e_\beta, e_{\alpha+\beta}] = [e_\beta, [e_\alpha, e_\beta]] = [e_\beta^{[2]}, e_\alpha] = \lambda e_\alpha.$$

Assim, $M_{\alpha,\beta} := \text{span}\{e_\alpha, e_\beta, e_{\alpha+\beta}\}$ é uma subálgebra de Lie de L com tabela de multiplicação de Lie dada por:

	e_α	e_β	$e_{\alpha+\beta}$
e_α	0	$e_{\alpha+\beta}$	δe_β
e_β	$e_{\alpha+\beta}$	0	λe_α
$e_{\alpha+\beta}$	δe_β	λe_α	0

Tabela 4.11: A subálgebra $M_{\alpha,\beta}$

com $\delta, \lambda \in \mathbb{F}_2$.

- Se $\delta = \lambda = 0$, então $M_{\alpha,\beta}$ é uma subálgebra de Lie nilpotente de L .
- Se $(\delta = 0 \text{ e } \xi = 1)$ ou $(\delta = 1 \text{ e } \xi = 0)$, então $M_{\alpha,\beta}$ é uma subálgebra solúvel de L .
- Se $\delta = 1$ e $\lambda = 1$, então $M_{\alpha,\beta}$ é uma subálgebra simples de L e $M_{\alpha,\beta} \simeq \mathfrak{o}_3(k)$.

Portanto, L contém uma subálgebra de Lie simples de dimensão 3 isomorfa a $\mathfrak{o}_3(k)$.

Seja V um k -espaço vetorial com base v_1, v_2, v_3 , e seja $\rho : \mathfrak{o}_3(k) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação de $\mathfrak{o}_3(k)$ em V dada pela tabela seguinte:

	e_1	e_2	e_3
v_1	0	v_3	v_2
v_2	v_3	0	v_1
v_3	v_2	v_1	0

Tabela 4.12: O $\mathfrak{o}_3(k)$ -módulo adjunto V

Essa representação é irredutível, isomorfa a representação adjunta de $\mathfrak{o}_3(k)$. Além disso, em [Do] se demonstra que ela é a única (a menos de isomorfismo) representação irredutível de $\mathfrak{o}_3(k)$ de dimensão 3.

Agora, consideremos as seguintes extensões dos $\mathfrak{o}_3(k)_2$ -2-módulos (ver exemplo 1.5):

- $kt_3 \lhd V$.
- $V \lhd kt_3$.

dadas nas seguintes tabelas: para λ, μ, ω e θ em k temos:

	h_1	h_2	e_1	e_2	e_3
v_1	0	v_1	0	v_3	v_2
v_2	v_2	0	v_3	0	v_1
v_3	v_3	v_3	v_2	v_1	0
t_3	0	0	λv_1	μv_2	$(\lambda + \mu)v_3$

Tabela 4.13: $\mathfrak{o}_3(k)_2$ -2-módulo $kt_3 \lhd V$.

	h_1	h_2	e_1	e_2	e_3
v_1	0	v_1	ωt_3	v_3	v_2
v_2	v_2	0	v_3	θt_3	v_1
v_3	v_3	v_3	v_2	v_1	$(\omega + \theta)t_3$
t_3	0	0	0	0	0

Tabela 4.14: $\mathfrak{o}_3(k)_2$ -2-módulo $V \lhd kt_3$.

O $\mathfrak{o}_3(k)_2$ -2-módulo $kt_3 \lhd V$ depende dos parametros λ e μ , isto é, $kt_3 \lhd V := E(\lambda, \mu)$ com $\lambda, \mu \in k$. Além do mais,

$$E(\lambda, \mu) \simeq E(\lambda', \mu') \iff \lambda = \lambda', \mu = \mu' \text{ e } kt_3 \lhd V \simeq V \oplus kt_3 \iff \lambda = \mu = 0.$$

O mesmo acontece com o $\mathfrak{o}_3(k)_2$ -2-módulo $V \lhd kt_3$.

Assim, tem-se os k -espaços vetoriais:

- $S_1 := \mathfrak{o}_3(k)_2 \oplus (kt_3 \lhd V)$.
- $S_2 := \mathfrak{o}_3(k)_2 \oplus (V \lhd kt_3)$.

