**Correspondência do tipo Galois para
ações de álgebras de Hopf em álgebras primas**

Octávio Bernardes Ferreira Neto

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Área de Concentração: Matemática
Orientador: Profa. Dra. Lucia Satie Ikemoto Murakami

São Paulo, agosto de 2008.

Correspondência do tipo Galois para ações de álgebras de Hopf em álgebras primas

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e defendida por Octávio Bernardes Ferreira Neto
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Profa. Dra. Lucia Satie Ikemoto Murakami (Presidente) - IME-USP.
- Prof. Dr. Vitor de Oliveira Ferreira - IME-USP.
- Prof. Dr. Antonio Paques - UFRGS.

Dedico este trabalho a duas pessoas.

A primeira por ter me motivado a começar.

A segunda por ter me dado forças para terminar.

Daniel e Matheus.

Agradecimentos

Inicialmente, agradeço aos meus pais, Márcia e Márcio, que sempre cultivaram e demonstraram de forma incisiva a importância da educação na vida de uma pessoa. Passei a acreditar que a educação pela educação já basta como justificativa.

Gostaria de agradecer ao Instituto de Matemática e Estatística por duas razões, a primeira por ter me aceitado como aluno mesmo não tendo graduado em matemática, e a segunda por ter um ambiente tranquilo e receptivo, o qual tive a oportunidade de desfrutar e que me era sempre uma fonte de inspiração.

Agradeço também aos diversos colegas e professores que me ajudaram de alguma forma nessa jornada, seja através de conversas inspiradoras, ou seja através da transferência de conhecimento e direcionamento. Não citarei nomes para não correr o risco de cometer alguma injustiça.

Finalmente, agradeço à minha orientadora, Profa. Dra. Lucia Satie Ikemoto Murakami, por ter acreditado em mim desde o começo e por ter continuado a acreditar mesmo quando parecia que não seria possível a conclusão deste trabalho.

Obrigado a vocês !

Resumo

Neste trabalho demonstramos um teorema da correspondência do tipo Galois para ações de álgebras de Hopf pontuais de dimensão finita em álgebras primas. A correspondência acontece entre subálgebras racionalmente completas e comódulo subálgebras. As subálgebras racionalmente completas são subálgebras da álgebra prima, enquanto os comódulo subálgebras são comódulo subálgebras do produto smash entre o centralizador da álgebra prima em sua álgebra de quocientes de Martindale simétrica e a álgebra de Hopf.

Palavras-chave: ações de álgebras de Hopf; correspondência Hopf-Galois; estrutura de coálgebras

Abstract

A Galois-type correspondence theorem for prime algebras acted upon by a finite dimensional pointed Hopf algebra is proved. The correspondence involves rationally complete subalgebras and comodule subalgebras. The rationally complete subalgebras are subalgebras of the prime algebra, while the comodule subalgebras are comodule subalgebras of the smash product between the centralizer of the prime algebra in its symmetric Martindale quotient algebra and the Hopf algebra.

Keywords: Hopf algebra actions; Hopf-Galois correspondence; coalgebra structures.

Sumário

Lista de Símbolos	ix
Introdução	xi
1 Preliminares	1
1.1 Introdução	1
1.2 Definições básicas	1
1.3 Álgebras de Hopf	5
1.3.1 Definição	5
1.3.2 Ações, produto cruzado e o produto smash	14
1.3.3 Comódulos e comódulo álgebras	18
1.3.4 Coálgebras pontuais e a filtração co-radical	22
1.3.5 Integrais	24
1.4 A álgebra de quocientes de Martindale	27
1.5 Ações de álgebra de Hopf em álgebras primas	29
2 Mais sobre coálgebras	31
2.1 Introdução	31

2.2	Alguns coideais especiais	31
2.2.1	Os coideais da forma $L(c)$ e $R(c)$	32
2.2.2	Os coideais da forma H^Y	36
2.3	A estrutura de coálgebras pontuais	38
3	As ações X-externas	47
3.1	Introdução	47
3.2	Propriedades dos produtos smash	50
3.3	Definição das ações X-externas	56
3.4	Propriedades fundamentais das ações X-externas	62
4	A injetividade da correspondência de Galois	73
4.1	Introdução	73
4.2	O teorema	76
5	A sobrejetividade da correspondência de Galois	83
5.1	Introdução	83
5.2	Propriedades de H^K	84
5.3	Propriedades dos comódulo subálgebras	92
5.4	O teorema	102
5.5	Considerações finais	104
	Referências Bibliográficas	107
	Índice Remissivo	109

Lista de Símbolos

A^{op}	Álgebra oposta. (pág. 2)
$a \bullet b$	Multiplicação de a e b na álgebra oposta. (pág. 2)
$\mathcal{F}(R)$	Conjunto de todos ideais não nulos de R . (pág. 3)
X^Y	Centralizador de Y em X . (pág. 4)
$\text{span}_k\{m_i\}$	Subespaço gerado pelos elementos m_i . (pág. 4)
τ	Aplicação twist. (pág. 4)
$\text{hom}_k(V, W)$	Conjunto das transformações lineares de V em W . (pág. 4)
V^*	Espaço dual de V . (pág. 4)
ϕ^*	Aplicação transposta de ϕ . (pág. 4)
J^+	Conjunto $J \cap \ker(\varepsilon)$. (pág. 7)
C^{cop}	Coálgebra co-oposta. (pág. 7)
Δ^{cop}	Comultiplicação co-oposta. (pág. 7)
$G(C)$	Conjunto dos elementos group-like de C . (pág. 8)
$P_{g,h}(C)$	Conjunto dos elementos g, h -primitivos de $G(C)$. (pág. 8)
$P'_{g,h}(C)$	Subespaço de $P_{g,h}(C)$ complementar a $k(g - h)$. (pág. 8)
$P(B)$	Conjunto dos elementos primitivos de B . (pág. 10)
$f * g$	Produto de convolução entre f e g . (pág. 11)
S	Antípoda de H . (pág. 12)
$\bar{S}$	Inversa de S na composição. (pág. 12)
A^H	Subálgebra de invariantes de A sob a ação de H . (pág. 14)

$\text{ad}_l(h, b)$	Ação adjunta à esquerda de h em b . (pág. 14)
$\text{ad}_r(h, b)$	Ação adjunta à direita de h em b . (pág. 14)
$A \# H$	Produto smash de A e H . (pág. 16)
$A^{\text{co}H}$	Subálgebra de coinvariantes de A . (pág. 21)
$L(c)$	Coideal à direita gerado por c . (pág. 32)
$R(c)$	Coideal à esquerda gerado por c . (pág. 32)

Introdução

O objetivo deste trabalho é demonstrar um teorema de correspondência do tipo Galois para ações de álgebras de Hopf pontuais de dimensão finita em álgebras primas. Esse teorema generaliza vários resultados obtidos no passado, conforme veremos a seguir.

Seja $L : K$ uma extensão de corpos com grupo de Galois G , que consiste de todos os automorfismos de L que fixam os elementos de K . Considere também $\mathcal{F}$ o conjunto dos corpos intermediários entre K e L , e $\mathcal{G}$ o conjunto dos subgrupos de G . A teoria clássica da correspondência de Galois diz que há uma correspondência biunívoca entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$.

A teoria clássica da correspondência de Galois pode ser generalizada em duas direções. Por um lado, os corpos podem ser substituídos por anéis comutativos ou não comutativos. Por outro lado, ações de grupo podem ser substituídas por ações de álgebras de Hopf. Observe que, na teoria clássica da correspondência de Galois, G age em L pela aplicação identidade de G em $\text{Aut}(L)$.

Em [Kha91], Kharchenko obteve um teorema da correspondência do tipo Galois para ações de grupos finitos de automorfismos e para ações de álgebras de Lie restritas de dimensão finita, em álgebras primas e semi-primas. Podemos ver o resultado de Kharchenko como ações de uma álgebra de grupo e ações da envolvente universal, ambas álgebras de Hopf cocomutativas e pontuais de dimensão finita, em álgebras primas e semi-primas. Com isso, surge a pergunta se a correspondência não poderia ser generalizada para ações de álgebras de Hopf pontuais de dimensão finita, não necessariamente cocomutativas.

Um dos resultados mais importantes no caminho para se chegar em uma demonstração do teorema da correspondência foi a definição de ação X-externa feita em [Mil95a]. Essa definição foi importante pois generalizou a definição de ação X-externa feita anteriormente por Karchenko.

Em [Yan97], Yanai descreveu um teorema da correspondência do tipo Galois para o caso em que a álgebra de Hopf é a álgebra de Hopf de Sweedler, que é não cocomutativa e que tem dimensão quatro. Além disso, nesse mesmo artigo, Yanai descreveu quais passos deveriam ser seguidos para se alcançar uma versão da correspondência de Galois para o caso geral envolvendo álgebras de Hopf pontuais de dimensão finita, além de demonstrar alguns resultados básicos.

Demonstrar essa versão do teorema da correspondência de Galois para o caso geral envolvendo ações de álgebras de Hopf pontuais de dimensão finita em álgebras primas é o objetivo deste trabalho. Segue uma breve descrição deste teorema.

Seja R uma álgebra prima. Denotamos por Q a álgebra de quocientes de Martindale simétrica de R e por K o centróide estendido de R . Seja H uma álgebra de Hopf pontual de dimensão finita que age em R . Por [Coh86], podemos estender essa ação a uma ação de H em Q .

De [Mil95b], temos que K é estável sob a ação de H desde que a ação de H em R seja X -externa. Assim, podemos considerar os produtos smash $K \# H \subseteq Q \# H$.

Para quaisquer subconjuntos V e W de uma álgebra qualquer, vamos denotar por V^W o centralizador de W em V . Segue o enunciado do teorema cuja demonstração é o objetivo desta dissertação.

Teorema. *Seja k um corpo de característica zero e seja H uma álgebra de Hopf pontual de dimensão finita sobre k agindo em uma k -álgebra prima R de modo que a ação seja X -externa. Denotemos por Q a álgebra de quocientes de Martindale simétrica de R e por K o centróide estendido de R . Seja $\mathcal{S}$ o conjunto de todos os H -comódulo subálgebras Λ de $K \# H$ contendo K , e seja $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as subálgebras racionalmente completas U de R contendo R^H . Então a aplicação*

$$\begin{aligned} \Phi: \mathcal{F} &\longrightarrow \mathcal{S} \\ U &\longmapsto (K \# H)^U \end{aligned}$$

é bijetora com inversa dada por

$$\begin{aligned} \Psi: \mathcal{S} &\longrightarrow \mathcal{F} \\ \Lambda &\longmapsto R^\Lambda. \end{aligned}$$

Antes de prosseguir, convém ressaltar que todos os teoremas, proposições e lemas apresentados nesta dissertação tiveram suas origens citadas. Muitos deles tiveram suas hipóteses ligeiramente alteradas e suas demonstrações bastante modificadas com o propósito de traçar um caminho direto, através da compilação e detalhamento de resultados de diversos artigos, até a demonstração do

teorema da correspondência. Segue uma breve descrição de como este trabalho foi dividido.

No Capítulo 1 apresentamos diversas definições e resultados preliminares para o restante deste trabalho. A maior parte dos resultados não foram demonstrados pois poderíamos perder o foco do assunto principal. Apesar disso, esse capítulo faz com que esta dissertação seja auto-contida. Nos capítulos subsequentes todos os resultados foram demonstrados, com exceção de alguns que foram considerados imediatos.

O Capítulo 2 faz um detalhamento maior dos coideais de uma coálgebra e da estrutura das coálgebras pontuais. Os resultados da seção que trata dos coideais serão utilizados principalmente na demonstração da sobrejetividade da correspondência, enquanto os resultados da seção que lida com a estrutura das coálgebras pontuais serão utilizados por todo o trabalho.

O Capítulo 3 é um capítulo chave, pois traz os resultados e definições fundamentais das ações X-externas. Nele, definimos as ações X-externas e mostramos diversas propriedades deste tipo de ação. Além disso, ao final deste capítulo, já é possível compreender o enunciado do teorema da correspondência.

No Capítulo 4 demonstramos a injetividade da correspondência. Finalmente, no Capítulo 5 demonstramos a sobrejetividade da correspondência e ilustramos a correspondência com um exemplo envolvendo a álgebra de Hopf de Sweedler, cumprindo o objetivo deste trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introdução

Este capítulo contém diversas definições e resultados que serão fundamentais para os capítulos subsequentes. A menos que indicado, sempre vamos utilizar um corpo fixo k como corpo base para as diversas estruturas presentes neste trabalho, tais como álgebras, coálgebras, produtos tensoriais, entre outros.

Dividimos este capítulo da seguinte forma. A Seção 1.2 traz uma série de definições e resultados básicos sobre álgebras, álgebras primas e algumas notações que serão utilizadas no decorrer do texto. Na Seção 1.3, definimos álgebra de Hopf e enunciamos uma série de propriedades e resultados sobre essa estrutura. Na Seção 1.4 introduzimos as álgebras de quocientes de Martindale e na Seção 1.5 enunciamos uma série de resultados fundamentais sobre ações de álgebra de Hopf em álgebras primas.

1.2 Definições básicas

Assumimos que o leitor tenha familiaridade com resultados e propriedades de espaços vetoriais, produtos tensoriais de espaços vetoriais, anéis, módulos, e seus diversos morfismos. Entretanto, gostaríamos de fazer algumas observações sobre produtos tensoriais de espaços vetoriais que, pela sua importância e ampla utilização no decorrer deste trabalho, merecem ser citadas.

1. Sejam U e V espaços vetoriais sobre um corpo k com bases $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e $\{v_\beta\}_{\beta \in B}$, respectivamente. Então $C = \{u_\alpha \otimes_k v_\beta : \alpha \in A, \beta \in B\}$ é uma base do k -espaço vetorial $U \otimes_k V$. Em particular, se $\dim(U) = m$ e $\dim(V) = n$, então $\dim(U \otimes_k V) = mn$.
2. Sejam X e Y espaços vetoriais. Se A e B são subespaços de X e C e D são subespaços de Y , então

$$(A \otimes C) \cap (B \otimes D) = (A \cap B) \otimes (C \cap D).$$

3. Sejam $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ espaços vetoriais. Se $\sum a_i \otimes b_i \in A \otimes B$, onde $\{b_i\}$ é linearmente independente, então $a_i \in A$ e $b_i \in B$, para todo i . De forma análoga, se $\sum a_i \otimes b_i \in A \otimes B$, onde $\{a_i\}$ é linearmente independente, então $a_i \in A$ e $b_i \in B$, para todo i .

Vamos agora às definições e resultados sobre álgebras. Dizemos que um espaço vetorial A é uma *álgebra* se existir uma aplicação bilinear

$$\begin{aligned} m: A \times A &\longrightarrow A \\ (a, b) &\longmapsto ab \end{aligned}$$

que seja

- (i) associativa, isto é, $(ab)c = a(bc)$, para todos $a, b, c \in A$.
- (ii) unital, isto é, que exista $1_A \in A$ tal que $a1_A = 1_Aa = a$, para todo $a \in A$.

Esta aplicação bilinear é chamada *multiplicação* de A .

Note que para qualquer álgebra A podemos definir a sua álgebra oposta A^{op} , que coincide com A como espaço vetorial, e cuja multiplicação é dada por $a \bullet b = ba$, para todos $a, b \in A^{\text{op}}$.

Um *morfismo* de uma álgebra A em uma álgebra B é uma transformação linear $\varphi : A \longrightarrow B$ tal que $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, para todos $a, b \in A$, e ainda $\varphi(1_A) = 1_B$.

Seja A uma álgebra com estrutura de espaço vetorial $(A, +)$. Um subconjunto $I \subseteq A$ é chamado *ideal* se

- (i) $(I, +)$ for um subespaço de $(A, +)$.
- (ii) $rx \in I$ e $xr \in I$, para todo $x \in I$ e todo $r \in R$.

Observação. Em (ii) se tivermos somente que $rx \in I$, para todo $x \in I$ e todo $r \in R$, dizemos que I é um *ideal à esquerda*. E, se tivermos somente que $xr \in I$, para todo $x \in I$ e todo $r \in R$, dizemos que I é um *ideal à direita*.

Dizemos que uma álgebra R é *prima* se, para quaisquer ideais I, J não nulos de R tivermos que IJ é um ideal não nulo de R . Observe que uma álgebra R é prima se, e somente se, para quaisquer elementos $x, y \in R$ tais que $xRy = 0$, tivermos $x = 0$ ou $y = 0$.

Definição. Seja R uma álgebra prima e seja U uma subálgebra de R . Dizemos que U é *racionalmente completa* se a seguinte condição for satisfeita:

Seja $a \in R$ e seja I um ideal não nulo de U . Se $aI \subseteq U$, então $a \in U$.

É imediato verificar que se U é racionalmente completa e contém um ideal não nulo de R , então $U = R$.

A seguir temos uma série de notações e definições que serão utilizadas ao longo deste trabalho:

- Seja R uma álgebra prima. Vamos denotar por $\mathcal{F}(R)$ o conjunto de todos ideais não nulos de R .
- Seja A um espaço vetorial, seja $\nu \in A$ e seja n um inteiro não negativo. Denotamos

$$n\nu = \underbrace{\nu + \cdots + \nu}_{n \text{ vezes}}.$$

Se A for uma álgebra, denotamos

$$\nu^0 = 1_A \quad \text{e} \quad \nu^n = \nu\nu^{n-1}, \text{ para } n \geq 1.$$

- Seja A uma álgebra e seja M um A -módulo à esquerda. Denotamos a ação de A em M por $a \cdot m \in M$, para todo $a \in A$ e todo $m \in M$, a menos que especificado de outra maneira.
- Seja A uma álgebra e seja M um A -módulo à esquerda. Dizemos que M é um A -módulo à esquerda *injetivo* se, para qualquer monomorfismo de A -módulos à esquerda $f: X \longrightarrow Y$ e qualquer homomorfismo de A -módulos à esquerda $g: X \longrightarrow M$, existir um homomorfismo de

A -módulos à esquerda $h: Y \longrightarrow M$ tal que $g = h \circ f$. Define-se de forma análoga o conceito de A -módulo à direita *injetivo*.

- Seja A uma álgebra e seja M um A -módulo à esquerda. Dizemos que M é um A -módulo à esquerda *artiniano* se os submódulos de M satisfizerem a condição de cadeia descendente, ou seja, não existir uma cadeia infinita $M \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots$, de submódulos de M distintos dois a dois. Define-se de forma análoga o conceito de A -módulo à direita *artiniano*.
- Seja A uma álgebra e sejam V, W dois subconjuntos não vazios de A . Vamos denotar

$$V^W = \{v \in V : vw = wv, \text{ para todo } w \in W\}$$

o centralizador de W em V .

- Seja V um espaço vetorial e sejam $m_1, \dots, m_n$ elementos de V . Denotamos por $\text{span}_k\{m_i\}_{1 \leq i \leq n}$ o subespaço de V gerado por $m_1, \dots, m_n$. Ou seja,

$$\text{span}_k\{m_i\}_{1 \leq i \leq n} = \{\lambda_1 m_1 + \cdots + \lambda_n m_n : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in k\}.$$

- Sejam V e W espaços vetoriais. A aplicação linear $\tau: V \otimes W \longrightarrow W \otimes V$ tal que $\tau(v \otimes w) = w \otimes v$, para todo $v \in V$ e todo $w \in W$, é denominada aplicação *twist*.
- Sejam V e W espaços vetoriais. Denotamos por $\text{hom}_k(V, W)$ o conjunto das transformações lineares de V em W .
- Sejam U, V e W espaços vetoriais, e sejam $u \in U$ e $v \in V$. Dizemos que uma forma bilinear $B: U \times V \longrightarrow W$ é *não degenerada* se $B(U, v) = 0$ implicar $v = 0$, e se $B(u, V) = 0$ implicar $u = 0$.
- Sejam V e W espaços vetoriais. Denotamos por $V^* = \text{hom}_k(V, k)$ o espaço dual de V . Temos que V e V^* determinam uma forma bilinear não degenerada

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle: V^* \times V &\longrightarrow k \\ (f, v) &\longmapsto \langle f, v \rangle = f(v) \end{aligned}$$

Se $\phi: V \longrightarrow W$ é uma aplicação linear, então a *transposta* de ϕ é a aplicação linear $\phi^*: W^* \longrightarrow V^*$ definida por $\phi^*(f)(v) = f(\phi(v))$, para todo $f \in W^*$ e todo $v \in V$. Note também que

podemos escrever $\langle \phi^*(f), v \rangle = \langle f, \phi(v) \rangle$.

- Seja G um grupo. Dizemos que uma álgebra A é G -graduada se existir uma família $\{A_g\}_{g \in G}$ de subespaços de A indexada por G tal que $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$, $1_A \in A_{1_G}$, onde 1_G denota o elemento neutro de G , e $A_g A_h \subseteq A_{gh}$, para todos $g, h \in G$. Dizemos que a álgebra A é *fortemente graduada* por G se $A_g A_h = A_{gh}$, para todos $g, h \in G$.

Caso A seja G -graduada, denotamos por a_g a componente de a em A_g , para todo $a \in A$ e todo $g \in G$. Assim, podemos escrever $a = \sum_{g \in G} a_g$, para todo $a \in A$.

- Seja G um grupo e seja kG o espaço vetorial de base G , isto é,

$$kG = \left\{ \sum_{g \in G} \lambda_g g : \lambda_g \in k, \text{ para todo } g \in G \right\}.$$

O espaço vetorial kG é uma álgebra com multiplicação induzida por

$$\begin{aligned} kG \times kG &\longrightarrow kG \\ (\lambda_g g, \lambda_h h) &\longmapsto \lambda_g \lambda_h gh. \end{aligned}$$

Observe que a unidade da álgebra kG é $1_k 1_G$, onde 1_G denota o elemento neutro de G . A álgebra kG é denominada *álgebra de grupo* do grupo G .

1.3 Álgebras de Hopf

O objetivo desta seção é definir a estrutura denominada álgebra de Hopf e apresentar diversas propriedades e resultados que terão algum uso no decorrer deste trabalho. Convém ressaltar que mais detalhes sobre as definições e resultados aqui expostos podem ser encontrados em [FM06, Swe69, DNR00, Mon93b].

1.3.1 Definição

Inicialmente, com o objetivo de definir apropriadamente as álgebras de Hopf, vamos expressar a definição de álgebra feita anteriormente através de diagramas comutativos.

Definição. Seja A um espaço vetorial e sejam $m : A \otimes A \longrightarrow A$ e $\mu : k \longrightarrow A$ aplicações lineares. Dizemos que a terna ordenada (A, m, μ) é uma *álgebra* se os seguintes diagramas forem comutativos:

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{m \otimes \text{Id}} & A \otimes A \\
 \downarrow \text{Id} \otimes m & & \downarrow m \\
 A \otimes A & \xrightarrow{m} & A
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 & & A \otimes A & & \\
 \mu \otimes \text{Id} \nearrow & & \downarrow m & & \text{Id} \otimes \mu \nwarrow \\
 k \otimes A & & A & & A \otimes k \\
 \Phi \searrow & & & & \Psi \swarrow
 \end{array}$$

Note que Φ e Ψ são os isomorfismos canônicos entre os espaços vetoriais envolvidos, ou seja, $\Phi(\lambda \otimes a) = \Psi(a \otimes \lambda) = \lambda a$, para todo $\lambda \in k$ e todo $a \in A$. Denominamos m a *multiplicação* e μ a *aplicação unidade* de A . O primeiro diagrama representa a associatividade da multiplicação e o segundo representa a existência de elemento unidade em A . Note que $\mu(1_k) = 1_A$.

A partir de agora, sempre que tivermos uma estrutura de álgebra, m será a sua multiplicação e μ será a sua aplicação unidade, a menos de menção explícita ao contrário. No decorrer desta seção, A representará uma álgebra.

Ao dualizar a definição de álgebra dada acima, obtemos a estrutura denominada coálgebra.

Definição. Seja C um espaço vetorial e sejam $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$ e $\varepsilon : C \longrightarrow k$ aplicações lineares. Dizemos que a terna ordenada (C, Δ, ε) é uma *coálgebra* se os seguintes diagramas forem comutativos:

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C \\
 \downarrow \Delta & & \downarrow \Delta \otimes \text{Id} \\
 C \otimes C & \xrightarrow{\text{Id} \otimes \Delta} & C \otimes C \otimes C
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 & & C & & \\
 \Phi' \nwarrow & & \downarrow \Delta & & \Psi' \searrow \\
 k \otimes C & & C \otimes C & & C \otimes k \\
 \varepsilon \otimes \text{Id} \swarrow & & & & \text{Id} \otimes \varepsilon \swarrow
 \end{array}$$

Note que Φ' e Ψ' são os isomorfismos canônicos entre os espaços vetoriais envolvidos, ou seja, $\Phi'(c) = 1_k \otimes c$ e $\Psi'(c) = c \otimes 1_k$, para todo $c \in C$. Denominamos Δ a *comultiplicação* e ε a *counidade* de C . O primeiro diagrama representa a chamada coassociatividade da comultiplicação.

A partir de agora, sempre que tivermos uma estrutura de coálgebra, Δ será a sua comultiplicação e ε será a sua counidade, a menos de menção explícita ao contrário. No decorrer desta seção, C representará uma coálgebra.

Observação. (i) O segundo diagrama da definição de coálgebras implica na injetividade da comultiplicação.

- (ii) Denotamos $\Delta(c) = \sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)}$, para todo $c \in C$. Essa notação é chamada notação *sigma*. Ao longo do texto, muitas vezes omitimos o índice do somatório com a intenção de não carregar muito a notação. Note que, pelo segundo diagrama da definição de coálgebras, temos que

$$\sum_{(c)} \varepsilon(c_{(1)})c_{(2)} = \sum_{(c)} \varepsilon(c_{(2)})c_{(1)} = c.$$

- (ii') Da coassociatividade da comultiplicação, denotamos

$$\Delta_2(c) = \sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)} = \sum_{(c)} \sum_{(c_{(1)})} c_{(1)_{(1)}} \otimes c_{(1)_{(2)}} \otimes c_{(2)} = \sum_{(c)} \sum_{(c_{(2)})} c_{(1)} \otimes c_{(2)_{(1)}} \otimes c_{(2)_{(2)}}.$$

- (iii) Seja J um subconjunto qualquer de C . Denotamos $J^+ = J \cap \ker(\varepsilon)$.

Para qualquer coálgebra C , podemos definir a sua coálgebra *co-oposta* C^{cop} , que coincide com C como espaço vetorial, cuja counidade coincide com ε , e cuja comultiplicação, chamada *comultiplicação co-oposta*, é dada por $\Delta^{\text{cop}} = \tau \circ \Delta$. Observe que uma álgebra A é *comutativa* se $m \circ \tau = m$ em $A \otimes A$. Da mesma forma, dizemos que C é *cocomutativa* se $\tau \circ \Delta = \Delta$ em C .

Sejam $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ e $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ coálgebras. Dizemos que uma aplicação linear $f : C \longrightarrow D$ é um *morfismo de coálgebras* se $\Delta_D \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta_C$ e $\varepsilon_C = \varepsilon_D \circ f$.

Definição. Seja I um subespaço de C . Dizemos que:

- (i) I é um *coideal* se $\Delta(I) \subseteq I \otimes C + C \otimes I$ e $\varepsilon(I) = 0$.
- (ii) I é um *coideal à direita* se $\Delta(I) \subseteq I \otimes C$.
- (iii) I é um *coideal à esquerda* se $\Delta(I) \subseteq C \otimes I$.
- (iv) I é uma *subcoálgebra* se $\Delta(I) \subseteq I \otimes I$.

Em qualquer coálgebra existem alguns tipos de elementos que são bem importantes, e por isso mesmo até recebem um nome.

Definição. Seja $c \in C$.

- (i) Dizemos que c é *group-like* se $\Delta(c) = c \otimes c$ e $\varepsilon(c) = 1$. O conjunto dos elementos *group-like* de C é denotado por $G(C)$.
- (ii) Dizemos que c é *g, h -primitivo* se $\Delta(c) = g \otimes c + c \otimes h$, onde $g, h \in G(C)$. O conjunto dos elementos *g, h -primitivos* é denotado por $P_{g,h}(C)$.

Observação. Por [Swe69, Proposition 3.2.1], temos que elementos *group-like* distintos são linearmente independentes. Além disso, sejam $g, h \in G(C)$. É fácil ver que $k(g - h) \subseteq P_{g,h}(C)$. Então, definimos $P'_{g,h}(C)$ como um subespaço de $P_{g,h}(C)$ complementar a $k(g - h)$.

Segue um importante resultado sobre a relação entre o conjunto dos elementos *group-like* e os elementos primitivos, em uma coálgebra qualquer.

Proposição 1.3.1. *Sejam g, h elementos distintos de $G(C)$. Então:*

- (i) $P_{g,g}(C) \cap kG(C) = \{0\}$.
- (ii) $P_{g,h}(C) \cap kG(C) = k(g - h)$.

Demonstração. Antes de mais nada, lembre que elementos *group-like* distintos são linearmente independentes.

- (i) Seja $x \in P_{g,g}(C) \cap kG(C)$. Podemos escrever $x = \sum_{\sigma \in G(C)} \lambda_{\sigma} \sigma$, onde $\lambda_{\sigma} \in k$. Temos então:

$$\Delta(x) = g \otimes x + x \otimes g = \sum_{\sigma \in G(C)} \lambda_{\sigma} (g \otimes \sigma) + \sum_{\sigma \in G(C)} \lambda_{\sigma} (\sigma \otimes g).$$

Por outro lado,

$$\Delta(x) = \Delta \left(\sum_{\sigma \in G(C)} \lambda_{\sigma} \sigma \right) = \sum_{\sigma \in G(C)} \lambda_{\sigma} (\sigma \otimes \sigma).$$

Igualando as duas expressões acima, é fácil ver que $\lambda_{\sigma} = 0$, para todo $\sigma \in G(C)$ com $\sigma \neq g$. Daí, temos

$$(\lambda_g + \lambda_g)(g \otimes g) = \lambda_g(g \otimes g).$$

Da expressão acima, $\lambda_g = 0$. Logo, $x = 0$.

(ii) Seja $x \in P_{g,h}(C) \cap kG(C)$. Podemos escrever $x = \sum_{\sigma \in G(C)} \lambda_\sigma \sigma$, onde $\lambda_\sigma \in k$. Temos então:

$$\Delta(x) = g \otimes x + x \otimes h = \sum_{\sigma \in G(C)} \lambda_\sigma (g \otimes \sigma) + \sum_{\sigma \in G(C)} \lambda_\sigma (\sigma \otimes h).$$

Por outro lado,

$$\Delta(x) = \Delta \left(\sum_{\sigma \in G(C)} \lambda_\sigma \sigma \right) = \sum_{\sigma \in G(C)} \lambda_\sigma (\sigma \otimes \sigma).$$

Igualando as duas expressões acima, é fácil ver que $\lambda_\sigma = 0$, para todo $\sigma \in G(C)$ com $\sigma \notin \{g, h\}$. Daí, temos

$$\lambda_g(g \otimes g) + \lambda_h(g \otimes h) + \lambda_g(g \otimes h) + \lambda_h(h \otimes h) = \lambda_g(g \otimes g) + \lambda_h(h \otimes h).$$

Da expressão acima, temos que $\lambda = \lambda_g = -\lambda_h$. Assim, $x = \lambda(g - h)$. Além disso, todo elemento da forma $\lambda(g - h)$, onde $\lambda \in k$, claramente pertence à intersecção. Logo, podemos concluir que $P_{g,h}(C) \cap kG(C) = k(g - h)$. $\square$

Combinando as noções de álgebra e coálgebra temos a seguinte estrutura.

Definição. Seja B um espaço vetorial. Dizemos que B é uma *biálgebra* se (B, m, μ) for uma álgebra, se (B, Δ, ε) for uma coálgebra e se as seguintes condições forem satisfeitas:

- (1) Δ e ε são morfismos de álgebras;
- (2) m e μ são morfismos de coálgebras.

Observação. Por [Swe69, Proposition 3.1.1], temos que as condições acima são equivalentes.

Seja B uma biálgebra e sejam $g, h \in G(B)$. Note que $\Delta(gh) = \Delta(g)\Delta(h) = (g \otimes g)(h \otimes h) = gh \otimes gh$, e que $\varepsilon(gh) = \varepsilon(g)\varepsilon(h) = 1_k 1_k = 1_k$, ou seja, $gh \in G(B)$. Como B possui estrutura de álgebra, existe elemento unidade $1_B \in B$. Do fato da comultiplicação e da counidade de B serem morfismos de álgebras, temos que $1_B \in G(B)$. Assim, o conjunto dos elementos group-like de uma biálgebra formam um monóide.

Como $1 \in G(B)$, existe o conjunto dos elementos 1, 1-primitivos. Denotamos $P_{1,1}(B) = P(B)$ e denominamos seus elementos de *elementos primitivos* de B . Segue um resultado sobre os elementos primitivos de uma biálgebra.

Proposição 1.3.2. *Seja B uma biálgebra e seja $x \in P(B)$. Então:*

(i) *Seja n um inteiro não-negativo. Temos que*

$$\Delta(x^n) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i \otimes x^{n-i},$$

onde $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ é o coeficiente binomial, para todo $0 \leq i \leq n$.

(ii) *Se o corpo base k tiver característica zero e se B tiver dimensão finita, então $x = 0$.*

Demonstração. (i) Seja A uma álgebra qualquer e sejam $a, b \in A$. Pelo desenvolvimento do binômio de Newton, temos

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

Assim, temos que

$$\Delta(x^n) = (\Delta(x))^n = (1_B \otimes x + x \otimes 1_B)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1_B \otimes x)^{n-i} (x \otimes 1_B)^i = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i \otimes x^{n-i}.$$

(ii) Vamos supor que $x \neq 0$. Vamos mostrar por indução em n que $\{1_B, x, \dots, x^n\}$ é linearmente independente.

Vamos mostrar que vale para $n = 1$. Supondo que $\{1_B, x\}$ é linearmente dependente, podemos escrever $x = \lambda 1_B$, onde $\lambda \in k$. Assim, temos que

$$\Delta(x) = 1_B \otimes x + x \otimes 1_B = (\lambda + \lambda)(1_B \otimes 1_B).$$

Por outro lado,

$$\Delta(x) = \Delta(\lambda 1_B) = \lambda(1_B \otimes 1_B).$$

Das expressões acima, temos que $\lambda + \lambda = \lambda$, ou seja, $\lambda = 0$. Logo, concluímos que $x = 0$, o que é um absurdo.

Supondo que $\{1_B, x, \dots, x^n\}$ é linearmente independente, vamos mostrar que $\{1_B, x, \dots, x^n, x^{n+1}\}$ é linearmente independente. Podemos supor que $x^{n+1} = \sum_{j=0}^n \lambda_j x^j$, onde $\lambda_j \in k$, para todo j . De (i), temos que

$$\begin{aligned} \Delta(x^{n+1}) &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} x^i \otimes x^{n+1-i} \\ &= 1_B \otimes x^{n+1} + (n+1)(x \otimes x^n) + \sum_{i=2}^{n+1} \binom{n+1}{i} x^i \otimes x^{n+1-i}. \end{aligned}$$

Pelo fato da característica do corpo base ser zero, e x e x^n serem não nulos, temos que o termo $(n+1)(x \otimes x^n)$ é não nulo na expressão acima. Mas,

$$\Delta(x^{n+1}) = \Delta\left(\sum_{j=0}^n \lambda_j x^j\right) = \sum_{j=0}^n \left[\sum_{i=0}^j \lambda_j \binom{j}{i} x^i \otimes x^{j-i}\right]$$

não possui nenhuma componente no subespaço $k(x \otimes x^n)$.

Pela hipótese indutiva, $\{1_B, x, \dots, x^n\}$ é linearmente independente. Logo, não pode haver igualdade, o que é um absurdo.

Dessa forma, $\{1_B, x, \dots, x^n, x^{n+1}\}$ é linearmente independente. Como a dimensão de B é finita, chegamos em uma contradição. Portanto, $x = 0$. $\square$

Sejam B e B' biálgebras. Dizemos que uma aplicação linear $f : B \longrightarrow B'$ é um *morfismo de biálgebras* se f for um morfismo de álgebras e um morfismo de coálgebras. Seja I um subespaço de B . Se I for um ideal e um coideal dizemos que I é um *bi-ideal*.

Sejam $f, g \in \text{hom}_k(C, A)$. Note que podemos definir uma estrutura de álgebra em $\text{hom}_k(C, A)$ com a seguinte multiplicação, denominada *produto de convolução*:

$$(f * g)(c) = (m \circ (f \otimes g) \circ \Delta)(c) = \sum_{(c)} f(c_{(1)})g(c_{(2)}), \text{ para todo } c \in C.$$

Observe que a aplicação composta $\mu \circ \varepsilon \in \text{hom}_k(C, A)$ é a unidade da álgebra $\text{hom}_k(C, A)$ com o produto de convolução. Finalmente, estamos em condições de definir a estrutura denominada álgebra de Hopf.

