**Nilálgebras comutativas de potências
associativas e o problema de Albert**

Elkin Oveimar Quintero Vanegas

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Juan Carlos Gutierrez Fernandez

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, maio de 2016

Nilálgebras comutativas de potências associativas e o problema de Albert

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 12/09/2016. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Juan Carlos Gutierrez Fernandez (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Ivan Shestakov - IME-USP
- Prof. Dr. Plamen Kosholukov - UNICAMP
- Prof. Dr. Alexandr Kornev - UFABC
- Prof. Dr. Lucio Centrone - UNICAMP

Agradecimentos

Inicialmente quero agradecer ao professor Juan Carlos Gutierrez Fernandez pela sua orientação, acompanhamento e notáveis aportes no desenvolvimento deste trabalho.

A meus colegas do seminário de estudantes do grupo de pesquisa Lie and Jordan Algebras and their Representations do IME - USP, já que com a sua ajuda, eu consegui madurecer muitos conceitos das álgebras não-associativas.

A CAPES pelo suporte financeiro.

Resumo

QUINTERO VANEGAS, E. O. **Nilálgebras comutativas de potências associativas e o problema de Albert**. 2016. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

Neste trabalho será provado que as álgebras comutativas de potências associativas de dimensão n e nilíndice $n - 3$, assim como, álgebras de dimensão 9 sobre $\mathbb{C}$, são solúveis.

Logo depois de estudar o problema de Albert, será feito um refinamento da descrição que os autores deram em [GFGMM14] para as álgebras comutativas de potências associativas de dimensão n e nilíndice $n - 1$ sobre um corpo de característica diferente de 2, 3 e 5. Tal refinamento será feito para $n \geq 12$.

Palavras-chave: nilálgebras de potências associativas, álgebras comutativas, álgebras solúveis, classificação de álgebras, problema de Albert.

Abstract

QUINTERO VANEGAS, E. O. **Commutative power-associative nilalgebras and Albert's problem.** 2016. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

We will prove that commutative power-associative nilalgebras both of dimension n and nilindex $n - 3$, or of dimension 9 over $\mathbb{C}$, are solvable.

After that, we will make a refinement about the description that the authors constructed in [GFGMM14] for commutative power-associative nilalgebras of dimension n and nilindex $n - 1$ over a field of characteristic different from 2,3 and 5. Such kind of a refinement will be do me for $n \geq 12$.

Keywords: power-associative nilalgebras, commutative algebras, solvable algebras, classification up to isomorphism, Albert's problem.

Sumário

Lista de Abreviaturas	ix
Lista de Símbolos	xi
Lista de Tabelas	xiii
Introdução	1
1 Preliminares.	7
1.1 Álgebras não-associativas.	7
1.2 Álgebras de potências associativas.	9
2 Álgebras de dimensão n e nilíndice $n - 3$.	13
2.1 Se M está contida numa subálgebra $\mathcal{B}$ onde $\text{codim } \mathcal{B} = 3$	14
2.2 Solubilidade das álgebras de dimensão n e nilíndice $n - 3$	19
3 Álgebras de dimensão 9.	27
3.1 Álgebras comutativas de potências associativas de nilíndice 5.	28
3.2 Álgebras comutativas de potências associativas de dimensão 9.	32
3.2.1 Se L^4U não é uma identidade na álgebra $\mathcal{A}$	34
3.2.2 Se L^5 não é uma identidade na álgebra $\mathcal{A}$	41
3.2.3 Se L^2UL não é uma identidade na álgebra $\mathcal{A}$	63
3.2.4 Se LUL não é uma identidade na álgebra $\mathcal{A}$	67
4 Um estudo das nilálgebras de dimensão n e nilíndice $n - 1$.	75
4.1 Elementos de índice maximal nas classes $\mathfrak{V}_{Id}$ e $\mathfrak{V}_{Id2}$	77
4.2 Descrição das triplas $(a, b, c) \in \overline{\mathcal{P}(\mathcal{A})}$ na classe $\mathfrak{V}_{Id2}$ para $n \geq 12$	84
Referências Bibliográficas	89
Índice Remissivo	92

Lista de Abreviaturas

$\text{nilind}(\mathcal{A})$	nilíndice da álgebra $\mathcal{A}$.
$\text{span}\{T\}$	subespaço vetorial gerado por T .
$\text{ann}(\mathcal{A})$	anulador da álgebra $\mathcal{A}$.
$a_1 a_2 \cdots a_k y$	composta dos operadores multiplicação a esquerda aplicados em y , é dizer, $L_{a_1} L_{a_2} \cdots L_{a_k}(y)$.

Lista de Símbolos

$\mathbb{F}$	corpo.
$\mathcal{A}, \mathcal{B}$	álgebras sobre o corpo $\mathbb{F}$.
$\mathcal{C}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$	subálgebras de $\mathcal{A}$.
$M(a)$	subálgebra de $\mathcal{A}$ gerada pelo elemento a de nilíndice maximal.
M	$M(a)$ se a é evidente do contexto.
xy	multiplicação entre x e y .
$\mathcal{A}^+$	álgebra de Jordan obtida a partir da álgebra associativa $\mathcal{A}$.
$\mathcal{A}^-$	álgebra de Lie obtida a partir da álgebra associativa $\mathcal{A}$.
I, J	ideais de $\mathcal{A}$.
$\mathcal{A}/\mathcal{B}$	espaço vetorial quociente.
$\mathcal{A}/I$	álgebra quociente.
L_x	operador multiplicação à esquerda determinado por x .
L	L_x se x é evidente do contexto.
U_x	L_{x^2} .
U	U_x se x é evidente do contexto.
R_x	operador multiplicação à direita determinado por x .
$\text{End}(\mathcal{A})$	conjunto de transformações lineares de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}$.
$\overline{L}_x$	operador induzido ao espaço vetorial quociente.
$\equiv$	igualdade de operadores lineares, ou congruência módulo uma subálgebra.
$\cong$	isomorfismo de álgebras.
$\mathcal{P}(\mathcal{A})$	$\mathcal{A}$ é uma álgebra de dimensão e nilíndice n , e $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ é o conjunto de pares $\{(a, b) \mid a, b \in \mathcal{A}, a^{n-1} \neq 0, b \in \mathcal{A} \setminus M, ab \in \mathbb{F}a^2, ba^{n-2} = 0\}$.
$\overline{\mathcal{P}(\mathcal{A})}$	$\mathcal{A}$ é uma álgebra de dimensão n e nilíndice $n - 1$, $\mathcal{B}$ é uma subálgebra de dimensão e nilíndice $n - 1$ de $\mathcal{A}$ e $\overline{\mathcal{P}(\mathcal{A})}$ é o conjunto de triplas $\{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathcal{A}, (a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{B}), c \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}(a), ca \in \text{span}\{a, b\}\}$.
$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$	conjunto de operadores induzidos $\overline{L}_x$ ao espaço $\mathcal{A}/\mathcal{B}$, se $x\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$.
$\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$	conjunto de operadores induzidos $\overline{L}_x$ ao espaço $\mathcal{A}/\mathcal{B}$, se $x \in \mathcal{B}$.
$\text{Nilp}(\mathcal{A})$	radical nilpotente de $\mathcal{A}$.
$\text{Solv}(\mathcal{A})$	radical solúvel de $\mathcal{A}$.
$\text{Nil}(\mathcal{A})$	nilradical de $\mathcal{A}$.
$\text{rank}(h)$	posto da matriz h
$\text{codim}(\mathcal{B})$	$\dim \mathcal{A} - \dim \mathcal{B}$, se $\mathcal{B}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$.

Lista de Tabelas

3.1	Relação entre os operadores de grau 4.	29
3.2	Relação entre os operadores de grau 5.	30
3.3	Relação entre os operadores de grau 6.	32

Introdução

O termo álgebra é usado frequentemente na literatura para fazer referência às álgebras associativas, no entanto, neste trabalho, o termo álgebra ou álgebra não-associativa será utilizado para fazer referência às estruturas nas quais a propriedade de associatividade não é uma lei adotada. O uso desse termo não significa que a propriedade não é válida, somente que não é assumida. Tendo isto em conta, uma álgebra não-associativa $\mathcal{A}$ é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$ no qual está definida uma aplicação $(x, y) \mapsto xy$, chamada de multiplicação, que goza das seguintes propriedades:

$$(x + y)z = xz + yz, \quad x(y + z) = xy + xz, \quad x, y, z \in \mathcal{A}.$$

Essa multiplicação deve ser compatível com a estrutura de espaço vetorial, ou seja,

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y), \quad x, y \in \mathcal{A}, \alpha \in \mathbb{F}.$$

As álgebras não-associativas têm despertado o interesse de pesquisadores em diferentes áreas o que ressalta sua importância na atualidade. Por fazer menção de algumas, as álgebras de Lie estão relacionadas com a estrutura local dos grupos topológicos e servem de base para a teoria dos grupos quânticos; as álgebras de Jordan introduzidas pelo físico P. Jordan com a ideia de generalizar o formalismo da mecânica quântica, foram relacionadas posteriormente com as álgebras de Lie e os fundamentos da geometria; as álgebras báricas foram introduzidas como ferramenta principal no estudo da teoria de álgebras genéticas.

As álgebras de Lie e as álgebras de Jordan são álgebras não-associativas destacadas. Em ambas classes podem ser obtidos exemplos a partir de uma álgebra associativa $\mathcal{A}$. Em ambos casos, troca-se o produto de $\mathcal{A}$ por uma nova operação. No primeiro, ele é trocado pela operação $[x, y] := xy - yx$, assim, $\mathcal{A}^- = (\mathcal{A}, [\])$ é uma álgebra de Lie. No segundo caso, $\mathcal{A}$ deve ser uma álgebra sobre um corpo de característica diferente de 2, assim, o produto associativo é trocado pela operação $x \circ y := \frac{1}{2}(xy + yx)$, e agora $\mathcal{A}^+ = (\mathcal{A}, \circ)$ é uma álgebra de Jordan. O Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt afirma que cada álgebra de Lie é isomorfa a uma subálgebra de $\mathcal{A}^-$ para alguma álgebra associativa $\mathcal{A}$. De outro lado, no ano 1933, P. Jordan, J. von Neumann e E. Wigner classificaram todas as álgebras de Jordan euclidianas simples de dimensão finita sobre os reais em 5 tipos, quatro desses tipos de álgebras são álgebras tais que o análogo ao Teorema de PBW para álgebras de Jordan é válido. No entanto, eles não conseguiram provar que o outro tipo, as matrizes hermitianas de tamanho 3×3 sobre o anel dos octônios satisfaz também essa propriedade. Foi A.A. Albert, quem no artigo [Alb34] provou que essa álgebra de dimensão 27 sobre $\mathbb{R}$ é uma álgebra excepcional, assim, não cada álgebra de Jordan é isomorfa a uma subálgebra de $\mathcal{A}^+$ para alguma

álgebra associativa $\mathcal{A}$. Anos mais tarde, em 1979, Effin Zelmanov demonstrou que cada álgebra de Jordan de divisão e excepcional é a álgebra de dimensão 27 sobre seu centro mencionada acima.

A primeira álgebra não-associativa que não satisfaz a propriedade de associatividade, surgiu a partir das comunicações entre dois grandes colegas e amigos: J. T. Graves e W. R. Hamilton. Em 1843, logo depois de tentar definir sem êxito uma multiplicação em $\mathbb{R}^3$ que o tornasse um corpo, Hamilton escreveu para Graves que tinha alcançado tal objetivo em $\mathbb{R}^4$, esse “corpo não comutativo” é conhecido como o anel dos quatérnios. Em uma carta datada de 26 de dezembro de 1843, Graves respondeu a Hamilton que tinha construído um outro “corpo não comutativo”, os "octaves" hoje conhecido como os octônios. Em janeiro de 1844, Graves continuou a comunicação com Hamilton mediante três cartas, dessa vez, ele mostrou que os "octaves" formam uma álgebra normada com divisão. Porém, foi Hamilton quem informou a Graves que essa álgebra não era associativa [SCM⁺67].

Não obstante, a descoberta dessa álgebra trouxe uma anedota que precisa ser contada: Graves não havia publicado os trabalhos em relação aos "octaves". Independentemente, Arthur Cayley publicou em 1845 um trabalho onde definiu uma estrutura de álgebra sobre $\mathbb{R}^8$, os conhecidos octônios. Anos mais tarde, Graves com apoio de Hamilton tornou pública sua descoberta sobre os octônios, porém essa álgebra já era conhecida como os números de Cayley.

Um celebre teorema demonstrado por Adolf Hurwitz em 1898 estabelece que existem unicamente quatro álgebras de divisão normada de dimensão finita sobre os reais, elas são: os números reais, os números complexos, os quatérnios e os octônios.

Embora os octônios não sejam associativos, eles satisfazem uma propriedade quase associativa: cada subálgebra gerada por 2 elementos é associativa. Essas álgebras são chamadas de alternativas. As álgebras de Jordan são definidas pelas identidades

$$xy - yx = 0, \quad x^2(yx) - (x^2y)x = 0.$$

As álgebras que satisfazem a primeira identidade chamam-se comutativas. A segunda identidade, recebe o nome de identidade de Jordan. As álgebras de Jordan generalizam as álgebras alternativas comutativas.

Como já foi mencionado, as álgebras de Jordan foram introduzidas desde um ambiente da física, no entanto, a relação entre essas álgebras com outros objetos matemáticos começaram a surgir. Algumas das mais destacadas relações são com as álgebras de Lie, ou com a teoria de grupos. De fato, em 1991 Effin Zelmanov deu uma solução positiva ao problema de Burnside restringido, o qual perguntava se existe uma quantidade finita de grupos com m geradores e de expoente n . Pela solução deste problema, ele recebeu a medalha Fields no ano 1994. Este problema foi reduzido a um problema em certos p -aneis de Lie, que a sua vez, podem ser relacionados com álgebras de Jordan sobre um corpo de característica p .

Ao enfraquecer ainda mais a propriedade de associatividade, obtém-se as álgebras de potências associativas, que são álgebras tais que toda subálgebra gerada por um só elemento é associativa.

No ano 1948, A.A. Albert demonstrou que as álgebras comutativas de potências associativas sobre um corpo de característica diferente de 2, 3 e 5 estão definidas pelas identidades

$$xy - yx = 0, \quad x^4 - x^2x^2 = 0.$$

Desse modo, as álgebras comutativas de potências associativas são uma generalização das álgebras de Jordan, e também das álgebras alternativas comutativas.

Mesmo que as álgebras alternativas, de Jordan e as de potências associativas sejam álgebras não-associativas, os resultados básicos de estrutura para as álgebras associativas podem ser formulados para as álgebra não-associativas. Por exemplo, nas três classes de álgebras é válida a decomposição de Peirce relativa a um elemento idempotente, teoremas de isomorfismo, e a teoria geral de radicais.

Por outro lado, as nilálgebras em geral, são estudadas por diferentes autores ao longo dos anos, e são muitos os problemas que ainda estão em aberto, ou problemas aos quais foram dadas respostas parciais. O problema de Kurosh perguntava se cada nilálgebra finitamente gerada é nilpotente. Este problema teve resposta negativa, já que em 1964, E.S. Golod no seu artigo [Gol64] construiu uma nilálgebra finitamente gerada a qual não é nilpotente. O que acontece se é adicionada a hipótese da nilálgebra possuir nilíndice limitado? A resposta geral é negativa, no entanto, nas classes importantes de álgebras, como por exemplo, as associativas, e versões adequadas para as álgebras de Lie e as álgebras de Jordan, a resposta é positiva, tendo em conta que para as últimas duas classes, a pergunta precisa ser re-enunciada.

Nas álgebras associativas, foram M. Nagata em 1952 no artigo [Nag52] para característica zero, e G. Higman em [Hig56] em 1956 para característica positiva, quem provaram que se uma álgebra não possui elementos de ordem aditivo menor do que n e satisfaz a identidade $x^n = 0$, então a álgebra é nilpotente, e o índice de nilpotencia depende unicamente de n . “Não obstante, tempo depois foi descoberto que esse resultado já tinha sido estabelecido em 1943 por J. Dubnov e V. K. Ivanov em [DI43], mas o artigo passou por alto na comunidade matemática” [DF04, pag. 75]. Já no ano de 1974, Y. P. Razmyslov em [Raz74] demonstrou que o índice de nilpotencia $f(n)$ devia ser menor ou igual do que n^2 . De outro lado, E. N. Kuzmin em [Kuz75] estabeleceu que o índice $f(n)$ satisfaz $f(n) \geq n(n+1)/2$. Dessa forma, tem-se que $n(n+1)/2 \leq f(n) \leq n^2$. Na atualidade, se conhece como a conjectura de Kuzmin o fato que $f(n) = n(n+1)/2$. As igualdades para os casos $n \leq 4$ são os únicos casos demonstrados desta conjectura, aliás, de um avanço feito por I. Shestakov e N. Zhukavetz para $n = 5$, particularmente, nas álgebras que possuem 2 geradores.

Como as álgebras de Lie são nilálgebras, já que $x^2 = 0$ é uma identidade, a noção de elemento nilpotente necessita de uma modificação: Nas álgebras de Lie, um elemento x é dito ad-nilpotente se o operador $\text{ad}_x(y) = [x, y]$ é um operador nilpotente. Dessa forma, o problema de Kurosh nas álgebras de Lie é da seguinte forma: Dada uma álgebra de Lie ad-nilpotente finitamente gerada de nilíndice limitado, ela é nilpotente? Se a característica é positiva, Razmyslov em 1971 construiu uma álgebra de Lie que satisfaz $\text{ad}_x^{p-2} \equiv 0$ para cada $p \geq 5$, mas ela não é nilpotente. Assim, ficava a pergunta em aberto para característica zero. Em 1987, E. Zelmanov em [Zel87] resolveu o problema de forma mais geral. Ele provou que é suficiente supor que a álgebra de Lie é somente

ad-nilpotente. Nesse caso, a álgebra é nilpotente.

No livro [Dne93, Prob. 1.156], A. I. Shirshov formulou a pergunta para álgebras de Jordan assim: Deve ser uma nilálgebra de Jordan de nilíndice limitado, localmente nilpotente? Ela foi respondida afirmativamente por E. Zelmanov no artigo [Zel82] no ano 1982. No entanto, A. A. Albert, já tinha estabelecido o seguinte resultado [ZSSS82, pag. 92] para álgebras de dimensão finita: Cada nilálgebra de Jordan de dimensão finita sobre um corpo de característica diferente de 2, é nilpotente.

Aliás dos nomeados acima, vários outros autores tem trabalhado nesse sentido, alguns deles são I. Levitzki, A. Y. Belov, I. Kaplansky, A. I. Shirshov, K. A. Zevlakov, A. A. Albert, I. P. Shestakov.

Ao tomar conhecimento sobre o fato que as nilálgebras de Jordan de dimensão finita são nilpotentes, A.A. Albert se questionou se essa propriedade poderia ser estendida nas álgebras comutativas de potências associativas. No entanto, Suttles em [Sut72] apresentou o seguinte contraexemplo:

Seja $\mathcal{A}$ a álgebra de dimensão 5 e nilíndice 4 com base $\{a, a^2, a^3, b, a^2b\}$, onde os produtos são definidos por $a^i a^j = a^{i+j}$ se $i + j < 4$,

$$a^3 b = a^2, \quad a(a^2 b) = -a^2,$$

e os demais produtos iguais a zero. Dessa forma, obtém-se que $\mathcal{A}^3 = \mathcal{A}^2 = \text{span}\{a^2, a^3, a^2b\}$. Nesse caso, $\mathcal{A}$ é uma nilálgebra comutativa de potências associativas que não é nilpotente. Não obstante $(\mathcal{A}^2)^2 = 0$, portanto, ela é solúvel.

Uma álgebra $\mathcal{A}$ é solúvel se existir um m tal que $\mathcal{A}^{(m)} = 0$, onde as potências plenárias de $\mathcal{A}$ são definidas indutivamente por: $\mathcal{A}^{(0)} = \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^{(k)} = \mathcal{A}^{(k-1)} \mathcal{A}^{(k-1)}$ para $k > 0$.

Assim, o problema está em aberto desde então, e é conhecido como

O problema de Albert: Seja $\mathcal{A}$ uma nilálgebra comutativa de potências associativas de dimensão finita sobre um corpo de característica diferente de 2. É $\mathcal{A}$ solúvel?

O estudo desse problema tem despertado interesse de diversos autores ao longo dos anos, e foram obtidas soluções parciais do problema. Por um lado, foi mostrado em [CP01, CHP03, GF10, ES04, GF04, GFS05] que se a dimensão da álgebra é menor ou igual do que 8, ela é solúvel. Sob outra perspectiva, uma álgebra de dimensão n será solúvel se o nilíndice for maior ou igual do que $n - 2$, como foi demonstrado nos artigos [ESGF05, GF04].

De outra parte, o problema de Albert tem sido relacionado com alguns problemas em diferentes áreas da matemática, o qual ressalta a importância do problema e o interesse em obter uma resposta para ele. Recentemente, U. Umirbaev em [Umi14] fez uma conexão entre as álgebras de Engel solúveis e o problema de dependência homogênea, é dizer, relaciona um problema clássico de teoria de anéis, com um problema de geometria afim. A relação com o problema de Albert, é que cada nilálgebra comutativa de potências associativas de dimensão finita é uma álgebra de Engel. Além disso, no ano 2009, o problema de Albert foi relacionado a um problema de formas bilineares

simétricas associativas, como poder ser encontrado em [Are09].

A fim de entender melhor a estrutura das nilálgebras comutativas de potências associativas foi dada uma classificação para subclasses específicas. Em particular, as álgebras de dimensão n e nilíndice n foram classificadas para $n \leq 4$ em [GM75] e em [CS99] para $n \geq 5$ e $\mathcal{A}$ uma álgebra de Jordan. Aliás, no trabalho [ES02], os autores deram a classificação para as álgebras de dimensão 5 nesta classe que não são de Jordan. Nos trabalhos [GFGM13] e [GFGMM14], foi dada uma descrição para as álgebras nos casos em que a dimensão da álgebra é $n \geq 6$. No primeiro artigo, foram estudadas as álgebras de nilíndice n , e no segundo, as álgebras de nilíndice $n - 1$.

O objetivo dessa tese é estender os resultados conhecidos a respeito do problema de Albert. Nesse sentido, será mostrado que cada nilálgebra comutativa de potências associativas de dimensão n e nilíndice $n - 3$, assim como, álgebras de dimensão 9 são solúveis. De outro lado, fazer um refinamento na descrição das nilálgebras comutativas de potências associativas de dimensão $n \geq 12$ e nilíndice $n - 1$ que foi publicada no artigo [GFGMM14].

Para alcançar os objetivos deste trabalho, será necessário interagir com duas partes da matemática: uma parte teórica e uma parte de cálculos. A parte teórica será fundamental para estender o resultado do problema de Albert para as álgebras de dimensão n e nilíndice $n - 3$. De outro lado, os cálculos serão indispensáveis tanto na hora de afrontar o problema de Albert para álgebras de dimensão 9, quanto na hora de fazer o refinamento querido para as álgebras de dimensão n e nilíndice $n - 1$. O trabalho será dividido da seguinte forma:

No Capítulo 1, são apresentados os conceitos básicos de álgebras não-associativas necessários para a compreensão e o desenvolvimento da tese. Será dado enfoque nas nilálgebras comutativas de potências associativas de dimensão n e nilíndice $n - 3$ no Capítulo 2. Nele prova-se que cada nilálgebra nessa classe é uma álgebra solúvel, de modo que o problema de Albert consegue mais uma resposta afirmativa quando a dimensão é arbitrária. Com esses resultados, é possível estudar as nilálgebras de dimensão 9, portanto, no Capítulo 3 serão estudadas as nilálgebras de potências associativas de dimensão 9 e nilíndice 5. Deste modo, os resultados do problema de Albert serão estendidos quando a dimensão da álgebra é mantida fixa, pois será provado que as nilálgebras comutativas de potências associativas de dimensão 9 são solúveis. Finalmente, no Capítulo 4 será refinada a descrição das nilálgebras comutativas de potências associativas de dimensão $n \geq 12$ e nilíndice $n - 1$.

Assim, os principais resultados obtidos nesta tese são os seguintes:

Teorema 1. *Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra comutativa de potências associativas sobre o corpo $\mathbb{C}$, então ela é solúvel caso:*

- i. $\dim \mathcal{A} = n$ e $\text{nilind } \mathcal{A} = n - 3$, ou
- ii. $\dim \mathcal{A} = 9$.

Seja $\mathfrak{V}$ a variedade das álgebras comutativas de potências associativas de dimensão n e nilíndice $n - 1$ sobre um corpo de característica diferente de 2, 3 e 5. Dada $\mathcal{A} \in \mathfrak{V}$, existem $a, b, c \in \mathcal{A}$

tais que a possui índice maximal, é dizer, $a^{n-2} \neq 0$, e uma base para $\mathcal{A}$ é dada pelo conjunto $\{a, a^2, \dots, a^{n-2}, b, c\}$. Considere $M(a) = \text{span}\{a, a^2, \dots, a^{n-2}\}$, $\mathfrak{V}'$ a classe de álgebras tais que $\mathcal{A} \in \mathfrak{V}$, mas $\mathcal{A}^2 \not\subset M(a)$ para nenhum elemento de índice maximal, e

$$\mathfrak{V}_{Id} = \{\mathcal{A} \in \mathfrak{V}' : \exists a \in \mathcal{A} \text{ de índice maximal, } M(a) \text{ é ideal de } \mathcal{A}\},$$

$$\mathfrak{V}_{Id2} = \{\mathcal{A} \in \mathfrak{V}' : \exists a \in \mathcal{A} \text{ de índice maximal, } M(a) \text{ não é ideal de } \mathcal{A}, M^2(a) \text{ é ideal}\},$$

$$\mathfrak{V}_{NI} = \{\mathcal{A} \in \mathfrak{V}' : \exists a \in \mathcal{A} \text{ de índice maximal, } M(a), M^2(a) \text{ não são ideais de } \mathcal{A}\}.$$

Caso $\mathcal{A} \in \mathfrak{V}_{Id}$, então $c^2 - b \in M^2(a)$. Se $\mathcal{A} \in \mathfrak{V}_{Id2}$, existe $\alpha \in \mathbb{F}$ tal que $ca = b$ e $c^2 - \alpha b \in M^2(a)$.

Teorema 2. *Se $n \geq 12$, então a seguinte união é disjunta:*

$$\mathfrak{V}' = \mathfrak{V}_{Id} \cup \{\mathcal{A} \in \mathfrak{V}_{Id2} \mid \alpha = 0\} \cup \mathfrak{V}_{NI}.$$

Como resultado deste trabalho, serão publicados 2 artigos em periódicos internacionais. O primeiro deles, já aceito em Linear Algebra and its Applications, trata acerca do problema de Albert nas álgebras de dimensão n e nilíndice $n - 3$. O segundo, ainda em preparação, será acerca do problema de Albert nas álgebras de dimensão 9.

Capítulo 1

Preliminares.

Neste capítulo será dada a terminologia, notações e propriedades clássicas de álgebras não-associativas que serão usadas no decorrer da tese e alguns fatos bem conhecidos de álgebras comutativas de potências associativas.

1.1 Álgebras não-associativas.

Definição 1. *Uma álgebra não-associativa $\mathcal{A}$ é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$, onde está definida uma operação binária $(x, y) \mapsto xy$, chamada de multiplicação, que verifica as seguintes propriedades:*

$$\begin{aligned}(x + y)z &= xz + yz, \\ x(y + z) &= xy + xz, \\ \alpha(xy) &= (\alpha x)y = x(\alpha y).\end{aligned}\quad x, y, z \in \mathcal{A}, \alpha \in \mathbb{F}.$$

Uma álgebra é dita de comutativa, se $xy = yx$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$. Ela é denominada associativa se para quaisquer $x, y, z \in \mathcal{A}$ é válido que $x(yz) = (xy)z$.

Definição 2. *Um subespaço vetorial $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ chama-se de subálgebra se $xy \in \mathcal{B}$ para quaisquer $x, y \in \mathcal{B}$. Um subespaço I de $\mathcal{A}$ fechado para multiplicação por elementos de $\mathcal{A}$, isto é, $xa, ax \in I$ para todo $x \in \mathcal{A}$, $a \in I$, é dito de ideal de $\mathcal{A}$.*

Uma transformação linear $h : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ entre álgebras sobre o corpo $\mathbb{F}$ chama-se de homomorfismo de álgebras quando satisfaz

$$h(ab) = h(a)h(b), \quad a, b \in \mathcal{A}.$$

Dado que a definição de homomorfismo não utiliza a associatividade, nas álgebras não-associativas são válidos os teoremas de isomorfismo, a saber:

Teorema 3. *i. Se I, J são ideais de $\mathcal{A}$ tais que $I \subset J$, então*

$$(\mathcal{A}/I)/(J/I) \cong \mathcal{A}/J,$$

ii. Se I é um ideal de $\mathcal{A}$, e $\mathcal{B}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$, então $\mathcal{B} \cap I$ é um ideal de $\mathcal{B}$ e

$$(I + \mathcal{B})/I \cong \mathcal{B}/(I \cap \mathcal{B}).$$

O operador linear $L_x : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ definido por $L_x(y) = xy$ chama-se de operador multiplicação à esquerda determinado por x . Similarmente, $R_x : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ definido como $R_x(y) = yx$, é dito de operador multiplicação à direita determinado por x . No caso em que $\mathcal{A}$ é uma álgebra comutativa, então

é válido que $L_x \equiv R_x$. Note que em geral, os operadores L_x e R_x não são homomorfismos de álgebras.

Será denotado por $\text{End}(\mathcal{A})$ o conjunto de todas as transformações lineares de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}$. Facilmente pode ser visto que $\text{End}(\mathcal{A})$ é uma álgebra associativa, não comutativa se $\dim \mathcal{A} > 1$, onde sua operação multiplicação é a composta de transformações lineares.

Se $\mathcal{B}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$, para cada $x \in \mathcal{A}$ tal que $x\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$, pode ser definido o operador linear $\bar{L}_x$ no espaço vetorial $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ como segue:

$$\bar{L}_x(y + \mathcal{B}) = xy + \mathcal{B}.$$

O operador $\bar{L}_x$ fica bem definido, pois se $y + \mathcal{B} = z + \mathcal{B}$, então $y - z \in \mathcal{B}$, portanto, $xy - xz \in \mathcal{B}$, é dizer, $xy + \mathcal{B} = xz + \mathcal{B}$. No caso em que $\mathcal{B}$ é um ideal, segue que $\bar{L}_x$ está definido para cada $x \in \mathcal{A}$, desse modo, $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ torna-se uma álgebra.

Como a multiplicação não necessariamente é associativa, existem diferentes formas de definir as potências dos elementos da álgebra $\mathcal{A}$. Na sequência, são definidas as potências relevantes nessa tese.

Definição 3. *Seja $x \in \mathcal{A}$, são definidas duas potências do elemento x indutivamente:*

$$\begin{aligned} x^1 &= x, & x^{k+1} &= x^k x & \text{são as potências principais à direita de } x. \\ {}^1x &= x, & {}^{k+1}x &= x({}^kx) & \text{são as potências principais à esquerda de } x. \end{aligned}$$

No caso de uma álgebra comutativa, as potências principais à direita coincidem com as potências principais à esquerda. Nesse caso, essas potências são chamadas de potências principais do elemento x .

Definição 4. *Um elemento $x \in \mathcal{A}$ é dito de nilpotente se existe $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $x^k = {}^kx = 0$. Uma álgebra $\mathcal{A}$ é dita de nilálgebra, se x é nilpotente para cada $x \in \mathcal{A}$. Caso exista $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $x^k = {}^kx = 0$ para todo $x \in \mathcal{A}$, o menor inteiro que satisfaz essa propriedade é chamado de nilíndice de $\mathcal{A}$ e será denotado por $\text{nilind } \mathcal{A}$.*

Definição 5. *Uma álgebra $\mathcal{A}$ chama-se de álgebra de Engel se para cada $x \in \mathcal{A}$, os operadores $L_x, R_x \in \text{End}(\mathcal{A})$ são nilpotentes.*

Dado que se $\mathcal{A}$ é de dimensão finita, o único autovalor de um operador nilpotente é zero, tem-se o seguinte lema:

Lema 1. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Engel de dimensão finita. Se existe $0 \neq a \in \mathcal{A}$ tal que $L_x(a) = \alpha a$, então $\alpha = 0$ e $a \in \ker L_x$.*

De modo análogo às potências de um elemento, existem varias formas diferentes de definir as potências de uma álgebra. A seguir são definidas as potências de álgebras que serão trabalhadas nessa tese.

Sejam I, J dois subespaços da álgebra $\mathcal{A}$. O produto IJ e a soma $I + J$ são definidos por

$$\begin{aligned} IJ &= \text{span}\{xy \mid x \in I, y \in J\}, \\ I + J &= \text{span}\{x + y \mid x \in I, y \in J\}. \end{aligned}$$

As seguintes potências são definidas por indução da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^1 &= \mathcal{A}, & \mathcal{A}^k &= \sum_{i+j=k} \mathcal{A}^i \mathcal{A}^j & \text{para cada } k \geq 2, \\ \mathcal{A}^{(0)} &= \mathcal{A}, & \mathcal{A}^{(s+1)} &= \mathcal{A}^{(s)} \mathcal{A}^{(s)} & \text{para cada } s \geq 0. \end{aligned}$$

Definição 6. Uma álgebra $\mathcal{A}$ chama-se de nilpotente se existe um inteiro $k \geq 2$ tal que $\mathcal{A}^k = 0$. Por outro lado, a álgebra é denominada de solúvel se existe um inteiro $s \geq 1$ tal que $\mathcal{A}^{(s)} = 0$. Os menores números k e s cumprindo essas condições, são chamados de índice de nilpotencia e índice de solubilidade, respectivamente.

Utilizando-se indução, facilmente se demonstra que $\mathcal{A}^{(k)} \subset \mathcal{A}^{2^k}$, desse modo, obtém-se o seguinte lema:

Lema 2. Toda álgebra nilpotente é solúvel.

Não obstante, a recíproca do lema acima não é verdadeira, por exemplo, tem-se a álgebra de Suttles como foi exposto na introdução. Nesta álgebra, para todo inteiro $k \geq 2$ obtém-se que $\mathcal{A}^k = \text{span}\{a^2, a^3, a^2b\}$, desse modo, ela não é nilpotente. Não obstante, $\mathcal{A}^{(2)} = 0$.

Como a solubilidade de algumas álgebras é o tema central de estudo desta tese, o seguinte lema é uma ferramenta útil para provar que uma álgebra é solúvel.

Lema 3. Se I é um ideal de $\mathcal{A}$ tal que I e $\mathcal{A}/I$ são solúveis, então $\mathcal{A}$ é solúvel.

Demonstração. Dado que $\mathcal{A}/I$ é solúvel, então existe $k \geq 1$ tal que $(\mathcal{A}/I)^{(k)} = 0$, o que é equivalente a dizer que $\mathcal{A}^{(k)} \subset I$. Por outro lado, como I é solúvel, existe $k_0 \geq 1$ tal que $I^{(k_0)} = 0$, dessa forma, $\mathcal{A}^{(k+k_0)} = (\mathcal{A}^{(k)})^{(k_0)} \subset I^{(k_0)} = 0$. Portanto, $\mathcal{A}$ é solúvel. $\square$

Um resultado imediato é o seguinte lema.

Lema 4. Se I, J são ideais solúveis de uma álgebra $\mathcal{A}$, então $I + J$ é solúvel.

Seja $\mathfrak{M}$ uma classe de álgebras fechada por imagens de homomorfismos. Uma subclasse $\mathfrak{R}$ é dita radical se:

- i. $\mathfrak{R}$ é fechada por imagens de homomorfismos,
- ii. para cada $\mathcal{A} \in \mathfrak{M}$ existe um ideal $\mathfrak{R}(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ tal que $\mathfrak{R}(\mathcal{A}) \in \mathfrak{R}$ e contém cada ideal de $\mathcal{A}$ que pertence a $\mathfrak{R}$,
- iii. $\mathfrak{R}(\mathcal{A}/\mathfrak{R}(\mathcal{A})) = 0$.

Como consequência dos lemas anteriores, junto ao segundo teorema de isomorfismos, segue que na classe das álgebras de dimensão finita, a subclasse formada pelas álgebras solúveis é radical. Assim, se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de dimensão finita, então $\mathcal{A}$ possui um único ideal maximal solúvel. Esse ideal é chamado de radical solúvel de $\mathcal{A}$ e denota-se por $\text{Solv}(\mathcal{A})$.

Em geral, numa classe arbitrária de álgebras a subclasse formada por as álgebras nilpotentes não é radical, já que não satisfaz o análogo do Lema 3 para ideais nilpotentes. Por exemplo, se $\mathcal{A}$ é a álgebra de Suttles e $I = \mathcal{A}^2$, então tanto I , quanto $\mathcal{A}/I$ são nilpotentes com índice de nilpotencia igual a 2, porém, $\mathcal{A}$ não é nilpotente. Se a subclasse Nilp, formada pelas álgebras nilpotentes, é radical em $\mathfrak{M}$, então o correspondente ideal nilpotente $\text{Nilp}(\mathcal{A})$, para $\mathcal{A} \in \mathfrak{M}$ chama-se radical nilpotente de $\mathcal{A}$. Se a subclasse Nil, formada pelas nilálgebras, é radical em $\mathfrak{M}$, então o correspondente nilideal $\text{Nil}(\mathcal{A})$, para $\mathcal{A} \in \mathfrak{M}$ chama-se nilradical de $\mathcal{A}$.

1.2 Álgebras de potências associativas.

Como foi mencionado na introdução, as álgebras de Jordan são álgebras comutativas que satisfazem a identidade de Jordan

$$x^2(yx) = (x^2y)x.$$

Um resultado bem conhecido, provado por A.A. Albert para essa classe de álgebras é o seguinte:

Teorema 4. [Sch66, Teo. 4.3] *Seja $\mathcal{A}$ uma nilálgebra de Jordan de dimensão finita sobre um corpo de característica diferente de 2. Então $\mathcal{A}$ é nilpotente.*

Isto significa que na classe das álgebras de Jordan de dimensão finita, as subclasses nilpotente, nil e solúvel são radicais. Além do mais, para cada álgebra de Jordan $\mathcal{A}$ de dimensão finita temos que

$$\text{Nilp}(\mathcal{A}) = \text{Solv}(\mathcal{A}) = \text{Nil}(\mathcal{A}).$$

Este resultado é a base de estudo de um dos problemas enfrentados nesta tese, o problema de Albert, o qual foi descrito na introdução. É natural perguntar-se se na classe das álgebras comutativas de potências associativas de dimensão finita, que generalizam as álgebras de Jordan, também é válida a igualdade $\text{Solv}(\mathcal{A}) = \text{Nil}(\mathcal{A})$. Esta questão é uma formulação alternativa do Problema de Albert. Uma questão equivalente é a seguinte: existem nilálgebras comutativas de potências associativas simples de dimensão finita? Uma álgebra $\mathcal{A}$ é simples se $\mathcal{A}^2 \neq 0$ e os únicos ideais de $\mathcal{A}$ são 0 e $\mathcal{A}$.

Definição 7. *Uma álgebra $\mathcal{A}$ chama-se de potências associativas se para cada $x \in \mathcal{A}$, a subálgebra gerada pelo elemento x é associativa.*

Essa definição é equivalente a exigir que qualquer elemento $x \in \mathcal{A}$ satisfaça

$$x^i x^j = x^{i+j}, \quad \text{para quaisquer } i, j \geq 1.$$

Na década de 1940-1950, A.A. Albert estudou as álgebras de potências associativas, e no artigo [Alb48] provou que essa classe de álgebras pode ser definida a partir de uma identidade polinomial e a comutatividade, mais precisamente, ele mostrou o seguinte:

Teorema 5. [Alb48, Teo. 4] *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra comutativa sobre um corpo de característica diferente de 2, 3 e 5. Então $\mathcal{A}$ é de potências associativas, se e somente se, para cada $x \in \mathcal{A}$ é válida a igualdade*

$$x^4 = x^2 x^2.$$

Nesse mesmo artigo, Albert construiu exemplos de álgebras sobre corpos de característica 2, 3 e 5 que satisfazem a igualdade $x^4 = x^2 x^2$, mas não são álgebras de potências associativas, de modo que, a restrição na característica não pode ser removida.

Observe que cada álgebra de Jordan, satisfaz $x^4 = x^2 x^2$, desse modo, as álgebras comutativas de potências associativas são uma generalização das álgebras de Jordan.

O processo de linearização de identidades é uma ferramenta útil no estudo da estrutura de uma variedade de álgebras e é fundamental no estudo do presente trabalho. Neste escrito não serão dados mais detalhes, o leitor interessado pode consultar livros como [ZSSS82, pag. 9] ou [Osb72, pag. 174].

Ao usar a teoria de linearização, pode ser provado o seguinte lema para a subálgebra de $\text{End}(\mathcal{A})$ gerada pelos operadores L_{a^k} com k inteiro positivo.

Lema 5. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra comutativa de potências associativas sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica diferente de 2 e 3. Então para cada $a \in \mathcal{A}$, a subálgebra gerada pelos operadores L_{a^k} , com k inteiro positivo, é de fato gerada (como álgebra) por L_a , L_{a^2} . Além disso, para todo $r \geq 1$ tem-se que*

$$3L_{a^{r+2}} = 4L_{a^2}L_{a^r} + 8L_{a^{r+1}}L_a - 2L_a^2L_{a^r} - 2L_aL_{a^r}L_a - 2L_aL_{a^{r+1}} - 2L_{a^r}L_a^2 - L_{a^r}L_{a^2}.$$

Em particular para $r = 1$ e $r = 2$ tem-se que

$$L_{a^3} = 4L_{a^2}L_a - L_aL_{a^2} - 2L_a^3,$$

$$L_{a^4} = L_{a^2}^2 - \frac{2}{3}(L_{a^2}L_a^2 + L_aL_{a^2}L_a + L_aL_aL_{a^2}) + \frac{2}{3}(4L_{a^3}L_a - L_aL_{a^3}).$$

Por outro lado, o seguinte teorema provado por Gerstenhaber em [Ger60] para álgebras comutativas sobre um corpo de característica zero ou maior do que $2t - 3$, e logo estendido pelos autores em [ESGF05] onde o resultado é válido para álgebras comutativas de potências associativas sobre um corpo de característica $\geq t$, mostra que os operadores L_x são nilpotentes, portanto, cada nilálgebra de potências associativas é uma álgebra de Engel.

Teorema 6. *Seja $\mathcal{A}$ uma nilálgebra comutativa de potências associativas de nilíndice $\leq t$ sobre um corpo de característica zero ou maior do que t . Então $L_x^{2t-3}(y) = 0$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$.*

Além disso, Gerstenhaber no artigo [Ger60] provou um resultado análogo para elementos nilpotentes.

Teorema 7. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra comutativa de potências associativas sobre um corpo de característica zero, $x \in \mathcal{A}$ tal que $x^t = 0$ e $\sum m_i \geq 2(t-1)^2 + 1$. Então para todo $y \in \mathcal{A}$ satisfaz-se que*

$$x^{m_1}x^{m_2}\dots x^{m_k}y = 0.$$

Seja $\mathcal{A}$ é uma nilálgebra comutativa de potências associativas e de nilíndice k . Seja $\mathcal{B}$ a subálgebra de $\mathcal{A}$ gerada por um elemento fixo $a \in \mathcal{A}$. Então $\mathcal{B}$ é igual ao subespaço vetorial de $\mathcal{A}$ gerado por $\{a, a^2, \dots, a^{k-1}\}$, e $\mathcal{B}^i = \text{span}\{a^i, \dots, a^{k-1}\}$ para cada inteiro positivo i . O seguinte lema analisa um operador multiplicação à esquerda, quando o operador preserva a subálgebra $\mathcal{B}^i$.

Lema 6. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra comutativa de potências associativas e $\mathcal{B}$ a subálgebra de $\mathcal{A}$ gerada por um elemento fixo a de $\mathcal{A}$. Se existe $x \in \mathcal{A}$ tal que $L_x(\mathcal{B}^i) \subset \mathcal{B}^i$, com i inteiro positivo, então $L_x(a^i) \in \mathcal{B}^{i+1}$.*

Demonstração. Suponha que $L_x(a^i) = \alpha_i a^i + \sum_{k>i} \alpha_k a^k$. Seja $y = x - \sum_{k>i} \alpha_k a^{k-i}$. Então $L_y(a^i) = \alpha_i a_i$ e portanto $\alpha_i = 0$ já que L_y é nilpotente. $\square$

Com este último lema da-se por concluído o presente capítulo, no qual foram dados conceitos e resultados básicos, que serão usados no decorrer desta tese.

Capítulo 2

Álgebras comutativas de potências associativas de dimensão n e nilíndice $n - 3$

A solubilidade das nilálgebras de potências associativas e dimensão finita é um problema clássico, e os últimos avanços estão divididos entre manter fixa a dimensão ou nilíndice grande em relação à dimensão da álgebra, no que resta do trabalho, será dedicado a ampliar os resultados ao problema de Albert nessas duas direções. Inicialmente será abordado o problema para dimensão arbitrária, e nilíndice grande em relação à dimensão. Assim, o propósito deste capítulo é mostrar que cada álgebra comutativa de potências associativas de dimensão n e nilíndice $n - 3$ sobre o corpo $\mathbb{C}$ é uma álgebra solúvel.

Para provar a solubilidade desta classe de álgebras usaremos a seguinte estratégia: Seja $a \in \mathcal{A}$ de índice maximal, é dizer, o elemento a satisfaz que $a^{n-4} \neq 0$. Inicialmente se demonstrará que se existe uma subálgebra $\mathcal{B}$ de codimensão 3 tal que $M = \text{span}\{a, a^2, \dots, a^{n-4}\} \subset \mathcal{B}$, então $\mathcal{A}$ é solúvel. Neste caso é provado que se $\mathcal{B}$ não é um ideal de $\mathcal{A}$, então $\mathcal{B}^k$ é um ideal de $\mathcal{A}$ para todo $k \geq 3$, dessa forma, $\mathcal{B}^3$ é um ideal de codimensão 6. É considerado unicamente o caso em que a codimensão de $\mathcal{B}$ é 3, já que caso existir uma subálgebra de codimensão 1 ou 2, uma consequência direta do Lema 7 é a solubilidade de $\mathcal{A}$, como é descrito mais para frente.

Após dessa consideração, será usado um teorema que classifica, a menos de conjugação, todos os espaços lineares maximais de $\mathcal{M}(4, \mathbb{C})$ formados por matrizes nilpotentes. Esse resultado permite provar que dada a subálgebra $\text{span}\{a, a^2, \dots, a^{n-4}\}$, sempre existe uma subálgebra própria contendo-a de codimensão menor do que 4, concluindo desse modo, que $\mathcal{A}$ é solúvel.

