Geometria dos espaços de Banach das classes de Baire sobre o intervalo $[0, 1]$

Claudia Correa de Andrade Oliveira

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Eloi Medina Galego

Durante o desenvolvimento deste trabalho a autora recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, fevereiro de 2011

Geometria dos espaços de Banach das classes de Baire sobre o intervalo $[0, 1]$

Esta versão definitiva da dissertação
contém as correções e alterações sugeridas pela
Comissão Julgadora durante a defesa realizada
por Claudia Correa de Andrade Oliveira em 25/2/2011.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Eloi Medina Galego (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Valentin Raphael Henri Ferenczi - IME-USP
- Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui - UNICAMP

I dedicate this work to my friends Daniel Victor Tausk and Fred Dashiell,

because they transformed it into an amazing adventure.

Agradecimentos

Agradeço a todas as pessoas que direta ou indiretamente me ajudaram na realização desse trabalho.

Agradeço ao apoio da minha família, especialmente a minha mãe e a minha avó Divina.

Agradeço a todos os meus professores, em especial aos professores Artur Tomita, Claudio Possani, Roseli Fernandez e Valentin Ferenczi.

Agradeço aos meus amigos pelo apoio e companhia. Em especial à Ana Carolina Boero, Daniel Victor Tausk, Fred Dashiell e Wilson Cuellar.

Agradeço ao Daniel Tausk por ter me ensinado tantas coisas ao longo dos anos e com tanta paciência.

Agradeço ao Fred Dashiell por ter me guiado no estudo das classes de Baire.

Agradeço a minha segunda família, Adriano Torres e Guilherme Nascimben, pois sem eles nada tem sentido.

Por fim, agradeço ao meu orientador e ao apoio financeiro do CNPq.

Resumo

O principal objetivo desse trabalho é o estudo da questão da existência de isomorfismos entre as classes de Baire sobre $[0, 1]$.

Para isso, desenvolvemos os principais resultados concernentes às relações entre as classes de Baire sobre $[0, 1]$. A saber:

(1) as classes de Baire são isométricas como álgebras de Banach a espaços da forma $C(K)$;

(2) as classes de Baire são subespaços próprios umas das outras, até o primeiro ordinal não enumerável, onde elas estabilizam;

(3) as classes de Baire não são subespaços complementados umas das outras;

(4) as classes de Baire não são isométricas umas às outras como espaços de Banach.

Por fim, apresentamos as respostas conhecidas para a questão isomórfica, sendo que para tal, utilizamos os resultados mencionados acima.

Abstract

The main purpose of this work is the study of the question about the existence of isomorphisms between the Baire classes on $[0, 1]$.

In order to do that, we develop the most important results concerning the relations between the Baire classes on $[0, 1]$. Those results are:

(1) the Baire classes are isometric as Banach algebras to spaces of the form $C(K)$;

(2) the Baire classes are proper subspaces each one of the others, until the first uncountable ordinal, when they stabilise;

(3) the Baire classes aren't complemented subspaces each one of the others;

(4) there aren't linear isometries between the Baire classes.

Finally we presente the known answers to the isomorphic question, using for this the results mentioned above.

Sumário

Introdução

Este trabalho tem como objeto de estudo as relações existentes entre as classes de Baire sobre $[0, 1]$.

As classes de Baire foram inventadas no final do século XIX, por Baire, Borel e Lebesgue. Nessa época, eles tentavam entender as funções descontínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, a partir do que já se conhecia sobre as funções contínuas. Como primeiro exemplo de função descontínua, Baire em [4], nos fala de funções que são obtidas como limites pontuais de sequências de funções contínuas. Essas são as funções da primeira classe de Baire. Posteriormente, a idéia da primeira classe de Baire foi generalizada, dando origem a uma família de espaços de funções indexada nos ordinais.

Na década de 70 do século XX, W. Bade inicia o estudo das relações entre as classes de Baire sobre $[0, 1]$ para diferentes ordinais.

No presente trabalho, seguiremos a linha iniciada por Bade. Em [2], Bade estuda as classes de Baire sobre $[0, 1]$ como álgebras de Banach de funções. Segue da definição das classes de Baire que se α, β são ordinais com $\alpha < \beta$, então a classe de Baire de índice α é subespaço da classe de Baire de índice β. Nesse ponto, uma pergunta natural seria:

Se $\alpha < \beta$, então a classe de Baire de índice α é subespaço próprio da classe de Baire de índice β?

Em [13], R. Engelking, W. Holstynski e R. Sikorski mostraram que a pergunta acima tem resposta afirmativa para $\beta \leq \omega_1$. Sendo que em ω_1, as classes de Baire estabilizam.

Tendo-se em vista o fato de que as classes de Baire são subespaços fechados e próprios umas das outras, podemos nos perguntar:

Se $\alpha < \beta \leq \omega_1$, então a classe de Baire de índice α é subespaço complementado da classe de Baire de índice β?

Nessa direção, observemos que em [35], B. Wells mostrou que $C([0,1])$ não é subespaço complementado das classes de Baire com índice $\alpha > 0$. Mais ainda, em [2], W. Bade mostrou que para $1 \leq \alpha < \beta \leq \omega_1$ a classe de Baire de índice α não é subespaço complementado da classe de Baire de índice β.

Diante da inexistência de projeção linear contínua entre as classes de Baire, nos perguntamos sobre a possibilidade da existência de operadores definidos na classe de Baire de índice β com valores na classe de Baire de índice $\alpha < \beta$, com boas propriedades, que não necessitam ser a identidade quando restritos à classe de Baire de índice α. Nesse sentido, surge a pergunta:

Para $\alpha \neq \beta$, podemos ter as classes de Baire de índices α e β isométricas como espaços de Banach?

Em [5], F. Dashiell respondeu negativamente a essa pergunta. Consequentemente, a pergunta natural seria:

Se $0 \leq \alpha < \beta \leq \omega_1$, as classes de Baire de índices α e β são isomorfas?

A resposta para essa pergunta, no caso geral, continua em aberto.

O presente trabalho tem como objetivo o estudo de todos os resultados mencionados acima, assim como as respostas parciais encontradas para essa pergunta.

Em [5], F. Dashiell mostrou que a classe de Baire de índice ω_1 não é isomorfa a nenhuma classe de Baire com índice enumerável.

Em [7], F. Dashiell e J. Lindenstrauss mostraram que a classe de Baire de índice 1 não é isomorfa a nenhuma classe de Baire com índice distinto de 1.

Assim, 1 e ω_1 são os únicos casos para os quais a pergunta sobre isomorfismo entre as classes de Baire está respondida.

Em busca de um invariante isomórfico que pudesse diferenciar mais classes de Baire, em [6], F. Dashiell estudou a seguinte questão:

Fixado um ordinal $\alpha > 0$, a classe de Baire de índice α possui a propriedade de Grothendieck?

A resposta por ele encontrada foi afirmativa, ou seja, todas as classes de Baire, com índice superior a 0, possuem a propriedade de Grothendieck. Então essa propriedade não pode ser usada para distinguir isomorficamente as classes de Baire.

O atual conhecimento das classes de Baire sobre $[0,1]$ não vai muito além dos resultados mencionados acima. Dessa forma, as classes de Baire sobre $[0,1]$ se apresentam como uma família de espaços de Banach interessante e ainda pouco explorada.

O presente trabalho está dividido em sete capítulos e um apêndice.

No Capítulo 1, definiremos as classes de Baire sobre $[0,1]$. Passaremos a estudá-las como álgebras de Banach reais. Apresentaremos a demonstração de que as classes de Baire para ordinais maiores que 0 também podem ser vistas como espaços da forma $C(K)$, com K compacto. Sendo que esses compactos estão relacionados com a estrutura do espaço dual de cada classe de Baire, veja o Teorema 1.3.8. Estudaremos propriedades topológicas desses compactos. Além disso, enunciaremos o Teorema de Lebesgue-Hausdorff, que relaciona as classes de Baire com os Borelianos de $[0,1]$, veja o Teorema 1.4.9. O Capítulo 1 serve de base para tudo que desenvolveremos posteriormente e é baseado em [2].

No Capítulo 2, mostraremos que cada classe de Baire é subespaço próprio das classes de Baire com índices superiores até o primeiro ordinal não enumerável, onde as classes de Baire estabilizam, veja o Teorema 2.23. A demonstração que apresentaremos desse fato se baseia em [13].

No Capítulo 3, começamos a responder à seguinte questão:

Se $0 \leq \alpha < \beta \leq \omega_1$, a classe de Baire de índice α pode ser subespaço complementado da classe de Baire de índice β?

Nesse capítulo, mostraremos que $C([0,1])$ não é subespaço complementado de nenhuma classe de Baire com índice superior a 0, veja o Teorema 3.2.11. A prova aqui apresentada desse teorema é baseada em [35]. Na Seção 3 do Capítulo 3, apresentamos os resultados de S. Ditor [10] sobre projeções em subálgebras de espaços de funções contínuas. Esses resultados são fundamentais para o que será desenvolvido no Capítulo 5, tendo-se em vista que as classes de Baire são espaços de funções contínuas.

No Capítulo 4, trabalhamos para mostrar que para $\alpha \neq \beta$, ordinais enumeráveis, a classe de Baire de índice α não é isométrica à classe de Baire de índice β, veja o Teorema 4.31. Esse capítulo é baseado em [5].

No Capítulo 5, apresentamos a demonstração de que a classe de Baire de índice ω_1 não é isomorfa a nenhuma classe de Baire com índice enumerável, veja o Teorema 5.4.19. O invariante isomórfico utilizado será a propriedade de um espaço de Banach ser Baire-complementado, conceito discutido na Seção 2 do Capítulo 5, assim como o conceito de primeiro espaço de Baire de um espaço de Banach.

A idéia do primeiro espaço de Baire de um espaço de Banach foi introduzida por A. Grothendieck em [19], e é uma idéia muito rica, tendo sido usada, por exemplo, por E. Odell e H. Rosenthal em [28] na caracterização dos espaços de Banach separáveis que contém cópia isomórfica de l^1.

Finalmente, estabeleceremos o resultado geral de não complementação para as classes de Baire, como corolário dos resultados obtidos nesse capítulo e no Capítulo 3, veja o Teorema 5.4.20. Assim, concluindo o estudo que começamos a desenvolver no Capítulo 3. Esse capítulo é baseado em [5].

No Capítulo 6, mostraremos que a classe de Baire de índice 1 não é isomorfa a nenhuma classe de Baire com índice diferente de 1, veja o Teorema 6.13. Esse capítulo se baseia em [7].

No Capítulo 7, faremos uma breve exposição de mais um problema em aberto na geometria dos espaços de Banach das classes de Baire sobre $[0, 1]$, a saber:

Para quais ordinais α, $B_\alpha(I)$ é separavelmente injetivo ou universalmente separavelmente injetivo?

Ressaltamos que a resposta a essa pergunta pode nos ajudar a responder à questão sobre a existência de isomorfismos entre as classes de Baire sobre $[0, 1]$, já que ser separavelmente injetivo ou universalmente separavelmente injetivo são invariantes isomórficos.

A partir dos resultados desenvolvidos nos capítulos anteriores, mostraremos que as classes de Baire sobre $[0, 1]$ são espaços de Banach não injetivos, veja Teoremas 7.4 e 7.12. Além disso, apresentaremos a classificação de quais classes de Baire sobre $[0, 1]$ são espaços 1-separavelmente injetivos, veja Teorema 7.19, tendo em vista um resultado contido em [1].

No Apêndice A, apresentamos uma versão do Teorema de Lebesgue-Hausdorff, para classes de Baire sobre espaços topológicos arbitrários. Denominamos esse teorema de **Teorema de Lebesgue-Hausdorff generalizado**. Note que essa nomenclatura não é padrão. A inclusão dessa demonstração no trabalho se deve ao fato da importância central desse teorema no caso das classes de Baire sobre $[0,1]$, assim como ao fato do caso geral ser usado no Capítulo 5.

A demonstração aqui apresentada foi desenvolvida pela autora desse trabalho junto com F. Dashiell e é inspirada em [6], assim como no trabalho de W. Sierpinski [33]. Nós consideramos essa demonstração mais moderna e acessível que as existentes na literatura.

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto dos núneros naturais com a topologia usual
$\mathbb{R}$	Conjunto dos núneros reais com a topologia usual
I	$[0,1]$ com a topologia de subespaço de $\mathbb{R}$
χ_0	Primeiro cardinal infinito
ω	Primeiro ordinal infinito
ω_1	Primeiro ordinal não enumerável
C	O conjunto de Cantor, ou seja, $\{0,1\}^\omega$
C_A	Função característica do conjunto A
$\wp(X)$	Conjunto das partes do conjunto X
$f\vert_A$	A restrição da função f ao conjunto A
max, min	Funções máximo e mínimo, respectivamente
$sign(\lambda)$	Sinal do número real λ
$span\{A\}$	Espaço vetorial gerado por A, onde A é subconjunto de um espaço vetorial
$int(A)$	Interior do conjunto A, onde A é subconjunto de um espaço topológico
$int_Y(A)$	Interior do conjunto A relativamente a Y, onde Y é subespaço de um espaço topológico
∂A	Fronteira do conjunto A, onde A é subconjunto de um espaço topológico

Capítulo 1

Definições e primeiras propriedades

Neste capítulo, vamos iniciar nosso estudo das classes de Baire sobre o intervalo $[0, 1]$. Mostraremos que, dotadas da norma da convergência uniforme e das operações ponto a ponto, as classes de Baire são álgebras de Banach não separáveis. Estudaremos o conjunto dos funcionais lineares multiplicativos de cada classe, provando que ele é compacto Hausdorff e zero dimensional na topologia fraca estrela.

O espaço dos funcionais lineares multiplicativos será muito importante na nossa investigação das propriedades das classes de Baire, pois como veremos nesse capítulo, cada classe pode ser vista como um $C(K)$, onde K é o espaço dos funcionais lineares multiplicativos munido da topologia fraca estrela.

Estabeleceremos a relação entre os Borelianos de $[0, 1]$ e as classes de Baire, enunciando o Teorema de Lebesgue-Hausdorff. Um teorema clássico e central na teoria das classes de Baire.

Para não tornarmos a dissertação muito extensa, ao longo desse trabalho, optamos por indicar as demonstrações dos resultados mais conhecidos em literatura bem acessível.

1.1 Classes de Baire como álgebras de Banach

Nesta seção, definiremos as classes de Baire sobre o intervalo $[0,1]$. Definiremos operações e uma norma em cada classe, dando a elas estrutura de álgebras de Banach.

Também mostraremos que as classes de Baire são espaços de Banach não reflexivos.

Denotaremos o intervalo $[0,1]$, com a topologia usual por I e o conjunto das funções contínuas de I em $\mathbb{R}$ por $C(I)$.

Definição 1.1.1. *Definiremos recursivamente as classes de Baire, que serão denotadas por $B_\alpha(I)$ para cada ordinal α:*

(1) $B_0(I) = C(I)$;

(2) *Dado um ordinal $\alpha \geq 1, B_\alpha(I) = \{f : I \to \mathbb{R}$ tal que f é limitada e existe $(f_n)_n \subset \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta(I)$ com $(f_n)_n$ convergindo pontualmente para f em $I\}$.*

Observação 1.1.2. *Seja ω_1 o primeiro ordinal não enumerável. Da Definição 1.1.1, temos que $B_{\omega_1}(I) = \{f : I \to \mathbb{R}$ tal que f é limitada e existe $(f_n)_n \subset \bigcup_{\alpha<\omega_1} B_\alpha(I)$ com $(f_n)_n$ convergindo pontualmente para f em $I\}$. Logo $\bigcup_{\alpha<\omega_1} B_\alpha(I) \subset B_{\omega_1}(I)$. Observemos que $B_{\omega_1}(I) \subset \bigcup_{\alpha<\omega_1} B_\alpha(I)$. De fato, seja $f \in B_{\omega_1}(I)$, então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\alpha_n < \omega_1$, com $f_n \in B_{\alpha_n}(I)$ tal que a sequência $(f_n)_n$ converge pontualmente para f em I. Seja $\beta = \sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n < \omega_1$. Então $f_n \in B_\beta(I), \forall n \in \mathbb{N}$. Portanto, pela definição acima, temos que $f \in B_{\beta+1}(I)$. Como $\beta + 1 < \omega_1$, $f \in \bigcup_{\alpha<\omega_1} B_\alpha(I)$.*

Logo $B_{\omega_1}(I) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} B_\alpha(I)$. O que implica que $B_{\omega_1}(I)$ é fechado para a convergência pontual de sequências. No Capítulo 2, veremos que $B_\alpha(I)$ não possui essa propriedade para qualquer ordinal α enumerável.

Definamos em cada classe de Baire as operações com as quais vamos lidar ao longo de todo o trabalho.

Definição 1.1.3. *Fixado um ordinal α, definamos em $B_\alpha(I)$ as operações:*

(1) $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$, *para quaisquer* $f, g \in B_\alpha(I)$;

(2) $(\lambda f)(t) = \lambda(f(t))$, *para quaisquer* $\lambda \in \mathbb{R}, f \in B_\alpha(I)$;

(3) $(fg)(t) = f(t)g(t)$, *para quaisquer* $f, g \in B_\alpha(I)$

Mostremos que as operações acima estão bem definidas.

Proposição 1.1.4. *Suponha* $f, g \in B_\alpha(I)$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$, *então:*

(1) $f + g \in B_\alpha(I)$;

(2) $\lambda f \in B_\alpha(I)$;

(3) $fg \in B_\alpha(I)$.

Além disso, se $f(t) \neq 0, \forall t \in I$, *então* $1/f \in B_\alpha(I)$.

Demonstração. Faremos a demonstração de (1), e as demais são análogas. Para isso, façamos indução em α. Se $\alpha = 0$, então f e g são contínuas e sabemos que $f + g$ é contínua. Logo $f + g \in B_0(I)$.

Suponha $\alpha \geq 1$ e que o resultado seja válido para todo ordinal $\beta < \alpha$. Mostremos que o resultado é válido para α. Se $f, g \in B_\alpha(I)$, então existem $(f_n)_n, (g_n)_n \subset \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta(I)$ tais que $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ e $\lim_{n\to\infty} g_n(t) = g(t)$ para todo $t \in I$. Usando a Definição 1.1.3 (1) e as propriedades de limite, fixado $t \in I$, temos que:

$f + g(t) = f(t) + g(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t) + \lim_{n\to\infty} g_n(t) = \lim_{n\to\infty} f_n + g_n(t)$

Fixado n, $f_n \in B_{\beta_n}(I)$ e $g_n \in B_{\gamma_n}(I)$, com $\beta_n, \gamma_n < \alpha$. Suponha que $\beta_n \geq \gamma_n$, então $f_n, g_n \in B_{\beta_n}(I)$. Pela hipótese de indução, temos que $f_n + g_n \in B_{\beta_n}(I)$.

Portanto $f + g$ é o limite pontual de uma sequência de funções contida em $\bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta(I)$. É claro que $f + g$ é limitada, logo $f + g \in B_\alpha(I)$. □

A próxima proposição é de verificação imediata, portanto a demonstração será omitida.

Proposição 1.1.5. *Para cada ordinal $\alpha \geq 0$, $B_\alpha(I)$ dotado das operações descritas na Definição 1.1.3 (1) e (2), é um espaço vetorial.*

Agora, vamos introduzir em cada $B_\alpha(I)$ uma norma, com a qual $B_\alpha(I)$ será um espaço de Banach.

Definição 1.1.6. *Seja $f \in B_\alpha(I)$, definamos:*

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

Note que a função $||.||_\infty$ está bem definida, pois todas as funções nas classes de Baire são limitadas.

A demonstração da próxima proposição não apresenta dificuldades, portanto será omitida.

Proposição 1.1.7. *A função $\|.\|_\infty : B_\alpha(I) \to \mathbb{R}$ é uma norma em $B_\alpha(I)$, para todo ordinal α.*

Vamos mostrar que $(B_\alpha(I), \|.\|_\infty)$ é um espaço de Banach. Para isso, vejamos que $B_\alpha(I)$ é fechada para convergência uniforme.

Lema 1.1.8. *Seja α um ordinal fixado, vale:*

(1) Se $f \in B_\alpha(I)$, então $|f| \in B_\alpha(I)$;

(2) Se $f, g \in B_\alpha(I)$, então as funções $M(t) = max(f(t), g(t))$ e $m(t) = min(f(t), g(t))$ pertencem a $B_\alpha(I)$.

Demonstração. Sugerimos [18], página 138. □

Lema 1.1.9. *Seja $\alpha \geq 1$ um ordinal fixado. Suponha que $f \in B_\alpha(I)$ e $\|f\|_\infty \leq k$, com $k > 0$.*

Então, existe sequência $(f_n)_n \subset \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta(I)$, com $(f_n)_n$ convergindo pontualmente para f em I e $\|f_n\|_\infty \leq k$, para todo n.

Demonstração. Sugerimos [18], página 138. □

Proposição 1.1.10. *Para todo ordinal α, $B_\alpha(I)$ é fechado para a convergência uniforme.*

Demonstração. Suponha que $(f_n)_n$ seja sequência em $B_\alpha(I)$, convergindo uniformemente em I para uma função f. Queremos mostrar que $f \in B_\alpha(I)$. Sabemos que o resultado é válido para $\alpha = 0$. Consideremos $\alpha > 0$.

Devido à convergência uniforme, tomando subsequência se necessário, podemos escrever:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 1/2^n, \forall x \in I, n \geq 1 \tag{1.1}$$

Portanto, temos:

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq 2.2^{-n}, \forall x \in I, n \geq 1 \tag{1.2}$$

Note que $f_{n+1} - f_n \in B_\alpha(I)$. Pelo Lema 1.1.9, existem $g_{n,m}$ pertencentes a classes inferiores a α tais que:

$$\lim_{m\to\infty} g_{n,m}(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x) \tag{1.3}$$

com

$$|g_{n,m}(x)| \leq 2.2^{-n} \tag{1.4}$$

Definamos:

$$g_m(x) = g_{1,m}(x) + g_{2,m}(x) + \cdots + g_{m,m}(x)$$

Como cada $g_{j,m}$ pertence a uma classe inferior a α e g_m é soma finita dessas funções, temos que $g_m \in B_{\beta_n}$, com $\beta_n < \alpha$.

Notemos que da convergência pontual de $(f_n)_n$ para f em I, segue:

$$f(x) = f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(f_{n+1}(x) - f_n(x)) \tag{1.5}$$

Se mostrarmos que $(g_m)_m$ converge pontualmente para $\sum_{n=1}^{\infty}(f_{n+1}(x) - f_n(x))$, teremos que $f \in B_\alpha(I)$. Já que nesse caso $\sum_{n=1}^{\infty}(f_{n+1}(x) - f_n(x)) \in B_\alpha(I)$ e vale (1.5).

Fixado $\epsilon > 0$, existe N natural, tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| < \epsilon/3, \forall x \in I \tag{1.6}$$

pois pelo teste de Weierstrass a série $\sum_{n=1}^{\infty}|f_{n+1}(x)-f_n(x)|$ é uniformemente convergente em I, já que vale (1.2) e $\sum_{n=1}^{\infty} 2.2^{-n}$ é convergente. Assim:

$$|\sum_{n=1}^{\infty}(f_{n+1}(x)-f_n(x))-\sum_{n=1}^{N}(f_{n+1}(x)-f_n(x))=|\sum_{n=N+1}^{\infty}(f_{n+1}(x)-f_n(x))|$$

$$=\lim_{M\to\infty}|\sum_{n=N+1}^{M}(f_{n+1}(x)-f_n(x))|\leq\sum_{n=N+1}^{\infty}|f_{n+1}(x)-f_n(x)|<\epsilon/3$$

a última desigualdade se verifica, pois vale (1.6).

Fixado $x\in I$ e $1\leq n\leq N$, temos que $(g_{n,m}(x))_m$ converge para $f_{n+1}(x)-f_n(x)$. Logo, existe m_n tal que:

$$m\geq m_n\Rightarrow|f_{n+1}(x)-f_n(x)-g_{n,m}(x)|<\epsilon/3N \tag{1.7}$$

Definindo $m_0=max(m_1,\ldots,m_N)$:

$$m\geq m_0\Rightarrow|f_{n+1}(x)-f_n(x)-g_{n,m}(x)|<\epsilon/3N,\forall 1\leq n\leq N \tag{1.8}$$

Além disso, tome $m_0>N$. Portanto, fixado x e para todo $m\geq m_0$:

$$|\sum_{n=1}^{\infty}(f_{n+1}(x)-f_n(x))-g_m(x)|=|\sum_{n=1}^{\infty}(f_{n+1}(x)-f_n(x))-\sum_{n=1}^{m}g_{n,m}(x)|$$

$$\leq|\sum_{n=1}^{\infty}(f_{n+1}(x)-f_n(x))-\sum_{n=1}^{N}(f_{n+1}(x)-f_n(x))|+|\sum_{n=1}^{N}(f_{n+1}(x)-f_n(x)-g_{n,m}(x))|+\sum_{n=N+1}^{m}|g_{n,m}(x)|$$

$$<\epsilon/3+\sum_{n=1}^{N}|f_{n+1}(x)-f_n(x)-g_{n,m}(x)|+\sum_{n=N+1}^{m}|g_{n,m}(x)|$$

$$<\epsilon/3+\epsilon/3+\sum_{n=N+1}^{\infty}|g_{n,m}(x)|<\epsilon$$

Isso mostra que $(g_m(x))_m$ converge para $\sum_{n=1}^{\infty}(f_{n+1}(x)-f_n(x))$ □

Segue da proposição acima e da definição de $\|.\|_\infty$ que $(B_\alpha(I),\|.\|_\infty)$ é espaço de Banach.

Definição 1.1.11. *Uma álgebra de Banach X é um espaço de Banach $(X,||.||)$ tal que X é uma álgebra com unidade 1, e valem:*

(1) $||1|| = 1$

(2) $||f.g|| \leq ||f||.||g||$*, para todos* $f, g \in X$

Note que essa definição implica que o produto da álgebra é contínuo na topologia gerada pela norma.

Proposição 1.1.12. *Para todo ordinal* α*, com o produto descrito na Definição 1.1.3(3),* $(B_\alpha(I), \|.\|_\infty)$ *é uma álgebra de Banach comutativa.*

Demonstração. Já mostramos que $(B_\alpha(I), \|.\|_\infty)$ é um espaço de Banach. Uma verificação de rotina, nos mostra que $B_\alpha(I)$, com as operações que definimos é uma álgebra comutativa.

Note que a função constante igual a 1 pertence a $B_\alpha(I)$ e é a unidade da álgebra. Além disso:

$$\|1\|_\infty = 1$$

Também é facilmente verificado que:

$$\|f.g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty, \forall f, g \in B_\alpha(I)$$

Temos assim, nosso resultado. □

Agora, vamos mostrar que para todo ordinal α, a classe de Baire $B_\alpha(I)$ é espaço de Banach não reflexivo.

Definição 1.1.13. *Um espaço normado* X *é dito reflexivo quando a imersão isométrica* $J : X \to X^{**}$*, dada por* $J(x)(\varphi) = \varphi(x), \forall \varphi \in X^*$*, é sobrejetora.*

Notemos que $C(I)$ é subespaço fechado de $B_\alpha(I)$, para todo α. A não reflexividade de $B_\alpha(I)$ segue da proposição seguinte.

Proposição 1.1.14. *(i) Seja* X *um espaço de Banach. Se* X *é reflexivo e* Y *é subespaço fechado de* X*, então* Y *também é reflexivo;*

(ii) $(C(I), ||.||_\infty)$ *não é reflexivo.*

Demonstração. Sugerimos [14], página 75 para (i) e página 74 para (ii). □

1.2 O espaço dos funcionais lineares multiplicativos de $B_\alpha(I)$

Nesta seção, vamos entender melhor os funcionais lineares mutiplicativos das classes de Baire.

Definição 1.2.1. *Seja B uma álgebra de Banach. Um funcional linear $\varphi \in B^*$ é dito multiplicativo se valem:*

(1) $\varphi(f.g) = \varphi(f).\varphi(g), \forall f, g \in B$;

(2) $\varphi(1_B) = 1$, onde 1_B é a unidade da álgebra B.

Note que na definição acima, estamos excluindo $\varphi \equiv 0$. Denotemos por M_B o conjunto dos funcionais lineares multiplicativos de B.

Definição 1.2.2. *A topologia fraca em X, é a topologia gerada pela seguinte base de abertos:*

$$V_{x_0,\epsilon,\{f_1,\ldots,f_n\}} = \{x \in X : |f_i(x - x_0)| < \epsilon, i = 1, \ldots, n\}$$

onde $x_0 \in X$, $n \in \mathbb{N}$, $f_i \in X^*$ e $\epsilon > 0$.

Denotaremos a topologia fraca por topologia w.

Definição 1.2.3. *A topologia fraca estrela em X^* é a topologia gerada pela seguinte base de abertos:*

$$V_{\varphi_0,\epsilon,\{x_1,\ldots,x_n\}} = \{\varphi \in X^* : |(\varphi - \varphi_0)(x_i)| < \epsilon, i = 1, \ldots, n, \}$$

onde $\varphi_0 \in X^*$, $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in X$ e $\epsilon > 0$.

Denotaremos a topologia fraca estrela por topologia w^*.

A seguinte proposição nos permite entender melhor o que significa convergência nessas topologias.

Proposição 1.2.4. *Seja X espaço vetorial normado, valem:*

(1) Seja $(f_n)_n$ sequência em X^*. Então $f_n \xrightarrow{w^*} f \Leftrightarrow \forall x \in X, f_n(x) \to f(x)$.

(2) Seja $(x_n)_n$ sequência em X.Então $x_n \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow \forall f \in X^*, f(x_n) \to f(x)$.

Demonstração. Sugerimos [14], página 66. □

A proposição acima continua válida, com essencialmente a mesma prova, para redes no lugar de sequências.

Nosso primeiro objetivo é mostrar que M_B dotado da topologia fraca estrela é compacto Hausdorff.

Lema 1.2.5. *Se $(B, ||.||)$ é álgebra de Banach e $\varphi \in M_B$, então $||\varphi|| = 1$.*

Demonstração. Sugerimos [11], página 39. □

Observação 1.2.6. *O Lema 1.2.5 mostra que M_B é subconjunto da bola unitária de B^*. Pelo Teorema de Alaoglu([14], página 71), temos que a bola unitária de B^* é compacta na topologia fraca estrela. Portanto, para estabelecermos a compacidade de M_B, basta mostrarmos que ele é um subconjunto fraca estrela fechado de M_B.*

Teorema 1.2.7. *Se B é álgebra de Banach, então M_B é subespaço compacto de B^*, na topologia fraca estrela.*

Demonstração. Como explicado na Observação 1.2.6, basta mostrarmos que M_B é subconjunto fechado da bola unitária de B^*, na topologia fraca estrela. Para tal, mostremos que se $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma rede de elementos de M_B convergindo para $\varphi \in B^*$, na topologia fraca estrela, então $\varphi \in M_B$.

Temos que mostrar que $\varphi(1) = 1$ e $\varphi(a.b) = \varphi(a).\varphi(b), \forall a, b \in B$.

(i) Como $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge na topologia fraca estrela para φ e usando a Proposição 1.2.4 para redes, temos que:

$$\lim_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda(1) = \varphi(1)$$

Como $\varphi_\lambda \in M_B$, temos que $\varphi(1) = 1$.

(ii) Fixemos $a, b \in B$, da convergência de $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ para φ na topologia fraca estrela, temos:

$$\lim_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda(a) = \varphi(a)$$

e

$$\lim_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda(b) = \varphi(b)$$

Multiplicando as duas equações acima, temos:

$$\varphi(a).\varphi(b) = \lim_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda(a). \lim_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda(b)$$

Logo:

$$\varphi(a).\varphi(b) = \lim_{\lambda\in\Lambda}(\varphi_\lambda(a).\varphi_\lambda(b)) = \lim_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda(a.b)$$

Da convergência na topologia fraca estrela, temos que:

$$\lim_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda(a.b) = \varphi(a.b)$$

Logo:

$$\varphi(a.b) = \varphi(a).\varphi(b)$$

De (i) e (ii) segue que $\varphi \in M_B$. O que mostra nosso resultado. □

Sabemos que a topologia fraca estrela é Hausdorff, logo concluímos que (M_B, w^*) é espaço topológico compacto Hausdorff.

Definição 1.2.8. *Seja α um ordinal. Denotaremos por Ω_α o conjunto dos funcionais lineares multiplicativos de $B_\alpha(I)$.*

Do Teorema 1.2.7 e do comentário que o segue, vem que (Ω_α, w^*) é espaço topológico compacto e Hausdorff, para todo ordinal α.

1.3 Relação entre $B_\alpha(I)$ e $C(\Omega_\alpha)$

Como vimos na seção anterior, (Ω_α, w^*) é compacto Hausdorff. É um resultado clássico que $(C(\Omega_\alpha), ||.||_\infty)$ é uma álgebra de Banach, onde $||.||_\infty$ é a mesma da Definição 1.1.6, mas com domínio em $C(\Omega_\alpha)$.

Nesta seção, vamos mostrar que existe um isomorfismo de álgebras de Banach entre $B_\alpha(I)$ e $C(\Omega_\alpha)$, sendo esse isomorfismo uma isometria.

Definição 1.3.1. *Fixado um ordinal $\alpha \geq 1$, definamos a seguinte função:*

$\chi : B_\alpha(I) \to C(\Omega_\alpha)$, *onde* $\chi(f)(\omega) = \omega(f)$, $\forall f \in B_\alpha(I)$, $\forall \omega \in \Omega_\alpha$

Lema 1.3.2. *χ está bem definida, ou seja, $\forall f \in B_\alpha(I) \Rightarrow \chi(f) \in C(\Omega_\alpha)$.*

Demonstração. Temos que mostrar que $\chi(f)$ é contínua em cada ponto de Ω_α.

Fixemos $\omega_0 \in \Omega_\alpha$. Dado $\epsilon > 0$, definamos:

$V_\epsilon = \{\varphi \in (B_\alpha(I))^* : |(\varphi - \omega_0)(f)| < \epsilon\}$. Note que V_ϵ é w^*-aberto no dual de $B_\alpha(I)$ e $\omega_0 \in V_\epsilon$.

Tomemos $W_\epsilon = V_\epsilon \cap \Omega_\alpha$. Então $\omega_0 \in W_\epsilon$, que é aberto de Ω_α na topologia de subespaço. Seja $\omega \in W_\epsilon \Rightarrow |(\omega - \omega_0)(f)| = |\omega(f) - \omega_0(f)| < \epsilon$.

Logo $\omega \in W_\epsilon \Rightarrow |\chi(f)(\omega) - \chi(f)(\omega_0)| < \epsilon$. Portanto $\chi(f)$ é contínua em ω_0

Isso mostra que $\chi(f)$ é contínua em Ω_α. □

O próximo lema estabelece algumas propriedades algébricas da função χ. Sua demonstração será omitida, pois é imediata.

Lema 1.3.3. *Para χ, descrita na Definição 1.3.1, valem:*

(1) $\chi(f + g) = \chi(f) + \chi(g)$, $\forall f, g \in B_\alpha(I)$;

(2) $\chi(\lambda.f) = \lambda.\chi(f)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ *e* $\forall f \in B_\alpha(I)$;

(3) $\chi(f.g) = \chi(f).\chi(g)$, $\forall f, g \in B_\alpha(I)$;

(4) $\chi(1) = 1$

Lema 1.3.4. *Para todo $f \in B_\alpha(I)$, temos que $||\chi(f)||_\infty = ||f||_\infty$. Em particular, χ é injetora.*

Demonstração. Seja $t \in I$. Então, a função $\varphi_t : B_\alpha(I) \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi_t(f) = f(t), \forall f \in B_\alpha(I)$ pertence a Ω_α.

(i) $||\chi(f)||_\infty = \sup_{\omega \in \Omega_\alpha} |\omega(f)| \geq \sup_{t \in I} |\varphi_t(f)|$

A desigualdade vale pois $\{\varphi_t : t \in I\} \subset \Omega_\alpha$.

Lembrando que $||f||_\infty = \sup_{t \in I} |f(t)| = \sup_{t \in I} |\varphi_t(f)|$, temos que $||\chi(f)||_\infty \geq ||f||_\infty$.

(ii) Seja $\omega \in \Omega_\alpha$:

$|\chi(f)(\omega)| = |\omega(f)| \leq ||\omega||.||f||_\infty = ||f||_\infty$

A última igualdade vale, pois como visto na Seção 2, $||\omega|| = 1, \forall \omega \in \Omega_\alpha$.

Assim, $\forall \omega \in \Omega_\alpha \Rightarrow |\chi(f)(\omega)| \leq ||f||_\infty$.

Portanto $||\chi(f)||_\infty \leq ||f||_\infty$.

De (i) e (ii) segue nosso resultado. □

Lema 1.3.5. ***(Teorema de Stone-Weierstrass- Caso real)*** *Seja X espaço topológico compacto e Hausdorff. Considere a álgebra de Banach $(C(X;\mathbb{R}), ||.||_\infty)$, onde $C(X;\mathbb{R})$ denota o conjunto das funções contínuas de X em $\mathbb{R}$. Seja D subálgebra de $C(X;\mathbb{R})$ tal que:*

(1) D contém as funções constantes;

(2) D separa pontos.

Então $\overline{D}^{||.||_\infty} = C(X;\mathbb{R})$.

Demonstração. Sugerimos [36], página 291. □

Lema 1.3.6. *A função χ é sobrejetora.*

Demonstração. Mostremos que $\chi(B_\alpha(I))$ é subálgebra de $C(\Omega_\alpha)$ e satisfaz as hipóteses do Teorema 1.3.5. O que vai implicar que $\overline{\chi(B_\alpha(I))}^{||.||_\infty} = C(\Omega_\alpha)$. Mas, dos Lemas 1.3.3 (1) e (2) e 1.3.4, temos que $\chi(B_\alpha(I))$ é isomorfo a $B_\alpha(I)$, como espaços de Banach.

Logo $\chi(B_\alpha(I))$ é um espaço de Banach, portanto fechado em $C(\Omega_\alpha)$. Então, se mostrarmos que $\chi(B_\alpha(I))$ satisfaz as hipóteses do Teorema 1.3.5, teremos que $\chi(B_\alpha(I)) = C(\Omega_\alpha)$.Assim χ será sobrejetora.

(i) O fato de $\chi(B_\alpha(I))$ ser subálgebra de $C(\Omega_\alpha)$, decorre do Lema 1.3.3 e do discutido acima.

(ii) Mostremos que $\chi(B_\alpha(I))$ contém as constantes. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$, a função constante igual a λ pertence a $B_\alpha(I)$. Note que $\chi(\lambda.1) \in \chi(B_\alpha(I))$ e é igual à função constante igual a λ. De fato:

$\chi(\lambda.1)(\omega) = \omega(\lambda.1) = \lambda.\omega(1) = \lambda, \forall \omega \in \Omega_\alpha$.

Portanto, $\chi(B_\alpha(I))$ contém as constantes.

(iii) $\chi(B_\alpha(I))$ separa pontos. Ou seja, temos que mostrar que dados $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_\alpha$ distintos, existe $f \in B_\alpha(I)$ tal que $\chi(f)(\omega_1) \neq \chi(f)(\omega_2)$.

$\omega_1 \neq \omega_2 \Rightarrow \omega_1(f_0) \neq \omega_2(f_0)$, para algum $f_0 \in B_\alpha(I)$.

Temos que $\chi(f_0)(\omega_1) \neq \chi(f_0)(\omega_2)$.

De (i),(ii) e (iii) segue que estamos nas hipóteses do Teorema 1.3.5.

Logo, como discutido no começo da demonstração, χ é sobrejetora. □

Definição 1.3.7. *Considere $(B_1, ||.||_1)$ e $(B_2, ||.||_2)$ duas álgebras de Banach. Uma função $T : B_1 \to B_2$ é dita isomorfismo de álgebras de Banach se:*

(1) $\forall f, g \in B_1, \lambda \in \mathbb{R}$, valem:

$T(f+g) = T(f) + T(g)$, $T(\lambda.f) = \lambda.T(f)$, $T(f.g) = T(f).T(g)$ *e* $T(1) = 1$

(2) T é contínua, invertível e sua inversa é contínua.

Se além de (1) e (2), T também satisfizer $||T(f)||_2 = ||f||_1, \forall f \in B_1$, então T é dito isomorfismo isométrico entre álgebras de Banach.

Teorema 1.3.8. *Seja $\alpha \geq 1$ um ordinal. Então, $B_\alpha(I)$ e $C(\Omega_\alpha)$ são isometricamente isomorfos como álgebras de Banach.*

Demonstração. Consideremos a função χ descrita na Definição 1.3.1.

O resultado é consequência dos Lemas 1.3.3, 1.3.4 e 1.3.6 □

1.4 Borelianos e classes de Baire

Nesta seção, vamos estudar a relação entre os Borelianos de I e as classes de Baire.

Enunciaremos o Teorema de Lebesgue-Hausdorff que será fundamental ao longo de todo esse trabalho, e é através dele que faremos a relação mencionada acima. Em posse do Teorema de Lebesgue-Hausdorff, mostraremos que as classes de Baire não são separáveis.

Os Borelianos de I, que denotaremos por Bor, é a menor σ-álgebra de subconjuntos de I que contém todos os abertos de I.

Para os nossos propósitos, precisamos de um entendimento mais detalhado dessa σ-álgebra.

Definição 1.4.1. *Definimos a paridade de cada ordinal da seguinte forma:*

(i) 0 é par;

(ii) O sucessor imediato de todo ordinal par é ímpar e o sucessor imediato de todo ordinal ímpar é par;

(iii) Todo ordinal limite é par.

Definição 1.4.2. *Para todo ordinal α, definimos F_α:*

(i) F_0 é a família de todos os subconjuntos fechados de I;

(ii) Se α é ímpar, F_α é a família de todas as uniões enumeráveis de conjuntos em $\bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta$;

(iii) Se α é par, F_α é a família de todas as intersecções enumeráveis de conjuntos em $\bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta$.

Denotaremos a classe F_1 por F_σ.

Definição 1.4.3. *Para todo ordinal α, definimos G_α:*

(i) G_0 é a família de todos os subconjuntos abertos de I;

(ii) Se α é ímpar, G_α é a família de todas as intersecções enumeráveis de conjuntos em $\bigcup_{\beta<\alpha} G_\beta$;

(iii) Se α é par, G_α é a família de todas as uniões enumeráveis de conjuntos em $\bigcup_{\beta<\alpha} G_\beta$.

Denotaremos a classe G_1 por G_δ.

Definição 1.4.4. *(1) Se α é par, G_α é chamada classe aditiva de tipo α e F_α de classe multiplicativa de tipo α;*

(2) Se α é ímpar, F_α é chamada de classe aditiva de tipo α e G_α de classe multiplicativa de tipo α;

(3) Para cada ordinal α, $H_\alpha = F_\alpha \cap G_\alpha$ é chamada de classe ambígua de tipo α.

A próxima proposição resume as principais propriedades das famílias F_α, G_α e H_α, que serão utilizadas nesse trabalho.

Proposição 1.4.5. *Para todo ordinal α, valem:*

(1) O complementar de todo conjunto em F_α está em G_α e o complementar de todo conjunto em G_α está em F_α;

(2)A classe aditiva α é fechada para uniões enumeráveis e a classe multiplicativa α é fechada para intersecções enumeráveis;

(3) Uniões e intersecções finitas de elementos de F_α pertencem a F_α. Analogamente para G_α;

(4) H_α é uma álgebra de subconjuntos de I, ou seja, $I \in H_\alpha$ e H_α é fechado para complementação e uniões finitas;

(5) $F_\alpha \subset G_{\alpha+1}$ *e* $G_\alpha \subset F_{\alpha+1}$.

Demonstração. Faremos as demonstrações de (1) e (5). As demais são análogas.

(1) Mostremos que se $A \in F_\alpha$, então $A^C \in G_\alpha$. Faremos isso por meio de indução em α.

Se $\alpha = 0$, então A é um subconjunto fechado de I e sabemos que seu complementar é aberto. Logo $A^C \in G_0$.

Seja $\alpha \geq 1$. Suponha que o resultado seja válido para todo ordinal $0 \leq \beta < \alpha$. Se α é ímpar, então $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, onde $A_n \in F_{\alpha_n}$, com $\alpha_n < \alpha$. Pela hipótese de indução, temos que $A_n^C \in G_{\alpha_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, sabemos que $A^C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^C$. Pela Definição 1.4.3(ii), temos que $A^C \in G_\alpha$. Se α é par, a demonstração é similar. Analogamente mostra-se a segunda parte de (1).

