Estabilidade de ground state para a equação de Schrödinger logarítmica com potenciais do tipo delta

Alex Javier Hernandez Ardila

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Jaime Angulo Pava

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da ${\rm CAPES/CNPq}$

São Paulo, Maio de 2016

Estabilidade de ground state para a equação de Schrödinger logarítmica com potenciais do tipo delta

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 16/05/2016. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Jaime Angulo Pava (orientador) IME-USP
- Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes IME-USP
- Prof. Dr. Gaetano Siciliano IME-USP
- Prof. Dr. Felipe Linares IMPA
- Prof. Dr. Ademir Pastor IMECC-UNICAMP

RESUMO

HERNANDEZ, A. J Estabilidade de ground state para a equação de Schrödinger logarítmica com potenciais do tipo delta. 2016. 112 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

Na primeira parte do trabalho estudamos a equação de Schrödinger logarítmica com um delta potencial; $V(x) = -\gamma \, \delta(x)$, onde δ é a distribuição de Dirac na origem e o parâmetro real γ descreve a intensidade do potencial. Estabelecemos a existência e unicidade das soluções do problema de Cauchy associado em um espaço de funções adequado. No caso do potencial atrativo ($\gamma > 0$), calculamos de forma explícita o seu único ground state e mostramos a sua estabilidade orbital. A segunda parte trata detalhadamente da equação de Schrödinger logarítmica com um delta derivada potencial; $V(x) = -\gamma \, \delta'(x)$. A boa colocação global para o problema de Cauchy é verificada em um espaço de funções adequado. No caso do potencial atrativo ($\gamma > 0$), o conjunto dos ground states é completamente determinado. Mais precisamente: se $0 < \gamma \le 2$, então há um único ground state e é uma função ímpar; se $\gamma > 2$, então existem dois ground states não-simétricos. Em adição, provamos que cada ground state é orbitalmente estável através de uma abordagem variacional. Finalmente, usando a teoria de extensão de operadores simétricos, também mostramos um resultado de instabilidade para $\gamma > 2$.

Palavras-chave: Equação de Schrödinger logarítmica, delta potencial, delta-derivada potencial, ground state, estabilidade orbital.

ABSTRACT

HERNANDEZ, A. J. Stability of the ground states for a logarithmic Schrödinger equation with delta-type potentials. 2016. 112 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

The first part of this thesis deals with the logarithmic Schrödinger equation with a delta potential; $V(x) = -\gamma \, \delta(x)$, where δ is the Dirac distribution at the origin and the real parameter γ is interpreted as the strength of the potential. We establish the existence and uniqueness of the solutions of the associated Cauchy problem in a suitable functional framework. In the attractive potential case $(\gamma > 0)$, we explicitly compute the unique ground state and we show their orbital stability.

The second part deals with the case of the logarithmic Schrödinger equation with a delta prime potential; $V(x) = -\gamma \, \delta'(x)$. Global well-posedness is verified for the Cauchy problem in a suitable functional space. In the attractive potential case $(\gamma > 0)$, the set of the ground state is completely determined. More precisely: if $0 < \gamma \le 2$, then there is a single ground state and it is an odd function; if $\gamma > 2$, then there exist two non-symmetric ground states. Moreover, we show that every ground state is orbitally stable via a variational approach. Finally, by applying the theory of extensions of symetric operators, we also prove a result of instability for $\gamma > 2$.

Keywords: Logarithmic Schrödinger equation, delta potential, delta-prime potential, ground state, orbital stability.

SUMÁRIO

N	Notação				
1	Intr	rodução	1		
	1.1	Descrição dos principais resultados	4		
		1.1.1 O δ -potencial	4		
		1.1.2 O δ' -potencial	7		
	1.2	Organização da tese	11		
2	Equ	ıação de Schrödinger logarítmica	12		
	2.1	O espaço de energia	12		
	2.2	Os ground states	15		
	2.3	Estabilidade dos ground states	23		
3	Equ	ıação de Schrödinger logarítmica com um δ potencial	27		
	3.1	O potencial delta de Dirac	27		
	3.2	O Problema de Cauchy	31		
	3.3	Os ground states	36		
	3.4	Estabilidade dos ground states	45		
4	Equ	nação de Schrödinger logarítmica com um δ' potencial	49		
	4.1	O potencial delta derivada de Dirac	49		
	4.2	O espaço de energia			
	4.3	O problema de Cauchy	57		
	4.4	Existência dos ground states			
	4.5	Identificação dos ground states			
	4.6	Estabilidade dos ground states	79		

SUMÁRIO

	4.7	Linearização e estabilidade	82
		4.7.1 Instabilidade do ground state anti-simétrico	83
		4.7.2 Estabilidade dos ground state assimétricos em $H^1_p(\mathbb{R}_\circ)$	94
5	Tra	balhos Futuros	100
\mathbf{A}	Αpέ	èndice 1	102
	A.1	Lema de Brezis-Lieb	102
	A.2	O problema estacionário	102
	A.3	Extensões de um operador simétrico	103
	A.4	Demonstração do Lema 4.11	104
$\mathbf{R}\epsilon$	eferê:	ncias 1	105

Notação

O espaço $L^r(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ será denotado por $L^r(\mathbb{R})$ e sua norma por $\|\cdot\|_{L^r(\mathbb{R})}$. Quando r=2, o espaço $L^2(\mathbb{R})$ será equipado com o produto escalar

$$(u,v) = \Re \int_{\mathbb{R}} u\overline{v} dx$$
 para $u,v \in L^2(\mathbb{R})$.

O espaço $H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ será denotado por $H^1(\mathbb{R})$, sua norma por $\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R})}$ e a dualidade entre $H^{-1}(\mathbb{R})$ e $H^1(\mathbb{R})$ é denotada por $\langle\cdot,\cdot\rangle$. O espaço $H^1(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ será denotado por Σ . O subespaço de funções pares de $H^1(\mathbb{R})$ é denotado por $H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R})$. Também denotamos $H^1_p(\mathbb{R}_\circ) = H^1(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \cap L^2(\mathbb{R}; x^2 dx)$, onde

$$L^{2}(\mathbb{R}; x^{2} dx) = \left\{ f \in L^{1}_{loc}(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} x^{2} |f(x)|^{2} dx < \infty \right\}.$$

Como é habitual, $C_0^{\infty}(\Omega)$ é o conjunto de funções C^{∞} de $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ sobre \mathbb{C} com suporte compacto.

Seja T um operador densamente definido em um espaço de Hilbert H. Denotamos por T^* seu adjunto. Os índices de deficiência de T serão denotados por $n_{\pm}(T) := \dim \operatorname{Ker}(T \pm iI)$. O espectro essencial (resp. espectro discreto) do operador T será denotado por $\sigma_{ess}(T)$ (resp. $\sigma_p(T)$). O espaço dual de H será denotado por H'. Finalmente, χ_{\pm} denota a função característica do conjunto \mathbb{R}_{\pm} , onde \mathbb{R}_{+} (resp. \mathbb{R}_{-}) é o conjunto dos números positivos (resp. negativos).

Capítulo 1

Introdução

Em mecânica quântica não relativista a dinâmica de uma partícula com massa, como os elétrons, é descrita matematicamente através da equação de Schrödinger; uma equação linear que obedece ao princípio da superposição. Quando a energia é alta, tem sido suspeitado que a dinâmica da partícula pode sofrer correções não lineares devido aos efeitos quânticos gravitacionais, isto é, uma equação de Schrödinger não linear é mais adequada para descrever o comportamento da partícula. No entanto, as leis da mecânica quântica não permitem um termo não linear arbitrário, uma vez que eles devem satisfazer uma correspondência entre a mecânica quântica não linear de alta energia e a mecânica quântica linear de baixa energia. Em 1975, Bialynicki-Birula e Mycielski [14] construíram um modelo quântico não-linear que satisfaz a correspondência acima referida e que deu origem à equação de Schrödinger logarítmica

$$i\partial_t u + \Delta u + V(x) u + k u \operatorname{Log} |u|^2 = 0, \tag{1.1}$$

onde k é um numero positivo e u=u(x,t) é uma função a valores complexos de $t\in\mathbb{R}$ e $x\in\mathbb{R}^N$ para $N\geq 1$. O potencial V é uma função de valor real e modela a ação de um campo externo. Em [45] foi mostrado experimentalmente que, com uma baixa energia, a equação (1.1) não descreve corretamente a dinâmica das partículas. No entanto, com uma alta energia e tomando o valor de k adequado, a equação (1.1) pode ser um modelo mais apropriado para descrever tais fenômenos. A equação de Schrödinger logarítmica tem importantes aplicações em mecânica quântica, óptica quântica, óptica nuclear, fenômenos de transporte e difusão e na teoria de condensado Bose-Einstein (ver [51]). Recentemente, em [51, 52] a equação (1.1) foi proposta como um modelo adequado para descrever a teoria quântica gravitacional.

Quando o potencial é nulo; $V \equiv 0$, a equação de Schrödinger (1.1) tem sido estudada por muitos autores [10, 13, 14, 15, 16, 19, 20, 21, 22, 23, 30]. Em seguida descrevemos os resultados mais relevantes. A primeira prova sobre a boa colocação do problema de Cauchy em um subespaço de $H^1(\mathbb{R}^N)$, aplicando a teoria de operadores monótonos, foi dada em [21, 30]. Outras provas deste fato, usando

argumentos de compacidade, foram dadas em [19, 20]. Em adição, utilizando a desigualdade de Sobolev-logarítmica, em [14, 19, 22, 23] foram identificados os ground state e estudadas suas propriedades mais relevantes. Aplicando um argumento de compacidade Cazenave [19] deu a primeira prova da estabilidade dos ground state, para $N \geq 2$ e sob perturbações radiais. Usando métodos variacionais, em [15, 16] foram dadas novas provas sobre a estabilidade dos ground state, para $N \geq 3$ e sob perturbações radiais. Posteriormente, Cazenave e Lions [22, Remark II.3] indicaram que a partir da teoria de compacidade concentrada é possível mostrar que os ground state são orbitalmente estáveis (sem qualquer restrição no espaço de energia) para $N \geq 1$.

Quando o potencial é não nulo; $V \neq 0$, a literatura sobre a equação (1.1) é limitada. Mais especificamente, em [20, 21] foi investigado o problema de Cauchy sob certas condições no potencial. A existência de soluções estacionarias é analisada em [31, 46] para potenciais limitados e periódicos. Adicionalmente, a equação (1.1) com um potencial singular foi estudada em [10].

Nos últimos anos, as equações de Schrödinger com potenciais fortemente localizados têm sido intensamente estudadas. Este tipo de potencial é utilizado para modelar os chamados defeitos, isto é, inomogeneidades do meio onde a onda se propaga, sob a suposição de que a estrutura interna da inomogeneidade não é relevante e portanto a ação do potencial sobre a onda está concentrada em um ponto. Por definição, a família de operadores hamiltonianos que descreve a dinâmica de uma partícula sob a influência de um potencial fortemente localizado na origem, é obtida como o conjunto de extensões auto-adjuntas do operador simétrico e fechado

$$\Gamma = -\Delta$$
, $\operatorname{dom}(\Gamma) = C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$,

onde Δ é o Laplaciano N-dimensional e $N \geq 1$. Para $N \geq 4$ o operador Γ é essencialmente auto-adjunto (ver [6]), e portanto sua única extensão auto-adjunta é o Laplaciano $-\Delta$ em seu domínio natural $H^2(\mathbb{R}^N)$. Em particular, os potenciais fortemente localizados são definidos apenas em dimensiones baixas $N \leq 3$. Para N=2 ou N=3, em [7] é mostrado que o operador simétrico Γ tem uma família uniparamétrica de extensões auto-adjuntas, assim, neste caso, existe uma família de potenciais fortemente localizados na origem. No caso N=1, o operador Γ possui uma família 4-paramétrica de extensões auto-adjuntas, as quais podem ser caracterizadas a partir de condições de fronteira na origem. De fato, definindo para $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ e $\theta\in[0,\pi)$ o domínio

$$\Omega^{a,b,\theta}_{c,d,} := \left\{ f \in H^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}) : \lim_{x \to 0+} \begin{bmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{bmatrix} = e^{i\theta} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \lim_{x \to 0-} \begin{bmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{bmatrix} \right\},$$

as famílias de extensões auto-adjuntas do operador Γ podem ser explicitamente descritas por

 $\Xi_{c,d,}^{a,b,\theta} = -\frac{d^2}{dx^2}, \qquad \operatorname{dom}\left(\Xi_{c,d}^{a,b,\theta}\right) = \Omega_{c,d,}^{a,b,\theta}, \tag{1.2}$

onde ad-bc=1. Em particular, utilizando a descrição dada em (1.2) e escolhendo a=b=1 e $\theta=b=c=0$ obtemos o Laplaciano $-\Delta$ em seu domínio natural $H^2(\mathbb{R})$. Entre todas as extensões auto-adjuntas descritas pela fórmula (1.2), há duas famílias que têm uma especial relevância devido as suas aplicações na mecânica quântica:

A δ -interação. Escolhendo $a=d=1, \ \theta=b=0$ e $c=-\gamma \in \mathbb{R}$ na fórmula (1.2) obtemos a δ -interação de intensidade $-\gamma$. Formalmente, o hamiltoniano obtido é denotado por $-\partial_x^2 - \gamma \delta(x)$, onde $V(x) = -\gamma \delta(x)$ é chamado potencial delta de dirac. Nas aplicações experimentais, este potencial é utilizado para simular as condições físicas de uma partícula livre para mover-se entre duas regiões do espaço que são separadas por uma barreira de comprimento arbitrariamente longo. Em [11] são indicadas algumas aplicações; por exemplo, no estudo das forças nucleares. Um estudo detalhado deste hamiltoniano será dado na seção 3.1.

A δ' -interação. Escolhendo $a=d=1,\ \theta=c=0$ e $b=-\gamma\in\mathbb{R}$ na fórmula (1.2) obtemos a δ' -interação de intensidade $-\gamma$. Formalmente, o hamiltoniano obtido é denotado por $-\partial_x^2 - \gamma \delta'(x)$, onde $V(x) = -\gamma \delta'(x)$ é chamado potencial delta derivada de dirac. Devido ao avanço tecnológico na fabricação de dispositivos quânticos, os modelos físicos descritos por este Hamiltoniano tem tomado um particular interesse; por exemplo, na física da matéria condensada (ver [53]). Este hamiltoniano é estudado em profundidade na seção 4.1.

Nesta tese, estamos interessados em investigar o problema de Cauchy, a existência e estabilidade dos ground states para a equação de Schrödinger logarítmica (1.1) em dimensão um, com V sendo um potencial fortemente localizado do tipo:

(I)
$$V(x) = -\gamma \delta(x)$$
, para $\gamma \in \mathbb{R}$. (II) $V(x) = -\gamma \delta'(x)$, para $\gamma \in \mathbb{R}$.

O potencial V é chamado atrativo se $\gamma > 0$ e repulsivo no outro caso. O estudo matemático das equações Schrödinger com potencias fortemente localizados começou há alguns poucos anos e atualmente é uma linha de pesquisa muito ativa (ver [1, 2, 3, 4, 5, 9, 25, 26, 27, 32, 36, 37, 41]). Um problema que tem recebido grande atenção é a existência e estabilidade dos ground states para equações Schrödinger com potenciais do tipo (I) e (II).

Em [27] foi apresentado o primeiro estudo rigoroso sobre a dinâmica, existência e estabilidade das standing waves para a equação de Schrödinger com um

 δ -potencial (do tipo (I)),

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u + \gamma \delta(x) u + u |u|^{p-1} = 0, \qquad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \qquad (1.3)$$

no caso particular p=3 e $\gamma>0$. Posteriormente, para $1< p<\infty$ e o potencial atrativo $(\gamma>0)$, em [26] mostraram a boa colocação do problema de Cauchy para a equação (1.3), identificaram seu único ground state e estudaram sua estabilidade no espaço $H^1(\mathbb{R})$. A equação (1.3) com potencial repulsivo $(\gamma<0)$ foi estudada em [25, 37]. Especialmente, em [25] foi mostrada a existência de um único ground state em $H^1_{rad}(\mathbb{R})$ e foi pesquisada sua estabilidade sob perturbações radiais. Novas provas sobre a estabilidade ou instabilidade das standing waves da equação (1.3) foram apresentadas em [9, 41]. Em particular, para o potencial atrativo (resp. potencial repulsivo) a análise da estabilidade desenvolvido em [9] (resp. [41]) é mais direto e simples. É importante observar que todas as provas de estabilidade acima mencionadas aplicam métodos variacionais ou uma combinação destes, juntamente com a teoria abstrata de Grillakis, Shatah and Strauss [28, 29].

Por outro lado, a equação de Schrödinger com um δ' -potencial tem sido estudada em [1, 2, 3, 4, 5, 9] e apresenta uma dinâmica mais complexa. Mais especificamente, para um potencial atrativo ($\gamma > 0$), em [1] foi estudada a boa colocação do problema de Cauchy para a equação

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u + \gamma \, \delta'(x)u + u \, |u|^{p-1} = 0, \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Os ground states foram identificados em [3]. Em adição, foi mostrada a presença de uma bifurcação nos ground states que depende da intensidade, γ , do δ' -potencial. A estabilidade dos ground states foi estudada em [2, 5] aplicando métodos puramente variacionais; enquanto que em [3] aplicaram métodos variacionais, juntamente com a teoria abstrata de Grillakis, Shatah and Strauss [28, 29]. Mencionamos que em [9] foi dada uma nova prova sobre estabilidade dos ground states mais direta. É importante observar que o autor não encontrou na literatura nenhum trabalho sobre da equação Schrödinger (1.4) com potencial repulsivo ($\gamma < 0$).

1.1 Descrição dos principais resultados

1.1.1 O δ -potencial

Nesta subseção descrevemos os resultados obtidos sobre boa colocação do problema de Cauchy, existência e estabilidade dos ground states para equação de Schrödinger logarítmica com um δ -potencial

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u + \gamma \delta(x)u + u \operatorname{Log} |u|^2 = 0, \tag{1.5}$$

onde u=u(x,t) é uma função a valores complexos de $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nas aplicações, o modelo (1.5) descreve a dinâmica de uma onda não linear que interagem com uma inomogeneidade do meio onde se propaga. Antes de apresentar os nossos resultados, precisamos definir o espaço de funções sobre o qual vamos estudar a dinâmica da equação (1.5).

A forma quadrática associada com o operador auto-adjunto $-\partial_x^2 - \gamma \delta(x)$ será denotada por \mathfrak{F}_{γ} e definida sobre o domínio, dom $(\mathfrak{F}_{\gamma}) = H^1(\mathbb{R})$ (ver seção 3.1). Formalmente, a equação (1.5) satisfaz a conservação da energia E definida por

$$E(u) := \frac{1}{2} \mathfrak{F}_{\gamma}[u] - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |u|^2 \operatorname{Log} |u|^2 \ dx.$$

Devido ao fato de que o funcional da energia E não é bem definido sobre dom $(\mathfrak{F}_{\gamma}) = H^1(\mathbb{R})$, por causa do termo logarítmico, precisamos definir um espaço de energia adequado no qual o termo seja controlado. De fato, consideremos a função contínua, convexa e não negativa definida por

$$A(s) := \begin{cases} -s^2 \operatorname{Log}(s^2), & \text{se } 0 \le s \le e^{-3}; \\ 3s^2 + 4e^{-3}s - e^{-6}, & \text{se } s \ge e^{-3}; \end{cases}$$

e definimos o espaço de Orlicz $L^A(\mathbb{R}) = \{u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) : A(|u|) \in L^1(\mathbb{R})\}$ associado com a função convexa A. Em adição, seja $B(s) := s^2 \operatorname{Log}(s^2) + A(s)$ para $s \geq 0$. Não é difícil mostrar que se $u \in H^1(\mathbb{R})$ então $B(|u|) \in L^1(\mathbb{R})$. Assim, para $u \in H^1(\mathbb{R}) \cap L^A(\mathbb{R})$ temos que $|u|^2 \operatorname{Log}|u|^2 \in L^1(\mathbb{R})$, isto é, o funcional da energia é bem definido neste espaço. Ainda mais, na seção 3.2 é mostrado que sobre o espaço de Banach $W(\mathbb{R}) := H^1(\mathbb{R}) \cap L^A(\mathbb{R})$, equipado com a norma usual, o funcional da energia é de classe C^1 . Isso nos motiva a definir $W(\mathbb{R})$ como o espaço no qual vamos estudar a dinâmica da equação (1.5).

O problema de Cauchy. O nosso primeiro resultado é sobre a boa colocação do problema de Cauchy associado com (1.5).

Teorema I Para toda $u_0 \in W(\mathbb{R})$ existe uma única solução global de (1.5), $u \in C(\mathbb{R}, W(\mathbb{R})) \cap C^1(\mathbb{R}, W'(\mathbb{R}))$ com $u(0) = u_0$ tal que $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t)\|_{W(\mathbb{R})} < \infty$. Em adição, a energia E e a carga são conservadas:

$$E(u(t)) = E(u_0), \quad ||u(t)||_{L^2(\mathbb{R})}^2 = ||u_0||_{L^2(\mathbb{R})}^2, \quad para \ todo \ t \in \mathbb{R}.$$

A prova do Teorema I segue-se de um argumento de compacidade semelhante ao desenvolvido em [20, Teorema 9.3.4]. A ideia em [20] é aproximar a não-linearidade logarítmica por uma não-linearidade do tipo polinomial, e assim construir uma sequência de soluções globais e limitadas em $C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}))$ para o sistema regula-

rizado e então provar a convergência de uma subsequência a uma função em $W(\mathbb{R})$ que será a solução do problema (1.5).

Os ground states. Lembramos que uma standing wave de (1.5) é uma solução da forma $u(x,t) = e^{i\omega t}\varphi(x)$, com $\omega \in \mathbb{R}$ e φ satisfazendo num sentido distribucional

$$\begin{cases} (-\partial_x^2 - \gamma \delta(x)) \varphi + \omega \varphi - \varphi \operatorname{Log} |\varphi|^2 = 0, \\ \varphi \in W(\mathbb{R}) \setminus \{0\}. \end{cases}$$
 (1.6)

Para o caso $\gamma = 0$, a equação elíptica (1.6) foi estudada em [14, Apêndice D]. Em particular, foi mostrado que a única solução (sob rotações e translações) é da forma $\phi_{\omega}(x) = e^{\frac{\omega+1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$. No seguinte teorema caracterizamos as soluções da equação (1.6) para $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Teorema II Sejam $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\omega \in \mathbb{R}$. Seja $v \in W(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ solução de (1.6). Então existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $v(x) = e^{i\theta}\phi_{\omega,\gamma}(x)$, onde

$$\phi_{\omega,\gamma}(x) = e^{\frac{\omega+1}{2}} e^{\frac{-1}{2}(|x| + \frac{\gamma}{2})^2}.$$
(1.7)

O perfil de $\phi_{\omega,\gamma}$ pode ser visto na Figura 3.1. O passo seguinte no estudo das standing waves é compreender a sua estabilidade. Com esse objetivo em mente, vamos dar uma caracterização variacional das soluções da equação (1.6). Consideremos o funcional $S_{\omega,\gamma}:W(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ definido por

$$S_{\omega,\gamma}(u) := \frac{1}{2} \mathfrak{F}_{\gamma}[u] + \frac{\omega+1}{2} \int_{\mathbb{D}} |u|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}} |u|^2 \operatorname{Log}|u|^2 dx.$$

O funcional $S_{\omega,\gamma}$ é de classe C^1 em $W(\mathbb{R})$ e sua derivada de Fréchet é dada por $S'_{\omega,\gamma}(u) = (-\partial_x^2 - \gamma \delta(x)) u + \omega u - u \operatorname{Log} |u|^2$. Ver seção 3.3 para uma definição precisa deste operador.

Um ground state é definido como um elemento minimizador do funcional $S_{\omega,\gamma}$ restrito à variedade de Nehari $\mathcal{M} := \{u \in W(\mathbb{R}) \setminus \{0\} : \langle S'_{\omega,\gamma}(u), u \rangle = 0\}$. No seguinte teorema são identificados os ground states para $\gamma > 0$.

Teorema III Sejam $\omega \in \mathbb{R}$ e $\gamma > 0$. Há pelo menos um minimizador do funcional $S_{\omega,\gamma}$ entre todas as funções na variedade de Nehari. Isto é, existe $\varphi \in W(\mathbb{R})$ tal que

$$S_{\omega,\gamma}(\varphi) = \inf \{ S_{\omega,\gamma}(u) : u \in W(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \langle S'_{\omega,\gamma}(u), u \rangle = 0 \}$$

Em adição, temos que o conjunto dos ground states é dado por $\{e^{i\theta}\phi_{\omega,\gamma};\theta\in\mathbb{R}\}$, onde as $\phi_{\omega,\gamma}$ são definidas em (1.7).

No caso do potencial repulsivo ($\gamma < 0$) o Teorema III não é valido, isto é, não existem minimizadores do funcional $S_{\omega,\gamma}$ restrito à variedade de Nehari \mathcal{M} (ver

Observação 3.4). No entanto, do Teorema II temos que existe uma única solução (sob rotações) da equação elíptica (1.6).

Estabilidade do ground state Existem basicamente dois métodos para estudar a estabilidade das standing waves: as teorias desenvolvidas por Weinstein [50], Grillakis, Shatah and Strauss [28, 29] e os métodos de tipo variacional (ver, por exemplo, [19, 22, 36]). Agora, devido ao fato de que a linearização do hamiltoniano em torno do ground state $E''(\phi_{\omega,\gamma})$ não está bem definido sobre todo $W(\mathbb{R})$, não é factível aplicar a teoria de Grillakis, Shatah and Strauss sobre todo este espaço. Mas, usando métodos variacionais obtemos o seguinte resultado de estabilidade.

Teorema IV Seja $\omega \in \mathbb{R}$. Para $\gamma > 0$ a standing wave $e^{i\omega t}\phi_{\omega,\gamma}(x)$ é orbitalmente estável em $W(\mathbb{R})$.

No caso do potencial repulsivo ($\gamma < 0$) não é possível aplicar o argumento desenvolvido no Teorema IV. De fato, a prova do Teorema IV é consequência da caracterização variacional dada no Teorema III, a qual não é valida para $\gamma < 0$.

Notemos que usando a teoria de extensão para operadores simétricos e a teoria de Grillakis, Shatah and Strauss [28, 29], em Angulo and Goloshchapova [10] é mostrada, para $\gamma > 0$, a estabilidade da standing wave $e^{i\omega t}\phi_{\omega,\gamma}(x)$ no espaço de Hilbert $H^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}; x^2 dx) \subseteq W(\mathbb{R})$. Assim, aqui estendemos este resultado ao todo o espaço $W(\mathbb{R})$.

1.1.2 O δ' -potencial

Nesta subseção descrevemos os resultados obtidos sobre boa colocação do problema de Cauchy, existência e estabilidade dos ground states para equação de Schrödinger logarítmica com um δ' -potencial

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u + \gamma \delta'(x)u + u \operatorname{Log} |u|^2 = 0, \tag{1.8}$$

onde u=u(x,t) é uma função a valores nos complexos de $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e γ é positivo. Devido às condições de fronteira (1.2) associadas com o operador $-\partial_x^2 - \gamma \delta'(x)$: $\partial_x u(0+,t) = \partial_x u(0-,t)$ e $u(0+,t) - u(0-,t) = -\gamma \partial_x u(0+,t)$, a dinâmica da equação (1.8) será mais complexa. Em particular, dependendo do valor da intensidade γ , a equação (1.8) pode ter um ou vários ground states.

Antes de apresentar os nossos resultados associados ao modelo (1.8) precisamos dar algumas observações preliminares. A forma quadrática associada com o operador auto-adjunto $-\partial_x^2 - \gamma \delta'(x)$ será denotada por \mathfrak{t}_{γ} e definida sobre o domínio, dom $(\mathfrak{t}_{\gamma}) = H^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ (ver seção 4.1). Formalmente, a equação (1.8) satisfaz

a conservação da energia $\mathcal E$ definida por

$$\mathcal{E}(u) := \frac{1}{2} \mathfrak{t}_{\gamma}[u] - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |u|^2 \operatorname{Log}|u|^2 dx.$$

O funcional acima não é bem definido sobre dom $(\mathfrak{t}_{\gamma}) = H^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$; contudo, na seção 4.2 é mostrado que o funcional da energia \mathcal{E} é de classe C^1 sobre o espaço de Banach $W(\mathbb{R}_{\circ}) := H^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap L^A(\mathbb{R})$ equipado com a norma usual. Pelo motivo acima exposto, é conveniente estudar a dinâmica da equação (1.8) sobre o espaço $W(\mathbb{R}_{\circ})$.

O problema de Cauchy. Em seguida apresentamos o teorema sobre a boa colocação do problema de Cauchy para a equação (1.8).

Teorema V Para toda $u_0 \in W(\mathbb{R}_\circ)$ existe uma única solução global de (1.8), $u \in C(\mathbb{R}, W(\mathbb{R}_\circ)) \cap C^1(\mathbb{R}, W'(\mathbb{R}_\circ))$ com $u(0) = u_0$ tal que $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t)\|_{W(\mathbb{R}_\circ)} < \infty$. Em adição, a energia \mathcal{E} e a carga são conservadas:

$$\mathcal{E}(u(t)) = \mathcal{E}(u_0), \quad ||u(t)||_{L^2(\mathbb{R})}^2 = ||u_0||_{L^2(\mathbb{R})}^2, \quad para \ todo \ t \in \mathbb{R}.$$

Os ground states. Lembramos que uma standing wave de (1.8) é uma solução da forma $u(x,t)=e^{i\omega t}\varphi(x)$, com $\omega\in\mathbb{R}$ e φ satisfazendo num sentido distribucional

$$\begin{cases} (-\partial_x^2 - \gamma \delta'(x)) \varphi + \omega \varphi - \varphi \operatorname{Log} |\varphi|^2 = 0, \\ \varphi \in W(\mathbb{R}_\circ) \setminus \{0\}. \end{cases}$$
 (1.9)

Contrariamente ao caso da equação elíptica (1.6), que tem uma única solução (sob rotação), a equação (1.9) tem múltiplas soluções; de fato, a quantidade de soluções vai depender do valor do parâmetro γ (ver seção 4.5). Entre todas as soluções da equação (1.9), existem algumas que são relevantes por suas aplicações físicas. O nosso objetivo é identificar essas soluções e, em seguida, estudar a sua estabilidade. Consideremos o funcional $\mathcal{S}_{\omega,\gamma}: W(\mathbb{R}_{\circ}) \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{S}_{\omega,\gamma}(u) := \frac{1}{2} \mathfrak{t}_{\gamma}[u] + \frac{\omega+1}{2} \int_{\mathbb{R}} |u|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |u|^2 \operatorname{Log}|u|^2 dx,$$

de classe C^1 em $W(\mathbb{R}_{\circ})$. Denotaremos sua derivada de Frechét por $\mathcal{S}'_{\omega,\gamma}$. Um ground state é definido como um elemento minimizador do funcional $\mathcal{S}_{\omega,\gamma}$ restrito à variedade de Nehari $\mathcal{M} := \{u \in W(\mathbb{R}_{\circ}) \setminus \{0\} : \langle \mathcal{S}'_{\omega,\gamma}(u), u \rangle = 0\}$. O seguinte teorema vai mostrar que o conjunto dos ground states é não vazio.

Teorema VI Sejam $\omega \in \mathbb{R}$ e $\gamma > 0$. Há pelo menos um minimizador do funcional $S_{\omega,\gamma}$ entre todas as funções na variedade de Nehari. Isto é, existe $\varphi \in W(\mathbb{R}_{\circ})$ tal

que

$$S_{\omega,\gamma}(\varphi) = \inf \left\{ S_{\omega,\gamma}(u) : u \in W(\mathbb{R}_{\circ}) \setminus \{0\}, \langle S'_{\omega,\gamma}(u), u \rangle = 0 \right\}.$$

Observemos que se φ é um ground state, então φ é solução da equação elíptica (1.9)(ver Observação 4.9). Portanto, para identificar os ground states precisamos estudar as soluções da equação (1.9). Fazendo uma análise das soluções dessa equação obtemos o seguinte resultado.

Teorema VII As seguintes afirmações são verdadeiras.

(i) Seja $0 < \gamma \le 2$. O conjunto dos ground states é dado por $\{e^{i\theta}\psi_{\omega,\gamma} : \theta \in \mathbb{R}\}$, onde

$$\psi_{\omega,\gamma}(x) := \left(\frac{x}{|x|}\right) e^{\frac{\omega+1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\left(|x| + \frac{2}{\gamma}\right)^2}, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$
 (1.10)

(ii) Seja $\gamma > 2$. Existem duas funções assimétricas $\phi_{\omega}^{t_1,t_2}$ e $\phi_{\omega}^{t_2,t_1}$, tal que o conjunto dos ground states é dado por $\{e^{i\theta}\phi_{\omega}^{t_1,t_2},\ e^{i\theta}\phi_{\omega}^{t_2,t_1}:\ \theta\in\mathbb{R}\}$.

A fórmula explicita das funções $\phi_{\omega}^{t_1,t_2}$ e $\phi_{\omega}^{t_2,t_1}$ podem ser encontradas na seção 4.5, assim como seu gráfico na Figura 4.4. Do Teorema VII podemos concluir que os ground states apresentam uma bifurcação que depende do valor da intensidade γ . Mais especificamente, para $0 < \gamma \le 2$ existe um único ground state anti-simétrico (sob rotações); para $\gamma > 2$, existem exatamente dois ground state assimétricos (sob rotações).

Notemos que $\psi_{\omega,\gamma}$ satisfaz a equação elíptica (1.9) para todo $\gamma \neq 0$; contudo, só é ground state para $0 < \gamma \leq 2$. Por outro lado, $\phi_{\omega}^{t_1,t_2}$ e $\phi_{\omega}^{t_2,t_1}$ só satisfazem a equação elíptica (1.9) para $\gamma > 2$.

Estabilidade dos ground states. A análise da estabilidade dos ground states, identificados no Teorema VII, será feita no espaço $W(\mathbb{R}_{\circ})$ e no espaço das funções anti-simétricas $W_{an}(\mathbb{R}_{\circ}) := \{ f \in W(\mathbb{R}_{\circ}) : f(-x) = -f(x) \text{ para } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \}$. O seguinte teorema mostra que os ground states são orbitalmente estáveis em $W(\mathbb{R}_{\circ})$.

Teorema VIII Seja $\omega \in \mathbb{R}$. As seguintes afirmações são verdadeiras.

(i) Para $0 < \gamma \le 2$ a standing wave $e^{i\omega t}\psi_{\omega,\gamma}(x)$ é orbitalmente estável em $W(\mathbb{R}_{\circ})$. (ii) Para $\gamma > 2$ as standing waves $e^{i\omega t}\phi_{\omega}^{t_1,t_2}(x)$ e $e^{i\omega t}\phi_{\omega}^{t_2,t_1}(x)$ são orbitalmente estáveis em $W(\mathbb{R}_{\circ})$.

Para $\gamma > 2$ a estabilidade ou instabilidade da standing wave $u(x,t) = e^{i\omega t}\psi_{\omega,\gamma}(x)$ em $W(\mathbb{R}_{\circ})$ não é conhecida; isto é devido ao fato de que para $\gamma > 2$ a função $\psi_{\omega,\gamma}$ não é um ground states e portanto não é possível aplicar o mesmo argumento do Teorema VIII. No entanto, restringindo a dinâmica da equação de Schrödinger logarítmica (1.8) ao espaço das funções anti-simétricas $W_{an}(\mathbb{R}_{\circ})$ obtemos o seguinte resultado:

Teorema IX Seja $\omega \in \mathbb{R}$. Para $\gamma > 0$ a standing wave $e^{i\omega t}\psi_{\omega,\gamma}(x)$ é orbitalmente estável em $W_{an}(\mathbb{R}_{\circ})$.

Finalmente, seguindo as ideias em Angulo and Goloshchapova [10] e aplicando a teoria de Grillakis, Shatah and Strauss [28, 29] obtemos o seguinte resultado de estabilidade no espaço de Hilbert $H_p^1(\mathbb{R}_{\circ}) := \{ f \in H^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}) : xf \in L^2(\mathbb{R}) \}.$

Teorema X Seja $\omega \in \mathbb{R}$. A seguintes afirmações são verdadeiras.

- (i) Para $\gamma > 2$ a standing wave $e^{i\omega t}\psi_{\omega,\gamma}(x)$ é instável em $H^1_p(\mathbb{R}_{\circ})$.
- (ii) Para $0 < \gamma < 2$ a standing wave $e^{i\omega t}\psi_{\omega,\gamma}(x)$ é orbitalmente estável em $H^1_p(\mathbb{R}_\circ)$.
- (iii) Para $\gamma > 2$ as standing waves $e^{i\omega t}\phi_{\omega}^{t_1,t_2}(x)$ e $e^{i\omega t}\phi_{\omega}^{t_2,t_1}(x)$ são orbitalmente estáveis em $H_p^1(\mathbb{R}_{\circ})$.

No caso $\gamma < 0$, a estabilidade ou instabilidade da standing wave $u(x,t) = e^{i\omega t} \psi_{\omega,\gamma}(x)$ não é conhecida em $W(\mathbb{R}_{\circ})$ (ou $H^1_p(\mathbb{R}_{\circ})$). Infelizmente, os métodos utilizados nesta tese não podem ser estendidos para $\gamma < 0$. Mais especificamente, o argumento desenvolvido na prova do Teorema VI não pode ser aplicado neste caso (ver Observação 4.17) e portanto não é possível obter um resultado de estabilidade via o método variacional. Por outro lado, não é factível aplicar a teoria de Grillakis, Shatah and Strauss [28, 29] devido ao fato que as técnicas usadas para estudar o espectro negativo da segunda variação $S''_{\omega,\gamma}(\psi_{\omega,\gamma}) = L_{an,\gamma} + i L^1_{an,\gamma}$ (ver subseção 4.7.1) não resultam efetivas. De fato, devido ao comportamento do perfil $\psi_{\omega,\gamma}$ no caso $\gamma < 0$, não é claro como aplicar a teoria de extensão para operadores simétricos (fundamental na prova do Teorema X) para estudar o espectro negativo do operador $L_{an,\gamma}$ (ver Observação 4.27). Finalmente, a teoria de perturbação analítica desenvolvida em [10, 37] não é aplicável pois, como função de γ , a família de operadores auto-adjuntos ($L_{an,\gamma}$) não é real-analítica no sentido de Kato (ver [33, Theorem VII-4.2]).

Observemos que o gausson clássico $\phi_{\omega}(x) = e^{\frac{\omega+1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ é solução da equação elíptica (1.9) para todo $\gamma \neq 0$; contudo, pelas mesmas razões expostas no caso $\gamma < 0$, não é possível obter resultados de estabilidade ou instabilidade para a standing wave $u(x,t) = e^{i\omega t}\phi_{\omega}(x)$ em $W(\mathbb{R}_{\circ})$ (ou $H_p^1(\mathbb{R}_{\circ})$). De fato, ϕ_{ω} não é um ground state para a equação (1.8) (ver Observação 4.14) e portanto o nosso enfoque variacional não funciona neste caso. Por outro lado, devido ao comportamento da ϕ_{ω} na origem, pois $\phi'_{\omega}(0) = 0$, não está claro como aplicar a teoria de extensão para operadores simétricos para estudar o espectro negativo da segunda variação $S''_{\omega,\gamma}(\phi_{\omega})$ (ver Observação 4.27); mais especificamente, a fórmula (4.58) não é valida neste caso.

1.2 Organização da tese

O resto desta tese está organizada da seguinte forma. No Capitulo 2 serão descritos os principais resultados sobre a dinâmica da equação de Schrödinger logarítmica (1.1) com potencial nulo; $V\equiv 0$. Em particular, mostraremos que os ground states são estáveis em qualquer dimensão $N\geq 1$; estabeleceremos este resultado com o objetivo de deixar a tese auto-contida, pois o nosso método de demostração será usado nos Capítulos 3 e 4.

No Capítulo 3 vamos analisar a existência e estabilidade dos ground states para equação de Schrödinger logarítmica com um δ -potencial no espaço $W(\mathbb{R})$. Na Seção 3.1 damos uma definição precisa do hamiltoniano $-\partial_x^2 - \gamma \delta(x)$ e indicamos algumas de suas propriedades espectrais que serão usadas no problema de Cauchy. Na Seção 3.2 mostramos o Teorema I. Na Seção 3.3 é dedicada a provar o Teorema III e o Teorema III. Na Seção 3.4 mostramos o Teorema IV.

No Capítulo 4 vamos analisar a existência e estabilidade dos ground states para equação de Schrödinger logarítmica com um δ' -potencial no espaço $W(\mathbb{R}_{\circ})$. Na Seção 4.1 damos uma descrição precisa do Hamiltoniano $-\partial_x^2 - \gamma \delta'(x)$ e indicamos algumas de suas propriedades espectrais. Na Seção 4.2 definimos o espaço de energia $W(\mathbb{R}_{\circ})$ sobre o qual estudamos a dinâmica da equação (1.8). Na Seção 4.3 estabelecemos o Teorema V. Na Seção 4.4 mostraremos o Teorema VI. Na Seção 4.5 calculamos explicitamente os ground states. Em adição, é provado o Teorema VII. Na Seção 4.6 mostramos que os ground states são orbitalmente estáveis no espaço de energia, isto é, demonstramos os Teoremas VIII e IX. Finalmente, na Seção 4.7 é mostrado o Teorema X.

No Capítulo 5 apresentamos alguns problemas abertos e que poderiam ser abordados em um estudo futuro.

No Apêndice estabelecemos o Lema de Brezis-Lieb, analisamos o problema estacionário associado com a equação (1.1) e apresentamos alguns resultados básicos sobre a teoria de extensão para operadores simétricos.

EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER LOGARÍTMICA

Consideremos a equação de Schrödinger logarítmica

$$i\partial_t u + \Delta u + u \operatorname{Log} |u|^2 = 0, \tag{2.1}$$

onde u=u(x,t) é uma função a valores complexos de $t\in\mathbb{R}$ e $x\in\mathbb{R}^N$ para $N\geq 1,\ u(x,t):\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}.$ A equação (2.1) tem importantes aplicações em mecânica quântica, óptica quântica, óptica nuclear, fenômenos de transporte e difusão e na teoria de condensado Bose-Einstein (ver [51]). O presente capítulo é dedicado a descrever algumas propriedades da equação (2.1) que serão utilizadas ao longo do trabalho. Na seção 2.1 é definido o espaço de energia $W(\mathbb{R}^N)$ sobre o qual é estudada a dinâmica da equação (2.1). Na seção 2.2 são explicitamente identificados os ground states. Por último, na seção 2.3 é mostrado que os ground states são orbitalmente estáveis em $W(\mathbb{R}^N)$ para $N\geq 1$.

2.1 O espaço de energia

Formalmente, a equação (2.1) tem duas quantidades conservadas. A primeira delas é a carga: se u é solução de (2.1) com condição inicial $u(0) = u_0$ então

$$Q(u(t)) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x,t)|^2 dx = Q(u_0).$$

Esta quantidade conservada pode ser obtida multiplicando (2.1) por \overline{u} , integrando sobre \mathbb{R}^N e tomando a parte imaginária. A segunda quantidade conservada é a energia

$$E(u(t)) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x,t)|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x,t)|^2 \log |u(x,t)|^2 dx = E(u_0). \quad (2.2)$$

A qual pode ser obtida multiplicando (2.1) por $\partial_t \overline{u}$, integrando sobre \mathbb{R}^N e tomando a parte real. Devido à importância destas quantidades no estudo da dinâmica da

equação (2.1) é natural definir um espaço de energia onde estes sejam bem definidas. Notemos que o funcional da energia não é bem definido em $H^1(\mathbb{R}^N)$ por causa do termo logarítmico. Devido a esta perda de suavidade do funcional da energia em $H^1(\mathbb{R}^N)$, é conveniente definir um espaço no qual o segundo termo integral do funcional E seja controlado.

Seja $F(s) := s^2 \operatorname{Log} s^2, \ s \in [0, +\infty)$. Consideremos as funções A e B definidas por

$$A(s) := \begin{cases} -s^2 \operatorname{Log}(s^2), & \text{se } 0 \le s \le e^{-3}; \\ 3s^2 + 4e^{-3}s - e^{-6}, & \text{se } s \ge e^{-3}; \end{cases} \qquad B(s) := F(s) + A(s). \quad (2.3)$$

É fácil ver que A e B são funções convexas não negativas com $A, B \in C^1([0, +\infty)) \cap C^2((0, +\infty))$. Seguindo as ideias em [19] vamos definir o espaço de Orlicz $L^A(\mathbb{R}^N)$, associado com a função convexa A, o qual permitirá tornar o funcional da energia bem definido.