Definição. Seja H uma biálgebra. Dizemos que H é uma *álgebra de Hopf* se a identidade de H for inversível no produto de convolução em $\text{hom}_k(H, H)$. A inversa de Id_H no produto de convolução é chamada de *antípoda* e é denotada por S .

Observação. Na notação sigma,

$$\sum_{(h)} S(h_{(1)})h_{(2)} = \sum_{(h)} h_{(1)}S(h_{(2)}) = (\mu \circ \varepsilon)(h) = \varepsilon(h)1_H.$$

Além disso, por [Swe69, Proposition 4.0.1], temos:

- (i) S é um *antimorfismo de álgebras*, ou seja, $S(gh) = S(h)S(g)$, para todos $g, h \in H$, e $S(1) = 1$.
- (ii) S é um *antimorfismo de coálgebras*, ou seja, $\Delta \circ S = \tau \circ (S \otimes S) \circ \Delta$ e $\varepsilon \circ S = \varepsilon$. Na notação sigma,

$$\sum_{(S(h))} S(h)_{(1)} \otimes S(h)_{(2)} = \sum_{(h)} S(h_{(2)}) \otimes S(h_{(1)}).$$

Exemplo 1.3.3. Seja G um grupo e seja $H = kG$ sua álgebra de grupo. Se definirmos $\Delta(g) = g \otimes g$, $\varepsilon(g) = 1$ e $S(g) = g^{-1}$, para todo $g \in G$, então H é uma álgebra de Hopf.

A partir de agora, sempre que tivermos uma estrutura de álgebra de Hopf, S será a sua antípoda, a menos de menção explícita ao contrário. Caso S possua uma inversa na composição, ela será denotada por $\bar{S}$. No decorrer desta seção, H representará uma álgebra de Hopf.

Seja $g \in G(H)$. Note que $S(g)g = gS(g) = \varepsilon(g)1 = 1$, ou seja, g possui inversa $g^{-1} = S(g)$. Além disso, do fato de S ser um antimorfismo de coálgebras, temos que $\Delta(S(g)) = S(g) \otimes S(g)$. Portanto, $S(g)$ é um elemento group-like e o conjunto $G(H)$ é um grupo.

Sejam H e H' álgebras de Hopf. Dizemos que uma aplicação linear $f : H \longrightarrow H'$ é um *morfismo de álgebras de Hopf* se f for um morfismo de biálgebras. Seja I um subespaço de H . Se I for um bi-ideal e se $S(I) \subseteq I$, dizemos que I é um *ideal de Hopf*. Nesse caso, o quociente H/I é uma álgebra de Hopf com a estrutura induzida de H , e a projeção de H em H/I é um morfismo de álgebras de Hopf.

Proposição 1.3.4. *Seja H uma álgebra de Hopf. Então $\ker(\varepsilon)$ é um ideal de Hopf de H .*

Demonstração. Como ε é um morfismo de álgebras, é imediato que $\ker(\varepsilon)$ é um ideal de H . Além disso, do fato de S ser um antimorfismo de coálgebras, temos que $\varepsilon \circ S = \varepsilon$. Daí, é imediato que $S(\ker(\varepsilon)) \subseteq \ker(\varepsilon)$. Resta mostrar que $\ker(\varepsilon)$ é um coideal de H .

Como $\ker(\varepsilon)$ tem codimensão igual a um e $\varepsilon(1_H) = 1_k$, pois ε é um morfismo de álgebras, podemos obter $\{h_i\} \cup \{1_H\}$ base de H tal que $\{h_i\}$ é base de $\ker(\varepsilon)$. Seja $h \in \{h_i\}$. Podemos escrever

$$\Delta(h) = a \otimes 1_H + \sum_i a_i \otimes h_i, \text{ onde } a, a_i \in H, \text{ para todo } i.$$

Assim, temos que $h = a\varepsilon(1_H) + \sum_i a_i \varepsilon(h_i) = a$ e, portanto, $a \in \ker(\varepsilon)$, ou seja, $\Delta(h) \in \ker(\varepsilon) \otimes H + H \otimes \ker(\varepsilon)$. Como h é um elemento qualquer da base de $\ker(\varepsilon)$, concluímos que $\ker(\varepsilon)$ é um coideal de H . $\square$

Definição. Seja I um subespaço de H . Dizemos que I é uma *subálgebra de Hopf* de H se I for uma subálgebra e uma subcoálgebra de H , e se $S(I) \subseteq I$.

Definição. Seja I um subespaço de H . Dizemos que I é um *coideal subálgebra à direita* se I for subálgebra e coideal à direita de H . Define-se analogamente *coideal subálgebra à esquerda*.

Vamos denotar por H^{cop} a biálgebra com comultiplicação co-oposta. Então, temos o seguinte resultado extraído de [Mon93b, Lemma 1.5.11].

Proposição 1.3.5. *H é uma álgebra de Hopf com antípoda inversível na composição se, e somente se, H^{cop} for uma álgebra de Hopf com antípoda inversível na composição. Neste caso, $\bar{S}$ é a antípoda de H^{cop} .*

Observação. Note que $\bar{S}$ é também um antimorfismo de álgebras e um antimorfismo de coálgebras. Além disso, $\bar{S}$ é a inversa de $\text{Id}_{H^{\text{cop}}}$ no produto de convolução. Na notação sigma,

$$\sum_{(h)} \bar{S}(h_{(2)})h_{(1)} = \sum_{(h)} h_{(2)}\bar{S}(h_{(1)}) = (\mu \circ \varepsilon)(h) = \varepsilon(h)1_H.$$

1.3.2 Ações, produto cruzado e o produto smash

Inicialmente, vamos definir o conceito de ação de uma álgebra de Hopf em uma álgebra qualquer. Em seguida definiremos a estrutura conhecida como produto cruzado, e depois veremos que o produto smash de álgebras é um caso particular dessa estrutura.

Definição. Dizemos que H age em A ou que A é um H -módulo álgebra à esquerda se as seguintes condições forem satisfeitas:

- (i) A é um H -módulo à esquerda.
- (ii) $h \cdot (ab) = \sum_{(h)} (h_{(1)} \cdot a)(h_{(2)} \cdot b)$, para todo $h \in H$ e todos $a, b \in A$.
- (iii) $h \cdot 1_A = \varepsilon(h)1_A$, para todo $h \in H$.

Dizemos que H mede A se (ii) e (iii) forem satisfeitos.

Seja A um H -módulo álgebra à esquerda, e sejam $h \in H$ e $a \in A$. Dizemos que h age *trivialmente* em a se $h \cdot a = \varepsilon(h)a$. O conjunto

$$A^H = \{a \in A : h \cdot a = \varepsilon(h)a, \text{ para todo } h \in H\}$$

é uma subálgebra de A denominada a *subálgebra de invariantes* de A sob a ação de H .

Definição. Podemos definir as seguintes ações de H em H :

- (i) A ação adjunta à esquerda de H em H é definida por $\text{ad}_l(h, b) = \sum h_{(1)}bS(h_{(2)})$, para todos $b, h \in H$.
- (ii) A ação adjunta à direita de H em H é definida por $\text{ad}_r(h, b) = \sum S(h_{(1)})bh_{(2)}$, para todos $b, h \in H$.

É fácil verificar que ambas as ações adjuntas definem de fato ações de H em H .

Definição. Seja I uma subálgebra de Hopf de H . Dizemos que I é uma subálgebra de Hopf *normal* se $\text{ad}_l(H, I) \subseteq I$ e $\text{ad}_r(H, I) \subseteq I$.

Segue um lema extraído de [Mon93b, Lemma 3.4.2] sobre subálgebras de Hopf normais.

Lema 1.3.6. *Se K uma subálgebra de Hopf normal de H , então $I = HK^+ = K^+H$ é um ideal de Hopf.*

Demonstração. Sejam $h \in H$ e $a \in K$. Considere a seguinte identidade

$$ha = \sum h_{(1)}a\varepsilon(h_{(2)})1_H = \sum h_{(1)}aS(h_{(2)})h_{(3)} = \sum \text{ad}_l(h_{(1)}, a)h_{(2)}.$$

A partir da identidade acima e do fato de K ser uma subálgebra de Hopf normal de H , temos que $ha \in KH$. Além disso, se $\varepsilon(a) = 0$, é fácil ver que $\varepsilon(\text{ad}_l(h, a)) = 0$. Logo, $HK^+ \subseteq K^+H$.

Analogamente, só que utilizando $\text{ad}_r(h, a)$ ao invés de $\text{ad}_l(h, a)$, temos que $K^+H \subseteq HK^+$. Assim, mostramos que $I = HK^+ = K^+H$. A partir daí, é fácil ver que I é um ideal de H .

A partir da Proposição 1.3.4, temos que

$$\Delta(K^+) = \Delta(K \cap \ker(\varepsilon)) \subseteq (K \otimes K) \cap (\ker(\varepsilon) \otimes H + H \otimes \ker(\varepsilon)) = K^+ \otimes K + K \otimes K^+.$$

Da expressão acima e do fato de $\varepsilon(I) = \varepsilon(K^+)\varepsilon(H) = 0$, concluimos que I é um coideal de H . Falta mostrar que $S(I) \subseteq I$.

Novamente a partir da Proposição 1.3.4, sabemos que $\ker(\varepsilon)$ é um ideal de Hopf. Assim,

$$S(K^+) = S(K \cap \ker(\varepsilon)) \subseteq \left(S(K) \cap S(\ker(\varepsilon)) \right) \subseteq K \cap \ker(\varepsilon) = K^+.$$

Logo, temos que $S(I) = S(K^+H) = S(H)S(K^+) \subseteq HK^+ = I$ e, portanto, I é um ideal de Hopf. $\square$

Observação. Lembre que, conforme vimos na seção anterior, o quociente H/I é uma álgebra de Hopf com a estrutura induzida de H , e a projeção de H em H/I é um morfismo de álgebras de Hopf.

Agora vamos definir a estrutura denominada produto smash. Seja H uma álgebra de Hopf que age em A . Denotamos por $A \# H$ a álgebra que coincide com $A \otimes H$ como espaço vetorial e cuja

multiplicação é dada por

$$(a \# h)(b \# g) = \sum_{(h)} a(h_{(1)} \cdot b) \# h_{(2)}g, \text{ para todos } a, b \in A \text{ e todos } h, g \in H.$$

Observe que $a \# h$ e $b \# g$ denotam respectivamente os elementos $a \otimes h$ e $b \otimes g$ de $A \# H$. Denominamos $A \# H$ o *produto smash* de A e H .

Observação. É fácil verificar que $A \# H$ é de fato uma álgebra com a multiplicação definida acima. Note também que $1_A \# 1_H$ é o elemento unidade de $A \# H$.

Observe que através das inclusões

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \# H \\ a & \longmapsto & a \# 1_H \end{array} \quad \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & A \# H \\ h & \longmapsto & 1_A \# h \end{array}$$

podemos identificar A e H com as subálgebras $A \# 1_H$ e $1_A \# H$ de $A \# H$, respectivamente. Assim, $A \# H$ tem uma estrutura de A -módulo, tanto à direita quanto à esquerda. Da mesma forma $A \# H$ tem uma estrutura de H -módulo, tanto à direita quanto à esquerda.

Note também que A tem estrutura de $A \# H$ -módulo à esquerda se definirmos

$$(a \# h) \cdot x = a(h \cdot x), \text{ para todos } a, x \in A \text{ e todo } h \in H.$$

Caso a antípoda de H seja bijetora, A também tem estrutura de $A \# H$ -módulo à direita se definirmos

$$x \triangleleft (a \# h) = \bar{S}(h) \cdot (xa), \text{ para todos } a, x \in A \text{ e todo } h \in H.$$

Seja $\sigma: H \times H \longrightarrow A$ uma função k -bilinear. Dizemos que σ é *inversível no produto de convolução* se existir uma função k -bilinear $\sigma^{-1}: H \times H \longrightarrow A$ tal que $\sigma * \sigma^{-1} = \sigma^{-1} * \sigma = \varepsilon_{H \times H}$

$$\begin{aligned} (\sigma * \sigma^{-1})(l, m) &= \sum \sigma(l_{(1)}, m_{(1)}) \sigma^{-1}(l_{(2)}, m_{(2)}) \\ &= \varepsilon(l) \varepsilon(m) 1_A \\ &= \sum \sigma^{-1}(l_{(1)}, m_{(1)}) \sigma(l_{(2)}, m_{(2)}) \\ &= (\sigma^{-1} * \sigma)(l, m), \text{ para todos } l, m \in H. \end{aligned}$$

Observe que a função k -bilinear

$$\begin{aligned} \varepsilon_{H \times H}: \quad H \times H &\longrightarrow A \\ (l, h) &\longmapsto \varepsilon(l)\varepsilon(h)1_A \end{aligned}$$

é a identidade do produto de convolução na álgebra das funções k -bilineares de $H \times H$ em A .

Agora estamos em condições de definir a estrutura conhecida como produto cruzado, que será utilizada no caminho para se demonstrar a sobrejeção da correspondência.

Definição. Assuma que H mede A e que $\sigma: H \times H \longrightarrow A$ é uma função k -bilinear inversível no produto de convolução. Denotamos por $A \#_\sigma H$ o k -espaço vetorial $A \otimes H$ com multiplicação dada por

$$(a \#_\sigma h)(b \#_\sigma l) = \sum a(h_{(1)} \cdot b)\sigma(h_{(2)}, l_{(1)}) \#_\sigma h_{(3)}l_{(2)}, \text{ para todos } h, l \in H \text{ e todos } a, b \in A.$$

Observe que $a \#_\sigma h$ e $b \#_\sigma l$ denotam respectivamente os elementos $a \otimes h$ e $b \otimes l$ de $A \#_\sigma H$. O objeto $A \#_\sigma H$ é chamado *produto cruzado* se a multiplicação for associativa e $1_A \#_\sigma 1_H$ for o elemento unidade de $A \#_\sigma H$, ou seja, se $A \#_\sigma H$ for uma álgebra.

O próximo lema, extraído de [Mon93b, Lemma 7.1.2], traz as condições que devem ser satisfeitas para que a estrutura construída acima seja um produto cruzado.

Lema 1.3.7. *Sejam H , A e σ como na definição acima. Então $A \#_\sigma H$ é um produto cruzado se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas:*

(i) A é um H -módulo twisted, ou seja,

$$1_H \cdot a = a, \text{ para todo } a \in A.$$

$$h \cdot (l \cdot a) = \sum \sigma(h_{(1)}, l_{(1)})(h_{(2)}l_{(2)} \cdot a)\sigma^{-1}(h_{(3)}, l_{(3)}), \text{ para todos } h, l \in H \text{ e todo } a \in A.$$

(ii) σ for um cociclo, ou seja,

$$\sigma(h, 1) = \sigma(1, h) = \varepsilon(h)1_A, \text{ para todo } h \in H.$$

$$\sum (h_{(1)} \cdot \sigma(l_{(1)}, m_{(1)}))\sigma(h_{(2)}, l_{(2)}m_{(2)}) = \sum \sigma(h_{(1)}, l_{(1)})\sigma(h_{(2)}l_{(2)}, m), \text{ para todos } h, l, m \in H.$$

Observação. Note que se σ for trivial, ou seja, se $\sigma = \text{Id}$, então o produto cruzado nada mais é do que o produto smash álgebra de A e H , ou seja, $A \#_{\text{Id}} H = A \# H$. Assim o produto smash é um caso particular do produto cruzado.

1.3.3 Comódulos e comódulo álgebras

Com o objetivo de definir apropriadamente a noção de comódulo, vamos expressar a definição de módulo através de diagramas comutativos.

Definição. Seja A uma álgebra, seja M um espaço vetorial e seja $\psi: A \otimes M \rightarrow M$ uma aplicação linear. Dizemos que (M, ψ) é um A -módulo à esquerda se os seguintes diagramas forem comutativos:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes M & \xrightarrow{m_A \otimes \text{Id}} & A \otimes M \\ \downarrow \text{Id} \otimes \psi & & \downarrow \psi \\ A \otimes M & \xrightarrow{\psi} & M \end{array} \quad \begin{array}{ccc} k \otimes M & \xrightarrow{\mu \otimes \text{Id}} & A \otimes M \\ & \searrow \Phi & \downarrow \psi \\ & & M \end{array}$$

Note que Φ é o isomorfismo canônico entre os espaços $k \otimes M$ e M , ou seja, $\Phi(\lambda \otimes m) = \lambda m$, para todo $\lambda \in k$ e todo $m \in M$. Conforme citado anteriormente, usualmente denotamos $\psi(a \otimes m) = a \cdot m$, para todo $a \in A$ e todo $m \in M$.

Ao dualizar a definição de módulo dada acima, obtemos a seguinte definição de comódulo.

Definição. Seja C uma coálgebra, seja M um espaço vetorial e seja $\rho: M \rightarrow M \otimes C$ uma aplicação linear. Dizemos que (M, ρ) é um C -comódulo à direita se os seguintes diagramas forem comutativos:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\rho} & M \otimes C \\ \downarrow \rho & & \downarrow \text{Id} \otimes \Delta \\ M \otimes C & \xrightarrow{\rho \otimes \text{Id}} & M \otimes C \otimes C \end{array} \quad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\rho} & M \otimes C \\ & \searrow \psi' & \downarrow \text{Id} \otimes \varepsilon \\ & & M \otimes k \end{array}$$

Observação. Note que ψ' é o isomorfismo canônico entre os espaços M e $M \otimes k$, ou seja, $\psi'(m) = m \otimes 1$, para todo $m \in M$. A estrutura de C -comódulo à esquerda é definida analogamente. Comódulos

também possuem uma notação sigma. Seja M um comódulo à direita e seja $m \in M$. Denotamos $\rho(m) = \sum_{(m)} m_{(0)} \otimes m_{(1)}$.

Exemplo 1.3.8. Seja A uma álgebra, seja G um grupo e seja $H = kG$. Então A é um H -comódulo à direita se, e somente se, A for uma álgebra G -graduada. Neste caso, temos que $A_\sigma = \rho^{-1}(A \otimes \sigma)$, para todo $\sigma \in G$.

Demonstração. Seja A uma álgebra G -graduada. Da graduação de A , podemos escrever $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$. Vamos definir

$$\begin{aligned} \rho: \quad A &\longrightarrow A \otimes H \\ a = \sum_{g \in G} a_g &\longmapsto \sum_{g \in G} a_g \otimes g. \end{aligned}$$

É fácil ver que ρ é uma aplicação linear. Além disso, para todo $a \in A$ temos que

$$((\rho \otimes \text{Id}) \circ \rho)(a) = \sum_{g \in G} a_g \otimes g \otimes g = (\text{Id} \otimes \Delta) \left(\sum_{g \in G} a_g \otimes g \right) = ((\text{Id} \otimes \Delta) \circ \rho)(a)$$

e

$$((\text{Id} \circ \varepsilon) \circ \rho)(a) = (\text{Id} \circ \varepsilon) \left(\sum_{g \in G} a_g \otimes g \right) = \sum_{g \in G} a_g \otimes 1 = \psi'(a).$$

Portanto, (A, ρ) é um H -comódulo à direita.

Seja A um H -comódulo à direita e seja $a \in A$. Podemos escrever $\rho(a) = \sum_{\sigma \in G} a_\sigma \otimes \sigma$. Como $((\text{Id}_A \otimes \Delta) \circ \rho)(a) = ((\rho \otimes \text{Id}_H) \circ \rho)(a)$, temos que

$$\sum_{\sigma \in G} a_\sigma \otimes \sigma \otimes \sigma = \sum_{\sigma \in G} \left[\sum_{\tau \in H} (a_\sigma)_\tau \otimes \tau \otimes \sigma \right].$$

Da expressão acima, temos que

$$(a_\sigma)_\tau = \begin{cases} a_\sigma & , \text{ se } \sigma = \tau. \\ 0 & , \text{ se } \sigma \neq \tau. \end{cases}$$

Logo, $\rho(a_\sigma) = a_\sigma \otimes \sigma$, para todo $\sigma \in G$. Vamos definir $A_\sigma = \{a_\sigma : a \in A\}$, onde $\sigma \in G$. É fácil ver que A_σ é um subespaço de A .

Pelo segundo diagrama da definição de comódulo, temos que $a = \sum_{\sigma \in G} a_\sigma$, para todo $a \in A$. Assim, $A = \sum_{\sigma \in G} A_\sigma$. Falta mostrar que a soma é direta.

Observe que $a \in A_\sigma$ se, e somente se, $\rho(a) = a \otimes \sigma$. De fato, se $a \in A_\sigma$, então $a = b_\sigma$, para algum $b \in A$. Conforme vimos anteriormente, $\rho(b_\sigma) = b_\sigma \otimes \sigma$, ou seja, $\rho(a) = a \otimes \sigma$. A recíproca é imediata.

Logo, a soma dos A_σ é direta e A uma álgebra G -graduada. Além disso, é fácil ver que $A_\sigma = \rho^{-1}(A \otimes \sigma)$, para todo $\sigma \in G$. $\square$

Sejam (M, ρ_M) e (N, ρ_N) C -comódulos à direita. Dizemos que uma aplicação linear $f : M \rightarrow N$ é um *morfismo de comódulos* se $\rho_N \circ f = (f \otimes \text{Id}_C) \circ \rho_M$.

A partir de agora, sempre que tivermos uma estrutura de comódulo à direita, ρ será a aplicação linear da estrutura, a menos de menção explícita ao contrário.

Da comutatividade do primeiro diagrama da definição dos C -comódulos à direita, temos o seguinte lema.

Lema 1.3.9. *Seja C uma coálgebra e seja M um C -comódulo à direita. Seja $m \in M$ tal que $\rho_M(m) = \sum_{i=1}^n m_i \otimes c_i$, onde $\{c_i\}_{1 \leq i \leq n}$ é linearmente independente. Então, $\text{span}_k\{m_i\}_{1 \leq i \leq n}$ é um subcomódulo de M de dimensão finita.*

A seguir dois teoremas que trazem uma característica de finitude em todos os comódulos e coálgebras. O primeiro foi extraído de [DNR00, Theorem 2.1.7].

Teorema 1.3.10 (Teorema Fundamental dos Comódulos). *Seja C uma coálgebra e seja M um C -comódulo à direita. Então todo elemento de M pertence a um subcomódulo de M de dimensão finita.*

O segundo foi extraído de [DNR00, Theorem 1.4.7]. Note que ele será usado na demonstração do Lema 2.2.2.

Teorema 1.3.11 (Teorema Fundamental das Coálgebras). *Todo elemento de uma coálgebra pertence a uma subcoálgebra de dimensão finita.*

A partir de agora considere H uma álgebra de Hopf e A uma álgebra.

Definição. Dizemos que A é uma H -comódulo-álgebra à direita se as seguintes condições forem satisfeitas:

1. A é um H -comódulo à direita via aplicação linear ρ .
2. $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$, para todos $a, b \in A$. Na notação sigma,

$$\sum_{(ab)} (ab)_{(0)} \otimes (ab)_{(1)} = \sum_{(a),(b)} a_{(0)} b_{(0)} \otimes a_{(1)} b_{(1)}.$$

3. $\rho(1_A) = 1_A \otimes 1_H$.

Denominamos $A^{\text{co}H} = \{a \in A : \rho(a) = a \otimes 1\}$ a *subálgebra de coinvariantes* de A . Note que $A^{\text{co}H} \subseteq A$ é uma subálgebra de A .

Exemplo 1.3.12. Sejam G um grupo, A uma álgebra G -graduada e $H = kG$. Então A é uma H -comódulo-álgebra à direita e $A^{\text{co}H} = A_{1_G}$.

Demonstração. Do Exemplo 1.3.8, temos que A é um H -comódulo à direita. Sejam $a = \sum_{g \in G} a_g$, $b =$

$\sum_{h \in G} b_h \in A$. Temos

$$\rho(a)\rho(b) = \left(\sum_{g \in G} a_g \otimes g\right) \left(\sum_{h \in G} b_h \otimes h\right) = \sum_{v \in G} \left(\sum_{\substack{g, h \in G \\ gh=v}} a_g b_h\right) \otimes v = \rho\left(\sum_{v \in G} \left(\sum_{\substack{g, h \in G \\ gh=v}} a_g b_h\right)\right) = \rho(ab)$$

$$\rho(1_A) = 1_A \otimes 1_G, \text{ pois } 1_A \in A_{1_G}.$$

Portanto, A é uma H -comódulo-álgebra à direita. Observe que $A^{\text{co}H} = A_{1_G}$. □

As considerações e resultados a seguir serão necessárias para a demonstração da sobrejetividade da correspondência, mais especificamente serão utilizadas na demonstração do Corolário 5.3.4.

Sejam A, B álgebras onde $B \subset A$. Dizemos que $B \subset A$ é uma H -extensão à direita se A for uma H -comódulo-álgebra à direita e se $A^{\text{co}H} = B$. Dizemos que a extensão tem a propriedade da *base*

normal à direita se $A \cong B \otimes H$ como B -módulo à esquerda e como H -comódulo à direita. Observe que $B \otimes H$ tem estrutura de H -comódulo à direita via $\rho = \text{Id}_B \otimes \Delta$.

Dizemos ainda que a extensão $A^{\text{co}H} \subseteq A$ é *H -Galois à direita* se a seguinte função

$$\begin{aligned} \beta: A \otimes_{A^{\text{co}H}} A &\longrightarrow A \otimes_k H \\ a \otimes b &\longmapsto (a \otimes 1)\rho(b) \end{aligned}$$

for bijetora.

A seguir um resultado extraído de [Mon93b, Theorem 8.1.7] que trata das extensões H -Galois à direita.

Teorema 1.3.13. *Seja G um grupo, A uma álgebra G -graduada e $H = kG$. Então $A_{1_G} = A^{\text{co}H} \subseteq A$ é H -Galois à direita se, e somente se, A for fortemente graduada por G .*

Segue um outro resultado de [Mon93b, Corollary 8.2.5] que trata das extensões H -Galois à direita com a propriedade da base normal.

Corolário 1.3.14. *Seja $B \subset A$ uma H -extensão à direita. Então $B \subset A$ é H -Galois à direita com a propriedade da base normal à direita se, e somente se, $A \cong B \#_\sigma H$ como álgebras, onde $B \#_\sigma H$ é um produto cruzado.*

1.3.4 Coálgebras pontuais e a filtração co-radical

A partir de agora vamos considerar C uma coálgebra não nula. Dizemos que C é *simples* se C não possuir subcoálgebras próprias não-nulas, ou seja, se não existir subcoálgebra não-nula $D \subset C$ tal que $D \neq C$. A soma de todas subcoálgebras simples de C é denotada por C_0 e denominada o *co-radical* de C .

Definição. Dizemos que C é *pontual* se todas as subcoálgebras simples de C forem unidimensionais.

Observação. Obviamente quando dizemos que uma álgebra de Hopf é pontual estamos nos referindo à sua estrutura de coálgebra.

Segue um resultado extraído de [Swe69, Lemma 8.0.1].

Proposição 1.3.15. *O conjunto de subcoálgebras unidimensionais de C está em correspondência biunívoca com o conjunto $G(C)$. Além disso, C é pontual se, e somente se, $C_0 = kG(C)$.*

Com o objetivo de definir uma filtração para C , seja

$$C_n = \Delta^{-1}(C \otimes C_{n-1} + C_0 \otimes C), \text{ para } n \geq 1.$$

De [Mon93b, Theorem 5.2.2] temos o seguinte resultado.

Teorema 1.3.16. *Para cada $n \geq 0$, C_n é uma subcoálgebra de C e a família $\{C_n\}_{n \geq 0}$ satisfaz:*

- (i) $C_n \subseteq C_{n+1}$ e $C = \bigcup_{n \geq 0} C_n$.
- (ii) $\Delta(C_n) \subseteq \sum_{i=0}^n C_i \otimes C_{n-i}$.

Denominamos $\{C_n\}_{n \geq 0}$ a *filtração co-radical* de C . Seja $c \in C$. Dizemos que c tem grau m , se m for o menor inteiro tal que $c \in C_m$.

Segue mais um importante resultado extraído de [Mon93b, Corollary 5.3.5].

Teorema 1.3.17. *Seja D uma coálgebra, e seja $f: C \rightarrow D$ um morfismo sobrejetor de coálgebras. Então, $D_0 \subseteq f(C_0)$. Em particular, se C é pontual, então $D_0 = f(C_0)$ e D também é pontual.*

Seguem alguns resultados sobre as álgebras de Hopf pontuais. O primeiro foi extraído de [Mon93b, Corollary 5.2.11].

Teorema 1.3.18. *Toda álgebra de Hopf cujo co-radical é cocomutativo possui antípoda bijetora. Em particular, toda álgebra de Hopf pontual tem antípoda bijetora.*

Proposição 1.3.19. *Seja H uma álgebra de Hopf pontual e seja $\{H_n\}_{n \geq 0}$ a filtração co-radical de H . Então $H_0 H_n \subseteq H_n$, para todo $n \geq 0$.*

Demonstração. É claro que $H_0 H_0 \subseteq H_0$. Para o caso em que $n \geq 1$, o resultado é consequência direta da definição $H_n = \Delta^{-1}(H \otimes H_{n-1} + H_0 \otimes H)$. Vamos por indução em n .

Para $n = 1$. Seja $x \in H_1$ e seja $g \in G(H)$. Temos que

$$\Delta(gx) = \Delta(g)\Delta(x) \in (H_0 \otimes H_0)(H \otimes H_0 + H_0 \otimes H) \subseteq H \otimes H_0 + H_0 \otimes H.$$

Da inclusão acima, concluímos que $gx \in H_1$. Como $H_0 = kG(H)$, temos que $H_0H_1 \subseteq H_1$.

Agora, vamos supor que o resultado é válido para valores menores do que n . Seja $x \in H_n$ e seja $g \in G(H)$. Temos que

$$\begin{aligned} \Delta(gx) &= \Delta(g)\Delta(x) \in (H_0 \otimes H_0)(H \otimes H_{n-1} + H_0 \otimes H) \\ &\subseteq H \otimes H_0H_{n-1} + H_0 \otimes H \\ &\subseteq H \otimes H_{n-1} + H_0 \otimes H, \text{ pela hipótese indutiva.} \end{aligned}$$

Da inclusão acima, concluímos que $gx \in H_n$. Portanto, $H_0H_n \subseteq H_n$, para todo $n \geq 0$. $\square$

1.3.5 Integrais

Antes de falar propriamente de integrais, vamos definir uma estrutura que será importante posteriormente para obtermos um determinado tipo de elemento integral. A próxima definição foi extraída de [DNR00, Remark 3.3.12].

Definição. Dizemos que uma álgebra A de dimensão finita é uma *álgebra de Frobenius* se $A \cong A^*$ como A -módulos à esquerda ou, de forma equivalente, como A -módulos à direita. Dizemos que uma álgebra A é uma *álgebra quasi-Frobenius* se A for um A -módulo à esquerda injetivo e artiniiano. É sabido que uma álgebra de Frobenius é necessariamente quasi-Frobenius.

A seguinte definição foi extraída de [Mas94].

Definição. Dizemos que uma álgebra de Hopf H possui a *propriedade (Fr)* se todo coideal subálgebra à esquerda e todo coideal subálgebra à direita forem álgebras de Frobenius.

Segue um resultado extraído de [Mas94, Proposition 2.3] que trata da existência da propriedade (Fr).

Proposição 1.3.20. *Uma álgebra de Hopf possui a propriedade (Fr) se o co-radical de H for cocomutativo. Em particular, toda álgebra de Hopf pontual possui a propriedade (Fr).*

A próxima equivalência foi extraída de [Mas92, Theorem 2.1]. Convém ressaltar que o último item terá um papel fundamental na demonstração da Proposição 5.3.6.

Teorema 1.3.21. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita e seja B um coideal subálgebra à direita de H . Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. B é uma álgebra de Frobenius;
2. B é uma álgebra quasi-Frobenius;
3. Todo M em ${}_B\mathcal{M}^H$ ou em $\mathcal{M}_B^H$ é um B módulo livre, onde ${}_B\mathcal{M}^H$ ($\mathcal{M}_B^H$) denota a categoria dos H -comódulos à direita que são também B -módulos à esquerda (direita).

Finalmente, vamos aos elementos integrais. Agora vamos denotar por H uma álgebra de Hopf de dimensão finita.

Definição. [Mon93b, Definition 2.1.1] Um *integral à esquerda* em H é um elemento $t \in H$ tal que $ht = \varepsilon(h)t$, para todo $h \in H$. Um *integral à direita* em H é um elemento $t' \in H$ tal que $t'h = \varepsilon(h)t'$, para todo $h \in H$.

Vamos denotar por $\int_H^l$ o espaço de integrais à esquerda, e por $\int_H^r$ o espaço de integrais à direita. É fácil ver que $\int_H^l$ e $\int_H^r$ são ideais de H . Segue um resultado extraído de [Mon93b, Theorem 2.1.3].

Teorema 1.3.22. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Então:*

1. Ambos $\int_H^l$ e $\int_H^r$ são unidimensionais.
2. A antípoda S de H é bijetora e $S(\int_H^l) = \int_H^r$.
3. H é uma álgebra de Frobenius.

Seja t um elemento qualquer não nulo de $\int_H^l$ e seja $h \in H$. Como $\int_H^l$ é unidimensional, podemos escrever $th = \lambda_h t$, onde $\lambda_h \in k$. Considere a seguinte função:

$$\begin{aligned} \alpha: \quad H &\longrightarrow k \\ h &\longmapsto \lambda_h \end{aligned}$$

É fácil verificar que α é um morfismo de álgebras. Por [DNR00, Proposition 4.2.11], temos que H^* é uma álgebra de Hopf com antípoda S^* , e por [DNR00, Proposition 1.4.15], temos que $\alpha \in G(H^*)$. Logo existe $\bar{\alpha} = S^*(\alpha)$ a inversa de α no produto de convolução, que é a multiplicação em H^* .

Seja t' um elemento qualquer não nulo de $\int_H^r$. Como $S(t') \in \int_H^l$, temos que

$$S(ht') = S(t')S(h) = \alpha(S(h))S(t') = S(\alpha(S(h))t').$$

Como S é bijetora, $ht' = \alpha(S(h))t'$. Mas $\langle \alpha, S(h) \rangle = \langle S^*(\alpha), h \rangle = \langle \bar{\alpha}, h \rangle$. Assim, $ht' = \bar{\alpha}(h)t'$, para todo $h \in H$.

Definição. O elemento $\alpha \in G(H^*)$ construído acima é chamado o *elemento group-like distinguido* de H^* .

Agora vamos tirar a restrição da dimensão de H ser finita.

Definição. Seja B um coideal subálgebra à direita de H . Um *integral à esquerda* em B é um elemento $x \in B$ tal que $bx = \varepsilon(b)x$, para todo $b \in B$. Um *integral à direita* em B é um elemento $x' \in B$ tal que $x'b = \varepsilon(b)x'$, para todo $b \in B$.

Seguem dois resultados, ambos extraídos de [Kop93], que tratam da existência dos elementos integrais de um coideal subálgebra à direita de H . Segue o primeiro, baseado em [Kop93, Theorem 2.2].

Teorema 1.3.23. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora e seja B um coideal subálgebra à direita de H de dimensão finita. As seguintes condições são equivalentes:*

- (i) *B é uma álgebra quasi-Frobenius.*
- (ii) *Existe um integral não nulo à esquerda e um integral não nulo à direita em B , e pelo menos um deles gera B em $\mathcal{M}^H$, onde $\mathcal{M}^H$ denota a categoria dos H -comódulos à direita, ou seja, B é o menor subcomódulo que contém o elemento integral em questão.*

Observação. Observe que B tem uma estrutura natural de H -comódulo à direita fazendo $\rho = \Delta$.

Segue o segundo, baseado em [Kop93, Corollary 2.4].

Corolário 1.3.24. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita e seja B um coideal subálgebra à direita de H . Se ambos os integrais como descrito no Teorema 1.3.23 (ii) existirem, então eles são os únicos integrais à direita e à esquerda em B , a menos de multiplicação por escalar do corpo base k .*

1.4 A álgebra de quocientes de Martindale

O objetivo desta seção é enunciar algumas propriedades do centróide estendido e das álgebras de quocientes de Martindale à esquerda e simétrica. As definições e resultados foram baseados em [Pas87].

A seguir um teorema extraído de [Pas87, Proposition 1.2] que caracteriza a álgebra de quocientes de Martindale à esquerda.