(5) Mostremos que $G_\alpha \subset F_{\alpha+1}$. Tomando-se complementos, temos que $F_\alpha \subset G_{\alpha+1}$. Façamos indução em α.

Se $\alpha = 0$, temos que mostrar que todo aberto de I é um F_σ de I. Seja A um aberto de I, então:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} ((a_n, b_n) \cap I),$$

onde $a_n < b_n$. Como a classe F_σ é fechada para uniões enumeráveis, basta mostrarmos que todo intervalo aberto de I pertence à classe F_σ. Considere o intervalo aberto $(a, b) \cap I$, com $a < b$. Se $0 < a < b < 1$, então:

$$(a, b) \cap I = (a, b) = \bigcup_{n\geq 1} [a + 1/n, b - 1/n]$$

Como cada $[a + 1/n, b - 1/n]$ é fechado de I, temos que $(a, b) \in F_\sigma$. Os outros casos são análogos.

Seja agora $\alpha \geq 1$ um ordinal, e suponha que o resultado seja válido para todo ordinal $0 \leq \beta < \alpha$. Vamos mostrar que $G_\alpha \subset F_{\alpha+1}$. Seja $A \in G_\alpha$. Se α é par, então $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, onde $A_n \in G_{\alpha_n}$ e $\alpha_n < \alpha$. Pela hipótese de indução, temos que $A_n \in F_{\alpha_n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.Note que:

$$\alpha_n < \alpha \Rightarrow \alpha_n + 1 < \alpha + 1.$$

Como $\alpha + 1$ é ímpar, temos que $A \in F_{\alpha+1}$. O caso em que α é ímpar é completamente análogo.

□

Na próxima proposição, veremos que para descrevermos os Borelianos de I, só precisamos dos ordinais enumeráveis.

Proposição 1.4.6. *A σ-álgebra dos borelianos de I é a união das classes G_α para $0 \leq \alpha < \omega_1$.*

Demonstração. Denotemos $\tau = \bigcup_{\alpha<\omega 1} G_\alpha$. É claro que $\tau \subset Bor$, pois todo elemento de τ é obtido dos abertos de I através de operações para as quais Bor é fechado. Precisamos mostrar que $Bor \subset \tau$. τ contém os abertos de I, pois os abertos de I são elementos de G_0 e $G_0 \subset \tau$. Se mostrarmos que τ é σ-álgebra de subconjuntos de I, como τ contém os abertos e Bor é a menor σ-álgebra que contém os abertos de I, teremos que $Bor \subset \tau$.

$I \in \tau$, pois I é aberto de I. Seja $A \in \tau$, então existe um ordinal $\alpha < \omega_1$ tal que $A \in G_\alpha$. Pela Proposição 1.4.5(1), temos que $A^C \in F_\alpha$. pela Proposição 1.4.5(5), temos que $A^C \in G_{\alpha+1}$. Como ω_1 é não enumerável, temos que $\alpha + 1 < \omega_1$. Portanto $A^C \in \tau$. Isso mostra que τ é fechado para complementação.

Mostremos agora, que τ é fechado para uniões enumeráveis. Seja $(A_n)_n \subset \tau$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um ordinal $\alpha_n < \omega_1$ tal que $A_n \in G_{\alpha_n}$. Seja $\beta = \sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$. Note que $\beta < \omega_1$. Assim, $A_n \in G_\beta$ para todo n. Podemos supor que β é par (se for ímpar, tomamos seu sucessor, que será par e menor que ω_1). Então $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in G_\beta$. Assim $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \tau$.

Mostramos que τ é σ-álgebra. Como discutido acima, temos nosso resultado. □

Observação 1.4.7. *Pela Proposição 1.4.5(5) e pela proposição acima, temos que $Bor = \bigcup_{\alpha<\omega_1} F_\alpha$. No Capítulo 2, mostraremos que não existe um ordinal $\beta < \omega_1$ tal que $Bor = \bigcup_{\alpha<\beta} F_\alpha$.*

Em posse desses conceitos, podemos enunciar um resultado clássico que relaciona os Borelianos e as classes de Baire.

Para simplificar a notação, denotaremos:

(i) H_α por K_α, se α é finito;

(ii)$H_{\alpha+1}$ por K_α, se α é infinito.

Definição 1.4.8. *Seja X um conjunto e Σ uma álgebra de subconjuntos de X. Definimos:*

$$B(X,\Sigma) = \overline{span\{C_E : E \in \Sigma\}}^{||\cdot||_\infty} \subset l_\infty(X),$$

onde $l_\infty(X) = \{f : X \to \mathbb{R}$ tal que f é limitada$\}$.

Teorema 1.4.9. ***(Lebesgue-Hausdorff)*** *Seja $\alpha \geq 1$ um ordinal.*

(1) Se α é finito, então $B_\alpha(I) = B(I, H_\alpha) = B(I, K_\alpha)$;

(2) Se α é infinito, então $B_\alpha(I) = B(I, H_{\alpha+1}) = B(I, K_\alpha)$.

Demonstração. Veja Apêndice A, Corolário A.27. □

Observação 1.4.10. *No Apêndice A, faremos a demonstração de uma generalização do Teorema de Lebesgue-Hausdorff e teremos como corolário o Teorema 1.4.9. Na demonstração do Teorema de Lebesgue-Hausdorff generalizado, utilizaremos conceitos e resultados desenvolvidos no Capítulo 5. Assim, recomendamos a leitura do Capítulo 5 antes da leitura do Apêndice A.*

O próximo corolário é de demonstração imediata.

Corolário 1.4.11. *Seja $A \subset I$. Denotemos por C_A a função característica de A. Suponha $\alpha \geq 1$, então:*

$C_A \in B_\alpha(I) \Leftrightarrow A \in K_\alpha$

Usando esse corolário, concluímos que as classes de Baire não são separáveis.

Definição 1.4.12. *Um espaço topológico X é dito separável se existe $D \subset X$, com D enumerável e denso em X.*

Proposição 1.4.13. *Para todo ordinal $\alpha \geq 1, B_\alpha(I)$ não é separável.*

Demonstração. Fixado $t \in I$, como I é Hausdorff, temos que $\{t\}$ é fechado em I. Logo $\{t\} \in H_\alpha$, para todo $\alpha \geq 1$. Pelo Corolário 1.4.11, temos que $C_{\{t\}} \in B_\alpha(I), \forall \alpha \geq 1$.

Note que se $t, s \in I$ são distintos, então $||C_{\{t\}} - C_{\{s\}}||_\infty = 1$. Logo $B_\alpha(I)$ é um espaço normado, que possui um subconjunto não enumerável $\mathfrak{C} = \{C_{\{t\}} : t \in I\}$ tal que a distância entre dois elementos distintos de $\mathfrak{C}$ é igual a 1. Segue facilmente desse fato, que $B_\alpha(I)$ não é separável. $\square$

1.5 Algumas propriedades topológicas de Ω_α

Nesta seção, vamos estabelecer propriedades topológicas de (Ω_α, w^*), que serão fundamentais para o que desenvolveremos ao longo desse trabalho.

Vamos mostrar que I pode ser visto com subconjunto discreto e denso de Ω_α, para todo $\alpha \geq 1$.

O resultado mais importante desta seção é o fato de que (Ω_α, w^*), para todo $\alpha \geq 1$ é zero dimensional.

Definição 1.5.1. *Fixado um ordinal $\alpha \geq 1$, definamos a função:*

$$\tau_\alpha : I \to \Omega_\alpha$$

tal que

$\tau_\alpha(t)(f) = f(t)$, $\forall t \in I$ *e* $\forall f \in B_\alpha(I)$

Ou seja, $\tau_\alpha(t)$ é o que denotamos por φ_t na demonstração do Lema 1.3.4, que como comentamos nessa ocasião pertence a Ω_α. Logo a função τ_α está bem definida.

Proposição 1.5.2. *Para todo ordinal α, a função τ_α é injetora.*

Demonstração. Sejam $t, s \in I$. Suponha que $\tau_\alpha(s) = \tau_\alpha(t)$. Então $\tau_\alpha(s)(f) = \tau_\alpha(t)(f)$ para toda $f \in B_\alpha(I)$. Em particular, como a função identidade, que denotaremos por id, pertence a $B_\alpha(I)$ (pois é contínua), temos que :

$$\tau_\alpha(s)(id) = \tau_\alpha(t)(id) \Rightarrow id(s) = id(t) \Rightarrow s = t$$

Isso mostra que τ_α é injetora. □

Definição 1.5.3. *Um espaço topológico X é dito normal, se dados dois fechados disjuntos A e B, existem abertos disjuntos U e V com $A \subset U$ e $B \subset V$.*

Proposição 1.5.4. *Todo espaço topológico compacto e Hausdorff é normal.*

Demonstração. Sugerimos [36], página 121. □

Para continuarmos, precisamos de dois resultados fundamentais sobre espaços normais.

Lema 1.5.5. *(1) (**Lema de Urysohn**) Sejam X espaço topológico normal e $A, B \subset X$, fechados e disjuntos. Então existe função contínua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f|_A \equiv 0$ e $f|_B \equiv 1$.*

*(2) (**Teorema da extensão de Tietze**) Sejam X espaço topológico normal e $F \subset X$ fechado tal que existe $g : F \to \mathbb{R}$, com g contínua.*

Então, existe $\bar{g} : X \to \mathbb{R}$, com $\bar{g}$ contínua e estendendo g.

Demonstração. Sugerimos [36], página 102 para o Lema de Urysohn e página 103 para o Teorema da extensão de Tietze. □

Existe um outro conceito relacionado ao de normalidade, que será usado futuramente nesse trabalho, a saber o conceito de espaço topológico regular.

Definição 1.5.6. *Um espaço topológico X é dito regular se, e somente se, dados um fechado $A \subset X$ e $x \in X$ com $x \notin A$, existem abertos disjuntos $U, V \subset X$, tais que $x \in U$ e $A \subset V$.*

Proposição 1.5.7. *As seguintes afirmações são equivalentes para um espaço topológico X:*

(a) X é regular;

(b) Se $U \subset X$ é aberto e $x \in U$, então existe um aberto V tal que V contém x e $\overline{V} \subset U$.

Demonstração. Sugerimos [36], página 92. □

A próxima proposição relaciona o conceito de espaço regular e espaço compacto Hausdorff. Ela é consequência imediata da Proposição 1.5.4 e do fato do espaço ser Hausdorff.

Proposição 1.5.8. *Todo espaço topológico compacto Hausdorff é regular.*

Proposição 1.5.9. *Para todo ordinal $\alpha \geq 1$, $\tau_\alpha(I)$ é denso em (Ω_α, w^*).*

Demonstração. Notemos que para toda $F \in C(\Omega_\alpha)$, existe $f \in B_\alpha(I)$, tal que $\chi(f) = F$, pois χ é sobrejetora.

Além disso, para todo $t \in I$ e $f \in B_\alpha(I)$, temos:

$$\chi(f)(\varphi_t) = \varphi_t(f) = f(t)$$

Assim, se $\chi(f)(\tau_\alpha(I)) \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 0$. Note que se $f \equiv 0$, então $\chi(f) \equiv 0$.

Portanto, toda função contínua de Ω_α em $\mathbb{R}$ que se anula em $\tau_\alpha(I)$, também se anula em todo Ω_α.

Suponhamos por absurdo que $\overline{\tau_\alpha(I)}^{w^*} \neq \Omega_\alpha$, então existe $p \in \Omega_\alpha - \overline{\tau_\alpha(I)}^{w^*}$. Como Ω_α é Hausdorff, temos que $\{p\}$ é fechado. Na Seção 2, mostramos que (Ω_α, w^*) é compacto Hausdorff. A Proposição 1.5.4 nos diz que (Ω_α, w^*) é normal. Então $\{p\}$ e $\overline{\tau_\alpha(I)}^{w^*}$ são dois fechados e disjuntos num espaço topológico normal. Pelo Lema de Urysohn, existe $F \in C(\Omega_\alpha)$ tal que $F|_{\overline{\tau_\alpha(I)}^{w^*}} \equiv 0$ e $F(p) = 1$. Como observado acima, $F = \chi(f)$ para alguma $f \in B_\alpha(I)$ e $\chi(f)(\tau_\alpha(I)) \equiv 0$. Portanto $\chi(f) \equiv 0$. Temos assim uma contradição, pois $p \in \Omega_\alpha$ e $\chi(f)(p) \neq 0$.

A contradição surgiu porque supusemos que $\tau_\alpha(I)$ não era denso em (Ω_α, w^*). Isso mostra nosso resultado. □

Proposição 1.5.10. *Para todo ordinal $\alpha \geq 1$, $\tau_\alpha(I)$ é subconjunto discreto de (Ω_α, w^*).*

Demonstração. Seja $t \in I$, sabemos que $\{t\}$ é fechado de I. Logo pelo Corolário 1.4.11, $C_{\{t\}} \in B_\alpha(I)$ para todo ordinal $\alpha \geq 1$.

Consideremos o w^*-aberto de Ω_α, definido da seguinte forma:

$$U = \{\omega \in \Omega_\alpha : |(\omega - \varphi_t)(C_{\{t\}})| < 1/2\}$$

ou seja,

$$U = \{\omega \in \Omega_\alpha : |(\omega(C_{\{t\}}) - 1| < 1/2\}$$

Note que $\tau_\alpha(t) = \varphi_t \in U$ e $U \cap \tau_\alpha(I) = \{\varphi_t\}$.

Mostremos que $U = \{\varphi_t\}$. Seja $\omega \in U$. Como U é aberto, da Proposição 1.5.9 segue que existe rede $(\tau_\alpha(t_\lambda))_\lambda \subset U$ convergindo para ω. Mas, $U \cap \tau_\alpha(I) = \{\varphi_t\}$. O que implica que $\omega = \varphi_t$.

Isso mostra nosso resultado. □

Definição 1.5.11. *Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é totalmente desconexo, se as únicas componentes conexas de X são os conjuntos unitários.*

Observação 1.5.12. *Se X é um espaço topológico tal que dados dois elementos distintos $x_1, x_2 \in X$, existe um conjunto $A \subset X$ com A aberto-fechado em X, tal que $x_1 \in A$ e $x_2 \notin A$, então X é totalmente desconexo.*

Lema 1.5.13. *Fixado um ordinal $\alpha \geq 1$ e $f \in B_\alpha(I)$, são equivalentes:*

(i) f assume apenas os valores 0 e 1;

(ii) $f = C_A$, onde $A \in K_\alpha$;

(iii) $\chi(f)$ assume apenas os valores 0 e 1:

(iv) $\chi(f) = C_B$, onde B é um conjunto aberto-fechado de Ω_α.

Além disso, para A e B como descritos acima, temos:

$B = \overline{\tau_\alpha(A)}$ *e* $A = \tau_\alpha^{-1}(B \cap \tau_\alpha(I))$.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ Definamos $A = f^{-1}(\{1\})$. Por hipótese, f assume apenas os valores 0 e 1, portanto $f = C_A$. Como $f \in B_\alpha(I)$, temos que $A \in K_\alpha$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Calculemos $\chi(f)$ em $\tau_\alpha(I)$:

$$\chi(f)(\varphi_t) = \chi(C_A)(\varphi_t) = \varphi_t(C_A) = C_A(t)$$

Logo $\chi(f)$ assume somente os valores 0 e 1 em $\tau_\alpha(I)$. Como $\chi(f)$ é contínua e $\tau_\alpha(I)$ é denso em Ω_α, temos que $\chi(f)$ só assume os valores 0 e 1.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Definamos $B = \chi(f)^{-1}(\{1\})$. Como $\chi(f)$ assume apenas os valores 0 e 1, temos que $\chi(f) = C_B$. Da definição de B e do fato de $\chi(f)$ ser contínua, segue que B é fechado. Note que $B^C = \chi(f)^{-1}(\{0\})$. Portanto B^C é fechado, o que implica que B é aberto.

Assim, B é um aberto-fechado de Ω_α.

$(iv) \Rightarrow (i)$ $\chi(f) = C_B$. Seja $t \in I$, temos duas possibilidades ou $\varphi_t \in B$ ou $\varphi_t \notin B$.

Se $\varphi_t \in B$, então $f(t) = \varphi_t(f) = \chi(f)(\varphi_t) = 1$.

Se $\varphi_t \notin B$, então $f(t) = \varphi_t(f) = \chi(f)(\varphi_t) = 0$. Logo f só assume os valores 0 e 1.

Mostramos assim a equivalência das afirmações.

Mostremos que para A e B nas condições acima, isto é $f = C_A$ com $A \in K_\alpha$ e $\chi(f) = C_B$ com B aberto-fechado de Ω_α, valem:

(a) $B = \overline{\tau_\alpha(A)}$ Mostremos que $\tau_\alpha(A) \subset B$, o que vai implicar que $\overline{\tau_\alpha(A)} \subset B$, pois B é fechado.

Seja $t \in A$, temos que $C_B(\varphi_t) = \chi(C_A)(\varphi_t) = \varphi_t(C_A) = C_A(t) = 1$. Logo $\varphi_t \in B$. O que mostra que $\tau_\alpha(A) \subset B$.

Mostremos agora, que $B \subset \overline{\tau_\alpha(A)}$. Seja $\omega \in B$, então $C_B(\omega) = 1$, o que implica que $\omega(C_A) = 1$.

Como $\tau_\alpha(I)$ é denso em Ω_α, existe rede $(\varphi_{t_\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ convergindo na topologia w^* para ω. Isso significa que dada $g \in B_\alpha(I)$, temos que $\varphi_{t_\lambda}(g) \xrightarrow{\lambda} \omega(g)$. Em particular, $\varphi_{t_\lambda}(C_A) \xrightarrow{\lambda} \omega(C_A)$.

Pelo visto anteriormente, $\varphi_{t_\lambda}(C_A) \xrightarrow{\lambda} 1$. Portanto, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que:

$$\lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow C_A(t_\lambda) = 1 \Rightarrow t_\lambda \in A.$$

Logo $(\varphi_{t_\lambda})_{\lambda \geq \lambda_0}$ é rede de elementos de $\tau_\alpha(A)$, convergindo para ω na topologia fraca w^*. Isso mostra que $\omega \in \overline{\tau_\alpha(A)}$.

Pelo que fizemos acima, temos que $B = \overline{\tau_\alpha(A)}$.

(b) $A = \tau_\alpha^{-1}(B \cap \tau_\alpha(I))$.

Mostremos que $A \subset \tau_\alpha^{-1}(B \cap \tau_\alpha(I))$. Seja $t \in A$, pelo visto na demonstração de (a), $\varphi_t \in B$. Logo $\tau_\alpha(t) \in B$. O que mostra que $A \subset \tau_\alpha^{-1}(B \cap \tau_\alpha(I))$.

Mostremos agora, que $\tau_\alpha^{-1}(B \cap \tau_\alpha(I)) \subset A$. Seja $t \in \tau_\alpha^{-1}(B \cap \tau_\alpha(I))$, então $\varphi_t \in B$. Temos:

$$1 = C_B(\varphi_t) = \chi(C_A)(\varphi_t) = \varphi_t(C_A) = C_A(t)$$

Portanto $t \in A$. Isso mostra que $\tau_\alpha^{-1}(B \cap \tau_\alpha(I)) \subset A$.

Do que fizemos acima segue que $A = \tau_\alpha^{-1}(B \cap \tau_\alpha(I))$.

□

Para mostrarmos que (Ω_α, w^*) é totalmente desconexo, precisamos ainda de um lema de separação para conjuntos da classe multiplicativa de tipo α com $\alpha \geq 1$.

Lema 1.5.14. *Sejam G_1, G_2 elementos da classe aditiva $\alpha > 0$, então existem H_1, H_2 elementos disjuntos da classe aditiva α tais que:*

$$H_i \subset G_i, i = 1, 2$$

e

$$H_1 \cup H_2 = G_1 \cup G_2.$$

Demonstração. Sugerimos [25], página 350. □

Lema 1.5.15. *Sejam R e S subconjuntos disjuntos de I que pertencem à classe multiplicativa $\alpha > 0$. Então, existem A e B conjuntos disjuntos pertencentes à classe ambígua α tais que $R \subset A$ e $S \subset B$.*

Demonstração. Como R e S são da classe multiplicativa α, temos que R^C, S^C são da classe aditiva α.

Note que:

$$R \cap S = \emptyset \Rightarrow (R \cap S)^C = R^C \cup S^C = I$$

Pelo Lema 1.5.14, existem H_1, H_2 na classe aditiva α com $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, $H_1 \cup H_2 = I$ e $H_1 \subset R^C, H_2 \subset S^C$.

Note que:

$$H_1 \cap H_2 = \emptyset, H_1 \cup H_2 = I \Rightarrow H_1^C = H_2, H_2^C = H_1.$$

Portanto $R \subset H_2$, $S \subset H_1$ e H_1, H_2 pertencem à classe ambígua α, pois os dois pertencem à classe aditiva α e um é o complementar do outro, o que implica que H_1, H_2 pertencem à classe multiplicativa α.

Isso mostra nosso resultado. □

Teorema 1.5.16. *Para todo ordinal $\alpha > 0$, o espaço (Ω_α, w^*) é totalmente desconexo.*

Demonstração. Sejam $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_\alpha$, com $\omega_1 \neq \omega_2$

Para simplificar a notação, denotaremos $\chi(f)$ por $\hat{f}$.

Mostremos que existe $\hat{f} \in C(\Omega_\alpha)$ tal que:

$$U_1 = \{\omega : \hat{f} \geq 1\}, U_2 = \{\omega : \hat{f} \leq 0\}$$

sejam vizinhanças fechadas de ω_1 e ω_2 respectivamente.

Como Ω_α é Hausdorff, temos que $\{\omega_1\}$ e $\{\omega_2\}$ são fechados. Logo $F = \{\omega_1, \omega_2\}$ é fechado. Como F é discreto, toda função com domínio em F é contínua. Definamos $g : F \to \mathbb{R}$, colocando $g(\omega_1) > 1$ e $g(\omega_2) < 0$. Como Ω_α é normal, segue do Teorema da extensão de Tietze, que existe $\bar{g} : \Omega_\alpha \to \mathbb{R}$ contínua que estende g. Logo $\bar{g} \in C(\Omega_\alpha)$, então existe $f \in B_\alpha(I)$ com $\hat{f} = \bar{g}$.

Da continuidade de $\hat{f}$ segue que U_1, U_2 são vizinhanças fechadas de ω_1 e ω_2, respectivamente.

Definamos $A_i = \tau_\alpha^{-1}(U_i \cap \tau_\alpha(I))$ para $i = 1, 2$. É fácil ver que $A_1 = \{t : f(t) \geq 1\}$ e $A_2 = \{t : f(t) \leq 0\}$.

Como $f \in B_\alpha(I)$, temos que A_1 e A_2 estão na classe multiplicativa α, se α for finito e $\alpha+1$, se α for infinito. Além disso, claramente $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Logo, pelo Lema 1.5.15 existem $W_1, W_2 \in K_\alpha$, disjuntos tais que $A_1 \subset W_1$ e $A_2 \subset W_2$.

Definamos $V_i = \overline{\tau_\alpha(W_i)}$ para $i = 1, 2$. Do Lema 1.5.13 segue que V_1 e V_2 são conjuntos aberto-fechados de Ω_α.

Vejamos que V_i é vizinhança de ω_i, para $i = 1, 2$. Para isso, basta mostrarmos que $\omega_i \in V_i$, para $i = 1, 2$.

Como $\tau_\alpha(I)$ é denso em Ω_α, existe rede $(\varphi_{t_\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ convergindo na topologia w^* para ω_i. Como U_i é w^*-vizinhança de ω_i, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que:

$$\lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow \varphi_{t_\lambda} \in U_i.$$

Da definição de A_i, segue que:

$$\lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow t_\lambda \in A_i.$$

Logo:

$$\lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow t_\lambda \in W_i.$$

O que mostra que $\omega_i \in \overline{\tau_\alpha(W_i)} = V_i$.

Mostremos agora, que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Suponha, por absurdo, que exista $\omega \in V_1 \cap V_2$. Então $\omega \in \overline{\tau_\alpha(W_1)} \cap \overline{\tau_\alpha(W_2)}$. Assim, existem redes $(\varphi_{t_\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$, com $t_\lambda \in W_1$ e $(\varphi_{t_\theta})_{\theta \in \Theta}$, com $t_\theta \in W_2$ tais que:

$$\varphi_{t_\lambda} \xrightarrow{w^*} \omega$$

e

$$\varphi_{t_\theta} \xrightarrow{w^*} \omega.$$

Como $C_{W_1} \in B_\alpha(I)$, temos que:

$$1 = \varphi_{t_\lambda}(C_{W_1}) \xrightarrow{\lambda} \omega(C_{W_1}).$$

Logo $\omega(C_{W_1}) = 1$. Também vale que:

$$\varphi_{t_\theta}(C_{W_1}) \xrightarrow{\theta} \omega(C_{W_1}) = 1.$$

Portanto:

$$C_{W_1}(t_\theta) \xrightarrow{\theta} 1.$$

Assim, existe $\theta_0 \in \Theta$ tal que:

$$\theta \geq \theta_0 \Rightarrow C_{W_1}(t_\theta) = 1 \Rightarrow t_\theta \in W_1.$$

Mas, $t_\theta \in W_2, \forall\theta \in \Theta$. Dessa forma, concluímos que $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. Isso é uma contradição, pois W_1 e W_2 são disjuntos por construção. Logo $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Acima, construímos dois conjuntos aberto-fechados disjuntos de Ω_α, V_1 e V_2, tais que $\omega_1 \in V_1$ e $\omega_2 \in V_2$.

Pela Observação 1.5.12, temos que (Ω_α, w^*) é totalmente desconexo. $\square$

Definição 1.5.17. *Dizemos que um espaço topológico X é zero dimensional, se X possui uma base para a topologia formada por conjuntos aberto-fechados.*

O próximo teorema relaciona os conceitos de totalmente desconexo e zero dimensional, para o caso em que estamos trabalhando.

Teorema 1.5.18. *Um espaço topológico compacto, Hausdorff e totalmente desconexo é zero dimensional.*

Demonstração. Sugerimos [36], página 211. $\square$

Em posse de tudo o que desenvolvemos até aqui e do teorema acima, concluímos o próximo resultado.

Corolário 1.5.19. *Para todo ordinal $\alpha \geq 1$, o espaço (Ω_α, w^*) é zero dimensional.*

Capítulo 2

$B_\alpha(I)$ é subespaço próprio de $B_\beta(I)$, $0 \leq \alpha < \beta \leq \omega_1$

Da definição das classes de Baire e do que foi feito no Capítulo 1, segue que $B_\alpha(I)$ é subespaço fechado de $B_\beta(I)$, para $\alpha < \beta$.

Neste capítulo, vamos mostrar que para $0 \leq \alpha < \beta \leq \omega_1$, $B_\alpha(I)$ é subespaço próprio de $B_\beta(I)$.

Inicialmente, mostraremos que dado um ordinal enumerável α, existem Borelianos M_α, A_α do conjunto de Cantor, tais que M_α pertence à classe multiplicativa α, mas não pertence à classe aditiva α e A_α pertence à classe aditiva α, mas não pertence à classe multiplicativa α.

Denotaremos por χ_0 o primeiro cardinal infinito e por ω o primeiro ordinal infinito.

Definição 2.1. *O conjunto de Cantor é o conjunto* $\{0,1\}^\omega = \{f : \omega \to \{0,1\}\}$, *munido da topologia produto. Denotaremos o conjunto de Cantor por* C.

Observação 2.2. *É um resultado clássico que* C *é homeomorfo ao subconjunto de* $[0,1]$ *chamado de conjunto de Cantor ternário, munido da topologia induzida de* $[0,1]$. *Logo* C *é um espaço metrizável. Também é muito conhecido que* C *é compacto, zero dimensional e tem base enumerável.*

Definição 2.3. *A hierarquia dos Borelianos do conjunto de Cantor segue a mesma definição dada para a hierarquia dos Borelianos de* I, *mas nesse caso, são famílias de subconjuntos de* C. *Para* *cada ordinal α:*

(1) Denotaremos por $F_\alpha(C)$ a classe F_α, análoga à descrita na Definição 1.4.2;

(2) Denotaremos por $G_\alpha(C)$ a classe G_α, análoga à descrita na Definição 1.4.3;

(3) Denotaremos por $M_\alpha(C)$ a classe multiplicativa tipo α, como descrita na Definição 1.4.4;

(4) Denotaremos por $A_\alpha(C)$ a classe aditiva tipo α, como descrita na Definição 1.4.4;

(5) Denotaremos por $H_\alpha(C)$ a classe ambígua tipo α, como descrita na Definição 1.4.4.

Observação 2.4. *Na verdade, a hierarquia dos Borelianos é definida como acima, para todo espaço topológico.*

Proposição 2.5. *Para todo ordinal α, valem:*

(1) O complementar de todo conjunto em $F_\alpha(C)$ está em $G_\alpha(C)$ e o complementar de todo conjunto em $G_\alpha(C)$ está em $F_\alpha(C)$;

(2) $A_\alpha(C)$ é fechada para uniões enumeráveis e $M_\alpha(C)$ é fechada para intersecções enumeráveis;

(3) Uniões e intersecções finitas de elementos de $F_\alpha(C)$ pertencem a $F_\alpha(C)$. Analogamente para $G_\alpha(C)$;

(4) $H_\alpha(C)$ é uma álgebra de subconjuntos de C, ou seja, $C \in H_\alpha(C)$ e $H_\alpha(C)$ é fechado para complementação e uniões finitas;

(5) $F_\alpha(C) \subset G_{\alpha+1}(C)$ e $G_\alpha(C) \subset F_{\alpha+1}(C)$.

Demonstração. As demonstraçãoes de (1) até (4) são análogas as da Proposição 1.4.5.

Faremos a demonstração de (5). Pela Observação 2.2, C é metrizável. A demonstração que faremos aqui vale para qualquer espaço metrizável. Seja X espaço metrizável e d uma métrica equivalente em X.

Mostremos que $F_\alpha(X) \subset G_{\alpha+1}(X)$, então tomando complementos e usando (1), teremos também que $G_\alpha(X) \subset F_{\alpha+1}(X)$. Para isso, faremos indução em α.

Para $\alpha = 0$, temos que mostrar que todo fechado de X é um G_δ de X. Seja F um fechado de X. Consideremos a função $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = d(x, F)$, onde $d(x, F)$ é a distância de x ao conjunto F. Sabemos que f é uma função contínua.

Notemos que $F = \bigcap_{n\geq 1} f^{-1}((-\infty, 1/n))$. A igualdade vale pois $x \in F$ se, e somente se, $f(x) = 0$, já que F é fechado. Além disso, cada $f^{-1}((-\infty, 1/n))$ é aberto, pois f é contínua. Isso mostra que F é um G_δ de X. Seja agora $\alpha \geq 1$ um ordinal, e suponha que o resultado seja válido para todo ordinal $0 \leq \beta < \alpha$. Vamos mostrar que $F_\alpha(X) \subset G_{\alpha+1}(X)$. Seja $A \in F_\alpha(X)$. Se α é ímpar, então $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, onde $A_n \in F_{\alpha_n}(X)$ e $\alpha_n < \alpha$. Pela hipótese de indução, temos que $A_n \in G_{\alpha_n+1}(X), \forall n \in \mathbb{N}$.Note que:

$$\alpha_n < \alpha \Rightarrow \alpha_n + 1 < \alpha + 1.$$

Como $\alpha + 1$ é par, temos que $A \in G_{\alpha+1}(X)$. O caso α par é completamente análogo. □

Lema 2.6. *$C^{\chi_0} = \{f : \chi_0 \to C\}$, ou seja, o conjunto das funções de χ_0 em C, munido da topologia produto é homeomorfo a C.*

Demonstração. Sugerimos [36], página 217. □

Definição 2.7. *Definamos recursivamente os seguintes subconjuntos de C:*

(i) $M_0 = \{0\}$, onde 0 é a sequência identicamente nula pertencente a C e $A_0 = M_0^C$;

(ii) Seja $\alpha > 0$ um ordinal enumerável e suponha que A_β, M_β já tenham sido definidos para todo ordinal $\beta < \alpha$.

Então:

Se $\alpha = \beta + 1$, definimos $\widetilde{M_\alpha} = A_\beta^{\chi_0} \subset C^{\chi_0}$. Pelo lema anterior, C^{χ_0} é homeomorfo a C. Fixado um homeomorfismo(o mesmo ao longo dessa definição), definimos M_α como o subconjunto de C correspondente a $\widetilde{M_\alpha}$ por esse homeomorfismo. E definamos $A_\alpha = M_\alpha^C$.

Se α é um ordinal limite, definamos $\widetilde{M_\alpha} = \prod_{1\leq\beta<\alpha} A_\beta \subset C^\alpha$. Fixada enumeração de α, podemos escrever que $\widetilde{M_\alpha} \subset C^{\chi_0}$. Através do homeomorfismo que fixamos entre C e C^{χ_0}, definimos $M_\alpha \subset C$. E definimos $A_\alpha = M_\alpha^C$.

O próximo lema tem demonstração imediata, portanto sua demonstração será omitida.

Lema 2.8. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$, função contínua. Considere $A \subset Y$, então fixado um ordinal α:*

(1) $A \in F_\alpha(Y) \Rightarrow f^{-1}(A) \in F_\alpha(X)$;

(2) $A \in G_\alpha(Y) \Rightarrow f^{-1}(A) \in G_\alpha(X)$.

Teorema 2.9. *Para todo ordinal enumerável α, temos que $M_\alpha \in M_\alpha(C)$ e $A_\alpha \in A_\alpha(C)$.*

Demonstração. Basta mostrarmos que $M_\alpha \in M_\alpha(C)$, pois $A_\alpha = M_\alpha^C$, portanto pela Proposição 2.5(1) $A_\alpha \in A_\alpha(C)$. Façamos indução em α.

Se $\alpha = 0$, então M_0 é um conjunto unitário, como C é Hausdorff, temos que M_0 é fechado. Portanto $M_0 \in F_0(C)$, como 0 é par, temos que $M_0(C) = F_0(C)$. Assim, nosso resultado é válido para $\alpha = 0$.

Seja $0 < \alpha < \omega_1$, suponha que o resultado seja válido para todo ordinal $\beta < \alpha$. Mostremos que o resultado vale para α

(Caso 1) $\alpha = \beta + 1$. Para fixar as idéias, vamos supor que β é par. O caso em que β é ímpar se demonstra de maneira análoga.

Como β é par, pela hipótese de indução, temos que $M_\beta \in F_\beta(C)$. Da Definição 2.7 vem que:

$$\widetilde{M_\alpha} = A_\beta^{\chi_0} = M_\beta^C \times \cdots \times M_\beta^C \times \cdots = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\underbrace{C \times \cdots \times C}_{n-1 \text{ vezes}} \times M_\beta^C \times C \times \cdots)$$

Assim:

$$\widetilde{M_\alpha} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\underbrace{C \times \cdots \times C}_{n-1 \text{ vezes}} \times M_\beta \times C \times \cdots)^C.$$

Vamos mostrar que $\underbrace{C \times \cdots \times C}_{n-1 \text{ vezes}} \times M_\beta \times C \times \cdots \in F_\beta(C^{\chi_0})$.

Para cada n, considere a função $\pi_n : C^{\chi_0} \to C$, a projeção da n-ésima coordenada. Facilmente verifica-se que π_n é contínua, além disso:

$$\underbrace{C \times \cdots \times C}_{n-1 \text{ vezes}} \times M_\beta \times C \times \cdots = \pi_n^{-1}(M_\beta)$$

e $M_\beta \in F_\beta(C)$. Portanto, pelo Lema 2.8, $\underbrace{C \times \cdots \times C}_{n-1 \text{ vezes}} \times M_\beta \times C \times \cdots \in F_\beta(C^{\chi_0})$. Logo $(\underbrace{C \times \cdots \times C}_{n-1 \text{ vezes}} \times M_\beta \times C \times \cdots)^C \in G_\beta(C^{\chi_0})$. Como β é par, da Definição 2.3 vem que:

$$\widetilde{M_\alpha} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\underbrace{C \times \cdots \times C}_{n-1 \text{ vezes}} \times M_\beta \times C \times \cdots)^C \in G_{\beta+1}(C^{\chi_0}) = G_\alpha(C^{\chi_0}).$$

Da definição de M_α e do Lema 2.8, segue que $M_\alpha \in G_\alpha(C)$. Como α é ímpar, temos que $M_\alpha(C) = G_\alpha(C)$.

Isso mostra nosso resultado no caso em que α é um ordinal sucessor.

(Caso 2) α é um ordinal limite. Por definição, temos que $\widetilde{M_\alpha} = \prod_{1 \leq \beta < \alpha} A_\beta$, e pela hipótese de indução cada $M_\beta \in F_\beta(C) \cup G_\beta(C)$. Assim:

$$\begin{aligned} \widetilde{M_\alpha} &= \bigcap_{1 \leq \beta < \alpha} (C \times \cdots \times C \times M_\beta^C \times C \times \cdots) \\ &= \bigcap_{1 \leq \beta < \alpha} (C \times \cdots \times C \times M_\beta \times C \times \cdots)^C, \end{aligned}$$

onde M_β e M_β^C aparecem na β-ésima posição. Pelo mesmo argumento utilizado no caso 1, concluímos que:

$$C \times \cdots \times C \times M_\beta \times C \times \cdots \in F_\beta(C^{\chi_0}) \cup G_\beta(C^{\chi_0}).$$

Logo

$$(C \times \cdots \times C \times M_\beta \times C \times \cdots)^C \in F_\beta(C^{\chi_0}) \cup G_\beta(C^{\chi_0}),$$

onde M_β aparece na β-ésima posição. Para todo ordinal $\beta < \alpha$, temos que $F_\beta(C^{\chi_0}) \subset F_\alpha(C^{\chi_0})$ e $G_\beta(C^{\chi_0}) \subset F_{\beta+1}(C^{\chi_0})$, além disso, como α é um ordinal limite $\beta < \alpha \Rightarrow \beta+1 < \alpha$. Portanto $G_\beta(C^{\chi_0}) \subset F_\alpha(C^{\chi_0})$. Assim:

$$(C \times \cdots \times C \times M_\beta \times C \times \cdots)^C \in F_\alpha(C^{\chi_0}),$$

onde M_β aparece na β-ésima posição. Como α é par, temos que $F_\alpha(C^{\chi_0})$ é fechado para intersecções enumeráveis. Dessa forma:

$$\bigcap_{1\leq\beta<\alpha} (C \times \cdots \times C \times M_\beta \times C \times \cdots)^C \in F_\alpha(C^{\chi_0}),$$

onde M_β aparece na β-ésima posição. Da definição de M_α e do Lema 2.8 segue que $M_\alpha \in F_\alpha(C)$. Como α é par, temos que $M_\alpha(C) = F_\alpha(C)$.

Isso mostra nosso resultado.

□

Agora, vamos trabalhar para mostrar que $M_\alpha \notin A_\alpha(C)$, e consequentemente $A_\alpha \notin M_\alpha(C)$. Para isso, introduziremos o conceito de função universal.

Definição 2.10. *Seja α um ordinal enumerável. Uma função universal da classe multiplicativa α, para um espaço métrico X é uma função $\Phi : Y \to \wp(X)$, onde Y é espaço métrico e $\wp(X)$ denota o conjunto das partes de X, tal que valem:*

(a) Dado B na classe multiplicativa α de X, existe $y_0 \in Y$ tal que $\Phi(y_0) = B$ e $\Phi(y)$ pertence à classe multiplicativa α de X, $\forall y \in Y$;

(b) $\{(x,y) \in X \times Y : x \in \Phi(y)\}$ é um Boreliano de $X \times Y$, pertencente à classe multiplicativa α.

Definimos de forma análoga função universal da classe aditiva α para X.

Lema 2.11. *Seja X espaço topológico zero dimensional com base enumerável.*

Então, todo aberto é união enumerável de aberto-fechados.

Demonstração. Suponha que B_0 seja base enumerável da topologia de X. Mostremos que se B é qualquer base para a topologia de X, então existe $\widetilde{B}$ base enumerável, com $\widetilde{B} \subset B$.

Suponha que $B_0 = \{U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots\}$. Fixado n, como B é base e U_n é aberto, temos que $U_n = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_n} A_\lambda$, onde cada $A_\lambda \in B$. Como X tem base enumerável, temos que todo subespaço de X possui base enumerável. Logo, cada U_n é Lindeloff e $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda_n\}$ é cobertura por abertos de U_n. Portanto, existe $E_n \subset \Lambda_n$, com E_n enumerável tal que $U_n = \bigcup_{\lambda \in E_n} A_\lambda$.

Seja $\widetilde{B} = \bigcup_{n>0}\{A_\lambda : \lambda \in E_n\}$. Note que $\widetilde{B}$ é subconjunto enumerável de B e é base de X.

Como X é zero dimensional, X possui uma base de aberto-fechados. Pelo visto acima, podemos extrair dessa base de aberto-fechados uma subbase enumerável. Isso mostra o lema. □

Teorema 2.12. *Seja X espaço métrico zero dimensional e com base enumerável. Dado $B \subset X$, boreliano da classe multiplicativa (aditiva) α de X, existe uma função contínua $\varphi : X \to C$ tal que $\varphi^{-1}(M_\alpha) = B$ ($\varphi^{-1}(A_\alpha) = B$).*

Demonstração. Note que se mostramos o resultado para a classe multiplicativa, tomando complementos, teremos o resultado para a classe aditiva. Mostremos que vale para a classe multiplicativa, fazendo indução em α.

Se $\alpha = 0$, temos que mostrar que fixado um $B \subset X$, com B fechado, existe uma função contínua $\varphi : X \to C$ tal que $\varphi^{-1}(\{0\}) = B$. Seja $A = B^C$, então A é um aberto de X. Pelo Lema 2.11, podemos escrever $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, onde cada E_n é um aberto-fechado de X. Sabemos que a função característica de cada E_n, $C_{E_n} : X \to \{0, 1\}$ é contínua.

Definamos a função $\varphi : X \to C$, da seguinte forma $\varphi(x) = (C_{E_n}(x))_n$. Como cada C_{E_n} é contínua e estamos com a topologia produto em C, temos que φ é contínua. Mostremos que $\varphi^{-1}(\{0\}) = B$.

$\varphi^{-1}(C - \{0\}) = \{x \in X : \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \in E_n\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = A$.

Tomando complementos, concluímos que $\varphi^{-1}(\{0\}) = B$.

Seja $\alpha > 0$, suponhamos que o resultado seja válido para todo ordinal $\beta < \alpha$. Mostremos que também vale para α.

(Caso 1) $\alpha = \beta + 1$. Seja $B \subset X$, boreliano da classe multiplicativa α.

Podemos escrever $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$, onde cada $B_n \subset X$ é boreliano da classe aditiva β. De fato, se β é par, então α é ímpar. Portanto, temos que $B \in G_\alpha(X)$. O que implica que $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$, com $B_n \in \bigcup_{\lambda<\alpha} G_\lambda(X)$. Logo, $B_n \in G_\beta(X)$. Como β é par, temos que $G_\beta(X)$ é a classe aditiva β. O caso em que β é ímpar, mostra-se de forma análoga.

Pela hipótese de indução, para cada n, existe função contínua $\varphi_n : X \to C$ tal que $\varphi_n^{-1}(A_\beta) = B_n$.

Definamos a função $\widetilde{\varphi} : X \to C^{\chi_0}$ tal que $\widetilde{\varphi}(x) = (\varphi_n(x))_n$. Note que $\widetilde{\varphi}$ é contínua, já que cada φ_n o é. Mostremos que $\widetilde{\varphi}^{-1}(\widetilde{M_\alpha}) = B$.

Da Definição 2.7, vem que $\widetilde{M_\alpha} = A_\beta^{\chi_0}$. Logo:

$$\widetilde{\varphi}^{-1}(\widetilde{M_\alpha}) = \widetilde{\varphi}^{-1}(A_\beta^{\chi_0}) = B_1 \cap B_2 \cap \ldots = B.$$

Definimos $\varphi : X \to C$ como $\varphi = \psi \circ \widetilde{\varphi}$, onde ψ é o homeomorfismo entre C^{χ_0} e C que leva $\widetilde{M_\alpha}$ em M_α. Assim φ é contínua e $\varphi^{-1}(M_\alpha) = B$.

(Caso 2) α é um ordinal limite. Por hipótese, $B \in F_\alpha(X)$. Logo $B = \bigcap_n B_n$, com $B_n \in F_{\beta_n}(X)$, $\beta_n < \alpha$. Podemos supor que todos os β_n são ímpares, caso β_n seja par, trocamos β_n por $\beta_n + 1$ que é ímpar, $B_n \in F_{\beta_n+1}(X)$ e $\beta_n + 1 < \alpha$. Definamos por recursão a seguinte sequência de ordinais:

(i) $\gamma_0 = \beta_0$;

(ii) $\gamma_n = max(\gamma_{n-1}, \beta_n) + 1$, se $max(\gamma_{n-1}, \beta_n)$ for par;

(ii) $\gamma_n = max(\gamma_{n-1}, \beta_n) + 2$, se $max(\gamma_{n-1}, \beta_n)$ for ímpar.