Alguns fatos bem conhecidos na teoria das álgebras comutativas de potências associativas são expostos a continuação.

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra comutativa de potências associativas sobre um corpo de característica diferente de 2, 3 e 5. Ao linearizar a identidade $x^4 = x^2x^2$, segue que $\mathcal{A}$ satisfaz as seguintes identidades:

$$x^3y + x(x^2y) + 2xx(xy) = 4x^2(xy), \quad (2.1)$$

$$y(zx^2) + 2yx(xz) + z(yx^2) + 2xy(xz) + 2zx(xy) + 2xz(xy) + 2xx(yz) = 4x^2(yz) + 8(xy)(xz), \quad (2.2)$$

$$y(yx^2) + 2yx(yx) + 2xy(yx) + x(xy^2) = 2x^2y^2 + 4(xy)^2, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}
& xw(yz) + wx(yz) + wz(yx) + xz(yw) + zw(xy) \\
& + zx(yw) + wy(xz) + xy(wz) + zy(xw) \\
& + yw(xz) + yx(wz) + yz(xw) = 4(yz)(xw) + 4(yw)(xz) + 4(xy)(zw).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Primeiro queremos provar que $\mathcal{A}$ é solúvel, sob a condição de que $\text{span}\{a, a^2, \dots, a^{n-4}\} \subsetneq \mathcal{B}$, onde $\mathcal{B}$ é uma subálgebra própria de $\mathcal{A}$. Nestas condições $1 \leq \text{codim } \mathcal{B} \leq 3$. Note que é suficiente considerar o caso em que $\mathcal{B}$ é uma subálgebra maximal tal que $\text{codim } \mathcal{B} = 3$. Se $\text{codim } \mathcal{B} = 1, 2$, a solubilidade é uma consequência direta do seguinte lema junto ao fato que cada álgebra de dimensão n e nilíndice maior ou igual que $n - 2$ é solúvel.

Lema 7. [GF04, Lem. 1] *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra comutativa de Engel.*

- i. *Se $\mathcal{B}$ é uma subálgebra de codimensão 1, então $\mathcal{A}^2 \subset \mathcal{B}$.*
- ii. *Se $\mathcal{B}$ é uma subálgebra de codimensão 2, então $\mathcal{A}^{(2)} \subset \mathcal{B}$.*

O seguinte lema, que descreve os endomorfismos nilpotentes de um espaço vetorial de dimensão 3, é necessário para provar a nossa afirmação no caso de $\text{codim } \mathcal{B} = 3$. Pode ser encontrado em [GF04, Lem. 2].

Lema 8. *Seja V um espaço vetorial de dimensão 3 sobre um corpo $\mathbb{F}$ de ao menos 3 elementos. Se $\mathcal{M}$ é um espaço linear de endomorfismos nilpotentes contido em $\text{End}(V)$, então é válida uma das seguintes condições:*

- i. *Existe $0 \neq v \in V$ tal que $v \in \ker f$ para cada $f \in \mathcal{M}$.*
- ii. *$\dim \mathcal{M} = 2$ e para cada $h \in \mathcal{M}$ tem-se que $\text{rank } h = 2$. Se $\mathcal{M} = \text{span}\{f, g\}$, então existe uma base de V dada por $\{v_1, v_2, v_3\}$ e $\beta \neq 0$ tal que $f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3) = \alpha_1 v_2 + \alpha_2 v_3$, e $g(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3) = \beta(\alpha_2 v_1 - \alpha_3 v_2)$ para cada $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{F}$.*

Desta forma, f, g estão representadas pelas matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta \neq 0,$$

respetivamente.

Neste capítulo será utilizada a seguinte notação, caso não dizer o contrário. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra comutativa de potências associativas de dimensão n e nilíndice $n - 3$, $\mathcal{B}$ uma subálgebra de $\mathcal{A}$, e $a \in \mathcal{A}$ tal que $a^{n-4} \neq 0$. Definem-se:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\mathcal{B}} &:= \text{span}\{\bar{L}_x : \mathcal{A}/\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{B} \mid x\mathcal{B} \subset \mathcal{B}\}, \\
\mathcal{N}_{\mathcal{B}} &:= \text{span}\{\bar{L}_x \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}} \mid x \in \mathcal{B}\}, \\
M = M(a) &:= \text{span}\{a, a^2, \dots, a^{n-4}\}.
\end{aligned}$$

Lembre que o operador $\bar{L}_x$ se define como $\bar{L}_x(y + \mathcal{B}) = xy + \mathcal{B}$ para todo $y \in \mathcal{A}$. Por outro lado, note que $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$.

2.1 Se M está contida numa subálgebra $\mathcal{B}$ onde $\text{codim } \mathcal{B} = 3$.

O proposito desta seção é provar que se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de dimensão n e nilíndice $n - 3$ sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica zero, e existe uma subálgebra $\mathcal{B}$ de codimensão 3 tal que $M \subset \mathcal{B}$, então $\mathcal{A}$ é solúvel.

Inicialmente serão analisados os operadores $\bar{L}_x$ para $x \in M^2 = \mathcal{B}^2$ se $\mathcal{B}$ é uma subálgebra maximal de codimensão 3. Lembramos que cada nilálgebra comutativa de potências associativas e dimensão ≤ 8 sobre $\mathbb{F}$ é solúvel. Assim, podemos assumir que a dimensão de $\mathcal{A}$ é ao menos 9.

Lema 9. *Seja $\dim \mathcal{A} \geq 9$. Para cada subálgebra maximal $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ tal que $\text{codim } \mathcal{B} = 3$ e $M \subset \mathcal{B}$, tem-se que*

$$\mathcal{B}^2 \mathcal{A} \subset \mathcal{B}.$$

Demonstração. Devido a que $\mathcal{B}$ é uma álgebra de dimensão e nilíndice $n - 3$, segue que $M^k = \mathcal{B}^k$ para cada $k \geq 2$. Dessa forma, provar que $\mathcal{B}^2 \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, é equivalente a provar que $\bar{L}_{a^i} \equiv 0$ para cada $i \geq 2$.

Se $\mathcal{B}$ for um ideal de $\mathcal{A}$, então não há nada que provar. Suponha agora que $\mathcal{B}$ não é um ideal de $\mathcal{A}$. Dado que $\text{codim } \mathcal{B} = 3$, existe $b \in \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{B} = M \oplus \mathbb{F}b$. Além disso, como consequência do Lema 8, se $\dim \mathcal{M}_{\mathcal{B}} = 1$, existe $c \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ tal que $c + \mathcal{B}$ está no núcleo de cada operador $\bar{L}_x$ em $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$. Assim, $c\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$ e também $\bar{L}_c \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$. Portanto, $\bar{L}_c(\bar{c}) = 0$, o que significa que $c^2 \in \mathcal{B}$, é dizer, $\mathcal{B} \oplus \mathbb{F}c$ é uma subálgebra própria de $\mathcal{A}$ que contém estritamente $\mathcal{B}$, mas isso contradiz a hipótese de maximalidade de $\mathcal{B}$, portanto, $\dim \mathcal{M}_{\mathcal{B}} = 2$.

Como $\mathcal{B}$ não é um ideal de $\mathcal{A}$, existe $a_0 \in \mathcal{B}$ que satisfaz $\bar{L}_{a_0} \neq 0$, é dizer, $\dim \mathcal{N}_{\mathcal{B}} \geq 1$. Enxergue que é possível assumir $\bar{L}_a \neq 0$. Suponha que $\bar{L}_a \equiv 0$, então, ou $\bar{L}_{a^k} \neq 0$ para algum $k \geq 2$, ou $\bar{L}_b \neq 0$. Ao trocar a por $a + a^k$ ou por $a + \tau b$, segue que $\bar{L}_a \neq 0$. Por isso, sem perda da generalidade, $\bar{L}_a$ pode ser considerado não nulo.

Dado que $\dim \mathcal{M}_{\mathcal{B}} = 2$, existe $c \in \mathcal{A}$ tal que $c\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$ e $\mathcal{M}_{\mathcal{B}} = \text{span}\{\bar{L}_a, \bar{L}_c\}$, além disso, existe uma base $\{m_1, m_2, m_3\}$ de $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ tal que $\bar{L}_a$ e $\bar{L}_c$ estão representados pelas matrizes $J(\beta)$ e A respetivamente. Caso existir $i \geq 2$ tal que $\bar{L}_{a^i} = \alpha_i \bar{L}_a + \delta \bar{L}_c$ com $\delta \neq 0$, então $\bar{L}_a \bar{L}_{a^i} = \alpha_i \bar{L}_a^2 + \delta \bar{L}_a \bar{L}_c$, logo $\bar{L}_a \bar{L}_{a^i}(m_1) = \delta \beta m_1$, consequentemente,

$$\underbrace{\bar{L}_a \bar{L}_{a^i} \cdots \bar{L}_a \bar{L}_{a^i}}_{k \text{ vezes}}(m_1) = \delta^k \beta^k m_1 \neq 0.$$

Se k é tal que $k(i+1) \geq 2(n-4)^2 + 1$, isso contradiz o Teorema 7. Assim, $\bar{L}_{a^i} = \alpha_i \bar{L}_a$ para cada $i \geq 2$. Sejam $c_1, c_2, c_3 \in \mathcal{A}$ elementos tais que $m_i = \bar{c}_i$, então ao fazer $x = a, y = c_3$ na equação (2.1), cumpre-se que

$$\begin{aligned} \alpha_3 \bar{L}_a(m_3) + \alpha_2 \bar{L}_a^2(m_3) + 2\bar{L}_a^3(m_3) &= 4\alpha_2 \bar{L}_a^2(m_3), \\ -\alpha_3 \beta m_2 + 3\alpha_2 \beta^2 m_1 &= 0, \end{aligned}$$

portanto, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Usando o Lema 5, podemos agora provar por indução sobre i que $\alpha_i = 0$ para cada $i \geq 2$, é dizer, $\bar{L}_{a^i} \equiv 0$. Desse modo, $M^2 \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ como queríamos provar. $\square$

O seguinte lema determina uma base para $\mathcal{A}$ caso existir uma subálgebra maximal $\mathcal{B}$ de codimensão 3 que satisfaz $M \subset \mathcal{B}$.

Lema 10. *Suponha que exista uma subálgebra $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ maximal (entre as subálgebras próprias de $\mathcal{A}$) da forma $\mathcal{B} = M \oplus \mathbb{F}b$, $b \neq 0$ que não é ideal de $\mathcal{A}$. Então existe um elemento $c \in \mathcal{A}$ tal que*

- i. $\mathcal{A} = \mathcal{B} \oplus \text{span}\{c, c^2, c^3\}$, ou
- ii. $\mathcal{A} = \mathcal{B} \oplus \text{span}\{c, bc, bbc\}$.

Demonstração. Seja $\mathcal{B}$ uma subálgebra de $\mathcal{A}$ que satisfaz as hipóteses do lema. Desta forma, segue que $1 \leq \dim \mathcal{N}_{\mathcal{B}} \leq 2$. Podemos assumir, usando o mesmo argumento dado na demonstração do lema anterior, que $\bar{L}_a \neq 0$.

Caso $\dim \mathcal{N}_{\mathcal{B}} = 1$, segue que $\mathcal{N}_{\mathcal{B}} = \text{span}\{\bar{L}_a\}$. Se $c \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ tal que $\bar{c} \in \ker \bar{L}_a$, então $\bar{L}_c \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$. No entanto, $\bar{c} \notin \ker \bar{L}_c$, caso contrário, $c^2 \in \mathcal{B}$, portanto, $\mathcal{B} \oplus \mathbb{F}c$ seria uma subálgebra de $\mathcal{A}$. Desse modo, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}} = \text{span}\{\bar{L}_a, \bar{L}_c\}$. Como consequência do Lema 8, existe uma base $\{m_1, m_2, m_3\}$ de $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ tal que $\bar{L}_a$ e $\bar{L}_c$ estão representadas pelas matrizes $J(\beta)$ e A . Sendo assim, $m_1 = \gamma c + x_1$ para algum $\gamma \neq 0$ e $x_1 \in \mathcal{B}$, é dizer, $m_2 = \gamma c^2 + x_2$, $m_3 = \gamma c^3 + x_3$ onde $x_2, x_3 \in \mathcal{B}$. Portanto, $\{\bar{c}, \bar{c}^2, \bar{c}^3\}$ é uma base para $\mathcal{A}/\mathcal{B}$.

Caso $\dim \mathcal{N}_{\mathcal{B}} = 2$, segue que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}} = \text{span}\{\bar{L}_a, \bar{L}_b\}$ já que $\bar{L}_{a^i} \equiv 0$ para cada $i \geq 2$. Como existe uma base na qual os operadores $\bar{L}_a, \bar{L}_b$ estão representados pelas matrizes $J(\beta)$ e A respectivamente, se $\bar{c} \in \ker \bar{L}_a$, então tem-se que $\{\bar{c}, \bar{bc}, \bar{bbc}\}$ é uma base para $\mathcal{A}/\mathcal{B}$. $\square$

Com o lema acima demonstrado, pode-se enunciar o resultado principal desta seção, e como consequência, mostra-se que caso existir uma subálgebra própria de $\mathcal{A}$ contendo estritamente a subálgebra M , segue que $\mathcal{A}$ é solúvel.

Teorema 8. *Seja $\mathcal{A}$ de dimensão $n \geq 9$ e nilíndice $n - 3$ sobre um corpo de característica zero. Caso existir uma subálgebra própria maximal $\mathcal{B}$ de codimensão 3 tal que $M \subsetneq \mathcal{B}$, então $\mathcal{B}$ é um ideal de $\mathcal{A}$, ou $\mathcal{B}^k$ é um ideal de $\mathcal{A}$ para cada $k \geq 3$.*

Demonstração. Suponha-se que $\mathcal{B}$ não é um ideal de $\mathcal{A}$. Como consequência do Lema 8, $\dim \mathcal{M}_{\mathcal{B}} = 2$. Analisaremos separadamente os casos $\dim \mathcal{N}_{\mathcal{B}} = 1$ e $\dim \mathcal{N}_{\mathcal{B}} = 2$.

Suponha agora que $\dim \mathcal{N}_{\mathcal{B}} = 1$. Pela demonstração do lema anterior existe um $c \in \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} = \mathcal{B} \oplus \text{span}\{c, c^2, c^3\}$, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}} = \text{span}\{\bar{L}_a, \bar{L}_c\}$ e em relação à base $\{\bar{c}, \bar{c}^2, \bar{c}^3\}$ de $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ temos que $\bar{L}_a$ e $\bar{L}_c$ estão representadas pelas matrizes $J(\beta)$ e A respectivamente. Podemos assumir, trocando a por $\beta^{-1}a$ se for necessário, que $\beta = 1$.

Do fato que $ac, a^2c \in \mathcal{B}$, segue do Lema 5, junto ao processo de indução que $a^i c \in \mathcal{B}^{i-1}$ para cada $i \geq 2$. Se $x = a$, $y = c^2$ na equação (2.1) tem-se que

$$a^3 c^2 + \underbrace{a(a^2 c^2)}_{\in \mathcal{B}^2} + 2 \underbrace{aa(ac^2)}_{\in \mathcal{B}^2} = 4a^2(ac^2),$$

dessa forma $a^3 c^2 \equiv 4a^2 c \pmod{\mathcal{B}^2}$. Se $x = c$, $y = a^2$, $z = a$ na equação (2.2) resulta que

$$a^2(ac^2) + 2 \underbrace{a^2 c(ac)}_{\in \mathcal{B}^3} + \underbrace{a(a^2 c^2)}_{\in \mathcal{B}^2} + 2 \underbrace{ca^2(ac)}_{\in \mathcal{B}^2} + 2 \underbrace{ac(a^2 c)}_{\in \mathcal{B}^2} + 2ca(a^2 c) + 2c(a^3 c) = 4a^3 c^2 + 8 \underbrace{(a^2 c)(ac)}_{\in \mathcal{B}^2}.$$

Portanto, $a^2 c + 2ca(a^2 c) + 2c(a^3 c) \equiv 4a^3 c^2 \pmod{\mathcal{B}^2}$, é dizer,

$$4a^3 c^2 \equiv 2c(a^3 c + aa^2 c) + a^2 c \equiv 2c(4a^2(ac) - 2aa(ac)) + a^2 c \pmod{\mathcal{B}^2},$$

mas $4a^2(ac) - 2aa(ac) \in \mathcal{B}^3$, desta forma, $c(4a^2(ac) - 2aa(ac)) \in \mathcal{B}^2$, consequentemente, deduz-se que $a^2 c \equiv 4a^3 c^2 \pmod{\mathcal{B}^2}$. Logo deve cumprir-se que

$$a^3 c^2, a^2 c \in \mathcal{B}^2.$$

Do fato que $a^i c \in \mathcal{B}^i$ para $i = 1, 2$, usando indução no Lema 5, conclui-se que $a^i c \in \mathcal{B}^i$ para cada $i \geq 1$. Como consequência do Lema 6, obtém-se que $a^i c \in \mathcal{B}^{i+1}$ para cada $i \geq 2$, logo

$$c\mathcal{B}^i \subset \mathcal{B}^{i+1} \quad \text{para cada } i \geq 2.$$

De outro lado, como $a^3 c^2 \in \mathcal{B}^2$, tem-se que $a^i c^2 \in \mathcal{B}^{i-1}$ para $i = 2, 3$, portanto, usando indução no Lema 5, conclui-se que $a^i c^2 \in \mathcal{B}^{i-1}$ para cada $i \geq 2$. Se $x = c$, $y = a^3$ na equação (2.1) tem-se

que

$$c^3a^3 + \underbrace{c(c^2a^3)}_{\in \mathcal{B}^3} + \underbrace{2cc(a^3c)}_{\in \mathcal{B}^6} = 4 \underbrace{c^2(a^3c)}_{\in \mathcal{B}^3},$$

é dizer, $a^3c^3 \in \mathcal{B}^3$. Ao fazer $x = a$, $y = c^3$ nessa mesma equação, obtém-se que $a^3c^3 + a(a^2c^3) + 2aa(ac^3) = 4a^2(ac^3)$, portanto,

$$ac \equiv 2a^2c^2 \pmod{\mathcal{B}^2}.$$

Se $x = a$, $y = c^2$ na equação (2.1) resulta que $a^3c^2 + a(a^2c^2) + 2aa(ac^2) = 4a^2(ac^2)$, por isto, $a^3c^2 + a(a^2c^2) + 2aac \equiv 0 \pmod{\mathcal{B}^3}$, logo

$$a^3c^2 + 5a(a^2c^2) \equiv 0 \pmod{\mathcal{B}^3}.$$

Se $x = c$, $y = a^2$, $z = a$ na equação (2.2), cumpre-se que

$$\underbrace{a^2(ac^2)}_{\in \mathcal{B}^3} + 2 \underbrace{a^2c(ac)}_{\in \mathcal{B}^3} + a(a^2c^2) + 2 \underbrace{ca^2(ac)}_{\in \mathcal{B}^4} + 2 \underbrace{ac(a^2c)}_{\in \mathcal{B}^5} + 2 \underbrace{ca(a^2c)}_{\in \mathcal{B}^5} + 2 \underbrace{c(a^3c)}_{\in \mathcal{B}^5} = 4a^3c^2 + 8 \underbrace{(a^2c)(ac)}_{\in \mathcal{B}^4},$$

dessa forma, $a(a^2c^2) \equiv 4a^3c^2 \pmod{\mathcal{B}^3}$, é dizer,

$$a^3c^2, a(a^2c^2), aac \in \mathcal{B}^3.$$

De outro lado, se $i \geq 3$ e $x = c$, $y = a^i$, $z = a$ na equação (2.2), tem-se que

$$\underbrace{a^i(ac^2)}_{\in \mathcal{B}^{i+1}} + 2 \underbrace{a^i c(ac)}_{\in \mathcal{B}^{i+1}} + a(a^i c^2) + 2 \underbrace{ca^i(ac)}_{\in \mathcal{B}^{i+2}} + 2 \underbrace{ac(a^i c)}_{\in \mathcal{B}^{i+3}} + 2 \underbrace{ca(a^i c)}_{\in \mathcal{B}^{i+3}} + 2 \underbrace{c(a^{i+1}c)}_{\in \mathcal{B}^{i+3}} = 4a^{i+1}c^2 + 8 \underbrace{(a^i c)(ac)}_{\in \mathcal{B}^{i+2}},$$

é dizer, $a(a^i c^2) \equiv 4a^{i+1}c^2 \pmod{\mathcal{B}^{i+1}}$, portanto, usando indução junto ao fato de que $a^3c^2 \in \mathcal{B}^3$, conclui-se que $a^{i+1}c^2 \in \mathcal{B}^{i+1}$ para cada $i \geq 2$. Como consequência do Lema 6, deve cumprir-se que $a^i c^2 \in \mathcal{B}^{i+1}$ para cada $i \geq 3$. Isto posto, significa que

$$c^2 \mathcal{B}^i \subset \mathcal{B}^{i+1} \quad \text{para todo } i \geq 3.$$

Finalmente, se $i \geq 3$, para $x = c$, $y = a^i$ na equação (2.1) obtém-se que $c^3a^i + c(c^2a^i) + 2cc(ca^i) = 4c^2(ca^i)$, é dizer, $a^i c^3 \in \mathcal{B}^{i+2}$, desse modo

$$c^3 \mathcal{B}^i \subset \mathcal{B}^{i+2} \quad \text{para cada } i \geq 3.$$

À vista disso, conclui-se que $c^k \mathcal{B}^i \subset \mathcal{B}^{i+1}$ para $k = 1, 2, 3$, portanto, $\mathcal{B}^i$ é um ideal de $\mathcal{A}$ para cada $i \geq 3$.

Suponha-se agora que $\dim \mathcal{N}_{\mathcal{B}} = 2$. Pelo lema anterior e sua demonstração, tem-se que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}} = \text{span}\{\bar{L}_a, \bar{L}_b\}$, alias, pode-se assumir sem perda de generalidade que $\bar{L}_a, \bar{L}_b$ estão representados, em relação à base $\{\bar{c}, \bar{bc}, \bar{b(bc)}\}$, para algum apropriado $c \in \mathcal{A}$, pelas matrizes $J(1)$ e A respetivamente.

Como $ac, a^2c \in \mathcal{B}$, segue por indução no Lema 5, que $a^i c \in \mathcal{B}^{i-1}$ para cada $i \geq 2$. Se $x = a$, $y = bc$ na equação (2.1), obtém-se que $a^3(bc) + aa^2(bc) + 2aaa(bc) = 4a^2a(bc)$, é dizer,

$$a^3(bc) \equiv 4a^2c \pmod{\mathcal{B}^2}.$$

Se $x = a$, $y = a^2$, $z = b$, $w = c$ na equação (2.4), resulta que

$$\underbrace{ac(a^2b) + ca(a^2b) + c(a^3b) + ab(a^2c) + b(a^3c) + ba(a^2c) + ca^2(ab) + aa^2(bc) + ba^2(ac)}_{\in \mathcal{B}^3} + \underbrace{a^2c(ab)}_{\in \mathcal{B}^3} + \underbrace{a^2a(bc)}_{\in \mathcal{B}^3} + \underbrace{a^2b(ac)}_{\in \mathcal{B}^4} = \underbrace{4(a^2b)(ac)}_{\in \mathcal{B}^4} + \underbrace{4(a^2c)(ab)}_{\in \mathcal{B}^3} + \underbrace{4a^3(bc)}_{\in \mathcal{B}^4},$$

portanto, $a^2c \equiv 4a^3(bc) \pmod{\mathcal{B}^2}$, é dizer,

$$a^2c, a^3(bc) \in \mathcal{B}^2.$$

Como $a^i c \in \mathcal{B}^i$ para $i = 1, 2$, então usando indução no Lema 5 obtém-se que $a^i c \in \mathcal{B}^i$ para cada $i \geq 1$. Como consequência do Lema 6, conclui-se que $a^i c \in \mathcal{B}^{i+1}$ para cada $i \geq 2$, é dizer,

$$c\mathcal{B}^i \subset \mathcal{B}^{i+1} \quad \text{para cada } i \geq 2.$$

Como $a^i(bc) \in \mathcal{B}^{i-1}$ para $i = 2, 3$, segue por indução no Lema 5 que $a^i(bc) \in \mathcal{B}^{i-1}$ para cada $i \geq 2$. Se $i \geq 2$ e $x = b$, $y = a^i$, $z = c$ na equação (2.2), obtém-se que

$$\underbrace{a^i(b^2c)}_{\in \mathcal{B}^{i+3}} + \underbrace{2a^ib(bc)}_{\in \mathcal{B}^{i+3}} + \underbrace{c(a^ib^2)}_{\in \mathcal{B}^{i+3}} + \underbrace{2ba^i(bc)}_{\in \mathcal{B}^i} + \underbrace{2cb(a^ib)}_{\in \mathcal{B}^{i+3}} + \underbrace{2bc(a^ib)}_{\in \mathcal{B}^{i+3}} + \underbrace{2bb(a^ic)}_{\in \mathcal{B}^{i+3}} = \underbrace{4b^2(a^ic)}_{\in \mathcal{B}^{i+3}} + \underbrace{8(a^ib)(bc)}_{\in \mathcal{B}^i}.$$

Dessa forma tem-se que $a^ib(bc) \in \mathcal{B}^i$, e como consequência do Lema 6, cumpre-se que $a^ib(bc) \in \mathcal{B}^{i+1}$ para cada $i \geq 2$. Por conseguinte, segue que

$$(bbc)\mathcal{B}^i \subset \mathcal{B}^{i+1} \quad \text{para cada } i \geq 2.$$

De outro lado, se $x = a$, $y = b$, $z = c$ na equação (2.2) obtém-se que

$$\underbrace{b(a^2c)}_{\in \mathcal{B}^4} + \underbrace{2ba(ac)}_{\in \mathcal{B}^3} + \underbrace{c(a^2b)}_{\in \mathcal{B}^4} + \underbrace{2ab(ac)}_{\in \mathcal{B}^3} + \underbrace{2ca(ab)}_{\in \mathcal{B}^4} + \underbrace{2ac(ab)}_{\in \mathcal{B}^4} + \underbrace{2aa(bc)}_{\in \mathcal{B}^3} = \underbrace{4a^2(bc)}_{\in \mathcal{B}^3} + \underbrace{8(ab)(ac)}_{\in \mathcal{B}^3},$$

é dizer,

$$ac \equiv 2a^2(bc) \pmod{\mathcal{B}^2}.$$

Se $x = a$, $y = bc$ na equação (2.1) segue que $a^3(bc) + aa^2(bc) + 2aaa(bc) = 4a^2a(bc)$, portanto, $0 \equiv a^3(bc) + aa^2(bc) + 2a(ac) \equiv a^3(bc) + 5aa^2(bc) \pmod{\mathcal{B}^3}$. Se $x = a$, $y = a^2$, $z = b$, $w = c$ na equação (2.4), resulta que

$$\underbrace{ac(a^2b) + ca(a^2b) + c(a^3b) + ab(a^2c) + b(a^3c) + ba(a^2c) + ca^2(ab) + aa^2(bc) + ba^2(ac)}_{\in \mathcal{B}^5} + \underbrace{a^2c(ab)}_{\in \mathcal{B}^5} + \underbrace{a^2a(bc)}_{\in \mathcal{B}^3} + \underbrace{a^2b(ac)}_{\in \mathcal{B}^4} = \underbrace{4(a^2b)(ac)}_{\in \mathcal{B}^4} + \underbrace{4(a^2c)(ab)}_{\in \mathcal{B}^5} + \underbrace{4a^3(bc)}_{\in \mathcal{B}^4}.$$

Portanto, $aa^2(bc) \equiv 4a^3(bc) \pmod{\mathcal{B}^3}$, concluindo que

$$aa^2(bc), a^3(bc), a(ac) \in \mathcal{B}^3.$$

Finalmente, se $i \geq 3$ e $x = a$, $y = a^i$, $z = b$, $w = c$ na equação (2.4), obtém-se que

$$\underbrace{ac(a^ib) + ca(a^ib) + c(a^{i+1}b) + ab(a^ic) + b(a^{i+1}c) + ba(a^ic) + ca^i(ab) + aa^i(bc) + ba^i(ac)}_{\in \mathcal{B}^{i+3}} + \underbrace{a^ic(ab)}_{\in \mathcal{B}^{i+3}} + \underbrace{a^ia(bc)}_{\in \mathcal{B}^{i+1}} + \underbrace{a^ib(ac)}_{\in \mathcal{B}^{i+2}} = \underbrace{4(a^ib)(ac)}_{\in \mathcal{B}^{i+2}} + \underbrace{4(a^ic)(ab)}_{\in \mathcal{B}^{i+3}} + \underbrace{4a^{i+1}(bc)}_{\in \mathcal{B}^{i+2}},$$

é dizer, $aa^i(bc) \equiv 4a^{i+1}(bc) \pmod{\mathcal{B}^{i+1}}$. Como $a^3(bc) \in \mathcal{B}^3$, segue por indução que $a^{i+1}(bc) \in \mathcal{B}^{i+1}$ para cada $i \geq 2$, portanto, $a^i(bc) \in \mathcal{B}^{i+1}$ para cada $i \geq 3$. Desse modo, conclui-se que

$$(bc)\mathcal{B}^i \subset \mathcal{B}^{i+1} \quad \text{para cada } i \geq 3.$$

Por conseguinte, tem-se provado que $c\mathcal{B}^i, (bc)\mathcal{B}^i, b(bc)\mathcal{B}^i \subset \mathcal{B}^{i+1}$, é dizer, $\mathcal{B}^i$ é um ideal de $\mathcal{A}$ para cada $i \geq 3$. $\square$

Corolário 1. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de dimensão $n \geq 9$ e nilíndice $n - 3$. Caso existir uma subálgebra própria $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ tal que $M \subsetneq \mathcal{B}$, então $\mathcal{A}$ é solúvel.*

Com o corolário anterior, dá-se por concluída a seção.

2.2 Solubilidade das álgebras de dimensão n e nilíndice $n - 3$.

Com os resultados obtidos até agora, tem-se provado que se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de dimensão n e nilíndice $n - 3$ sobre um corpo de característica zero, e possui uma subálgebra de codimensão 1, 2 ou 3 contendo a subálgebra M , então $\mathcal{A}$ é solúvel. Nesta seção quer-se provar a solubilidade em geral deste tipo de álgebras, demonstrando que sempre existe uma subálgebra que satisfaz as condições acima descritas. Para provar este fato, é necessário do seguinte teorema, que classifica, a menos de conjugação, os subespaços lineares maximais formado por matrizes nilpotentes de $\mathcal{M}(4, \mathbb{C})$. No teorema, $E_{i,j}$ representa a matriz de $\mathcal{M}(4, \mathbb{C})$ com 1 na entrada (i, j) e 0 nas outras entradas da matriz.

Teorema 9. *[Fas97, Prop. 4] Cada subespaço linear de matrizes nilpotente maximal de $\mathcal{M}(4, \mathbb{C})$ é conjugado para um dos seguintes subespaços:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_1 &= \text{span}\{E_{1,2}, E_{1,3}, E_{1,4}, E_{2,3}, E_{2,4}, E_{3,4}\}; \\ \mathfrak{C}_2 &= \text{span}\{E_{1,2} + E_{2,3}, E_{2,1} - E_{3,2}, E_{4,1}, E_{4,2}, E_{4,3}\}; \\ \mathfrak{C}_3 &= \text{span}\{E_{1,2} + E_{2,3}, E_{2,1} - E_{3,2}, E_{1,4}, E_{2,4}, E_{3,4}\}; \\ \mathfrak{C}_4 &= \text{span}\{E_{1,2} + E_{3,4}, E_{3,1} - E_{4,2}, E_{2,3}\}; \\ \mathfrak{C}_5 &= \text{span}\{E_{1,2} + E_{2,3} + E_{3,4}, E_{2,1} - E_{3,2}, E_{3,1} - E_{4,2}\}; \\ \mathfrak{C}_6 &= \text{span}\{E_{1,2} + E_{2,4} + E_{3,4}, E_{1,2} + E_{2,3} + E_{3,4}, E_{2,1} + E_{3,1} - E_{3,2} - E_{4,2}\}. \end{aligned}$$

Como consequência do Lema 5, se $v \in \ker L_a \cap \ker L_{a^2}$, então v pertence ao núcleo do operador L_{a^k} para cada $k \geq 1$. As seguintes identidades de operadores serão uteis no teorema principal.

$$L_{a^3} = 4L_{a^2}L - L_aL_{a^2} - 2L_a^3, \quad (2.5)$$

e

$$L_{a^4} = L_{a^2}^2 - \frac{2}{3}(2L_a^2L_{a^2} + 2L_aL_{a^2}L_a + 2L_{a^2}L_a^2) + \frac{2}{3}(4L_{a^3}L_a - L_aL_{a^3}). \quad (2.6)$$

Com o último teorema, tem-se as ferramentas para demonstrar o teorema principal deste capítulo, e desse modo, estender os resultados obtidos até agora referentes ao problema de Albert.

Teorema 10. *Seja $\mathcal{A}$ de dimensão $n \geq 9$ e nilíndice $n - 3$ sobre $\mathbb{C}$. Se M não é um ideal de $\mathcal{A}$, então existe uma subálgebra própria $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ contendo propriamente M .*

Demonstração. Observe que ao manter fixa uma base para o espaço vetorial $\mathcal{A}/M$, o conjunto de matrizes associadas aos operadores de $\mathcal{M}_M$ forma um subespaço vetorial das matrizes nilpotentes de $\mathcal{M}(4, \mathbb{C})$. Como consequência do teorema anterior, existe uma base adequada de $\mathcal{A}/M$ tal que esse subespaço está contido em algum dos 6 subespaços maximais descritos acima. Desta forma, abusando da notação, vai ser dito que $\mathcal{M}_M \subset \mathfrak{C}_i$ para algum $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. A demonstração do teorema será abordada por etapas, segundo o subespaço $\mathcal{M}_M$ este contido em algum destes

subespaços. Seja $\{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3, \bar{\omega}_4\}$ base de $\mathcal{A}/M$ tal que $\mathcal{M}_M \subset \mathfrak{C}_i$.

Dado que M não é um ideal de $\mathcal{A}$, segue que $\dim \mathcal{N}_M \geq 1$, portanto, pode-se supor que $\bar{L}_a \neq 0$, já que caso contrario, existe algum i tal que $\bar{L}_{a^i} \neq 0$. Ao trocar a por $a + a^i$, elemento que também é de índice maximal e gera M , obtém-se o resultado desejado.

Caso $\mathcal{M}_M \subset \mathfrak{C}_1$, então $\bar{\omega}_1 \in \ker \bar{L}_{a^i}$ para cada $i \geq 1$, é por isto que $\bar{L}_{\omega_1} \in \mathcal{M}_M$, desta forma, tem-se que $\omega_1^2 \in M$, concluindo que $M \oplus \mathbb{C}\omega_1$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$. Se $\mathcal{M}_M \subset \mathfrak{C}_2$, um processo análogo ao feito para o caso $\mathfrak{C}_1$, mas com o vetor ω_4 mostra que $\mathcal{A}$ possui uma subálgebra de codimensão 3 contendo M , a dizer, a subálgebra $M \oplus \mathbb{C}\omega_4$.

Desse modo, resta por analisar os casos em que $\mathcal{M}_M \subset \mathfrak{C}_i$ para $i = 3, 4, 5, 6$.

Passo 1: $\mathcal{M}_M \subset \mathfrak{C}_3$. Nós temos que

$$\mathcal{M}_M \subset \mathfrak{C}_3 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 & \gamma_1 \\ \alpha & 0 & \beta & \gamma_2 \\ 0 & -\alpha & 0 & \gamma_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Esse tipo de matrizes serão denotadas por $M_3(\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Observamos que ao trocar para a base $\{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3 - \tau\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_4\}$, a matriz que representa um operador muda para $M_3(\alpha, \beta - \tau\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathfrak{C}_3$.

Suponha-se que os operadores $\bar{L}_a$ e $\bar{L}_{a^2}$ estão representados pelas matrizes $M_3(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ e $M_3(\alpha_2, \beta_2, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ respetivamente. Tem-se que $\bar{L}_{a^3} \in \mathfrak{C}_3$, e como consequência da equação (2.5) está representado pela seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} 4\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 & 0 & 3\beta_1\beta_2 & -2\alpha_1\beta_1\gamma_1 + 4\beta_2\gamma_2 - \beta_1(2\beta_1\gamma_3 + \tau_2) \\ 0 & 5(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2) & 0 & 4\alpha_2\gamma_1 + 4\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\tau_1 - \beta_1\tau_3 \\ -3\alpha_1\alpha_2 & 0 & -4\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 & 2\alpha_1^2\gamma_1 + 4\alpha_2\gamma_2 + \alpha_1(2\beta_1\gamma_3 + \tau_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como as entradas $(1, 2)$, $(2, 1)$ da matriz acima são 0, então esta matriz é da forma $M_3(0, 0, 0, *, *)$. Portanto, todas as entradas (i, j) , com $j < 4$ são 0. Isto significa que $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3 \in \ker \bar{L}_{a^3}$ e devem-se satisfazer as seguintes igualdades:

$$0 = \alpha_1\beta_2 = \alpha_2\beta_1 = \alpha_1\alpha_2 = \beta_1\beta_2.$$

Caso 1: $\alpha_1 = \beta_1 = 0$. Da relação (2.6), temos que o operador $\bar{L}_{a^4}$ esta representado pela matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha_2\beta_2 & 0 & \beta_2^2 & \beta_2\tau_2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2\tau_1 + \beta_2\tau_3 \\ -\alpha_2^2 & 0 & -\alpha_2\beta_2 & -\alpha_2\tau_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz está em $\mathfrak{C}_3$. Portanto $\alpha_2 = \beta_2 = 0$, logo $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3 \in \ker \bar{L}_{a^4}$. Assim, cumpre-se que $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3 \in \ker \bar{L}_{a^i}$ para cada $i \geq 1$, é dizer, $\bar{L}_{\omega_1}, \bar{L}_{\omega_2}, \bar{L}_{\omega_3} \in \mathcal{M}_M$. Pode-se provar agora facilmente que $M \oplus \text{span}\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$.

Caso 2: $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 \neq 0$. Como $\beta_1 \neq 0$, então deve satisfazer-se que $\alpha_2 = \beta_2 = 0$. Sem perda da generalidade, pode-se supor que $\beta_1 = 1$, portanto, $\bar{L}_a, \bar{L}_{a^2}$ estão representadas pelas matrizes $M_3(0, 1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ e $M_3(0, 0, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ respetivamente. Desta forma, $\bar{\omega}_1 \in \ker \bar{L}_a$ e por Lema 5 podemos obter facilmente que $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_2 \in \ker \bar{L}_{a^i}$ para cada $i \geq 1$. Assim, $\bar{L}_{\omega_1} \in \mathcal{M}_M$. Suponha-se

que $\bar{L}_{\omega_1}$ está representada pela matriz $M_3(\alpha, \beta, \delta_1, \delta_2, \delta_3)$.

Caso $\alpha = 0$, então $\omega_1^2 \in M$, portanto, $M \oplus \mathbb{C}\omega_1$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$. Caso $\alpha \neq 0$, então $\omega_1^2 \equiv \alpha\omega_2$, $\omega_1^3 \equiv \alpha\beta\omega_1 - \alpha^2\omega_3$, $\omega_1^4 \equiv 0 \pmod{M}$. Além disso, tem-se que $\omega_1 M \subset M$, $\omega_1^2 M = \omega_2 M \subset M \oplus \mathbb{C}\omega_1$ e $\omega_1^3 M = (\beta\omega_1 - \alpha\omega_3)M \subset M \oplus \mathbb{C}\omega_1^2$, é dizer, $M \oplus \text{span}\{\omega_1, \omega_1^2, \omega_1^3\}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$.

Caso 3: $\alpha_1 \neq 0$. Com esta condição deve satisfazer-se que $\alpha_2 = \beta_2 = 0$, portanto, $\bar{L}_a, \bar{L}_{a^2}$ estão representadas pelas matrizes $M_3(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ e $M_3(0, 0, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ respectivamente. Ao fazer mudança de base para $\{\bar{v}_1 = \bar{\omega}_1, \bar{v}_2 = \bar{\omega}_2, \bar{v}_3 = \bar{\omega}_3 - \beta_1/\alpha_1\bar{\omega}_1, \bar{v}_4 = \bar{\omega}_4\}$, obtém-se que as matrizes que representam os operadores $\bar{L}_a, \bar{L}_{a^2}$ nessa nova base são $M_3(\alpha_1, 0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ e $M_3(0, 0, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ respectivamente, portanto, $\bar{v}_3 \in \ker \bar{L}_{a^i}$ para cada $i \geq 1$ e $\bar{L}_{v_3} \in \mathcal{M}_M$. Seja $M_3(\alpha, \beta, \delta_1, \delta_2, \delta_3)$ a matriz que representa $\bar{L}_{v_3}$ em relação à nova base.

Caso $\beta = 0$, obtém-se que $v_3^2 \in M$, portanto, $M \oplus \mathbb{C}v_3$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$. Se $\beta \neq 0$, então $v_3^2 \equiv \beta v_2$, $v_3^3 \equiv \beta^2 v_1 - \alpha\beta v_3$, $v_3^4 \equiv 0 \pmod{M}$. Além disso, $v_3 M \subset M$, $v_3^2 M = v_2 M \subset M \oplus \mathbb{C}v_3$, e $v_3^3 M = (\beta v_1 - \alpha v_3)M \subset M \oplus \mathbb{C}v_3^2$, portanto, conclui-se que $M \oplus \text{span}\{v_3, v_3^2, v_3^3\}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$.

Dessa forma, dá-se por finalizado o caso $\mathcal{M}_M \subset \mathfrak{C}_3$, no qual satisfaz que $\mathcal{A}$ possui uma subálgebra própria contendo M de codimensão 1 ou 3.

Passo 2: $\mathcal{M}_M \subset \mathfrak{C}_4$.

$$\text{Caso } \mathcal{M}_M \subset \mathfrak{C}_4 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \beta \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C} \right\}.$$

Esse tipo de matrizes serão denotadas por $M_4(\alpha, \beta, \gamma)$. Enxergue que ao mudar para a base $\{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3, \bar{\omega}_4 - \tau\bar{\omega}_1\}$, ou para $\{\bar{\omega}_1 - \rho\bar{\omega}_4, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3, \bar{\omega}_4\}$, a representação matricial do operador muda para $M_4(\alpha, \beta - \tau\alpha, \gamma)$ ou para $M_4(\alpha - \rho\beta, \beta, \gamma)$ respectivamente. Suponha-se que os operadores $\bar{L}_a$ e $\bar{L}_{a^2}$ estão representados pelas matrizes $M_4(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ e $M_4(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ respectivamente. Como consequência da equação (2.5), obtém-se que $\bar{L}_{a^3}$ está representado pela matriz

$$\begin{pmatrix} -2\alpha_1\beta_1\gamma_1 & 0 & 4\beta_2\gamma_1 - \beta_1\gamma_2 & -2\beta_1^2\gamma_1 \\ 4\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1 & 0 & 0 & 4\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 \\ 0 & 5(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2) & 0 & 0 \\ 2\alpha_1^2\gamma_1 & 0 & \alpha_1\gamma_2 - 4\alpha_2\gamma_1 & 2\alpha_1\beta_1\gamma_1 \end{pmatrix}.$$

Como $\bar{L}_{a^3} \in \mathcal{M}_M$ e as entradas $(1, 2)$, $(3, 1)$ e $(2, 3)$ da matriz acima são 0, segue que esta matriz é nula. Assim, $\bar{L}_{a^3} \equiv 0$ e tem-se as identidades

$$0 = \alpha_1\gamma_1 = \beta_1\gamma_1 = \alpha_1\gamma_2 = \alpha_2\gamma_1 = \beta_1\gamma_2 = \beta_2\gamma_1$$

e

$$\alpha_2\beta_1 = \alpha_1\beta_2.$$

Caso 1: $\gamma_1 \neq 0$. Com esta condição cumpre-se que $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = 0$, portanto, $\bar{L}_a, \bar{L}_{a^2}$ estão representadas pelas matrizes $M_4(0, 0, \gamma_1)$ e $M_4(0, 0, \gamma_2)$ respectivamente, logo $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_4 \in \ker \bar{L}_{a^i}$ para cada $i \geq 1$. Desta forma, $\bar{L}_{\omega_1}, \bar{L}_{\omega_2}, \bar{L}_{\omega_4} \in \mathcal{M}_M$. Se $\bar{L}_{\omega_2}$ está representado pela matriz $M_4(\alpha, \beta, \gamma)$, caso $\alpha = \beta = 0$, então $\omega_2^2 \in M$, concluindo que $M \oplus \mathbb{C}\omega_2$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$. Caso contrario, tem-se que $\omega_2^2 \equiv \beta\omega_1 - \alpha\omega_4$, $\omega_2^3 \equiv 0 \pmod{M}$. Além disso, $\omega_2 M \subset M$, $\omega_2^2 M = (\beta\omega_1 - \alpha\omega_4)M \subset M$, portanto, conclui-se que $M \oplus \text{span}\{\omega_2, \omega_2^2\}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$.

Caso 2: $\gamma_1 = 0$. Isto posto, resulta que $\alpha_1\gamma_2 = \beta_1\gamma_2 = 0$ e $\alpha_2\beta_1 = \alpha_1\beta_2$. Caso se tiver $\gamma_2 \neq 0$, então $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, é dizer, $\bar{L}_a \equiv 0$, o qual é um absurdo, desta forma tem-se que $\gamma_2 = 0$. Da condição $\alpha_2\beta_1 = \alpha_1\beta_2$ obtém-se que $\bar{L}_{a^2} = \lambda\bar{L}_a$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$.

Caso se tiver $\alpha_1 \neq 0$, então ao mudar a base inicial para a base $\{\bar{v}_1 = \bar{\omega}_1, \bar{v}_2 = \bar{\omega}_2, \bar{v}_3 = \bar{\omega}_3, \bar{v}_4 = \bar{\omega}_4 - \beta_1/\alpha_1\bar{\omega}_1\}$, $\bar{L}_a$ está representada pela matriz $M_4(\alpha_1, 0, 0)$, portanto, $\bar{v}_3, \bar{v}_4 \in \ker \bar{L}_{a^i}$ para cada $i \geq 1$, é dizer, $\bar{L}_{v_3}, \bar{L}_{v_4} \in \mathcal{M}_M$. Sejam as representações matriciais de $\bar{L}_{v_3}, \bar{L}_{v_4}$ as matrizes $M_4(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ e $M_4(\alpha_4, \beta_4, \gamma_4)$ respetivamente. Caso se tiver $\gamma_3\beta_4 = 0$, então $M \oplus \mathbb{C}v_3$ ou $M \oplus \mathbb{C}v_4$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$. Suponha-se que $\gamma_3\beta_4 \neq 0$, então do fato que $\bar{L}_{v_3}(\bar{v}_4) = \bar{L}_{v_4}(\bar{v}_3)$, segue que $\beta_3 = \gamma_4 = 0$. De outro lado, $v_4^2 \equiv \beta_4v_3, v_4^3 \equiv 0 \pmod{M}$. Além disso, $v_4M \subset M, v_4^2M = v_3M \subset M$, portanto, conclui-se que $M \oplus \text{span}\{v_4, v_4^2\}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$.