Lema 2.1 O espaço normado

$$L^{A}(\mathbb{R}^{N}) = \left\{ u \in L^{1}_{loc}(\mathbb{R}^{N}) : A(|u|) \in L^{1}(\mathbb{R}^{N}) \right\},\,$$

equipado com a norma de Luxemburg

$$\|u\|_{L^A(\mathbb{R}^N)} = \inf\left\{k > 0 : \int_{\mathbb{R}^N} A\left(\frac{|u|}{k}\right) \le 1\right\}$$

satisfaz as seguintes propriedades:

- i) O espaço $L^A(\mathbb{R}^N)$ é Banach, reflexivo e separável.
- ii) Se $u^m \to u$ em $L^A(\mathbb{R}^N)$, então $A(|u^m|) \to A(|u|)$ em $L^1(\mathbb{R}^N)$ quando $m \to \infty$.
- iii) Se $u^m \to u$ q.t.p sobre \mathbb{R}^N e se

$$\int_{\mathbb{R}^N} A\left(|u^m(x)|\right) dx \to \int_{\mathbb{R}^N} A\left(|u(x)|\right) dx < \infty,$$

então $u^m \to u$ em $L^A(\mathbb{R}^N)$ quando $m \to \infty$.

iv) Para toda $u \in L^A(\mathbb{R}^N)$,

$$\inf \left(\|u\|_{L^{A}(\mathbb{R}^{N})}, \|u\|_{L^{A}(\mathbb{R}^{N})}^{2} \right) \leq \int_{\mathbb{R}^{N}} A\left(|u(x)| \right) dx \leq \sup \left(\|u\|_{L^{A}(\mathbb{R}^{N})}, \|u\|_{L^{A}(\mathbb{R}^{N})}^{2} \right).$$

A prova do Lema 2.1 pode ser encontrada em [42, Chapter I-III]. Por outro

lado, notemos que para $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ existe C > 0 (ver [19, Lemma 1.1]) tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |B(|u(x)|) - B(|v(x)|)| dx \le C \left(1 + ||u||_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 + ||v||_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 \right) ||u - v||_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$
(2.4)

Em particular, toda $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfaz $B(|u|) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Observemos se a sequência $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é limitada e $u_n \to u$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$, então $B(|u_n|) \to B(|u|)$ em $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Aplicando a desigualdade (2.4) e a definição do espaço $L^A(\mathbb{R}^N)$ é fácil mostrar que o funcional da energia é bem definido no espaço $H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^A(\mathbb{R}^N)$, equipado com a norma usual (ver (2.5)). De fato, se $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^A(\mathbb{R}^N)$ temos que A(|u|) e B(|u|) pertencem a $L^1(\mathbb{R}^N)$, e portanto $|u|^2 \operatorname{Log} |u|^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Ainda mais, em [19, Proposition 2.7] é mostrado que o funcional da energia é de classe C^1 sobre este espaço. Do acima exposto, é natural estudar a dinâmica da equação (2.1) sobre o espaço

$$W(\mathbb{R}^N) := H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^A(\mathbb{R}^N), \quad \|u\|_{W(\mathbb{R}^N)} = \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} + \|u\|_{L^A(\mathbb{R}^N)}. \tag{2.5}$$

O seguinte resultado resume as propriedades mais importantes do espaço $W(\mathbb{R}^N)$. A prova pode ser encontrada em [19, Proposition 2.2].

Lema 2.2 O espaço $W(\mathbb{R}^N) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : |u|^2 \operatorname{Log} |u|^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)\}$ é de Banach, reflexivo e separável com inclusão contínua $W(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$.

O seguinte resultado é uma variante do Lema de Brezis-Lieb [17].

Lema 2.3 Se $u_n \rightharpoonup u$ fraco em $W(\mathbb{R}^N)$ e $u_n \rightarrow u$ q.t.p sobre \mathbb{R}^N , então

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left[|u_n|^2 \log |u_n|^2 - |u_n - u|^2 \log |u_n - u|^2 \right] dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \log |u|^2 dx.$$

Demonstração: Observemos que a sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^A(\mathbb{R}^N)$ e $u_n \to u$ q.t.p sobre \mathbb{R}^N . Lembrando que $A:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ é uma função convexa, crescente e não negativa com A(0)=0 obtemos de uma aplicação direta do Lema de Brezis-Lieb (ver Lema A.1 no Apêndice) que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |A(|u_n|) - A(|u_n - u|) - A(|u|)| \, dx = 0. \tag{2.6}$$

Por outro lado, da inclusão contínua $W(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$ temos que a sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e $u_n \to u$ q.t.p sobre \mathbb{R}^N . Notemos que $B:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ é uma função convexa, crescente e não negativa. Da desigualdade (2.4)

é fácil ver que as hipóteses do Lema de Brezis-Lieb (ver Lema A.1 no Apêndice) são satisfeitas. Assim,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |B(|u_n|) - B(|u_n - u|) - B(|u|)| \, dx = 0. \tag{2.7}$$

Agora, utilizando o fato que $F(|z|) = |z|^2 \operatorname{Log} |z|^2 = B(|z|) - A(|z|)$ temos

$$|F(|u_n|) - F(|u_n - u|) - F(|u|)| \le |B(|u_n|) - B(|u_n - u|) - B(|u|)| + |A(|u_n|) - A(|u_n - u|) - A(|u|)|.$$

O resultado segue da desigualdade acima, junto com (2.6) e (2.7).

Com respeito ao problema de Cauchy da equação (2.1) em $W(\mathbb{R}^N)$ temos o seguinte teorema. A prova pode ser encontrada em [19, 20, 21, 30].

Teorema 2.1 Para toda $u_0 \in W(\mathbb{R}^N) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : |u|^2 \operatorname{Log} |u|^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)\}$ existe uma única solução global $u \in C(\mathbb{R}, W(\mathbb{R}^N)) \cap C^1(\mathbb{R}, W'(\mathbb{R}^N))$ de (2.1) com $u(0) = u_0$ tal que $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t)\|_{W(\mathbb{R}^N)} < \infty$. Em adição, a energia E e a carga Q, definidas em (2.2), são conservadas:

$$E(u(t)) = E(u_0), \quad Q(u(t)) = Q(u_0), \quad para \ todo \ t \in \mathbb{R}.$$

Observação 2.1 No Teorema 2.1 o espaço $W'(\mathbb{R}^N)$ denota o dual de $W(\mathbb{R}^N)$. É claro que $W'(\mathbb{R}^N) = H^{-1}(\mathbb{R}^N) + L^{\hat{A}}(\mathbb{R}^N)$, onde $L^{\hat{A}}(\mathbb{R}^N)$ denota o espaço dual de $L^A(\mathbb{R}^N)$ (ver, por exemplo, [20, Proposition 1.1.3]). O espaço $W'(\mathbb{R}^N)$ está equipado com a norma usual

$$||f||_{W'(\mathbb{R}^N)} = \inf \left\{ ||f_1||_{H^{-1}(\mathbb{R}^N)} + ||f_2||_{L^{\hat{A}}(\mathbb{R}^N)} : f = f_1 + f_2 \right\},$$

para $f \in W'(\mathbb{R}^N)$. Em adição, temos que as inclusões $W(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow W'(\mathbb{R}^N)$ são contínuas.

2.2 Os ground states

Nesta seção vamos identificar os ground states da equação (2.1) e dar algumas caracterizações variacionais que serão de utilidade no estudo da estabilidade orbital. Resultados contidos nesta seção serão úteis nos seguintes capítulos.

Definição 2.1 Uma standing wave de (2.1) é uma solução da forma u(x,t) =

 $e^{i\omega t}\varphi(x)$, com $\omega \in \mathbb{R}$ e φ satisfazendo

$$\begin{cases} -\Delta \varphi + \omega \varphi - \varphi \operatorname{Log} |\varphi|^2 = 0, \\ \varphi \in W(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}. \end{cases}$$
 (2.8)

No caso N=1, a equação elíptica (2.8) foi estudada em [14, Apêndice D]. Em particular, foi mostrado que a única solução positiva (sob rotação e translação) é dada explicitamente por $\phi_{\omega}(x) = e^{\frac{\omega+1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ para todo $\omega \in \mathbb{R}$. No caso de dimensões maiores, em [23, Theorem 1.1] foi mostrado que esta equação elíptica tem infinitas soluções. Para identificar as soluções da equação (2.8) que são relevantes nas aplicações físicas, é conveniente definir o funcional $S_{\omega}: W(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$, onde para $u \in W(\mathbb{R}^N)$ temos

$$S_{\omega}(u) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{\omega + 1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \log|u|^2 \, dx.$$

O funcional S_{ω} é de classe C^1 em $W(\mathbb{R}^N)$. De fato, em [19, Proposition 2.7] é mostrado que a derivada de Fréchet de S_{ω} em u é dada por

$$S'_{\omega}(u) = -\Delta u + \omega u - u \operatorname{Log} |u|^{2}.$$

Em adição, φ é solução de (2.8) se e só se $\varphi \in W(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ e $S'_{\omega}(\varphi) = 0$. Por outro lado, definimos o funcional de Nehari $I_{\omega} : W(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ por

$$I_{\omega}(u) := \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \omega \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \log|u|^2 dx.$$

Notemos que I_{ω} é de classe C^1 em $W(\mathbb{R}^N)$ e devido ao Teorema da função implícita o conjunto $\mathcal{M} := \{u \in W(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}, I_{\omega}(u) = 0\}$ é uma variedade diferenciável de classe C^1 e codimensão um em $W(\mathbb{R}^N)$, conhecida como a variedade de Nehari. Seja \mathcal{N}_{ω} o conjunto de todos os minimizadores do funcional S_{ω} restrito à variedade de Nehari \mathcal{M} . Mais especificamente, \mathcal{N}_{ω} é o conjunto de todos os minimizadores do seguinte problema variacional

$$d(\omega) := \inf \left\{ S_{\omega}(u) : u \in W(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}, I_{\omega}(u) = 0 \right\}. \tag{2.9}$$

Na literatura, as funções que pertencem ao conjunto \mathcal{N}_{ω} são chamadas ground states e são particularmente importantes nas aplicações físicas.

Observação 2.2 Se ϕ_{ω} é um ground state, então ϕ_{ω} é solução da equação elíptica (2.8). De fato, seja $\phi_{\omega} \in \mathcal{N}_{\omega}$, por definição $S_{\omega}(\phi_{\omega}) = \inf \{ S_{\omega}(u) : u \in \mathcal{M} \}$, portanto existe um multiplicador de Lagrange $\Lambda \in \mathbb{R}$ tal que $S'_{\omega}(\phi_{\omega}) = \Lambda I'_{\omega}(\phi_{\omega})$. Assim, temos que $\langle S'_{\omega}(\phi_{\omega}), \phi_{\omega} \rangle = \Lambda \langle I'_{\omega}(\phi_{\omega}), \phi_{\omega} \rangle$. Agora, da definição de I_{ω} temos que $\langle S'_{\omega}(\phi_{\omega}), \phi_{\omega} \rangle = I_{\omega}(\phi_{\omega}) = 0$ e $\langle I'_{\omega}(\phi_{\omega}), \phi_{\omega} \rangle = -2 \|\phi_{\omega}\|_{L^{2}(\mathbb{R}^{N})}^{2} < 0$. Do acima exposto,

concluímos que $\Lambda = 0$. Logo, $S'_{\omega}(\phi_{\omega}) = 0$ e portanto ϕ_{ω} é solução da equação (2.8).

A seguinte desigualdade, conhecida como desigualdade de Sobolev logarítmica, será útil em todo o trabalho. Sua demonstração poder ser encontrada em [38, Theorem 8.14].

Lema 2.4 Sejam $f \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e a > 0. Então

$$\frac{a^{2}}{\pi} \int_{\mathbb{R}^{N}} |\nabla f(x)|^{2} dx \ge \int_{\mathbb{R}^{N}} |f(x)|^{2} \operatorname{Log}\left(\frac{|f(x)|^{2}}{\|f\|_{L^{2}(\mathbb{R}^{N})}^{2}}\right) dx + N\left(1 + \operatorname{Log}(a)\right) \|f\|_{L^{2}(\mathbb{R}^{N})}^{2}.$$
(2.10)

Além disso, temos a igualdade se e só se f, sob uma translação e rotação, é um múltiplo de $e^{\{-\pi|x|^2/2a^2\}}$.

O seguinte resultado baseia-se no Lema 2.3 em [24].

Lema 2.5 Para o problema variacional definido em (2.9) temos

$$d(\omega) = \frac{1}{2} \inf \left\{ \|u\|_{L^{2}(\mathbb{R}^{N})}^{2} : u \in W(\mathbb{R}^{N}) \setminus \{0\}, I_{\omega}(u) = 0 \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \inf \left\{ \|u\|_{L^{2}(\mathbb{R}^{N})}^{2} : u \in W(\mathbb{R}^{N}) \setminus \{0\}, I_{\omega}(u) \leq 0 \right\}.$$
(2.11)

Adicionalmente $d(\omega)$ é positivo; mais especificamente,

$$d(\omega) \ge \frac{1}{2} e^{\omega + N} \sqrt[N]{\pi}. \tag{2.13}$$

Demonstração: Em primeiro lugar, notemos que $2S_{\omega}(u) = I_{\omega}(u) + ||u||_{L^{2}(\mathbb{R}^{N})}^{2}$. Logo, da definição de $d(\omega)$ segue-se facilmente (2.11). Por outra parte, seja

$$d_1(\omega) = \frac{1}{2} \inf \left\{ \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 : u \in W(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}, I_{\omega}(u) \le 0 \right\}.$$

Das propriedades do ínfimo é claro que $d_1(\omega) \leq d(\omega)$. Portanto, só precisamos mostrar que $d(\omega) \leq d_1(\omega)$. Seja $u \in W(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ tal que $I_{\omega}(u) < 0$ e definimos

$$\lambda := e^{\frac{1}{2} \left(\frac{I_{\omega}(u)}{\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2} \right)}. \tag{2.14}$$

Um cálculo simples mostra que $\lambda \in (0,1)$ e $I_{\omega}(\lambda u) = 0$. Logo, λu está na variedade de Nehari, assim da definição de $d(\omega)$ obtemos

$$d(\omega) \le S_{\omega}(\lambda u) = \frac{\lambda^2}{2} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 < \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2,$$

portanto $d(\omega) \leq d_1(\omega)$. Em conclusão $d(\omega) = d_1(\omega)$. A seguir vamos provar a desigualdade (2.13). Seja $u \in W(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ tal que $I_{\omega}(u) = 0$. Uma aplicação direta da desigualdade de Sobolev logarítmica (2.10) com $a = \sqrt{\pi}$, mostra

$$\left(\omega + N\left(1 + \text{Log}(\sqrt{\pi})\right)\right) \|u\|_{L^{2}(\mathbb{R}^{N})}^{2} \le \left(\text{Log} \|u\|_{L^{2}(\mathbb{R}^{N})}^{2}\right) \|u\|_{L^{2}(\mathbb{R}^{N})}^{2}.$$

Da expressão acima concluímos que $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \ge e^{\omega+N} \sqrt[N]{\pi}$ para toda u que pertence à variedade de Nehari. Por último, aplicando a caracterização (2.11) segue-se a desigualdade (2.13).

O seguinte teorema mostra que o conjunto dos ground states é não vazio.

Teorema 2.2 Seja $\omega \in \mathbb{R}$. Há pelo menos um minimizador do funcional S_{ω} entre todas as funções na variedade de Nehari. Isto é, existe $\varphi \in W(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$S_{\omega}(\varphi) = d(\omega) = \inf \left\{ S_{\omega}(u) : u \in W(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}, I_{\omega}(u) = 0 \right\}.$$

Na prova do Teorema 2.2 nós usamos os seguintes dois lemas. Nosso primeiro lema é uma adaptação do Lema 3.3 em [19].

Lema 2.6 Sejam $p \in (2, \infty)$ e $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência minimizante em $W(\mathbb{R}^N)$ do problema (2.9). Então existe uma constante $C_p > 0$ tal que $\|u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p \geq C_p$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Suponhamos primeiro que $\omega \geq 0$. Devido ao fato que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência minimizante temos que

$$||u_n||_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \ge 2d(\omega)$$
 e $\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 \log |u_n|^2 dx \ge 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. (2.15)

Seja $\delta \in (0,1)$. De (2.15), junto com algumas desigualdade básicas obtemos

$$2d(\omega) \le \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 dx = \int_{|u_n| \ge \delta} |u_n|^2 dx + \int_{|u_n| \le \delta} |u_n|^2 dx$$

$$\le \delta^{-(p-2)} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx + (\operatorname{Log} \delta^2)^{-1} \int_{|u_n| \le 1} |u_n|^2 \operatorname{Log} |u_n|^2 dx$$

$$\le \delta^{-(p-2)} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx + (\operatorname{Log} \left(1/\delta^2\right))^{-1} \int_{|u_n| \ge 1} |u_n|^2 \operatorname{Log} |u_n|^2 dx.$$

Agora, utilizando o fato que $x^2 \operatorname{Log} x^2 \leq x^p (p-2)^{-1}$ para $x \geq 1$ e $p \geq 2$, obtemos

$$2d(\omega) \leq \delta^{-(p-2)} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx + ((p-2)\operatorname{Log}(1/\delta^2))^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx$$

$$\leq (\delta^{-(p-2)} + ((p-2)\operatorname{Log}(1/\delta^2))^{-1}) \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx.$$

Escolhendo $\delta > 0$ pequeno, de (2.13) concluímos que existe uma constante $C_p > 0$ tal que $||u_n||_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p \ge C_p$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outra parte, suponhamos que $\omega < 0$. Neste caso existe C > 0 tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 \operatorname{Log} |u_n|^2 dx \ge -C, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$
 (2.16)

Aplicando um raciocínio semelhante ao citado acima, junto com (2.16) temos que

$$2d(\omega) \le \left(\delta^{-(p-2)} + ((p-2)\operatorname{Log}(1/\delta^2))^{-1}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p \, dx + C(\operatorname{Log}(1/\delta^2))^{-1}.$$

Escolhendo $\delta > 0$ pequeno, segue-se o resultado.

Observação 2.3 Com um pouco mais de trabalho é possível demonstrar que se $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência minimizante em $W(\mathbb{R}^N)$ do problema (2.9), então $\inf_{n\in\mathbb{N},p\in[1,\infty)}\|u_n\|_{L^{p+1}}^{p+1}>0$. A prova deste fato pode ser encontrada em [19, Lemma 3.3].

A prova do seguinte lema pode ser encontrada em [36, Lemma 3.9].

Lema 2.7 Sejam $p \in (2, 2^*)$ e R > 0, onde $2^* := 2N/(N-2)$. Então existem $\alpha > 0$ e C > 0 tal que para toda $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ temos

$$||v||_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p \le C \left(\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |v|^2 dx \right)^{\alpha} ||v||_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2,$$

onde $B_R(y) := \{ z \in \mathbb{R}^N : |y - z| < R \}.$

Demonstração do Teorema 2.2: Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência minimizante do problema (2.9).

PASSO 1. A sequência $\{u_n\}$ é limitada em $W(\mathbb{R}^N)$. Em primeiro lugar, notemos que $\{u_n\}$ é limitada em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e que $\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \to 2 d(\omega)$, quando $n \to \infty$. Utilizando o fato que $I_{\omega}(u_n) = 0$, junto com a desigualdade de Sobolev logarítmica

 \Box .

é fácil mostrar para a > 0,

$$\left(1 - \frac{a^2}{\pi}\right) \|\nabla u_n\|_{L^2}^2 \le \left(\operatorname{Log}\left(\frac{e^{-(\omega + N)}}{a^N}\right)\right) \|u_n\|_{L^2}^2 + \left(\operatorname{Log}\|u_n\|_{L^2}^2\right) \|u_n\|_{L^2}^2.$$

Escolhendo a > 0 pequeno, obtemos que a sequência $\{\nabla u_n\}$ é limitada em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Portanto, a sequência $\{u_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Por outro lado, da desigualdade (2.4) é claro que a sequência $\{B(|u_n|)\}$ é limitada em $L^1(\mathbb{R}^N)$, assim, do fato que $I_{\omega}(u_n) = 0$ obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^{N}} A(|u_{n}|) \leq \int_{\mathbb{R}^{N}} B(|u_{n}|).$$

Isto mostra que $\{A(|u_n|)\}$ é limitada em $L^1(\mathbb{R}^N)$ e do Lema 2.1 concluímos que a sequência $\{u_n\}$ é limitada em $W(\mathbb{R}^N)$.

PASSO 2. Existe $\varphi \in W(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ tal que, passando a uma subsequência, se necessário, $u_n \rightharpoonup \varphi$ em $W(\mathbb{R}^N)$. Pelo Passo 1 e o fato que $W(\mathbb{R}^N)$ é reflexivo, passando a uma subsequência, se necessário, existe $\varphi \in W(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \rightharpoonup \varphi$. Precisamos mostrar que φ é não trivial. Devido à invariância do funcional S_ω sob as translações é suficiente mostrar que existe $(y_n) \subseteq \mathbb{R}^N$ tal que o limite fraco em $L^2(\mathbb{R}^N)$ da sequência $\{u_n(\cdot + y_n)\}$ é não trivial. Utilizando o fato que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência minimizante, do Lema 2.6 existe uma constante $C_p > 0$ tal que $\|u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p \ge C_p$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e p > 2. Assim, do Lema 2.7 existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |u_n|^2 \, dx \ge \epsilon.$$

Portanto, podemos escolher $(y_n) \subseteq \mathbb{R}^N$ tal que

$$\int_{B_1(0)} |u_n(\cdot + y_n)|^2 dx \ge \epsilon,$$

e devido à compacidade da inclusão $H^1(B_1(0)) \hookrightarrow L^2(B_1(0))$ deduzimos que o limite fraco da sequência $\{u_n(\cdot + y_n)\}$ é não trivial.

PASSO 3. A função φ está na variedade de Nehari, isto é, $I_{\omega}(\varphi)=0$. A prova será feita por contradição. Em primeiro lugar, do Passo 2 é claro que $\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2>0$. Suponhamos que $I_{\omega}(\varphi)<0$. Então existe $\lambda\in(0,1)$ (ver (2.14)) tal que $I_{\omega}(\lambda\varphi)=0$. Assim, da definição de $d(\omega)$ obtemos

$$d(\omega) \le S_{\omega}(\lambda \varphi) = \frac{\lambda^2}{2} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 < \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \le \frac{1}{2} \liminf_{n \to \infty} \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = d(\omega).$$

Que é impossível e portanto $I_{\omega}(\varphi) \geq 0$. Suponhamos que $I_{\omega}(\varphi) > 0$. Da inclusão

contínua $W(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$ temos que $u_n \rightharpoonup \varphi$ fraco em $H^1(\mathbb{R}^N)$ quando $n \to \infty$. Devido à convergência fraca, quando $n \to \infty$,

$$||u_n||_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 - ||u_n - \varphi||_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 - ||\varphi||_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \to 0,$$
 (2.17)

$$\|\nabla u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 - \|\nabla u_n - \nabla \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 - \|\nabla \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \to 0.$$
 (2.18)

Em adição, passando a uma subsequência, se necessário, temos que $u_n \to \varphi$ q.t.p. sobre \mathbb{R}^N . O Lema 2.3, junto com (2.17) e (2.18) implicam

$$I_{\omega}(u_n) - I_{\omega}(u_n - \varphi) - I_{\omega}(\varphi) \to 0,$$

quando $n \to \infty$. Logo, do fato que $I_{\omega}(\varphi) > 0$ concluímos que

$$\lim_{n \to \infty} I_{\omega}(u_n - \varphi) = -I_{\omega}(\varphi) < 0.$$

Assim, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq k$ então $I_{\omega}(u_n - \varphi) < 0$. Da caraterização variacional dada no Lema 2.5 e (2.17) segue-se

$$2d(\omega) \le \lim_{n \to \infty} \|u_n - \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = \lim_{n \to \infty} \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 - \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = 2d(\omega) - \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2,$$

que é una contradição pois $\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 > 0$. Portanto, $I_{\omega}(\varphi) = 0$.

Passo 4. Conclusão. Do Passo 3 e a definição de $d(\omega)$ temos

$$d(\omega) \le S_{\omega}(\varphi) = \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L^{2}(\mathbb{R}^{N})}^{2} \le \frac{1}{2} \liminf_{n \to \infty} \|u_{n}\|_{L^{2}(\mathbb{R}^{N})}^{2} = d(\omega).$$

Assim $d(\omega) = S_{\omega}(\varphi)$. Isto termina a prova .

Na seguinte proposição os ground states são explicitamente identificados.

Proposição 2.1 Para $\omega \in \mathbb{R}$, temos que o conjunto dos ground states é dado por $\mathcal{N}_{\omega} = \{e^{i\theta}\phi_{\omega}(\cdot - y); \theta \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^N\}, \text{ onde}$

$$\phi_{\omega}(x) := e^{\frac{\omega + N}{2}} e^{-\frac{1}{2}|x|^2}.$$
(2.19)

Demonstração: Em primeiro lugar, observemos que $\phi_{\omega} \in W(\mathbb{R}^N)$ é solução da equação elíptica (2.8). Em adição, um cálculo simples mostra que $I_{\omega}(\phi_{\omega})=0$ e $\|\phi_{\omega}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2=e^{\omega+N}\sqrt[N]{\pi}$. Logo, aplicando o Lema 2.5 obtemos que $2d(\omega)=\|\phi_{\omega}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2$, e portanto os ϕ_{ω} são elementos minimizadores do problema variacional (2.9). Em particular, $\left\{e^{i\theta}\phi_{\omega}(\cdot-y);\theta\in\mathbb{R},\,y\in\mathbb{R}^N\right\}\subseteq\mathcal{N}_{\omega}$ e $2d(\omega)=e^{\omega+N}\sqrt[N]{\pi}$. A seguir vamos mostrar a outra inclusão. Seja $u\in\mathcal{N}_{\omega}$, então por definição temos

que $||u||_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = 2d(\omega) = e^{\omega + N} \sqrt[N]{\pi}$ e $I_{\omega}(u) = 0$. Mais especificamente, u satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx + \omega \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \, \text{Log} \, |u|^2 \, dx. \tag{2.20}$$

Observemos que o fato de $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = e^{\omega + N} \sqrt[N]{\pi}$, implica que u satisfaz a igualdade na desigualdade de Sobolev logarítmica (2.10) com $a = \sqrt{\pi}$. De fato, se este não for o caso, então de (2.20) e (2.10) temos facilmente que $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 > e^{\omega + N} \sqrt[N]{\pi}$, que é impossível. Portanto, u satisfaz a igualdade em (2.10) com $a = \sqrt{\pi}$, e pelo Lema 2.4 isto só acontece quando

$$u(x) = r e^{i\theta_0} e^{-\frac{1}{2}|x-y|^2}, \tag{2.21}$$

para algum r > 0, $\theta_0 \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^N$. Novamente, usando que $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = e^{\omega + N} \sqrt[N]{\pi}$ nós encontramos $r^2 = e^{\omega + N}$ e assim $u(x) = e^{i\theta_0} \phi_{\omega}(x - y)$. Em conclusão, $\mathcal{N}_{\omega} \subseteq \{e^{i\theta}\phi_{\omega}(\cdot - y); \theta \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^N\}$. Isto termina a prova.

Observação 2.4 Uma prova alternativa e indireta da Proposição 2.1 pode ser dada. Em primeiro lugar, notemos que $\varphi \in \mathcal{N}_{\omega}$ satisfaz

$$S_{\omega}(\varphi) = \inf \left\{ S_{\omega}(u) : u \in W(\mathbb{R}^N), \ \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = 2d(\omega) \right\}. \tag{2.22}$$

De fato, seja

$$J_{\omega} := \inf \left\{ S_{\omega}(u) : u \in W(\mathbb{R}^{N}), \|u\|_{L^{2}(\mathbb{R}^{N})}^{2} = 2d(\omega) \right\}.$$
 (2.23)

É claro que $J_{\omega} \leq S_{\omega}(\varphi)$, logo, só precisamos mostrar que $S_{\omega}(\varphi) \leq J_{\omega}$. Seja $u \in W(\mathbb{R}^N)$ tal que $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = 2d(\omega)$. Do Lema 2.5 temos que $I_{\omega}(u) \geq 0$ e portanto $S_{\omega}(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = d(\omega) = S_{\omega}(\varphi)$, assim $S_{\omega}(\varphi) \leq J_{\omega}$. Isto mostra a igualdade (2.22). Por outro lado, o problema variacional (2.23) foi estudado em [14, 22, 23]. Em particular, se $S_{\omega}(\varphi) = J_{\omega}$ em [22, Remark II.3] foi mostrado que existem $\theta_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $\varphi = e^{i\theta_0} \phi_{\omega}(\cdot - y_0)$. Portanto, da igualdade (2.22) segue-se diretamente que $\mathcal{N}_{\omega} = \left\{ e^{i\theta} \phi_{\omega}(\cdot - y); \theta \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^N \right\}$.

Observação 2.5 Da caracterização variacional dos ground states ϕ_{ω} dada na Observação 2.4, é claro que

$$E(\phi_{\omega}) = \inf \left\{ E(u) : u \in W(\mathbb{R}^N), \ \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = \|\phi_{\omega}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right\}.$$
 (2.24)

De fato, seja $u \in W(\mathbb{R}^N)$ tal que $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = \|\phi_\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2$. Então, de (2.22), obtemos que $S_\omega(\phi_\omega) \leq S_\omega(u)$. Assim, dado que $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = \|\phi_\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2$, concluímos

que $E(\phi_{\omega}) \leq E(u)$. Isto implica (2.24).

Notemos que como a energia E e a carga Q são quantidades conservadas pelo fluxo de (2.1), teríamos, como é estândar na literatura (ver [22]), que o conjunto de mínimos associados com (2.24) é orbitalmente estável. Mas, pela peculiaridade do espaço $W(\mathbb{R}^N)$ um pouco mais de trabalho precisa ser feito para justificar isto. O resultado básico que faz possível esta conclusão é dado na Proposição 2.2 abaixo.

2.3 Estabilidade dos ground states

Esta seção é dedicada a mostrar que os ground states são orbitalmente estáveis no espaço $W(\mathbb{R}^N)$ para $N \geq 1$. Daremos uma demonstração desta afirmação via a caracterização variacional dada no Teorema 2.2 (ver Observação 2.5).

Definição 2.2 Seja φ solução de (2.8). Dizemos que a standing wave $u(x,t) = e^{i\omega t}\varphi(x)$ é orbitalmente estável em $W(\mathbb{R}^N)$, se para todo $\epsilon > 0$ existe $\eta > 0$ com a seguinte propriedade: se $u_0 \in W(\mathbb{R}^N)$ e satisfaz $||u_0 - \varphi||_{W(\mathbb{R}^N)} < \eta$, então a solução u(t) de (2.1) com $u(0) = u_0$ satisfaz

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \inf_{\theta \in \mathbb{R}} \inf_{y \in \mathbb{R}^N} \left\| u(t) - e^{i\theta} \varphi(\cdot - y) \right\|_{W(\mathbb{R}^N)} < \epsilon.$$

No caso contrário, a standing wave $u(x,t) = e^{i\omega t}\varphi(x)$ se diz orbitalmente instável em $W(\mathbb{R}^N)$.

Com respeito à estabilidade dos ground states temos o seguinte teorema.

Teorema 2.3 Seja $\omega \in \mathbb{R}$. A standing wave $e^{i\omega t}\phi_{\omega}(x)$ é orbitalmente estável em $W(\mathbb{R}^N)$, para todo $N \geq 1$.

Este resultado é bem conhecido (ver, por exemplo, [22]); no entanto, estabeleceremos ele com o objetivo de deixar a tese auto-contida, pois nosso método de demostração será usado nos Capítulos 3 e 4. Antes de fazer a prova do Teorema 2.3 precisamos da seguinte proposição.

Proposição 2.2 Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq W(\mathbb{R}^N)$ uma sequência minimizante do problema variacional (2.9), então existem $\theta_0\in\mathbb{R}, y_0\in\mathbb{R}^N$ e uma sequência $(y_n)\subseteq\mathbb{R}^N$ tal que, passando a uma subsequência, se necessário,

$$\|u_n - e^{i\theta_0}\phi_{\omega}(\cdot - (y_0 - y_n))\|_{W(\mathbb{R}^N)} \to 0$$
 quando $n \to \infty$.

Demonstração: Pelo provado no Teorema 2.2 existe $\varphi \in \mathcal{N}_{\omega}$ e uma sequência $(y_n) \subseteq \mathbb{R}^N$ tal que $u_n(\cdot - y_n)$ converge fraco a φ em $W(\mathbb{R}^N)$. Seja $v_n := u_n(\cdot - y_n)$.

Temos que $\{v_n\}$ é uma sequência minimizante do problema variacional (2.9) e

$$d(\omega) \le S_{\omega}(\varphi) \le \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L^{2}(\mathbb{R}^{N})} \le \frac{1}{2} \liminf_{n} \|v_{n}\|_{L^{2}(\mathbb{R}^{N})} = d(\omega).$$

Assim, $||v_n||_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to ||\varphi||_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ e como $v_n \to \varphi$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$ concluímos que $v_n \to \varphi$ forte em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Em adição, da desigualdade (2.4) e o fato que a sequência $\{v_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ obtemos, quando $n \to \infty$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} B(|v_n|) dx \to \int_{\mathbb{R}^N} B(|\varphi|) dx. \tag{2.25}$$

Por outro lado, o fato que $v_n \to \varphi$ forte em $L^2(\mathbb{R}^N)$, junto com $S_{\omega}(v_n) \to S_{\omega}(\varphi)$ e (2.25) implicam, quando $n \to \infty$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} A(|v_n|) dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} A(|\varphi|) dx. \tag{2.26}$$

Agora, utilizando que a $L^2(\mathbb{R}^N)$ -norma é semicontínua inferiormente e o Lema de Fatou obtemos respectivamente

$$\int_{\mathbb{R}^{N}} |\nabla \varphi|^{2} dx \leq \liminf_{n} \int_{\mathbb{R}^{N}} |\nabla v_{n}|^{2} dx \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^{N}} A(|\varphi|) dx \leq \liminf_{n} \int_{\mathbb{R}^{N}} A(|v_{n}|) dx. \tag{2.27}$$

Logo, de (2.26) e (2.27) concluímos (ver [30, Lemma 12, chapter V]) que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^2 dx, \quad \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} A(|v_n|) dx = \int_{\mathbb{R}^N} A(|\varphi|) dx.$$
(2.28)

A primeira igualdade em (2.28), junto com o fato que $v_n \rightharpoonup \varphi$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ implicam que $v_n \to \varphi$ forte em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Em adição, da segunda igualdade em (2.28) e o Lema 2.1 implicam que $v_n \to \varphi$ forte em $L^A(\mathbb{R}^N)$, e portanto temos que $v_n \to \varphi$ forte em $W(\mathbb{R}^N)$. Por ultimo, devido à Proposição 2.1 existem $\theta_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $\varphi = e^{i\theta_0}\phi_\omega(\cdot - y_0)$, e como $v_n = u_n(\cdot - y_n)$, então

$$\|u_n - e^{i\theta_0}\phi_{\omega}(\cdot - (y_0 - y_n))\|_{W(\mathbb{R}^N)} \to 0$$
 quando $n \to \infty$.

Isto termina a prova.

Demonstração do Teorema 2.3: O resultado será demonstrado por contradição. Suponha que existem $\epsilon > 0$ e duas sequências $\{u_{n,0}\} \subseteq W(\mathbb{R}^N)$ e $\{t_n\} \subseteq \mathbb{R}$

tal que

$$||u_{n,0} - \phi_{\omega}||_{W(\mathbb{R}^N)} \to 0$$
 quando $n \to \infty$, (2.29)

$$\inf_{\theta \in \mathbb{R}} \inf_{y \in \mathbb{R}^N} \| u(t_n) - e^{i\theta} \varphi(\cdot - y) \|_{W(\mathbb{R}^N)} \ge \epsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$
 (2.30)

onde u_n é a solução de (2.1) com condição inicial $u_{n,0}$. Seja $v_n(x) := u_n(t_n, x)$. Devido à conservação da carga e a energia, quando $n \to \infty$

$$\|v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = \|u_n(t_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = \|u_{n,0}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \to \|\phi_\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = 2d(\omega), \tag{2.31}$$

$$E(v_n) = E(u_n(t_n)) = E(u_{n,0}) \to E(\phi_\omega).$$
 (2.32)

Em particular, como $S_{\omega}(v_n) = E(v_n) + (\omega + 1)Q(v_n)$, temos

$$S_{\omega}(v_n) \to S_{\omega}(\phi_{\omega}) = d(\omega)$$
 quando $n \to \infty$. (2.33)

Adicionalmente, (2.31) e (2.33) implicam que $I_{\omega}(v_n) = 2S_{\omega}(v_n) - ||v_n||_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \to 0$ quando $n \to \infty$. Seja $w_n(x) := \lambda_n v_n(x)$, onde

$$\lambda_n = e^{\frac{1}{2} \left(\frac{I_{\omega}(v_n)}{\|v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2} \right)}. \tag{2.34}$$

Observemos que $\lambda_n \to 1$ quando $n \to \infty$. Um cálculo simples mostra que $I_{\omega}(w_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e devido ao fato que a sequência $\{v_n\}$ é limitada em $W(\mathbb{R}^N)$ obtemos que

$$||v_n - w_n||_{W(\mathbb{R}^N)} \to 0 \text{ e } S_{\omega}(w_n) \to S_{\omega}(\phi_{\omega}) = d(\omega) \text{ quando } n \to \infty.$$
 (2.35)

Portanto, $\{w_n\} \subseteq W(\mathbb{R}^N)$ é uma sequência minimizante do problema variacional (2.9). Logo, pela Proposição 2.2 existem $\theta_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{R}^N$ e uma sequência $(y_n) \subseteq \mathbb{R}^N$ tal que, passando a uma subsequência, se necessário,

$$\|w_n - e^{i\theta_0}\phi_\omega(\cdot - (y_0 - y_n))\|_{W(\mathbb{R}^N)} \to 0$$
 quando $n \to \infty$. (2.36)

Da desigualdade triangular é claro que

$$\|u_n(t_n) - e^{i\theta_0} \phi_\omega(\cdot - (y_0 - y_n))\|_{W(\mathbb{R}^N)} \le \|v_n - w_n\|_{W(\mathbb{R}^N)}$$

$$+ \|w_n - e^{i\theta_0} \phi_\omega(\cdot - (y_0 - y_n))\|_{W(\mathbb{R}^N)}.$$

Assim, de (2.35) e (2.36) concluímos que

$$||u_n(t_n) - e^{i\theta_0}\phi_{\omega}(\cdot - (y_0 - y_n))||_{W(\mathbb{R}^N)} \to 0$$
 quando $n \to \infty$,

que é uma contradição com (2.30). Isto termina a prova. □

Observação 2.6 Seja $\kappa > 0$. Consideremos a equação de Schrödinger logarítmica

$$i\partial_t u + \Delta u + \kappa u \operatorname{Log} |u|^2 = 0, \tag{2.37}$$

onde u=u(x,t) é uma função a valores complexos de $t\in\mathbb{R}$ e $x\in\mathbb{R}^N$ para $N\geq 1$. Seguindo as mesmas ideias desenvolvidas neste capítulo é possível mostrar que o problema de Cauchy da equação (2.37) é globalmente bem posto em $W(\mathbb{R}^N)$. Em adição, os ground states são explicitamente dados pela fórmula

$$\phi_{\omega,\kappa}(x) = e^{\frac{\omega + N\kappa}{2\kappa}} e^{-\frac{\kappa}{2}|x|^2}.$$

Uma prova semelhante à desenvolvida no Teorema 2.3 mostra que a standing wave $u(x,t)=e^{i\omega t}\phi_{\omega,k}(x)$ é orbitalmente estável em $W(\mathbb{R}^N)$.

EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER LOGARÍTMICA COM UM δ POTENCIAL

Este capítulo é dedicado à análise da existência e estabilidade dos ground states para a equação de Schrödinger logarítmica com δ potencial

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u + \gamma \delta(x)u + u \operatorname{Log} |u|^2 = 0, \tag{3.1}$$

onde u=u(x,t) é uma função a valores complexos de $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. O modelo (3.1) descreve a dinâmica de uma onda não-linear que se propaga através de um meio com uma impureza localizada em um ponto (ver [1, 18]). O capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 3.1 damos uma definição precisa do hamiltoniano $-\partial_x^2 - \gamma \delta(x)$ e indicamos algumas de suas propriedades espectrais. Na seção 3.2 mostramos que o problema de Cauchy para a equação (3.1) é globalmente bem colocado no espaço de energia $W(\mathbb{R})$, com a energia e a carga quantidades conservadas. Na seção 3.3 provamos que, para $\gamma > 0$ (potencial atrativo) existe um único ground state o qual é explicitamente identificado. No caso $\gamma < 0$ (potencial repulsivo), mostramos que não existem ground states em $W(\mathbb{R})$; no entanto, existe uma única solução positiva (sob rotações) do problema estacionário. Na seção 3.4 provamos que, no caso do potencial atrativo, o ground state é orbitalmente estável no espaço $W(\mathbb{R})$.

3.1 O potencial delta de Dirac

Nesta seção vamos dar uma definição precisa do hamiltoniano $-\partial_x^2 - \gamma \delta(x)$, o qual descreve a dinâmica de uma partícula sob interação de uma inomogeneidade na origem. Formalmente, o potencial

$$V(x) = -\gamma \delta(x)$$
, onde $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

é conhecido como delta potencial (na literatura, também chamado Fermi pseudopotencial). O parâmetro γ é o comprimento da interação; quando é positivo o potencial é chamado atrativo, no outro caso repulsivo. Este potencial tem de-

sempenhado um papel importante no desenvolvimento da mecânica quântica. Nas aplicações experimentais, o potencial é aplicado para simular as condições físicas de uma partícula livre para mover-se entre duas regiões do espaço que são separadas por uma barreira de comprimento arbitrariamente longo. Uma análise detalhado deste potencial e suas aplicações, por exemplo no estudo das forças nucleares, pode ser encontrado em [11].

Para cada $\gamma \in \mathbb{R}$ o operador $-\partial_x^2 - \gamma \delta(x)$ irá definir uma perturbação auto-adjunta do Laplaciano em dimensão um, onde γ será o comprimento da interação. Para fazer uma descrição precisa deste hamiltoniano nós requeremos o uso da teoria de extensões auto-adjuntas de von Neumann, aplicando essa teoria, a interação singular δ será definida a partir de condições de contorno apropriadas.

Definição 3.1 Seja \mathcal{T} um operador simétrico com domínio denso em um espaço de Hilbert. Os subespaços lineares e fechados $K_{\pm} := \operatorname{Ker}(\mathcal{T}^* \pm iI)$, onde $\operatorname{Ker}(\mathcal{T}^* \pm iI)$ denota o núcleo do operador $\mathcal{T}^* \pm iI$, são os subespaços de deficiência associados com \mathcal{T} . As dimensões destes subespaços são denotados como

$$n_{+}(\mathcal{T}) = \dim \operatorname{Ker}(\mathcal{T}^* + iI), \quad n_{-}(\mathcal{T}) = \dim \operatorname{Ker}(\mathcal{T}^* - iI),$$

e conhecidos como os índices de deficiência.