Note que: $\gamma_0 < \gamma_1 < \cdots < \gamma_n < \cdots$, $\gamma_n < \alpha, \forall n$ e $B_n \in F_{\gamma_n}(X)$.

Como γ_n é ímpar, temos que cada B_n pertence à classe aditiva γ_n.

Seja $1 \leq \beta < \alpha$, definamos $C_\beta = B_n$, se $\gamma_n = \beta$ e $C_\beta = X$, se $\beta \neq \gamma_n, \forall n$. Note que X pertence à classe aditiva β, para todo β.

Assim $B = \bigcap_{1\leq\beta<\alpha} C_\beta$, com cada C_β na classe aditiva β de X. Pela hipótese de indução, para cada β, existe função contínua $\varphi_\beta : X \to C$ tal que $\varphi_\beta^{-1}(A_\beta) = C_\beta$. Agora, procedemos da mesma forma que no caso anterior.

□

Definição 2.13. *Sejam X um espaço métrico e Y espaço métrico compacto. Denotaremos por $C(X,Y)$ o conjunto das funções contínuas definidas em X e tomando valores em Y. Seja d uma métrica em Y, definimos a função $\overline{d} : C(X,Y) \times C(X,Y) \to \mathbb{R}$ tal que $\overline{d}(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x),g(x))$. Chamamos $\overline{d}$ de métrica da convergência uniforme.*

Lema 2.14. *A função $\overline{d}$ está bem definida e é uma métrica em $C(X,Y)$.*

Demonstração. Para vermos que $\overline{d}$ está bem definida, basta lembrarmos que a métrica $d : Y\times Y \to \mathbb{R}$ é contínua e $Y \times Y$ é compacto, logo:

$$\overline{d}(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x),g(x)) \leq \sup_{(x,y)\in Y\times Y} d(x,y) < \infty$$

Uma simples verificação nos mostra que $\overline{d}$ satisfaz as condições exigidas para que seja uma métrica em $C(X,Y)$. □

O próximo lema relaciona os borelianos de um espaço topológico X, com borelianos de um subespaço de X. Sua demonstração é simples, portanto será omitida.

Lema 2.15. *Seja X espaço topológico e $A \subset X$, então:*

(1) Se $B \in G_\alpha(A)$ $(B \in F_\alpha(A))$, existe $D \in G_\alpha(X) (D \in F_\alpha(X))$ tal que $B = A \cap D$;

(2) Se $B \in G_\alpha(X)$ $(B \in F_\alpha(X))$, então $B \cap A \in G_\alpha(A) (B\cap A \in F_\alpha(A))$.

Teorema 2.16. *Para cada subespaço X de C, a função $\Phi : C(C,C) \to \wp(X)$, definida como $\Phi(\varphi) = X \cap \varphi^{-1}(M_\alpha)$ é uma função universal da classe multiplicativa α para X. Estamos considerando em $C(C,C)$ a métrica da convergência uniforme $\overline{d}$, onde d é uma métrica equivalente em C.*

Demonstração. Mostremos que $\Phi(\varphi)$ pertence à classe multiplicativa α de X, $\forall\varphi \in C(C,C)$. De acordo com o Teorema 2.9, M_α pertence à classe multiplicativa α de C. Como φ é contínua, pelo Lema 2.8, temos que $\varphi^{-1}(M_\alpha)$ pertence à classe multiplicativa α de C. Do Lema 2.15 vem que $\Phi(\varphi) = X \cap \varphi^{-1}(M_\alpha)$ pertence à classe multiplicativa α de X.

Seja B na classe multiplicativa α de X, pelo Lema 2.15 temos que $B = X \cap D$, com $D \in M_\alpha(C)$. Como C é espaço metrizável, zero dimensional e com base enumerável, pelo Teorema 2.12 existe uma função contínua $\varphi_0 : C \to C$, tal que $\varphi_0^{-1}(M_\alpha) = D$. Logo $\Phi(\varphi_0) = D \cap X = B$ e $\varphi_0 \in C(C,C)$.

O que fizemos acima, mostra que Φ satisfaz a condição (a) da Definição 2.10.

Mostremos agora, que Φ satisfaz a condição (b) da Definição 2.10.

Consideremos a função $\nu : C \times C(C,C) \to C$, definida como $\nu(x,\varphi) = \varphi(x)$. Mostremos que ν é contínua.

Sejam $(x_0,\varphi_0) \in C \times C(C,C)$ e $\epsilon > 0$. Da continuidade de φ_0 em x_0, segue que existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in B(x_0;\delta) \Rightarrow \varphi_0(x) \in B(\varphi_0(x_0);\epsilon/2),$$

onde $B(x;r)$ denota a bola aberta com centro em x e raio $r > 0$.

Mostremos que $\nu(B(x_0;\delta) \times B(\varphi_0;\epsilon/2)) \subset B(\varphi_0(x_0);\epsilon)$.

$$(x,\varphi) \in B(x_0;\delta) \times B(\varphi_0;\epsilon/2) \Rightarrow$$

$$d(\varphi_0(x_0),\varphi(x)) \leq d(\varphi_0(x_0),\varphi_0(x)) + d((\varphi_0(x),\varphi(x)) \leq \frac{\epsilon}{2} + \overline{d}(\varphi_0,\varphi) < \epsilon.$$

Com o feito acima, estabelecemos a continuidade de ν.

Note que:

$$[X \times C(C,C)] \cap \nu^{-1}(M_\alpha) = \{(x,\varphi) \in C \times C(C,C) : x \in X \cap \varphi^{-1}(M_\alpha)\}$$

$$= \{(x,\varphi) \in X \times C(C,C) : x \in \Phi(\varphi)\}.$$

Portanto, da continuidade de ν, do fato de $M_\alpha \in M_\alpha(C)$ e do Lema 2.8, vem que $\nu^{-1}(M_\alpha)$ pertence á classe multiplicativa α de $C \times C(C,C)$. Pelo Lema 2.15, temos que $[X \times C(C,C)] \cap \nu^{-1}(M_\alpha)$ pertence à classe multiplicativa α de $X \times C(C,C)$.

Isso mostra que Φ satisfaz a condição (b) da Definição 2.10.

Assim, temos o resultado. $\square$

Lema 2.17. *Consideremos o conjunto de Cantor C. Uma métrica equivalente em C é dada pela função $d : C \times C \to \mathbb{R}$, tal que $d((x_n)_n, (y_n)_n) = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n - y_n|/2^n$.*

Consideremos C(C,C) dotada da métrica da métrica da convergência uniforme $\overline{d}$.

Então, existe $i : C(C,C) \to C$ tal que i é um homeomorfismo sobre a imagem.

Demonstração. É simples verificar que d acima definida é uma métrica equivalente em C.

Vejamos que $(C(C,C), \overline{d})$ é homeomorfo a $C(C, \{0,1\})^\omega$, com a topologia produto. Note que com $C(C, \{0,1\})^\omega$, estamos denotando as sequências tomando valor em $C(C, \{0,1\})$ e estamos considerando em $C(C, \{0,1\})$ a métrica da convergência uniforme.

Definamos $\varphi : C(C,C) \to C(C, \{0,1\})^\omega$, tal que $\varphi(f) = (\pi_n \circ f)_n$, onde π_n é a projeção da enésima coordenada. Mostremos que φ é homeomorfismo. Para isso, precisamos do seguinte resultado:

Sejam X espaço métrico compacto e M,N espaços métricos. Considere $\Phi : M \to N$, função uniformemente contínua. Então:

$$\Phi_* : C(X, M) \to C(X, N),$$

definida como $\Phi_*(f) = \Phi \circ f, \forall f \in C(X, M)$, é contínua. Estamos dotando $C(X, M)$ e $C(X, N)$ da métrica da convergência uniforme.

A demonstração desse resultado será omitida, pois não apresenta nenhuma dificuldade.

Note que fixado n, $\pi_n : C \to \{0,1\}$ é uniformemente contínua. Logo, pelo resultado mencionado acima, temos que:

$$\pi_{n*} : C(C,C) \to C(C, \{0,1\})$$

é contínua. Mas, $\pi_{n*}(f) = \pi_n \circ f$. Assim, cada coordenada de φ é contínua. O que implica que φ é contínua.

Facilmente verifica-se que φ é injetora, sobrejetora e possui inversa contínua. Portanto, temos que φ é um homeomorfismo.

Agora, mostremos que $C(C,\{0,1\})^\omega$ é homeomorfo a ω^ω (estamos considerando a topologia discreta em ω, e a topologia produto nas sequências com valores em ω, que denotamos por ω^ω).

Note que $C(C,\{0,1\})$ com a métrica da convergência uniforme tem a topologia discreta.

Afirmamos que existe bijeção entre $C(C,\{0,1\})$ e ω, ou seja, que a cardinalidade de $C(C,\{0,1\})$ é χ_0. Se mostrarmos isso, então $C(C,\{0,1\})$ será homeomorfo a ω, pois ambos estão dotados da topologia discreta.

Seja $f \in C(C,\{0,1\})$, então $f^{-1}(1), f^{-1}(0)$ são fechados, logo $f^{-1}(1)$ é um aberto-fechado de C. Podemos escrever $f = C_{f^{-1}(1)}$. Reciprocamente, dado aberto-fechado de C, sua função característica pertence a $C(C,\{0,1\})$. Portanto, a cardinalidade de $C(C,\{0,1\})$ coincide com a cardinalidade do conjunto dos aberto-fechados de C.

Mostremos que a cardinalidade do conjunto dos aberto-fechados de C é χ_0. Seja B um aberto-fechado de C, então B é aberto, portanto B é união de elementos da base de C. Como C é compacto e B é fechado, temos que B é compacto, logo B é uma união finita de elementos da base de C. Como C tem base enumerável, concluímos que a cardinalidade do conjunto dos aberto-fechados de C é menor ou igual a χ_0. Por outro lado, é facil ver que essa cardinalidade é maior ou igual a χ_0. Assim, mostramos a igualdade.

Pelo discutido anteriormente, temos que a cardinalidade de $C(C,\{0,1\})$ coincide com a cardinalidade de ω, logo eles são homeomorfos. Denotemos por $\psi : C(C,\{0,1\}) \to \omega$ um homeomorfismo.

Definamos $\overline{\psi} : C(C,\{0,1\})^\omega \to \omega^\omega$, da seguinte forma $\overline{\psi}(f_1, f_2, \ldots) = (\psi(f_1), \psi(f_2), \ldots)$. É fácil ver que $\overline{\psi}$ é homeomorfismo.

Como $C(C,\{0,1\})^\omega$ é homeomorfo a $C(C,C)$, temos que $C(C,C)$ é homeomorfo a ω^ω.

Agora, vamos ver que existe função de ω^ω em C, que é um homeomorfismo sobre sua imagem.

Bem, é fácil ver que existe função de ω em C, que é homeomorfismo sobre a imagem. Basta mostrarmos que existe subconjunto enumerável em C, que é subconjunto discreto de C. Tome por exemplo $A = \{(1,0,\ldots),(0,1,0,\ldots),(0,0,1,0,\ldots),\ldots\}$.

Portanto, existe homeomorfismo sobre a imagem de ω^ω em C^ω. Mas, de acordo com o Lema

2.6, C^ω é homeomorfo a C. Assim, temos nosso resultado. $\square$

Usando a função i do lema acima, definimos $X = i(C(C,C)) \subset C$. Pelo Teorema 2.16, $\Phi : C(C,C) \to \wp(X)$, definida como $\Phi(\varphi) = X \cap \varphi^{-1}(M_\alpha)$, é função universal da classe multiplicativa α para X.

Logo $\{(x,\varphi) \in X \times C(C,C) : x \in \Phi(\varphi)\}$ pertence à classe multiplicativa α de $X \times C(C,C)$.

Mostremos que $\{(g,\varphi) \in C(C,C) \times C(C,C) : \varphi(i(g)) \in M_\alpha\}$ pertence à classe multiplicativa α de $C(C,C) \times C(C,C)$.

Se $x \in X$, então $x = i(g)$, para algum $g \in C(C,C)$. Portanto, temos que:

$$\{(x,\varphi) \in X \times C(C,C) : x \in \Phi(\varphi)\} = \{(i(g),\varphi) \in X \times C(C,C) : i(g) \in \Phi(\varphi)\}$$

$$= \{(i(g),\varphi) \in X \times C(C,C) : i(g) \in X \cap \varphi^{-1}(M_\alpha)\}$$

$$= \{(i(g),\varphi) \in X \times C(C,C) : \varphi(i(g)) \in M_\alpha\}.$$

Então, o conjunto $\{(i(g),\varphi) \in X \times C(C,C) : \varphi(i(g)) \in M_\alpha\}$ pertence à classe multiplicativa α de $X \times C(C,C)$.

Consideremos a função $I : C(C,C) \times C(C,C) \to X \times C(C,C)$, definida como $I(g,\varphi) = (i(g),\varphi)$. Portanto, $I(g,\varphi) = (i \circ \pi_1(g,\varphi), \pi_2(g,\varphi))$, onde π_i é a projeção da i-ésima coordenada. A função I é contínua.

Notemos que:

$$I^{-1}(\{(i(g),\varphi) \in X \times C(C,C) : \varphi(i(g)) \in M_\alpha\}) = \{(g,\varphi) \in C(C,C) \times C(C,C) : \varphi(i(g)) \in M_\alpha\}.$$

Logo $\{(g,\varphi) \in C(C,C) \times C(C,C) : \varphi(i(g)) \in M_\alpha\}$ pertence à classe multiplicativa α de $C(C,C) \times C(C,C)$.

Considere $\Delta = \{(f,f) : f \in C(C,C)\} \subset C(C,C) \times C(C,C)$. Pelo Lema 2.15, $\Delta \cap \{(g,\varphi) \in C(C,C) \times C(C,C) : \varphi(i(g)) \in M_\alpha\}$ pertence à classe multiplicativa α de Δ.

Definamos $M_\alpha^* = \{f \in C(C,C) : f(i(f)) \in M_\alpha\} \subset C(C,C)$. Mostremos que M_α^* pertence à classe multiplicativa α de $C(C,C)$.

Notemos que $M^*_\alpha = J^{-1}(\{(g,g) \in \Delta : g(i(g)) \in M_\alpha\})$, onde $J : C(C,C) \to \Delta$, definida por $J(f) = (f,f)$. Verifica-se facilmente que J é contínua, além disso:

$$\{(g,g) \in \Delta : g(i(g)) \in M_\alpha\}) = \Delta \cap \{(g,\varphi) \in C(C,C) \times C(C,C) : \varphi(i(g)) \in M_\alpha\},$$

que sabemos pertencer à classe multiplicativa α de Δ. Portanto M^*_α pertence à classe multiplicativa α de $C(C,C)$.

Teorema 2.18. *O conjunto M^*_α não pertence à classe aditiva α de $C(C,C)$.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que M^*_α pertença à classe aditiva α de $C(C,C)$. Como $i : C(C,C) \to i(C(C,C)) \subset C$, cuja existência é garantida pelo Lema 2.17, é um homeomorfismo, temos que $i(M^*_\alpha)$ está na classe aditiva α de $i(C(C,C))$.

Do Lema 2.15, segue que $i(M^*_\alpha) = A \cap i(C(C,C))$, onde A pertence à classe aditiva α de C.

Como A está na classe aditiva α de C, de acordo com o Teorema 2.12, existe função contínua $\varphi : C \to C$ tal que $A = \varphi^{-1}(A_\alpha)$. Logo $i(M^*_\alpha) = \varphi^{-1}(A_\alpha) \cap i(C(C,C))$.

Facilmente verifica-se que para toda $f \in C(C,C)$ vale:

$$f(i(f)) \in M_\alpha \Leftrightarrow \varphi(i(f)) \in A_\alpha.$$

Em particular, tomando-se $f = \varphi$, temos:

$$\varphi(i(\varphi)) \in M_\alpha \Leftrightarrow \varphi(i(\varphi)) \in A_\alpha.$$

Como $C = M_\alpha \cup A_\alpha$ e $\varphi(i(\varphi)) \in C$, temos que:

$$\varphi(i(\varphi)) \in M_\alpha \cap A_\alpha.$$

Mas, $M_\alpha \cap A_\alpha = \emptyset$. Chegamos a uma contradição. A contradição surgiu pois supusemos que M^*_α pertencia à classe aditiva α de $C(C,C)$.

Portanto M^*_α não pertence à classe aditiva α de $C(C,C)$. $\square$

Corolário 2.19. *Fixado um ordinal enumerável α, temos que M_α (A_α) não pertence á classe aditiva α (multiplicativa α) de C.*

Demonstração. Como M_α^* pertence à classe multiplicativa α de $C(C,C)$, que é homeomorfo a um subconjunto de C (portanto $C(C,C)$ é espaço métrico zero dimensional e com base enumerável), pelo Teorema 2.12 existe função contínua $\varphi : C(C,C) \to C$ tal que $M_\alpha^* = \varphi^{-1}(M_\alpha)$.

Logo, se M_α pertencesse à classe aditiva α de C, então M_α^* pertenceria à classe aditiva α de $C(C,C)$. Mas, isso contradiria o Teorema 2.18. Portanto M_α não pertence à classe aditiva α de C.

Tomando complementos, temos que A_α não pertence à classe multiplicativa α. □

Observação 2.20. *M_α não pertence a nenhuma classe aditiva ou multiplicativa de tipo inferior a α. De fato, se M_α pertencesse a uma classe aditiva ou multiplicativa de tipo inferior a α, então M_α pertenceria à classe aditiva α, o que não ocorre. Analogamente para A_α.*

Agora, utilizaremos tudo o que foi desenvolvido atá aqui para concluirmos que para $0 \leq \alpha < \beta \leq \omega_1$, $B_\alpha(I)$ é subespaço próprio de $B_\beta(I)$.

Como comentado na Observação 2.2, C é homeomorfo a um subconjunto de I, o conjunto ternário de Cantor, que denotaremos por K.

K é subconjunto fechado de I, logo pertence a F_0. O que implica que K pertence à classe ambígua 1 e portanto à classe ambígua α, para todo $\alpha \geq 1$.

Note que se $A \subset K$ pertence a $F_\alpha(K)(G_\alpha(K))$, então A pertence a $F_\alpha(I)(G_\alpha(I))$, para todo $\alpha \geq 1$. Esse fato segue facilmente do Lema 2.15.

Teorema 2.21. *Dado um ordinal α, com $1 \leq \alpha < \omega_1$, existe D_α um boreliano de I, tal que D_α pertence à classe multiplicativa α de I, mas não pertence à classe aditiva α de I.*

Demonstração. Considere $\psi : C \to K$, um homeomorfismo entre C e K. Então $\psi(M_\alpha)$ pertence à classe multiplicativa α de K e não pertence à classe aditiva α de K.

Pelo observado anteriormente, $\psi(M_\alpha)$ pertence à classe multiplicativa α de I e não pertence à classe aditiva α de I. □

Observação 2.22. *No Capítulo 1, mostramos que $Bor = \bigcup_{\alpha<\omega_1} F_\alpha$. De acordo com o Teorema 2.21, a hierarquia dos borelianos de I é estritamente crescente até ω_1.*

Teorema 2.23. *Se $0 \leq \alpha < \beta \leq \omega_1$, então $B_\alpha(I)$ é subespaço próprio de $B_\beta(I)$.*

Demonstração. Basta mostrarmos que fixados α, β de acordo com o enunciado, existe $f \in B_\beta(I)$, tal que $f \notin B_\alpha(I)$.

(Caso 1) $\alpha = 0$. Considere a sequência de funções contínuas $f_n : I \to \mathbb{R}$, definida por $f_n(t) = t^n$. Essa sequência converge pontualmente para a função $f : I \to \mathbb{R}$ tal que $f(1) = 1$ e $f(t) = 0, \forall t \neq 1$.

Logo $f \in B_1(I)$, mas f não é contínua. Como $B_1(I) \subset B_\beta(I)$, para todo $\beta \geq 1$, temos nosso resutado.

(Caso 2) $\alpha \neq 0$ e β finito. Pelo Teorema 2.21, existe D_α pertencente à classe multiplicativa α de I, mas que não pertence à classe aditiva α de I. Portanto D_α pertence à classe ambígua β, mas não pertence à classe ambígua α. Pelo Teorema de Lebesgue-Hausdorrf, C_{D_α} pertence a $B_\beta(I)$, mas não pertence a $B_\alpha(I)$.

(Caso 3) β infinito e $\beta < \omega_1$. Pelo Teorema 2.21, existe D_β pertencente á classe multiplicativa β de I e não pertencente à classe aditiva β de I. Logo D_β pertence à classe ambígua $\beta + 1$, mas não pertence nem à classe ambígua $\alpha + 1$ nem α. Pelo Teorema de Lebesgue-Hausdorff, C_{D_β} pertence a $B_\beta(I)$, mas não pertence a $B_\alpha(I)$.

(Caso 4) $\beta = \omega_1$. Como $\alpha < \beta$, existe um ordinal enumerável γ tal que $\alpha < \gamma < \omega_1$. Assim, usando os casos anteriores mostramos que existe elemento em $B_\gamma(I)$ que não pertence a $B_\alpha(I)$. Como $B_\gamma(I) \subset B_{\omega_1}(I)$, temos o resultado.

□

Observação 2.24. *No Capítulo 1, mostramos que $B_{\omega_1}(I)$ era fechado para a convergência pontual. Segue desse fato e do Teorema 2.23 que $B_{\omega_1}(I)$ é a menor família de funções que contém as funções contínuas e é fechado para a convergência pontual.*

Capítulo 3

Não complementação de $C(I)$ em $B_\alpha(I)$ e projeções em subespaços de espaços da forma $C(K)$

Neste capítulo, iniciarems nosso estudo sobre a seguinte questão:

Para $0 \leq \alpha < \beta \leq \omega_1$, podemos ter $B_\alpha(I)$ subespaço complementado de $B_\beta(I)$?

Essa pergunta será respondida negativamente pelo que desenvolveremos ao longo deste capítulo e do Capítulo 5.

No presente capítulo, demonstraremos que $C(I)$ não é subespaço complementado de $B_\beta(I)$ para $\beta \geq 1$.

Além disso, desenvolveremos a teoria necessária sobre projeções em subespaços de espaços de funções contínuas, para que no Capítulo 5, possamos provar o resultado de não complementação geral para as classes de Baire.

Na primeira seção, faremos uma breve exposição sobre o dual de espaços de funções contínuas sobre um compacto Hausdorff. A representação dos funcionais lineares desse dual, como medidas será amplamente explorada ao longo desse trabalho.

3.1 Duais de espaços da forma $C(K)$

Consideremos K um compacto Hausdorff, nesta seção vamos estudar um pouco o dual do espaço de Banach $(C(K), ||.||_\infty)$.

O resultado mais importante desta seção é o Teorema de representação de Riesz 3.1.12, segundo o qual cada funcional linear de $C(K)^*$ pode ser representado por uma única medida em $M(K)$.

Dessa forma, para que possamos entender esse resultado, precisamos introduzir alguns conceitos de teoria de medida.

Nos capítulos anteriores, lidamos com uma única σ-álgebra, a σ-álgebra dos borelianos de I, que denotamos por Bor.

Agora, faz-se necessário trabalharmos com a idéia abstrata de σ-álgebra.

Definição 3.1.1. *Sejam X um conjunto e $\Sigma \subset \wp(X)$.*

Dizemos que Σ é σ-álgebra de subconjuntos de X se, e somente se, valerem:

(i) $\emptyset \in \Sigma$;

(ii) Se $A \in \Sigma$, então $A^C \in \Sigma$;

(iii) Se $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$, então $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \Sigma$.

Definição 3.1.2. *Sejam X um conjunto e $D \subset \wp(X)$, com $D \neq \emptyset$. Então, a σ-álgebra gerada por D é a menor σ-álgebra que contém D.*

Definição 3.1.3. *Considere X um espaço topológico. Os borelianos de X são os conjuntos pertencentes á σ-álgebra gerada pelos abertos de X.*

Definição 3.1.4. *Sejam X um conjunto e Σ uma σ-álgebra de subconjuntos de X. O par (X, Σ) é chamado de espaço mensurável. Sejam (X_1, Σ_1) e (X_2, Σ_2) espaços mensuráveis e $f : X_1 \to X_2$. Dizemos que f é mensurável se, e somente se, $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$ para todo $A \in \Sigma_2$.*

No caso especial do contradomínio de f ser $\mathbb{R}$, consideramos Σ_2 como a σ-álgebra dos borelianos. Ou seja, se (X, Σ) for um espaço mensurável e $f : X \to \mathbb{R}$, dizemos que f é Σ-

mensurável se, e somente se, $f^{-1}(U) \in \Sigma$*, para todo* $U \subset \mathbb{R}$ *boreliano. O que é equivalente a dizer que,* $f^{-1}(U) \in \Sigma$ *para todo* $U \subset \mathbb{R}$ *aberto.*

Definição 3.1.5. *Considere* (X, Σ) *um espaço mensurável. Uma medida (*σ*-aditiva)* μ *nesse espaço é uma função* $\mu : \Sigma \to [-\infty, \infty]$*, tal que:*

(1) $\mu(\emptyset) = 0$*;*

(2) Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ *é família disjunta, então*

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

Definição 3.1.6. *(1) Considere* X *um espaço topológico, uma medida definida na* σ*-álgebra dos Borelianos de* X *é denominada de medida boreliana;*

(2) Dizemos que uma medida μ *é positiva se, e somente se,* μ *só assume valores não negativos;*

(3) Dizemos que uma medida μ *é finita se, e somente se,* μ *só assume valores reais.*

Definição 3.1.7. *Sejam* (X, Σ) *um espaço mensurável e* μ *uma medida nesse espaço. Definimos a função* $|\mu| : \Sigma \to [0, \infty]$ *como:*

$|\mu|(E) = \sup\{\sum_{n=0}^{\infty} |\mu(E_n)| : (E_n)_n$ *é partição de* $E\}$.

Denominamos a função $|\mu|$ *de variação de* μ*.*

Definimos a variação total de μ*, que denotaremos por* $||\mu||$*, como:*

$$||\mu|| = |\mu|(X).$$

Proposição 3.1.8. *Sejam* (X, Σ) *um espaço mensurável e* μ *uma medida nesse espaço.*

Então, a variação de μ *é uma medida positiva nesse espaço.*

Demonstração. Sugerimos [31], página 118. □

Definição 3.1.9. *Consideremos* K *um compacto Hausdorff. Uma medida boreliana finita* μ *em* K *é dita regular se, e somente se:*

$|\mu|(E) = \sup\{|\mu|(F) : F \subset E \text{ é fechado }\}$.

Equivalentemente:

$|\mu|(E) = \inf\{|\mu|(U) : E \subset U \text{ é aberto }\}$.

Agora, estamos em posição de definirmos $M(K)$.

Definição 3.1.10. *Seja K um compacto Hausdorff, definimos:*

$M(K) = \{\mu : \mu$ *é medida boreliana finita, regular e de variação total finita em* $K\}$.

A demonstração da próxima proposição não apresenta dificuldades, logo será omitida.

Proposição 3.1.11. *Seja K um compacto Hausdorff. Se dotarmos $M(K)$ das operações ponto a ponto, $M(K)$ se torna um espaço vetorial.*

A função que associa a cada elemento de $M(K)$ sua variação total é uma norma. Além disso, $(M(K), ||.||)$ é um espaço de Banach.

Teorema 3.1.12. *Seja K um espaço topológico compacto Hausdorff. Os espaços $C(K)^*$ e $(M(K), ||.||)$ são espaços de Banach linearmente isométricos.*

Sendo que a isometria entre eles associa a cada medida μ de $M(K)$ o funcional linear φ_μ, definido como:

$$\varphi_\mu(f) = \int_K f d\mu, \forall f \in C(K).$$

Demonstração. Sugerimos [31], página 131. □

Observação 3.1.13. *Para definição e propriedades da integral com respeito a medidas σ-aditivas, sugerimos [31].*

3.2 Não complementação de $C(I)$ em $B_\alpha(I)$, $\alpha \geq 1$

Nesta seção, vamos mostrar que a classe de Baire 0, ou seja, $C(I)$ não é subespaço complementado de $B_\alpha(I)$, para todo ordinal $\alpha \geq 1$.

Definição 3.2.1. *Sejam X um espaço de Banach e Y subespaço fechado de X, dizemos que Y é subespaço complementado de X se, e somente se, existir operador linear contínuo $P : X \to Y$, tal que $P(y) = y, \forall y \in Y$. Nesse caso, dizemos que P é projeção de X em Y.*

Para fixar notação, definamos alguns espacos de Banach clássicos que usaremos ao longo desse trabalho.

Definição 3.2.2. *(1) $l_\infty = \{(x_n)_n : n \in \mathbb{N}, x_n \in \mathbb{R}$ e $(x_n)_n$ é limitada$\}$.*

l_∞ se torna um espaço de Banach quando dotado das operações ponto a ponto e da seguinte norma:

$$||(x_n)_n||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

(2) $c = \{(x_n)_n \in l_\infty : (x_n)_n$ é sequência convergente$\}$.

É fácil ver que c é subespaço fechado de $(l_\infty, ||.||_\infty)$. Portanto, $(c, ||.||_\infty)$ é um espaço de Banach;

(3) $c_0 = \{(x_n)_n \in l_\infty : (x_n)_n$ converge para $0\}$. O espaço $(c_0, ||.||_\infty)$ também é um espaço de Banach.

Na nossa demonstração de não complementação, faremos uso de resultados envolvendo o conceito de espaço de Grothendieck, que definiremos a seguir.

Definição 3.2.3. *Seja X um espaço de Banach. Dizemos que X é um espaço de Grothendieck se, e somente se, toda sequência w^*-convergente em X^* é w-convergente.*

Teorema 3.2.4. *(1) $(c, ||.||_\infty)$ é separável;*

(2) $(c_0, ||.||_\infty)$ não é reflexivo;

(3) $(l_\infty, ||.||_\infty)$ é Grothendieck.

Demonstração. Sugerimos [14], página 14 para (1) e página 74 para (2). Para (3), veja [9], página 103. □

Usaremos uma caracterização dos espaços de Grothendieck. Mas, para entendermos esse resultado, precisamos da noção de operador fracamente compacto.

Definição 3.2.5. *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ operador linear e contínuo.*

Dizemos que T é fracamente compacto se, e somente se, $T(B_X)$ é relativamente compacto na topologia fraca de Y, onde B_X denota a bola unitária de X.

Teorema 3.2.6. *Seja X um espaço de Banach. Então X é Grothendieck se, e somente se, todo operador linear contínuo de X num espaço separável é fracamente compacto.*

Demonstração. Sugerimos [8], página 150. □

Para demonstrar o Teorema 3.2.10, também precisaremos do Teorema de Mazur (Teorema 3.2.7) e de uma caracterização dos espaços de Banach cuja bola unitária é compacta na topologia fraca (Teorema 3.2.8).

Teorema 3.2.7. ***(Teorema de Mazur)*** *Sejam $(X, ||.||)$ um espaço de Banach e $C \subset X$ convexo.*

Então $\overline{C}^{||\cdot||} = \overline{C}^{w}$

Demonstração. Sugerimos [14], página 70. □

Teorema 3.2.8. *Seja X um espaço de Banach. Então (B_X, w) é compacto se, e somente se, X é reflexivo.*

Demonstração. Sugerimos [14], página 75. □

Agora, temos todas as ferramentas necessárias para demonstrar o Teorema 3.2.10. Note que esse resultado vale para espaços topológicos mais gerais que I.

Observação 3.2.9. *Se X é um espaço topológico, definimos as classes de Baire sobre X, do mesmo modo que definimos as classes de Baire sobre I. Veja Capítulo 5, Definição 5.1.1.*

Teorema 3.2.10. *Seja X um compacto Hausdorff que possui uma sequência convergente não eventualmente constante.*

Então, não existe projeção linear contínua de $B_\alpha(X)$ em $C(X)$, para todo $\alpha \geq 1$.

Demonstração. Seja $(y_n)_n \subset X$, sequência convergente para $x \in X$, com $y_n \neq y_m$ se $n \neq m$.

Vamos construir sequências $(x_n)_n$ e $(V_n)_n$, tais que:

(i) $(x_n)_n$ é subsequência de $(y_n)_n$;

(ii) V_n é aberto de X, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(iii) $x_n \in V_n, \forall n \in \mathbb{N}$ e $V_n \cap V_m = \emptyset$ se $n \neq m$.

Definamos x_0 como sendo qualquer y_n distinto de x.

Assim, temos que $x_0 \neq x$. Como X é compacto Hausdorff, existem abertos disjuntos V_0, U_0, com $x_0 \in V_0$ e $x \in U_0$. Como $(y_n)_n$ converge para x, existe n arbitrariamente grande com $y_n \in U_0$.

Definamos x_1 como sendo um y_n que pertença a U_0, seja distinto de x e n seja maior que o índice do elemento de $(y_n)_n$ que usamos para definir x_0. Analogamente ao feito anteriormente, existem V_1, U_1 abertos disjuntos tais que $x_1 \in V_1$ e $x \in U_1$. Note que podemos supor que $V_1, U_1 \subset U_0$.

Continuando com esse processo, construímos as sequências $(x_n)_n, (V_n)_n$ desejadas.

Fixado $n \in \mathbb{N}$, temos que $\{x_n\}$ e V_n^C são fechados disjuntos. Como X é normal,´pelo Lema de Urysohn, existe $g_n \in C(X)$ com $0 \leq g_n \leq 1$, $g_n(x_n) = 1$ e $g_n|_{V_n^C} = 0$. Temos assim que $(g_n)_n \subset C(X)$.

Consideremos a função $Q : l_\infty \to B_1(X)$, definida como $Q((t_n)_n) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n.g_n$, para todo $(t_n)_n \in l_\infty$.

Mostremos algumas propriedades de Q:

(i) Q está bem definida, ou seja, $\sum_{n=0}^{\infty} t_n.g_n \in B_1(X), \forall (t_n)_n \in l_\infty$.

Seja $(t_n)_n \in l_\infty$. Note que a sequência $(\sum_{j=0}^{n} t_j.g_j)_n$ está contida em $C(X)$ e é uniformemente limitada. De fato, vejamos que essa sequência é uniformemente limitada.

Fixemos $n \in \mathbb{N}$. Se $x \in X$, temos as seguintes possibilidades:

(Caso 1) x não pertence a nenhum V_n. Então $||\sum_{j=0}^{n} t_j.g_j(x)||_\infty = 0$;

(Caso 2) $x \in V_{n_0}$ e $n_0 \leq n$. Então $||\sum_{j=0}^{n} t_j.g_j(x)||_\infty = |t_{n_0}.g_{n_0}(x)| \leq |t_{n_0}| \leq ||(t_n)_n||_\infty$;

(Caso 3) $x \in V_{n_0}$ e $n_0 > n$. Então $||\sum_{j=0}^{n} t_j.g_j(x)||_\infty = 0$.

Portanto, temos que:

$$||\sum_{j=0}^{n} t_j.g_j(x)||_\infty \leq ||(t_n)_n||_\infty,$$

para todo $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$.

Assim, para concluirmos que $Q((t_n)_n) \in B_1(X)$, basta mostrarmos que $(\sum_{j=0}^{n} t_j.g_j)_n$ é pontualmente convergente em X, já que seu limite em cada $x \in X$ é $Q((t_n)_n)(x)$.

Seja $x \in X$, temos duas possibilidades, a saber, existe único $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in V_m$, ou $x \notin V_n, \forall n \in \mathbb{N}$. No primeiro caso, temos que $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} t_j.g_j(x) = t_m.g_m(x)$. Já no segundo caso, ficamos com $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} t_j.g_j(x) = 0$. Com isso, estabelecemos a convergência pontual.

(ii) É fácil ver que Q é linear.

(iii) Q é contínua. Seja $(t_n)_n \in l_\infty$. Então:

$$||Q((t_n)_n)||_\infty = ||\sum_{n=0}^{\infty} t_n.g_n||_\infty = \sup_{x\in X} |\sum_{n=0}^{\infty} t_n.g_n(x)| \leq ||(t_n)_n||_\infty.$$

Isso mostra a continuidade de Q.

(iv) $Q(c_0) \subset C(X)$. Seja $(t_n)_n \in c_0$. Mostremos que a convergência

$$\sum_{j=0}^{n} t_n.g_n(x) \overset{n\to\infty}{\rightarrow} \sum_{j=0}^{\infty} t_j.g_j(x)$$

é uniforme em X, o que vai implicar que $Q((t_n)_n) \in C(X)$.

Dado $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que:

$$n \geq N \Rightarrow |t_n| < \epsilon.$$

Seja $x \in X$, então:

$|\sum_{n=N}^{\infty} t_n.g_n(x)| = 0$ ou $|\sum_{n=N}^{\infty} t_n.g_n(x)| = |t_n|$ com $n \geq N$. Portanto:

$$|\sum_{n=N}^{\infty} t_n.g_n(x)| < \epsilon.$$

Para todo $x \in X$. Isso implica a convergência uniforme.

Consideremos a função $T : C(X) \to c$, definida como $T(f) = (f(x_n))_n, \forall f \in C(X)$.

Vamos mostrar que T está bem definida, é linear e contínua.

(i) T está bem definida. Isto é, temos que mostrar que $T(f) \in c, \forall f \in C(X)$.

Seja $f \in C(X)$. Como a sequência $(x_n)_n$ é convergente e f é contínua, então a sequência $(f(x_n))_n$ também é convergente. Logo $T(f) \in c$.

(ii) É fácil ver que T é linear.

(iii) T é contínua. Seja $f \in C(X)$. Então:

$$||T(f)||_\infty = ||(f(x_n))_n||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f(x_n)| \leq \sup_{x\in X} |f(x)| = ||f||_\infty.$$

Isso mostra a continuidade de T.

Agora, vamos usar as funções T e Q acima construídas, para mostrar que não existe projeção linear contínua de $B_1(X)$ em $C(X)$. Suponhamos, por absurdo, que exista $P : B_1(X) \to C(X)$ projeção linear e contínua.

Consideremos o seguinte operador linear contínuo:

$$T \circ P \circ Q : l_\infty \to c.$$

De acordo com o Teorema 3.2.4 (3) e (1), l_∞ é Grothendieck e c é separável. Portanto, pelo Teorema 3.2.6, temos que $T \circ P \circ Q$ é operador fracamente compacto.

Assim, $T \circ P \circ Q(B_{l_\infty})$ é conjunto relativamente fracamente compacto em c. Ou seja, está contido num subconjunto fracamente compacto de c. Como $c_0 \subset l_\infty$, temos que $T \circ P \circ Q(B_{c_0})$ também é relativamente fracamente compacto em c.

Notemos que:

$$(t_n)_n \in c_0 \Rightarrow T \circ P \circ Q((t_n)_n) = (t_n)_n.$$

De fato, $Q((t_n)_n) = \sum_{j=0}^{\infty} t_j.g_j \in C(X)$. Logo, $P \circ Q((t_n)_n) = \sum_{j=0}^{\infty} t_j.g_j$.

Assim, temos que:

$$T \circ P \circ Q((t_n)_n) = T(\sum_{j=0}^{\infty} t_j.g_j) = ((\sum_{j=0}^{\infty} t_j.g_j)(x_n))_n = (t_n)_n.$$

Portanto, $T \circ P \circ Q(B_{c_0}) = B_{c_0}$. Dessa forma, temos que B_{c_0} é relativamente fracamente compacto em c. Isso significa que $\overline{B_{c_0}}^w$ é fracamente compacto em c.

Note que B_{c_0} é subconjunto fechado na norma em c_0. Portanto, como c_0 é subconjunto fechado de c na norma, temos que B_{c_0} é fechado na norma em c.

Além disso, B_{c_0} é convexo em c. Portanto, o Teorema 3.2.7 nos diz que $\overline{B_{c_0}}^w = B_{c_0}$ em c. Assim, concluímos que B_{c_0} é fracamento compacto em c. Dessa forma, B_{c_0} é fracamento compacto em c_0.

De acordo com o Teorema 3.2.8, teríamos que c_0 é reflexivo, o que é uma contradição. A contradição surgiu pois supusemos que $C(X)$ era subespaço complementado de $B_1(X)$.

Concluímos, que $C(X)$ não é subespaço complementado de $B_1(X)$.

Tendo em vista que $C(X)$ não é subespaço complementado de $B_1(X)$, temos que $C(X)$ não é subespaço complementado de $B_\alpha(X)$, para todo $\alpha \geq 1$. De fato, suponhamos que exista $P : B_\alpha(X) \to C(X)$ projeção linear contínua. Então, a restrição de P a $B_1(X)$ seria projeção de $B_1(X)$ em $C(X)$, que não pode existir. $\square$

Teorema 3.2.11. *$C(I)$ não é subespaço complementado de $B_\alpha(I)$, para todo $\alpha \geq 1$.*

Demonstração. Como I é compacto Hausdorff e possui sequência convergente não eventualmente constante, o Teorema 3.2.10 mostra nosso resultado. $\square$

3.3 Projeções em subespaços de espaços da forma $C(K)$ e operadores de média

Nesta seção, vamos apresentar algumas idéias presentes no trabalho de S. Ditor [10], que serão fundamentais para que no Capítulo 5 obtenhamos o resultado geral de não complementação das classes de Baire como subespaços fechados umas das outras.

A idéia central do que apresentaremos a seguir é associar a uma função contínua entre dois compactos Hausdorff $\Phi : S \to T$ um operador linear contínuo $u : C(S) \to C(T)$, que denominamos de operador de média para Φ, de forma que a questão sobre a complementação de um certo subespaço fechado de $C(T)$, que está naturalmente relacionado a Φ, seja equivalente à existência ou não de um operador de média para Φ.

Os resultados obtidos nesta seção serão usados para a obtenção de resultados de não complementação das classes de Baire, devido ao fato de que cada classe de Baire pode ser vista como um $C(K)$, como discutido no Capítulo 1.

Definição 3.3.1. *Sejam S, T compactos Hausdorff e $\Phi : S \to T$ função contínua. Definimos a função $\Phi^0 : C(T) \to C(S)$ da seguinte forma:*

$$\Phi^0(f)(s) = f(\Phi(s)), f \in C(T), s \in S$$

Proposição 3.3.2. *Suponha que $\Phi : S \to T$ seja contínua e sobrejetora, então Φ^0 definida acima é isomorfismo isométrico de álgebras de Banach sobre sua imagem.*

Demonstração. É simples ver que valem:

$$\Phi^0(f + \lambda.g) = \Phi^0(f) + \lambda.\Phi^0(g), \forall f, g \in C(T), \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Phi^0(f.g) = \Phi^0(f).\Phi^0(g), \forall f, g \in C(T)$$

$$\Phi^0(1_T) = \Phi^0(1_S).$$

Logo, Φ^0 é homomorfismo entre álgebras com unidade.

Mostremos que Φ^0 preserva norma, o que também vai implicar a injetividade de Φ^0. Seja $f \in C(T)$, temos:

$$||\Phi^0(f)||_\infty = \sup_{s\in S} |\Phi^0(f)(s)| = \sup_{s\in S} |f(\Phi(s))|.$$

Como Φ é sobrejetora:

$$||\Phi^0(f)||_\infty = \sup_{t\in T} |f(t)| = ||f||_\infty.$$

□

Observação 3.3.3. *Note que $\Phi^0(C(T))$ é subálgebra fechada de $C(S)$, pois pela Proposição 3.3.2, $\Phi^0(C(T))$ é isomorfo (como álgebra de Banach) a $C(T)$ que é álgebra de Banach.*

Agora, vamos introduzir o conceito de operadores de média.

Definição 3.3.4. *Considere $\Phi : S \to T$, função contínua. Como descrito na Definição 3.3.1, Φ induz $\Phi^0 : C(T) \to C(S)$.*

Dizemos que um operador linear contínuo $u : C(S) \to C(T)$ é operador de média para Φ se, e somente se, $u \circ \Phi^0(f) = f, \forall f \in C(T)$.

Vejamos algumas propriedades básicas de um operador de média.

Proposição 3.3.5. *Seja $u : C(S) \to C(T)$ um operador de média para Φ.*

Então:

(1) u é sobrejetor;

(2) $u(1_S) = 1_T$;

(3) $||u|| \geq 1$.

Demonstração. (1) Seja $f \in C(T)$. Pela definição de operador de média, temos que $u(\Phi^0(f)) = f$.

Portanto, u é sobrejetor.

(2) Pela Proposição 3.3.2, temos que $1_S = \Phi^0(1_T)$. Portanto, $u(1_S) = u(\Phi^0(1_T)) = 1_T$.