Caso se tiver $\beta_1 \neq 0$, então ao mudar para a base $\{\bar{v}_1 = \bar{\omega}_1 - \alpha_1/\beta_1\bar{\omega}_4, \bar{v}_2 = \bar{\omega}_2, \bar{v}_3 = \bar{\omega}_3, \bar{v}_4 = \bar{\omega}_4\}$, obtém-se que $\bar{L}_a$ está representado pela matriz $M_4(0, \beta_1, 0)$, portanto, $\bar{v}_1, \bar{v}_3 \in \ker \bar{L}_{a^i}$ para cada $i \geq 1$, é dizer, $\bar{L}_{v_1}, \bar{L}_{v_3} \in \mathcal{M}_M$. Se $\bar{L}_{v_1}, \bar{L}_{v_3}$ estão representados pelas matrizes $M_4(\alpha, \beta, \gamma)$ e $M_4(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ respetivamente, então caso se tiver $\alpha\gamma_3 = 0$, $M \oplus \mathbb{C}v_1$ ou $M \oplus \mathbb{C}v_3$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$. Suponha-se que $\alpha\gamma_3 \neq 0$. Do fato que $\bar{L}_{v_1}(\bar{v}_3) = \bar{L}_{v_3}(\bar{v}_1)$ segue que $\gamma = \alpha_3 = 0$. De outro lado, $v_1^2 \equiv \alpha v_3, v_1^3 \equiv 0 \pmod{M}$. Além disso, $v_1M \subset M, v_1^2M = v_3M \subset M$, é dizer, $M \oplus \text{span}\{v_1, v_1^2\}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$.

Dessa forma, dá-se por concluído o caso $\mathcal{M}_M \subset \mathfrak{C}_4$, pois foi provado que nessas condições, existe uma subálgebra própria contendo M de codimensão 2 ou 3.

Passo 3: $\mathcal{M}_M \subset \mathfrak{C}_5$.

$$\text{Dessa forma, } \mathcal{M}_M \subset \mathfrak{C}_5 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & \beta & 0 \\ \gamma & -\alpha & 0 & \beta \\ 0 & -\gamma & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C} \right\}.$$

Esse tipo de matrizes serão denotadas por $M_5(\alpha, \beta, \gamma)$. Suponha-se que os operadores $\bar{L}_a$ e $\bar{L}_{a^2}$ estão representados pelas matrizes $M_5(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ e $M_5(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ respetivamente. Como consequência da equação (2.5), obtém-se que $\bar{L}_{a^3}$ está representado pela matriz

$$\begin{pmatrix} -2\alpha_2\beta_1 + 4\alpha_1\beta_2 - 2\beta_1^2\gamma_1 & 0 & 3\beta_1\beta_2 & -3\beta_1^2\gamma_1 \\ 4\beta_2\gamma_1 - \beta_1\gamma_2 & 5(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2) & 0 & 3\beta_1\beta_2 \\ \alpha_1(2\beta_1\gamma_1 - 3\alpha_2) & -5(\beta_2\gamma_1 - \beta_1\gamma_2) & \alpha_1\beta_2 - 4\alpha_2\beta_1 & 2\alpha_1\beta_1^2\gamma_1 \\ \alpha_2\gamma_1 + 2\beta_1\gamma_1^2 - 4\alpha_1\gamma_2 & 0 & \beta_2\gamma_1 - 4\beta_1\gamma_2 & 2\beta_1^2\gamma_1 \end{pmatrix}.$$

Como $\bar{L}_{a^3} \in \mathfrak{C}_5$, sua entrada $(1, 4)$ é 0 logo $\beta_1 = 0$. Ao substituir β_1 por 0 na matriz acima segue

$$\begin{pmatrix} 4\alpha_1\beta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 4\beta_2\gamma_1 & -5\alpha_1\beta_2 & 0 & 0 \\ -3\alpha_1\alpha_2 & -5\beta_2\gamma_1 & \alpha_1\beta_2 & 0 \\ \alpha_2\gamma_1 - 4\alpha_1\gamma_2 & 0 & \beta_2\gamma_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

É fácil observar que esta matriz está em $\mathfrak{C}_5$ se e somente se a matriz for a matriz nula, e isto é equivalente as seguintes relações para os coeficientes

$$\alpha_1\beta_2 = \beta_2\gamma_1 = \alpha_1\alpha_2 = 0, \quad \alpha_2\gamma_1 = 4\alpha_1\gamma_2.$$

Caso se tiver $\beta_2 \neq 0$, resulta que $\alpha_1 = \gamma_1 = 0$, é dizer, $\bar{L}_a \equiv 0$, o qual está em cotradução com nossa hipótese. Portanto, $\beta_2 = 0$. De outro lado, pela equação (2.6) obtém-se que a matriz que representa

o operador $\bar{L}_{a^4}$ é

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2\gamma_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

logo $\bar{L}_{a^4} \equiv 0$, por isso, $\alpha_2 = 0$. É dizer, tem-se as condições $\beta_1 = \beta_2 = \alpha_2 = 0$ e $\alpha_1\gamma_2 = 0$. Consequentemente, resulta que $\bar{\omega}_3, \bar{\omega}_4 \in \ker \bar{L}_{a^i}$ para cada $i \geq 1$, portanto, $\bar{L}_{\omega_3}, \bar{L}_{\omega_4} \in \mathcal{M}_M$. Se $\bar{L}_{\omega_3}, \bar{L}_{\omega_4}$ estão representadas pelas matrizes $M_5(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ e $M_5(\alpha_4, \beta_4, \gamma_4)$ respetivamente, da igualdade $\bar{L}_{\omega_3}(\bar{\omega}_4) = \bar{L}_{\omega_4}(\bar{\omega}_3)$, segue que $\beta_3\bar{\omega}_4 = \beta_4\bar{\omega}_3$ e portanto $\beta_3 = \beta_4 = 0$. Assim, $M \oplus \mathbb{C}\omega_3$ e $M \oplus \mathbb{C}\omega_4$ são subálgebras de $\mathcal{A}$.

Dessa forma, da-se por concluído o caso $\mathcal{M}_M \subset \mathfrak{C}_5$, provando que sempre existe uma subálgebra própria de $\mathcal{A}$ contendo M de codimensão 3.

Passo 4: $\mathcal{M}_M \subset \mathfrak{C}_6$.

$$\text{Caso } \mathcal{M}_M \subset \mathfrak{C}_6 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \beta + \gamma & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & \gamma & \beta \\ \alpha & -\alpha & 0 & \beta + \gamma \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C} \right\}.$$

Esse tipo de matrizes serão denotadas por $M_6(\alpha, \beta, \gamma)$. Observe que ao fazer a mudança de base para $\{\bar{v}_1 = \bar{\omega}_1, \bar{v}_2 = \bar{\omega}_2, \bar{v}_3 = \bar{\omega}_3, \bar{v}_4 = \bar{\omega}_4 - \tau\bar{\omega}_1\}$ a representação matricial muda para $M_6(\alpha, \beta - \tau\alpha, \gamma)$, desse modo, este cambio de base não altera a forma da representação matricial, no sentido que continua sendo uma matriz da classe $\mathfrak{C}_6$. Suponha-se que os operadores $\bar{L}_a$ e $\bar{L}_{a^2}$ estão representados pelas matrizes $M_6(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ e $M_6(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ respetivamente. Como consequência da equação (2.5), segue que $\bar{L}_{a^3}$ está representado pela matriz

$$\begin{pmatrix} -(\alpha_2 + 2\alpha_1\gamma_1)(\beta_1 + \gamma_1) + 4\alpha_1(\beta_2 + \gamma_2) & 0 & 4\beta_2\gamma_1 - \beta_1\gamma_2 + 3\gamma_1\gamma_2 & -\beta_2(\beta_1 + \gamma_1) - 2\gamma_1(\beta_1 + \gamma_1)^2 + 4\beta_1(\beta_2 + \gamma_2) \\ 4\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1 & 5(\alpha_2(\beta_1 + \gamma_1) - \alpha_1(\beta_2 + \gamma_2)) & 0 & -\beta_2\gamma_1 + 4\beta_1\gamma_2 + 3\gamma_1\gamma_2 \\ \alpha_1(2\alpha_1\gamma_1 - 3\alpha_2) & 5(\alpha_2(\beta_1 + \gamma_1) - \alpha_1(\beta_2 + \gamma_2)) & -4\alpha_2\gamma_1 + \alpha_1\gamma_2 & -4\alpha_2\beta_1 + \alpha_1(\beta_2 + 2\gamma_1(\beta_1 + \gamma_1)) \\ \alpha_1(2\alpha_1\gamma_1 - 3\alpha_2) & 0 & -4\alpha_2\gamma_1 + \alpha_1\gamma_2 & -4\alpha_2\beta_1 + \alpha_1(\beta_2 + 2\gamma_1(\beta_1 + \gamma_1)) \end{pmatrix}.$$

Como $\bar{L}_{a^3} \in \mathfrak{C}_6$ e as entradas (1, 2), (2, 3) e (4, 2) são 0 segue que $\bar{L}_{a^3} \equiv 0$, portanto, obtém-se as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1\gamma_2 = \alpha_2\gamma_1 \\ 0 &= \alpha_1(2\alpha_1\gamma_1 - 3\alpha_2) \\ 0 &= \alpha_2(\beta_1 + \gamma_1) - \alpha_1(\beta_2 + \gamma_2) \\ 0 &= 4\beta_2\gamma_1 - \beta_1\gamma_2 + 3\gamma_1\gamma_2 \\ 0 &= 4\alpha_1(\beta_2 + \gamma_2) - (2\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \gamma_1) \\ 0 &= 4\beta_1(\beta_2 + \gamma_2) - 2\gamma_1(\beta_1 + \gamma_1)^2 - \beta_2(\beta_1 + \gamma_1) \\ 0 &= -\beta_2\gamma_1 + 4\beta_1\gamma_2 + 3\gamma_1\gamma_2 \\ 0 &= 4\alpha_2\beta_1 + \alpha_1(\beta_2 + 2\gamma_1(\beta_1 + \gamma_1)). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Caso 1: $\alpha_1 \neq 0$. Resulta que $\gamma_2 = 0$, e $0 = 2\alpha_1\gamma_1 - 3\alpha_2$. Multiplicando esta última relação por α_2 obtemos que $-3\alpha_2^2$ já que $\alpha_2\gamma_1 = 0$. Portanto, $\alpha_2 = 0$ e também $\gamma_1 = 0$. De outro lado, como $0 = \alpha_1(\beta_2 + \gamma_2) = \alpha_1\beta_2$, então $\beta_2 = 0$. À vista disso, $\bar{L}_a$ está representado pela matriz $M_6(\alpha_1, \beta_1, 0)$, e $\bar{L}_{a^i} \equiv 0$ para cada $i \geq 2$. Ao fazer a mudança de base para $\{\bar{v}_1 = \bar{\omega}_1, \bar{v}_2 = \bar{\omega}_2, \bar{v}_3 = \bar{\omega}_3, \bar{v}_4 = \bar{\omega}_4 - \frac{\beta_1}{\alpha_1}\bar{\omega}_1\}$, cumpre-se que $\bar{L}_a$ está representado pela matriz $M_6(\alpha_1, 0, 0)$ e $\bar{L}_{a^i} \equiv 0$ para cada $i \geq 2$. Sendo assim, $\bar{v}_3, \bar{v}_4 \in \ker \bar{L}_{a^i}$ para cada $i \geq 1$, desse modo, $\bar{L}_{v_3}, \bar{L}_{v_4} \in \mathcal{M}_M$. Sejam $M_6(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ e $M_6(\alpha_4, \beta_4, \gamma_4)$ as representações de $\bar{L}_{v_3}, \bar{L}_{v_4}$ respetivamente. Da igualdade $\bar{L}_{v_3}(\bar{v}_4) = \bar{L}_{v_4}(\bar{v}_3)$ segue que $\beta_3 = \gamma_4$ e $\beta_3 + \gamma_3 = 0$, é dizer, $\bar{L}_{v_3}, \bar{L}_{v_4}$ estão representadas por $M_6(\alpha_3, -\gamma_3, \gamma_3)$ e $M_6(\alpha_4, \beta_4, -\gamma_3)$ respetivamente. Ao trocar de representante de

v_2 por $v_2 + c/\gamma_3$, sem perda da generalidade, pode ser assumido que $v_3^2 = \gamma_3 v_2$.

Enxergue que devido ao fato que $\bar{v}_3, \bar{v}_4 \in \ker \bar{L}_{a^i}$, junto ao fato que $\bar{v}_3 = \overline{v_3 + k_1 a}$, $\bar{v}_4 = \overline{v_4 + k_2 a}$ para todo $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$, então $(\overline{v_3 + k_1 a})\bar{v}_1 = (\alpha_3 + k_1 \alpha_1)\bar{v}_2 + (\alpha_3 + k_1 \alpha_1)\bar{v}_3$. Análogo ao multiplicar por $\bar{v}_2$. Desse modo, se $\alpha_1 \neq 0$ pode-se supor que α_3, α_4 são elementos arbitrários de $\mathbb{C}$ ao substituir $\bar{v}_3$ por $\overline{v_3 + k_1 a}$ e $\bar{v}_4$ e $\overline{v_4 + k_2 a}$. Consequentemente, é considerado que $\bar{L}_{v_3}, \bar{L}_{v_4}$ estão representados pelas matrizes $M_6(0, -\gamma_3, \gamma_3)$ e $M_6(0, \beta_4, -\gamma_3)$.

Note que $v_3^3 \in M$, já que $\bar{L}_{v_3}^2(\bar{v}_3) = \bar{L}_{v_3}(\gamma_3 v_2) = 0$, portanto, $v_3^4 \in M$, é dizer, $\gamma_3^2 v_2^2 = v_3^2 v_3^2 = v_3^4 \in M$. Sejam $m_1, m_2 \in M$ tal que

$$v_4^2 = \beta_4 v_2 + (\beta_4 - \gamma_3)v_3 + m_1, \quad v_3 v_4 = \gamma_3 v_2 + m_2.$$

Desse modo, obtém-se as seguintes relações módulo M :

$$\begin{aligned} v_4^2 v_4 v_3 &\equiv (\beta_4 v_2 + (\beta_4 - \gamma_3)v_3 + m_1)(\gamma_3 v_2 + m_2) \\ &\equiv \beta_4 v_2 m_2 + \gamma_3 m_1 v_2 \equiv \lambda(v_3 + v_4), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \\ v_4^3 v_3 &\equiv v_3 v_4 (\beta_4 v_2 + (\beta_4 - \gamma_3)v_3) \equiv (\beta_4 - \gamma_3)v_3 (\beta_4 v_1 - \gamma_3 v_2) \equiv 0, \\ v_4 v_4^2 v_3 &\equiv v_4 v_3 (\beta_4 v_2 + (\beta_4 - \gamma_3)v_3) \equiv \beta_4 v_4 v_3 v_2 + (\beta_4 - \gamma_3)v_4 v_3^2 \\ &\equiv \gamma_3(\beta_4 - \gamma_3)v_4 v_2 \equiv \gamma_3(\beta_4 - \gamma_3)^2 v_1. \end{aligned}$$

Se $x = v_4$, $y = v_3$ na equação (2.1), segue das relações acima que

$$\begin{aligned} 0 &\equiv 4v_4^2 v_4 v_3 - v_4^3 v_2 - v_4 v_4^2 v_3 - 2v_4 v_4 v_4 v_3 \\ &\equiv 4\lambda(v_3 + v_4) - \gamma_3(\beta_4 - \gamma_3)^2 v_1. \end{aligned}$$

Em vista disso, $\gamma_3(\beta_4 - \gamma_3) = 0$. Como $\gamma_3 \neq 0$ então $\beta_4 - \gamma_3 = 0$, portanto segue que $v_2 M \subset M \oplus \text{span}\{v_3, v_4\}$, $v_2^2, v_2 v_3, v_2 v_4 \in M$, e $v_3^2, v_3 v_4, v_4^2 \in M \oplus \mathbb{C}v_2$. É por isso, conclui-se que $M \oplus \text{span}\{v_2, v_3, v_4\}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$.

Caso 2. $\alpha_1 = 0$. Com essa condição cumpre-se que $\alpha_2 \gamma_1 = \alpha_2 \beta_1 = 0$. Caso $\alpha_2 \neq 0$, então $\gamma_1 = \beta_1 = 0$, portanto, segue que $\bar{L}_a \equiv 0$, o qual é um absurdo. Dessa forma, é satisfeito que $\alpha_2 = 0$. Ao reduzir as igualdades da equação (2.7), obtém-se

$$\begin{aligned} 0 &= 4\beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2 + 3\gamma_1 \gamma_2 \\ 0 &= 4\beta_1(\beta_2 + \gamma_2) - 2\gamma_1(\beta_1 + \gamma_1)^2 - \beta_2(\beta_1 + \gamma_1) \\ 0 &= -\beta_2 \gamma_1 + 4\beta_1 \gamma_2 + 3\gamma_1 \gamma_2, \end{aligned}$$

Ao igualar a primeira com a ultima equação, conclui-se que $5(\beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2) = 0$, é dizer, $\bar{L}_{a^2} = \lambda \bar{L}_a$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$. Além disso, satisfaz-se que $0 = \beta_1 \gamma_2 + \gamma_1 \gamma_2 = \gamma_2(\beta_1 + \gamma_1)$.

Caso $\beta_1 + \gamma_1 = 0$, então $\bar{L}_a$ bem representada pela matriz $M_6(0, -\gamma_1, \gamma_1)$, portanto, $\bar{w}_1, \bar{w}_2 \in \ker \bar{L}_{a^i}$ para cada $i \geq 1$, é dizer, $\bar{L}_{w_1}, \bar{L}_{w_2} \in \mathcal{M}_M$. Sejam $M_6(\alpha, \beta, \gamma)$ e $M_6(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})$ as representações matriciais dos operadores $\bar{L}_{w_1}, \bar{L}_{w_2}$ respectivamente. Da igualdade $\bar{L}_{w_1}(\bar{w}_2) = \bar{L}_{w_2}(\bar{w}_1)$ obtém-se que $\beta + \gamma = \alpha = \hat{\alpha} = 0$, portanto, $\omega_1^2 \in M$, onde conclui-se que $M \oplus \mathbb{C}\omega_1$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$.

Caso $\beta_1 + \gamma_1 \neq 0$, então $\gamma_2 = 0$, $\beta_2 \gamma_1 = 0$ e $0 = 3\beta_2 - 2\gamma_1(\beta_1 + \gamma_1)$. Se $\beta_2 = 0$, então é satisfeito que $\gamma_1 = 0$. De outro lado, se $\gamma_1 = 0$, então $\beta_2 = 0$. Dessa forma, $\beta_2 = \gamma_1 = 0$, consequentemente, tem-se que $\bar{L}_a$ está representado pela matriz $M_6(0, \beta_1, 0)$ e $\bar{L}_{a^i} \equiv 0$ para cada $i \geq 2$. Portanto, $\bar{w}_1, \bar{w}_3 \in \ker \bar{L}_{a^i}$ para cada $i \geq 1$, é dizer, $\bar{L}_{w_1}, \bar{L}_{w_3} \in \mathcal{M}_M$. Sejam $M_6(\alpha, \beta, \gamma)$ e $M_6(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ as representações matriciais dos operadores $\bar{L}_{w_1}, \bar{L}_{w_3}$ respectivamente. Da igualdade $\bar{L}_{w_1}(\bar{w}_3) = \bar{L}_{w_3}(\bar{w}_1)$ obtém-se que $\alpha_3 = \gamma = 0$. Caso $\alpha \gamma_3 = 0$ segue que $M \oplus \mathbb{C}w_1$ ou $M \oplus \mathbb{C}w_3$ é uma subálgebra de

$\mathcal{A}$. Suponha-se que $\alpha\gamma_3 \neq 0$, dessa forma $w_1^2 \equiv \alpha(w_2 + w_3)$, $w_1^3 \equiv \alpha\beta w_1 - \alpha^2 w_3 - \alpha^2 w_4$, $w_1^4 \equiv 0 \pmod{M}$. Além disso, como $w_1 M \subset M$, $w_1^2 M = w_2 M \subset M \oplus \mathbb{C}w_1$, $w_1^3 M = w_4 M \subset M \oplus \mathbb{C}w_1^2$, conclui-se que $M \oplus \text{span}\{w_1, w_1^2, w_1^3\}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$.

Portanto, tem-se demonstrado que se $\mathcal{M}_M \subset \mathfrak{C}_6$, então existe uma subálgebra própria contendo M de codimensão 1 ou 3.

Assim, que dada uma álgebra de dimensão n e nilíndice $n - 3$ sobre $\mathbb{C}$, existe uma subálgebra própria que contem M , tal que a codimensão dela é menor do que 4. $\square$

Corolário 2. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra comutativa de potências associativas de dimensão n e nilíndice $n - 3$ sobre $\mathbb{C}$. Então $\mathcal{A}$ é solúvel.*

Demonstração. Se M é um ideal de $\mathcal{A}$, como consequência de que $\dim(\mathcal{A}/M) = 4$, segue que tanto M quanto $\mathcal{A}/M$ são solúveis, portanto, $\mathcal{A}$ é solúvel. Se M não é um ideal de $\mathcal{A}$, então M está contida numa subálgebra própria de $\mathcal{A}$, e como consequência do teorema acima, segue que $\mathcal{A}$ é solúvel. $\square$

Como consequência do anterior corolário, segue que cada álgebra comutativa de potências associativas de dimensão n e nilíndice maior ou igual do que $n - 3$ sobre $\mathbb{C}$ é solúvel. Dessa forma, como fruto deste capítulo, têm sido estendidos os resultados em [GFS05], e é dado um passo a mais na busca de uma solução ao problema de Albert. Aliás, esse resultado acresce informação sobre as álgebras de dimensão 9, as quais são o objeto de estudo do próximo capítulo.

Capítulo 3

Solubilidade das álgebras comutativas de potências associativas de dimensão menor ou igual do que 9.

Neste capítulo será completada a solução do Problema de Albert para dimensão 9 de uma maneira afirmativa. Em [ES10, Teo. 3], os autores provaram que cada álgebra comutativa de potências associativas de dimensão menor ou igual do que 10 e nilíndice ≤ 4 sobre um corpo de característica diferente de 2 é solúvel. I. Correa e A. Suazo [CS99] provaram que cada álgebra comutativa de potências associativas de dimensão n e nilíndice n sobre um corpo de característica diferente de 2 e 3 é solúvel. Por outro lado, J. C. Fernandez em [GF04] mostrou que cada álgebra comutativa de potências associativas de dimensão n e nilíndice $\geq n - 2$ sobre um corpo de característica 0 ou suficientemente grande é solúvel. Finalmente, no capítulo anterior foi provado que cada álgebra comutativa de potências associativas de dimensão n e nilíndice $n - 3$ sobre o corpo dos complexos é solúvel. Assim, para completar a solução do Problema de Albert para dimensão 9 sobre o corpo dos complexos é suficiente provar que cada álgebra comutativa de potências associativas de dimensão 9 e nilíndice 5 é solúvel. O objetivo final deste capítulo será provar este fato.

Inicialmente, serão estudadas as álgebras comutativas de potências associativas de nilíndice 5 de dimensão arbitrária, determinando as relações e identidades entre seus operadores multiplicação. Em seguida será analisada a estrutura das álgebras de nilíndice 5 e dimensão 9. Este processo segue em grande medida, as ideias de [GFS05], onde eles mostraram que cada álgebra de nilíndice 5 e dimensão 8 é solúvel. No final será concluído que as álgebras comutativas de potências associativas de dimensão 9 e nilíndice 5 são solúveis.

Será necessário introduzir algumas definições. Dado um operador $L_{x^{r_1}} L_{x^{r_2}} \cdots L_{x^{r_k}}$, será dito que ele possui grau m em x se $m = r_1 + r_2 + \cdots + r_k$. Note que a igualdade $x^{r_1} x^{r_2} \cdots x^{r_k} y = 0$ é uma identidade na álgebra $\mathcal{A}$, se e somente se a seguinte relação $L_{x^{r_1}} L_{x^{r_2}} \cdots L_{x^{r_k}} \equiv 0$ é uma identidade de operadores na álgebra $\mathcal{A}$. Lembre-se que por simplicidade são representados o operador L_x por L e L_{x^2} por U .

Foi provado em [GFS05] que cada operador de grau maior ou igual do que 7 é uma identidade na classe das álgebras comutativas de potências associativas de nilíndice 5. Se provará que cada álgebra de dimensão 9 nesta classe onde algum operador de grau 6 em x não é uma identidade possui uma subálgebra própria de codimensão menor ou igual do que 2. Seguidamente, é demonstrado que se cada operador em x de grau 6 é uma identidade na álgebra e os operadores $L^5 \equiv 0$ e $L^2 U L \equiv 0$ não são identidades, então a álgebra possui uma subálgebra própria de codimensão 2. Logo será provado que se uma álgebra satisfaz as identidades $L^5 \equiv 0$, $L^2 U L \equiv 0$, mas não satisfaz $L U L \equiv 0$, ela possui uma subálgebra de codimensão 2. Caso $\mathcal{A}$ satisfazer a identidade $L U L \equiv 0$, então o anulador da álgebra é um ideal próprio não nulo. Dessa forma será concluído que álgebras de dimensão 9 são

solúveis.

3.1 Álgebras comutativas de potências associativas de nilíndice 5.

Neste capítulo $\mathfrak{V}$ denotará a variedade de álgebras comutativas de potências associativas e nilíndice 5 sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica diferente de 2, 3 e 5. Nesta variedade são válidas as identidades

$$\begin{aligned}x^2x^2 &= x^4, \\x^5 &= 0, \\x^3x^2 &= 0.\end{aligned}$$

As linearizações parciais destas identidades determinam novas identidades na variedade $\mathfrak{V}$:

$$4x^2xy = x^3y + xx^2y + 2xxxy, \quad (3.1)$$

$$4x^2yz + 8(xy)(xz) = yx^2z + 2yxxz + zx^2y + 2xyxz + 2zxxy + 2xzyx + 2xyyz, \quad (3.2)$$

$$2x^2y^2 + 4(xy)^2 = yyx^2 + 2yxyx + 2xyxy + xxy^2, \quad (3.3)$$

$$0 = x^4y + 4xx^2xy, \quad (3.4)$$

$$0 = yx^2xz + zx^2xy + 2x(xy)(xz) + xx^2yz, \quad (3.5)$$

$$0 = 2x^3xy + x^2x^2y + 2x^2xxy, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}0 &= x^3zy + (x^2z)(xy) + 2(xxz)(xy) + (xz)(x^2y) + x^2(xz)y \\ &\quad + 2(xz)(xy) + x^2zxy + x^2xyz.\end{aligned} \quad (3.7)$$

Como $\mathfrak{V}$ é a variedade das álgebras comutativas de potências associativas de nilíndice 5, segue como consequência do Teorema 6 que o operador L é nilpotente com índice de nilpotência no máximo 7. No entanto, no artigo [GFS05, Lem. 2], os autores provaram o seguinte lema, o qual é mais forte que o resultado mencionado.

Lema 11. *Se $\sum m_i \geq 7$, então a seguinte expressão é uma identidade na variedade $\mathfrak{V}$:*

$$x^{m_1}x^{m_2} \cdots x^{m_k}y = 0.$$

Devido ao lema acima, no que segue da seção, vão ser encontradas as relações entre os operadores de grau menor ou igual do que 6, que serão muito úteis nos cálculos mais para frente.

Da equação (3.1) segue que

$$4UL = L_{x^3} + LU + 2L^3, \quad (3.8)$$

portanto, resultam as igualdades

$$\begin{aligned}4UL^2 &= L_{x^3}L + LUL + 2L^4, \\ 4LUL &= LL_{x^3} + L^2U + 2L^4.\end{aligned} \quad (3.9)$$

Das equações (3.6) e (3.9), tem-se que

$$U^2 + 10UL^2 - 2LUL - 4L^4 = 0. \quad (3.10)$$

Da equação (3.4) obtém-se que

$$L_{x^4} + 4LUL = 0. \quad (3.11)$$

Como consequência das equações (3.9) até (3.11), cada operador de grau 4 pode ser escrito em termos dos operadores UL^2 , LUL , L^2U , e L^4 . Esta relação encontra-se resumida na Tabela 3.1.

Os coeficientes que estão na coluna de cada operador determinam como exprimir o operador como combinação linear de UL^2 , LUL , L^2U , e L^4 .

	U^2	$L_{x^3}L$	LL_{x^3}	L_{x^4}
UL^2	-10	4	0	0
LUL	2	-1	4	-4
L^2U	0	0	-1	0
L^4	4	-2	-2	0

Tabela 3.1: Relação entre os operadores de grau 4.

Com as relações estabelecidas entre os operadores de grau 4, o seguinte passo natural é encontrar as relações de dependência entre os operadores de grau 5.

Se $z = x^2$ na equação (3.5), tem-se que $U^2L + 2LL_{x^3}L + LU^2 = 0$. Usando a equação (3.9) para $L_{x^3}L$ e (3.10) para LU^2 , segue que $U^2L + 8LUL^2 - 4L^5 - 2L^2UL + 4L^5 + 2L^2UL - 10LUL^2 = 0$, é dizer,

$$U^2L - 2LUL^2 = 0. \quad (3.12)$$

Dessa forma, das equações (3.10) e (3.12), segue que

$$5UL^3 - 2L^5 = 0. \quad (3.13)$$

Das equações (3.6) e (3.12), obtém-se

$$L_{x^3}L^2 + LUL^2 + UL^3 = 0. \quad (3.14)$$

Se $z = x^2$ na equação (3.7), resulta que $2L_{x^3}U + 3L_{x^4}L + UL_{x^3} + 2L_{x^3}L^2 + U^2L + ULU = 0$. Ao usar a equação (3.8) em UL_{x^3} , a equação (3.11) em $L_{x^4}L$, a equação (3.12) em U^2L e a equação (3.14) em $L_{x^3}L^2$, tem-se que

$$L_{x^3}U = 2LUL^2 + 2UL^3. \quad (3.15)$$

Das equações (3.10) e (3.13) segue que

$$LU^2 + 10LUL^2 - 2L^2UL - 10UL^3 = 0. \quad (3.16)$$

Da equação (3.8) resulta que $L_{x^3}U + LU^2 + 2L^3U = 4ULU$. Desse modo, das equações (3.15) e (3.16) obtém-se que

$$3UL^3 - 2LUL^2 + \frac{1}{2}L^2UL + \frac{1}{2}L^3U = ULU. \quad (3.17)$$

Das equações (3.8), (3.12) e (3.17) segue que

$$UL_{x^3} = 10LUL^2 - 5UL^3 - \frac{1}{2}L^2UL - \frac{1}{2}L^3U. \quad (3.18)$$

Das equações (3.9) e (3.13) obtém-se

$$\begin{aligned} LL_{x^3}L &= 4LUL^2 - L^2UL - 5UL^3, \\ L^2L_{x^3} &= 4L^2UL - L^3U - 5UL^3. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Finalmente, da equação (3.11) tem-se que

$$\begin{aligned} L_{x^4}L &= -4LUL^2, \\ LL_{x^4} &= -4L^2UL. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Como consequência das equações (3.12) até (3.20), cada operador de grau 5 pode ser expressido em termos dos seguintes 4 operadores UL^3 , LUL^2 , L^2UL e L^3U . Na Tabela 3.2 é expressado cada operador de grau 5 como combinação linear destes 4 operadores.

	U^2L	ULU	LU^2	L^5	UL_{x^3}	$L_{x^3}U$	$L_{x^3}L^2$	$LL_{x^3}L$	$L^2L_{x^3}$	LL_{x^4}	$L_{x^4}L$
UL^3	0	3	10	$5/2$	-5	2	-1	-5	-5	0	0
LUL^2	2	-2	-10	0	10	2	-1	4	0	0	-4
L^2UL	0	$1/2$	2	0	$-1/2$	0	0	-1	4	-4	0
L^3U	0	$1/2$	0	0	$-1/2$	0	0	0	-1	0	0

Tabela 3.2: Relação entre os operadores de grau 5.

Finalmente, para concluir esta seção, na sequência serão encontradas as relações entre os operadores de grau 6.

Como dedução da equação (3.13), segue que $LUL^3 = UL^4$. Portanto, das equações (3.12) até (3.15), junto à equação (3.20), obtém-se que

$$\begin{aligned}
 U^2L^2 &= 2UL^4, \\
 L^6 &= 5/2UL^4, \\
 L_{x^3}L^3 &= -2UL^4, \\
 L_{x^3}UL &= 4UL^4, \\
 L_{x^4}L^2 &= -4UL^4.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Se $x = x^2$ na equação (3.1), resulta que $4L_{x^4}U = UL_{x^4} + 2U^3$. Ao multiplicar à esquerda por U na equação (3.10), e usando as equações (3.11) e (3.21), tem-se que

$$LULU = 2UL^4. \tag{3.22}$$

Como consequência da equação (3.11), segue que

$$L_{x^4}U = -8UL^4. \tag{3.23}$$

Ao multiplicar à esquerda por L a equação (3.17), junto à equação (3.22), obtém-se

$$L^2UL^2 = \frac{1}{2}UL^4 + \frac{1}{4}L^3UL + \frac{1}{4}L^4U. \tag{3.24}$$

Multiplicando à direita por L na equação (3.17), da equação (3.24) resulta que

$$ULUL = \frac{5}{4}UL^4 + \frac{5}{8}L^3UL + \frac{1}{8}L^4U. \tag{3.25}$$

Como consequência das equações (3.11) e (3.25) segue que

$$UL_{x^4} = -5UL^4 - \frac{5}{2}L^3UL - \frac{1}{2}L^4U. \tag{3.26}$$

Das equações (3.11) e (3.24), obtém-se

$$LL_{x^4}L = -2UL^4 - L^3UL - L^4U. \tag{3.27}$$

Se $x = x^2$ na equação (3.1), resulta das equações (3.23) e (3.26) que

$$U^3 = -\frac{27}{2}UL^4 + \frac{5}{4}L^3UL + \frac{1}{4}L^4U. \quad (3.28)$$

Ao multiplicar à direita por U a equação (3.10), das equações (3.22) e (3.28), segue que

$$UL^2U = \frac{7}{4}UL^4 - \frac{1}{8}L^3UL + \frac{3}{8}L^4U. \quad (3.29)$$

Multiplicando a equação (3.10) à esquerda por L^2 , junto com a equação (3.24), obtém-se

$$L^2U^2 = 5UL^4 - \frac{1}{2}L^3UL - \frac{5}{2}L^4U. \quad (3.30)$$

Das equações (3.12) e (3.24), tem-se que

$$LU^2L = UL^4 + \frac{1}{2}L^3UL + \frac{1}{2}L^4U. \quad (3.31)$$

Da equação (3.9), seguido das equações (3.22) e (3.29), resulta que

$$L_{x^3}LU = 5UL^4 - \frac{1}{2}L^3UL - \frac{1}{2}L^4U. \quad (3.32)$$

Da equação (3.9), seguido das equações (3.22) e (3.30), cumpre-se que

$$LL_{x^3}U = 3UL^4 + \frac{1}{2}L^3UL + \frac{1}{2}L^4U. \quad (3.33)$$

Das equações (3.9), (3.25) e (3.29), segue que

$$ULL_{x^3} = \frac{5}{4}UL^4 + \frac{21}{8}L^3UL + \frac{1}{8}L^4U. \quad (3.34)$$

Da equação (3.9), junto às equações (3.21) e (3.25), obtém-se

$$UL_{x^3}L = \frac{19}{4}UL^4 - \frac{5}{8}L^3UL - \frac{1}{8}L^4U. \quad (3.35)$$

Das equações (3.14) e (3.24), segue que

$$LL_{x^3}L^2 = -\frac{3}{2}UL^4 - \frac{1}{4}L^3UL - \frac{1}{4}L^4U. \quad (3.36)$$

Ao multiplicar por L à direita no termo $L^2L_{x^3}$ na equação (3.19), seguido da equação (3.24) tem-se que

$$L^2L_{x^3}L = -3UL^4 + L^4U. \quad (3.37)$$

Da equação (3.19) segue que

$$L^3L_{x^3} = -5UL^4 + 4L^3UL - L^4U. \quad (3.38)$$

Das equações (3.18) e (3.24) obtém-se

$$LUL_{x^3} = 2L^3UL + 2L^4U. \quad (3.39)$$

Finalmente, da equação (3.20) segue que

$$L^2L_{x^4} = -4L^3UL. \quad (3.40)$$

Com esta última equação, tem sido exprimido cada operadores de grau 6 em termos dos operadores UL^4 , L^3UL e L^4U . As equações (3.21) até (3.40) são dadas abaixo.

	U^3	U^2L^2	$ULUL$	UL^2U	LU^2L	$LULU$	L^2U^2	LUL^3	L^2UL^2	L^6
UL^4	-27/2	2	5/4	7/4	1	2	5	1	1/2	5/2
L^3UL	5/4	0	5/8	-1/8	1/2	0	-1/2	0	1/4	0
L^4U	1/4	0	1/8	3/8	1/2	0	-5/2	0	1/4	0

	$L_{x^3}UL$	$L_{x^3}LU$	$L_{x^3}L^3$	$LL_{x^3}U$	$LL_{x^3}L^2$	$UL_{x^3}L$	$L^2L_{x^3}L$	ULL_{x^3}	LUL_{x^3}
UL^4	4	5	-2	3	-3/2	19/4	-3	5/4	0
L^3UL	0	-1/2	0	1/2	-1/4	-5/8	0	21/8	2
L^4U	0	-1/2	0	1/2	-1/4	-1/8	1	1/8	2

	$L^3L_{x^3}$	$L_{x^4}U$	$L_{x^4}L^2$	$LL_{x^4}L$	UL_{x^4}	$L^2L_{x^4}$
UL^4	-5	-8	-4	-2	-5	0
L^3UL	4	0	0	-1	-5/2	-4
L^4U	-1	0	0	-1	-1/2	0

Tabela 3.3: Relação entre os operadores de grau 6.

Esta tabela conclui o estudo geral da variedade $\mathfrak{V}$. Desse modo, tem-se relacionado os operadores de graus 4,5 e 6 em termos de um conjunto de operadores conveniente. Na seguinte secção será focada nas álgebras da variedade $\mathfrak{V}$ que possuem dimensão 9, e as tabelas desta secção serão de grande utilidade.

3.2 Álgebras comutativas de potências associativas de dimensão 9.

No que segue do capítulo, será provado que as álgebras comutativas de potências associativas de dimensão 9 e nilíndice 5 são solúveis. Embora o resultado obtido aqui é valido para álgebras sobre um corpo de característica diferente de 2,3 e 5, o resultado geral, o qual é a solubilidade das álgebras de dimensão 9, será valido unicamente para álgebras sobre o corpo $\mathbb{C}$, isto como uma consequência do teorema obtido no capítulo anterior. Daqui em diante, as álgebras consideradas estão em $\mathfrak{V}$ e são consideradas sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica diferente de 2, 3 e 5.

No artigo [GFS05], os autores provaram que nas álgebras de nosso interesse nesta seção, $L^6 \equiv 0$ é uma identidade. Além do mais, eles provaram a seguinte proposição:

Proposição 1. [GFS05, Prop. 1] *Se existem $a, b \in \mathcal{A}$ tais que $L_a^6(b) \neq 0$, então $\dim \mathcal{A} \geq 11$.*

Portanto, no nosso caso, as álgebras de dimensão 9 em $\mathfrak{V}$ satisfazem a identidade $L^6 \equiv 0$, e como consequência da Tabela (3.3), também são identidades os seguintes operadores.

$$\begin{aligned}
L^6 &\equiv 0, & U^2L^2 &\equiv 0, & UL^4 &\equiv 0, \\
LULU &\equiv 0, & LUL^3 &\equiv 0, & L_{x^3}UL &\equiv 0, \\
L_{x^3}L^3 &\equiv 0, & L_{x^4}U &\equiv 0, & L_{x^4}L^2 &\equiv 0.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Aliás, mais um resultado do trabalho [GFS05] que será usado é a seguinte proposição, ela mostra um conjunto linearmente independente, caso $LUL^2 \equiv 0$ não for uma identidade em $\mathcal{A}$.

Proposição 2. [*GFS05, Prop. 2*] Se existem $a, b \in \mathcal{A}$ tais que $L_a U_a L_a^2(b) \neq 0$, então

$$\phi = \{a, a^2, a^3, a^4, b, L(b), L^2(b), UL^2(b), LUL^2(b)\}$$

é um conjunto linearmente independente.

No seguinte lema, será provado que nas álgebras de nosso interesse, a relação $LUL^2 \equiv 0$ é uma identidade.

Lema 12. Se existem $a, b \in \mathcal{A}$ tais que $L_a U_a L_a^2(b) \neq 0$, então $\dim \mathcal{A} \geq 10$.

Demonstração. Suponha-se que $\dim \mathcal{A} < 10$. Dado que $LUL^2 \equiv 0$ não é uma identidade na álgebra $\mathcal{A}$, segue da proposição acima que $\dim \mathcal{A} = 9$ e também o conjunto

$$\phi = \{a, a^2, a^3, a^4, b, L(b), L^2(b), UL^2(b), LUL^2(b)\}$$

é uma base para $\mathcal{A}$. Se os elementos de ϕ nessa ordem são nomeados por v_i , então

$$U(b) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i a^i + \sum_{j=0}^4 \mu_j v_{j+5} \quad (\alpha_i, \mu_j \in \mathbb{F}).$$

Ao multiplicar $U(b)$ por LUL^2 , dado que $LUL^3 \equiv 0$, segue que $0 = LUL^2 U(b) = \mu_0 v_9$, isto é, $\mu_0 = 0$. Ao multiplicar por LUL , segue que $0 = LUL U(b) = \mu_1 v_9$, portanto, $\mu_1 = 0$. Se multiplicar por L^4 e por U^2 obtém-se respetivamente

$$L^4 U(b) = \mu_2 L^6(b) = 0, \quad U^3(b) = \mu_2 U^2 L^2(b) = 0.$$

Dessa forma, da Tabela 3.3, junto à equação (3.41) segue que $0 = U^3(b) = 5/4 L^3 UL(b)$. Portanto, $UL^4(b) = L^3 UL(b) = L^4 U(b) = 0$. Como consequência destas identidades e da Tabela 3.3, obtemos que se $m_1 + \dots + m_k \geq 6$, então $a^{m_1} \dots a^{m_k} b = 0$.

Seja

$$UL(b) = \sum_{i=1}^4 \alpha'_i a^i + \sum_{j=0}^4 \mu'_j v_{i+5} \quad (\alpha'_i, \mu'_j \in \mathbb{F}).$$

Analogamente ao feito para $U(b)$, segue que $\mu'_0 = \mu'_1 = 0$. Ao multiplicar por LU , obtém-se que $0 = LU^2 L(b) = \alpha'_1 a^4 + \mu'_2 v_9$, portanto, $\alpha'_1 = \mu'_2 = 0$. Ao multiplicar por U , resulta que $U^2 L(b) = \alpha'_2 a^4$. Da Tabela 3.2, é conhecido que $2v_9 = 2LUL^2(b) = U^2 L(b) = \alpha'_2 a^4$, é dizer, a^4 e v_9 são l.d. o qual é um absurdo. Portanto, $\dim \mathcal{A} \geq 10$. $\square$

Corolário 3. Se $\dim \mathcal{A} \leq 9$, então $LUL^2 \equiv 0$, $U^2 L \equiv 0$, $L_{x^4} L \equiv 0$ e $L^3 UL = -L^4 U$ são identidades na álgebra $\mathcal{A}$.

Demonstração. Por lema anterior $LUL^2 \equiv 0$ é uma identidade em $\mathcal{A}$ e agora Tabela 3.2 implica que também $U^2 L \equiv 0$ e $L_{x^4} L \equiv 0$ são identidades em $\mathcal{A}$. Já que $LUL^2 \equiv 0$, também $L^2 UL^2 \equiv 0$, e agora usando a Tabela 3.3 obtemos $0 = 4L^2 UL^2 = 2UL^4 + L^3 UL + L^4 U = L^3 UL + L^4 U$ já que $UL^4 = 0$. $\square$

Como consequência desse corolário, obtém-se novas identidades a partir das linearizações parciais das identidades mencionadas. Essas identidades são:

$$0 = zx^2 xxy + 2x(xz)xxy + x^2 xzy + x^2 xzy, \quad (3.42)$$

$$0 = 2(xz)x^2 xy + 2x^2(xz)xy + x^2 x^2 zy, \quad (3.43)$$

$$0 = x^4 zy + 4(x^2 xz)(xy). \quad (3.44)$$

Também, como consequência do corolário acima e Tabela 3.3, temos que se $m_1 + \dots + m_k = 6$ e $a \in \mathcal{A}$, então existe $\lambda \in \mathbb{F}$ tal que

$$L_a^{m_1} \cdots L_a^{m_k} = \lambda L_a^4 U_a.$$

Para provar que $\mathcal{A} \in \mathfrak{V}$ de dimensão 9 é solúvel, será suposto que se um operador $m(x)$ não é uma identidade em $\mathcal{A}$, então $\mathcal{A}$ possui uma subálgebra própria $\mathcal{B}$ de codimensão menor ou igual do que 2. Desse modo, como consequência do Lema 7, tem-se que $\mathcal{A}$ é solúvel. Em seguida, será suposto que $m(x)$ é uma identidade em $\mathcal{A}$, à vista disso, ir diminuindo o grau do operador $m(x)$ até o operador $LUL \equiv 0$ ocorrer. Nesse caso, o anulador de $\mathcal{A}$ é um ideal próprio não nulo de $\mathcal{A}$, onde pode-se concluir que $\mathcal{A}$ é solúvel.

3.2.1 Se L^4U não é uma identidade na álgebra $\mathcal{A}$.

Nesta seção será suposto que $L^4U \equiv 0$ não é uma identidade em $\mathcal{A}$, e com essas condições acontecerá que $\mathcal{A}$ possui uma subálgebra de codimensão 1, desse modo, $\mathcal{A}$ resulta ser uma álgebra solúvel. Para desenvolver o trabalho é necessária uma proposição demonstrada em [GFS05], a qual mostra um conjunto linearmente independente no caso em que $L^4U \equiv 0$ não é uma identidade em $\mathcal{A}$. A proposição 3 em [GFS05] é re-enunciada como:

Proposição 3. *Se $a, b \in \mathcal{A}$ tais que $L_a^4 U_a(b) \neq 0$, então*

$$\phi = \phi_{a,b} = \{a, a^2, a^3, a^4, b, L_a(b), U_a(b), L_a U_a(b), L_a^2 U_a(b)\}$$

é um conjunto linearmente independente em $\mathcal{A}$.