Teorema 1.4.1. *Seja R uma álgebra prima. Uma álgebra Q_l que satisfaz as condições abaixo está univocamente determinada, a menos de um isomorfismo que se restringe à identidade em R . Seguem as condições:*

- (i) R é uma subálgebra de Q_l .
- (ii) Para todo $q \in Q_l$, existe um ideal $A \in \mathcal{F}(R)$ tal que $Aq \subseteq R$.
- (iii) Para todo $q \in Q_l$ e todo ideal $A \in \mathcal{F}(R)$, se $Aq = 0$, então $q = 0$.
- (iv) Seja $A \in \mathcal{F}(R)$ e $f : A \rightarrow R$, um homomorfismo de R -módulos à esquerda. Então existe $q \in Q_l$ tal que $f(a) = aq$, para todo $a \in A$.

Observação. Adicionalmente, temos uma outra condição, consequência direta do item (iii), e por isso denominaremos (iii)'. Segue:

- (iii)' Para todo $q \in Q_l$ e todo ideal $A \in \mathcal{F}(R)$, se $qA = 0$, então $q = 0$.

Demonstração. Sejam $q \in Q_l$ e $A \in \mathcal{F}(R)$ tais que $qA = 0$. Por (ii), existe um ideal $I \in \mathcal{F}(R)$ tal que $Iq \subseteq R$. Temos então que $IqRA = 0$, já que $RA \subseteq A$ e $qA = 0$. Mas R é uma álgebra prima e IqR e A são ideais de R cujo produto é nulo. Como $A \neq 0$, temos que $IqR = 0$, ou seja, $Iq = 0$. Por (iii), concluímos que $q = 0$. $\square$

Definição. A álgebra que satisfaz as condições do teorema acima é chamada *álgebra de quocientes de Martindale à esquerda* de R . Vamos denotá-la por Q_l .

Convém ressaltar que a *álgebra de quocientes de Martindale à direita*, denotada por Q_r , é definida de forma análoga. Segue agora um teorema extraído de [Pas87, Proposition 1.4] que caracteriza a álgebra de quocientes de Martindale simétrica.

Teorema 1.4.2. *Seja R uma álgebra prima. Uma álgebra Q que satisfaz as condições abaixo está univocamente determinada, a menos de um isomorfismo que se restringe à identidade em R . Seguem as condições:*

- (i) R é uma subálgebra de Q .
- (ii) Para todo $q \in Q$, existem ideais $A, B \in \mathcal{F}(R)$ tais que $Aq, qB \subseteq R$.
- (iii) Para todo $q \in Q$ e todo ideal $A \in \mathcal{F}(R)$, se $Aq = 0$ ou $qA = 0$, então $q = 0$.
- (iv) Sejam $A, B \in \mathcal{F}(R)$, $f : A \rightarrow R$, um homomorfismo de R -módulos à esquerda, e $g : B \rightarrow R$, um homomorfismo de R -módulos à direita, tais que $f(a)b = ag(b)$, para todos $a \in A$ e $b \in B$. Então existe $q \in Q$ tal que $f(a) = aq$, para todo $a \in A$ e $g(b) = qb$, para todo $b \in B$.

Observação. Verifica-se que $Q = \{q \in Q_l : qB \subseteq R, \text{ para algum } B \in \mathcal{F}(R)\} = \{q \in Q_r : Bq \subseteq R, \text{ para algum } B \in \mathcal{F}(R)\}$.

Definição. A álgebra que satisfaz as condições do teorema acima é chamada *álgebra de quocientes de Martindale simétrica* de R . Vamos denotá-la por Q .

O próximo resultado foi extraído de [Pas89, Lemma 10.9] e mostra que ambas as álgebras de quocientes de Martindale à esquerda e simétrica são álgebras primas. Além disso, introduz o centralizador de R em Q_l , que será denotado por K e que terá papel fundamental no decorrer deste trabalho.

Teorema 1.4.3. *Sejam R uma k -álgebra prima e $T = Q_l$ ou $T = Q$. Então:*

- (i) A álgebra T é prima. Mais especificamente, se $q_1, q_2 \in T$ são tais que $q_1 R q_2 = 0$, então $q_1 = 0$ ou $q_2 = 0$.

- (ii) O centralizador de R em Q_l é um corpo e coincide tanto com o centro de Q_l quanto com o de Q .

Observação. O centralizador de R em Q_l chama-se *centróide estendido* de R .

A partir de agora, sempre que R representar uma álgebra prima, Q_l será a álgebra de quocientes de Martindale à esquerda de R , Q_r será a álgebra de quocientes de Martindale à direita de R , Q será a álgebra de quocientes de Martindale simétrica de R e K será o centróide estendido de R . É importante citar que Q_l , Q_r e Q sempre existem.

1.5 Ações de álgebra de Hopf em álgebras primas

O objetivo desta seção é enunciar uma série de resultados a respeito de ações de álgebra de Hopf em álgebras primas.

Definição. Seja R uma álgebra prima e seja H uma álgebra de Hopf que age em R . Dizemos que a ação de H em R é *contínua* se, para todo $h \in H$ e todo ideal $I \in \mathcal{F}(R)$, existir um ideal $J \in \mathcal{F}(R)$ tal que $h \cdot J \subseteq I$.

Conforme enunciado no teorema abaixo, extraído de [Mon93a, Proposition 2.3], ações de álgebras de Hopf pontuais são sempre contínuas.

Teorema 1.5.1. *Seja R uma álgebra prima e seja H uma álgebra de Hopf pontual que age em R . Então a ação de H em R é contínua.*

A seguir um teorema extraído de [Coh86, Proposition 5] que mostra que, em certas condições, a ação de H em R se estende unicamente a uma ação de H em Q_l .

Teorema 1.5.2. *Seja R uma álgebra prima e seja H uma álgebra de Hopf que age em R . Suponha que a antípoda S de H seja inversível e que a ação de H em R seja contínua. Então a ação se estende unicamente a uma ação de H em Q_l .*

Nas condições do teorema anterior, mostra-se que a extensão da ação de H em R a uma ação de H em Q_l se restringe a uma ação de H em Q , conforme enunciado no teorema abaixo, extraído de [Coh86, Proposition 6].

Teorema 1.5.3. *Seja R uma álgebra prima e seja H uma álgebra de Hopf que age em R . Suponha que a antípoda S de H seja inversível e que a ação de H em R seja contínua. Então a extensão da ação de H em R a uma ação de H em Q_l se restringe a uma ação de H em Q .*

Convém lembrar que, pelo Teorema 1.3.18, toda álgebra de Hopf pontual H tem antípoda bijetora, logo inversível. Assim, de acordo com os teoremas enunciados acima, quando se tem uma ação de uma álgebra de Hopf pontual H em uma álgebra prima R , podemos estender unicamente essa ação a uma ação de H em Q_l que se restringe a uma ação de H em Q .

Capítulo 2

Mais sobre coálgebras

2.1 Introdução

Apesar de abordarmos as coálgebras no Capítulo 1, precisaremos de vários resultados adicionais sobre essa estrutura para cumprir o objetivo principal deste trabalho. Este capítulo traz estes resultados adicionais.

A Seção 2.2 traz uma série de propriedades de alguns coideais especiais, que serão usados no decorrer deste trabalho, e a Seção 2.3 faz um estudo mais aprofundado sobre a estrutura das coálgebras pontuais.

2.2 Alguns coideais especiais

Esta seção tem por objetivo trazer uma série de resultados a respeito de alguns coideais especiais. Esses coideais terão um papel importante nos capítulos subsequentes.

2.2.1 Os coideais da forma $L(c)$ e $R(c)$

Seja C uma coálgebra e seja $c \in C$. Podemos escrever $\Delta(c) = \sum_i c_i \otimes d_i$, onde $c_i, d_i \in C$, para todo i , de modo que $\{d_i\}_i$ seja linearmente independente. Dessa forma, definimos

$$L(c) = \text{span}_k\{c_i\}_i.$$

De forma análoga se, ao invés de $\{d_i\}_i$, o conjunto $\{c_i\}_i$ for linearmente independente, definimos

$$R(c) = \text{span}_k\{d_i\}_i.$$

Além disso, se I é um subconjunto qualquer de C , denotamos

$$L(I) = \sum_{c \in I} L(c) \quad \text{e} \quad R(I) = \sum_{c \in I} R(c).$$

A proposição seguinte mostra que $L(c)$ e $R(c)$ estão bem definidos. Consequentemente, $L(I)$ e $R(I)$ também estão bem definidos.

Proposição 2.2.1. *Os subespaços $L(c)$ e $R(c)$ estão bem definidos.*

Demonstração. Inicialmente, vamos mostrar que $L(c)$ está bem definido. Seja $\Delta(c) = \sum_i c_i \otimes d_i = \sum_j e_j \otimes f_j$, onde $c_i, d_i, e_j, f_j \in C$, para todo i e todo j , de modo que $\{d_i\}_i$ e $\{f_j\}_j$ sejam linearmente independentes.

Vamos considerar $\{f_j\}_j \cup \{f'_z\}_z$ base de C . Assim, podemos escrever $d_i = \sum_j \lambda_{ij} f_j + \sum_z \lambda'_{iz} f'_z$, onde $\lambda_{ij}, \lambda'_{iz} \in k$, para todo j , todo z e todo i . Então:

$$\begin{aligned}
\sum_i c_i \otimes d_i &= \sum_i c_i \otimes \left(\sum_j \lambda_{ij} f_j + \sum_z \lambda'_{iz} f'_z \right) = \sum_i \left[\sum_j \lambda_{ij} c_i \otimes f_j + \sum_z \lambda'_{iz} c_i \otimes f'_z \right] \\
&= \sum_i \left[\sum_j \lambda_{ij} c_i \otimes f_j \right] + \sum_i \left[\sum_z \lambda'_{iz} c_i \otimes f'_z \right] \\
&= \sum_j \left(\sum_i \lambda_{ij} c_i \right) \otimes f_j + \sum_z \left(\sum_i \lambda'_{iz} c_i \right) \otimes f'_z.
\end{aligned}$$

Por outro lado, $\sum_i c_i \otimes d_i = \sum_j e_j \otimes f_j$. Assim, $\sum_i \lambda'_{iz} c_i = 0$, para todo z , e $\sum_i \lambda_{ij} c_i = e_j$, para todo j . Logo, $\text{span}_k\{e_j\}_j \subseteq \text{span}_k\{c_i\}_i$. De forma análoga, mostra-se que $\text{span}_k\{c_i\}_i \subseteq \text{span}_k\{e_j\}_j$.

Portanto, $L(c)$ está bem definido. De forma análoga, mostra-se que $R(c)$ também está bem definido. $\square$

Como podemos escrever $c = \sum_i \varepsilon(d_i) c_i = \sum_i \varepsilon(c_i) d_i$, temos que

$$c \in L(c) \quad \text{e} \quad c \in R(c). \quad (2.1)$$

Portanto, temos também

$$I \subseteq L(I) \quad \text{e} \quad I \subseteq R(I). \quad (2.2)$$

Note que, para cada resultado válido para $L(c)$, temos um resultado simétrico válido para $R(c)$. Isto porque $R(c) = L^{\text{cop}}(c)$, onde $L^{\text{cop}}(c)$ denota o espaço $L(c)$ quando olhamos para c na coálgebra co-oposta C^{cop} .

Lema 2.2.2. *Seja $c \in C$. Então:*

- (i) $LL(c) = L(c)$.
- (ii) $L(c)$ é um coideal à direita de C .
- (iii) Se I é um coideal à direita de C , então $L(I) = I$.

- (iv) $RR(c) = R(c)$, $R(c)$ é um coideal à esquerda de C , e se I é um coideal à esquerda de C , então $R(I) = I$.
- (v) $D = RL(c) = LR(c)$ e D é uma subcoálgebra de C .
- (vi) Seja H uma álgebra de Hopf, seja $h \in H$ e seja $\sigma \in G(H)$. Então $\sigma L(h) = L(\sigma h)$, $L(h)\sigma = L(h\sigma)$, $\sigma R(h) = R(\sigma h)$ e $R(h)\sigma = R(h\sigma)$.

Demonstração. Pelo Teorema 1.3.11 (Teorema Fundamental das Coálgebras), todo elemento de uma coálgebra pertence a uma subcoálgebra de dimensão finita. Seja $\{d_i\}_{1 \leq i \leq n}$ uma base de uma subcoálgebra $U \subseteq C$ tal que $c \in U$, e $\Delta(d_i) = \sum_{j=1}^n d_{ji} \otimes d_j$, onde $d_{ji} \in U$, para todos $1 \leq i, j \leq n$.

Podemos escrever $\Delta(c) = \sum_{i=1}^n c_i \otimes d_i$. Então,

$$((\Delta \otimes \text{Id}) \circ \Delta)(c) = (\Delta \otimes \text{Id}) \left(\sum_{i=1}^n c_i \otimes d_i \right) = \sum_{i=1}^n \Delta(c_i) \otimes d_i.$$

Temos ainda,

$$((\text{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta)(c) = (\text{Id} \otimes \Delta) \left(\sum_{i=1}^n c_i \otimes d_i \right) = \sum_{i,j=1}^n c_i \otimes d_{ji} \otimes d_j.$$

Pela coassociatividade da comultiplicação, podemos igualar as expressões acima. Daí,

$$\Delta(c_i) = \sum_{z=1}^n c_z \otimes d_{iz}, \text{ para todo } 1 \leq i \leq n.$$

Como d_{iz} é uma combinação linear dos $\{d_j\}_{1 \leq j \leq n}$, para todos $1 \leq i, z \leq n$, e como $L(c) = \text{span}_k\{c_i\}_{1 \leq i \leq n}$, é fácil concluir que $L(c_i) \subseteq L(c)$, para todo $1 \leq i \leq n$. Assim, $LL(c) \subseteq L(c)$.

Além disso, por (2.2), temos que $L(c) \subseteq LL(c)$. Logo, mostramos que vale (i).

(ii) Observe que $\Delta(L(c)) \subseteq LL(c) \otimes C$. De (i), sabemos que $LL(c) = L(c)$. Logo, $\Delta(L(c)) \subseteq L(c) \otimes C$, e portanto, $L(c)$ é um coideal à direita de C .

(iii) Por (2.1), é imediato que $I \subseteq \sum_{c \in I} L(c)$. Como I é coideal à direita, $L(c) \subseteq I$, para todo $c \in I$. Logo, $L(I) = I$.

(iv) Basta aplicar os itens (i), (ii) e (iii) à coálgebra C^{cop} , que é a coálgebra co-oposta de C .

(v) Podemos escrever

$$((\Delta \otimes \text{Id}) \circ \Delta)(c) = \sum_{i,j,z=1}^n \beta_{ijz}(d_i \otimes d_j \otimes d_z), \text{ onde } \beta_{ijz} \in k, \text{ para todos } 1 \leq i, j, z \leq n.$$

Da expressão acima, observe que $RL(c) = \text{span}_k \left\{ \sum_{j=1}^n \beta_{ijz} d_j \right\}_{1 \leq i, z \leq n}$. Pela coassociatividade da comultiplicação, temos que

$$((\text{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta)(c) = ((\Delta \otimes \text{Id}) \circ \Delta)(c) = \sum_{i,j,z=1}^n \beta_{ijz}(d_i \otimes d_j \otimes d_z).$$

$$\text{Logo, } D = LR(c) = \text{span}_k \left\{ \sum_{j=1}^n \beta_{ijz} d_j \right\}_{1 \leq i, z \leq n} = RL(c).$$

De (ii), temos que $L(c)$ é um coideal à direita de C . De (iv), temos que $R(c)$ é coideal à esquerda de C . Então:

$$\Delta(D) = \Delta(RL(c)) \subseteq C \otimes RL(c) = C \otimes D.$$

$$\Delta(D) = \Delta(LR(c)) \subseteq LR(c) \otimes C = D \otimes C.$$

Das inclusões acima, temos que $\Delta(D) \subseteq (C \otimes D) \cap (D \otimes C) = D \otimes D$. Logo, $D = RL(c) = LR(c)$ é uma subcoálgebra de C .

(vi) Podemos escrever $\Delta(h) = \sum_i h_i \otimes d_i$, onde $h_i, d_i \in H$, para todo i , e $\{d_i\}_i$ é linearmente independente. Dessa forma, temos que $L(h) = \text{span}_k \{h_i\}_i$.

Do fato de σ ser inversível, temos que $\{\sigma d_i\}_i$ é linearmente independente. Como

$$\Delta(\sigma h) = \Delta(\sigma) \Delta(h) = \sum_i \sigma h_i \otimes \sigma d_i,$$

temos que $L(\sigma h) = \text{span}_k \{\sigma h_i\}_i = \sigma \text{span}_k \{h_i\}_i = \sigma L(h)$.

Mostram-se as outras identidades de forma análoga. $\square$

2.2.2 Os coideais da forma H^Y

No decorrer desta seção, A será uma álgebra e H será uma álgebra de Hopf agindo em A . Da Seção 1.3.2, podemos considerar o produto smash $A \# H$. Lembre que podemos identificar A e H com as subálgebras $A \# 1_H$ e $1_A \# H$ de $A \# H$, respectivamente.

O próximo resultado foi extraído de [Wes00, Lemma 1.1].

Lema 2.2.3. *Seja $Y \subseteq A$. Então:*

1. $H^Y = \{h \in H : L(h) \text{ age trivialmente em } Y\}$.
2. H^Y é um coideal subálgebra à direita de H .
3. Seja $\sigma \in G(H)$. Então $\sigma \in H^Y$ se, e somente se, $\sigma \cdot y = y$, para todo $y \in Y$.

Demonstração. Seja $h \in H$. Podemos escrever

$$\Delta(h) = \sum_i h_i \otimes d_i, \text{ onde } h_i, d_i \in H, \quad (2.3)$$

de modo que $\{d_i\}_i$ seja linearmente independente.

(1) Se $h \in H^Y$, temos que

$$\sum_i (h_i \cdot y) \# d_i = hy = yh = \sum_i \varepsilon(h_i)y \# d_i, \text{ para todo } y \in Y.$$

Assim, $h_i \cdot y = \varepsilon(h_i)y$, para todo i e todo $y \in Y$. Portanto,

$$H^Y \subseteq \{h \in H : L(h) \text{ age trivialmente em } Y\}.$$

Se $L(h)$ age trivialmente em Y , temos que

$$hy = \sum_i (h_i \cdot y) \# d_i = \sum_i \varepsilon(h_i)y \# d_i = yh, \text{ para todo } y \in Y.$$

Portanto, $H^Y = \{h \in H : L(h) \text{ age trivialmente em } Y\}$.

(2) É fácil ver que H^Y é uma subálgebra de H . Falta mostrar que H^Y é um coideal à direita de H .

Por (1), se $h \in H^Y$, temos que $L(h)$ age trivialmente em Y . Assim, usando a expressão (2.3), temos que $L(h_i) \subseteq LL(h) = L(h)$, para todo i , pelo Lema 2.2.2. Então, $L(h_i)$ age trivialmente em Y . Novamente por (1), concluímos que $h_i \in H^Y$. Logo, H^Y é um coideal à direita de H .

(3) Observe que $L(\sigma) = k\sigma$. Daí, o resultado é imediato a partir de (1). $\square$

Lema 2.2.4. *Seja $Y \subseteq A$. Se H^Y for um coideal à esquerda de H e se a antípoda de H for inversível, então H^Y é uma subálgebra de Hopf de H .*

Demonstração. Pelo Lema 2.2.3, temos que H^Y é um coideal subálgebra à direita de H que age trivialmente em Y . Mas, por hipótese, H^Y é um coideal à esquerda de H . Assim, H^Y é uma subálgebra e uma subcoálgebra de H . Resta mostrar que $S(H^Y) \subseteq H^Y$.

Seja $a \in Y$ e seja $h \in H^Y$. Temos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} ah &= a \# h = \sum \varepsilon(h_{(1)})a \# h_{(2)} \\ &= \sum (h_{(2)}\bar{S}(h_{(1)})) \cdot a \# h_{(3)}, \text{ pois } \sum h_{(2)}\bar{S}(h_{(1)}) = \varepsilon(h)1_H. \\ &= \sum h_{(2)} \cdot (\bar{S}(h_{(1)}) \cdot a) \# h_{(3)} \\ &= \sum (1_A \# h_{(2)})(\bar{S}(h_{(1)}) \cdot a \# 1_H) \\ &= h_{(2)}(\bar{S}(h_{(1)}) \cdot a) \end{aligned}$$

Utilizando a igualdade acima, temos que

$$\begin{aligned} aS(h) &= \sum S(h)_{(2)}(\bar{S}(S(h)_{(1)}) \cdot a) \\ &= \sum S(h_{(1)})(\bar{S}(S(h_{(2)})) \cdot a), \text{ } S \text{ é antimorfismo de coálgebras.} \\ &= \sum S(h_{(1)})(h_{(2)} \cdot a) \\ &= \sum S(h_{(1)})(\varepsilon(h_{(2)})a), \text{ } H^Y \text{ age trivialmente em } Y. \\ &= \sum S(\varepsilon(h_{(2)})h_{(1)})a = S(h)a. \end{aligned}$$

Assim, $S(h) \in H^Y$. Logo, $S(H^Y) \subseteq H^Y$. $\square$

2.3 A estrutura de coálgebras pontuais

Esta seção tem como base o artigo [Mar85], e seu objetivo é chegar em um resultado sobre a estrutura das coálgebras pontuais, que estende o obtido pelo Teorema de Taft-Wilson, enunciado a seguir, cuja demonstração está em [Mon93b, Theorem 5.4.1].

Teorema 2.3.1 (Taft-Wilson). *Seja C uma coálgebra pontual e seja $G = G(C)$. Então:*

$$(i) \ C_1 = kG \oplus \left(\bigoplus_{g,h \in G} P'_{g,h}(C) \right).$$

$$(ii) \text{ para cada } n \geq 2 \text{ e todo } c \in C_n, \ c = \sum_{g,h \in G} c_{g,h}, \text{ onde } \Delta(c_{g,h}) = g \otimes c_{g,h} + c_{g,h} \otimes h + w, \text{ para algum } w \in C_{n-1} \otimes C_{n-1}.$$

Observação. Quando combinamos o Teorema de Taft-Wilson com o Teorema 1.3.16, obtemos um resultado um pouco mais refinado para o item (ii). Nota-se na verdade que $w \in \sum_{i=1}^{n-1} C_i \otimes C_{n-i}$.

Durante esta seção, C representará sempre uma coálgebra pontual e $\{C_n\}_{n \geq 0}$ a sua filtração co-radical. Por [Mon93b, Theorem 5.4.2], existe um coideal I de C tal que $C = I \oplus C_0$. Convém ressaltar que esse coideal I não é único.

Para cada $n \geq 1$, seja $I_n = C_n \cap I$. Como $C_0 \subseteq C_n$, temos que $C_n = I_n \oplus C_0$. Sejam agora $X_0 = C_0$, $X_1 = I_1$ e, para cada $n \geq 2$, seja X_n subspaço de C , tal que $I_n = I_{n-1} \oplus X_n$. Definindo $C_{-1} = 0$, temos que $C_n = I_n \oplus C_0 = I_{n-1} \oplus X_n \oplus C_0 = C_{n-1} \oplus X_n$, para todo $n \geq 0$.

Na demonstração do Teorema de Taft-Wilson (Teorema 2.3.1) prova-se que

$$I_1 = \bigoplus_{g,h \in G} P'_{g,h}(C). \quad (2.4)$$

Observação. Para cada $n \geq 1$, note que $I_n = \bigoplus_{i=1}^n X_i$.

Sejam $\sigma, \tau \in G = G(C)$. Definimos, para cada $n \geq 0$,

$$X_{\sigma,\tau,n} = \{x \in X_n : \Delta(x) \in (\sigma \otimes x + C \otimes C_{n-1}) \cap (x \otimes \tau + C_{n-1} \otimes C)\}.$$

$$X_{\sigma,\tau} = \bigoplus_{n \geq 0} X_{\sigma,\tau,n}.$$

Note que $X_{\sigma,\tau,0} = \{x \in X_0 : \Delta(x) = \sigma \otimes x = x \otimes \tau\}$. Então,

$$X_{\sigma,\tau,0} = \begin{cases} k\sigma & , \text{ se } \sigma = \tau. \\ 0 & , \text{ se } \sigma \neq \tau. \end{cases}$$

No caso de $n \geq 1$, é fácil ver que

$$X_{\sigma,\tau,n} = \{x \in X_n : \Delta(x) \in \sigma \otimes x + x \otimes \tau + C_{n-1} \otimes C_{n-1}\}.$$

(Para essa verificação, basta considerar uma base de C contendo x que estenda uma base de C_{n-1} , para cada $x \in X_{\sigma,\tau,n}$).

Proposição 2.3.2. (i) Para todo $n \geq 0$, temos:

$$X_n = \bigoplus_{\sigma,\tau \in G} X_{\sigma,\tau,n}.$$

(ii) $X_{\sigma,\tau,1} \subset P_{\sigma,\tau}(C)$, para todos $\sigma, \tau \in G$.

Demonstração. (i) O fato de que, para todo $n \geq 0$,

$$X_n = \sum_{\sigma,\tau \in G} X_{\sigma,\tau,n},$$

é consequência imediata do Teorema de Taft-Wilson (Teorema 2.3.1). Se $n = 0$, a soma é claramente direta. Seja $n \geq 1$ e seja $x \in X_{\sigma,\tau,n} \cap X_{\sigma',\tau',n}$, onde $\sigma, \tau, \sigma', \tau' \in G$ e $(\sigma, \tau) \neq (\sigma', \tau')$. Podemos supor sem perda de generalidade que $\sigma \neq \sigma'$, daí $\Delta(x) = \sigma \otimes x + w = \sigma' \otimes x + w'$, onde $w, w' \in C \otimes C_{n-1}$. Como $x \in C_n$, então $x = 0$. Portanto, a soma é direta.

(ii) Seja $x \in X_{\sigma,\tau,1} \subseteq X_1 = I_1$. De (2.4), podemos escrever $x = \sum_{g,h \in G} c_{g,h}$, onde $c_{g,h} \in P'_{g,h}(C)$.

Dai

$$\Delta(x) = \sum_{g,h \in G} (g \otimes c_{g,h} + c_{g,h} \otimes h) \in \sigma \otimes x + x \otimes \tau + C_0 \otimes C_0.$$

Pelo Teorema de Taft-Wilson (Teorema 2.3.1), a soma $C_0 \oplus (\bigoplus_{g,h \in G} P'_{g,h}(C))$ é direta. Assim, é fácil concluir que $\Delta(x) = \sigma \otimes x + x \otimes \tau$, ou seja, $x \in P_{\sigma,\tau}(C)$. $\square$

Segue um resultado importante sobre os espaços $X_{\sigma,\tau,n}$ quando estamos em uma álgebra de Hopf pontual.

Proposição 2.3.3. *Seja H uma álgebra de Hopf pontual e seja $x \in X_{\sigma,\tau,n} \subseteq H$, onde $n \geq 0$ e $\sigma, \tau \in G(H)$. Então, para todo $\nu \in G(H)$, $\nu x \in X_{\nu\sigma,\nu\tau,n}$.*

Demonstração. É claro que vale para o caso em que $n = 0$. Vamos mostrar que vale para $n \geq 1$. Da definição de $X_{\sigma,\tau,n}$, temos que $\Delta(x) \in \sigma \otimes x + x \otimes \tau + H_{n-1} \otimes H_{n-1}$. Daí,

$$\begin{aligned} \Delta(\nu x) &= \Delta(\nu)\Delta(x) \in (\nu \otimes \nu)(\sigma \otimes x + x \otimes \tau + H_{n-1} \otimes H_{n-1}) \\ &= \nu\sigma \otimes \nu x + \nu x \otimes \nu\tau + \nu H_{n-1} \otimes \nu H_{n-1} \\ &\subseteq \nu\sigma \otimes \nu x + \nu x \otimes \nu\tau + H_{n-1} \otimes H_{n-1}, \text{ pela Proposição 1.3.19.} \end{aligned}$$

Pela definição de $X_{\nu\sigma,\nu\tau,n}$, concluímos que $x \in X_{\nu\sigma,\nu\tau,n}$. $\square$

Definimos $L_0 = \{0\}$, $L_i = \bigoplus_{j=1}^i X_j$, para $i \geq 1$, e $L_{\sigma,\tau} = \bigoplus_{n \geq 1} X_{\sigma,\tau,n}$. Para $i \geq 0$ e $g, h \in G$, sejam π_i e $\pi_{g,h}$ as projeções naturais de C em X_i e $X_{g,h}$, respectivamente. Denotemos por $\pi_{g,h,i}$ a composta $\pi_i \circ \pi_{g,h}$, que é a projeção em $X_{g,h,i}$.

Proposição 2.3.4. *Para todo $i \geq 1$ e todo $c \in X_i$, temos $((\pi_0 \otimes \pi_0) \circ \Delta)(c) = 0$ e $\varepsilon(c) = 0$.*

Demonstração. Como $c \in X_i \subseteq I$, que é um coideal de C , temos $\varepsilon(c) = 0$. Além disso,

$$\Delta(c) \subseteq C \otimes I + I \otimes C = C_0 \otimes I + I \otimes C_0 + I \otimes I.$$

Assim concluímos que $((\pi_0 \otimes \pi_0) \circ \Delta)(c) = 0$. $\square$

A seguir o teorema principal desta seção, baseado no artigo [Mar85, Theorem 2.1], que estende a descrição feita no Teorema de Taft-Wilson (Teorema 2.3.1) quando a comultiplicação é aplicada em um elemento da coálgebra C .

Teorema 2.3.5. *Para todos $g, h \in G$ e todo $x \in L_{g,h}$, temos que*

$$\Delta(x) \in g \otimes x + x \otimes h + \sum_{v \in G} L_{g,v} \otimes L_{v,h}.$$

Demonstração. Sejam $g, h \in G$. Vamos mostrar por indução em n que o teorema vale para todo $x \in X_i$. É fácil ver que vale para $x \in X_{g,h,1}$, a partir da Proposição 2.3.2. Vamos supor que vale para $x \in X_{g,h,i-1} = X_{i-1} \cap L_{g,h}$.

Seja $c \in X_{g,h,i}$. Pelo Teorema de Taft-Wilson (Teorema 2.3.1), temos:

$$\begin{aligned} \Delta(c) &\in g \otimes c + c \otimes h + \sum_{j=1}^{i-1} C_j \otimes C_{i-j} \\ &= g \otimes c + c \otimes h + \sum_{j=1}^{i-1} (C_0 \oplus L_j) \otimes (C_0 \oplus L_{i-j}) \\ &= g \otimes c + c \otimes h + \left(\sum_{j=1}^{i-1} L_j \otimes L_{i-j} \right) + (C_0 \otimes L_{i-1}) + (L_{i-1} \otimes C_0) + (C_0 \otimes C_0). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Pela Proposição 2.3.4, podemos eliminar o termo $C_0 \otimes C_0$ da expressão acima. Gostaríamos de eliminar também os termos $C_0 \otimes L_{i-1}$ e $L_{i-1} \otimes C_0$. Denotando por $\psi = \sum_{j=1}^{i-1} \pi_j$, a projeção de C em L_{i-1} , podemos escrever:

$$((\psi \otimes \pi_0) \circ \Delta)(c) = \sum_{b \in G} l_b \otimes b, \text{ onde } l_b \in L_{i-1}, \text{ para todo } b \in G. \tag{2.6}$$

$$((\pi_0 \otimes \psi) \circ \Delta)(c) = \sum_{b \in G} b \otimes r_b, \text{ onde } r_b \in L_{i-1}, \text{ para todo } b \in G. \tag{2.7}$$

Para provar que os elementos acima são nulos, aplicaremos $\Delta \otimes \text{Id}$ e $\text{Id} \otimes \Delta$ em (2.5). Pela coassociatividade da comultiplicação, os elementos obtidos deverão ser iguais. Em particular, as componentes desses elementos em $L_{i-1} \otimes C_0 \otimes C_0$ e em $C_0 \otimes C_0 \otimes L_{i-1}$ deverão coincidir.

(i) Observe que a componente de $((\text{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta)(c)$ em $L_{i-1} \otimes C_0 \otimes C_0$ é

$$((\text{Id} \otimes \Delta) \circ (\Psi \otimes \pi_0) \circ \Delta)(c),$$

e a componente de $((\Delta \otimes \text{Id}) \circ \Delta)(c)$ em $L_{i-1} \otimes C_0 \otimes C_0$ é

$$((\text{Id} \otimes \pi_0 \otimes \text{Id}) \circ (\Delta \otimes \text{Id}) \circ (\Psi \otimes \pi_0) \circ \Delta)(c) + ((\Psi \otimes \pi_0) \circ \Delta)(c) \otimes h.$$

Daí e da equação (2.6), temos que

$$\sum_{b \in G} l_b \otimes b \otimes b = \sum_{b \in G} ((\text{Id} \otimes \pi_0) \circ \Delta)(l_b) \otimes b + \sum_{b \in G} l_b \otimes b \otimes h.$$

(ii) Observe que a componente de $((\text{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta)(c)$ em $C_0 \otimes C_0 \otimes L_{i-1}$ é

$$((\text{Id} \otimes \pi_0 \otimes \text{Id}) \circ (\text{Id} \otimes \Delta) \circ (\pi_0 \otimes \Psi) \circ \Delta)(c) + g \otimes ((\pi_0 \otimes \Psi) \circ \Delta)(c),$$

e a componente de $((\Delta \otimes \text{Id}) \circ \Delta)(c)$ em $C_0 \otimes C_0 \otimes L_{i-1}$ é

$$((\Delta \otimes \text{Id}) \circ (\pi_0 \otimes \Psi) \circ \Delta)(c).$$

Daí e da equação (2.7), temos que

$$\sum_{b \in G} b \otimes ((\pi_0 \otimes \text{Id}) \circ \Delta)(r_b) + \sum_{b \in G} g \otimes b \otimes r_b = \sum_{b \in G} b \otimes b \otimes r_b.$$

De (i) e (ii), temos:

$$((\text{Id} \otimes \pi_0) \circ \Delta)(l_\nu) = l_\nu \otimes \nu, \text{ para todo } \nu \in G, \text{ com } \nu \neq h. \quad (2.8)$$

$$((\text{Id} \otimes \pi_0) \circ \Delta)(l_h) = - \sum_{\substack{b \in G \\ b \neq h}} l_b \otimes b. \quad (2.9)$$

$$((\pi_0 \otimes \text{Id}) \circ \Delta)(r_\nu) = \nu \otimes r_\nu, \text{ para todo } \nu \in G, \text{ com } \nu \neq g. \quad (2.10)$$

$$((\pi_0 \otimes \text{Id}) \circ \Delta)(r_g) = - \sum_{\substack{b \in G \\ b \neq g}} b \otimes r_b. \quad (2.11)$$

Como $((\varepsilon \otimes \text{Id}) \circ \Delta)(c) = ((\varepsilon \otimes \text{Id}) \circ (\pi_0 \otimes \Psi) \circ \Delta)(c) + 1_k \otimes c$ e $((\text{Id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta)(c) = ((\text{Id} \otimes \varepsilon) \circ (\Psi \otimes \pi_0) \circ \Delta)(c) + c \otimes 1_k$, temos

$$l_h = - \sum_{\substack{b \in G \\ b \neq h}} l_b \text{ e } r_g = - \sum_{\substack{b \in G \\ b \neq g}} r_b. \quad (2.12)$$

Seja $c_1 = c + l_h$. Temos que

$$\begin{aligned} ((\text{Id} \otimes \pi_0) \circ \Delta)(c_1) &= ((\text{Id} \otimes \pi_0) \circ \Delta)(c) + ((\text{Id} \otimes \pi_0) \circ \Delta)(l_h) \\ &= c \otimes h + ((\Psi \otimes \pi_0) \circ \Delta)(c) + ((\text{Id} \otimes \pi_0) \circ \Delta)(l_h), \text{ por (2.5).} \\ &= c \otimes h + \sum_{b \in G} l_b \otimes b + \left(- \sum_{\substack{b \in G \\ b \neq h}} l_b \otimes b\right), \text{ pelas equações (2.6) e (2.9).} \\ &= c \otimes h + l_h \otimes h \\ &= c_1 \otimes h \end{aligned}$$

Assim, $c_1 = c + l_h \in \sum_{\sigma \in G} L_{\sigma, h}$, e aí $l_h \in \sum_{\sigma \in G} L_{\sigma, h}$, já que $c \in L_{g, h}$. Mas pela hipótese de indução e pela equação (2.8), $l_\nu \in \sum_{\sigma \in G} L_{\sigma, \nu}$, para todo $\nu \in G$ com $\nu \neq h$. Da equação (2.12) e da decomposição $C = C_0 \oplus \left(\bigoplus_{g, h \in G} L_{g, h} \right)$, concluímos que $l_b = 0$, para todo $b \in G$.