S_1 tem as seguintes propriedades:

- $(S_1, [2])$ é uma 2-subálgebra de Lie de $(L, [2])$ de dimensão 9. De fato, S_1 é uma álgebra de Lie com colchete definido por:

$$[a + x, b + y] := (x.b - y.a) + [x, y], \forall a, b \in kt_3 \lhd V, x, y \in \mathfrak{o}_3(k)_2,$$

e a 2-aplicação é dada por:

$$(a + x)^{[2]} := x.a + x^{[2]}, \forall x \in \mathfrak{o}_3(k)_2, a \in kt_3 \lhd V.$$

- $kt_3 \lhd V$ é um ideal de S_1 (portanto, $kt_3 \lhd V$ é uma subálgebra de S_1) e $\mathfrak{o}_3(k)_2$ é uma subálgebra de S_1 .

- S_1 não é solúvel. De fato, se S_1 for solúvel, então toda subálgebra de S_1 é solúvel, logo $\mathfrak{o}_3(k)_2$ é uma subálgebra solúvel de S_1 , o que é uma contradição.
- S_1 é única, a menos das constantes λ e μ .

O mesmo acontece com S_2 .

Assim, S_1 e S_2 são 2-álgebras de Lie não simples e não solúveis de dimensão 9. Em resumo, temos que $(L, [2])$ só contém duas 2-subálgebras de Lie S_i , $i = 1, 2$, não simples e não solúveis de dimensão 9. Semelhante a seção 4.1, tomando agora representações de $(S_i, [2])$ ao invés de $(\mathfrak{sl}_3(k), 2)$, vai ser apresentada aqui uma realização de $(L, [2])$ baseada na representação de S_i em k -espaços vetoriais E , de dimensão 8. A álgebra $(L, [2])$ vai ser construída no espaço vetorial

$$G(E) := S_i \oplus E.$$

onde S_i é definida como acima e E é um S_i -2-módulo de dimensão 8.

No que segue, vamos encontrar os S_i -2-módulos E de dimensão 8. Para isso, seja $U := \langle u_1, u_2 \rangle$ um $kt_3 \ltimes V$ (ou $V \ltimes kt_3$)-2-módulo de dimensão 2, com base $\{u_1, u_2\}$ precisamos achar todos os S_i -2-módulos induzidos por U . Primeiro procuremos as 2-representações de $kt_3 \ltimes V$ e $V \ltimes kt_3$ em U , como $u_i \cdot t_3 = u_i$ para $i = 1, 2$. e, V é uma subálgebra abeliana de dimensão 3 (já que, $[V, V] = 0$), então só basta achar as 2-representações $\rho : V \rightarrow \mathfrak{gl}(U)$

a. 2-representações de V em U .

Seja $\rho : V \rightarrow \mathfrak{gl}(U)$ uma representação não fiel de V em U (Já que se $\rho : V \rightarrow \mathfrak{gl}(U)$ é uma representação fiel de V em U , então $V \simeq \text{Im}(\rho)$ assim, V é uma subálgebra abeliana de dimensão 3 de $\mathfrak{gl}(U) \simeq \mathfrak{gl}_2(k)$, mas $\mathfrak{sl}_2(k)$ é a única k -álgebra de Lie solúvel de dimensão 3 de $\mathfrak{gl}_2(k)$, portanto $V \simeq \mathfrak{sl}_2(k)$, o qual é uma contradição, já que $\mathfrak{sl}_2(k)$ não é abeliana, pois $\mathfrak{sl}_2(k)^{(1)} = \text{span}\{e_{11} + e_{22}\} \neq \{0\}$.)

Como ρ é um homomorfismo de álgebra de Lie então, para todo $x, y \in V$ temos:

$$0 = \rho(0) = \rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)] = \rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x).$$

Assim que, $\rho(x)\rho(y) = \rho(y)\rho(x)$ para todo $x, y \in V$. Além disso, como $\rho(x)^2 = \rho(x^{[2]})$ para todo $x \in V$ então $\rho(x)^2 = 0$ para todo $x \in V$. Também, como $\rho : V \rightarrow \mathfrak{gl}(U) \simeq \mathfrak{gl}_2(k)$ é não fiel, então existe $x \neq 0$ em V tal que $\rho(x) = 0$, seja $x := v_1$ assim $\rho(v_1) = 0_{2 \times 2}$. Agora, $\rho(v_i) : U \rightarrow U$, $i = 2, 3$ são transformações lineares que tem associada uma matriz A de ordem 2×2 em alguma base de U . Então A é semelhante sobre k exatamente a uma matriz dos tipos:

$$A_c := \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$A_{a,b} := \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

Para todo $a, b, c \in k$.