Com a proposição acima, pode ser enunciado o seguinte lema:

Lema 13. *Seja $\mathcal{A}$ de dimensão 9 tal que $L^4U \equiv 0$ não é uma identidade em $\mathcal{A}$. Se $a \in \mathcal{A}$ tal que $L_a^4 U_a \neq 0$, então existe $b \in \mathcal{A}$ tal que $L_a^4 U_a(b) \neq 0$, $\phi_{a,b}$ é uma base de $\mathcal{A}$, e as matrizes que representam os operadores L_a e U_a na base $\phi_{a,b}$ são respectivamente*

$$[L_a] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [U_a] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_3 & 2\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \gamma_4 & \delta_4 & \gamma/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $\delta_4 = 2\gamma_3 - \lambda - 6\lambda_2$.

Demonstração. Durante a prova do lema usaremos as identidades dadas no Corolário 3, a identidade $UL^4 \equiv 0$ de (3.14) e as relações da Tabela 3.3 sem nenhuma menção explícita. Sejam $a, b' \in \mathcal{A}$ tais que $L_a^4 U_a(b') \neq 0$. Para simplificar, denotaremos L_a por L e U_a por U . Pela proposição anterior,

o conjunto $\phi' = \{a, a^2, a^3, a^4, b', L(b'), U(b'), LU(b'), L^2U(b')\}$ é uma base para $\mathcal{A}$. Como acima, nomeamos o vetor i -ésimo de ϕ' por v_i . Seja agora w um elemento arbitrário de $\mathcal{A}$. Pode-se exprimir em termos da base ϕ' ,

$$w = \sum_{i=1}^4 \alpha_i a^i + \sum_{i=0}^4 \mu_i v_{i+5}.$$

É fácil provar que se $L^3U(w) = 0$, então $\mu_0 = \mu_1 = 0$. Além do mais, se $L^3U(w) = 0$ e $L^4(w) = 0$, então também $\mu_2 = 0$.

Seja $w = L^3U(b')$. Pela observação acima, temos que $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 0$. Ao multiplicar w por LU resulta que $\alpha_1 = 0$. Multiplicando por L^3 , tem-se que $\mu_3 = 0$. Ao multiplicar por U , e por L^2 obtém-se respectivamente que

$$0 = \alpha_2 a^4 + \mu_4 UL^2U(b') = \alpha_2 a^4 + \frac{\mu_4}{2} L^4U(b'), \quad 0 = \alpha_2 a^4 + \mu_4 L^4U(b'),$$

dessa forma se conclui que $\alpha_2 = \mu_4 = 0$. Portanto, $L^3U(b') = \alpha_3 a^3 + \alpha_4 a^4$. Por hipótese, $0 \neq L^4U(b') = L(L^3U(b')) = \alpha_3 a^4$, logo $\alpha_3 \neq 0$. Seja

$$b = \frac{b'}{\alpha_3} + \frac{\alpha_4}{\alpha_3^2} ab'.$$

Então

$$L^3U(b) = a^3, \quad L^4U(b) = a^4, \quad (3.45)$$

e $\phi = \{a, a^2, a^3, a^4, b, L(b), U(b), LU(b), L^2U(b)\}$ é uma base para $\mathcal{A}$. A seguir v_i denotará o elemento i -ésimo da base ϕ .

Seja agora $w = L^2(b)$. É fácil verificar que $L^3U(w) = L^4(w) = 0$ e portanto exprime-se da forma $w = \sum_{i=1}^4 \lambda_i a^i + \mu v_8 + \lambda v_9$. Ao multiplicar por LU , obtém-se $\lambda_1 = 0$. Multiplicando por UL e por L^3 respectivamente, segue que

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} L^5(b) &= UL^3(b) = \mu UL^2U(b) = \frac{\mu}{2} L^4U(b) = \frac{\mu}{2} a^4, \\ L^5(b) &= \mu L^4U(b) = \mu a^4, \end{aligned}$$

é dizer, $\mu = 0$. Desse modo, $L^5(b) = 0$, e portanto,

$$L^5 \equiv 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} L^2(b) &= \lambda_2 a^2 + \lambda_3 a^3 + \lambda_4 a^4 + \lambda v_9, \\ L^3(b) &= (\lambda_2 + \lambda) a^3 + \lambda_3 a^4, \\ L^4(b) &= (\lambda_2 + \lambda) a^4, \\ UL^2(b) &= \left(\lambda_2 + \frac{\lambda}{2}\right) a^4. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Se $w = UL(b)$, então $L^3U(w) = L^4(w) = 0$ e portanto exprime-se da forma $w = \sum_{i=1}^4 \gamma_i a^i + \gamma' v_8 + \gamma v_9$. Ao multiplicar por LU , obtém-se que $0 = LULU(b) = \gamma_1 a^4$, isto é, $\gamma_1 = 0$. Multiplicando por L^3 segue que $-a^4 = L^3UL(b) = \gamma' L^4U(b) = \gamma' a^4$, portanto, $\gamma' = -1$. Multiplicando por U e por L^2 respectivamente, tem-se que

$$\begin{aligned} 0 &= U^2L(b) = \gamma_2 a^4 - ULU(b) + \gamma UL^2U(b), \\ L^2UL(b) &= \gamma_2 a^4 - L^3U(b) + \gamma L^4U(b), \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} ULU(b) &= (\gamma_2 + \frac{\gamma}{2})a^4, \\ 2ULU(b) &= (\gamma_2 + \gamma)a^4, \end{aligned}$$

já que $2ULU = L^2UL + L^3U$ por Tabela 3.2 e relação $L^5 = 0$. Isto implica que $\gamma_2 = 0$. Portanto

$$\begin{aligned} UL(b) &= \gamma_3a^3 + \gamma_4a^4 - v_8 + \gamma v_9, \\ LUL(b) &= \gamma a^3 + \gamma_3a^4 - v_9, \\ L^2UL(b) &= -a^3 + \gamma a^4, \\ ULU(b) &= \frac{\gamma}{2}a^4. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Analogamente, $U^2(b)$ exprime-se da forma $U^2(b) = \sum_{i=1}^4 \delta_i a^i + \delta' v_8 + \delta v_9$. Ao multiplicar por LU , resulta que $\delta_1 = 0$. Multiplicando por L^3 tem-se que $\delta' = 0$. Ao multiplicar por U e por L^2 respectivamente, obtém-se que

$$\begin{aligned} U^3(b) &= \delta_2 a^4 + \delta UL^2U(b), \\ L^2U^2(b) &= \delta_2 a^4 + \delta L^4U(b) = (\delta_2 + \delta)a^4. \end{aligned}$$

Da Tabela 3.3, segue que

$$\begin{aligned} -a^4 &= (\delta_2 + \frac{\delta}{2})a^4, \\ -2a^4 &= (\delta_2 + \delta)a^4, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 2\delta_2 + \delta + 2 &= 0, \\ \delta_2 + \delta + 2 &= 0, \end{aligned}$$

logo $\delta_2 = 0$ e $\delta = -2$. Portanto,

$$\begin{aligned} U^2(b) &= \delta_3 a^3 + \delta_4 a^4 - 2v_9, \\ LU^2(b) &= -2a^3 + \delta_3 a^4, \\ L^2U^2(b) &= -2a^4, \\ U^3(b) &= -a^4. \end{aligned} \tag{3.48}$$

De outro lado, ao expressar U^2 pela igualdade dada na Tabela 3.1, junto às equações (3.46) e (3.47), obtém-se que

$$\begin{aligned} U^2(b) &= -10UL^2(b) + 2LUL(b) + 4L^4(b) \\ &= -10\left(\lambda_2 + \frac{\lambda}{2}\right)a^4 + 2\gamma a^3 + 2\gamma_3 a^4 - 2v_9 + 4(\lambda_2 + \lambda)a^4 \\ &= 2\gamma a^3 + (-6\lambda_2 - \lambda + 2\gamma_3)a^4 - 2v_9, \end{aligned}$$

desse modo, $\delta_3 = 2\gamma$ e $\delta_4 = 2\gamma_3 - \lambda - 6\lambda_2$.

Sendo assim, as representações matriciais seguem da equação (3.45) até (3.48). □

Lema 14. *Nas hipóteses do lema anterior*

$$C_2 = \text{span}\{a, a^2, a^3, a^4, v_8, v_9\}$$

é uma subálgebra de $\mathcal{A}$.

Demonstração. Inicialmente será provado que $C_1 = \text{span}\{a, a^2, a^3, a^4, v_9\}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$.

Da equação (3.47) segue que

$$v_9^2 = (LUL(b))^2 = \frac{1}{16}(a^4b)^2.$$

Se $x = a^4$, $y = b$ na equação (3.3), segue que $4(a^4b)^2 = 2a^4ba^4b = -8aa^2aba^4b$, é dizer, $v_9^2 = -1/8aa^2aba^4b$. De outro lado, se $x = a$, $y = a^4b$, e $z = b$ na equação (3.42) junto com as Tabelas 3.2 e 3.3, obtém-se que

$$\begin{aligned} 0 &= ba^2aaa^4b + 2a(ab)\underbrace{aaa^4b}_{4a^4} + aa^2b\underbrace{aa^4b}_{-4L^2UL(b)} + aa^2aba^4b \\ &= 8aa^4ab - 4aa^2(\gamma a^4 - a^3)b + aa^2aba^4b \\ &= aa^2aba^4b. \end{aligned}$$

Portanto, $v_9^2 = 0$, isto é C_1 é uma subálgebra de $\mathcal{A}$, onde os produtos são dados por

$$av_9 = a^3, \quad a^2v_9 = \frac{a^4}{2}, \quad a^3v_9 = a^4v_9 = v_9^2 = 0. \quad (3.49)$$

A seguir, será provado que $C_2 = C_1 \oplus \mathbb{F}v_8$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$. Para cada $y \in \mathcal{A}$, $[y]_k$ representará a coordenada k -ésima de y em relação a base ϕ . Se $y = \sum \alpha_i a^i + \sum \mu_i v_{i+5}$, então

$$a^4y = \mu_0 a^4b = -4\mu_0 LUL(b) = -4\mu_0(\gamma a^3 + \gamma_3 a^4 - v_9), \quad L^4U(y) = \mu_0 a^4.$$

Assim

$$[y]_5 \neq 0 \Leftrightarrow a^4y \neq 0 \Leftrightarrow L^4U(y) \neq 0.$$

De outro lado, da equação (3.44), se $x = a$, $z = v_9$, segue que $0 = a^4v_9y$ para cada $y \in \mathcal{A}$. Aliás, se $x = a$, $z = v_8$ nessa mesma equação, então $0 = a^4v_8y + 4(a^2av_8)(ay) = a^4v_8y + 2a^4ay = a^4v_8y$ para cada $y \in \mathcal{A}$. Portanto, para cada $y \in \mathcal{A}$ resulta que

$$[yv_9]_5 = [yv_8]_5 = 0. \quad (3.50)$$

Como $x^4xx^2y = 0$ é uma identidade na classe $\mathfrak{V}$, ao linearizá-la obtém-se que $0 = 4(x^2xz)xx^2y + x^4zx^2y + 2x^4xx(xz)y$. Se $x = a$, $y = z = b$, segue que

$$0 = 4(a^2ab)v_9 + a^4bv_8 + a^4aba^2b + 2a^4aabab = 4(a^2ab)v_9.$$

Dessa forma, do anterior lema obtém-se que

$$0 = (a^2ab)v_9 = (\gamma_3 a^3 + \gamma_4 a^4 - v_8 + \gamma v_9)v_9 = -v_8v_9.$$

Ao linearizar a identidade $x^4xx^2y = 0$, segue que $0 = 4(x^2xz)xx^2y + x^4zx^2y + 2x^4xx(xz)y$. Se $x = a$, $y = z = b$, tem-se que

$$0 = 4(a^2ab)v_8 + a^4ba^2b = 4(\gamma_3 a^3 + \gamma_4 a^4 - v_8 + \gamma v_9)v_8 + a^4ba^2b = -4v_8^2 + a^4ba^2b.$$

Como $\text{Im } L_{a^4} \subset \text{span}\{a^3, a^4, v_9\}$, então $v_8^2 \in \text{span}\{a^3, a^4, v_9\}$, é dizer, $C_2 = C_1 \oplus \mathbb{F}v_8$ é uma subálgebra com os produtos dados na equação (3.49) e

$$\begin{aligned} av_8 &= v_9, & a^2v_8 &= \frac{\gamma}{2}a^4, & a^3v_8 &= a^4v_8 = v_8v_9 = 0, \\ v_8^2 &\in \text{span}\{a^3, a^4, v_9\}. \end{aligned}$$

□

Lema 15. *Nas hipóteses e notações do Lema 13, tem-se que*

$$C = \text{span}\{a, a^2, a^3, a^4, v_6, v_7, v_8, v_9\}$$

é uma subálgebra de $\mathcal{A}$.

Demonstração. Como C_2 é uma subálgebra de $\mathcal{A}$, então para provar que C é uma subálgebra serão analisados os operadores de $\mathcal{M}_{C_2}$.

Dado que $\text{codim } C_2 = 3$, uma base para $\mathcal{A}/C_2$ é dada pelo conjunto $\{\bar{b}, \bar{ab}, \bar{a^2b}\} = \{\bar{v}_5, \bar{v}_6, \bar{v}_7\}$. A seguir, para cada operador $\bar{T}$ de $\mathcal{M}_{C_2}$, representamos por $[\bar{T}]$ a matriz deste operador em relação à base acima. Os operadores em $\mathcal{M}_{C_2}$ induzidos pelos operadores L_{a^i} estão representados pelas seguintes matrizes

$$[\bar{L}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\bar{U}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\bar{L}_{a^i}] \equiv [0]$$

para $i = 3, 4$. Além disso, cada operador $\bar{L}_c \in \mathcal{M}_{C_2}$, para $x, y \in \mathbb{F}$, deve satisfazer que $x\bar{L} + y\bar{U} + \bar{L}_c \in \mathcal{M}_{C_2}$, é dizer, $(x\bar{L} + y\bar{U} + \bar{L}_c)^3 = 0$, desse modo, se $\bar{L}_c$ está representado pela matriz

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{pmatrix}$$

e $(a_{i,j}) = [x\bar{L} + y\bar{U} + \bar{L}_c]^3$, para $x = 0$, na componente $a_{1,3}$ obtém-se que

$$c_{1,1}^2 c_{1,3} + c_{1,2} c_{1,3} c_{2,1} + c_{1,3}^2 c_{3,1} + c_{2,3}(c_{1,1} c_{1,2} + c_{1,2} c_{2,2} + c_{1,3} c_{3,2}) \\ + c_{3,3}(c_{1,1} c_{1,3} + c_{1,2} c_{2,3} + c_{3,1} c_{3,3}) + c_{1,3}^2 y,$$

é dizer, $c_{1,3} = 0$.

Se $y = 0$, das componentes $a_{1,1}$ e $a_{1,2}$ resulta que

$$c_{1,1}^3 + 2c_{1,1} c_{1,2} c_{2,1} + c_{1,2} c_{2,1} c_{2,2} + c_{1,2} c_{2,3} c_{3,1} + c_{1,2}(2c_{1,1} + c_{2,2})x, \\ c_{1,2}(c_{1,1}^2 + c_{1,2} c_{2,1} + c_{1,1} c_{2,2} + c_{2,2}^2 + c_{2,3} c_{3,2}) + c_{1,2}^2 x,$$

portanto, $c_{1,2} = c_{1,1} = 0$.

O traço de uma matriz nilpotente é zero logo $c_{3,3} = -c_{2,2}$. Sendo assim, $\bar{L}_c$ está representado pela seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & -c_{2,2} \end{pmatrix}, \quad c_{2,2}^2 + c_{2,3} c_{3,2} = 0. \quad (3.51)$$

Como $v_8, v_9 \in C_2$, então os operadores induzidos $\bar{L}_{v_8}, \bar{L}_{v_9} \in \mathcal{M}_{C_2}$, dessa modo, segue que as representações matriciais desses operadores tem a forma descrita na equação (3.51).

Enxergue que se $[y]_5 = 0$, então $[y]_6 = 0 \Leftrightarrow L^3 U(y) = 0$. De outro lado, se $[y]_5 = [y]_6 = 0$, então $[y]_7 = 0 \Leftrightarrow L^4(y) = 0$, pois se $y = \sum \alpha_i a^i + \sum \mu_i v_{i+5}$, obtém-se que

$$L^3 U(y) = \mu_1 L^3 U L(b) = -\mu_1 U L^4(b) = -\mu_1 a^4, \\ L^4(y) = \mu_2 L^4 U(b) = \mu_2 a^4.$$

Na sequência, serão determinados os operadores $\overline{L}_{v_8}, \overline{L}_{v_9}$.

Ao linearizar a identidade $xxxx^2xy = 0$, resulta que

$$0 = zxxx^2xy + xzxx^2xy + xxzx^2xy + 2xxx(xz)xy + xxx^2zxy + xxx^2xzy.$$

Se $x = a$, $y = v_8$, $z = b$ na anterior identidade, segue que

$$\begin{aligned} 0 &= 2aaa(ab) \underbrace{aav_8}_{a^3} + aaaa^2bav_8 + aaaa^2abv_8 \\ &= 2aaaa^3ab + L^3U(bv_9) - L^4U(bv_8) \\ &= L^3U(bv_9) \end{aligned}$$

já que pela equação (3.50), $L^4U(bv_8) = 0$. Portanto, se conclui que $[bv_9]_6 = 0$.

Ao linearizar a identidade $xxxx^2x^2y = 0$ obtém-se que

$$0 = zxxx^2x^2y + xzxx^2x^2y + xxzx^2x^2y + 2xxx(xz)x^2y + 2xxxx^2(xz)y. \quad (3.52)$$

Se $x = a$, $y = v_9$, $z = b$ segue que

$$0 = aaa(ab) \underbrace{a^2v_9}_{1/2a^4} + aaaa^2(ab)v_9 = L^3U((ab)v_9).$$

Portanto, $[v_9ab]_6 = 0$. Além disso, como consequência da equação (3.51), resulta que $[v_9v_7]_7 = 0$.

Ao linearizar a identidade $xxx^2x^3y = 0$, tem-se que

$$0 = zxx^2x^3y + xzx^2x^3y + 2xx(xz)x^3y + xxx^2(x^2z)y + 2xxx^2(xxz)y. \quad (3.53)$$

Se $x = a$, $y = v_9$, $z = b$ obtém-se que

$$0 = aaa^2(a^2b)v_9 + 2aaa^2 \underbrace{v_9aab}_{\lambda_2/2a^4} = aaa^2(a^2b)v_9 = L^2U(v_9v_7).$$

Portanto, $[v_9v_7]_6 = 0$.

Ao linearizar a identidade $xxxxx^2xy = 0$, obtem-se que

$$0 = zxxxx^2xy + xzxxx^2xy + xxzx^2xy + xxxzx^2xy + 2xxxx(xz)xy + xxxxx^2zy. \quad (3.54)$$

Se $x = a$, $y = v_8$ e $z = b$, então

$$\begin{aligned} 0 &= aaab \underbrace{a^2v_9}_{1/2a^4} + 2aaaa(ab)v_9 + aaaaa^2bv_8 \\ &= 2L^4(v_9ab) + L^4U(bv_8) \\ &= 2L^4(v_9ab) \end{aligned}$$

pois, como consequência da equação (3.50), $L^4U(bv_8) = 0$. Assim, $[v_9ab]_7 = 0$. Pode-se concluir que $\overline{L}_{v_9}$ está representado por matriz da seguinte forma

$$[\overline{L}_{v_9}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

De outro lado, se $x = a$, $y = v_8$, $z = b$ na equação (3.52), segue que

$$0 = aaa(ab) \underbrace{a^2 v_8}_{\gamma/2a^4} + aaaa^2(ab)v_8 = aaaa^2(ab)v_8 = L^3 U(v_8 ab),$$

portanto, $[v_8 ab]_6 = 0$, e como consequência da equação (3.51), segue que $[v_8 v_7]_7 = 0$.

Se $x = a$, $y = v_8$, $z = b$ na equação (3.53) tem-se que

$$0 = 2aa(ab) \underbrace{a^3 v_8}_0 + aaaa^2(a^2 b)v_8 + 2aaa^2 \underbrace{v_8 aab}_{\in \mathbb{F}a^4} = aaa^2(a^2 b)v_8 = L^2 U(v_8 v_7),$$

é dizer, $[v_8 v_7]_6 = 0$. Como consequência da equação (3.55), junto aos fatos $[v_8 v_7]_6 = [v_8 v_7]_7 = 0$, segue que $v_7 C_2 \subset C_2$, é dizer, $\bar{L}_{v_7} \in \mathcal{M}_{C_2}$, portanto, da equação (3.51) obtém-se que para cada $y \in \mathcal{A}$, $[v_7 y]_5 = 0$.

Se $x = a$, $y = a^2 b$, $z = b$ na equação (3.54), segue que

$$\begin{aligned} 0 &= aab \underbrace{aa^2 aa^2 b}_0 + aaab \underbrace{a^2 v_8}_{\gamma/2a^4} + 2aaaa(ab)v_8 + aaaaa^2 ba^2 b \\ &= 2aaaav_8 ab + L^4 U([bv_7]_5 b) = 2aaaav_8 ab = 2L^4(v_8 ab), \end{aligned}$$

portanto, $[v_8 ab]_7 = 0$. Dessa forma, conclui-se que o operador $\bar{L}_{v_8}$ esta representado por uma matriz da forma

$$[\bar{L}_{v_8}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \rho_1 & 0 & 0 \\ \rho_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{para } \rho_1, \rho_2 \in \mathbb{F}.$$

Das representações matriciais de $\bar{L}_{v_8}$, $\bar{L}_{v_9}$ segue que $v_6 C_2$, $v_7 C_2 \subset C_2$, portanto, $\bar{L}_{v_6}$, $\bar{L}_{v_7} \in \mathcal{M}_{C_2}$. Portanto a primeira linha das matrizes $[\bar{L}_{v_6}]$ e $[\bar{L}_{v_7}]$ é nula, isto é

$$[\bar{L}_{v_6}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & -a_{2,2} \end{pmatrix}, \quad [\bar{L}_{v_7}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,2} & b_{3,2} & -b_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Isto implica que v_6^2 , $v_6 v_7$ e $v_7^2 \in C$, portanto, C é uma subálgebra de $\mathcal{A}$ com $\text{codim } C = 1$. $\square$

Corolário 4. Se $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ de dimensão 9, e $\sum m_i \geq 6$, com $m_i > 0$, então

$$x^{m_1} x^{m_2} \dots x^{m_k} y = 0,$$

para todo $x, y \in \mathcal{A}$.

Como consequência do corolário acima, será suposto daqui em diante que $L^4 U \equiv 0$ é uma identidade, dessa forma, cada operador de grau 6 é uma identidade para a álgebra $\mathcal{A}$, é dizer, cada um dos operadores na Tabela 3.3, é o operador nulo. Particularmente serão usadas as linearizações das identidades $xxxxx^2 y = 0$ e $x^3 x^3 = 0$. Essas linearizações são:

$$0 = zxxxx^2 y + xzxxx^2 y + xxxxx^2 y + xxxzx^2 y + 2xxxx(xz)y \quad (3.56)$$

$$0 = x^3 x^2 y + 2x^3 xy \quad (3.57)$$

$$0 = (x^2 z)x^2 y + 2(xxz)x^2 y + 2x^3 yxz + 2(x^2 z)xy + 4(xxz)xy + 2x^3 zxy + 2x^3 xzy \quad (3.58)$$

3.2.2 Se L^5 não é uma identidade na álgebra $\mathcal{A}$.

Nesta seção será assumido que $L_x^5 \equiv 0$ não é uma identidade para $\mathcal{A}$. Inicialmente será provado que existe um elemento $a \in \mathcal{A}$ tal que $L_a^5 \not\equiv 0$ e a possui índice maximal, é dizer, $a^4 \neq 0$. Para provar esse fato, será necessário re-enunciar o Teorema 1 de [GFS05] onde, aliás, é adicionada informação. Embora, aquilo acrescentado no teorema segue da demonstração que os autores apresentaram para álgebras de dimensão 8, aqui será feita uma demonstração no caso geral.

Teorema 11. *Seja $\mathcal{A}$ tal que $L^5 \equiv 0$ não é uma identidade em $\mathcal{A}$. Então $\dim \mathcal{A} \geq 9$. Se $a, b \in \mathcal{A}$ são tal que $L_a^5(b) \neq 0$, então*

$$\phi = \phi_{a,b} = \{a, a^2, b, L(b), L^2(b), L^3(b), L^4(b), L^5(b)\}$$

é um conjunto linearmente independente, para $L = L_a$.

Demonstração. Unicamente será demonstrado que o conjunto ϕ é linearmente independente, pois o fato que $\dim \mathcal{A} \geq 9$ foi provado no Teorema 1 de [GFS05]. Seja

$$0 = \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \sum_{i=0}^5 \mu_i L^i(b). \quad (3.59)$$

Enxergue que da Tabela 3.2, segue que $L_{a^3} L^2(b) = -UL^3(b) = -2/5 L^5(b) \neq 0$, é dizer, $a^3 \neq 0$. Ao multiplicar a equação (3.59) por L^4 , tem-se que

$$0 = \mu_0 L^4(b) + \mu_1 L^5(b),$$

portanto, $\mu_0 = \mu_1 = 0$.

Caso $a^4 = 0$. Multiplicando por L^3 resulta que $0 = \mu_2 L^5(b)$, desse modo, $\mu_2 = 0$.

Ao multiplicar por L^2 e por U , obtém-se respetivamente que

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 a^3 + \mu_3 L^5(b), \\ 0 &= \alpha_1 a^3 + \mu_3 UL^3(b) = \alpha_1 a^3 + \frac{2}{5} \mu_3 L^5(b), \end{aligned}$$

é dizer, $\alpha_1 = \mu_3 = 0$.

Multiplicando por L , então

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_2 a^3 + \mu_4 L^5(b) \\ &= \alpha_2 a^3 - \frac{5}{2} \mu_4 L_{a^3} L^2(b) \\ &= \alpha_2 a^3 - \frac{5}{2} \mu_4 L_{aab}(a^3). \end{aligned}$$

Como o operador L_{aab} é nilpotente, segue que $\alpha_2 = \mu_4 = 0$. Logo tem-se que $\mu_5 = 0$.

Caso $a^4 \neq 0$. Multiplicando por L^3 e por UL respetivamente obtém-se que

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 a^4 + \mu_2 L^5(b), \\ 0 &= \alpha_1 a^4 + \mu_2 UL^3(b) = \alpha_1 a^4 + \frac{2}{5} \mu_2 L^5(b), \end{aligned}$$

dessa forma, $\alpha_1 = \mu_2 = 0$.

Ao multiplicar por L^2 e por U , resulta que

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_2 a^4 + \mu_3 L^5(b), \\ 0 &= \alpha_2 a^4 + \mu_3 U L^3(b) = \alpha_2 + \frac{2}{5} \mu_3 L^5(b), \end{aligned}$$

portanto, $\alpha_2 = \mu_3 = 0$.

Segue então que $\mu_4 = \mu_5 = 0$.

Consequentemente, ϕ é um conjunto linearmente independente. $\square$

A partir do teorema anterior, segue o seguinte lema:

Lema 16. *Seja $\mathcal{A}$ tal que $L_x^5 \equiv 0$ não é uma identidade em $\mathcal{A}$, e para cada $a \in \mathcal{A}$ tal que $L_a^5 \neq 0$ tem-se que $a^4 = 0$. Então $a^3 \notin \text{span } \phi_{a,b}$ onde $\phi_{a,b}$ é dado no Teorema 11.*

Demonstração. Seja $a \in \mathcal{A}$ tal que $L_a^5 \neq 0$, e $b \in \mathcal{A}$ tal que $L^5(b) \neq 0$. Suponha que $a^3 \in \text{span } \phi$, assim

$$a^3 = \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \sum_{i=0}^5 \mu_i L^i(b).$$

Ao multiplicar por L^3 segue que $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 0$, já que $a^4 = 0$. Ao multiplicar por U e por L^2 , tem-se que

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 a^3 + \mu_3 U L^3(b) = \alpha_1 a^3 + \frac{2}{5} \mu_3 L^5(b), \\ 0 &= \alpha_1 a^3 + \mu_3 L^5(b), \end{aligned}$$

é dizer, $\mu_3 = \alpha_1 = 0$. Multiplicando por L , obtém-se que

$$0 = \alpha_2 a^3 + \mu_4 L^5(b) = \alpha_2^2 a^2 + \alpha_2 \mu_4 L^4(b) + (\alpha_2 \mu_5 + \mu_4) L^5(b),$$

portanto, $\mu_4 = \alpha_2 = 0$. Dessa forma, resulta que $a^3 = \mu_5 L^5(b)$ para $\mu_5 \neq 0$. Como $L_{a^3} L^2 = -2/5 L^5$, então segue que $a^3 a b = -2/5 L^5(b) = -\frac{2}{5\mu_5} a^3$, o qual gera uma contradição, já que o operador L_{aab} é nilpotente. Logo, $a^3 \notin \text{span } \phi$. $\square$

Lema 17. *Se para cada $a \in \mathcal{A}$ tal que $L_a^5 \neq 0$ se satisfaz que $a^4 = 0$, então $\dim \mathcal{A} > 9$.*

Demonstração. Suponha por absurdo, é dizer, que $\dim \mathcal{A} \leq 9$. Pelo lema anterior, segue que $\dim \mathcal{A} = 9$. Se $a, b \in \mathcal{A}$ tal que $L_a^5(b) \neq 0$, então pelo lema anterior

$$\phi = \{a, a^2, a^3, b, L(b), L^2(b), L^3(b), L^4(b), L^5(b)\}$$

é uma base para $\mathcal{A}$. Para $j = 0, 1, 2$, seja

$$U L^j(b) = \sum_{i=1}^3 \alpha_{i,j} a^i + \sum_{i=0}^5 \lambda_{i,j} L^i(b).$$

Ao multiplicar por L^4 , tem-se que $0 = \lambda_{0,j} L^4(b) + \lambda_{1,j} L^5(b)$, então $\lambda_{0,j} = \lambda_{1,j} = 0$.

Caso $j \geq 1$, ao multiplicar por L^3 segue que $0 = \lambda_{2,j} L^5(b)$, é dizer, $\lambda_{2,j} = 0$. Aliás, do Corolário 3, como $U^2 L \equiv 0$, então para $j = 1$ ao multiplicar por U , obtém-se que

$$0 = U^2 L(b) = \alpha_{1,1} a^3 + \lambda_{3,1} U L^3(b) = \alpha_{1,1} a^3 + \frac{2}{5} \lambda_{3,1} L^5(b),$$

é dizer, $\alpha_{1,1} = \lambda_{3,1} = 0$.

Para $j = 2$, ao multiplicar por U e por L^2 , obtém-se respetivamente que

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_{1,2}a^3 + \lambda_{3,2}UL^3(b) = \alpha_{1,2}a^3 + \frac{2}{5}\lambda_{3,2}L^5(b), \\ 0 &= \alpha_{1,2}a^3 + \lambda_{3,2}L^5(b), \end{aligned}$$

dessa forma, $\alpha_{1,2} = \lambda_{3,2} = 0$. Multiplicando por L , dado que $LU L^2 = 0$, segue que

$$0 = \alpha_{2,2}a^3 + \lambda_{4,2}L^5(b),$$

portanto, $\alpha_{2,2} = \lambda_{4,2} = 0$. Dessa forma, obtém-se que L e U estão representados na base ϕ pelas seguintes matrizes:

$$[L] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [U] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha_{1,0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{2,0} & \alpha_{2,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha_{3,0} & \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{2,0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{3,0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{4,0} & \lambda_{4,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{5,0} & \lambda_{5,1} & \lambda_{5,2} & 2/5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De outro lado, da Tabela 3.1, tem-se que $U^2 = -10UL^2 + 2LUL + 4L^4$. Ao calcular $U^2(b)$ resulta

$$\begin{aligned} U^2(b) &= \alpha_{1,0}a^3 + \lambda_{2,0}UL^2(b) + \lambda_{3,0}UL^3(b) \\ &= (\alpha_{1,0} + \lambda_{2,0}\alpha_{3,2})a^3 + \left(\frac{2}{5}\lambda_{3,0} + \lambda_{2,0}\lambda_{5,2}\right)L^5(b) \end{aligned} \quad (3.60)$$

No entanto, $LUL(b) = \alpha_{2,1}a^3 + \lambda_{4,1}L^5(b)$, é dizer,

$$\begin{aligned} -10UL^2(b) + 2LUL(b) + 4L^4(b) &= -10\alpha_{3,2}a^3 - 10\lambda_{5,2}L^5(b) + 2\alpha_{2,1}a^3 + 2\lambda_{4,1}L^5(b) + 4L^4(b) \\ &= (-10\alpha_{3,2} + 2\alpha_{2,1})a^3 + 4L^4(b) + (-10\lambda_{5,2} + 2\lambda_{4,1})L^5(b). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Como os termos à direita das equações (3.60) e (3.61) devem ser iguais, isso gera uma contradição. Portanto, conclui-se que $\dim \mathcal{A} > 9$. $\square$

Como consequência do anterior lema, tem-se que se $\dim \mathcal{A} = 9$, o seguinte conjunto é não vazio:

$$S := \{a \in \mathcal{A} \mid L_a^5 \equiv 0 \text{ não é uma identidade e } a^4 \neq 0, \}$$

Lema 18. *Sejam $a \in S$ e $b' \in \mathcal{A}$ tais que $L_a^5(b') \neq 0$, e $\phi'_{a,b'}$ o conjunto dado no Teorema 11. Então o subespaço $\mathcal{B} = \text{span } \phi'$ de dimensão 8 não é invariante pelo operador L_a ou pelo operador U_a .*

Demonstração. Demonstração por redução ao absurdo, é dizer, suponha que $\mathcal{B}$ fica invariante pelos operadores L_a e U_a . Seja

$$a^3 = \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \sum_{i=0}^5 \mu_i L^i(b').$$

Ao multiplicar a^3 por L^4 , segue que $0 = \mu_0 L^4(b') + \mu_1 L^5(b')$, portanto, $\mu_0 = \mu_1 = 0$. Multiplicando por LU e por L^3 obtém-se que

$$0 = \alpha_1 a^4 + \mu_2 LUL^2(b') = \alpha_1 a^4,$$

$$0 = \alpha_1 a^4 + \mu_2 L^5(b'),$$

é dizer, $\alpha_1 = \mu_2 = 0$. Ao multiplicar por U e por L^2 , tem-se que

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_2 a^4 + \mu_3 UL^3(b') = \alpha_2 a^4 + \frac{2}{5} \mu_3 L^5(b'), \\ 0 &= \alpha_2 a^4 + \mu_3 L^5(b'), \end{aligned}$$

onde se conclui que $\alpha_2 = \mu_3 = 0$. Desse modo, $a^3 = \mu_4 L^4(b') + \mu_5 L^5(b')$ para algum $\mu_4 \neq 0$, já que $a^4 \neq 0$. Seja $b = \mu_4 b' + \mu_5 L(b')$, então

$$a^3 = L^4(b), \quad a^4 = L^5(b),$$

e

$$\phi = \{a, a^2, a^3, a^4, b, L(b), L^2(b), L^3(b)\}$$

é uma base para $\mathcal{B}$. Como $U(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$, então $U(b), UL(b)$ e $UL^2(b) \in \mathcal{B}$. Para $j = 0, 1, 2$ seja

$$UL^j(b) = \sum_{i=1}^4 \alpha_{i,j} a^i + \sum_{i=0}^3 \lambda_{i,j} L^i(b).$$

Ao multiplicar por L^4 obtém-se que

$$\begin{aligned} 0 &= L^4 UL^j(b) = \lambda_{0,j} L^4(b) + \lambda_{1,j} L^5(b) \\ &= \lambda_{0,j} a^3 + \lambda_{1,j} a^4, \end{aligned}$$

é dizer, $\lambda_{0,j} = \lambda_{1,j} = 0$.

Se $j \geq 1$, ao multiplicar por LU e por L^3 , segue que

$$\begin{aligned} 0 &= LU^2 L^j(b) = \alpha_{1,j} a^4 + \lambda_{2,j} LUL^2(b) = \alpha_{1,j} a^4, \\ 0 &= L^3 UL^j(b) = \alpha_{1,j} a^4 + \lambda_{2,j} L^5(b) = (\alpha_{1,j} + \lambda_{2,j}) a^4, \end{aligned}$$

portanto, $\alpha_{1,j} = \lambda_{2,j} = 0$. Ao multiplicar por U , como $U^2 L \equiv 0$, segue que

$$\begin{aligned} 0 &= U^2 L^j(b) = \alpha_{2,j} a^4 + \lambda_{3,j} UL^3(b) \\ &= \left(\alpha_{2,j} + \frac{2}{5} \lambda_{3,j}\right) a^4, \end{aligned}$$

é dizer, $\alpha_{2,j} = -2/5 \lambda_{3,j}$.

Se $j = 2$, ao multiplicar por L^2 , obtém-se que

$$0 = L^2 UL^2(b) = \alpha_{2,2} a^4 + \lambda_{3,2} L^5(b) = (\alpha_{2,2} + \lambda_{3,2}) a^4,$$

portanto, $\alpha_{2,2} = -\lambda_{3,2}$, e da igualdade entre os coeficientes acima, para $j = 2$, segue que $\alpha_{2,2} = \lambda_{3,2} = 0$.

Por outro lado, dado que $LUL^2 \equiv 0$, ao multiplicar por L resulta que

$$0 = LUL^2(b) = \alpha_{3,2} a^4,$$

dessa forma, $\alpha_{3,2} = 0$.

Além disso, pela Tabela 3.1, é conhecido que $L_{a^3}L(b) = 4UL^2(b) - 2L^4(b) - LUL(b)$, então

$$a^3ab = \left(-2 - \frac{3}{5}\lambda_{3,1}\right)a^3 + (4\alpha_{4,2} - \alpha_{3,1})a^4.$$

Como $L_{a^4}L \equiv 0$, então para cada $k \geq 1$ segue que

$$L_{ab}^k(a^3) = \left(-2 - \frac{3}{5}\lambda_{3,1}\right)^k a^3 + \left(-2 - \frac{3}{5}\lambda_{3,1}\right)^{k-1} (4\alpha_{4,2} - \alpha_{3,1})a^4.$$

Dado que o operador L_{ab} é nilpotente, resulta que $\lambda_{3,1} = -10/3$. Portanto, $\alpha_{2,1} = 4/3$. Dessa forma

$$\begin{aligned} U(b) &= \alpha_{1,0}a + \alpha_{2,0}a^2 + \alpha_{3,0}a^3 + \alpha_{4,0}a^4 + \lambda_{2,0}L^2(b) + \lambda_{3,0}L^3(b), \\ UL(b) &= \frac{4}{3}a^2 + \alpha_{3,1}a^3 + \alpha_{4,1}a^4 - \frac{10}{3}L^3(b), \\ UL^2(b) &= \alpha_{4,2}a^4. \end{aligned}$$

Da Tabela 3.2, é sabido que $LU^2 - 10UL^3 - 2L^2UL \equiv 0$, no entanto, das igualdades obtidas tem-se que $LU^2(b) = \alpha_{1,0}a^4$, $UL^3(b) = 2/5a^4$, $L^2UL(b) = -2a^4$, portanto

$$0 = \alpha_{1,0}a^4 - 4a^4 + 4a^4,$$

é dizer, $\alpha_{1,0} = 0$, desse modo $U^2(b), ULU(b) \in \text{span}\{a^4\}$. Se $x = a$, $y = b$, $z = a^2b$ na equação (3.44), obtém-se que

$$0 = a^4ba^2b + 4 \underbrace{(a^2aa^2b)}_{\in \mathbb{F}a^4}(ab) = a^4ba^2b.$$

Se $x = a^2$, $y = z = b$ na equação (3.7) segue que

$$\begin{aligned} 0 &= 2(a^4b)(a^2b) + 4 \underbrace{(a^2a^2b)}_{\in \mathbb{F}a^4}(a^2b) + 2a^4ba^2b + a^4a^2b^2 \\ &= (a^4b)(a^2b) = -4(aa^2ab)(a^2b) = (8a^3 - 4\alpha_{3,1}a^4)(a^2b) = 8L_{a^3}U(b) = 16UL^3(b) = \frac{32}{5}a^4. \end{aligned}$$

Isso é um absurdo, portanto, segue que ou o operador L ou o operador U não preserva o subespaço $\mathcal{B}$. $\square$

Lema 19. *Seja $a \in S$. Se $\mathcal{B} = \text{span } \phi'_{a,b}$ não é invariante pelo operador L_a , então existe $b \in \mathcal{A}$ tal que*

$$\phi = \{a, a^2, a^3, a^4, b, L(b), L^2(b), L^3(b), L^4(b)\}$$

é uma base para $\mathcal{A}$. Ainda mais, os operadores L_a e U_a estão representados nesta base pelas matrizes

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 4 + 6/5\lambda_{3,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{2,0} & -2/5\lambda_{3,1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{3,0} & \alpha_{3,1} & -\lambda_{4,2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha_{4,0} & \alpha_{4,1} & \alpha_{4,2} & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 + 3\lambda_{3,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{3,0} & \lambda_{3,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{4,0} & \lambda_{4,1} & \lambda_{4,2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

respectivamente.

Demonstração. Como L não preserva o subespaço $\mathcal{B}$, então $a^3 \notin \mathcal{B}$, portanto,

$$\{a, a^2, a^3, b', L(b'), L^2(b'), L^3(b'), L^4(b'), L^5(b')\}$$

é uma base para $\mathcal{A}$. Se

$$a^4 = \sum_{i=1}^3 \alpha_i a^i + \sum_{i=0}^5 \mu_i L^i(b'),$$

ao multiplicar por L^4 , segue que $0 = \mu_0 L^4(b') + \mu_1 L^5(b')$, é dizer, $\mu_0 = \mu_1 = 0$. Multiplicando por L^3 , obtém-se que

$$0 = \alpha_1 a^4 + \mu_2 L^5(b'),$$

desse modo, $\alpha_1 = \mu_2 = 0$. Multiplicando por L^2 segue que

$$0 = \alpha_2 a^4 + \mu_3 L^5(b'),$$

portanto, $\alpha_2 = \mu_3 = 0$. Ao multiplicar por L , tem-se que

$$0 = \alpha_3 a^4 + \mu_4 L^5(b')$$

logo $\alpha_3 = \mu_4 = 0$. Por isso, conclui-se que $a^4 = \mu_5 L^5(b')$ onde $\mu_5 \neq 0$. Se $b = \mu_5 b'$, então uma base para $\mathcal{A}$ é dada pelo conjunto

$$\phi = \{a, a^2, a^3, a^4, b, L(b), L^2(b), L^3(b), L^4(b)\},$$

satisfazendo $L^5(b) = a^4$.

Para $j = 0, 1, 2$ seja

$$UL^j(b) = \sum_{i=1}^4 \alpha_{i,j} a^i + \sum_{i=0}^4 \lambda_{i,j} L^i(b).$$

Ao multiplicar por L^4 , segue que $0 = \lambda_{0,j} L^4(b) + \lambda_{1,j} L^5(b) = \lambda_{1,j} a^4 + \lambda_{0,j} L^4(b)$, é dizer, $\lambda_{0,j} = \lambda_{1,j} = 0$.

Se $j \geq 1$, ao multiplicar por LU e por L^3 , já que $LUL^2 \equiv 0$, obtém-se

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_{1,j} a^4 + \lambda_{2,j} LUL^2(b) = \alpha_{1,j} a^4, \\ 0 &= \alpha_{1,j} a^4 + \lambda_{2,j} L^5(b) = (\alpha_{1,j} + \lambda_{2,j}) a^4, \end{aligned}$$

portanto, $\alpha_{1,j} = \lambda_{2,j} = 0$.

Se $j = 2$, multiplicando por U e por L^2 segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_{2,2} a^4 + \lambda_{3,2} UL^3(b) = \alpha_{2,2} a^4 + \frac{2}{5} \lambda_{3,2} L^5(b) = (\alpha_{2,2} + \frac{2}{5} \lambda_{3,2}) a^4, \\ 0 &= \alpha_{2,2} a^4 + \lambda_{3,2} L^5(b) = (\alpha_{2,2} + \lambda_{3,2}) a^4, \end{aligned}$$

dessa forma, obtém-se que $\alpha_{2,2} = \lambda_{3,2} = 0$.

Da igualdade $LUL^2(b) = 0$, segue que $(\alpha_{3,2} + \lambda_{4,2}) a^4 = 0$, portanto, $\alpha_{3,2} + \lambda_{4,2} = 0$.

Da igualdade $U^2 L(b) = 0$, resulta que $(\alpha_{2,1} + 2/5 \lambda_{3,1}) a^4 = 0$, por conseguinte, $\alpha_{2,1} + 2/5 \lambda_{3,1} = 0$.

Da identidade $LUL^2 - 10UL^3 - 2L^2UL \equiv 0$ calculada em b obtém-se que

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha_{1,0} + \lambda_{2,0}(\alpha_{3,2} + \lambda_{4,2})) a^4 - 4a^4 - 2(\alpha_{2,1} + \lambda_{3,1}) a^4 \\ &= (\alpha_{1,0} - 4 - 6/5 \lambda_{3,1}) a^4, \end{aligned}$$

é dizer, $\alpha_{1,0} = 4 + 6/5\lambda_{3,1}$.

Da identidade $ULU - 3UL^3 - 1/2L^2UL - 1/2L^3U \equiv 0$ calculada em b resulta que

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha_{1,0} + \frac{2}{5}\lambda_{2,0})a^4 - \frac{6}{5}a^4 - \frac{1}{2}(\alpha_{2,1} + \lambda_{3,1})a^4 - \frac{1}{2}(\alpha_{1,0} + \lambda_{2,0})a^4 \\ &= (\frac{1}{2}\alpha_{1,0} - \frac{1}{10}\lambda_{2,0} - \frac{6}{5} - \frac{3}{10}\lambda_{3,1})a^4 \\ &= (2 + \frac{3}{5}\lambda_{3,1} - \frac{6}{5} - \frac{1}{10}\lambda_{2,0} - \frac{3}{10}\lambda_{3,1})a^4 \\ &= (\frac{4}{5} + \frac{3}{10}\lambda_{3,1} - \frac{1}{10}\lambda_{2,0})a^4, \end{aligned}$$

portanto, obtém-se que $\lambda_{2,0} = 8 + 3\lambda_{3,1}$. É dizer,

$$\begin{aligned} U(b) &= (4 + 6/5\lambda_{3,1})a + \alpha_{2,0}a^2 + \alpha_{3,0}a^3 + \alpha_{4,0}a^4 + (8 + 3\lambda_{3,1})L^2(b) + \lambda_{3,0}L^3(b) + \lambda_{4,0}L^4(b), \\ UL(b) &= -2/5\lambda_{3,1}a^2 + \alpha_{3,1}a^3 + \alpha_{4,1}a^4 + \lambda_{3,1}L^3(b) + \lambda_{4,1}L^4(b), \\ UL^2(b) &= -\lambda_{4,2}a^3 + \alpha_{4,2}a^4 + \lambda_{4,2}L^4(b). \end{aligned}$$

Dos resultados obtidos acima, segue que as matrizes que representam os operadores L e U na base ϕ são as apresentadas no lema. $\square$

O seguinte lema exhibe uma subálgebra de codimensão 2 no caso em que $\mathcal{A}$ satisfaça as hipótese do lema anterior.