(3) Notemos que $||u \circ \Phi^0|| = 1$. Logo, temos que:

$$1 = ||u \circ \Phi^0|| \leq ||u||.||\Phi^0|| = ||u||,$$

na última igualdade, estamos usando o fato de que $||\Phi^0|| = 1$, mostrado na Proposição 3.3.2.

Dessa forma, $||u|| \geq 1$.

□

Na próxima proposição, veremos que a existência de operador de média para Φ implica a sobrejetividade de Φ.

Proposição 3.3.6. *Sejam S, T compactos Hausdorff e $\Phi : S \to T$ função contínua. Suponha que $u : C(S) \to C(T)$ seja um operador de média para Φ.*

Então Φ é sobrejetora.

Demonstração. Inicialmente, mostremos que a existência de u implica a injetividade de $\Phi^0 : C(T) \to C(S)$.

Sejam $f, g \in C(T)$ com $\Phi^0(f) = \Phi^0(g)$. Então, temos que $u(\Phi^0(f)) = u(\Phi^0(g))$. Portanto, $f = g$. Isso estabelece a injetividade de Φ^0.

Agora, vamos mostrar que Φ^0 injetora implica que Φ é sobrejetora.

Suponha, por absurdo, que Φ não seja sobrejetora. Então, existe $t_0 \in T - \Phi(S)$.

Da continuidade de Φ e do fato de S ser compacto e T hausdorff, segue que Φ é função fechada. Logo $\Phi(S)$ é fechado de T.

Assim, $\{t_0\}$ e $\Phi(S)$ são fechados disjuntos de T. Da normalidade de T e do Lema de Uryshon, vem que existe $f \in C(T)$ tal que $f(t_0) = 1$ e $f(\Phi(S)) = 0$.

Segue da definição de Φ^0 que $\Phi^0(f) = 0$, mas $f \neq 0$. Isso é uma contradição, pois já vimos que Φ^0 é injetora.

A contradição surgiu de supormos que Φ não era sobrejetora.

Portanto, temos que Φ é sobrejetora. □

No próximo teorema, vamos estabelecer uma relação entre a complementação de $\Phi^0(C(T))$ em $C(S)$ e a existência de operador de média para Φ.

Teorema 3.3.7. *Considere $\Phi : S \to T$ função contínua e sobrejetora.*

Suponha que $P : C(S) \to \Phi^0(C(T))$ seja projeção linear contínua. Então Φ admite operador de média u, dado por $u = \Phi^{0^{-1}} \circ P$.

Demonstração. Inicialmente, notemos que a Proposição 3.3.2 garante a existência de $\Phi^{0^{-1}}$ em $\Phi^0(C(T))$.

Assim $u = \Phi^{0^{-1}} \circ P : C(S) \to C(T)$ é operador linear contínuo.

Para concluirmos que u é um operador de média para Φ, basta mostrarmos que $u \circ \Phi^0(f) = f, \forall f \in C(T)$.

Seja $f \in C(T)$, então:

$$u \circ \Phi^0(f) = \Phi^{0^{-1}} \circ P(\Phi^0(f)) = \Phi^{0^{-1}}(\Phi^0(f)) = f.$$

Isso estabelece nosso resulado. □

O teorema acima nos diz que se Φ não admite operador de média, então $\Phi^0(C(T))$ não é complementada em $C(S)$.

Agora, vamos estudar o comportamento do operador adjunto de um operador de média u para Φ.

Definição 3.3.8. *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \to Y$ operador linear contínuo. Definimos o operador adjunto ou transposto de T, $T^* : Y^* \to X^*$, como $T^*(\psi) = \psi \circ T, \forall \psi \in Y^*$.*

Proposição 3.3.9. *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \to Y$ operador linear contínuo. Então o operador adjunto de T é linear e contínuo, com $||T^*|| = ||T||$. Além disso, se T é isomorfismo (isometria), temos que T^* é isomorfismo (isometria).*

Demonstração. Sugerimos [14], página 51. □

A próxima proposição estabelece uma propriedade interessante de qualquer operador adjunto. Sua demonstração será omitida, pois não apresenta dificuldades.

Proposição 3.3.10. *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \to Y$ operador linear contínuo.*

Então o operador adjunto de T é w^*-w^* contínuo.

Definição 3.3.11. *Seja K um compacto Hausdorff. Fixado $k \in K$, definimos a medida $\delta_k \in M(K)$, como $\delta_k(E) = 1$, se $k \in E$ e $\delta_k(E) = 0$, se $k \notin E$, para todo E boreliano de K.*

Chamamos δ_k de medida de Dirac associada a k.

Lema 3.3.12. *Seja K um compacto Hausdorff. A função $\delta : K \to C(K)^*$ definida como $\delta(k) = \delta_k$, para todo $k \in K$ é contínua se considerarmos em $C(K)^*$ a topologia fraca estrela.*

Demonstração. Sugerimos [14], página 72. □

Teorema 3.3.13. *Seja $\Phi : S \to T$ função contínua. Suponha que $u : C(S) \to C(T)$ seja um operador de média para Φ. Consideremos $u^* : C(T)^* \to C(S)^*$, o operador adjunto de u.*

Para cada $t \in T$, definamos $\mu_t = u^*(\delta_t)$, onde δ_t é a medida de Dirac em t.

Então a função $F : T \to C(S)^*$, definida como $F(t) = \mu_t, \forall t \in T$, é contínua se considerarmos em $C(S)^*$ a topologia w^* e:

$$u(f)(t) = \int_S f d\mu_t,$$

para todo $t \in T$ e $f \in C(S)$.

Além disso, temos que:

$||\mu_t|| \geq 1$ *e* $||u|| = \sup_{t\in T} ||\mu_t||$.

Demonstração. O Lema 3.3.12 diz que a função $\delta : T \to C(T)^*$, definida como $\delta(t) = \delta_t, \forall t \in T$ é contínua, se considerarmos a topologia w^* em $C(T)^*$.

Notemos que $F = u^* \circ \delta$. Pela Proposição 3.3.10, temos que u^* é w^*-w^* contínua.

Dessa forma, F é contínua quando consideramos a topologia w^* em $C(S)^*$.

Seja $f \in C(S)$, então $u(f) \in C(T)$. Seja $t \in T$, temos que:

$$u(f)(t) = \delta_t(u(f)) = u^*(\delta_t)(f) = \mu_t(f) = \int_S f d\mu_t.$$

Portanto:

$$u(f)(t) = \int_S f d\mu_t,$$

para todo $t \in T$ e $f \in C(S)$.

Agora, mostremos que $||u|| = \sup_{t\in T} ||\mu_t||$.

$$||u|| = \sup\{||u(f)||_\infty : f \in C(S), ||f||_\infty \leq 1\} = \sup\{\sup_{t\in T} |\int_S f d\mu_t| : f \in C(S), ||f||_\infty \leq 1\}$$

$$= \sup_{t\in T} \sup\{|\int_S f d\mu_t| : f \in C(S), ||f||_\infty \leq 1\} = \sup_{t\in T} ||\mu_t||.$$

Isso mostra que $||u|| = \sup_{t\in T} ||\mu_t||$.

Vejamos que $||\mu_t|| \geq 1$.

$$||\mu_t|| = \sup\{|\int_S f d\mu_t| : f \in C(S), ||f||_\infty \leq 1\} = \sup\{|u(f)(t)| : f \in C(S), ||f||_\infty \leq 1\}.$$

Note que se $f = 1_S$, então pela Proposição 3.3.5, temos que $u(f) = 1_T$. Logo $|u(f)(t)| = |1_T(t)| = 1, \forall t \in T$.

Dessa forma, $1 = |u(1_S)(t)| \leq ||\mu_t||$.

Com o feito acima, estabelecemos o nosso teorema. $\square$

Teorema 3.3.14. ***(Teorema de mudança de variáveis)*** *Sejam S_1, S_2 conjuntos e $\varphi : S_1 \to S_2$. Considere Σ_2 uma σ-álgebra de subconjuntos de S_2.*

Então a família $\Sigma_1 = \{\varphi^{-1}(E) : E \in \Sigma_2\}$ é σ-álgebra de subconjuntos de S_1.

Seja μ medida em Σ_2, definimos:

$$\varphi_*\mu(\varphi^{-1}(E)) = \mu(E), \forall E \in \Sigma_2. \tag{3.1}$$

Valem:

(1) $\varphi_*\mu$ é medida em Σ_1;

(2) Se μ é finita (limitada), então $\varphi_*\mu$ é finita (limitada);

(3) A variação total de μ e $\varphi_*\mu$ coincidem;

(4) Se $f : S_2 \to \mathbb{R}$ é Σ_2-mensurável, então $f \circ \varphi$ é Σ_1-mensurável;

(5) Se $f : S_2 \to \mathbb{R}$ é μ-integrável, então $f \circ \varphi$ é $\varphi_*\mu$-integrável e:

$$\int_{S_2} f d\mu = \int_{\varphi^{-1}(S_2)} f \circ \varphi d(\varphi_*\mu)$$

Demonstração. Sugerimos [12], página 182. □

Teorema 3.3.15. *Seja $\Phi : S \to T$ função contínua.*

Suponha que $u : C(S) \to C(T)$ seja um operador de média para Φ. Então vale:

$\mu_t(\Phi^{-1}(A)) = \delta_t(A), \forall A$ boreliano de T.

Demonstração. Estamos considerando em S e T a σ-álgebra dos Borelianos.

Fixado $t \in T$, temos que $\mu_t = u^*(\delta_t)$ é medida em $M(S)$.

Consideremos $\Phi_*\mu_t$, definida no Teorema 3.3.14. Da continuidade de Φ segue que $\Phi_*\mu$ é medida nos borelianos de T.

Para estabelecermos nosso resultado, temos que mostrar que $\Phi_*\mu_t = \delta_t$.

Seja $g \in C(T)$, calculemos:

$$\int_T gd(\Phi_*\mu_t) = \int_S g \circ \Phi d\mu_t = \int_S (\Phi^0 g)(s) d\mu_t,$$

devido ao Teorema 3.3.14(5). Usando o Teorema 3.3.13, temos que:

$$\int_T gd(\Phi_*\mu_t) = u(\phi^0)(t) = g(t) = \int_T g(t) d\delta_t.$$

Dessa forma, temos que as integrais de toda função em $C(T)$ com respeito a $\Phi_*\mu_t$ e δ_t coincidem.

Sabemos que $\delta_t \in M(T)$, se mostrarmos que $\Phi_*\mu_t \in M(T)$, então essas duas medidas representarão o mesmo funcional linear em $C(T)^*$. Pela unicidade do Teorema de representação de Riesz, teremos que vale a igualdade entre as medidas.

Do Teorema 3.3.14, temos que $\Phi_*\mu$ é medida finita, limitada e de variação limitada.

Vejamos que $\Phi_*\mu_t$ é medida regular nos Borelianos de T.

É simples ver que podemos supor que μ_t é medida positiva. Sejam A boreliano de T e $\epsilon > 0$.

Da continuidade de Φ vem que $\Phi^{-1}(A)$ é Boreliano de S. Como μ_t é regular, temos que existe $F \subset \Phi^{-1}(A)$ com F fechado e $\mu_t(\Phi^{-1}(A) - F) > \epsilon$. O fato de Φ ser função contínua entre um espaço compacto e um Hausdorff implica que $\Phi(F)$ é fechado de T. É claro que $\Phi(F) \subset A$. Calculemos $\Phi_*\mu_t(A - \Phi(F))$:

$$\Phi_*\mu_t(A - \Phi(F)) = \mu_t(\Phi^{-1}(A - \Phi(F)) = \mu_t(\Phi^{-1}(A) - \Phi^{-1}(\Phi(F))).$$

Portanto:

$$\Phi_*\mu_t(A - \Phi(F)) \geq \mu_t(\phi^{-1}(A) - F) > \epsilon.$$

Isso mostra a regularidade de $\Phi_*\mu_t$.

Como discutido acima, isso estabelece nosso resultado. $\square$

O teorema anterior tem um corolário que nos será muito útil.

Corolário 3.3.16. *Para todo $t \in T$, temos que $\mu_t(\Phi^{-1}(t)) = 1$.*

Demonstração. Note que como T é Hausdorff, então $\{t\}$ é boreliano de T.

Do Teorema 3.3.15, temos que:

$$\mu_t(\Phi^{-1}(t)) = \delta_t(\{t\}) = 1.$$

$\square$

Nosso objetivo é estabelecer cotas inferiores para a norma de operadores de média, tendo-se em vista propriedades topológicas de S e T, objetivo que será alcançado no Teorema 3.3.22.

Definição 3.3.17. *Seja $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ rede de elementos de T, convergindo para $t_0 \in T$. Definimos o conjunto dos pontos de aderência dessa rede, como:*

$\limsup \Phi^{-1}(t_\lambda) = \{s \in S :$ *para cada* $\lambda_0 \in \Lambda$ *e vizinhança* U *de* s*, existe um* $\lambda \in \Lambda$ *com* $\lambda \geq \lambda_0$ *tal que* $\Phi^{-1}(t_\lambda) \cap U \neq \emptyset\}$.

Vejamos algumas propridades úteis de $\limsup \Phi^{-1}(t_\lambda)$.

Proposição 3.3.18. *Sejam $\Phi : S \to T$ função contínua e sobrejetora e $(t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ rede de elementos de T, convergindo para $t_0 \in T$.*

Então $\limsup \Phi^{-1}(t_\lambda)$ é subconjunto compacto e não vazio de $\Phi^{-1}(t_0)$.

Demonstração. Mostremos que $\limsup \Phi^{-1}(t_\lambda) \neq \emptyset$.

Como Φ é sobrejetora, $\Phi^{-1}(t_\lambda) \neq \emptyset, \forall \lambda$. Para cada λ, tomemos $s_\lambda \in \Phi^{-1}(t_\lambda)$. $(s_\lambda)_\lambda$ é rede em S. Como S é compacto, existe subrede de $(s_\lambda)_\lambda$, convergindo para $s_0 \in S$.

Mostremos que $s_0 \in \limsup \Phi^{-1}(t_\lambda)$. Sejam U vizinhança de s_0 e λ_0 fixados. Como existe subrede de $(s_\lambda)_\lambda$ convergindo para s_0, temos que existe $\lambda \geq \lambda_0$ com $s_\lambda \in U$. Logo $\limsup \Phi^{-1}(t_\lambda) \neq \emptyset$.

Mostremos que $\limsup \Phi^{-1}(t_\lambda) \subset \Phi^{-1}(t_0)$. Seja $s \in \limsup \Phi^{-1}(t_\lambda)$, devemos mostrar que $\Phi(s) = t_0$. Suponha, por absurdo, que $\Phi(s) = t_1 \neq t_0$. Como T é Hausdorff, existem abertos disjuntos de T, V_1, V_0 com $t_1 \in V_1$ e $t_0 \in V_0$. Da continuidade de Φ, existe U_1 vizinhança de s tal que $\Phi(U_1) \subset V_1$.

Como $s \in \limsup \Phi^{-1}(t_\lambda)$, dado λ_0 existe $\lambda \geq \lambda_0$ tal que $\Phi^{-1}(t_\lambda) \cap U_1 \neq \emptyset$. Assim, dado λ_0, existe $\lambda \geq \lambda_0$ tal que $t_\lambda \in V_1$, logo $t_\lambda \notin V_0$. Mas isso é uma contradição, pois V_0 é vizinhança de t_0 e $(t_\lambda)_\lambda$ converge para t_0.

Portanto, concluímos que $\Phi(s) = t_0$.

Finalmente, vamos mostrar que $\limsup \Phi^{-1}(t_\lambda)$ é compacto. Notemos que como S é compacto, para concluirmos a compacidade de $\limsup \Phi^{-1}(t_\lambda)$, basta verificarmos que ele é fechado em S. Seja $(s_\alpha)_\alpha$ rede de elementos de $\limsup \Phi^{-1}(t_\lambda)$. Suponha que $(s_\alpha)_\alpha$ convirja para $s_0 \in S$, vamos mostrar que $s_0 \in \limsup \Phi^{-1}(t_\lambda)$.

Sejam U vizinhança de s_0 e λ_0 fixados. Como $(s_\alpha)_\alpha$ converge para s_0, existe α_0 tal que:

$$\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow s_\alpha \in U.$$

Em particular, $s_{\alpha_0} \in U$. Como $s_{\alpha_0} \in \limsup \Phi^{-1}(t_\lambda)$ e U é vizinhança de s_{α_0}, para o λ_0 inicialmente fixado, existe $\lambda \geq \lambda_0$ tal que $U \cap \Phi^{-1}(t_\lambda) \neq \emptyset$.

Assim, concluímos que $s_0 \in \limsup \Phi^{-1}(t_\lambda)$. $\square$

Para continuarmos, precisamos da noção de resíduo de μ_t para $t \in T$.

Definição 3.3.19. *Sejam $\Phi : S \to T$ função contínua e $u : C(S) \to C(T)$ um operador de média para Φ.*

Considere $\mu_t = u^*(\delta_t)$. O resíduo de μ_t é definido como:

$$R(\mu_t) = ||\mu_t|| - |\mu_t|(\Phi^{-1}(t)) = |\mu_t|(S - \Phi^{-1}(t)).$$

O próximo teorema é o resultado fundamental no que será desenvolvido a seguir.

Teorema 3.3.20. *Suponha que $(t_\lambda)_\lambda$ seja rede em T convergindo para $t_0 \in T$. Então, temos que:* $\liminf R(\mu_{t_\lambda}) \geq 1 + ||\mu_{t_0}|| - 2.|\mu_{t_0}|(\limsup \Phi^{-1}(t_\lambda))$.

Demonstração. Definamos $S_0 = \limsup \Phi^{-1}(t_\lambda)$. Seja $\epsilon > 0$.

Da Proposição 3.3.18, vem que S_0 é fechado de S, logo $S - S_0$ é aberto de S. Portanto $S - S_0$ é boreliano de S. Como μ_{t_0} é regular, existe $K \subset S - S_0$ compacto tal que:

$$|\mu_{t_0}|(K) > |\mu_{t_0}|(S - S_0) - \epsilon. \tag{3.2}$$

Afirmamos que existe V aberto de S, com $S_0 \subset V$ e $\overline{V} \cap K = \emptyset$.

De fato, S_0 e K são dois fechados disjuntos de S. Como S é normal, pelo Lema de Urysohn, temos que existe $f : S \to \mathbb{R}$ com $f \in C(S)$ e $f|_K = 0$, $f|_{S_0} = 1$.

Definamos $V = f^{-1}(\frac{3}{4}, \infty)$. Note que V é aberto e $S_0 \subset V$. Além disso $\overline{V} \cap K = \emptyset$.

Agora, vejamos que existe W vizinhança fechada de S_0, com $W \subset V$.

Basta tomarmos $W = f^{-1}([\frac{4}{5}, \infty))$. É claro que W é fechado, $S_0 \subset W$, $W \subset V$. Além disso, o aberto $U = f^{-1}(\frac{9}{10}, \infty)$ tem a seguinte propriedade:

$$S_0 \subset U \subset W.$$

Isso mostra que W é vizinhança de S_0.

Afirmamos que existe $h_1 \in C(S)$ com $||h_1||_\infty \leq 1$, $h_1(\overline{V}) = 0$ e

$$|\mu_{t_0}(h_1)| > |\mu_{t_0}|(K) - \epsilon. \tag{3.3}$$

De fato, da regularidade de μ_{t_0} segue que existe compacto $Z \subset S - K$ tal que:

$$|\mu_{t_0}|(S - (K \cup Z)) < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.4}$$

Consideremos a restrição de μ_{t_0} aos Borelianos de K. Essa medida representa um funcional em $C(K)^*$ e sua norma é dada por $|\mu_{t_0}|(K)$.

Da definição da norma de um funcional linear em $C(K)^*$, temos que existe $p \in C(K)$ tal que:

$$|\int_K p d\mu_{t_0}| > |\mu_{t_0}|(K) - \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.5}$$

Consideremos a função $h : K \cup Z \cup \overline{V} \to \mathbb{R}$ definida como $h|_K = p$ e $h|_{(Z\cup\overline{V})} = 0$.

Note que h é contínua e seu domínio é um fechado de S. Pelo Teorema da extensão de Tietze, existe $h_1 \in C(S)$ tal que h_1 é extensão de h. Note que podemos tomar h_1 com $||h_1||_\infty \leq 1$.

Mostremos que a h_1, construída acima verifica a equção (3.3).

$$|\mu_{t_0}(h_1)| = |\int_S h_1 d\mu_{t_0}| = |\int_{Z\cup\overline{V}} h_1 d\mu_{t_0} + \int_{S-(Z\cup\overline{V})} h_1 d\mu_{t_0}|$$
$$= |\int_{S-(Z\cup\overline{V})} h_1 d\mu_{t_0}| \geq |\int_K p d\mu_{t_0}| - |\int_{S-(Z\cup\overline{V})-K} h_1 d\mu_{t_0}|.$$

Da equação (3.5), vem que:

$$|\mu_{t_0}(h_1)| > |\mu_{t_0}|(K) - \frac{\epsilon}{2} - |\int_{S-(Z\cup\overline{V})-K} h_1 d\mu_{t_0}|$$
$$\geq |\mu_{t_0}|(K) - \frac{\epsilon}{2} - \int_{S-(Z\cup\overline{V})-K} ||h_1||_\infty d|\mu_{t_0}|$$
$$\geq |\mu_{t_0}|(K) - \frac{\epsilon}{2} - |\mu_{t_0}|(S - K - (Z \cup \overline{V}))$$
$$\geq |\mu_{t_0}|(K) - \frac{\epsilon}{2} - |\mu_{t_0}|(S - (K \cup Z)).$$

Da equação (3.4), vem que:

$$|\mu_{t_0}(h_1)| > |\mu_{t_0}|(K) - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} = |\mu_{t_0}|(K) - \epsilon.$$

Note que podemos assumir que

$$|\mu_{t_0}|(V) < |\mu_{t_0}|(S_0) + \epsilon.$$

De fato, devido à regularidade de $|\mu_{t_0}|$ existe A aberto de S com $S_0 \subset A$ e $|\mu_{t_0}|(A) < |\mu_{t_0}|(S_0) + \epsilon$.

Consideremos $B = A \cap V$, então B é aberto de S contendo S_0, $\overline{B} \cap K = \emptyset$ e $|\mu_{t_0}|(B) < |\mu_{t_0}|(S_0) + \epsilon$.

Como $W \subset V$, temos que W e V^C são fechados disjuntos de S, da normalidade de S e do Lema de Urysohn segue que existe $h_2 \in C(S)$ com $||h_2||_\infty = 1$, $h_2(W) = 1$ e $h_2(V^C) = 0$.

Notemos que:

$$|\mu_{t_0}|(h_2) = \int_S h_2 d|\mu_{t_0}| = \int_V h_2 d|\mu_{t_0}| \leq \int_V d|\mu_{t_0}| = |\mu_{t_0}|(V).$$

Portanto:

$$|\mu_{t_0}|(h_2) \leq |\mu_{t_0}|(V) < |\mu_{t_0}|(S_0) + \epsilon.$$

Ficamos com:

$$|\mu_{t_0}|(h_2) < |\mu_{t_0}|(S_0) + \epsilon. \tag{3.6}$$

Mostremos que existe λ_0 tal que $\lambda \geq \lambda_0$ implica:

$$|\mu_{t_\lambda}(h_1)| > |\mu_{t_0}|(K) - \epsilon$$

e

$$|\mu_{t_\lambda}(h_2)| < |\mu_{t_0}|(S_0) + \epsilon.$$

O Teorema 3.3.13 nos diz que a função $F : T \to C(S)^*$, dada por $F(t) = \mu_t$ é contínua se considerarmos a topologia w^* em $C(S)^*$.

Assim, como $t_\lambda \xrightarrow{\lambda} t_0$, temos que $\mu_{t_\lambda} \xrightarrow{w^*} \mu_{t_0}$. Isso significa que:

$$\mu_{t_\lambda}(h_1) \xrightarrow{\lambda} \mu_{t_0}(h_1),$$

e

$$\mu_{t_\lambda}(h_2) \xrightarrow{\lambda} \mu_{t_0}(h_2).$$

Da continuidade da função valor absoluto, temos que:

$$|\mu_{t_\lambda}(h_1)| \xrightarrow{\lambda} |\mu_{t_0}(h_1)|,$$

e

$$|\mu_{t_\lambda}(h_2)| \xrightarrow{\lambda} |\mu_{t_0}(h_2)|.$$

Logo, das equações (3.3) e (3.6) segue que existem λ_1, λ_2 tal:

$$\lambda \geq \lambda_1 \Rightarrow |\mu_{t_\lambda}(h_1)| > |\mu_{t_0}|(K) - \epsilon \tag{3.7}$$

e

$$\lambda \geq \lambda_2 \Rightarrow |\mu_{t_\lambda}(h_2)| < |\mu_{t_0}|(S_0) + \epsilon. \tag{3.8}$$

Tomemos $\lambda_0 > \lambda_1, \lambda_2$.

Agora, vamos mostrar que existe λ_1 tal que:

$$\lambda \geq \lambda_1 \Rightarrow \Phi^{-1}(t_\lambda) \subset W.$$

Sabemos que existe U aberto de S com $S_0 \subset U \subset W$. Mostremos que existe λ_1 tal que:

$$\lambda \geq \lambda_1 \Rightarrow \Phi^{-1}(t_\lambda) \subset U.$$

Suponha, por absurdo, que não exista tal λ_1. Então, existe λ arbitrariamente grande tal que $\Phi^{-1}(t_\lambda) \cap U^C \neq \emptyset$. Assim, construímos $(s_\alpha)_\alpha$ rede de elementos de U^C, com cada $s_\alpha \in \Phi^{-1}(t_\alpha)$.

Da compacidade de U^C, segue que existe subrede de $(s_\alpha)_\alpha$ convergente para $s_0 \in U^C$. Portanto, temos que $s_0 \in S_0$, mas $S_0 \subset U$. Isso é uma contradição. Logo, concluímos a existência de λ_1 tal que:

$$\lambda \geq \lambda_1 \Rightarrow \Phi^{-1}(t_\lambda) \subset U \subset W.$$

Tomemos $\lambda_2 > \lambda_0, \lambda_1$

Calculemos, para $\lambda \geq \lambda_2$:

$$\mu_{t_\lambda}(h_2) = \int_S h_2 d\mu_{t_\lambda} = \int_V h_2 d\mu_{t_\lambda} + \int_{V^C} h_2 d\mu_{t_\lambda},$$

como $h_2(V^C) = 0$, ficamos com:

$$\mu_{t_\lambda}(h_2) = \int_V h_2 d\mu_{t_\lambda} = \int_{\Phi^{-1}(t_\lambda)} h_2 d\mu_{t_\lambda} + \int_{V-\Phi^{-1}(t_\lambda)} h_2 d\mu_{t_\lambda}$$

$$= \mu_{t_\lambda}(\Phi^{-1}(t_\lambda)) + \int_{V-\Phi^{-1}(t_\lambda)} h_2 d\mu_{t_\lambda}.$$

Pelo Corolário 3.3.16, temos que:

$$\mu_{t_\lambda}(h_2) = 1 + \int_{V-\Phi^{-1}(t_\lambda)} h_2 d\mu_{t_\lambda}.$$

Portanto, para $\lambda \geq \lambda_2$, temos que:

$$|\mu_{t_0}|(S_0) + \epsilon > |\mu_{t_\lambda}(h_2)| = |1 + \int_{V-\Phi^{-1}(t_\lambda)} h_2 d\mu_{t_\lambda}|$$

$$\geq 1 - |\int_{V-\Phi^{-1}(t_\lambda)} h_2 d\mu_{t_\lambda}|.$$

Assim:

$$|\int_{V-\Phi^{-1}(t_\lambda)} h_2 d\mu_{t_\lambda}| > 1 - \epsilon - |\mu_{t_0}|(S_0),$$

para $\lambda \geq \lambda_2$. Notemos que:

$$|\int_{V-\Phi^{-1}(t_\lambda)} h_2 d\mu_{t_\lambda}| \leq \int_{V-\Phi^{-1}(t_\lambda)} ||h_2||_\infty d|\mu_{t_\lambda}|$$

$$= \int_{V-\Phi^{-1}(t_\lambda)} d|\mu_{t_\lambda}| = |\mu_{t_\lambda}|(V - \Phi^{-1}(t_\lambda)).$$

Portanto, se $\lambda \geq \lambda_2$, temos que:

$$|\mu_{t_\lambda}|(V - \Phi^{-1}(t_\lambda)) > 1 - \epsilon - |\mu_{t_0}|(S_0). \tag{3.9}$$

Agora, mostremos que se $\lambda \geq \lambda_2$, então:

$$|\mu_{t_\lambda}|(S - \Phi^{-1}(t_\lambda)) \geq 1 + ||\mu_{t_0}|| - 2.|\mu_{t_0}|(S_0) - 3.\epsilon. \tag{3.10}$$

Seja λ, calculemos:

$$|\mu_{t_\lambda}|(V^C) \geq |\mu_{t_\lambda}|(\overline{V}^C) = \int_{\overline{V}^C} 1.d|\mu_{t_\lambda}|$$

$$\geq \int_{\overline{V}^C} ||h_1||_\infty d|\mu_{t_\lambda}| \geq |\int_{\overline{V}^C} h_1 d\mu_{t_\lambda}|.$$

Como $h_1(\overline{V}) = 0$, ficamos com:

$$|\mu_{t_\lambda}|(V^C) \geq |\mu_{t_\lambda}(h_1)|.$$

Da equação (3.7) vem que:

$$\lambda \geq \lambda_2 \Rightarrow |\mu_{t_\lambda}|(V^C) \geq |\mu_{t_0}|(K) - \epsilon. \tag{3.11}$$

Dessa forma, se $\lambda \geq \lambda_2$, temos que:

$$|\mu_{t_\lambda}|(S - \Phi^{-1}(t_\lambda)) \geq |\mu_{t_\lambda}|(V^C) + |\mu_{t_\lambda}|(V - \Phi^{-1}(t_\lambda))$$

$$\geq |\mu_{t_0}|(K) - \epsilon + 1 - |\mu_{t_0}|(S_0) - \epsilon \geq |\mu_{t_0}|(S - S_0) - 2.\epsilon + 1 - |\mu_{t_0}|(S_0) - \epsilon$$

$$= 1 + ||\mu_{t_0}|| - 2.|\mu_{t_0}|(S_0) - 3.\epsilon.$$

Acima, usamos a equação (3.2). Portanto, concluímos a equação (3.10).

Usando a definição de resíduo e a equação (3.10), concluímos que:

$$\lambda \geq \lambda_2 \Rightarrow R(\mu_{t_\lambda}) \geq 1 + ||\mu_{t_0}|| - 2.|\mu_{t_0}|(S_0) - 3.\epsilon.$$

O que implica que:

$$\liminf R(\mu_{t_\lambda}) \geq 1 + ||\mu_{t_0}|| - 2.|\mu_{t_0}|(S_0) - 3.\epsilon.$$

Como isso vale para todo $\epsilon > 0$, temos que:

$$\liminf R(\mu_{t_\lambda}) \geq 1 + ||\mu_{t_0}|| - 2.|\mu_{t_0}|(S_0).$$

Estabelecemos assim, nosso resultado. □

Definição 3.3.21. *Sejam S e T compactos Hausdorff e $\Phi : S \to T$ função contínua e sobrejetora. Definimos recursivamente em $k \in \mathbb{N}$ e $k > 0$, os seguintes subconjuntos de T:*

(i) Seja $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$, $M_\Phi^{(1)}(n) = \{t \in T : \Phi^{-1}(t)$ contém n conjuntos disjuntos da forma $\limsup \Phi^{-1}(t_\alpha)$ para redes $t_\alpha \to t\}$;

(ii) Para inteiros $k, n_1, \ldots, n_k > 1$, definamos:

$M_\Phi^{(k)}(n_1, \ldots, n_k) = \{t \in T : \Phi^{-1}(t)$ *contém* n_k *conjuntos disjuntos da forma* $\limsup \Phi^{-1}(t_\alpha)$ *para redes* $t_\alpha \to t$ *tais que* $t_\alpha \in M_\Phi^{(k-1)}(n_1, \ldots, n_{k-1})\}$.

Teorema 3.3.22. *Se* $M_\Phi^{(k)}(n_1, \ldots, n_k) \neq \emptyset$ *e* $u : C(S) \to C(T)$ *for um operador de média para* Φ, *então* $||u|| \geq 1 + 2\sum_{i=1}^k (1 - \frac{1}{n_i})$.

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, mostremos que existe $t \in T$ tal que $R(\mu_t) > k + \sum_{i=1}^k (1 - \frac{2}{n_i}) - \epsilon$.

Seja $t_0 \in M_\Phi^{(k)}(n_1, \ldots, n_k)$. Como $|\mu_{t_0}|$ é medida positiva, existe rede $(t_\alpha)_\alpha \subset M_\Phi^{(k-1)}(n_1, \ldots, n_{k-1})$ convergindo para t_0 tal que:

$$|\mu_{t_0}|(\limsup \Phi^{-1}(t_\alpha)) \leq \frac{1}{n_k}|\mu_{t_0}|(\Phi^{-1}(t_0)). \tag{3.12}$$

De acordo com o Teorema 3.3.20, temos que:

$$\liminf R(\mu_{t_\alpha}) \geq 1 + ||\mu_{t_0}|| - 2|\mu_{t_0}|(\limsup \Phi^{-1}(t_\alpha)).$$

Usando a equação (3.12) na equação acima, ficamos com:

$$\liminf R(\mu_{t_\alpha}) \geq 1 + ||\mu_{t_0}|| - \frac{2}{n_k}|\mu_{t_0}|(\Phi^{-1}(t_0)).$$

Portanto, existe $t_1 \in M_\Phi^{(k-1)}(n_1, \ldots, n_{k-1})$ com:

$$R(\mu_{t_1}) > 1 + ||\mu_{t_0}|| - \frac{2}{n_k}|\mu_{t_0}|(\Phi^{-1}(t_0)) - \frac{\epsilon}{k}. \tag{3.13}$$

Se $k = 1$ paramos o processo aqui e arrumamos a equação (3.13), obtendo assim $t = t_1$ tal que $R(\mu_t) > 1 + (1 - \frac{2}{n_1}) - \epsilon$. Caso contrário, continuamos, como especificado abaixo.

Como $t_1 \in M_\Phi^{(k-1)}(n_1, \ldots, n_{k-1})$, analogamente ao caso de t_0, existe rede $(t_\beta)_\beta \subset M_\Phi^{(k-2)}(n_1, \ldots, n_{k-2})$ convergindo para t_1 tal que:

$$|\mu_{t_1}|(\limsup \Phi^{-1}(t_\beta)) \leq \frac{1}{n_{k-1}}|\mu_{t_1}|(\Phi^{-1}(t_1)). \tag{3.14}$$

De acordo com o Teorema 3.3.20, temos que:

$$\liminf R(\mu_{t_\beta}) \geq 1 + ||\mu_{t_1}|| - 2|\mu_{t_1}|(\limsup \Phi^{-1}(t_\beta)).$$

Usando a equação (3.14) na equação acima, ficamos com:

$$\liminf R(\mu_{t_\beta}) \geq 1 + ||\mu_{t_1}|| - \frac{2}{n_{k-1}}|\mu_{t_1}|(\Phi^{-1}(t_1)).$$

Portanto, existe $t_2 \in M_\phi^{(k-2)}(n_1, \ldots, n_{k-2})$ com:

$$R(\mu_{t_2}) > 1 + ||\mu_{t_1}|| - \frac{2}{n_{k-1}}|\mu_{t_1}|(\Phi^{-1}(t_1)) - \frac{\epsilon}{k}. \tag{3.15}$$

Usando a definição de resíduo de μ_{t_1} na equação (3.15), ficamos com:

$$R(\mu_{t_2}) > 1 + R(\mu_{t_1}) + (1 - \frac{2}{n_{k-1}})|\mu_{t_1}|(\Phi^{-1}(t_1)) - \frac{\epsilon}{k}.$$

Assim, usando a equação (3.13), o fato de que $|\mu_t|(\Phi^{-1}(t)) \geq 1$, de acordo com o Corolário 3.3.16 e que $n_j > 1, j = 1, \ldots, k$, na equação acima:

$$R(\mu_{t_2}) > 2 + (1 - \frac{2}{n_k}) + (1 - \frac{2}{n_{k-1}}) - 2.\frac{\epsilon}{k} = 2 + \sum_{i=k-1} k(1 - \frac{2}{n_i}) - 2.\frac{\epsilon}{k}.$$

Continuando com esse processo, obtemos $t \in T$ tal que:

$$R(\mu_t) > k + \sum_{i=1}^{k}(1 - \frac{2}{n_i}) - \epsilon.$$

Usando a definição de resíduo, temos que:

$$||\mu_t|| \geq k + 1 + \sum_{i=1}^{k}(1 - \frac{2}{n_i}) - \epsilon.$$

De acordo com o Teorema 3.3.13, temos que $||u|| = \sup_{t \in T} ||\mu_t||$. Logo,

$$||u|| \geq k + 1 + \sum_{i=1}^{k}(1 - \frac{2}{n_i}) - \epsilon, \forall \epsilon > 0.$$

Portanto:

$$||u|| \geq k + 1 + \sum_{i=1}^{k}(1 - \frac{2}{n_i}) = k + 1 + 2\sum_{i=1}^{k}(1 - \frac{1}{n_i}) - k = 1 + 2\sum_{i=1}^{k}(1 - \frac{1}{n_i}).$$

$\square$

Capítulo 4

Não existência de isometrias entre as classes de Baire

No Capítulo 2, mostramos que se $0 \leq \alpha < \beta \leq \omega_1$, então $B_\alpha(I)$ é subespaço próprio de $B_\beta(I)$.

Uma pergunta natural seria:

Podemos ter $B_\alpha(I)$ isométrico a $B_\beta(I)$, com $\alpha \neq \beta$?

Neste capítulo, vamos responder negativamente a essa pergunta. Isso será feito no Teorema 4.31, que é o principal resultado deste capítulo.

Observação 4.1. *No Capítulo 1, vimos que* $B_\alpha(I) = B_{\omega_1}(I)$ *para todo* $\alpha \geq \omega_1$*, então nossa pergunta sobre existência de isometrias entre as classes de Baire só é interessante se* $0 \leq \alpha < \beta \leq \omega_1$*.*

No caso em que $\alpha = 0$*, sabemos que* $B_0(I) = C(I)$ *não é isomorfo a* $B_\alpha(I), \forall \alpha \geq 1$*, pois* $C(I)$ *é separável e de acordo com a Proposição 1.4.13, temos que* $B_\alpha(I)$ *é não separável para* $\alpha \geq 1$*.*

Assim, neste capítulo nos concentraremos no caso $1 \leq \alpha < \beta < \omega_1$*. O caso em que* $\beta = \omega_1$ *será estudado no Capítulo 5.*

Inicialmente, vamos introduzir a noção de álgebras de Boole e de isomorfismo booleano.

Definição 4.2. *(**Álgebras de Boole**) Seja $(B, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Dados $a, b, c \in B$, definimos:*

$a \wedge b = c \Leftrightarrow c \preceq a$, $c \preceq b$ e se existir $d \in B$ com $d \preceq a$, $d \preceq b$, então $d \preceq c$;

$a \vee b = c \Leftrightarrow a \preceq c$, $b \preceq c$ e se existir $d \in B$ com $a \preceq d$, $b \preceq d$, então $c \preceq d$;

Se para quaisquer $a, b \in B$, existirem $a \wedge b, a \vee b \in B$, dizemos que $(B, \preceq)$ é um reticulado.

Diremos que B possui um menor elemento, se existir um elemento em B, que denotaremos por 0, tal que $0 \preceq b, \forall b \in B$. Analogamente, diremos que B possui um maior elemento se existir um elemento em B, que denotaremos por 1, tal que $b \preceq 1, \forall b \in B$. Se B possuir 1 e 0, diremos que B é limitado.

Seja $(B, \preceq)$ um reticulado limitado. Diremos que $(B, \preceq)$ é complementado, se dado $b \in B$, existir um elemento em B, que denotaremos por b' tal que $b \wedge b' = 0$ e $b \vee b' = 1$.

$(B, \preceq)$ é álgebra de Boole se for um reticulado limitado e complementado, e valer a seguinte lei distributiva:

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), \forall a, b, c \in B.$$

Definição 4.3. *(**Álgebra de subconjuntos**) Sejam X um conjunto e $\Sigma \subset \wp(X)$. Dizemos que Σ é uma álgebra de subconjuntos de X se, e somente se, valerem:*

i) $X \in \Sigma$:

(ii) Se $A \in \Sigma$, então $A^C \in \Sigma$;

(iii) Se $A, B \in \Sigma$, então $A \cup B \in \Sigma$.

Observação 4.4. *Sejam X um conjunto e $\mathfrak{C} \subset \wp(X)$. Podemos definir uma ordem parcial em $\mathfrak{C}$, da seguinte forma:*

Dados $A, B \in \mathfrak{C}$, dizemos que $A \preceq B \Leftrightarrow A \subset B$.

Suponha que $\mathfrak{C}$ seja uma álgebra de subconjuntos de X, de acordo com a Definição 4.3. Então $(\mathfrak{C}, \preceq)$ é uma álgebra de Boole. De fato:

(i) $A, B \in \mathfrak{C}$, então $A \cup B \in \mathfrak{C}$ e $A \vee B = A \cup B$;

(ii) $A, B \in \mathfrak{C}$, *então* $A \cap B \in \mathfrak{C}$ *e* $A \wedge B = A \cap B$;

(iii) $X, \emptyset \in \mathfrak{C}$ *e valem* $\emptyset \preceq A, \forall A \in \mathfrak{C}$ *e* $A \preceq X, \forall A \in \mathfrak{C}$. *Logo* $(\mathfrak{C}, \preceq)$ *é limitado;*

(iv) Se $A \in \mathfrak{C}$, *então* $A^C \in \mathfrak{C}$ *e valem* $A \vee A^C = X$ *e* $A \wedge A^C = \emptyset$.

Portanto $A' = A^C \in \mathfrak{C}, \forall A \in \mathfrak{C}$.

(v) É claro que vale a lei distributiva, descrita na Definição 4.2.

Assim, concluímos que toda álgebra de subconjuntos de um conjunto X *é uma álgebra de Boole, com a ordem acima definida.*

Esse tipo especial de álgebra de Boole é denominada ***álgebra de Boole de subconjuntos***.

Definição 4.5. *(**Isomorfismo booleano**) Sejam* $\mathfrak{C}$ *e* $\mathfrak{A}$ *duas álgebras de Boole. Seja* $\varphi : \mathfrak{C} \to \mathfrak{A}$, *dizemos que* φ *é um isomorfismo booleano, se, e somente se, valerem:*

(i) φ *é bijetora;*

(ii) $\varphi(B') = \varphi(B)', \forall B \in \mathfrak{C}$;

(iii) $\varphi(A \wedge B) = \varphi(A) \wedge \varphi(B), \forall A, B \in \mathfrak{C}$;

(iv) $\varphi(0) = 0$.

Se valerem (ii), (iii) e (iv), diremos que φ *é homomorfismo booleano.*

Agora, vamos relacionar os conceitos apresentados acima com as classes de Baire.

Definição 4.6. *Dado* γ *um ordinal, definimos:*

(1) $K_\gamma = H_\gamma$ *se* γ *é finito e* $K_\gamma = H_{\gamma+1}$ *se* γ *é infinito;*

(2) Consideremos Ω_γ *o espaço dos funcionais lineares multiplicativos de* $B_\gamma(I)$, *com a topologia* w^*. *Então* K^γ *é a família dos conjuntos aberto-fechados de* Ω_γ.

A demonstração da próxima proposição será omitida, pois não apresenta qualquer dificuldade.

Proposição 4.7. *Fixado um ordinal γ, temos que K_γ e K^γ são álgebras de Boole de subconjuntos de I e de Ω_γ, respectivamente.*

Proposição 4.8. *Considere $1 \leq \alpha \leq \omega_1$. Temos que K_α e K^α são isomorfos como álgebras de Boole.*

Demonstração. Definamos a função $\psi : K_\alpha \to K^\alpha$, como $\psi(A) = \overline{\tau_\alpha(A)}, \forall A \in K_\alpha$, onde o fecho é com respeito à topologia w^* em Ω_α. Lembre que τ_α está descrita na Definição 1.5.1.