De forma análoga, $r_b = 0$, para todo $b \in G$. Assim, eliminamos os termos $C_0 \otimes L_{i-1}$ e $L_{i-1} \otimes C_0$ da expressão (2.5). Falta mostrar que $\Delta(c) - g \otimes c - c \otimes h \in \sum_{\nu \in G} L_{g, \nu} \otimes L_{\nu, h}$. Podemos escrever:

$$((\Psi \otimes \Psi) \circ \Delta)(c) = \sum_{u, v, x, y \in G} l_{u, v} \otimes l'_{x, y}, \text{ onde } l_{u, v} \in L_{u, v}, l'_{x, y} \in L_{x, y} \text{ e } l_{u, v}, l'_{x, y} \neq 0.$$

Como fizemos anteriormente, vamos aplicar $\Delta \otimes \text{Id}$ e $\text{Id} \otimes \Delta$ em (2.5). Pela coassociatividade da comultiplicação, os elementos obtidos deverão ser iguais. Em particular, as componentes desses elementos em $C_0 \otimes L_{i-1} \otimes L_{i-1}$, $L_{i-1} \otimes L_{i-1} \otimes C_0$ e em $L_{i-1} \otimes C_0 \otimes L_{i-1}$ deverão coincidir.

(iii) Observe que a componente de $((\text{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta)(c)$ em $C_0 \otimes L_{i-1} \otimes L_{i-1}$ é

$$g \otimes ((\Psi \otimes \Psi) \circ \Delta)(c),$$

e a componente de $((\Delta \otimes \text{Id}) \circ \Delta)(c)$ em $C_0 \otimes L_{i-1} \otimes L_{i-1}$ é

$$\sum_{u,v,x,y \in G} ((\pi_0 \otimes \Psi) \circ \Delta)(l_{u,v}) \otimes l'_{x,y}.$$

(iv) Observe que a componente de $((\text{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta)(c)$ em $L_{i-1} \otimes L_{i-1} \otimes C_0$ é

$$\sum_{u,v,x,y \in G} l_{u,v} \otimes ((\Psi \otimes \pi_0) \circ \Delta)(l'_{x,y}),$$

e a componente de $((\Delta \otimes \text{Id}) \circ \Delta)(c)$ em $L_{i-1} \otimes L_{i-1} \otimes C_0$ é

$$((\Psi \otimes \Psi) \circ \Delta)(c) \otimes h.$$

(v) Observe que a componente de $((\text{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta)(c)$ em $L_{i-1} \otimes C_0 \otimes L_{i-1}$ é

$$\sum_{u,v,x,y \in G} l_{u,v} \otimes ((\pi_0 \otimes \Psi) \circ \Delta)(l'_{x,y}),$$

e a componente de $((\Delta \otimes \text{Id}) \circ \Delta)(c)$ em $L_{i-1} \otimes C_0 \otimes L_{i-1}$ é

$$\sum_{u,v,x,y \in G} ((\Psi \otimes \pi_0) \circ \Delta)(l_{u,v}) \otimes l'_{x,y}.$$

Como $l_{u,v} \in L_{u,v}$ e $l'_{x,y} \in L_{x,y}$, sendo ambos não nulos, e utilizando a hipótese indutiva, obtemos:

$$\sum_{u,v,x,y \in G} l_{u,v} \otimes v \otimes l'_{x,y} = \sum_{u,v,x,y \in G} l_{u,v} \otimes x \otimes l'_{x,y}.$$

De (iii), (iv) e (v), concluimos que $u = g$, $y = h$ e que $v = x$. Logo,

$$\Delta(c) \in g \otimes c + c \otimes h + \sum_{\nu \in G} L_{g,\nu} \otimes L_{\nu,h}.$$

Isso mostra que o resultado vale para $X_{g,h,i} = X_i \cap L_{g,h}$, para todo $g, h \in G$. Assim, completamos a indução e a demonstração. $\square$

A seguir dois corolários, que apesar de imediatos, serão muito utilizados no decorrer do texto. O

primeiro é consequência direta do Teorema 2.3.5 e do teorema de Taft-Wilson (Teorema 2.3.1). O segundo é consequência direta do primeiro corolário.

Corolário 2.3.6. *Sejam $\sigma, \tau \in G$ e $n \geq 1$. Então, para cada $x \in X_{\sigma, \tau, n}$,*

$$\Delta(x) \in \sigma \otimes x + x \otimes \tau + \sum_{\nu \in G} \left[\sum_{\substack{0 < i, j < n \\ i+j \leq n}} (X_{\sigma, \nu, i} \otimes X_{\nu, \tau, j}) \right].$$

Corolário 2.3.7. *Sejam $\sigma, \tau \in G$ e $n \geq 1$. Então, para cada $x \in X_{\sigma, \tau, n}$,*

$$\Delta(x) \in \sigma \otimes x + x \otimes \tau + \sum_{\substack{0 < i, j < n \\ i+j \leq n}} X_i \otimes X_j.$$

Capítulo 3

As ações X-externas

3.1 Introdução

Este capítulo tem por objetivo definir e mostrar diversas propriedades das ações X-externas. Na Seção 3.2 temos uma série de propriedades do produto smash. Na Seção 3.3 definimos o que seriam as chamadas ações X-externas. Finalmente, na Seção 3.4 mostramos algumas propriedades fundamentais das ações X-externas.

No decorrer deste capítulo, R será uma álgebra prima e H será uma álgebra de Hopf pontual agindo em R . Convém lembrar que, pelo Teorema 1.3.18, H possui antípoda bijetora. Da Seção 1.5, temos que a ação de H em R é contínua e, portanto, se estende unicamente a uma ação de H em Q_l que se restringe a uma ação de H em Q . Assim estão definidos os seguintes produtos smash, $R \# H \subseteq Q \# H \subseteq Q_l \# H$.

Antes de prosseguirmos, veremos dois resultados importantes. O primeiro resultado, extraído de [Yan97, Lemma 2.4], justifica a notação para a subálgebra de invariantes de R pela ação de H , conceito definido na Seção 1.3.2. Observe que estamos identificando R e H com as subálgebras $R \# 1_H$ e $1_R \# H$ de $R \# H$, respectivamente.

Lema 3.1.1. *O conjunto R^H coincide com a subálgebra de invariantes de R sobre a ação de H , isto é, $R^H = \{r \in R : h \cdot r = \varepsilon(h)r, \text{ para todo } h \in H\}$.*

Demonstração. Seja $r \in R$ e seja $h \in H$. Podemos escrever $\Delta(h) = \sum_{i=1}^n h'_i \otimes h_i$, onde $\{h_i\}_{1 \leq i \leq n}$ é linearmente independente. Temos então:

$$hr = (1 \# h)(r \# 1) = \sum_{i=1}^n h'_i \cdot r \# h_i$$

$$rh = r \# h = \sum_{i=1}^n \varepsilon(h'_i) r \# h_i$$

A partir das expressões acima é fácil ver que se r for um elemento invariante pela ação de H , então $hr = rh$, para todo $h \in H$.

Se r é tal que $hr = rh$, para todo $h \in H$, temos que $\sum_{i=1}^n h'_i \cdot r \# h_i = \sum_{i=1}^n \varepsilon(h'_i) r \# h_i = r \# h$. Aplicando $\text{Id} \otimes \varepsilon$ na igualdade acima, concluímos que $h \cdot r = \varepsilon(h)r$, ou seja, r é um elemento invariante pela ação de H .

Logo, $R^H = \{r \in R : h \cdot r = \varepsilon(h)r, \text{ para todo } h \in H\}$. □

Observe que, no lema anterior, podemos substituir H por um coideal à direita I de H , e substituir R por um subconjunto Y de R . Pela demonstração acima, é fácil ver que

$$Y^I = \{r \in Y : I \text{ age trivialmente em } r\}.$$

Convém ressaltar a semelhança deste resultado com o resultado do Lema 2.2.3 (1). Além disso, da demonstração do Lema 2.2.3 (1), verifica-se facilmente que

$$I^Y = \{h \in I : L(h) \text{ age trivialmente em } Y\}.$$

O segundo resultado justifica o fato de dizermos que uma subálgebra Λ de $Q \# H$ é uma H -comódulo-álgebra à direita, conforme definido na Seção 1.3.3, se $(\text{Id}_Q \otimes \Delta)(\Lambda) \subseteq \Lambda \otimes H$. Observe que estamos fazendo $\rho = \text{Id}_Q \otimes \Delta$. A partir de agora deixaremos isto implícito.

Proposição 3.1.2. *Seja Λ uma subálgebra de $Q \# H$ tal que $(\text{Id}_Q \otimes \Delta)(\Lambda) \subseteq \Lambda \otimes H$. Então Λ é uma H -comódulo-álgebra à direita via $\rho = \text{Id}_Q \otimes \Delta$.*

Demonstração. Seja $\xi = \sum q_i \# h_i \in \Lambda$. Temos:

$$\begin{aligned}
 ((\text{Id}_\Lambda \otimes \Delta) \circ \rho)(\xi) &= (\text{Id}_\Lambda \otimes \Delta) \left(\sum q_i \# \Delta(h_i) \right) \\
 &= \sum q_i \# [((\text{Id}_H \otimes \Delta) \circ \Delta)(h_i)], \text{ observe que } \text{Id}_\Lambda = \text{Id}_Q \otimes \text{Id}_H. \\
 &= \sum q_i \# [((\Delta \otimes \text{Id}_H) \circ \Delta)(h_i)] \\
 &= (\text{Id}_Q \otimes \Delta \otimes \text{Id}_H) \left(\sum q_i \# \Delta(h_i) \right) \\
 &= ((\rho \otimes \text{Id}_H) \circ \rho)(\xi).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ((\text{Id}_\Lambda \otimes \varepsilon) \circ \rho)(\xi) &= (\text{Id}_\Lambda \otimes \varepsilon) \left(\sum q_i \# \Delta(h_i) \right) \\
 &= \sum q_i \# [((\text{Id}_H \otimes \varepsilon) \circ \Delta)(h_i)], \text{ observe que } \text{Id}_\Lambda = \text{Id}_Q \otimes \text{Id}_H. \\
 &= \sum q_i \# h_i \\
 &= \xi.
 \end{aligned}$$

Assim, Λ é um H -comódulo à direita via ρ . Falta mostrar as outras duas condições da definição de H -comódulo-álgebra à direita feita na Seção 1.3.3.

Seja $\xi' = \sum q'_j \# h'_j \in \Lambda$. Temos:

$$\begin{aligned}
 \rho(\xi\xi') &= (\text{Id}_Q \otimes \Delta) \left(\left[\sum q_i \# h_i \right] \left[\sum q'_j \# h'_j \right] \right) \\
 &= (\text{Id}_Q \otimes \Delta) \left(\sum q_i (h_{i(1)} \cdot q'_j) \# h_{i(2)} h'_j \right) \\
 &= \sum q_i (h_{i(1)} \cdot q'_j) \# \Delta(h_{i(2)}) \Delta(h'_j) \\
 &= \sum q_i (h_{i(1)} \cdot q'_j) \# h_{i(2)} h'_{j(1)} \otimes h_{i(3)} h'_{j(2)} \\
 &= \left[\sum (q_i \# h_{i(1)}) \otimes h_{i(2)} \right] \left[\sum (q'_j \# h'_{j(1)}) \otimes h'_{j(2)} \right] \\
 &= \rho(\xi) \rho(\xi').
 \end{aligned}$$

Note que $1_Q \# 1_H = 1_\Lambda \in \Lambda$, pois Λ é subálgebra de $Q \# H$. Daí, $\rho(1_\Lambda) = 1_\Lambda \otimes 1_H$, e Λ é de fato uma H -comódulo-álgebra à direita. $\square$

3.2 Propriedades dos produtos smash

Esta seção é baseada no artigo [Mil95a] e destaca uma série de propriedades das álgebras produtos smash. Esses resultados serão muito importantes para os capítulos subsequentes.

Inicialmente vamos mostrar dois lemas fundamentais, ambos baseado em [Mil95a, Lemma 1.3]. Note que, se H age em uma álgebra A e V é um coideal à esquerda de H , então $A \# V$ é um A -submódulo à esquerda e à direita de $A \# H$.

Lema 3.2.1. *Seja A uma álgebra que sofre a ação de H , e seja V um coideal à esquerda de H . Então:*

- (1) *Se $\{h_\beta\}$ é uma k -base de V , então $\{1 \# h_\beta\}$ é uma base para o A -módulo à esquerda $A \# V$.*
- (2) *Se $\{h_\beta\}$ é uma k -base de V , então $\{1 \# h_\beta\}$ é uma base para o A -módulo à direita $A \# V$.*

Observação. Note que, para os itens (1) e (2), não é necessário que H seja pontual. O resultado é válido para uma álgebra de Hopf qualquer. A única restrição está no item (2), onde H deve ter, necessariamente, a antípoda bijetora.

Demonstração. (1) É fácil ver que $\{1 \# h_\beta\}$ gera o A -módulo à esquerda $A \# V$. Falta mostrar a independência linear.

Seja $\{a_\alpha\}$ uma k -base de A e sejam $a_\beta \in A$ tais que $\sum_\beta a_\beta(1 \# h_\beta) = 0$. Para cada β , podemos escrever $a_\beta = \sum_\alpha \lambda_{\alpha\beta}(a_\alpha)$, onde $\lambda_{\alpha\beta} \in k$. Então,

$$\sum_{\alpha, \beta} \lambda_{\alpha\beta}(a_\alpha \# h_\beta) = 0.$$

Mas $\{a_\alpha \# h_\beta\}$ é base do espaço vetorial $A \otimes H$. Logo $\lambda_{\alpha\beta} = 0$, para todos α e β , ou seja, $a_\beta = 0$, para todos β . Logo $\{1 \# h_\beta\}$ é uma base para o A -módulo à esquerda $A \# V$.

(2) Vamos definir $\varphi: V \otimes A \longrightarrow A \# V$ tal que $\varphi(h \otimes a) = (1 \# h)a$, para todo $h \in V$ e todo $a \in A$. É fácil ver que φ é um homomorfismo de A -módulos à direita. Na verdade é um isomorfismo.

De fato, seja $\Phi: A \# V \longrightarrow V \otimes A$ tal que $\Phi(a \# h) = \sum_{(h)} h_{(2)} \otimes (\bar{S}(h_{(1)}) \cdot a)$, para todo $h \in V$ e todo $a \in A$. Assim temos, para todo $h \in V$ e todo $a \in A$,

$$\begin{aligned}
\Phi(\varphi(h \otimes a)) &= \Phi((1 \# h)a) = \Phi\left(\sum_{(h)} h_{(1)} \cdot a \# h_{(2)}\right) \\
&= \sum_{(h)} h_{(3)} \otimes (\bar{S}(h_{(2)}) \cdot (h_{(1)} \cdot a)) \\
&= \sum_{(h)} h_{(3)} \otimes ((\bar{S}(h_{(2)})h_{(1)}) \cdot a) \\
&= \sum_{(h)} h_{(2)} \otimes (\varepsilon(h_{(1)})1_H \cdot a), \text{ pois } \sum_{(h)} \bar{S}(h_{(2)})h_{(1)} = \varepsilon(h). \\
&= h \otimes a.
\end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se que $\varphi \circ \Phi = Id_{A \# V}$.

Como $\{h_\beta \otimes 1\}$ é uma base para o A -módulo à direita $V \otimes A$, concluímos, a partir do isomorfismo acima, que $\{1 \# h_\beta\}$ é uma base para o A -módulo à direita $A \# V$. $\square$

Lema 3.2.2. *Seja V um coideal à esquerda de H . Então:*

- (1) *Se $x \in Q_l \# V$, então existe um ideal $I \in \mathcal{F}(R)$ tal que $Ix \subseteq R \# V$.*
- (2) *Para todo $x \in Q_l \# V$ e todo ideal $I \in \mathcal{F}(R)$, se $Ix = 0$, então $x = 0$.*
- (3) *Se V tiver dimensão finita, então para todo $I \in \mathcal{F}(R)$ e todo homomorfismo de R -módulos à esquerda $f : I \rightarrow R \# V$, existe $z \in Q_l \# V$ tal que $f(r) = rz$, para todo $r \in I$.*
- (4) *Para todo $x \in Q_l \# V$ e todo ideal $I \in \mathcal{F}(R)$, se $xI = 0$, então $x = 0$.*
- (5) *Se $J \in \mathcal{F}(R)$, então $(Q_l \# V)^J = (Q_l \# V)^R = (Q_l \# V)^{Q_l}$.*

Demonstração. (1) Pelo lema anterior, para todo $x \in Q_l \# V$, podemos escrever $x = \sum_\beta q_\beta(1 \# h_\beta)$, onde somente um número finito de $q_\beta \in Q_l$ é não nulo.

Para cada β não nulo, pelo Teorema 1.4.1, existe um $A_\beta \in \mathcal{F}(R)$ tal que $A_\beta q_\beta \subseteq R$. Definimos $I = \bigcap_\beta A_\beta$, que é um ideal não nulo de R pois a álgebra R é prima. Daí,

$$Ix = \sum_\beta Iq_\beta(1 \# h_\beta) \subseteq R(1 \# h_\beta) \subseteq R \# V.$$

(2) Pelo lema anterior, podemos escrever $x = \sum_{\beta} q_{\beta}(1 \# h_{\beta})$, onde somente um número finito de $q_{\beta} \in Q_l$ é não nulo. Daí, $Ix = \sum_{\beta} Iq_{\beta}(1 \# h_{\beta}) = 0$. Como $\{1 \# h_{\beta}\}$ é base do Q_l -módulo à esquerda $Q_l \# V$, $Iq_{\beta} = 0$, para todo β . Pelo Teorema 1.4.1, $q_{\beta} = 0$, para todo β . Logo $x = 0$.

(3) Seja $r \in I$. Como a dimensão de V é finita, pelo lema anterior, podemos escrever $f(r) = \sum_{i=1}^n r_i(1 \# h_i)$, onde $r_i \in Q_l$, para todo $1 \leq i \leq n$, de modo que $\{h_i\}_{1 \leq i \leq n}$ seja uma base de V .

Para todo $1 \leq i \leq n$, vamos definir $f_i = \pi_i \circ f: I \longrightarrow R$ por $f_i(r) = r_i$, para todo $r \in I$, que está bem definida pelo fato de $\{1 \# h_i\}_{1 \leq i \leq n}$ ser uma base para o R -módulo à esquerda $R \# V$. É fácil ver que f_i é um homomorfismo de R -módulos à esquerda. Assim, pelo Teorema 1.4.1, existe $q_i \in Q_l$ tal que $f_i(r) = rq_i$, para todo $r \in I$. Seja $z = \sum_{i=1}^n q_i \# h_i \in Q_l$. Então, para todo $r \in I$,

$$f(r) = \sum_{i=1}^n r_i(1 \# h_i) = \sum_{i=1}^n f_i(r)(1 \# h_i) = \sum_{i=1}^n rq_i \# h_i = rz.$$

(4) Pelo lema anterior, podemos escrever $x = \sum_{\beta} (1 \# h_{\beta})q_{\beta}$, onde somente um número finito de $q_{\beta} \in Q_l$ é não nulo. Daí, $xI = \sum_{\beta} (1 \# h_{\beta})q_{\beta}I = 0$. Como $\{1 \# h_{\beta}\}$ é base do Q_l -módulo à direita $Q_l \# V$, $q_{\beta}I = 0$, para todo β . Pelo Teorema 1.4.1, $q_{\beta} = 0$, para todo β . Logo $x = 0$.

(5) Como $J \subseteq R \subseteq Q_l$, basta mostrar que $(Q_l \# V)^J \subseteq (Q_l \# V)^{Q_l}$.

Seja $x \in (Q_l \# V)^J$ e seja $q \in Q_l$. Pelo Teorema 1.4.1, existe um $I \in \mathcal{F}(R)$ tal que $Iq \subseteq R$. Assim, para todo $r \in JI \subseteq J$, temos

$$r(qx - xq) = (rq)x - (rx)q = x(rq) - (xr)q = 0,$$

(Note que a penúltima igualdade decorre do fato que $JIq \subseteq JR \subseteq J$).

Logo, por (2), $xq = qx$, para todo $q \in Q_l$. Ou seja, $x \in (Q_l \# V)^{Q_l}$. □

O próximo teorema, baseado em [Mil95a, Theorem 2.1], traz mais características a respeito dos elementos de $Q_l \# V$, onde V é um coideal à esquerda de H de dimensão finita.

Teorema 3.2.3. *Seja V um coideal à esquerda de H de dimensão finita e seja J um ideal não nulo de R . Sejam também $a \in Q_l \# V$ e $b \in Q_l$, onde b é não nulo. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $a \in b(Q_l \# V)^J$;

(ii) $arb = bra$, para todo $r \in Q_l$;

(iii) $arb = bra$, para todo $r \in J$;

(iv) para todo $m \geq 1$ e todos $s_j, t_j \in R$, onde $1 \leq j \leq m$, se $\sum_{j=1}^m s_j b t_j = 0$, então $\sum_{j=1}^m s_j a t_j = 0$;

(v) para todo $m \geq 1$ e todos $s_j, t_j \in J$, onde $1 \leq j \leq m$, se $\sum_{j=1}^m s_j b t_j = 0$, então $\sum_{j=1}^m s_j a t_j = 0$.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii): Seja $a = bz$, para algum $z \in (Q_l \# V)^J$. Pelo Lema 3.2.2 (5), temos que $z \in (Q_l \# V)^{Q_l}$. Assim,

$$arb = bzrb = brzb = brbz = bra, \text{ para todo } r \in Q_l.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Trivial.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Temos que $arb = bra$, para todo $r \in J$. Sejam $m \geq 1$ e $s_j, t_j \in R$, onde $1 \leq j \leq m$, tais que $\sum_{j=1}^m s_j b t_j = 0$. Como $JR \subseteq J$, temos

$$0 = \sum_{j=1}^m a r s_j b t_j = \sum_{j=1}^m b r s_j a t_j = b r \left(\sum_{j=1}^m s_j a t_j \right), \text{ para todo } r \in J.$$

Mas, pelo Teorema 1.4.1, existe $I \in \mathcal{F}(R)$ tal que $Ib \subseteq R$. Assim, $(IbJ)(\sum_{j=1}^m s_j a t_j) = 0$, onde $IbJ \in \mathcal{F}(R)$. Pelo Lema 3.2.2 (2), $\sum_{j=1}^m s_j a t_j = 0$.

(iv) $\Rightarrow$ (v): Trivial.

(v) $\Rightarrow$ (i): Pelo Teorema 1.4.1, pelo Lema 3.2.2 (1) e pelo fato da álgebra R ser prima, existe um $I \in \mathcal{F}(R)$ tal que $Ib \subseteq R$ e $Ia \subseteq R \# V$. Vamos definir

$$\begin{aligned} f: \quad JIbJ &\longrightarrow R \# V \\ \sum_{j=1}^m s_j b t_j &\longmapsto \sum_{j=1}^m s_j a t_j \end{aligned}$$

Por (v), f está bem definida e é fácil ver que é (R, R) -linear. Assim, pelo Lema 3.2.2 (3), existe $z \in Q_l \# V$ tal que $f(r) = rz$, para todo $r \in JIbJ$. Vamos mostrar agora que $z \in (Q_l \# V)^J$ e que $a = bz$.

De fato, para todo $r \in J$ e $x \in JIbJ$, temos

$$x(rz - zr) = (xr)z - (xz)r = f(xr) - f(x)r = 0.$$

Então $JIbJ(rz - zr) = 0$, para todo $r \in J$. Pelo Lema 3.2.2 (2), $z \in (Q_l \# V)^J$. Finalmente, para todo $s \in JI$ e todo $t \in J$, temos

$$s(bz - a)t = sbzt - sat = sbtz - f(sbt) = sbtz - sbtz = 0.$$

Então $JI(bz - a)J = 0$, portanto, pelo Lema 3.2.2 (2) e (4), $a = bz$. $\square$

O resultado seguinte, baseado em [Mil95a, Theorem 2.3], descreve uma propriedade importante dos (R, R) -sub-bimódulos de $Q_l \# H$.

Teorema 3.2.4. *Seja H uma álgebra de Hopf pontual de dimensão finita agindo em R , e seja M um (R, R) -sub-bimódulo não nulo de $Q_l \# H$. Então, existem $g \in G(H)$, $r \in R$ e $z \in (Q_l \# H)^R$ tais que $z(r \# g) \in M$ e $z(r \# g) \neq 0$.*

Demonstração. Seja $\{H_j\}_{j \geq 0}$ a filtração co-radical de H e seja n o menor inteiro satisfazendo $M \cap (Q_l \# H_n) \neq 0$. Se $x \neq 0$ é tal que $x \in M \cap (Q_l \# H_n)$, então, pelo Lema 3.2.2 (1) e (2), existe $s \in R$ tal que $sx \neq 0$ e $sx \in M \cap (R \# H_n)$. Daí $M \cap (R \# H_n) \neq 0$.

Seja $a \in M \cap (R \# H_n)$ não nulo. Pelo Teorema de Taft-Wilson (Teorema 2.3.1), podemos escrever $a = \sum_{i=1}^m b_i \# x_i + y$, onde $m \geq 1$, $b_i \in R$, $y \in R \# H_{n-1}$ e $x_i \in H_n$ são tais que $\Delta(x_i) \in g_i \otimes x_i + H \otimes H_{n-1}$, onde $g_i \in G(H)$, para todo $0 \leq i \leq m$. Vamos escolher um a para o qual m seja minimal.

Como M é um (R, R) -bimódulo e $g_1^{-1} \cdot (rb_1), b_1 r \in R$, temos que $a(g_1^{-1} \cdot (rb_1)) - b_1 r a \in M \cap (R \# H_n)$,

para todo $r \in R$. Daí:

$$\begin{aligned}
a(g_1^{-1} \cdot (rb_1)) - b_1ra &= \sum_{i=1}^m b_i [g_i \cdot (g_1^{-1} \cdot (rb_1))] \# x_i - \sum_{i=1}^m b_1rb_i \# x_i + \bar{y}, \text{ onde } \bar{y} \in R \# H_{n-1} \\
&= b_1 [g_1 \cdot (g_1^{-1} \cdot (rb_1))] \# x_1 + \sum_{i=2}^m b_i [g_i \cdot (g_1^{-1} \cdot (rb_1))] \# x_i \\
&\quad - b_1rb_1 \# x_1 - \sum_{i=2}^m b_1rb_i \# x_i + \bar{y} \\
&= \sum_{i=2}^m [b_i [g_i \cdot (g_1^{-1} \cdot (rb_1))] - b_1rb_i] \# x_i + \bar{y}
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$a(g_1^{-1} \cdot (rb_1)) - b_1ra = \sum_{i=1}^{m-1} c_i \# x_{i+1} + \bar{y}, \text{ onde } c_i = b_{i+1} [g_{i+1} \cdot (g_1^{-1} \cdot (rb_1))] - b_1rb_{i+1} \in R.$$

Pela minimalidade de m e n , temos que $a(g_1^{-1} \cdot (rb_1)) - b_1ra = 0$. Então

$$a(1 \# g_1^{-1})rb_1 = a(g_1^{-1} \cdot (rb_1)) \# g_1^{-1} = b_1ra(1 \# g_1^{-1}), \text{ para todo } r \in R.$$

Assim, pelo Teorema 3.2.3,

$$a(1 \# g_1^{-1}) = b_1z = zb_1, \text{ para algum } z \in (Q_l \# H)^R.$$

Temos então que

$$a = a(1 \# g_1^{-1})(1 \# g_1) = zb_1(1 \# g_1) = z(b_1 \# g_1).$$

Como, por hipótese $a \neq 0$, temos que $a = z(b_1 \# g_1) \in M$ tem a propriedade desejada. $\square$

Observação. Da demonstração do teorema acima, podemos eliminar a hipótese da dimensão de H ser finita. Para isso, basta considerar que $a \in H'$, onde H' é uma subcoálgebra de H de dimensão finita. O Teorema Fundamental das Coálgebras (Teorema 1.3.11) nos garante a existência de H' . Porém, o teorema como está é suficiente para atender as necessidades deste trabalho.

3.3 Definição das ações X-externas

O objetivo desta seção é obter uma série de resultados sobre a estrutura $(Q \# H)^R$ e definir quando uma ação de H em R é X-externa. Os resultados e definições aqui apresentados foram baseados em [Mil95a, Yan97].

Observe que o grupo $G = G(H)$ age em R por automorfismos, ou seja, existe o seguinte homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \text{Aut}(R) \\ \sigma &\longmapsto (r \mapsto \sigma \cdot r), \end{aligned}$$

onde $\text{Aut}(R)$ denota o grupo dos automorfismos da álgebra R . Definimos, para todo $\sigma \in G$,

$$\Phi_\sigma = \{q \in Q : q(\sigma \cdot r) = rq, \text{ para todo } r \in R\}.$$

Se $\Phi_\sigma \neq \{0\}$, dizemos que a ação de σ em R é *X-interna*, caso contrário dizemos que a ação de σ em R é *X-externa*. Se $\Phi_\sigma = \{0\}$, para todo $\sigma \in G$ com $\sigma \neq 1$, dizemos que a ação de G em R é *X-externa*.

Segue um resultado extraído de [Mil95a, Lemma 3.2].

Lema 3.3.1. *Sejam $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ elementos de G distintos dois a dois, e sejam $q_1, \dots, q_n \in Q$. Então:*

$$\sum_{i=1}^n q_i \# \sigma_i \in (Q \# H)^R \text{ se, e somente se, } q_i \in \Phi_{\sigma_i} \text{ para todo } 1 \leq i \leq n.$$

Demonstração. Seja $r \in R$. Observe que

$$\begin{aligned} r \left(\sum_{i=1}^n q_i \# \sigma_i \right) &= \sum_{i=1}^n r q_i \# \sigma_i \\ \left(\sum_{i=1}^n q_i \# \sigma_i \right) r &= \sum_{i=1}^n q_i (\sigma_i \cdot r) \# \sigma_i. \end{aligned}$$

Das expressões acima e do fato dos elementos group-like serem linearmente independentes, obtemos o resultado desejado. $\square$

Sejam $\sigma, \tau \in G$ e seja $\delta \in P_{\sigma, \tau} = P_{\sigma, \tau}(H)$. Observe que δ age como uma (σ, τ) -derivadação em

R , ou seja, $\delta \cdot (rs) = (\sigma \cdot r)(\delta \cdot s) + (\delta \cdot r)(\tau \cdot s)$, para todos $r, s \in R$. Dizemos que a ação de δ em R é *X-interna* ou dizemos que δ age como uma *derivação X-interna* se existir $q \in Q$ tal que $\delta \cdot r = (\sigma \cdot r)q - q(\tau \cdot r)$, para todo $r \in R$.

Sejam $\alpha \in K$, $\tau \in G$ e $\delta \in P_{1,\tau}$. Note que a aplicação linear

$$\begin{aligned} R &\longrightarrow Q \\ r &\longmapsto \alpha(\delta \cdot r) \end{aligned}$$

é uma $(1, \tau)$ -derivação. De fato,

$$\alpha(\delta \cdot (rs)) = \alpha[(1 \cdot r)(\delta \cdot s) + (\delta \cdot r)(\tau \cdot s)] = (1 \cdot r)\alpha(\delta \cdot s) + \alpha(\delta \cdot r)(\tau \cdot s), \text{ para todos } r, s \in R.$$

Assim podemos definir o seguinte homomorfismo canônico

$$\begin{aligned} K \otimes P_{1,\tau} &\longrightarrow \text{Der}_{1,\tau}(R, Q) \\ \alpha \otimes \delta &\longmapsto (r \mapsto \alpha(\delta \cdot r)), \end{aligned}$$

onde $\text{Der}_{1,\tau}(R, Q) = \{f \in \text{hom}(R, Q) : f(rs) = rf(s) + f(r)(\tau \cdot s), \text{ para todos } r, s \in R\}$ denota o espaço vetorial de todas as $(1, \tau)$ -derivações de R em Q . Vamos denotar por $X_{\text{inn}-\text{Der}_{1,\tau}}(R, Q)$ o subespaço de $\text{Der}_{1,\tau}(R, Q)$ de todas as $(1, \tau)$ -derivações X-internas, ou seja,

$$X_{\text{inn}-\text{Der}_{1,\tau}}(R, Q) = \{f \in \text{Der}_{1,\tau}(R, Q) : \text{existe } q \in Q \text{ tal que } f(r) = rq - q(\tau \cdot r), \text{ para todo } r \in R\}.$$

Da composição do homomorfismo acima com o homomorfismo canônico de $\text{Der}_{1,\tau}(R, Q)$ em $\text{Der}_{1,\tau}(R, Q)/X_{\text{inn}-\text{Der}_{1,\tau}}(R, Q)$, obtemos um homomorfismo

$$\vartheta_\tau : K \otimes P_{1,\tau} \longrightarrow \text{Der}_{1,\tau}(R, Q)/X_{\text{inn}-\text{Der}_{1,\tau}}(R, Q).$$

Seja $\alpha \otimes (1 - \tau) \in K \otimes P_{1,\tau}$. Vamos denotar $\vartheta_\tau(\alpha \otimes (1 - \tau)) = \omega$. Temos que

$$\omega(r) = \alpha((1 - \tau) \cdot r) = \alpha(1 \cdot r - \tau \cdot r) = r\alpha - \alpha(\tau \cdot r), \text{ para todo } r \in R,$$

ou seja, $\omega \in X_{inn-Der_{1,\tau}}(R, Q)$. Portanto, $K \otimes k(1 - \tau) \subseteq \ker(\vartheta_\tau)$ e temos um homomorfismo

$$\overline{\vartheta_\tau}: K \otimes P'_{1,\tau} \longrightarrow Der_{1,\tau}(R, Q)/X_{inn-Der_{1,\tau}}(R, Q),$$

induzido por ϑ_τ :

De [Mil95a, Proposition 3.4] temos o próximo resultado.

Proposição 3.3.2. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $(Q \# H)^R = K$;
2. $\overline{\vartheta_\tau}$ é injetora, para todo $\tau \in G$, e a ação de G em R é X-externa.

Demonstração. Se $(Q \# H)^R = K$, então é imediato que a ação de G em R é X-externa a partir do Lema 3.3.1. Seja $\tau \in G$. Se $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ e $x_1, \dots, x_n \in P_{1,\tau}$ são tais que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \otimes x_i \in \ker(\vartheta_\tau)$,

então existe $a \in Q$ tal que $\sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i \cdot r) = ra - a(\tau \cdot r)$, para todo $r \in R$. Assim temos:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \# x_i + a \# \tau\right)r &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i \# x_i)r + (a \# \tau)r \\ &= \sum_{i=1}^n [\alpha_i r \# x_i + \alpha_i(x_i \cdot r) \# \tau] + a(\tau \cdot r) \# \tau, \text{ lembrar que } \Delta(x_i) = 1 \otimes x_i + x_i \otimes \tau. \\ &= \sum_{i=1}^n r\alpha_i \# x_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i \cdot r) \# \tau + ra \# \tau - \sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i \cdot r) \# \tau \\ &= r\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \# x_i + a \# \tau\right), \text{ para todo } r \in R. \end{aligned}$$

Logo $\sum_{i=1}^n \alpha_i \# x_i + a \# \tau \in (Q \# H)^R = K$. Note que $K \subseteq (Q \# H_0)^R \subseteq (Q \# H)^R \subseteq K$, ou seja, $(Q \# H_0)^R = (Q \# H)^R = K$. Como $a \otimes \tau \in Q \# H_0$, temos que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \otimes x_i \in (Q \otimes H_0) \cap (K \otimes P_{1,\tau}) = K \otimes (H_0 \cap P_{1,\tau}) = K \otimes k(1 - \tau),$$

pela Proposição 1.3.1. Assim, concluímos que $\overline{\vartheta}_\tau$ é injetora para todo $\tau \in G$.

Se $\overline{\vartheta}_\tau$ é injetora para todo $\tau \in G$, e a ação de G em R é X-externa, basta mostrar que $(Q \# H_n)^R = (Q \# H_{n-1})^R$, para todo $n \geq 1$. Daí, pelo Lema 3.3.1 concluíremos que $(Q \# H)^R = K$.

Seja $n \geq 1$ e seja $x \in (Q \# H_n)^R$. Da Seção 2.3, lembrar que $H_n = H_{n-1} \oplus X_n = H_{n-2} \oplus X_{n-1} \oplus X_n$. Assim, vamos escolher bases $\{x_i\}$ de X_n e $\{x_j\}$ de X_{n-1} tais que $x_i \in X_{\sigma_i, \tau_i, n}$, onde $\sigma_i, \tau_i \in G$, para todo i , e $x_j \in X_{\sigma_j, \tau_j, n-1}$, onde $\sigma_j, \tau_j \in G$, para todo j . Podemos escrever

$$x = \sum_i q_i \# x_i + \sum_j q_j \# x_j + \tilde{x}, \text{ onde } q_i, q_j \in Q, \text{ e } \tilde{x} \in Q \# H_{n-2}.$$

Pelo Corolário 2.3.6, temos que $\Delta(x_i) = \sigma_i \otimes x_i + \sum_j w_{ij} \otimes x_j + \tilde{x}_i$, onde $\tilde{x}_i \in H \otimes H_{n-2}$ e $w_{ij} \in X_{\sigma_i, \sigma_j, 1} \subseteq P_{\sigma_i, \sigma_j}$ (Proposição 2.3.2). Assim, para todo $r \in R$ temos que:

$$\begin{aligned} xr &\in \sum_i [q_i(\sigma_i \cdot r) \# x_i + \sum_j q_i(w_{ij} \cdot r) \# x_j] + \sum_j q_j(\sigma_j \cdot r) \# x_j + Q \# H_{n-2} \\ rx &\in \sum_i rq_i \# x_i + \sum_j rq_j \# x_j + Q \# H_{n-2} \end{aligned}$$

Como $xr = rx$, $q_i(\sigma_i \cdot r) = rq_i$, para todo i , ou seja, $q_i \in \Phi_{\sigma_i}$. Do fato da ação de G em R ser X-externa, temos que $\sigma_i = 1$. Pelo Lema 3.3.1, $q_i \in K$, para todo i .