Consideremos o operador

$$\mathcal{T} = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \text{dom}(\mathcal{T}) = \{ u \in H^2(\mathbb{R}) : u(0) = 0 \}.$$
 (3.2)

Não é difícil ver que \mathcal{T} é simétrico, fechado e tem domínio denso em $L^2(\mathbb{R})$. Em adição, o operador adjunto de \mathcal{T} é dado por (ver, por exemplo, [7, Chapter 1.3])

$$\mathcal{T}^* = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \operatorname{dom}(\mathcal{T}^*) = H^1(\mathbb{R}) \cap H^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Em seguida vamos encontrar os índices de deficiência do operador \mathcal{T} , que nos permitirão caracterizar todas suas extensões auto-adjuntas. Em primeiro lugar, observemos que se uma função f está no espaço de deficiência K_{\pm} , então ela pertence a $C(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ e tem que satisfazer a equação diferencial $-f'' = \pm i f$. Um cálculo simples mostra que as funções

$$\psi_{+}(x) := \frac{1}{\sqrt[4]{2}} e^{-\frac{(1+i)|x|}{\sqrt{2}}} \qquad e \qquad \psi_{-}(x) := \frac{1}{\sqrt[4]{2}} e^{-\frac{(1-i)|x|}{\sqrt{2}}}, \tag{3.3}$$

são os elementos geradores dos espaços de deficiência K_+ e K_- respectivamente, e portanto os índices de deficiência são dados por $n_+(\mathcal{T}) = 1$ e $n_-(\mathcal{T}) = 1$. Aplicando

o [44, Theorem 13.10] obtemos que todas as extensões auto-adjuntas de \mathcal{T} estão dadas pela família uniparamétrica

$$dom (\mathcal{T}_{\theta}) = \left\{ g + c \psi_{+} + i c e^{i\theta} \psi_{-}, \quad g \in dom (\mathcal{T}) \right\}, \quad c \in \mathbb{C},
\mathcal{T}_{\theta} \left(g + c \psi_{+} + i c e^{i\theta} \psi_{-} \right) = \mathcal{T} g + i c \psi_{+} - i c e^{i\theta} \psi_{-}, \quad \theta \in [-\pi, \pi).$$
(3.4)

No seguinte teorema descrevemos todas as extensões auto-adjuntas do operador \mathcal{T} a partir de um parâmetro real. Em particular, as extensões serão identificadas pelas suas condições de contorno no ponto 0.

Teorema 3.1 Todas as extensões auto-adjuntas $-\Delta_{\gamma}$ do operador \mathcal{T} , onde $-\infty \leq \gamma < \infty$, são dadas por

$$\begin{cases} -\Delta_{\gamma} = -\frac{d^2}{dx^2} \\ \operatorname{dom}(-\Delta_{\gamma}) = \{ f \in H^1(\mathbb{R}) \cap H^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}) : f'(0+) - f'(0-) = -\gamma f(0) \} . \end{cases}$$

No caso $\gamma = 0$ obtemos o operador de Laplace $-\Delta$ em seu domínio natural $H^2(\mathbb{R})$. No caso $\gamma = -\infty$ obtemos a condição de Dirichlet no ponto 0, isto é

$$-\Delta_{-\infty} = (-\Delta_{D-}) \oplus (-\Delta_{D+}), \qquad \operatorname{dom}(-\Delta_{-\infty}) = H_0^2(\mathbb{R}_-) \oplus H_0^2(\mathbb{R}_+).$$

onde $-\Delta_{D-}$ e $-\Delta_{D-}$ denotam o laplaciano de Dirichlet sobre $(-\infty,0)$ e $(0,\infty)$ respectivamente.

Demonstração: Seja $\theta \in [-\pi, \pi)$. Em primeiro lugar, observemos que de (3.3) e (3.4) obtemos a inclusão dom $(\mathcal{T}_{\theta}) \subseteq H^1(\mathbb{R}) \cap H^2(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Por outro lado, Se $f \in \text{dom}(\mathcal{T}_{\theta})$ existem $g \in \text{dom}(\mathcal{T})$ e $c \in \mathbb{C}$ tal que $f = g + c \psi_+ + i c e^{i\theta} \psi_-$, e um cálculo simples mostra que a função f satisfaz a condição de contorno $f'(0+) - f'(0-) = -\gamma(\theta) f(0)$, onde

$$\gamma(\theta) = \sqrt{2} \left(1 + \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right).$$

Observemos que a função $\theta \to \gamma(\theta)$ é uma bijecção de $(-\pi, \pi)$ sobre \mathbb{R} . Em conclusão, se $f \in \text{dom}(\mathcal{T}_{\theta})$, então $f \in H^1(\mathbb{R}) \cap H^2(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ e satisfaz as condiciones de fronteira $f'(0+) - f'(0-) = -\gamma(\theta) f(0)$, isto é, $\mathcal{T}_{\theta} \subset -\Delta_{\gamma(\theta)}$. Da simetria do operador $\Delta_{\gamma(\theta)}$ obtemos que $\mathcal{T}_{\theta} = -\Delta_{\gamma(\theta)}$. Isto termina a prova.

Observação 3.1 Em [37, Lemma 10], aplicando o Teorema de Representação de formas, é mostrado que a forma associada com o operador $-\Delta_{\gamma}$ é dada por

$$\mathfrak{F}_{\gamma}\left[u,v\right] := \Re \int_{\mathbb{R}} u'(x)\overline{v'(x)}dx - \gamma \Re \left[u(0)\overline{v(0)}\right],\tag{3.5}$$

onde $u, v \in \text{dom}(\mathfrak{F}_{\gamma}) := H^1(\mathbb{R})$, o domínio da forma. A forma definida acima é limitada inferiormente e fechada. Em adição, o operador $-\Delta_{\gamma}$ pode ser estendido como um operador linear e continuo $u \to -\Delta_{\gamma} u$ de $H^1(\mathbb{R})$ sobre $H^{-1}(\mathbb{R})$. De fato, esta ação é definida por

$$\langle -\Delta_{\gamma} u, v \rangle := \mathfrak{F}_{\gamma} [u, v] \text{ para cada } u, v \in H^1(\mathbb{R}).$$

Aplicando a desigualdade de Hölder e a inclusão contínua $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow C(\mathbb{R})$ obtemos que $\|-\Delta_{\gamma}u\|_{H^{-1}(\mathbb{R})} \leq (1+|\gamma|) \|u\|_{H^1(\mathbb{R})}$.

No seguinte teorema descrevemos as propriedades espectrais mais relevantes do operador $-\Delta_{\gamma}$ (ver, por exemplo, [7, Chapter 1.3]).

Teorema 3.2 $Seja - \infty \leq \gamma < \infty$. O espectro essencial do operador $-\Delta_{\gamma}$ é o eixo real não negativo, $\sigma_{ess}\left(-\Delta_{\gamma}\right) = \left[0,\infty\right)$. $Para \ \gamma > 0$ o operador $-\Delta_{\gamma}$ tem exatamente um autovalor negativo e $\sigma_{p}\left(\Delta_{\gamma}\right) = \left\{-\frac{\gamma^{2}}{4}\right\}$. $Se \ \gamma \leq 0$ ou $\gamma = -\infty$ o operador $-\Delta_{\gamma}$ não tem autovalores, $\sigma_{p}\left(-\Delta_{\gamma}\right) = \emptyset$.

Demonstração: Lembremos que o operador \mathcal{T} , definido em (3.2), é simétrico, fechado e tem índices de deficiência dados por $n_+(\mathcal{T}) = 1$ e $n_-(\mathcal{T}) = 1$. Em primeiro lugar, observamos que de [49, Theorem 8.18] todas as extensões autoadjuntas do operador \mathcal{T} tem o mesmo espectro essencial, logo, do Teorema 3.1 obtemos

$$\sigma_{ess}\left(-\Delta_{\gamma}\right) = \sigma_{ess}\left(-\Delta\right) = [0, \infty).$$

Por outro lado, da Observação 3.1 é claro que o operador $-\Delta_{\gamma}$ é não negativo para $\gamma < 0$, logo, $\sigma\left(-\Delta_{\gamma}\right) \subseteq [0,\infty)$; e assim $\sigma\left(-\Delta_{\gamma}\right) = [0,\infty)$. Os casos $\gamma = 0$ e $\gamma = -\infty$ são tratados de forma similar. Em particular, para $\gamma \leq 0$ ou $\gamma = -\infty$ o operador $-\Delta_{\gamma}$ não tem autovalores. Em seguida, vamos mostrar que para $\gamma > 0$ o operador $-\Delta_{\gamma}$ tem exatamente um autovalor negativo. Seja $\gamma > 0$ e consideremos a função simétrica

$$\phi_{\gamma}(x) := \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\gamma}{2}|x|}, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}.$$

É fácil mostrar que $\mathfrak{F}_{\gamma}[\phi_{\gamma}(x)] < 0$, logo, o operador $-\Delta_{\gamma}$ tem pelo menos um autovalor negativo. Por outro lado, do fato que \mathcal{T} é não negativo e tem índices de deficiência dados por $n_{+}(\mathcal{T}) = 1$ e $n_{-}(\mathcal{T}) = 1$, do Lema A.3 obtemos que $-\Delta_{\gamma}$ tem, no máximo, um autovalor negativo. Do acima exposto concluímos que $-\Delta_{\gamma}$ tem exatamente um autovalor negativo simples. Um cálculo direto mostra que $\phi_{\gamma} \in \text{dom}(-\Delta_{\gamma})$ e $-\Delta_{\gamma}\phi_{\gamma} = -\gamma^{2}/4\,\phi_{\gamma}$. Isto termina a prova.

Observemos que se $f \in \text{dom}(\mathfrak{F}_{\gamma}) = H^1(\mathbb{R})$, de (3.5) obtemos

$$\mathfrak{F}_{\gamma}[f] = \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx - \gamma |f(0)|^2,$$

o que justifica o nome do δ-interação para o operador $-\Delta_{\gamma}$. Formalmente, o operador auto-adjunto $-\Delta_{\gamma}$ é denotado por $-\partial_{x}^{2} - \gamma \delta(x)$. Nós utilizamos esta notação em todo o trabalho.

3.2 O Problema de Cauchy

Nesta seção vamos aplicar um método de compacidade, estabelecido por Cazenave [19, 20], para estudar o problema de Cauchy da equação (3.1). No caso $\gamma=0$, em [21, 30] foi mostrada a existência e unicidade das soluções para a equação (3.1) aplicando a teoria de operadores monótonos maximais. Posteriormente, em [19, 20] foi dada uma nova prova aplicando um método de compacidade, juntamente com a teoria de espaços de Orlicz. No caso $\gamma \neq 0$, nós aplicaremos o método de compacidade, pois tem algumas vantagens, por exemplo nos permitirá mostrar que o funcional da energia associado à equação (3.1) é de classe C^1 .

Formalmente, a equação (3.1) tem duas quantidades conservadas. A primeira delas é a energia: se u é solução de (3.1) com $u(0) = u_0$ então

$$E(u(t)) := \frac{1}{2} \mathfrak{F}_{\gamma} [u(t)] - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |u(x,t)|^2 \operatorname{Log} |u(x,t)|^2 dx = E(u_0),$$

a qual pode ser obtida multiplicando (3.1) por $\partial_t \overline{u}$, integrando sobre \mathbb{R} e tomando a parte real. A segunda quantidade conservada é carga

$$Q(u(t)) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |u(x,t)|^2 dx = Q(u_0).$$

Para aproveitar essas quantidades conservadas, é conveniente definir um espaço onde elas sejam bem definidas. Usando o fato que dom $(\mathfrak{F}_{\gamma}) = H^1(\mathbb{R})$, segue-se da seção 2.1 que o espaço natural para estudar a dinâmica da equação (3.1) é $W(\mathbb{R}) = H^1(\mathbb{R}) \cap L^A(\mathbb{R})$.

Lembramos da seção 2.1 que $W(\mathbb{R}) = \left\{u \in H^1(\mathbb{R}) : |u|^2 \operatorname{Log}|u|^2 \in L^1(\mathbb{R})\right\}$ é um espaço de Banach equipado com norma usual $\|u\|_{W(\mathbb{R})} = \|u\|_{L^4(\mathbb{R})} + \|u\|_{H^1(\mathbb{R})}$. Em adição, as inclusões $W(\mathbb{R}) \hookrightarrow H^1(\mathbb{R})$ e $W(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}) \hookrightarrow W'(\mathbb{R})$ são contínuas, onde $W'(\mathbb{R})$ denota o espaço dual de $W(\mathbb{R})$ (ver Observação 2.1).

Em seguida, enunciaremos o teorema principal desta secção.

Teorema 3.3 Para toda $u_0 \in W(\mathbb{R}) = \{u \in H^1(\mathbb{R}) : |u|^2 \operatorname{Log} |u|^2 \in L^1(\mathbb{R})\}$ existe uma única solução global $u \in C(\mathbb{R}, W(\mathbb{R})) \cap C^1(\mathbb{R}, W'(\mathbb{R}))$ de (3.1) com $u(0) = u_0$ tal que $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t)\|_{W(\mathbb{R})} < \infty$. Em adição, a energia E e a carga Q são conservadas:

$$E(u(t)) = E(u_0), \quad Q(u(t)) = Q(u_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

A prova do Teorema 3.3 segue de um argumento de compacidade semelhante ao desenvolvido em [20, Teorema 9.3.4]. A ideia em [20] é aproximar a não-linearidade logarítmica por uma não-linearidade do tipo polinomial, e assim construir uma sequência de soluções globais e limitadas em $C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}))$ para o sistema regularizado e então provar a convergência de uma subsequência a uma função em $W(\mathbb{R})$, que será a solução do problema (3.1). Antes de fazer a demonstração do Teorema 3.3 é conveniente introduzir algumas notações e demonstrar alguns lemas. Seja $F(s) := s^2 \operatorname{Log} s^2$, $s \in [0, +\infty)$. Consideremos as funções A e B definidas por

$$A(s) := \begin{cases} -s^2 \operatorname{Log}(s^2), & \text{se } 0 \le s \le e^{-3}; \\ 3s^2 + 4e^{-3}s - e^{-6}, & \text{se } s \ge e^{-3}; \end{cases} \qquad B(s) := F(s) + A(s).$$

Da seção 2.1 é conhecido que A e B são funções convexas e não negativas A, $B \in C^1[0,+\infty) \cap C^2(0,+\infty)$. Para o que vem a seguir, é conveniente decompor o termo não-linear da equação (3.1) como soma de duas funções. De fato, se definimos as funções

$$a(s) := \frac{A(s)}{s}$$
 e $B(s) := \frac{B(s)}{s}$, para $s \in [0, \infty)$,

então estendendo a e b sobre o plano complexo \mathbb{C} ,

$$a(z) := \begin{cases} \frac{z}{|z|} a(|z|), & \text{se } z \neq 0; \\ 0, & \text{se } z = 0; \end{cases} \quad \text{e} \quad b(z) := \begin{cases} \frac{z}{|z|} b(|z|), & \text{se } z \neq 0; \\ 0, & \text{se } z = 0; \end{cases}$$

obtemos que $u \operatorname{Log} |u|^2 = b(u) - a(u)$, para toda $u \in W(\mathbb{R})$.

O seguinte lema estuda o comportamento da função $a(\cdot)$ sobre o espaço $W(\mathbb{R})$; a prova pode ser encontrada em [19, Lemma 2.5].

Lema 3.1 O operador $u \to a(u)$ é uma aplicação contínua de $W(\mathbb{R}) \to W'(\mathbb{R})$. Em adição, a imagem sob a de um conjunto limitado em $W(\mathbb{R})$ é limitado em $W'(\mathbb{R})$.

Uma importante consequência do Lema 3.1 e o seguinte resultado.

Lema 3.2 O operador $u \to (\partial_x^2 + \gamma \delta(x)) u + u \operatorname{Log} |u|^2$ é uma aplicação contínua

 $de\ W(\mathbb{R})\ sobre\ W'(\mathbb{R})$. Em adição, a imagem de um conjunto limitado em $W(\mathbb{R})$ é limitado em $W'(\mathbb{R})$.

Demonstração: Em primeiro lugar, da Observação 3.1 temos que $\partial_x^2 + \gamma \delta(x)$: $H^1(\mathbb{R}) \to H^{-1}(\mathbb{R})$ é uma aplicação contínua, e portanto $u \to \partial_x^2 u + \gamma \delta(x) u$ é uma aplicação contínua de $W(\mathbb{R})$ sobre $W'(\mathbb{R})$. De fato, como $H^{-1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow W'(\mathbb{R})$ continuamente, da definição da $W'(\mathbb{R})$ -norma e a Observação 3.1 obtemos

$$\|\partial_x^2 u + \gamma \delta(x) u\|_{W'(\mathbb{R})} \le \|\partial_x^2 u + \gamma \delta(x) u\|_{H^{-1}(\mathbb{R})} \le (1 + |\gamma|) \|u\|_{W(\mathbb{R})},$$

o que implica a continuidade do operador. Por outro lado, dado $\epsilon>0$ existe C>0 tal que

$$|b(z) - b(z_0)| \le C(|z|^{\epsilon} + |z_0|^{\epsilon}) |z - z_0|, \quad z, \ z_0 \in \mathbb{C}.$$

Logo, $u \to b(u)$ é uma aplicação contínua de $H^1(\mathbb{R})$ sobre $L^2(\mathbb{R})$. Em particular, a aplicação $u \to b(u)$ é contínua de $W(\mathbb{R})$ sobre $W'(\mathbb{R})$. Assim, aplicando o Lema 3.1 concluímos que $u \to u \operatorname{Log} |u|^2$ é uma aplicação contínua de $W(\mathbb{R})$ sobre $W'(\mathbb{R})$. Isto termina a prova.

Como uma consequência do Lema 3.2 temos a seguinte proposição.

Proposição 3.1 O funcional da energia E é de classe C^1 em $W(\mathbb{R})$. Em adição, sua derivada de Fréchet é dada por $E'(u) = (-\partial_x^2 - \gamma \delta(x)) u - u \operatorname{Log} |u|^2 - u$.

Demonstração: Em primeiro lugar, vamos mostrar que o funcional da energia é contínuo. Observemos que

$$E(u) = \frac{1}{2} \mathfrak{F}_{\gamma} \left[u \right] + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{P}} A(|u|) dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{P}} B(|u|) dx.$$

Suponhamos que $u_n \to u$ em $W(\mathbb{R})$ quando $n \to \infty$. Em particular, temos que $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R})$ e portanto $\mathfrak{F}_{\gamma}[u_n] \to \mathfrak{F}_{\gamma}[u]$. Por outro lado, do fato que $\{u_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R})$ e da desigualdade (2.4) obtemos que $B(|u_n|) \to B(|u|)$ em $L^1(\mathbb{R})$, adicionalmente, do Lema 2.1 temos que $A(|u_n|) \to A(|u|)$ em $L^1(\mathbb{R})$. Em conclusão, $E(u_n) \to E(u)$ quando $n \to \infty$, logo $E \in C(W(\mathbb{R}), \mathbb{R})$. Agora, um cálculo simples (ver [19, proposição 2.7]) mostra para $u, v \in W(\mathbb{R})$,

$$\lim_{t \to 0} \frac{E(u+tv) - E(u)}{t} = \left\langle -\partial_x^2 u - \gamma \delta(x) u - u \operatorname{Log} |u|^2 - u, v \right\rangle_{W(\mathbb{R}) - W'(\mathbb{R})}.$$

Portanto, E é Gâteaux diferenciável em $W(\mathbb{R})$. Do Lema 3.2 temos que a aplicação $u \to (-\partial_x^2 - \gamma \delta(x)) u - u \operatorname{Log} |u|^2 - u$ é contínua de $W(\mathbb{R})$ sobre $W'(\mathbb{R})$, isto é, $E \in C^1(W(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ com $E'(u) = -(\partial_x^2 - \gamma \delta(x)) u - u \operatorname{Log} |u|^2 - u$.

Demonstração do Teorema 3.3: Seguimos os mesmos passos do Teorema 9.3.4

em [19].

Passo 1: Soluções aproximadas. Sejam

$$a_m(z) := \begin{cases} a(z), & \text{se } |z| \ge \frac{1}{m}; \\ m z a(\frac{1}{m}), & \text{se } |z| \le \frac{1}{m}; \end{cases} \quad \text{e} \quad b_m(z) := \begin{cases} b(z), & \text{se } |z| \le m; \\ \frac{z}{m} b(m), & \text{se } |z| \ge m; \end{cases}$$

Definimos a função

$$g_m(u) = b_m(u) - a_m(u) \text{ para } u \in H^1(\mathbb{R}).$$
 (3.6)

É claro que g_m é Lipschitz contínua $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$. Do Teorema 3.7.1 e Colorario 3.3.11 em [20] (ver também [26, Proposição 1]) existe uma única solução $u^m \in C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R})) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{-1}(\mathbb{R}))$ do problema de Cauchy

$$\begin{cases}
i\partial_t u^m + \partial_x^2 u^m + \gamma \delta(x) u^m + g_m(u^m) = 0, \\
u^m(0) = u_0,
\end{cases}$$
(3.7)

com a energia e a carga quantidades conservadas

$$E_m(u^m(t)) = E_m(u_0) \text{ e } \|u^m(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$
 (3.8)

onde

$$E_m(u) = \frac{1}{2} \mathfrak{F}_{\gamma}[u] + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \Phi_m(|u|) dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \Psi_m(|u|) dx,$$

com as funções Φ_m e Ψ_m definidas por

$$\Phi_m(z) := \frac{1}{2} \int_0^{|z|} a_m(s) ds \quad \text{e} \quad \Psi_m(z) := \frac{1}{2} \int_0^{|z|} b_m(s) ds.$$

Notemos que do Colorario 3.5.2 em [20] a solução da equação regularizada (3.7) é global.

PASSO 2: Estimativas das soluções aproximadas u^m . Da Conservação da carga temos que a sequência $\{u^m\}$ é limitada em $L^{\infty}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}))$. Em adição, para $\gamma > 0$ e $\epsilon > 0$ temos que

$$\gamma |u^{m}(0,t)| \leq \gamma \|\partial_{x}u^{m}(t)\|_{L^{2}(\mathbb{R})} \|u^{m}(t)\|_{L^{2}(\mathbb{R})}
\leq \epsilon \|\partial_{x}u^{m}(t)\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} + \left(\frac{\gamma^{2}}{2\epsilon}\right) \|u^{m}(t)\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2}
= \epsilon \|\partial_{x}u^{m}(t)\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} + C,$$
(3.9)

onde, aplicando (3.8), $C = (\gamma^2/2\epsilon) \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$. Agora, aplicando o Teorema da convergência dominada obtemos que $E_m(u_0) \to E(u_0)$ se $m \to \infty$, e assim, de (3.9) e

(3.8) temos que

$$\|u^{m}(t)\|_{H^{1}(\mathbb{R})}^{2} \leq \|\Psi_{m}(u^{m}(t))\|_{L^{1}(\mathbb{R})} + \epsilon \|\partial_{x}u^{m}(t)\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} + C.$$
 (3.10)

Observemos que no caso $\gamma < 0$, uma desigualdade semelhante a (4.11) pode ser obtida. Logo, para $\epsilon > 0$ adequado, concluímos que $\{u^m\}_{m \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^{\infty}(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}))$; portanto, de (3.6) é fácil ver que $\{g_m(u^m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^{\infty}(\mathbb{R}, L^2(-k, k))$. Em particular, $\{g_m(u^m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^{\infty}(\mathbb{R}, H^{-1}(-k, k))$. Assim, de (3.7) segue-se que $\{u^m|_{(-k,k)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ é limitada em $W^{1,\infty}(\mathbb{R}, H^{-1}(-k, k))$.

PASSO 3: Passando o limite. De (3.7) temos para toda $\phi, \psi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} \left\langle i \,\partial_t u^m + \partial_x^2 u^m + \gamma \delta(x) u^m + g_m(u^m), \psi \right\rangle \phi(t) dt = 0. \tag{3.11}$$

Das estimativas das soluções aproximadas no passo 2 e o Lema 9.3.6 em [19], existe $u \in L^{\infty}(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}))$ tal que :

- i) $u|_{(-k,k)} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}, H^{-1}(-k,k))$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
- ii) $u^m(t) \rightharpoonup u(t)$ em $H^1(\mathbb{R})$ quando $m \to \infty$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
- iii) Para todo $t \in \mathbb{R}$ existe uma subsequência m_j tal que $u^{m_j}(x,t) \to u(x,t)$ quando $k \to \infty$ q.t.p $x \in \mathbb{R}$.
- iv) $u^m(x,t) \to u(x,t)$ quando $m \to \infty$ q.t.p $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Em particular, de ii) podemos supor que se $m \to \infty$ então $u^m(0,t) \to u(0,t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Agora, passando o limite em (3.11) obtemos que (ver passo 3 em [19, Teorema 9.3.4])

$$\int_{\mathbb{R}} \left\langle i \, \partial_t u + \partial_x^2 u + \gamma \delta(x) u + u \operatorname{Log} \left| u \right|^2, \psi \right\rangle \phi(t) dt = 0,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Isto é,

$$i \partial_t u + \partial_x^2 u + \gamma \delta(x) u + u \operatorname{Log} |u|^2 = 0 \text{ em } H^{-1}(-k, k), \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Além disso, seguindo o mesmo raciocínio do passo 3 em [19, Teorema 9.3.4], concluímos que existe $u \in L^{\infty}(\mathbb{R}, W(\mathbb{R})) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}, W'(\mathbb{R}))$ solução e global de (3.1), $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t)\|_{W(\mathbb{R})} < \infty \text{ e}$

$$E(u(t)) \le E(u_0), \quad Q(u(t)) = Q(u_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

PASSO 4: Conclusão. Da inclusão contínua $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow C(\mathbb{R})$ e o mesmo argumento do passo 4 em [19, Teorema 9.3.4], obtemos que existe uma única solução

da equação (3.1) com $u \in C(\mathbb{R}, W(\mathbb{R})) \cap C^1(\mathbb{R}, W'(\mathbb{R}))$ tal que

$$E(u(t)) = E(u_0), \quad Q(u(t)) = Q(u_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Isto termina a prova. \square

3.3 Os ground states

Nesta seção vamos estudar os ground states da equação (3.1). No caso do potencial atrativo ($\gamma > 0$), mostraremos que a equação (3.1) tem um único ground state o qual é explicitamente identificado. Para o caso do potencial repulsivo ($\gamma < 0$), mostraremos que não existem ground states em $W(\mathbb{R})$. Adicionalmente, daremos algumas caracterizações variacionais dos ground states que nos ajudarão no estudo da sua estabilidade orbital.

Definição 3.2 Uma standing wave de (3.1) é uma solução da forma $u(x,t) = e^{i\omega t}\varphi(x)$, com $\omega \in \mathbb{R}$ e φ satisfazendo distribucionalmente

$$\begin{cases} (-\partial_x^2 - \gamma \delta(x)) \varphi + \omega \varphi - \varphi \operatorname{Log} |\varphi|^2 = 0, \\ \varphi \in W(\mathbb{R}) \setminus \{0\}. \end{cases}$$
(3.12)

O Lema 3.3 abaixo mostra que todas as soluções de (3.12) estão no domínio do hamiltoniano $-\partial_x^2 - \gamma \delta(x)$. Seguindo as ideias em [20, 25, 26] vamos mostrar que as soluções de (3.12) são únicas exceto por uma rotação. Em primeiro lugar, precisamos do seguinte resultado:

Lema 3.3 Sejam $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\omega \in \mathbb{R}$. Qualquer solução $v \in W(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ de (3.12) satisfaz

- i) $v \in C^j(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap C(\mathbb{R}), j = 1, 2.$
- ii) $-v''(x) + \omega v(x) v(x) \log |v(x)|^2 = 0$ para $x \neq 0$.
- iii) $v'(0+) v'(0-) = -\gamma v(0)$.
- iv) $\lim_{|x|\to\infty} v'(x) = 0$, $\lim_{|x|\to\infty} v(x) = 0$.
- **v)** $|v'(x)|^2 = (\omega + 1) |v(x)|^2 |v(x)|^2 \text{Log} |v(x)|^2 \text{ para } x \neq 0.$

Demonstração: Seja $\xi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Observemos que ξv satisfaz

$$-(\xi v)'' + \omega \xi v = -\xi'' v - 2\xi' v' + \xi v \operatorname{Log} |v|^{2}, \qquad (3.13)$$

no sentido das distribuições. O lado direito de (3.13) está em $L^2(\mathbb{R})$, pois existe M>0 tal que $\sup_{x\in\mathbb{R}}|v(x)\operatorname{Log}|v(x)||^2\leq M$, e portanto (ver [20, Chapter 8]) $\xi v\in H^2(\mathbb{R})$, e assim $v\in H^2_{loc}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$. Em adição, a inclusão de Sobolev implica que $\xi v\in C^1(\mathbb{R})$, isto é, $v\in C^1(\mathbb{R}\setminus\{0\})$. Adicionalmente, da densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ em $L^2(\mathbb{R})$, (3.12) e o fato que $v\in H^1(\mathbb{R})\cap H^2_{loc}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ obtemos a propriedade ii). Em particular, $v\in C^2(\mathbb{R}\setminus\{0\})$. Por outro lado, como $v\in H^1(\mathbb{R})$, temos que $v(x)\to 0$ quando $|x|\to\infty$. Portanto, a propriedade ii) implica que $v''(x)\to 0$ quando $|x|\to\infty$, assim, $v'(x)\to 0$ quando $|x|\to\infty$. Isto mostra iv). Agora, integrando (3.12) desde $-\epsilon$ para ϵ e fazendo $\epsilon\to 0$ obtemos $v'(0+)-v'(0-)=-\gamma v(0)$. Para obter a última propriedade, basta multiplicar ii) por v'(x) e integrar. Isto termina a prova.

Observação 3.2 A existência de soluções para equação elíptica (3.12) no caso $\gamma = 0$ foi estudado em [14, Apêndice D]. Em particular, foi mostrado que a única solução (sob rotações e translações) de (3.12) é $\phi_{\omega}(x) = e^{\frac{\omega+1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

Sobre a existência de soluções para a equação elíptica (3.12), onde $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, temos o seguinte resultado. A prova do lema segue as ideias em [25, Lemma 26].

Lema 3.4 Sejam $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $e \omega \in \mathbb{R}$. Seja $v \in W(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ solução de (3.12). Então existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $v(x) = e^{i\theta}\phi_{\omega,\gamma}(x)$, onde

$$\phi_{\omega,\gamma}(x) = e^{\frac{\omega+1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(|x| + \frac{\gamma}{2})^2}.$$
(3.14)

Demonstração: PASSO 1. As soluções positivas de (3.12) são únicas. Seja $v \in W(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ uma solução positiva de (3.12). Pelo Lema 3.3 v satisfaz i)iv). Seja $f(s) = -\omega s + s \operatorname{Log}(s^2)$ e $F(s) = \int_0^s f(t) dt$. Multiplicando ii) no Lema 3.3 por v'(x), integrando desde x = 0 até x = R, e depois fazendo $R \to \infty$ obtemos

$$\frac{1}{2} \left\{ v'(0+) \right\}^2 + F(v(0+)) = 0. \tag{3.15}$$

Similarmente

$$\frac{1}{2} \left\{ v'(0-) \right\}^2 + F(v(0-)) = 0. \tag{3.16}$$

Devido ao fato que $v \in W(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, então v é contínua em x = 0, logo, de (3.15) e (3.16) obtemos |v'(0-)| = |v'(0+)|. Em primeiro lugar, suponhamos que v'(0-) = v'(0+). Temos duas possibilidades: v'(0-) = v'(0+) = 0 ou $v'(0-) = v'(0+) \neq 0$. Se v'(0-) = v'(0+) = 0, então do Lema 3.3 temos $v \in C^2(\mathbb{R})$, com v(0) = 0 e v'(0) = 0, e assim $v \equiv 0$ (ver, por exemplo, [14, Appendix D] ou [48, Theorem 1]) que é impossível. Agora, se $v'(0-) = v'(0+) \neq 0$ então existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $v(x_0) < 0$, que é impossível. O exposto acima implica que v'(0-) = -v'(0+)

e portanto

$$v'(0+) = -\frac{\gamma}{2}v(0). \tag{3.17}$$

Consideremos a função

$$P(c) = \frac{\gamma^2 - 4\omega - 4}{8}c^2 + c^2 \text{Log}(c)$$
 para $c > 0$.

É claro que P(c) tem um único zero $c_0 > 0$, o qual é dado por

$$c_0 = e^{\frac{\omega + 1}{2}} e^{-\frac{\gamma^2}{8}}.$$

Adicionalmente, de (3.15) e (3.17) temos que P(v(0)) = 0, isto é,

$$v(0) = c_0. (3.18)$$

Por outro lado, o problema de valor inicial sobre $(0, \infty)$ dado por ii), (3.17) e (3.18) tem uma única solução. Isto é devido ao fato de que $f \in C([0, \infty)) \cap C^1((0, \infty))$ e por conseguinte, a solução é única para x > 0 próximo de 0. Agora, como v(x) é limitada em \mathbb{R} podemos aplicar um argumento de prolongação, assim, concluímos que v(x) é a única solução em $(0, \infty)$. Um raciocínio similar mostra que v(x) é a única solução em $(-\infty, 0)$. Em adição, é fácil ver que $\phi_{\omega,\gamma}(x)$ satisfaz i)-iv) do Lema 3.3, logo, da unicidade e o fato que $v(0) = \phi_{\omega,\gamma}(0) = c_0$, concluímos que $v(x) = \phi_{\omega,\gamma}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

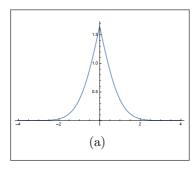
PASSO 2: Conclusão. Seja $v \in W(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ uma solução de (3.12). Do fato que $v \in H^1(\mathbb{R})$ e aplicando o Lema A.2 no Apêndice temos que $v(x) = e^{i\theta_0}\rho(x)$ para algum $\theta_0 \in \mathbb{R}$ e com $\rho(x)$ positiva satisfazendo i)-vi) do Lema 3.3. Portanto, do PASSO 1, obtemos que $\rho(x) = \phi_{\omega,\gamma}(x)$. Isto termina a prova.

A dependência de $\phi_{\omega,\gamma}$ sobre ω e γ pode ser vista na Figura 3.1. Notemos que o parâmetro ω afecta a altura e largura de $\phi_{\omega,\gamma}$. O sinal γ determina o perfil de $\phi_{\omega,\gamma}$ perto de x=0: para $\gamma>0$ é em forma \wedge , e para $\gamma<0$ é em forma \vee .

O passo seguinte no estudo das standing waves é compreender a sua estabilidade. Com esse objetivo em mente, vamos dar uma caracterização variacional das soluções da equação elíptica (3.12). Consideremos o funcional $S_{\omega,\gamma}:W(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ definido por

$$S_{\omega,\gamma}(u) := \frac{1}{2} \mathfrak{F}_{\gamma} [u] + \frac{\omega + 1}{2} \int_{\mathbb{R}} |u|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |u|^2 \operatorname{Log} |u|^2 dx.$$

Pela Proposição 3.1 temos que $S_{\omega,\gamma}$ é de classe C^1 em $W(\mathbb{R})$. Em adição, para



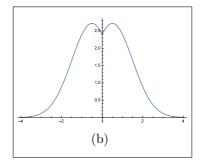


Figura 3.1: Perfil de $\phi_{\omega,\gamma}$ para $\omega = 1$. (a) $\gamma = 1$; (b) $\gamma = -1$.

 $u \in W(\mathbb{R})$ a derivada de Fréchet de S em u é dada por

$$S'_{\omega,\gamma}(u) = \left(-\partial_x^2 - \gamma \delta(x)\right) u + \omega u - u \operatorname{Log} |u|^2,$$

no sentido que para $h \in W(\mathbb{R})$,

$$\left\langle S'_{\omega,\gamma}(u),h\right\rangle =\mathfrak{F}_{\gamma}\left[u,h\right]+\omega\left(u,h\right)-\Re\int_{\mathbb{R}}u\log\left|u\right|^{2}\,\overline{h}\,dx.$$

Em adição, é fácil mostrar que u é solução de (3.12) se e somente se $u \in W(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ e $S'_{\omega,\gamma}(u) = 0$. Por outro lado, definimos o funcional de Nehari $I_{\omega,\gamma} : W(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$I_{\omega,\gamma}(u) := \mathfrak{F}_{\gamma}[u] + \omega \int_{\mathbb{R}} |u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}} |u|^2 \operatorname{Log}|u|^2 dx.$$

Notemos que $I_{\omega,\gamma}$ é de classe C^1 em $W(\mathbb{R})$ e devido ao Teorema da função implícita o conjunto $\mathcal{M} := \{u \in W(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}, I_{\omega,\gamma}(u) = 0\}$ é uma variedade diferenciável de classe C^1 e codimensão 1 em $W(\mathbb{R})$, conhecida como a variedade de Nehari.

Seja $\mathcal{N}_{\omega,\gamma}$ o conjunto de todos minimizadores do seguinte problema variacional

$$d_{\gamma}(\omega) := \inf \left\{ S_{\omega,\gamma}(u) : u \in W(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, I_{\omega,\gamma}(u) = 0 \right\}, \tag{3.19}$$

isto é, $\mathcal{N}_{\omega,\gamma}$ é o conjunto de todos minimizadores do funcional $S_{\omega,\gamma}$ restrito à variedade de Nehari \mathcal{M} . Os elementos de $\mathcal{N}_{\omega,\gamma}$ serão chamados ground states (na literatura também são chamados pontos críticos de energia mínima).

Observação 3.3 Sejam $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\omega \in \mathbb{R}$. O conjunto dos ground states satisfaz $\mathcal{N}_{\omega,\gamma} \subseteq \{e^{i\theta}\phi_{\omega,\gamma}; \theta \in \mathbb{R}\}$. De fato, em primeiro lugar, notemos que $I_{\omega,\gamma}(u) = \partial_{\lambda}S_{\omega,\gamma}(\lambda u)|_{\lambda=1} = \langle S'_{\omega,\gamma}(u), u \rangle$. Seja $u \in \mathcal{N}_{\omega,\gamma}$, é claro que há um multiplicador de Lagrange $\Lambda \in \mathbb{R}$ tal que $S'_{\omega,\gamma}(u) = \Lambda I'_{\omega,\gamma}(u)$, logo, $\langle S'_{\omega,\gamma}(u), u \rangle = \Lambda \langle I'_{\omega,\gamma}(u), u \rangle$. Agora, dado que $\langle S'_{\omega,\gamma}(u), u \rangle = I_{\omega,\gamma}(u) = 0$ e que $\langle I'_{\omega,\gamma}(u), u \rangle = -2 \|v\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 < 0$,

obtemos que $\Lambda=0$, e portanto $S'_{\omega,\gamma}(u)=0$. Assim, u é solução da equação elíptica (3.12) e pelo Lema 3.4 existe $\theta_0\in\mathbb{R}$ tal que $u(x)=e^{i\theta_0}\phi_{\omega,\gamma}(x)$. Em conclusão, $\mathcal{N}_{\omega,\gamma}\subseteq\left\{e^{i\theta}\phi_{\omega,\gamma};\theta\in\mathbb{R}\right\}$. No caso $\gamma=0$, devido à Proposição 2.1 temos que $\mathcal{N}_{\omega,0}=\left\{e^{i\theta}\phi_{\omega,0}(\cdot-y);\theta\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\right\}$ e $2\,d_0(\omega)=\sqrt{\pi}e^{\omega+1}$ com $\omega\in\mathbb{R}$.

Em seguida apresentamos outras caracterizações variacionais dos ground states que serão úteis no estudo do problema variacional (3.19).

Lema 3.5 Para o problema de minimização (3.19) temos

$$d_{\gamma}(\omega) = \inf \left\{ \frac{1}{2} \|u\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} : u \in W(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, I_{\omega,\gamma}(u) = 0 \right\}$$
 (3.20)

$$= \inf \left\{ \frac{1}{2} \|u\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} : u \in W(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, I_{\omega,\gamma}(u) \leq 0 \right\}.$$
 (3.21)

Demonstração: A prova é semelhante à desenvolvida no Lema 2.5. A igualdade (3.20) segue-se facilmente do fato que $2S_{\omega,\gamma}(u) = I_{\omega,\gamma}(u) + ||u||_{L^2(\mathbb{R})}^2$. Por outro lado, seja

$$d_{\gamma,1}(\omega) = \frac{1}{2} \inf \left\{ \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 : u \in W(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, I_{\omega,\gamma}(u) \le 0 \right\}.$$

Das propriedades do ínfimo é claro que $d_{\gamma,1}(\omega) \leq d_{\gamma}(\omega)$. Portanto, só precisamos mostrar que $d_{\gamma}(\omega) \leq d_{1,\gamma}(\omega)$. Seja $\varphi \in W(\mathbb{R})$ tal que $I_{\omega,\gamma}(\varphi) < 0$. É fácil ver que existe $\lambda \in (0,1)$ tal que $I_{\omega,\gamma}(\lambda\varphi) = 0$. Logo, $\lambda\varphi$ está na variedade de Nehari e da definição de $d_{\gamma}(\omega)$ concluímos

$$d_{\gamma}(\omega) \leq S_{\omega,\gamma}(\lambda \varphi) = \frac{\lambda^2}{2} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 < \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2,$$

assim, $d_{\gamma}(\omega) \leq d_{\gamma,1}(\omega)$. Isto é, $d_{\gamma}(\omega) = d_{\gamma,1}(\omega)$.

O seguinte teorema mostra que, para $\gamma>0$ o conjunto dos ground states $\mathcal{N}_{\omega,\gamma}$ é não vazio .

Teorema 3.4 Sejam $\omega \in \mathbb{R}$ e $\gamma > 0$. Há pelo menos um minimizador do funcional $S_{\omega,\gamma}$ entre todas as funções na variedade de Nehari. Isto é, existe $\varphi \in W(\mathbb{R})$ tal que

$$S_{\omega,\gamma}(\varphi) = d_{\gamma}(\omega) := \inf \{ S_{\omega,\gamma}(u) : u \in W(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, I_{\omega,\gamma}(u) = 0 \}.$$

Observação 3.4 O Teorema 3.4 não é valido para $\gamma < 0$. De fato, suponhamos por contradição que $u_{\omega,\gamma}$ é um minimizador de $d_{\gamma}(\omega)$. Da Observação 3.3 e o Lema 3.4 concluímos que existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tal que $u_{\omega,\gamma}(x) = e^{i\theta_0}\phi_{\omega,\gamma}(x)$. Em particular, $|u_{\omega,\gamma}(x)| > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Seja $\tau_y u_{\omega,\gamma}(x) := u_{\omega,\gamma}(x-y)$, onde $y \in \mathbb{R}$,

então temos que $I_{\omega,\gamma}(\tau_y u_{\omega,\gamma}) - I_{\omega,\gamma}(u_{\omega,\gamma}) = \gamma \left(|\phi_{\omega,\gamma}(0)|^2 - |\phi_{\omega,\gamma}(y)|^2 \right)$. Para |y| suficientemente grande é claro que $I_{\omega,\gamma}(\tau_y u_{\omega,\gamma}) < 0$, pois, $I_{\omega,\gamma}(u_{\omega,\gamma}) = 0$; isto implica que existe um número $\lambda \in (0,1)$ tal que $I_{\omega,\gamma}(\lambda \tau_y u_{\omega,\gamma}) = 0$. Assim, pela definição de $d_{\gamma}(\omega)$ temos

$$d_{\gamma}(\omega) \leq S_{\omega,\gamma}(\lambda \tau_y u_{\omega,\gamma}) < \frac{1}{2} \|\tau_y u_{\omega,\gamma}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2} \|u_{\omega,\gamma}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = d_{\gamma}(\omega),$$

que é impossível. Portanto, para $\gamma < 0$ o problema variacional (3.19) não tem minimizadores.

Antes de fazer a prova do Teorema 3.4 precisaremos de dois lemas preliminares. O primeiro lema mostra que a quantidade definida em (3.19) é positiva.

Lema 3.6 Sejam $\gamma > 0$ e $\omega \in \mathbb{R}$. Para a quantidade definida em (3.19) temos

$$d_{\gamma}(\omega) \ge \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\omega + 1} e^{-\frac{\gamma^2}{2}}.$$
 (3.22)

Demonstração: Seja $u \in W(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ com $I_{\omega,\gamma}(u) = 0$. Em primeiro lugar, aplicando uma variante da desigualdade de Young

$$\gamma |u(0)|^{2} \leq \gamma ||u||_{L^{2}(\mathbb{R})} ||u'||_{L^{2}(\mathbb{R})} \leq \gamma \left(\frac{\gamma}{2} ||u||_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} + \frac{1}{2\gamma} ||u'||_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} \right)
\leq \frac{\gamma^{2}}{2} ||u||_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} + \frac{1}{2} ||u'||_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2}.$$
(3.23)

Por outro lado, a desigualdade de Sobolev logarítmica (2.10) com $a = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, junto com (3.23) e o fato que $I_{\omega,\gamma}(u) = 0$ implicam

$$\left(\omega - \frac{\gamma^2}{2} + 1 + \text{Log}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\right) \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \le \left(\text{Log} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\right) \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Portanto, obtemos que $||u||_{L^2(\mathbb{R})}^2 \ge \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\omega+1} e^{-\frac{\gamma^2}{2}}$. É claro que a desigualdade (3.22) segue-se do Lema 3.5. Isto termina a prova.

Lema 3.7 Sejam $\gamma > 0$ e $\omega \in \mathbb{R}$. Então $d_{\gamma}(\omega) < d_0(\omega)$.