De acordo com o Lema 1.5.13, temos que ψ está bem definida e é bijetora, já que sua inversa é $\psi^{-1} : K^\alpha \to K_\alpha$, definida como $\psi^{-1}(B) = \tau_\alpha^{-1}(\tau_\alpha(I) \cap B), \forall B \in K^\alpha$. Ainda de acordo com o Lema 1.5.13, temos que $\psi(A) = B \in K^\alpha$, tal que B é o único elemento de Ω_α com a propriedade de que $\chi(C_A) = C_B$, onde $\chi : B_\alpha(I) \to C(\Omega_\alpha)$ está descrita na Definição 1.3.1.

Mostremos que ψ satisfaz as outras propriedades de Definição 4.5.

(i) Seja $A \in K_\alpha$, então $\psi(A^C) = B$, onde $\chi(C_{A^C}) = C_B$. Note que $C_A = 1 - C_{A^C}$, logo $\chi(C_A) = \chi(1) - \chi(C_{A^C}) = 1 - C_B = C_{B^C}$.

   Dessa forma, $\psi(A) = B^C$.

(ii) Sejam $A, B \in K_\alpha$. Suponha que $\psi(A) = D$ e $\psi(B) = E$. Isso significa que $\chi(C_A) = C_D$ e $\chi(C_B) = C_E$.

   Sabemos que $C_{A \cap B} = C_A.C_B$. Logo, $\chi(C_{A\cap B}) = \chi(C_A).\chi(C_B) = C_D.C_E = C_{D\cap E}$.

   Dessa forma, temos que $\psi(A \cap B) = D \cap E = \psi(A) \cap \psi(B)$.

(iii) Note que $C_\emptyset = 0$. Logo, $\chi(C_\emptyset) = 0 = C_\emptyset$. Dessa forma, temos que $\psi(\emptyset) = \emptyset$.

Do feito acima, temos que K_α e K^α são isomorfos como álgebras de Boole. □

O próximo teorema nos mostrará a relação profunda existente entre K_α e Ω_α, fixado $\alpha \geq 1$.

Teorema 4.9. ***(Teorema de representação de Stone)*** *Toda álgebra de Boole B é isomorfa à álgebra dos aberto-fechados de um espaço topológico compacto Hausdorff e totalmente desconexo.*

Esse espaço é chamado um espaço de Stone para a álgebra B. Todos os espaços de Stone de uma mesma álgebra de Boole são homeomorfos entre si.

Demonstração. Sugerimos [32], página 275. □

Observação 4.10. *A Proposição 4.8 nos diz que K_α é isomorfa como álgebra de Boole a K^α que é a álgebra dos aberto-fechados de Ω_α. No Capítulo 1, vimos que Ω_α é compacto Hausdorff e totalmente desconexo.*

Dessa forma temos que Ω_α é um espaço de Stone para K_α, para $\alpha \geq 1$.

A não existência de isometrias entre as classes de Baire seguirá do Teorema 4.29 e do fato de que para $1 \leq \alpha < \beta < \omega_1$, as álgebras de Boole K_α e K_β não são isomorfas.

Vamos mostrar que K_α e K_β não são isomorfas no Teorema 4.28.

O ponto central desse teorema é um resultado sobre o comportamento das funções Borel-mensuráveis, que será apresentado no Teorema 4.26. No entanto, para a compreensão desse resultado, precisaremos de alguns conceitos e resultados, que desenvolveremos a seguir.

Definição 4.11. *Seja X um espaço topológico. Um subconjunto Y de X é dito:*

(1) raro em X se, e somente se, $int(\overline{Y}) = \emptyset$;

(2) magro ou de primeira categoria em X se, e somente se, $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$, onde cada Y_n é raro em X;

(3) de segunda categoria em X se, e somente se, não for de primeira categoria.

Definição 4.12. *Seja X um espaço topológico, dizemos que X é um espaço de Baire se, e somente se, dada $(U_n)_n$ sequência de abertos densos de X, temos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ é denso em X.*

A próxima proposição nos será útil e sua demonstração não apresenta dificuldades, portanto será omitida.

Proposição 4.13. *Seja X um espaço topológico, são equivalentes:*

(1) X é espaço de Baire;

(2) Todo subconjunto magro de X possui interior vazio.

Teorema 4.14. *(1) Todo espaço completamente metrizável é um espaço de Baire;*

(2) Todo espaço de Baire é de segunda categoria com respeito a si mesmo;

(3) Todo aberto de um espaço de Baire é Baire;

(4) Todo espaço compacto Hausdorff é Baire.

Demonstração. Sugerimos [36], página 186 para (1) e (4) e página 185 para (2).

O item (3) segue da observação abaixo:

Sejam X um espaço topológico e U um aberto de X. Se $A \subset U$ é raro em U, então A é raro em X.

cuja demonstração é simples e da utilização da equivalência para espaço de Baire mostrada na Proposição 4.13. □

Proposição 4.15. *Sejam X um espaço completamente metrizável. Considere $f : X \to \mathbb{R}$ tal que existe sequência $(f_n)_n \subset C(X)$ convergindo pontualmente para f em X.*

Então o conjunto dos pontos de continuidade de f é um G_δ denso em X.

Demonstração. Fixemos $d : X \times X \to \mathbb{R}$ métrica equivalente em X, tal que (X, d) é espaço métrico completo.

Inicialmente, vamos mostrar que o conjunto dos pontos de continuidade de f é denso em X.

Seja U um aberto não vazio de X, vamos mostrar que f tem um ponto de continuidade em U. Seja $(\epsilon_j)_j$ sequência de números reais positivos com $\lim_{j\to\infty} \epsilon_j = 0$. Para cada $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, definamos o conjunto:

$$A_{k,n} = \{x \in U : |f_k(x) - f_n(x)| \leq \epsilon_1\}.$$

Note que cada $A_{k,n}$ é um fechado de U. Definamos $B_k = \bigcap_{n=k}^{\infty} A_{k,n}$. Cada B_k é fechado de U.

É fácil ver que $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ $(*)$.

Como X é espaço completamente metrizável, pelo Teorema 4.14 (1), temos que X é um espaço de Baire. Do Teorema 4.14 (3), vem que todo subconjunto aberto de um espaço de Baire, também é Baire. Logo U é Baire. Assim U é de segunda categoria com respeito a si mesmo (Teorema 4.14 (2)). Como vale $(*)$, cada B_k é fechado de U e U é não vazio, existe k_0 tal que interior de B_{k_0} com respeito a U é não vazio.

Como U é aberto de X, existe U_1 aberto não vazio de X com $U_1 \subset B_{k_0}$. Do fato de U_1 ser não vazio, segue que existe $x_0 \in U_1$. Sabemos que f_{k_0} é contínua em x_0, logo existe $\delta > 0$ tal que:

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| < \epsilon_1/2,$$

Como $x_0 \in U_1$, e U_1 é aberto, existe $\overline{r} > 0$ tal que $B[x_0, \overline{r}] \subset U_1$.

Seja $r < min(\overline{r}, \delta/2, 1)$. Definamos $I_1 = B[x_0, r]$. Note que $I_1 \subset U_1$ e o interior de I_1 é não vazio.

Além disso, para todo $n \geq k_0$ e $x \in I_1$, temos que $|f_{k_0}(x) - f_n(x)| \leq \epsilon_1$. Fazendo o limite para $n \to \infty$, temos que $|f_{k_0}(x) - f(x)| \leq \epsilon_1, \forall x \in I_1$. Assim, se $x, y \in I_1$, temos:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_{k_0}(x)| + |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(y)| + |f_{k_0}(y) - f(y)|$$

$$\leq \epsilon_1 + \epsilon_1 + \epsilon_1 = 3\epsilon_1.$$

Portanto:

$$x, y \in I_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 3\epsilon_1.$$

Como o interior de I_1 é aberto não vazio de X, podemos repetir o procedimento acima com interior de I_1 no lugar de U, ϵ_2 no lugar de ϵ_1 e obter I_2 fechado, com diâmetro menor que 1/2.

Continuando com esse processo, construímos uma sequência decrescente $(I_n)_n$ de fechados de X, com o diâmetro dos (I_n) convergindo para zero. Como X é espaço completamente metrizável, temos que existe $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Note que $x \in U$ e f é contínua em x, já que $|f(z) - f(y)| \leq 3\epsilon_j, \forall z, y \in I_j$ e $\lim_{j\to\infty} \epsilon_j = 0$.

Como U aberto de X é arbitrário, temos que o conjunto dos pontos de continuidade de f é denso em X.

Agora, vamos mostrar que o conjunto dos pontos de continuidade de f forma um G_δ de X.

Seja $A \subset X$, definimos a oscilação de f em A, que denotamos por ω_A, como:

$$\omega_A = \sup_{x,y\in A} |f(x) - f(y)| \in [0, \infty].$$

Agora, seja $x_0 \in X$, definimos a oscilação de f em x_0, que denotamos por $\omega(x_0)$, como:

$$\omega(x_0) = \inf_{V\in V(x_0)} \omega_V,$$

onde $V(x_0)$ é a família de todas as vizinhanças em X de x_0.

Dado $\epsilon > 0$, definimos:

$$O_\epsilon = \{x \in X : \omega(x) < \epsilon\}.$$

Mostremos que O_ϵ é aberto em X. Seja $x_0 \in O_\epsilon$, então $\omega(x_0) < \epsilon$.

Dessa forma, existe $a \in \mathbb{R}$ com $\omega(x_0) < a < \epsilon$. Da definição de $\omega(x_0)$, segue que existe V vizinhança de x_0, tal que $\omega_V < a$. Da definição de ω_V, temos que $|f(x) - f(y)| < a, \forall x, y \in V$. Seja O aberto de X, com $x_0 \in O \subset V$. É claro que $|f(x) - f(y)| < a, \forall x, y \in O$. Portanto $\omega_O \leq a$.

Mostremos que $O \subset O_\epsilon$.

Seja $x \in O$, então $O \in V(x)$. Logo, $\omega(x) = \inf_{W\in V(x)} \omega_W \leq \omega_O \leq a < \epsilon$. O que implica que $\omega(x) < \epsilon$. Dessa forma, mostramos que $O \subset O_\epsilon$.

Assim, para cada $\epsilon > 0$, temos que O_ϵ é aberto de X.

Agora, vamos mostrar que f é contínua em $x \in X$ se, e somente se, $\omega(x) = 0$.

Suponhamos que f seja contínua em x. Dado $n > 0$, existe U vizinhança de x tal que:

$$|f(y) - f(x)| < \frac{1}{2n},$$

para todo $y \in U$. Logo, para todos $z, y \in U$, temos que $|f(z) - f(y)| < \frac{1}{n}$. Como $U \in V(x)$, temos que $\omega(x) \leq \frac{1}{n}, \forall n > 0$. Portanto $\omega(x) = 0$.

Suponhamos que $\omega(x) = 0$. Da definição de $\omega(x)$ segue que existe sequência $(U_n)_n$ de abertos de X, com cada U_n contendo x, tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \omega_{U_n} = 0.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq N \Rightarrow \omega_{U_n} < \epsilon.$$

Portanto, $\sup_{y,z \in U_n} |f(z) - f(y)| < \epsilon, \forall n \geq N$.

Em particular, temos que para todo $y \in U_N$:

$$|f(y) - f(x)| < \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ foi arbitrário, com isso estabelecemos a continuidade de f em x.

É claro que $\{x \in X : \omega(x) = 0\} = \bigcap_{n>0} O_{\frac{1}{n}}$, que é um G_δ de X, já que todo $O_{\frac{1}{n}}$ é aberto de X.

Portanto, temos que o conjunto dos pontos de continuidade de f é um G_δ de X. $\square$

Para a obtenção do Teorema 4.26, introduziremos algumas estruturas conjuntistas.

Definição 4.16. ***(Classe σ-aditiva)*** *Sejam X um conjunto e $\mathfrak{E} \subset \wp(X)$.*

Dizemos que $\mathfrak{E}$ é classe σ-aditiva se, e somente se, valerem:

(i) $\mathfrak{E} \neq \emptyset$;

(ii) Se $A, B \in \mathfrak{E}$ *e* $A \cap B = \emptyset$, *então* $A \cup B \in \mathfrak{E}$;

(iii) Se $A, B \in \mathfrak{E}$ *e* $B \subset A$, *então* $A - B \in \mathfrak{E}$;

(iv) Se $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{E}$ *é sequência crescente de conjuntos, então* $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathfrak{E}$.

Definição 4.17. *Sejam X um conjunto e $D \subset \wp(X)$, com $D \neq \emptyset$. Então, a classe σ-aditiva gerada por D é a menor classe σ-aditiva que contém D. Ou seja, é a intersecção de todas as classes σ-aditivas contendo D. Isso está bem definido, pois a intersecção de uma família de classes σ-aditivas é classe σ-aditiva.*

Definição 4.18. ***(σ-anel)*** *Sejam X um conjunto e $\mathfrak{E} \subset \wp(X)$.*

Dizemos que $\mathfrak{E}$ é σ-anel se, e somente se, valerem:

(i) $\mathfrak{E} \neq \emptyset$;

(ii) Se $A, B \in \mathfrak{E}$, então $A - B \in \mathfrak{E}$;

(iii) Se $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{E}$, então $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathfrak{E}$.

Definição 4.19. *Sejam X um conjunto e $D \subset \wp(X)$, com $D \neq \emptyset$. Então, o σ-anel gerado por D é o menor σ-anel que contém D. Ou seja, é a intersecção de todos os σ-anéis contendo D. Isso está bem definido, pois a intersecção de uma família de σ-anéis é σ-anel.*

Proposição 4.20. *(**Lema da Classe σ-aditiva**) Sejam X um conjunto e $D \subset \wp(X)$, com $D \neq \emptyset$. Suponha que D seja fechado para intersecções finitas. Então a classe σ-aditiva gerada por D coincide com a σ-álgebra gerada por D.*

Demonstração. Sugerimos [15], página 15. □

O próximo lema nos diz como obter todas as funções Borel-mensuráveis a partir de funções características de borelianos.

Lema 4.21. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função.*

(1) Se f é função Borel-mensurável então, f é limite pontual de funções simples Borel-mensuráveis;

(2) Se f é função simples Borel-mensurável, então f é combinação linear finita de funções características de borelianos.

Demonstração. (1) Seja $f : I \to \mathbb{R}$, note que f pode ser escrita como $f = f^+ - f^-$, onde:

$$f^+ = max(f, 0)$$

e

$$f^- = -min(f, 0).$$

Dessa forma, f é a diferença de duas funções positivas.

Como f é Borel-mensurável, temos que f^+, f^- são Borel-mensuráveis. (Veja [31], página14) O resultado segue, mediante a aplicação do Teorema 1.17 de [31], página 15, para f^+ e f^-.

(2) Seja $f : I \to \mathbb{R}$ função simples, então $f = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j . C_{A_j}$, com $A_j = f^{-1}(\lambda_j)$. Como f é Borel-mensurável, temos que $A_j \in Bor$. Isso mostra nosso resultado.

□

Para a obtenção do Teorema 4.26, também precisaremos de mais alguns resultados envolvendo espaços de Baire, que desenvolveremos a seguir.

Lema 4.22. *Seja X um espaço de Baire. Sejam $G_1, G_2 \in G_\delta(X)$ tais que G_1 e G_2 são densos em X. Então $G_1 \cap G_2$ é denso em X.*

Demonstração. Suponhamos que $G_1 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ e $G_2 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$, onde A_n, B_n são abertos de X. Como G_1 é denso em X, temos que A_n é denso em X, $\forall n \in \mathbb{N}$. Analogamente para B_n.

Portanto $G = G_1 \cap G_2$ é uma intersecção ernumerável de abertos densos de X. Como X é Baire, temos que G é denso em X. □

Observação 4.23. *Note que com essencialmente a mesma demonstração do lema acima, temos que:*

Num espaço de Baire X, toda intersecção enumerável de G_δ's densos em X é densa em X.

Definição 4.24. *Seja X um espaço topológico, dizemos que X é um espaço polonês se, e somente se, X é completamente metrizável e separável.*

Lema 4.25. *Todo G_δ de um espaço completamente metrizável(espaço polonês) é completamente metrizável(espaço polonês).*

Demonstração. Sugerimos [34], página 52. □

Agora, estamos prontos para nosso resultado sobre o comporatmento das funções Borel-mensuráveis.

Teorema 4.26. *Seja $f : I \to I$ função Borel-mensurável. Então, existe $F \subset I$ tal que $F \in F_\sigma$, F é de primeira categoria em I e $f|_{F^C}$ é contínua.*

Demonstração. Inicialmente, notemos que para estabelecermos nosso resultado, basta mostrarmos que para f, como descrita no enunciado, existe $G \subset I$ tal que $G \in G_\delta$, G é denso em I e $f|_G$ é contínua. De fato, suponha a existência de G com as propriedades descritas acima, defina $F = G^C$. É claro que $F \in F_\sigma$ e $f|_{F^C}$ é contínua. Mostremos que F é de primeira categoria.

Como $G \in G_\delta$, podemos escrever $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$, com cada G_n aberto de I. Dessa forma, temos que $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n^C$. Para concluirmos que F é de primeira categoria, como cada G_n^C é fechado, basta mostrarmos que $int(G_n^C) = \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$.

G é denso em I, portanto para todo aberto $U \neq \emptyset$ de I, $G \cap U \neq \emptyset$. Assim, $U \cap G_n \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, $U \nsubseteq G_n^C, \forall n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, concluímos que nenhum G_n^C pode conter um aberto não vazio de I. Logo, $int(G_n^C) = \emptyset$.

Tendo em vista o que foi discutido acima, vamos mostrar que existe $G \subset I$ um G_δ denso tal que $f|_G$ é contínua.

Definamos a seguinte família de funções:

$\mathfrak{C} = \{g : I \to \mathbb{R}$ tal que existe H um G_δ denso em I com $g|_H$ contínua$\}$.

Vamos mostrar algumas propriedades de $\mathfrak{C}$ que vão nos ajudar a simplificar nossa demonstração.

(1) $\mathfrak{C}$ é fechada para a soma de funções. Isto é, se $f, g \in \mathfrak{C}$, então a função $f + g \in \mathfrak{C}$, onde $f + g(x) = f(x) + g(x), \forall x \in I$.

Sejam $f, g \in \mathfrak{C}$, existem $H_f, H_g \subset I$ com $H_f, H_g \in G_\delta$, densos em I e tais que $f|_{H_f}$ e $g|_{H_g}$ são contínuas. Cosidere $H = H_f \cap H_g$. É claro que $H \in G_\delta$ e $(f + g)|_H$ é contínua. Como I é um espaço de Baire, do Lema 4.22 segue que H é denso em I.

Portanto, temos que $f + g \in \mathfrak{C}$.

(2) $\mathfrak{C}$ é fechado por produto por escalar. Isto é, se $f \in \mathfrak{C}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então a função $\lambda.f \in \mathfrak{C}$, onde $(\lambda.f)(x) = \lambda.f(x), \forall x \in I$.

Sejam $f \in \mathfrak{C}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Existe $H \subset I$, um G_δ denso em I com $f|_H$ contínua. É claro que $(\lambda.f)|_H$ também é contínua. Isso mostra (2).

(3) $\mathfrak{C}$ é fechada para limites pontuais. Ou seja, se $(f_n)_n \subset \mathfrak{C}$ converge pontualmente para f em I, então $f \in \mathfrak{C}$.

Vamos mostrar que f ,como descrita acima, pertence a $\mathfrak{C}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $G_n \subset I$, com G_n um G_δ denso em I, tal que $f_n|G_n$ é contínua. Definamos $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$.

De acordo com a Observação 4.23, temos que G é denso em I. É claro que G é um G_δ de I.

Notemos que $f|_G$ é o limite pontual da sequência $(f_n|_G)_n \subset C(G, \mathbb{R})$ em G. Além disso, como I é espaço métrico completo, o Lema 4.25 nos diz que G é um espaço completamente metrizável, já que G é G_δ de I. Logo, de acordo com a Proposição 4.15, existe $H \subset G$, tal que H é um G_δ de G, H é denso em G e $f|_H$ é contínua. Como G é G_δ de I e H é G_δ de G, segue do Lema 2.15 que H é G_δ de I. É claro que H é denso em I, pois H é subconjunto denso de G, que é denso em I.

Dessa forma, concluímos que $f \in \mathfrak{C}$.

Suponha, que tenhamos mostrado que a função característica de cada boreliano pertença a $\mathfrak{C}$. O Lema 4.21 (2), nos diz que toda função simples Borel-mensurável é combinação linear finita de funções características de borelianos. Portanto, os itens (1) e (2) acima implicariam que toda função simples Borel-mensurável pertence a $\mathfrak{C}$. Além disso, o Lema 4.21 (1), nos diz que toda função Borel-mensurável é limite pontual de funções simples Borel-mensuráveis. Então, o item (3) acima implicaria que toda função Borel-mensurável pertence a $\mathfrak{C}$.

Dessa forma, para estabelecermos nosso resultado, basta mostrarmos que a função característica de qualquer boreliano pertence a $\mathfrak{C}$.

Definamos a família $\mathfrak{A} = \{A \in Bor \text{ tal que } C_A \in \mathfrak{C}\}$.

Nosso objetivo é mostrar que $Bor \subset \mathfrak{A}$

Mostremos que $\mathfrak{A}$ é uma classe σ-aditiva de I.

(i) $\mathfrak{A} \neq \emptyset$. De fato, $I \in \mathfrak{A}$;

(ii) $\mathfrak{A}$ é fechada para uniões finitas disjuntas.

Sejam $A, B \in \mathfrak{A}$, com $A \cap B = \emptyset$. É claro que $A \cup B \in Bor$. Note que $C_{A\cup B} = C_A + C_B$. Por hipótese, $C_A, C_B \in \mathfrak{C}$. Como discutido anteriormente, temos que $C_{A\cup B} = C_A + C_B \in \mathfrak{C}$. Dessa forma, $A \cup B \in \mathfrak{A}$;

(iii) Sejam $A, B \in \mathfrak{A}$, com $B \subset A$. Mostremos que $A - B \in \mathfrak{A}$. É claro que $A - B \in Bor$. Note que $C_{A-B} = C_A - C_B$. Por hipótese, temos que $C_A, C_B \in \mathfrak{C}$. Como discutido anteriormente, $C_{A-B} = C_A - C_B \in \mathfrak{C}$. Portanto, $A - B \in \mathfrak{A}$;

(iv) Suponha que $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$, com $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sequência de conjuntos crescente. Mostremos que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathfrak{A}$. É claro que $A \in Bor$. Note que, para todo $x \in I$, temos que $C_A(x) = \lim_{k\to\infty} C_{A_k}(x)$.

Por hipótese, $C_{A_k} \in \mathfrak{C}, \forall k \in \mathbb{N}$. Assim, C_A é limite pontual de sequência de funções de $\mathfrak{C}$. Pelo discutido anteriormente, temos que $C_A \in \mathfrak{C}$. Portanto $A \in \mathfrak{A}$.

De (i)-(iv), concluímos que $\mathfrak{A}$ é classe σ-aditiva de I.

Consideremos $D = \{J \subset I$ tal que J é intervalo de I$\}$. Note que um intervalo de I é a intersecção de um intervalo de $\mathbb{R}$ com I. Seja R o σ-anel gerado por D. Como $I \in R$, da definição de σ-anel, vem que R é uma σ-álgebra de subconjuntos de I.

Mostremos que $R = Bor$.

(i) Seja $A \subset I$ aberto, então A é uma união enumerável de elementos de D, portanto $A \in R$. Dessa forma R é uma σ-álgebra de I que contém todos os abertos de I. O que implica que $Bor \subset R$;

(ii) Notemos que $D \subset Bor$. Como Bor é σ-álgebra, temos que Bor é σ-anel. Do fato de R ser o σ-anel gerado por D, segue que $R \subset Bor$.

De (i) e (ii) segue que $R = Bor$. Dessa forma, o σ-anel R gerado por D é uma σ-álgebra. Observemos que R é a σ-álgebra gerada por D.

É claro que D é fechado para intersecções finitas, de acordo com a Proposição 4.20, temos que a classe σ-aditiva gerada por D coincide com a σ-álgebra gerada por D. Como a σ-álgebra gerada por D é Bor, temos que a classe σ-aditiva gerada por D é Bor.

Se mostrarmos que $D \subset \mathfrak{A}$, como $\mathfrak{A}$ é classe σ-aditiva, teremos que $Bor \subset \mathfrak{A}$.

O que estabelece nosso resultado, como discutido anteriormente.

Seja $J \in D$, suponha que $0 \leq a < b \leq 1$ sejam os extremos de J. É claro que $J \in Bor$. Considere o conjunto $I - \{a, b\}$, ele é aberto e denso em I, além disso, temos que $C_J|_{I-\{a,b\}}$ é contínua. Dessa forma, $J \in \mathfrak{A}$.

Isso mostra que $D \subset \mathfrak{A}$. Logo, $Bor \subset \mathfrak{A}$. □

Para mostrarmos que K_α e K_β não são isomorfas como álgebras de Boole, precisamos ainda de um lema, que será fundamental nesse trabalho.

Lema 4.27. *Seja B um boreliano não enumerável de um espaço polonês X, então B contém um subconjunto homeomorfo ao conjunto de Cantor.*

Demonstração. Sugerimos [34], página 93. □

Teorema 4.28. *Sejam* $1 \leq \alpha < \beta < \omega_1$, *ordinais. Então* K_α *e* K_β *não são isomorfas como álgebras de Boole.*

Demonstração. Fixemos α e β como no enunciado. Suponhamos, por absurdo, que $\rho : K_\alpha \to K_\beta$ seja um isomorfismo booleano.

Afirmamos, que existe uma função $\pi : I \to I$ bijetora, tal que $\rho(E) = \pi(E), \forall E \in K_\alpha$. Vamos fazer algumas observações, para podermos definir uma tal π.

Seja $x \in I$. Como I é Hausdorff, temos que $\{x\}$ é fechado, logo $\{x\} \in F_0$. Dessa forma, $\{x\} \in K_\alpha$ e $\{x\} \in K_\beta$. Seja $B_x = \rho(\{x\}) \in K_\beta$. Mostremos que $|B_x| = 1$.

(i) $|B_x| \geq 1$. Note que $\{x\} \neq \emptyset$. Portanto, $\rho(\{x\}) \neq \emptyset$, pois $\rho(\emptyset) = \emptyset$ e ρ é injetora.

(ii) $|B_x| \leq 1$. Suponha, por absurdo, que $|B_x| \geq 2$. Podemos tomar $a, b \in B_x$, com $a \neq b$.

Consideremos ρ^{-1} a inversa de ρ. É claro que ρ^{-1} também é isomorfismo booleano. Note que:

$$\rho^{-1}(B_x) = \rho^{-1}(\{a\} \cup (B_x \cap \{a\}^C)) = \rho^{-1}(\{a\}) \cup \rho^{-1}(B_x \cap \{a\}^C).$$

Dessa forma, temos que $\rho^{-1}(\{a\}) \subset \{x\} = \rho^{-1}(B_x)$. Portanto, como $\rho^{-1}(\{a\}) \neq \emptyset$, temos que $\rho^{-1}(\{a\}) = \{x\}$. Analogamente, concluímos que $\rho^{-1}(\{b\}) = \{x\}$. Da injetividade de ρ^{-1}, segue que $a = b$. Mas isso contradiz a escolha de a, b.

Portanto, concluímos que $|B_x| \leq 1$.

De (i) e (ii), concluímos que $|B_x| = 1$.

Definamos $\pi : I \to I$, como $\pi(x) = b_x$, onde $\rho(\{x\}) = B_x = \{b_x\}$.

Agora, vamos mostrar que π é bijetora.

(i) π é injetora. Sejam $x, y \in I$, com $x \neq y$. Então $\{x\} \neq \{y\}$. Da injetividade de ρ segue que $\rho(\{x\}) \neq \rho(\{y\})$. Dessa forma, $b_x \neq b_y$.

Isso mostra que $\pi(x) \neq \pi(y)$. Estabelecemos, assim, a injetividade de π.

(ii) π é sobrejetora. Seja $y \in I$, suponhamos que $\rho^{-1}(\{y\}) = \{a_y\}$. Logo $\rho(\{a_y\}) = \{y\}$. Da definição de π, segue que $\pi(a_y) = y$.

Isso mostra a sobrejetividade de π

De (i) e (ii), concluímos que π é bijetora.

Falta mostrarmos que $\pi(E) = \rho(E), \forall E \in K_\alpha$.

Inicialmente, mostremos que $\rho(E) \subset \pi(E)$. Seja $y \in \rho(E)$, então $\{y\} \subset \rho(E)$. Portanto, $\rho^{-1}(\{y\}) \subset E$. Suponha que $\{z\} = \rho^{-1}(\{y\})$. Logo, $z \in E$. Como $\rho(\{z\}) = \{y\}$, temos que $\pi(z) = y$. Portanto, $y \in \pi(E)$. Isso mostra que $\rho(E) \subset \pi(E)$.

Agora, mostremos que $\pi(E) \subset \rho(E)$. Seja $z \in \pi(E)$, existe $x \in E$ tal que $z = \pi(x)$.

Da definição de π, temos que $\rho(\{x\}) = \{z\}$. Como $x \in E$, temos que $\{x\} \subset E$, logo $\rho(\{x\}) \subset \rho(E)$. Portanto $\{z\} \subset \rho(E)$. O que implica que $z \in \rho(E)$. Isso mostra que $\pi(E) \subset \rho(E)$.

Com o feito acima, concluímos que $\pi : I \to I$ é função bijetora, tal que $\pi(E) = \rho(E), \forall E \in K_\alpha$.

Afirmamos que π é função Borel-mensurável. De fato, seja $G \subset I$ aberto, então $G \in G_0$. Dessa forma, $G \in K_\beta$, pois $\beta \geq 1$. Assim, $\rho^{-1}(G) \in K_\alpha \subset Bor$, onde $Bor = \sigma$-álgebra dos borelianos de I. Pelo discutido acima, temos que $\rho(\rho^{-1}(G)) = \pi(\rho^{-1}(G))$. O que implica que:

$$G = \pi(\rho^{-1}(G)). \tag{4.1}$$

Como π é invertível, tomando pré-imagens na equação (4.1), ficamos com:

$$\pi^{-1}(G) = \rho^{-1}(G).$$

Portanto, temos que $\pi^{-1}(G) \in Bor$.

Isso mostra que π é Borel-mensurável.

De acordo com o Teorema 4.26, existe $F \subset I$ de primeira categoria em I, com $F \in F_\sigma$ e tal que $\pi|_{F^C}$ é contínua.

Mostremos que F^C é não enumerável. Suponha, por absurdo, que F^C seja enumerável, então podemos escrever:

$$F^C = \bigcup_{x_n \in F^C} \{x_n\}.$$

Como I não possui pontos isolados e é Hausdorff, temos que cada $\{x_n\}$ é raro em I. Portanto F^C é de primeira categoria em I.

Como F também é de primeira categoria em I e $I = F \cup F^C$, temos que I é de primeira categoria com respeito si mesmo.

No entanto, como I é espaço métrico completo, I é um espaço de Baire. Logo I é de segunda categoria com respeito a si mesmo. Essa contradição surgiu, pois supusemos que F^C era enumerável.

Assim, concluímos que F^C não é enumerável.

Do fato de F ser um F_σ, segue que F^C é um G_δ. Portanto, F^C é um boreliano não enumerável de I. De acordo com o Lema 4.27, existe $K \subset F^C$ com K homeomorfo ao conjunto de Cantor (Definição 2.1).

Como $\pi|_{F^C}$ é contínua e $K \subset F^C$, temos que $\pi|_K$ é contínua. Além disso, $\pi|_K$ também é injetora, já que π é injetora.

Consideremos $\pi|K : K \to \pi(K)$. $\pi|K$, com esse contradomínio, é um homeomorfismo. De fato, como discutido acima, $\pi|K$ é contínua e injetora. É claro que, com esse contradomínio, $\pi|K$ é sobrejetora. Assim, $\pi|K$ é função contínua entre um compacto e um Hausdorff, o que implica que $\pi|K$ é aplicação fechada. Isso mostra a continuidade de sua inversa.

Seja $A \in K_\alpha(K)$, como $\pi|_K$ é homeomorfismo, o Lema 2.8 garante que $\pi(A) \in K_\alpha(\pi(K))$.

No Capítulo 2, mostramos que dado β um ordinal enumerável, com $\alpha < \beta$, existe subconjunto do conjunto de Cantor C pertencente a $K_\beta(C) - K_\alpha(C)$. Como $\pi(K)$ é homeomorfo a C, pois K é homeomorfo a C e K é homeomorfo a $\pi(K)$, existe $A \in K_\beta(\pi(K)) - K_\alpha(\pi(K))$.

Note que K é fechado em I, portanto $K \in K_\alpha$. Então $\rho(K) \in K_\beta$. Pela construção de π, temos que $\pi(K) = \rho(K)$. Portanto, $\pi(K) \in K_\beta$. Do Lema 2.15, segue facilmente que $A \in K_\beta$

Como $\rho : K_\alpha \to K_\beta$ é sobrejetora, temos que $A = \rho(B)$, para algum $B \in K_\alpha$. Além disso, $A \in K_\beta(\pi(K))$, o que implica que:

$$A \subset \pi(K) \Rightarrow \rho^{-1}(A) \subset \rho^{-1}(\pi(K)) \Rightarrow \rho^{-1}(A) \subset \rho^{-1}(\rho(K)) = K.$$

Portanto, temos que $B \subset K$. Como K é fechado em I e $B \in K_\alpha$, segue do Lema 2.15 que $B \in K_\alpha(K)$. Dessa forma, como $\pi|_K : K \to \pi(K)$ é homeomorfismo, temos $\pi(B) \in K_\alpha(\pi(K))$.

Lembre que B é tal que $A = \rho(B) = \pi(B)$. Logo, concluímos que $A \in K_\alpha(\pi(K))$.

Mas, isso contradiz a escolha de A. Portanto, temos que K_α e K_β não são isomorfas. □

Agora, vamos demonstrar o teorema central desse capítulo. O Teorema 4.31 terá como uma das peças centrais de sua demonstração, o Teorema de Banach-Stone. Esse teorema caracteriza os compactos Hausdorff K e L tais que $C(L)$ e $C(K)$ são linearmente isométricos.

Teorema 4.29. ***(Teorema de Banach-Stone)*** *Sejam K,L compactos Hausdorff. $C(K)$ é linearmente isométrico a $C(L)$ se, e somente se, K e L são homeomorfos.*

Demonstração. Sugerimos [14], página 79. □

É interessante esclarecermos que se $C(K)$ e $C(L)$ são apenas linearmente isomorfos, então K e L não precisam ser homeomorfos.

O Teorema de Milutin nos dá muitos exemplos do dito acima.

Teorema 4.30. ***(Teorema de Milutin)*** *Se K e L são espaços métricos compactos e não enumeráveis, então $C(K)$ é linearmente isomorfo a $C(L)$.*

Demonstração. Sugerimos [3], página 55. □

Teorema 4.31. *Sejam α, β ordinais tais que $1 \leq \alpha < \beta < \omega_1$, então $B_\alpha(I)$ e $B_\beta(I)$ não são isométricos.*

Demonstração. Sejam α, β, como no enunciado. Suponhamos, por absurdo, que $B_\alpha(I)$ e $B_\beta(I)$ sejam isométricos.

No Capítulo 1, vimos que $B_\alpha(I)$ é isométrico a $C(\Omega_\alpha)$ e $B_\beta(I)$ é isométrico a $C(\Omega_\beta)$, onde os espaços, $\Omega_\alpha, \Omega_\beta$ são compactos Hausdorff e totalmente desconexos. De acordo com nossa hipótese, temos que $C(\Omega_\alpha)$ é isométrico a $C(\Omega_\beta)$.

De acordo com o Teorema 4.29, temos que Ω_α e Ω_β são homeomorfos.

Seja $h : \Omega_\alpha \to \Omega_\beta$ um homeomorfismo. Então, h induz um isomorfismo de álgebras de Boole entre as álgebras dos aberto-fechados de Ω_α e Ω_β. De fato, seguindo a notação da Proposição 4.7, definamos $\varphi : K^\alpha \to K^\beta$ como $\varphi(A) = h(A), \forall A \in K^\alpha$. Vamos mostrar que φ é isomorfismo de álgebras de Boole.

(i) φ está bem definida, ou seja, $h(A) \in K^\beta, \forall A \in K^\alpha$.

Como h é homeomorfismo, h leva aberto em aberto e fechado em fechado. Se $A \in K^\alpha$, então A é aberto e fechado, portanto $h(A) \in K^\beta$. Isso mostra que φ está bem definida.

(ii) φ é injetora. Sejam $A_1, A_2 \in K^\alpha$. Suponha que $h(A_1) = h(A_2)$. Aplicando a inversa de h, concluímos que $h^1(h(A_1)) = h^{-1}(h(A_2))$. Portanto $A_1 = A_2$. Isso mostra a injetividade de φ.

(iii) φ é sobrejetora. Seja $B \in K^\beta$. Como h é contínua, $h^{-1}(B) \in K^\alpha$.

Note que $\varphi(h^{-1}(B)) = h(h^{-1}(B)) = B$. Isso mostra a sobrejetividade de φ.

(iv) Seja $A \in K^\alpha$, então:

$$\varphi(A^C) = h(A^C) = (h(A))^C = (\varphi(A))^C.$$

Portanto, φ leva o complementar de A no complementar de $\varphi(A)$.

(v) Sejam $A, B \in K^\alpha$, então:

$$\varphi(A \cup B) = h(A \cup B) = h(A) \cup h(B) = \varphi(A) \cup \varphi(B).$$

Assim, φ preserva uniões finitas.

(vi) $\varphi(\Omega_\alpha) = h(\Omega_\alpha) = \Omega_\beta$.

De (i)-(vi) segue que φ é isomorfismo de álgebras de Boole. Então, K^α e K^β são álgebras de Boole isomorfas.

De acordo com a Proposição 4.8, K^α é isomorfa como álgebra de Boole a K_α, o mesmo acontecendo com K^β e K_β.

Portanto, temos que K_α e K_β são isomorfas como álgebras de Boole. Mas, isso contradiz o Teorema 4.28. A contradição surgiu de supormos que $B_\alpha(I)$ era isométrico a $B_\beta(I)$.

Dessa forma, estabelecemos nosso resultado. $\square$

Capítulo 5

Não existência de isomorfismo entre $B_{\omega_1}(I)$ e $B_\alpha(I)$ para α enumerável e não complementação de $B_\alpha(I)$ em $B_\beta(I)$, $1 \leq \alpha < \beta$ e α enumerável

No capítulo anterior vimos que se $0 \leq \alpha < \beta < \omega_1$, então $B_\alpha(I)$ e $B_\beta(I)$ não são isométricos.

No entanto, podemos nos perguntar:

É possível que para distintos $\alpha, \beta \leq \omega_1$ tenhamos $B_\alpha(I)$ isomorfo a $B_\beta(I)$?

Neste capítulo vamos mostrar que $B_{\omega_1}(I)$ não é isomorfo a nenhum $B_\alpha(I)$ com $\alpha < \omega_1$.

O invariante isomórfico usado será a propriedade de um espaço de Banach ser Baire-complementado, conceito que será definido na Seção 2. Nessa seção, mostraremos também que ser Baire-complementado é um invariante isomórfico.

Na Seção 3, mostraremos que $B_{\omega_1}(I)$ é Baire-complementado.

Já na Seção 4, veremos que $B_\alpha(I)$ não é Baire-complementado para todo $1 \leq \alpha < \omega_1$.

Portanto, concluiremos a impossibilidade de isomorfismo entre $B_{\omega_1}(I)$ e $B_\alpha(I)$, para $1 \leq \alpha <$

ω_1.

Na Seção 4, também mostraremos que o fato de $B_\alpha(I)$ não ser Baire-complementado implica que $B_\alpha(I)$ não é subespaço complementado de $B_\beta(I)$ para $1 \leq \alpha < \beta \leq \omega_1$. Ou seja, teremos o resultado geral de não complementação das classes de Baire, que começamos a discutir no Capítulo 3.

5.1 A hierarquia dos conjuntos de Baire e classes de Baire de funções sobre espaços topológicos

A fim de obtermos resultados acerca da Baire complementação das classes de Baire sobre I, teremos que trabalhar com classes de Baire sobre outros espaços topológicos. Isso se deve ao fato de utilizarmos a representação de $B_\alpha(I)$ como $C(\Omega_\alpha)$, vista no Capítulo 1.

Para nossos propósitos, precisaremos de uma generalização do Teorema de Lebesgue-Hausdorff, para esse caso mais geral de classes de Baire sobre espaços topológicos. Essa generalização denominaremos de **Teorema de Lebesgue-Hausdorff generalizado**. Note que essa nomenclatura não é canônica.

No Teorema de Lebesgue-Hausdorff, relacionamos as classes de Baire sobre I com os Borelianos de I. No caso geral, relacionaremos as classes de Baire sobre um espaço topológico com a σ-álgebra dos conjuntos de Baire desse espaço. Essa relação está enunciada no Teorema 5.1.13 e sua demonstração se encontra no Apêndice A.

Nesta seção, vamos definir a hierarquia dos conjuntos de Baire e provar algumas propriedades. O leitor perceberá grande semelhança com as propriedades dos Borelianos de I, o que não ocorreria se considerássemos os Borelianos do espaço topológico. Além disso, mostraremos que no caso de um espaço métrico as hierarquias dos Borelianos e dos conjuntos de Baire coincidem em cada nível.

Ao longo desta seção, S será um espaço topológico arbitrário, salvo menção contrária.

Definição 5.1.1. *Definiremos recursivamente as classes de Baire de funções sobre S, que serão denotadas por $B_\alpha(S)$ para cada ordinal α:*

(1) $B_0(S) = \{f \in C(S)$ *tal que* f *é limitada*$\}$;

(2) Dado um ordinal $\alpha \geq 1, B_\alpha(S) = \{f : S \to \mathbb{R}$ *tal que* f *é limitada e existe* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta(S)$ *com* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergindo pontualmente para* f *em* $S\}$.

Observação 5.1.2. *Em [5], F. Dashiell define as classes de Baire sobre um espaço topológico* S *de uma forma diferente da definição dada acima, veja [5] página 30. A autora desse trabalho optou pela definição aqui apresentada, para que no caso de* $S = [0, 1]$*, as Definições 5.1.1 e 1.1.1 coincidam. Portanto, os teoremas de [5] aqui apresentados, foram adaptados de acordo com a definição adotada.*

Definição 5.1.3. *Fixado* α *um ordinal:*

(1) Definimos em $B_\alpha(S)$ *as mesmas operações descritas na Definição 1.1.3;*

(2) Definimos a função $||.||_\infty : B_\alpha(S) \to \mathbb{R}$*, como na Definição 1.1.6, ou seja:*

$$||f||_\infty = \sup_{s\in S} |f(s)|.$$

Teorema 5.1.4. *Fixemos* α *um ordinal. Então:*

(1) As operações, descritas na Definição 5.1.3, estão bem definidas;

(2) $B_\alpha(S)$*, com as operações soma e produto por escalar, descritas na Definição 5.1.3 (1) é um espaço vetorial real;*

(3) A função $||.||_\infty$*, descrita na Definição 5.1.3(2), é uma norma em* $B_\alpha(S)$*;*

(4) Se $\alpha \geq 1$ *e* $f \in B_\alpha(S)$*, então existe sequência* $(f_n)_n \subset \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta(S)$*, convergindo pontualmente para* f *em* S *tal que* $||f_n||_\infty \leq ||f||$.

(5) $(B_\alpha(S), ||.||_\infty)$ *é um espaço de Banach;*

(6) $(B_\alpha(S), ||.||_\infty)$*, com todas as operações descritas na Definição 5.1.3 (1) é uma álgebra de Banach comutativa.*

Demonstração. (1) Análoga à demonstração da Proposição 1.1.4;

(2) Análoga à demonstração da Proposição 1.1.5;

(3) Análoga à demonstração da Proposição 1.1.7. Note que como não estamos supondo S compacto, exigimos que as funções em $B_0(S)$ sejam limitadas;

(4) Análoga à demonstração do Lema 1.1.9;

(5) Com demostração análoga a da Proposição 1.1.10, concluímos que $B_\alpha(S)$ é fechado para convergência uniforme.

Desse fato e da definição da norma $||.||_\infty$, estabelecemos a completude de $B_\alpha(S)$;

(6) Análoga à demonstração da Proposição 1.1.12.

□

Agora, vamos definir a hierarquia dos conjuntos de Baire de S e provar algumas propriedades.

Definição 5.1.5. *Definiremos recursivamente as seguintes famílias de subconjuntos de S:*

(i) $Z_0(S) = \{f^{-1}(0) : f \in C(S)\}$, *esses são chamados de zero sets de S;*

(ii) $CZ_0(S) = \{A \subset S : A^C \in Z_0(S)\}$, *esses são chamados de cozero sets de S;*

(iii) Seja $\alpha > 0$ *um ordinal, suponha definidos* $Z_\beta(S)$ *e* $CZ_\beta(S)$ *para todo* $0 \leq \beta < \alpha$, *então* $Z_\alpha(S) = \{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n : A_n \in \bigcup_{\beta<\alpha} CZ_\beta(S)\}$;

(iv) $CZ_\alpha(S) = \{A : A^C \in Z_\alpha(S)\}$, *para todo ordinal* α.