Temos também que $\sum_i q_i(w_{ij} \cdot r) = rq_j - q_j(\sigma_j \cdot r)$, para todo j , ou seja, a aplicação linear $(r \mapsto \sum_i q_i(w_{ij} \cdot r))$ é uma $(1, \sigma_j)$ -derivação X-interna. Assim $\sum_i q_i \otimes w_{ij} \in \ker(\vartheta_{\sigma_j})$. Mas como todos $\overline{\vartheta}_{\sigma_j}$ são injetores, temos que $\ker(\vartheta_{\sigma_j}) \subseteq K \otimes H_0$. Logo:

$$\begin{aligned} (\text{Id} \otimes \Delta)(x) &\in \sum_i q_i \otimes \sigma_i \otimes x_i + \sum_j \left(\sum_i q_i \otimes w_{ij} + q_j \otimes \sigma_j \right) \otimes y_j + Q \otimes H \otimes H_{n-2} \\ &\subseteq Q \otimes H_0 \otimes H + Q \otimes H \otimes H_{n-2} \\ &= Q \otimes (H_0 \otimes H + H \otimes H_{n-2}). \end{aligned}$$

Daí, $x \in (\text{Id} \otimes \Delta)^{-1}(Q \otimes (H_0 \otimes H + H \otimes H_{n-2})) = Q \otimes \Delta^{-1}(H_0 \otimes H + H \otimes H_{n-2}) = Q \otimes H_{n-1}$, conforme desejado. $\square$

A partir do fato de R ser uma álgebra prima, é fácil verificar que R^{op} também é uma álgebra prima. Note que $(Q_r)^{\text{op}} = (Q^{\text{op}})_l$, $(Q_l)^{\text{op}} = (Q^{\text{op}})_r$, e que $(Q)^{\text{op}} = Q^{\text{op}}$, ou seja, a álgebra de quocientes de Martindale simétrica de R^{op} coincide com a de R como espaços vetoriais. Além disso, pelo fato de K ser um corpo, $K^{\text{op}} = K$.

Como H possui antípoda S bijetora, pela Proposição 1.3.5, temos que H^{cop} é uma álgebra de Hopf com antípoda $\bar{S}$. Assim como H , é fácil ver que H^{cop} é álgebra de Hopf pontual. Seja $h \in H^{\text{cop}}$ e seja $r \in R^{\text{op}}$. Vamos definir $h \rightharpoonup r = h \cdot r$. Temos então, baseado em [Yan97, Proposition 2.6]:

Proposição 3.3.3. R^{op} é um H^{cop} -módulo álgebra à esquerda com a ação “ $\rightharpoonup$ ”.

Demonstração. É claro que R^{op} é um H^{cop} -módulo à esquerda. Sejam $a, b \in R^{\text{op}}$ e seja $h \in H^{\text{cop}}$. Então:

$$h \rightharpoonup (a \bullet b) = h \cdot (ba) = \sum_{(h)} (h_{(1)} \cdot b)(h_{(2)} \cdot a) = \sum_{(h)} (h_{(2)} \rightharpoonup a) \bullet (h_{(1)} \rightharpoonup b).$$

$$h \rightharpoonup 1_{R^{\text{op}}} = h \cdot 1_{R^{\text{op}}} = \varepsilon(h)1_{R^{\text{op}}}.$$

Observe que $1_{R^{\text{op}}} = 1_R$ e que $\Delta^{\text{cop}}(h) = (\tau \circ \Delta)(h) = \sum_{(h)} h_{(2)} \otimes h_{(1)}$. Assim R^{op} é um H^{cop} -módulo álgebra à esquerda com a ação “ $\rightharpoonup$ ”. $\square$

Como H^{cop} é uma álgebra de Hopf pontual que age na álgebra prima R^{op} , valem todos os resultados mostrados para a ação de H em R . O nosso próximo resultado foi baseado em [Yan97, Proposition 3.6].

Proposição 3.3.4. *Temos:*

1. $R^H = (R^{\text{op}})^{H^{\text{cop}}}$.
2. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $(Q \# H)^R = K$;
- (ii) $(Q^{\text{op}} \# H^{\text{cop}})^{R^{\text{op}}} = K$.

Demonstração. (1) Aplicando o Lema 3.1.1, temos que:

$$R^H = \{r \in R : h \cdot r = \varepsilon(h)r, \text{ para todo } h \in H\}$$

$$(R^{\text{op}})^{H^{\text{cop}}} = \{r \in R^{\text{op}} : h \rightharpoonup r = \varepsilon(h)r, \text{ para todo } h \in H^{\text{cop}}\}$$

A partir das expressões acima e do fato de $h \rightharpoonup r = h \cdot r$, para todo $h \in H$ e todo $r \in R$, concluímos que $R^H = (R^{\text{op}})^{H^{\text{cop}}}$.

(2) Primeiramente, observe que $G = G(H) = G(H^{\text{cop}})$, e que $\sigma \cdot \alpha \in K$, para todo $\sigma \in G$ e todo $\alpha \in K$. De fato,

$$(\sigma \cdot \alpha)q = \sigma \cdot (\alpha(\sigma^{-1} \cdot q)) = \sigma \cdot ((\sigma^{-1} \cdot q)\alpha) = q(\sigma \cdot \alpha), \text{ para todo } q \in Q.$$

Se $(Q \# H)^R = K$, então a ação de G em R é X-externa pela Proposição 3.3.2. Vamos supor que exista $\sigma \in G$, com $\sigma \neq 1$, e $q \in Q^{\text{op}}$, com $q \neq 0$, tais que $(\sigma \cdot r)q = q \bullet (\sigma \rightharpoonup r) = r \bullet q = qr$, para todo $r \in R$. Como $\sigma^{-1} \in G$ age como um automorfismo em R , podemos substituir r por $\sigma^{-1} \cdot r$ e obter $(\sigma \cdot (\sigma^{-1} \cdot r))q = q(\sigma^{-1} \cdot r)$, isto é, $r q = q(\sigma^{-1} \cdot r)$, para todo $r \in R$, um absurdo. Portanto, a ação de G em R^{op} é X-externa.

Ainda pela Proposição 3.3.2, temos que $\overline{\vartheta_\tau}$ é injetora para todo $\tau \in G$. Seja $\tau \in G$, e sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ e $\delta_1, \dots, \delta_n \in P_{1,\tau}(H^{\text{cop}})$ tais que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \bullet (\delta_i \rightharpoonup r) = q \bullet (\tau \rightharpoonup r) - r \bullet q$, para algum $q \in Q^{\text{cop}}$ e para todo $r \in R$.

É claro que $\delta_i \in P_{\tau,1}(H)$. Daí

$$\Delta(\tau^{-1}\delta_i) = \Delta(\tau^{-1})\Delta(\delta_i) = (\tau^{-1} \otimes \tau^{-1})(\tau \otimes \delta_i + \delta_i \otimes 1) = 1 \otimes \tau^{-1}\delta_i + \tau^{-1}\delta_i \otimes \tau^{-1},$$

ou seja, $\tau^{-1}\delta_i \in P_{1,\tau^{-1}}(H)$, para todo $0 \leq i \leq n$. Temos ainda

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\tau^{-1} \cdot \alpha_i)(\tau^{-1}\delta_i \cdot r) &= \tau^{-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \bullet (\delta_i \rightharpoonup r) \right), \text{ observe que } \alpha_i \in K. \\ &= \tau^{-1} \cdot (q \bullet (\tau \rightharpoonup r) - r \bullet q) \\ &= \tau^{-1} \cdot ((\tau \cdot r)q - qr) \\ &= r(\tau^{-1} \cdot q) - (\tau^{-1} \cdot q)(\tau^{-1} \cdot r), \text{ para todo } r \in R, \end{aligned}$$

ou seja, $\sum_{i=1}^n (\tau^{-1} \cdot \alpha_i) \otimes \tau^{-1}\delta_i \in \ker(\vartheta_{\tau^{-1}}) = K \otimes (1 - \tau^{-1})$. Então, $\sum_{i=1}^n \alpha_i \otimes \delta_i \in (\tau \cdot K) \otimes \tau(1 - \tau^{-1}) \subseteq K \otimes k(1 - \tau)$. Novamente pela Proposição 3.3.2, temos que $(Q^{\text{op}} \# H^{\text{cop}})^{R^{\text{op}}} = K$.

Se $(Q^{\text{op}} \# H^{\text{cop}})^{R^{\text{op}}} = K$, basta procedermos de forma análoga para concluirmos que $(Q \# H)^R = K$. $\square$

Finalmente, vamos definir as ações X-externas.

Definição. A ação de H em R é chamada *X-externa* se $(Q \# H)^R = K$.

Observação. Essa definição foi primeiro sugerida por Milinski no artigo [Mil95a]. Milinski escolheu esse nome para homenagear Kharchenko, cujo nome em russo começa com a letra *X*. Kharchenko foi o autor de diversos trabalhos pioneiros no estudo de ações de grupos de automorfismos e de ações de álgebras de Lie restritas em álgebras primas e semi-primas. Alguns autores denominam as ações *X-externas* por ações *M-externas*, em homenagem a Milinski.

3.4 Propriedades fundamentais das ações X-externas

O objetivo desta seção é mostrar uma série de propriedades das ações X-externas. Essas propriedades serão fundamentais para os capítulos subsequentes. O primeiro resultado foi extraído de [Mil95a, Lemma 3.2].

Proposição 3.4.1. $(Q_l \# H)^R \subseteq Q \# H$.

Demonstração. Seja $z \in (Q_l \# H)^R$. Pelo Lema 3.2.1 (2), podemos escrever $z = \sum_{\beta} (1 \# h_{\beta}) q_{\beta}$, onde somente um número finito de $q_{\beta} \in Q_l$ é não nulo e $\{1 \# h_{\beta}\}$ é uma base para o Q_l -módulo à direita $Q_l \# H$. E, pelo Lema 3.2.1 (3), existe um $I \in \mathcal{F}(R)$ tal que $Iz \subseteq R \# H$. Então temos:

$$zI = Iz \subseteq R \# H, \text{ ou seja, } \sum_{\beta} (1 \# h_{\beta}) q_{\beta} I \subseteq R \# H.$$

Mas pelo Lema 3.2.1 (2), $\{1 \# h_{\beta}\}$ é também uma base para o R -módulo à direita $R \# H$. Assim $q_{\beta} I \subseteq R$, para todo β . Pela definição de Q , concluimos que $q_{\beta} \in Q$, para todo β . Logo, $z \in Q \# H$. $\square$

O seguinte resultado é consequência imediata da proposição anterior.

Corolário 3.4.2. Se a ação de H em R for X-externa, então

$$(Q_l \# H)^R = K.$$

Demonstração. Imediato a partir da proposição anterior. $\square$

Agora, vamos ver um dos resultados mais importantes de [Mil95a], o Theorem 4.1.

Teorema 3.4.3. *Seja H uma álgebra de Hopf pontual de dimensão finita agindo em R , e seja $I \in \mathcal{F}(R)$. Se a ação de H em R for X-externa, então a função*

$$\begin{aligned} \Psi: \quad Q_l \otimes_K (Q_l \# H) &\longrightarrow \text{hom}_K(I, Q_l) \\ q \otimes x &\longmapsto (r \mapsto (x \cdot r)q) \end{aligned}$$

é injetora.

Demonstração. Vamos supor que Ψ não seja injetora e que $x = \sum_{i=1}^n q_i \otimes x_i \in \ker(\Psi)$, onde $n \geq 1$, $x_1, \dots, x_n \in Q_l \# H$, $q_1, \dots, q_n \in Q_l$ são K -linearmente independentes e $q_i \otimes x_i \neq 0$, para todo $1 \leq i \leq n$.

Será suficiente mostrar que existe $\sum_{i=1}^n q_i \otimes z_i(q \# g) \in \ker(\Psi)$ não nulo, onde $q \in Q_l$, $g \in G(H)$ e $z_1, \dots, z_n \in (Q_l \# H)^R$, pois aí teríamos (Lembrar que, pelo Corolário 3.4.2, temos $(Q_l \# H)^R = K$):

$$\sum_{i=1}^n q_i \otimes z_i(q \# g) = \sum_{i=1}^n q_i z_i \otimes (q \# g)$$

Daí $((q \# g) \cdot r)b = q(g \cdot r)b = 0$, onde $b = \sum_{i=1}^n q_i z_i$, para todo $r \in I$. Pela continuidade da ação, existe $J \in \mathcal{F}(R)$ tal que $g^{-1} \cdot J \subseteq I$, e pelo Teorema 1.4.1, existe um $J' \in \mathcal{F}(R)$ tal que $J'q \subseteq R$. Logo $J'qJb = 0$. Como $q \neq 0$, temos que $J'qJ \in \mathcal{F}(R)$. Assim, pelo Lema 3.2.2 (2), $b = 0$, uma contradição pois $q_1, \dots, q_n \in Q_l$ são K -linearmente independentes.

Por indução em n , vamos mostrar que sempre chegaremos em uma contradição e concluir, portanto, que Ψ é injetora.

Primeiramente, temos que $\sum_{i=1}^n q_i \otimes s x_i t \in \ker(\Psi)$, para todo $s, t \in R$. De fato, temos para todo

$r \in I$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n [(sx_i t) \cdot r] q_i &= \sum_{i=1}^n [(sx_i) \cdot (t \cdot r)] q_i, \text{ identificando } t \text{ com } t \# 1_H \\
&= \sum_{i=1}^n [s \cdot (x_i \cdot (tr))] q_i, \text{ identificando } s \text{ com } s \# 1_H \\
&= \sum_{i=1}^n [s(x_i \cdot (tr))] q_i \\
&= s \left[\sum_{i=1}^n (x_i \cdot (tr)) q_i \right] \\
&= 0, \text{ pois } tr \in I \text{ e } \sum_{i=1}^n q_i \otimes x_i \in \ker(\Psi).
\end{aligned}$$

Assim, é fácil ver que

$$M = \left\{ y_1 \in Q_l : \text{existem } y_2, \dots, y_n \in Q_l \# H \text{ tais que } \sum_{i=1}^n q_i \otimes y_i \in \ker(\Psi) \right\}$$

é um (R, R) -sub-bimódulo de $Q_l \# H$ não nulo, já que $x_1 \in M$. Pelo Teorema 3.2.4, existe $\tilde{q} \in Q_l$, $\tilde{g} \in G(H)$ e $\tilde{z} \in (Q_l \# H)^R$, tal que $a_1 = \tilde{z}(\tilde{q} \# \tilde{g}) \in M$.

Vamos começar a indução. Para $n = 1$, a contradição é imediata pois $q_1 \otimes a_1 = q_1 \otimes \tilde{z}(\tilde{q} \# \tilde{g}) \in \ker(\Psi)$. Supondo válido para valores menores do que n , vamos mostrar que vale para n .

Pela definição de M , existem $a_2, \dots, a_n \in Q_l \# H$ tais que $\sum_{i=1}^n q_i \otimes a_i \in \ker(\Psi)$. Como $a_1 = \tilde{z}(\tilde{q} \# \tilde{g}) \in K(\tilde{q} \# \tilde{g})$, resta mostrar que $a_i \in K(\tilde{q} \# \tilde{g})$, para todo $2 \leq i \leq n$. Então, vamos supor que $a_l \notin K(\tilde{q} \# \tilde{g})$, para algum $2 \leq l \leq n$.

Assim, temos que $a_l(1 \# \tilde{g}^{-1}) \notin K(\tilde{q} \# \tilde{g})(1 \# \tilde{g}^{-1}) = K\tilde{q}$. Portanto, pelo Teorema 3.2.3, existem $m \geq 1$ e $s_j, t_j \in R$, onde $1 \leq j \leq m$, tais que $\sum_{j=1}^m s_j \tilde{q} t_j = 0$ e $\sum_{j=1}^m s_j a_l (1 \# \tilde{g}^{-1}) t_j \neq 0$. Vamos definir $u_j = (1 \# \tilde{g}^{-1}) t_j (1 \# \tilde{g}) = \tilde{g}^{-1} \cdot t_j \in R$, para todo $1 \leq j \leq m$. Então,

$$\sum_{j=1}^m s_j a_l u_j = \sum_{j=1}^m s_j \tilde{z}(\tilde{q} \# \tilde{g})(\tilde{g}^{-1} \cdot t_j) = \sum_{j=1}^m s_j \tilde{z}(\tilde{q} t_j \# \tilde{g}) = \tilde{z} \left(\sum_{j=1}^m s_j \tilde{q} t_j \right) (1 \# \tilde{g}) = 0.$$

Além disso, $\sum_{j=1}^m s_j a_l u_j = \sum_{j=1}^m s_j a_l (1 \# \tilde{g}^{-1}) t_j (1 \# \tilde{g}) \neq 0$. De fato, supondo o contrário e multiplicando à direita por $1 \# \tilde{g}^{-1}$, temos que $\sum_{j=1}^m s_j a_l (1 \# \tilde{g}^{-1}) t_j = 0$, uma contradição.

Logo $\sum_{i=1}^n \left[q_i \otimes \left(\sum_{j=1}^m s_j a_i u_j \right) \right] = \sum_{i=2}^n \left[q_i \otimes \left(\sum_{j=1}^m s_j a_i u_j \right) \right] \in \ker(\Psi)$. Portanto, pela hipótese de indução, chegamos em uma contradição. $\square$

Observação. Como no Teorema 3.2.4, da demonstração do teorema acima, podemos também eliminar a hipótese da dimensão de H ser finita. Para isso, basta perceber que podemos ver $a_l \in Q_l \# H'$, onde H' é uma subcoálgebra de H de dimensão finita. O Teorema Fundamental das Coálgebras (Teorema 1.3.11) nos garante a existência de H' . Porém, o teorema como está é suficiente para atender as necessidades deste trabalho.

Finalmente, a proposição mais importante deste capítulo.

Proposição 3.4.4. *Seja H uma álgebra de Hopf pontual de dimensão finita agindo em R , e seja U uma subálgebra de R contendo R^H . Assuma que a ação de H em R é X-externa. Então:*

1. *Para todo $q \in Q_l$ não nulo, todo $\xi \in Q_l \# H$, e todo ideal $I \in \mathcal{F}(R)$, se $\xi \cdot (Iq) = 0$, então $\xi = 0$.*
2. *Seja $\xi \in Q_l \# H$ e seja $a \in Q_l$. Se $\xi U a = 0$, então $\xi = 0$ ou $a = 0$. Em particular U é uma álgebra prima.*
3. *Todo (R, U) -sub-bimódulo não nulo de Q_l contém um ideal não nulo de R .*
4. *Seja $I \in \mathcal{F}(R)$ e $f : I \longrightarrow R \# H$, um homomorfismo de R -módulos à esquerda, então existe $z \in Q_l \# H$ tal que $f(r) = rz$, para todo $r \in I$.*
5. *K é estável sob a ação de H , ou seja, $H \cdot K \subseteq K$.*
6. $(Q_l \# H)^U = (Q \# H)^U = (K \# H)^U$.
7. $(K \# H)^U$ é um H -comódulo subálgebra à direita.

Demonstração. Note que, como H é uma álgebra de Hopf pontual de dimensão finita temos que a antípoda S de H é bijetora. Isso pode ser obtido tanto pelo Teorema 1.3.18 quanto pelo Teorema 1.3.22.

(1) Baseado na demonstração de [Yan97, Lemma 3.5]:

Pelo Teorema de Taft-Wilson (Teorema 2.3.1) podemos escrever $\xi = \sum_{i=1}^m a_i \# h_i$, onde $a_1, \dots, a_m \in Q_l$, $h_1, \dots, h_m \in H$ são k -linearmente independentes e, para todo $1 \leq i \leq m$, $h_i = \sigma_i$ ou $\Delta(h_i) = h_i \otimes \sigma_i + \tau_i \otimes h_i + w_i$, onde $\sigma_i, \tau_i \in G(H)$ e $w_i \in H_{n_i-1} \otimes H_{n_i-1}$, sendo n_i o grau de h_i .

Sejam $h_1, \dots, h_j$ elementos de grau maximal n . Então,

$$\begin{aligned} 0 &= \xi \cdot (Iq) = \sum_{i=0}^m (a_i \# h_i) \cdot (Iq) = \sum_{i=0}^m a_i (h_i \cdot (Iq)) \\ &= \sum_{i=0}^p a_i (h_i \cdot I)(\sigma_i \cdot q) + \sum_j a'_j (h'_j \cdot I)q'_j, \text{ onde } a'_j, q'_j \in Q_l \text{ e } h'_j \in H_{n-1}. \end{aligned}$$

Note que $\sum_{i=0}^p (\sigma_i \cdot q) \otimes (a_i \# h_i) + \sum_j q'_j \otimes (a'_j \# h'_j)$ está no núcleo da aplicação do Teorema 3.4.3, e portanto é igual a zero.

Como $h'_j \in H_{n-1}$ e $h_1, \dots, h_p$ são k -linearmente independentes de grau maximal n , temos que $(\sigma_i \cdot q) \otimes a_i = 0$, para todo $1 \leq i \leq p$. Do fato de $q \neq 0$, temos que $\sigma_i \cdot q \neq 0$. De fato, se $\sigma_i \cdot q = 0$, teríamos que $q = (\sigma_i^{-1} \sigma_i) \cdot q = \sigma_i^{-1} \cdot (\sigma_i \cdot q) = \sigma_i^{-1} \cdot 0 = 0$, um absurdo. Assim, concluímos que $a_i = 0$, para todo $1 \leq i \leq p$.

Se $p < m$, podemos continuar o processo para $\xi' = \sum_{i=p+1}^m a_i \# h_i$ e concluir facilmente que $a_i = 0$, para todo $1 \leq i \leq m$. Logo $\xi = 0$.

(2) Baseado na demonstração de [Mil95a, Theorem 4.3]:

Como H tem dimensão finita, pelo Teorema 1.3.22, H possui um integral à esquerda não nulo t , isto é, $t \in H$ e $ht = \varepsilon(h)t$, para todo $h \in H$. Temos que $t \cdot r \in R^H$, para todo $r \in R$. De fato,

$$h \cdot (t \cdot r) = (ht) \cdot r = (\varepsilon(h)t) \cdot r = \varepsilon(h)(t \cdot r), \text{ para todo } r \in R \text{ e todo } h \in H.$$

Então temos $\xi(t \cdot R)a = 0$.

Pelo Lema 3.2.1 (2), podemos escrever $\xi = \sum_{\beta} (1 \# h_{\beta})q_{\beta}$, onde $\{1 \# h_{\beta}\}$ é uma base para o Q_l -módulo à direita $Q_l \# H$. Daí temos que

$$0 = \xi(t \cdot R)a = \sum_{\beta} (1 \# h_{\beta})q_{\beta}(t \cdot R)a.$$

Como $\{1 \# h_{\beta}\}$ é base para o Q_l -módulo à direita $Q_l \# H$, $q_{\beta}(t \cdot R)a = 0$, para todo β . Note que $a \otimes (q_{\beta} \otimes t)$ está no núcleo da aplicação do Teorema 3.4.3, e portanto é igual a zero.

Como $t \neq 0$, temos que $a = 0$ ou $q_{\beta} = 0$, para todo β . Ou seja, temos que $a = 0$ ou $\xi = 0$. Portanto, em particular, U é uma álgebra prima.

(3) Baseado em [Yan97, Lemma 4.3]:

Seja M um (R, U) -sub-bimódulo de Q_l . Vamos mostrar que $M' = (M \cap R) \subset M$, que é também um (R, U) -sub-bimódulo de Q_l , contém um ideal não nulo de R .

Como em (2), H possui um integral à esquerda não nulo t . É fácil ver que $R(q \# t)R$ é um (R, R) -sub-bimódulo de $Q \# H$, para todo $q \in Q$ não nulo. Então, pelo Teorema 3.2.4, existem $r \in R$, $g \in G(H)$ e $\alpha \in (Q \# H)^R = K$ tais que $\alpha(r \# g) \in R(q \# t)R$, sendo $\alpha(r \# g) \neq 0$. Podemos escrever $\alpha(r \# g) = \sum_i r_i(q \# t)s_i$, onde $r_i, s_i \in R$, para todo i .

Temos que $\alpha(r \# g)I \neq 0$, para todo ideal $I \in \mathcal{F}(R)$. De fato, vamos supor que $\alpha(r \# g)I = 0$. Como $\alpha \in K$, que é um corpo, temos

$$0 = (r \# g)I = r(g \cdot I) \# g = r(g \cdot I), \text{ pois } g \neq 0.$$

Assim, $1 \otimes (r \# g)$ está no núcleo da aplicação do Teorema 3.4.3, e portanto é igual a zero. Logo $r \# g = 0$, o que é um absurdo.

Assim, podemos escolher um $I \in \mathcal{F}(R)$ e um $a \in I$ tal que

$$\sum_i r_i(q \# t)s_i a = \alpha(r \# g)a = \alpha r(g \cdot a) \# g \neq 0.$$

Como $\alpha r(g \cdot a) \in Q_l$, pelo Teorema 1.4.2, existe um $I' \in \mathcal{F}(R)$ tal que $I' \alpha r(g \cdot a) \subseteq R$ e $I' \alpha r(g \cdot a) \neq 0$.

Então temos que $\sum_i r'_i(q \# t)s_i = a' \# g \neq 0$, para algum $a' \in I' \alpha r(g \cdot a)$ e $r'_i \in R$, para todo i .

Da continuidade da ação de H em R , existe $I'' \in \mathcal{F}(R)$ tal que $g^{-1} \cdot I'' \subseteq I$. Para todo $x \in Q$ da forma $x = g^{-1} \cdot y$, onde $y \in I''$, temos

$$\begin{aligned} (a' \# g) \cdot (g^{-1} \cdot y) &= a'(g \cdot (g^{-1} \cdot y)) = a'y \\ \sum_i [r'_i(q \# t)s_i] \cdot (g^{-1} \cdot y) &= \sum_{i,(t)} [r'_i q(t_{(1)} \cdot s_i) \# t_{(2)}] \cdot (g^{-1} \cdot y) \\ &= \sum_{i,(t)} r'_i q(t_{(1)} \cdot s_i)(t_{(2)} \cdot (g^{-1} \cdot y)) \\ &= \sum_i r'_i q\left(t \cdot (s_i(g^{-1} \cdot y))\right). \end{aligned}$$

Igualando as expressões e do fato de $t \cdot r \in R^H$, para todo $r \in R$, conforme mostrado em (2), temos que $a'I'' \subseteq RqR^H$. Lembrar que a escolha de $q \in Q$ não nulo foi aleatória.

Finalmente, seja $m \neq 0$ com $m \in M' \subseteq R$. Pelos argumentos acima, existe algum $b \in R$ não nulo e algum ideal $J \in \mathcal{F}(R)$, tais que $RbJ \subseteq RmR^H \subseteq RmU \subseteq M'$, pois M' é (R, U) -sub-bimódulo de Q_l . Note que RbJ é um ideal não nulo de R . De fato, caso $RbJ = 0$, pelo Teorema 1.4.1, $b = 0$, um absurdo.

Assim, M' contém um ideal não nulo de R .

(4) Imediato a partir do Lema 3.2.2 (3).

(5) Baseado em [Mil95b, Bemerkung 15.3]:

Inicialmente vamos mostrar que se $z \in K = (Q \# H)^R$, então $z \leftarrow h = \sum (1 \# S(h_{(1)}))z(1 \# h_{(2)}) \in K$, para todo $h \in H$. De fato, para todo $r \in R$, temos:

$$\begin{aligned}
(z \leftarrow h)r &= \sum (1 \# S(h_{(1)}))z(1 \# h_{(2)})r \\
&= \sum (1 \# S(h_{(1)}))z(h_{(2)} \cdot r \# h_{(3)}) \\
&= \sum (1 \# S(h_{(1)}))(h_{(2)} \cdot r)(z \# h_{(3)}), \text{ pois } z \in K. \\
&= \sum (S(h_{(1)})_{(1)} \cdot (h_{(2)} \cdot r) \# S(h_{(1)})_{(2)})(z \# h_{(3)}) \\
&= \sum (S(h_{(2)}) \cdot (h_{(3)} \cdot r) \# S(h_{(1)}))(z \# h_{(4)}), \text{ pois } S \text{ é antimorfismo de coálgebras.} \\
&= \sum ((S(h_{(2)})h_{(3)}) \cdot r \# S(h_{(1)}))(z \# h_{(4)}) \\
&= \sum (\varepsilon(h_{(2)})r \# S(h_{(1)}))(z \# h_{(3)}), \text{ pois } \sum S(h_{(1)})h_{(2)} = \varepsilon(h)1_H. \\
&= \sum (r \# S(h_{(1)}))(z \# h_{(2)}), \text{ pois } \sum \varepsilon(h_{(1)})h_{(2)} = h. \\
&= r \left[\sum (1 \# S(h_{(1)}))z(1 \# h_{(2)}) \right] \\
&= r(z \leftarrow h).
\end{aligned}$$

Agora vamos mostrar que $S(h) \cdot z \in K$, para todo $h \in H$ e todo $z \in K$. De fato, inicialmente temos que,

$$\begin{aligned}
z \leftarrow h &= \sum (1 \# S(h_{(1)}))z(1 \# h_{(2)}) \\
&= \sum (S(h_{(1)})_{(1)} \cdot z \# S(h_{(1)})_{(2)})(1 \# h_{(2)}) \\
&= \sum (S(h_{(2)}) \cdot z \# S(h_{(1)}))(1 \# h_{(3)}) \\
&= \sum S(h_{(2)}) \cdot z \# S(h_{(1)})h_{(3)}.
\end{aligned}$$

Como $z \leftarrow h \in K$, temos que $(\text{Id} \otimes \varepsilon)(z \leftarrow h) \in K$, ou seja,

$$\begin{aligned}
(\text{Id} \otimes \varepsilon)(z \leftarrow h) &= (\text{Id} \otimes \varepsilon) \left(\sum S(h_{(2)}) \cdot z \# S(h_{(1)})h_{(3)} \right) \\
&= \sum (S(h_{(2)}) \cdot z) \varepsilon(S(h_{(1)})h_{(3)}) \\
&= \sum (S(h_{(2)}) \cdot z) \varepsilon(S(h_{(1)})) \varepsilon(h_{(3)}), \text{ pois } \varepsilon \text{ é morfismo de álgebras.} \\
&= \sum \left(\varepsilon(S(h_{(1)})) S(h_{(2)}) \cdot z \right) \varepsilon(h_{(3)}) \\
&= \sum \left(\varepsilon(S(h_{(1)})_{(2)}) S(h_{(1)})_{(1)} \cdot z \right) \varepsilon(h_{(3)}) \\
&= \sum (S(h_{(1)}) \cdot z) \varepsilon(h_{(2)}) \\
&= \sum S(\varepsilon(h_{(2)})h_{(1)}) \cdot z \\
&= S(h) \cdot z \in K.
\end{aligned}$$

Como a antípoda S de H é bijetora, segue que K é estável sob a ação de H .

(6) Baseado na demonstração de [Mil95a, Theorem 4.3]:

Como $(K \# H)^U \subseteq (Q \# H)^U \subseteq (Q_l \# H)^U$, para termos a igualdade basta mostrar que $(Q_l \# H)^U \subseteq (K \# H)^U$. Como em (2), H possui um integral à esquerda não nulo t e $t \cdot r \in R^H \subseteq U$, para todo $r \in R$.

Seja $\xi \in (Q_l \# H)^U$, então $\xi(t \cdot r) - (t \cdot r)\xi = 0$, para todo $r \in R$. Pelo Lema 3.2.1 (1), podemos escrever $\xi = \sum_{\beta} q_{\beta}(1 \# h_{\beta})$, onde $q_{\beta} \in Q_l$, para todo β e $\{1 \# h_{\beta}\}$ é uma base para o Q_l -módulo à esquerda $Q_l \# H$. Então temos:

$$\begin{aligned}
 0 &= \xi(t \cdot r) - (t \cdot r)\xi \\
 &= \sum_{\beta} q_{\beta}(1 \# h_{\beta})(t \cdot r) - (t \cdot r) \sum_{\beta} q_{\beta}(1 \# h_{\beta}) \\
 &= \sum_{\beta} \left[q_{\beta} \left(\sum_{(h_{\beta})} h_{\beta_{(1)}} \cdot (t \cdot r) \# h_{\beta_{(2)}} \right) - (t \cdot r) q_{\beta}(1 \# h_{\beta}) \right] \\
 &= \sum_{\beta} \left[q_{\beta} \left(\sum_{(h_{\beta})} \varepsilon(h_{\beta_{(1)}})(t \cdot r) \# h_{\beta_{(2)}} \right) - (t \cdot r) q_{\beta}(1 \# h_{\beta}) \right], \text{ Lema 3.1.1 aplicado em } t \cdot r \in R^H. \\
 &= \sum_{\beta} [q_{\beta}(t \cdot r)(1 \# h_{\beta}) - (t \cdot r)q_{\beta}(1 \# h_{\beta})] \\
 &= \sum_{\beta} [q_{\beta}(t \cdot r) - (t \cdot r)q_{\beta}](1 \# h_{\beta}).
 \end{aligned}$$

Como $\{1 \# h_{\beta}\}$ é uma base para o Q_l -módulo à esquerda $Q_l \# H$, temos que $q_{\beta}(t \cdot r) - (t \cdot r)q_{\beta} = 0$, para todo β . Então $1 \otimes (q_{\beta} \otimes t) - q_{\beta} \otimes (1 \otimes t)$ está no núcleo da aplicação do Teorema 3.4.3, e portanto, é igual a zero.

Assim, temos que $1 \otimes q_{\beta} = q_{\beta} \otimes 1$. Logo, $\{1, q_{\beta}\}$ é linearmente dependente sobre K , ou seja, existem $a, b \in K$ não nulos tais que $a + bq_{\beta} = 0$. Então $q_{\beta} = -b^{-1}a \in K$, para todo β , o que implica em $\xi \in (K \# H)^U$.

(7) Baseado na demonstração de [Wes99, Lemma 1.3]:

É fácil ver que $(K \# H)^U$ é subálgebra de $Q \# H$. Falta verificar que $\rho((K \# H)^U) \subseteq (K \# H)^U \otimes H$. Seja $\xi = \sum q_{\alpha} \# h_{\alpha} \in (K \# H)^U$. Temos $\xi u = u\xi$, para todo $u \in U$. Então:

$$\rho(\xi) = \sum q_\alpha \# h_{\alpha(1)} \otimes h_{\alpha(2)} = \sum_{i=1}^n \xi_i \otimes h_i, \text{ onde } \xi_i \in K \# H, \text{ para todo } i.$$

$$\xi u = \sum (q_\alpha \# h_\alpha) u = \sum q_\alpha (h_{\alpha(1)} \cdot u) \# h_{\alpha(2)} = \sum (q_\alpha \# h_{\alpha(1)}) \cdot u \# h_{\alpha(2)} = \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot u \# h_i.$$

$$u\xi = \sum u q_\alpha \# h_\alpha = \sum u \varepsilon(h_{\alpha(1)}) q_\alpha \# h_{\alpha(2)} = \sum_{i=1}^n u (\text{Id} \otimes \varepsilon)(\xi_i) \# h_i.$$

Como podemos considerar $\{h_i\}_{1 \leq i \leq n}$ k -linearmente independente, temos que

$$\xi_i \cdot u = u(\text{Id} \otimes \varepsilon)(\xi_i), \text{ para todo } 1 \leq i \leq n \text{ e todo } u \in U.$$

Seja $M = \text{span}_k\{\xi_i\}_{1 \leq i \leq n} = \{\lambda_1 \xi_1 + \cdots + \lambda_n \xi_n : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in k\}$. Pelo Lema 1.3.9, M é um H -subcomódulo à direita de $K \# H$, então $\rho(\xi_i) = \sum_{j=1}^n \xi_j \otimes l_{ij} \in M \otimes H$, onde $l_{ij} \in H$, para todo $1 \leq i, j \leq n$. Assim, temos que

$$\xi_i u = \sum_{j=1}^n \xi_j \cdot u \# l_{ij} = \sum_{j=1}^n u(\text{Id} \otimes \varepsilon)(\xi_i) \# l_{ij} = u \xi_i, \text{ para todo } u \in U.$$

Portanto, $\xi_i \in (K \# H)^U$, para todo $1 \leq i \leq n$, e $(K \# H)^U$ é uma H -comódulo subálgebra à direita. $\square$

Capítulo 4

A injetividade da correspondência de Galois

4.1 Introdução

Finalmente, neste capítulo estamos em condições de mostrar a primeira parte da teoria da correspondência, objetivo deste trabalho. Os resultados aqui apresentados se baseiam principalmente no artigo [WY01].