Lema 20. *Seja $\mathcal{A}$ como no lema anterior. Então*

$$C = \text{span}\{a, a^2, a^3, a^4, L^2(b), L^3(b), L^4(b)\}$$

é uma subálgebra de $\mathcal{A}$.

Demonstração. Dado que L e U estão representados pelas matrizes dadas no lema acima, enxergue que $L(C)$, $\text{Im } U \subset C$. Aliás, como L_{a^k} pertence à álgebra gerada por $\{L, U\}$, segue que $\text{Im } L_{a^3}, \text{Im } L_{a^4} \subset C$. Portanto, para provar que C é uma subálgebra de $\mathcal{A}$, resta provar que os produtos $(aab)^2$, $(aab)(aaab)$, $(aab)(aaaab)$, $(aaab)^2$, $(aaab)(aaaab)$ e $(aaaab)^2$ estão em C .

Por outra parte, veja que $L^4(x) = 0 \iff x \in C$, já que se $x = \sum \alpha_{i=1}^4 a^i + \sum_{i=0}^4 \mu_i L^i(b)$, ao multiplicar por L^4 , segue que

$$L^4(x) = \mu_0 L^4(a) + \mu_1 L^5(b) = \mu_0 L^4(b) + \mu_1 a^4.$$

Se $x = a$, $y = aaaab$, $z \in \mathcal{A}$ na equação (3.56), cumpre-se que $0 = L^4(az)(aaaab)$, é dizer, $(az)(aaaab) \in C$ para cada $z \in \mathcal{A}$, dessa forma, conclui-se que $(aab)(aaaab)$, $(aaab)(aaaab)$ e $(aaaab)^2 \in C$.

Se $x = a$, $y = aaab$, $z \in \mathcal{A}$ na mesma equação, obtém-se que

$$\begin{aligned} 0 &= aaaz \underbrace{a^2 aaab}_{2/5a^4} + 2aaaa(az)aaab \\ &= aaaa(az)aaab = L^4((az)aaab), \end{aligned}$$

portanto, $(az)(aaab) \in C$ para cada $z \in C$, dessa forma segue que $(aab)(aaab)$, $(aaab)^2 \in C$.

Se $x = a$, $y = b$, $z = ab$ na equação (3.44), então $0 = a^4 bab + 4(a^2 aab)(ab)$, portanto, $0 =$

$L^2((a^2aab)(ab))$. Se $x = a$, $y = aab$, $z = ab$ na equação (3.56), obtém-se que

$$0 = aa(ab) \underbrace{aa^2aab}_0 + a \underbrace{aa(ab)a^2aab}_0 + 2aaaa(aab)^2 = 2aaaa(aab)^2 = L^4(aab)^2,$$

onde se conclui que $(aab)^2 \in C$. Dessa forma, é provado que C é uma subálgebra de $\mathcal{A}$. $\square$

Neste caso, $a^4b = -4aa^2ab = 8/5\lambda_{3,1}a^3 - 4(\alpha_{3,1} + \lambda_{4,1})a^4 - 4\lambda_{3,1}L^4(b)$. Se $\lambda_{3,1} = 0$, então $a^4b = -4\alpha_{3,1}$, portanto, $\alpha_{3,1} = 0$, dessa forma, obtém-se que $a^4b = 0$, de modo que o anulador de $\mathcal{A}$ é não nulo, já que $a^4x = 0$ para cada $x \in \mathcal{A}$. Caso $\lambda_{3,1} \neq 0$, é possível mostrar que $C_1 = \text{span}\{a, a^2, a^3, a^4, L(b), L^2(b), L^3(b), L^4(b)\}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$.

Corolário 5. *Seja $\mathcal{A}$ de dimensão 9 tal que $L_x^5 \equiv 0$ não é uma identidade em $\mathcal{A}$. Se $a \in S$ satisfaz que L_a não preserva o subespaço $\mathcal{B}$. Então $\mathcal{A}$ é solúvel.*

Como consequência do lema anterior, agora será suposto que se $\dim \mathcal{A} = 9$ e $L_x^5 \equiv 0$ não é uma identidade em $\mathcal{A}$, então para cada $a \in S$, tem-se que $L(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$. Dessa forma, $U(\mathcal{B}) \not\subset \mathcal{B}$, é dizer, a^2b , a^2ab ou $a^2aab \notin \mathcal{B}$.

Do fato que $a^3 \in \mathcal{B}$, o argumento feito na demonstração do Lema 18, mostra nestas condições, que é possível fazer a escolha de um elemento $b \in \mathcal{A}$ tal que $a^3 = L^4(b)$. Portanto, uma base para $\mathcal{B}$ é dada pelo conjunto $\phi' = \{a, a^2, a^3, a^4, b, L(b), L^2(b), L^3(b)\}$.

Será denotado por

$$v_{i+5} = L^i(b) \quad \text{para } 0 \leq i \leq 3. \quad (3.62)$$

Inicialmente será suposto que $a^2b \notin \mathcal{B}$, portanto, uma base para $\mathcal{A}$ é dada pelo conjunto

$$\phi = \phi_{a,b} = \{a, a^2, a^3, a^4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\},$$

onde $v_9 = a^2b$.

Lema 21. *Seja $a \in S$ tal que $\{a, a^2, a^3, a^4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$ é uma base para $\mathcal{A}$. As possibilidades para as representações matriciais de L_a e U_a nessa base são as seguintes:*

i.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -16/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \delta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16/5\lambda_{4,1} & 16/5\lambda_{4,2} & 0 & -32\lambda_{4,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2/15\alpha_1 & -2/3\alpha_2\lambda_{4,2} & 0 & 20/3\alpha_2\lambda_{4,2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{3,1} & -\delta_4\lambda_{4,2} & 0 & 10\delta_4\lambda_{4,2} - 16/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{4,1} & \alpha_{4,2} & 2/5 & 2\alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10\lambda_{4,1} & 10\lambda_{4,2} & 0 & -100\lambda_{4,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3\lambda_1 & 5/3\lambda_2\lambda_{4,2} & 0 & -50/3\lambda_2\lambda_{4,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_{4,1} & \lambda_{4,2} & 0 & -10\lambda_{4,2} \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 25\delta_4\lambda_{4,1}^2 + 25\alpha_{3,1}\lambda_{4,1} - 5\delta_3\lambda_{4,1} - 18, & \lambda_1 &= 10\delta_4\lambda_{4,1}^2 + 10\alpha_{3,1}\lambda_{4,1} - 5\delta_3\lambda_{4,1} - 18, \\ \alpha_2 &= 5\alpha_{3,1} - \delta_3 + 5\delta_4\lambda_{4,1}, & \lambda_2 &= 2\alpha_{3,1} - \delta_3 + 2\delta_4\lambda_{4,1}, \\ \alpha_3 &= \alpha_{3,1} - 5\alpha_{4,2} + \delta_4\lambda_{4,1}, & \lambda_{4,2} &\neq 0. \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \delta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5\delta_2 - 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2/3\alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{3,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{4,1} & \alpha_{4,2} & 2/5 & 2\alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\lambda_{4,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/3\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_{5,1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 5\delta_4\lambda_{4,1}^2 + 5\alpha_{3,1}\lambda_{4,1} + 20\alpha_{4,2}\lambda_{4,1} - \delta_3\lambda_{5,1} - 2, & \alpha_3 &= \alpha_{3,1} - 5\alpha_{4,2} + \delta_4\lambda_{4,1}, \\ \lambda_1 &= 2\delta_4\lambda_{4,1}^2 + 2\alpha_{3,1}\lambda_{4,1} + 8\alpha_{4,2}\lambda_{4,1} - \delta_3\lambda_{4,1} - 2, & \delta_2\lambda_{5,1} &= 0. \end{aligned}$$

Demonstração. Seja

$$L(v_9) = \sum_{i=1}^4 \delta_i a^i + \sum_{i=0}^4 \delta_{i+5} v_{i+5}.$$

Dado que $L^6 \equiv 0$, e $L(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$, então

$$\begin{aligned} 0 &= L^6(v_9) = b_0 + \delta_9 L^5(v_9) = b_1 + \delta_9^2 L^4(v_9) = b_2 + \delta_9^3 L^3(v_9) \\ &= b_3 + \delta_9^4 L^2(v_9) = b_4 + \delta_9^5 L(v_9) = b_5 + \delta_9^6 v_9, \end{aligned}$$

onde $b_i \in \mathcal{B}$, dessa forma, conclui-se que $\delta_9 = 0$.

Ao multiplicar $L(v_9)$ por L^4 , segue que $0 = \delta_5 L^4(b) + \delta_6 L^5(b) = \delta_5 a^3 + \delta_6 a^4$, é dizer, $\delta_5 = \delta_6 = 0$. Multiplicando por L^3 e por UL , obtém-se que

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_1 a^4 + \delta_7 L^5(b) = (\delta_1 + \delta_7) a^4, \\ 0 &= \delta_1 a^4 + \delta_7 UL^3(b) = (\delta_1 + \frac{2}{5}\delta_7) a^4, \end{aligned}$$

portanto, $\delta_1 = \delta_7 = 0$. Desse modo,

$$L(v_9) = \delta_2 a^2 + \delta_3 a^3 + \delta_4 a^4 + \delta_8 v_8.$$

Para $j = 1, 2$, seja

$$UL^j(b) = \sum_{i=1}^4 \alpha_{i,j} a^i + \sum_{i=0}^4 \lambda_{i,j} v_{i+5}.$$

Ao multiplicar por L^4 , segue que $0 = \lambda_{0,j} L^4(b) + \lambda_{1,j} L^5(b) = \lambda_{0,j} a^3 + \lambda_{1,j} a^4$, portanto $\lambda_{0,j} = \lambda_{1,j} = 0$.

Da igualdade $LUL^2(b) = 0$ segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_{1,2} a^2 + (\alpha_{2,2} + \lambda_{3,2}) a^3 + \alpha_{3,2} a^4 + \lambda_{2,2} v_8 + \lambda_{4,2} L(v_9) \\ &= (\alpha_{1,2} + \delta_2 \lambda_{4,2}) a^2 + (\alpha_{2,2} + \lambda_{3,2} + \delta_3 \lambda_{4,2}) a^3 + (\alpha_{3,2} + \delta_4 \lambda_{4,2}) a^4 + (\lambda_{2,2} + \delta_8 \lambda_{4,2}) v_8, \end{aligned}$$

é dizer,

$$\begin{aligned}
 \alpha_{1,2} &= -\delta_2 \lambda_{4,2}, \\
 \alpha_{2,2} &= -\lambda_{3,2} - \delta_3 \lambda_{4,2} \\
 \alpha_{3,2} &= -\delta_4 \lambda_{4,2}, \\
 \lambda_{2,2} &= -\delta_8 \lambda_{4,2}.
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

Da identidade $L^3 UL \equiv 0$, obtém-se que

$$\begin{aligned}
 0 &= \alpha_{1,1} a^4 + \lambda_{2,1} a^4 + \lambda_{4,1} L^3(v_9) \\
 &= (\alpha_{1,1} + \lambda_{2,1}) a^4 + \delta_2 \lambda_{4,1} a^4 + \delta_8 \lambda_{4,1} a^4 \\
 &= (\alpha_{1,1} + \lambda_{2,1} + \delta_2 \lambda_{4,1} + \delta_8 \lambda_{4,1}) a^4
 \end{aligned}$$

por isto,

$$\lambda_{2,1} + \delta_8 \lambda_{4,1} = -\alpha_{1,1} - \delta_2 \lambda_{4,1}.$$

Da identidade $ULUL \equiv 0$, tem-se que

$$\begin{aligned}
 0 &= \alpha_{1,1} a^4 + \frac{2}{5} \lambda_{2,1} a^4 + \lambda_{4,1} UL(v_9) \\
 &= \left(\alpha_{1,1} + \frac{2}{5} \lambda_{2,1} \right) a^4 + \delta_2 \lambda_{4,1} a^4 + \frac{2}{5} \delta_8 \lambda_{4,1} a^4 \\
 &= \left(\alpha_{1,1} + \frac{2}{5} \lambda_{2,1} + \delta_2 \lambda_{4,1} + \frac{2}{5} \delta_8 \lambda_{4,1} \right) a^4
 \end{aligned}$$

dessa forma

$$\begin{aligned}
 2\lambda_{2,1} + 2\delta_8 \lambda_{4,1} &= -5\alpha_{1,1} - 5\delta_2 \lambda_{4,1} \\
 &= 5\lambda_{2,1} + 5\delta_8 \lambda_{4,1},
 \end{aligned}$$

logo conclui-se que

$$\begin{aligned}
 \alpha_{1,1} &= -\delta_2 \lambda_{4,1}, \\
 \lambda_{2,1} &= -\delta_8 \lambda_{4,1}.
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 UL(b) &= -\delta_2 \lambda_{4,1} a + \alpha_{2,1} a^2 + \alpha_{3,1} a^3 + \alpha_{4,1} a^4 - \delta_8 \lambda_{4,1} v_7 + \lambda_{3,1} v_8 + \lambda_{4,1} v_9, \\
 UL^2(b) &= -\delta_2 \lambda_{4,2} a - (\lambda_{3,2} + \delta_3 \lambda_{4,2}) a^2 - \delta_4 \lambda_{4,2} a^3 + \alpha_{4,2} a^4 - \delta_8 \lambda_{4,2} v_7 + \lambda_{3,2} v_8 + \lambda_{4,2} v_9.
 \end{aligned}$$

Se

$$U(v_9) = \sum_{i=1}^4 \tau_i a^i + \sum_{i=0}^4 \tau_{i+5} v_{i+5},$$

ao multiplicar por L^4 , obtém-se que $0 = \tau_5 L^4(b) + \tau_6 L^5(b) = \tau_5 a^3 + \tau_6 a^4$, é dizer, $\tau_5 = \tau_6 = 0$.

Da identidade $U^2 + 10UL^2 - 2LUL - 4L^4 \equiv 0$ calculada em b , resulta que

$$\begin{aligned}
 0 &= \tau_1 a + \tau_2 a^2 + \tau_3 a^3 + \tau_4 a^4 + \tau_7 v_7 + \tau_8 v_8 + \tau_9 v_9 \\
 &\quad + 10\alpha_{1,2} a + 10\alpha_{2,2} a^2 + 10\alpha_{3,2} a^3 + 10\alpha_{4,2} a^4 + 10\lambda_{2,2} v_7 + 10\lambda_{3,2} v_8 + 10\lambda_{4,2} v_9 \\
 &\quad - 2\alpha_{1,1} a^2 - 2\alpha_{2,1} a^3 - 2\alpha_{3,1} a^4 - 2\lambda_{2,1} v_8 - 2\lambda_{3,1} a^3 - 2\lambda_{4,1} L(v_9) - 4a^3 \\
 &= (\tau_1 + 10\alpha_{1,2}) a + (\tau_2 + 10\alpha_{2,2}) a^2 + \beta_3 a^3 + (\tau_4 + 10\alpha_{4,2} - 2\alpha_{3,1} - 2\delta_4 \lambda_{4,1}) a^4 \\
 &\quad + (\tau_7 + 10\lambda_{2,2}) v_7 + (\tau_8 + 10\lambda_{3,2}) v_8 + (\tau_9 + 10\lambda_{4,2}) v_9,
 \end{aligned}$$

onde

$$0 = \beta_3 = \tau_3 - 10\delta_4\lambda_{4,2} - 2\alpha_{2,1} - 2\lambda_{3,1} - 2\delta_3\lambda_{4,1} - 4$$

portanto,

$$\begin{aligned}\tau_1 &= 10\delta_2\lambda_{4,2}, \\ \tau_2 &= 10\lambda_{3,2} + 10\delta_3\lambda_{4,2}, \\ \tau_4 &= \underbrace{2\alpha_{3,1} + 2\delta_4\lambda_{4,1} - 10\alpha_{4,2}}_{2\alpha_3}, \\ \tau_7 &= 10\delta_8\lambda_{4,2}, \\ \tau_8 &= -10\lambda_{3,2}, \\ \tau_9 &= -10\lambda_{4,2}.\end{aligned}\tag{3.65}$$

Da identidade $U^2L^2 \equiv 0$ segue que

$$\begin{aligned}0 &= \alpha_{1,2}a^3 + \alpha_{2,2}a^4 + \lambda_{2,2}UL^2(b) + \frac{2}{5}\lambda_{3,2}a^4 + \lambda_{4,2}U(v_9) \\ &= \alpha_{1,2}a^3 + \left(\alpha_{2,2} + \frac{2}{5}\lambda_{3,2}\right)a^4 + \alpha_{1,2}\lambda_{2,2}a + \alpha_{2,2}\lambda_{2,2}a^2 + \alpha_{3,2}\lambda_{2,2}a^3 \\ &\quad + \alpha_{4,2}\lambda_{2,2}a^4 + \lambda_{2,2}^2v_7 + \lambda_{2,2}\lambda_{3,2}v_8 + \lambda_{2,2}\lambda_{4,2}v_9 \\ &\quad + \tau_1\lambda_{4,2}a + \tau_2\lambda_{4,2}a^2 + \tau_3\lambda_{4,2}a^3 + \tau_4\lambda_{4,2}a^4 + \tau_7\lambda_{4,2}v_7 + \tau_8\lambda_{4,2}v_8 + \tau_9\lambda_{4,2}v_9 \\ &= (\alpha_{1,2}\lambda_{2,2} + \tau_1\lambda_{4,2})a + (\alpha_{2,2}\lambda_{2,2} + \tau_2\lambda_{4,2})a^2 + (\alpha_{1,2} + \alpha_{3,2}\lambda_{2,2} + \tau_3\lambda_{4,2})a^3 \\ &\quad + \left(\alpha_{2,2} + \frac{2}{5}\lambda_{3,2} + \alpha_{4,2}\lambda_{2,2} + \tau_4\lambda_{4,2}\right)a^4 + (\lambda_{2,2}^2 + \tau_7\lambda_{4,2})v_7 \\ &\quad + (\lambda_{2,2}\lambda_{3,2} + \tau_8\lambda_{4,2})v_8 + \lambda_{4,2}(\lambda_{2,2} + \tau_9)v_9 \\ &= \delta_2\lambda_{4,2}^2(\delta_8 + 10)a + \lambda_{4,2}(\lambda_{3,2} + \delta_3)(\delta_8 + 10)a^2 + (\alpha_{1,2} + \alpha_{3,2}\lambda_{2,2} + \tau_3\lambda_{4,2})a^3 \\ &\quad + \left(-\frac{3}{5}\lambda_{3,2} - \delta_3\lambda_{4,2} + 2\alpha_{3,1}\lambda_{4,2} + 2\delta_4\lambda_{4,1}\lambda_{4,2} - \alpha_{4,2}\lambda_{4,2}(\delta_8 + 10)\right)a^4 \\ &\quad + \delta_8\lambda_{4,2}^2(\delta_8 + 10)v_7 - \lambda_{3,2}\lambda_{4,2}(\delta_8 + 10)v_8 - \lambda_{4,2}^2(\delta_8 + 10)v_9,\end{aligned}$$

é dizer,

$$\begin{aligned}0 &= \lambda_{4,2}(\delta_8 + 10), \\ 0 &= \lambda_{4,2}(\tau_3 - \delta_2 + \delta_4\delta_8\lambda_{4,2}), \\ \lambda_{3,2} &= \frac{5}{3}\lambda_{4,2}\underbrace{(2\delta_4\lambda_{5,1} + 2\alpha_{3,1} - \delta_3)}_{\lambda_2}.\end{aligned}\tag{3.66}$$

Da identidade $U^2L \equiv 0$ segue que

$$\begin{aligned}0 &= \alpha_{1,1}a^3 + \alpha_{2,1}a^4 + \lambda_{2,1}UL^2(b) + \frac{2}{5}\lambda_{3,1}a^4 + \lambda_{4,1}U(v_9) \\ &= \alpha_{1,1}a^3 + \left(\alpha_{2,1} + \frac{2}{5}\lambda_{3,1}\right)a^4 + \alpha_{1,2}\lambda_{2,1}a + \alpha_{2,2}\lambda_{2,1}a^2 + \alpha_{3,2}\lambda_{2,1}a^3 \\ &\quad + \alpha_{4,2}\lambda_{2,1}a^4 + \lambda_{2,1}\lambda_{2,2}v_7 + \lambda_{2,1}\lambda_{3,2}v_8 + \lambda_{2,1}\lambda_{4,2}v_9 \\ &\quad + \tau_1\lambda_{4,1}a + \tau_2\lambda_{4,1}a^2 + \tau_3\lambda_{4,1}a^3 + \tau_4\lambda_{4,1}a^4 + \tau_7\lambda_{4,1}v_7 + \tau_8\lambda_{4,1}v_8 + \tau_9\lambda_{4,1}v_9 \\ &= (\alpha_{1,2}\lambda_{2,1} + \tau_1\lambda_{4,1})a + (\alpha_{2,2}\lambda_{2,1} + \tau_2\lambda_{4,1})a^2 + (\alpha_{1,1} + \alpha_{3,2}\lambda_{2,1} + \tau_3\lambda_{4,1})a^3 \\ &\quad + \left(\alpha_{2,1} + \frac{2}{5}\lambda_{3,1} + \alpha_{4,2}\lambda_{2,1} + \tau_4\lambda_{4,1}\right)a^4 + (\lambda_{2,1}\lambda_{2,2} + \tau_7\lambda_{4,1})v_7 \\ &\quad + (\lambda_{2,1}\lambda_{3,2} + \tau_8\lambda_{4,1})v_8 + (\lambda_{2,1}\lambda_{4,2} + \tau_9\lambda_{4,1})v_9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \delta_2 \lambda_{4,1} \lambda_{4,2} (\delta_8 + 10) a + \eta_2 \lambda_{4,2} (\delta_8 + 10) a^2 + \lambda_{4,1} (-\delta_2 + \delta_4 \delta_8 \lambda_{4,2} + \tau_3) a^3 \\
&\quad + (\alpha_{2,1} + \frac{2}{5} \lambda_{3,1} + 2\alpha_{3,1} \lambda_{4,1} + 2\delta_4 \lambda_{4,1}^2 - \alpha_{4,2} \lambda_{4,1} (\delta_8 + 10)) a^4 \\
&\quad + \delta_8 \lambda_{4,1} \lambda_{4,2} (\delta_8 + 10) v_7 + \eta_8 \lambda_{4,2} (\delta_8 + 10) v_8 - \lambda_{4,1} \lambda_{4,2} (\delta_8 + 10) v_9,
\end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda_{4,1} (-\delta_2 + \delta_4 \delta_8 \lambda_{4,2} + \tau_3), \\
\alpha_{2,1} &= -\frac{2}{5} \lambda_{3,1} - 2\alpha_{3,1} \lambda_{4,1} - 2\delta_4 \lambda_{4,1}^2 + \alpha_{4,2} \lambda_{4,1} (\delta_8 + 10).
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Da identidade $LU^2 - 10UL^3 - 2L^2UL \equiv 0$ calculada em b obtém-se

$$\begin{aligned}
0 &= \tau_1 a^2 + \tau_2 a^3 + \tau_3 a^4 + \tau_7 v_8 + \tau_8 a^3 + \tau_9 (v_9) - 4a^4 \\
&\quad - 2\alpha_{1,1} a^3 - 2\alpha_{2,1} a^4 - 2\lambda_{2,1} a^3 - 2\lambda_{3,1} a^4 - 2\lambda_{4,1} L^2(v_9) \\
&= (\tau_1 + \delta_2 \tau_9) a^2 + (\tau_2 + \tau_8 - 2\alpha_{1,1} - 2\lambda_{2,1} + \delta_3 \tau_9 - 2\delta_2 \lambda_{4,1} - 2\delta_8 \lambda_{4,1}) a^3 \\
&\quad + (\tau_3 - 4 - 2\alpha_{2,1} - 2\lambda_{3,1} + \delta_4 \tau_9 - 2\delta_3 \lambda_{4,1}) a^4 + (\tau_7 + \delta_8 \tau_9) v_8 \\
&= (\tau_3 - 10\delta_4 \lambda_{4,2} - 4 - \frac{6}{5} \lambda_{3,1} + 4\alpha_{3,1} \lambda_{4,1} + 4\delta_4 \lambda_{4,1}^2 - 2\delta_3 \lambda_{4,1} - 2\alpha_{4,2} \lambda_{4,1} (\delta_8 + 10)) a^4,
\end{aligned}$$

é dizer,

$$\lambda_{3,1} = \frac{5}{6} (\tau_3 - 10\delta_4 \lambda_{4,2} - 4 + 4\alpha_{3,1} \lambda_{4,1} + 4\delta_4 \lambda_{4,1}^2 - 2\delta_3 \lambda_{4,1} - 2\alpha_{4,2} \lambda_{4,1} (\delta_8 + 10)) \tag{3.68}$$

Da identidade $ULU - 3UL^3 - 1/2L^2UL - 1/2L^3U \equiv 0$ calculada em b segue que

$$\begin{aligned}
0 &= \delta_2 a^4 + \frac{2}{5} \delta_8 a^4 - \frac{6}{5} a^4 - \frac{1}{2} \alpha_{1,1} a^3 - \frac{1}{2} \alpha_{2,1} a^4 - \frac{1}{2} \lambda_{2,1} a^3 \\
&\quad - \frac{1}{2} \lambda_{3,1} a^4 - \frac{1}{2} \lambda_{4,1} L^2(v_9) - \frac{1}{2} \delta_2 a^4 - \frac{1}{2} \delta_8 a^4 \\
&= -\frac{1}{2} (\alpha_{1,1} + \lambda_{2,1} + \delta_2 \lambda_{4,1} + \delta_8 \lambda_{4,1}) a^3 + \frac{1}{10} (5\delta_2 - \delta_8 - 12 - 5\alpha_{2,1} - 5\lambda_{3,1} - 5\delta_3 \lambda_{4,1}) a^4 \\
&= \frac{1}{10} (5\delta_2 - \delta_8 - 12 - 5\alpha_{2,1} - 5\lambda_{3,1} - 5\delta_3 \lambda_{4,1}) a^4.
\end{aligned}$$

De $\beta_3 = 0$ obtém-se $-5\alpha_{2,1} - 5\lambda_{3,1} - 5\delta_3 \lambda_{4,1} = 10 + 25\delta_4 \lambda_{4,2} - \frac{5}{2} \tau_3$, logo

$$0 = 5\delta_2 - \delta_8 - 2 + 25\delta_4 \lambda_{4,2} - \frac{5}{2} \tau_3,$$

portanto

$$\delta_2 = \frac{2\delta_8 + 4 - 50\delta_4 \lambda_{4,2} + 5\tau_3}{10}. \tag{3.69}$$

Caso 1: $\lambda_{4,2} \neq 0$, então, $\delta_8 = -10$ e $\tau_3 = \delta_2 + 10\delta_4 \lambda_{4,2}$.

Da equação (3.69) segue que

$$\delta_2 = -\frac{16}{5},$$

dessa forma

$$\tau_3 = 10\delta_4 \lambda_{4,2} - \frac{16}{5}.$$

Da equação (3.68) obtém-se que

$$\lambda_{3,1} = \frac{5}{6} \left(-\frac{16}{5} - 4 + 4\alpha_{3,1} \lambda_{4,1} + 4\delta_4 \lambda_{4,1}^2 - 2\delta_3 \lambda_{4,1} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \underbrace{(-18 + 10\alpha_{3,1}\lambda_{4,1} + 10\delta_4\lambda_{4,1}^2 - 5\delta_3\lambda_{4,1})}_{\lambda_1}.$$

Da equação (3.67) tem-se que

$$\begin{aligned} \alpha_{2,1} &= -\frac{2}{5}\frac{1}{3}\lambda_1 - 2\alpha_{3,1}\lambda_{4,1} - 2\delta_4\lambda_{4,1}^2 \\ &= -\frac{2}{15} \underbrace{(25\alpha_{3,1}\lambda_{4,1} + 25\delta_4\lambda_{4,1}^2 - 5\delta_3\lambda_{4,1} - 18)}_{\alpha_1} \end{aligned}$$

Da equação (3.65) segue que

$$\begin{aligned} \tau_1 &= -32\lambda_{4,2}, \\ \tau_2 &= \frac{50}{3}(2\delta_4\lambda_{4,1} + 2\alpha_{3,1} - \delta_3)\lambda_{4,2} + 10\delta_3\lambda_{4,2} \\ &= \frac{20}{3} \underbrace{(5\delta_4\lambda_{4,1} + 5\alpha_{3,1} - \delta_3)}_{\alpha_2}\lambda_{4,2}, \\ \tau_7 &= -100\lambda_{4,2}, \\ \tau_8 &= -\frac{50}{3}\lambda_2\lambda_{4,2} \end{aligned}$$

Da equação (3.64) obtém-se que

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1} &= \frac{16}{5}\lambda_{4,1}, \\ \lambda_{2,1} &= 10\lambda_{4,1}. \end{aligned}$$

Da equação (3.63) segue que

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2} &= \frac{16}{5}\lambda_{4,2}, \\ \alpha_{2,2} &= -\frac{5}{3}(2\alpha_{3,1} - \delta_3 + 2\delta_4\lambda_{4,1})\lambda_{4,2} - \delta_3\lambda_{4,2} \\ &= -\frac{2}{3} \underbrace{(5\alpha_{3,1} - \delta_3 + 5\delta_4\lambda_{4,1})}_{\alpha_2}\lambda_{4,2}, \\ \lambda_{2,2} &= 10\lambda_{4,2}. \end{aligned}$$

Com essas igualdades, obtém-se que se $\lambda_{5,2} \neq 0$, então os operadores L e U estão representados pelas matrizes dadas no item i . do lema.

Caso 2: $\lambda_{4,2} = 0$.

Como consequência de $\lambda_{4,2} = 0$ tem-se que

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2} &= \alpha_{2,2} = \alpha_{3,2} = \lambda_{2,2} = \lambda_{3,2} = 0, \\ \tau_1 &= \tau_2 = \tau_7 = \tau_8 = \tau_9 = 0, \\ \tau_4 &= \underbrace{2\alpha_{3,1} + 2\delta_4\lambda_{4,1} - 10\alpha_{4,2}}_{2\alpha_2}. \end{aligned}$$

Dado que $L_{x^3}L = 4UL^2 - LUL - 2L^4$, segue que

$$\begin{aligned} a^3(ab) &= 4\alpha_{4,2}a^4 - \alpha_{1,1}a^2 - \alpha_{2,1}a^3 - \alpha_{3,1}a^4 - \lambda_{2,1}v_8 - \lambda_{3,1}a^3 - \lambda_{4,1}L(v_9) - 2a^3 \\ &= -(\alpha_{1,1} + \delta_2\lambda_{4,1})a^2 - (\alpha_{2,1} + 2 + \lambda_{3,1} + \delta_3\lambda_{4,1})a^3 \\ &\quad + (4\alpha_{4,2} - \alpha_{3,1} - \delta_4\lambda_{4,1})a^4 - (\lambda_{2,1} + \delta_8\lambda_{4,1})v_8 \\ &= -(\alpha_{2,1} + 2 + \lambda_{3,1} + \delta_3\lambda_{4,1})a^3 + (4\alpha_{4,2} - \alpha_{3,1} - \delta_4\lambda_{4,1})a^4. \end{aligned}$$

Como o operador L_{ab} é nilpotente e $a^4ab = 0$, então

$$L_{ab}^k(a^3) = [-(\alpha_{2,1} + 2 + \lambda_{3,1} + \delta_3\lambda_{4,1})]^k a^3 + [-(\alpha_{2,1} + 2 + \lambda_{3,1} + \delta_3\lambda_{4,1})]^{k-1} (4\alpha_{4,2} - \alpha_{3,1} - \delta_4\lambda_{4,1})a^4,$$

é dizer,

$$\alpha_{2,1} = -\lambda_{2,1} - \delta_3\lambda_{4,1} - 2.$$

Da equação (3.67) segue que

$$\frac{3}{5}\lambda_{3,1} + \delta_3\lambda_{4,1} + 2 - 2\alpha_{3,1}\lambda_{4,1} - 2\delta_4\lambda_{4,1}^2 + \alpha_{4,2}\lambda_{4,1}(\delta_8 + 10) = 0,$$

de onde tem-se que

$$\frac{6}{5}\lambda_{3,1} = -2\delta_3\lambda_{4,1} - 4 + 4\alpha_{3,1}\lambda_{4,1} + 4\delta_4\lambda_{4,1}^2 - 2\alpha_{4,2}\lambda_{4,1}(\delta_8 + 10).$$

Ao igualar com a equação (3.68), se deduz que $\tau_3 = 0$. Da equação (3.67) se conclui que

$$\delta_2\lambda_{4,1} = 0,$$

dessa forma, segue da equação (3.64) que $\alpha_{1,1} = 0$.

Da equação (3.69), obtém-se que $\delta_8 = 5\delta_2 - 2$.

Com esse valores encontrados, tem-se que

$$\begin{aligned} \alpha_{2,1} &= -\delta_3\lambda_{4,1} - \lambda_{3,1} - 2 \\ &= -\delta_3\lambda_{4,1} - \frac{5}{6}(-4 + 4\alpha_{3,1}\lambda_{4,1} + 4\delta_4\lambda_{4,1}^2 - 2\delta_3\lambda_{4,1} + 16\alpha_{4,2}\lambda_{4,1}) - 2 \\ &= \frac{2}{3}\underbrace{(2 + \delta_3\lambda_{4,1} - 5\alpha_{3,1}\lambda_{4,1} - 5\delta_4\lambda_{4,1}^2 - 20\alpha_{4,2}\lambda_{4,1})}_{-\alpha_1}. \end{aligned}$$

Da equação (3.64) segue que $\lambda_{2,1} = (2 - 5\delta_2)\lambda_{4,1} = 2\lambda_{4,1}$.

Da equação (3.68) obtém-se que

$$\lambda_{3,1} = \frac{5}{6}\underbrace{(-4 + 4\alpha_{3,1}\lambda_{4,1} + 4\delta_4\lambda_{4,1}^2 - 2\delta_3\lambda_{4,1} + 16\alpha_{4,2}\lambda_{4,1})}_{2\lambda_1}.$$

Com as condições dadas anteriormente, tem-se que L e U estão representados pelas matrizes descritas no item *ii.* no lema. $\square$

O seguinte lema mostra que nas hipótese do lema anterior, $\mathcal{A}$ possui uma subálgebra de codimensão 2.

Lema 22. *Seja $\mathcal{A}$ como no lema anterior. Então $C = \text{span}\{a, a^2, a^3, a^4, v_7, v_8, v_9\}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Observe que $z \in C$ se, e somente se, $L^4(z) = 0$, pois se $z = \sum \alpha_i a^i + \sum \mu_i v_{i+5} + \tau v_9$, ao multiplicar por L^4 segue que $L^4(z) = \mu_0 L^4(b) + \mu_1 L^5(b) = \mu_0 a^3 + \mu_1 a^4$. Portanto, a observação feita vale.

Pela identidade $L_{a^3} = 4UL - LU - 2L^3$, nos dois itens do lema acima, segue que $\text{Im } L_{a^3} \subset C$ e $\text{Im } L_{a^4} \subset \text{span}\{a^3, a^4\}$ já que $L_{a^4} = -4LUL$. Dessa forma, para determinar que C é uma subálgebra é suficiente provar que v_7^2 , $v_7 v_8$, $v_7 v_9$, v_8^2 , $v_8 v_9$ e v_9^2 estão em C .

Se $x = a$, $y, z \in \mathcal{A}$ na equação (3.44), segue que

$$0 = a^4 yz + 4(a^2 az)ay,$$

portanto, $(a^2 az)ay \in \text{span}\{a^3, a^4\}$ para cada $y, z \in \mathcal{A}$, é dizer, $(ab)a^2 ab$, $(ab)a^2 v_7$ e $v_7 a^2 v_7 \in \text{span}\{a^3, a^4\}$.

Se $x = a$, $y = v_8$ e $z \in \mathcal{A}$ na equação (3.56), tem-se que

$$0 = aaaz \underbrace{a^2 v_8}_{2/5 a^4} + 2aaaa v_8 az = L^4(v_8 az),$$

dessa forma, se conclui que $v_8 ab$, $v_7 v_8$ e $v_8^2 \in C$.

Se $x = a$, $y = v_7$, $z = b$ na equação (3.7), obtém-se que

$$0 = a^3 b v_7 + v_9 v_8 + 2v_7 v_8 + (ab)(a^2 v_7) + a^2 v_7 ab + 2(ab) \underbrace{av_8}_{a^3} + a^2 b v_8 + a^2 ab v_7.$$

Como $\text{Im } U, \text{Im } L_{a^3} \subset C$, $v_7 v_8$, $(ab)(a^2 v_7) \in C$, então $v_8 v_9 \in C$.

Se $x = a$, $y = ab$, $z = b$ na equação (3.7), segue que

$$0 = a^3 bab + v_9 v_7 + 2v_7^2 + (ab)(a^2 ab) + a^2 (ab)^2 + 2(ab)v_8 + a^2 b v_7 + a^2 abab.$$

Conclui-se que

$$v_7 v_9 + 2v_7^2 \in C. \quad (3.70)$$

Resta provar unicamente que v_9^2 , $v_7 v_9$ e $v_7^2 \in C$. Para demonstrar isso, será dividido nos casos do lema acima.

Caso 1: L e U estão representados pelas matrizes descritas no item i .

Do fato que $(a^2 v_7)v_7 \in C$, segue que

$$\frac{16}{5} \lambda_{4,2} v_8 - \frac{2}{3} \alpha_2 \lambda_{4,2} a^2 v_7 - \delta_4 \lambda_{4,2} a^3 v_7 + \alpha_{4,2} a^4 v_7 + 10 \lambda_{4,2} v_7^2 + \frac{5}{3} \lambda_2 \lambda_{4,2} v_8 v_7 + \lambda_{4,2} v_9 v_7 \in C,$$

logo,

$$10 \lambda_{4,2} v_7^2 + \lambda_{4,2} v_7 v_9 \in C.$$

Como $\lambda_{4,2} \neq 0$, então $10v_7^2 + v_7 v_9 \in C$, como consequência da equação (3.70), resulta que v_7^2 , $v_7 v_9 \in C$.

Se $x = a$, $y = z = b$ na equação (3.58) obtém-se que

$$0 = v_9^2 + 4v_7v_9 + 4a^3bab + 4v_7^2 + 2a^3ab^2.$$

Como $\text{Im } L_{a^3} \subset C$, então $v_9^2 \in C$.

Dessa forma, conclui-se que C é uma subálgebra de $\mathcal{A}$.

Caso 2: L e U estão representadas pelas matrizes do item ii.

Se $x = a^2$, $y = b$ na equação (3.3), segue que

$$2a^4b^2 + 4v_9^2 = ba^4b + 2b \underbrace{a^2a^2b}_{\in a^4\mathbb{F}} + 2a^2ba^2b + a^2a^2b^2.$$

Como $\text{Im } U$, $\text{Im } L_{a^3} \subset C$, aliás, do fato que $\delta_2\lambda_{4,1} = 0$, tem-se que $\text{Im } L_{a^4} \subset \text{span}\{a^3, a^4\}$, é por isso que o termo à direita pertence a C , dessa forma resulta que $v_9^2 \in C$.

Se $x = a$, $y = v_7$, $z = b$ na equação (3.56), obtém-se que

$$0 = aaab \underbrace{a^2v_7}_{\in \mathbb{F}a^4} + 2aaaaav_7ab = L^4(v_7ab),$$

portanto, $v_7ab \in C$.

Se $x = a$, $y = ab$ na equação (3.3), segue que

$$2a^2(ab)^2 + 4v_7^2 = (ab)a^2ab + 2(ab)v_8 + 2a(ab)v_7 + aa(ab)^2.$$

Como $\text{Im } L^2$, $\text{Im } L|_C \subset C$, v_8ab , $(a^2ab)(ab) \in C$, então o termo à direita pertence a C , é dizer, $v_7^2 \in C$.

Como consequência da equação (3.70) obtém-se que $v_7v_9 \in C$.

Conclui-se que nas condições dadas, C é uma subálgebra de $\mathcal{A}$. □

A seguir, será suposto que $a^2b \in \mathcal{B}$, mas $a^2ab \notin \mathcal{B}$. O seguinte lema mostra as possibilidades para as representações matriciais dos operadores L e U .

Lema 23. *Seja $a \in S$ tal que $L(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$, $a^2b \in \mathcal{B}$ e uma base para $\mathcal{A}$ é dada pelo conjunto $\{a, a^2, a^3, a^4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$ onde v_5, v_6, v_7, v_8 são como na equação (3.62) e $v_9 = a^2ab$. Então L_a e U_a estão representadas nessa base pelas matrizes*

i.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -18/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -16/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\delta_4 - 2/5\lambda_{3,0} & 0 & -12/5\lambda_{4,2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{3,0} & 0 & -\delta_4\lambda_{4,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha_{4,0} & 0 & \alpha_{4,2} & 2/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{3,0} & 0 & 6\lambda_{4,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_{4,2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

para $\lambda_{4,2} \neq 0$, ou

ii.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{3,0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha_{4,0} & 0 & \alpha_{4,2} & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{3,0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $\alpha = 2\delta_4 - \frac{2}{5}\lambda_{3,0} - 8\alpha_{4,2}$.

Demonstração. Seja

$$LUL(b) = \sum_{i=1}^4 \delta_i a^i + \sum_{i=0}^4 \delta_{i+5} v_{i+5}.$$

Como $L(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ e $L^6 \equiv 0$, então segue que

$$\begin{aligned} 0 &= L^6(v_9) = b_0 + \delta_9 L^5(v_9) = b_1 + \delta_9^2 L^4(v_9) \\ &= b_2 + \delta_9^3 L^3(v_9) = b_3 + \delta_9^4 L^2(v_9) \\ &= b_4 + \delta_9^5 L(v_9) = b_5 + \delta_9^6 v_9, \end{aligned}$$

para $b_i \in \mathcal{B}$, portanto, $\delta_9 = 0$.

Ao multiplicar por L^4 , segue que

$$0 = \delta_5 L^4(b) + \delta_6 L^5(b) = \delta_5 a^3 + \delta_6 a^4,$$

é dizer, $\delta_5 = \delta_6 = 0$. Multiplicando por L^3 e por UL respetivamente, obtém-se que

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_1 a^4 + \delta_7 L^5(b) = (\delta_1 + \delta_7) a^4, \\ 0 &= \delta_1 a^4 + \delta_7 UL^3(b) = \left(\delta_1 + \frac{2}{5}\delta_7\right) a^4, \end{aligned}$$

portanto, $\delta_1 = \delta_7 = 0$.

Ao multiplicar por L^2 e por U , segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_2 a^4 + \delta_8 L^5(b) = (\delta_2 + \delta_8) a^4, \\ 0 &= \delta_2 a^4 + \delta_8 UL^3(b) = \left(\delta_2 + \frac{2}{5}\delta_8\right) a^4, \end{aligned}$$

consequentemente, se conclui que $\delta_2 = \delta_8 = 0$. Desse modo, tem-se que

$$LUL(b) = \delta_3 a^3 + \delta_4 a^4,$$

Para $j = 0, 2$, seja

$$UL^j(b) = \sum_{i=1}^4 \alpha_{i,j} a^i + \sum_{i=0}^4 \lambda_{i,j} v_{i+5},$$

onde $\lambda_{4,0} = 0$. Ao multiplicar por L^4 segue que

$$0 = \lambda_{0,j} L^4(b) + \lambda_{1,j} L^5(b) = \lambda_{0,j} a^3 + \lambda_{1,j} a^4,$$

portanto, $\lambda_{0,j} = \lambda_{1,j} = 0$.

Para $j = 2$, ao multiplicar por UL e por L^3 obtém-se que

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_{1,2}a^4 + \lambda_{2,2}UL^3(b) = (\alpha_{1,2} + \frac{2}{5}\lambda_{2,2})a^4, \\ 0 &= \alpha_{1,2}a^4 + \lambda_{2,2}L^5(b) = (\alpha_{1,2} + \lambda_{2,2})a^4, \end{aligned}$$

é dizer, $\alpha_{1,2} = \lambda_{2,2} = 0$.