Demonstração: Em primeiro lugar, da Proposição 2.1 temos $d_0(\omega) = S_{\omega,0}(\phi_{\omega,0})$, onde $\phi_{\omega,0}$ é o único minimizador do problema (3.19) com $\gamma = 0$. Por outro lado, um cálculo simples mostra que para $\gamma > 0$,

$$I_{\omega,\gamma}(\phi_{\omega,0}) = I_{\omega,0}(\phi_{\omega,0}) - \gamma |\phi_{\omega,0}(0)|^2 = -\gamma e^{(\omega+1)} < 0.$$

Portanto, existe $\lambda \in (0,1)$ tal que $I_{\omega,\gamma}(\lambda \phi_{\omega,0}) = 0$, assim, da definição de $d_{\gamma}(\omega)$ concluímos

$$d_{\gamma}(\omega) \le S_{\omega,\gamma}(\lambda \phi_{\omega,0}) = \lambda^2 S_{\omega,0}(\phi_{\omega,0}) < S_{\omega,0}(\phi_{\omega,0}) = d_0(\omega).$$

Isto termina a prova.

Observação 3.5 O Lema 3.7 não é valido quando $\gamma < 0$. Isto é, no caso $\gamma < 0$ temos que $d_{\gamma}(\omega) = d_0(\omega)$. De fato, em primeiro lugar, vamos mostrar que $d_0(\omega) \le d_{\gamma}(\omega)$. Para ver este, seja $u \in W(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tal que $I_{\omega,0}(u) = 0$. Devido ao fato que para $\gamma < 0$, $I_{\omega,\gamma}(u) = I_{\omega,0}(u) - \gamma |u(0)|^2 = -\gamma |u(0)|^2 > 0$, existe s > 1 tal que $I_{\omega,\gamma}(su) = 0$. Em adição, como s > 1 obtemos que

$$S_{\omega,\gamma}(su) = s^2 S_{\omega,0}(u) \ge s^2 d_0(\omega) \ge d_0(\omega),$$

e portanto, por definição de $d_{\gamma}(\omega)$, concluímos $d_0(\omega) \leq d_{\gamma}(\omega)$. Agora, vamos mostrar que $d_0(\omega) \geq d_{\gamma}(\omega)$. Seja $w_n := \phi_{\omega,0}(\cdot - n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $d_0(\omega) = S_{\omega,0}(w_n)$ e $I_{\omega,\gamma}(w_n) = -\gamma |\phi_{\omega,0}(n)|^2 > 0$. Adicionalmente, usando que $I_{\omega,\gamma}(w_n) \to 0$ quando $n \to \infty$, é fácil mostrar que existem $\lambda_n \in (1,\infty)$ tal que $I_{\omega,\gamma}(\lambda_n w_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = 1$. Agora, por definição,

$$d_{\gamma}(\omega) \leq S_{\omega,\gamma}(\lambda_n w_n) = \lambda_n^2 S_{\omega,0}(w_n) \to d_0(\omega)$$
 quando $n \to \infty$,

o que implica que $d_{\gamma}(\omega) \leq d_0(\omega)$. Em conclusão, $d_{\gamma}(\omega) = d_0(\omega)$.

Demonstração do Teorema 3.4: Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência minimizante do problema (3.19).

PASSO 1. A sequência $\{u_n\}$ é limitada em $W(\mathbb{R})$. Primeiro, notemos que $\{u_n\}$ é limitada em $L^2(\mathbb{R})$ e que $\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \to 2d_\gamma(\omega)$ quando $n \to \infty$. Utilizando o fato que $I_{\omega,\gamma}(u_n) = 0$, a desigualdade (3.23) e a desigualdade de Sobolev logarítmica temos

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{a^2}{\pi}\right) \|u_n'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \le \left(\operatorname{Log}\left(\frac{e^{\frac{\gamma^2}{2}}e^{-(\omega+1)}}{a}\right) \right) \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \left(\operatorname{Log}\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\right) \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2,$$

assim, escolhendo a > 0 pequeno e utilizando o fato que $\{u_n\}$ é limitada em $L^2(\mathbb{R})$ concluímos que $\{u'_n\}$ é limitada em $L^2(\mathbb{R})$, isto é, $\{u_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R})$. Por outro lado, da desigualdade (2.4) é claro que $\{B(|u_n|)\}$ é limitada em $L^1(\mathbb{R})$; em particular, do fato que $I_{\omega}(u_n) = 0$ obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} A(|u_n(x)|) dx \le \int_{\mathbb{R}} B(|u_n(x)|) dx,$$

e portanto a sequência $\{A(|u_n|)\}$ é limitada em $L^1(\mathbb{R})$, logo, o Lema 2.1 implica que a sequência $\{u_n\}$ é limitada em $L^A(\mathbb{R})$. Em conclusão, a sequência $\{u_n\}$ é limitada em $W(\mathbb{R})$.

PASSO 2. Existe $\varphi \in W(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tal que $u_n \to \varphi$ fraco em $W(\mathbb{R})$, quando $n \to \infty$. De fato, pelo Passo 1 e o fato que $W(\mathbb{R})$ é reflexivo, passando a uma subsequência, se necessário, existe $\varphi \in W(\mathbb{R})$ tal que $u_n \to \varphi$. Precisamos mostrar agora que φ é não trivial. Suponhamos que $\varphi \equiv 0$. Então $u_n \to 0$ em $H^1(\mathbb{R})$, pois $W(\mathbb{R}) \hookrightarrow H^1(\mathbb{R})$, e devido à inclusão compacta $H^1(-1,1) \hookrightarrow C[-1,1]$, isto implica que $u_n(0) \to 0$ quando $n \to \infty$. Assim,

$$I_{\omega,0}(u_n) = I_{\omega,\gamma}(u_n) + \gamma |u_n(0)|^2 = \gamma |u_n(0)|^2 \to 0$$
 quando $n \to \infty$,

logo, existem $\lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tal que $I_{\omega,0}(\lambda_n u_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = 1$. Portanto, por definição de $d_{\gamma}(\omega)$ obtemos

$$d_0(\omega) \leq S_{\omega,0}(\lambda_n u_n) = \lambda_n^2 S_{\omega,\gamma}(u_n) \to d_{\gamma}(\omega)$$
 quando $n \to \infty$,

o que implica que $d_0(\omega) \leq d_{\gamma}(\omega)$, mas, pelo Lema 3.7 isto é impossível. Em conclusão, $\varphi \in W(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

PASSO 3. A função φ está na variedade de Nehari, isto é, $I_{\omega,\gamma}(\varphi) = 0$. A prova será feita por contradição. Suponhamos em primeiro lugar que $I_{\omega,\gamma}(\varphi) < 0$, então existe $\lambda \in (0,1)$ tal que $I_{\omega,\gamma}(\lambda\varphi) = 0$. Logo, da definição de $d_{\gamma}(\omega)$ obtemos que

$$d_{\gamma}(\omega) \leq S_{\omega,\gamma}(\lambda \varphi) = \frac{\lambda^2}{2} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 < \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \frac{1}{2} \liminf_{n \to \infty} \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = d_{\gamma}(\omega),$$

que é impossível. Portanto, $I_{\omega,\gamma}(\varphi) \geq 0$. Agora, suponhamos que $I_{\omega,\gamma}(\varphi) > 0$. Da inclusão contínua $W(\mathbb{R}) \hookrightarrow H^1(\mathbb{R})$ é claro que $u_n \rightharpoonup \varphi$ em $H^1(\mathbb{R})$ se $n \to \infty$, e devido à convergência fraca temos

$$\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - \|u_n - \varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \to 0$$
 (3.24)

$$\|u'_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - \|u'_n - \varphi'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - \|\varphi'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \to 0,$$
 (3.25)

quando $n \to \infty$. Por outro lado, passando a uma subsequência, se necessário, obtemos que $u_n \to \varphi$ q.t.p. sobre \mathbb{R} e $u_n(0) \to \varphi(0)$ se $n \to \infty$. Assim, o Passo 1, o Lema 2.3, (3.24) e (3.25) implicam que

$$I_{\omega,\gamma}(u_n) - I_{\omega,\gamma}(u_n - \varphi) - I_{\omega,\gamma}(\varphi) \to 0$$
 quando $n \to \infty$,

logo, da suposição que $I_{\omega,\gamma}(\varphi) > 0$ conseguimos que

$$\lim_{n \to \infty} I_{\omega,\gamma}(u_n - \varphi) = -I_{\omega,\gamma}(\varphi) < 0.$$

Portanto, da caraterização variacional dada no Lema 3.5, junto com (3.24) concluímos

$$d_{\gamma}(\omega) \leq \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \|u_n - \varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = d_{\gamma}(\omega) - \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 < d_{\gamma}(\omega),$$

que é um absurdo. Portanto, $I_{\omega,\gamma}(\varphi) = 0$.

Passo 4. Conclusão. Do Passo 3 e a definição de $d_{\gamma}(\omega)$ é claro que

$$d_{\gamma}(\omega) \leq S_{\omega,\gamma}(\varphi) = \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} \leq \frac{1}{2} \liminf_{n \to \infty} \|u_{n}\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} = d_{\gamma}(\omega),$$

assim, $d_{\gamma}(\omega) = S_{\omega,\gamma}(\varphi)$. Isto termina a prova .

Na seguinte proposição serão identificados os ground states.

Proposição 3.2 Para $\omega \in \mathbb{R}$ e $\gamma > 0$, temos que o conjunto dos ground states é dado por $\mathcal{N}_{\omega,\gamma} = \{e^{i\theta}\phi_{\omega,\gamma}; \theta \in \mathbb{R}\}$, onde as $\phi_{\omega,\gamma}$ são definidas em (3.14).

Demonstração: Na Observação 3.3 foi mostrado que $\mathcal{N}_{\omega,\gamma} \subseteq \{e^{i\theta}\phi_{\omega,\gamma}; \theta \in \mathbb{R}\}$. Por outro lado, do Teorema 3.4 temos que o conjunto dos ground states $\mathcal{N}_{\omega,\gamma}$ é não vazio, e portanto $\mathcal{N}_{\omega,\gamma} = \{e^{i\theta}\phi_{\omega,\gamma}; \theta \in \mathbb{R}\}$. Isto termina a prova.

Observação 3.6 Em seguida, apresentamos outra caraterização variacional dos ground states. Esta caracterização mostra que eles minimizam localmente o funcional da energia entre todas as funções com a mesma $L^2(\mathbb{R})$ -norma, isto é,

$$E(\phi_{\omega,\gamma}) = \inf \left\{ E(u) : u \in W(\mathbb{R}), \ \|u\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} = \|\phi_{\omega,\gamma}\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} \right\}.$$
 (3.26)

Em primeiro lugar, notemos que $S_{\omega,\gamma}(\phi_{\omega,\gamma}) = J_{\omega,\gamma}$, onde

$$J_{\omega,\gamma} := \inf \left\{ S_{\omega,\gamma}(u) : u \in W(\mathbb{R}), \ \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = 2d_{\gamma}(\omega) \right\}. \tag{3.27}$$

De fato, é claro que $J_{\omega,\gamma} \leq S_{\omega,\gamma}(\phi_{\omega,\gamma})$; logo, só precisamos mostrar que $S_{\omega,\gamma}(\phi_{\omega,\gamma}) \leq J_{\omega,\gamma}$. Seja $u \in W(\mathbb{R})$ tal que $\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = 2d_{\gamma}(\omega)$. Do Lema 3.5 temos que $I_{\omega,\gamma}(u) \geq 0$ e portanto, como $2S_{\omega,\gamma}(u) = I_{\omega,\gamma}(u) + \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$, $S_{\omega,\gamma}(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = d_{\gamma}(\omega) = S_{\omega,\gamma}(\phi_{\omega,\gamma})$. Assim, $S_{\omega,\gamma}(\phi_{\omega,\gamma}) \leq J_{\omega,\gamma}$, o qual implica a igualdade em (3.27). Da caraterização variacional (3.27) segue-se facilmente (3.26), pois $\|\phi_{\omega,\gamma}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = 2d_{\gamma}(\omega)$.

Observação 3.7 É possível encontrar o valor exato da quantidade $d_{\gamma}(\omega)$ definida em (3.19). De fato, aplicando a Proposição 3.2 obtemos que $d_{\gamma}(\omega) = S_{\omega,\gamma}(\phi_{\omega,\gamma})$, e portanto fazendo um cálculo simples, para $\gamma \geq 0$,

$$d_{\gamma}(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\omega + 1} \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\gamma}{2}\right) \right), \text{ onde } \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-t^{2}} dt$$

é a função error gaussiana. Notemos que para $\omega \in \mathbb{R}$ fixo, a função $\gamma \to d_{\gamma}(\omega)$ definida em $[0,\infty)$ sobre \mathbb{R} é estritamente decrescente e positiva.

3.4 Estabilidade dos ground states

Nesta seção vamos mostrar que os ground states encontrados na Proposição 3.2 são estáveis em $W(\mathbb{R})$. Notemos que neste caso, devido ao potencial delta, só temos invariância com respeito as rotações. A estabilidade orbital será consequência da caracterização variacional dos ground states dada no Teorema 3.4. A seguir, apresentamos a definição de estabilidade orbital.

Definição 3.3 Seja φ solução de (3.12). Dizemos que a standing wave $u(x,t) = e^{i\omega t}\varphi(x)$ é orbitalmente estável em $W(\mathbb{R})$ se para todo $\epsilon > 0$ existe $\eta > 0$ com a seguinte propriedade: se $u_0 \in W(\mathbb{R})$ e satisfaz $||u_0 - \varphi||_{W(\mathbb{R})} < \eta$, então a solução u(t) de (3.1) com $u(0) = u_0$ satisfaz

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \inf_{\theta \in \mathbb{R}} \| u(t) - e^{i\theta} \varphi \|_{W(\mathbb{R})} < \epsilon.$$

No caso contrário, a standing wave $u(x,t) = e^{i\omega t}\varphi(x)$ se diz orbitalmente instável em $W(\mathbb{R})$.

Observação 3.8 A noção de estabilidade orbital coincide com a definição ordinária de Lyapunov aplicada às órbitas, onde as órbitas são tomadas modulo as simetrias da equação. Para a equação (3.1) o grupo de simetrias é U(1), correspondente à simetria rotacional, que persiste na presença do delta potencial. É importante ressaltar que a definição de estabilidade orbital é ótima, isto é, se omitimos a simetria U(1) na Definição 3.3, então os ground states são instáveis. De fato, seja $\{\lambda_n\} \subseteq \mathbb{R}_+$ uma sequência de números positivos tal que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 1$. Definimos a função $\varphi_{n,0}(x) := \lambda_n \phi_{\omega,\gamma}(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, temos que a solução $u^n(t,x)$ da equação (3.1) com condição inicial $u^n(0) = \varphi_{n,0}$ é dada por

$$u^n(t,x) = e^{i(\omega + \text{Log}\lambda_n^2)t} \varphi_{n,0}(x)$$
 para $n \in \mathbb{N}$.

Em adição, um cálculo simples mostra que

$$\begin{split} &\|\varphi_{n,0}-\phi_{\omega,\gamma}\|_{W(\mathbb{R})}\to 0 \quad \text{quando} \ n\to\infty,\\ &\sup_{t\in\mathbb{R}}\|u^n(t)-\phi_{\omega,\gamma}\|_{W(\mathbb{R})}\geq \|\phi_{\omega,\gamma}\|_{W(\mathbb{R})} \quad \text{para todo} \ n\in\mathbb{N}, \end{split}$$

o qual implica que os ground states são instáveis em $W(\mathbb{R})$. Portanto, a presença da simetria U(1) na Definição 3.3 é essencial para a análise da estabilidade orbital.

Em seguida enunciamos o resultado principal desta seção.

Teorema 3.5 Seja $\omega \in \mathbb{R}$. Para $\gamma > 0$ a standing wave $e^{i\omega t}\phi_{\omega,\gamma}(x)$ é orbitalmente estável em $W(\mathbb{R})$.

O Teorema 3.5 é consequência do seguinte resultado.

Proposição 3.3 Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq W(\mathbb{R})$ uma sequência minimizante do problema variacional (3.19), então existe $\theta_0\in\mathbb{R}$ tal que, passando a uma subsequência, se necessário,

$$\|u_n - e^{i\theta_0}\phi_{\omega,\gamma}\|_{W(\mathbb{R})} \to 0$$
 quando $n \to \infty$.

Demonstração: Pelo provado no Teorema 3.4 é claro que existe $\varphi \in \mathcal{N}_{\omega,\gamma}$ tal que, passando a uma subsequência, se necessário, $u_n \rightharpoonup \varphi$ em $W(\mathbb{R})$, $u_n(0) \rightarrow \varphi(0)$ e $u_n \rightarrow \varphi$ q.t.p. sobre \mathbb{R} . Em adição,

$$2d_{\gamma}(\omega) \leq 2S_{\omega,\gamma}(\varphi) = \|\varphi\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} \leq \liminf_{n} \|u_{n}\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} = 2d_{\gamma}(\omega),$$

o qual implica que $||u_n||_{L^2(\mathbb{R})} \to ||\varphi||_{L^2(\mathbb{R})}$, e portanto $u_n \to \varphi$ em $L^2(\mathbb{R})$. Da desigualdade (2.4) e o fato que a sequência $\{u_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R})$ obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} B(|u_n(x)|) dx \to \int_{\mathbb{R}} B(|\varphi(x)|) dx \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$
 (3.28)

Agora, (3.28), junto com o fato que $u_n \to \varphi$ em $L^2(\mathbb{R})$ e $S_{\omega,\gamma}(u_n) \to S_{\omega,\gamma}(\varphi)$, implicam

$$\lim_{n \to \infty} \left[\mathfrak{F}_{\gamma}[u_n] + \int_{\mathbb{R}} A(|u_n(x)|) \, dx \right] = \mathfrak{F}_{\gamma}[\varphi] + \int_{\mathbb{R}} A(|\varphi(x)|) \, dx. \tag{3.29}$$

Por outro lado, pela semicontinuidade inferior da $L^2(\mathbb{R})$ -norma e o Lema de Fatou

$$\mathfrak{F}_{\gamma}[\varphi] \le \liminf_{n} \mathfrak{F}_{\gamma}[u_{n}] \quad e \quad \int_{\mathbb{R}} A(|\varphi(x)|) dx \le \liminf_{n} \int_{\mathbb{R}} A(|u_{n}(x)|) dx. \quad (3.30)$$

Assim, de (3.29), o fato que $u_n(0) \to \varphi(0)$ e (3.30) obtemos (ver [30, Lemma 12, chapter V]),

$$\|\varphi'\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} = \lim_{n \to \infty} \|u'_{n}\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} \quad e \quad \int_{\mathbb{R}} A(|\varphi(x)|) dx = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} A(|u_{n}(x)|) dx.$$
(3.31)

Devido à convergência fraca da sequência em $W(\mathbb{R})$, junto com a primeira igualdade em (3.31) obtemos que $u_n \to \varphi$ em $H^1(\mathbb{R})$. Em adição, a segunda igualdade em (3.31) e o Lema 2.1 implicam que que $u_n \to \varphi$ em $L^A(\mathbb{R})$, isto é, $u_n \to \varphi$ em $W(\mathbb{R})$. Por último, aplicando a Proposição 3.2 obtemos o resultado.

Demonstração do Teorema 3.5: Procedemos por contradição. Suponhamos que $e^{i\omega t}\phi_{\omega,\gamma}(x)$ é orbitalmente instável em $W(\mathbb{R})$. Portanto, existe $\epsilon > 0$ e uma sequência de condições iniciais $u_{n,0}$ tal que

$$\|u_{n,0} - \phi_{\omega,\gamma}\|_{W(\mathbb{R})} \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$
 (3.32)

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \inf_{\theta \in \mathbb{R}} \|u_n(t) - e^{i\theta} \phi_{\omega,\gamma}\|_{W(\mathbb{R})} \ge \epsilon \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.33}$$

onde $u_n(t)$ é a solução de (3.1) com condição inicial $u_{n,0}$. Seja t_n o primeiro tempo tal que

$$\inf_{\theta \in \mathbb{R}} \left\| u_n(t_n) - e^{i\theta} \phi_{\omega,\gamma} \right\|_{W(\mathbb{R})} = \frac{\epsilon}{2}.$$
 (3.34)

Seja $v_n(x) := u_n(t_n, x)$. Da conservação da carga e energia obtemos

$$||v_n||_{L^2(\mathbb{R})}^2 = ||u_n(t_n)||_{L^2(\mathbb{R})}^2 = ||u_{n,0}||_{L^2(\mathbb{R})}^2 \to ||\phi_{\omega,\gamma}||_{L^2(\mathbb{R})}^2 = 2d_{\gamma}(\omega)$$
(3.35)

$$E(v_n) = E(u_n(t_n)) = E(u_{n,0}) \to E(\phi_{\omega,\gamma}),$$
 (3.36)

quando $n \to \infty$. Em particular, (3.35) e (3.36) implicam

$$S_{\omega,\gamma}(v_n) \to S_{\omega,\gamma}(\phi_{\omega,\gamma}) = d_{\gamma}(\omega)$$
 quando $n \to \infty$. (3.37)

Agora, de (3.35) e (3.37) é claro que $I_{\omega,\gamma}(v_n) = 2S_{\omega,\gamma}(v_n) - \|v_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \to 0$ quando $n \to \infty$. Neste caso, é fácil mostrar que existem $\{\lambda_n\} \subseteq \mathbb{R}_+$ tal que $I_{\omega,\gamma}(\lambda_n v_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 1$. Seja $f_n(x) := \lambda_n v_n(x)$. Aplicando o fato que $\{v_n\}$ é limitada em $W(\mathbb{R})$,

$$||v_n - f_n||_{W(\mathbb{R})} \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$
 (3.38)

Portanto, de (3.38) e (3.37) concluímos

$$S_{\omega,\gamma}(f_n) \to S_{\omega,\gamma}(\phi_{\omega,\gamma}) = d_{\gamma}(\omega)$$
 quando $n \to \infty$, (3.39)

isto é, $\{f_n\}$ é uma sequência minimizante do problema (3.19). Aplicando a Pro-

posição 3.3, existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tal que, passando a uma subsequência, se necessário,

$$||f_n - e^{i\theta_0}\phi_{\omega,\gamma}||_{W(\mathbb{R})} \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$
 (3.40)

A desigualdade triangular, junto com (3.38) e (3.40) implicam

$$\|u_n(t_n) - e^{i\theta_0}\phi_{\omega,\gamma}\|_{W(\mathbb{R})} \to 0$$
 quando $n \to \infty$,

o qual é uma contradição com (3.34). Isto termina a demonstração. \square

Observação 3.9 Consideremos equação de Schrödinger logarítmica com um $\delta\text{-potencial}$

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u + \gamma \delta(x)u + k u \operatorname{Log} |u|^2 = 0, \tag{3.41}$$

onde $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, k é positivo e u = u(x,t) é uma função a valores complexos de $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Observamos que a equação (3.1) é um caso particular da equação acima; entretanto, aplicando o mesmo método desenvolvido nas seções anteriores é possível mostrar que a equação (3.41) é globalmente bem posta em $W(\mathbb{R})$. Em adição, se o potencial é atrativo $(\gamma > 0)$, o ground state é explicitamente dado pela fórmula

$$\phi_{\omega,\gamma,k}(x) = e^{\frac{\omega+k}{2k}} e^{-\frac{k}{2}(|x| + \frac{\gamma}{2})^2},$$
(3.42)

e a standing wave $e^{i\omega t}\phi_{\omega,\gamma,k}(x)$ é orbitalmente estável em $W(\mathbb{R})$.

EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER LOGARÍTMICA COM UM δ' POTENCIAL

Este capítulo será dedicado ao estudo da existência e estabilidade dos ground states para a equação de Schrödinger logarítmica com um δ' potencial

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u + \gamma \delta'(x)u + u \operatorname{Log} |u|^2 = 0, \tag{4.1}$$

onde u=u(x,t) é uma função a valores complexos. O valor do parâmetro γ , que descreve a intensidade da δ' -interação, será positivo. O capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 4.1 damos uma descrição precisa do Hamiltoniano $-\partial_x^2 - \gamma \delta'(x)$ e indicamos algumas das suas propriedades espectrais. Na seção 4.2 introduzimos o espaço de energia, $W(\mathbb{R}_\circ)$, no qual estudamos a dinâmica da equação (4.1). Na seção 4.3 estabelecemos a boa colocação global do problema de Cauchy para equação (4.1) no espaço de energia $W(\mathbb{R}_\circ)$. Na seção 4.4 mostraremos que o conjunto dos ground states é não vazio. Na seção 4.5 calculamos explicitamente os ground states. Em adição, é demonstrado que os ground states apresentam uma bifurcação que depende da intensidade da δ' -interação; mais precisamente: se $0 < \gamma \le 2$, então há um único ground state anti-simétrico; se $\gamma > 2$, então existem dois ground states não-simétricos. Na seção 4.6 provamos que os ground states são estáveis via métodos variacionais. Finalmente, na seção 4.7, aplicando a teoria abstrata de Grillakis, Shatah and Strauss [28, 29], obtemos un resultado de instabilidade.

4.1 O potencial delta derivada de Dirac

Nesta seção descrevemos o operador Hamiltoniano $-\partial_x^2 - \gamma \delta'(x)$. Daremos uma definição precisa deste operador e indicaremos algumas propriedades espectrais. Este operador é amplamente utilizado na mecânica quântica; em ([7, 53] e suas referências) são indicadas algumas aplicações. Formalmente, o potencial

$$V(x) = -\gamma \delta'(x)$$
, onde $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

é conhecido como delta derivada potencial. Devido aos avanços tecnológicos na fabricação de dispositivos quânticos, os modelos físicos descritos por este potencial tem tomado um particular interesse; por exemplo, na física da matéria condensada (ver [53]). O valor de γ é real; quando é positivo a interação é chamada atrativa, no outro caso repulsiva.

Para fazer uma descrição precisa do hamiltoniano $-\partial_x^2 - \gamma \delta'(x)$, seguindo as mesmas ideias da seção 3.1, nós requeremos o uso da teoria de extensões auto-adjuntas de von Neumann. Como consequência, o operador será definido a partir de condições de contorno apropriadas.

Consideremos o operador

$$S = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \text{dom}(S) = \{ f \in H^2(\mathbb{R}) : f'(0) = 0 \}.$$
 (4.2)

É claro que S é simétrico, fechado e tem domínio denso em $L^2(\mathbb{R})$. Em adição, o operador adjunto de S é dado por (ver, por exemplo, [44, Example 3.3 and Example 3.5])

$$S^* = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \text{dom}(S^*) = \{ f \in H^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}) : f'(0+) = f'(0-) \}.$$

Para identificar todas as extensões auto-adjuntas do operador S precisamos encontrar seus índices de deficiência. Notemos que, se uma função f está no espaço de deficiência K_{\pm} , então ela pertence a $C^2(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ e satisfaz a equação diferencial $-\partial_x^2 f = \pm i f$ junto com a condição de fronteira f'(0+) = f'(0-). É fácil mostrar que as funções

$$\psi_{+}(x) := \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \left(\frac{x}{|x|} \right) e^{-\frac{(1+i)|x|}{\sqrt{2}}} \quad e \quad \psi_{-}(x) := \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \left(\frac{x}{|x|} \right) e^{-\frac{(1-i)|x|}{\sqrt{2}}}, \tag{4.3}$$

são os elementos geradores dos espaço de deficiência K_+ e K_- respectivamente, e portanto os índices de deficiência do operador \mathcal{S} são $n_+(\mathcal{S}) = n_-(\mathcal{S}) = 1$. Aplicando a teoria de von Neumann [44, Theorem 13.10] obtemos que todas as extensões auto-adjuntas de \mathcal{S} estão dadas pela família uniparamétrica

$$dom (\mathcal{S}_{\theta}) = \left\{ g + c \psi_{+} + c e^{i\theta} e^{i\frac{\pi}{2}} \psi_{-}, \quad g \in dom (\mathcal{S}) \right\}, \quad c \in \mathbb{C}, \quad \theta \in [-\pi, \pi), \\
\mathcal{S}_{\theta} \left(g + c \psi_{+} + i c e^{i\theta} e^{i\frac{\pi}{2}} \psi_{-} \right) = \mathcal{S}g + i c \psi_{+} - i c e^{i\theta} \psi_{-} e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

No seguinte teorema parametrizamos todas as extensões auto-adjuntas do operador \mathcal{S} em função de γ . Em adição, as extensões serão identificadas por condições de contorno no ponto 0.

Teorema 4.1 Todas as extensões auto-adjuntas \mathcal{H}_{γ} do operador \mathcal{S} , onde $-\infty \leq \gamma < \infty$, são dadas por

$$\begin{cases} \mathcal{H}_{\gamma} = -\frac{d^2}{dx^2} \\ \operatorname{dom}(\mathcal{H}_{\gamma}) = \left\{ u \in H^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}) : u'(0+) = u'(0-), u(0+) - u(0-) = -\gamma u'(0) \right\}. \end{cases}$$

No caso $\gamma = 0$ obtemos o operador de Laplace $-\Delta$ em seu domínio natural $H^2(\mathbb{R})$. No caso $\gamma = -\infty$ obtemos a condição de Neumann no ponto 0, isto é,

$$\mathcal{H}_{-\infty} = (-\Delta_{N-}) \oplus (-\Delta_{N+}),$$

sobre o domínio, dom $(\mathcal{H}_{-\infty}) = \{ f \in H^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}) : f'(0+) = f'(0-) = 0 \}$, onde $-\Delta_{N-} e - \Delta_{N+}$ denotam o laplaciano de Neumann sobre $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$ respectivamente.

Demonstração: Seja $\theta \in [-\pi, \pi)$. De (4.3) e pela definição do domínio de \mathcal{S}_{θ} obtemos a inclusão dom $(\mathcal{S}_{\theta}) \subseteq H^2(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Observemos que se $f \in \text{dom}(\mathcal{S}_{\theta})$, existem $g \in \text{dom}(\mathcal{S})$ e $c \in \mathbb{C}$ tal que $f = g + c\psi_+ + ce^{i\theta}e^{i\frac{\pi}{2}}\psi_-$. Um cálculo simples mostra que f'(0+) = f'(0-) e $f(0+) - f(0-) = -\gamma(\theta)f'(0)$, onde

$$\gamma(\theta) = \sqrt{2} \left(1 - \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right).$$

Notemos que a função $\theta \to \gamma(\theta)$ é uma bijecção de $(-\pi, \pi)$ sobre \mathbb{R} . Portanto, se $f \in \text{dom}(\mathcal{S}_{\theta})$, a função pertence a $H^2(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ e satisfaz f'(0+) = f'(0-) e $f(0+) - f(0-) = -\gamma(\theta) f'(0)$, isto é , $\mathcal{S}_{\theta} \subset \mathcal{H}_{\gamma(\theta)}$. Da simetria do operador $\mathcal{H}_{\gamma(\theta)}$ concluímos $\mathcal{S}_{\theta} = \mathcal{H}_{\gamma(\theta)}$, pois $\mathcal{S}_{\theta} \subseteq \mathcal{H}_{\gamma(\theta)} \subseteq \mathcal{S}_{\theta}^* = \mathcal{S}_{\theta}$. Isto termina a prova.

Formalmente, o operador \mathcal{H}_{γ} é denotado por $-\partial_x^2 - \gamma \delta'(x)$.

Forma quadrática associada a \mathcal{H}_{γ}

A seguir descrevemos a forma quadrática associada com o operador \mathcal{H}_{γ} . Nós seguimos um novo argumento desenvolvido em [35]. A ideia é definir uma forma soma para depois mostrar que ela é de fato a forma associada com o operador \mathcal{H}_{γ} . Observemos que para o caso $\gamma=0$, o operador de Laplace $-\Delta$ em seu domínio natural $H^2(\mathbb{R})$, a forma quadrática associada é bem conhecida. Portanto, vamos supor que $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Assim, consideremos a forma quadrática

$$\mathfrak{t}[f] := \int_{\mathbb{D}} |f'(x)|^2 dx, \quad \operatorname{dom}(\mathfrak{t}) = H^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}), \tag{4.4}$$

a qual é simétrica e fechada. Por outro lado, para $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definimos a forma quadrática e simétrica

$$\mathfrak{b}_{\gamma}[f] := -\gamma^{-1}|f(0+) - f(0-)|^2, \quad \operatorname{dom}(\mathfrak{b}_{\gamma}) = H^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$
 (4.5)

Então, a forma \mathfrak{b}_{γ} é relativamente \mathfrak{t} -limitada. De fato, usando uma variante da desigualdade de Young, para todo $\epsilon > 0$ existe $C_{\epsilon} > 0$ tal que

$$|\mathfrak{b}_{\gamma}[f]| \leq \frac{1}{\gamma} \left(\gamma \epsilon \|f'\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} + \frac{4}{\gamma \epsilon} \|f\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} \right)$$
$$= \epsilon \|f'\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} + C_{\epsilon} \|f\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2},$$

onde $C_{\epsilon} = 4/\gamma^2 \epsilon$. Portanto, aplicando o [44, Theorem 10.21] a forma quadrática soma

$$\mathfrak{t}_{\gamma}[f] := \mathfrak{t}[f] + \mathfrak{b}_{\gamma}[f], \quad \operatorname{dom}(\mathfrak{t}_{\gamma}) = H^{1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}),$$
 (4.6)

é fechada, densamente definida e limitada inferiormente. Assim, aplicando o Teorema de representação de formas [33, Chapter VI, Section 2.1] existe um operador auto-adjunto τ_{γ} associado com a forma quadrática \mathfrak{t}_{γ} tal que, τ_{γ} : $\mathrm{dom}(\tau_{\gamma}) \subseteq L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, com domínio

$$dom(\tau_{\gamma}) = \left\{ v \in dom(\mathfrak{t}_{\gamma}) : \exists w \in L^{2}(\mathbb{R}) \text{ t.q. } \forall z \in dom(\mathfrak{t}_{\gamma}), \mathfrak{t}_{\gamma}[v, z] = (w, z) \right\},\,$$

onde $\mathfrak{t}_{\gamma}[\cdot,\cdot]$ é definida na Observação 4.1 abaixo, e tal que $\tau_{\gamma}v := w$ para toda $v \in \text{dom}(\tau_{\gamma})$. Nós vamos mostrar agora que $\mathcal{H}_{\gamma} = \tau_{\gamma}$. De fato, aplicando a fórmula de integração por partes obtemos para $v \in \text{dom}(\mathcal{H}_{\gamma})$ e $z \in \text{dom}(\mathfrak{t}_{\gamma}) = H^{1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$,

$$\begin{split} \left(\mathcal{H}_{\gamma}v,z\right) = &\Re \int_{-\infty}^{0} \left(-v''(x)\right) \overline{z(x)} \, dx + \Re \int_{0}^{+\infty} \left(-v''(x)\right) \overline{z(x)} \, dx \\ = &\Re \int_{\mathbb{R}} v'(x) \overline{z'(x)} \, dx + \Re \left[v'(0) \left(\overline{z(0+)} - \overline{z(0-)}\right)\right] \\ = &\Re \int_{\mathbb{R}} v'(x) \overline{z'(x)} \, dx - \gamma^{-1} \Re \left[\left(v(0+) - v(0-)\right) \left(\overline{z(0+)} - \overline{z(0-)}\right)\right]. \end{split}$$

Logo, da Observação 4.1 abaixo temos que $\mathfrak{t}_{\gamma}[v,z] = (\mathcal{H}_{\gamma}v,z)$ para toda $z \in \text{dom}(\mathfrak{t}_{\gamma})$. Assim, $\text{dom}(\mathcal{H}_{\gamma}) \subseteq \text{dom}(\tau_{\gamma})$ e $\tau_{\gamma}v = \mathcal{H}_{\gamma}v$. Portanto, $\mathcal{H}_{\gamma} \subseteq \tau_{\gamma}$ e da simetria do operador τ_{γ} concluímos que $\mathcal{H}_{\gamma} = \tau_{\gamma}$, pois $\mathcal{H}_{\gamma} \subseteq \tau_{\gamma} \subseteq \tau_{\gamma}^* \subseteq \mathcal{H}_{\gamma}^* = \mathcal{H}_{\gamma}$. Isto mostra que a forma soma \mathfrak{t}_{γ} definida em (4.6) é a forma associada com o operador \mathcal{H}_{γ} .

No seguinte teorema apresentamos algumas propriedades espectrais do operador \mathcal{H}_{γ} .

Teorema 4.2 Seja $-\infty \leq \gamma < \infty$. O espectro essencial do operador \mathcal{H}_{γ} é o eixo real não negativo, $\sigma_{ess}(\mathcal{H}_{\gamma}) = [0, \infty)$. Para $\gamma > 0$ o operador \mathcal{H}_{γ} tem exatamente um autovalor negativo, $\sigma_p(\mathcal{H}_{\gamma}) = \left\{-\frac{4}{\gamma^2}\right\}$. Se $\gamma \leq 0$ ou $\gamma = -\infty$ o operador \mathcal{H}_{γ} não tem autovalores, $\sigma_p(\mathcal{H}_{\gamma}) = \emptyset$.

Demonstração: Como foi mostrado acima, o operador \mathcal{S} definido em (4.2) é simétrico, fechado e tem índices de deficiência dados por $n_+(\mathcal{S}) = 1$ e $n_-(\mathcal{S}) = 1$. Em adição, o Teorema 4.1 implica que o operador \mathcal{H}_{γ} é uma extensão autoadjunta de \mathcal{S} . Do [49, Theorem 8.18] todas as extensões auto-adjuntas tem o mesmo espectro essencial; assim, $\sigma_{ess}(\mathcal{H}_{\gamma}) = \sigma_{ess}(-\Delta) = [0, \infty)$. Em seguida estudamos o espectro discreto de \mathcal{H}_{γ} . O fato que para $\gamma < 0$ a forma quadrática \mathfrak{t}_{γ} associada com o operador \mathcal{H}_{γ} é positiva, implica que $\sigma_p(\mathcal{H}_{\gamma}) = \emptyset$. Por outro lado, para $\gamma > 0$ definimos função a anti-simétrica

$$\phi_{\gamma}(x) := \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{|x|}\right) e^{-\frac{\gamma}{2}|x|} \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

um cálculo simples mostra que $\mathfrak{t}_{\gamma}[\phi_{\gamma}] = -4/\gamma^2$, logo, o operador \mathcal{H}_{γ} tem pelo menos um autovalor negativo. Em adição, como $\mathcal{S} \geq 0$ sobre dom (\mathcal{S}) temos do Lema A.3 no Apêndice que \mathcal{H}_{γ} tem, no máximo, um autovalor negativo. Do exposto acima, concluímos que \mathcal{H}_{γ} tem exatamente um autovalor negativo simples. Isto termina a prova.

Observação 4.1 Uma aplicação da identidade de polarização e (4.6) mostra que para $u, v \in H^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$,

$$\mathfrak{t}_{\gamma}[u,v] = \Re \int_{\mathbb{R}} u'(x) \overline{v'(x)} dx - \gamma^{-1} \Re \left[\left(u(0+) - u(0-) \right) \overline{\left(v(0+) - v(0-) \right)} \right].$$

Em particular, $\mathfrak{t}_{\gamma}[u] = \|u'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - \gamma |u'(0)|^2$ para toda $u \in \text{dom}(\mathcal{H}_{\gamma})$; o que justifica o nome de δ' -interação para o operador \mathcal{H}_{γ} .

4.2 O espaço de energia

Nesta seção vamos definir o espaço de energia sobre o qual será estudada a equação de Schrödinger logarítmica com um δ' potencial. Em primeiro lugar, vamos analisar com mais detalhe o domínio da forma associada com a δ' -interação: $H^1(\mathbb{R}\setminus\{0\})$. Por simplicidade de notação, definimos $\Sigma:=H^1(\mathbb{R}\setminus\{0\})$. É claro que Σ é um espaço de Hilbert real equipado com a norma $\|u\|_{\Sigma}^2=\|u'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2+\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$, onde

$$\int_{\mathbb{R}} |u'(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}_+} |u'(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}_-} |u'(x)|^2 dx.$$

Observemos que se $u \in \Sigma$, então u é diferenciável q.t.p. sobre \mathbb{R} e devido à inclusão contínua $H^1(\mathbb{R}_{\pm}) \hookrightarrow C(\overline{\mathbb{R}_{\pm}})$ temos que u é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e os limites

$$u(0+) = \lim_{x \to 0^+} u(x)$$
 e $u(0-) = \lim_{x \to 0^-} u(x)$,

existem. Em adição, é fácil mostrar que existem únicas funções u_+ e $u_- \in H^1_{rad}(\mathbb{R})$ tal que $u = \chi_+ u_+ + \chi_- u_-$, onde χ_+ e χ_- são as funções características em $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ e $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$, respectivamente. De fato, para $u \in \Sigma$ definimos as funções

$$u_{+}(x) = \begin{cases} u(x), & \text{se } x \in \mathbb{R}_{+} \\ u(0+), & \text{se } x = 0 \\ u(-x), & \text{se } x \in \mathbb{R}_{-} \end{cases} \quad \text{e} \quad u_{-}(x) = \begin{cases} u(-x), & \text{se } x \in \mathbb{R}_{+} \\ u(0-), & \text{se } x = 0 \\ u(x), & \text{se } x \in \mathbb{R}_{-}, \end{cases}$$

então u_+ , $u_- \in H^1_{rad}(\mathbb{R})$ e a decomposição $u = \chi_+ u_+ + \chi_- u_-$ é única. Adicionalmente,

$$\|u\|_{\Sigma} = \frac{1}{2} \|u_{+}\|_{H^{1}(\mathbb{R})} + \frac{1}{2} \|u_{-}\|_{H^{1}(\mathbb{R})}, \quad \text{para} \quad u \in \Sigma.$$
 (4.7)

Observação 4.2 Seja $\{u_n\}$ uma sequência em Σ . Se $u_n \to u$ fraco em Σ , então $\mathfrak{t}_{\gamma}[u_n,v] \to \mathfrak{t}_{\gamma}[u,v]$ para toda $v \in \Sigma$. De fato, é claro que se $u_n \to u$ fraco em Σ , então $\mathfrak{t}[u_n,v] \to \mathfrak{t}[u,v]$, onde $\mathfrak{t}[\cdot,\cdot]$ foi definida em (4.4). Por outro lado, para v-fixo a aplicação $u \to \mathfrak{b}_{\gamma}[u,v]$ define um funcional linear continuo de Σ sobre \mathbb{C} . De fato, é fácil mostrar $|\mathfrak{b}_{\gamma}[u,v]| \leq (2/\gamma) ||u||_{\Sigma} ||v||_{\Sigma}$ (ver (4.5)). Assim, da convergência fraca temos que $\mathfrak{b}_{\gamma}[u_n,v] \to \mathfrak{b}_{\gamma}[u,v]$. Isto mostra o resultado, pois, $\mathfrak{t}_{\gamma} = \mathfrak{t} + \mathfrak{b}_{\gamma}$.

Observação 4.3 Notemos que a norma do espaço de Hilbe
t Σ definida acima é equivalente à norma

$$\|u\|_{+}^{2} = \mathfrak{t}_{\gamma}[u] + \left(1 + \frac{4}{\gamma^{2}}\right) \|u\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2}, \quad \text{ para } \quad u \in \Sigma,$$

induzida pela forma quadrática \mathfrak{t}_{γ} . A prova pode ser encontrada em [1, Section 4].

Em seguida descreveremos o dual do espaço de Hilbert Σ . Este espaço será importante no estudo da boa colocação do problema de Cauchy para (4.1).