No decorrer deste capítulo, R será uma álgebra prima e H será uma álgebra de Hopf pontual de dimensão finita agindo em R . Pela Proposição 3.4.4 (5) temos que K é estável pela ação de H , então podemos construir o produto smash $K \# H$, que é uma H -comódulo-álgebra à direita via ρ conforme vimos na Proposição 3.1.2.

Seja U um subconjunto de R . Vamos definir

$$\Phi(U) = (K \# H)^U.$$

Vamos definir também a aplicação linear $\varphi: Q \# H \longrightarrow Q^{\text{op}} \# H^{\text{cop}}$ dada por

$$\varphi(a \# h) = \sum_{(h)} \bar{S}(h_{(1)}) \cdot a \# \bar{S}(h_{(2)}), \text{ para todo } a \in Q \text{ e todo } h \in H.$$

A proposição abaixo foi extraída de [WY01, Proposition 0.5].

Proposição 4.1.1. *Temos:*

1. *A aplicação φ é um antimorfismo bijetor de álgebras com inversa ψ dada por*

$$\psi(a \# h) = \sum_{(h)} S(h_{(2)}) \cdot a \# S(h_{(1)}), \text{ para todo } a \in Q^{\text{op}} \text{ e todo } h \in H^{\text{cop}}.$$

2. *Um conjunto Λ é um H -comódulo subálgebra à direita de $Q \# H$ se, e somente se, $\varphi(\Lambda)$ for um H^{cop} -comódulo subálgebra à direita de $Q^{\text{op}} \# H^{\text{cop}}$.*

Demonstração. Sejam $a, b \in Q$ e sejam $h, l \in H$. Vamos denotar a multiplicação em $Q^{\text{op}} \# H^{\text{cop}}$ por “ $\bullet$ ”. Inicialmente, observe que

$$(a \# h) \bullet (b \# l) = a \bullet (h_{(2)} \cdot b) \# h_{(1)}l = (h_{(2)} \cdot b)a \# h_{(1)}l. \quad (4.1)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
& \varphi((a \# h)(b \# l)) \\
&= \sum \varphi(a(h_{(1)} \cdot b) \# h_{(2)}l) \\
&= \sum \bar{S}((h_{(2)}l)_{(1)}) \cdot (a(h_{(1)} \cdot b)) \# \bar{S}((h_{(2)}l)_{(2)}) \\
&= \sum \bar{S}(h_{(2)}l_{(1)}) \cdot (a(h_{(1)} \cdot b)) \# \bar{S}(h_{(3)}l_{(2)}), \Delta \text{ é homomorfismo de álgebras.} \\
&= \sum \bar{S}(l_{(1)}) \cdot [\bar{S}(h_{(2)}) \cdot (a(h_{(1)} \cdot b))] \# \bar{S}(l_{(2)})\bar{S}(h_{(3)}), \bar{S} \text{ é antiomorfismo de álgebras.} \\
&= \sum \bar{S}(l_{(1)}) \cdot [\bar{S}(h_{(2)})_{(1)} \cdot a] (\bar{S}(h_{(2)})_{(2)} \cdot (h_{(1)} \cdot b)) \# \bar{S}(l_{(2)})\bar{S}(h_{(3)}) \\
&= \sum \bar{S}(l_{(1)}) \cdot [\bar{S}(h_{(3)}) \cdot a] (\bar{S}(h_{(2)})h_{(1)} \cdot b) \# \bar{S}(l_{(2)})\bar{S}(h_{(4)}), \bar{S} \text{ é antiomorfismo de coálgebras.} \\
&= \sum \bar{S}(l_{(1)}) \cdot [\bar{S}(h_{(1)}) \cdot a]b \# \bar{S}(l_{(2)})\bar{S}(h_{(2)}), \text{ pois } \sum \bar{S}(h_{(2)})h_{(1)} = \varepsilon(h)1_H. \\
&= \sum (\bar{S}(l_{(1)})_{(1)} \cdot (\bar{S}(h_{(1)}) \cdot a)) (\bar{S}(l_{(1)})_{(2)} \cdot b) \# \bar{S}(l_{(2)})\bar{S}(h_{(2)}) \\
&= \sum (\bar{S}(l_{(2)}) \cdot (\bar{S}(h_{(1)}) \cdot a)) (\bar{S}(l_{(1)}) \cdot b) \# \bar{S}(l_{(3)})\bar{S}(h_{(2)}), \bar{S} \text{ é antiomorfismo de coálgebras.} \\
&= \sum (\bar{S}(l_{(1)}) \cdot b) \bullet (\bar{S}(l_{(2)}) \cdot (\bar{S}(h_{(1)}) \cdot a)) \# \bar{S}(l_{(3)})\bar{S}(h_{(2)}) \\
&= \sum (\bar{S}(l_{(1)}) \cdot b) \bullet (\bar{S}(l_{(2)})_{(2)} \cdot (\bar{S}(h_{(1)}) \cdot a)) \# \bar{S}(l_{(2)})_{(1)}\bar{S}(h_{(2)}), \bar{S} \text{ é antiomorfismo de coálgebras.} \\
&= \sum (\bar{S}(l_{(1)}) \cdot b \# \bar{S}(l_{(2)})) \bullet (\bar{S}(h_{(1)}) \cdot a \# \bar{S}(h_{(2)})), \text{ por (4.1).} \\
&= \varphi(b \# l) \bullet \varphi(a \# h).
\end{aligned}$$

É fácil ver que $\varphi(1_Q \# 1_H) = 1_{Q^{\text{op}}} \# 1_{H^{\text{cop}}}$. Assim mostramos que φ é um antiomorfismo de álgebras. Falta mostrar a bijeção. Temos:

$$\begin{aligned}
\varphi(\psi(a \# h)) &= \sum \varphi(S(h_{(2)}) \cdot a \# S(h_{(1)})) \\
&= \sum \bar{S}(S(h_{(1)})_{(1)}) \cdot (S(h_{(2)}) \cdot a) \# \bar{S}(S(h_{(1)})_{(2)}) \\
&= \sum \bar{S}(S(h_{(2)})) \cdot (S(h_{(3)}) \cdot a) \# \bar{S}(S(h_{(1)})), S \text{ é antiomorfismo de coálgebras.} \\
&= \sum h_{(2)} \cdot (S(h_{(3)}) \cdot a) \# h_{(1)} \\
&= \sum (h_{(2)}S(h_{(3)})) \cdot a \# h_{(1)} \\
&= a \# h, \text{ pois } \sum h_{(1)}S(h_{(2)}) = \varepsilon(h)1_H.
\end{aligned}$$

De forma análoga, temos $\psi(\varphi(a \# h)) = a \# h$. Assim, φ é um antimorfismo bijetor de álgebras com inversa ψ . Portanto, mostramos (1).

(2) Seja Λ um H -comódulo subálgebra à direita de $Q \# H$. Por (1), temos que $\varphi(\Lambda)$ é subálgebra de $Q^{\text{op}} \# H^{\text{cop}}$. Vamos mostrar que $\varphi(\Lambda)$ é um H^{cop} -comódulo subálgebra à direita de $Q^{\text{op}} \# H^{\text{cop}}$. Seja $\xi = \sum a_i \# h_i \in \Lambda$. Temos:

$$\begin{aligned} (\text{Id}_{Q^{\text{op}}} \otimes \Delta^{\text{cop}})(\varphi(\xi)) &= (\text{Id}_{Q^{\text{op}}} \otimes \Delta^{\text{cop}})\left(\sum \bar{S}(h_{i(1)}) \cdot a_i \# \bar{S}(h_{i(2)})\right) \\ &= \sum \bar{S}(h_{i(1)}) \cdot a_i \# \bar{S}(h_{i(2)})_{(2)} \otimes \bar{S}(h_{i(2)})_{(1)} \\ &= \sum \bar{S}(h_{i(1)}) \cdot a_i \# \bar{S}(h_{i(2)}) \otimes \bar{S}(h_{i(3)}) \\ &= \sum \varphi(a_i \# h_{i(1)}) \otimes \bar{S}(h_{i(2)}). \end{aligned}$$

Como Λ é um H -comódulo subálgebra à direita, temos que $(\text{Id}_Q \otimes \Delta)(\xi) = \sum a_i \# h_{i(1)} \otimes h_{i(2)} \in \Lambda \otimes H$. Assim, $(\text{Id}_{Q^{\text{op}}} \otimes \Delta^{\text{cop}})(\varphi(\xi)) = \sum \varphi(a_i \# h_{i(1)}) \otimes \bar{S}(h_{i(2)}) \in \varphi(\Lambda) \otimes H^{\text{cop}}$. Então, concluímos que $\varphi(\Lambda)$ é um H^{cop} -comódulo subálgebra à direita de $Q^{\text{op}} \# H^{\text{cop}}$.

A recíproca é mostrada de forma análoga. $\square$

4.2 O teorema

Esta seção se baseia no artigo [WY01] e tem por objetivo mostrar a primeira parte da teoria de correspondência entre subálgebras de R que contém R^H , e H -comódulo subálgebras à direita de $K \# H$. Nesta seção vamos assumir que a ação de H em R é X -externa.

Inicialmente, vamos mostrar um resultado extraído de [WY01, Theorem 1.1].

Teorema 4.2.1. *Seja U uma subálgebra de R contendo R^H e seja M um $(R \# H, U)$ -sub-bimódulo não nulo de $Q \# H$. Então existe $I \in \mathcal{F}(R)$ e $\eta \in \Phi(U)$ satisfazendo $I\eta \subseteq M$, onde $I\eta \neq 0$.*

Demonstração. Seja $\{H_n\}_{n \geq 0}$ a filtração co-radical de H e seja m o menor inteiro tal que $M \cap (Q \# H_m) \neq 0$. Da Seção 2.3, lembrar que $H_m = X_m \oplus H_{m-1}$. Daí, seja $\{x_i\}$ base de X_m tal que $\Delta(x_i) \in \sigma_i \otimes x_i + H \otimes H_{m-1}$, onde $\sigma_i \in G(H)$, para todo i .

Dessa forma, podemos escrever um elemento $\xi \in Q \# H_m$ de forma única como $\xi = \sum (a_i \# x_i) + y$,

onde $a_i \in Q$ e $y \in H_{m-1}$, para todo i . Seja $\xi \in M \cap (Q \# H_m)$ tal que $\xi \neq 0$ e o número de termos não nulos do somatório $\sum (a_i \# x_i)$ seja minimal. Vamos escrever $\xi = a_1 \# x_1 + \sum_{i \neq 1} (a_i \# x_i) + y$, onde $a_1 \# x_1 \neq 0$.

Seja

$$\xi' = \sigma_1^{-1} \xi = \sigma_1^{-1} \cdot a_1 \# \sigma_1^{-1} x_1 + \sum_{i \neq 1} (\sigma_1^{-1} \cdot a_i \# \sigma_1^{-1} x_i) + \sigma_1^{-1} y \in M,$$

pois M é $R \# H$ -módulo à esquerda. Observe que $\xi' \neq 0$. Vamos denotar $a = \sigma_1^{-1} \cdot a_1$. Como M é um $(R \# H, U)$ -sub-bimódulo, temos que $r\xi' s \in M$, para todo $r \in R$ e todo $s \in U$. Além disso,

$$r\xi' s \in ras \# \sigma_1^{-1} x_1 + \sum_{i \neq 1} r(\sigma_1^{-1} \cdot a_i)(\sigma_1^{-1} \sigma_i \cdot s) \# \sigma_1^{-1} x_i + Q \# \sigma_1^{-1} H_{m-1}.$$

Vamos mostrar que se $\sum r_j a s_j = 0$, então $\sum r_j \xi' s_j = 0$, onde $r_j \in R$ e $s_j \in U$, para todo j . De fato, vamos supor que $\sum r_j \xi' s_j \neq 0$. Seja $\xi'' = \sigma_1(\sum r_j \xi' s_j) = \sum b_i \# x_i + y'$, onde $b_i \in Q$ e $y' \in Q \# H_{m-1}$. É fácil ver que, ou $M \cap (Q \# H_{m-1}) \neq 0$, ou ξ'' teria menos elementos não nulos no somatório $\sum b_i \# x_i$ do que ξ . Em ambas as situações teríamos um absurdo.

Assim, está bem definida a aplicação linear

$$\begin{aligned} f: \quad RaU &\longrightarrow M \\ \sum r_j a s_j &\longmapsto \sum r_j \xi' s_j. \end{aligned}$$

Pela Proposição 3.4.4 (2), f é um homomorfismo de R -módulos à esquerda não nulo. Caso contrário, $R\xi'U = 0$, o que implicaria $\xi' = 0$. Um absurdo.

Pelo Lema 3.2.2 (1), pelo Teorema 1.4.1 e pelo fato da álgebra R ser prima, existe $J \in \mathcal{F}(R)$ tal que $JaU \subseteq R$ e $J\xi'U \subseteq R \# H$. Como JaU é um (R, U) -sub-bimódulo de Q_l , pela Proposição 3.4.4 (3), JaU contém um ideal $I \in \mathcal{F}(R)$.

Seja f' a restrição de f com domínio I . Como podemos ver f' como um homomorfismo de R -módulos à esquerda, pela Proposição 3.4.4 (4), existe $\eta \in Q_l$ tal que $f(x) = x\eta$, para todo $x \in I$. Vamos mostrar que $\eta \neq 0$.

Vamos supor que $\eta = 0$. Daí, para todo $x \in I$ e todo $y \in JaU \subseteq R$, temos que $0 = xy\eta = f(xy) = xf(y)$, ou seja, $If(y) = 0$. Pelo Lema 3.2.1 (4), temos que $f(y) = 0$, para todo $y \in JaU$,

o que implica em $J\xi'U = 0$. Pela Proposição 3.4.4 (2), temos que $J\xi' = 0$. Finalmente, pelo Lema 3.2.2 (2), temos que $\xi' = 0$, o que é um absurdo.

Seja $x = \sum r_j a s_j \in I$ e $s \in U$. Temos:

$$xs\eta = \sum r_j a s_j s\eta = f\left(\sum r_j a s_j s\right) = \sum r_j \xi' s_j s = f\left(\sum r_j a s_j\right) s = x\eta s.$$

Assim, temos que $I(s\eta - \eta s) = 0$. Novamente pelo Lema 3.2.2 (2), temos $s\eta = \eta s$, ou seja, $\eta \in (Q_l \# H)^U$. Pela Proposição 3.4.4 (6), $\eta \in (K \# H)^U = \Phi(U)$.

Logo, existe $I \in \mathcal{F}(R)$ e $\eta \in \Phi(U)$ satisfazendo $I\eta \subseteq M$, onde $I\eta \neq 0$. $\square$

Da Seção 1.3.2, lembre que temos uma estrutura de $Q \# H$ -módulo à esquerda e à direita em Q , dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} (a \# h) \cdot x &= a(h \cdot x), \text{ para todos } a, x \in Q \text{ e todo } h \in H. \\ x \triangleleft (a \# h) &= \overline{S}(h) \cdot (xa), \text{ para todos } a, x \in Q \text{ e todo } h \in H. \end{aligned}$$

Utilizaremos essas estruturas de Q durante a demonstração do próximo lema, que foi extraído de [WY01, Lemma 1.2].

Lema 4.2.2. *Seja U uma subálgebra de R contendo R^H . Então existe um ideal à direita não nulo de $R^{\Phi(U)}$ contido em U .*

Demonstração. Como a dimensão de H é finita, o Teorema 1.3.22 nos garante a existência de um integral à esquerda não nulo $t \in H$. Pelo mesmo teorema, temos que $S(t)$ é um integral à direita. Da Seção 1.3.5, temos também que $hS(t) = \overline{\alpha}(h)S(t)$, para todo $h \in H$, onde $\alpha \in G(H^*)$ é o elemento group-like distinguido de H^* .

Seja $M = RS(t)U$. Para todo $r \# h \in R \# H$ e todo $u \in U$, temos que

$$\begin{aligned} (r \# h)Mu &= (r \# h)\left((R \# S(t))U\right)u \\ &\subseteq \left[\sum r(h_{(1)} \cdot R) \# h_{(2)}S(t)\right]U \\ &\subseteq \left[\sum \overline{\alpha}(h_{(2)})r(h_{(1)} \cdot R) \# S(t)\right]U \\ &\subseteq (R \# S(t))U = M. \end{aligned}$$

Assim, mostramos que M é um $(R \# H, U)$ -sub-bimódulo de $Q \# H$, e M é não nulo já que $S(t) \in M$. Pelo Teorema 4.2.1, existe $I \in \mathcal{F}(R)$ e $\eta \in \Phi(U)$ satisfazendo $I\eta \subseteq M$, onde $I\eta \neq 0$. Vamos mostrar que $J = I \cap R^{\Phi(U)}$ é não nulo.

Como a ação de H em R é contínua, existe um ideal $I' \in \mathcal{F}(R)$ tal que $t \cdot I' \subseteq I$. Pela Proposição 3.4.4 (1), temos que $t \cdot I' \neq 0$. Caso contrário, teríamos $t = 0$, o que seria um absurdo. Além disso, conforme vimos na demonstração de 3.4.4 (2), $t \cdot R \subseteq R^H$. Então, temos que $t \cdot I' \subseteq (I \cap R^H) \subseteq J$, pois $R^H \subseteq R^{\Phi(U)}$. De fato, sejam $r_i \in K$ e $h_i \in H$, para todo i , tais que $\sum r_i \# h_i \in \Phi(U) = (K \# H)^U$. Para todo $v \in R^H$, temos que:

$$\left(\sum r_i \# h_i \right) v = \sum r_i (h_{i(1)} \cdot v) \# h_{i(2)} = \sum r_i (\varepsilon(h_{i(1)})v) \# h_{i(2)} = \sum r_i v \# h_i = v \left(\sum r_i \# h_i \right)$$

É fácil ver que $R^{\Phi(U)}$ é subálgebra de R e que J é um ideal não nulo de $R^{\Phi(U)}$. Observe que, como $\eta \in \Phi(U)$ e $J = I \cap R^{\Phi(U)}$, temos que $J\eta = \eta J$. Além disso, como $J \subseteq I$ e $I\eta \subseteq M = RS(t)U$, temos $J\eta \subseteq RS(t)U$. Daí:

$$\begin{aligned} R \triangleleft (J\eta) &\subseteq R \triangleleft (RS(t)U) \\ &= R \triangleleft (R \# S(t))U \\ &= R \triangleleft \left(\sum R(S(t)_{(1)} \cdot U) \# S(t)_{(2)} \right) \\ &= R \triangleleft \left(\sum R(S(t_{(2)}) \cdot U) \# S(t_{(1)}) \right), S \text{ é antimorfismo de coálgebras.} \\ &= \sum \bar{S}(S(t_{(1)})) \cdot [RR(S(t_{(2)}) \cdot U)] \\ &= \sum t_{(1)} \cdot [R(S(t_{(2)}) \cdot U)] \\ &= \sum (t_{(1)} \cdot R)(t_{(2)} \cdot (S(t_{(3)}) \cdot U)) \\ &= \sum (t_{(1)} \cdot R)((t_{(2)}S(t_{(3)})) \cdot U) \\ &= \sum (t_{(1)} \cdot R)((\varepsilon(t_{(2)})1_H) \cdot U), \text{ pois } \sum h_{(1)}S(h_{(2)}) = \varepsilon(h)1_H. \\ &= (t \cdot R)U \\ &= U, \text{ pois } t \cdot R \subseteq R^H \subseteq U. \end{aligned}$$

Podemos escrever $\eta = \sum r_i \# h_i \in \Phi(U)$. Então:

$$\begin{aligned}
R \triangleleft (J\eta) &= R \triangleleft (\eta J) = R \triangleleft \left(\left(\sum r_i \# h_i \right) J \right) = R \triangleleft \left(\sum r_i (h_{i(1)} \cdot J) \# h_{i(2)} \right) \\
&= \sum \bar{S}(h_{i(2)}) \cdot (Rr_i (h_{i(1)} \cdot J)) \\
&= \sum \left[\bar{S}(h_{i(2)})_{(1)} \cdot (Rr_i) \right] \left[\bar{S}(h_{i(2)})_{(2)} \cdot (h_{i(1)} \cdot J) \right] \\
&= \sum \left[\bar{S}(h_{i(3)}) \cdot (Rr_i) \right] \left[(\bar{S}(h_{i(2)}) h_{i(1)}) \cdot J \right], \bar{S} \text{ é antimorfismo de coálgebras.} \\
&= \sum \left[\bar{S}(h_{i(2)}) \cdot (Rr_i) \right] \left[(\varepsilon(h_{i(1)}) 1_H) \cdot J \right], \text{ pois } \sum \bar{S}(h_{(2)}) h_{(1)} = \varepsilon(h) 1_H. \\
&= \sum \left[\bar{S}(h_i) \cdot (Rr_i) \right] J \\
&= \left[R \triangleleft \left(\sum r_i \# h_i \right) \right] J = (R \triangleleft \eta) J.
\end{aligned}$$

Segue que $R \triangleleft (J\eta) = (R \triangleleft \eta) J$ é um ideal à direita não nulo de $R^{\Phi(U)}$ contido em U . (Observe que $U \subseteq R^{\Phi(U)}$.) $\square$

Seja U^{op} um sub-conjunto de R^{op} . Vamos definir

$$\Phi'(U^{\text{op}}) = (K \# H^{\text{cop}})^{U^{\text{op}}}.$$

Lembre que $K^{\text{op}} = K$. O próximo lema, baseado em [WY01, Lemma 1.3], nos garante a existência de um ideal à esquerda não nulo de $R^{\Phi(U)}$ contido em U , onde U é como no lema anterior. Basta aplicarmos o lema anterior em $(R^{\text{op}})^{\Phi'(U^{\text{op}})} = (R^{\Phi(U)})^{\text{op}}$, conforme veremos. Observe que U^{op} é uma subálgebra de R^{op} contendo $(R^{\text{op}})^{H^{\text{cop}}} = R^H$, pela Proposição 3.3.4 (1).

Lema 4.2.3. *Seja U uma subálgebra de R contendo R^H . Então $(R^{\Phi(U)})^{\text{op}} = (R^{\text{op}})^{\Phi'(U^{\text{op}})}$.*

Demonstração. Seja φ o antimorfismo bijetor de álgebras com inversa ψ da Proposição 4.1.1. Seja $u \in Q$ e seja $\xi \in Q \# H$ tal que $u\xi = \xi u$. Temos:

$$\varphi(\xi) \bullet u = \varphi(\xi) \bullet \varphi(u) = \varphi(u\xi) = \varphi(\xi u) = \varphi(u) \bullet \varphi(\xi) = u \bullet \varphi(\xi). \quad (4.2)$$

Analogamente, se u e ξ são tais que $\xi \bullet u = u \bullet \xi$. Temos:

$$u\psi(\xi) = \psi(u)\psi(\xi) = \psi(\xi \bullet u) = \psi(u \bullet \xi) = \psi(\xi)\psi(u) = \psi(\xi)u. \quad (4.3)$$

Assim, temos que $u\xi = \xi u$ em $Q \# H$ se, e somente se, $\varphi(\xi) \bullet u = u \bullet \varphi(\xi)$ em $Q^{\text{op}} \# H^{\text{cop}}$. De forma análoga, temos que $u \bullet \xi = \xi \bullet u$ em $Q^{\text{op}} \# H^{\text{cop}}$ se, e somente se, $\psi(\xi)u = u\psi(\xi)$ em $Q \# H$.

Das seguintes definições

$$\Phi'(U^{\text{op}}) = (K \# H^{\text{cop}})^{U^{\text{op}}} = \{\xi \in K \# H^{\text{cop}} : \xi \bullet u = u \bullet \xi, \text{ para todo } u \in U^{\text{op}}\}$$

$$\Phi(U) = (K \# H)^U = \{\xi \in K \# H : \xi u = u\xi, \text{ para todo } u \in U\},$$

e das equações acima, temos que

$$\Phi'(U^{\text{op}}) = (\varphi \circ \psi)(\Phi'(U^{\text{op}})) \subseteq \varphi(\Phi(U)) \subseteq \Phi'(U^{\text{op}}), \text{ ou seja, } \Phi'(U^{\text{op}}) = \varphi(\Phi(U)).$$

Seja $x \in (R^{\Phi(U)})^{\text{op}}$. Para todo $\xi \in \Phi(U)$, temos que $\xi \bullet x = x\xi = \xi x = x \bullet \xi$. Da Equação (4.2), temos que $\varphi(\xi) \bullet x = x \bullet \varphi(\xi)$. Assim $x \in (R^{\text{op}})^{\varphi(\Phi(U))} = (R^{\text{op}})^{\Phi'(U^{\text{op}})}$.

Seja $y \in (R^{\text{op}})^{\Phi'(U^{\text{op}})} = (R^{\text{op}})^{\varphi(\Phi(U))}$. Para todo $\xi \in \Phi(U)$, temos que $\varphi(\xi) \bullet y = y \bullet \varphi(\xi)$. Da Equação (4.3), temos que $y\xi = y\psi(\varphi(\xi)) = \psi(\varphi(\xi))y = \xi y$. Assim, $y \in (R^{\Phi(U)})^{\text{op}}$.

Portanto, $(R^{\Phi(U)})^{\text{op}} = (R^{\text{op}})^{\Phi'(U^{\text{op}})}$. □

A seguir uma proposição extraída de [Yan05, Proposition 1.4] que trata das subálgebras de R racionalmente completas, cuja definição está na Seção 1.2.

Proposição 4.2.4. *Seja U uma subálgebra de R racionalmente completa e seja U' uma subálgebra de R contendo U . Se U contém um ideal I não nulo de U' , então $U = U'$.*

Demonstração. Seja $a \in U'$. Observe que I é um ideal não nulo de U' e $I \subseteq U$. Assim, temos que $aI \subseteq I \subseteq U$. Da definição de subálgebra racionalmente completa, concluímos que $a \in U$. Logo, $U = U'$. □

Finalmente, estamos em condições de mostrar o teorema que garante a injetividade da correspondência. O resultado foi extraído de [WY01, Theorem 1.4].

Teorema 4.2.5. *Seja R uma álgebra prima e seja H uma álgebra de Hopf pontual de dimensão finita que age em R . Suponha que a ação de H em R é X -externa. Então a subálgebra $R^{\Phi(U)}$ possui um ideal não nulo contido em U , onde U é qualquer subálgebra de R contendo R^H .*

Demonstração. Pelo Lema 4.2.2, existe um ideal à direita não nulo A de $R^{\Phi(U)}$ contido em U .

Além disso, pela Proposição 3.3.3, temos que a álgebra de Hopf pontual de dimensão finita H^{cop} age na álgebra prima R^{op} . Pela Proposição 3.3.4 (2), a ação de H^{cop} em R^{op} é X -externa. É fácil ver que U^{op} é subálgebra de R^{op} contendo $(R^{\text{op}})^{H^{\text{cop}}} = R^H$, pela Proposição 3.3.4 (1). Logo, podemos aplicar o Lema 4.2.2 para H^{cop} , R^{op} e U^{op} e obter um ideal à direita não nulo B^{op} de $(R^{\text{op}})^{\Phi'(U^{\text{op}})}$ contido em U^{op} .

Pelo Lema 4.2.3, temos que $(R^{\Phi(U)})^{\text{op}} = (R^{\text{op}})^{\Phi'(U^{\text{op}})}$. Assim, podemos ver B como um ideal à esquerda não nulo de $R^{\Phi(U)}$ contido em U .

Dessa forma, BUA é um ideal de $R^{\Phi(U)}$ contido em U . Observe que, pela Proposição 3.4.4 (2), temos que $BUA \neq 0$, caso contrário teríamos $A = 0$ ou $B = 0$, o que seria um absurdo. $\square$

Segue um colorário do teorema anterior que é imediato a partir da Proposição 4.2.4.

Corolário 4.2.6. *Seja R uma álgebra prima e seja H uma álgebra de Hopf pontual de dimensão finita que age em R . Suponha que a ação de H em R é X -externa. Então $R^{\Phi(U)} = U$, onde U é qualquer subálgebra de R racionalmente completa contendo R^H .*

Capítulo 5

A sobrejetividade da correspondência de Galois

5.1 Introdução

Finalmente, estamos em condições de mostrar a sobrejetividade da correspondência, que é o principal objetivo deste capítulo. Os resultados principais aqui apresentados se baseiam no artigo [WY01].

No decorrer deste capítulo R e H serão como no capítulo anterior, ou seja, R será uma álgebra prima e H será uma álgebra de Hopf pontual de dimensão finita agindo em R . Além disso, vamos adicionar a hipótese da característica do corpo base k ser igual a zero, e vamos assumir que a ação de H em R é X -externa.

Na Seção 5.2 mostramos uma série de propriedades da subálgebra H^K . A Seção 5.3 traz diversos resultados dos H -comódulo subálgebras de $K \# H$. Finalmente, na Seção 5.4, mostramos a sobrejetividade da correspondência de Galois. A Seção 5.5 finaliza este trabalho apresentando o enunciado completo do teorema da correspondência, como feito anteriormente na introdução.

5.2 Propriedades de H^K

Esta seção se baseia no artigo [Wes00] e tem por objetivo mostrar uma série de propriedades da subálgebra $H^K \subseteq H$. Lembre que estamos identificando K e H com as subálgebras $K \# 1_H$ e $1_K \# H$ de $K \# H$, respectivamente.

Inicialmente, vamos mostrar um resultado extraído de [Wes00, Lemma 2.3].

Lema 5.2.1. *Seja $\sigma \in G(H)$, seja $i > 0$ e seja $h \in X_{1,\sigma,i}$, com $h \neq 0$. Então $LR(h) \subseteq H^K$.*

Demonstração. Vamos mostrar o resultado por indução em i . Para $i = 1$, temos que $h \in X_{1,\sigma,1}$. Pela Proposição 2.3.2, $\Delta(h) = 1 \otimes h + h \otimes \sigma$. Para todo $x \in K$ e todo $a \in R$, temos:

$$h \cdot (xa) = x(h \cdot a) + (h \cdot x)(\sigma \cdot a).$$

$$h \cdot (ax) = a(h \cdot x) + (h \cdot a)(\sigma \cdot x).$$

Observe que $xa = ax$, e pela Proposição 3.4.4 (5), temos que K é estável sob a ação de H . Assim, obtemos das expressões acima:

$$(h \cdot a)(\sigma \cdot x - x) = (h \cdot x)(\sigma \cdot a - a). \quad (5.1)$$

Vamos supor que exista $x \in K$ tal que $\sigma \cdot x - x \neq 0$. Denotemos $\nu = \sigma \cdot x - x$, que é inversível pois K é um corpo. Denotemos também $q = (h \cdot x)\nu^{-1}$. Multiplicando ambos os lados da igualdade acima por ν^{-1} , obtemos:

$$h \cdot a = q(\sigma \cdot a) - qa.$$

Seja $\{H_n\}_{n \geq 0}$ a filtração co-radical de H . Como H é álgebra de Hopf pontual, temos que $H_0 = kG(H)$. Além disso, $H_1 = H_0 \oplus X_1$. Então, temos que $h \in P'_{1,\sigma}$. Seja $\overline{\vartheta}_\sigma$ a função da Proposição 3.3.2, que é injetora pois a ação de H em R é X-externa. Então:

$$\begin{aligned} \overline{\vartheta}_\sigma(q \otimes h) = \varphi: \quad R &\longrightarrow Q \\ a &\longmapsto q(h \cdot a) \end{aligned}$$

Observe que $\varphi(a) = q(h \cdot a) = q(q(\sigma \cdot a) - qa) = qq(\sigma \cdot a) - qqa$, ou seja, $\varphi \in X_{inn-Der_{1,\sigma}}(R, Q)$.

Assim, $q \otimes h \in \ker \overline{\vartheta}_\sigma$. Portanto, $q \otimes h = 0$. Como $h \neq 0$, temos que $q = 0$. Daí, $h \cdot R = 0$. Considerando $\xi = 1 \# h$ na Proposição 3.4.4 (1), é fácil ver que $h = 0$, um absurdo. Logo, σ age trivialmente em K . Pelo Lema 2.2.3, $\sigma \in H^K$.

Vamos supor que exista $x \in K$ tal que $h \cdot x \neq 0$. Denotemos $q = h \cdot x$. Da Equação 5.1, temos que $q(\sigma \cdot a) - aq = 0$, para todo $a \in R$. Ou seja, a ação de σ em R é X-interna, conforme definido na Seção 3.3. Novamente pela Proposição 3.3.2, a ação de $G(H)$ em R é X-externa, o que implica em $\sigma = 1$. Daí, temos que $h \in X_{1,1,1}$. Pela Proposição 1.3.2, $h = 0$, um absurdo. Logo, $h \cdot K = 0$.

Lembre que, pela Proposição 2.3.4, $\varepsilon(h) = 0$. Assim, h age trivialmente em K . Pelo Lema 2.2.3, $h \in H^K$. Além disso, é fácil ver que $1_H \in H^K$. Como $LR(h) = \text{span}_k\{1_H, \sigma, h\}$ e H^K é subálgebra de H , temos que $LR(h) \subseteq H^K$.

Vamos assumir que o resultado seja válido para $i < n$. Seja $h \in X_{1,\sigma,n}$. Pelo Corolário 2.3.6, podemos escrever

$$\Delta(h) = 1 \otimes h + h \otimes \sigma + \sum x_j \otimes y_j, \text{ onde } x_j \in \sum_{0 < i < n} X_{1,\nu_j,i}, \text{ e } y_j \in \sum_{0 < i < n} X_{\nu_j,\sigma,i}, \text{ para todo } j.$$

Pela hipótese indutiva, temos que $LR(x_j) \subseteq H^K$. Em particular, temos que $\nu_j \in H^K$. Pela Proposição 2.3.3, temos que $\nu_j^{-1}y_j \in \sum_{0 < i < n} X_{1,\nu_j^{-1}\sigma,i}$. Assim, pela hipótese indutiva, $LR(\nu_j^{-1}y_j) \in H^K$. Pelo Lema 2.2.2, e pelo fato de H^K ser uma subálgebra de H , temos que $\nu_j LR(\nu_j^{-1}y_j) = LR(y_j) \in H^K$, para todo j . Em particular, observe que, como $y_j \in \sum_{0 < i < n} X_{\nu_j,\sigma,i}$ e $LR(y_j) \in H^K$, temos que $\sigma \in H^K$. Além disso, é óbvio que $1 \in H^K$. Assim, falta mostrar que $h \in H^K$.

Para todo $x \in K$ e todo $a \in R$, temos:

$$h \cdot (xa) = x(h \cdot a) + (h \cdot x)(\sigma \cdot a) + \sum (x_j \cdot x)(y_j \cdot a).$$

$$h \cdot (ax) = a(h \cdot x) + (h \cdot a)(\sigma \cdot x) + \sum (x_j \cdot a)(y_j \cdot x).$$

Mas, $\sigma, x_j, y_j \in H^K$. Pelo Lema 2.2.3, σ, x_j e y_j agem trivialmente em K , ou seja, $\sigma \cdot x = x$, $x_j \cdot x = y_j \cdot x = 0$ (Lembre que, pela Proposição 2.3.4, $\varepsilon(X_i) = 0$, para todo $i \geq 1$). Assim, a partir

das expressões acima, temos a seguinte igualdade

$$(h \cdot x)(\sigma \cdot a) = a(h \cdot x).$$

Logo, podemos ter duas situações. Primeiro, podemos ter $h \cdot K = 0$, ou seja, h age trivialmente em K . Pelo Lema 2.2.3, $h \in H^K$.

Segundo, pode existir $x \in K$ tal que $h \cdot x \neq 0$. Daí, a ação de σ em R é X-interna, conforme definido na Seção 3.3. Novamente pela Proposição 3.3.2, a ação de $G(H)$ em R é X-externa, o que implica em $\sigma = 1$. Nesse caso, queremos chegar em uma contradição.

Como a dimensão de H é finita, existe $m > 0$ tal que $h^m = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i h^i$, onde $\{h_i\}_{1 \leq i \leq m-1}$ é linearmente independente e $\lambda_i \in k$, para todo $1 \leq i \leq m-1$. Como $\sigma = 1$, podemos escrever

$$\Delta(h) = 1 \otimes h + h \otimes 1 + \sum x_j \otimes y_j.$$

Então, para todo $i \geq 1$, temos que

$$\Delta(h^i) = 1 \otimes h^i + h^i \otimes 1 + \sum_{l=1}^{i-1} \binom{i}{l} (h^l \otimes h^{i-l}) + \sum a_{s_i} \otimes b_{s_i},$$

onde a_{is} e b_{is} são monômios contendo, no mínimo, uma componente de x_j e y_j , respectivamente.