Denominamos $Z_\alpha(S)$ *de classe multiplicativa* α *e* $CZ_\alpha(S)$ *de classe aditiva* α.

Observação 5.1.6. *Note que também podemos descrever* $CZ_\alpha(S)$ *da seguinte forma:*

$$CZ_\alpha(S) = \{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n : A_n \in \bigcup_{\beta<\alpha} Z_\beta(S)\}.$$

Definição 5.1.7. *Fixado um ordinal α, definimos a classe ambígua α, que denotaremos por $A_\alpha(S)$, como:*

$$A_\alpha(S) = Z_\alpha(S) \cap CZ_\alpha(S).$$

Proposição 5.1.8. *Fixado um ordinal α, temos que:*

(1) $Z_\alpha(S) \subset CZ_{\alpha+1}(S)$*;*

(2) $CZ_\alpha(S) \subset Z_{\alpha+1}(S)$*;*

(3) $Z_\alpha(S) \subset Z_{\alpha+1}(S)$*;*

(4) $CZ_\alpha(S) \subset CZ_{\alpha+1}(S)$*;*

(5) $Z_\alpha(S)$ *é fechado para intersecções enumeráveis e finitas e* $CZ_\alpha(S)$ *é fechado para uniões enumeráveis e finitas;*

(6) $Z_\alpha(S)$ *é fechado para uniões finitas e* $CZ_\alpha(S)$ *é fechado para intersecções finitas;*

(7) $A_\alpha(S)$ *é uma álgebra de subconjuntos de S.*

Demonstração. (1) Seja $A \in Z_\alpha(S)$. Note que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A$ e $\alpha < \alpha + 1$. Então, de acordo com a Observação 5.1.6, temos que $A \in CZ_{\alpha+1}(S)$.

(2) Basta tomarmos complementos e usarmos (1).

(3) Devemos dividir a demonstração em dois casos:

Caso 1 $\alpha = 0$. Então $A \in Z_0(S)$ implica que $A = f^{-1}(0)$ para alguma $f \in C(S)$.

Para cada $n > 0$, definamos $g_n : S \to \mathbb{R}$ como $g_n(s) = min(|f(s)| - \frac{1}{n}, 0)$. Note que cada $g_n \in C(S)$.

Para cada $n > 0$, seja $A_n = (g_n^{-1}(0))^C \in CZ_0(S)$. Notemos que $A = \bigcap_{n>0} A_n$, o que implica que $A \in Z_1(S)$.

Caso 2 $\alpha > 0$. Se $A \in Z_\alpha(S)$, então $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, com cada $A_n \in CZ_{\alpha_n}(S)$ e $\alpha_n < \alpha$. Logo, cada $\alpha_n < \alpha + 1$. Portanto, temos que $A \in Z_{\alpha+1}(S)$.

(4) Basta tomarmos complementos e usarmos (3).

(5) Note se mostrarmos que $Z_\alpha(S)$ é fechado para intersecções enumeráveis, teremos que $Z_\alpha(S)$ é fechado para intersecções finitas, pois $S \in Z_\alpha(S), \forall \alpha$. Analogamente para uniões finitas em $CZ_\alpha(S)$, já que $\emptyset \in CZ_\alpha(S), \forall \alpha$.

Suponha que $\alpha = 0$. Mostremos que $Z_0(S)$ é fechado para intersecções enumeráveis. O resultado para $CZ_0(S)$ seguirá do resultado para $Z_0(S)$, tomando-se complementos.

Seja $(A_n)_{n>0} \subset Z_0(S)$, então para cada $n > 0$, existe $f_n \in C(S)$ tal que $A_n = f_n^{-1}(\{0\})$. Note que podemos tomar $0 \leq f_n \leq 1$, já que:

$f \in C(S) \Rightarrow |f| \in C(S)$ e $f^{-1}(\{0\}) = |f|^{-1}(\{0\})$ e $f \in C(S) \Rightarrow g = mim(f,1) \in C(S)$ e $f^{-1}(\{0\}) = g^{-1}(\{0\})$.

Definamos $h = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{2^n}$. Note que essa série é uniformemente convergente, logo $h \in C(S)$. Além disso, temos que:

$$h^{-1}(\{0\}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}(\{0\}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Portanto, $Z_0(S)$ é fechado para intersecções enumeráveis. Como dito anteriormente, isso implica que $CZ_0(S)$ é fechado para uniões enumeráveis.

Suponha $\alpha > 0$, então o resultado segue das definições de $Z_\alpha(S)$ e $CZ_\alpha(S)$.

(6) Note que para qualquer α que mostrarmos que $Z_\alpha(S)$ é fechado para uniões finitas, tomando complementos, teremos que $CZ_\alpha(S)$ é fechada para intersecções finitas.

Suponha $\alpha = 0$. Considere $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset Z_0(S)$. Cada $A_j = f_j^{-1}(0)$, para alguma $f_j \in C(S)$.

Definamos $f = f_1 \cdots f_n \in C(S)$. É fácil ver que $A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j = f^{-1}(0)$. O que implica que $A \in Z_0(S)$.

Suponhamos que $\alpha > 0$

Considere $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset Z_\alpha(S)$. Podemos escrever que $A_j = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_{jk}$, onde $A_{jk} \in CZ_{\alpha_{jk}}(S)$, com $\alpha_{jk} < \alpha$. Assim:

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \bigcup_{j=1}^{n} (\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_{jk}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} (\bigcup_{j=1}^{n} A_{jk}).$$

Fixado $k \in \mathbb{N}$, seja $\alpha_k = max(\alpha_{kj}, j = 1, \ldots, n) < \alpha$. Assim $A_{jk} \in CZ_{\alpha_k}(S), j = 1, \ldots, n$.

No item (5) vimos que $CZ_{\alpha_k}(S)$ é fechado para uniões finitas, logo $\bigcup_{j=1}^{n} A_{jk} \in CZ_{\alpha_k}(S)$.

Portanto $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in Z_\alpha(S)$.

(7) Segue das definições de $Z_\alpha(S)$, $CZ_\alpha(S)$ e dos itens (5) e (6).

□

Definição 5.1.9. *Os conjuntos de Baire de S são os elementos pertencentes à σ-álgebra gerada pelos zero sets de S.*

Denotaremos essa σ-álgebra por $\mathfrak{B}(S)$.

A próxima proposição nos diz como descrever a σ-álgebra dos conjuntos de Baire em função das classes ambíguas, descritas na Definição 5.1.7.

Proposição 5.1.10. *Valem:*

(1) $A_{\omega_1}(S) = \bigcup_{\beta<\omega_1} A_\beta(S)$;

(2) $A_{\omega_1}(S) = \mathfrak{B}(S)$;

(3) $A_\alpha(S) = \mathfrak{B}(S), \forall \alpha \geq \omega_1$.

Demonstração. (1) É claro que $\bigcup_{\beta<\omega_1} A_\beta(S) \subset A_{\omega_1}(S)$. Vamos mostrar a outra inclusão.

Seja $A \in A_{\omega_1}(S)$. Então, $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ onde cada $A_n \in CZ_{\alpha_n}(S)$ e $\alpha_n < \omega_1$, pois $A \in Z_{\omega_1}(S)$. Além disso, $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ onde cada $B_n \in Z_{\beta_n}(S)$ e $\beta_n < \omega_1$, pois $A \in CZ_{\omega_1}(S)$. Definamos:

$$\alpha_0 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n < \omega_1$$

e

$$\beta_0 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \beta_n < \omega_1.$$

Temos que $A_n \in CZ_{\alpha_0}(S)$ e $B_n \in Z_{\alpha_0}(S)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $A \in Z_{\alpha_0+1}(S)$ e $A \in CZ_{\beta_0+1}(S)$. Seja $\gamma_0 = \sup\{\alpha_0+1, \beta_0+1\} < \omega_1$. Temos que $A \in A_{\gamma_0}(S)$.

(2) É claro que $A_{\omega_1}(S) \subset \mathfrak{B}(S)$, pois os elementos de $A_{\omega_1}(S)$ são obtidos dos *zero sets* de S através de operações para as quais $\mathfrak{B}(S)$ é fechado. Mostremos que $\mathfrak{B}(S) \subset A_{\omega_1}(S)$. Nossa estratégia será mostrar que $Z_0(S) \subset A_{\omega_1}(S)$ e que $A_{\omega_1}(S)$ é σ-álgebra. Pela definição de $\mathfrak{B}(S)$, isso implicará que $\mathfrak{B}(S) \subset A_{\omega_1}(S)$.

$Z_0(S) \subset A_{\omega_1}(S)$

Note que $Z_0(S) \subset A_1(S)$. No item (1), mostramos que $A_1(S) \subset A_{\omega_1}(S)$. Portanto $Z_0(S) \subset A_{\omega_1}(S)$.

$A_{\omega_1}(S)$ **é σ-álgebra**

(i) É claro que $\emptyset \in A_{\omega_1}(S)$;

(ii) Seja $A \in A_{\omega_1}(S)$. Pelo item (1), $A \in A_\beta(S)$ com $\beta < \omega_1$. Logo $A^C \in A_\beta(S)$. Novamente, o item (1) nos diz que $A^C \in A_{\omega_1}(S)$;

(iii) Seja $(A_n)_n \subset A_{\omega_1}(S)$. Cada $A_n \in A_{\alpha_n}(S)$. Seja $\gamma = \sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n < \omega_1$. Assim, $A_n \in A_\gamma(S), \forall n \in \mathbb{N}$. Portanto, temos que $A_n \in Z_\gamma(S)$. O que implica que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in CZ_{\gamma+1}(S)$. Dessa forma, $A \in A_{\gamma+2}(S)$. Como $\gamma+2 < \omega_1$, temos que $A \in A_{\omega_1}(s)$.

(3) É corolário imediato do item (2).

$\square$

O Teorema 5.1.12 caracteriza as funções limitadas Baire-mensuráveis.

Lema 5.1.11. *Sejam (X,Σ) um espaço mensurável e $f_n : X \to \mathbb{R}$, com cada f_n Σ-mensurável. Suponha que a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja pontualmente convergente e seu limite pontual seja f. Então f é Σ-mensurável.*

Demonstração. Sugerimos [31], página 14. □

Teorema 5.1.12. *Sejam S um espaço topológico e $\mathfrak{B}(S)$ a σ-álgebra dos conjuntos de Baire de S.*

Então $B(S, \mathfrak{B}(S)) = \{f : S \to \mathbb{R} : f$ é limitada e Baire-mensurável$\}$.

Demonstração. De acordo com a Definição 1.4.8, temos que:

$$B(S, \mathfrak{B}(S)) = \overline{span\{C_E : E \in \mathfrak{B}(S)\}}^{||.||_\infty} \subset l_\infty(S).$$

Mostremos que $B(S, \mathfrak{B}(S)) \subset \{f : S \to \mathbb{R} : f$ é limitada e Baire-mensurável$\}$.

Seja $f \in B(S, \mathfrak{B}(S))$, existe sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset span\{C_E : E \in \mathfrak{B}(S)\}$ convergindo uniformemente para f. Note que cada f_n é Baire mensurável.

Portanto, o Lema 5.1.11 garante que f é Baire mensurável. Assim, estabelecemos a inclusão.

Agora, mostremos que $\{f : S \to \mathbb{R} : f$ é limitada e Baire-mensurável$\} \subset B(S, \mathfrak{B}(S))$.

Seja $f : S \to \mathbb{R}$, função limitada e Baire mensurável.

Fixado $n > 0$, como f é limitada, existem reais $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$, tais que $a_{j+1} - a_j < \frac{1}{n}, j = 1, \ldots, k-1$ e $f(S) \subset (a_1, a_k)$.

Definamos $A_j = f^{-1}([a_j, a_{j+1})), j = 1, \ldots, k$. Como f é Baire mensurável, temos que $A_j \in \mathfrak{B}(S), j = 1, \ldots, k-1$. Além disso, da definição dos A_j, vem que $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $S = \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j$. Se $A_j \neq \emptyset$, tome $x_j \in A_j$.

Definamos $g_n = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j . C_{A_j}$, onde $\alpha_j = f(x_j)$ se $A_j \neq \emptyset$ e $\alpha_j = 0$ se $A_j = \emptyset$. Note que $g_n \in span\{C_E : E \in \mathfrak{B}(S)\}$.

Mostremos que $||f - g_n||_\infty < \frac{1}{n}$.

Seja $s \in S$, existe único j tal que $s \in A_j$. Então:

$$|f(s) - g_n(s)| = |f(s) - f(x_j)| \leq a_{j+1} - a_j < \frac{1}{n}.$$

Como a equação acima vale para todo $s \in S$, temos que $||f - g_n||_\infty < \frac{1}{n}$.

Como n foi tomado arbitrariamente, mostramos que a sequência $(g_n)_n \subset span\{C_E : E \in \mathfrak{B}(S)\}$ converge uniformemente para f em S. Portanto, $f \in B(S, \mathfrak{B}(S))$.

Estabelecemos assim a outra inclusão. □

O próximo teorema é fundamental para nosso estudo. Ele estabelece uma relação entre os conjuntos de Baire de um espaço topológico S e as classes de Baire de funções sobre S.

Teorema 5.1.13. *(**Teorema de Lebesgue-Hausdorff generalizado**) Seja $1 \leq \alpha$ um ordinal.*

(1) Se α é um ordinal finito, então $B_\alpha(S) = B(S, A_\alpha(S))$;

(2) Se α é um ordinal infinito, então $B_\alpha(S) = B(S, A_{\alpha+1}(S))$.

Demonstração. Veja Apêndice A, Corolário A.26. □

Corolário 5.1.14. *Vale que $B_{\omega_1}(S) = B(S, \mathfrak{B}(S))$. Ou seja, $B_{\omega_1}(S) = \{f : S \to \mathbb{R} : f$ é limitada e Baire-mensurável$\}$.*

Demonstração. De acordo com o Teorema 5.1.13, temos que $B_{\omega_1}(S) = B(S, A_{\omega_1+1}(S))$.

Mas, a Proposição 5.1.10(3) nos diz que $A_{\omega_1+1}(S) = \mathfrak{B}(S)$.

A segunda parte do enunciado segue do Teorema 5.1.12. □

Nesse capítulo, precisaremos generalizar alguns resultados do Capítulo 1 para álgebras de funções mais gerais que as classes de Baire discutidas até aqui.

Definição 5.1.15. *Sejam S um espaço topológico e Σ uma álgebra de subconjuntos de S. Considere $B(S, \Sigma) \subset l_\infty(S)$, descrito na Definição 1.4.8.*

É fácil ver que $(B(S, \Sigma), ||.||_\infty)$, dotada das operações ponto a ponto é uma álgebra de Banach comutativa. Definamos:

$S_\Sigma = \{x^* \in B(S, \Sigma)^* : x^*$ *é multiplicativo*$\}$.

Estamos usando funcional linear multiplicativo de acordo com a Definição 1.2.1.

Teorema 5.1.16. *S_Σ dotado da topologia w^* de $B(S, \Sigma)^*$ é espaço topológico compacto e Hausdorff.*

Demonstração. É consequência do Teorema 1.2.7 e do fato da topologia w^* ser Hausdorff. □

Teorema 5.1.17. *Sejam S um espaço topológico e Σ uma álgebra de subconjuntos de S. Consideremos a função $\chi : B(S,\Sigma) \to C(S_\Sigma)$, definida como $\chi(f)(\omega) = \omega(f), \forall \omega \in S_\Sigma, \forall f \in B(S,\Sigma)$.*

Então χ é isomorfismo isométrico entre as álgebras de Banach $(B(S,\Sigma), ||.||_\infty)$ e $(C(S_\Sigma), ||.||_\infty)$.

Denotaremos, ao longo desse capítulo, $\chi(f)$ por $\widehat{f}, \forall f \in B(S,\Sigma)$.

Demonstração. A demonstração desse teorema, segue o mesmo roteiro desenvolvido na Seção 3 do Capítulo 1, quando mostramos que $B_\alpha(I)$ e $C(\Omega_\alpha)$ eram isometricamente isomorfas como álgebras de Banach. □

Teorema 5.1.18. *Sejam S um espaço topológico e Σ álgebra de subconjuntos de S. Consideremos a função $\tau : S \to S_\Sigma$, definida como $\tau(s)(f) = f(s), \forall s \in S, f \in B(S,\Sigma)$. Então:*

(1) $\tau(S)$ é denso em S_Σ;

(2) Seja $\mathfrak{C}(S_\Sigma)$ a álgebra de Boole dos aberto-fechados de S_Σ. Consideremos a função $\psi : \Sigma \to \mathfrak{C}(S_\Sigma)$ definida como $\psi(E) = \overline{\tau(E)}, \forall E \in \Sigma$.

Então ψ é isomorfismo booleano.

Demonstração. (1) Mostra-se de forma análoga á Proposição 1.5.9;

(2) Mostra-se de forma análoga à Proposição 4.8. Para generalizar o Lema 1.5.13, usamos a Definição 5.3.5 e o Lema 5.3.6.

□

Observação 5.1.19. *Pode-se mostrar que (S_Σ, w^*) é totalmente desconexo. Portanto, os Teoremas 5.1.16 e 5.1.18(2) nos dizem que S_Σ é um espaço de Stone da álgebra de Boole Σ.*

O próximo teorema nos mostra que no caso de espaços métricos, as classes de borelianos e conjuntos de Baire coincidem. Isso nos permitirá no Apêndice A, estabelecer como corolário do Teorema de Lebesgue-Hausdorff generalizado o Teorema de Lebesgue-Hausdorff para as classes de Baire sobre I.

Teorema 5.1.20. *Seja M um espaço métrico. Fixado um ordinal α, valem:*

(1) Se α é par, então $Z_\alpha(M) = F_\alpha(M)$ e $CZ_\alpha(M) = G_\alpha(M)$;

(2) Se α é ímpar, então $Z_\alpha(M) = G_\alpha(M)$ e $CZ_\alpha(M) = F_\alpha(M)$.

Ou seja, as classes aditivas e multiplicativas coincidem para os borelianos e os conjuntos de Baire.

Demonstração. Faremos indução em α. Note que para cada α, ao mostrarmos a afirmação para $Z_\alpha(S)$, tomando complementos, teremos que a afirmação para $CZ_\alpha(S)$ também é verdadeira. Então, vamos mostrar a afirmação para $Z_\alpha(S)$.

(i) $\alpha = 0$. Mostremos que $Z_0(M) = F_0(M)$. É claro que $Z_0(M) \subset F_0(M)$. Vejamos que vale a outra inclusão.

Seja $A \in F_0(M)$, então A é um fechado de M. Consideremos a função $f : M \to \mathbb{R}$, definida como $f(x) = d(x, A), \forall x \in M$. Onde $d(x, M)$ denota a distância de x ao conjunto M. Sabemos que $f \in C(M)$. Do fato de A ser fechado segue que $f^{-1}(0) = A$. Portanto, temos que $A \in Z_0(M)$. Assim, $F_0(M) \subset Z_0(M)$.

(ii) Seja $0 < \alpha$. Suponha que seja verdadeira a afirmação para todo ordinal $0 \leq \beta < \alpha$. Mostremos que vale para α.

(Caso 1) α é par. Queremos mostrar que $Z_\alpha(M) = F_\alpha(M)$.

Vejamos que $F_\alpha(M) \subset Z_\alpha(M)$. Seja $A \in F_\alpha(M)$, então $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, onde $A_n \in F_{\alpha_n}(M)$ e $\alpha_n < \alpha, \forall n \in \mathbb{N}$. Como α é par, ´podemos supor que todos os α_n são ímpares.

Logo, pela hipótese de indução, temos que $A_n \in CZ_{\alpha_n}(M), \forall n \in \mathbb{N}$. Da definição de $Z_\alpha(M)$ segue que $A \in Z_\alpha(M)$.

Agora, mostremos que $Z_\alpha(M) \subset F_\alpha(M)$. Seja $A \in Z_\alpha(M)$, então $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, onde $A_n \in CZ_{\alpha_n}(M)$ e $\alpha_n < \alpha, \forall n \in \mathbb{N}$. Como α é par, podemos supor que todos os α_n são ímpares.

Logo, pela hipótese de indução, temos que $A_n \in F_{\alpha_n}(M), \forall n \in \mathbb{N}$. Da definição de $F_\alpha(M)$ segue que $A \in F_\alpha(M)$.

(Caso 2) α é ímpar. A demonstração é análoga à do Caso 1.

$\square$

Corolário 5.1.21. *$B_{\omega_1}(I) = \{f : I \to \mathbb{R} : f$ é limitada e Borel-mensurável$\}$.*

Demonstração. A Proposição 1.4.6 nos diz que $Bor = \bigcup_{\alpha<\omega_1} G_\alpha$. Já a Proposição 5.1.10 nos diz que $\mathfrak{B}(I) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} A_\alpha(I)$.

Dessa forma, como I é espaço métrico, segue do Teorema 5.1.20 que $Bor = \mathfrak{B}(I)$. Logo, temos que:

$\{f : I \to \mathbb{R} : f$ é limitada e Borel-mensurável$\} = \{f : I \to \mathbb{R} : f$ é limitada e Baire-mensurável$\}$.

Portanto, segue do Corolário 5.1.14 que $B_{\omega_1}(I) = \{f : I \to \mathbb{R} : f$ é limitada e Borel-mensurável$\}$. $\square$

5.2 Espaços Baire-complementados

Nesta seção, vamos definir **o primeiro espaço de Baire** de um espaço de Banach.

Em [27], McWilliams mostrou que se X é espaço de Banach, então seu primeiro espaço de Baire é um subespaço fechado na norma de X^{**}, portanto um espaço de Banach.

Vamos definir a propriedade de um espaço de Banach ser Baire-complementado e mostrar que essa propriedade é um invariante isomórfico. Além disso, veremos que o primeiro espaço de Baire de $C(S)$, para S compacto Hausdorff, é isométrico a $B_1(S)$.

Definição 5.2.1. *Seja X um espaço de Banach. Definimos:*

$X_1 = \{x^{**} \in X^{**}$: existe $(x_n)_n \subset X$ com $(J(x_n))_n$ convergente para x^{**} na topologia w^* de $X^{**}\}$, onde J é a imersão isométrica descrita na Definição 1.1.13. X_1 é chamado de primeiro espaço de Baire para X.

Dizemos que X é Baire-complementado se, e somente se, $J(X)$ é subespaço complementado de X_1.

Agora, vamos mostrar que ser Baire-complementado é um invariante isomórfico.

Proposição 5.2.2. *Sejam X e Y espaços de Banach isomorfos. Suponha que X seja Baire-complementado, então Y é Baire-complementado.*

Demonstração. Denotaremos as imersões canônicas de X em X^{**} e de Y em Y^{**} por J_X e J_Y, respectivamente.

Seja $T : X \to Y$ um isomorfismo entre X e Y.

Então, temos que:

$T^* : Y^* \to X^*$ e $T^{**} : X^{**} \to Y^{**}$

são isomorfismos, de acordo com a Proposição 3.3.9.

Mostremos que a restrição de T^{**} a X_1 é um isomorfismo entre X_1 e Y_1. Para isso, basta mostrarmos que $T^{**}(X_1) \subset Y_1$ e que todo elemeto de Y_1 é igual a T^{**} aplicado num elemento de X_1.

(i) $T^{**}(X_1) \subset Y_1$. Seja $x^{**} \in X_1$, então existe sequência $(x_n)_n \subset X$ tal que:

$$J_X(x_n) \stackrel{w^*}{\to} x^{**}. \tag{5.1}$$

Mostremos que:

$$J_Y(Tx_n) \stackrel{w^*}{\to} T^{**}(x^{**}),$$

o que vai implicar que $T^{**}(x^{**}) \in Y_1$.

Seja $\varphi \in Y^*$. Note que $\varphi \circ T \in X^*$. Da equação (5.1) segue que:

$$\lim_{n\to\infty} J_X(x_n)(\varphi \circ T) = x^{**}(\varphi \circ T)$$

Assim:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi \circ T(x_n) = x^{**}(\varphi \circ T).$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} J_Y(T(x_n))(\varphi) = T^{**}(x^{**})(\varphi).$$

Como isso vale para todo $\varphi \in Y^*$, temos que:

$$J_Y(Tx_n) \overset{w^*}{\to} T^{**}(x^{**}).$$

(ii) Seja $y^{**} \in Y_1$, como T^{**} é sobrejetora, existe $x^{**} \in X^{**}$ tal que $y^{**} = T^{**}(x^{**})$. Mostremos que $x^{**} \in X_1$.

Como $y^{**} \in Y_1$, existe sequência $(y_n)_n \subset Y$ tal que:

$$J_Y(y_n) \overset{w^*}{\to} y^{**}$$

Da sobrejetividade de T, segue que podemos escrever $y_n = T(x_n), \forall n \in \mathbb{N}$.

Assim, para toda $\varphi \in Y^*$, temos que:

$$\lim_{n\to\infty} J_Y(Tx_n)(\varphi) = y^{**}(\varphi).$$

Usando a definição de adjunta, ficamos com:

$$\lim_{n\to\infty} T^*(\varphi)(x_n) = x^{**}(T^*(\varphi)).$$

T^* é sobrejetora, então dada $\psi \in X^*$, existe $\varphi \in Y^*$ tal que $\psi = T^*(\varphi)$. Logo:

$$\lim_{n\to\infty} \psi(x_n) = x^{**}(\psi) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} J_X(x_n)(\psi) = x^{**}(\psi).$$

Como $\psi \in X^*$ foi tomado arbitrariamente, temos que:

$$J_X(x_n) \overset{w^*}{\to} x^{**}.$$

Isso mostra que que $x^{**} \in X_1$.

Por hipótese, X é Baire-complementado, então existe $P : X_1 \to J_X(X)$ projeção linear contínua.

Além disso, notemos que $Q = J_Y \circ T \circ J_X^{-1} : J_X(X) \to J_Y(Y)$ é isomorfismo.

É fácil ver que $P_1 = Q \circ P \circ (T^{**})^{-1} : Y_1 \to J_Y(Y)$ é projeção linear contínua sobre $J_Y(Y)$.

Portanto, Y é Baire-complementado. □

Na próxima proposição, identificaremos $C(S)_1$ com $B_1(S)$. Para isso, precisaremos de um resultado, o Teorema da convergência dominada de Lebesgue.

Lema 5.2.3. ***(Teorema da convergência dominada de Lebesgue)*** *Sejam S um compacto Hausdorff, $\mu \in M(S)$ e $(f_n)_n$ sequência de funções de S em $\mathbb{R}$, com cada f_n Borel-mensurável e integrável com respeito a μ.*

Suponha que $(f_n)_n$ seja pontualmente convergente para uma função f em S e que exista $g : S \to \mathbb{R}$, integrável com respeito a μ tal que:

$$|f_n(s)| \leq |g(s)|,$$

para todo $s \in S$ e $n \in \mathbb{N}$.

Então f é integrável com respeito a μ e vale:

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f_n d\mu = \int_S f d\mu.$$

Demonstração. Para a demonstração do lema no caso em que μ é medida positiva, veja [31], página 26.

Para o caso geral, use o Teorema da decomposição de Hahn, [31], página 127. $\square$

Proposição 5.2.4. *Seja S um compacto Hausdorff. Então $C(S)_1$ é linearmente isométrico a $B_1(S)$.*

Portanto, $C(S)$ é Baire-complementado se, e somente se, $C(S)$ é complementado em $B_1(S)$.

Demonstração. Definamos $u : B_1(S) \to C(S)_1$, da seguinte forma $u(f)(\mu) = \int_S f d\mu, \forall f \in B_1(S), \mu \in C(S)^*$.

Mostremos que u é isometria linear.

Inicialmente mostremos que u está bem definida, ou seja, que $u(f) \in C(S)_1$. Fixado $f \in B_1(S)$, existe sequência $(f_n)_n \subset C(S)$ uniformemente limitada convergindo pontualmente para f em S, de acordo com o Teorema 5.1.4(4).

(1) $u(f)(\mu) \in \mathbb{R}, \forall \mu \in C(S)^*$. Do Lema 5.2.3 segue que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f_n d\mu = \int_S f d\mu.$$

Logo, $u(f)(\mu) \in \mathbb{R}$.

(2) $u(f)$ é linear. Segue de uma simples verificação.

(3) $u(f)$ é contínua. Seja $\mu \in C(S)^*$ com $||\mu|| \leq 1$, calculemos:

$$|u(f)(\mu)| = |\int_S f d\mu| \leq ||f||_\infty \int_S d|\mu| \leq ||f||_\infty.$$

Portanto, $||u(f)|| \leq ||f||_\infty$.

(4) Dos itens (1),(2) e (3) concluímos que $u(f) \in C(S)^{**}$. Agora, vamos mostrar que $u(f) \in C(S)_1$. Mostremos que:

$$J_{C(S)}(f_n) \overset{w^*}{\to} u(f).$$

No item (1), vimos que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f_n d\mu = \int_S f d\mu.$$

O que implica que:

$$\lim_{n\to\infty} J_{C(S)}(f_n)(\mu) = u(f)(\mu).$$

Como isso vale para todo $\mu \in C(S)^*$, temos que:

$$J_{C(S)}(f_n) \overset{w^*}{\to} u(f).$$

Logo, $u(f) \in C(S)_1$.

Com o feito acima, estabelecemos que u está bem definida.

A linearidade de u segue de uma simples verificação.

Mostremos que $||u(f)|| = ||f||_\infty, \forall f \in B_1(S)$. No item (3) acima, mostramos que $||u(f)|| \leq ||f||_\infty$. Vamos mostrar que $||u(f)|| \geq ||f||_\infty$, concluindo assim a igualdade.

Fixado $f \in B_1(S)$, existe sequência $(f_n)_n \subset C(S)$ uniformemente limitada convergindo pontualmente para f em S. Seja $\varphi_s \in C(S)^*$ definido como $\varphi_s(g) = g(s), \forall g \in C(S)$. Usando o fato, mostrado em (4), ou seja:

$$J_{C(S)}(f_n) \stackrel{w^*}{\to} u(f),$$

concluímos que $f(s) = u(f)(\varphi_s), \forall s \in S$. Logo:

$$|f(s)| = |u(f)(\varphi_s)| \leq ||u(f)||.||\varphi_s|| \leq ||u(f)||,$$

para todo $s \in S$. A última desigualdade vale pois $||\varphi_s|| = 1, \forall s \in S$. Portanto, $||f||_\infty \leq ||u(f)||$.

Do feito acima, segue também que u é injetora.

Agora, mostremos que u é sobrejetora. Seja $x \in C(S)_1$. Existe sequencia $(f_n)_n \subset C(S)$ tal que:

$$J_{C(S)}(f_n) \stackrel{w^*}{\to} x. \tag{5.2}$$

Logo, $(J_{C(S)}(f_n))_n$ é sequência uniformemente limitada. Como $J_{C(S)}$ preserva norma, temos que $(f_n)_n$ é sequência uniformemente limitada em $C(S)$.

Fixado $s \in S$, consideremos $\varphi_s \in C(S)^*$. Usando a equação (5.2), ficamos com:

$$\lim_{n\to\infty} J_{C(S)}(f_n)(\varphi_s) = x(\varphi_s) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(s) = x(\varphi_s).$$

Consideremos a função $\tau : S \to C(S)^*$ definida como $\tau(s) = \varphi_s$. Assim, podemos escrever que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(s) = x \circ \tau(s).$$

Como $(f_n)_n \subset C(S)$ e $(f_n)_n$ é uniformemente limitada, temos que $x \circ \tau \in B_1(S)$.

Mostremos que $u(x \circ \tau) = x$, o que vai estabelecer a sobrejetividade de u. Seja $\mu \in C(S)^*$. Então, $u(x \circ \tau)(\mu) = \int_S x \circ \tau d\mu$. Como $(f_n)_n$ converge pontualmente para $x \circ \tau$ em S e $(f_n)_n$ é uniformemente limitada, o Lema 5.2.3 nos diz que $\int_S f_n d\mu \stackrel{n}{\to} \int_S x \circ \tau d\mu$.

Mas, a equação (5.2) nos diz que $u(f_n)(\mu) \stackrel{n}{\to} x(\mu)$. Logo, $\int_S f_n d\mu \stackrel{n}{\to} x(\mu)$. Da unicidade do limite, segue que $x(\mu) = u(x \circ \tau)(\mu)$. Como isso vale para todo $\mu \in C(S)^*$, temos que $x = u(x \circ \tau)$.

Como discutido anteriormente, isso mostra a sobrejetividade de u.

Portanto, concluímos que $C(S)_1$ e $B_1(S)$ são isométricos.

Agora, mostremos que $C(S)$ é Baire complemmentado se, e somente se, $C(S)$ é complementado em $B_1(S)$.

Suponha que $C(S)$ seja Baire-complementado. Então, existe $P : C(S)_1 \to J_{C(S)}(C(S))$ projeção linear contínua. Consideremos a função $R = J_{C(S)}^{-1} \circ P \circ u : B_1(S) \to C(S)$. Vamos mostrar que R é projeção linear contínua. É claro que R é linear e contínua, pois é composição de funções lineares e contínuas.

Para concluirmos nosso resultado, basta mostrarmos que $R(f) = f$ para toda $f \in C(S)$. Equivalentemente, basta mostrarmos que $P(u(f)) = J_{C(S)}(f), \forall f \in C(S)$.

Notemos que

$$u(f)(\mu) = \int_S f d\mu = J_{C(S)}(f)(\mu), \forall \mu \in C(S)^*.$$

Logo, $u(f) = J_{C(S)}(f)$. Assim, temos que $u(f) \in J_{C(S)}(C(S))$, o que implica que:

$$P(u(f)) = u(f) = J_{C(S)}(f), \forall f \in C(S).$$

Dessa forma, temos que $C(S)$ é complementado em $B_1(S)$.

A demonstração da recíproca é análoga. □

5.3 $B_{\omega_1}(I)$ é Baire-complementado

Nesta seção, mostraremos que $B_{\omega_1}(I)$ é Baire-complementado.

Faremos isso, mostrando que Ω_{ω_1} é basicamente desconexo (Teorema 5.3.4) e que se um espaço topológico é compacto Hausdorff e basicamente desconexo, então $C(S)$ é Baire-complementado (Teorema 5.3.24).

Esses dois fatos nos permitirão mostrar a Baire complementação de $B_{\omega_1}(I)$.

Definição 5.3.1. *Seja S um espaço topológico. Dizemos que S é basicamente desconexo se, e somente se, o fecho de todo cozero set de S é aberto. Se S é normal, isso é equivalente a dizer que o fecho de todo F_σ aberto é aberto. Pois, num espaço normal, os cozero sets coincidem com os F_σ abertos.*

Nossa demonstração de que Ω_{ω_1} é basicamente desconexo se baseará no fato de que a álgebra de Boole dos aberto-fechados de Ω_{ω_1}, denotada por K^{ω_1}, é σ-completa. Fato que mostraremos no próximo lema.

Definição 5.3.2. *Seja $(B, \preceq)$ uma álgebra de Boole. Dizemos que B é σ-completa se, e somente se, para toda sequência $(A_n)_n \subset B$, existir em B o supremo dessa sequência, que denotaremos por $\vee A_n$.*

Lema 5.3.3. *A álgebra de Boole K^{ω_1} é σ-completa.*

Demonstração. De acordo com a Proposição 4.8 as álgebras de Boole K_{ω_1} e K^{ω_1} são isomorfas (como álgebras de Boole). Na Seção 1 desse capítulo, vimos que $K_{\omega_1} = A_{\omega_1+1}(I) = \mathfrak{B}(I)$.

Portanto K_{ω_1} é uma σ-álgebra. Suponha que $\varphi : K_{\omega_1} \to K^{\omega_1}$ seja um isomorfismo booleano.

Seja $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset K^{\omega_1}$. Para cada n, definamos $B_n = \varphi^{-1}(A_n) \in K_{\omega_1}$.

Como K_{ω_1} é σ-álgebra, temos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in K_{\omega_1}$. Logo $\varphi(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \in K^{\omega_1}$.

Mostremos que $\varphi(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n)$ é o supremo de $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ em K^{ω_1}.

Como $B_n = \varphi^{-1}(A_n)$, temos que $\varphi^{-1}(A_n) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Por ser homomorfismo booleano, φ preserva inclusão. Logo, $A_n \subset \varphi(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n)$. Assim $\varphi(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n)$ é cota superior de $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Suponha que $C \in K^{\omega_1}$ seja tal que $A_n \subset C, \forall n \in \mathbb{N}$. Então $B_n = \varphi^{-1}(A_n) \subset \varphi^{-1}(C), \forall n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \varphi^{-1}(C)$.

Aplicando φ, ficamos com $\varphi(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \subset C$.

Com o feito acima, mostramos que $\varphi(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n)$ é o supremo de $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Portanto, K^ω é álgebra de Boole σ-completa. $\square$

Teorema 5.3.4. *O espaço (Ω_{ω_1}, w^*) é compacto Hausdorff e basicamente deconexo.*

Demonstração. No Capítulo 1, mostramos que (Ω_{ω_1}, w^*) é compacto Hausdorff e zero dimensional. Vamos mostrar que ele é basicamente desconexo.

Seja F um F_σ aberto de Ω_{ω_1}. Podemos escrever $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, onde cada F_n é fechado de Ω_{ω_1}. Como Ω_{ω_1} é compacto, temos que cada F_n é compacto. Portanto, da compacidade de cada F_n e do fato de Ω_{ω_1} ser zero dimensional segue que podemos escrever $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$, onde cada C_n é aberto-fechado de Ω_{ω_1}.

De acordo com o Lema 5.3.3, temos que K^{ω_1} é σ-completa. Portanto, existe $\vee C_n \in K^{\omega_1}$.

Seja $B = \vee C_n$. Mostremos que $B = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n}$, o que vai implicar que $\overline{F} = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n}$ é aberto, já que B é aberto-fechado.

Note que $C_n \subset B, \forall n \in \mathbb{N}$, então $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \subset B$. Como B é fechado, temos que $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n} \subset B$.

Suponha, por absurdo, que $B - \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n} \neq \emptyset$. Portanto, $B - \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n}$ é aberto não vazio. Do fato de Ω_{ω_1} ser zero dimensional, segue que existe Q aberto-fechado não vazio com $Q \subset B - \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n}$.

Facilmente, mostra-se que:

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n} \subset B - Q.$$

Assim, $C_n \subset B - Q$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, $B - Q$ é aberto-fechado e $B - Q$ é estritamente menor que B.

Mas, isso é uma contradição, já que B é o supremo de $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ em K^{ω_1}. A contradição surgiu pois supusemos que $B - \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n} \neq \emptyset$. Portanto, temos que $B = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n}$.

Como discutido anteriormente, isso mostra que $\overline{F}$ é aberto. Portanto Ω_{ω_1} é basicamente desconexo. □

Agora, vamos trabalhar para mostrar o Teorema 5.3.24, que diz que se um espaço topológico compacto e Hausdorff é basicamente desconexo, então $C(S)$ é Baire-complementado. Esse teorema é devido a F. Dashiell [5], sendo profundo e de demonstração extensa. Assim, o restante dessa seção será dedicado ao desenvolvimento de conceitos e resultados que nos permitirão concluir o Teorema 5.3.24.

Nosso primeiro objetivo é caracterizar as álgebras de subconjuntos Σ, de S compacto Hausdorff, tais que:

$$C(S) \subset B(S, \Sigma).$$

Isso será feito no Lema 5.3.8.

Para isso, precisamos introduzir o conceito de mensurabilidade de funções com respeito a uma álgebra de subconjuntos de um conjunto, assim como o conceito de base de vizinhanças para um espaço topológico.

Definição 5.3.5. *Sejam X um conjunto e Σ uma álgebra de subconjuntos de X. Dizemos que uma função simples $f : X \to \mathbb{R}$ é Σ-mensurável se, e somente se, $f^{-1}(A) \in \Sigma$ para todo $A \subset \mathbb{R}$.*

O próximo lema nos fala sobre a mensurabilidade de funções características. Sua demonstração não apresenta dificuldades, portanto será omitida.

Lema 5.3.6. *Seguindo a notação da Definição 5.3.5, temos:*

(1) Se $E \in \Sigma$, então C_E é Σ-mensurável;

(2) Toda combinação linear finita de funções simples Σ-mensuráveis é Σ-mensurável;

(3) Cada função pertencente a $span\{C_E : E \in \Sigma\}$ é Σ-mensurável.

Definição 5.3.7. *Seja S um espaço topológico. Uma base de vizinhanças para S é uma família $\mathfrak{F}$ de subconjuntos de S, tal que se U é um aberto de S e $s \in U$, então existe $E \in \mathfrak{F}$ com $s \in int(E)$ e $E \subset U$.*

Lema 5.3.8. *Sejam S um compacto Hausdorff e Σ álgebra de subconjuntos de S.*

São equivalentes:

(1) $C(S) \subset B(S, \Sigma)$.

(2) Σ contém uma base de vizinhanças para S.

(3) Quaisquer dois subconjuntos fechados e disjuntos de S estão contidos em elementos disjuntos de Σ.

Demonstração. (3) $\Rightarrow$ (1) Seja $f \in C(S)$. Dado $\epsilon > 0$, existem $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ tais que $f(S) \subset [a_0, a_n]$ e $a_i - a_{i-1} < \epsilon, i = 1, ..., n$.

Definamos:

$$A_0 = \emptyset;$$

$$A_n = S.$$

Para $1 \leq i < n$, os conjuntos $\{s \in S : f(s) \leq a_i\}$ e $\{s \in S : f(s) \geq a_{i+1}\}$ são fechados disjuntos de S. Por (3), temos que existem $A_i, B_i \in \Sigma$ tais que $A_i \cap B_i = \emptyset$ e:

$$\{s \in S : f(s) \leq a_i\} \subset A_i,$$

$$\{s \in S : f(s) \geq a_{i+1}\} \subset B_i.$$

Logo, $A_i \cap \{s \in S : f(s) \geq a_{i+1}\} = \emptyset$.

Definamos:

$$g_\epsilon = \sum_{i=1}^{n} a_i.C_{A_i - A_{i-1}}.$$

Como cada $A_i \in \Sigma$ e Σ é álgebra de subconjuntos de S, temos que $g_\epsilon \in span\{C_E : E \in \Sigma\}$.

Mostremos que $||f - g_\epsilon||_\infty < \epsilon$.

Seja $s \in S$, existe $0 \leq i \leq n-1$ tal que $a_i \leq f(s) \leq a_{i+1}$. Temos as seguintes possibilidades:

Caso 1 $a_i < f(s) < a_{i+1}$. Então, $s \in A_j$ se $j \geq i+1$ e $s \notin A_j$ se $j \leq i$.

Portanto, ficamos com:

$$|f(s) - g_\epsilon(s)| = |f(s) - a_{i+1}| = a_{i+1} - f(s) < a_{i+1} - a_i < \epsilon.$$

Caso 2 $f(s) = a_i$. Então, $s \in A_j$ se $j \geq i$ e $s \notin A_j$ se $j \leq i-1$.

Portanto, ficamos com:

$$|f(s) - g_\epsilon(s)| = 0 < \epsilon.$$

Caso 3 $f(s) = a_{i+1}$. Então, $s \in A_j$ se $j \geq A_{i+1}$ e $s \notin A_j$ se $j \leq i$.

Portanto, ficamos com:

$$|f(s) - g_\epsilon(s)| = 0 < \epsilon.$$

Como $s \in S$ foi tomado arbitrariamente, temos que $||f - g_\epsilon||_\infty < \epsilon$.

Como $\epsilon > 0$ também foi arbitrário, temos que $f \in B(S, \Sigma)$. Logo, vale (1).

(1) $\Rightarrow$ (3) Sejam $F_0, F_1 \subset S$ dois fechados disjuntos.

Como S é compacto Hausdorff, a Proposição 1.5.4 nos diz que S é normal. Então, pelo Lema de Urysohn, existe $f \in C(S)$ tal que $f(F_0) = 0$, $f(F_1) = 1$ e $0 \leq f \leq 1$. De (1), segue que $f \in B(S, \Sigma)$.

Logo, existe $g \in span\{C_E : E \in \Sigma\}$ tal que:

$$||g - f||_\infty < \frac{1}{2}. \tag{5.3}$$

Note que o Lema 5.3.6 nos diz que g é Σ-mensurável.

Definamos $A = g^{-1}(-\infty, \frac{1}{2}) \in \Sigma$, já que g é Σ-mensurável. Mostremos que $F_0 \subset A$ e $F_1 \subset A^C$. Isso estabelecerá (3), já que $A^C \in \Sigma$ e A, A^C são disjuntos.