Se $\rho(v_2) = A_c$, e como $0 = \rho(v_2)^2 \iff c = 0$. Então $\rho(v_2) = 0_{2 \times 2}$. Logo $\rho(v_3) = A_{a,b}$. Até aqui temos que $\rho(v_i)\rho(v_j) = \rho(v_j)\rho(v_i)$. Além disso,

$\rho(v_3)^2 = 0 \iff A_{ab}^2 = 0_{2 \times 2} \iff a = b = 0$. Nesse caso, $\rho(v_3) := e_{21}$.

Assim, uma possibilidade para definir $\rho : V \rightarrow \mathfrak{gl}(U)$ é:

$$\begin{aligned} v_1 &\mapsto 0_{2 \times 2} \\ v_2 &\mapsto 0_{2 \times 2} \\ v_3 &\mapsto A_{0,0} = e_{21} \end{aligned}$$

Outra tentativa para definir $\rho : V \rightarrow \mathfrak{gl}(U)$ é:

$$\begin{aligned} v_1 &\mapsto 0_{2 \times 2} \\ v_2 &\mapsto e_{21} \\ v_3 &\mapsto B_{2 \times 2} \end{aligned}$$

onde B é qualquer matriz 2×2 sobre k , tal que $e_{21}B = Be_{21}$ e $B^2 = 0_{2 \times 2}$. De fato, seja

$$B := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \eta & \delta \end{pmatrix}$$

Então:

- $e_{21}B = Be_{21} \iff \alpha = \delta \text{ e } \beta = 0$.
 - $B^2 = 0_{2 \times 2} \iff \alpha^2 + \beta\eta = \eta(\alpha + \delta) = \beta(\alpha + \delta) = \delta^2 + \eta\beta = 0$.
- daí se conclui que,

$$\eta \neq 0 \implies \alpha = \delta.$$

$$\eta = 0 \implies \alpha = \delta = 0.$$

portanto, $B = \alpha(e_{11} + e_{22}) + \eta e_{21} \quad \forall \alpha, \eta \in k, \eta \neq 0$, ou $B = 0_{2 \times 2}$ e assim, $\rho : V \rightarrow \mathfrak{gl}(U)$ é dada por:

$$\begin{array}{ccc} & \text{ou} & \\ \begin{array}{l} v_1 \mapsto 0_{2 \times 2} \\ v_2 \mapsto e_{21} \\ v_3 \mapsto \alpha(e_{11} + e_{22}) + \eta e_{21} \end{array} & & \begin{array}{l} v_1 \mapsto 0_{2 \times 2} \\ v_2 \mapsto e_{21} \\ v_3 \mapsto 0_{2 \times 2} \end{array} \end{array}$$

Em resumo, as 2-representações de V em U é dada por:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\rho_{\alpha, \eta}} & \mathfrak{gl}(U) \\ v_1 & \mapsto & 0_{2 \times 2} \\ v_2 & \mapsto & e_{21} \\ v_3 & \mapsto & \alpha(e_{11} + e_{22}) + \eta e_{21} \end{array}$$

Para todo $\alpha, \eta \in k$.

Além disso, quando $\alpha = 0$ e $\eta = 0$ temos que $\rho_{0,0}$ é isomorfa a:

$$\begin{aligned} v_1 &\mapsto 0_{2 \times 2} \\ v_2 &\mapsto 0_{2 \times 2} \\ v_3 &\mapsto e_{21} \end{aligned}$$

Logo, temos o seguinte V -2-módulo U :

	v_1	v_2	v_3
u_1	0	u_2	$\alpha u_1 + \eta u_2$
u_2	0	0	αu_2

Tabela 4.15: O V -2-módulo U .

para todo $\alpha, \eta \in k$

O V -2-módulo U depende de dois parametros α e η , isto é, $U := E(\alpha, \eta)$ e, assim

$$E(\alpha, \eta) \simeq E(\alpha', \eta') \iff \alpha = \alpha' \text{ e } \eta = \eta'.$$

b. S_1 -2-módulos induzidos por U .