Como K é estável sob a ação de H e a ação de x_j e y_j anulam K , temos que a ação de a_{s_i} e b_{s_i} anulam K . Temos ainda que:

$$\begin{aligned} \Delta(h^m) &= \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \Delta(h^i) = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \left[1 \otimes h^i + h^i \otimes 1 + \sum_{l=1}^{i-1} \binom{i}{l} (h^l \otimes h^{i-l}) + \sum a_{s_i} \otimes b_{s_i} \right]. \\ \Delta(h^m) &= 1 \otimes h^m + h^m \otimes 1 + \sum_{l=1}^{m-1} \binom{m}{l} (h^l \otimes h^{m-l}) + \sum a_{s_m} \otimes b_{s_m} \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i [1 \otimes h^i + h^i \otimes 1] + \sum_{l=1}^{m-1} \binom{m}{l} (h^l \otimes h^{m-l}) + \sum a_{s_m} \otimes b_{s_m}. \end{aligned}$$

Igualando as expressões acima, obtemos

$$\sum_{l=1}^{m-1} \binom{m}{l} (h^l \otimes h^{m-l}) + \sum a_{s_m} \otimes b_{s_m} = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \left[\sum_{l=1}^{i-1} \binom{i}{l} (h^l \otimes h^{i-l}) + \sum a_{s_i} \otimes b_{s_i} \right].$$

Seja $\Omega \in H^*$ tal que $\Omega(h^t) = 0$, para todo $0 < t < m-1$, e $\Omega(h^{m-1}) = 1_K$. Observe que Ω existe já que podemos obter uma base de H completando o conjunto linearmente independente $\{h_i\}_{1 \leq i \leq m-1}$. Aplicando $\text{Id}_H \otimes \Omega$ na expressão acima, obtemos:

$$h \otimes 1 + \sum a_{s_m} \otimes \Omega(b_{s_m}) = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \left[\sum a_{s_i} \otimes \Omega(b_{s_i}) \right].$$

Então, temos que $h \in \text{span}_K \{a_{s_i}\}_{1 \leq i \leq m}$. Como a ação de a_{s_i} anula K , para todo $1 \leq i \leq m$, temos que $h \cdot K = 0$, um absurdo.

Logo, $LR(h) \subseteq H^K$, para todo $\sigma \in G(H)$, $i > 0$ e $h \in X_{1,\sigma,i}$. □

Segue um corolário do lema anterior, extraído de [Wes00, Corollary 2.4].

Corolário 5.2.2. *Sejam $\sigma, \tau \in G(H)$ e seja $i > 0$. Se $X_{\tau,\sigma,i} \neq \{0\}$, então:*

- (1) $LR(\tau^{-1}h) \subseteq H^K$, para todo $h \in X_{\tau,\sigma,i}$, com $h \neq 0$. Em particular, $\tau^{-1}\sigma \in H^K$.
- (2) Se $\sigma \in H^K$, então $\tau \in H^K$ e $X_{\tau,\sigma,i} \subseteq H^K$.

Demonstração. (1) Pela Proposição 2.3.3, temos que $\tau^{-1}h \in X_{1,\tau^{-1}\sigma,i}$. Pelo Lema 5.2.1, $LR(\tau^{-1}h) \subseteq H^K$. Em particular, é fácil ver que $\tau^{-1}\sigma \in LR(\tau^{-1}h) \subseteq H^K$.

(2) Pelo Lema 2.2.3, temos que σ age trivialmente em K . Seja $x \in K$. Temos que

$$x = (\sigma^{-1}\sigma) \cdot x = \sigma^{-1} \cdot (\sigma \cdot x) = \sigma^{-1} \cdot x,$$

ou seja, σ^{-1} age trivialmente em K . Logo, $\sigma^{-1} \in H^K$.

De (1), temos que $\tau^{-1}\sigma \in H^K$. Daí, $(\tau^{-1}\sigma)\sigma^{-1} = \tau^{-1} \in H^K$. De forma análoga ao que foi feito para σ , temos $(\tau^{-1})^{-1} = \tau \in H^K$. Novamente por (1), temos que $\tau^{-1}h \in H^K$. Assim, $\tau(\tau^{-1}h) = h \in H^K$.

Logo, $X_{\tau,\sigma,i} \subseteq H^K$. □

Os dois próximos resultados foram extraídos de [Wes00, Theorem 2.5].

Proposição 5.2.3. H^K é uma subálgebra de Hopf normal de H .

Demonstração. Pelo Lema 2.2.4, basta mostrar que H^K é um coideal à esquerda de H para concluir que H^K é uma subálgebra de Hopf de H .

Seja $h \in H^K$. Pela Seção 2.3, podemos escrever $h = \sum_i \lambda_i \sigma_i + \sum_{i,j} h_{i,j}$, onde $\lambda_i \in k$, $h_{i,j} \in X_{\sigma_j, \sigma_i, m_{i,j}}$, com $m_{i,j} > 0$ e $\sigma_i, \sigma_j \in G(H)$, para todos i, j . Então, pelo Corolário 2.3.7, temos que

$$\Delta(h) = \sum_i \lambda_i (\sigma_i \otimes \sigma_i) + \sum_{i,j} h_{i,j} \otimes \sigma_i + \sum_l a_l \otimes b_l,$$

onde $b_l \in \sum_{i>0} X_i$ e $\{b_l, \sigma_i\}_{l,i}$ é linearmente independente.

Pelo Lema 2.2.3, temos que H^K é um coideal à direita de H . Segue que $\lambda_i \sigma_i + \sum_j h_{i,j} \in H^K$, para todo i . Lembre que, pela Proposição 2.3.4, $\varepsilon(X_i) = 0$, para todo $i > 0$. Assim, aplicando $\text{Id} \otimes \varepsilon$ em $\Delta(h)$, temos que $h = \sum_i \left[\lambda_i \sigma_i + \sum_j h_{i,j} \right]$. Fixando um i , vamos denotar $\sigma = \sigma_i$, $\lambda = \lambda_i$, $h_j = h_{i,j}$, $m_j = m_{i,j}$, para todo j , e $h' = \lambda \sigma + \sum_j h_j$. Observe que $h_j \in X_{\sigma_j, \sigma, m_j}$, com $m_j > 0$.

Pelo Corolário 2.3.6, temos que

$$\Delta(h_j) \in \sigma_j \otimes h_j + h_j \otimes \sigma + \sum_{\nu \in G} \left[\sum_{\substack{0 < z, w < m_j \\ z+w \leq m_j}} (X_{\sigma_j, \nu, z} \otimes X_{\nu, \sigma, w}) \right], \text{ para todo } j.$$

Se $\sigma \in H^K$, como $h' \in H^K$, temos que $-\lambda \sigma + \lambda \sigma + \sum_j h_j = \sum_j h_j \in H^K$. Além disso, pelo Corolário 5.2.2, temos que $X_{\nu, \sigma, w} \subseteq H^K$, para todo $\nu \in G$, e todo $w > 0$. Assim, a partir da expressão acima, e do fato de $h_j \in X_{\sigma_j, \sigma, m_j} \subseteq H^K$, para todo j , é fácil ver que $\Delta(h') \in H \otimes H^K$.

Logo, se $h' = \lambda \sigma \in H^K$, então $\Delta(h') \in H \otimes H^K$. Vamos supor que $\sigma \notin H^K$. A partir de

agora, vamos considerar somente os coeficientes j para os quais h_j é não nulo. Seja m_t um elemento maximal no conjunto $\{m_j\}_j$. Então, temos:

$$\begin{aligned}\Delta(h') &= \lambda(\sigma \otimes \sigma) + \sum_j h_j \otimes \sigma + \sum_{\substack{j \\ j \neq t}} \sigma_j \otimes h_j + \sigma_t \otimes h_t + \sum_z a_z \otimes b_z \\ &= h' \otimes \sigma + \sum_{\substack{j \\ j \neq t}} \sigma_j \otimes h_j + \sigma_t \otimes h_t + \sum_z a_z \otimes b_z,\end{aligned}$$

onde $a_z \in H$ e $b_z \in X_{m_z}$, com $0 < m_z < m_t$, para todo z .

Lembre que $H = H_0 \oplus \left[\bigoplus_{n>0} X_n \right]$, onde $H_0 = kG(H)$ é o co-radical de H . Além disso, da demonstração da Proposição 2.3.2, se $(\sigma, \tau, n) \neq (\sigma', \tau', n')$, então $X_{\sigma, \tau, n} \cap X_{\sigma', \tau', n'} = \{0\}$, onde $\sigma, \sigma', \tau, \tau' \in G(H)$ e $n, n' > 0$. Ainda, pelo fato de H^K ser um coideal à direita de H , concluímos que $\sigma_t \in H^K$.

Do Corolário 5.2.2, $\sigma_t^{-1}\sigma \in H^K$. Como H^K é subálgebra de H , $\sigma_t(\sigma_t^{-1}\sigma) = \sigma \in H^K$, um absurdo. Assim, H^K é um coideal à esquerda de H .

Logo, conforme observação no início da demonstração, H^K é uma subálgebra de Hopf de H . Falta mostrar a normalidade.

Seja $h \in H^K$, seja $y \in H$ e seja $x \in K$. Se $y = \tau \in G(H)$, então:

$$\begin{aligned}[\text{ad}_l(\tau, h)]x &= (\tau h \tau^{-1})x = (1 \# \tau)(1 \# h)(1 \# \tau^{-1})(x \# 1) \\ &= (1 \# \tau)(1 \# h)(\tau^{-1} \cdot x \# \tau^{-1}) \\ &= (1 \# \tau)(1 \# h)(\tau^{-1} \cdot x)(1 \# \tau^{-1}) \\ &= (1 \# \tau)(\tau^{-1} \cdot x)(1 \# h)(1 \# \tau^{-1}), \text{ pois } h \in H^K \text{ e } H \cdot K \subseteq K. \\ &= (\tau \cdot (\tau^{-1} \cdot x) \# \tau)(1 \# h)(1 \# \tau^{-1}) \\ &= x(1 \# \tau)(1 \# h)(1 \# \tau^{-1}) = x(\tau h \tau^{-1}) = x[\text{ad}_l(\tau, h)].\end{aligned}$$

Então, $\text{ad}_l(\tau, h) \in H^K$.

Se $y \in X_{\tau, \sigma, i}$, onde $i > 0$ e $\tau, \sigma \in G(H)$, pelo Corolário 5.2.2, temos que $\tau^{-1}y \in H^K$. Como H^K

é uma subálgebra de Hopf de H , temos que

$$\begin{aligned}
 \text{ad}_1(\tau^{-1}y, h) &= \sum_{(y)} (\tau^{-1}y)_{(1)} h S((\tau^{-1}y)_{(2)}) \\
 &= \sum_{(y)} \tau^{-1}y_{(1)} h S(\tau^{-1}y_{(2)}), \text{ pois } \Delta \text{ é morfismo de álgebras e } \Delta(\tau^{-1}) = \tau^{-1} \otimes \tau^{-1}. \\
 &= \sum_{(y)} \tau^{-1}y_{(1)} h S(y_{(2)}) S(\tau^{-1}), \text{ pois } S \text{ é antimorfismo de álgebras.} \\
 &= \sum_{(y)} \tau^{-1}y_{(1)} h S(y_{(2)}) \tau \in H^K.
 \end{aligned}$$

Mas,

$$\text{ad}_1(\tau, \text{ad}_1(\tau^{-1}y, h)) = \tau \text{ad}_1(\tau^{-1}y, h) \tau^{-1} = \tau \left[\sum_{(y)} \tau^{-1}y_{(1)} h S(y_{(2)}) \tau \right] \tau^{-1} = \sum_{(y)} y_{(1)} h S(y_{(2)}),$$

ou seja, $\text{ad}_1(\tau, \text{ad}_1(\tau^{-1}y, h)) = \text{ad}_1(y, h)$.

Conforme mostramos anteriormente, $\text{ad}_1(\tau, h) \in H^K$, para todo $h \in H^K$ e todo $\tau \in G(H)$. Logo, $\text{ad}_1(y, h) \in H^K$.

De forma análoga, mostra-se que $\text{ad}_r(y, h) \in H^K$, para todo $y \in H$ e todo $h \in H^K$. Portanto, H^K é uma subálgebra de Hopf normal de H . $\square$

Observe que, pela proposição anterior, H^K é uma subálgebra de Hopf normal de H . Daí, pelo Lema 1.3.6, $I = H(H^K)^+ = (H^K)^+H$ é um ideal de Hopf. Sendo assim, o quociente H/I é uma álgebra de Hopf com a estrutura induzida de H , e a projeção de H em H/I , que vamos denotar por π , é um morfismo de álgebras de Hopf.

Denotemos por $\overline{H}$ a álgebra de Hopf $H/I = \pi(H)$, e por $\overline{G} = G(\overline{H})$ o grupo dos elementos group-like de $\overline{H}$. Seja $h \in H$. Denotemos por $\overline{h}$ a imagem de h pela projeção π .

Finalmente, vamos mostrar o último resultado desta seção.

Proposição 5.2.4. *Seja $\sigma \in G(H)$. Então:*

$$(1) \quad \overline{X_i} = 0, \text{ para todo } i > 0.$$

(2) $\overline{H} = k\overline{G}$, ou seja, $\overline{H}$ é uma álgebra de grupo.

(3) $\overline{\sigma} \neq 0$ e $\overline{\sigma} \in \overline{G}$.

(4) $\overline{\sigma} = \overline{1}$ se, e somente se, $\sigma \in G(H^K)$.

(5) $\overline{G} = G(H)/G(H^K)$.

Demonstração. Antes de mais nada, convém lembrar que, pela Proposição 2.3.4, $\varepsilon(X_i) = 0$, para todo $i \geq 1$.

Seja $h \in X_{\sigma, \tau, i}$ não nulo, onde $\sigma, \tau \in G(H)$ e $i > 0$. Pelo Corolário 5.2.2, temos que $\tau^{-1}h \in H^K$. Como $\varepsilon(h) = 0$ e ε é um morfismo de álgebras, segue que $\tau^{-1}h \in (H^K)^+$. Assim, $h = \tau\tau^{-1}h \in H(H^K)^+ = I$. Logo, temos que $\overline{h} = 0$.

Pela Proposição 2.3.2, $X_n = \bigoplus_{\sigma, \tau \in G} X_{\sigma, \tau, n}$, para todo $n \geq 0$. Assim, temos que $\overline{X_i} = 0$, para todo $i > 0$. Logo, mostramos que vale (1).

(2) Da Seção 2.3, podemos escrever

$$H = kG(H) \oplus \left[\bigoplus_{i>0} X_i \right].$$

Da expressão acima, concluímos que $\overline{H} = \overline{kG(H)}$. Do fato de H ser pontual e do Teorema 1.3.17, temos que

$$\overline{H} = \overline{kG(H)} = \overline{H_0} = \overline{H_0} = kG(\overline{H}) = k\overline{G}. \quad (5.2)$$

(3) Lembre que ε é um morfismo de álgebras. Como $\varepsilon(\sigma) = 1$ e $\varepsilon(H(H^K)^+) = \varepsilon(H)\varepsilon((H^K)^+) = 0$, concluímos que $\overline{\sigma} \neq 0$. Além disso, observe que $\overline{\Delta} \circ \pi = (\pi \otimes \pi) \circ \Delta$, pois π é morfismo de álgebras de Hopf. Dessa forma, é fácil ver que $\pi(\sigma) \in \overline{G}$.

(4) Se $\overline{\sigma} = \overline{1}$, temos que $\sigma - 1 \in H(H^K)^+$. Pelo Lema 2.2.3, temos que $(H^K)^+$ age trivialmente em K . Como $(H^K)^+ \subseteq \ker(\varepsilon)$, temos que $(H^K)^+ \cdot K = 0$. Daí, $H(H^K)^+ \cdot K = H \cdot ((H^K)^+ \cdot K) = 0$. Assim, $\sigma - 1$ age trivialmente em K , o que implica que σ age trivialmente em K . Novamente pelo Lema 2.2.3, $\sigma \in H^K$.

Se $\sigma \in G(H^K)$, como $1 \in H^K$ e H^K é álgebra de Hopf, temos que $\sigma - 1 \in (H^K)^+ \subseteq H(H^K)^+$. Então, $\pi(\sigma - 1) = 0$, o que implica em $\pi(\sigma) = \overline{\sigma} = \pi(1)$.

(5) Seja $\pi_{G(H)}: G(H) \longrightarrow \overline{G}$ a restrição de π com domínio $G(H)$. Vamos mostrar que $\pi_{G(H)}$ é um epimorfismo de grupos, ou seja, que $\pi_{G(H)}$ é um morfismo sobrejetor de grupos.

Seja $\sigma' \in \overline{G}$. De 5.2, existe $x = \sum_{\sigma \in G(H)} \lambda_\sigma \sigma \in H_0$ tal que $\pi(x) = \sigma'$. Como π é morfismo de álgebras de Hopf, podemos escrever

$$(\overline{\Delta} \circ \pi)(x) = ((\pi \otimes \pi) \circ \Delta)(x), \text{ ou seja, } \sigma' \otimes \sigma' = \sum_{\sigma \in G(H)} \lambda_\sigma (\pi(\sigma) \otimes \pi(\sigma)).$$

Como $\pi(\sigma) \in \overline{G}$, para todo $\sigma \in G(H)$, concluímos que existe pelo menos um $\sigma \in G(H)$ tal que $\pi(\sigma) = \sigma'$. Portanto, $\pi_{G(H)}$ é um epimorfismo de grupos.

Como $\pi(1) = \overline{1}$ é o elemento neutro de $\overline{G}$, observe que

$$\ker(\pi_{G(H)}) = \{\sigma \in G(H) : \pi(\sigma) = \pi(1)\}.$$

Do item (4), temos que $\ker(\pi_{G(H)}) = G(H^K)$. Logo, concluímos que $\overline{G} = G(H)/G(H^K)$. $\square$

5.3 Propriedades dos comódulo subálgebras

Esta seção se baseia no artigo [WY01] e tem por objetivo mostrar uma série de propriedades dos H -comódulo subálgebras de $K \# H$. No decorrer desta seção, vamos denotar Λ um H -comódulo subálgebra de $K \# H$.

Proposição 5.3.1. Λ é um $k\overline{G}$ -comódulo à direita via $\overline{\rho} = (\text{Id}_{K \# H} \otimes \pi) \circ \rho = (\text{Id}_{K \# H} \otimes \pi) \circ (\text{Id}_K \otimes \Delta)$.

Demonstração. Conforme vimos na seção anterior, π é um morfismo de álgebras de Hopf. Assim, temos que $\overline{\Delta} \circ \pi = (\pi \otimes \pi) \circ \Delta$ e que $\overline{\varepsilon} \circ \pi = \varepsilon$.

Seja $\xi = \sum_i \alpha_i \# h_i \in \Lambda$. Temos que $\overline{\rho}(\xi) = \sum_i \left[\sum_{(h_i)} \alpha_i \# h_{i(1)} \otimes \pi(h_{i(2)}) \right]$. Então:

$$\begin{aligned}
((\text{Id}_{K \# H} \otimes \overline{\Delta}) \circ \overline{\rho})(\xi) &= \sum_i \left[\sum_{(h_i)} \alpha_i \# h_{i(1)} \otimes ((\overline{\Delta} \circ \pi)(h_{i(2)})) \right] \\
&= \sum_i \left[\sum_{(h_i)} \alpha_i \# h_{i(1)} \otimes (((\pi \otimes \pi) \circ \Delta)(h_{i(2)})) \right] \\
&= \sum_i \left[\sum_{(h_i)} \alpha_i \# h_{i(1)} \otimes \pi(h_{i(2)}) \otimes \pi(h_{i(3)}) \right] \\
&= (\overline{\rho} \otimes \text{Id}_{k\overline{G}}) \circ \left(\sum_i \left[\sum_{(h_i)} \alpha_i \# h_{i(1)} \otimes \pi(h_{i(2)}) \right] \right) \\
&= ((\overline{\rho} \otimes \text{Id}_{k\overline{G}}) \circ \overline{\rho})(\xi).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((\text{Id}_{K \# H} \otimes \overline{\varepsilon}) \circ \overline{\rho})(\xi) &= \sum_i \left[\sum_{(h_i)} \alpha_i \# h_{i(1)} \otimes ((\overline{\varepsilon} \circ \pi)(h_{i(2)})) \right] \\
&= \sum_i \left[\sum_{(h_i)} \alpha_i \# h_{i(1)} \otimes \varepsilon(h_{i(2)}) \right] \\
&= \sum_i \alpha_i \# h_i \otimes 1 \\
&= \xi \otimes 1.
\end{aligned}$$

Logo, Λ é um $k\overline{G}$ -comódulo à direita via $\overline{\rho}$. □

Observe que, pela proposição acima e pelo Exemplo 1.3.8, temos que Λ é uma álgebra $\overline{G}$ -graduada, e $\Lambda_{\overline{\sigma}} = \overline{\rho}^{-1}(\Lambda \otimes \overline{\sigma})$, para todo $\overline{\sigma} \in \overline{G}$.

A partir de agora, vamos denotar:

$$G(\Lambda) = \Lambda \cap G(H) \quad \text{e} \quad \Lambda' = \Lambda \cap (K \# H^K).$$

Observe que Λ' é um H -comódulo subálgebra de $K \# H$. Segue um resultado extraído de [WY01, Lemma 2.2].

Lema 5.3.2. *Seja Λ um H -comódulo subálgebra de $K \# H$ contendo K . Então:*

1. *Se $\sigma \in G(H)$, então $\Lambda_{\bar{\sigma}} \neq \{0\}$ se, e somente se, $G(\Lambda) \cap \Lambda_{\bar{\sigma}} \neq \{0\}$.*
2. $\Lambda_{\bar{1}} = \Lambda'$.

Demonstração. Seja $\xi = \sum \alpha_i \# h_i \in K \# H$. Observe que podemos fazer $h_i = \sigma_i \in G(H)$ ou $h_i \in X_{\tau_i, \sigma_i, n_i}$, onde $\sigma_i, \tau_i \in G(H)$ e $n_i > 0$, para todo i , e $\{h_i\}$ é linearmente independente.

Lembre que $\Lambda_{\bar{\sigma}} = \bar{\rho}^{-1}(\Lambda \otimes \bar{\sigma})$, para todo $\bar{\sigma} \in \bar{G}$. Assim, pela Proposição 5.2.4 (1) e pelo Corolário 2.3.7, é fácil ver que, se $\xi \neq 0$ e $\xi \in \Lambda_{\bar{\sigma}}$, então $\bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}$, para todo i .

(1) Se $\xi \neq 0$ e $\xi \in \Lambda_{\bar{\sigma}}$, seja n maximal tal que $\xi \in K \# H_n$ e $\xi \notin K \# H_{n-1}$.

Se $n = 0$, então $\xi = \sum \alpha_i \# \sigma_i$. Como Λ é um H -comódulo subálgebra, temos que $\sum \alpha_i \# \sigma_i \otimes \sigma_i \in \Lambda \otimes H$. Como $\{\sigma_i\}$ é linearmente independente, temos que $\alpha_i \# \sigma_i \in \Lambda$, para todo i .

Do fato de K ser um corpo, $K \subseteq \Lambda$ e Λ ser uma subálgebra, temos que existe $\alpha_i^{-1} \in \Lambda$ e $\alpha_i^{-1}(\alpha_i \# \sigma_i) = \sigma_i \in \Lambda$. Além disso, temos que $\bar{\rho}(\sigma_i) = \sigma_i \otimes \bar{\sigma}$, ou seja, $\sigma_i \in G(\Lambda) \cap \Lambda_{\bar{\sigma}}$, para todo i . Como $\xi \neq 0$ e $\{\sigma_i\}$ é linearmente independente, temos que $\sigma_i \neq 0$, para todo i . Logo, $G(\Lambda) \cap \Lambda_{\bar{\sigma}} \neq \{0\}$.

Se $n > 0$, podemos assumir que $\alpha_1 \neq 0$ e que $h_1 \in X_{\tau_1, \sigma_1, n}$. Pelo Corolário 2.3.7, temos que

$$\Delta(h_i) \in \tau_i \otimes h_i + h_i \otimes \sigma_i + \sum_{\substack{0 < j, p < n_i \\ j+p \leq n_i}} X_j \otimes X_p. \quad (5.3)$$

Pelo fato de Λ ser um H -comódulo subálgebra, n ser maximal e $\{h_i\}$ ser linearmente independente, podemos escrever

$$\rho(\xi) = (\alpha_1 \# \tau_1) \otimes h_1 + \sum \xi_j \otimes y_j \in \Lambda \otimes H,$$

onde $\xi_j \otimes y_j \in \Lambda \otimes H$, para todo j , e $\{h_1\} \cup \{y_j\}$ é linearmente independente.

Então, temos que $\alpha_1 \# \tau_1 \in \Lambda$. Daí, conforme vimos anteriormente, $\tau_1 \in \Lambda$. Pelo Corolário 5.2.2, temos que $\tau_1^{-1} \sigma_1 \in H^K$. Pela Proposição 5.2.4, temos que

$$\bar{1} = \pi(1) = \pi(\tau_1^{-1} \sigma_1) = \pi(\tau_1^{-1}) \pi(\sigma_1) = \pi(\tau_1^{-1}) \bar{\sigma}, \text{ lembrar que } \bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}, \text{ para todo } i.$$

Como $\pi(1) = \pi(\tau_1^{-1}\tau_1) = \pi(\tau_1^{-1})\pi(\tau_1)$, da expressão acima, concluímos que $\pi(\tau_1) = \bar{\sigma}$. Assim, $\bar{\rho}(\tau_1) = \tau_1 \otimes \bar{\sigma}$, ou seja, $\tau_1 \in G(\Lambda) \cap \Lambda_{\bar{\sigma}}$. Logo, $G(\Lambda) \cap \Lambda_{\bar{\sigma}} \neq \{0\}$. É imediato que, se $G(\Lambda) \cap \Lambda_{\bar{\sigma}} \neq \{0\}$, então $\Lambda_{\bar{\sigma}} \neq \{0\}$.

(2) Se $\xi \in \Lambda' = \Lambda \cap (K \# H^K)$, por (5.3) e pela Proposição 5.2.4, temos que $\bar{\rho}(\xi) = \sum \alpha_i \# h_i \otimes \bar{\sigma}_i$. Pela Proposição 5.2.3, temos que H^K é subálgebra de Hopf. Assim, $\sigma_i, \tau_i \in H^K$, para todo i . Novamente pela Proposição 5.2.4, temos que $\bar{\sigma}_i = \bar{\tau}_i = \bar{1}$, para todo i . Daí, $\bar{\rho}(\xi) = \xi \otimes \bar{1}$ e $\Lambda' \subseteq \Lambda_1$.

Se $\xi \in \Lambda_1$, então $\bar{\rho}(\xi) = \xi \otimes \bar{1}$. Assim, temos que $\bar{\sigma}_i = \bar{1}$, para todo i . Pela Proposição 5.2.4, $\sigma_i \in H^K$. Se $h_i \neq \sigma_i$, podemos aplicar o Corolário 5.2.2 e concluir que $X_{\tau_i, \sigma_i, i} \subseteq H^K$, para todo i . Como $\xi = \sum \alpha_i \# h_i$ e $h_i = \sigma_i \in H^K$ ou $h_i \in X_{\tau_i, \sigma_i, i} \subseteq H^K$, para todo i , concluímos que $\Lambda_1 \subseteq \Lambda'$. $\square$

Segue um resultado com mais informações a respeito dos H -comódulo subálgebras de $K \# H$ contendo K .

Lema 5.3.3. *Seja Λ um H -comódulo subálgebra de $K \# H$ contendo K . Então:*

1. $\pi(G(\Lambda)) = \overline{G(\Lambda)}$ é um subgrupo de $\bar{G}$. Além disso, $\overline{G(\Lambda)} = G(\Lambda)/G(\Lambda')$.
2. Λ é uma álgebra fortemente $\overline{G(\Lambda)}$ -graduada.
3. $\Lambda_{\bar{1}}$ é uma subálgebra de Λ .
4. Seja $\sigma \in G(\Lambda)$. Então $\Lambda_{\bar{\sigma}} = \Lambda_{\bar{1}} \sigma$.
5. Seja $\sigma \in G(\Lambda)$. Então $\Lambda_{\bar{\sigma}} \cong \Lambda_{\bar{1}} \otimes \bar{\sigma}$, tanto como $\Lambda_{\bar{1}}$ -módulos à esquerda, quanto como $k\overline{G(\Lambda)}$ -comódulos à direita.

Demonstração. (1) Como Λ é subálgebra de $K \# H$, temos que $1_H \in G(\Lambda)$. Assim, temos que $\pi(1) = \bar{1} \in \overline{G(\Lambda)}$.

Sejam $\sigma, \tau \in G(\Lambda)$. Pelo fato de Λ ser uma subálgebra de $K \# H$, temos que $\sigma\tau \in G(\Lambda)$. Além disso, observe que $\overline{\sigma\tau} = \bar{\sigma} \bar{\tau}$, pois π é morfismo de álgebras de Hopf. Assim, se $\bar{\sigma}, \bar{\tau} \in \overline{G(\Lambda)}$, então $\bar{\sigma} \bar{\tau} \in \overline{G(\Lambda)}$.

Além disso, como H tem dimensão finita e os elementos group-like de H formam um conjunto linearmente independente, $G(H)$ é um grupo finito. Daí, σ tem ordem finita, ou seja, existe $n \geq 1$ tal que $\sigma^n = 1$. Se $n > 1$, pelo fato de Λ ser uma subálgebra de $K \# H$, temos que $\sigma^{n-1} = \sigma^{-1} \in G(\Lambda)$.

Se $n = 1$, temos que $\sigma = \sigma^{-1} = 1 \in G(\Lambda)$. Observe que $\bar{1} = \overline{\sigma\sigma^{-1}} = \bar{\sigma} \bar{\sigma}^{-1}$, ou seja, $(\bar{\sigma})^{-1} = \bar{\sigma}^{-1}$. Assim, se $\bar{\sigma} \in \overline{G(\Lambda)}$, então $\bar{\sigma}^{-1} = (\bar{\sigma})^{-1} \in \overline{G(\Lambda)}$. Logo, $\overline{G(\Lambda)}$ é um subgrupo de $\bar{G}$.

Além disso, seja $\pi_{G(\Lambda)}: G(\Lambda) \longrightarrow \overline{G(\Lambda)}$ a restrição de π com domínio $G(\Lambda)$. Pelo que vimos acima, temos que $\pi_{G(\Lambda)}$ é um epimorfismo de grupos. Da demonstração da Proposição 5.2.4 (5), sabemos que $\ker(\pi_{G(H)}) = G(H^K)$. Assim, temos que $\ker(\pi_{G(\Lambda)}) \subseteq G(H^K) \cap G(\Lambda) = G(\Lambda')$. Logo, temos que $\overline{G(\Lambda)} = G(\Lambda)/G(\Lambda')$.

(2) Lembre que Λ é uma álgebra $\bar{G}$ -graduada, ou seja, $\Lambda = \bigoplus_{\bar{\sigma} \in \bar{G}} \Lambda_{\bar{\sigma}}$.

Pelo Lema 5.3.2, temos que $\Lambda_{\bar{\sigma}} \neq \{0\}$ se, e somente se, $G(\Lambda) \cap \Lambda_{\bar{\sigma}} \neq \{0\}$, para cada $\sigma \in G(H)$. Observe que, se $\tau \in G(\Lambda) \cap \Lambda_{\bar{\sigma}}$, então $\bar{\tau} = \bar{\sigma}$. Assim, é fácil ver que $\Lambda = \bigoplus_{\bar{\sigma} \in \overline{G(\Lambda)}} \Lambda_{\bar{\sigma}}$. Logo, Λ é uma álgebra $\overline{G(\Lambda)}$ -graduada. Falta mostrarmos que é fortemente graduada.

Sejam $\xi, \xi' \in \Lambda$. Da definição de H -comódulo-álgebra, temos que $\rho(\xi\xi') = \rho(\xi)\rho(\xi')$. Além disso, π é um morfismo de álgebras de Hopf. Assim, é fácil ver que $\bar{\rho}(\xi\xi') = \bar{\rho}(\xi)\bar{\rho}(\xi')$.

Sejam $\bar{\sigma}, \bar{\tau} \in \overline{G(\Lambda)}$ tal que $\Lambda_{\bar{\sigma}} \neq \{0\}$ e $\Lambda_{\bar{\tau}} \neq \{0\}$. Pelo Lema 5.3.2 (1), podemos considerar $\xi \in \Lambda_{\bar{\sigma}}$ e $\xi' \in \Lambda_{\bar{\tau}}$, ambos não nulos, tal que $\xi\xi' \neq 0$. Lembre que $\bar{\rho}(\xi) = \xi \otimes \bar{\sigma}$ e que $\bar{\rho}(\xi') = \xi' \otimes \bar{\tau}$. Então, temos que $\bar{\rho}(\xi\xi') = \bar{\rho}(\xi)\bar{\rho}(\xi') = (\xi \otimes \bar{\sigma})(\xi' \otimes \bar{\tau}) = \xi\xi' \otimes \bar{\sigma} \bar{\tau}$, ou seja, $\xi\xi' \in \Lambda_{\bar{\sigma} \bar{\tau}}$. Portanto, $\Lambda_{\bar{\sigma}}\Lambda_{\bar{\tau}} \subseteq \Lambda_{\bar{\sigma} \bar{\tau}}$.

Dessa forma, temos que $\Lambda_{\bar{1}}\Lambda_{\bar{\sigma}} \subseteq \Lambda_{\bar{\sigma}}$. Como $1 \in \Lambda_{\bar{1}}$, temos também que $\Lambda_{\bar{\sigma}} \subseteq \Lambda_{\bar{1}}\Lambda_{\bar{\sigma}}$. Logo, $\Lambda_{\bar{1}}\Lambda_{\bar{\sigma}} = \Lambda_{\bar{\sigma}}$. De forma análoga, temos que $\Lambda_{\bar{\sigma}}\Lambda_{\bar{1}} = \Lambda_{\bar{\sigma}}$. Portanto, $\Lambda_{\bar{\sigma}}\Lambda_{\bar{\sigma}^{-1}} = \Lambda_{\bar{\sigma}^{-1}}\Lambda_{\bar{\sigma}} = \Lambda_{\bar{1}}$. Então:

$$\Lambda_{\bar{\sigma} \bar{\tau}} \subseteq \Lambda_{\bar{1}} \Lambda_{\bar{\sigma} \bar{\tau}} \Lambda_{\bar{1}} \subseteq \Lambda_{\bar{\sigma}} \Lambda_{\bar{\sigma}^{-1}} \Lambda_{\bar{\sigma} \bar{\tau}} \Lambda_{\bar{\tau}^{-1}} \Lambda_{\bar{\tau}} \subseteq \Lambda_{\bar{\sigma}} \Lambda_{\bar{1}} \Lambda_{\bar{\tau}} \subseteq \Lambda_{\bar{\sigma}} \Lambda_{\bar{\tau}}.$$

Assim, mostramos que Λ é uma álgebra fortemente $\overline{G(\Lambda)}$ -graduada.

(3) Imediato a partir do Lema 5.3.2 (2).

(4) Seja $\xi \in \Lambda_{\bar{\sigma}}$. Observe que $\bar{\rho}(\xi\sigma^{-1}) = \bar{\rho}(\xi)\bar{\rho}(\sigma^{-1}) = (\xi \otimes \bar{\sigma})(\sigma^{-1} \otimes \bar{\sigma}^{-1}) = \xi\sigma^{-1} \otimes \bar{\sigma} \bar{\sigma}^{-1} = \xi\sigma^{-1} \otimes \bar{1}$, ou seja, $\xi\sigma^{-1} \in \Lambda_{\bar{1}}$. Assim, temos $\Lambda_{\bar{\sigma}} = \Lambda_{\bar{\sigma}} \sigma^{-1} \sigma \subseteq \Lambda_{\bar{1}} \sigma \subseteq \Lambda_{\bar{1}} \Lambda_{\bar{\sigma}} = \Lambda_{\bar{\sigma}}$. Logo, $\Lambda_{\bar{\sigma}} = \Lambda_{\bar{1}} \sigma$.

(5) Observe que ambos $\Lambda_{\bar{\sigma}}$ e $\Lambda_{\bar{\sigma}} \otimes \bar{\sigma}$ têm estrutura trivial de $\Lambda_{\bar{\sigma}}$ -módulos à esquerda. Considere

$$\begin{aligned} f: \Lambda_{\bar{\sigma}} = \Lambda_{\bar{\sigma}} \sigma &\longrightarrow \Lambda_{\bar{\sigma}} \otimes \bar{\sigma} \\ \xi \sigma &\longmapsto \xi \otimes \bar{\sigma}. \end{aligned}$$

É fácil verificar que f é um isomorfismo de $\Lambda_{\bar{\sigma}}$ -módulos à esquerda.