Vejamos que $F_0 \subset A$. Seja $s \in F_0$, então $f(s) = 0$. Da equação (5.3) vem que:

$$\frac{1}{2} > ||g - f||_\infty \geq |g(s) - f(s)| = |g(s)|.$$

Portanto, $g(s) < \frac{1}{2}$. Assim, $s \in A$.

Agora, mostremos que $F_1 \subset A^C$. Seja $s \in F_1$, então $f(s) = 1$. Da equação (5.3) vem que:

$$|g(s) - 1| < \frac{1}{2}.$$

Suponha, por absurdo, que $s \in A$. Então $g(s) < \frac{1}{2}$. Temos duas possibilidades:

Caso 1 $0 \leq g(s) < \frac{1}{2}$. Assim:

$$|g(s) - f(s)| = |g(s) - 1| = 1 - g(s) > \frac{1}{2}.$$

Mas, isso contradiz a equação (5.3). Portanto, esse caso não é possível.

Caso 2 $g(s) < 0$. Assim:

$$|g(s) - f(s)| = |g(s) - 1| > 1 > \frac{1}{2}.$$

O que contradiz a equação (5.3). Portanto, esse caso também não é possível.

Dessa forma, concluímos que $s \in A^C$. Como discutido anteriormente, isso mostra (3).

(2) $\Rightarrow$ (3) Sejam $F_0, F_1 \subset S$ fechados disjuntos. Como S é normal, existem abertos U e W disjuntos de S, tais que $F_0 \subset U$ e $F_1 \subset W$.

Seja $s \in F_1$, então $s \in W$. Como vale (2), existe $E_s \in \Sigma$ tal que $s \in int(E_s)$ e $E_s \subset W$. Dessa forma, temos que:

$$F_1 \subset \bigcup_{s \in F_1} int(E_s).$$

Do fato de S ser compacto e F_1 fechado, segue que F_1 é compacto. Portanto, F_1 admite subcobertura finita. Podemos escrever:

$$F_1 \subset \bigcup_{j=1}^{n} int(E_j) \subset \bigcup_{j=1}^{n} E_j \subset W.$$

Note que $\bigcup_{j=1}^{n} E_j \in \Sigma$, já que cada $E_j \in \Sigma$ e Σ é álgebra de subconjuntos de S.

Dessa forma, obtivemos um elemento de Σ que contém F_1 e está contido em W. Analogamente, podemos obter um elemento de Σ que contém F_0 e está contido em U. Como $U \cap W = \emptyset$, estabelecemos (3).

(3) $\Rightarrow$ (2) Como S é compacto Hausdorff, da Proposição 1.5.8 segue que S é regular.

Sejam $U \subset S$ aberto e $s \in U$, como S é regular, a Proposição 1.5.7 nos diz que existe $V \subset S$ aberto tal que $s \in V$ e $\overline{V} \subset U$.

Logo $\overline{V}$ e U^C são fechados disjuntos de S. Por (3) existem $A, B \in \Sigma$ com $A \cap B = \emptyset$, $\overline{V} \subset A$ e $U^C \subset B$. Portanto, temos que $A \subset U$ e $s \in V$, onde V é aberto contido em A. Assim, $s \in int(A)$.

Isso mostra (2).

$\square$

A próxima proposição nos permite caracterizar $B_1(S)$ com respeito a uma álgebra de subconjuntos de S especial. Ela será usada na demonstração de (2) $\Rightarrow$ (3) do Teorema 5.3.24.

Proposição 5.3.9. *Sejam S espaço normal e $\Sigma = \{B \subset S : B \in F_\sigma(S) \cap G_\delta(S)\}$. Note que Σ é álgebra de subconjuntos de S.*

Temos que $B_1(S) = B(S, \Sigma)$.

Demonstração. De acordo com o Teorema 5.1.13, temos que $B_1(S) = B(S, A_1(S))$.

Inicialmente, mostremos que $B(S, A_1(S)) \subset B(S, \Sigma)$. Para isso, basta mostrarmos que $A_1(S) \subset \Sigma$.

Seja $A \in A_1(S)$. Então $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, com $A_n \in CZ_0(S)$, já que $A \in Z_1(S)$. Como todo elemento de $CZ_0(S)$ é aberto, temos que A é um G_δ de S. Analogamente, por estar em $CZ_1(S)$, temos que A é um F_σ de S. Isso mostra que $A_1(S) \subset \Sigma$.

Agora, mostremos que $B(S, \Sigma) \subset B_1(S)$. Note que se mostrarmos que $C_E \in B_1(S), \forall E \in \Sigma$, teremos nosso resultado, pois $B_1(S)$ é subespaço vetorial fechado de $l_\infty(S)$.

Seja $E \in \Sigma$, podemos escrever:

$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, onde cada F_n é fechado e $F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots$

e

$E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$, onde cada G_n é aberto e $G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n \supset \ldots$.

Notemos que para cada n, $F_n \cap G_n^C = \emptyset$. Assim, fixado n temos que F_n e G_n^C são fechados disjuntos. Como S é normal, segue do Lema de Urysohn que existe $f_n \in C(S)$ tal que $f_n(F_n) = 1$, $f_n(G_n^C) = 0$ e $0 \leq f_n \leq 1$.

Considere a sequência $(f_n)_n \subset C(S)$. Ela é uniformemente limitada e é fácil ver que ela converge pontualmente para C_E em S. Portanto, temos que $C_E \in B_1(S)$. □

O próximo lema será fundamental na demonstração de (3) $\Rightarrow$ (5) do Teorema 5.3.24.

Lema 5.3.10. *Sejam S um compacto Hausdorff e $f : S \to \mathbb{R}$ limitada tal que existe $(f_n)_n \subset C(S)$ sequência crescente convergindo pontualmente para f em S.*

Então $f \in B(S, \Sigma)$, onde Σ é a álgebra gerada pelos F_σ abertos de S.

Demonstração. Como f é limitada, podemos escrever que $f(S) \subset (-M, M)$, para algum $M > 0$.

Fixado $n \in \mathbb{N}$ com $n > 0$, vamos construir uma função $g_n \in span\{C_E : E \in \Sigma\}$ tal que $||f - g_n||_\infty \leq \frac{1}{n}$. O que vai implicar que a sequência $(g_n)_n$ converge uniformemente em S para f. Isso mostrará que $f \in B(S, \Sigma)$.

Podemos escrever:

$$-M = r_0 < r_1 < \ldots < r_{m_n} = M,$$

com $r_j - r_{j-1} < \frac{1}{n}, j = 1, ..., m_n$.

Fixado $r \in \mathbb{R}$, consideremos o conjunto:

$$\{x \in S : f(x) > r\}.$$

Verifica-se facilmente que:

$$\{x \in S : f(x) > r\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in S : f_n(x) > r\}.$$

Como cada f_n é contínua, temos que $\{x \in S : f_n(x) > r\}$ é aberto de S. Além disso, temos que $\{x \in S : f_n(x) > r\}$ é F_σ de S, pois é a imagem inversa por uma função contínua de um F_σ de $\mathbb{R}$. Portanto, temos que $\{x \in S : f(x) > r\}$ é F_σ aberto de S.

Assim, $\{x \in S : f(x) > r\} \in \Sigma, \forall r \in \mathbb{R}$.

Tomando-se complementos e tendo em vista que Σ é álgebra, temos que $\{x \in S : f(x) \leq r\} \in \Sigma, \forall r \in \mathbb{R}$.

Agora, definamos:

$$A_j^n = \{x \in S : r_j < f(x) \leq r_{j+1}\},$$

para todo $0 \leq j \leq m_n - 1$. Note que os A_j^n são disjuntos e pertencem a Σ, pois Σ é álgebra de subconjuntos de S e $A_j^n = \{x \in S : f(x) > r_j\} \cap \{x \in S : f(x) \leq r_{j+1}\}$.

Se $A_j^n \neq \emptyset$, tomemos $x_j^n \in A_j^n$.

Definamos:

$$g_n = \sum_{j=0}^{m_n - 1} \alpha_j^n . C_{A_j^n},$$

onde $\alpha_j^n = f(x_j^n)$ se $A_j^n \neq \emptyset$ e $\alpha_j^n = 0$, caso contrário. Note que $g_n \in span\{C_E : E \in \Sigma\}$.

Seja $x \in S$, existe único j tal que $x \in A_j^n$. Assim:

$$|f(x) - g_n(x)| = |f(x) - f(x_j^n)| \leq r_{j+1} - r_j < \frac{1}{n}.$$

Como $x \in S$ foi arbitrário, temos que $||f - g_n||_\infty \leq \frac{1}{n}$.

Como discutido anteriormente, isso estabelece nosso resultado. □

Para a demosntração de (3) ⇒ (5) no Teorema 5.3.24, também precisaremos entender o que é um reticulado σ-completo. Conceito que introduziremos a seguir.

Definição 5.3.11. *Sejam X um conjunto e L um conjunto de funções definidas em X, tomando valores em $\mathbb{R}$, dizemos que L é um reticulado de funções (function lattice) se L é parcialmente ordenada pela relação $f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x), \forall x \in X$ e $f, g \in L$, implica que as funções $max(f,g), min(f,g) \in L$, onde $max(f,g)(x) = max(f(x), g(x))$ e $min(f,g)(x) = min(f(x), g(x))$.*

A demonstração da próxima proposição será omitida, pois não apresenta dificuldades.

Proposição 5.3.12. *Seja S um espaço topológico compacto, então $C(S) \subset l_\infty(S)$ é um reticulado de funções.*

Definição 5.3.13. *Sejam X um conjunto e L um reticulado de funções definidas em X. Dizemos que L é σ-completo se, e somente se, todo subconjunto enumerável e limitado superiormente em L, possui supremo em L.*

Proposição 5.3.14. *Sejam S e T dois conjuntos e L_1, L_2 reticulados de funções em S e T, respectivamente. Suponha que L_1 seja subespaço vetorial de $l_\infty(S)$, que L_2 seja subespaço vetorial de $l_\infty(T)$, $1_S \in L_1$ e $1_T \in L_2$.*

Seja $u : L_1 \to L_2$ operador linear tal que $||u|| = 1$ e $u(1_S) = 1_T$. Então $u(f) \geq 0$ para toda $f \geq 0$, ou seja, u preserva a ordem.

Demonstração. Seja $f \in L_1$, com $f \geq 0$. Se $f = 0$, então $u(f) = 0$.

Suponha que $f \geq 0$ e $f \neq 0$. Então $||f||_\infty \neq 0$.

Consideremos $\epsilon \in \mathbb{R}$ com $0 < \epsilon \leq \frac{1}{||f||_\infty}$.Temos que:

$$||1_S - \epsilon.f||_\infty \leq 1.$$

Portanto:

$$||u(1_S - \epsilon.f)||_\infty \leq ||u||.||1_S - \epsilon.f||_\infty = ||1_S - \epsilon.f||_\infty \leq 1.$$

Logo, para todo $t \in T$, temos:

$$|u(1_S)(t) - \epsilon.u(f)(t)| \leq 1 \Rightarrow |1 - \epsilon.u(f)(t)| \leq 1.$$

Portanto:

$$-1 \leq 1 - \epsilon.u(f)(t) \leq 1 \Rightarrow -2 \leq -\epsilon.u(f)(t) \leq 0 \Rightarrow 2 \geq \epsilon.u(f)(t) \geq 0.$$

Como $\epsilon > 0$, temos que $u(f)(t) \geq 0, \forall t \in T$. Assim $u(f) \geq 0$. □

A Proposição 5.3.17 será usada nas demonstrações de (1) ⇒ (4) e (2) ⇒ (3) do Teorema 5.3.24. Para melhor entendermos essa proposição, vamos introduzir o conceito de espaço F.

Definição 5.3.15. *Um espaço compacto Hausdorff S é dito um espaço F se, e somente se, quaiquer dois F_σ abertos e disjuntos de S possuem fechos disjuntos.*

O próximo lema relaciona os conceitos de espaço F e basicamente desconexo. Sua demonstração será omitida, pois não apresenta nenhuma dificuldade.

Lema 5.3.16. *Todo compacto Hausdorff basicamente desconexo é um espaço F.*

Proposição 5.3.17. *Seja S um compacto Hausdorff e basicamente desconexo. Denotemos por $\mathfrak{C}(S)$ a álgebra dos aberto-fechados de S.*

Então:

$$C(S) = B(S, \mathfrak{C}(S)).$$

Demonstração. Inicialmente, mostremos que $B(S, \mathfrak{C}(S)) \subset C(S)$.

Seja $A \in \mathfrak{C}(S)$, sabemos que $C_A \in C(S)$. Como combinação linear finita de funções contínuas é contínua, temos que $span\{C_E : E \in \mathfrak{C}(S)\} \subset C(S)$. Além disso, sabemos que o limite uniforme de funções contínuas é contínuo.

Portanto, $B(S, \mathfrak{C}(S)) \subset C(S)$.

Agora, mostremos que $C(S) \subset B(S, \mathfrak{C}(S))$.

Vamos mostrar que a álgebra $\mathfrak{C}(S)$ satisfaz a condição (3) do Lema 5.3.8, o que vai implicar que $C(S) \subset B(S, \mathfrak{C}(S))$, de acordo com o Lema 5.3.8.

Sejam $F_1, F_2 \subset S$ fechados e disjuntos. Como S é normal, segundo o Lema de Urysohn, existe $f \in C(S)$ tal que $f(F_1) = 0$, $f(F_2) = 1$ e $0 \leq f \leq 1$.

Definamos:

$$A_1 = f^{-1}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

e

$$A_2 = f^{-1}(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}).$$

Como f é contínua, temos que A_1, A_2 são abertos. Além disso, $\mathbb{R}$ é espaço métrico, então como observado na demonstração da Proposição 2.5 (5), todo aberto de $\mathbb{R}$ é um F_σ de $\mathbb{R}$. Da continuidade de f e do Lema 2.8, segue que A_1, A_2 são F_σ de S.

Portanto, A_1, A_2 são F_σ abertos disjuntos de S. Como S é compacto Hausdorff basicamente desconexo, o Lema 5.3.16 garante que S é um espaço F. Dessa forma, temos que $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \emptyset$.

Além disso, como S é basicamente desconexo, temos que $\overline{A_1}, \overline{A_2}$ são abertos. Logo $\overline{A_1}, \overline{A_2} \in \mathfrak{C}(S)$.

Dessa forma, $\overline{A_1}, \overline{A_2}$ são dois elementos disjuntos de $\mathfrak{C}(S)$ tais que $F_1 \subset \overline{A_1}$ e $F_2 \subset \overline{A_2}$.

Como F_1, F_2 foram tomados arbitrariamente, concluímos que $\mathfrak{C}(S)$ satisfaz a condição (3) do Lema 5.3.8. O que implica que $C(S) \subset B(S, \mathfrak{C}(S))$.

Assim, estabelecemos nosso resultado. $\square$

Agora, desenvolveremos a teoria necessária para a demonstração de (1) $\Rightarrow$ (4) do Teorema 5.3.24.

Definição 5.3.18. *Sejam X um conjunto e A uma álgebra de subconjuntos de X. Como discutido no Capítulo 4, temos que A é uma álgebra de Boole.*

Um subconjunto M de A é dito ideal de A se, e somente se, valerem:

(i) $\emptyset \in M$;

(ii) $C, D \in M \Rightarrow C \cup D \in M$;

(iii) $C \in M$ *e* $D \in A \Rightarrow C \cap D \in M$.

Definição 5.3.19. *Sejam X um conjunto, A uma álgebra de subconjuntos de X e M ideal de A. Definimos a seguinte relação de equivalência em A:*

$$C \sim D \Leftrightarrow C \Delta D \in M.$$

Denotamos a classe de equivalência de $C \in A$, por $[C]$ e o conjunto de todas as classes de equivalência por $\frac{A}{M}$.

É fácil ver que $\frac{A}{M}$ herda de A uma estrutura natural de álgebra de Boole. Além disso, se considerarmos $\pi : A \to \frac{A}{M}$, definida como $\pi(C) = [C]$, teremos que π é um homomorfismo sobrejetor de álgebras de Boole.

Lema 5.3.20. *Seja S um compacto Hausdorff e basicamente desconexo. Consideremos $\mathfrak{C}(S)$ a álgebra dos aberto-fachados de S. Então existe um homomorfismo de álgebras de Boole $\rho : \mathfrak{B}(S) \to \mathfrak{C}(S)$, tal que se $B \in \mathfrak{B}(S)$, então $\rho(B)$ é o único aberto-fechado de S tal que $B \Delta \rho(B)$ é magro em S.*

Demonstração. Como visto anteriormente, os conjuntos de Baire de S formam uma σ-álgebra em S. Portanto são uma álgebra de Boole de subconjuntos de S. Analogamente, os aberto-fechados de S formam uma álgebra de Boole de subconjuntos de S.

Notemos que $\mathfrak{C}(S)$ é subálgebra de Boole de $\mathfrak{B}(S)$. Para isso, basta observarmos que $\mathfrak{C}(S) \subset \mathfrak{B}(S)$, já que ambas são álgebras de Boole de subconjuntos de S.

Definamos $\mathfrak{M}(S) = \{M \in \mathfrak{B}(S) : M \text{ é magro em S}\}$.

É fácil ver que $\mathfrak{M}(S)$ é um ideal de $\mathfrak{B}(S)$. Consideremos π o homomorfismo canônico entre $\mathfrak{B}(S)$ e $\frac{\mathfrak{B}(S)}{\mathfrak{M}(S)}$, descrito na Definição 5.3.19.

Como discutido anteriormente, $\mathfrak{C}(S)$ é subálgebra de $\mathfrak{B}(S)$, então a inclusão $i : \mathfrak{C}(S) \to \mathfrak{B}(S)$ é um homomorfismo de álgebras de Boole. Definamos o homomorfismo $\psi : \mathfrak{C}(S) \to \frac{\mathfrak{B}(S)}{\mathfrak{M}(S)}$, como $\psi = \pi \circ i$.

Mostremos que ψ é um isomorfismo. Para isso, precisamos mostrar que ψ é bijetora.

(i) ψ é injetora. Seja A aberto-fechado de S. Suponha que $\psi(A) = [\emptyset]$, vamos mostrar que $A = \emptyset$.

Como $\psi(A) = [\emptyset]$, temos que $A\Delta\emptyset \in \mathfrak{M}(S)$. O que implica que $A \in \mathfrak{M}(S)$. Dessa forma, A é um aberto-fechado magro de S.

Como S é compacto Hausdorff, o Teorema 4.14(4) nos diz que S é um espaço de Baire. Portanto $int(A) = \emptyset$. Mas A é aberto, então $A = \emptyset$. Isso mostra que ψ é injetora.

(ii) ψ é sobrejetora. Para concluirmos a sobrejetividade de ψ, basta mostrarmos que dado $B \in \mathfrak{B}(S)$, existe $A \in \mathfrak{C}(S)$ tal que $B\Delta A \in \mathfrak{M}(S)$. Como todo aberto-fechado é Baire e diferença simétrica de conjuntos de Baire é Baire, só precisamos garantir que $B\Delta A$ seja magro.

Definamos $R = \{A\Delta M : A \in \mathfrak{C}(S)$ e M é magro em S$\}$.

Vamos mostrar que $\mathfrak{B}(S) \subset R$. Note que se mostrarmos isso, então teremos estabelecido a sobrejetividade de ψ. Nossa estratégia será mostrar que R é σ-álgebra e que $Z_0 \subset R$, o que implicará que $\mathfrak{B}(S) \subset R$.

(1) **R é álgebra de subconjuntos de S**.

(a) $S = S\Delta\emptyset$. Note que S é aberto-fechado e $\emptyset$ é magro. Portanto, $S \in R$;

(b) R é fechado para complementos. Seja $A\Delta M \in R$, com A aberto-fechado e M magro. Note que $(A\Delta M)^C = A^C\Delta M$. Portanto $(A\Delta M)^C \in R$;

(c) R é fechado para uniões finitas. Sejam A_1, A_2 aberto-fechados de S e M_1, M_2

magros de S. Notemos que:

$$[(A_1\Delta M_1)\cup(A_2\Delta M_2)]\Delta(A_1\cup A_2)\subset(M_1\cup M_2).$$

Logo $[(A_1\Delta M_1)\cup(A_2\Delta M_2)]\Delta(A_1\cup A_2)=M$ é magro. Portanto, $[(A_1\Delta M_1)\cup(A_2\Delta M_2)]=(A_1\cup A_2)\Delta M$. Assim $[(A_1\Delta M_1)\cup(A_2\Delta M_2)]\in R$.

Para concluirmos que R é σ-álgebra, falta mostrarmos que R é fechado para uniões enumeráveis.

(2) **R é fechado para uniões enumeráveis**. Consideremos $(A_n\Delta M_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset R$, onde $A_n\in\mathfrak{C}(S)$ e M_n é magro de S, para todo $n\in\mathbb{N}$. Mostremos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n\Delta M_n)\in R$. Note que:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n\Delta M_n)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}((A_n-M_n)\cup(M_n-A_n))=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n-M_n)\cup\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(M_n-A_n). \quad (5.4)$$

Por definição, cada M_n é magro. Como $M_n-A_n\subset M_n$, temos que M_n-A_n é magro, $\forall n\in\mathbb{N}$. Assim $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(M_n-A_n)$ é magro, portanto pertence a R.

Note que:

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}}(A_m-\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n-M_n))\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}M_n,$$

logo $\bigcup_{m\in\mathbb{N}}(A_m-\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n-M_n))$ é magro de S.

Além disso, é fácil ver que:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n-M_n)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n-\bigcup_{m\in\mathbb{N}}(A_m-\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n-M_n)).$$

Portanto, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n-M_n)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n-D$, com $D\in R$.

Notemos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ é um F_σ aberto de S.

Vejamos que todo F_σ aberto de S pertence a R. Seja U um F_σ aberto. Como S é basicamente desconexo, temos que $\overline{U}$ é aberto-fechado, portanto $\overline{U}\in R$.

Além disso, como U é aberto, temos que ∂U é fechado com interior vazio, portanto magro. Assim, $\partial U\in R$. Do fato de R ser álgebra, segue que $(\partial U)^C\in R$. Agora, basta observarmos que $U=\overline{U}\cap(\partial U)^C$. Portanto $U\in R$.

Assim, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in R$. Como já mostramos que R é álgebra de subconjuntos, temos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n - M_n) \in R$.

Acima mostramos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n - M_n)$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(M_n - A_n) \in R$. Segue do fato de R ser álgebra e da equação (5.4) que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \Delta M_n) \in R$.

(3) $Z_0(S) \subset R$. Seja $A \in Z_0(S)$, existe $f \in C(S)$ tal que $A = f^{-1}(0)$.

Notemos que:

$$\{s \in S : f(s) \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{s \in S : |f(s)| \geq \frac{1}{n}\},$$

e que cada $\{s \in S : |f(s)| \geq \frac{1}{n}\}$ é fechado. Portanto $\{s \in S : f(s) \neq 0\}$ é F_σ de S. Além disso, $\{s \in S : f(s) \neq 0\}$ é aberto. Pelo observado anteriormente, temos que $\{s \in S : f(s) \neq 0\} \in R$, já que é F_σ aberto de S.

Como R é álgebra e $f^{-1}(0) = \{s \in S : f(s) \neq 0\}^C$, temos que $A \in R$.

Como discutido anteriormente, isso estabelece a sobrejetividade de ψ.

Portanto, temos que ψ é isomorfismo entre álgebras de Boole.

Agora, podemos definir o homomorfismo desejado entre $\mathfrak{B}(S)$ e $\mathfrak{C}(S)$.

Consideremos $\rho = \psi^{-1} \circ \pi$. Observe que, dado B conjunto de Baire de S, $\rho(B)$ é o único aberto-fechado de S tal que $B\Delta\rho(B)$ é magro. Além disso, ρ é homomorfismo sobrejetor entre álgebras de Boole. $\square$

Para continuarmos nossos estudos para a demonstração de (1) $\Rightarrow$ (4) do Teorema 5.3.24, precisamos do conceito de medida finitamente aditiva, que desenvolvermos a seguir.

Considere Ω um conjunto e Σ uma σ-álgebra de subconjuntos de Ω.

Definição 5.3.21. *Uma medida μ finitamente aditiva em Σ é uma função $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ tal que:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) Se $\{A_j : j = 1, \ldots, n\} \subset \Sigma$ é família disjunta, então $\mu(\bigcup_{j=1}^n A_j) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j)$.

Agora, vamos definir integral com respeito a uma medida finitamente aditiva.

Definição 5.3.22. *Sejam μ uma medida finitamente aditiva em Σ e $f \in span\{C_E : E \in \Sigma\}$, com $f = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j . C_{A_j}$, onde $\Omega = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$, $A_j \in \Sigma, j = 1, \ldots, n$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$.*

Definimos:

$$\int f d\mu = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j . \mu(A_j).$$

Note que definimos a integral para funções em $span\{C_E : E \in \Sigma\}$. No entanto, vamos usar a integração de funções no fecho de $span\{C_E : E \in \Sigma\}$. Faremos isso através do lema abaixo.

Lema 5.3.23. *Sejam X espaço normado e Y espaço de Banach. Sejam Z subespaço de X e $T : Z \to Y$ operador linear contínuo.*

Então T admite única extensão linear contínua para o fecho de Z, ou seja, existe única: $\overline{T} : \overline{Z} \to Y$, com $\overline{T}$ operador linear contínuo, estendendo T. Além disso, vale que $||T|| = ||\overline{T}||$.

Demonstração. Sugerimos [23], página 100. □

Finalmente, estamos prontos para mostrar a Teorema 5.3.24

Teorema 5.3.24. *Para um espaço topológico compacto e Hausdorff, são equivalentes:*

(1) S é basicamente desconexo;

(2) $C(S)$ é Baire-complementado em $B_1(S)$ por uma projeção de norma 1;

(3) $C(S)$ é a imagem de uma projeção de norma 1 definida em $B(S, \Sigma)$, onde Σ é a álgebra gerada pelos F_σ abertos de S;

(4) $C(S)$ é a imagem de uma projeção multiplicativa de norma 1 definida em $B_{\omega_1}(S)$;

(5) $C(S)$ é reticulado de funções σ-completo.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (4) Seja $\rho : \mathfrak{B}(S) \to \mathfrak{C}(S)$ o homomorfismo booleano descrito no Lema 5.3.20. Fixado $s \in S$, definamos $\mu_s : \mathfrak{B}(S) \to \mathbb{R}$, como $\mu_s(E) = \delta_s(\rho(E)), \forall E \in \mathfrak{B}(S)$. Onde $\delta_s : \wp(S) \to \mathbb{R}$, é definida como $\delta_s(A) = 1$, se $s \in A$ e $\delta_s(A) = 0$, caso contrário.

Mostremos que μ_s é medida finitamente aditiva na σ-álgebra dos conjuntos de Baire de S.

(a) Como ρ é homomorfismo de álgebras de Boole, temos que:

$$\mu_s(\emptyset) = \delta_s(\rho(\emptyset)) = \delta_s(\emptyset) = 0;$$

(b) Seja $\{A_j : j = 1, \ldots, n\} \subset \mathfrak{B}(S)$, família disjunta. Como ρ é homomorfismo de álgebras de Boole, temos que $\{\rho(A_j) : j = 1, \ldots, n\}$ continua sendo família disjunta e $\rho(\bigcup_{j=1}^n A_j) = \bigcup_{j=1}^n \rho(A_j)$. Portanto:

$$\mu_s(\bigcup_{j=1}^n A_j) = \delta_s(\rho(\bigcup_{j=1}^n A_j)) = \delta_s(\bigcup_{j=1}^n \rho(A_j)) = \sum_{j=1}^n \delta_s(\rho(A_j)).$$

Logo,

$$\mu_s(\bigcup_{j=1}^n A_j) = \sum_{j=1}^n \mu_s(A_j).$$

De (a) e (b), concluímos que fixado $s \in S$, μ_s é medida finitamente aditiva na σ-álgebra dos conjuntos de Baire de S.

Para $f \in span\{C_E : E \in \mathfrak{B}(S)\}$, definamos $\int_S f d\mu_s$, como descrito na Definição 5.3.22.

Fixado $s \in S$, definamos $\varphi_s : span\{C_E : E \in \mathfrak{B}(S)\} \to \mathbb{R}$, como $\varphi_s(f) = \int_S f d\mu_s, \forall f \in span\{C_E : E \in \mathfrak{B}(S)\}$.

Note que $\varphi_s(f) \in \mathbb{R}$, pois μ_s só assume os valores 0 e 1.

Mostremos que φ_s é operador linear contínuo. A linearidade de φ_s decorre de uma simples verificação. Vejamos sua continuidade. Seja $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j.C_{A_j}$, onde $A_j \in \mathfrak{B}(S)$, $A_j \cap A_i = \emptyset$ se $j \neq i$ e $S = \bigcup_{j=1}^n A_j$. Então:

$$|\varphi_s(f)| = |\sum_{j=1}^n \alpha_j.\mu_s(A_j)| = |\sum_{j=1}^n \alpha_j.\delta_s(\rho(A_j))| \leq max(|\alpha_j|) = ||f||_\infty.$$

Portanto, temos que $||\varphi_s|| \leq 1$.

Assim, de acordo com o Lema 5.3.23, existe única $\overline{\varphi}_s : B(S, \mathfrak{B}(S)) \to \mathbb{R}$, extensão linear e contínua de φ_s. Além disso, temos que $||\overline{\varphi}_s|| = ||\varphi_s|| \leq 1$.

O Corolário 5.1.14 diz que $B_{\omega_1}(S) = B(S, \mathfrak{B}(S))$, então podemos para cada $f \in B_{\omega_1}(S)$, definir $\psi_f : S \to \mathbb{R}$ como $\psi_f(s) = \overline{\varphi}_s(f)$.

Mostremos que $\psi_f \in C(S), \forall f \in B_{\omega_1}(S)$.

Caso 1 $f \in span\{C_E : E \in \mathfrak{B}(S)\}$.

Suponhamos que $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j.C_{A_j}$, onde $A_j \in \mathfrak{B}(S), j = 1, \dots, n$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $S = \bigcup_{j=1}^n A_j$. Dessa forma, como ρ é homomorfismo de álgebras de Boole, temos que $\rho(S) = S = \bigcup_{j=1}^n \rho(A_j)$, sendo que a família $\{\rho(A_j) : j = 1, \dots, n\}$ é disjunta.

Fixemos $s_0 \in S$. Existe único $j_0 \in \{1, \dots, n\}$ tal que $s_0 \in \rho(A_{j_0})$. Assim, $\rho(A_{j_0})$ é vizinhança aberta de s_0. Se $s \in \rho(A_{j_0})$, temos que:

$$|\psi_f(s) - \psi_f(s_0)| = |\sum_{j=1}^n \alpha_j.\mu_s(A_j) - \sum_{j=1}^n \alpha_j.\mu_{s_0}(A_j)|$$

$$= |\sum_{j=1}^n \alpha_j(\mu_s(A_j) - \mu_{s_0}(A_j))| = |\sum_{j=1}^n \alpha_j(\delta_s(\rho(A_j)) - \delta_{s_0}(\rho(A_j)))| = 0.$$

Logo, se $s \in \rho(A_{j_0})$, então $\psi_f(s) = \psi_f(s_0)$. Como $\rho(A_{j_0})$ é vizinhnça de s_0, temos que ψ_f é contínua em s_0.

Isso estabelece a continuidade de ψ_f.

Caso 2 Caso geral. Seja $f \in B_{\omega_1}(S)$, existe sequência $(f_n)_n \subset span\{C_E : E \in \mathfrak{B}(S)\}$ convergindo uniformemente em S para f. Fixemos $s_0 \in S$ e $\epsilon > 0$.

Da convergência uniforme de $(f_n)_n$ para f, segue que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$||f_N - f||_\infty < \frac{\epsilon}{4}. \tag{5.5}$$

Como $f_N \in span\{C_E : E \in \mathfrak{B}(S)\}$, no Caso 1 mostramos que ψ_{f_N} é contínua em s_0. Logo, existe V aberto de S com $s_0 \in V$, tal que:

$$s \in V \Rightarrow |\psi_{f_N}(s) - \psi_{f_N}(s_0)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Seja $s \in V$, calculemos:

$$|\psi_f(s) - \psi_f(s_0)| \leq |\psi_f(s) - \psi_{f_N}(s)| + |\psi_{f_N}(s) - \psi_{f_N}(s_0)| + |\psi_{f_N}(s_0) - \psi_f(s_0)|$$

$$\leq |\overline{\varphi}_s(f - f_N)| + \frac{\epsilon}{2} + |\overline{\varphi}_{s_0}(f_N - f)|$$

$$\leq ||\overline{\varphi}_s||.||f - f_N||_\infty + \frac{\epsilon}{2} + ||\overline{\varphi}_{s_0}||.||f - f_N||_\infty \leq 2.||f - f_N||_\infty + \frac{\epsilon}{2}.$$

Usando a equação (5.5), ficamos com:

$$|\psi_f(s) - \psi_f(s_0)| < \epsilon,$$

para todo $s \in V$. Isso mostra a continuidade de f em s_0, já que $\epsilon > 0$ é arbitrário.

Dessa forma, estabelecemos a continuidade de f em S.

Definamos $P : B_{\omega_1}(S) \to C(S)$, como $P(f) = \psi_f, \forall f \in B_{\omega_1}(S)$. Pelo discutido acima, temos que P está bem definida.

Mostremos que P é projeção multiplicativa de norma 1, o que estabelece (4).

(1) P é linear. Sejam $f, g \in B_{\omega_1}(S)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então:

$$P(f + \lambda.g)(s) = \psi_{f+\lambda.g}(s) = \overline{\varphi}_s(f + \lambda.g) = \overline{\varphi}_s(f) + \lambda.\overline{\varphi}_s(g)$$

$$= \psi_f(s) + \lambda.\psi_g(s) = P(f)(s) + \lambda.P(g)(s).$$

Logo P é linear.

(2) P é contínua. Seja $f \in B_{\omega_1}(S)$. Então:

$$|P(f)(s)| = |\psi_f(s)| = |\overline{\varphi}_s(f)| \leq ||\overline{\varphi}_s||.||f||_\infty \leq ||f||_\infty,$$

para todo $s \in S$. Portanto $||P(f)||_\infty \leq ||f||_\infty$. O que implica que $||P|| \leq 1$.

(3) $||P|| = 1$. No item (2), vimos que $||P|| \leq 1$. Vamos mostrar que $||P|| \geq 1$, com isso estabeleceremos a igualdade.

Notemos que a função $1_S : S \to \mathbb{R}$, definida como $1_S(s) = 1, \forall s \in S$, pertence a $B_{\omega_1}(S)$, pois é contínua. Calculemos $||P(1_S)||_\infty$:

$$||P(1_S)||_\infty = \sup_{s\in S} |P(1_S)(s)| = \sup_{s\in S} |\int_S C_S d\mu_s| = \sup_{s\in S} |\mu_s(S)| = 1.$$

Logo, temos que:

$$||P|| = \sup_{||f||_\infty \leq 1} ||P(f)||_\infty \geq ||P(1_S)||_\infty = 1.$$

Portanto, $||P|| \geq 1$.

(4) $P(f) = f, \forall f \in C(S)$. Seja $f \in C(S)$. De acordo com a Proposição 5.3.17, temos que $C(S) = B(S, \mathfrak{C}(S))$, portanto existe sequencia $(f_n)_n \subset span\{C_E : E \in \mathfrak{C}(S)\}$ convergindo uniformemente em S para f.

Como visto no item (2) P é contínua, portanto $(P(f_n))_n$ converge uniformemente para $P(f)$ em S. O que implica que:

$$P(f)(s) = \lim_{n\to\infty} P(f_n)(s),$$

para todo $s \in S$. Fixado $s \in S$, mostremos que $P(f)(s) = f(s)$. Suponhamos que $f_n = \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_j^n . C_{A_j^n}$, com cada $A_j^n \in \mathfrak{C}(S)$, $A_j^n \cap A_i^n = \emptyset$ se $j \neq i$ e $S = \bigcup_{j=1}^{k_n} A_j^n$.

Calculemos:

$$P(f_n)(s) = \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_j^n . \mu_s(A_j^n) = \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_j^n \delta_s(A_j^n) = \alpha_{j_0}^n,$$

onde j_0 é tal que $s \in A_{j_0}^n$. Note que:

$$f_n(s) = \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_j^n . C_{A_j^n}(s) = \alpha_{j_0}^n.$$

Portanto, temos que $P(f_n)(s) = f_n(s), \forall n \in \mathbb{N}$.

Assim:

$$P(f)(s) = \lim_{n\to\infty} f_n(s) = f(s).$$

Logo, $P(f)(s) = f(s), \forall s \in S$. Isso implica que $P(f) = f$.

(5) P é multiplicativa. Sejam $A, B \in \mathfrak{B}(S)$, então $C_A.C_B = C_{A\cap B}$. Logo:

$$P(C_A.C_B)(s) = \int_S C_{A\cap B} d\mu_s = \mu_s(A\cap B) = \delta_s(\rho(A\cap B)) = \delta_s(\rho(A)\cap\rho(B)).$$

É fácil ver que $\delta_s(\rho(A)\cap\rho(B)) = \delta_s(\rho(A)).\delta_s(\rho(B))$. Então, ficamos com:

$$P(C_A.C_B)(s) = \delta_s(\rho(A)).\delta_s(\rho(B)) = \mu_s(A).\mu_s(B) = P(C_A)(s).P(C_B)(s).$$

Logo:

$$P(C_A.C_B)(s) = P(C_A)(s).P(C_B)(s). \tag{5.6}$$

Da linearidade de P e da equação (5.6), segue que se $f, g \in span\{C_E : E \in \mathfrak{B}(S)\}$, então $P(f.g) = P(f).P(g)$.

Sejam $f, g \in B_{\omega_1}(S)$, existem sequências $(f_n)_n, (g_n)_n \subset span\{C_E : E \in \mathfrak{B}(S)\}$ convergindo uniformemente em S para f e g, respectivamente.

Da continuidade do produto na topologia da norma de $B_{\omega_1}(S)$, segue que $(f_n.g_n)_n$ converge uniformemente em S para $f.g$. Como P é contínua, ficamos com:

$$P(f.g)(s) = \lim_{n\to\infty} P(f_n.g_n)(s) = \lim_{n\to\infty} P(f_n).P(g_n) = P(f)(s).P(g)(s).$$

Portanto, P é multiplicativa.

Dessa forma, estabelecemos (4).

(4) $\Rightarrow$ (2) Por (4), existe $P : B_{\omega_1}(S) \to C(S)$ projeção linear, multiplicativa e com $||P|| = 1$. Como $B_1(S)$ é subespaço de $B_{\omega_1}(S)$ e $C(S) \subset B_1(S)$, a restrição de P a $B_1(S)$, $P|_{B_1(S)} : B_1(S) \to C(S)$ é projeção linear e contínua.

Além disso, por ser restrição de P, temos que $||P|_{B_1(S)}|| \leq 1$. Notemos que se 1_S for a função constante igual a 1 em S, então $1_S \in C(S)$ e $||1_S||_\infty = 1$. Como P é projeção sobre $C(S)$, temos que $P(1_S) = 1_S$. Portanto, $||P(1_S)||_\infty = 1$.

Assim, temos que $||P|| \geq 1$. Logo, $||P|| = 1$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Por (2), existe $P : B_1(S) \to C(S)$ projeção linear contínua com $||P|| = 1$.

Notemos que $B(S,\Sigma) \subset B_1(S)$. Pois, $\Sigma \subset F_\sigma(S) \cap G_\delta(S)$, já que todo F_σ aberto de S está contido em $F_\sigma(S) \cap G_\delta(S)$ e $F_\sigma(S) \cap G_\delta(S)$ é álgera de subconjuntos de S. Logo, $B(S,\Sigma) \subset B(S, F_\sigma(S) \cap G_\delta(S))$. Mas, como S é normal, a Proposição 5.3.9 nos diz que $B_1(S) = B(S, F_\sigma(S) \cap G_\delta(S))$. Portanto, $B(S,\Sigma) \subset B_1(S)$.

Agora, vejamos que $C(S) \subset B(S,\Sigma)$. Vamos mostrar que Σ satisfaz a condição (3) do Lema 5.3.8, o que vai implicar que $C(S) \subset B(S,\Sigma)$. Sejam F_1 e F_2 fechados disjuntos de S. Procedendo da mesma forma que na demonstração da Proposição 5.3.17, concluiremos que existem dois F_σ abertos disjuntos de S, cada um deles contendo F_1 e F_2, respectivamente. (Note que nessa parte da demonstração da Proposição 5.3.17, só usamos o fato de S ser normal)

Com o desenvolvido acima, concluímos que:

$$C(S) \subset B(S,\Sigma) \subset B_1(S).$$

Portanto, se considerarmos a restrição de P a $B(S,\Sigma)$, teremos uma projeção de $B(S,\Sigma)$ sobre $C(S)$. Analogamente, ao feito na demonstração da implicação anterior, teremos que essa projeção tem norma 1.

(3) $\Rightarrow$ (5) Para estabelecermos que $C(S)$ é um reticulado de funções σ-completo, devemos mostrar que toda sequência de funções contínuas $(f_n)_n$ limitada superiormente, possui supremo em $C(S)$. Note que basta mostrarmos que toda sequência crescente e limitada superiormente possui supremo em $C(S)$. De fato, seja $(g_n)_n$ sequência limitada superiormente em $C(S)$.

Definamos:

$$f_1 = g_1$$

e

$$f_n = max(g_1, \dots, g_n),$$

para $n > 1$. A sequência $(f_n)_n$ pertence a $C(S)$, pois $C(S)$ é reticulado de funções e é crecente. Além disso é limitada superiormente.

Se $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \in C(S)$, mostremos que $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n$.

É claro que f é cota superior de $(g_n)_n$, pois $g_n \leq f_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Seja $g \in C(S)$ tal que $g_n \leq g, \forall n \in \mathbb{N}$. Então, $f_n \leq g, \forall n \in \mathbb{N}$. Como f é o supremo das f_n, temos que $f \leq g$.

Com isso mostramos que $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n$.

Seja $(f_n)_n$ sequência de elementos de $C(S)$, crescente e limitada superiormente. Então, sabemos que para todo $s \in S$ existe $f(s) = \lim_{n\to\infty} f_n(s)$. Mais precisamente, $f(s) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(s)$. Pelo Lema 5.3.10, temos que $f \in B(S,\Sigma)$. De acordo com (3), existe $P : B(S,\Sigma) \to C(S)$ projeção linear contínua com norma 1. Como P é projeção sobre $C(S)$ e $1_s \in C(S)$, temos que $P(1_S) = 1_S$.

De acordo com a Proposição 5.3.14, temos que P preserva ordem. Mostremos que $P(f) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ em $C(S)$.

Da definição de f, vem que $f_n \leq f, \forall n \in \mathbb{N}$. Portanto, $P(f_n) = f_n \leq P(f), \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, $P(f)$ é cota superior das f_n. Seja $g \in C(S)$ tal que $f_n \leq g, \forall n \in \mathbb{N}$. Da definição de f vem que $f \leq g$. Portanto $P(f) \leq P(g) = g$. Assim, mostramos que $P(f) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$.

Logo, estabelecemos (5).

(5) $\Rightarrow$ (1) Sugerimos [32], página 444.

□

Como discutido no começo dessa seção, o fato de $B_{\omega_1}(I)$ ser Baire-complementado segue dos Teoremas 5.3.4 e 5.3.24, como veremos no corolário abaixo.

Corolário 5.3.25. *O espaço de Banach $B_{\omega_1}(I)$ é Baire-complementado.*

Demonstração. Pelo Teorema 5.3.4 (Ω_{ω_1}, w^*) é compacto Hausdorff e basicamente desconexo.

Portanto, o Teorema 5.3.24, nos diz que $C(\Omega_{\omega_1})$ é Baire-complementado. Como visto no Capítulo 1, $B_{\omega_1}(I)$ é isomorfo como espaço de Banach a $C(\Omega_{\omega_1})$. Na Seção 2 desse capítulo, vimos que ser Baire-complementado é um invariante isomórfico.

Portanto, temos que $B_{\omega_1}(I)$ é Baire-complementado. □

5.4 $B_\alpha(I)$ para $\alpha < \omega_1$ não é Baire-complementado

Nesta seção, mostraremos que se α é um ordinal enumerável, então $B_\alpha(I)$ não é Baire-complementado.