Tem-se que: $kt_3 \ltimes V$ é uma 2-subálgebra de Lie de S_1 , $U := \langle u_1, u_2 \rangle$ o $kt_3 \ltimes V$ -2-módulo, e $\{h_1, h_2, e_1, e_2, e_3\}$ é a base que complementa a $kt_3 \ltimes V$ em S_1 .

Então $\Pi_1 := \text{Ind}(U, S_1)$, o S_1 -2-módulo induzido por U , tem como base ao conjunto:

$$\{u_i, u_i e_1, u_i e_2, u_i e_3, (u_i e_1) e_2, (u_i e_1) e_3, (u_i e_2) e_3, ((u_i e_1) e_2) e_3 : u_i \in U, i = 1, 2\}.$$

Π_1 é um S_1 -2-módulo de dimensão 16 cuja tabela de $kt_3 \ltimes V$ -ação é dada na página seguinte (ver tabela 4.16).

Para simplificar a notação fazemos $p_1 := (u_1 e_1) e_2$, $p_2 := (u_1 e_1) e_3$, $p_3 := (u_1 e_2) e_3$, $q_1 := (u_2 e_1) e_2$, $q_2 := (u_2 e_1) e_3$, $q_3 := (u_2 e_2) e_3$, $p := ((u_1 e_1) e_2) e_3$, $q := ((u_2 e_1) e_2) e_3$, $g_i := u_1 e_i$, e $f_i := u_2 e_i$, para todo $i = 1, 2, 3$.

	v_1	v_2	v_3	t_3
u_1	0	u_2	$\alpha u_1 + \eta u_2$	u_1
g_1	0	$\alpha u_1 + \eta u_2 + f_1$	$\alpha g_1 + \eta f_1 + u_2$	g_1
g_2	$\alpha u_1 + \eta u_2$	f_2	$\alpha g_2 + \eta f_2$	$g_2 + \eta u_2$
g_3	u_2	f_3	$\alpha g_3 + \eta f_3$	$g_3 + (\lambda + \mu)(\alpha u_1 + \eta u_2)$
p_1	$\alpha g_1 + \eta f_1 + u_2$	$\eta f_2 + q_1 + \alpha g_2$	$\alpha p_1 + \eta q_1 + f_2$	$p_1 + \mu \eta u_2 + \mu f_1 + \mu \alpha u_1$
p_2	$\eta u_2 + f_1 + \alpha u_1$	$\eta f_3 + q_2 + \alpha g_3$	$\alpha p_2 + \eta q_2 + f_3$	$p_2 + (\lambda + \mu)(\alpha g_1 + \eta f_1 + u_2)$
p_3	$\alpha g_3 + \eta f_3 + f_2$	$\alpha u_1 + \beta u_2 + q_3$	$\alpha p_3 + \eta q_3$	$p_3 + \mu f_3 + (\lambda + \mu)(\alpha g_2 + \eta f_2)$
p	$\alpha(p_2 + g_2) + \eta(q_2 + f_2) + f_3 + q_1$	$\eta(q_3 + f_1) + \alpha(g_1 + p_3) + q + u_2$	$\alpha p + \eta q + q_3$	$p + \eta \mu g_3 + \mu q_2 + \mu \alpha g_3 + (\lambda + \mu)(\alpha p_1 + \beta q_1)$
u_2	0	0	αu_2	u_2
f_1	0	αu_2	αf_1	f_1
f_2	αu_2	0	αf_2	f_2
f_3	0	0	αf_3	$f_3 + \alpha(\lambda + \mu)u_2$
q_1	αf_1	αf_2	αq_1	$q_1 + \mu \alpha u_2$
q_2	αu_2	αf_3	αq_2	$q_2 + \alpha(\lambda + \mu)f_1$
q_3	αf_3	αu_2	αq_3	$q_3 + \alpha(\lambda + \mu)f_2$
q	$\alpha(q_2 + f_2)$	$\alpha(q_3 + f_1)$	αq	$q + \mu \alpha f_3 + \alpha(\lambda + \mu)(q_2 + u_2)$