Seja $\xi \in \Lambda_{\bar{\sigma}}$. Observe que $\rho_1(\xi \sigma) = \xi \sigma \otimes \bar{\sigma}$ e $\rho_2(\xi \otimes \sigma) = (\xi \otimes \sigma) \otimes \bar{\sigma}$ definem estruturas de $k\overline{G(\Lambda)}$ -comódulo à direita em $\Lambda_{\bar{\sigma}}$ e em $\Lambda_{\bar{\sigma}} \otimes \bar{\sigma}$, respectivamente.

Além disso, temos que $(f \otimes \text{Id}_{k\overline{G(\Lambda)}}) \circ \rho_1 = \rho_2 \circ f$, ou seja, f é um morfismo de $k\overline{G(\Lambda)}$ -comódulos à direita, na verdade um isomorfismo, como mostramos acima. $\square$

Segue um importante resultado extraído de [WY01, Corollary 2.3], que aborda a estrutura dos H -comódulo subálgebras de $K \# H$ contendo K .

Corolário 5.3.4. *Seja Λ um H -comódulo subálgebra de $K \# H$ contendo K . Então $\Lambda \cong \Lambda' \#_{\delta} k\overline{G(\Lambda)}$, onde $\Lambda' \#_{\delta} k\overline{G(\Lambda)}$ é um produto cruzado.*

Demonstração. Pelo Lema 5.3.3 (2), Λ é uma álgebra fortemente $\overline{G(\Lambda)}$ -graduada. Pelo Lema 5.3.2, temos que $\Lambda' = \Lambda_{\bar{\sigma}}$, e pelo Exemplo 1.3.12, obtemos $\Lambda^{\text{co}H'} = \Lambda'$, onde $H' = k\overline{G(\Lambda)}$. Daí, pelo Teorema 1.3.13, temos que $\Lambda' \subseteq \Lambda$ é $k\overline{G(\Lambda)}$ -Galois à direita. Além disso, pelo Lema 5.3.3 (5), temos que

$$\Lambda = \bigoplus_{\bar{\sigma} \in \overline{G(\Lambda)}} \Lambda_{\bar{\sigma}} \cong \bigoplus_{\bar{\sigma} \in \overline{G(\Lambda)}} (\Lambda_{\bar{\sigma}} \otimes \bar{\sigma}) = \Lambda_{\bar{\sigma}} \otimes k\overline{G(\Lambda)} = \Lambda' \otimes k\overline{G(\Lambda)},$$

onde o isomorfismo é de Λ' -módulos à esquerda e de $k\overline{G(\Lambda)}$ -comódulos à direita. Assim, Λ' tem a propriedade da base normal à direita.

Finalmente, pelo Corolário 1.3.14, temos que $\Lambda \cong \Lambda' \#_{\delta} k\overline{G(\Lambda)}$ como álgebras, onde $\Lambda' \#_{\delta} k\overline{G(\Lambda)}$ é um produto cruzado. $\square$

Denotemos $\hat{\varepsilon} = \text{Id}_K \otimes \varepsilon$. Observe que $\hat{\varepsilon} \in \text{hom}(K \# H, K)$, e que

$$(\hat{\varepsilon} \otimes \text{Id}_H) \circ \rho = (\text{Id}_K \otimes \varepsilon \otimes \text{Id}_H) \circ (\text{Id}_K \otimes \Delta) = \text{Id}_K \otimes [(\varepsilon \otimes \text{Id}_H) \circ \Delta] = \text{Id}_K \otimes \text{Id}_H = \text{Id}_{K \# H}.$$

Antes do resultado mais importante desta seção, segue um lema a respeito da estrutura $K \# H^K$.

Antes de mais nada, note que k está imerso em K , e $K \# H^K$ pode ser visto como uma K -álgebra.

Lema 5.3.5. *A K -álgebra $K \# H^K$ é uma álgebra de Hopf pontual de dimensão finita sobre o corpo K , onde $\Delta_{K \# H^K} = \rho = \text{Id}_K \otimes \Delta$, $\varepsilon_{K \# H^K} = \widehat{\varepsilon}$ e $S_{K \# H^K} = \text{Id}_K \otimes S$.*

Demonstração. Primeiramente, observe que, pelo Lema 2.2.3, H^K age trivialmente em K . Assim, $\alpha h = h\alpha$, para todo $\alpha \in K$ e todo $h \in H^K$. Pela Proposição 5.2.3, sabemos que H^K é uma subálgebra de Hopf de H . Como H é uma álgebra de Hopf pontual de dimensão finita, H^K também é uma álgebra de Hopf pontual de dimensão finita.

Seja $\{h_i\}$ uma base de H^K . Então $\{1 \# h_i\}$ é uma K -base de $K \# H^K$. Assim, é fácil mostrar que $K \# H^K$ é uma álgebra de Hopf de dimensão finita sobre o corpo K . Falta mostrar que $K \# H^K$ é uma álgebra de Hopf pontual.

Observe que podemos identificar H^K com $1 \# H^K$ em $K \# H^K$. Seja C uma subcoálgebra simples de $K \# H^K$ e seja $\xi = \sum \alpha_j \# h_j \in C$ tal que $\Delta(h_j) = \sum h_{i,j} \otimes h_i$, onde $h_{i,j} \in H^K$, para todo i e todo j , e $\xi \neq 0$. Podemos escrever

$$\Delta_{K \# H^K}(\xi) = \sum_j \alpha_j \# \Delta(h_j) = \sum_j \left[\alpha_j \# \left(\sum_i h_{i,j} \otimes_K h_i \right) \right] = \sum_{j,i} (\alpha_j \# h_{i,j}) \otimes_K (1 \# h_i).$$

Como C é subcoálgebra e $\xi \neq 0$, temos que $(\alpha_j \# h_{i,j}) \otimes_K (1 \# h_i) \neq 0$, para algum par i, j . Como $\{1 \# h_i\}$ é K -linearmente independente, temos que $1 \# h_i \in C$, para algum i . Pelo fato de C ser simples, a subcoálgebra gerada por $1 \# h_i$ é igual a C .

Identificando $1 \# h_i$ em C com h_i em H^K , é fácil ver que podemos identificar C com a subcoálgebra D gerada por h_i em H^K . Se D não for simples, concluiríamos que C também não é simples, o que seria uma contradição. Assim, D é simples. Do fato de H^K ser pontual, D é unidimensional. Logo, C também é unidimensional.

Portanto, $K \# H^K$ é uma álgebra de Hopf pontual de dimensão finita sobre o corpo K □

Definição. Seja $\eta \in \Lambda$. Dizemos que η é um *integral generalizado à esquerda* de Λ se $\xi\eta = \widehat{\varepsilon}(\xi)\eta$, para todo $\xi \in \Lambda$.

Finalmente, segue o resultado mais importante desta seção, extraído de [WY01, Proposition 2.5].

Proposição 5.3.6. 1. *Seja Λ um H -comódulo subálgebra de $K \# H$ contendo K . Então Λ possui um integral generalizado à esquerda não nulo η_Λ .*

2. *Sejam Λ_1 e Λ_2 como Λ acima. Se $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$, então $\eta_{\Lambda_1} = \eta_{\Lambda_2}$ implica em $\Lambda_1 = \Lambda_2$.*

Demonstração. (1) Pelo Lema 5.3.5, temos que $K \# H^K$ é uma álgebra de Hopf pontual de dimensão finita sobre o corpo K . Observe que $\Lambda' = \Lambda \cap (K \# H^K)$ é um coideal subálgebra à direita de $K \# H^K$.

Pela Proposição 1.3.20, $K \# H^K$ possui a propriedade (Fr). Assim, Λ' é uma álgebra de Frobenius e, conseqüentemente, é uma álgebra quasi-Frobenius. Do Teorema 1.3.23, temos que existe um integral não nulo à esquerda $\eta' \in \Lambda'$. Pelo Corolário 1.3.24, η' é o único integral à esquerda de Λ' , a menos de multiplicação por escalar do corpo base K .

Denotemos $t_{G(\Lambda)} = \sum_{\sigma \in G(\Lambda)} \sigma$. Vamos mostrar que $\eta_\Lambda = t_{G(\Lambda)}\eta'$. Seja $\sigma \in G(\Lambda)$ e sejam $\xi, \xi' \in \Lambda$.

Vamos definir a seguinte operação de $kG(\Lambda) \times \Lambda$ em Λ :

$$\sigma * \xi = \sigma \xi \sigma^{-1}.$$

É fácil ver que Λ é um $kG(\Lambda)$ -módulo álgebra à esquerda via operação definida acima. Pela Proposição 5.2.3, sabemos que H^K é uma subálgebra de Hopf normal de H ($\text{ad}_l(H, H^K) \subseteq H^K$ e $\text{ad}_r(H, H^K) \subseteq H^K$). Assim, Λ' é $kG(\Lambda)$ -estável, ou seja, $kG(\Lambda) * \Lambda' \subseteq \Lambda'$. De fato, seja $\sigma \in G(\Lambda)$ e seja $\xi' = \sum \alpha_i \# h_i \in \Lambda'$, onde $\alpha_i \# h_i \in K \# H^K$, para todo i . Lembre que Λ é uma subálgebra de $K \# H$ contendo K , e que K é estável sob a ação de H . Então:

$$\sigma * \xi' = \sigma \sum (\alpha_i \# h_i) \sigma^{-1} = \sum \sigma \cdot \alpha_i \# \sigma h_i \sigma^{-1} = \sum \sigma \cdot \alpha_i \# \text{ad}_l(\sigma, h_i) \in \Lambda \cap (K \# H^K) = \Lambda'.$$

Inicialmente, vamos mostrar que $\eta_\Lambda \neq 0$. Pelo Lema 5.3.3 (1), temos que $\overline{G(\Lambda)} = G(\Lambda)/G(\Lambda')$. Do fato de $G(\Lambda')$ e $\overline{G(\Lambda)}$ serem grupos finitos, podemos escrever $G(\Lambda') = \{\tau_1 = 1, \dots, \tau_m\}$, e $\overline{G(\Lambda)} = \{\overline{\sigma}_1 = \overline{1}, \dots, \overline{\sigma}_n\}$, onde $\sigma_i \in G(\Lambda)$, e $\overline{\sigma}_i \neq \overline{\sigma}_j$, onde $i \neq j$, para todos $1 \leq i, j \leq n$. Assim, como $G(\Lambda')$ é subgrupo normal de $G(\Lambda)$, é fácil ver que $G(\Lambda) = \{\sigma_i \tau_j : 1 \leq i \leq n \text{ e } 1 \leq j \leq m\}$.

Temos então que

$$\eta_\Lambda = t_{G(\Lambda)}\eta' = \sum_{i,j} \sigma_i \tau_j \eta' = m \sum_i \sigma_i \eta' = m \sum_i (\sigma_i \eta' \sigma_i^{-1}) \sigma_i.$$

Como Λ' é $kG(\Lambda)$ -estável, temos que $\sigma_i \eta' \sigma_i^{-1} \in \Lambda'$, para todo $1 \leq i \leq n$.

Pelo Corolário 5.3.4, temos que $\Lambda \cong \Lambda' \#_{\delta} \overline{kG(\Lambda)}$. Assim, podemos identificar $\eta_{\Lambda} \in \Lambda$ com o elemento $\sum_i m(\sigma_i \eta' \sigma_i^{-1}) \#_{\delta} \overline{\sigma_i} \in \Lambda' \#_{\delta} \overline{kG(\Lambda)}$. Vamos supor que $\eta_{\Lambda} = 0$. Pelo fato da característica do corpo base k ser igual a zero, temos que $\sigma_i \eta' \sigma_i^{-1} = 0$, para todo $1 \leq i \leq n$. Logo, $\eta' = 0$, o que seria um absurdo. Portanto, $\eta_{\Lambda} \neq 0$.

Assim, para todo $\xi' = \sum_i \alpha_i \# h_i \in \Lambda'$, temos que

$$\begin{aligned}
 \xi' \eta_{\Lambda} &= \sum_{\sigma \in G(\Lambda)} \xi' \sigma \eta' = \sum_{\sigma \in G(\Lambda)} \sigma(\sigma^{-1} * \xi') \eta' \\
 &= \sum_{\sigma \in G(\Lambda)} \sigma \widehat{\varepsilon}(\sigma^{-1} * \xi') \eta', \text{ pois } \eta' \text{ é integral à esquerda em } \Lambda'. \\
 &= \sum_{\sigma \in G(\Lambda)} \sigma \widehat{\varepsilon} \left(\sum_i \sigma^{-1} \cdot \alpha_i \# \sigma^{-1} h_i \sigma \right) \eta' \\
 &= \sum_{\sigma \in G(\Lambda)} \sigma \left(\sum_i \sigma^{-1} \cdot \alpha_i \# \varepsilon(h_i) \right) \eta' \\
 &= \sum_{\sigma \in G(\Lambda)} \left[\sum_i (\sigma \cdot (\sigma^{-1} \cdot \alpha_i)) \# \sigma \varepsilon(h_i) \right] \eta' \\
 &= \sum_{\sigma \in G(\Lambda)} \left[\sum_i \alpha_i \# \varepsilon(h_i) \right] \sigma \eta' \\
 &= \sum_{\sigma \in G(\Lambda)} \widehat{\varepsilon}(\xi') \sigma \eta' \\
 &= \widehat{\varepsilon}(\xi') \eta_{\Lambda}.
 \end{aligned}$$

Além disso, pelo Lema 5.3.2, temos que $\Lambda' = \Lambda_{\overline{\Gamma}}$, e pelo Lema 5.3.3, temos que

$$\Lambda = \bigoplus_{\overline{\sigma} \in \overline{G(\Lambda)}} \Lambda_{\overline{\sigma}} = \bigoplus_{\overline{\sigma} \in \overline{G(\Lambda)}} (\Lambda_{\overline{\Gamma}} \sigma) = \bigoplus_{\overline{\sigma} \in \overline{G(\Lambda)}} (\Lambda' \sigma).$$

Seja $\sigma \in G(\Lambda)$ e seja $\xi \in \Lambda_{\bar{\sigma}}$. Podemos escrever, $\xi = \xi' \sigma$, para algum $\xi' \in \Lambda'$. Então:

$$\xi \eta_{\Lambda} = \xi' \sigma t_{G(\Lambda)} \eta' = \xi' t_{G(\Lambda)} \eta' = \xi' \eta_{\Lambda} = \widehat{\varepsilon}(\xi') \eta_{\Lambda} = \widehat{\varepsilon}(\xi' \sigma) \eta_{\Lambda} = \widehat{\varepsilon}(\xi) \eta_{\Lambda}.$$

Logo, η_{Λ} é um integral generalizado à esquerda não nulo de Λ .

(2) Vamos assumir que $\eta = \eta_{\Lambda_1} = \eta_{\Lambda_2}$.

Pelo Corolário 5.3.4, temos que $\Lambda_1 \cong \Lambda'_1 \#_{\delta_1} \overline{kG(\Lambda_1)}$ e que $\Lambda_2 \cong \Lambda'_2 \#_{\delta_2} \overline{kG(\Lambda_2)}$. Observe que $\Lambda'_1 \subseteq \Lambda'_2$ e que $\overline{kG(\Lambda_1)} \subseteq \overline{kG(\Lambda_2)}$. Se $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$, então pelo menos uma das inclusões acima é estrita.

Além disso, note que Λ'_1 é um coideal subálgebra à direita de $K \# H^K$. Novamente pela Proposição 1.3.20, $K \# H^K$ possui a propriedade (Fr). Assim, Λ'_1 é uma álgebra de Frobenius. Como Λ'_2 tem estrutura de $K \# H^K$ -comódulo à direita e de Λ'_1 -módulo à esquerda e à direita, pelo Teorema 1.3.21, temos que Λ'_2 é um Λ'_1 -módulo à esquerda livre e um Λ'_1 -módulo à direita livre.

Vamos supor que Λ'_2 , como um Λ'_1 -módulo à direita livre, tenha dimensão maior do que um. Assim, existem $\xi_1, \xi_2 \in \Lambda'_2$ tais que $\{\xi_1, \xi_2\}$ é Λ'_1 -linearmente independente. Podemos escrever $\xi_1 = \sum \alpha_i \# x_i$ e $\xi_2 = \sum \beta_j \# y_j$, onde $\alpha_i \# x_i, \beta_j \# y_j \in K \# H^K$, para todo i e todo j .

Denotemos $\alpha = \sum \varepsilon(x_i) \alpha_i$ e $\beta = \sum \varepsilon(y_j) \beta_j$. Observe que $\alpha, \beta \neq 0$. De fato, se $\alpha = 0$, então $\xi_1 \eta + \xi_2 0 = \widehat{\varepsilon}(\xi_1) \eta = \alpha \eta = 0$, o que é uma contradição. De forma análoga, mostra-se que $\beta \neq 0$. Então:

$$\begin{aligned} \xi_1(\alpha^{-1}\beta)\eta + \xi_2(-\eta) &= \sum \left[\alpha_i(x_{i(1)} \cdot (\alpha^{-1}\beta)) \# x_{i(2)} \right] \eta - \widehat{\varepsilon}(\xi_2)\eta \\ &= \sum \left[\alpha_i(\alpha^{-1}\beta) \# x_i \right] \eta - \beta\eta, \text{ pois } H^K \text{ age trivialmente em } K. \\ &= (\alpha^{-1}\beta)(\xi\eta) - \beta\eta \\ &= (\alpha^{-1}\beta)(\alpha\eta) - \beta\eta = \beta\eta - \beta\eta = 0. \end{aligned}$$

Assim, $\{\xi_1, \xi_2\}$ é Λ'_1 -linearmente dependente, um absurdo. Logo, Λ'_2 tem dimensão um como um Λ'_1 -módulo à direita livre. Como $\Lambda'_1 \subseteq \Lambda'_2$, temos que $\Lambda'_1 = \Lambda'_2$.

De forma análoga, note que $kG(\Lambda_1)$ é um coideal subálgebra à direita de $kG(H)$. Pela Proposição 1.3.20, $kG(H)$ possui a propriedade (Fr). Assim, $kG(\Lambda_1)$ é uma álgebra de Frobenius. Como $kG(\Lambda_2)$ tem estrutura de $kG(H)$ -comódulo à direita e de $kG(\Lambda_1)$ -módulo à esquerda e à direita, pelo Teorema

1.3.21, temos que $kG(\Lambda_2)$ é um $kG(\Lambda_1)$ -módulo à esquerda livre e um $kG(\Lambda_1)$ -módulo à direita livre.

Vamos supor que $kG(\Lambda_2)$, como um $kG(\Lambda_1)$ -módulo à direita livre, tenha dimensão maior do que um. Assim, existem $\xi_1, \xi_2 \in kG(\Lambda_2)$ tais que $\{\xi_1, \xi_2\}$ é $kG(\Lambda_1)$ -linearmente independente. Podemos escrever $\xi_1 = \sum \lambda_i \sigma_i$ e $\xi_2 = \sum \lambda'_j \tau_j$, onde $\lambda_i, \lambda'_j \in k$ e $\sigma_i, \tau_j \in G(\Lambda_2)$, para todo i e todo j .

Denotemos $\lambda = \sum \lambda_i$ e $\lambda' = \sum \lambda'_j$. Observe que $\lambda, \lambda' \neq 0$. De fato, se $\lambda = 0$, então $\xi_1 \eta + \xi_2 0 = \widehat{\varepsilon}(\xi_1) \eta = \lambda \eta = 0$, o que é uma contradição. De forma análoga, mostra-se que $\lambda' \neq 0$. Então:

$$\xi_1(\lambda^{-1} \lambda') \eta + \xi_2(-\eta) = (\lambda^{-1} \lambda') \xi_1 \eta - \widehat{\varepsilon}(\xi_2) \eta = (\lambda^{-1} \lambda') \widehat{\varepsilon}(\xi_1) \eta - \lambda' \eta = (\lambda^{-1} \lambda') \lambda \eta - \lambda' \eta = 0.$$

Assim, $\{\xi_1, \xi_2\}$ é $kG(\Lambda_1)$ -linearmente dependente, um absurdo. Logo, $kG(\Lambda_2)$ tem dimensão um como um $kG(\Lambda_1)$ -módulo à direita livre. Como $kG(\Lambda_1) \subseteq kG(\Lambda_2)$, temos que $kG(\Lambda_1) = kG(\Lambda_2)$. Assim, $\overline{G(\Lambda_1)} = \overline{G(\Lambda_2)}$.

Finalmente, concluímos que $\Lambda_1 = \Lambda_2$. □

5.4 O teorema

Antes de mostrar o resultado principal deste capítulo, segue um lema extraído de [Yan97, Lemma 5.5].

Lema 5.4.1. *Seja R uma álgebra prima e seja H uma álgebra de Hopf pontual de dimensão finita que age em R . Assuma que a ação de H em R é X -externa. Seja Λ um subconjunto não nulo de $K \# H$. Então R^Λ é uma subálgebra de R racionalmente completa contendo R^H .*

Demonstração. Pelo Lema 3.1.1, temos que $R^H = \{r \in R : h \cdot r = \varepsilon(h)r, \text{ para todo } h \in H\}$. Seja $\xi = \sum \alpha_i \# h_i \in \Lambda$ e seja $x \in R^H$. Então:

$$\xi x = \left(\sum \alpha_i \# h_i \right) x = \sum \alpha_i (h_{i(1)} \cdot x) \# h_{i(2)} = \sum \alpha_i x \# h_i = x \sum \alpha_i \# h_i = x \xi.$$

Da igualdade acima, temos que $R^H \subseteq R^\Lambda$.

Seja I um ideal não nulo de R^Λ e seja $r \in R$. Vamos assumir que $rI \subseteq R^\Lambda$. Então, temos que

$\xi(rI) = (rI)\xi = r\xi I$, ou seja, $(\xi r - r\xi)I = 0$. Como $R^\Lambda I \subseteq I$, temos que $(\xi r - r\xi)R^\Lambda I = 0$. Pela Proposição 3.4.4 (2), temos que $\xi r - r\xi = 0$, ou seja, $r \in R^\Lambda$.

Logo, R^Λ é uma subálgebra de R racionalmente completa contendo R^H . $\square$

Finalmente, estamos em condições de mostrar a sobrejetividade da correspondência e assim concluir a demonstração do teorema. Resultado extraído de [WY01, Theorem 2.6].

Teorema 5.4.2. *Seja R uma álgebra prima e seja H uma álgebra de Hopf pontual de dimensão finita que age em R . Assuma que a característica do corpo base k é zero e que a ação de H em R é X -externa. Então, para cada H -comódulo subálgebra Λ de $K \# H$ que contenha K , temos que $\Lambda = \Phi(R^\Lambda)$.*

Demonstração. Vamos denotar $U = R^\Lambda$. Pelo Lema 5.4.1, U é uma subálgebra de R racionalmente completa contendo R^H . É claro que $\Lambda \subseteq \Phi(U) = (K \# H)^U$. Note que, pela Proposição 3.4.4 (7), $(K \# H)^U$ é um H -comódulo subálgebra de $K \# H$. Assim, pela Proposição 5.3.6 (1), Λ possui um integral generalizado à esquerda não nulo η_Λ . Pela Proposição 5.3.6 (2), se mostrarmos que η_Λ é também um integral generalizado à esquerda não nulo de $\Phi(U)$, então $\Lambda = \Phi(U)$.

Seja I um ideal não nulo de R . Pela Proposição 3.4.4 (1), temos que $\eta_\Lambda \cdot I \neq 0$. Vamos mostrar que $\eta_\Lambda \cdot I \subseteq U$. De fato, seja $x \in I$ e seja $\xi \in \Lambda$. Podemos escrever $\rho(\xi) = \sum \xi_i \otimes h_i$, onde $\xi_i \in \Lambda$ e $h_i \in H$, para todo i . Então:

$$\xi(\eta_\Lambda \cdot x) = \sum \xi_i \cdot (\eta_\Lambda \cdot x) \# h_i = \sum (\xi_i \eta_\Lambda) \cdot x \# h_i = \sum (\widehat{\varepsilon}(\xi_i) \eta_\Lambda) \cdot x \# h_i = \sum (\eta_\Lambda \cdot x) \widehat{\varepsilon}(\xi_i) \# h_i = (\eta_\Lambda \cdot x) \xi.$$

Seja $\xi' \in \Phi(U)$. Podemos escrever $\rho(\xi') = \sum \xi'_j \otimes h'_j$, onde $\xi'_j \in \Phi(U)$ e $h'_j \in H$, para todo j , e $\{h'_j\}$ é linearmente independente. Então, $\xi'(\eta_\Lambda \cdot x) = (\eta_\Lambda \cdot x) \xi'$. Pela expressão acima, temos que

$$\sum (\xi'_j \eta_\Lambda) \cdot x \# h'_j = \sum (\widehat{\varepsilon}(\xi'_j) \eta_\Lambda) \cdot x \# h'_j.$$

Assim, $(\xi'_j \eta_\Lambda) \cdot x = (\widehat{\varepsilon}(\xi'_j) \eta_\Lambda) \cdot x$, ou seja, $(\xi'_j \eta_\Lambda - \widehat{\varepsilon}(\xi'_j) \eta_\Lambda) \cdot I = 0$. Pela Proposição 3.4.4 (1), segue que $\xi'_j \eta_\Lambda = \widehat{\varepsilon}(\xi'_j) \eta_\Lambda$, para todo j .

Como $\xi' = \sum \varepsilon(h'_j) \xi'_j$, temos que

$$\xi' \eta_\Lambda = \sum \varepsilon(h'_j) \xi'_j \eta_\Lambda = \sum \varepsilon(h'_j) \widehat{\varepsilon}(\xi'_j) \eta_\Lambda = \sum \widehat{\varepsilon}(\varepsilon(h'_j) \xi'_j) \eta_\Lambda = \widehat{\varepsilon}(\xi') \eta_\Lambda.$$

Assim, mostramos que η_Λ é também um integral generalizado à esquerda não nulo de $\Phi(U)$. Logo, $\Lambda = \Phi(U)$. $\square$

5.5 Considerações finais

Finalmente, após um longo percurso, podemos juntar o Corolário 4.2.6 e o Teorema 5.4.2 e obter a correspondência do tipo Galois para ações de álgebras de Hopf pontuais de dimensão finita em álgebras primas. Segue novamente o enunciado deste teorema da correspondência:

Teorema 5.5.1. *Seja k um corpo de característica zero e seja H uma álgebra de Hopf pontual de dimensão finita sobre k agindo em uma k -álgebra prima R de modo que a ação seja X -externa. Denotemos por Q a álgebra de quocientes de Martindale simétrica de R e por K o centróide estendido de R . Seja $\mathcal{S}$ o conjunto de todos os H -comódulo subálgebras Λ de $K \# H$ contendo K , e seja $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as subálgebras racionalmente completas U de R contendo R^H . Então a aplicação*

$$\begin{aligned} \Phi: \mathcal{F} &\longrightarrow \mathcal{S} \\ U &\longmapsto (K \# H)^U \end{aligned}$$

é bijetora com inversa dada por

$$\begin{aligned} \Psi: \mathcal{S} &\longrightarrow \mathcal{F} \\ \Lambda &\longmapsto R^\Lambda. \end{aligned}$$

Observação. $\Phi(R^H) = (K \# H)^{R^H} = K \# H$ e $\Phi(R) = (K \# H)^R = K$.

Segue um exemplo da correspondência extraído de [Yan05, Example 2.8 and Example 2.14]. Convém ressaltar que os detalhes das demonstrações deste exemplo serão omitidos. A idéia seria apenas ilustrar a correspondência demonstrada nesta dissertação.

Exemplo 5.5.2. Seja $R = k\langle v, \nu \rangle$ a álgebra gerada pelas variáveis indeterminadas não comutativas v, ν sobre k . Então, R é uma álgebra prima e a álgebra de quocientes de Martindale simétrica de R é o próprio R . O centróide estendido de R é k , ou seja, $K = k$.

Considere $H = H_4$ a álgebra de Hopf de Sweedler de dimensão quatro, isto, é

$$H_4 = k\langle X, Y : X^2 = 1, Y^2 = 0, YX = -XY \rangle.$$

A estrutura de coálgebra de H_4 é dada por

$$\Delta(X) = X \otimes X, \quad \Delta(Y) = Y \otimes 1 + X \otimes Y \quad \text{e} \quad \varepsilon(X) = 1, \quad \varepsilon(Y) = 0.$$

Vamos definir a ação de H em R da seguinte forma:

$$X \cdot v = \nu, \quad X \cdot \nu = v, \quad Y \cdot v = 1 \quad \text{e} \quad Y \cdot \nu = -1.$$

Temos que ação de H em R é X -externa. Utilizando a mesma notação do Teorema 5.5.1, temos a correspondência ilustrada na tabela abaixo:

Λ	$\Psi(\Lambda) = R^\Lambda$	η_Λ
K	R	1_K
$K\langle X \rangle$	$\{r \in R : X \cdot r = r\}$	$1 + X$
$K\langle \alpha X + Y \rangle$	$\{r \in R : Y \cdot r = \alpha(r - X \cdot r)\}$	$\alpha X + Y + \alpha$
$K \# H$	$\{r \in R : X \cdot r = r \text{ e } Y \cdot r = 0\}$	$XY + Y$

É importante dizer que, em [MY03, Theorem 3.5], Masuoka e Yanai eliminam a restrição da característica de k ser zero. Como uma aplicação deste teorema mais geral de Masuoka e Yanai, podemos citar o artigo [FMP04], que mostra uma correspondência do tipo Galois entre coideais subálgebras à direita de uma álgebra de Hopf pontual de dimensão finita, que age de forma homogênea e fiel em uma álgebra associativa livre, e subálgebras livres contendo os invariantes desta ação.

Referências Bibliográficas

- [Coh86] M. Cohen, *Smash products, inner actions and quotient rings*, Pacific J. Math. **125** (1986), no. 1, 45–66. [xii](#), [29](#)
- [DNR00] S. Dascalescu, C. Nastasescu, and S. Raianu, *“Hopf Algebras: An Introduction”*, Marcel Dekker, New York, 2000. [5](#), [20](#), [24](#), [26](#)
- [FM06] V. O. Ferreira and L. S. I. Murakami, *“Introdução às álgebras de Hopf”*, apostila para curso ministrado no IME-USP, São Paulo, 2006. [5](#)
- [FMP04] V. O. Ferreira, L. S. I. Murakami, and A. Paques, *A Hopf-Galois correspondence for free algebras*, J. Algebra **276** (2004), 407–416. [105](#)
- [Kha91] V. K. Kharchenko, *“Automorphisms and Derivations of Associative Rings”*, Kluwer Academic, Dordrecht, 1991. [xi](#)
- [Kop93] M. Koppinen, *Coideal subalgebras in Hopf algebras: Freeness, integrals, smash products*, Comm. Algebra **21** (1993), no. 2, 427–444. [26](#)
- [Mar85] T. Marlowe, *The diagonal of a pointed coalgebra and incidence-like structure*, J. Pure and Appl. Algebra **35** (1985), 157–169. [38](#), [40](#)
- [Mas92] A. Masuoka, *Freeness of Hopf algebras over coideal subalgebras*, Comm. Algebra **20** (1992), no. 5, 1353–1373. [24](#)
- [Mas94] ———, *Coideal subalgebras in finite Hopf algebras*, J. Algebra **163** (1994), 819–831. [24](#)
- [Mil95a] A. Milinski, *Actions of pointed Hopf algebras on prime algebras*, Comm. Algebra **23** (1995), no. 1, 313–333. [xi](#), [50](#), [52](#), [54](#), [56](#), [58](#), [62](#), [63](#), [66](#), [70](#)
- [Mil95b] ———, *Operationen punktierter Hopfalgebren auf primen algebren*, Ph.D. thesis, Ludwig-Maximilians-Universität München, 1995. [xii](#), [68](#)
- [Mon93a] S. Montgomery, *Biinvertible actions of Hopf algebras*, Israel J. Math. **83** (1993), 45–71. [29](#)

- [Mon93b] ———, *“Hopf Algebras and Their Actions on Rings”*, American Mathematical Society, Providence, 1993. [5](#), [13](#), [15](#), [17](#), [22](#), [23](#), [25](#), [38](#)
- [MY03] A. Masuoka and T. Yanai, *Hopf module duality applied to X -outer galois theory*, J. Algebra **265** (2003), 229–246. [105](#)
- [Pas87] D. S. Passman, *Computing the symmetric ring of quotients*, J. Algebra **105** (1987), 207–235. [27](#), [28](#)
- [Pas89] ———, *“Infinite Crossed Product”*, Academic Press, Boston, 1989. [28](#)
- [Swe69] M. E. Sweedler, *“Hopf Algebras”*, W. A. Benjamin, New York, 1969. [5](#), [8](#), [9](#), [12](#), [22](#)
- [Wes99] S. Westreich, *A Galois-type correspondence theory for actions of finite-dimensional pointed Hopf algebras on prime algebras*, J. Algebra **219** (1999), 606–624. [70](#)
- [Wes00] ———, *Inner and Outer Actions of Pointed Hopf Algebras*, Contemporary Mathematics **267** (2000), 325–337. [36](#), [84](#), [87](#), [88](#)
- [WY01] S. Westreich and T. Yanai, *More about a Galois-Type Correspondence Theory*, J. Algebra **246** (2001), 629–640. [73](#), [74](#), [76](#), [78](#), [80](#), [81](#), [83](#), [92](#), [93](#), [97](#), [98](#), [103](#)
- [Yan97] T. Yanai, *Correspondence theory of Kharchenko and X -outer actions of pointed Hopf algebras*, Comm. Algebra **25** (1997), no. 6, 1713–1740. [xii](#), [47](#), [56](#), [60](#), [66](#), [67](#), [102](#)
- [Yan05] ———, *Galois correspondence theorem for Hopf algebra actions*, Contemporary Mathematics **376** (2005), 393–411. [81](#), [104](#)

Índice Remissivo

- álgebra, [2](#), [6](#)
 - de Frobenius, [24](#)
 - de grupo, [5](#)
 - de Hopf, [5](#), [12](#)
 - de quocientes de Martindale, [27](#)
 - à direita, [28](#)
 - à esquerda, [28](#)
 - simétrica, [28](#)
 - prima, [3](#)
 - quasi-Frobenius, [24](#)
- ação
 - adjunta à direita, [14](#)
 - adjunta à esquerda, [14](#)
 - contínua, [29](#)
 - de álgebras de Hopf, [14](#)
 - de grupo por automorfismos, [56](#)
 - em álgebra prima, [29](#)
 - X-externa, [56](#)
- antimorfismo
 - de álgebras, [12](#)
 - de coálgebras, [12](#)
- aplicação twist, [4](#)
- biálgebra, [9](#)
- centróide estendido, [29](#)
- co-radical, [22](#)
- coálgebra, [6](#)
 - co-oposta, [7](#)
 - pontual, [22](#), [38](#)
 - simples, [22](#)
- coassociatividade, [6](#)
- cociclo, [17](#)
- coideal, [7](#)
 - à direita, [7](#)
 - à esquerda, [7](#)
 - subálgebra à direita, [13](#)
 - subálgebra à esquerda, [13](#)
- comódulo
 - álgebra à direita, [21](#)
 - à direita, [18](#)
- comultiplicação, [6](#)
 - co-oposta, [7](#)
- counidade, [6](#)
- elemento
 - group-like, [8](#)
 - group-like distinguido, [26](#)
 - primitivo, [8](#), [10](#)
- extensão
 - à direita, [21](#)
 - Galois à direita, [22](#)
- filtração co-radical, [23](#)
- grau de elemento de coálgebra, [23](#)
- ideal
 - de Hopf, [12](#)
- integral, [25](#)
 - de coideal subálgebra à direita, [26](#)

generalizado à esquerda, [98](#)

módulo

à direita artiniano, [4](#)

à direita injetivo, [4](#)

à esquerda, [18](#)

à esquerda artiniano, [4](#)

à esquerda injetivo, [3](#)

mede, *veja* ação de álgebras de Hopf

morfismo

álgebras, [2](#)

de álgebras de Hopf, [12](#)

de biálgebras, [11](#)

de coálgebras, [7](#)

de comódulos, [20](#)

produto

cruzado, [17](#)

de convolução, [11](#)

smash, [16](#)

propriedade da base normal à direita, [22](#)

subálgebra

de coinvariantes, [21](#)

de Hopf, [13](#)

de Hopf normal, [14](#)

de invariantes, [14](#)

racionalmente completa, [3](#)

subcoálgebra, [7](#)

Teorema

de Taft-Wilson, [38](#)

Fundamental das Coálgebras, [20](#)

Fundamental dos Comódulos, [20](#)