Proposição 4.1 O espaço dual de Σ é dado por $\Sigma' = H^{-1}(\mathbb{R}) \oplus span \{\tau\}$, onde τ é o funcional linear $u \to \tau(u) = \frac{1}{2}\mathfrak{b}_{\gamma}[f_e, u]$ de Σ sobre \mathbb{C} . Aqui, a função f_e é definida por

$$f_e(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{|x|} \right) e^{-|x|}, \quad para \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Demonstração: A prova segue as ideias desenvolvidas em [1]. Em primeiro lugar, vamos mostrar que $\Sigma = H^1(\mathbb{R}) \oplus \operatorname{span} \{f_e\}$. De fato, se $u \in \Sigma$, é claro que existe $h \in H^1(\mathbb{R})$ tal que $u(x) = (u(0+) - u(0+)) f_e(x) + h(x)$ para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Portanto, precisamos mostrar que $(f_e, h)_{\Sigma} = 0$. Sejam $\varphi_+ = \chi_+ f_e$ e $\varphi_- = \chi_- f_e$. Então, integrando por partes temos

$$(\varphi_+, h)_{\Sigma} = \Re \int_0^{+\infty} e^{-x} h(x) dx - \Re \int_0^{+\infty} e^{-x} h'(x) dx = \Re \{h(0)\}.$$

Similarmente, temos $(\varphi_-,h)_{\Sigma}=-\Re \{h(0)\}$. Assim, concluímos que

$$(f_e, h)_{\Sigma} = (\varphi_+, h)_{\Sigma} + (\varphi_-, h)_{\Sigma} = 0.$$

Isto mostra que $\Sigma = H^1(\mathbb{R}) \oplus \text{span} \{f_e\}$. Por outro lado, aplicando um resultado clássico de análise funcional (ver, por exemplo, [43, Theorem 4.9]) temos que $\Sigma' = H^{-1}(\mathbb{R}) \oplus H^1(\mathbb{R})^{\perp}$, onde

$$H^1(\mathbb{R})^{\perp} = \left\{ \zeta \in \Sigma' : \ \zeta(u) = 0 \ \text{para todo} \ u \in H^1(\mathbb{R}) \right\},$$

é o anulador de $H^1(\mathbb{R})$ em Σ' . Em adição, a dimensão do anulador $H^1(\mathbb{R})^{\perp}$ em Σ' coincide com a dimensão do espaço quociente $\Sigma/H^1(\mathbb{R})$ (ver, por exemplo, [43, Theorem 4.9]), isto é,

$$\dim (H^1(\mathbb{R})^{\perp}) = \dim (\Sigma/H^1(\mathbb{R})) = 1.$$

Portanto, temos que $H^1(\mathbb{R})^{\perp}$ é gerado por um só elemento de Σ' . Agora, devido à continuidade das funções em $H^1(\mathbb{R})$ é fácil mostrar que $\tau \in H^1(\mathbb{R})^{\perp}$, isto é, $H^1(\mathbb{R})^{\perp} = \operatorname{span} \{\tau\}$. Isto termina a prova.

Observação 4.4 Notamos que a decomposição $\Sigma = H^1(\mathbb{R}) \oplus H^1(\mathbb{R})^{\perp}$ pode ser obtida usando o funcionar linear continuo $f: \Sigma \to \mathbb{C}$ definido por f(u) = u(0+) - u(0-) para $u \in \Sigma$. De fato, $\operatorname{Ker} f = H^1(\mathbb{R})$ e $\Sigma = \operatorname{Ker} f \oplus [\operatorname{Ker} f]^{\perp}$. Em particular, $H^1(\mathbb{R})^{\perp}$ e um-dimensional.

Observação 4.5 Como é natural, o operador \mathcal{H}_{γ} pode ser estendido como uma aplicação linear e contínua $u \to \mathcal{H}_{\gamma} u$, de Σ sobre o espaço dual Σ' . De fato, esta ação é definida por

$$\langle \mathcal{H}_{\gamma} u, v \rangle := \mathfrak{t}_{\gamma}[u, v], \quad \text{com } u, v \in \Sigma.$$

Notemos que a continuidade de $\mathcal{H}_{\gamma}u$ como funcional de Σ sobre \mathbb{R} segue da Observação 4.3. Em particular, existe uma constante C > 0 tal que $|\langle \mathcal{H}_{\gamma}u, v \rangle| \leq C \|u\|_{\Sigma} \|v\|_{\Sigma}$.

Em seguida definiremos o espaço de energia sobre o qual estudaremos a dinâmica da equação (4.1). Formalmente, temos duas quantidades conservadas. A primeira é a energia: se u é solução de (4.1) com $u(0) = u_0$ então

$$\mathcal{E}(u(t)) := \frac{1}{2} \mathfrak{t}_{\gamma} [u(t)] - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 \operatorname{Log} |u(t)|^2 dx = \mathcal{E}(u_0). \tag{4.8}$$

A qual pode ser obtida, formalmente, multiplicando (4.1) por $\partial_t \overline{u}$, integrando sobre \mathbb{R} e tomando a parte real. A segunda quantidade conservada é a carga

$$Q(u(t)) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 dx = Q(u_0).$$

Notemos que para que o funcional da energia fique bem definido precisamos duas coisas: a primeira é que a forma quadrática $\mathfrak{t}_{\gamma}[u(t)]$ fique bem definida, isto é, $u(t) \in \mathrm{dom}(\mathfrak{t}_{\gamma})$ para todo t para o qual a solução existe. A segunda é que o termo logarítmico de \mathcal{E} seja finito. Portanto, é natural estudar a dinâmica da equação (4.1) sobre o espaço $W(\mathbb{R}_{\circ}) := \Sigma \cap L^{A}(\mathbb{R})$, equipado com sua norma usual (ver seção 2.1)

$$||u||_{W(\mathbb{R}_{\circ})}^{2} = ||u||_{\Sigma}^{2} + ||u||_{L^{A}(\mathbb{R})}^{2}, \quad \text{para } u \in W(\mathbb{R}_{\circ}).$$

Observamos que o espaço dual de $W(\mathbb{R}_{\circ})$ é dado por $W'(\mathbb{R}_{\circ}) = \Sigma' + L^{\hat{A}}(\mathbb{R})$ (ver Observação 2.1).

A prova do seguinte lema está contida na seção 2.1.

Lema 4.1 O espaço $W(\mathbb{R}_{\circ})$ é de Banach equipado com a norma $\|u\|_{W(\mathbb{R}_{\circ})}^{2} = \|u\|_{\Sigma}^{2} + \|u\|_{L^{A}(\mathbb{R})}^{2}$. Em adição, temos $W(\mathbb{R}_{\circ}) = \{u \in \Sigma : |u|^{2} \operatorname{Log} |u|^{2} \in L^{1}(\mathbb{R})\}$. As inclusões $W(\mathbb{R}_{\circ}) \hookrightarrow \Sigma$ e $W(\mathbb{R}_{\circ}) \hookrightarrow L^{2}(\mathbb{R}) \hookrightarrow W'(\mathbb{R}_{\circ})$ são contínuas.

Observação 4.6 O espaço $W(\mathbb{R}_{\circ})$ pode ser descomposto como soma direta de funções simétricas e funções anti-simétricas. De fato, consideremos o subespaço fechado $\Sigma_{an} := \{f \in \Sigma : f(-x) = -f(x) \text{ para } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ das funções anti simétricas. Em primeiro lugar, vamos mostrar que $\Sigma = \Sigma_{an} \oplus H^1_{rad}(\mathbb{R})$. Seja $u \in \Sigma$, então $u(x) = u_s(x) + u_{an}(x)$ para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, onde $u_s(x)$ é simétrica e $u_{an}(x) \in \Sigma_{an}$. Notemos que toda função simétrica é contínua e portanto $u_s \in H^1_{rad}(\mathbb{R})$. Isto mostra a primeira parte. Por outro lado, a soma direta $\Sigma = \Sigma_{an} \oplus H^1_{rad}(\mathbb{R})$ implica $W(\mathbb{R}_{\circ}) = W_{an}(\mathbb{R}_{\circ}) \oplus W_{rad}(\mathbb{R})$, onde $W_{an}(\mathbb{R}_{\circ}) = \Sigma_{an} \cap L^A(\mathbb{R})$ e $W_{rad}(\mathbb{R}) = H^1_{rad}(\mathbb{R}) \cap L^A(\mathbb{R})$.

4.3 O problema de Cauchy

Nesta seção vamos aplicar o método de compacidade descrito na seção 3.2 para estudar o problema de Cauchy da equação (4.1). Em seguida apresentamos o nosso resultado principal desta seção.

Teorema 4.3 Para toda $u_0 \in W(\mathbb{R}_\circ) = \{u \in \Sigma : |u|^2 \operatorname{Log} |u|^2 \in L^1(\mathbb{R})\}$ existe uma única solução global $u \in C(\mathbb{R}, W(\mathbb{R}_\circ)) \cap C^1(\mathbb{R}, W'(\mathbb{R}_\circ))$ de (4.1) com $u(0) = u_0$ tal que $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t)\|_{W(\mathbb{R}_\circ)} < \infty$. Em adição, a energia \mathcal{E} e a carga \mathcal{Q} são conservadas:

$$\mathcal{E}(u(t)) = \mathcal{E}(u_0), \quad \mathcal{Q}(u(t)) = \mathcal{Q}(u_0), \quad para \ todo \ t \in \mathbb{R}.$$

Adicionalmente, se a condição inicial u_0 pertence $W_{an}(\mathbb{R}_{\circ})$, então a solução u(t) pertence $W_{an}(\mathbb{R}_{\circ})$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Antes de fazer a prova do Teorema 4.3 precisamos de alguns preliminares. Em particular, estudaremos algumas propriedades de compacidade do espaço Σ . Lembramos que para $u \in W(\mathbb{R}_{\circ})$ temos que $u \operatorname{Log} |u|^2 = b(u) - a(u)$, onde $a \in b$ foram definidas na seção 3.2.

Observação 4.7 A desigualdade dada em (2.4) é valida no espaço Σ , isto é, para $u, v \in \Sigma$ existe uma constante C > 0 tal que

$$\int_{\mathbb{R}} |B(|u(x)|) - B(|v(x)|)| \, dx \le C \left(1 + \|u\|_{\Sigma}^2 + \|v\|_{\Sigma}^2\right) \|u - v\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{4.9}$$

De fato, esta desigualdade é consequência direta de (2.4) e da descomposição (4.7).

Lema 4.2 O operador $u \to \mathcal{H}_{\gamma} u - u \operatorname{Log} |u|^2$ é uma aplicação contínua de $W(\mathbb{R}_{\circ})$ sobre $W'(\mathbb{R}_{\circ})$. Em adição, a imagem de um conjunto limitado em $W(\mathbb{R}_{\circ})$ é limitado em $W'(\mathbb{R}_{\circ})$.

Demonstração: Em primeiro lugar, da Observação 4.5 temos que $u \to \mathcal{H}_{\gamma}u : \Sigma \to \Sigma'$ é um operador linear contínuo e portanto, das inclusões contínuas $W(\mathbb{R}_{\circ}) \hookrightarrow \Sigma$ e $\Sigma' \hookrightarrow W'(\mathbb{R}_{\circ})$, obtemos que $u \to \mathcal{H}_{\gamma}u$ é um operador linear contínuo de $W(\mathbb{R}_{\circ})$ sobre $W'(\mathbb{R}_{\circ})$. Por outro lado, dado $\epsilon > 0$ existe C > 0 tal que

$$|b(z) - b(z_0)| \le C(|z|^{\epsilon} + |z_0|^{\epsilon}) |z - z_0|, \quad z, \ z_0 \in \mathbb{C}.$$

Logo, $u \to b(u)$ é uma aplicação contínua de Σ sobre $L^2(\mathbb{R})$. Em particular, do Lema 4.1, temos que $u \to b(u)$ é contínua de $W(\mathbb{R}_{\circ})$ sobre $W'(\mathbb{R}_{\circ})$. Em adição, do Lema 3.1, temos que $u \to a(u)$ é uma aplicação contínua de $L^A(\mathbb{R})$ sobre $L^{\hat{A}}(\mathbb{R})$, assim, $u \to a(u)$ é contínua de $W(\mathbb{R}_{\circ})$ sobre $W'(\mathbb{R}_{\circ})$. Do acima exposto, concluímos

que a aplicação $u \to u \operatorname{Log} |u|^2$ de $W(\mathbb{R}_{\circ})$ sobre $W'(\mathbb{R}_{\circ})$ é contínua. Isso mostra a primeira parte do lema. A segunda parte do lema é consequência da Observação 4.5 e o Lema 3.1.

A seguinte proposição mostra que o funcional da energia é diferenciável em $W(\mathbb{R}_{\circ})$.

Proposição 4.2 O funcional da energia \mathcal{E} é de classe C^1 em $W(\mathbb{R}_{\circ})$. Em adição, sua derivada de Fréchet é dada por $\mathcal{E}'(u) = \mathcal{H}_{\gamma}u - u \operatorname{Log} |u|^2 - u$.

Demonstração: Em primeiro lugar, vamos mostrar que o funcional é continuo. Observemos que

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \mathfrak{t}_{\gamma}[u] + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} A(|u|) dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} B(|u|) dx, \tag{4.10}$$

onde A e B foram definidas em (2.3). Suponhamos que $u_n \to u$ em $W(\mathbb{R}_{\circ})$. Então temos que $u_n \to u$ em Σ , e portanto $\mathfrak{t}_{\gamma}[u_n] \to \mathfrak{t}_{\gamma}[u]$. Agora, o fato que $\{u_n\}$ é limitada em Σ e a desigualdade (4.9) implicam que $B(|u_n|) \to B(|u|)$ em $L^1(\mathbb{R})$. Em adição, como $u_n \to u$ em $L^A(\mathbb{R})$, então do Lema 2.1 temos que $A(|u_n|) \to A(|u|)$ em $L^1(\mathbb{R})$. Assim, de (4.10) concluímos que $\mathcal{E}(u_n) \to \mathcal{E}(u)$, logo, $\mathcal{E} \in C(W(\mathbb{R}_{\circ}), \mathbb{R})$. Por outro lado, um cálculo simples (ver [19, proposição 2.7]) mostra para u, $v \in W(\mathbb{R}_{\circ})$,

$$\lim_{t\to 0} \frac{\mathcal{E}(u+tv) - \mathcal{E}(u)}{t} = \left\langle \mathcal{H}_{\gamma} u - u \operatorname{Log} |u|^2 - u, v \right\rangle_{W(\mathbb{R}_{\circ}) - W'(\mathbb{R}_{\circ})}.$$

Portanto, \mathcal{E} é Gâteaux diferenciável para toda $u \in W(\mathbb{R}_{\circ})$. A continuidade da aplicação $u \to \mathcal{H}_{\gamma} u - u \operatorname{Log} |u|^2 - u$ dada no Lema 4.2 implica que $\mathcal{E} \in C^1(W(\mathbb{R}_{\circ}), \mathbb{R})$. Adicionalmente, a derivada de Fréchet é dada por $\mathcal{E}'(u) = \mathcal{H}_{\gamma} u - u \operatorname{Log} |u|^2 - u$. \square

A prova do Teorema 4.3 segue-se de um argumento de compacidade semelhante ao desenvolvido na seção 3.2: vamos construir uma sequência de soluções globais e limitadas em $C(\mathbb{R}, \Sigma)$, onde a não-linearidade logarítmica é aproximada por uma não-linearidade do tipo polinomial. Então mostramos que alguma subsequência converge em $W(\mathbb{R}_{\circ})$ para uma solução do problema (4.1); mas, para aplicar esse argumento devemos definir uns subespaços de Σ nos quais serão construídas as soluções aproximadas da equação (4.1). De fato, consideremos $\Sigma_k := H_0^1(\Omega_k) \oplus \text{span} \{f_e\}$ subespaço de Σ , onde $\Omega_k := (-k, k)$ é um intervalo aberto de \mathbb{R} e f_e é a função da Proposição 4.1. É claro que Σ_k é um espaço de Hilbert, e pela Proposição 4.1, temos que o dual Σ'_k de Σ_k é dado por $\Sigma'_k = H^{-1}(\Omega_k) \oplus \text{span} \{\tau\}$, onde τ foi definida na Proposição 4.1. A prova do seguinte lema e baseada em [20, Lemma 9.3.6].

Lema 4.3 Seja $\{u^m\} \subset L^{\infty}(\mathbb{R}, \Sigma)$ uma sequência limitada, isto é, existe M > 0 tal que $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|u_m(t)\|_{\Sigma} \leq M$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Se $\{u^m|_{\Omega_k}\}_{m \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $W^{1,\infty}(\mathbb{R}, \Sigma'_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então existe uma subsequência, que ainda denotamos por $\{u_m\}$, e $u \in L^{\infty}(\mathbb{R}, \Sigma)$ tal que temos as seguintes propriedades:

- i) $u|_{\Omega_k} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}, \Sigma_k')$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
- ii) $u^m(t) \rightharpoonup u(t)$ em Σ quando $m \to \infty$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
- iii) Para todo $t \in \mathbb{R}$ existe uma subsequência m_j tal que $u^{m_j}(x,t) \to u(x,t)$ quando $j \to \infty$, q.t.p. $x \in \mathbb{R}$.
- iv) $u^m(x,t) \to u(x,t)$ quando $m \to \infty$, q.t.p. $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Demonstração: Seja $k \in \mathbb{N}$ fixo. Das hipóteses temos que a sequência $\left\{u^m\big|_{\Omega_k}\right\}$ é limitada em $L^\infty(\Omega_k, H^1(\Omega_k \setminus \{0\}))$. Passando a uma subsequência, se necessário, existe (ver [20, Proposition 1.1.2 e Proposition 1.3.12]) $u \in L^\infty(\Omega_k, H^1(\Omega_k \setminus \{0\}))$ tal que $u^m(t) \rightharpoonup u(t)$ fraco em $H^1(\Omega_k \setminus \{0\})$. Agora, fazendo $k \to \infty$ e considerando uma subsequência diagonal, existe $u \in L^\infty(\mathbb{R}, \Sigma)$ tal que $u^m(t)\big|_{\Omega_k} \rightharpoonup u(t)$ fraco em $H^1(\Omega_k \setminus \{0\})$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e todo $t \in \mathbb{R}$. Em particular, $u^m(t) \rightharpoonup u(t)$ fraco em Σ e $u \in L^\infty(\mathbb{R}, \Sigma)$. Isto mostra a propriedade ii). Por outro lado, utilizando o fato que para todo intervalo aberto limitado I, a inclusão $H^1(I) \hookrightarrow C(I)$ é compacta, passando a uma subsequência, se necessário, temos que $u^m(x,t) \to u(x,t)$ quando $m \to \infty$, $q.t.p(x,t) \in \Omega_k \times \mathbb{R}$. Assim, passando a uma sequência diagonal segue-se iii)-iv). Por último, aplicando a Observação 1.3.13 (ii) em [20] concluímos que $u\big|_{\Omega_k} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}, \Sigma'_k)$ e obtemos i). Isto termina a prova.

Demonstração do Teorema 4.3: Seguimos os mesmos passos do Teorema 9.3.4 em [19].

Passo 1: Soluções aproximadas. Sejam

$$a_m(z) := \begin{cases} a(z), & \text{se } |z| \ge \frac{1}{m}; \\ m z a(\frac{1}{m}), & \text{se } |z| \le \frac{1}{m}; \end{cases}$$
 e $b_m(z) := \begin{cases} b(z), & \text{se } |z| \le m; \\ \frac{z}{m} b(m), & \text{se } |z| \ge m; \end{cases}$

Definimos a função $g_m(u) := b_m(u) - a_m(u)$, para $u \in \Sigma$. Temos que g_m é Lipschitz contínua de $L^2(\mathbb{R})$ sobre $L^2(\mathbb{R})$. Do Teorema 3.7.1 e Colorario 3.3.11 em [20] (Ver também [1, Theorem 4.3]) existe uma única solução global $u^m \in C(\mathbb{R}, \Sigma) \cap C^1(\mathbb{R}, \Sigma')$ do problema

$$\begin{cases} i\partial_t u^m - \mathcal{H}_{\gamma} u^m + g_m(u^m) = 0, \\ u^m(0) = u_0. \end{cases}$$
(4.11)

Com a energia e a carga quantidades conservadas:

$$\mathcal{E}_m(u^m(t)) = \mathcal{E}_m(u_0)$$
 e $\mathcal{Q}(u(t)) = \mathcal{Q}(u_0)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, (4.12)

onde

$$\mathcal{E}_m(u) = \frac{1}{2} \mathfrak{t}_{\gamma}[u] + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}} \Phi_m(|u|) dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}} \Psi_m(|u|) dx,$$

e as funções Φ_m e Ψ_m definidas por

$$\Phi_m(z) := \frac{1}{2} \int_0^{|z|} a_m(s) ds \quad \text{e} \quad \Psi_m(z) := \frac{1}{2} \int_0^{|z|} b_m(s) ds.$$

PASSO 2: Estimativas das soluções aproximadas u^m . Pela conservação da carga, a sequência $\{u^m\}$ é limitada em $L^2(\mathbb{R})$. Em adição, para $\epsilon > 0$ existe C > 0 tal que (ver (3.9))

$$\gamma^{-1} |u^m(0+,t) - u^m(0-,t)|^2 \le \epsilon \|\partial_x u^m(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + C \|u^m(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2. \tag{4.13}$$

Logo, utilizando o fato que a sequência $\{\mathcal{E}_m(u^m)\}$ é limitada, a conservação da energia (4.12) e (4.13) implicam

$$||u^m(t)||_{\Sigma}^2 \le ||\Psi_m(u^m(t))||_{L^1(\mathbb{R})} + \epsilon ||\partial_x u^m(t)||_{L^2(\mathbb{R})}^2 + C.$$

Portanto, escolhendo $\epsilon > 0$ apropriado concluímos que a sequência $\{u^m\}$ é limitada em $L^{\infty}(\mathbb{R}, \Sigma)$. Adicionalmente, a sequência $\{g_m(u^m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^{\infty}(\mathbb{R}, L^2(\Omega_k))$ e limitada em $L^{\infty}(\mathbb{R}, \Sigma_k')$. Em particular, a partir de (4.11) seguese que $\{u^m|_{\Omega_k}\}_{m \in \mathbb{N}}$ é limitada em $W^{1,\infty}(\mathbb{R}, \Sigma_k')$.

PASSO 3: Passando o limite. Pelo Passo 2 a sequência $\{u^m\}$ satisfaz as condições do Lema 4.3. Seja $u \in L^{\infty}(\mathbb{R}, \Sigma)$ o limite determinado no Lema 4.3. Sejam $\psi \in C_c(\mathbb{R}) \oplus \operatorname{span} \{f_e\}$ e $\phi \in C_c(\mathbb{R})$. Da igualdade (4.11) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} \langle i u_t^m - \mathcal{H}_{\gamma} u + g_m(u^m), \psi \rangle \, \phi(t) \, dt = 0.$$

Mais explicitamente,

$$\int_{\mathbb{R}} \langle i \, u^m, \psi \rangle \, \phi'(t) \, dt + \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{t}_{\gamma}[u^m, \psi] \phi(t) \, dt + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g_m(u^m) \psi \phi \, dx \, dt = 0.$$
 (4.14)

Por outro lado, seja $h_m(x,t) := g_m(u^m)\psi(x)\phi(t)$. Da propriedade (iv) do Lema 4.3 temos $h_m \to (u \operatorname{Log} |u|^2) \psi \phi$, q.t.p. em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Em adição, é fácil ver que existe uma função f(x,t) integrável em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e positiva tal que $|h_m(x,t)| \leq f(x,t)$, logo,

do Teorema da convergência dominada

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g_m(u^m) \psi \phi \, dx \, dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u \operatorname{Log} |u|^2 \, \psi \phi \, dx \, dt.$$

Adicionalmente, do Lema 4.3(ii) e a Observação 4.2 obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \langle i \, u^m, \psi \rangle \, \phi'(t) \, dt + \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{t}_{\gamma}[u^m, \psi] \phi(t) \, dt = \int_{\mathbb{R}} \langle i \, u, \psi \rangle \, \phi'(t) \, dt + \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{t}_{\gamma}[u, \psi] \phi(t) \, dt.$$

Assim, a igualdade (4.14) implica

$$\int_{\mathbb{R}} \langle i u, \psi \rangle \, \phi'(t) \, dt + \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{t}_{\gamma}[u, \psi] \phi(t) \, dt + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u \operatorname{Log} |u|^2 \, \psi \phi \, dx \, dt = 0.$$

Por conseguinte, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$i\partial_t u - \mathcal{H}_{\gamma} u + u \operatorname{Log} |u|^2 = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma_k', \quad \text{para toda} \quad k \in \mathbb{N}.$$
 (4.15)

Notemos que, do Lema 4.3 (ii) temos $u(0) = u_0$. A conservação da energia, (4.11) e o fato que a sequência $\{u^m\}$ é limitada em $L^{\infty}(\mathbb{R}, \Sigma)$ implicam que $\|\Phi_m(u^m)\|_{L^1(\mathbb{R})}$ é limitada. Agora, aplicando o Lema 4.3(iii) junto com o Lema de Fatou obtemos

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t)\|_{L^{A}(\mathbb{R})}^{2} < \infty,$$

e portanto, como $L^A(\mathbb{R})$ é reflexivo, temos que u é fracamente contínua $\mathbb{R} \to L^A(\mathbb{R})$. Em particular, $u \in L^\infty(\mathbb{R}, L^A(\mathbb{R}))$, e devido ao fato que $u \in L^\infty(\mathbb{R}, \Sigma)$ concluímos $u \in L^\infty(\mathbb{R}, W(\mathbb{R}_\circ))$. Do Lema 4.2 é claro que $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}, W'(\mathbb{R}_\circ))$ e que a equação (4.15) faz sentido no espaço $W'(\mathbb{R}_\circ)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Argumentando como no Passo 3 de Teorema 9.3.4 em [19] concluímos que existe $u \in L^\infty(\mathbb{R}, W(\mathbb{R}_\circ)) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}, W'(\mathbb{R}_\circ))$ que é a solução da equação (4.1). Além disso, a solução é global, $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t)\|_{W(\mathbb{R}_\circ)} < \infty$ e satisfaz

$$\mathcal{E}(u(t)) \leq \mathcal{E}(u_0), \quad \mathcal{Q}(u(t)) = \mathcal{Q}(u_0), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

PASSO 4: Conclusão. Do mesmo argumento do passo 4 do Teorema 9.3.4 em [19] concluímos que existe uma única solução da equação (4.1) com $u \in C(\mathbb{R}, W(\mathbb{R}_{\circ})) \cap C^{1}(\mathbb{R}, W'(\mathbb{R}_{\circ}))$ tal que

$$\mathcal{E}(u(t)) = \mathcal{E}(u_0), \quad \mathcal{Q}(u(t)) = \mathcal{Q}(u_0), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, devido à unicidade da solução obtemos que se o dado inicial u_0 pertence ao espaço das funções anti-simétricas $W_{an}(\mathbb{R}_{\circ})$, então a solução u(t) fica em $W_{an}(\mathbb{R}_{\circ})$ para todo $t \in \mathbb{R}$. De fato, em [3, Theorem 6.11] foi mostrado que

a equação regularizada (4.11) preserva a anti-simetria, isto é, se o dado inicial u_0 pertence a Σ_{an} , então a solução u(t) da equação regularizada pertence a Σ_{an} . Assim, as soluções aproximadas do Passo 1 estão no espaço Σ_{an} , logo, aplicando a propriedade iv) do Lema 4.3 obtemos que o limite encontrado no Passo 3 fica em $W_{an}(\mathbb{R}_{\circ})$. Em conclusão, a solução u(t) pertence a $W_{an}(\mathbb{R}_{\circ})$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Isto termina a prova do resultado. \square

4.4 Existência dos ground states

Nesta seção investigaremos a existência dos ground states para (4.1) no caso onde o δ' -potencial é atrativo. Em adição, daremos algumas caracterizações variacionais destas que serão úteis no estudo de estabilidade orbital.

Definição 4.1 Uma standing wave para (4.1) é uma solução da forma $e^{i\omega t}\varphi(x)$, com $\omega \in \mathbb{R}$ e φ satisfazendo distribucionalmente

$$\begin{cases}
\mathcal{H}_{\gamma}\varphi + \omega\varphi - \varphi \operatorname{Log} |\varphi|^{2} = 0, \\
\varphi \in W(\mathbb{R}_{\circ}) \setminus \{0\}.
\end{cases} (4.16)$$

No Lema 4.4 abaixo, vamos mostrar que qualquer solução da equação elíptica (4.16) está no domínio do operador Hamiltoniano \mathcal{H}_{γ} .

Observação 4.8 Contrariamente ao caso da equação elíptica (3.12) com delta potencial que tem uma única solução (excepto rotações), a equação (4.16) tem múltiplas soluções. A quantidade de soluções vai depender do valor do parâmetro γ ; por exemplo, a função $\varphi(x) = e^{\frac{\omega+1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ é solução da equação (4.16) para todo $\gamma \in \mathbb{R}$. De fato, φ é uma solução clássica de (4.16) em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $\varphi \in \text{dom}(\mathcal{H}_{\gamma})$. Um estudo das soluções desta equação elíptica será dado na próxima seção.

Entre todas as soluções da equação elíptica (4.16) há umas que são especiais devido às suas aplicações físicas. Para estudar essas soluções é conveniente pesquisar algumas caraterizações variacionais associadas com a equação (4.16).

Consideremos o funcional $\mathcal{S}_{\omega,\gamma}:W(\mathbb{R}_{\circ})\to\mathbb{R}$, onde para $u\in W(\mathbb{R}_{\circ})$,

$$S_{\omega,\gamma}(u) = \frac{1}{2} \mathfrak{t}_{\gamma}[u] + \frac{\omega+1}{2} \int_{\mathbb{R}} |u|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |u|^2 \log|u|^2 dx,$$

onde a forma quadrática

$$\mathfrak{t}_{\gamma}[u] = \int_{\mathbb{R}} |u'(x)|^2 dx - \frac{1}{\gamma} |u(0+) - u(0-)|^2,$$

foi definida na seção 4.1. Aplicando a Proposição 4.2 obtemos que o funcional $S_{\omega,\gamma}$

é de classe C^1 em $W(\mathbb{R}_{\circ})$. Em adição, a derivada de Fréchet para $u \in W(\mathbb{R}_{\circ})$ está dada por

$$S'_{\omega,\gamma}(u) = \mathcal{H}_{\gamma}u + \omega u - u \operatorname{Log} |u|^2,$$

no sentido que para $h \in W(\mathbb{R}_{\circ})$,

$$\left\langle \mathcal{S}_{\omega,\gamma}'(u),h\right\rangle =\mathfrak{t}_{\gamma}\left[u,h\right]+\omega\left(u,h\right)-\Re\int_{\mathbb{R}}u\log\left|u\right|^{2}\,\overline{h}\,dx.$$

Notemos que o operador $u \to \mathcal{S}'_{\omega,\gamma}(u)$ é um operador continuo de $W(\mathbb{R}_{\circ})$ sobre o dual $W'(\mathbb{R}_{\circ})$ (ver Lema 4.2). Adicionalmente, u é solução de (4.16) se e somente se $u \in W(\mathbb{R}_{\circ}) \setminus \{0\}$ e $\mathcal{S}'_{\omega,\gamma}(u) = 0$.

O seguinte lema estuda algumas propriedades básicas das soluções da equação elíptica (4.16).

Lema 4.4 Sejam $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $e \omega \in \mathbb{R}$. Qualquer solução $v \in W(\mathbb{R}_{\circ}) \setminus \{0\}$ de (4.16) satisfaz as sequintes propriedades

- i) $v \in C^{j}(\mathbb{R} \setminus \{0\}), j = 1, 2.$
- ii) $-v''(x) + \omega v(x) v(x) \log |v(x)|^2 = 0$ para $x \neq 0$.
- iii) $v'(0+) = v'(0-) e v(0+) v(0-) = -\gamma v'(0+)$.
- iv) $\lim_{|x|\to\infty} v'(x) = 0$, $\lim_{|x|\to\infty} v(x) = 0$.

Demonstração: Seja $\xi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Em primeiro lugar, a definição do operador \mathcal{H}_{γ} implica que $\mathcal{H}_{\gamma}\xi(x) = -\xi''(x)$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Assim, temos que ξv satisfaz

$$-(\xi v)'' + \omega \xi v = -\xi'' v - 2\xi' v' + \xi v \operatorname{Log} |v|^{2}, \qquad (4.17)$$

no sentido das distribuições. Agora, devido ao fato que o lado direito de (4.17) está em $L^2(\mathbb{R})$, pois existe M>0 tal que $\sup_{x\in\mathbb{R}}|v(x)\mathrm{Log}\,|v(x)||^2\leq M$, obtemos que $\xi v\in H^2(\mathbb{R})$. Portanto, do mergulho de Sobolev, $v\in H^2_{loc}(\mathbb{R}\setminus\{0\})\cap C^1(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ e v''(x) existe q.t.p. para $x\in\mathbb{R}$. Agora, de (4.16), a densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ em $L^2(\mathbb{R})$ e o fato que v''(x) existe q.t.p. para $x\in\mathbb{R}$ obtemos a propriedade ii). Em particular, $v\in C^2(\mathbb{R}\setminus\{0\})$. Isto mostra a propriedade i). Por outro lado, como $v\in W(\mathbb{R}_\circ)$, temos que $v(x)\to 0$ quando $|x|\to\infty$. Portanto, a propriedade ii) implica que $v''(x)\to 0$ quando $|x|\to\infty$, assim, $v'(x)\to 0$ quando $|x|\to\infty$. Isto mostra iv).

A seguir mostraremos que a v está no domínio do operador. Em primeiro lugar, por ii) e do Lema A.2 no Apêndice temos que v tem decaimento exponencial em \mathbb{R}_+ e \mathbb{R}_- . Seja $w = -\omega v + v \operatorname{Log} |v|^2$. Então, do decaimento exponencial da v é

claro que $w \in L^2(\mathbb{R})$. Por outro lado, o fato que a v é solução de (4.16) implica

$$\mathfrak{t}_{\gamma}[v,z] = (w,z) \quad \text{para toda} \quad z \in W(\mathbb{R}_{\circ}).$$
 (4.18)

Assim, $v \in \text{dom}(\mathcal{H}_{\gamma}) = \{u \in \Sigma : \exists w \in L^{2}(\mathbb{R}) \text{ t.q. } \forall z \in \Sigma, \ \mathfrak{t}_{\gamma}[u, z] = (w, z)\}$ (ver pág. 52), pois por densidade a igualdade (4.18) tem-se para toda $z \in \Sigma$. Em particular, isto implica a propriedade iii).

Sobre $W(\mathbb{R}_{\circ})$ definimos o funcional de Nehari

$$\mathcal{I}_{\omega,\gamma}(u) := \mathfrak{t}_{\gamma}[u] + \omega \int_{\mathbb{R}} |u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}} |u|^2 \log |u|^2 dx.$$

Notemos que o funcional $\mathcal{I}_{\omega,\gamma}$ é de classe C^1 em $W(\mathbb{R}_{\circ})$. Em particular, do Teorema da função implícita, a variedade de Nehari $\mathcal{M} = \{u \in W(\mathbb{R}_{\circ}) \setminus \{0\}, \mathcal{I}_{\omega,\gamma}(u) = 0\}$ é uma variedade diferenciável de classe C^1 e codimensão um em $W(\mathbb{R}_{\circ})$.

Definimos os ground states, $\mathcal{N}_{\omega,\gamma}$, como o conjunto de minimizadores do funcional $\mathcal{S}_{\omega,\gamma}$ sobre a variedade de Nehari \mathcal{M} . Mais especificamente, se

$$b_{\gamma}(\omega) := \inf \left\{ \mathcal{S}_{\omega,\gamma}(u) : u \in W(\mathbb{R}_{\circ}) \setminus \{0\}, \mathcal{I}_{\omega,\gamma}(u) = 0 \right\}, \tag{4.19}$$

então $\varphi \in \mathcal{N}_{\omega,\gamma}$ se e só se $\mathcal{S}_{\omega,\gamma}(\varphi) = b_{\gamma}(\omega)$ e $\mathcal{I}_{\omega,\gamma}(\varphi) = 0$.

Observação 4.9 Se $\varphi \in \mathcal{N}_{\omega,\gamma}$, então φ é solução da equação elíptica (4.16). De fato, é claro que $\mathcal{I}_{\omega,\gamma}(\varphi) = \partial_{\lambda} \mathcal{S}_{\omega,\gamma}(\lambda \varphi)|_{\lambda=1} = \langle \mathcal{S}'_{\omega,\gamma}(\varphi), \varphi \rangle$. Agora, se $\varphi \in \mathcal{N}_{\omega,\gamma}$ existe um multiplicador $\Lambda \in \mathbb{R}$ de Lagrange tal que $\mathcal{S}'_{\omega,\gamma}(\varphi) = \Lambda \mathcal{I}'_{\omega,\gamma}(\varphi)$. Em particular, $\langle \mathcal{S}'_{\omega,\gamma}(\varphi), \varphi \rangle = \Lambda \langle \mathcal{I}'_{\omega,\gamma}(\varphi), \varphi \rangle$. Agora, dado que $\langle \mathcal{S}'_{\omega,\gamma}(\varphi), \varphi \rangle = \mathcal{I}_{\omega,\gamma}(\varphi) = 0$ e $\langle \mathcal{I}'_{\omega,\gamma}(\varphi), \varphi \rangle = -2 \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 < 0$ obtemos que $\Lambda = 0$, e assim $\mathcal{S}'_{\omega,\gamma}(\varphi) = 0$. Portanto, φ é solução da equação elíptica (4.16).

Observação 4.10 Utilizando o fato que $2S_{\omega,\gamma}(u) = \mathcal{I}_{\omega,\gamma}(u) + ||u||_{L^2(\mathbb{R})}^2$, é fácil mostrar que

$$b_{\gamma}(\omega) = \inf \left\{ \frac{1}{2} \|u\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} : u \in W(\mathbb{R}_{\circ}) \setminus \{0\}, \mathcal{I}_{\omega,\gamma}(u) = 0 \right\},\,$$

onde a quantidade $b_{\gamma}(\omega)$ está definida em (4.19). Em adição, temos que $u \in W(\mathbb{R}_{\circ})$ satisfaz $\|u\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} = 2b_{\gamma}(\omega)$ e $\mathcal{I}_{\omega,\gamma}(u) = 0$ se e só se $\mathcal{S}_{\omega,\gamma}(u) = b_{\gamma}(\omega)$ e $\mathcal{I}_{\omega,\gamma}(u) = 0$.

O seguinte teorema mostra que o conjunto dos ground states $\mathcal{N}_{\omega,\gamma}$ é não vazio.

Teorema 4.4 Sejam $\omega \in \mathbb{R}$ e $\gamma > 0$. Há pelo menos um minimizador do funcional

 $\mathcal{S}_{\omega,\gamma}$ entre todas as funções na variedade de Nehari. Isto é, existe $\varphi \in W(\mathbb{R}_{\circ}) \setminus \{0\}$ tal que

$$S_{\omega,\gamma}(\varphi) = b_{\gamma}(\omega) = \inf \left\{ S_{\omega,\gamma}(u) : u \in W(\mathbb{R}_{\circ}) \setminus \{0\}, \mathcal{I}_{\omega,\gamma}(u) = 0 \right\}.$$

Observação 4.11 A Observação 4.9 implica que o conjunto dos ground states está contido no conjunto das soluções da equação elíptica (4.16). Contudo, devido ao fato que a equação (4.16) tem múltiplas soluções, a identificação dos ground states é mais delicada e será dada na seguinte seção. Notemos que no caso da equação de Schrödinger logarítmica com um δ potencial, a identificação dos ground states foi direta, pois a solução da equação elíptica (3.12), neste caso, é única (sob rotações).

Para provar o Teorema 4.4 precisamos de vários lemas preliminares.

Lema 4.5 Para o problema de minimização (4.19) temos

$$b_{\gamma}(\omega) = \inf \left\{ \frac{1}{2} \|u\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} : u \in W(\mathbb{R}_{\circ}) \setminus \{0\}, \mathcal{I}_{\omega,\gamma}(u) \leq 0 \right\}. \tag{4.20}$$

Em adição, uma função $u \in W(\mathbb{R}_{\circ})$ satisfaz $\|u\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} = 2b_{\gamma}(\omega)$ e $\mathcal{I}_{\omega,\gamma}(u) \leq 0$ se e só se $\mathcal{S}_{\omega,\gamma}(u) = b_{\gamma}(\omega)$ e $\mathcal{I}_{\omega,\gamma}(u) = 0$.

Demonstração: Definamos o problema variacional

$$b_{\gamma,1}(\omega) := \frac{1}{2} \inf \left\{ \|u\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} : u \in W(\mathbb{R}_{\circ}) \setminus \{0\}, \mathcal{I}_{\omega,\gamma}(u) \leq 0 \right\}.$$

Em primeiro lugar, vamos mostrar que $b_{\gamma}(\omega) = b_{\gamma,1}(\omega)$. Seja $u \in W(\mathbb{R}_{\circ})$ tal que $\mathcal{I}_{\omega,\gamma}(u) = 0$. Então, $2\mathcal{S}_{\omega,\gamma}(u) = \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$; portanto, da definição do ínfimo obtemos $b_{\gamma,1}(\omega) \leq d_{\gamma}(\omega)$. Assim, só precisamos mostrar que $b_{\gamma,1}(\omega) \geq b_{\gamma}(\omega)$. Seja $u \in W(\mathbb{R}_{\circ}) \setminus \{0\}$ tal que $\mathcal{I}_{\omega,\gamma}(u) < 0$. É fácil ver que existe $\lambda \in (0,1)$ tal que $\mathcal{I}_{\omega,\gamma}(\lambda u) = 0$, logo, λu está na variedade de Nehari. Assim, da definição de $b_{\gamma}(\omega)$ concluímos

$$b_{\gamma}(\omega) \le S_{\omega,\gamma}(\lambda u) = \frac{\lambda^2}{2} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 < \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2,$$

portanto, $b_{\gamma}(\omega) \leq b_{\gamma,1}(\omega)$. Isto é, $b_{\gamma}(\omega) = b_{\gamma,1}(\omega)$. Agora, de (4.20) é claro que se u minimiza $\mathcal{S}_{\omega,\gamma}$ sobre a variedade de Nehari, então minimiza a $L^2(\mathbb{R})$ -norma sobre $\mathcal{I}_{\omega,\gamma} \leq 0$. Suponha que $\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = 2b_{\gamma}(\omega)$ e $\mathcal{I}_{\omega,\gamma}(u) < 0$ (Notemos que u minimiza a $L^2(\mathbb{R})$ -norma sobre $\mathcal{I}_{\omega,\gamma} \leq 0$). Então, existe $\lambda \in (0,1)$ tal que $\mathcal{I}_{\omega,\gamma}(\lambda u) = 0$ e

$$S_{\omega,\gamma}(\lambda u) < \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = b_{\gamma}(\omega),$$

que é impossível. Isto termina a prova.

O seguinte lema mostra que a quantidade definida em (4.19) é positiva.

Lema 4.6 Sejam $\gamma > 0$ e $\omega \in \mathbb{R}$. Para a quantidade definida em (4.19) temos

$$b_{\gamma}(\omega) \ge \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\omega + 1} e^{-\frac{8}{\gamma^2}}.$$
 (4.21)

Demonstração: Seja $u \in W(\mathbb{R}_{\circ})$. Em primeiro lugar, da decomposição (4.7) e aplicando uma variante da desigualdade de Young

$$\frac{1}{\gamma} |u(0+) - u(0-)|^{2} \leq \frac{2}{\gamma} \left\{ |u(0+)|^{2} + |u(0-)|^{2} \right\}
\leq \frac{1}{\gamma} \left\{ \frac{4}{\gamma} \left[||u_{+}||_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} + ||u_{-}||_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} \right] + \frac{\gamma}{4} \left[||u'_{+}||_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} + ||u'_{-}||_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} \right] \right\}
= \frac{8}{\gamma^{2}} ||u||_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} + \frac{1}{2} ||u'||_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2}.$$
(4.22)

Por outro lado, aplicando a desigualdade de Sobolev logarítmica (2.10) junto com a descomposição dada em (4.7) é fácil mostrar que para $u \in W(\mathbb{R}_{\circ})$,

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 \operatorname{Log} |u(x)|^2 dx \le \frac{1}{2} \|u'\|_{L^2}^2 + \left(\operatorname{Log} \left(2 \|u\|_{L^2}^2 \right) - \left(1 + \operatorname{Log} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \right) \right) \right) \|u\|_{L^2}^2.$$

Agora, utilizando o fato que $\mathcal{I}_{\omega,\gamma}(u) = 0$, (4.22) e a desigualdade anterior obtemos

$$\left(\omega+1+\operatorname{Log}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)-\frac{8}{\gamma^2}\right)\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\leq \left(\operatorname{Log}\left(2\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\right)\right)\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

A qual implica que $\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \geq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{\omega+1}e^{-\frac{8}{\gamma^2}}$. A desigualdade (4.21) segue-se facilmente da Observação 4.10. Isto termina a prova.