Multiplicando por U segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_{2,2}a^4 + \lambda_{3,2}UL^3(b) \\ &= (\alpha_{2,2} + \frac{2}{5}\lambda_{3,2})a^4, \end{aligned}$$

portanto

$$\alpha_{2,2} = -\frac{2}{5}\lambda_{3,2}. \quad (3.71)$$

Da identidade $LU L^2 \equiv 0$ tem-se que

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_{2,2}a^3 + \alpha_{3,2}a^4 + \lambda_{3,2}L^4(b) + \lambda_{4,2}LUL(b) \\ &= (\alpha_{2,2} + \lambda_{3,2} + \delta_3\lambda_{4,2})a^3 + (\alpha_{3,2} + \delta_4\lambda_{4,2})a^4, \end{aligned}$$

é dizer,

$$\begin{aligned} \lambda_{3,2} &= -\frac{5}{3}\delta_3\lambda_{4,2}, \\ \alpha_{3,2} &= -\delta_4\lambda_{4,2}, \\ \alpha_{2,2} &= \frac{2}{3}\delta_3\lambda_{4,2}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Da identidade $LU^2 - 10UL^3 - 2L^2UL \equiv 0$, segue que

$$0 = \alpha_{1,0}a^4 - 4a^4 - 2\delta_3a^4,$$

dessa forma,

$$\alpha_{1,0} = 4 + 2\delta_3. \quad (3.73)$$

Da identidade $ULLU - 3UL^3 - 1/2L^2UL - 1/2L^3U \equiv 0$ calculada em b obtém-se que

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_{1,0}a^4 + \lambda_{2,0}UL^3(b) - 6/5a^4 - \frac{1}{2}\delta_3a^4 - \frac{1}{2}\alpha_{1,0}a^4 - \frac{1}{2}\lambda_{2,0}a^4 \\ &= (\frac{1}{2}\alpha_{1,0} - \frac{1}{10}\lambda_{2,0} - \frac{6}{5} - \frac{1}{2}\delta_3)a^4 \\ &= (\frac{1}{2}\delta_3 + \frac{4}{5} - \frac{1}{10}\lambda_{2,0})a^4, \end{aligned}$$

portanto,

$$\lambda_{2,0} = 5\delta_3 + 8. \quad (3.74)$$

Da identidade $U^2 + 10UL^2 - 2LUL - 4L^4 \equiv 0$, tem-se que

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_{1,0}a^3 + \alpha_{2,0}a^4 + \lambda_{2,0}UL^2(b) + \lambda_{3,0}UL^3(b) + 10\alpha_{2,2}a^2 + 10\alpha_{3,2}a^3 + 10\alpha_{4,2}a^4 \\ &\quad + 10\lambda_{3,2}v_8 + 10\lambda_{4,2}v_9 - 2\delta_3a^3 - 2\delta_4a^4 - 4a^3 \\ &= \alpha_{2,2}(10 + \lambda_{2,0})a^2 + (\alpha_{1,0} + 10\alpha_{3,2} - 2\delta_3 - 4 + \alpha_{3,2}\lambda_{2,0})a^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\alpha_{2,0} + \frac{2}{5}\lambda_{3,0} + 10\alpha_{4,2} - 2\delta_4 + \alpha_{4,2}\lambda_{2,0})a^4 \\
& + \lambda_{3,2}(\lambda_{2,0} + 10)v_8 + \lambda_{4,2}(\lambda_{2,0} + 10)v_9 \\
& = \frac{2}{3}\delta_3\lambda_{4,2}(\lambda_{2,0} + 10)a^2 - \delta_4\lambda_{4,2}(\lambda_{2,0} + 10)a^3 \\
& + (\alpha_{2,0} + \frac{2}{5}\lambda_{3,0} - 2\delta_4 + \alpha_{4,2}(\lambda_{2,0} + 10))a^4 \\
& - \frac{5}{3}\delta_3\lambda_{4,2}(\lambda_{2,0} + 10)v_8 + \lambda_{4,2}(\lambda_{2,0} + 10)v_9,
\end{aligned}$$

dessa forma, conclui-se que

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda_{4,2}(\lambda_{2,0} + 10), \\
\alpha_{2,0} &= 2\delta_4 - \frac{2}{5}\lambda_{3,0} - \alpha_{4,2}(\lambda_{2,0} + 10).
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Caso $\lambda_{4,2} \neq 0$, **então** $\lambda_{2,0} = -10$.

Das equações (3.75), (3.74) e (3.73) obtém-se respetivamente que

$$\begin{aligned}
\alpha_{2,0} &= 2\delta_4 - \frac{2}{5}\lambda_{3,0}, \\
\delta_3 &= -\frac{18}{5}, \\
\alpha_{1,0} &= -\frac{16}{5}.
\end{aligned}$$

Segue que as representações matriciais de L e U estão dadas pelas matrizes do item i .

Caso $\lambda_{4,2} = 0$.

Das equações (3.71) e (3.72), resulta que

$$\alpha_{2,2} = \lambda_{3,2} = \alpha_{3,2} = 0.$$

Da identidade $L_{x^3}L - 4UL^2 + LUL + 2L^4 \equiv 0$ calculada em b obtém-se que

$$\begin{aligned}
a^3ab &= 4\alpha_{4,2}a^4 - \delta_3a^3 - \delta_4a^4 - 2a^3 \\
&= -(2 + \delta_3)a^3 + (4\alpha_{4,2} - \delta_4)a^4.
\end{aligned}$$

Como $a^4ab = 0$, então

$$L_{ab}^k(a^3) = [-(2 + \delta_3)]^k a^3 + [-(2 + \delta_3)]^{k-1} (4\alpha_{4,2} - \delta_4)a^4,$$

portanto, do fato que L_{ab} é um operador nilpotente, conclui-se que $\delta_3 = -2$. Dessa forma, segue das equações (3.73), (3.74) e (3.75) que

$$\begin{aligned}
\delta_3 &= -2, & \alpha_{1,0} &= 0, \\
\lambda_{2,0} &= -2, & \alpha_{2,0} &= 2\delta_4 - \frac{2}{5}\lambda_{3,0} - 8\alpha_{4,2}.
\end{aligned}$$

Por conseguinte, obtém-se que os operadores estão representados pelas matrizes dadas no item ii . $\square$

O seguinte lema mostra que nas hipótese do lema anterior, a álgebra possui uma subálgebra de codimensão 2.

Lema 24. *Seja $\mathcal{A}$ como no lema anterior. Então $C = \text{span}\{a, a^2, a^3, a^4, v_7, v_8, v_9\}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Para demonstrar que C é uma subálgebra, resta mostrar que os produtos $v_7^2, v_7v_8, v_7v_9, v_8^2, v_8v_9$ e $v_9^2 \in C$ já que das igualdades $L_{a^3} = 4UL - LU - 2L^4$ e $L_{a^4} = -4LUL$, resulta que $\text{Im } L_{a^3} \subset C$ e $\text{Im } L_{a^4} \subset \text{span}\{a^3, a^4\}$. Desse modo, analogamente como na demonstração do Lema 22, segue que para cada $y, z \in \mathcal{A}$, $L^4(z) = 0 \Leftrightarrow z \in C$, $(a^2az)ay \in \text{span}\{a^3, a^4\}$ e $v_8az \in C$.

Logo, tem-se que $v_8ab, v_7v_8, v_8^2, v_7v_9$ e $v_8v_9 \in C$. Sendo assim, resta provar que v_7^2 e $v_9^2 \in C$.

Se $x = a$, $y = z = ab$ na equação (3.58) segue que

$$0 = v_9^2 + 4v_8v_9 + 4a^3(ab)(aab) + 4v_8^2 + 2a^3a(ab)^2.$$

Como $\text{Im } L_{a^3} \subset C$, segue que $v_9^2 \in C$.

Se L e U estão representados pelo item i .

Como

$$(a^2b)v_7 = \alpha_{1,0}v_8 + \alpha_{2,0}a^2v_7 + \alpha_{3,0}a^3v_7 + \alpha_{4,0}a^4v_7 - 10v_7^2 + \lambda_{3,0}v_7v_8,$$

então

$$(a^2b)v_7 + 10v_7^2 \in C.$$

Por outro lado, se $x = a$, $y = ab$, $z = b$ na equação (3.7), obtém-se que

$$0 = a^3bab + (a^2b)v_7 + 2v_7^2 + (ab)(a^2v_7) + a^2(ab)^2 + 2abv_8 + a^2bv_7 + a^2abab.$$

Como $\text{Im } L_{a^3}, \text{Im } U \subset C$, $(ab)v_9, v_8ab \in C$, segue que

$$(a^2b)v_7 + 2v_7^2 \in C,$$

é dizer, $v_7^2 \in C$.

Dessa maneira, conclui-se que C é uma subálgebra de $\mathcal{A}$.

Caso L e U estão representados pelo item ii .

Se $x = a$, $y = v_7$, $z = b$ na equação (3.56), obtém-se que

$$0 = aaab \underbrace{a^2v_7}_{\in \mathbb{F}a^4} + 2aaaa(ab)v_7 = L^4(v_7ab),$$

é dizer, $v_7ab \in C$.

Se $x = a$, $y = ab$ na equação (3.3), tem-se que

$$2a^2(ab)^2 + 4v_7^2 = (ab)(a^2ab) + 2(ab)v_8 + 2a(ab)v_7 + aa(ab)^2.$$

Como $\text{Im } L^2, \text{Im } L|_C \subset C$ e $v_9ab \in C$, segue que o termo à direita pertence a C , logo se conclui que $v_7^2 \in C$.

Portanto, segue que C é uma subálgebra de $\mathcal{A}$. □

Para concluir a seção na qual $L^5 \equiv 0$ não é uma identidade, resta supor que $L(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$, a^2b e $a^2ab \in \mathcal{B}$. O seguinte lema mostra o que acontece nesse caso.

Lema 25. *Seja $a \in S$ tal que $L(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$, a^2b , $a^2ab \in \mathcal{B}$. Então o conjunto*

$$\{a, a^2, a^3, a^4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$$

é uma base para $\mathcal{A}$ onde v_5, v_6, v_7, v_8 são como na equação (3.62) e $v_9 = a^2aab$. Os operadores L_a e U_a estão representados nessa base pelas matrizes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{16}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha_{3,1} - \frac{2}{5}\lambda_{3,0} & \frac{12}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{3,0} & \alpha_{3,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha_{4,0} & \alpha_{4,1} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{3,0} & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Para $j = 0, 1$, seja

$$UL^i(b) = \sum_{i=1}^4 \alpha_{i,j} a^i + \sum_{i=0}^3 \lambda_{i,j} v_{i+5}.$$

Ao multiplicar por L^4 , segue que

$$0 = \lambda_{0,j} L^4(b) + \lambda_{1,j} L^5(b) = \lambda_{0,j} a^3 + \lambda_{1,j} a^4,$$

é dizer, $\lambda_{0,j} = \lambda_{1,j} = 0$ para cada j .

Se $j = 1$, ao multiplicar por LU e por L^3 , obtém-se que

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_{1,1} a^4 + \lambda_{2,1} LUL^2(b) = \alpha_{1,1} a^4, \\ 0 &= \alpha_{1,1} a^4 + \lambda_{2,1} L^5(b) = (\alpha_{1,1} + \lambda_{2,1}) a^4, \end{aligned}$$

portanto, $\alpha_{1,1} = \lambda_{2,1} = 0$.

Ao multiplicar por U tem-se que

$$0 = \alpha_{2,1} a^4 + \lambda_{3,1} UL^3(b) = (\alpha_{2,1} + \frac{2}{5}\lambda_{3,1}) a^4,$$

dessa forma,

$$\alpha_{2,1} = -\frac{2}{5}\lambda_{3,1}.$$

Consequentemente, resulta que

$$\begin{aligned} U(b) &= \alpha_{1,0} a + \alpha_{2,0} a^2 + \alpha_{3,0} a^3 + \alpha_{4,0} a^4 + \lambda_{2,0} v_7 + \lambda_{3,0} v_8, \\ UL(b) &= \alpha_{2,1} a^2 + \alpha_{3,1} a^3 + \alpha_{4,1} a^4 + \lambda_{3,1} v_8. \end{aligned}$$

Da identidade $U^2 + 10UL^2 - 2LUL - 4L^4 \equiv 0$ calculada em b segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_{1,0} a^3 + \alpha_{2,0} a^4 + \lambda_{2,0} UL^2(b) + \lambda_{3,0} UL^3(b) + 10UL^2(b) - 2\alpha_{2,1} a^3 - 2\alpha_{3,1} a^4 - 2\lambda_{3,1} L^4(b) - 4a^3 \\ &= (\alpha_{1,0} - 2\alpha_{2,1} - 2\lambda_{3,1} - 4) a^3 + (\alpha_{2,0} + \frac{2}{5}\lambda_{3,0} - 2\alpha_{3,1}) a^4 + (\lambda_{2,0} + 10) v_9, \end{aligned}$$

por isto, tem-se as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}\alpha_{1,0} &= 4 + \frac{6}{5}\lambda_{3,1}, \\ \alpha_{2,0} &= 2\alpha_{3,1} - \frac{2}{5}\lambda_{3,0}, \\ \lambda_{2,0} &= -10.\end{aligned}$$

Da identidade $ULU - 3UL^3 - 1/2L^2UL - 1/2L^3U \equiv 0$ calculada em b cumpre-se que

$$\begin{aligned}0 &= (\alpha_{1,0} + \frac{2}{5}\lambda_{2,0} - \frac{6}{5} - \frac{1}{2}\alpha_{2,1} - \frac{1}{2}\lambda_{3,1} - \frac{1}{2}\alpha_{1,0} - \frac{1}{2}\lambda_{2,0})a^4 \\ &= (\frac{1}{2}\alpha_{1,0} - \frac{1}{10}\lambda_{2,0} - \frac{6}{5} - \frac{3}{10}\lambda_{3,1})a^4 \\ &= \frac{3}{10}(6 + \lambda_{3,1})a^4,\end{aligned}$$

logo, $\lambda_{3,1} = -6$.

Dessa forma,

$$\begin{aligned}\alpha_{1,0} &= -\frac{16}{5}, \\ \alpha_{2,1} &= \frac{12}{5}.\end{aligned}$$

Conclui-se que as matrizes que representam os operadores L e U são aquelas dadas no enunciado do lema. $\square$

No seguinte lema será mostrado que no caso em que $\mathcal{A}$ satisfaça as hipótese do lema anterior, existe uma subálgebra de codimensão 2.

Lema 26. *Seja $\mathcal{A}$ como no lema anterior. Então $C = \text{span}\{a, a^2, a^3, a^4, v_7, v_8, v_9\}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Para demonstrar que C é uma subálgebra, resta mostrar que os produtos $v_7^2, v_7v_8, v_7v_9, v_8^2, v_8v_9$ e $v_9^2 \in C$. Como $L_{a^3} = 4UL - LU - 2L^4$ e $L_{a^4} = -4LUL$, então $\text{Im } L_{a^3} \subset C$ e $\text{Im } L_{a^4} \subset \text{span}\{a^3, a^4\}$, portanto, analogamente à demonstração do Lema 22, segue que para cada $y, z \in \mathcal{A}$, $L^4(z) = 0 \Leftrightarrow z \in C$, $(a^2az)ay \in \text{span}\{a^3, a^4\}$ e $v_8az \in C$.

Dessa maneira, segue que os seguintes produtos estão em C : $v_8ab, v_7v_8, v_8^2, v_9ab, v_7v_9$ e v_8v_9 . Resta provar que v_7^2 e $v_9^2 \in C$.

Se $x = a^2$, $y = v_7$ na equação (3.3), obtém-se que

$$2a^4v_7^2 + 4v_9^2 = v_7 \underbrace{a^4v_7}_0 + 2v_7 \underbrace{a^2v_9}_0 + 2a^2v_7v_9 + a^2a^2v_7^2.$$

Como $\text{Im } U \subset C$, então o termo à direita pertence a C , consequentemente, $v_9^2 \in C$.

De outro lado,

$$(a^2b)v_7 = \alpha_{1,0}v_8 + \alpha_{2,0}a^2v_7 + \alpha_{3,0}a^3v_7 + \alpha_{4,0}a^4v_7 - 10v_7^2 + \lambda_{3,0}v_8v_7,$$

portanto

$$v_7a^2b + 10v_7^2 \in C.$$

Se $x = a$, $y = ab$, $z = b$ na equação (3.7), segue que

$$0 = a^3bab + (a^2b)v_7 + 2v_7^2 + (ab)(a^2ab) + a^2(ab)^2 + 2(ab)v_8 + a^2bv_7 + a^2abab.$$

Como $\text{Im } L_{a^3}$, $\text{Im } U \subset C$, $(ab)(a^2ab)$, $v_8ab \in C$, então

$$v_7a^2b + 2v_7^2 \in C,$$

desse modo, pode-se concluir que $v_7^2 \in C$.

Portanto, C é uma subálgebra de $\mathcal{A}$. □

Corolário 6. *Seja $\mathcal{A} \in \mathfrak{V}$ de dimensão 9 tal que $L_x^5 \equiv 0$ não é uma identidade em $\mathcal{A}$. Então $\mathcal{A}$ é solúvel.*

3.2.3 Se L^2UL não é uma identidade na álgebra $\mathcal{A}$.

Como resultado do corolário anterior, daqui em diante será suposto que $L_x^5 \equiv 0$ é uma identidade da álgebra $\mathcal{A}$. Portanto, da Tabela 3.2, adicional às identidades já consideradas, tem-se que os operadores $UL^3 \equiv 0$, $L_{x^3}U \equiv 0$ e $L_{x^3}L^2 \equiv 0$ são também identidades em $\mathcal{A}$. Ao linearizar as duas últimas identidades obtém-se

$$0 = (x^2z)(x^2y) + 2(xxz)(x^2y) + 2x^3yxz, \quad (3.76)$$

$$0 = (x^2z)xy + 2(xxz)xy + x^3yxz + x^3xyz. \quad (3.77)$$

Nesta seção será suposto que o operador $L^2UL \equiv 0$ não é uma identidade na álgebra $\mathcal{A}$, e como nos casos anteriores, será demonstrado que nesse caso, $\mathcal{A}$ possui uma subálgebra de codimensão 2, portanto, a álgebra $\mathcal{A}$ é solúvel.

O seguinte lema demonstrado no artigo [GFS05, Prop. 4], porém re-enunciado e demonstrado será apresentado na sequência para exibir uma base de $\mathcal{A}$ quando a dimensão da álgebra é 9.

Lema 27. *Seja $\mathcal{A} \in \mathfrak{V}$ tal que $L^2UL \equiv 0$ não é uma identidade em $\mathcal{A}$. Então existem $a, b \in \mathcal{A}$ tais que*

$$\phi = \{a, a^2, a^3, a^4, b, L(b), U(b), UL(b), L_{a^3}L(b)\}$$

é um conjunto linearmente independente.

Demonstração. Dado que $L^2UL \equiv 0$ não é uma identidade em $\mathcal{A}$, então existem $a, b \in \mathcal{A}$ tal que $L_a^2U_aL_a(b) \neq 0$. De outro lado, como $L_{a^4} = -4LUL$, então $LL_{a^4}(b) = -4L^2UL(b) \neq 0$, portanto, $a^4 \neq 0$. Aliás, da identidade $LL_{a^3}L = 5UL^3 + L^2UL = L^2UL$, segue que $LL_{a^3}L(b) \neq 0$. Na sequência, será demonstrado que ϕ é um conjunto linearmente independente. Seja

$$0 = \beta_1a + \beta_2a^2 + \beta_3a^3 + \beta_4a^4 + \alpha_1b + \alpha_2L(b) + \alpha_3U(b) + \alpha_4UL(b) + \alpha_5L_{a^3}L(b).$$

Ao multiplicar por L^2UL , segue que

$$0 = \alpha_1L^2UL(b),$$

é dizer, $\alpha_1 = 0$.

Multiplicando por L^2U , tem-se que

$$0 = \alpha_2L^2UL(b),$$

portanto, $\alpha_2 = 0$.

Ao multiplicar por L_{a^3} , obtém-se que

$$0 = \beta_1 a^4,$$

onde segue que $\beta_1 = 0$.

Multiplicando por LU , cumpre-se que

$$0 = \alpha_3 LU^2(b) = 2\alpha_3 L^2 UL(b),$$

logo, $\alpha_3 = 0$.

Multiplicando por U , tem-se que

$$0 = \beta_2 a^4,$$

portanto, $\beta_2 = 0$.

Ao multiplicar por L^2 , resulta que

$$0 = \alpha_4 L^2 UL(b),$$

donde segue que $\alpha_4 = 0$.

Dessa forma, tem-se que $a^3(\beta_4 a + \alpha_5 ab) = -\beta_3 a^3$, é dizer, $\beta_3 = 0$ ou $\beta_4 a + \alpha_5 ab = 0$ porque o operador L_x é nilpotente para cada $x \in \mathcal{A}$. Caso $\beta_3 = 0$, então ao multiplicar por L , obtém-se que $0 = \alpha_5 LL_{a^3}L(b) = \alpha_5 L^2 UL(b)$, onde conclui-se que $\alpha_5 = \beta_4 = 0$. Caso $\alpha_5 ab = -\beta_4 a$, então α_5 e β_4 são zero já que o operador L_b é nilpotente, portanto, $\beta_3 = 0$.

Em qualquer um dos casos, tem-se que ϕ é um conjunto linearmente independente, tal como se queria. $\square$

Lema 28. *Seja $\mathcal{A}$ de dimensão 9 tal que $L^2 UL \equiv 0$ não é uma identidade em $\mathcal{A}$. Então L_a e U_a na base ϕ apresentada no Lema 27 estão representadas pelas seguintes matrizes:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{2,1} & \lambda_{4,2} + 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha_{4,1} & \alpha_{4,2} & 2(\alpha_{2,1} - \lambda_{4,1}) & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{4,1} & \lambda_{4,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{5,1} & \lambda_{5,2} & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\alpha_{2,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Sejam $u_5 = b$, $u_6 = L(b)$, $u_7 = U(b)$, $u_8 = UL(b)$, $u_9 = L_{a^3}L(b)$. Para $j = 1, 2, 3$ e 4, seja

$$L(u_{j+5}) = \sum_{i=1}^4 \alpha_{i,j} a^i + \sum_{i=1}^5 \lambda_{i,j} u_{i+4},$$

$$U(u_7) = \sum_{i=1}^4 \delta_i a^i + \sum_{i=1}^5 \delta_{i+4} u_{i+4}.$$

Ao multiplicar por $L_{a^3}L$ as duas igualdades acima, tem-se que

$$0 = \lambda_{1,j}u_9, \quad 0 = \delta_5u_9,$$

é dizer, $\lambda_{1,j} = \delta_5 = 0$ para cada j .

Multiplicando por LL_{a^3} , segue que

$$0 = \lambda_{2,j}LL_{a^3}L(b) = -\lambda_{2,j}L^2UL(b), \quad 0 = \delta_6LL_{a^3}L(b) = -\delta_6L^2UL(b),$$

portanto, $\lambda_{2,j} = \delta_6 = 0$.

Ao multiplicar por L_{a^3} obtém-se que

$$0 = \alpha_{1,j}a^4, \quad 0 = \delta_1a^4,$$

dessa forma, conclui-se que $\alpha_{1,j} = \delta_1 = 0$.

Multiplicando por LU , cumpre-se que

$$0 = \lambda_{3,j}LU^2(b) = 2\lambda_{3,j}L^2UL(b), \quad 0 = \delta_7LU^2(b) = 2\delta_7L^2UL(b),$$

por isso, tem-se que $\lambda_{3,j} = \delta_7 = 0$.

Se $j \geq 3$, ao multiplicar por U e por L^2 , segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_{2,j}a^4, & 0 &= \delta_2a^4, \\ 0 &= \alpha_{2,j}a^4 + \lambda_{4,j}L^2UL(b), & 0 &= \delta_2a^4 + \delta_8L^2UL(b), \end{aligned}$$

assim, $\alpha_{2,j} = \lambda_{4,j} = \delta_2 = \delta_8 = 0$.

Se $j = 4$, ao multiplicar o termo $L(u_9)$ por L , tem-se que

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_{3,4}a^4 + \lambda_{5,4}LL_{a^3}L(b) \\ &= \alpha_{3,4}a^4 + \alpha_{3,4}\lambda_{5,4}a^3 + \alpha_{4,4}\lambda_{5,4}a^4 + \lambda_{5,4}^2u_9, \end{aligned}$$

portanto, $\lambda_{5,4} = \alpha_{3,4} = 0$.

Dessa forma, $\alpha_{4,4} \neq 0$ e

$$\alpha_{4,4}a^4 = LL_{a^3}L(b) = -L^2UL(b).$$

Por isso, pode-se fazer a escolha de $a, b \in \mathcal{A}$ tal que $L^2UL(b) = a^4$, consequentemente, $\alpha_{4,4} = -1$. Logo

$$\begin{aligned} L^2(b) &= \alpha_{2,1}a^2 + \alpha_{3,1}a^3 + \alpha_{4,1}a^4 + \lambda_{4,1}u_8 + \lambda_{5,1}u_9, \\ LU(b) &= \alpha_{2,2}a^2 + \alpha_{3,2}a^3 + \alpha_{4,2}a^4 + \lambda_{4,2}u_8 + \lambda_{5,2}u_9, \\ LUL(b) &= \alpha_{3,3}a^3 + \alpha_{4,3}a^4 + \lambda_{5,3}u_9, \\ LL_{a^3}L(b) &= -a^4, \\ U^2(b) &= \delta_3a^3 + \delta_4a^4 + \delta_9u_9. \end{aligned}$$

Da identidade $L_{a^3}L = 4UL^2 - LUL - 2L^4$ segue que

$$\begin{aligned} u_9 &= L_{a^3}L(b) = 4\alpha_{2,1}a^4 - \alpha_{3,3}a^3 - \alpha_{4,3}a^4 - \lambda_{5,3}u_9 - 2\alpha_{2,1}a^4 - 2\lambda_{4,1}L^2U(b) \\ &= -\alpha_{3,3}a^3 + (2\alpha_{2,1} - \alpha_{4,3} - 2\lambda_{4,1})a^4 - \lambda_{5,3}u_9, \end{aligned}$$

dessa forma, tem-se que

$$\begin{aligned}\alpha_{3,3} &= 0, \\ \lambda_{5,3} &= -1, \\ \alpha_{4,3} &= 2\alpha_{2,1} - 2\lambda_{4,1}.\end{aligned}$$

Da identidade $U^2 + 10UL^2 - 2LUL - 4L^4 \equiv 0$ calculada em b obtém-se que

$$\begin{aligned}0 &= \delta_3 a^3 + \delta_4 a^4 + \delta_9 u_9 + 10\alpha_{2,1} a^4 - 2\alpha_{4,3} a^4 + 2u_9 - 4\alpha_{2,1} a^2 - 4\lambda_{4,1} a^4 \\ &= \delta_3 a^3 + (\delta_4 + 10\alpha_{2,1} - 2\alpha_{4,3} - 4\alpha_{2,1} - 4\lambda_{4,1}) a^4 + (\delta_9 + 2)u_9 \\ &= \delta_3 a^3 + (\delta_4 + 2\alpha_{2,1}) a^4 + (\delta_9 + 2)u_9,\end{aligned}$$

é dizer,

$$\begin{aligned}\delta_3 &= 0, \\ \delta_4 &= -2\alpha_{2,1}, \\ \delta_9 &= -2.\end{aligned}$$

Da identidade $2ULU - L^2UL - L^3U \equiv 0$ calculada em b segue que

$$\begin{aligned}0 &= 2\alpha_{2,2} a^4 - a^4 - \alpha_{2,2} a^4 - \lambda_{4,2} a^4 \\ &= (\alpha_{2,2} - 1 - \lambda_{4,2}) a^4,\end{aligned}$$

portanto,

$$\alpha_{2,2} = 1 + \lambda_{4,2}.$$

Conclui-se que as matrizes que representam os operadores L e U na base ϕ são as dadas no enunciado do lema. $\square$

Lema 29. *Seja $\mathcal{A}$ como no lema anterior. Então $C = \text{span}\{a, a^2, a^3, a^4, u_7, u_8, u_9\}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Inicialmente será provado que $C_1 = \text{span}\{a, a^2, a^3, a^4, u_9\}$ é uma subálgebra. Dadas as representações de L e U no lema acima, segue que $u_9^2 = (L(u_8))^2 = \frac{1}{16}(a^4b)^2$. Se $x = a^4$, $y = b$ na equação (3.3), obtém-se que $2(a^4b)^2 = a^4ba^4b$. Se $x = a$, $y = a^4b$, $z = b$ na equação (3.42), tem-se que

$$0 = aa^2b \underbrace{aa^4b}_{\in \mathbb{F}a^4} + aa^2aba^4b = aa^2aba^4b = -\frac{1}{4}a^4ba^4b,$$

portanto, C_1 é uma subálgebra onde $au_9 = -a^4$.

A seguir, será provado que C é uma subálgebra. Se $x = a$, $y = b$, $z = u_8$ na equação (3.44), segue que

$$0 = a^4bu_8 + 4 \underbrace{a^2au_8}_{0}(ab) = a^4bu_8.$$

Se $x = a$, $y = u_8$, $z = b$ nessa mesma equação, então obtém-se que

$$0 = a^4bu_8 + 4u_8(\underbrace{au_8}_{LUL(b)}) = -4u_8u_9.$$

Por outro lado, como $\text{Im } L_{a^4}, \text{Im } U^2 \subset \text{span}\{a^4, u_9\}$, então para $x = a$, $y, z \in \mathcal{A}$ na mesma equação, segue que $0 = a^4yz + 4(a^2az)(ay)$, é dizer, $(a^2az)(ay) \in \text{span}\{a^4, u_9\}$. Aliás, se $x = a^2$, $y =$

ab na equação (3.3), tem-se que

$$2a^4(ab)^2 + 4u_8^2 = (ab)a^4ab + 2(ab)a^2u_8 + 2a^2 \underbrace{(ab)a^2ab}_{\in \text{span}\{a^4, u_9\}} + a^2a^2(ab)^2 = a^2a^2(ab)^2,$$

portanto, o termo à direita pertence ao $\text{span}\{a^4, u_9\}$. Dessa forma, $u_8^2 \in \text{span}\{a^4, u_9\}$. Por isso, conclui-se que $C_2 = \text{span}\{a, a^2, a^3, a^4, u_8, u_9\}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$ onde

$$au_8, u_8^2 \in \text{span}\{a^4, u_9\}.$$

Como $\text{Im}(L_{a^4} + 2U^2) \subset \mathbb{F}a^4$, então para cada $i > 5$ tem-se que $0 = u_i(L_{a^4}(b) + 2U^2(b))$. Se $x = a^2$, $y = b$, $z = u_7$ na equação (3.2), segue que

$$\begin{aligned} 4a^4bu_7 + 8u_7a^2u_7 &= ba^4u_7 + 2ba^2a^2u_7 + u_7a^4b + 2a^2ba^2u_7 + 2u_7a^2a^2b + 2a^2u_7^2 + 2a^2a^2bu_7 \\ &= 2a^2ba^2u_7 + 2a^2u_7^2 + 2a^2a^2bu_7. \end{aligned}$$

Devido a que $\text{Im } U \subset C$, o termo à direita pertence a C , dessa forma, conclui-se que $-2\alpha_{2,1}a^4u_7 - 2u_9u_7 = u_7a^2u_7 \in C$, é dizer, $u_7u_9 \in C$.

Se $x = a^2$, $y = ab$, $z = b$ nessa mesma equação, obtém-se que

$$\begin{aligned} 4a^4bab + 8u_8u_7 &= \underbrace{(ab)a^4b + 2(ab)a^2a^2b + ba^4ab + 2a^2(ab)u_7 + 2ba^2u_8 + 2a^2bu_8 + 2a^2a^2bab}_{0} \\ &= 2a^2(ab)u_7 + 2a^2bu_8 + 2a^2a^2bab. \end{aligned}$$

Análogo ao feito acima, tem-se que o termo à direita pertence a C , logo, conclui-se que $u_7u_8 \in C$. Desse modo, $u_7C_2 \subset C$.

Se $x = a$, $y = z = b$ na equação (3.58), tem-se que

$$0 = u_7^2 + 4(aab)u_7 + 4a^3bab + 4(aab)^2 + 2a^3ab^2,$$

como $(aab) \in C_2$, então $(aab)^2 \in C_2$, aliás, do fato que $u_7C_2 \subset C$, tem-se que $u_7(aab) \in C$. Sendo assim, se conclui que $u_7^2 \in C$. Portanto, queda mostrado que C é uma subálgebra de $\mathcal{A}$. $\square$

Corolário 7. *Seja $\mathcal{A} \in \mathfrak{V}$ de dimensão 9 tal que $L^2UL \equiv 0$ não é uma identidade em $\mathcal{A}$. Então $\mathcal{A}$ é solúvel.*

Como consequência do corolário anterior, as álgebras consideradas daqui em diante, serão álgebras nas quais satisfazem também a identidade $L^2UL \equiv 0$. Como resultado dessa nova identidade e da Tabela 3.2 segue que os operadores $LU^2 \equiv 0$, $LL_{a^3}L \equiv 0$ e $LL_{a^4} \equiv 0$ são também identidades das álgebras nas quais tem-se o interesse de aqui para frente.

3.2.4 Se LUL não é uma identidade na álgebra $\mathcal{A}$.

Nesta seção será suposto que $LUL \equiv 0$ não é uma identidade em $\mathcal{A}$, e ao igual que nos casos anteriores, será exibida uma subálgebra de codimensão 2.

Para começar esta seção, será re-enunciado o Teorema 2 demonstrado em [GFS05]. A demonstração será apresentada, no entanto, é a mesma demonstração que os autores fizeram no artigo citado.

Teorema 12. *Seja $\mathcal{A} \in \mathfrak{V}$ de dimensão ≥ 9 onde $LUL \equiv 0$ não é uma identidade em $\mathcal{A}$. Então existem $a, b \in \mathcal{A}$ tal que $L_aU_aL_a(b) \neq 0$ e*

$$\phi = \phi_{a,b} = \{a, a^2, a^3, a^4, b, L(b), UL(b), LUL(b)\}$$

é um conjunto linearmente independente. Aliás, se $\mathcal{B} = \text{span } \phi$, então $\mathcal{B}$ não é invariante pelo operador L_a ou pelo operador U_a .

Demonstração. Dado que $LUL \equiv 0$ não é uma identidade, então segue da identidade $L_a^4 + 4LUL \equiv 0$ que $a^4 \neq 0$. Aliás, a^4 e $LUL(b)$ são linearmente independentes, pois $LUL(b) = -\frac{1}{4}a^4b$ e o operador L_b é nilpotente. Seja $u_5 = b$, $u_6 = L(b)$, $u_7 = UL(b)$, $u_8 = LUL(b)$, e

$$0 = \sum_{i=1}^4 \alpha_i a^i + \sum_{i=1}^4 \beta_i u_{i+4}.$$

Ao multiplicar por LUL , obtém-se que $\beta_1 = 0$. Multiplicando por LU , segue que

$$0 = \alpha_1 a^4 + \beta_2 u_8,$$

portanto, $\alpha_1 = \beta_2 = 0$. Ao multiplicar por U , tem-se que $0 = \alpha_2 a^4$, é dizer, $\alpha_2 = 0$. Multiplicando por L , obtém-se que

$$0 = \alpha_3 a^4 + \beta_3 u_8,$$

dessa forma, conclui-se que $\alpha_3 = \beta_3 = 0$. Finalmente, resta $\alpha_4 a^4 + \beta_4 u_8 = 0$, conseqüentemente, os escalares α_4, β_4 são nulos. Portanto, o conjunto ϕ é linearmente independente.

Suponha que os operadores L e U preservam o subespaço $\mathcal{B}$, então ϕ é uma base para $\mathcal{B}$. Seja

$$L^2(b) = \sum_{i=1}^4 \lambda_i a^i + \sum_{i=1}^4 \mu_i u_{i+4}.$$

Ao multiplicar por LUL , obtém-se que $\mu_1 = 0$. Multiplicando por LU , segue que

$$0 = \lambda_1 a^4 + \mu_2 u_8,$$

é dizer, $\lambda_1 = \mu_2 = 0$. Multiplicando por L^2 e por U , tem-se que $L^4(b) = UL^2(b) = \lambda_2 a^4$. De outro lado, se

$$U(b) = \sum_{i=1}^4 \gamma_i a^i + \sum_{i=1}^4 \delta_i u_{i+4},$$

mediante o mesmo procedimento feito para $L^2(b)$, segue que $\gamma_1 = \delta_1 = \delta_2 = 0$. Portanto, $U^2(b) = \gamma_2 a^4$.

Com esses resultados, a partir da identidade $U^2 + 10UL^2 - 2LUL - 4L^4 \equiv 0$, obtém-se que

$$2u_8 = 2LUL(b) = U^2(b) + 10UL^2(b) - 4L^4(b) \in \mathbb{F}a^4,$$

o qual gera um absurdo porque a^4 e u_8 são linearmente independentes. Desse modo, conclui-se que ou L ou U não preserva $\mathcal{B}$. $\square$

Dado que as possibilidades de $\mathcal{B}$ não ser preservado pelos operadores L e U em termos da base ϕ significa que aab ou $a^2b \notin \mathcal{B}$, então serão analisados os casos separadamente. Inicialmente será suposto que L não preserva $\mathcal{B}$. Obtém-se o seguinte lema:

Lema 30. *Seja $\mathcal{A}$ de dimensão 9 tal que $LUL \equiv 0$ não é uma identidade em $\mathcal{A}$. Se L_a não preserva $\mathcal{B}$, então $\{a, a^2, a^3, a^4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9\}$ é uma base para $\mathcal{A}$ onde u_5, u_6, u_7, u_8 são como no Teorema 12 e $u_9 = L_a^2(b)$. Aliás, os operadores L_a e U_a estão representados nessa base pelas*

seguintes matrizes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \tau_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \delta_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} \tau_7 &= \frac{1}{4}(\rho_8\delta_9 + 10\rho_8 - 2), \\ \delta_2 &= 4\tau_3 - 10\rho_4 - \rho_4\delta_9, \end{aligned}$$

Demonstração. Sejam

$$\begin{aligned} L^3(b) &= \sum_{i=1}^4 \tau_i a^i + \sum_{i=0}^4 \tau_{i+5} u_{i+5}, \\ U(b) &= \sum_{i=1}^4 \delta_i a^i + \sum_{i=0}^4 \delta_{i+5} u_{i+5}, \\ UL^2(b) &= \sum_{i=1}^4 \rho_i a^i + \sum_{i=0}^4 \rho_{i+5} u_{i+5}. \end{aligned}$$

Ao multiplicar por LUL os termos $L^3(b)$, $U(b)$ e $UL^2(b)$, segue respetivamente que

$$0 = \tau_5 u_8, \quad 0 = \delta_5 u_8, \quad 0 = \rho_5 u_8,$$

portanto, $\tau_5 = \delta_5 = \rho_5 = 0$.

Multiplicando por LU , tem-se que

$$0 = \tau_1 a^4 + \tau_6 u_8, \quad 0 = \delta_1 a^4 + \delta_6 u_8, \quad 0 = \rho_1 a^4 + \rho_6 u_8,$$

dessa forma, $\tau_1 = \tau_6 = \delta_1 = \delta_6 = \rho_1 = \rho_6 = 0$.

Ao multiplicar $L^3(b)$ por L^2 , obtém-se que

$$\begin{aligned} 0 &= \tau_2 a^4 + \tau_9 L^4(b) \\ &= \tau_2 \tau_9 a^2 + \tau_3 \tau_9 a^3 + (\tau_4 \tau_9 + \tau_2) a^4 + \tau_7 \tau_9 u_7 + \tau_8 \tau_9 u_8 + \tau_9^2 u_9, \end{aligned}$$

é dizer, $\tau_9 = \tau_2 = 0$.

Multiplicando por U , unicamente $UL^2(b)$, segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \rho_2 a^4 + \rho_9 UL^2(b) \\ &= \rho_2 \rho_9 a^2 + \rho_3 \rho_9 a^3 + (\rho_4 \rho_9 + \rho_2) a^4 + \rho_7 \rho_9 u_7 + \rho_8 \rho_9 u_8 + \rho_9^2 u_9, \end{aligned}$$

por isso, conclui-se que $\rho_9 = \rho_2 = 0$.

Ao multiplicar $UL^2(b)$ por L , cumpre-se que

$$0 = \rho_3 a^4 + \rho_7 u_8,$$

desse modo, $\rho_3 = \rho_7 = 0$.

Da identidade $U^2 + 10UL^2 - 2LUL - 4L^4 \equiv 0$, resulta que

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_2 a^4 + \rho_4 \delta_9 a^4 + \rho_8 \delta_9 u_8 + 10\rho_4 a^4 + 10\rho_8 u_8 \\ &\quad - 2u_8 - 4\tau_3 a^4 - 4\tau_7 u_8 \\ &= (\delta_2 + \rho_4 \delta_9 + 10\rho_4 - 4\tau_3) a^4 + (\rho_8 \delta_9 + 10\rho_8 - 2 - 4\tau_7) u_8, \end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned} \delta_2 &= 4\tau_3 - 10\rho_4 - \rho_4 \delta_9, \\ \tau_7 &= \frac{1}{4}(\rho_8 \delta_9 + 10\rho_8 - 2). \end{aligned}$$

Consequentemente, segue que as representações matriciais na base ϕ dos operadores L e U são aquelas dadas no enunciado do lema. $\square$

Lema 31. *Seja $\mathcal{A}$ como no lema anterior. Então $C = \text{span}\{a, a^2, a^3, a^4, u_7, u_8, u_9\}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Inicialmente será provado que $C_1 = \text{span}\{a, a^2, a^3, a^4, u_8\}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$. Para isso, é suficiente provar que $u_8^2 = 0$. Se $x = a^4$, $y = b$ na equação (3.3), segue que

$$a^4 b a^4 b = 2(a^4 b)^2 = 32(a a^2 a b)^2 = 32u_8^2.$$

De outro lado, se $x = a$, $y = a^4 b$, $z = b$ na equação (3.42), obtém-se que

$$0 = a a^2 b \underbrace{a a^4 b}_0 + a a^2 a b a^4 b = -\frac{1}{4} a^4 b a^4 b,$$

dessa forma, tem-se que $u_8^2 = 0$.

O passo a seguir é demonstrar que $C_2 = C_1 \oplus \mathbb{F}u_7$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$. Para isso, resta provar que $u_7^2, u_7 u_8 \in C_2$. Se $x = a$, $y = b$, $z = u_7$ na equação (3.44), segue que

$$0 = a^4 b u_7 + 4(a^2 a u_7)(a b) = a^4 b u_7.$$

Se $x = a$, $y = u_7$, $z = b$ nessa mesma equação, tem-se que

$$0 = a^4 b u_7 + 4u_7 u_8 = 4u_7 u_8,$$

portanto, $u_7 u_8 = 0$.

Caso $x = a$, $y = z = b$ na equação (3.44), resulta que $0 = a^4 b^2 + 4(a^2 a b)(a b)$, e como $\text{Im } L_{a^4} \in \mathbb{F}u_8$, então $u_7 a b \in \mathbb{F}u_8$.

Se $x = a^2$, $y = a b$ na equação (3.3), obtém-se que

$$2a^4(a b)^2 + 4u_7^2 = (a b) a^4 a b + 2(a b) \underbrace{a^2 u_7}_0 + 2a^2 \underbrace{u_7 a b}_{\in \mathbb{F}u_8} + a^2 a^2 (a b)^2 = a^2 a^2 (a b)^2.$$

Como $\text{Im } U^2, \text{Im } L_{a^4} \subset C_1$, então $u_7^2 \in C_1$, logo conclui-se que C_2 é uma subálgebra de $\mathcal{A}$.

Para provar que C é uma subálgebra falta provar que u_7u_9, u_8u_9 e $u_9^2 \in C$. Se $x = a$, $y = ab$, $z = b$ na equação (3.44), tem-se que

$$0 = a^4bab + 4u_7u_9,$$

dessa forma, $u_7u_9 \in \mathbb{F}u_3$.

Provar os produtos restantes, será dividido em dois casos: δ_9 é ou não nulo.

Caso $\delta_9 = 0$. Nesse caso $a^2b \in C_2$, portanto, se $x = a$, $y = z = b$ na equação (3.76), segue que

$$0 = (a^2b)^2 + 2u_9(a^2b) + 2a^3bab.$$

Como $\text{Im } L_{a^3} \subset C$, $(a^2b)^2 \in C_2$, então $u_9a^2b \in C$.

Se $x = a$, $y = z = b$ na equação (3.77) obtém-se que

$$0 = (a^2b)u_9 + 2u_9^2 + a^3bab + a^3ab^2,$$

portanto, $u_9^2 \in C$.

Finalmente, se $x = a$, $y = u_7$, $z = b$ na equação (3.7), obtém-se que

$$0 = a^3bu_7 + \underbrace{(a^2b)u_8}_{\in C_2} + 2u_9u_8 + (ab)\underbrace{(a^2u_7)}_0 + a^2(ab)u_7 + 2(ab)\underbrace{au_8}_0 + a^2bu_8 + a^2abu_7.$$

Como $\text{Im } L_{a^3}, \text{Im } U \subset C$, então $u_8u_9 \in C$. Assim, C é uma subálgebra de $\mathcal{A}$.

Caso $\delta_9 \neq 0$. Dado que C_2 é uma subálgebra de codimensão 3, então $\{\bar{u}_5 = \bar{b}, \bar{u}_6 = \bar{ab}, \bar{u}_9 = \bar{aab}\}$ é uma base para o espaço vetorial $\mathcal{A}/C_2$, portanto, os operadores $\bar{L}, \bar{U}$ induzidos por L e U ao espaço $\mathcal{M}_{C_2}$ estão representados pelas matrizes

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \delta_9 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aliás, se cada operador $\bar{L}_c \in \mathcal{M}_{C_2}$ está representada pela matriz

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{pmatrix},$$

então para cada $x, y, z \in \mathbb{F}$, o operador $x\bar{L} + y\bar{U} + z\bar{L}_c \in \mathcal{M}_{C_2}$, é dizer, é nilpotente de ordem 3. Dessa forma, se $(a_{i,j}) = (x\bar{L} + y\bar{U} + z\bar{L}_c)^3$ para $x = 0$, $z = 1$, na componente $a_{1,3}$ obtém-se que

$$c_{1,1}^2c_{1,3} + c_{1,2}c_{1,3}c_{2,1} + c_{1,3}^2c_{3,1} + c_{2,3}(c_{1,1}c_{1,2} + c_{1,2}c_{2,2} + c_{1,3}c_{3,2}) + c_{3,3}(c_{1,1}c_{1,3} + c_{1,2}c_{2,3} + c_{1,3}c_{3,3}) + c_{1,3}^2y,$$

é dizer, $c_{1,3} = 0$.

Se $x = 1$, $y = 0$, então a componente $a_{2,1}$ bem dada por

$$z^3(c_{1,1}^2c_{2,1} + c_{1,1}c_{2,1}c_{2,2} + c_{1,1}c_{2,3}c_{3,1} + c_{1,2}c_{2,1}^2 + c_{2,1}c_{2,2}^2 + c_{2,1}c_{2,3}c_{3,2} + c_{2,3}c_{3,1}(c_{2,2} + c_{3,3}))$$

$$+ z^2 (c_{1,1}^2 + c_{1,1}c_{2,2} + 2c_{1,2}c_{2,1} + c_{2,1}c_{2,3} + c_{2,2}^2 + c_{2,3}c_{3,2}) + z(c_{1,2} + c_{2,3}),$$

é dizer, $c_{2,3} = -c_{1,2}$.

Se $x = 0$, $z = 1$ as componentes $a_{1,1}$, $a_{2,1}$ e $a_{3,3}$ são

$$\begin{aligned} & c_{11}^3 + 2c_{1,1}c_{1,2}c_{2,1} - c_{1,2}^2c_{3,1} + c_{1,2}c_{2,1}c_{2,2} - c_{1,2}^2y, \\ & c_{1,1}c_{1,2}c_{2,1} - c_{1,2}^2c_{3,1} + c_{1,2}(2c_{2,1}c_{2,2} - c_{3,2}(2c_{2,2} + c_{3,3})) + c_{2,2}^3 - c_{1,2}^2y, \\ & -c_{1,2}^2c_{3,1} - c_{1,2}c_{3,2}(c_{2,2} + 2c_{3,3}) + c_{3,3}^3 - c_{1,2}^2y, \end{aligned}$$

dessa forma, se conclui que $c_{1,2} = c_{1,1} = 0$. Porém, segue que $c_{2,2} = c_{3,3} = 0$.