Tabela 4.17: O S_1 -2-módulo Π_1

Da tabela anterior vemos que:

$$E_{S_1} := \langle \{u_2, u_2e_1, u_2e_2, u_2e_3, (u_2e_1)e_2, (u_2e_1)e_3, (u_2e_2)e_3, ((u_2e_1)e_2)e_3\} \rangle$$

é um S_1 -2-submódulo de Π_1 de dimensão 8. Além disso,

Π_1/E_{S_1} também é um S_1 -2-módulo de dimensão 8, com tabela dada por:

	v_1	v_2	v_3	t_3
$u_1 + E_{S_1}$	E_{S_1}	E_{S_1}	$\alpha u_1 + E_{S_1}$	$u_1 + E_{S_1}$
$g_1 + E_{S_1}$	E_{S_1}	$\alpha u_1 + E_{S_1}$	$\alpha g_1 + E_{S_1}$	$g_1 + E_{S_1}$
$g_2 + E_{S_1}$	$\alpha u_1 + E_{S_1}$	E_{S_1}	$\alpha g_2 + E_{S_1}$	$g_2 + E_{S_1}$
$g_3 + E_{S_1}$	E_{S_1}	E_{S_1}	$\alpha g_3 + E_{S_1}$	$g_3 + \alpha(\lambda + \mu)u_1 + E_{S_1}$
$p_1 + E_{S_1}$	$\alpha g_1 + E_{S_1}$	$\alpha g_2 + E_{S_1}$	$\alpha p_1 + E_{S_1}$	$p_1 + \mu\alpha u_1 + E_{S_1}$
$p_2 + E_{S_1}$	$\alpha u_1 + E_{S_1}$	$\alpha g_3 + E_{S_1}$	$\alpha p_2 + E_{S_1}$	$p_2 + \alpha(\lambda + \mu)g_1 + E_{S_1}$
$p_3 + E_{S_1}$	$\alpha g_3 + E_{S_1}$	$\alpha u_1 + E_{S_1}$	$\alpha p_3 + E_{S_1}$	$p_3 + \alpha(\lambda + \mu)g_2 + E_{S_1}$
$p + E_{S_1}$	$\alpha(p_2 + g_2) + E_{S_1}$	$\alpha(g_1 + p_3) + E_{S_1}$	$\alpha p + E_{S_1}$	$p + \mu\alpha g_3 + \alpha(\lambda + \mu)p_1 + E_{S_1}$

Tabela 4.19: O S_1 -2-módulo Π_1/E_{S_1}

Mas das tabelas 4.16 e 4.18 podemos concluir que $E_{S_1} \simeq \Pi_1/E_{S_1}$ como S_1 -2-módulos. E assim só temos um S_1 -2-módulo E_{S_1} de dimensão 8 que depende dos parâmetros α, λ, μ .

c. S_2 -2-módulos induzidos por U .

Seja $\Pi_2 := \text{Ind}(U, S_2)$ o S_2 -2-módulo induzido por U , com base:

$$\{u_i, u_i e_1, u_i e_2, u_i e_3, (u_i e_1)e_2, (u_i e_1)e_3, (u_i e_2)e_3, ((u_i e_1)e_2)e_3 : u_i \in U, i = 1, 2\}.$$

Π_2 é um S_2 -2-módulo de dimensão 16 cuja tabela de $V \ltimes kt_3$ -ação é dada na página seguinte (ver tabela 4.20).

Para simplificar a notação fazemos $p_1 := (u_1 e_1)e_2, p_2 := (u_1 e_1)e_3, p_3 := (u_1 e_2)e_3, q_1 := (u_2 e_1)e_2, q_2 := (u_2 e_1)e_3, q_3 := (u_2 e_2)e_3, p := ((u_1 e_1)e_2)e_3, q := ((u_2 e_1)e_2)e_3, g_i := u_1 e_i$ e, $f_i := u_2 e_i$ para todo $i=1, 2, 3$.

4.1. $L = T \oplus \sum_{\xi \in G} L_{\xi}$, ONDE $\dim_K(L_{\xi}) = 2, \forall \xi \in G$.