No seguinte lema utilizamos os funcionais I_{ω} e S_{ω} , que corresponde aos funcionais $\mathcal{I}_{\omega,\gamma}$ e $\mathcal{S}_{\omega,\gamma}$ na ausência do δ' -potencial, definidos na seção 2.2. Lembramos que a Proposição 2.1 implica que a única função positiva, sob translações e rotações, em $W(\mathbb{R})$ que minimiza o problema variacional

$$d(\omega) := \inf \{ S_{\omega}(u) : u \in W(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, I_{\omega}(u) = 0 \},$$
 (4.23)

é dada por

$$\phi_{\omega}(x) = e^{\frac{\omega+1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x^2}. (4.24)$$

O seguinte lema vai identificar os minimizadores do funcional S_{ω} sobre o conjunto

 $I_{\omega} = 0$, no espaço $W(\mathbb{R}_{\circ})$.

Lema 4.7 O conjunto de minimizadores do problema variacional

$$d^{0}(\omega) := \inf \left\{ S_{\omega}(u) : u \in W(\mathbb{R}_{\circ}) \setminus \{0\}, I_{\omega}(u) = 0 \right\},$$

é dado por $\{e^{i\theta}\chi_+\phi_\omega, e^{i\theta}\chi_-\phi_\omega : \theta \in \mathbb{R}\}$, onde a função ϕ_ω é definida em (4.24) e χ_+ (resp. χ_-) denota a função característica do conjunto \mathbb{R}_+ (resp. \mathbb{R}_-).

Demonstração: Em primeiro lugar, observemos que se $u \in W(\mathbb{R}_{\circ})$, então u é diferenciável q.t.p. sobre \mathbb{R} e satisfaz

$$\|u'\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} = \|u'\|_{L^{2}(\mathbb{R}_{-})}^{2} + \|u'\|_{L^{2}(\mathbb{R}_{+})}^{2}, \quad \|u\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} = \|u\|_{L^{2}(\mathbb{R}_{-})}^{2} + \|u\|_{L^{2}(\mathbb{R}_{+})}^{2}.$$

Argumentando como no Lema 4.6 é possível mostrar que a quantidade $d^0(\omega)$ é positiva. Em adição, aplicando uma prova semelhante à desenvolvida no Lema 4.5 obtemos

$$d^{0}(\omega) = \inf \left\{ \frac{1}{2} \|u\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} : u \in W(\mathbb{R}_{\circ}) \setminus \{0\}, I_{\omega}(u) \le 0 \right\}.$$
 (4.25)

Lembremos da seção 4.2 que, para $u \in W(\mathbb{R}_{\circ})$ existem $u_{+}, u_{-} \in W_{rad}(\mathbb{R})$ tal que $u = \chi_{+}u_{+} + \chi_{-}u_{-}$. Seja $u_{+} \in W_{rad}(\mathbb{R})$ e consideremos a função $\chi_{+}u_{+}$ suportada em \mathbb{R}_{+} e tal que $I_{\omega}(\chi_{+}u_{+}) \leq 0$. Como $I_{\omega}(u_{+}) = 2 I_{\omega}(\chi_{+}u_{+}) \leq 0$, aplicando o Lema 2.5 e a Proposição 2.1 obtemos

$$\frac{1}{2} \|\chi_{+} u_{+}\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} = \frac{1}{4} \|u_{+}\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} \ge \frac{1}{4} \|\phi_{\omega}\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} = \frac{1}{2} \|\chi_{+} \phi_{\omega}\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2}. \tag{4.26}$$

Portanto, $\chi_+\phi_\omega$ minimiza a $L^2(\mathbb{R})$ -norma entre todas as funções em $W(\mathbb{R}_\circ)$ suportadas em \mathbb{R}_+ e sobre o conjunto $I_\omega \leq 0$, pois $2\,I_\omega(\chi_+\phi_\omega) = I_\omega(\phi_\omega) = 0$. Observemos que a igualdade em (4.26) só acontece se $u_+ = \phi_\omega$. De fato, suponhamos que temos a igualdade em (4.26). Então, o fato que $I_\omega(u_+) \leq 0$ implica

$$S_{\omega}(u_{+}) = \frac{1}{2}I_{\omega}(u_{+}) + \frac{1}{2}\|u_{+}\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} \le \frac{1}{2}\|u_{+}\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} = \frac{1}{2}\|\phi_{\omega}\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} = S_{\omega}(\phi_{\omega}),$$

isto é, u_+ minimiza o problema variacional (4.23). Logo, a Proposição 2.1 implica que $u_+(x) = \phi_\omega(x-y)$ para algum $y \in \mathbb{R}$, e da simetria de u_+ obtemos que $u_+(x) = \phi_\omega(x)$. Agora, em geral, para uma função $u \in W(\mathbb{R}_\circ)$ com $u = \chi_+ u_+ + \chi_- u_-$ e $I_\omega(u) \leq 0$ duas alternativas tem-se: $I_\omega(\chi_+ u) \leq 0$ ou $I_\omega(\chi_- u) \leq 0$. Em adição, de (4.26) obtemos

$$\frac{1}{2} \|u\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} \geq \frac{1}{2} \|\chi_{+}\phi_{\omega}\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} \|u\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} \geq \frac{1}{2} \|\chi_{-}\phi_{\omega}\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2},$$

respectivamente. Observemos que, pelo exposto acima, a igualdade nas desigual-

dades acima ocorre somente se $|u_+| = \phi_\omega$ ou $|u_-| = \phi_\omega$, respectivamente. Portanto, devido à simetria rotacional do problema obtemos o resultado.

Observação 4.12 Notemos que ϕ_{ω} não minimiza o problema variacional $d^{0}(\omega)$ definido no Lema 4.7. De fato, $I_{\omega}(\phi_{\omega}) = 0$; contudo,

$$d^{0}(\omega) = S_{\omega}(\chi_{+}\phi_{\omega}) = \frac{1}{2} \|\chi_{+}\phi_{\omega}\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} < \frac{1}{2} \|\phi_{\omega}\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} = S_{\omega}(\phi_{\omega}).$$

Lema 4.8 Seja $\omega \in \mathbb{R}$ e γ positivo. Então, $b_{\gamma}(\omega) < d^{0}(\omega)$.

Demonstração: Do fato que

$$\mathcal{I}_{\omega,\gamma}(\chi_{+}\phi_{\omega}) = I_{\omega}(\chi_{+}\phi_{\omega}) - \gamma^{-1}e^{\omega+1} = -\gamma^{-1}e^{\omega+1} < 0,$$

existe $\lambda \in (0,1)$ tal que $\mathcal{I}_{\omega,\gamma}(\lambda \chi_+ \phi_\omega) = 0$. Portanto, da definição de $b_\gamma(\omega)$ obtemos

$$b_{\gamma}(\omega) \leq \mathcal{S}_{\omega,\gamma}\left(\lambda \chi_{+} \phi_{\omega}\right) = \frac{\lambda^{2}}{2} \left\|\chi_{+} \phi_{\omega}\right\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} < \frac{1}{2} \left\|\chi_{+} \phi_{\omega}\right\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} = d^{0}(\omega).$$

Isto termina aprova.

Observação 4.13 O Lema 4.8 não é valido quando $\gamma < 0$. Isto é, no caso $\gamma < 0$ temos que $d^0(\omega) \leq b_{\gamma}(\omega)$. Para ver este, seja $u \in W(\mathbb{R}_{\circ}) \setminus \{0\}$ descontínua em zero tal que $I_{\omega}(u) = 0$. Devido ao fato que para $\gamma < 0$, $\mathcal{I}_{\omega,\gamma}(u) = -\gamma |u(0+) - u(0-)|^2 > 0$, existe s > 1 tal que $\mathcal{I}_{\omega,\gamma}(su) = 0$. Em adição, como s > 1 obtemos que

$$S_{\omega,\gamma}(su) = s^2 S_{\omega}(u) \ge s^2 d^0(\omega) \ge d^0(\omega),$$

e portanto, por definição de $b_{\gamma}(\omega)$, concluímos $d^{0}(\omega) \leq b_{\gamma}(\omega)$.

Observação 4.14 Notemos que ϕ_{ω} é solução do problema estacionário (4.16) para todo $\gamma \in \mathbb{R}$; não obstante, não minimiza o problema variacional $b_{\gamma}(\omega)$ definido em (4.19). De fato, $\mathcal{I}_{\omega,\gamma}(\phi_{\omega}) = 0$ e pelo Lema 4.8 e Observação 4.12 temos que

$$b_{\gamma}(\omega) < d^{0}(\omega) < S_{\omega}(\phi_{\omega}) = \mathcal{S}_{\omega,\gamma}(\phi_{\omega}).$$

Observação 4.15 Se $u_n \rightharpoonup u$ fraco em $W(\mathbb{R}_{\circ})$ e $u_n(x) \rightarrow u(x)$ q.t.p para $x \in \mathbb{R}$, então

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} \left[|u_n|^2 \log |u_n|^2 - |u_n - u|^2 \log |u_n - u|^2 \right] dx = \int_{\mathbb{R}} |u|^2 \log |u|^2 dx.$$

De fato, a prova é idêntica à que é dada no Lema 2.3.

Demonstração do Teorema 4.4: Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência minimizante do problema variacional (4.19).

PASSO 1. A sequência $\{u_n\}$ é limitada em $W(\mathbb{R}_o)$. Em primeiro lugar, notemos que $\{u_n\}$ é limitada em $L^2(\mathbb{R})$, pois pelo Lema 4.5, $\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \to 2b_{\gamma}(\omega)$. Aplicando a desigualdade de Sobolev logarítmica (2.10), a desigualdade (4.22) e o fato que $\mathcal{I}_{\omega,\gamma}(u_n) = 0$, obtemos para a > 0,

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{a^2}{\pi}\right) \|u_n'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \le \left(\operatorname{Log}\left(\frac{e^{\frac{8}{\gamma^2}}e^{-(\omega+1)}}{a}\right)\right) \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \operatorname{Log}\left(2\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\right) \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Portanto, se a>0 é pequeno, a sequência $\|u_n'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$ é limitada. Em particular, a sequência $\{u_n\}$ é limitada em Σ . Por outro lado, da desigualdade (4.9) obtemos que $\{B(|u_n|)\}$ é limitada em $L^1(\mathbb{R})$. Aplicando novamente o fato que $\mathcal{I}_{\omega,\gamma}(u_n)=0$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} A(|u_n|) \le \int_{\mathbb{R}} B(|u_n|),$$

o qual implica que $\{A(|u_n|)\}$ é limitada em $L^1(\mathbb{R})$, e portanto do Lema 2.1 a sequência $\{u_n\}$ é limitada em $L^A(\mathbb{R})$. Em conclusão, a sequência $\{u_n\}$ é limitada em $W(\mathbb{R}_{\circ})$.

PASSO 2. Existe $\varphi \in W(\mathbb{R}_{\circ}) \setminus \{0\}$ tal que $u_n \rightharpoonup \varphi$ fraco em $W(\mathbb{R}_{\circ})$, quando $n \to \infty$. Pelo Passo 1 e o fato que $W(\mathbb{R}_{\circ})$ é reflexivo, passando a uma subsequência, se necessário, existe $\varphi \in W(\mathbb{R}_{\circ})$ tal que $u_n \rightharpoonup \varphi$ fraco em $W(\mathbb{R}_{\circ})$ e $u_n(x) \to \varphi(x)$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}$. A seguir mostramos que φ é não trivial. É importante notar que a convergência fraca em $W(\mathbb{R}_{\circ})$ implica que

$$\lim_{n \to \infty} u_n(0+) = \varphi(0+) \quad \text{e} \quad \lim_{n \to \infty} u_n(0-) = \varphi(0-). \tag{4.27}$$

De fato, isto e consequência de que $u_n \to \varphi$ fraco em Σ , e portanto da inclusão compacta $H^1((0,1)) \hookrightarrow C([0,1])$ concluímos que $\lim_{n\to\infty} u_n(\epsilon) = \varphi(\epsilon)$ para todo $\epsilon > 0$. Logo, fazendo $\epsilon \to 0$, a convergência uniforme da sequência implica a primeira igualdade em (4.27). A segunda igualdade em (4.27) é mostrada similarmente. Para mostrar que φ é não trivial procedemos por contradição. Suponhamos que $\varphi \equiv 0$. Do limite (4.27) junto com o fato $\mathcal{I}_{\omega,\gamma}(u_n) = 0$ obtemos

$$\lim_{n \to \infty} I_{\omega}(u_n) = \lim_{n \to \infty} \left[\mathcal{I}_{\omega, \gamma}(u_n) + \gamma^{-1} |u_n(0+) - u_n(0-)|^2 \right] = 0.$$

Logo, existem $\lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tal que $I_{\omega}(\lambda_n u_n) = 0$ e $\lambda_n \to 1$, quando $n \to \infty$. Assim, da definição de $d^0(\omega)$ e do Lema 4.7,

$$d^{0}(\omega) \leq \lim_{n \to \infty} S_{\omega}(\lambda_{n} u_{n}) = \lim_{n \to \infty} \lambda_{n}^{2} S_{\omega, \gamma}(u_{n}) = b_{\gamma}(\omega).$$

Portanto, $d^0(\omega) \leq b_{\gamma}(\omega)$. Mas isto é impossível pelo Lema 4.8. Isto mostra que φ é não trivial.

PASSO 3. A função φ está na variedade de Nehari, isto é, $\mathcal{I}_{\omega,\gamma}(\varphi) = 0$. Procedemos por contradição. Suponhamos em primeiro lugar que $\mathcal{I}_{\omega,\gamma}(\varphi) > 0$. Devido à inclusão contínua $\Sigma \hookrightarrow W(\mathbb{R}_{\circ})$, é claro que $u_n \rightharpoonup \varphi$ em Σ . Assim, a partir da convergência fraca em Σ e (4.27), obtemos, quando $n \to \infty$,

$$\mathfrak{t}_{\gamma}[u_n] - \mathfrak{t}_{\gamma}[u_n - \varphi] - \mathfrak{t}_{\gamma}[\varphi] \to 0$$
 (4.28)

$$\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - \|u_n - \varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \to 0.$$
 (4.29)

Aplicando o Passo 1, a Observação 4.15, (4.28) e (4.29) obtemos

$$\mathcal{I}_{\omega,\gamma}(u_n) - \mathcal{I}_{\omega,\gamma}(u_n - \varphi) - \mathcal{I}_{\omega,\gamma}(\varphi) \to 0$$
 quando $n \to \infty$.

Logo, a suposição $\mathcal{I}_{\omega,\gamma}(\varphi) > 0$ implica

$$\lim_{n \to \infty} \mathcal{I}_{\omega, \gamma}(u_n - \varphi) = -\mathcal{I}_{\omega, \gamma}(\varphi) < 0.$$

Por conseguinte, da caraterização variacional dada no Lema 4.5 junto com limite (4.29) temos

$$b_{\gamma}(\omega) \leq \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \|u_n - \varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = b_{\gamma}(\omega) - \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2,$$

que é uma contradição, pois pelo Passo 2, temos $\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 > 0$. Portanto, $\mathcal{I}_{\omega,\gamma}(\varphi) \leq 0$. Agora, suponhamos que $\mathcal{I}_{\omega,\gamma}(\varphi) < 0$. Então, existe $\lambda \in (0,1)$ tal que $\mathcal{I}_{\omega,\gamma}(\lambda\varphi) = 0$. Logo, da definição de $b_{\gamma}(\omega)$ é claro que

$$b_{\gamma}(\omega) \leq S_{\omega,\gamma}(\lambda\varphi) = \frac{\lambda^2}{2} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 < \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \frac{1}{2} \liminf_{n \to \infty} \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = b_{\gamma}(\omega).$$

o qual é impossível. Isto mostra que $\mathcal{I}_{\omega,\gamma}(\varphi)=0$, isto é, φ está na variedade de Nehari.

Passo 4. Conclusão. Do Passo 3 e a definição de $b_{\gamma}(\omega)$ temos

$$b_{\gamma}(\omega) \leq \mathcal{S}_{\omega,\gamma}(\varphi) = \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} \leq \frac{1}{2} \liminf_{n \to \infty} \|u_{n}\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} = b_{\gamma}(\omega),$$

isto é, $b_{\gamma}(\omega) = \mathcal{S}_{\omega,\gamma}(\varphi)$. Isto termina a prova . \square

Observação 4.16 Devido ao Teorema 4.4, o conjunto dos ground states $\mathcal{N}_{\omega,\gamma}$ é não vazio. O número de ground states dependerá do valor do parâmetro γ .

De fato, na seguinte seção identificaremos os elementos de $\mathcal{N}_{\omega,\gamma}$. Em particular, mostraremos que para $0 < \gamma \le 2$ só temos um ground state anti-simétrico e descontinuo; no caso $\gamma > 2$, obtemos dois ground states assimétricos.

Observação 4.17 Notemos que o argumento desenvolvido na prova do Teorema 4.4 não pode ser estendido para o caso $\gamma < 0$. De fato, neste caso, o Lema 4.8 não é valido (ver Observação 4.13) e portanto não é possível garantir que a função φ encontrada no Passo 2 é não trivial.

Observação 4.18 Os ground states também minimizam o funcional da energia sobre as $L^2(\mathbb{R})$ -esferas. Mais precisamente, se $\varphi \in \mathcal{N}_{\omega,\gamma}$,

$$\mathcal{E}(\varphi) = \inf \left\{ \mathcal{E}(u) : u \in W(\mathbb{R}_{\circ}), \ \|u\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} = 2b_{\gamma}(\omega) \right\}. \tag{4.30}$$

De fato, um argumento semelhante ao desenvolvido na Observação 3.6 mostra que

$$S_{\omega,\gamma}(\varphi) = \inf \left\{ S_{\omega,\gamma}(u) : u \in W(\mathbb{R}_{\circ}), \|u\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} = 2b_{\gamma}(\omega) \right\}.$$

A caraterização variacional (4.30) segue-se facilmente da igualdade acima. Em muitos contextos físicos as funções que satisfaz a igualdade (4.30) são chamados ground states.

4.5 Identificação dos ground states

Nesta seção calcularemos explicitamente os ground states associados à equação (4.1). Lembramos que a função $\phi_{\omega}(x) = e^{\frac{\omega+1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ é a única solução positiva (sob rotações e translações) da equação elíptica (2.8). Ao longo desta seção, $\phi_{\omega}^{t_1,t_2}$ denotará a função

$$\phi_{\omega}^{t_1, t_2}(x) := \begin{cases} \phi_{\omega}(x + t_1), & \text{se } x > 0; \\ -\phi_{\omega}(x - t_2), & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

onde $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. No seguinte lema determinamos o perfil dos ground states.

Lema 4.9 Qualquer solução do problema de minimização (4.19) tem a forma $e^{i\theta}\phi_{\omega}^{t_1,t_2}$, onde θ é um numero real arbitrário $e(t_1,t_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ satisfazem o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases}
Log(t_1^2) - Log(t_2^2) = t_1^2 - t_2^2 \\
t_1^{-1} + t_2^{-1} = \gamma.
\end{cases}$$
(4.31)

Demonstração: Seja v um elemento minimizador do problema (4.19). Na Observação 4.9 foi mostrado que v satisfaz a equação elíptica (4.16). Em adição, aplicando a propriedade ii) do Lema 4.4 e o Lema A.2 no Apêndice, existem t_1 , t_2 , θ_1 , θ_2 números reais tal que a solução geral v da equação (4.16) tem a forma

$$v(x) = \begin{cases} e^{i\theta_1} \phi_{\omega}(x + t_1), & \text{se } x > 0; \\ e^{i\theta_2} \phi_{\omega}(x - t_2), & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

Agora, devido ao fato que v é um minimizador do funcional $S_{\omega,\gamma}$, precisamos que $e^{i\theta_1}=-e^{i\theta_2}$. De fato, para t_1 e t_2 fixos esta condição minimiza a quantidade $-\gamma^{-1}|v(0+)-v(0-)|^2$; mais especificamente, seja $F(\theta)=\left|r-e^{i\theta}\right|^2$, onde $\theta\in(0,2\pi]$ e $r=\phi_{\omega}(t_1)/\phi_{\omega}(t_2)$. Então, $|v(0+)-v(0-)|^2=\phi_{\omega}^2(t_2)F(\theta_2-\theta_1)$. Um cálculo simples mostra que em $\theta=\pi$ a função F tem um máximo, isto é, $-\gamma^{-1}|v(0+)-v(0-)|^2$ tem um minimo quando $\theta_2-\theta_1=\pi$. Portanto, $-e^{i\theta_2}=-e^{i(\theta_1+\pi)}=e^{i\theta_1}$. Enquanto os outros termos do funcional $S_{\omega,\gamma}$ permanecem constantes. Adicionalmente, devido à invariância das rotações para o problema variacional podemos supor que $\theta_1=0$ e $\theta_2=\pi$. Isso explica o sinal negativo na função $\phi_{\omega}^{t_1,t_2}$. Finalmente, aplicando a condição de contorno imposta pela δ' -interação, é fácil mostrar que t_1 e t_2 tem que satisfazer o sistema (4.31). De fato, a condição v'(0+)=v'(0-) implica a primeira equação do sistema (4.31): \square

Para identificar explicitamente os ground states, isto é, ver a relação entre t_1 e t_2 , precisamos encontrar o número de soluções do sistema de equações (4.31). Com esse objetivo em mente, temos o seguinte resultado:

Lema 4.10 Seja $\gamma > 2$. A função

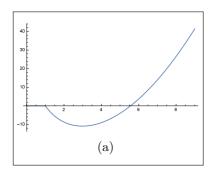
$$h(t) := (t+1)^2 \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) - \gamma^2 \operatorname{Log}\left(t^2\right) \quad \text{para} \ \ t \in \mathbb{R}_+,$$

tem exatamente um zero no intervalo $(1, \infty)$.

Observação 4.19 A função h é obtida substituindo a segunda equação do sistema (4.31) na primeira, e depois fazendo a mudança de variável $t = t_2 \gamma - 1$.

Demonstração: É claro que $h \in C^2(\mathbb{R}_+)$, h(1) = 0 e $h(t) \to \infty$ se $t \to \infty$. Um cálculo simples mostra que $h'(t) = 2t^{-3}(t^4 + t^3 - \gamma^2 t^2 + t + 1)$, em particular, $h'(1) = 2(4 - \gamma^2)$ e portanto h'(1) < 0 para $\gamma > 2$. A partir disso, é claro que existem $x_0, x_1 \in (1, \infty)$ tal que $h(x_0) < 0$ e $h(x_1) > 0$, logo h tem, pelo menos, um zero em $(1, \infty)$. Em seguida, vamos mostrar que esse zero é único. De fato, devido a que $\gamma > 2$ é fácil mostrar que h''(t) > 0 para $t \ge 1$. Logo, h' é estritamente

crescente, isto é, h tem exatamente um zero.



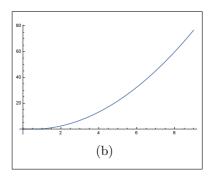


Figura 4.1: Gráfico da função h(t) para $t \ge 1$. (a) $\gamma = 3$; (b) $\gamma = 1$.

Observação 4.20 O Lema 4.10 não é valido para $0 < \gamma \le 2$, isto é, a função h não tem zeros no intervalo $(1, \infty)$. De fato, para $0 < \gamma < 2$ é facil mostrar que h'(t) > 0 para todo $t \in [1, \infty)$. Logo, h é estritamente crescente para $t \ge 1$, h(1) = 0 e $h(t) \to \infty$ se $t \to \infty$. Em conclusão, h não tem zeros em $(1, \infty)$. O caso $\gamma = 2$ trata-se de forma semelhante.

A seguinte observação será útil mais adiante.

Observação 4.21 Se z_0 é o único zero da função h no intervalo $(1, \infty)$, então $z_0\gamma^2 > (z_0+1)^2$. De fato, suponhamos que z_0 é o único zero da função h, isto é,

$$(z_0 + 1)^2 = \gamma^2 \left(\frac{z_0^2}{z_0^2 - 1}\right) \operatorname{Log}(z_0^2).$$

É fácil mostrar que para z > 1 tem-se a desigualdade $z > z^2 (z^2 - 1)^{-1} \operatorname{Log}(z^2)$, e portanto, devido ao fato que $z_0 > 1$ e $\gamma > 2$ obtemos o resultado.

No seguinte lema encontraremos o número de soluções do sistema de equações (4.31); o qual vai depender do valor do parâmetro γ .

Proposição 4.3 Para $0 < \gamma \le 2$ o sistema de equações (4.31) tem uma única solução $(2\gamma^{-1}, 2\gamma^{-1})$. No caso $\gamma > 2$, o sistema tem três pares de soluções, das quais $(2\gamma^{-1}, 2\gamma^{-1})$ é uma delas.

Demonstração: Seja $f(t) := te^{-\frac{1}{2}t^2}$ para $t \ge 0$. É claro que a primeira equação em (4.31) é equivalente à equação $f(t_1) = f(t_2)$. Observemos que f(0) = 0, f é positiva para x > 0, e $f(x) \to 0$ se $x \to \infty$. Em adição, f tem um único ponto crítico em t = 1, o qual é um máximo, com $f(1) = e^{-\frac{1}{2}}$. Como consequência, a

equação $a=f(t_1)=f(t_2)$ não tem solução para $a>e^{-\frac{1}{2}}$; se $a=e^{-\frac{1}{2}}$, há um único par $(1,1)=(t_1,t_2)$ que é solução; e para $0 < a < e^{-\frac{1}{2}}$, impondo a condição $t_1 < t_2$, tem três pares de soluções: (t_1, t_1) , (t_2, t_2) e (t_1, t_2) . De fato, neste caso existe um único par (t_1, t_2) com $t_1 \in (0, 1), t_2 \in (1, \infty)$ tal que $f(t_1) = f(t_2)$. Do exposto acima, é conveniente definir as curvas

$$\mathcal{I}_1 := \{ (t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : t_1 = t_2 \}$$

$$\mathcal{I}_2 := \{ (t_1, t_2) \in (0, 1) \times (1, \infty) : f(t_1) = f(t_2) \}.$$

Devido ao fato que $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ o conjunto \mathcal{I}_2 é uma curva regular em \mathbb{R}^2 . O gráfico de $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$ é apresentado na Figura 4.2. A segunda equação do sistema (4.31) é uma hipérbole dependendo do parâmetro γ . Portanto, a solução do sistema de equações (4.31) é a interseção destas hipérboles com las curvas \mathcal{I}_1 e \mathcal{I}_2 . Para encontrar a intersecção destas curvas é conveniente mostrar que:

$$\inf_{t_1, t_2 \in \mathcal{I}_1} t_1^{-1} + t_2^{-1} = 0, \tag{4.32}$$

$$\inf_{t_1, t_2 \in \mathcal{I}_1} t_1^{-1} + t_2^{-1} = 0,$$

$$\inf_{t_1, t_2 \in \mathcal{I}_2} t_1^{-1} + t_2^{-1} = 2.$$
(4.32)

Como veremos a seguir, uma vez que mostremos (4.32) e (4.33), vai ser fácil encontrar o número de soluções do sistema (4.31). Observemos que a igualdade (4.32) é imediata. No que seque vamos mostrar (4.33). Aplicaremos o método dos multiplicadores de Lagrange e as ideias desenvolvidas em [3, Theorem 5.3]. Em primeiro lugar, notemos que qualquer ponto crítico da função $t_1^{-1}+t_2^{-1}$ restrito à curva \mathcal{I}_2 tem que satisfazer a condição

$$t_1^2 f'(t_1) = -t_2^2 f'(t_2)$$
, onde $t_1 \neq 1$ e $t_2 \neq 1$. (4.34)

Da equação (4.34) segue-se imediatamente que $t_1 - t_1^3 = t_2^3 - t_2$ sobre \mathcal{I}_2 . Em particular, o fato que $t_1 \in (0,1)$ implica que $t_2 \in (1,2\sqrt{3}/3)$. Por outro lado, seja $g(t) := t^2 f'(t)$. É claro que g > 0 em (0,1) e g < 0 em $(1,\infty)$. Isto implica que a condição (4.34) é equivalente a $g^2(t_1) = g^2(t_2)$, onde $0 < t_1 < 1 < t_2 < 2\sqrt{3}/3$. Do fato que $g^2(1) = 0$ obtemos

$$g^{2}(t) = \int_{1}^{t} \frac{d}{ds} g^{2}(s) ds = \int_{1}^{t} \left(4s^{3} \left(f'(s) \right)^{2} + 2s^{4} f'(s) f''(s) \right) ds. \tag{4.35}$$

No intervalo (0,1) a f é crescente, logo é possível fazer a mudança de variável $s \to y = f(s)$ na integral (4.35) e obter

$$g^{2}(t) = \int_{f(1)}^{f(t)} p(\tau(y))dy,$$

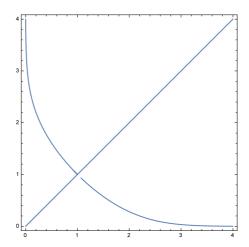


Figura 4.2: O gráfico de $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$

onde τ é a função inversa de f no intervalo (0,1) e

$$p(t) := 4s^3 f'(s) + 2s^4 f''(s) = 2t^3 e^{-\frac{t^2}{2}} (t^4 - 5t^2 + 2).$$

De forma semelhante, se σ é a função inversa da f no intervalo $(1, \infty)$,

$$g^{2}(t) = \int_{f(1)}^{f(t)} p(\sigma(y))dy.$$

Por outro lado, um cálculo simples mostra que se $0 < s_1 < 1 < s_2 < 2\sqrt{3}/3$, então $|p(s_1)| < |p(1)| < |p(s_2)|$. Em particular, devido ao fato que $0 < \tau(y) < 1$, $1 < \sigma(y) < 2\sqrt{3}/3$ e $f(t_1) = f(t_2)$ obtemos

$$g^{2}(t_{1}) = \int_{f(1)}^{f(t_{1})} p(\tau(y)) dy < \int_{f(t_{2})}^{f(1)} |p(\sigma(y))| dy = g^{2}(t_{2}).$$

Isto mostra que $g^2(t_1) < g^2(t_2)$ para $0 < t_1 < 1 < t_2 < 2\sqrt{3}/3$. Em conclusão, $g^2(t_1) = g^2(t_2)$ unicamente quando $t_1 = t_2 = 1$ e portanto não há pontos críticos da função $t_1^{-1} + t_2^{-1}$ sobre a curva \mathcal{I}_2 . Do exposto acima, é claro que o valor do ínfimo é atingido na fronteira da curva \mathcal{I}_2 , isto é, em $t_1 = t_2 = 1$. Isto mostra (4.33).

Como uma consequência de (4.32) e (4.33) obtemos:

- Se $0 < \gamma \le 2$, então de (4.33) temos que as soluções do sistema (4.31) estão sobre a curva \mathcal{I}_1 . Portanto, a única solução do sistema é $t_1 = t_2 = 2\gamma^{-1}$.
- Se $\gamma > 2$, então de (4.32) e (4.33) temos que o sistema (4.31) tem as soluções sobre as curvas \mathcal{I}_1 e \mathcal{I}_2 . A única solução sobre a curva \mathcal{I}_1 é dada por

 $t_1=t_2=2\gamma^{-1}$. Por outro lado, substituindo a segunda equação de (4.31) sobre a primeira equação, obtemos a função h(t) definida no Lema 4.10, onde definimos $t=t_2/t_1=\gamma t_2-1$. Observemos que t>1, pois $\gamma>2$ e $t_2>1$. Aplicando o Lema 4.10, existe um único zero z_0 da função h sobre o intervalo $(1,\infty)$. Assim, $t_2=(z_0+1)\gamma^{-1}$ e $t_1=z_0^{-1}\,t_2$ são as soluções do sistema (4.31) sobre a curva \mathcal{I}_2 . Em conclusão, devido à simetria do sistema (4.31), temos exatamente três pares de soluções: $(2\gamma^{-1},2\gamma^{-1})$, $((z_0+1)\gamma^{-1},z_0^{-1}(z_0+1)\gamma^{-1})$ e $(z_0^{-1}(z_0+1)\gamma^{-1},(z_0+1)\gamma^{-1})$. Isto termina a prova.

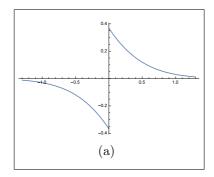
No seguinte teorema mostraremos que para $0 < \gamma \le 2$ existe exatamente um ground state.

Teorema 4.5 Seja $0 < \gamma \le 2$. As soluções do problema de minimização (4.19) estão dadas por $\mathcal{N}_{\omega,\gamma} = \{e^{i\theta}\psi_{\omega,\gamma} : \theta \in \mathbb{R}\}, \text{ onde}$

$$\psi_{\omega,\gamma}(x) := \left(\frac{x}{|x|}\right) e^{\frac{\omega+1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\left(|x| + \frac{2}{\gamma}\right)^2}, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$
 (4.36)

Demonstração: Do Teorema 4.4 o conjunto dos ground states é não vazio. Do Lema 4.9 temos que $\mathcal{N}_{\omega,\gamma} \subseteq \{e^{i\theta}\phi_{\omega}^{t_1,t_2}: \theta \in \mathbb{R}\}$, onde (t_1,t_2) são soluções do sistema de equações (4.31). Agora, aplicando a Proposição 4.3 obtemos que a única solução do sistema para $0 < \gamma \le 2$ é $t_1 = t_2 = 2\gamma^{-1}$, o qual implica que $\psi_{\omega,\gamma}(x) = \phi_{\omega}^{2\gamma^{-1},2\gamma^{-1}}(x)$ é o único ground state. Isto termina a prova.

O perfil do ground state, identificado no Teorema 4.5, para alguns valores de γ e ω pode ser visto na Figura 4.3. Observemos que é uma função anti-simétrica e descontínua.



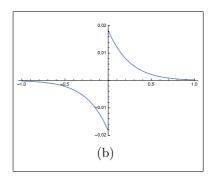


Figura 4.3: Perfil do ground state anti-simétrico para $\omega = 1$. (a) $\gamma = 1$; (b) $\gamma = \frac{1}{2}$.

No seguinte teorema vamos identificar os ground states para $\gamma > 2$. Este caso é mais delicado, devido à existência de múltiplas soluções do sistema (4.31).

Teorema 4.6 Seja $\gamma > 2$. As soluções do problema de minimização (4.19) estão dadas por $\mathcal{N}_{\omega,\gamma} = \left\{ e^{i\theta} \phi_{\omega}^{t_1,t_2}, e^{i\theta} \phi_{\omega}^{t_2,t_1} : \theta \in \mathbb{R} \right\}$, onde (t_1,t_2) é a solução do sistema (4.31) com $t_1 < t_2$. Em adição,

$$\phi_{\omega}^{t_1,t_2}(x) = \left(\frac{x}{|x|}\right)e^{\frac{\omega+1}{2}}e^{-\frac{1}{2}V(x,t_1,t_2)}, \quad \phi_{\omega}^{t_2,t_1}(x) = \left(\frac{x}{|x|}\right)e^{\frac{\omega+1}{2}}e^{-\frac{1}{2}V(x,t_2,t_1)}, \quad para \ x \neq 0,$$

onde para $r, s \in \mathbb{R}$,

$$V(x,r,s) = \begin{cases} (x+r)^2, & para \ x > 0; \\ (x-s)^2, & para \ x < 0. \end{cases}$$

Demonstração: Lembremos que do Teorema 4.4 o conjunto dos ground states é não vazio. Da Proposição 4.3 temos que o sistema (4.31) tem três soluções. Logo, do Lema 4.9 temos que $\mathcal{N}_{\omega,\gamma} \subseteq \left\{e^{i\theta}\phi_{\omega}^{t_1,t_2},\ e^{i\theta}\phi_{\omega}^{t_2,t_1}\ e^{i\theta}\phi_{\omega}^{\alpha,\alpha}:\theta\in\mathbb{R}\right\}$, onde $\alpha:=2\gamma^{-1}$. Por definição, para encontrar os ground states precisamos comparar os valores: $\mathcal{S}_{\omega,\gamma}\left(\phi_{\omega}^{t_1,t_2}\right),\ \mathcal{S}_{\omega,\gamma}\left(\phi_{\omega}^{t_2,t_1}\right)$ e $\mathcal{S}_{\omega,\gamma}\left(\phi_{\omega}^{\alpha,\alpha}\right)$. É claro que $\mathcal{S}_{\omega,\gamma}\left(\phi_{\omega}^{t_1,t_2}\right)=\mathcal{S}_{\omega,\gamma}\left(\phi_{\omega}^{t_2,t_1}\right)$. Assim, só precisamos comparar $\mathcal{S}_{\omega,\gamma}\left(\phi_{\omega}^{t_1,t_2}\right)$ e $\mathcal{S}_{\omega,\gamma}\left(\phi_{\omega}^{\alpha,\alpha}\right)$. De fato, consideremos as seguintes funções

$$\Gamma(t) := \int_{t}^{\infty} e^{-s^2} ds, \quad t \in (0, \infty) \qquad e \qquad \sigma(t) := \frac{t}{\gamma t - 1}, \quad t \in (\gamma^{-1}, \infty). \tag{4.37}$$

É claro que $\Gamma \in C^2(0,\infty)$ e $\sigma \in C^2(\gamma^{-1},\infty)$. Finalmente, seja

$$n_{\gamma}(t) := \Gamma(t) + \Gamma(\sigma(t)), \quad t \in (\gamma^{-1}, \infty).$$

Por definição temos que $n_{\gamma} \in C^2(\gamma^{-1}, \infty)$. Lembrando que $\gamma^{-1} < t_1 < 2\gamma^{-1} < t_2$, um cálculo simples mostra que

$$S_{\omega,\gamma}\left(\phi_{\omega}^{t_1,t_2}\right) = e^{\omega+1} n_{\gamma}(t_1) \qquad e \qquad S_{\omega,\gamma}\left(\phi_{\omega}^{\alpha,\alpha}\right) = e^{\omega+1} n_{\gamma}(2\gamma^{-1}). \tag{4.38}$$

Portanto, precisamos estudar o comportamento da função n_{γ} no intervalo $(\gamma^{-1}, 2\gamma^{-1}]$. Notemos que sua derivada é dada por

$$n'_{\gamma}(t) = \frac{1}{(\gamma t - 1)^2} e^{-(\sigma(t))^2} - e^{-t^2}.$$

Agora, como $t \in (\gamma^{-1}, \infty)$, os pontos críticos da função n_{γ} tem que satisfazer

$$\sigma(t) e^{-\frac{1}{2}(\sigma(t))^2} = t e^{-\frac{1}{2}t^2},$$

a qual é equivalente à primeira equação do sistema (4.31) nas variáveis $(t, \sigma(t))$. Em adição, a partir de (4.37) obtemos $\sigma(t)^{-1}+t^{-1}=\gamma$, que é a segunda equação do sistema (4.31) nas variáveis $(t, \sigma(t))$. Assim, a Proposição 4.3 implica que n_{γ} tem exatamente três pontos críticos: t_1 , $2\gamma^{-1}$ e t_2 . Agora, um cálculo simples mostra que

$$n_{\gamma}''\left(\frac{2}{\gamma}\right) = \frac{2}{\gamma}e^{-\frac{4}{\gamma}}\left(4 - \gamma^2\right),\,$$

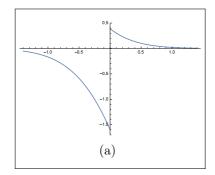
a qual é negativa para $\gamma > 2$. Portanto, n_{γ} tem um máximo em $t = 2\gamma^{-1}$ e como $t_1 < 2\gamma^{-1}$, obtemos que $n_{\gamma}(t_1) < n_{\gamma}(2\gamma^{-1})$. De (4.38) é claro que $\mathcal{S}_{\omega,\gamma}\left(\phi_{\omega}^{t_1,t_2}\right) < \mathcal{S}_{\omega,\gamma}\left(\phi_{\omega}^{\alpha,\alpha}\right)$, isto é, $\phi_{\omega}^{t_1,t_2}$ e $\phi_{\omega}^{t_2,t_1}$ são os únicos minimizadores do problema (4.19). A prova está concluída.

Em relação aos ground states no espaço de funções anti-simétricas $W_{an}(\mathbb{R}_{\circ})$, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.7 Seja $\gamma > 0$. As soluções do problema de minimização (4.19), restringido ao espaço $W_{an}(\mathbb{R}_{\circ})$, estão dadas por $\mathcal{N}_{\omega,\gamma} = \{e^{i\theta}\psi_{\omega,\gamma} : \theta \in \mathbb{R}\}$, onde a função $\psi_{\omega,\gamma}$ é definida em (4.36).

Demonstração: Aplicando o Teorema 4.4 obtemos que o conjunto dos ground states $\mathcal{N}_{\omega,\gamma}$, restringido ao espaço $W_{an}(\mathbb{R}_{\circ})$, é não vazio para todo $\gamma > 0$. Em primeiro lugar, suponhamos que $0 < \gamma \le 2$. A Proposição 4.3 mostra que o sistema de equações (4.31) tem uma única solução. Logo, do Lema 4.9 o único ground states (sob rotações) é dado pela função anti-simétrica $\psi_{\omega,\gamma}$. Por outro lado, no caso $\gamma > 2$, do Lema 4.9 e a Proposição 4.3 obtemos que o conjunto dos ground states está contido em $\{e^{i\theta}\phi_{\omega}^{t_1,t_2}, e^{i\theta}\phi_{\omega}^{t_2,t_1}, e^{i\theta}\psi_{\omega,\gamma}: \theta \in \mathbb{R}\}$, mais a única função anti-simétrica (sob rotações) deste conjunto é $\psi_{\omega,\gamma}$, e portanto obtemos que $\mathcal{N}_{\omega,\gamma} = \{e^{i\theta}\psi_{\omega,\gamma}: \theta \in \mathbb{R}\}$. Isto mostra o resultado.

A Figura 4.4 mostra o perfil dos ground states, identificados no Teorema 4.6, com $\omega=3$ e $\gamma=3$. Notemos que são funções assimétricas e descontínuas.



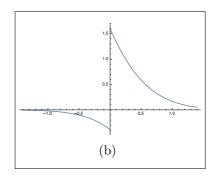


Figura 4.4: Perfil dos ground states assimétricos para $\omega=3$ e $\gamma=3$. (a) ϕ^{t_1,t_2} ; (b) ϕ^{t_2,t_1} .

4.6 Estabilidade dos ground states

Nesta seção mostraremos que os ground states são orbitalmente estáveis no espaço $W(\mathbb{R}_{\circ})$. Seguimos as mesmas ideias da seção 3.4; no entanto, devido à existência de múltiplos ground states a análise é mais delicada. A seguir, apresentamos a definição de estabilidade orbital.

Definição 4.2 Seja φ solução de (4.16). Dizemos que a standing wave $u(x,t) = e^{i\omega t}\varphi(x)$ é orbitalmente estável em $W(\mathbb{R}_\circ)$ (resp. $W_{an}(\mathbb{R}_\circ)$) se para todo $\epsilon > 0$ existe $\eta > 0$ com a seguinte propriedade: se $u_0 \in W(\mathbb{R}_\circ)$ (resp. $W_{an}(\mathbb{R}_\circ)$) e satisfaz $\|u_0 - \varphi\|_{W(\mathbb{R}_\circ)} < \eta$, então a solução u(t) de (4.1) com $u(0) = u_0$ satisfaz

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \inf_{\theta \in \mathbb{R}} \| u(t) - e^{i\theta} \varphi \|_{W(\mathbb{R}_{\circ})} < \epsilon.$$

No caso contrário, a standing wave $u(x,t) = e^{i\omega t}\varphi(x)$ se diz orbitalmente instável em $W(\mathbb{R}_{\circ})$ (resp. $W_{an}(\mathbb{R}_{\circ})$).

Observação 4.22 Da definição 4.2 é claro que a estabilidade orbital em $W(\mathbb{R}_{\circ})$ implica a estabilidade orbital em $W_{an}(\mathbb{R}_{\circ})$. Inversamente, a instabilidade em $W_{an}(\mathbb{R}_{\circ})$ implica a instabilidade em $W(\mathbb{R}_{\circ})$.

Observação 4.23 Na definição de estabilidade orbital só levamos em consideração a simetria em relação às rotações, pois, devido à δ' -interação a equação não tem mais simetria sob translações. Seguindo as mesmas ideias da Observação 3.8 é possível mostrar que a definição de estabilidade é ótima, isto é, se omitimos a simetria U(1) na Definição 4.2, então os ground states são instáveis.

A seguinte proposição será útil no estudo de estabilidade; vai mostrar que qualquer sequência minimizante do problema variacional (4.19) converge, passando a uma subsequência, se necessário, forte em $W(\mathbb{R}_{\circ})$ a um ground state.

Proposição 4.4 Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq W(\mathbb{R}_\circ)$ uma sequência minimizante do problema variacional (4.19), então existe $\varphi\in\mathcal{N}_{\omega,\gamma}$ tal que, passando a uma subsequência, se necessário.

$$||u_n - \varphi||_{W(\mathbb{R}_0)} \to 0$$
 quando $n \to \infty$.