Consequentemente, $\bar{L}_c$ está representada pela matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_{2,1} & 0 & 0 \\ c_{3,1} & c_{3,2} & 0 \end{pmatrix},$$

portanto, $\bar{u}_9 \in \ker \bar{L}_c$ para cada $\bar{L}_c \in \mathcal{M}_{C_2}$, é dizer, $u_9C_2 \subset C_2$ e $\bar{L}_{u_9} \in \mathcal{M}_{C_2}$. Segue que $u_8u_9 \in C_2$ e que $\bar{L}_{u_9}$ está representado por uma matriz do tipo acima, onde obtém-se que $u_9^2 \in C_2$. Logo, tem-se que C é uma subálgebra de $\mathcal{A}$ tal como se queria. $\square$

Nos seguintes lemas será suposto que L preserva o espaço $\mathcal{B}$, de modo que U não o preserva, é dizer, a^2b completa uma base para $\mathcal{A}$.

Lema 32. *Sejam $\mathcal{A} \in \mathfrak{V}$ de dimensão 9 tal que $LUL \equiv 0$ não é uma identidade em $\mathcal{A}$, $a, b \in \mathcal{A}$ que satisfazem $L_aU_aL_a(b) \neq 0$ e $L_a(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$. Então uma base para $\mathcal{A}$ é dada por*

$$\{a, a^2, a^3, a^4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9\}$$

onde u_5, u_6, u_7, u_8 são como no Teorema 12 e $u_9 = a^2b$. Aliás, L_a, U_a estão representadas nessa base pelas seguintes matrizes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 & 0 & 0 & \tau_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \delta_4 & 0 & 0 & \tau_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_7 & 0 & 0 & \tau_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_8 & 1 & 0 & \tau_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6\delta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Do Teorema 12 segue que o conjunto $\{a, a^2, a^3, a^4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9\}$ é uma base para $\mathcal{A}$. Sejam

$$\begin{aligned} L^2(b) &= \sum_{i=1}^4 \delta_i a^i + \sum_{i=0}^3 \delta_{i+5} u_{i+5}, \\ L(v_9) &= \sum_{i=1}^4 \tau_i a^i + \sum_{i=0}^4 \tau_{i+5} u_{i+5}, \\ U(v_9) &= \sum_{i=1}^4 \rho_i a^i + \sum_{i=0}^4 \rho_{i+5} u_{i+5}. \end{aligned}$$

Ao multiplicar $L(v_9)$ por L^4 , do fato que $L(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$, segue que

$$\begin{aligned} 0 &= L^5(u_9) = L^4(b_0 + \tau_9 u_9) = b_1 + \tau_9 L^4(u_9) = b_1 + \tau_9 L^3(b_0 + \tau_9 u_9) \\ &= b_2 + \tau_9^2 L^3(u_9) = b_2 + \tau_9^2 L^2(b_0 + \tau_9 u_9) \\ &= b_3 + \tau_9^3 L^2(u_9) = b_3 + \tau_9^3 L(b_0 + \tau_9 u_9) \\ &= b_4 + \tau_9^4 L(u_9) = b_5 + \tau_9^5 u_9, \end{aligned}$$

onde $b_i \in \mathcal{B}$, por isso, $\tau_9 = 0$.

Multiplicando por LUL as expressões $L^2(b)$, $L(v_9)$ e $U(v_9)$, obtém-se que

$$0 = \delta_5 u_8, \quad 0 = \tau_5 u_8, \quad 0 = \rho_5 u_8,$$

portanto, $\delta_5 = \tau_5 = \rho_5 = 0$.

Ao multiplicar por LU , tem-se que

$$0 = \delta_1 a^4 + \delta_6 u_8, \quad 0 = \tau_1 a^4 + \tau_6 u_8, \quad 0 = \rho_1 a^4 + \rho_6 u_8,$$

consequentemente, conclui-se que $\delta_1 = \delta_6 = \tau_1 = \tau_6 = \rho_1 = \rho_6 = 0$.

Multiplicando por U a igualdade $U(v_9)$, resulta que

$$\begin{aligned} 0 &= \rho_2 a^4 + \rho_9 U(v_9) \\ &= \rho_2 \rho_9 a^2 + \rho_3 \rho_9 a^3 + (\rho_2 + \rho_4 \rho_9) a^4 + \rho_7 \rho_9 u_7 + \rho_8 \rho_9 u_8 + \rho_9^2 u_9, \end{aligned}$$

desse modo, tem-se que $\rho_9 = \rho_2 = 0$.

Ao multiplicar $U(v_9)$ por L , segue que

$$0 = \rho_3 a^4 + \rho_7 u_8,$$

é dizer, $\rho_3 = \rho_7 = 0$.

Da identidade $2ULLU - L^3U \equiv 0$, tem-se que

$$0 = 2\tau_2 a^4 - \tau_2 a^4 = \tau_2 a^4.$$

Consequentemente, $\tau_2 = 0$.

Finalmente, da identidade $U^2 + 10ULL^2 - 2LUL - 4L^4 \equiv 0$, conclui-se que

$$\begin{aligned} 0 &= \rho_4 a^4 + \rho_8 u_8 + 10\delta_2 a^4 - 2u_8 - 4\delta_2 a^4 \\ &= (\rho_4 + 6\delta_2) a^4 + (\rho_8 - 2) u_8, \end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned} \rho_4 &= -6\delta_2, \\ \rho_8 &= 2. \end{aligned}$$

Dessa maneira, seguem as representações matriciais dadas no lema. □

Lema 33. *Seja $\mathcal{A}$ como no lema anterior. Então $C = \text{span}\{a, a^2, a^3, a^4, u_7, u_8, u_9\}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Provar que $\text{span}\{a, a^2, a^3, a^4, u_7, u_8\}$ é uma subálgebra, segue o mesmo caminho feito no Lema 31 para demonstrar que C_2 é uma subálgebra. Portanto, resta mostrar que u_7u_9, u_8u_9 e $u_9^2 \in C$.

Enxergue que $2U^2(b) + L_{a^4}(b) \in \mathbb{F}a^4$.

Se $x = a^2, y = b, z = u_9$ na equação (3.2), segue que

$$\begin{aligned} 4a^4bu_9 + 8u_9(a^2u_9) &= b \underbrace{a^4u_9}_0 + 2b \underbrace{a^2a^2u_9}_0 + u_9a^4b + 2a^2ba^2u_9 + 2u_9a^2a^2b + 2a^2u_9^2 + 2a^2a^2bu_9 \\ &= 2a^2ba^2u_9 + 2a^2u_9^2 + 2a^2a^2bu_9 \end{aligned}$$

Como $\text{Im } U, \text{Im } L_{a^4} \subset C$, então o termo à direita pertence a C . É dizer, resulta que $2u_9u_8 = u_9(a^2u_9) \in C$.

Se $x = a^2, y = b, z = ab$ nessa mesma equação, então

$$4a^4bab + 8u_9u_7 = ba^4ab + 2ba^2a^2ab + (ab)a^4b + 2a^2ba^2ab + 2(ab)a^2a^2b + 2a^2(ab)a^2b + 2a^2a^2bab.$$

Análogo ao raciocínio feito acima, segue que o termo à direita pertence a C , é dizer, $u_7u_9 \in C$.

Se $x = a^2, y = b$ na equação (3.3), obtém-se que

$$2a^4b^2 + 4u_9^2 = \underbrace{ba^4b + 2ba^2a^2b}_{\gamma u_8} + 2a^2ba^2b + a^2a^2b^2.$$

Como o termo à direita pertence a C , então $u_9^2 \in C$. Portanto, conclui-se que C é uma subálgebra de $\mathcal{A}$. $\square$

Corolário 8. *Seja $\mathcal{A} \in \mathfrak{V}$ de dimensão 9 tal que $LUL \equiv 0$ não é uma identidade em $\mathcal{A}$. Então $\mathcal{A}$ é solúvel.*

Finalmente, será adicionada a identidade $LUL \equiv 0$ as identidades em $\mathcal{A}$. Segue o seguinte lema:

Lema 34. *Seja $\mathcal{A} \in \mathfrak{V}$ tal que $LUL \equiv 0$ é uma identidade em $\mathcal{A}$. Então $\mathcal{A}$ é solúvel.*

Demonstração. Como $\mathcal{A} \in \mathfrak{V}$, existe $a \in \mathcal{A}$ tal que $a^4 \neq 0$. Aliás, da identidade $L_{a^4} = -4LUL \equiv 0$, tem-se que $0 \neq a^4 \in \text{ann } \mathcal{A}$, portanto, $\mathcal{A}$ possui um ideal próprio não nulo, e $(\text{ann } \mathcal{A})^2 = 0$. Como $\dim(\mathcal{A}/\text{ann } \mathcal{A}) \leq 8$, segue que $\text{ann } \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}/\text{ann } \mathcal{A}$ são solúveis, logo $\mathcal{A}$ é solúvel. $\square$

Dessa forma, podem-se enunciar os resultados principais deste capítulo:

Teorema 13. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra comutativa de potências associativas de dimensão 9 e nilíndice 5 sobre um corpo de característica diferente de 2, 3 e 5. Então $\mathcal{A}$ é solúvel.*

Como consequência do teorema acima e da conclusão do capítulo anterior, segue o seguinte teorema:

Teorema 14. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra comutativa de potências associativas de dimensão 9 sobre o corpo $\mathbb{C}$. Então $\mathcal{A}$ é solúvel.*

Com esses dois teoremas da-se por concluído o objetivo desse capítulo, o qual era dar uma resposta afirmativa ao problema de Albert para álgebras de dimensão 9.

Assim, no presente trabalho tem sido ampliados os resultados nas duas direções ao respeito do problema de Albert: mantendo fixa e mantendo arbitrária a dimensão de uma álgebra.

Capítulo 4

Um estudo das nilálgebras de dimensão n e nilíndice $n - 1$.

Neste capítulo será denotado por $\mathfrak{V}$ a classe das álgebras comutativas de potências associativas de dimensão n e nilíndice $n-1$. O objetivo de estudo é dar um refinamento à descrição das nilálgebras comutativas de potências associativas de dimensão n e nilíndice $n-1$ para $n \geq 12$ que foi dado no artigo [GFGMM14]. Este tipo de álgebras foi inicialmente estudado por Gerstenhaber e Myung em [GM75]. O seguinte teorema é enunciado nesse artigo.

Teorema 15. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra comutativa de potências associativas de dimensão 4 e nilíndice 3 sobre um corpo de característica $\neq 2$. Então $\mathcal{A}$ é associativa e $\mathcal{A}^3 = 0$.*

Elgueta e Suazo no artigo [ES02] descreveram as álgebras de dimensão 5 e nilíndice 4. Eles encontraram 4 tipos de álgebras, 3 desses tipos são álgebras de Jordan, mas tem uma outra álgebra que não é de Jordan. De fato, essa álgebra que não é de Jordan, é o contraexemplo que Suttles em [Sut72] exibiu para dar uma resposta negativa ao problema original de Albert. Os autores provaram o seguinte teorema:

Teorema 16. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra comutativa de potências associativas de dimensão 5 e nilíndice 4. Então $\mathcal{A}$ pertence a um, e somente um grupo dos listado abaixo.*

- i) *Existem $a, b \in \mathcal{A}$, $\alpha, \epsilon, \delta, \gamma, \gamma_0 \in \mathbb{F}$ tal que $\{a, a^2, a^3, b, ab\}$ é uma base para $\mathcal{A}$ e os produtos não triviais bem definidos por*

$$\begin{aligned} b^2 &= \alpha ab + \epsilon a^2 + \delta a^3, \\ b(ab) &= \gamma_0 a^3, \\ a(ab) &= \gamma a^3. \end{aligned}$$

- ii) *Existem $a, b \in \mathcal{A}$, $\lambda, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{F}$ tal que $\{a, a^2, a^3, b, a^2b\}$ é uma base de $\mathcal{A}$ e os produtos não triviais bem dados por $b^2 = \lambda a^2b + \gamma_2 a^2 + \gamma_3 a^3$.*

- iii) *Existem $a, b, c \in \mathcal{A}$, $\beta, \gamma, \delta, \epsilon, \alpha, \beta_0, \gamma_0, \alpha_0 \in \mathbb{F}$ tal que $\{a, a^2, a^3, b, c\}$ é uma base de $\mathcal{A}$ e os produtos não triviais bem definidos por*

$$\begin{aligned} b^2 &= \beta a^2 + \gamma a^3, & c^2 &= \beta_0 a^2 + \gamma_0 a^3, \\ bc &= \delta a^2 + \epsilon a^3, & ca &= \alpha_0 a^2, \\ ab &= \alpha a^2. \end{aligned}$$

- iv) *Existem $a, b \in \mathcal{A}$ tal que $\{a, a^2, a^3, b, a^2b\}$ é uma base de $\mathcal{A}$ y os produtos não triviais bem definidos por*

$$ba^3 = a^2, \quad a(a^2b) = -a^2.$$

A pesar de que a descrição feita pelos autores não é uma classificação a menos de isomorfismo, uma álgebra de dimensão 5 e nilíndice 4 pertence unicamente a um só grupo dos descritos acima. Além disso, eles fizeram a descrição das álgebras de Jordan de dimensão n e nilíndice $n - 1$. Porém, se $n \geq 6$, as álgebras comutativas de potências associativas que não são Jordan estavam sem descrição. Logo depois, os autores no artigo [ESGF05] provaram que cada álgebra de dimensão $n \neq 5$ e nilíndice $n - 1$ é nilpotente com índice de nilpotência $n - 1$. Dessa forma, a única álgebra que não é nilpotente é o contraexemplo de Suttles.

Em [GFGMM14] os autores deram as tabelas de multiplicação deste tipo de álgebras se $n \geq 6$ em termos de elementos convenientes. Porém, contrario ao feito por Elgueta e Suazo na demonstração do Teorema 16, a descrição que eles apresentaram não é uma descrição disjunta, pois é possível construir exemplos de álgebras que pertencem para duas classes ao mesmo tempo. Portanto, neste capítulo será feito um refinamento da descrição que os autores deram em [GFGMM14] para este tipo de álgebras, e no final, a descrição apresentada aqui, será uma descrição disjunta.

Seguindo a mesma notação dos capítulos anteriores, se $a \in \mathcal{A}$ é um elemento de índice maximal, é dizer $a^{n-2} \neq 0$, será denotado por $M = M(a)$ o subespaço vetorial de $\mathcal{A}$ que tem por base $\{a, a^2, a^3, \dots, a^{n-2}\}$.

No que segue deste capítulo, será suposto que $\mathcal{A}$ é uma álgebra comutativa de potências associativas de dimensão n e nilíndice $n - 1$ tal que $\mathcal{A}^2 \not\subseteq M(a)$ para nenhum elemento $a \in \mathcal{A}$ de índice maximal, já que no caso contrario, a álgebra é uma álgebra de Jordan.

Se $\mathcal{B}$ é uma álgebra de dimensão e nilíndice n , o seguinte resultado é de suma importância para a eleição dos elementos adequados para descrever a multiplicação de $\mathcal{A}$.

Lema 35. [GFGM13, Lem. 2] *Seja $\mathcal{B}$ uma nilálgebra comutativa de potências associativas de dimensão e nilíndice n sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica diferente de 2, 3 e 5. Seja $a \in \mathcal{B}$ com nilíndice maximal, isto é $a^{n-1} \neq 0$ e seja M a subálgebra de $\mathcal{B}$ gerada por a . Então*

- i. $\mathcal{B}^k \subseteq M^k$ para todo inteiro $k \geq 2$;
- ii. $a^{n-1} \in \text{ann}(\mathcal{B})$;
- iii. Existe $b \in \mathcal{A} \setminus M$ tal que $ba \in \mathbb{F}a^2$ e $ba^{n-2} = 0$.

Se $\mathcal{B}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$ de dimensão e nilíndice $n - 1$, então será denotado por $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ o conjunto de pares (a, b) tais que a possui índice maximal, ou seja, $a^{n-2} \neq 0$, $b \notin M$, $ba \in \mathbb{F}a^2$ e $ba^{n-3} = 0$. Como consequência do lema anterior, este conjunto é sempre não vazio para cada álgebra de dimensão e nilíndice $n - 1$.

A descrição feita em [GFGMM14] mostra como são as tabelas de multiplicação de uma álgebra $\mathcal{A}$ dependendo diretamente de um elemento $a \in \mathcal{A}$ de índice maximal, Esta descrição é dividida em 3 grupos que são os seguintes:

- i. Se $M(a)$ é um ideal de $\mathcal{A}$.
- ii. Se $M(a)$ não é ideal, mas $M^2(a)$ é ideal de $\mathcal{A}$.
- iii. Se $M(a)$ nem $M^2(a)$ são ideais de $\mathcal{A}$.

Para melhorar esta descrição, vão ser estudados os elementos a de índice maximal, pois é sobre este tipo de elementos que a descrição depende. Logo depois, vai dar-se-as condições para que $M(a)$ seja um ideal de $\mathcal{A}$.

A classe $\mathfrak{V}$ das álgebra comutativas de potências associativas de dimensão n e nilíndice $n - 1$ será dividida nos seguintes 3 grupos, não necessariamente disjuntos:

$$\begin{aligned}\mathfrak{V}_{Id} &= \{\mathcal{A} \in \mathfrak{V} : \exists a \in \mathcal{A} \text{ de índice maximal, } M(a) \text{ é ideal de } \mathcal{A}\}, \\ \mathfrak{V}_{Id2} &= \{\mathcal{A} \in \mathfrak{V} : \exists a \in \mathcal{A} \text{ de índice maximal, } M(a) \text{ não é ideal de } \mathcal{A}, M^2(a) \text{ é ideal}\}, \\ \mathfrak{V}_{NId} &= \{\mathcal{A} \in \mathfrak{V} : \exists a \in \mathcal{A} \text{ de índice maximal, } M(a), M^2(a) \text{ não são ideais de } \mathcal{A}\}.\end{aligned}$$

Os seguintes lemas que podem ser encontrados em [GFGMM14], estabelecem condições equivalentes a partir de um elemento de índice maximal.

Lema 36. *Seja $a \in \mathcal{A}$ um elemento de índice maximal. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i. $M^2(a)$ é um ideal de $\mathcal{A}$.
- ii. $\dim \mathcal{A}^3 = n - 4$.
- iii. $\mathcal{A}^k = M^k(a)$ para cada $k \geq 3$.

Lema 37. *Seja $a \in \mathcal{A}$ um elemento de índice maximal. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i. $M^2(a)$ não é um ideal de $\mathcal{A}$.
- ii. $\dim \mathcal{A}^3 = n - 3$.
- iii. $\mathcal{A}^3 \neq M^3(a)$ e $\mathcal{A}^k = M^k(a)$ para cada $k \geq 4$.

Como consequência dos Lemas 36 e 37 segue o seguinte lema, o qual é garantido pela dimensão de $\mathcal{A}^3$.

Lema 38. *As classes $\mathfrak{V}_{Id2}$ e $\mathfrak{V}_{NId}$ são disjuntas.*

4.1 Elementos de índice maximal nas classes $\mathfrak{V}_{Id}$ e $\mathfrak{V}_{Id2}$.

Como resultado do anterior lema, o estudo desta seção será focado na busca das relações unicamente entre as classes $\mathfrak{V}_{Id}$ e $\mathfrak{V}_{Id2}$. Para fazer esse estudo, inicialmente serão analisados os elementos de índice maximal.

Dado que se $\mathcal{A} \in \mathfrak{V}_{Id}$, como consequência que $\mathcal{A}^2 \not\subset M(a)$, segue que $\dim \mathcal{M}_{M(a)} = 1$, portanto, $\dim \mathcal{A}^2 = n - 2$. Desse modo, $\mathcal{B}(a) = \mathbb{F}a + \mathcal{A}^2$ é uma álgebra comutativa de potências associativas de dimensão e nilíndice $n - 1$. Se $(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(a))$, então pelo Lema 35 tem-se que $ab \in \mathbb{F}a^2$, $ba^{n-3} = 0$. Aliás, é possível considerar $c \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}(a)$ tal que $ca \in \text{span}\{a, b\}$.

Já que as tabelas de multiplicação são construídas a partir de um elemento $(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(a))$, será denotado por $\overline{\mathcal{P}(\mathcal{A})}$ o conjunto de triplas (a, b, c) tais que $(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(a))$, e $c \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}(a)$ onde $ca \in \text{span}\{a, b\}$.

Na sequência será enunciado o teorema com a descrição das tabelas de multiplicação que os autores deram em [GFGMM14] para as álgebras de dimensão $n \geq 6$ e nilíndice $n - 1$ quando existe um elemento $a \in \mathcal{A}$ de índice maximal tal que $M(a)$ é um ideal.

Teorema 17. *Seja $\mathcal{A} \in \mathfrak{V}_{Id}$ tal que $(a, b, c) \in \overline{\mathcal{P}(\mathcal{A})}$, $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \lambda, \gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{F}$.*

- i. *Se $n = 6$, então $c^2 = b - (\gamma^2 + 2\lambda)a^2 + \alpha a^3 + \alpha_1 a^4$, $cb = \beta a^4$, $ca^2 = \gamma a^3 + \gamma_1 a^4$, $ca^3 = -a(ca^2)$, $ba^2 = \lambda a^4$ e os produtos restantes não triviais são zero.*
- ii. *Se $n = 7$, então $c^2 = b - \gamma^2 a^2 - 2\lambda a^3 + \alpha a^4 + \alpha_1 a^5$, $cb = \beta a^5$, $ca^2 = \gamma a^3 + \gamma_1 a^4 + \gamma_2 a^5$, $ca^3 = -a(ca^2)$, $ca^4 = a^2(ca^2)$, $ba^2 = \lambda a^5$ e os produtos restantes não triviais são zero.*

- iii. Se $n = 8$, então $c^2 = b + (\gamma^2 - 2\lambda)a^4 + \alpha_1a^5 + \alpha_2a^6$, $cb = \beta a^6$, $ca^2 = \gamma a^4 + \gamma_1a^5 + \gamma_2a^6$, $ca^3 = -a(ca^2)$, $ca^4 = a^2(ca^2)$, $ba^2 = \lambda a^6$ e os produtos restantes não triviais são zero.
- iv. Se $n \geq 9$, então $c^2 = b - 2\lambda a^{n-4} + \alpha_1a^{n-3} + \alpha_2a^{n-2}$, $cb = \beta a^{n-2}$, $ca^2 = \gamma a^{n-4} + \gamma_1a^{n-3} + \gamma_2a^{n-2}$, $ca^3 = -a(ca^2)$, $ca^4 = a^2(ca^2)$, $ba^2 = \lambda a^{n-2}$ e os produtos restantes não triviais são zero.

Com as tabelas de multiplicação dadas no teorema acima, os seguintes lemas vão mostrar como são os elementos de índice maximal para cada $n \geq 6$. Além disso, se $\bar{a}$ é um elemento de índice maximal serão dadas condições necessárias e suficientes para que $M(\bar{a})$ seja um ideal.

Lema 39. Sejam $\mathcal{A} \in \mathfrak{V}_{Id}$, $(a, b, c) \in \overline{\mathcal{P}(\mathcal{A})}$ e $\bar{a} = \sum \rho_i a^i + \tau_1 b + \tau_2 c$.

- i. Se $n = 6$, $\bar{a}$ possui índice maximal, se e somente se, $\rho_1^2 - \tau_2^2 \gamma^2 \neq 0$ e $\rho_1^2 - \tau_2^2(\gamma^2 + 2\lambda) \neq 0$.
- ii. Se $n = 7$, $\bar{a}$ possui índice maximal, se e somente se, $\rho_1^2 - \tau_2^2 \gamma^2 \neq 0$.
- iii. Se $n \geq 8$, $\bar{a}$ possui índice maximal, se e somente se, $\rho_1 \neq 0$.

Demonstração. Ao calcular $\bar{a}^{n-2}$ para $n = 6$ e $n = 7$ usando o teorema anterior, segue que

$$\bar{a}^{n-2} = \begin{cases} (\rho_1^2 - \tau_2^2 \gamma^2)(\rho_1^2 - \tau_2^2(\gamma^2 + 2\lambda))a^4 & \text{se } n = 6. \\ (\rho_1^2 - \tau_2^2 \gamma^2)^2(\rho_1 + \tau_2 \gamma)a^5 & \text{se } n = 7. \end{cases}$$

portanto, os item *i* e *ii* seguem de imediato.

Para provar *iii*, será provado o seguinte fato: $\rho_1 \neq 0$, se e somente se, $\bar{a}^4 \not\equiv 0 \pmod{M^5(a)}$. Dado que $\bar{a}a^i, \bar{a}b, \bar{a}c \in M^{n-4}(a) + b\mathbb{F}$ para $i > 1$, e $\bar{a}a \in M^2(a) \setminus M^3(a)$ se e somente se, $\rho_1 \neq 0$, tem-se que $\bar{a}^2 \not\equiv 0 \pmod{M^3(a) + b\mathbb{F}}$ se e somente se, $\rho_1 \neq 0$. Concluindo desta forma, que $\bar{a}^4 \not\equiv 0 \pmod{M^5(a)}$, se e somente se, $\rho_1 \neq 0$.

Como $\bar{a}^5 = \rho_1^5 a^5 + t$ para algum $t \in M^6(a)$ e dado que $M^5(a)$ esta contido no anulador de $\text{span}\{b, c\}$, usando indução, resulta que $\bar{a}^k$ é um elemento da subálgebra $\mathbb{F}[a]$, a qual é associativa, dessa forma, obtém-se que

$$\bar{a}^k = (\cdots (\bar{a}^5 (\underbrace{\sum \rho_i a^i}_{k-5 \text{ vezes}})) \cdots (\sum \rho_i a^i)) = \bar{a}^5 (\sum \rho_i a^i)^{k-5} = \bar{a}^5 (\rho_1^{k-5} a^{k-5} + t_1),$$

onde $t_1 \in M^{k-4}(a)$, portanto, $\bar{a}^k = \rho_1^k a^k + t_2$ para algum $t_2 \in M^{k+1}(a)$. Concluindo desta forma, que $\bar{a}^{(n-2)} = \rho_1^{n-2} a^{n-2} + t_3$ para $t_3 \in M^{n-1}(a) = 0$. Isto posto, mostra que $\bar{a}^{(n-2)} \neq 0$, se e somente se, $\rho_1 \neq 0$. $\square$

Lema 40. Sejam (a, b, c) , $\bar{a}$ como acima e de índice maximal (caso $n \geq 8$, $\rho_1 = 1$). Se $n \geq 6$, então $M(\bar{a})$ é um ideal de $\mathcal{A}$, se e somente se, $\rho_1 \tau_2 = 0$, mas $\rho_1^2 + \tau_2^2 \neq 0$.

Demonstração. Se $n = 6$, então

$$M(\bar{a}) = \text{span}\{a^4, a^3, (\rho_1^2 - \tau_2^2(\gamma^2 + 2\lambda))a^2 + \tau_2^2 b, \rho_1 a + \rho_2 a^2 + \tau_1 b + \tau_2 c\}.$$

Caso se tiver $\tau_2 = 0$, então $M(\bar{a}) = \text{span}\{a^4, a^3, a^2, \rho_1 a + \tau_1 b\}$. Se $y = \sum \epsilon_i a^i + \omega_1 b + \omega_2 c$, tem-se que $ya^i, y(\rho_1 a + \tau_1 b) \in M^2(a)$, portanto, $M(\bar{a})$ é um ideal.

Suponha-se agora, que $\rho_1 = 0$. Então $M(\bar{a}) = \text{span}\{a^4, a^3, b - (\gamma^2 + 2\lambda)a^2, \rho_2 a^2 + \tau_1 b + \tau_2 c\}$. Se $y \in \mathcal{A}$ como acima, então para $i > 1$, $ya^i, yb \in M^3(a)$, além disso,

$$y(\rho_2 a^2 + \tau_1 b + \tau_2 c) = \tau_2 \epsilon_1 b - \tau_2 \epsilon_1 (\gamma^2 + 2\lambda) a^2 \pmod{M^3(a)} \equiv 0 \pmod{M^2(\bar{a})}.$$

Logo $M(\bar{a})$ é um ideal. A condição $\rho_1^2 + \tau_2^2 \neq 0$ é devida que $\bar{a}$ possui índice maximal.

De outro lado, suponha-se que $M(\bar{a})$ é um ideal. Se $y \in \mathcal{A}$ como acima, então para $i > 1$ resulta que $ya^i, yb \in M^3(a)$. Aliás, $y(\rho_1 a + \rho_2 a^2 + \tau_1 b + \tau_2 c) \equiv \epsilon_1 \rho_1 a^2 + \omega_2 \tau_2 b - \omega_2 \tau_2 (\gamma^2 + 2\lambda) a^2 \pmod{M^3(a)}$. Dado que $M(\bar{a})$ é um ideal, então existe $\epsilon \in \mathbb{F}$ tal que

$$\epsilon_1 \rho_1 - \omega_2 \tau_2 (\gamma^2 + 2\lambda) = \epsilon (\rho_1^2 - \tau_2^2 (\gamma^2 + 2\lambda)) \quad (4.1)$$

$$\omega_2 \tau_2 = \epsilon \tau_2^2. \quad (4.2)$$

Portanto, de (4.2) obtém-se que $\tau_2 (\omega_2 - \epsilon \tau_2) = 0$, é dizer, $\tau_2 = 0$, ou $\omega_2 / \tau_2 = \epsilon$. Se $\tau_2 = 0$, o sistema é consistente.

Se $\epsilon = \omega_2 / \tau_2$, em (4.1) cumpre-se que $\epsilon_1 \rho_1 \tau_2 - \omega_2 \tau_2^2 (\gamma^2 + 2\lambda) = \rho_1^2 \omega_2 - \omega_2 \tau_2^2 (\gamma^2 + 2\lambda)$, portanto, $\rho_1 (\epsilon_1 \tau_2 - \rho_1 \omega_2) = 0$, de onde resulta que $\rho_1 = 0$ ou $\epsilon_1 \tau_2 - \rho_1 \omega_2 = 0$ para cada $\epsilon_1, \omega_2 \in \mathbb{F}$. Dessa forma, se $\rho_1 \neq 0$, para $\epsilon_1 = 0$, $\omega_2 = 1$ a condição $\epsilon_1 \tau_2 - \rho_1 \omega_2 = 0$ não é válida. Assim, cumpre-se que se $M(\bar{a})$ é um ideal, então $\rho_1 \tau_2 = 0$.

Se $n = 7$, então

$$M(\bar{a}) = \text{span}\{a^5, a^4, a^3, (\rho_1^2 - \tau_2^2) a^2 + \tau_2^2 b, \rho_1 a + \rho_2 a^2 + \tau_1 b + \tau_2 c\}.$$

Suponha inicialmente que $M(\bar{a})$ é um ideal. Seja $y \in \mathcal{A}$ como acima, então para $i > 1$ tem-se que $ya^i, yb \in M^3(a)$. De outro lado, $y(\rho_1 a + \rho_2 a^2 + \tau_1 b + \tau_2 c) \equiv \epsilon_1 \rho_1 a^2 + \omega_2 \tau_2 b - \omega_2 \tau_2 \gamma^2 a^2 \pmod{M^3(a)}$. Dado que $M(\bar{a})$ é um ideal, então existe $\epsilon \in \mathbb{F}$ tal que são válidas as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \rho_1 - \omega_2 \tau_2 \gamma^2 &= \epsilon (\rho_1^2 - \tau_2^2 \gamma^2) \\ \omega_2 \tau_2 &= \epsilon \tau_2^2. \end{aligned}$$

Análogo ao feito para o caso $n = 6$ ($\lambda = 0$), obtém-se que $\rho_1 \tau_2 = 0$.

A recíproca é feita como no caso $n = 6$.

Se $n \geq 8$ e $M(\bar{a})$ é um ideal. Neste caso resulta que

$$M(\bar{a}) = \text{span}\{a^{n-2}, a^{n-3}, a^{n-4}, \dots, a^3, a^2 + \tau_2^2 b, a + \rho_2 a^2 + \tau_1 b + \tau_2 c\}.$$

Se $y \in \mathcal{A}$ é como acima, obtém-se que para $i > 1$, $ya^i, yb \in M^{n-4}(a)$. De outro lado, cumpre-se que $y(a + \rho_2 a^2 + \tau_1 b + \tau_2 c) \equiv \epsilon_1 a^2 + \omega_2 \tau_2 b \pmod{M^{n-4}(a)}$. Como $M(\bar{a})$ é um ideal, então existe $\epsilon \in \mathbb{F}$ tal que as seguintes igualdades são válidas:

$$\epsilon_1 = \epsilon \quad (4.3)$$

$$\omega_2 \tau_2 = \epsilon \tau_2^2. \quad (4.4)$$

Da equação (4.4) obtém-se que $\tau_2 (\omega_2 - \epsilon_1 \tau_2) = 0$, portanto, $\tau_2 = 0$ ou $\omega_2 = \epsilon_1 \tau_2$ para cada $\epsilon_1, \omega_2 \in \mathbb{F}$. No entanto, se $\tau \neq 0$, para $\epsilon_1 = 1$, $\omega_2 = 0$ a equação (4.4) não é válida. Portanto, conclui-se que $\tau_2 = 0$.

Para a recíproca, observe que como consequência ao fato de $\tau_2 = 0$, então $y(a + \rho_2 a^2 + \tau_1 b) \equiv \epsilon_1 a^2 \pmod{M^{n-4}(a)}$, portanto $M(\bar{a})$ é um ideal. $\square$

Corolário 9. *Seja $\mathcal{A} \in \mathfrak{V}_{Id}$, e $\bar{a}$ é um elemento de índice maximal tal que $M(\bar{a})$ não é um ideal. Então $M^2(\bar{a})$ é um ideal.*

Teorema 18. *A classe $\mathfrak{V}_{Id}$ está contida na classe $\mathfrak{V}_{Id2}$.*

Demonstração. Se $n = 6$, seja $\bar{a} = a + c$, ou $\bar{a} = 2a + c$, ou $\bar{a} = a + 2c$. Algum deles possui índice maximal. Inicialmente será suposto que $\lambda = 0$. Se $\gamma^2 = 1$, caso $\bar{a} = 2a + c$ não possui índice maximal, cumpre-se que $4 - 1 - 2\lambda = 0$, portanto $\lambda = 3/2$. Desta forma, obtém-se que $\bar{a} = a + 2c$ possui índice maximal, pois $1 - 4\gamma^2 \neq 0$ e $1 - 4(\gamma^2 + 2\lambda) \neq 0$.

Se $\lambda \neq 0$ e $\bar{a} = a + c$ não possui índice maximal, segue que $\gamma^2 = 1$ ou $1 - \gamma^2 - 2\lambda = 0$, mas se $\gamma^2 = 1$, $\lambda = 0$, logo $\lambda = \frac{1-\gamma^2}{2}$. Além disso, se $\bar{a} = 2a + c$ não é de índice maximal, então $\gamma^2 = 4$, ou $4 - \gamma^2 - 2\lambda = 0$. Mas $1 - \gamma^2 - 2\lambda = 0$, logo $\gamma^2 = 4$, assim, $\lambda = -3/2$. Seja $\bar{a} = a + 2c$, então $1 - 4\gamma^2 \neq 0$, e $1 - 4(\gamma^2 + 2\lambda) \neq 0$. Em qualquer um dos casos onde $\bar{a}$ é um elemento de índice maximal, cumpre-se que $M(\bar{a})$ não é um ideal.

Se $n = 7$, seja $\bar{a} = a + c$ ou $\bar{a} = 2a + c$. Algum destes elementos possui índice maximal, pois é análogo ao caso $n = 6$ quando $\lambda = 0$. Qualquer um deles que possua índice maximal satisfaz que $M(\bar{a})$ não é ideal.

Se $n \geq 8$, seja $\bar{a} = a + c$. Ele possui índice maximal, e $M(\bar{a})$ não é ideal.

Dessa forma, existe uma tripla $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \in \overline{\mathcal{P}(\mathcal{A})}$ tal que $M(\bar{a})$ não é um ideal. No entanto, pelo corolário acima, $M^2(\bar{a})$ é um ideal.

□

Com o teorema acima tem-se demonstrado que uma das classes encontradas pelos autores em [FGGMM14] está de mais. Não obstante, os lemas mais para frente mostram que as classes $\mathfrak{V}_{Id}$ e $\mathfrak{V}_{Id2}$ são diferentes. Para enunciar esses lemas é necessário das tabelas de multiplicação das álgebras $\mathcal{A} \in \mathfrak{V}_{Id2}$. Descrevem-se a continuação os teoremas para $n = 6, 7, 8, 9$ e finalmente para $n \geq 10$.

Teorema 19. *Seja $\mathcal{A} \in \mathfrak{V}_{Id2}$ uma álgebra de dimensão 6, $(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(a))$ onde $M(a)$ não é um ideal. Então existe $(a, b, c) \in \overline{\mathcal{P}(\mathcal{A})}$ tal que $\mathcal{A}$ possui uma base dada por $\{a, a^2, a^3, a^4, b, c\}$ e os produtos não triviais bem definidos por $ca = b$, $ba = 0$, $c^2 = \alpha b + (-\gamma^2 + 4\gamma\lambda + 2\beta - 4\mu - 2\alpha\lambda)a^2 + \alpha_1 a^3 + \alpha_2 a^4$, $cb = \beta a^3 + \beta_1 a^4$, $ca^2 = \gamma a^3 + \gamma_1 a^4$, $ca^3 = (-\gamma + 4\lambda)a^4$, $b^2 = \mu a^4$, $ba^2 = \lambda a^4$. Aliás, os escalares satisfazem alguma das seguintes condições:*

- i. $\alpha = 1$, $\beta \neq 0$, $\gamma = 4\lambda - 1/2$, $\mu = \beta/2$.
- ii. $\alpha = 1$, $\beta \neq 0$, $\gamma = 2\beta + 1/2$, $\mu = \beta(2\lambda - \beta)$.
- iii. $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\mu = 0$.
- iv. $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma = 4\lambda$, $\mu = \beta/2$.
- v. $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\mu = 0$.
- vi. $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\mu = \gamma(-\gamma/4 + \lambda)$.

Teorema 20. *Seja $\mathcal{A} \in \mathfrak{V}_{Id2}$ uma álgebra de dimensão 7, $(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(a))$ onde $M(a)$ não é um ideal. Então existe $(a, b, c) \in \overline{\mathcal{P}(\mathcal{A})}$ tal que $\mathcal{A}$ possui uma base dada por $\{a, a^2, a^3, a^4, a^5, b, c\}$ e os produtos não triviais bem definidos por $ca = b$, $ba = 0$, $c^2 = \alpha b - (\gamma - 4\lambda)^2 a^2 + (4\gamma\lambda_1 - 6\gamma_1\lambda + 2\beta - 4\mu - 2\alpha\lambda_1)a^3 + \alpha_2 a^4 + \alpha_3 a^5$, $cb = -6\lambda^2 a^3 + \beta a^4 + \beta_1 a^5$, $ca^2 = \gamma a^3 + \gamma_1 a^4 + \gamma_2 a^5$, $b^2 = -3\lambda^2 a^4 + \mu a^5$, $ba^2 = \lambda a^4 + \lambda_1 a^5$*

$$\begin{aligned}
 ba^3 &= -a(ba^2), \\
 ba^4 &= a^2(ba^2), \\
 ca^3 &= -a(ca^2) + 4ba^2, \\
 ca^4 &= a^2(ca^2) - 6a(ba^2), \\
 ca^5 &= -5a^3(ca^2)/3 + 10a^2(ba^2),
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Os escalares satisfazem alguma das seguintes condições:

- i. $\alpha = -2\lambda$, $\gamma = 5\lambda$,
- ii. $\alpha = 8\lambda - 2\gamma$, $\mu = -2\lambda\lambda_1$,
- iii. $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\beta = 0$,
- iv. $\lambda = 0$, $\alpha = -2\gamma$, $\mu = 0$,
- v. $\lambda = 0$, $\alpha = 2\gamma$, $\beta = 2\mu$.

Teorema 21. *Seja $\mathcal{A} \in \mathfrak{V}_{Id2}$ uma álgebra de dimensão 8, $(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(a))$ onde $M(a)$ não é um ideal. Então existe $(a, b, c) \in \overline{\mathcal{P}(\mathcal{A})}$ tal que $\mathcal{A}$ possui uma base dada por $\{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, b, c\}$ e os produtos não triviais bem definidos por $ca = b$, $ba = 0$, $c^2 = \alpha b + (\gamma^2 - 6\gamma\lambda + 2\beta - 4\mu - 2\alpha\lambda_1)a^4 + \alpha_1a^5 + \alpha_2a^6$, $cb = \beta a^5 + \beta_1a^6$, $ca^2 = \gamma a^4 + \gamma_1a^5 + \gamma_2a^6$, $b^2 = \mu a^6$, $ba^2 = \lambda a^5 + \lambda_1a^6$, ba^3 , ca^3 , ca^4 , ca^5 como na equação (4.5). Ainda mais, deve satisfazer-se que $\alpha\beta = \alpha\mu = \alpha\lambda = 0$.*

Teorema 22. *Seja $\mathcal{A} \in \mathfrak{V}_{Id2}$ uma álgebra de dimensão 9, $(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(a))$ onde $M(a)$ não é um ideal. Então existe $(a, b, c) \in \overline{\mathcal{P}(\mathcal{A})}$ tal que $\mathcal{A}$ possui uma base dada por $\{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, b, c\}$ e os produtos não triviais bem definidos por $ca = b$, $ba = 0$, $c^2 = \alpha b + 5\lambda^2a^4 + (8\gamma\lambda - 18\lambda_1\lambda + 2\beta - 4\mu - 2\alpha\lambda_2)a^5 + \alpha_2a^6 + \alpha_3a^7$, $cb = \lambda^2a^5 + \beta a^6 + \beta_1a^7$, $ca^2 = 3\lambda a^4 + \gamma a^5 + \gamma_1a^6 + \gamma_2a^7$, $b^2 = -3\lambda^2a^6 + \mu a^7$, $ba^2 = \lambda a^5 + \lambda_1a^6 + \lambda_2a^7$, ba^3 , ba^4 , ca^3 , ca^4 , ca^5 como na equação (4.5). Além disso, deve satisfazer-se as condições $\alpha\beta = \alpha\mu = \alpha\lambda = \alpha\lambda_1 = 0$.*

Teorema 23. *Seja $\mathcal{A} \in \mathfrak{V}_{Id2}$ uma álgebra de dimensão $n \geq 10$, $(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(a))$ onde $M(a)$ não é um ideal. Então existe $(a, b, c) \in \overline{\mathcal{P}(\mathcal{A})}$ tal que $\mathcal{A}$ possui uma base dada por $\{a, a^2, \dots, a^{n-2}, b, c\}$ e os produtos não triviais bem definidos por $ca = b$, $ba = 0$,*

$$\begin{aligned} c^2 &= \alpha b + (15\delta_{n,10}\lambda^2 + 2\beta - 4\mu - 2\alpha\lambda_2)a^{n-4} + \alpha_1a^{n-3} + \alpha_2a^{n-2}, \\ cb &= \beta a^{n-3} + \beta_1a^{n-2}, \\ ca^2 &= 3\lambda a^{n-5} + \gamma a^{n-4} + \gamma_1a^{n-3} + \gamma_2a^{n-2}, \\ b^2 &= \mu a^{n-2}, \\ ba^2 &= \lambda a^{n-4} + \lambda_1a^{n-3} + \lambda_2a^{n-2}, \end{aligned}$$

ba^3 , ba^4 , ca^3 , ca^4 , ca^5 como na equação (4.5). Ainda, $\alpha\beta = \alpha\mu = \alpha\lambda = \alpha\lambda_1 = 0$.

Com os teoremas enunciados acima, pode-se provar as condições para que um elemento $\bar{a} \in \mathcal{A}$ possua índice maximal. Além disso, serão dadas as condições necessárias e suficientes para que dado um elemento de índice maximal, $M(\bar{a})$ seja um ideal. Tem-se os seguintes lemas:

Lema 41. *Sejam $\mathcal{A} \in \mathfrak{V}_{Id2}$, $(a, b, c) \in \overline{\mathcal{P}(\mathcal{A})}$ e $\bar{a} = \sum \rho_i a^i + \tau_1 b + \tau_2 c$.*

- i. *Se $n = 6$, então $\bar{a}$ possui índice maximal, se e somente se, $\rho_1 - \tau_2(\gamma - 4\lambda) \neq 0$ e*

$$\rho_1^3 + \rho_1^2\tau_2\gamma + \rho_1\tau_2^2(4\beta - \gamma^2 - 2\alpha\lambda + 4\gamma\lambda - 4\mu) + \tau_2^3(\alpha(\beta - 2\gamma\lambda) + \gamma(2\beta - \gamma^2 + 4\gamma\lambda - 4\mu)) \neq 0.$$

- ii. *Se $n = 7$, $\bar{a}$ possui índice maximal, se e somente se, $\rho_1 + \tau_2(\gamma - 6\lambda) \neq 0$, $\rho_1 - \tau_2(\gamma - 4\lambda) \neq 0$, e*

$$(\rho_1 + \tau_2\gamma)(\rho_1^2 - \tau_2^2(\gamma - 4\lambda)^2) - 6\tau_2^2\lambda^2(2\rho_1 + \alpha\tau_2) \neq 0.$$

- iii. *Se $n \geq 8$, $\bar{a}$ possui índice maximal, se e somente se, $\rho_1 \neq 0$.*

Demonstração. Ao calcular $\bar{a}^{(n-2)}$ para $n = 6, 7$ e 8 obtém-se o resultado querido.

Para provar *iii*) quando $n \geq 9$, vai ser provado o fato análogo ao feito para *iii*) no Lema 39: $\rho_1 \neq 0$, se e somente se, $\bar{a}^4 \not\equiv 0 \pmod{M^5(a)}$.

Dado que se $i > 1$, tem-se que $\bar{a}a^i, \bar{a}b, \bar{a}c \in M^{n-5}(a) + \mathbb{F}b$, e $\bar{a}a \in M^2(a) \setminus M^3(a) + \mathbb{F}b$ se e somente se, $\rho_1 \neq 0$, então cumpre-se que $\bar{a}^2 \not\equiv 0 \pmod{M^3(a) + \mathbb{F}b}$ se e somente se, $\rho_1 \neq 0$. Concluindo desta forma, que $\bar{a}^4 \not\equiv 0 \pmod{M^5(a)}$.