127

u_1	v_1	v_2	v_3	t_3
g_1	0	u_2	$\alpha u_1 + \eta u_2$	u_1
g_2	ωu_1	$\alpha u_1 + \eta u_2 + f_1$	$\alpha g_1 + \eta f_1 + u_2$	g_1
g_3	$\alpha u_1 + \eta u_2$	$f_2 + \theta u_1$	$\alpha g_2 + \eta f_2$	g_2
p_1	u_2	f_3	$\alpha g_3 + \eta f_3 + (\omega + \theta) u_1$	g_3
p_2	$\alpha g_1 + \eta f_1 + u_2 + \omega g_2$	$\eta f_2 + q_1 + \alpha g_2 + \theta g_1$	$\alpha p_1 + \eta q_1 + f_2 + f_1$	p_1
p_3	$\eta u_2 + f_1 + \alpha u_1 + \omega g_3$	$\eta f_3 + q_2 + \alpha g_3 + \omega u_1$	$\alpha p_2 + \eta q_2 + f_3 + (\omega + \theta) g_1$	p_2
p	$\alpha g_3 + \eta f_3 + g_2 + \theta u_1$	$\alpha u_1 + \beta u_2 + q_3 + \theta g_3$	$\alpha p_3 + \eta q_3 + (\omega + \theta) g_2$	p_3
u_2	$\alpha(p_2 + g_2) + \eta(q_2 + f_2) + f_3 + q_1 + \omega p_3 + \theta g_1$	$\eta(q_3 + f_1) + \alpha(g_1 + p_3) + q + u_2 + \theta p_1 + \omega f_2$	$\alpha(p + g_3) + \eta(q + f_3) + q_3 + q_2 + (\omega + \theta) p_1$	p
f_1	0	0	αu_2	u_2
f_2	ωu_2	αu_2	αf_1	f_1
f_3	αu_2	θu_2	αf_2	f_2
q_1	0	0	$\alpha f_3 + (\omega + \theta) u_2$	f_3
q_2	$\alpha f_1 + \omega f_2$	$\alpha f_2 + \theta f_1$	$\alpha(q_1 + u_2)$	q_1
q_3	$\alpha u_2 + \omega f_3$	$\alpha f_3 + \omega u_2$	$\alpha q_2 + (\omega + \theta) f_2$	q_2
q	$\alpha f_3 + \theta u_2$	$\alpha u_2 + \theta f_3$	$\alpha q_3 + (\omega + \theta) f_2$	q_3
	$\alpha(q_2 + f_2) + \omega q_3 + \theta f_1$	$\alpha(q_3 + f_1) + \omega f_2 + \theta q_2$	$\alpha(q + u_2 e_3) + (\omega + \theta) q_1$	q

Tabela 4.21: O S_2 -2-módulo Π_2

Da tabela anterior vemos que

$$E_{S_2} := \langle \{u_2, u_2e_1, u_2e_2, u_2e_3, (u_2e_1)e_2, (u_2e_1)e_3, (u_2e_2)e_3, ((u_2e_1)e_2)e_3\} \rangle$$

é um S_2 -2-submódulo de Π_2 de dimensão 8. Além disso,

Π_2/E_{S_2} também é um S_2 -2-módulo de dimensão 8, com tabela:

	v_1	v_2	v_3	t_3
$u_1 + E_{S_2}$	E_{S_2}	E_{S_2}	$\alpha u_1 + E_{S_2}$	$u_1 + E_{S_2}$
$g_1 + E_{S_2}$	$\omega u_1 + E_{S_2}$	$\alpha u_1 + E_{S_2}$	$\alpha g_1 + E_{S_2}$	$g_1 + E_{S_2}$
$g_2 + E_{S_2}$	$\alpha u_1 + E_{S_2}$	$\theta u_1 + E_{S_2}$	$\alpha g_2 + E_{S_2}$	$g_2 + E_{S_2}$
$g_3 + E_{S_2}$	E_{S_2}	E_{S_2}	$\alpha g_3 + (\omega + \theta)u_1 + E_{S_2}$	$g_3 + E_{S_2}$
$p_1 + E_{S_2}$	$\alpha g_1 + \omega g_2 + E_{S_2}$	$\alpha g_2 + \theta g_1 + E_{S_2}$	$\alpha p_1 + \alpha u_1 + E_{S_2}$	$p_1 + E_{S_2}$
$p_2 + E_{S_2}$	$\alpha u_1 + \omega g_3 + E_{S_2}$	$\alpha g_3 + \omega u_1 + E_{S_2}$	$\alpha p_2 + (\omega + \theta)g_1 + E_{S_2}$	p_2
$p_3 + E_{S_2}$	$\alpha g_3 + \theta u_1 + E_{S_2}$	$\alpha u_1 + \theta g_3 + E_{S_2}$	$\alpha p_3 + (\omega + \theta)g_2 + E_{S_2}$	p_3
$p + E_{S_2}$	$\alpha(p_2 + g_2) + \omega p_3 + \theta g_1 + E_{S_2}$	$\alpha(g_1 + p_3) + \omega g_2 + \theta p_2 + E_{S_2}$	$\alpha(p + g_3) + (\theta + \omega)p_1 + E_{S_2}$	$p + E_{S_2}$