Demonstração: Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência minimizante, então pelo Teorema 4.4 existe $\varphi\in\mathcal{N}_{\omega,\gamma}$ tal que $u_n\rightharpoonup\varphi$ fraco em $W(\mathbb{R}_\circ)$ e $u_n(x)\to\varphi(x)$ q.t.p $x\in\mathbb{R}$. Adicionalmente, observemos que $\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\to\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$, e como $u_n\rightharpoonup\varphi$ fraco em $L^2(\mathbb{R})$, concluímos que $u_n\to\varphi$ em $L^2(\mathbb{R})$. Por outro lado, devido à inclusão contínua $W(\mathbb{R}_\circ)\hookrightarrow\Sigma$, a sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em Σ , logo, aplicando a

desigualdade (4.9) temos

$$\int_{\mathbb{R}} B(|u_n(x)|) dx \to \int_{\mathbb{R}} B(|\varphi(x)|) dx \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$
 (4.39)

Agora, do fato que $u_n \rightharpoonup \varphi$ fraca em Σ e do Lema de Fatou, obtemos respectivamente,

$$\mathfrak{t}_{\gamma}[\varphi] \leq \liminf_{n} \mathfrak{t}_{\gamma}[u_{n}] \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}} A(|\varphi(x)|) \, dx \leq \liminf_{n} \int_{\mathbb{R}} A(|u_{n}(x)|) \, dx. \quad (4.40)$$

Em adição, do fato que $\mathcal{S}_{\omega,\gamma}(u_n) \to \mathcal{S}_{\omega,\gamma}(\varphi)$, $u_n \to \varphi$ em $L^2(\mathbb{R})$ e (4.39) obtemos

$$\lim_{n \to \infty} \left[\mathfrak{t}_{\gamma}[u_n] + \int_{\mathbb{R}} A(|u_n(x)|) \, dx \right] = \mathfrak{t}_{\gamma}[\varphi] + \int_{\mathbb{R}} A(|\varphi(x)|) \, dx. \tag{4.41}$$

Assim, de (4.40) e (4.41) é fácil mostrar (ver [30, Lemma 12, chapter V])

$$\mathfrak{t}_{\gamma}[\varphi] = \lim_{n \to \infty} \mathfrak{t}_{\gamma}[u_n] \quad e \quad \int_{\mathbb{R}} A(|\varphi(x)|) \, dx = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} A(|u_n(x)|) \, dx. \tag{4.42}$$

A primeira igualdade em (4.42) e a Observação 4.3 implicam que $u_n \to \varphi$ em Σ . Por outro lado, a segunda igualdade em (4.42) e o Lema 2.1 implicam que $u_n \to \varphi$ em $L^A(\mathbb{R})$. Portanto, por definição, $u_n \to \varphi$ em $W(\mathbb{R}_\circ)$. Isto termina a prova. \square

O seguinte resultado mostra que, no caso $0<\gamma\leq 2$, o ground state identificado no Teorema 4.5 é orbitalmente estável.

Teorema 4.8 Seja $\omega \in \mathbb{R}$. Para $0 < \gamma \le 2$ a standing wave $e^{i\omega t}\psi_{\omega,\gamma}(x)$ é orbitalmente estável em $W(\mathbb{R}_{\circ})$.

Demonstração: Observemos que para $0 < \gamma \le 2$, o ground state $\psi_{\omega,\gamma}$ dado no Teorema 4.5 é único. Repetindo o mesmo argumento desenvolvido no Teorema 3.5 obtemos a estabilidade. Omitimos os detalhes.

Observação 4.24 Devido ao fato que para $\gamma > 2$ a função $\psi_{\omega,\gamma}$ não é um ground state (ver a prova do Teorema 4.6), não é possível aplicar o mesmo método do Teorema 4.8 para estudar sua estabilidade. A análise da próxima seção sugere que para $\gamma > 2$ a standing wave $e^{i\omega t}\psi_{\omega,\gamma}(x)$ é orbitalmente instável em $W(\mathbb{R}_{\circ})$; no entanto, não temos uma prova deste fato.

No caso $\gamma > 2$ devido à existência de dois ground states, $\phi_{\omega}^{t_1,t_2}$ e $\phi_{\omega}^{t_2,t_1}$ explicitamente identificados no Teorema 4.6, a análise da estabilidade é mais delicada.

Teorema 4.9 Seja $\omega \in \mathbb{R}$. Para $\gamma > 2$ as standing waves $e^{i\omega t}\phi_{\omega}^{t_1,t_2}(x)$ $e e^{i\omega t}\phi_{\omega}^{t_2,t_1}(x)$ são orbitalmente estáveis em $W(\mathbb{R}_{\circ})$.

Demonstração: Procedemos por contradição. Assumimos que a standing wave $e^{i\omega t}\phi_{\omega}^{t_1,t_2}(x)$ é instável em $W(\mathbb{R}_{\circ})$. Então existe $\epsilon>0$ e uma condição inicial $u_{n,0}$ tal que

$$\|u_{n,0} - \phi_{\omega}^{t_1,t_2}\|_{W(\mathbb{R}_0)} \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$
 (4.43)

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \inf_{\theta \in \mathbb{R}} \left\| u_n(t) - e^{i\theta} \phi_{\omega}^{t_1, t_2} \right\|_{W(\mathbb{R}_{\circ})} \ge \epsilon \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.44}$$

onde $u_n(t)$ é a solução de (4.1) com condição inicial $u_{n,0}$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que

$$\epsilon \le \inf_{\theta \in \mathbb{R}} \|\phi_{\omega}^{t_1, t_2} - e^{i\theta} \phi_{\omega}^{t_2, t_1}\|_{W(\mathbb{R}_{\circ})} = \|\phi_{\omega}^{t_1, t_2} - \phi_{\omega}^{t_2, t_1}\|_{W(\mathbb{R}_{\circ})}. \tag{4.45}$$

Seja t_n o primeiro tempo tal que

$$\inf_{\theta \in \mathbb{R}} \left\| u_n(t_n) - e^{i\theta} \phi_\omega^{t_1, t_2} \right\|_{W(\mathbb{R}_\circ)} = \frac{\epsilon}{2}. \tag{4.46}$$

Definimos $v_n(x) := u_n(t_n, x)$. Aplicando a conservação da carga e a energia

$$S_{\omega,\gamma}(v_n) \to S_{\omega,\gamma}(\phi_{\omega}^{t_1,t_2}) = b_{\gamma}(\omega), \quad \text{quando } n \to \infty.$$
 (4.47)

Em adição, a conservação da carga junto com (4.43) implicam que a sequência $\|v_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$ converge a $2b_{\gamma}(\omega)$. Assim, de (4.47) obtemos que $\mathcal{I}_{\omega,\gamma}(v_n) = 2\mathcal{S}_{\omega,\gamma}(v_n) - \|v_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \to 0$ quando $n \to \infty$. Portanto, existem $\{\lambda_n\} \subseteq \mathbb{R}_+$ tal que $\mathcal{I}_{\omega,\gamma}(\lambda_n v_n) = 0$ e $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 1$. Seja $f_n(x) := \lambda_n v_n(x)$. Devido ao fato que $\{v_n\}$ é limitada em $W(\mathbb{R}_\circ)$, é claro que

$$||v_n - f_n||_{W(\mathbb{R}_n)} \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$
 (4.48)

Logo, de (4.47) e (4.48) obtemos que $S_{\omega,\gamma}(f_n) \to b_{\gamma}(\omega)$ e $\mathcal{I}_{\omega,\gamma}(f_n) = 0$, isto é, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência minimizante do problema variacional (4.19). Da Proposição 4.4, existe $\varphi \in \mathcal{N}_{\omega,\gamma}$ tal que, passando a uma subsequência, se necessário,

$$||f_n - \varphi||_{W(\mathbb{R}_0)} \to 0$$
 quando $n \to \infty$. (4.49)

Agora, aplicando o Teorema 4.5 temos que $\varphi = e^{i\theta}\phi_{\omega}^{t_1,t_2}$ ou $\varphi = e^{i\theta}\phi_{\omega}^{t_2,t_1}$ para algum $\theta \in \mathbb{R}$. Em primeiro lugar suponhamos que $\varphi = e^{i\theta}\phi_{\omega}^{t_2,t_1}$. A igualdade (4.46)

e (4.48) implicam, para n suficientemente grande

$$\inf_{\theta \in \mathbb{R}} \left\| f_n - e^{i\theta} \phi_{\omega}^{t_1, t_2} \right\|_{W(\mathbb{R}_o)} \le \left\| v_n - f_n \right\|_{W(\mathbb{R}_o)} + \inf_{\theta \in \mathbb{R}} \left\| u_n(t_n) - e^{i\theta} \phi_{\omega}^{t_1, t_2} \right\|_{W(\mathbb{R}_o)} \\
\le \frac{\epsilon}{10} + \frac{\epsilon}{2} = \frac{3}{5} \epsilon.$$

Logo, existe uma sequência $\{\theta_{n_j}\}\subseteq \mathbb{R}$ tal que

$$\|f_{n_j} - e^{i\theta_{n_j}} \phi_\omega^{t_1, t_2}\|_{W(\mathbb{R}_\circ)} \le \frac{2}{3} \epsilon.$$
 (4.50)

Assim, de (4.45), (4.50) e a desigualdade triangular obtemos

$$||f_{n_{j}} - e^{i\theta}\phi_{\omega}^{t_{2},t_{1}}||_{W(\mathbb{R}_{\circ})} \ge ||e^{i\theta_{n_{j}}}\phi_{\omega}^{t_{1},t_{2}} - e^{i\theta}\phi_{\omega}^{t_{2},t_{1}}||_{W(\mathbb{R}_{\circ})} - ||e^{i\theta_{n_{j}}}\phi_{\omega}^{t_{1},t_{2}} - f_{n_{j}}||_{W(\mathbb{R}_{\circ})}$$

$$\ge \frac{1}{3}\epsilon.$$

O qual é impossível por (4.49). Portanto, $\varphi = e^{i\theta}\phi_{\omega}^{t_1,t_2}$. Agora, aplicando novamente a desigualdade triangular, (4.48) e (4.49) é fácil mostrar que $v_n \to e^{i\theta}\phi_{\omega}^{t_1,t_2}$ em $W(\mathbb{R}_{\circ})$, isto é, $u_n(t_n)$ converge a $e^{i\theta}\phi_{\omega}^{t_1,t_2}$ em $W(\mathbb{R}_{\circ})$; o qual é uma contradição com (4.46). Isto termina a prova.

No seguinte teorema estudamos a estabilidade do ground state $\psi_{\omega,\gamma}$ no espaço das funções anti-simétricas $W_{an}(\mathbb{R}_{\circ})$.

Teorema 4.10 Seja $\omega \in \mathbb{R}$. Para $\gamma > 0$ a standing wave $e^{i\omega t}\psi_{\omega,\gamma}(x)$ é orbitalmente estável em $W_{an}(\mathbb{R}_{\circ})$.

Demonstração: Do Teorema 4.7 obtemos que a função $\psi_{\omega,\gamma}$ é o único ground state (sob rotações) no espaço $W_{an}(\mathbb{R}_{\circ})$. Devido à unicidade, podemos aplicar o mesmo argumento desenvolvido no Teorema 3.5 para concluir que a standing wave $e^{i\omega t}\psi_{\omega,\gamma}(x)$ é orbitalmente estável em $W_{an}(\mathbb{R}_{\circ})$. Nós omitimos os detalhes.

4.7 Linearização e estabilidade

Nas seções anteriores deste capítulo, aplicando um argumento do tipo variacional, foi mostrado que os ground states são orbitalmente estáveis em $W(\mathbb{R}_{\circ})$; no entanto, nenhum resultado sobre instabilidade orbital foi obtido. Nesta seção, usando a teoria abstrata de Grillakis, Shatah and Strauss [28, 29], pesquisamos a estabilidade das standing waves $e^{i\omega t}\psi_{\omega,\gamma}(x)$, $e^{i\omega t}\phi_{\omega}^{t_1,t_2}(x)$ e $e^{i\omega t}\phi_{\omega}^{t_2,t_1}(x)$ para $\gamma>0$ e sobre o espaço de Hilbert $H^1(\mathbb{R}\setminus\{0\})\cap L^2(\mathbb{R};x^2\,dx)$. Em particular, será provado que para $\gamma>2$ a standing wave $e^{i\omega t}\psi_{\omega,\gamma}(x)$ é instável em $H^1(\mathbb{R}\setminus\{0\})\cap L^2(\mathbb{R};x^2\,dx)$. Na análise da estabilidade/instabilidade, uma das maiores dificuldades encontra-se no

cálculo do número de valores próprios negativos de certos operadores linearizados em torno do ground state. Varios métodos baseados em teoremas de tipo oscilação (teoria de Sturm-Liouville), teoria de perturbação analítica e análise variacional tem sido usados. No caso de operadores de tipo δ -interação, recentemente Angulo and Goloshchapova [10] usaram a teoria de extensão de operadores simétricos na análise espectral.

4.7.1 Instabilidade do ground state anti-simétrico

Como foi mencionado na Observação 4.24, para $\gamma > 2$ a estabilidade ou instabilidade da standing wave $e^{i\omega t}\psi_{\omega,\gamma}(x)$ em $W(\mathbb{R}_{\circ})$ não é conhecida (ver Teorema 4.10); contudo, nesta subseção, aplicando a teoria abstrata de Grillakis, Shatah and Strauss [28, 29] obtemos um resultado de instabilidade para essa standing wave num espaço de funções adequado.

Seguindo as ideias em Angulo and Goloshchapova [10], é conveniente escolher o espaço de Hilbert $H_p^1(\mathbb{R}_\circ) = H^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap L^2(\mathbb{R}; x^2 dx)$ para investigar a estabilidade. Observemos que $H_p^1(\mathbb{R}_\circ)$ está contido em $W(\mathbb{R}_\circ)$ (ver [10, Lemma 2.1] para uma ideia da prova).

A boa colocação global em $H_p^1(\mathbb{R}_{\circ})$ do problema de Cauchy para equação (4.1) é garantido pelo seguinte resultado.

Proposição 4.5 Para toda $u_0 \in H_p^1(\mathbb{R}_{\circ})$ existe uma única solução global $u \in C(\mathbb{R}, H_p^1(\mathbb{R}_{\circ}))$ de (4.1) com $u(0) = u_0$. Em adição, a energia \mathcal{E} e a carga \mathcal{Q} definidos em (4.8) são conservadas:

$$\mathcal{E}(u(t)) = \mathcal{E}(u_0), \quad \mathcal{Q}(u(t)) = \mathcal{Q}(u_0), \quad para \ todo \ t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: A prova desta proposição é uma consequência direta do Teorema 4.3 (ver [10, Theorem 2.2]). Omitimos os detalhes.

Com respeito à estabilidade em $H_p^1(\mathbb{R}_{\circ})$ temos o seguinte resultado.

Teorema 4.11 Seja $\omega \in \mathbb{R}$. As seguintes afirmações são verdadeiras.

- (i) Para $\gamma > 2$ a standing wave $e^{i\omega t}\psi_{\omega,\gamma}(x)$ é instável em $H^1_p(\mathbb{R}_\circ)$.
- (ii) Para $0 < \gamma < 2$ a standing wave $e^{i\omega t}\psi_{\omega,\gamma}(x)$ é orbitalmente estável em $H^1_p(\mathbb{R}_\circ)$.

Para $\gamma = 2$, o argumento que nós desenvolvemos para estudar a estabilidade não pode ser aplicado; veja Observação 4.28 abaixo para mais detalhes.

A prova do Teorema 4.11 é uma consequência da teoria abstrata desenvolvida em [28, 29]. O ponto principal é estabelecer as seguintes três condições para o nosso caso:

- (i) O problema de Cauchy: a boa colocação do problema de Cauchy para a equação (4.1) em $H_p^1(\mathbb{R}_{\circ})$.
 - (ii) As condições espectrais:
 - a) O operador auto-adjunto definido por

$$L_{an,\gamma}^1 := -\frac{d^2}{dx^2} + \left(|x| + \frac{2}{\gamma}\right)^2 - 1, \quad \text{dom}\left(L_{an,\gamma}^1\right) = \left\{f \in \text{dom}\left(\mathcal{H}_{\gamma}\right) : x^2 f \in L^2(\mathbb{R})\right\},$$

tem o núcleo Ker $(L_{an,\gamma}^1)$ = span $\{\psi_{\omega,\gamma}\}$ e inf $(\sigma(L_{an,\gamma}^1)\setminus\{0\}) > \epsilon > 0$;

b) O operador auto-adjunto definido por

$$L_{an,\gamma} := -\frac{d^2}{dx^2} + \left(|x| + \frac{2}{\gamma}\right)^2 - 3, \quad \text{dom}\left(L_{an,\gamma}\right) = \left\{f \in \text{dom}\left(\mathcal{H}_{\gamma}\right) : x^2 f \in L^2(\mathbb{R})\right\},$$
(4.51)

tem o núcleo trivial para todo $\gamma \neq 2$, e inf $\left(\sigma\left(L_{an,\gamma}\right) \cap \mathbb{R}_{+}\right) > \epsilon > 0$; enquanto que $\sigma(L_{an,\gamma}) \cap \mathbb{R}_{-} = \sigma_{p}(L_{an,\gamma}) \cap \mathbb{R}_{-} = \left\{\lambda_{j}\right\}_{j=1}^{n}$, onde $n < \infty$;

- c) Determinar o número de valores próprios negativos do operador $L_{an.\gamma}$.
- (iii) O sinal de $\partial_{\omega} \|\psi_{\omega,\gamma}\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2}$.

No final desta subseção será explicado a origem dos operadores $L_{an,\gamma}$, $L^1_{an,\gamma}$ e sua relação com a estabilidade. Observemos que a Proposição 4.5 implica a condição (i). Por outro lado, um cálculo simples mostra que $\partial_{\omega} \|\psi_{\omega,\gamma}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} > 0$ para todo $\omega \in \mathbb{R}$ e $\gamma > 0$. Portanto, precisamos nos concentrar na condição (ii), isto é, nas propriedades espectrais dos operadores $L_{an,\gamma}$ e $L^1_{an,\gamma}$.

Propriedades espectrais de $L_{an,\gamma}$ e $L_{an,\gamma}^1$

Aplicando a teoria de extensão para operadores simétricos de Krein-von Neumann e as idéias desenvolvidas em [9, 10], estudaremos as propriedades espectrais mais importantes dos operadores $L_{an,\gamma}$ e $L^1_{an,\gamma}$. Notemos que só precisamos investigar o espectro do operador $L_{an,\gamma}$; a partir deste, o espectro de $L^1_{an,\gamma}$ será obtido naturalmente devido à relação $L_{an,\gamma} = L^1_{an,\gamma} - 2I$.

Antes de mais nada, é conveniente encontrar a forma quadrática associada com o operador auto-adjunto $L_{an,\gamma}$ (ver Observação 4.25). Por simplicidade de notação, definimos a função $V(x) := (|x| + 2/\gamma)^2$ para $x \in \mathbb{R}$. É conhecido que o operador de multiplicação $f \to V(x)f$ definido sobre o domínio natural

 $\{f\in L^2(\mathbb{R}): x^2f\in L^2(\mathbb{R})\}$ é auto-adjunto em $L^2(\mathbb{R})$ e sua forma associada

$$\mathfrak{m}[f] := \int_{\mathbb{R}} V(x) |f(x)|^2 dx, \quad \operatorname{dom}(\mathfrak{m}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : x f \in L^2(\mathbb{R}) \right\},$$

é fechada e limitada inferiormente. Por outro lado, definimos a seguinte forma soma

$$\mathfrak{L}[f] := \mathfrak{t}_{\gamma}[f] + \mathfrak{m}[f] - 3(f, f), \quad \text{dom}(\mathfrak{L}) = \text{dom}(\mathfrak{t}_{\gamma}) \cap \text{dom}(\mathfrak{m}), \tag{4.52}$$

onde a forma \mathfrak{t}_{γ} foi introduzida na seção 4.1. Notemos que dom $(\mathfrak{L}) = H_p^1(\mathbb{R}_{\circ})$. Do [44, Corollary 10.2] obtemos que a forma \mathfrak{L} é fechada e limitada inferiormente. Aplicando o Teorema de representação de formas [33, Chapter VI, Section 2.1] existe um único operador auto-adjunto $A_{\gamma} : \operatorname{dom}(A_{\gamma}) \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ associado com a forma quadrática \mathfrak{L} , onde definindo $\mathfrak{L}[w,z]$ da forma natural, temos

$$\operatorname{dom}(A_{\gamma}) = \left\{ v \in \operatorname{dom}(\mathfrak{L}) \mid \exists w \in L^{2}(\mathbb{R}) \text{ tal que } \forall z \in \operatorname{dom}(\mathfrak{L}), \mathfrak{L}[v, z] = (w, z) \right\},$$

e tal que para $v \in \text{dom}(A_{\gamma})$, $A_{\gamma}v := w \text{ com } w \text{ sendo a única função de } L^{2}(\mathbb{R})$ satisfazendo $\mathfrak{L}[v,z] = (w,z)$ para toda $z \in \text{dom}(\mathfrak{L})$. O Lema 4.11 abaixo implica que o operador A_{γ} coincide com $L_{an,\gamma}$, isto é, $\text{dom}(A_{\gamma}) = \text{dom}(L_{an,\gamma})$ e $A_{\gamma}v = L_{an,\gamma}v$ para toda $v \in \text{dom}(A_{\gamma})$. Portanto, \mathfrak{L} é a forma quadrática associada com o operador $L_{an,\gamma}$.

A prova do seguinte lema é dada no Apêndice.

Lema 4.11 O operador A_{γ} é dado por

$$A_{\gamma} := -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) - 3, \quad \operatorname{dom}\left(A_{\gamma}\right) = \left\{ f \in \operatorname{dom}(\mathcal{H}_{\gamma}) : x^2 f \in L^2(\mathbb{R}) \right\} = \operatorname{dom}(L_{an,\gamma}).$$

Na seguinte proposição apresentamos algumas propriedades generais sobre o espectro do operador $L_{an,\gamma}$.

Proposição 4.6 O operador auto-adjunto $L_{an,\gamma}$ com domínio $dom(L_{an,\gamma})$ só tem espectro discreto e seus autovalores são simples.

Antes de fazer a prova desta proposição precisamos do seguinte lema auxiliar.

Lema 4.12 O operador

$$T_{an,\gamma} := -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) - 3$$
, $\operatorname{dom}(T_{an,\gamma}) = \{ f \in H^2(\mathbb{R}) : x^2 f \in L^2(\mathbb{R}), f'(0) = 0 \}$,

é simétrico, densamente definido e tem índices de deficiência iguais $n_{\pm}(T_{an,\gamma})=1$.

Demonstração: Consideremos o operador auto-adjunto e positivo

$$A := -\frac{d^2}{dx^2} + V(x), \quad \text{dom}(A) = \left\{ f \in H^2(\mathbb{R}) : x^2 f \in L^2(\mathbb{R}) \right\}. \tag{4.53}$$

Para $s \geq 0$, definimos o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H}_s(A) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \|f\|_{s,2} = \|(A+1)^{s/2} f\| < \infty \right\}.$$

O espaço dual de $\mathcal{H}_s(A)$ será denotado por $\mathcal{H}_{-s}(A) = \mathcal{H}_s(A)'$. Observemos que no caso particular s=2, o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_2(A)$ coincide com o domínio do operador A equipado com a norma do gráfico. É claro que $\mathcal{H}_2(A) \hookrightarrow C^1(\mathbb{R})$. De fato, isto segue-se da inclusão contínua $\mathcal{H}_2(A) \hookrightarrow H^2(\mathbb{R})$ junto com a inclusão de Sobolev $H^2(\mathbb{R}) \hookrightarrow C^1(\mathbb{R})$. Devido a esta inclusão o operador $\delta' : \mathcal{H}_2(A) \to \mathbb{C}$ definido por $\delta'(f) = f'(0)$ é bem definido e contínuo, e assim $\delta' \in \mathcal{H}_{-2}(A)$. Aplicando o Lema 1.2.3 em [8] obtemos que o operador

$$A_0 := -\frac{d^2}{dx^2} + V(x), \quad \text{dom}(A_0) = \{ f \in \text{dom}(A) : f'(0) = 0 \},$$

que é uma restrição de A, é simétrico, densamente definido e tem índices de deficiência iguais $n_{\pm}(A_0)=1$. Em adição, como o operador identidade I é limitado, de [39, Theorem 6] temos que o operador $T_{an,\gamma}=A_0-3I$ é simétrico, densamente definido e tem os mesmos índices de deficiência do operador A_0 . Isto termina a prova.

Observação 4.25 Não é difícil mostrar que o operador adjunto de $T_{an,\gamma}$ é dado por (ver [47, Lemma 4])

$$\begin{cases} T_{an,\gamma}^* = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) - 3\\ \operatorname{dom}(T_{an,\gamma}^*) = \{ u \in H^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}) : x^2 u \in L^2(\mathbb{R}), u'(0+) = u'(0-) \}. \end{cases}$$

Em adição, do Lema 4.12 temos que o operador $T_{an,\gamma}$ tem índices de deficiência iguais $n_{\pm}(T_{an,\gamma})=1$. Assim, aplicando a teoria de von Neumann [44, Theorem 13.10] e seguindo as mesmas ideias como na prova do Teorema 4.1, obtemos que todas as extensões auto-adjuntas do operador $T_{an,\gamma}$ podem ser identificadas por condições de contorno no ponto zero. Mais especificamente, em [47, Proposition 1 and Proposition 2] é mostrado que todas as extensões auto-adjuntas R_{γ} do operador $T_{an,\gamma}$, onde $-\infty < \gamma < \infty$, são dadas por

$$\begin{cases} R_{\gamma} = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) - 3\\ \operatorname{dom}(R_{\gamma}) = \left\{ u \in \operatorname{dom}(T^*_{an,\gamma}) : u(0+) - u(0-) = -\gamma u'(0) \right\}. \end{cases}$$

Notemos que para $\gamma = 0$ obtemos que $\operatorname{dom}(R_0) = \operatorname{dom}(A)$ e $R_0 u = (A - 3I)u$ para toda $u \in \operatorname{dom}(R_0)$, onde o operador A é definido em (4.53). Em adição, para $\gamma \neq 0$ temos que $\operatorname{dom}(R_{\gamma}) = \operatorname{dom}(L_{an,\gamma})$ e $R_{\gamma} u = L_{an,\gamma} u$ para toda $u \in \operatorname{dom}(R_{\gamma})$, onde o operador $L_{an,\gamma}$ é definido em (4.51), isto é, $R_{\gamma} = L_{an,\gamma}$.

Demonstração da Proposição 4.6: Notemos que devido à Observação 4.25 o operador $L_{an,\gamma}$ é uma extensão auto-adjunta do operador simétrico $T_{an,\gamma}$ definido no Lema 4.12. Por outro lado, devido ao fato que $V(x) \to \infty$ quando $|x| \to \infty$, de [12, Theorem 3.1] obtemos que o espectro essencial de $T_{an,\gamma}$ é vazio, $\sigma_{ess}(T_{an,\gamma}) = \emptyset$. Agora, aplicando [49, Theorem 8.18] temos que todas as extensões auto-adjuntas de $T_{an,\gamma}$ tem o mesmo espectro essencial, assim, $\sigma_{ess}(L_{an,\gamma}) = \emptyset$. Isto mostra que o operador $L_{an,\gamma}$ só tem espectro discreto.

Em seguida vamos mostrar que os autovalores de $L_{an,\gamma}$ são simples. Seja λ um autovalor e $f \in \text{dom}(L_{an,\gamma})$ uma autofunção associada. Podemos supor que $f'(0+) = f'(0-) \neq 0$. De fato, caso contrario $f \in \text{dom}(T_{an,\gamma})$ e de [12, Chapter 2, Theorem 3.3] teríamos que λ é simples. Assim, suponhamos que existe $g \in \text{dom}(L_{an,\gamma})$ tal que $L_{an,\gamma}g = \lambda g$. Devido ao fato que f e g estão em $L^2(\mathbb{R})$, e portanto $f(x), g(x) \to 0$ quando $x \to +\infty$, temos que, de [12, Chapter 2, Theorem 3.3], a solução da equação $L_{an,\gamma}\psi = \lambda \psi$ é única (sob um fator constante) sobre $(0, +\infty)$. Um argumento semelhante mostra que a solução da equação $L_{an,\gamma}\psi = \lambda \psi$ é única (sob um fator constante) sobre $(-\infty, 0)$. Logo, existem α e β números reais tal que

$$g = \alpha f$$
 sobre $(0, +\infty)$
 $g = \beta f$ sobre $(-\infty, 0)$.

Agora, como $g \in \text{dom}(L_{an,\gamma})$ e $f'(0+) = f'(0-) \neq 0$, é fácil mostrar que $\alpha = \beta$. Portanto, λ é simples. Notemos que os autovalores podem ser distribuídos da forma $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots \lambda_k$, onde $\lambda_k \to \infty$ quando $k \to \infty$. Isto termina a prova.

Proposição 4.7 Seja γ positivo. O núcleo do operador $L_{an,\gamma}$ é trivial para $\gamma \neq 2$. No caso $\gamma = 2$, o núcleo do operador é gerado pela função simétrica ζ , onde

$$\zeta(x) := (|x|+1) e^{-\frac{1}{2}(|x|+1)^2}$$
 para $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Suponhamos primeiro que $\gamma \neq 2$ e vamos mostrar que o núcleo do operador é trivial. Isto é equivalente a mostrar que a função nula é a única solução do problema $L_{an,\gamma}u = 0$, onde $u \in \text{dom}(L_{an,\gamma})$. Mais especificamente, se

u está no núcleo do operador então

$$u \in H^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \tag{4.54}$$

$$-u'' + (V(x) - 3) u = 0$$
, para todo $x \neq 0$ (4.55)

$$u'(0+) = u'(0-), \quad u(0+) - u(0-) = -\gamma u'(0+).$$
 (4.56)

Observemos que para $\psi_{\omega,\gamma}$ definida em (4.36) temos que $\psi'_{\omega,\gamma}$ é solução de (4.55) em $(0,+\infty)$. Agora, devido ao fato que $u\in L^2(\mathbb{R})$, de [12, Chapter 2, Theorem 3.3] temos que toda solução de (4.55) em $(0,+\infty)$ tem a forma $\alpha \, \psi'_{\omega,\gamma}$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Um argumento semelhante mostra que toda solução em $(-\infty,0)$ tem a forma $\beta \, \psi'_{\omega,\gamma}$ para algum $\beta \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$u = \alpha \, \psi'_{\omega,\gamma}, \text{ sobre } (0, +\infty)$$

 $u = \beta \, \psi'_{\omega,\gamma}, \text{ sobre } (-\infty, 0).$

Agora vemos que $\alpha = -\beta$. Da primeira condição em (4.56) e do fato que $\psi''_{\omega,\gamma}(0+) = -\psi''_{\omega,\gamma}(0-)$ obtemos $\alpha \psi''_{\omega,\gamma}(0+) = -\beta \psi''_{\omega,\gamma}(0+)$. Logo, como $\gamma \neq 2$ temos que $\psi''_{\omega,\gamma}(0+) \neq 0$ e portanto $\alpha = -\beta$. Então,

$$\begin{split} u &= \alpha \, \psi_{\omega,\gamma}', \quad \text{sobre} \quad (0,+\infty) \\ u &= -\alpha \, \psi_{\omega,\gamma}', \quad \text{sobre} \quad (-\infty,0) \, . \end{split}$$

Assim, da segunda condição em (4.56) obtemos $2\alpha \,\psi'_{\omega,\gamma}(0+) = -\gamma \,\alpha \,\psi''_{\omega,\gamma}(0+)$. Mais especificamente,

$$2\alpha \left(\frac{-2}{\gamma}\right) = -\gamma \alpha \left(\frac{4}{\gamma^2} - 1\right),\,$$

onde concluímos que $\alpha = 0$ e portanto $u \equiv 0$ em \mathbb{R} . Isto mostra a primeira parte. Por outro lado, suponhamos que $\gamma = 2$. Um cálculo simples mostra que $\zeta \in \text{dom}(L_{an,2})$ e $L_{an,2}\zeta = 0$. Como o núcleo do operador é unidimensional, concluímos que é igual a span $\{\zeta\}$.

Proposição 4.8 Seja $\gamma > 0$. Então

- i) O operador $L_{an,\gamma}^1$ é não negativo.
- ii) $\sigma_{dis}(L_{an,\gamma}) \subset [-2,+\infty).$

Demonstração: Definamos o operador $L := L^1_{an,\gamma}$ com dom $(L) = \text{dom } (L^1_{an,\gamma})$. A seguir vamos mostrar que o operador L é não negativo. Em primeiro lugar, como $\psi_{\omega,\gamma}(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, é possível mostrar que

$$Lf = -\left(\frac{1}{\psi_{\omega,\gamma}}\right) \frac{d}{dx} \left[\psi_{\omega,\gamma}^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{f}{\psi_{\omega,\gamma}}\right)\right] \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

onde $f \in \text{dom}(L)$. Agora, aplicando a fórmula de integração por partes obtemos

$$(Lf, f) = \int_{-\infty}^{0} \psi_{\omega, \gamma}^{2} \left| \frac{d}{dx} \left(\frac{f}{\psi_{\omega, \gamma}} \right) \right|^{2} dx + \int_{0}^{\infty} \psi_{\omega, \gamma}^{2} \left| \frac{d}{dx} \left(\frac{f}{\psi_{\omega, \gamma}} \right) \right|^{2} dx + \left[f'(x) f(x) - \frac{\psi'_{\omega, \gamma}(x)}{\psi_{\omega, \gamma}(x)} |f(x)|^{2} \right]_{-0}^{+0}.$$

$$(4.57)$$

Os termos integrais em (4.57) são não negativos, logo, precisamos mostrar que o termo não integral da direita é não negativo. Um cálculo simples, usando as condições de fronteira para $f \in \psi_{\omega,\gamma}$, mostra que

$$\left[f'(x) f(x) - \frac{\psi'_{\omega,\gamma}(x)}{\psi_{\omega,\gamma}(x)} |f(x)|^2 \right]_{-0}^{+0} = -\frac{\left| \psi_{\omega,\gamma}(0+) f(0-) - \psi_{\omega,\gamma}(0-) f(0+) \right|^2}{\gamma \psi_{\omega,\gamma}(0+) \psi_{\omega,\gamma}(0-)}.$$

Devido ao fato que o ground state verifica $\psi_{\omega,\gamma}(0+)\psi_{\omega,\gamma}(0-)<0$, e pela hipótese $\gamma>0$, obtemos que o termo não integral em (4.57) e não negativo. Em conclusão, $L\geq 0$ e portanto $L^1_{an,\gamma}\geq 0$. Isto mostra o item i). A prova do item ii) segue-se do item i) e o fato que $L_{an,\gamma}=L^1_{an,\gamma}-2I$.

Observação 4.26 Notemos que para $\gamma < 0$ o argumento desenvolvido na Proposição 4.8 não é aplicável. De fato, neste caso, não é claro de (4.57) que o operador $L^1_{an,\gamma}$ seja não negativo (ver Figura 4.5).

Proposição 4.9 Seja $0 < \gamma \le 2$. O operador $L_{an,\gamma}$ tem exatamente um autovalor negativo.

Demonstração: Consideremos o operador $T_{an,\gamma}$ definido no Lema 4.12. Em primeiro lugar vamos mostrar que para $0 < \gamma \le 2$ o operador $T_{an,\gamma}$ é não negativo. Lembremos que este operador é simétrico, densamente definido e tem índices de deficiência iguais, $n_{\pm}(T_{an,\gamma}) = 1$. Devido ao fato que $\psi'_{\omega,\gamma}(x) \ne 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, um cálculo simples mostra que

$$T_{an,\gamma} f = -\left(\frac{1}{\psi'_{\omega,\gamma}}\right) \frac{d}{dx} \left[\left(\psi'_{\omega,\gamma}\right)^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{f}{\psi'_{\omega,\gamma}}\right) \right] \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$
 (4.58)

onde $f \in \text{dom}(T_{an,\gamma})$. Integrando por partes obtemos a fórmula

$$(T_{an,\gamma}f,f) = \left[f'(x)f(x) - \frac{\psi''_{\omega,\gamma}(x)}{\psi'_{\omega,\gamma}(x)}|f(x)|^2\right]_{-0}^{+0} + \int_{-\infty}^{0} \left(\psi'_{\omega,\gamma}\right)^2 \left|\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{\psi'_{\omega,\gamma}}\right)\right|^2 dx$$
$$+ \int_{0}^{\infty} \left(\psi'_{\omega,\gamma}\right)^2 \left|\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{\psi'_{\omega,\gamma}}\right)\right|^2 dx. \tag{4.59}$$

Observemos que os termos integrais em (4.59) são não negativos. Assim, para mostrar que o operador $T_{an,\gamma}$ é não negativo precisamos mostrar que o termo não integral em (4.59) é não negativo. De fato,

$$\left[f'(x) f(x) - \frac{\psi''_{\omega,\gamma}(x)}{\psi'_{\omega,\gamma}(x)} |f|^2 \right]_{-0}^{+0} = |f(0)|^2 \left(\frac{4 - \gamma^2}{\gamma} \right).$$

Logo, para $0 < \gamma \le 2$ o termo não integral é não negativo. Isto mostra que $T_{an,\gamma} \ge 0$.

Agora, como $L_{an,\gamma}$ é uma extensão auto-adjunta do operador $T_{an,\gamma}$, o qual é não negativo e tem tem índices de deficiência iguais $n_{\pm}(T_{an,\gamma})=1$, do Lema A.3 no Apêndice obtemos que $L_{an,\gamma}$ tem, no máximo, um autovalor negativo. Portanto, como $(L_{an,\gamma}\psi_{\omega,\gamma}, \psi_{\omega,\gamma}) = -2\|\psi_{\omega,\gamma}\|^2$, o operador $L_{an,\gamma}$ tem exatamente um autovalor negativo. Isto termina a prova.

Notemos que para $\gamma > 2$, a Proposição 4.9 não é valida devido ao fato que o operador $T_{an,\gamma}$ já não é claro que seja positivo. É fácil mostrar que $\lambda_0 = -2$ é o primeiro autovalor do operado $L_{an,\gamma}$, com o ground state $\psi_{\omega,\gamma}$ sendo sua autofunção associada. Assim, a Proposição 4.6, Proposição 4.8 e a Proposição 4.9 implicam que o resto do espectro é estritamente positivo para $0 < \gamma < 2$.

Para estudar o espectro negativo do operador $L_{an,\gamma}$ no caso $\gamma > 2$, precisamos do seguinte resultado:

Lema 4.13 O operador $\mathcal{U}_{an,\gamma} := -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) - 3$ definido sobre o domínio,

$$dom (\mathcal{U}_{an,\gamma}) = \{ f \in H^2(\mathbb{R}) : x^2 f \in L^2(\mathbb{R}), f'(0) = f(0) = 0 \},$$

é simétrico, densamente definido e tem índices de deficiência iguais $n_{\pm}(\mathcal{U}_{an,\gamma})=2$.

Demonstração: A prova segue as mesmas ideias desenvolvidas no Lema 4.12. Consideremos o operador auto-adjunto e positivo

$$A := -\frac{d^2}{dx^2} + V(x), \quad \text{dom}(A) = \{ f \in H^2(\mathbb{R}) : x^2 f \in L^2(\mathbb{R}) \}.$$

Para $s \ge 0$, definimos o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H}_s(A) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \|f\|_{s,2} = \|(A+1)^{s/2} f\| < \infty \right\}.$$

O espaço dual de $\mathcal{H}_s(A)$ será denotado por $\mathcal{H}_{-s}(A) = \mathcal{H}_s(A)'$. Devido ao fato que a inclusão $\mathcal{H}_1(A) \hookrightarrow H^1(\mathbb{R})$ é contínua e a inclusão de Sobolev $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow C(\mathbb{R})$ e contínua, obtemos que a inclusão $\mathcal{H}_1(A) \hookrightarrow C(\mathbb{R})$ é contínua; isto implica que o

funcional $\delta: \mathcal{H}_1(A) \to \mathbb{C}$ definido por $\delta(f) = f(0)$ é bem definido e contínuo. Em particular, $\delta \in \mathcal{H}_{-2}(A)$. Por outro lado, foi mostrado no Lema 4.12 que o operador $\delta': \mathcal{H}_2(A) \to \mathbb{C}$ definido por $\delta'(f) = f'(0)$ é bem definido e contínuo, e assim $\delta' \in \mathcal{H}_{-2}(A)$. Portanto, aplicando o Lema A.4 no Apêndice obtemos que a restrição A_0 do operador A sobre o domínio, $\operatorname{dom}(A_0) = \{f \in \operatorname{dom}(A): f(0) = f'(0) = 0 \}$, é simétrico, densamente definido e tem índices de deficiência iguais $n_{\pm}(T_{an,\gamma}) = 2$. Em adição, de [39, Theorem 6] temos que o operador $\mathcal{U}_{an,\gamma} = A_0 - 3I$, $\operatorname{dom}(\mathcal{U}_{an,\gamma}) = \operatorname{dom}(A_0)$, é simétrico, densamente definido e tem os mesmos índices de deficiência do operador A_0 . Isto termina a prova.

Proposição 4.10 Para $\gamma > 2$ o operador $L_{an,\gamma}$ tem exatamente dois autovalores negativos simples.

Demonstração: Consideremos o operador $\mathcal{U}_{an,\gamma}$ definido no Lema 4.13. Aplicando a fórmula (4.59) e o fato que f(0) = f'(0) = 0 obtemos

$$\left(\mathcal{U}_{an,\gamma}f,f\right) = \int_{-\infty}^{0} \left(\psi'_{\omega,\gamma}\right)^{2} \left| \frac{d}{dx} \left(\frac{f}{\psi'_{\omega,\gamma}} \right) \right|^{2} dx + \int_{0}^{\infty} \left(\psi'_{\omega,\gamma}\right)^{2} \left| \frac{d}{dx} \left(\frac{f}{\psi'_{\omega,\gamma}} \right) \right|^{2} dx.$$

Devido ao fato que os termos integrais são não negativos, temos que o operador $\mathcal{U}_{an,\gamma}$ é não negativo. Agora, como os índices de deficiência são $n_{\pm}(\mathcal{U}_{an,\gamma})=2$, de Lema A.3 no Apêndice obtemos que qualquer extensão auto-adjunta de $\mathcal{U}_{an,\gamma}$ tem, máximo, dois valores próprios negativos contando multiplicidades. Em particular, o número de autovalores negativos contando multiplicidades $n(L_{an,\gamma})$ de $L_{an,\gamma}$ (o qual, neste caso, representa o índice de Morse) satisfaz que $n(L_{an,\gamma}) \leq 2$. Adicionalmente, do fato que $(L_{an,\gamma}\psi_{\omega,\gamma}, \psi_{\omega,\gamma}) = -2\|\psi_{\omega,\gamma}\|^2$, o operador tem pelo menos um valor próprio negativo; é fácil mostrar que $\lambda_0 = -2$ é um autovalor com $\psi_{\omega,\gamma}$ sendo sua autofunção associada.

Em seguida vamos mostrar que $L_{an,\gamma}$ tem exatamente dois autovalores negativos simples. Consideremos a função simétrica

$$\zeta_{\gamma}(x) := \left(|x| + \frac{2}{\gamma}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(|x| + \frac{2}{\gamma}\right)^2}, \text{ para } x \in \mathbb{R}.$$

Notemos que $(\zeta_{\gamma}, \psi_{\omega,\gamma}) = 0$, pois $\psi_{\omega,\gamma}$ é anti-simétrica. Em adição, usando o fato que ζ_{γ} satisfaz a equação (4.55) para $x \neq 0$, a fórmula de integração por partes mostra que

$$\mathfrak{L}[\zeta_{\gamma}] = \zeta_{\gamma}(0) \left(\zeta_{\gamma}'(0-) - \zeta_{\gamma}'(0+) \right) = \frac{4}{\gamma^{3}} \left(4 - \gamma^{2} \right) e^{-\frac{4}{\gamma^{4}}} < 0, \tag{4.60}$$

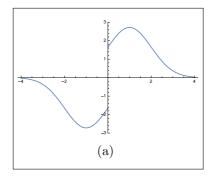
para $\gamma > 2$. Agora, seja $\eta := \alpha \psi_{\omega,\gamma} + \beta \zeta_{\gamma}$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então, de (4.60) obtemos

que

$$\mathfrak{L}[\eta] = \alpha^2 \mathfrak{L}[\psi_{\omega,\gamma}] + \beta^2 \mathfrak{L}[\zeta_{\gamma}] < 0,$$

para $\gamma > 2$. Isto é, a forma quadrática \mathfrak{L} é negativa sobre o subespaço span $\{\psi_{\omega,\gamma}, \zeta_{\gamma}\}$ que tem dimensão dois. Portanto, o número de autovalores negativos contando multiplicidades $n(L_{an,\gamma})$ de $L_{an,\gamma}$ satisfaz que $n(L_{an,\gamma}) \geq 2$. Mais, pelo exposto acima, temos que $n(L_{an,\gamma}) = 2$. Assim, devido à simplicidade do espectro, o operador $L_{an,\gamma}$ tem exatamente dois autovalores negativos simples.