Como $\bar{a}^6 = \rho_1^6 a^6 + t$ para algum $t \in M^7(a)$ e $M^6(a)$ esta contido no anulador de $\text{span}\{b, c\}$, análogo ao feito no Lema 39, para $k > 6$ tem-se que

$$\bar{a}^k = \bar{a}^6 \left(\sum \rho_i a^i \right)^{k-6} = \bar{a}^6 (\rho_1^{k-6} a^{k-6} + t_1),$$

para algum $t_1 \in M^{k-5}(a)$, portanto, $\bar{a}^k = \rho_1^k a^k + t_2$ para algum $t_2 \in M^{k+1}(a)$. Desta forma se conclui que $\bar{a}^{(n-2)} = \rho_1^{n-2} a^{n-2} + t_3$ para $t_3 \in M^{n-1}(a) = 0$. Consequentemente, conclui-se que $\bar{a}^{(n-2)} \neq 0$, se e somente se, $\rho_1 \neq 0$. $\square$

Lema 42. *Sejam (a, b, c) , $\bar{a}$ como acima e de índice maximal (caso $n \geq 8$, pode-se supor $\rho_1 = 1$).*

i. Se $n = 6$, $M(\bar{a})$ é um ideal de $\mathcal{A}$, se e somente se, $\tau_2 \neq 0$ e $\beta = \frac{\rho_1(\rho_1 + \alpha\tau_2)}{2\tau_2^2} + \frac{\gamma^2 - 4\lambda\gamma + 2\alpha\lambda + 4\mu}{2}$.

ii. Se $n = 7$, $M(\bar{a})$ é um ideal de $\mathcal{A}$, se e somente se, $\tau_2 \neq 0$ e $(\gamma - 4\lambda)^2 = -\frac{\rho_1(\rho_1 + \alpha\tau_2)}{\tau_2^2}$.

iii. Se $n \geq 8$, $M(\bar{a})$ é um ideal de $\mathcal{A}$, se e somente se, $0 = 1 + \tau_2\alpha$.

Demonstração. (i). Se $n = 6$, então

$$M(\bar{a}) = \text{span}\{a^4, a^3, (\rho_1^2 + \tau_2^2 T)a^2 + \tau_2(2\rho_1 + \tau_2\alpha)b, \rho_1 a + \rho_2 a^2 + \tau_1 b + \tau_2 c\}$$

onde $T = 2\beta - \gamma^2 - 2\alpha\lambda + 4\lambda\gamma - 4\mu$. Caso se tiver $\tau_2 \neq 0$, e $T = \frac{\rho_1(\delta_1 + \alpha\tau_2)}{\tau_2^2}$, então $M(\bar{a}) = \text{span}\{a^4, a^3, \rho_1 a^2 + \tau_2 b, \rho_1 a + \rho_2 a^2 + \tau_1 b + \tau_2 c\}$. Se $y = \sum \epsilon_i a^i + \omega_1 b + \omega_2 c$, tem-se para $i > 1$ que $ya^i, yb \in M^3(a)$, e

$$\begin{aligned} y(\rho_1 a + \rho_2 a^2 + \tau_1 b + \tau_2 c) &\equiv \rho_1 \epsilon_1 a^2 + \rho_1 \omega_2 b + \epsilon_1 \tau_2 b + \tau_2 \omega_2 \alpha b + \omega_2 \tau_2 T a^2 \\ &\equiv (\rho_1 \epsilon_1 + \omega_2 \tau_2 T) a^2 + (\rho_1 \omega_2 + \epsilon_1 \tau_2 + \tau_2 \omega_2 \alpha) b \\ &\equiv \left(\epsilon_1 + \frac{\omega_2 \rho_1}{\tau_2} + \omega_2 \alpha \right) (\rho_1 a^2 + \tau_2 b) \pmod{M^3(a)}. \end{aligned}$$

Portanto, $M(\bar{a})$ é um ideal.

Suponha-se que $M(\bar{a})$ é um ideal. Se $y \in \mathcal{A}$ como acima, para $i > 1$ tem-se que $ya^i, yb \in M^3(a)$. De outro lado, $y(\rho_1 a + \rho_2 a^2 + \tau_1 b + \tau_2 c) \equiv \epsilon_1 \rho_1 a^2 + \rho_1 \omega_2 b + \epsilon_1 \tau_2 b + \omega_2 \tau_2 \alpha b + \omega_2 \tau_2 T a^2 \pmod{M^3(a)}$. Portanto para cada $\epsilon_1, \omega_2 \in \mathbb{F}$ existe $\epsilon \in \mathbb{F}$ tal que

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \rho_1 + \omega_2 \tau_2 T &= \epsilon(\rho_1^2 + \tau_2^2 T), \\ \rho_1 \omega_2 + \epsilon_1 \tau_2 + \omega_2 \tau_2 \alpha &= \epsilon \tau_2 (2\rho_1 + \alpha \tau_2). \end{aligned}$$

Se $\epsilon_1 = \omega_2 = 0$, então não há nada a provar. Se $\epsilon_1 = 0$, $\omega_2 = 1$, $\exists \theta_1$ tal que

$$\tau_2 T = \theta_1 (\rho_1^2 + \tau_2^2 T), \quad (4.6)$$

$$\rho_1 + \tau_2 \alpha = \theta_1 \tau_2 (2\rho_1 + \alpha \tau_2). \quad (4.7)$$

Se $\epsilon_1 = 1$, $\omega_2 = 0$, $\exists \theta_2$ tal que

$$\rho_1 = \theta_2(\rho_1^2 + \tau_2^2 T), \quad (4.8)$$

$$\tau_2 = \theta_2 \tau_2 (2\rho_1 + \alpha \tau_2). \quad (4.9)$$

Portanto, de (4.9) obtém-se que $\tau_2(1 - \theta_2(2\rho_1 + \alpha \tau_2)) = 0$, é dizer, $\tau_2 = 0$, ou $1 - \theta_2(2\rho_1 + \alpha \tau_2) = 0$. Se $\tau_2 = 0$ de (4.7), tem-se que $\rho_1 = 0$. Mas isto é absurdo, pois $\bar{a}$ é de índice maximal. Assim, deve ser válido que $1 = \theta_2(2\rho_1 + \alpha \tau_2)$. Desta forma, em (4.8) obtém-se $\rho_1(2\rho_1 + \alpha \tau_2) = \rho_1^2 + \tau_2^2 T$. Segue a conclusão do lema.

(ii) Se $n = 7$, então

$$M(\bar{a}) = \text{span}\{a^5, a^4, a^3, (\rho_1^2 - \tau_2^2(\gamma - 4\lambda)^2)a^2 + \tau_2(2\rho_1 + \alpha \tau_2)b, \rho_1 a + \rho_2 a^2 + \tau_1 b + \tau_2 c\}.$$

Suponha-se que $M(\bar{a})$ é um ideal. Se $y \in \mathcal{A}$ como acima, para $i > 1$ tem-se que $ya^i, yb \in M^3(a)$. De outro lado, $y(\rho_1 a + \rho_2 a^2 + \tau_1 b + \tau_2 c) \equiv \epsilon_1 \rho_1 a^2 + \rho_1 \omega_2 b + \epsilon_1 \tau_2 b + \omega_2 \tau_2 \alpha b - \omega_2 \tau_2 (\gamma - 4\lambda)^2 a^2 \pmod{M^3(a)}$. Portanto, para cada $\epsilon_1, \omega_2 \in \mathbb{F}$ existe $\epsilon \in \mathbb{F}$ tal que

$$\epsilon_1 \rho_1 - \omega_2 \tau_2 (\gamma - 4\lambda)^2 = \epsilon(\rho_1^2 - \tau_2^2(\gamma - 4\lambda)^2),$$

$$\rho_1 \omega_2 + \epsilon_1 \tau_2 + \omega_2 \tau_2 \alpha = \epsilon \tau_2 (2\rho_1 + \alpha \tau_2).$$

Se $\epsilon_1 = \omega_2 = 0$, não há nada a provar. Se $\epsilon_1 = 0$, $\omega_2 = 1$, $\exists \theta_1$ tal que

$$-\tau_2(\gamma - 4\lambda)^2 = \theta_1(\rho_1^2 - \tau_2^2(\gamma - 4\lambda)^2), \quad (4.10)$$

$$\rho_1 + \tau_2 \alpha = \theta_1 \tau_2 (2\rho_1 + \alpha \tau_2). \quad (4.11)$$

Se $\epsilon_1 = 1$, $\omega_2 = 0$, $\exists \theta_2$ tal que

$$\rho_1 = \theta_2(\rho_1^2 - \tau_2^2(\gamma - 4\lambda)^2), \quad (4.12)$$

$$\tau_2 = \theta_2 \tau_2 (2\rho_1 + \alpha \tau_2). \quad (4.13)$$

Dessa forma, de (4.13) obtém-se que $\tau_2(1 - \theta_2(2\rho_1 + \alpha \tau_2)) = 0$, é dizer, $\tau_2 = 0$, ou $1 - \theta_2(2\rho_1 + \alpha \tau_2) = 0$. Se $\tau_2 = 0$ de (4.11), tem-se que $\rho_1 = 0$. Mas isto é absurdo, pois $\bar{a}$ é de índice maximal. Portanto, segue que $1 = \theta_2(2\rho_1 + \alpha \tau_2)$. Consequentemente, da equação (4.12) obtém-se $\rho_1(2\rho_1 + \alpha \tau_2) = \rho_1^2 - \tau_2^2(\gamma - 4\lambda)^2$, é dizer, $(\gamma - 4\lambda)^2 = -\frac{\rho_1(\rho_1 + \alpha \tau_2)}{\tau_2^2}$ tal como era requerido.

A recíproca é como no caso $n = 6$.

(iii) Se $n \geq 8$, como $\bar{a}$ possui índice maximal, então $\rho_1 \neq 0$, é dizer, pode-se supor que $\rho_1 = 1$. De outro lado, tem-se que

$$M(\bar{a}) = \text{span}\{a^{n-2}, a^{n-3}, \dots, a^4, a^3, a^2 + \tau_2(2 + \alpha \tau_2)b, a + \rho_2 a^2 + \tau_1 b + \tau_2 c\}.$$

Suponha-se que $M(\bar{a})$ é um ideal. Se $y \in \mathcal{A}$ como acima, para $i > 1$ obtém-se que $ya^i, yb \in M^3(a)$. Além disso, $y(a + \rho_2 a^2 + \tau_1 b + \tau_2 c) \equiv \epsilon_1 a^2 + \omega_2 b + \epsilon_1 \tau_2 b + \omega_2 \tau_2 \alpha b \pmod{M^3(a)}$. Assim, existe $\epsilon \in \mathbb{F}$ tal que

$$\epsilon_1 = \epsilon, \quad (4.14)$$

$$\omega_2 + \epsilon_1 \tau_2 + \omega_2 \tau_2 \alpha = \epsilon \tau_2 (2 + \alpha \tau_2). \quad (4.15)$$

Portanto, $\omega_2 + \epsilon_1 \tau_2 + \omega_2 \tau_2 \alpha = \epsilon_1 \tau_2 (2 + \alpha \tau_2)$, é dizer, $(\omega_2 - \epsilon_1 \tau_2)(1 + \alpha \tau_2) = 0$. Se $\epsilon_1 = 0$, $\omega_2 = 1$ cumpre-se que $1 + \alpha \tau_2 = 0$.

Se $1 + \alpha \tau_2 = 0$, então $M(\bar{a}) = \text{span}\{a^{n-2}, a^{n-3}, \dots, a^3, a^2 + \tau_2 b, a + \rho_2 a^2 + \tau_1 b + \tau_2 c\}$, portanto,

se $y \in \mathcal{A}$ é dado como acima, segue que

$$\begin{aligned} y(a + \rho_2 a^2 + \tau_1 b + \tau_2 c) &\equiv \epsilon_1 a^2 + \omega_2 b + \epsilon_1 \tau_2 b + \omega_2 \tau_2 \alpha b \pmod{M^3(a)} \\ &\equiv \epsilon_1(a^2 + \tau_2 b) \pmod{M^3(a)}. \end{aligned}$$

Desta forma, conclui-se que $M(\bar{a})$ é um ideal. $\square$

Corolário 10. *Seja $\mathcal{A} \in \mathfrak{V}_{Id2}$. Se $\bar{a}$ é um elemento de índice maximal tal que $M(\bar{a})$ não é um ideal, então $M^2(\bar{a})$ é um ideal.*

4.2 Descrição das triplas $(a, b, c) \in \overline{\mathcal{P}(\mathcal{A})}$ na classe $\mathfrak{V}_{Id2}$ para $n \geq 12$.

Para provar que $\mathfrak{V}_{Id} \subsetneq \mathfrak{V}_{Id2}$, é preciso observar como mudam os coeficientes mediante mudanças de base. Essa análise será iniciada com o estudo das triplas $(a, b, c) \in \overline{\mathcal{P}(\mathcal{A})}$ para $\mathcal{A} \in \mathfrak{V}_{Id2}$.

No que segue do capítulo, serão estudadas álgebras de dimensão $n \geq 12$, caso dizer o contrario.

Enxergue que dado $a \in \mathcal{A}$ um elemento de índice maximal, álgebra $\mathcal{B}$ é tal que $\mathcal{B} = \mathbb{F}a + \mathcal{A}^2$, é por isso que ao trocar de base para uma dependendo do elemento de índice maximal $\bar{a} \in \mathcal{A}$, segue que $\mathcal{B}(\bar{a}) = \mathbb{F}(\rho_1 a + \tau_2 c) + \mathcal{A}^2$. Além disso, para $n \geq 12$, pelo lema acima segue que $M(\bar{a})$ é um ideal, se e somente se, $1 + \tau_2 \alpha = 0$. Portanto, se $\mathcal{A}$ é uma álgebra onde $\alpha = 0$, resultará que $\mathcal{A}$ não possui elementos de índice maximal para os quais $M(a)$ seja um ideal.

Por este motivo, será considerado o caso $\alpha = 0$, pois se $\alpha \neq 0$, então $\bar{a} = \alpha a - c$ é um elemento de índice maximal para o qual $M(\bar{a})$ é um ideal. Desta forma, se $\alpha \neq 0$ é melhor trabalhar com as tabelas de multiplicação para álgebras $\mathcal{A} \in \mathfrak{V}_{Id}$.

É por isto que será provado que para qualquer mudança de base numa álgebra $\mathcal{A} \in \mathfrak{V}_{Id2}$ onde $\alpha = 0$, esse parâmetro permanece invariante. Sendo assim, de aqui em diante, $\mathcal{A}$ representa uma álgebra de dimensão $n \geq 12$ e nilíndice $n - 1$ tal que existe uma tripla $(a, b, c) \in \overline{\mathcal{P}(\mathcal{A})}$ onde $\alpha = 0$.

Lema 43. *Seja $\bar{a} = \sum \rho_1 a^i + \tau_1 b + \tau_2 c$ um elemento de índice maximal. Então*

$$i. \bar{a}^2 \equiv \rho_1^2 a^2 + 2\rho_1 \tau_2 b \pmod{M^3(a)}.$$

ii. *Para $k \geq 3$ tem-se que*

$$\begin{aligned} \bar{a}^k &\equiv \rho_1^k a^k + k\rho_1^{k-1} \rho_2 a^{k+1} + \rho_1^{k-2} \left(\frac{k(k-1)}{2} \rho_2^2 + k\rho_1 \rho_3 \right) a^{k+2} \\ &\quad + \rho_1^{k-3} \left(k(k-1)\rho_1 \rho_2 \rho_3 + k\rho_1^2 \rho_4 + \frac{k(k-1)(k-2)}{6} \rho_2^3 \right) a^{k+3} \pmod{M^{k+4}(a)}. \end{aligned}$$

Demonstração. Dado que $\alpha = 0$, então cumpre-se que

$$\bar{a}^2 \equiv \rho_1^2 a^2 + 2\rho_1^2 \rho_2 a^3 + (\rho_2^2 + 2\rho_1 \rho_3) a^4 + (2\rho_2 \rho_3 + 2\rho_1 \rho_4) a^5 + 2\rho_1 \tau_2 b \pmod{M^6(a)},$$

portanto, o item i segue de imediato. Aliás,

$$\begin{aligned} \bar{a}^3 &\equiv \rho_1^3 a^3 + 2\rho_1^2 \rho_2 a^4 + \rho_1(\rho_2^2 + 2\rho_1 \rho_3) a^5 + \rho_1(2\rho_2 \rho_3 + 2\rho_1 \rho_4) a^6 + \rho_1^2 \rho_2 a^4 \\ &\quad + 2\rho_1 \rho_2^2 + (\rho_2^3 + 2\rho_1 \rho_2 \rho_3) a^6 + \rho_1^2 \rho_3 a^5 + 2\rho_1 \rho_2 \rho_3 a^6 + \rho_1^2 \rho_4 a^6 \pmod{M^7(a)} \\ &\equiv \rho_1^3 a^3 + 3\rho_1^2 \rho_2 a^4 + \rho_1(3\rho_2^2 + 3\rho_1 \rho_3) a^5 + (6\rho_1 \rho_2 \rho_3 + 3\rho_1^2 \rho_4 + \rho_2^3) a^6 \pmod{M^7(a)}. \end{aligned}$$

Suponha-se que para cada $j < k$ tem-se a igualdade apresentada no item *ii*. Como $n \geq 12$, então tem-se que para cada $k \geq 3$, $a^{k-1}b$, $a^{k-1}c \in M^{k+4}(a)$, portanto,

$$\begin{aligned} \bar{a}^k &= \bar{a}^{(k-1)} \bar{a} \\ &\equiv \left(\rho_1^{k-1} a^{k-1} + (k-1) \rho_1^{k-2} \rho_2 a^k + \rho_1^{k-3} \left(\frac{(k-2)(k-1)}{2} \rho_2^2 + (k-1) \rho_1 \rho_3 \right) a^{k+1} \right. \\ &\quad \left. + \rho_1^{k-4} \left((k-2)(k-1) \rho_1 \rho_2 \rho_3 + (k-1) \rho_1^2 \rho_4 + \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{6} \rho_2^3 \right) a^{k+2} \right) \\ &\quad (\rho_1 a + \rho_2 a^2 + \rho_3 a^3 + \rho_4 a^4) \mod M^{k+4}(a), \end{aligned}$$

é dizer,

$$\begin{aligned} \bar{a}^k &\equiv \rho_1^k a^k + (k-1) \rho_1^{k-1} \rho_2 a^{k+1} + \rho_1^{k-2} \left(\frac{(k-1)(k-2)}{2} \rho_2^2 + (k-1) \rho_1 \rho_3 \right) a^{k+2} \\ &\quad + \rho_1^{k-3} \left((k-1)(k-2) \rho_1 \rho_2 \rho_3 + (k-1) \rho_1^2 \rho_4 + \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{6} \rho_2^3 \right) a^{k+3} \\ &\quad \rho_1^{k-1} \rho_2 a^{k+1} + (k-1) \rho_1^{k-2} \rho_2^2 a^{k+2} + \rho_1^{k-3} \left(\frac{(k-1)(k-2)}{2} \rho_2^3 + (k-1) \rho_1 \rho_2 \rho_3 \right) a^{k+3} \\ &\quad + \rho_1^{k-1} \rho_3 a^{k+2} + (k-1) \rho_1^{k-2} \rho_2 \rho_3 a^{k+3} + \rho_1^{k-1} \rho_4 a^{k+3} \mod M^{k+4}(a) \\ &\equiv \rho_1^k a^k + k \rho_1^{k-1} \rho_2 a^{k+1} + \rho_1^{k-2} \left(\frac{k(k-1)}{2} \rho_2^2 + k \rho_1 \rho_3 \right) a^{k+2} + \rho_1^{k-3} \left((k-1)(k-2) \rho_1 \rho_2 \rho_3 \right. \\ &\quad \left. + (k-1) \rho_1^2 \rho_4 + \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{6} \rho_2^3 + \frac{(k-1)(k-2)}{2} \rho_2^3 + 2(k-1) \rho_1 \rho_2 \rho_3 + \rho_1^2 \rho_4 \right) a^{k+3} \\ &\equiv \rho_1^k a^k + k \rho_1^{k-1} \rho_2 a^{k+1} + \rho_1^{k-2} \left(\frac{k(k-1)}{2} \rho_2^2 + k \rho_1 \rho_3 \right) a^{k+2} \\ &\quad + \rho_1^{k-3} \left(k(k-1) \rho_1 \rho_2 \rho_3 + k \rho_1^2 \rho_4 + \frac{k(k-1)(k-2)}{6} \rho_2^3 \right) a^{k+3} \mod M^{k+4}(a). \end{aligned}$$

□

Como no Teorema 23 aparecem as 4 ultimas potências do elemento maximal, então dados $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{F}$, as 4 ultimas potências de $\bar{a}$ em termos de $a^{n-5}, a^{n-4}, a^{n-3}, a^{n-2}$ bem dadas por

$$\begin{aligned} \gamma \bar{a}^{(n-5)} + \gamma_1 \bar{a}^{(n-4)} + \gamma_2 \bar{a}^{(n-3)} + \gamma_3 \bar{a}^{(n-2)} &= \gamma \rho_1^{n-5} a^{n-5} + (\gamma_1 \rho_1^{n-4} + (n-5) \gamma \rho_1^{n-6} \rho_2) a^{n-4} \\ &\quad + \left(\gamma_2 \rho_1^{n-3} + (n-4) \gamma_1 \rho_1^{n-5} \rho_2 + \gamma \rho_1^{n-7} \left(\frac{(n-5)(n-6)}{2} \rho_2^2 + (n-5) \rho_1 \rho_3 \right) \right) a^{n-3} \\ &\quad + \left(\gamma_3 \rho_1^{n-2} + (n-3) \gamma_2 \rho_1^{n-4} \rho_2 + \gamma_1 \rho_1^{n-6} \left(\frac{(n-5)(n-4)}{2} \rho_2^2 + (n-4) \rho_1 \rho_3 \right) \right) \\ &\quad + \gamma \rho_1^{n-8} \left((n-5)(n-6) \rho_1 \rho_2 \rho_3 + (n-5) \rho_1^2 \rho_4 + \frac{(n-7)(n-6)(n-5)}{6} \rho_2^3 \right) a^{n-2} \end{aligned} \quad (4.16)$$

O seguinte lema mostra as relações entre as triplas (a, b, c) , $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \in \overline{\mathcal{P}(\mathcal{A})}$.

Lema 44. *Sejam $\mathcal{A} \in \mathfrak{V}_{Id2}$ tal que $\dim \mathcal{A} \geq 12$, $(a, b, c) \in \overline{\mathcal{P}(\mathcal{A})}$ e $\alpha = 0$. Se $\bar{a} = \sum \rho_i a^i + \tau_1 b + \tau_2 c$ é um elemento de índice maximal, então existem $\bar{b}, \bar{c} \in \mathcal{A}$ tal que $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \in \overline{\mathcal{P}(\mathcal{A})}$. Além disso, $\bar{b}$ é único módulo M_a^{n-2} salvo um múltiplo por escalar,*

$$\begin{aligned} \bar{b} &= \epsilon_{n-5} a^{n-5} + \epsilon_{n-4} a^{n-4} + \epsilon_{n-3} a^{n-3} + \omega_1 b, \\ \bar{c} &= \theta_{n-6} a^{n-6} + \theta_{n-5} a^{n-5} + \theta_{n-4} a^{n-4} + \theta_{n-3} a^{n-3} + \eta_1 b + \eta_2 c, \end{aligned}$$

onde $\omega_1\eta_2 \neq 0$ e os coeficientes satisfazem as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}\epsilon_{n-5} &= -\frac{\rho_2\omega_1\lambda}{\rho_1}, \\ \epsilon_{n-4} &= \omega_1 \frac{\rho_1\rho_3\lambda + \rho_2^2\lambda - \rho_1\rho_2\lambda_1 - \rho_1\tau_2\beta}{\rho_1^2}, \\ \epsilon_{n-3} &= \omega_1 \frac{\rho_1^2\rho_3\lambda_1 - \rho_2^3\lambda + \rho_1\rho_2^2\lambda_1 + \rho_1\rho_2\tau_2\beta - \rho_1^2\rho_2\lambda_2 - \rho_1^2\rho_4\lambda - \rho_1^2\tau_1\mu - \rho_1^2\tau_2\beta_1}{\rho_1^3}, \\ \eta_2 &= \frac{\omega_1}{\rho_1}, \\ \theta_{n-6} &= -\frac{4\rho_2\lambda\omega_1}{\rho_1^2}, \\ \theta_{n-5} &= -\frac{\rho_1^2\rho_2\lambda\eta_1 - 5\rho_2^2\lambda\omega_1 + \rho_1\rho_2\gamma\omega_1 + \rho_1\rho_2\lambda_1\omega_1 + 3\tau_2\omega_1\beta - 4\tau_2\omega_1\mu}{\rho_1^3}, \\ \theta_{n-4} &= \left(\rho_1^3\rho_3\lambda\eta_1 - \rho_1^3\rho_2\lambda_1\eta_1 - \rho_1^3\tau_2\eta_1\beta - 6\rho_2^3\lambda\omega_1 + \rho_1\rho_2^2\omega_1\gamma + 4\rho_1\rho_2\rho_3\omega_1\lambda + 2\rho_1\rho_2^2\omega_1\lambda_1 \right. \\ &\quad + 4\rho_1\rho_2\tau_2\omega_1\beta - 4\rho_1\rho_2\tau_2\omega_1\mu + \rho_1^2\rho_2^2\eta_1\omega_1\lambda - \rho_1^2\rho_2\omega_1\gamma_1 - \rho_1^2\rho_2\omega_1\lambda_2 + \rho_1^2\rho_3\omega_1\gamma \\ &\quad \left. + 2\rho_1^2\rho_4\omega_1\lambda - 3\rho_1^2\rho_3\omega_1\lambda_1 - \rho_1^2\tau_1\omega_1\beta - \rho_1^2\tau_1\omega_1\mu - \rho_1\tau_2\omega_1\alpha_1 - \rho_1^2\tau_2\omega_1\beta_1 \right) / \rho_1^4, \\ \theta_{n-3} &= \left(\rho_1^4\rho_3\lambda_1\eta_1 - \rho_1^4\rho_4\eta_1\lambda - \rho_1^4\rho_2\eta_1\lambda_2 - \rho_1^4\tau_1\eta_1\mu - \rho_1^4\tau_2\eta_1\beta_1 + 6\rho_2^4\omega_1\lambda - 9\rho_1\rho_2^2\rho_3\omega_1\lambda \right. \\ &\quad - \rho_1\rho_2^3\omega_1\gamma - 2\rho_1\rho_2^2\omega_1\lambda_1 - 4\rho_1\rho_2^2\tau_2\beta + 4\rho_1\rho_2^2\tau_2\omega_1\mu - \rho_1^2\rho_2^3\eta_1\lambda + \rho_1^2\rho_2^2\omega_1\gamma_1 + \rho_1^2\rho_2^2\omega_1\lambda_2 \\ &\quad + 3\rho_1^2\rho_3\tau_2\omega_1\beta - 4\rho_1^2\rho_3\tau_2\omega_1\mu + 2\rho_1^2\rho_2\rho_4\omega_1\lambda + 4\rho_1^2\rho_2\rho_3\omega_1\lambda_1 + \rho_1^2\rho_2\tau_1\omega_1\beta + \rho_1^2\rho_2\tau_1\omega_1\mu \\ &\quad + \rho_1^2\rho_2\tau_2\omega_1\alpha_1 + \rho_1^2\rho_2\tau_2\omega_1\beta_1 + \rho_1^3\rho_2^2\eta_1\lambda_1 - \rho_1^3\rho_4\omega_1\gamma + \rho_1^3\rho_3\omega_1\gamma_1 - 5\rho_1^3\rho_5\omega_1\lambda \\ &\quad \left. + 6\rho_1^3\rho_4\omega_1\lambda_1 - 4\rho_1^3\rho_3\omega_1\lambda_2 - \rho_1^3\tau_1\omega_1\beta_1 - \rho_1^3\tau_2\omega_1\alpha_2 + \rho_1^3\rho_2\eta_1\tau_2\beta - \rho_1^3\rho_2\omega_1\gamma_2 \right) / \rho_1^5.\end{aligned}$$

Demonstração. Seja $\bar{a} = \sum \rho_i a^i + \tau_1 b + \tau_2 c$ onde $\rho_1 \neq 0$. Como $\bar{a}^{(n-3)} \equiv \rho_1^{n-3} a^{n-3} \pmod{M^{n-2}(a)}$, para que $(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\bar{a}))$ é necessário que $\bar{a}\bar{b} \in \mathbb{F}\bar{a}^2$ e $\bar{a}^{(n-3)}\bar{b} = 0$. Seja $\bar{b} = \sum_i \epsilon_i a^i + \omega_1 b + \omega_2 c$, então do fato que $0 = \bar{a}^{(n-3)}\bar{b} \equiv \rho_1^{n-3} \epsilon_1 a^{n-2}$, obtém-se que $\epsilon_1 = 0$. Como $\bar{a}\bar{b} \equiv \rho_1 \omega_2 b \pmod{M^3(a)}$, então como consequência do item i no Lema 43 segue que $\bar{a}\bar{b} = 0$, portanto, $\omega_2 = 0$. Além disso, deve ser satisfeito que $\epsilon_2 = \epsilon_3 = \dots = \epsilon_{n-7} = 0$, já que para $3 \leq k \leq n-7$ cumpre-se a igualdade $\sum_{i+j=k} \rho_i \epsilon_j = 0$. Como o coeficiente de a^{n-5} aparece unicamente no produto ca^2 , dado que $\epsilon_2 = \omega_2 = 0$, então este coeficiente é zero no produto $\bar{a}\bar{b}$, portanto $\epsilon_{n-6} = 0$. No termo em a^{n-4} tem-se a seguinte igualdade

$$\rho_1 \epsilon_{n-5} + \rho_2 \omega_1 \lambda = 0.$$

Do coeficiente em a^{n-3} segue que

$$\rho_1 \epsilon_{n-4} + \rho_2 \epsilon_{n-5} + \rho_2 \omega_1 \lambda_1 - \rho_3 \omega_1 \lambda + \tau_2 \omega_1 \beta = 0.$$

Na potência a^{n-2} tem-se

$$\rho_1 \epsilon_{n-3} + \rho_2 \epsilon_{n-4} + \rho_3 \epsilon_{n-5} + \rho_2 \omega_1 \lambda_2 - \rho_3 \omega_1 \lambda_1 + \rho_4 \omega_1 \lambda + \tau_1 \omega_1 \mu + \tau_2 \omega_1 \beta_1 = 0.$$

Das relações acima, obtém-se as igualdades para ϵ_{n-5} , ϵ_{n-4} e ϵ_{n-3} dadas no lema. Se $\omega_1 = 0$ então $\bar{b} \in M^{n-2}(a)$, portanto $(\bar{a}, \bar{b}) \notin \mathcal{P}(\mathcal{B}(\bar{a}))$. Desta forma, conclui-se que $\omega_1 \neq 0$.

Com os cálculos feitos ate agora, dado um elemento de índice maximal $\bar{a}$, existe um único $\bar{b}$ módulo $M^{n-2}(a)$, salvo um múltiplo por escalar, tal que $(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\bar{a}))$.

Como $\mathcal{B}(\bar{a}) = \mathcal{B}(\rho_1 a + \tau_2 c)$, então para que $\bar{c} = \sum \theta_i a^i + \eta_1 b + \eta_2 c \notin \mathcal{B}(\bar{a})$ deve satisfazer-se que $\rho_1 \eta_2 - \theta_1 \tau_2 \neq 0$. Dado que $\sigma \bar{a} + \sigma_1 \bar{b} = \bar{a} \bar{c} \equiv (\rho_1 \eta_2 + \theta_1 \tau_2) b \pmod{M^2(a)}$, tem-se que $\sigma = 0$, é dizer, $\bar{a} \bar{c} = \bar{b}$. Desta forma, obtém-se que para cada $2 \leq k \leq n-6$

$$\sum_{i+j=k} \rho_i \theta_j = 0,$$

onde conclui-se que $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_{n-7} = 0$. Como $\theta_1 = 0$ deve ser válido que $\eta_2 \neq 0$. Além disso, obtém-se do coeficiente em b que

$$\omega_1 = \rho_1 \eta_2.$$

Do coeficiente em a^{n-5} resulta

$$\epsilon_{n-5} = \rho_1 \theta_{n-6} + 3\rho_2 \eta_2 \lambda.$$

Do coeficiente em a^{n-4} segue

$$\epsilon_{n-4} = \rho_1 \theta_{n-5} + \rho_2 \theta_{n-6} + \rho_2 \eta_1 \lambda + \rho_2 \eta_2 \gamma + \rho_3 \eta_2 \lambda + 2\tau_2 \eta_2 \beta - 4\tau_2 \eta_2 \mu.$$

Do coeficiente em a^{n-3} obtém-se

$$\begin{aligned} \epsilon_{n-3} = & \rho_1 \theta_{n-4} + \rho_2 \theta_{n-5} + \rho_3 \theta_{n-6} + \tau_2 \eta_2 \alpha_1 + \tau_1 \eta_2 \beta + \tau_2 \eta_1 \beta \\ & + \rho_2 \eta_2 \gamma_1 + \rho_2 \eta_1 \lambda_1 + 4\rho_3 \eta_2 \lambda_1 - \rho_3 \eta_2 \gamma - 3\rho_4 \eta_2 \lambda - \rho_3 \eta_1 \lambda. \end{aligned}$$

Do coeficiente em a^{n-2} segue que

$$\begin{aligned} 0 = & \rho_1 \theta_{n-3} + \rho_2 \theta_{n-4} + \rho_3 \theta_{n-5} + \rho_4 \theta_{n-6} + \tau_2 \eta_2 \alpha_2 + \tau_2 \eta_1 \beta_1 + \tau_1 \eta_2 \beta_1 + \rho_2 \eta_2 \gamma_2 + \tau_1 \eta_1 \mu \\ & + \rho_2 \eta_1 \lambda_2 + 4\rho_3 \eta_2 \lambda_2 - \rho_3 \eta_2 \gamma_1 + \rho_4 \eta_2 \gamma - 6\rho_4 \eta_2 \lambda_1 + 5\rho_5 \eta_2 \lambda - \rho_3 \eta_1 \lambda_1 + \rho_4 \eta_1 \lambda. \end{aligned}$$

Dadas as relações e as igualdades para os coeficientes ϵ_i descritos acima, obtém-se as igualdades dos coeficientes θ_i tal como foram descritas no lema.

Como a^{n-2} esta no anulador de $\mathcal{A}$, pode considerar-se $\theta_{n-2} = 0$, desta forma, tem-se que

$$\bar{c} = \theta_{n-6} a^{n-6} + \theta_{n-5} a^{n-5} + \theta_{n-4} a^{n-4} + \theta_{n-3} a^{n-3} + \eta_1 b + \eta_2 c.$$

Observe que dado $(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\bar{a}))$, existem diferentes $\bar{c} \in \mathcal{A}$ tal que $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \in \overline{\mathcal{P}(\mathcal{A})}$ já que $\eta_1 \in \mathbb{F}$. $\square$

Dado que o interesse é mostrar que $\alpha = 0$ é um invariante ao mudar de tripla $(a, b, c) \in \overline{\mathcal{P}(\mathcal{A})}$, então o passo a seguir é calcular o produto $\bar{c}^2$, já que é neste produto onde α ocorre. Assim, obtém-se que

$$\begin{aligned} \bar{c}^2 = & (\theta_{n-6} a^{n-6} + \theta_{n-5} a^{n-5} + \theta_{n-4} a^{n-4} + \theta_{n-3} a^{n-3} + \eta_1 b + \eta_2 c)^2 \\ = & \eta_1^2 b^2 + 2\eta_1 \eta_2 bc + \eta_2^2 c^2 \\ = & \eta_1^2 \mu a^{n-2} + 2\eta_1 \eta_2 \beta a^{n-3} + 2\eta_1 \eta_2 \beta_1 a^{n-2} + \eta_2^2 (2\beta - 4\mu) a^{n-4} + \eta_2^2 \alpha_1 a^{n-3} + \eta_2^2 \alpha_2 a^{n-2} \\ = & \eta_2^2 (2\beta - 4\mu) a^{n-4} + (2\eta_1 \eta_2 \beta + \eta_2^2 \alpha_1) a^{n-3} + (\eta_1^2 \mu + 2\eta_1 \eta_2 \beta_1 + \eta_2^2 \alpha_2) a^{n-2}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Portanto, da equação (4.16), conclui-se que $\alpha' = 0$ é um invariante para este tipo de álgebras, pois b não aparece ao escrever $\bar{c}^2$ na base $\{a, a^2, \dots, a^{n-2}, b, c\}$, é por isto, que o escalar de $\bar{b}$ neste produto é zero.

Já que ao fazer a mudança de tripla, o parâmetro $\alpha = 0$ é invariante, segue que não é possível encontrar uma tripla $(a, b, c) \in \overline{\mathcal{P}(\mathcal{A})}$ tal que $M(a)$ seja um ideal. Desta forma, pode enunciar-se o teorema que mostra que as classes $\mathfrak{V}_{Id}$ e $\mathfrak{V}_{Id2}$ não são a mesma.

Teorema 24. $\mathfrak{V}_{Id} \subsetneq \mathfrak{V}_{Id2}$.

Demonstração. Se $\mathcal{A} \in \mathfrak{V}_{Id2}$ e $n \geq 8$, tem-se provado que $\bar{a}$ possui índice maximal, se e somente se, $\rho_1 \neq 0$. Além disso, que $M(\bar{a})$ não é um ideal se $1 + \alpha\tau_2 \neq 0$. Seja $\mathcal{A} \in \mathfrak{V}_{Id2}$ tal que $\dim \mathcal{A} \geq 12$ e $\alpha = 0$.

Como consequência da equação (4.17), cumpre-se que para toda mudança de tripla o parâmetro $\alpha = 0$ permanece invariante, portanto, se $(a, b, c) \in \overline{\mathcal{P}(\mathcal{A})}$ onde $\alpha = 0$, não é possível encontrar uma tripla (a, b, c) tal que $M(a)$ seja um ideal.

Seja $\mathcal{A} \in \mathfrak{V}_{Id2}$ cuja base é dada pelo conjunto

$$\{a, a^2, \dots, a^{n-2}, b, c\},$$

e o produto não trivial $ca = b$. Segue que $\mathcal{A} \notin \mathfrak{V}_{Id}$.

Consequentemente, conclui-se que $\mathfrak{V}_{Id} \subsetneq \mathfrak{V}_{Id2}$. □

Com esse teorema, segue de forma imediata a seguinte decomposição disjunta de $\mathfrak{V}_{Id2}$:

$$\mathfrak{V}_{Id2} = \mathfrak{V}_{Id} \cup \{\mathcal{A} \in \mathfrak{V}_{Id2} \mid \alpha = 0\}.$$

Dessa forma, as álgebras de dimensão n e nilíndice $n - 1$ foram agrupadas de modo que os seguintes conjuntos são disjuntos:

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_{Id} \cup \{\mathcal{A} \in \mathfrak{V}_{Id2} \mid \alpha = 0\} \cup \mathfrak{V}_{NId}$$

Referências Bibliográficas

- [Alb34] A. A. Albert. On a certain algebra of quantum mechanics. *Ann. of Math. (2)*, 35(1):65–73, 1934. [1](#)
- [Alb48] A. A. Albert. Power-associative rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 64(3):552–593, 1948. [10](#)
- [Are09] M. Arenas. An algorithm for associative bilinear forms. *Linear Algebra Appl.*, 430(1):286–295, 2009. [5](#)
- [CHP03] I. Correa, I.R. Hentzel, and L.A. Peresi. On the solvability of the commutative power-associative nilalgebras of dimension 6. *Linear Algebra Appl.*, 369:185–192, 2003. [4](#)
- [CP01] I. Correa and L.A. Peresi. On the solvability of the five dimensional commutative power-associative nilalgebras. *Results Math.*, 39(1-2):23–27, 2001. [4](#)
- [CS99] I. Correa and A. Suazo. On a class of commutative power-associative nilalgebras. *J. Algebra*, 215(2):412–417, 1999. [5](#), [27](#)
- [DF04] V. Drensky and E. Formanek. *Polynomial identity rings*. Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona. Birkhäuser Verlag, Basel, 2004. [3](#)
- [DI43] J. Dubnov and V. Ivanov. Sur l’abaissement du degré des polynômes en affineurs. *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.)*, 41:95–98, 1943. [3](#)
- [Dne93] *Dnestrovskaya tetrad*. Rossiiskaya Akademiya Nauk Sibirskoe Otdelenie, Institut Matematiki im. S. L. Soboleva, Novosibirsk, fourth edition, 1993. [Unsolved problems in the theory of rings and modules], Compiled by V. T. Filippov, V. K. Kharchenko and I. P. Shestakov. [4](#)
- [ES02] L. Elgueta and A. Suazo. Jordan nilalgebras of nilindex N and dimension $N + 1$. *Comm. Algebra*, 30(11):5547–5561, 2002. [5](#), [75](#)
- [ES04] L. Elgueta and A. Suazo. Solvability of commutative power-associative nilalgebras of nilindex 4 and dimension. *Proyecciones*, 23(2):123–129, 2004. [4](#)
- [ES10] L. Elgueta and A. Suazo. On the solvability of commutative power-associative nilalgebras of nilindex 4. *Rev. Colombiana Mat.*, 44(2):119–128, 2010. [27](#)
- [ESGF05] L. Elgueta, A. Suazo, and J.C. Gutierrez Fernandez. Nilpotence of a class of commutative power-associative nilalgebras. *Journal of Algebra*, 291:492–504, 2005. [4](#), [11](#), [76](#)
- [Fas97] M. A. Fasoli. Classification of nilpotent linear spaces in $\mathcal{M}(4, \mathbb{C})$. *Comm. Algebra*, 25(6):1919–1932, 1997. [19](#)
- [Ger60] M. Gerstenhaber. On nilalgebras and linear varieties of nilpotent matrices. II. *Duke Math. J.*, 27:21–31, 1960. [11](#)

- [GF04] J.C. Gutierrez Fernandez. On commutative power-associative nilalgebras. *Comm. Algebra*, 32(6):2243–2250, 2004. [4](#), [14](#), [27](#)
- [GF10] J.C. Gutierrez Fernandez. On commutative nilalgebras of low dimension. *Algebra Discrete Math.*, 9(1):16–30, 2010. [4](#)
- [GFGM13] J.C. Gutierrez Fernandez, C.I. Garcia, and M.L. R. Montoya. On power-associative nilalgebras of nilindex and dimension n . *Rev. Colombiana Mat.*, 47(1):1–11, 2013. [5](#), [76](#)
- [GFGMM14] J.C. Gutierrez Fernandez, C.I. Garcia, J.I. Martinez, and M.L. R. Montoya. On power-associative nilalgebras of dimension n and nilindex $n - 1$. *Comm. Algebra*, 42(10):4481–4497, 2014. [iii](#), [v](#), [5](#), [75](#), [76](#), [77](#), [80](#)
- [GFS05] J.C. Gutierrez Fernandez and A. Suazo. Commutative power-associative nilalgebras of nilindex 5. *Results Math.*, 47(3-4):296–304, 2005. [4](#), [25](#), [27](#), [28](#), [32](#), [33](#), [34](#), [41](#), [63](#), [67](#)
- [GM75] M. Gerstenhaber and H.C. Myung. On commutative power-associative nilalgebras of low dimension. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 48:29–32, 1975. [5](#), [75](#)
- [Gol64] E. S. Golod. On nil-algebras and finitely approximable p -groups. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 28:273–276, 1964. [3](#)
- [Hig56] G. Higman. On a conjecture of Nagata. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 52:1–4, 1956. [3](#)
- [Kuz75] E.N. Kuzmin. On the Nagata-Higman theorem (russian). *Mathematical Structures, Computational Mathematics, Mathematical Modelling. Proc. Dedicated to the 60th Birthday of Acad. L. Iliev*, pages 101–107, 1975. [3](#)
- [Nag52] M. Nagata. On the nilpotency of nil-algebras. *J. Math. Soc. Japan*, 4:296–301, 1952. [3](#)
- [Os72] J. M. Osborn. Varieties of algebras. *Advances in Math.*, 8:163–369, 1972. [10](#)
- [Raz74] Yu P. Razmyslov. Identities with trace in full matrix algebras over a field of characteristic zero. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 38:723–756, 1974. [3](#)
- [Sch66] R. D. Schafer. *An introduction to nonassociative algebras*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 22. Academic Press, New York-London, 1966. [10](#)
- [SCM⁺67] L. Synge, A. W. Conway, A. J. McConnell, H. Halberstam, R. E. Ingram, and B. K. P. Scaife, editors. *The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton*, volume 3. Cambridge University Press, 1967. [2](#)
- [Sut72] D. Suttles. A counterexample to a conjecture of Albert. *Notices Amer. Math. Soc.*, 19:A–566, 1972. [4](#), [75](#)
- [Umi14] U. Umirbaev. Polarization algebras and their relations. *Preprint: <http://arxiv.org/pdf/1412.2365v1.pdf>*, 2014. [4](#)
- [Zel82] E. I. Zelmanov. Absolute zero divisors and algebraic Jordan algebras. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 23(6):100–116, 206, 1982. [4](#)
- [Zel87] E. I. Zelmanov. Engel Lie algebras. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 292(2):265–268, 1987. [3](#)

- [ZSSS82] K. A. Zhevlakov, A. M. Slin'ko, I. P. Shestakov, and A. I. Shirshov. *Rings that are nearly associative*, volume 104 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1982. Translated from the Russian by Harry F. Smith. [4](#), [10](#)

Índice Remissivo

- álgebra, [1](#), [7](#)
 - associativa, [7](#)
 - comutativa, [7](#)
 - de Engel, [8](#)
 - nilpotente, [9](#)
 - quociente, [8](#)
 - solúvel, [4](#), [9](#), [13](#), [19](#), [25](#), [32](#), [34](#)
- álgebras
 - alternativas, [2](#)
 - de Jordan, [2](#), [9](#)
 - de potências associativas, [2](#), [10](#)
 - nilíndice [5](#), [28](#), [32](#)
- A.A. Albert, [9](#), [10](#)
- dimensão
 - n e nilíndice $n - 3$, [13](#)
 - [9](#), [28](#)
- endomorfismos, [8](#)
- homomorfismo, [7](#)
 - multiplicação à direita, [7](#)
 - multiplicação à esquerda, [7](#), [28](#)
- ideal, [7](#)
- J.T. Graves, [2](#)
- nilálgebra, [8](#)
 - de Jordan, [10](#)
- nilíndice, [8](#)
- nilpotente
 - elemento, [8](#)
- operador
 - induzido, [8](#), [11](#), [14](#), [15](#), [20–23](#), [38](#)
- potência
 - de um elemento, [8](#)
 - principais à direita, [8](#)
 - principais à esquerda, [8](#)
- problema de Albert, [4](#), [13](#), [19](#)
- radical
 - nilpotente, [9](#)
 - solúvel, [9](#)
- subálgebra, [7](#)
 - codimensão ≤ 2 , [28](#), [34](#)
 - codimensão [1](#), [38](#), [48](#)
 - codimensão [2](#), [47](#), [54](#), [59](#), [62](#), [63](#), [66](#), [70](#), [73](#)
- Suttlés, [4](#)
- teoremas
 - de isomorfismo, [7](#)
- W.R. Hamilton, [2](#)