Tabela 4.23: O S_2 -2-módulo Π_2/E_{S_2}

Como no caso anterior, das tabelas 4.20 e 4.22 temos que $E_{S_2} \simeq \Pi_2/E_{S_2}$ como S_2 -2-módulos. E assim só temos um S_2 -2-módulos E_{S_2} de dimensão 8 que depende dos parametros α, θ, ω .

Em resumo, a k -álgebra $(L, [2])$ então é construída sobre o k -espaço vetorial

$$G(E_{S_i}) := S_i \oplus E_{S_i}, \text{ para } i = 1, 2.$$

Da mesma maneira como no caso simples (seção 4.1), nós precisamos saber se $G(E_{S_i})$ é uma k -álgebra, isto é, precisamos de condições necessarias e suficientes (como no Teorema 3.2) para dar uma resposta a seguinte pergunta:

Pergunta: Será que existe um S_i -morfismo $\varphi : \Lambda^2(E_{S_i}) \rightarrow S_i$?

Observação 4.3. Essa questão, e o caso quando $(L, [2])$ contém 2-subálgebras de Lie solúveis, serão objetos de pesquisas futuras.

Referências Bibliográficas

- [Do] DOLOTKAZIN, A., *Irreducible representations of a three-dimensional simple Lie algebras of characteristic $p = 2$* , Math. Note 24 (1978), 588 – 590. 6
- [Gr] GRICHKOV, A.N., *On simple Lie algebras over a field of characteristic 2*, J. Algebra 363 (2012), 14 – 18.
- [GP] GRICHKOV, A.N., PREMETS, A.A., *Simple Lie algebras of absolute toral rank 2 in characteristic 2* (submitted).
- [GGA] GRICHKOV, A.N., ARAUJO, W., *As álgebras de Lie simples de dimensão 7 sobre um corpo de característica 2 e suas subálgebras toroidais*, IME-USP, 2014.
- [GZ] GRICHKOV, A.N., ZUSMANOVICH, P., *Deformations of current Lie algebras. I. Small algebra in characteristic 2*, arXiv:1410.3645
- [Ja] JACOBSON, N., *Lie Algebra*, Interscience, New York, 1962.
- [KV] KAC, V., VEĚSFEĚLER, B., *Exponentials in Lie algebras of characteristic p* , Math. USSR Izvestija, vol.5 (1971), No. 4
- [Sk] SKRYABIN, S., *Toral rank one simple Lie algebras of low characteristic*, J. Algebra **200** (1998), 650-700.
- [SF] STRADE, H., FARNSTEINER, R., *Modular Lie Algebra and Their Representations*, Marcel Dekker, New York, 1988.
- [St] STRADE, H., *Lie algebras of small dimension*, <http://arXiv.org/abc/math/0601413>. 17 jan 2006.
- [St1] STRADE, H., *Simple Lie Algebras over Fields of Positive characteristic, Volume I: Structure Theory*, DeGruyter Expositions in Math., Vol. 38, Berlin, 2004.
- [St2] STRADE, H., *Simple Lie Algebras over Fields of Positive characteristic, Volume II: Classifying the Absolute Toral Rank Two case*. DeGruyter Expositions in math., vol. 42, Berlin, 2009.

- [St3] STRADE. H., *Simple Lie Algebras over Fields of Positive characteristic, Volume III: Completion of the Classification*, DeGruyter Expositions in Math., Vol. 57, Berlin, 2012.