Observação 4.27 Notemos que o método usado na prova dos Lemas 4.9 e 4.10 não pode ser aplicado para estudar o espectro negativo do operador $L_{an,\gamma}$ no caso $\gamma < 0$. De fato, as fórmulas (4.58) e (4.59) não são validas para $\gamma < 0$, pois $\psi'_{\omega,\gamma}(2\gamma^{-1}) = 0$ e $\psi'_{\omega,\gamma}(-2\gamma^{-1}) = 0$ (ver Figura 4.5). Em particular, não é claro se $T_{an,\gamma} \geq 0$ ou $\mathcal{U}_{an,\gamma} \geq 0$ e portanto o argumento de extensão não pode ser aplicado neste caso.



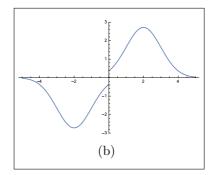


Figura 4.5: Perfil do ground state anti-simétrico para $\omega = 1$. (a) $\gamma = -1$; (b) $\gamma = -2$.

Com respeito às propriedades espectrais do operador $L_{an,\gamma}^1$ temos o seguinte resultado:

Proposição 4.11 O operador auto-adjunto $L^1_{an,\gamma}$ é não negativo, só tem espectro discreto e seus autovalores são simples. Em adição, o núcleo do operador é gerado pela função $\psi_{\omega,\gamma}$.

Demonstração: Em primeiro lugar, a Proposição 4.8 mostra que o operador é não negativo. Da Proposição 4.6 é claro que o operador só tem espectro discreto e seus autovalores são simples. Finalmente, um cálculo simples, mostra que $L^1_{an,\gamma}\psi_{\omega,\gamma}=0$, assim $\mathrm{Ker}(L^1_{an,\gamma})=\mathrm{span}\left\{\psi_{\omega,\gamma}\right\}$.

Demonstração do Teorema 4.11

Nós usamos a teoria abstrata de Grillakis, Shatah and Strauss [28, 29] para provar o Teorema 4.11. Em primeiro lugar, estabelecemos a relação entre a segunda variação de $S_{\omega,\gamma}$ e os operadores auto-adjuntos $L_{an,\gamma}$ e $L^1_{an,\gamma}$. De fato, sejam u, $v \in H^1_p(\mathbb{R}_\circ)$ com $v = v_1 + i v_2$ e $u = u_1 + i u_2$. Fazendo um cálculo simples, a segunda variação de $S_{\omega,\gamma}$ calculada em $\psi_{\omega,\gamma}$ é dada por

$$\mathcal{S}''_{\omega,\gamma}(\psi_{\omega,\gamma})[u,v] = \mathfrak{L}[u_1,v_1] + \mathfrak{L}^1[u_2,v_2],$$

onde \mathfrak{L} é a forma bilinear dada em (4.52) e \mathfrak{L}^1 é a forma definida por

$$\mathfrak{L}^1[f] := \mathfrak{t}_{\gamma}[f] + \mathfrak{m}[f] - (f, f), \quad \operatorname{dom}(\mathfrak{L}^1) = H_n^1(\mathbb{R}_{\circ}).$$

Notemos que do fato que dom $(\mathfrak{L}) = \text{dom}(\mathfrak{L}^1) = H_p^1(\mathbb{R}_\circ)$, a segunda variação $\mathcal{S}''_{\omega,\gamma}(\psi_{\omega,\gamma})$ está bem definida e é um operador linear e contínuo de $H_p^1(\mathbb{R}_\circ)$ sobre $(H_p^1(\mathbb{R}_\circ))'$, o que justifica a escolha do espaço $H_p^1(\mathbb{R}_\circ)$ no estudo da dinâmica da equação (4.1).

Mais especificamente, do fato que $\mathfrak{L}[u_1, v_1] = (L_{an,\gamma}u_1, v_1)$ e $\mathfrak{L}^1[u_2, v_2] = (L_{an,\gamma}u_2, v_2)$ (ver pág. 85) obtemos a representação $\mathcal{S}''_{\omega,\gamma}(\psi_{\omega,\gamma})[u,v] = (L_{an,\gamma}u_1, v_1) + (L^1_{an,\gamma}u_2, v_2)$; portanto, a aplicação sesquilinear $\mathcal{S}''_{\omega,\gamma}(\psi_{\omega,\gamma}) : H^1_p(\mathbb{R}_\circ) \times H^1_p(\mathbb{R}_\circ) \to \mathbb{C}$ pode ser considerada como um operador linear $H_{\omega,\gamma} : H^1_p(\mathbb{R}_\circ) \to (H^1_p(\mathbb{R}_\circ))'$, onde

$$H_{\omega,\gamma}u = L_{an,\gamma}u_1 + i L_{an,\gamma}^1 u_2, \quad \text{para} \quad u = u_1 + i u_2.$$

A seguir, aplicamos o critério de estabilidade ou instabilidade desenvolvido por Grillakis, Shatah and Strauss [29, Instability Theorem and Stability Theorem] para o nosso caso particular. Denotamos por $n(H_{\omega,\gamma})$ o número de autovalores negativos do operador $H_{\omega,\gamma}$ contando multiplicidades (isto é, o índice de Morse de $H_{\omega,\gamma}$).

Proposição 4.12 Sejam $\gamma \neq 2$ e $\omega \in \mathbb{R}$. As seguintes afirmações são verdadeiras: (i) Se $n(H_{\omega,\gamma}) = 2$, então a standing wave $e^{i\omega t}\psi_{\omega,\gamma}(x)$ é instável em $H^1_p(\mathbb{R}_\circ)$. (ii) Se $n(H_{\omega,\gamma}) = 1$, então a standing wave $e^{i\omega t}\psi_{\omega,\gamma}(x)$ é estável em $H^1_p(\mathbb{R}_\circ)$.

Demonstração: Lembrando que $\partial_{\omega} \|\psi_{\omega,\gamma}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 > 0$, a prova desta proposição requer a verificação das *Hipóteses 1,2,3* em [29]. A *Hipótese 1*, existência global de soluções, é uma consequência da Proposição 4.5. A *Hipótese 2*, a existência de uma curva suave de standing wave $\omega \to \psi_{\omega,\gamma}$, é garantida por (4.36). Por outro lado, a *Hipótese 3*, a saber as condições espectrais do operador $H_{\omega,\gamma}$, é garantida pelo Lema 4.14 a seguir. Isto finaliza a prova.

Lema 4.14 Sejam $\gamma \neq 2$ e $\omega \in \mathbb{R}$. As seguintes condições são satisfeitas:

- i) O operador $H_{\omega,\gamma}$ tem um número finito de valores próprios negativos.
- ii) O núcleo do operador $H_{\omega,\gamma}$ é span $\{i \psi_{\omega,\gamma}\}$.
- iii) O resto do espectro de $H_{\omega,\gamma}$ é positivo e está distante de zero.

Demonstração: A prova do item ii) é uma consequência da Proposição 4.7 e Proposição 4.11. Por outro lado, a prova de i) e iii) segue-se da Proposição 4.6 e Proposição 4.11. Isto termina a prova. □

Observação 4.28 Notemos que a Proposição 4.12 (em particular, o Lema 4.14) não é valida para $\gamma=2$; isto é devido ao fato que a Hipótese~3 em [29] não é satisfeita. Mais especificamente, a Proposição 4.7 e Proposição 4.11 implicariam neste caso que o núcleo do operador $H_{\omega,2}$ é span $\{\zeta, i \psi_{\omega,2}\}$, onde ζ é a função simétrica definida por (ver Proposição 4.7)

$$\zeta(x) = (|x| + 1) e^{-\frac{1}{2}(|x|+1)^2}$$
 para $x \in \mathbb{R}$.

Assim, o item ii) do Lema 4.14 não é valido.

Demonstração do Teorema 4.11: Observamos que, como já foi mencionado acima, o operador $H_{\omega,\gamma}$ é bem definido e contínuo de $H_p^1(\mathbb{R}_{\circ})$ sobre $(H_p^1(\mathbb{R}_{\circ}))'$.

- i) A Proposição 4.10 e Proposição 4.11 implicam que $n(H_{\omega,\gamma})=2$. Portanto, da Proposição 4.12 concluímos que, para $\gamma>2$, a standing wave $e^{i\omega t}\psi_{\omega,\gamma}(x)$ é instável em $H^1_p(\mathbb{R}_\circ)$.
- ii) Aplicando Proposição 4.9 e Proposição 4.11 obtemos que $n(H_{\omega,\gamma}) = 1$. Assim, a Proposição 4.12 implica que, para $0 < \gamma < 2$, a standing wave $e^{i\omega t}\psi_{\omega,\gamma}(x)$ é estável em $H^1_p(\mathbb{R}_{\circ})$. Isto termina a prova.

4.7.2 Estabilidade dos ground state assimétricos em $H^1_p(\mathbb{R}_{\circ})$

Sejam $\phi_{\omega}^{t_1,t_2}$ e $\phi_{\omega}^{t_2,t_1}$ os gound state assimétricos, identificados no Teorema 4.6, onde (t_1,t_2) é a única solução do sistema de equações (4.31) com $t_1 < t_2$. Lembramos que estes só existem no caso $\gamma > 2$. Esta subseção será dedicada a provar o seguinte resultado de estabilidade.

Teorema 4.12 $Seja\ \omega \in \mathbb{R}$. $Para\ \gamma > 2$ as standing waves $e^{i\omega t}\phi_{\omega}^{t_1,t_2}(x)$ $e\ e^{i\omega t}\phi_{\omega}^{t_2,t_1}(x)$ são estáveis em $H_p^1(\mathbb{R}_\circ)$.

Damos a prova de estabilidade para a standing wave $e^{i\omega t}\phi_{\omega}^{t_1,t_2}(x)$; a estabilidade de $e^{i\omega t}\phi_{\omega}^{t_2,t_1}(x)$ se demonstra de forma completamente análoga. Por simplicidade de notação, definimos $\varphi_{\omega} := \phi_{\omega}^{t_1,t_2}$. Em adição, φ_{ω} é explicitamente dado por

$$\varphi_{\omega}(x) = \left(\frac{x}{|x|}\right) e^{\frac{\omega+1}{2}} e^{-\frac{1}{2}V_{as}(x)}, \quad \text{onde} \quad V_{as}(x) := \begin{cases} (x+t_1)^2, & \text{para } x > 0\\ (x-t_2)^2, & \text{para } x < 0. \end{cases}$$

Para provar este teorema, novamente aplicamos a teoria abstrata de Grillakis, Shatah and Strauss [28]. Seguindo as mesmas idéias da seção anterior, é claro que a aplicação sesquilinear $\mathcal{S}''_{\omega,\gamma}(\varphi_{\omega}): H^1_p(\mathbb{R}_{\circ}) \times H^1_p(\mathbb{R}_{\circ}) \to \mathbb{C}$ pode ser considerada como um operador linear $H^{t_1,t_2}_{\omega}: H^1_p(\mathbb{R}_{\circ}) \to (H^1_p(\mathbb{R}_{\circ}))'$,

$$H_{\omega}^{t_1,t_2}u = L_{as,\gamma}u_1 + i L_{as,\gamma}^1 u_2$$
, para $u = u_1 + i u_2$,

onde $L_{as,\gamma}$ e $L_{as,\gamma}^1$ são dois operadores auto-adjuntos dados por

$$L_{as,\gamma} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_{as}(x) - 3, \quad \text{dom}(L_{as,\gamma}) = \left\{ f \in \text{dom}(\mathcal{H}_{\gamma}) : x^2 f \in L^2(\mathbb{R}) \right\}$$
$$L_{as,\gamma}^1 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_{as}(x) - 1, \quad \text{dom}(L_{as,\gamma}^1) = \text{dom}(L_{as,\gamma}).$$

Em seguida estudamos as propriedades espectrais dos operadores $L_{as,\gamma}$ e $L_{as,\gamma}^1$, necessários para a análise da estabilidade da standing wave.

Propriedades espectrais de $L_{as,\gamma}$ e $L_{as,\gamma}^1$

Só precisamos investigar o espectro do operador $L_{as,\gamma}$; a partir deste, o espectro de $L^1_{as,\gamma}$ é obtido naturalmente. Aplicando as mesmas ideias desenvolvidas na Proposição 4.6 é possível mostrar que o operador $L_{as,\gamma}$ só tem espectro discreto. Em particular, temos a seguinte distribuição dos valores próprios: $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots \lambda_k$, onde $\lambda_k \to \infty$ quando $k \to \infty$, com os λ_k autovalores simples.

Na seguinte proposição investigamos o núcleo do operador $L_{as,\gamma}$.

Proposição 4.13 Seja $\gamma > 2$. O operador $L_{as,\gamma}$ tem núcleo trivial.

Demonstração: Para estudar o núcleo do operador precisamos estudar a equação $L_{as,\gamma}u = 0$, onde $u \in \text{dom}(L_{as,\gamma})$. Mais especificamente, para $u \neq 0$ deveríamos ter

$$u \in H^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \tag{4.61}$$

$$-u'' + (V_{as}(x) - 3) u = 0$$
, para $x \neq 0$ (4.62)

$$u'(0+) = u'(0-), \quad u(0+) - u(0-) = -\gamma u'(0+).$$
 (4.63)

Observemos que φ'_{ω} satisfaz (4.62) em $(0, +\infty)$. Devido ao fato que $u \in L^2(\mathbb{R})$, de [12, Theorem 3.3] toda solução de (4.62) em $(0, +\infty)$ tem a forma $\alpha \varphi'_{\omega}$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Um argumento semelhante mostra que toda solução $(-\infty, 0)$ tem a

forma $\beta \varphi'_{\omega}$ para algum $\beta \in \mathbb{R}$. Sem perda de geralidade, podemos supor que

$$u = \varphi'_{\omega}$$
, sobre $(0, +\infty)$
 $u = \mu \varphi'_{\omega}$, sobre $(-\infty, 0)$,

para algum $\mu \in \mathbb{R}$. Agora, como u tem que satisfazer as condições em (4.63), isto implica que t_1 , t_2 e μ tem que satisfazer o sistema de equações

$$\begin{cases} (1 - t_1^2) t_2 = \mu (t_2^2 - 1) t_1 \\ t_1 (1 - \mu) = \gamma (t_1^2 - 1). \end{cases}$$
(4.64)

Em particular, devido ao fato que $0 < t_1 < 2\gamma^{-1} < t_2$, temos $\mu \neq 0$. Resolvendo a primeira equação de (4.64) em termos de μ e substituindo na segunda equação, obtemos que t_1 e t_2 tem satisfazer

$$t_1 (t_1^2 - 1)^{-1} + t_2 (t_2^2 - 1)^{-1} = \gamma.$$
 (4.65)

Por outro lado, como φ_{ω} é um ground state, t_1 e t_2 tem que satisfazer a segunda equação do sistema (4.31), isto é,

$$t_1^{-1} + t_2^{-1} = \gamma, (4.66)$$

onde $t_1 < t_2$. Um cálculo simples mostra que não existem t_1 e t_2 satisfazendo o sistema (4.65) e (4.66). Em particular, o sistema (4.64) não tem solução e portanto a única função no núcleo de $L_{as,\gamma}$ é a trivial. Isto mostra o resultado.

Observação 4.29 O operador $L_{as,\gamma}$ é limitado inferiormente e o espectro está contido no intervalo $[-2,\infty)$. Este fato pode ser demostrado seguindo as mesmas ideias desenvolvidas na Proposição 4.8. Em adição, o primeiro autovalor é dado por $\lambda_0 = -2$ e sua autofunção associada é o ground state assimétrico φ_{ω} .

Na seguinte proposição mostramos que $\lambda_0 = -2$ e o único autovalor negativo do operador $L_{as,\gamma}$.

Proposição 4.14 Seja $\gamma > 2$. O operador $L_{as,\gamma}$ tem exatamente um valor próprio negativo.

Na prova da Proposição 4.14 precisamos do seguinte lema auxiliar.

Lema 4.15 O operador $T_{as,\gamma} := -\frac{d^2}{dx^2} + V_{as}(x) - 3$ definido sobre o domínio, dom $(T_{as,\gamma}) = \{f \in H^2(\mathbb{R}) : x^2 f \in L^2(\mathbb{R}), f'(0) = 0\}$, é simétrico, densamente definido e tem índices de deficiência iguais $n_{\pm}(T_{as,\gamma}) = 1$.

Demonstração: A prova é semelhante à desenvolvida no Lema 4.12. Omitimos os detalhes.

Demonstração da Proposição 4.14: Notemos que dom $(T_{as,\gamma}) \subset \text{dom } (L_{as,\gamma})$ e $T_{as,\gamma}f = L_{as,\gamma}f$ para toda $f \in \text{dom } (T_{as,\gamma})$. Assim, o operador $L_{as,\gamma}$ é uma extensão auto-adjunta do operador $T_{as,\gamma}$. Veremos inicialmente que o operador $T_{as,\gamma}$ é não negativo. De fato, como $\varphi'_{\omega}(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, é fácil mostrar que para cada $f \in \text{dom } (T_{as,\gamma})$,

$$T_{as,\gamma} f = -\left(\frac{1}{\varphi'_{\omega}}\right) \frac{d}{dx} \left[(\varphi'_{\omega})^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{f}{\varphi'_{\omega}}\right) \right] \text{ para } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Integrando por partes obtemos a fórmula

$$(T_{as,\gamma}f,f) = \left[f'(x)f(x) - \frac{\varphi''_{\omega}(x)}{\varphi'_{\omega}(x)}|f(x)|^2\right]_{-0}^{+0} + \int_{-\infty}^{0} (\varphi'_{\omega})^2 \left|\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{\varphi'_{\omega}}\right)\right|^2 dx + \int_{0}^{\infty} (\varphi'_{\omega})^2 \left|\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{\varphi'_{\omega}}\right)\right|^2 dx.$$

$$(4.67)$$

Observemos que os termos integrais em (4.67) são não negativos. Para mostrar que o operador $T_{an,\gamma}$ é não negativo precisamos mostrar que o termo não integral de (4.67) é não negativo. Um cálculo simples mostra que

$$\left[f'(x) f(x) - \frac{\varphi''_{\omega}(x)}{\varphi'_{\omega}(x)} |f(x)|^2\right]_{-0}^{+0} = |f(0)|^2 \left(\frac{1 - t_1^2}{t_1} + \frac{1 - t_2^2}{t_2}\right) = |f(0)|^2 \left(\gamma - (t_1 + t_2)\right).$$

Agora, lembrando o Lema 4.3, temos que $t_1 = (z_0 + 1) \gamma^{-1}$ e $t_2 = z_0^{-1} (z_0 + 1) \gamma^{-1}$, onde z_0 é o único zero da função h definida no Lema 4.10. Assim,

$$\gamma - (t_1 + t_2) = \gamma - \frac{z_0 + 1}{\gamma} - \frac{z_0 + 1}{z_0 \gamma}$$

$$= \gamma - \frac{(z_0 + 1)^2}{z_0 \gamma}$$

$$= \frac{z_0 \gamma^2 - (z_0 + 1)^2}{z_0 \gamma} \ge 0,$$

onde a desigualdade acima segue do fato que $\gamma^2 z_0 \geq (z_0 + 1)^2$, como foi provado na Observação 4.21. Portanto, o termo não integral de (4.67) é não negativo, isto é, $T_{as,\gamma} \geq 0$. Por outro lado, como $L_{as,\gamma}$ é uma extensão auto-adjunta do operador $T_{as,\gamma}$, que é não negativo e tem tem índices de deficiência iguais $n_{\pm}(T_{as,\gamma}) = 1$, do Lema A.3 no Apêndice obtemos que $L_{as,\gamma}$ tem, no máximo, um autovalor negativo. Em conclusão, o operador $L_{an,\gamma}$ tem exatamente um autovalor negativo; o qual é

 $\lambda_0 = -2$ com autofunção φ_{ω} . Isto termina a prova. \square

Com respeito às propriedades espectrais do operador $L_{as,\gamma}^1$ temos o seguinte resultado.

Proposição 4.15 O operador auto-adjunto $L^1_{as,\gamma}$ é não negativo, só tem espectro discreto e seus autovalores são simples. Em adição, o núcleo do operador é gerado pela função ϕ^{t_1,t_2}_{ω} .

Demonstração: Da Proposição 4.6 é claro que o operador só tem espectro discreto e seus autovalores são simples. Um cálculo simples, como na Observação 4.29, mostra que $\operatorname{Ker}(L^1_{an,\gamma}) = \operatorname{span}\{\phi^{t_1,t_2}_{\omega}\}$ e que $L^1_{as,\gamma}$ é não negativo. Omitimos os detalhes.

Demonstração do Teorema de estabilidade

A prova deste resultado segue o mesmo argumento desenvolvido na prova do Teorema 4.11. Denotamos por $n\left(H_{\omega}^{t_1,t_2}\right)$ o número de autovalores negativos do operador $H_{\omega}^{t_1,t_2}$ contando multiplicidades (isto é, o índice de Morse de $H_{\omega}^{t_1,t_2}$).

Proposição 4.16 Sejam $\gamma > 2$ e $\omega \in \mathbb{R}$. Se $n(H_{\omega}^{t_1,t_2}) = 1$ e $\partial_{\omega} \|\phi_{\omega}^{t_1,t_2}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 > 0$, então a standing wave $e^{i\omega t}\phi_{\omega}^{t_1,t_2}$ é estável em $H_p^1(\mathbb{R}_{\circ})$.

A prova desta proposição requer a verificação da $Hipótese~1,2,3~{\rm em}~[28]$. A Hipótese~1, existência global de soluções, é consequência da Proposição 4.5. A Hipótese~2, existência de uma curva suave de standing wave $\omega \to \phi_{\omega}^{t_1,t_2}$, é garantida a partir da definição de $\phi_{\omega}^{t_1,t_2}$. Finalmente, a Hipótese~3, a saber as condições espectrais do operador $H_{\omega}^{t_1,t_2}$, é garantida pelo seguinte resultado.

Lema 4.16 Sejam $\gamma > 2$ e $\omega \in \mathbb{R}$. As seguintes condições são satisfeitas:

- i) O operador $H_{\omega}^{t_1,t_2}$ tem um número finito de valores próprios negativos.
- ii) O núcleo do operador H^{t_1,t_2}_{ω} é span $\{i \phi^{t_1,t_2}_{\omega}\}$.
- iii) O resto do espectro de H^{t_1,t_2}_{ω} é positivo e está distante de zero.

Demonstração: A prova do item ii) é uma consequência da Proposição 4.13 e Proposição 4.15. Em adição, a prova de i) e iii) segue-se da Proposição 4.14 e Proposição 4.15. Isto termina a prova. □

Demonstração do Teorema 4.12: Notemos que $\|\phi_{\omega}^{t_1,t_2}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = e^{\omega+1}n_{\gamma}(t_1)$, onde n_{γ} é a função positiva definida em (4.38) (independente da variável ω). Assim, $\partial_{\omega}\|\phi_{\omega}^{t_1,t_2}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 > 0$. Agora, a Proposição 4.14 e Proposição 4.15 implicam que $n(H_{\omega}^{t_1,t_2}) = 1$. Portanto, a estabilidade da standing wave $e^{i\omega t}\phi_{\omega}^{t_1,t_2}$ é consequência

4.7. LINEARIZAÇÃO E ESTABILIDADE	
de Duen esia e a 16. Intertennia e anno	
da Proposição 4.16. Isto termina a prova.	

TRABALHOS FUTUROS

Como já foi mencionado nas Observações 3.4, 4.17 e 4.27 os argumentos desenvolvidos nesta tese para estudar a estabilidade ou instabilidade das standing wave só são eficazes no caso do potencial atrativo ($\gamma > 0$). A seguir, apresentamos algumas ideias e métodos que podem ser utilizados em trabalhos futuros para estudar os problemas que permanecem abertos:

- No caso do δ -potencial repulsivo ($\gamma < 0$), seguindo as ideias de Fukuizumi and Jeanjean [25], acreditamos que restringindo a dinâmica da equação de Schrödinger logarítmica (3.1) sobre o espaço $W_{\rm rad}(\mathbb{R})$ é possível obter uma caracterização variacional a qual implique a estabilidade do ground state $\phi_{\omega,\gamma}$ sobre o espaço $W_{\rm rad}(\mathbb{R})$.
 - Por outro lado, para $\gamma < 0$, acreditamos que o argumento desenvolvido em Ohta [40] pode ser aplicado para mostrar a instabilidade da standing wave $e^{i\omega t}\phi_{\omega,\gamma}(x)$ sobre o espaço $W(\mathbb{R})$ (sem restrição). Para utilizar o argumento é necessário provar que a identidade em [20, Proposition 6.5.1] é válida para equação de Schrödinger logarítmica (3.1). Acreditamos que o método de regularização desenvolvido em [37, Proposition 6] pode ser útil para mostrar esta identidade.
- No caso $\gamma < 0$ a solução do sistema de equações (4.31) não é conhecida. Em particular, não sabemos quais são os ground states associados à equação Schrödinger logarítmica (4.1) quando o δ' -potencial é repulsivo. Acreditamos que aplicando o argumento desenvolvido em [4] é possível encontrar o número de soluções do sistema (4.31) e portanto os ground states. Em adição, acreditamos que a estabilidade dos ground states pode ser estudada seguindo as mesmas idéias do item anterior, isto é, restringindo a dinâmica da equação de Schrödinger logarítmica (4.1) sobre o espaço $W_{\rm an}(\mathbb{R}_{\circ})$ e aplicando os argumentos em [25, 40].
- No Teorema 4.11 é provado que para $\gamma > 2$, a standing wave $e^{i\omega t}\psi_{\omega,\gamma}(x)$ é instável em $H^1_p(\mathbb{R}_\circ)$. No entanto, não é conhecida a estabilidade ou instabilidade desta standing wave no espaço $W(\mathbb{R}_\circ)$. Acreditamos que é instável em $W(\mathbb{R}_\circ)$ para $\gamma > 2$. Tal resultado talvez possa ser provado utilizando as ideais em Ohta [40].

• No Capitulo 4 estudamos a estabilidade das standing waves no espaço $H_p^1(\mathbb{R}_{\circ})$. A principal dificuldade na análise de estabilidade é determinar o número de autovalores negativos do operador $L_{an,\gamma}$. No caso $\gamma>0$ a teoria de extensão para operadores simétricos permitiu ultrapassar esta dificuldade; contudo, para $\gamma<0$ não é claro como aplicar a teoria de extensão para estudar o espectro negativo do operador $L_{an,\gamma}$. O estudo espectral neste caso, talvez possa ser feito utilizando as novas técnicas desenvolvidas em Strauss and Winklmeier [47]. De fato, recentemente em [47] é estudado o espectro do oscilador harmônico com δ e δ' -potenciais.

APÊNDICE

A.1 Lema de Brezis-Lieb

A seguir lembramos o Lema de Brezis-Lieb. Os detalhes da demonstração podem ser vistos em [17, Theorem 2 e Example (b)].

Lema A.1 Considere $j: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, convexa com j(0) = 0. Em adição, considere $f_n = f + g_n$ uma sequência de funções mensuráveis de \mathbb{R}^N em \mathbb{C} tais que:

- (i) $g_n \to 0$ q.t.p. sobre \mathbb{R}^N ;
- (ii) $j(\mu f)$ pertence a $L^1(\mathbb{R}^N)$ para cada $\mu \in \mathbb{R}$;
- (iii) Existe um número $\kappa > 1$ tal que a sequência $\{j(\kappa g_n) \kappa j(g_n)\}$ é uniformemente limitada em $L^1(\mathbb{R}^N)$. Então,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{D}^N} \left[j(f+g_n) - j(g_n) - j(f) \right] dx = 0.$$

A.2 O problema estacionário

A seguir determinamos as soluções do problema estacionário (3.12) sobre $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.

Lema A.2 Suponhamos que $u \in H^1(\mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$ e satisfaz a equação

$$-u'' + \omega u - u \operatorname{Log} |u|^2 = 0, \quad sobre \mathbb{R}_+. \tag{A.1}$$

Então existem $\theta_1 \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$u(x) = e^{i\theta_1} e^{\frac{\omega+1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(x+c)^2}, \quad para \ x \in \mathbb{R}_+.$$

Demonstração: Aplicando o argumento desenvolvido na primeira parte do Lema 4.4 obtemos que $u \in C^2(\mathbb{R}_+)$. Em adição, como $u \in H^1(\mathbb{R}_+)$, temos que $u(x) \to 0$ quando $x \to \infty$. Portanto, a equação (A.1) implica que $u''(x) \to 0$ quando $x \to \infty$, assim, $u'(x) \to 0$ quando $x \to \infty$. Agora, multiplicando a equação (A.1) por u',

tomando a parte real e integrando, obtemos

$$|u'(x)|^2 = (\omega + 1) |u(x)|^2 - |u(x)|^2 \operatorname{Log} |u(x)|^2, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}_+.$$
 (A.2)

Por outro lado, do fato que $u \in C^2(\mathbb{R}_+)$, podemos escrever $u(x) = e^{i\theta(x)}\rho(x)$, onde θ , $\rho \in C^2(\mathbb{R}_+)$ e $\rho \geq 0$. Substituindo u na equação (A.1) e tomando a parte imaginaria obtemos que ρ , θ tem que satisfazer a equação diferencial $\rho \theta'' + 2\rho' \theta' = 0$ para $x \in \mathbb{R}_+$; isto implica que existe uma constante K tal que $\rho^2 \theta' \equiv K$ sobre \mathbb{R}_+ . Notemos que se $\rho(x_0) = 0$ para algum $x_0 > 0$, então K = 0. Suponhamos, agora, que $\rho > 0$ sobre \mathbb{R}_+ . De (A.2) temos que |u'| é limitada, logo $\rho^2(\theta')^2$ é limitada, isto é, K^2/ρ^2 é limitada sobre \mathbb{R}_+ . Assim, como $\rho(x) \to 0$ se $x \to \infty$, concluímos novamente que K = 0. Portanto, obtemos que $\theta' \equiv 0$ em \mathbb{R}_+ e existe uma constante θ_1 tal que $\theta(x) = \theta_1$ para todo $x \in \mathbb{R}_+$. Assim $u(x) = e^{i\theta_1}\rho(x)$, onde ρ satisfaz

$$-\rho'' + \omega \rho - \rho \operatorname{Log} |\rho|^2 = 0, \quad \text{sobre } \mathbb{R}_+. \tag{A.3}$$

Observemos que aplicando uma variante do principio do máximo desenvolvida em [48, Theorem 1], concluímos que $\rho \equiv 0$ ou $\rho > 0$ sobre \mathbb{R}_+ . De fato, seja $\beta(s) = \omega s - s \operatorname{Log} s^2$ para $s \geq 0$. Então, como β é contínua, não-decrescente para s pequeno, $\beta(0) = 0$ e $\beta(\sqrt{e^{\omega}}) = 0$ o Teorema 1 em [48] implica que cada solução $\rho \geq 0$ é estritamente positiva ou trivial. Logo, para nosso caso, $\rho > 0$ sobre \mathbb{R}_+ . Em adição, multiplicando a equação (A.3) por ρ' e integrando obtemos

$$(\rho'(x))^2 = (\omega + 1) \rho^2(x) - \rho^2(x) \operatorname{Log} \rho^2(x), \quad \text{para } x \in \mathbb{R}_+.$$
 (A.4)

Agora, integrando a equação (A.4) por métodos convencionais temos que existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que (ver [34] para uma explicação detalhada)

$$\rho(x) = e^{\frac{\omega+1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(x+c)^2}, \text{ para } x \in \mathbb{R}_+.$$

Isto termina a prova.

A.3 Extensões de um operador simétrico

Nesta parte do Apêndice apresentamos dois resultados que foram usados nos Capítulos 3 e 4. A prova do próximo teorema pode ser encontrada em [39, Chapter IV, §14].

Lema A.3 Seja \mathcal{T} um operador simétrico densamente definido num espaço de Hilbert $(H, (\cdot, \cdot))$ com índices de deficiência finitos e iguais $n_{\pm}(\mathcal{T}) = d$. Em adição, suponhamos que \mathcal{T} verifica a condição:

$$(\mathcal{T}u, u) \ge m||u||^2$$
, para $u \in \text{dom}(\mathcal{T})$,

onde $m \in \mathbb{R}$. Então, toda extensão auto-adjunta \mathcal{T}' de \mathcal{T} satisfaz a seguinte pro-

priedade: $\sigma(\mathcal{T}') \cap (-\infty, m)$ contém no máximo d autovalores isolados contando multiplicidades.

A demonstração do próximo lema bem como mais informações sobre casos mais gerais pode ser encontradas em [8, Lemma 3.1.1].

Lema A.4 Seja \mathcal{A} um operador auto-adjunto definido sobre um espaço de Hilbert H. Então o operador restrito $\mathcal{A}^0 = \mathcal{A}|_{\text{dom}(\mathcal{A}^0)}$ definido sobre o domínio $\text{dom}(\mathcal{A}^0) = \{f \in \text{dom}(\mathcal{A}) : f'(0) = f(0) = 0\}$, é um operador simétrico densamente definido com índices de deficiência $n_{\pm}(\mathcal{A}^0) = 2$.

A.4 Demonstração do Lema 4.11

Primeiro, vamos mostrar que $\operatorname{dom}(L_{an,\gamma}) \subset \operatorname{dom}(A_{\gamma})$. Seja $u \in \operatorname{dom}(L_{an,\gamma})$. Por definição temos que $u \in \operatorname{dom}(\mathcal{H}_{\gamma})$ e $x^2u \in L^2(\mathbb{R})$. Em particular, isto implica que $\mathfrak{t}_{\gamma}[u,z] = (\mathcal{H}_{\gamma}u,z)$ para toda $z \in \operatorname{dom}(\mathfrak{t}_{\gamma})$, com $\mathcal{H}_{\gamma}u \in L^2(\mathbb{R})$ (ver seção 4.1). Agora, seja $w := \mathcal{H}_{\gamma}u + (V(x) - 3)u$. Então, do exposto acima é claro que $w \in L^2(\mathbb{R})$ e $\mathfrak{L}[u,z] = (w,z)$ para toda $z \in \operatorname{dom}(\mathfrak{L}) = H_p^1(\mathbb{R}_{\circ})$. Portanto, devido ao fato que

$$\operatorname{dom}(A_{\gamma}) = \left\{ v \in \operatorname{dom}(\mathfrak{L}) \mid \exists w \in L^{2}(\mathbb{R}) \text{ tal que } \forall z \in \operatorname{dom}(\mathfrak{L}), \mathfrak{L}[v, z] = (w, z) \right\},\,$$

concluímos que $u \in \text{dom}(A_{\gamma})$ e $A_{\gamma}u = w$. Isto é, $\text{dom}(L_{an,\gamma}) \subset \text{dom}(A_{\gamma})$ e $A_{\gamma}u = L_{an,\gamma}u$ para toda $u \in \text{dom}(L_{an,\gamma})$. Logo, temos que $L_{an,\gamma} \subseteq A_{\gamma}$ e portanto $L_{an,\gamma} \subseteq A_{\gamma} \subseteq A_{\gamma}^* \subseteq L_{an,\gamma}^* = L_{an,\gamma}$, onde a última igualdade segue do fato que o operador $L_{an,\gamma}$ é auto-adjunto (ver Observação 4.25). Assim, $L_{an,\gamma} = A_{\gamma}$. Ou seja, $\text{dom}(A_{\gamma}) = \text{dom}(L_{an,\gamma})$ e $A_{\gamma}v = L_{an,\gamma}v$ para toda $v \in \text{dom}(A_{\gamma})$. Isto termina a prova.

REFERÊNCIAS

- [1] R. Adami and D. Noja. Existence of dynamics for a 1-d NLS equation perturbed with a generalized point defect. *J. Phys. A Math. Theor.*, 42(49):495302–495320, 2009.
- [2] R. Adami and D. Noja. Nonlinearity-defect interaction: Symmetry breaking bifurcation in a NLS with δ' impurity. Nanosystems, 2:5–19, 2011.
- [3] R. Adami and D. Noja. Stability and symmetry-breaking bifurcation for the ground states of a NLS with a δ' interaction. Commun. Math. Phys., 318(1):247–289, 2013.
- [4] R. Adami and D. Noja. Exactly solvable models and bifurcations: the case of the cubic NLS with a δ or a δ' interaction in dimension one. *Math. Model. Nat. Phenom.*, 9(5):1–16, 2014.
- [5] R. Adami, D. Noja, and N. Visciglia. Constrained energy minimization and ground states for NLS with point defects. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 18(5):1155–1188, 2013.
- [6] S. Albeverio, Z. Brzezniak, and L. Dabrowski. Fundamental solution of the heat and Schrödinger equations with point interaction. *J. Funct. Anal.*, 128:220–254, 1995.
- [7] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, and H. Holden. Solvable Models in Quantum Mechanics. Springer-Verlag, New york, 1988.
- [8] S. Albeverio and P. Kurasov. Singular Perturbations of Differential Operators. Solvable Schrödinger-Type Operators. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [9] J. Angulo and N. Goloshchapova. Extension theory approach in stability of standing waves for NLS equation with point interactions. arXiv:1507.02312, 2015.
- [10] J. Angulo and N. Goloshchapova. Stability of standing waves for NLS-log equation with δ -interaction. arXiv:1506.08455, 2015.

- [11] M. Belloni and R. W. Richard. The infinite well and dirac delta function potentials as pedagogical, mathematical and physical models in quantum mechanics. *Physics Reports*, 540(2):25–122, 2014.
- [12] F.A. Berezin and M. Shubin. *The Schrödinger Equation*. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.
- [13] I. Bialynicki-Birula. On the linearity of the Schrödinger equation. *Brazilian J. Phys.*, 35(2A):211–215, 2005.
- [14] I. Bialynicki-Birula and J. Mycielski. Nonlinear wave mechanics. *Ann. Phys*, 100:62–93, 1976.
- [15] P. H. Blanchard, J. Stubbe, and L. Vázquez. On the stability of solitary waves for classical scalar fields. Ann. Inst. Henri-Poncaré, Phys. Théor., 47:309–336, 1987.
- [16] Ph. Blanchard and J. Stubbe. Stability of ground states for nonlinear classical field theories. volume 347 of *Lecture Notes in Physics*, pages 19–35. Springer Heidelberg, 1989.
- [17] H. Brézis and E. Lieb. A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 88(3):486–490, 1983.
- [18] V. Caudrelier, M. Mintchev, and E. Ragoucy. Solving the quantum nonlinear Schrödinger equation with δ -type impurity. J. Math. Phys., 4(46):1–24, 2005.
- [19] T. Cazenave. Stable solutions of the logarithmic Schrödinger equation. *Non. Anal.*, *T.M.A.*, 7(10):1127–1140, 1983.
- [20] T. Cazenave. Semilinear Schrödinger Equations. Courant Lecture Notes in Mathematics 10. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciencies, AMS, Providence, RI, 2003.
- [21] T. Cazenave and A. Haraux. Equations d'évolution avec non-linéarité logarithmique. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., 2(1):21–51, 1980.
- [22] T. Cazenave and P.L. Lions. Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations. *Comm. Math. Phys.*, 85(4):549–561, 1982.
- [23] P. D'Avenia, E. Montefusco, and M. Squassina. On the logarithmic Schrödinger equation. *Commun. Contemp. Math.*, 16(1350032), 2014.
- [24] R. Fukuizumi. Stability and instability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations. PhD thesis, Tohoku Math. Publ., 2003.

- [25] R. Fukuizumi and L. Jeanjean. Stability of standing waves for a nonlinear Schrödinger equation with a repulsive Dirac delta potential. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 21:121–136, 2008.
- [26] R. Fukuizumi, M. Ohta, and T. Ozawa. Nonlinear Schrödinger equation with a point defect. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 25(5):837–845, 2008.
- [27] R. H. Goodman, P. J. Holmes, and M. I. Weinstein. Strong NLS soliton-defect interactions. *Physica D*, 192:215–248, 2004.
- [28] M. Grillakis, J. Shatah, and W. Strauss. Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry, Part I. J. Funct. Anal., 74(1):160–167, 1987.
- [29] M. Grillakis, J. Shatah, and W. Strauss. Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry, Part II. *J. Funct. Anal.*, 94(2):308–348, 1990.
- [30] A. Haraux. Nonlinear Evolution Equations: Global Behavior of Solutions, volume 841 of Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, New york, 1981.
- [31] C. Ji and A. Szulkin. A logarithmic Schrödinger equation with asymptotic conditions on the potential. arXiv:1510.01132, 2015.
- [32] M. Kaminaga and M. Ohta. Stability of standing waves for nonlinear Schrödinger equation with attractive delta potential and repulsive nonlinearity. *Saitama Math. J.*, 26:39–48, 2009.
- [33] T. Kato. Perturbation Theory for Linear Operators. Berlin: Springer -Verlag, 1966.
- [34] C. M. Khalique and A. Biswas. Gaussian soliton solution to nonlinear Schrödinger's equation with log law nonlinearity. *International Journal of Physical Sciences*, 5(3):280–282, 2010.
- [35] A. Kostenko and M. Malamud. Spectral theory of semibounded Schrödinger operators with δ' -interactions. Ann. Henri Poincaré, 15(3):501–541, 2014.
- [36] S. Le Coz. Standing waves in nonlinear Schrödinger equations. *In: Analytical and Numerical Aspects of Partial Differential Equations, Walter de Gruyter, Berlin*, pages 151–192, 2009.
- [37] S. Le Coz, R. Fukuizumi, G. Fibich, B. Ksherim, and Y. Sivan. Instability of bound states of a nonlinear Schrödinger equation with a dirac potential. *Phys. D*, 237:1103–1128, 2008.
- [38] E. Lieb and M. Loss. *Analysis*, volume 14 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2 edition, 2001.

- [39] M. A. Naimark. Linear Differential Operators. Frederick Unger Publ Co., New York, 1968.
- [40] M. Ohta. Instability of standing waves for the generalized Davey-Stewartson system. Ann. Inst. Henri Poincaré. Phys. Théor, 62:69–80, 1995.
- [41] M. Ohta. Instability of bound states for abstract nonlinear Schrödinger equations. J. Funct. Anal., 261(1):90–110, 2011.
- [42] M.M. Rao and Z.D. Ren. Theory of Orlicz Spaces. Dekker, New York, 1991.
- [43] W. Rudin. Functional analysis. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, 2 edition, 1991.
- [44] K. Schmüdgen. Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space. Springer, Dordrecht, 2012.
- [45] C.G. Shull, D.K. Atwood, J. Arthur, and M.A. Horne. Search for a nonlinear variant of the Schrödinger equation by neutron interferometry. *Phys. Rev. Lett.*, 44(12):765, 1980.
- [46] M. Squassina and A. Szulkin. Multiple solutions to logarithmic Schrödinger equations with periodic potential. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 54:585–597, 2015.
- [47] V. Strauss and M. Winklmeier. On the one-dimensional harmonic oscillator with a singular perturbation. *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, 9(1):73–91, 2016.
- [48] J.L. Vázquez. A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations. *Appl. Math. Optim*, 12:191–202, 1984.
- [49] J. Weidmann. *Linear operators in Hilbert spaces*. Springer-Verlag, New York/Berlin, 1982.
- [50] M. Weinstein. Lyapunov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations. *Comm.Pure.Appl.Math*, 39:51–68, 1986.
- [51] K.G. Zloshchastiev. Logarithmic nonlinearity in theories of quantum gravity: Origin of time and observational consequences. *Grav. Cosmol.*, 16(4):288–297, 2010.
- [52] K.G. Zloshchastiev. Spontaneous symmetry breaking and mass generation as built-in phenomena in logarithmic nonlinear quantum theory. *Acta Physica Polonica B*, 42(2):261–292, 2011.
- [53] A.V. Zolotaryuk. Boundary conditions for the states with resonant tunnelling across the δ' -potential. *Physics Letters A*, 374(15):1636–1641, 2010.