Observação 5.4.1. *No Capítulo 3, vimos que $C(I)$ não é subespaço complementado de $B_1(I)$. Logo, a Proposição 5.2.4 implica que $C(I)$ não é Baire-complementado.*

Portanto, nesta seção, vamos trabalhar para mostrar que $B_\alpha(I)$ não é Baire-complementado para $1 \leq \alpha < \omega_1$. Faremos isso, mostrando que para $1 \leq \alpha < \omega_1$, o espaço (Ω_α, w^*) é fortemente não F (Teorema 5.4.16) e que se S é fortemente não F, então $C(S)$ não é Baire-complementado (Proposição 5.4.7).

Como corolários do fato de $B_\alpha(I)$ não ser Baire-complementado para $1 \leq \alpha < \omega_1$, teremos o resultado de que $B_\alpha(I)$ e $B_{\omega_1}(I)$ não são isomorfos (Teorema 5.4.19) e o resultado de que se $1 \leq \alpha < \beta \leq \omega_1$, então $B_\alpha(I)$ não é subespaço complementado de $B_\beta(I)$ (Teorema 5.4.20).

Inicialmente, vamos utilizar o Teorema 3.3.22 para obtermos cotas inferiores para projeções de $B(S, \Sigma)$ em $C(S)$ tendo em vista propriedades topológicas de S. Esse objetivo será realizado no Teorema 5.4.3.

Definição 5.4.2. *Sejam S um espaço topológico compacto Hausdorff e Σ uma álgebra de subconjuntos de S. Definimos recursivamente em $k \geq 1$ os seguinte subconjuntos de S:*

(i) Para $n > 1$, $\Gamma_\Sigma^{(1)}(n) = \{x \in S :$ existem $G_1, \ldots, G_n \in \Sigma$ disjuntos com $x \in \bigcap_{i=1}^n \overline{int(G_i)}\}$;

(ii) Para $k, n_1, \ldots, n_2 > 1$, definamos:

$\Gamma_\Sigma^{(k)}(n_1,\ldots,n_k) = \{x \in S : existem\ G_1,\ldots,G_{n_k} \in \Sigma\ disjuntos\ com\ x \in \bigcap_{i=1}^{n_k} \overline{(int(G_i) \cap \Gamma_\Sigma^{(k-1)}(n_1,\ldots,n_{k-1}))}\}$.

Teorema 5.4.3. *Sejam S um espaço topológico compacto Hausdorff e Σ uma álgebra de subconjuntos de S tal que $C(S) \subset B(S,\Sigma)$.*

Se P é projeção linear contínua de $B(S,\Sigma)$ em $C(S)$ e $\Gamma_\Sigma^{(k)}(n_1,\ldots,n_k) \neq \emptyset$ então, $||P|| \geq 1 + 2\sum_{i=1}^{k}(1 - \frac{1}{n_i})$.

Demonstração. Consideremos a função $\varphi : S_\Sigma \to S$ definida pela seguinte condição:

$$f(\varphi(x)) = \widehat{f}(x), \forall f \in C(S),$$

para $x \in S_\Sigma$ fixado. Mostremos que φ está bem definida, é sobrejetora e contínua.

(1) φ está bem definida. Para concluirmos isso, precisamos mostrar que fixado $x \in S_\Sigma$, existe único $s \in S$ tal que $f(s) = \widehat{f}(x), \forall f \in C(S)$.

Existência

De acordo com o Teorema 5.1.18 (1) temos que $\tau(S)$ é denso em S_Σ, assim existe rede $(\tau(s_\lambda))_\lambda$ convergindo em S_Σ para x. Portanto, para toda $g \in B(S,\Sigma)$, temos que:

$$g(s_\lambda) \xrightarrow{\lambda} x(g). \tag{5.7}$$

Considere a rede $(s_\lambda)_\lambda \subset S$. Como S é compacto, existe subrede de $(s_\lambda)_\lambda$ convergindo para $s_0 \in S$. Denotemos essa subrede por $(s_\mu)_\mu$. Seja $f \in C(S)$, da continuidade de f vem que:

$$f(s_\mu) \xrightarrow{\mu} f(s_0).$$

Como $(f(s_\mu))_\mu$ é subrede de $(f(s_\lambda))_\lambda$, $f \in B(S,\Sigma)$ e vale a equação (5.7), temos que:

$$f(s_\mu) \xrightarrow{\mu} x(f).$$

Da unicidade do limite vem que $f(s_0) = x(f) = \widehat{f}(x)$.

Como $f \in C(S)$ foi tomada arbitrariamente, estabelecemos a existência.

Unicidade

Suponha, por absurdo, que existem $s_1, s_2 \in S$ distintos tais que para toda $f \in C(S)$ valem $f(s_1) = x(f)$ e $f(s_2) = x(f)$. Logo, para toda $f \in C(S)$, temos que $f(s_1) = f(s_2)$.

Como S é Hausdorff, $\{s_1\}$ e $\{s_2\}$ são fechados disjuntos. Como S é nomal, do Lema de Urysohn segue que existe $f_0 \in C(S)$ tal que $f_0(s_1) = 0$ e $f_0(s_2) = 1$. Poratanto, $f_0(s_1) \neq f_0(s_2)$. Chegamos a uma contradição, que surgiu pois supusemos que $s_1 \neq s_2$.

Dessa forma, temos que $s_1 = s_2$. O que estabelece a unicidade.

Como discutido anteriormente, isso mostra que φ está bem definida.

(2) φ é sobrejetora. Seja $s \in S$. Considere $\tau(s) \in S_\Sigma$. Dada $f \in C(S)$, temos que:

$$f(s) = \tau(s)(f) = \widehat{f}(\tau(s)).$$

Logo $\varphi(\tau(s)) = s$. Isso mostra que φ é sobrejetora.

(3) φ é contínua. Fixado $x \in S_\Sigma$, vamos mostrar que φ é contínua em x.

Suponha que a rede $(x_\lambda)_\lambda \subset S_\Sigma$ seja convergente para x, para estabelecermos a continuidade de φ, basta mostrarmos que:

$$\varphi(x_\lambda) \overset{\lambda}{\to} \varphi(x)$$

em S. Sabemos que:

$$x_\lambda \overset{w^*}{\to} x \Rightarrow \widehat{f}(x_\lambda) \overset{\lambda}{\to} \widehat{f}(x) \Rightarrow f(\varphi(x_\lambda)) \overset{\lambda}{\to} f(\varphi(x)), \tag{5.8}$$

para toda $f \in C(S)$.

Suponhamos, por absurdo, que $(\varphi(x_\lambda))_\lambda$ não seja convergente para $\varphi(x)$ em S. Então, existe V aberto contendo $\varphi(x)$ tal que dado λ_0 existe $\lambda \geq \lambda_0$ com $\varphi(x_\lambda) \in V^C$.

Note que $\{\varphi(x)\}$ e V^C são fechados disjuntos de S. Como S é normal, o Lema de Urysohn nos diz que existe $f_0 \in C(S)$ tal que $f_0(\varphi(x)) = 1$ e $f_0|_{V^C} = 0$. Mostremos que $(f_0(\varphi(x_\lambda)))_\lambda$ não converge para 1, o que vai contradizer a equação (5.8).

O intervalo $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ é vizinhança aberta de 1 em $\mathbb{R}$. Então, se $(f_0(\varphi(x_\lambda)))_\lambda$ convergisse para 1, existiria λ_0 tal que:

$$\lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow f_0(\varphi(x_\lambda)) \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}).$$

Mas, por hipótese, existe $\lambda \geq \lambda_0$ tal que $\varphi(x_\lambda) \in V^C$. O que implica que $f_0(\varphi(x_\lambda)) = 0$.

Chegamos a uma contradição. Portanto, temos que $(f_0(\varphi(x_\lambda)))_\lambda$ não converge para 1. Como dito acima, isso é uma contradição. A contradição surgiu pois supusemos que $(\varphi(x_\lambda))_\lambda$ não era convergente para $\varphi(x)$ em S. Portanto, a convergência é verificada.

Isso estabelece a continuidade de φ.

Seja $G \subset S$ um aberto e $x \in \varphi^{-1}(G)$. Do fato de $\tau(S)$ ser denso em S_Σ vem que existe rede $(\tau(s_\alpha))_\alpha$ convergindo para x. Como φ é contínua, temos que:

$$\varphi(\tau(s_\alpha)) = s_\alpha \xrightarrow{\alpha} \varphi(x).$$

Como G é aberto contendo $\varphi(x)$, existe α_0 tal que:

$$\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow s_\alpha \in G.$$

Então $\alpha \geq \alpha_0$ implica que $\tau(s_\alpha) \in \tau(G)$. Como $\tau(s_\alpha) \xrightarrow{\alpha} x$, temos que $x \in \overline{\tau(G)}$. Assim, concluímos que:

$$\varphi^{-1}(G) \subset \overline{\tau(G)}, \tag{5.9}$$

para todo $G \subset S$ aberto.

Seja $P : B(S, \Sigma) \to C(S)$ projeção linear contínua. Definamos $Q : C(S_\Sigma) \to C(S)$ como $Q(\widehat{f}) = P(f), \forall f \in B(S, \Sigma)$. Note que Q está bem definida, pois o Teorema 5.1.17 nos garante que, dada $F \in C(S_\Sigma)$ existe única $f \in B(S, \Sigma)$ tal que $F = \widehat{f}$.

Vamos mostrar que Q é um operador de média para φ com $||Q|| = ||P||$.

(1) Q é linear. Segue da linearidade da função $f \mapsto \widehat{f}$ (Teorema 5.1.17) e da linearidade de P;

(2) Q é contínua. Seja $g \in B(S,\Sigma)$, calculemos:

$$||Q(\widehat{g})||_\infty = ||P(g)||_\infty \leq ||P||.||g||_\infty = ||P||.||\widehat{g}||_\infty.$$

A última igualdade vale, pois a função $f \mapsto \widehat{f}$ é isometria linear (Teorema 5.1.17).

Logo, temos que $||Q|| \leq ||P||$;

(3) $||Q|| = ||P||$. No item(2), mostramos que $||Q|| \leq ||P||$. Para estabelecermos a igualdade, basta mostrarmos que $||Q|| \geq ||P||$.

Seja $f \in B(S,\Sigma)$. Calculemos:

$$||P(f)||_\infty = ||Q(\widehat{f})||_\infty \leq ||Q||.||\widehat{f}||_\infty = ||Q||.||f||_\infty.$$

Logo, $||P(f)||_\infty \leq ||Q||.||f||_\infty, \forall f \in B(S,\Sigma)$. O que implica que $||P|| \leq ||Q||$;

(4) $Q(f\circ\varphi) = f, \forall f \in C(S)$. Seja $f \in C(S)$, então $f\circ\varphi \in C(S_\Sigma)$.

Mostremos que $\widehat{f} = f\circ\varphi$. Da definição de φ, vem que $\widehat{f}(\tau(s)) = f(\varphi(\tau(s)))$. Portanto, essas duas funções coincidem em $\tau(S)$. Como elas são contínuas, $\tau(S)$ é denso em S_Σ e S_Σ é Hausdorff, temos que elas coincidem em todo o domínio. Portanto, da definição de Q segue que:

$$Q(f\circ\varphi) = P(f) = f.$$

A última igualdade vale, pois P é projeção sobre $C(S)$ e $f \in C(S)$.

Nosso objetivo é mostrar por indução em k que $\Gamma_\Sigma^{(k)}(n_1,\ldots,n_k) \subset M_\varphi^{(k)}(n_1,\ldots,n_k)$.

Dessa forma, teremos que Q é um operador de média para φ e $M_\varphi^{(k)}(n_1,\ldots,n_k) \neq \emptyset$. De acordo com o Teorema 3.3.22, teremos que $||Q|| \geq 1 + 2\sum_{i=1}^k(1-\frac{1}{n_i})$.

Mas, acima vimos que $||P|| = ||Q||$, então teremos que $||P|| \geq 1 + 2\sum_{i=1}^k(1-\frac{1}{n_i})$. O que estabelece nosso resultado.

(i) $k=1$. Seja $s \in \Gamma_\Sigma^{(1)}(n)$, com $n > 1$. Então, existem n disjuntos $G_1,\ldots,G_n \in \Sigma$ com $s \in \bigcap_{i=1}^n \overline{int(G_i)}$. Logo, $s \in \overline{int(G_i)}$ para todo $i = 1,\ldots,n$.

Fixado i, existe rede $(s_\alpha)_\alpha \subset int(G_i)$ convergindo em S para s. Da equação (5.9) segue que:

$$\varphi^{-1}(s_\alpha) \subset \overline{\tau(int(G_i))} \subset \overline{\tau(G_i)}, \tag{5.10}$$

para todo α.

Vejamos que $\limsup \varphi^{-1}(s_\alpha) \subset \overline{\tau(G_i)}$. Seja $x \in \limsup \varphi^{-1}(s_\alpha)$. Suponhamos, por absurdo, que $x \notin \overline{\tau(G_i)}$. Então $x \in \overline{\tau(G_i)}^C$. Como $\overline{\tau(G_i)}^C$ é vizinhança aberta de x, da definição de $\limsup \varphi^{-1}(s_\alpha)$, fixado α_0, existe $\alpha \geq \alpha_0$ tal que $\varphi^{-1}(s_\alpha) \cap \overline{\tau(G_i)}^C \neq \emptyset$.

Mas isso contradiz a equação (5.10). A contradição surgiu pois supusemos que $x \notin \overline{\tau(G_i)}$. Dessa forma, temos que $x \in \overline{\tau(G_i)}$, o que implica que $\limsup \varphi^{-1}(s_\alpha) \subset \overline{\tau(G_i)}$. Lembremos que a Proposição 3.3.18 nos diz que $\limsup \varphi^{-1}(s_\alpha) \subset \varphi^{-1}(s)$.

Assim, $\limsup \varphi^{-1}(s_\alpha) \subset \overline{\tau(G_i)} \cap \varphi^{-1}(s)$.

Como os conjuntos $G_1, \ldots, G_n$ são disjuntos e de acordo com o Teorema 5.1.18 (2) a função $\psi : \Sigma \to \mathfrak{C}(S_\Sigma)$ definida como $\psi(E) = \overline{\tau(E)}$ é isomorfismo booleano, temos que os conjuntos $\overline{\tau(G_1)}, \ldots, \overline{\tau(G_n)}$ são disjuntos.

Então $\varphi^{-1}(s)$ contém n conjuntos disjuntos da forma $\limsup \varphi^{-1}(s_\alpha)$ para redes $(s_\alpha)_\alpha$ convegindo para s. Isso implica que $s \in M_\varphi^{(1)}(n)$.

(ii) Seja $k > 1$. Suponhamos que valha:

$$\Gamma_\Sigma^{(k-1)}(n_1, \ldots, n_{k-1}) \subset M_\varphi^{(k-1)}(n_1, \ldots, n_{k-1}).$$

Mostremos que $\Gamma_\Sigma^{(k)}(n_1, \ldots, n_k) \subset M_\varphi^{(k)}(n_1, \ldots, n_k)$. Seja $s \in \Gamma_\Sigma^{(k)}(n_1, \ldots, n_k)$. Então, existem conjuntos $G_1, \ldots, G_{n_k} \in \Sigma$ disjuntos tais que:

$$s \in \bigcap_{i=1}^{n_k} \overline{int(G_i) \cap \Gamma_\Sigma^{(k-1)}(n_1, \ldots, n_{k-1})}.$$

Portanto, temos que $s \in \overline{int(G_i) \cap \Gamma_\Sigma^{(k-1)}(n_1, \ldots, n_{k-1})}, \forall i = 1, \ldots, n_k$. Dessa forma, fixado i, existe rede $(s_\alpha)_\alpha \subset int(G_i) \cap \Gamma_\Sigma^{(k-1)}(n_1, \ldots, n_{k-1})$ convergindo para s em S.

Pela hipótese de indução, temos que $(s_\alpha)_\alpha \subset M_\varphi^{(k-1)}(n_1, \dots, n_{k-1})$.

Analogamente ao feito em (i), mostra-se que $\limsup \varphi^{-1}(s_\alpha) \subset \varphi^{-1}(s) \cap \overline{\tau(G_i)}$ e que os conjuntos $\overline{\tau(G_1)}, \dots, \overline{\tau(G_{n_k})}$ são disjuntos. Logo, $\varphi^{-1}(s)$ possui n_k conjuntos disjuntos da forma $\limsup \varphi^{-1}(s_\alpha)$, para redes $(s_\alpha)_\alpha \subset M_\varphi^{(k-1)}(n_1, \dots, n_{k-1})$ convergindo para s. Portanto, $s \in M_\varphi^{(k)}(n_1, \dots, n_k)$.

Como discutido anteriormente, isso implica nosso resultado. □

Agora, vamos usar o Teorema 5.4.3 para obter condição necessária para que $C(S)$ não seja complementada em $B(S, \Sigma)$, onde Σ é uma álgebra conveniente que vai nos permitir demonstrar a Proposição 5.4.7.

Corolário 5.4.4. *Sejam S um espaço topológico compacto Hausdorff e Σ uma álgebra de subconjuntos de S tal que $C(S) \subset B(S, \Sigma)$. Suponha que exista $Q \subset S$ não vazio, tal que para todo $s \in Q$ existem $G_1, G_2 \in \Sigma$ conjuntos disjuntos tais que:*

$$s \in \overline{int(G_1) \cap Q} \cap \overline{int(G_2) \cap Q}.$$

Então $C(S)$ não é complementada em $B(S, \Sigma)$.

Demonstração. Mostremos que $Q \subset \Gamma_\Sigma^{(k)}(2, \dots, 2), \forall k \geq 1$.

Façamos indução em k.

(i) $k = 1$. Devemos mostrar que $Q \subset \Gamma_\Sigma^{(1)}(2)$.

Seja $x \in Q$. Da definição de Q, segue que existem $G_1, G_2 \in \Sigma$ conjuntos disjuntos tais que:

$$x \in \overline{int(G_1) \cap Q} \cap \overline{int(G_2) \cap Q}.$$

Notemos que $\overline{int(G_1) \cap Q} \subset \overline{int(G_1)} \cap \overline{Q}$. Portanto, $x \in \overline{int(G_1)}$. Analogamente concluímos que $x \in \overline{int(G_2)}$ Portanto:

$$x \in \overline{int(G_1)} \cap \overline{int(G_2)}.$$

Logo, temos que $x \in \Gamma_\Sigma^{(1)}(2)$.

(ii) Seja $k > 1$. Suponhamos que $Q \subset \Gamma_\Sigma^{(k-1)}(2, \ldots, 2)$. Vamos mostrar que $Q \subset \Gamma_\Sigma^{(k)}(2, \ldots, 2)$.

Seja $x \in Q$. Da definição de Q segue que existem $G_1, G_2 \in \Sigma$ conjuntos disjuntos com $x \in \overline{int(G_1) \cap Q} \cap \overline{int(G_2) \cap Q}$. Segue da hipótese de indução que $int(G_i) \cap Q \subset int(G_i) \cap \Gamma_\Sigma^{(k-1)}(2, \ldots, 2)$. Logo:

$$\overline{int(G_i) \cap Q} \subset \overline{int(G_i) \cap \Gamma_\Sigma^{(k-1)}(2, \ldots, 2)}.$$

Assim, $x \in \overline{int(G_i) \cap \Gamma_\Sigma^{(k-1)}(2, \ldots, 2)}$, para $i = 1, 2$. Concluímos que:

$$x \in \overline{int(G_1) \cap \Gamma_\Sigma^{(k-1)}(2, \ldots, 2)} \cap \overline{int(G_2) \cap \Gamma_\Sigma^{(k-1)}(2, \ldots, 2)}.$$

O que implica que $x \in \Gamma_\Sigma^{(k)}(2, \ldots, 2)$.

Portanto, temos que:

$$Q \subset \Gamma_\Sigma^{(k)}(2, \ldots, 2), \forall k \geq 1. \tag{5.11}$$

Suponha, por absurdo, que $P : B(S, \Sigma) \to C(S)$ seja projeção linear contínua sobre $C(S)$.

Como vale a equação (5.11) e $Q \neq \emptyset$, o Teorema 5.4.3 nos diz que $||P|| \geq 1 + 2\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2} = 1 + k, \forall k > 0$. Isso implica que P não é contínua. Chegamos a uma contradição, que surgiu pois supusemos que existia P projeção linear contínua de $B(S, \Sigma)$ em $C(S)$.

Portanto, temos que $C(S)$ não é complementada em $B(S, \Sigma)$. □

Vamos introduzir o conceito de espaço fortemente não F.

Definição 5.4.5. *Um espaço topológico compacto e Hausdorff S é dito fortemente não F se, e somente se, existe um conjunto não vazio $Q \subset S$ tal que para todo $s \in Q$ existem G_1, G_2 dois F_σ abertos e disjuntos de S com:*

$$s \in \overline{G_1 \cap Q} \cap \overline{G_2 \cap Q}.$$

A próxima proposição é consequência imediata das Definições 5.4.5 e 5.3.15.

Proposição 5.4.6. *Seja S espaço topológico compacto e Hausdorff. Se S é fortemente não F, então S não é um espaço F.*

Proposição 5.4.7. *Sejam S um espaço topológico compacto Hausdorff e Σ a álgebra gerada pelos subconjuntos F_σ abertos de S.*

Se S é fortemente não F, então $C(S)$ não é complementada em $B(S, \Sigma)$. Em particular, $C(S)$ não é Baire-complementado.

Demonstração. Note que $C(S) \subset B(S, \Sigma)$, pois como visto na demonstração da Proposição 5.3.17, Σ satisfaz a condição (3) do Lema 5.3.8.

Por hipótese, S é fortemente não F, então existe um conjunto não vazio $Q \subset S$ tal que para todo $s \in Q$ existem G_1, G_2 dois F_σ abertos e disjuntos de S com:

$$s \in \overline{G_1 \cap Q} \cap \overline{G_2 \cap Q}.$$

Como G_1, G_2 são abertos, temos que:

$$s \in \overline{int(G_1) \cap Q} \cap \overline{int(G_2) \cap Q}.$$

De acordo com o Corolário 5.4.4, temos que $C(S)$ não é complementada em $B(S, \Sigma)$.

Se $C(S)$ fosse Baire-complementado, de acordo com a Proposição 5.2.4 existiria $P : B_1(S) \to C(S)$ projeção linear contínua.

Na demonstração de (2) $\Rightarrow$ (3) do Teorema 5.3.24, vimos que $B(S, \Sigma) \subset B_1(S)$. Note que na demonstração de (2) $\Rightarrow$ (3) do Teorema 5.3.24, a única hipótese sobre a topologia de S era S ser compacto e Hausdorff. Logo, P restrita a $B(S, \Sigma)$ seria projeção linear contínua sobre $C(S)$. Mas, isso contradiria o discutido acima.

Portanto, $C(S)$ não é Baire-complementado. □

Agora, vamos trabalhar para mostrar que Ω_α para $1 \leq \alpha < \omega_1$ é fortemente não F. Isso será feito no Teorema 5.4.16.

Para a demonstração desse teorema, precisaremos de alguns resultados que apresentaremos abaixo. O mais profundo deles é o que denominamos de **Lema de Lusin**, que mostra que a classe aditiva α dos Borelianos de $\mathfrak{I} \times \mathfrak{I}$ não possui a propriedade de separação. Fato que é verdadeiro para a classe multiplicativa. (Veja [34], página 121)

Lema 5.4.8. ***(Lema de Lusin)*** *Seja $\mathfrak{I}$ o conjunto dos irracionais da reta. Para cada ordinal $1 \leq \alpha < \omega_1$, existem em $\mathfrak{I} \times \mathfrak{I}$ dois conjuntos não vazios e disjuntos da classe aditiva α , que não estão contidos em conjuntos disjuntos da classe ambígua α.*

Demonstração. Sugerimos [34], página 122. □

Observação 5.4.9. *A prova do Lema 5.4.8 apresentada em [34] é uma prova clássica, bem próxima da demonstração original de Lusin.*

Para uma abordagem mais moderna desse resultado, veja [22] página 171.

Lema 5.4.10. *Sejam X um espaço polonês zero dimensional e $A \subset X$ um G_δ de X, com interior vazio e denso em X.*

Então A é homeomorfo a $\mathfrak{I}$. Portanto, A é homeomorfo a $\mathfrak{I} \times \mathfrak{I}$, já que $\mathfrak{I}$ é homeomorfo a $\mathfrak{I} \times \mathfrak{I}$.

Demonstração. Sugerimos [25], página 441 para a primeira afirmação e página 25 para a segunda afirmação. □

Lema 5.4.11. *Todo aberto não vazio do conjunto de Cantor C é não enumerável.*

Demonstração. Lembremos que C é o conjunto $\{0,1\}^\omega$, munido da topologia produto.

Seja U aberto não vazio de C. Considere $x_0 \in U$. Então, existe um aberto básico B, com $x_0 \in B \subset U$.

Sabemos que um aberto básico de C é o produto cartesiano de uma quantidade finita de unitários e uma quantidade enumerável de $\{0,1\}$. Portanto, a cardinalidade de B é $2^{\aleph_0}$, que é não enumerável.

Isso mostra que U é não enumerável. □

Lema 5.4.12. *Seja C o conjunto de Cantor. Para todo ordinal $1 \leq \alpha < \omega_1$, existem $A, B \subset C$, com A e B não vazios, disjuntos e pertencentes à classe aditiva α de C tal que se $A' \subset A$ e $B' \subset B$ com $A - A'$ e $B - B'$ enumeráveis, então A' e B' não estão contidos em conjuntos disjuntos da classe ambígua α de C.*

Demonstração. Dividiremos a demonstração em dois casos, a saber $\alpha = 1$ e $\alpha > 1$.

(Caso 1) $\alpha = 1$

Sabemos que C é um espaço polonês. Seja $V \subset C$ um aberto não vazio. Vamos mostrar que V contém subconjunto não enumerável, fechado e raro de C.

De acordo com o Lema 5.4.11 V é não enumerável. Pelo Lema 4.25, temos que V é um espaço polonês. Logo V é um polonês não enumerável. Seja $\{V_1, V_2, \ldots, V_n, \ldots\} \subset V$ base enumerável de V. Para cada n, tomemos um $x_n \in V_n$. Então o conjunto $V - \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ é um G_δ não enumerável de V. Portanto, segue do Lema 4.27 que $V - \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ possui um subconjunto A homeomorfo ao conjunto de Cantor C. Como C é não enumerável, temos que A é não enumerável. Note que $int_V(V - \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}) = \emptyset$. O que implica que $int_V(A) = \emptyset$. Como A é homeomorfo a C, temos que A é compacto, portanto fechado (em V e em C). Dessa forma, A é raro em V. Sabemos que um subconjunto raro de um aberto de um espaço topológico S também é raro com respeito a S. Então, A é raro em C.

Seja $\{V_1, V_2, \ldots, V_n, \ldots\}$ base enumerável da topologia de C (vamos supor que cada $V_n \neq \emptyset$). Definamos recursivamente A_n e B_n, subconjuntos não vazios de C tais que:

(i) A_n, B_n são não enumeráveis, fechados e raros em C;

(ii) $A_1, B_1 \subset V_1$ e $A_1 \cap B_1 = \emptyset$;

(iii) Se $n \geq 2$, então $A_n, B_n \subset V_n - \bigcup_{k=1}^{n-1}(A_k \cup B_k)$ e $A_n \cap B_n = \emptyset$.

Note que os elementos da família $\{A_n, B_n : n \geq 1\}$ serão dois a dois disjuntos, por construção.

V_1 é aberto não vazio de C, portanto, pelo feito anteriormente, temos que existe $A_1 \subset V_1$ não enumerável, fechado e raro de C. Note que $V_1 - A_1 \neq \emptyset$, pois se $A_1 = V_1$, então $int(A_1) = int(V_1) = V_1 \neq \emptyset$. Assim, como V_1 é aberto de C e A_1 é fechado de C, temos que $V_1 - A_1$ é aberto não vazio de C. Portanto, existe $B_1 \subset V_1 - A_1$ subconjunto não enumerável, fechado e raro de C.

Agora, seja $n \geq 2$. Suponha que estejam definidos A_k, B_k para $1 \leq k < n$, satisfazendo as condições (i),(ii) e (iii). Definamos A_n e B_n.

Consideremos o conjunto $\bigcup_{k=1}^{n-1}(A_k \cup B_k)$. Ele é fechado e raro em C, já que uniâo finita de conjuntos raros é rara. Como V_n é aberto não vazio de C, temos que $V_n - \bigcup_{k=1}^{n-1}(A_k \cup B_k) \neq \emptyset$. Dessa forma, $V_n - \bigcup_{k=1}^{n-1}(A_k \cup B_k)$ é aberto não vazio de C. Como discutido anteriormente, existe $A_n \subset V_n - \bigcup_{k=1}^{n-1}(A_k \cup B_k)$, com A_n não enumerável, fechado e raro em C. Como discutido acima, temos que $V_n - (A_n \cup \bigcup_{k=1}^{n-1}(A_k \cup B_k)) \neq \emptyset$. Portanto, esse conjunto é aberto não vazio de C. Então existe $B_n \subset V_n - (A_n \cup \bigcup_{k=1}^{n-1}(A_k \cup B_k))$, com B_n não enumerável, fechado e raro em C.

Definamos $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ e $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Como cada A_n, B_n são fechados em C, temos que $A, B \in F_\sigma(C)$. Logo A e B pertencem à classe aditiva 1. Facilmente verifica-se que $A \cap B = \emptyset$.

Mostremos que os conjuntos A e B satisfazem a conclusão do lema.

Sejam $A' \subset A$ e $B' \subset B$ tais que $A - A'$ e $B - B'$ são enumeráveis. Mostremos que A' é denso em C. Do fato de $A - A'$ ser enumerável e cada A_n ser não enumerável, segue que $A' \cap A_n \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$.

Seja U aberto não vazio de C, então existe n tal que $V_n \subset U$. Mas, $A' \cap A_n \subset V_n$. Assim $A' \cap A_n \subset U$. Logo $(A' \cap A_n) \cap U \neq \emptyset$, o que implica que $A' \cap U \neq \emptyset$. Analogamente, mostramos que B' é denso em C.

Suponhamos, por absurdo, que existam dois conjuntos disjuntos $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ pertencentes à classe ambígua 1, tais que $A' \subset \mathfrak{A}$ e $B' \subset \mathfrak{B}$. Assim, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ seriam dois G_δ densos e disjuntos de C.

De acordo com o Teorema 4.14(1), C é um espaço de Baire, já que é completamente metrizável. Dessa forma, o Lema 4.22 nos diz que $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ têm intersecção não vazia. Chegamos assim a uma contradição.

Portanto, não existem $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ na classe ambígua 1 separando A' de B'. Logo A e B satisfazem a conclusão do lema.

(Caso 2) $\alpha > 1$.

Como C é separável, podemos considerar $D \subset C$ subconjunto enumerável e denso em C. O fato de que D é enumerável implica que $D \in F_\sigma(C)$, já que C é Hausdorff. Portanto, temos que $C - D$ é G_δ de C. Da densidade de D em C, segue que $C - D$ tem interior vazio. Além disso, note que $int(D) = \emptyset$, já que D é enumerável e todo aberto não vazio de C é não enumerável. Isso implica que $C - D$ é denso em C.

Portanto, $C-D$ é um G_δ com interior vazio e denso em C. Como C é polonês zero dimensional, o Lema 5.4.10 nos diz que $C-D$ é homeomorfo a $\mathfrak{I}\times\mathfrak{I}$. Seja $\psi : \mathfrak{I}\times\mathfrak{I} \to C-D$ um homeomorfismo.

Sejam $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ os subconjuntos de $\mathfrak{I}\times\mathfrak{I}$ cuja existência é garantida pelo Lema 5.4.8, ou seja $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ são subconjuntos disjuntos pertencentes à classe aditiva α de $\mathfrak{I}\times\mathfrak{I}$ que não estão contidos em conjuntos disjuntos da classe ambígua α de $\mathfrak{I}\times\mathfrak{I}$.

Mostremos que os conjuntos $A = \psi(\mathfrak{A})$ e $B = \psi(\mathfrak{B})$ satisfazem a conclusão do nosso lema.

Como ψ é homeomorfismo, temos que A e B são disjuntos e pertencem à classe aditiva α de $C-D$.

Mostremos que os conjuntos A e B não podem estar contidos em conjuntos disjuntos da classe ambígua α de $C-D$. Suponhamos, por absurdo, que existem E e F elementos disjuntos da classe ambígua α de $C-D$, tais que $A \subset E$ e $B \subset F$. Então $\psi^{-1}(E)$ e $\psi^{-1}(F)$ são elementos disjuntos da classe ambígua α de $\mathfrak{I}\times\mathfrak{I}$, já que ψ é homeomorfismo. Além disso, temos que $\mathfrak{A} \subset \psi^{-1}(E)$ e $\mathfrak{B} \subset \psi^{-1}(F)$. Mas, isso contradiz a escolha de $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$.

Com o feito acima, concluímos que A e B são conjuntos disjuntos, pertencentes à classe aditiva α de $C-D$ e que não estão contidos em elementos disjuntos da classe ambígua α de $C-D$.

Como $\alpha \geq 2$ e $C-D \in G_\delta(C)$, temos que $C-D$ pertence à classe aditiva α de C. De acordo com o Lema 2.15(1), A e B pertencem á classe aditiva α de C.

Além disso, A e B não estão contidos em elementos disjuntos da classe ambígua α de C. De fato, suponhamos que E e F sejam elementos disjuntos da classe ambígua α de C tais que $A \subset E$ e $B \subset F$. Como $A, B \subset C-D$, temos que $A \subset E\cap(C-D)$ e $B \subset F\cap(C-D)$. Pelo Lema 2.15(2), $E\cap(C-D)$ e $F\cap(C-D)$ pertencem á classe ambígua α de $C-D$ e continuam disjuntos. Mas, isso contradiz nossas conclusões anteriores sobre A e B.

Sejam $A' \subset A$ e $B' \subset B$ tais que $A-A'$ e $B-B'$ são enumeráveis. Mostremos que A' e B' não estão contidos em elementos disjuntos da classe ambígua α de C. Suponhamos, por absurdo, que existam E e F elementos disjuntos da classe ambígua α de C, tais que $A' \subset E$ e $B' \subset F$. Notemos que:

$$A = A' \cup (A-A') \Rightarrow A \subset E \cup (A-A')$$

e

$$B = B' \cup (B - B') \Rightarrow B \subset F \cup (B - B').$$

Como $\alpha \geq 2$, temos que todo conjunto enumerável pertence à classe ambígua α. Dessa forma, A e B estão contidos em elementos disjuntos da classe ambígua α de C. Mas isso contradiz o discutido anteriormente.

Assim, temos que A e B satisfazem a conclusão do nosso lema.

Dos Casos 1 e 2 segue nosso resultado. $\square$

Corolário 5.4.13. *Seja $K \subset I$ homeomorfo ao conjunto de Cantor C. Para todo ordinal $1 \leq \alpha < \omega_1$, existem $A, B \subset K$, com A e B não vazios, disjuntos e pertencentes à classe aditiva α de I tais que se $A' \subset A$ e $B' \subset B$ com $A - A'$ e $B - B'$ enumeráveis, então A' e B' não estão contidos em conjuntos disjuntos da classe ambígua α de I.*

Demonstração. Fixado um ordinal $1 \leq \alpha < \omega_1$, sejam $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset C$ os conjuntos cuja existência é garantida pelo Lema 5.4.12. Seja $\psi : C \to K$ um homeomorfismo. Definamos $A = \psi(\mathfrak{A})$ e $B = \psi(\mathfrak{B})$.

Mostremos que A e B satisfazem a conclusão do corolário. Como $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ são disjuntos, não vazios, pertencem à classe aditiva α de C e ψ é homeomorfismo, temos que A e B são disjuntos, não vazios e pertencem à classe aditiva α de K.

Note que K é fechado de I, portanto pertence à classe aditiva α, pois $\alpha \geq 1$. É consequência do Lema 2.15(1) que A e B pertencem à classe aditiva α de I. Sejam $A' \subset A$ e $B' \subset B$ com $A - A'$ e $B - B'$ enumeráveis, mostremos que A' e B' não estão contidos em elementos disjuntos da classe ambígua α de I.

Suponhamos, por absurdo, que existam E e F elementos disjuntos da classe ambígua α de I tais que $A' \subset E$ e $B' \subset F$. De acordo com o Lema 2.15(2), temos que $E \cap K$ e $F \cap K$ são elementos disjuntos da classe ambígua α de K. Além disso, $A' \subset (E \cap K)$ e $B' \subset (F \cap K)$, pois $A', B' \subset K$. Como ψ é homeomorfismo, temos que $\psi^{-1}(A - A')$ e $\psi^{-1}(B - B')$ são enumeráveis e $\psi^{-1}(A'), \psi^{-1}(B')$ estão contidos em elementos disjuntos da classe ambígua α de C. Mas, isso contradiz a escolha de $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$.

Portanto, temos que A e B satisfazem a conclusão do corolário. □

Definição 5.4.14. *Sejam X um conjunto e $\mathfrak{F}$ família de subconjuntos de X, dizemos que $\mathfrak{F}$ possui a propriedade da intersecção finita se, e somente se, toda subfamília finita de $\mathfrak{F}$ possui intersecção não vazia.*

Proposição 5.4.15. *Seja S um espaço topológico. Se S é compacto, então toda família de subconjuntos fechados de S com a propriedade da intersecção finita tem intersecção não vazia.*

Demonstração. Sugerimos [36], página 118. □

Lembremos que Ω_α denota o espaço dos funcionais lineares multiplicativos de $B_\alpha(I)$ munido da topologia w^*.

Teorema 5.4.16. *Para todo ordinal $1 \leq \alpha < \omega_1$, Ω_α é fortemente não F.*

Demonstração. Fixado um ordinal enumerável $\alpha \geq 1$, consideremos a função $\tau_\alpha : I \to \Omega_\alpha$, definida com $\tau_\alpha(t)(f) = \varphi_t(f) = f(t), \forall t \in I$ e $\forall f \in B_\alpha(I)$.

Definamos o conjunto:

$Q = \{x \in \Omega_\alpha$: existem G_1, G_2 dois F_σ abertos e disjuntos de Ω_α tais que se W é vizinhança de x, então $\tau_\alpha^{-1}(G_1 \cap W)$ e $\tau_\alpha^{-1}(G_2 \cap W)$ são não enumeráveis$\}$.

Nosso objetivo é mostrar que Q satisfaz as hipóteses da Definição 5.4.5, o que vai implicar que Ω_α é fortemente não F.

Inicialmente, vamos mostrar que se K é um subconjunto de I homeomorfo ao conjunto de Cantor C, então $\overline{\tau_\alpha(K)}$ contém um ponto de Q. Em particular, isso vai implicar que $Q \neq \emptyset$.

Consideremos $A, B \subset K$ conjuntos com as propriedades descritas no Corolário 5.4.13. Definamos:

$\mathfrak{F} = \{\overline{\tau_\alpha(M)} : M \subset A$ e $A - M$ é enumerável ou $M \subset B$ e $B - M$ é enumerável $\}$.

Vejamos que $\mathfrak{F}$ possui a propriedade da intersecção finita.

Sejam $M_1, \ldots, M_n \subset A$ e $M_{n+1}, \ldots, M_p \subset B$ com $\overline{\tau_\alpha(M_i)} \in \mathfrak{F}$. Definamos $A' = \bigcap_{i=1}^n M_i \subset A$ e $B' = \bigcap_{i=n+1}^p M_i \subset B$. Note que $A - A'$ e $B - B'$ são enumeráveis.

Pela escolha de A e B, temos que A' e B' não estão contidos em conjuntos disjuntos da classe ambígua α de I.

Afirmamos que $\overline{\tau_\alpha(A')} \cap \overline{\tau_\alpha(B')} \neq \emptyset$. De fato, suponhamos, por absurdo, que $\overline{\tau_\alpha(A')} \cap \overline{\tau_\alpha(B')} = \emptyset$. Do fato de Ω_α ser normal, segue que existem abertos disjuntos U_1, U_2 com $\overline{\tau_\alpha(A')} \subset U_1$ e $\overline{\tau_\alpha(B')} \subset U_2$.

No Capítulo 1, vimos que Ω_α é zero dimensional, como U_1 é aberto não vazio temos que $U_1 = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ com cada C_λ aberto-fechado de Ω_α. Logo, do fato de $\overline{\tau_\alpha(A')} \subset U_1$ e da compacidade de $\overline{\tau_\alpha(A')}$ segue que existe aberto-fechado C, com $\overline{\tau_\alpha(A')} \subset C$ e $C \subset U_1$. Dessa forma, $C \cap \overline{\tau_\alpha(B')} = \emptyset$.

De acordo com a Proposição 4.8, temos que $\psi : K_\alpha \to K^\alpha$, definida como $\psi(E) = \overline{\tau_\alpha(E)}$ é isomorfismo booleano. Como $C \in K^\alpha$, existe $E \in K_\alpha$ tal que $\psi(E) = C$. Assim, $C = \overline{\tau_\alpha(E)}$.

Mostremos que $A' \subset E$ e que $B' \subset E^C$.

(1) $A' \subset E$. Suponhamos, por absurdo, que exista $s \in A' - E$. Então $\tau_\alpha(s) \in \overline{\tau_\alpha(A')}$. Como $\overline{\tau_\alpha(A')} \subset \overline{\tau_\alpha(E)}$, temos que $\tau_\alpha(s) \in \overline{\tau_\alpha(E)}$. Assim, existe rede $(\varphi_{t_\lambda})_\lambda$ convergindo para φ_s em Ω_α, com cada $t_\lambda \in E$. Dessa forma, temos que $\varphi_{t_\lambda}(f) \xrightarrow{\lambda} \varphi_s(f), \forall f \in B_\alpha(I)$. Em particular, tomando-se $f = C_E$, ficamos com $\varphi_{t_\lambda}(C_E) \xrightarrow{\lambda} 0$. Portanto, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que:

$$\lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow t_\lambda \notin E.$$

Mas, isso contradiz a definição da rede $(\varphi_{t_\lambda})_\lambda$. A contradição surgiu pois supusemos que $A' - E \neq \emptyset$. Assim, concluímos que $A' \subset E$.

(2) $B' \subset E^C$. Sabemos que $\overline{\tau_\alpha(B')} \subset C^C$. Além disso, $\psi(E^C) = C^C$. Então, $\overline{\tau_\alpha(B')} \subset \overline{\tau_\alpha(E^C)}$. Analogamente ao feito no item (1), mostra-se que $B' \subset E^C$.

Dessa forma, E e E^C são dois conjuntos disjuntos pertencentes à classe ambígua α contendo A' e B', respectivamente. Mas, isso contradiz as propriedades de A' e B'. A contradição surgiu, pois supusemos que $\overline{\tau_\alpha(A')} \cap \overline{\tau_\alpha(B')} = \emptyset$. Portanto, $\overline{\tau_\alpha(A')} \cap \overline{\tau_\alpha(B')} \neq \emptyset$.

Note que $\overline{\tau_\alpha(A')} \cap \overline{\tau_\alpha(B')} \subset \bigcap_{i=1}^{p} \overline{\tau_\alpha(M_i)}$. Logo, temos que $\bigcap_{i=1}^{p} \overline{\tau_\alpha(M_i)} \neq \emptyset$. Então $\mathfrak{F}$ possui a propriedade da intersecção finita.

Como $\mathfrak{F}$ é família de fechados e Ω_α é compacto, a Proposição 5.4.15 nos garante que $\mathfrak{F}$ possui intersecção não vazia.

Seja $x \in \cap\{C : C \in \mathfrak{F}\}$. Mostremos que $x \in \overline{\tau_\alpha(K)} \cap Q$.

(1) $x \in \overline{\tau_\alpha(K)}$. Se $C \in \mathfrak{F}$, então $C \subset \overline{\tau_\alpha(K)}$. Logo, $x \in \overline{\tau_\alpha(K)}$.

(2) $x \in Q$. Como A e B pertencem à classe aditiva α existem sequências $(A_n)_n, (B_n)_n$ pertencentes à classe ambígua α tais que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ e $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. (Veja Apêndice A, Lema A.19)

Definamos $G_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{\tau_\alpha(A_n)}$ e $G_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{\tau_\alpha(B_n)}$.

Notemos que G_1 e G_2 são F_σ abertos. De fato, eles são claramente F_σ e como cada A_n, B_n pertencem à classe ambígua α, temos que $\overline{\tau_\alpha(A_n)}$ e $\overline{\tau_\alpha(B_n)}$ são aberto-fechados, portanto abertos.

Mostremos que $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Uma simples verificação nos mostra que:

$$G_1 \cap G_2 = \bigcup_m \bigcup_n (\overline{\tau_\alpha(A_n)} \cap \overline{\tau_\alpha(B_m)}).$$

Como $A_n \subset A$ e $B_m \subset B$ e A,B são disjuntos, temos que $A_n \cap B_m = \emptyset$. Como ψ é isomorfismo booleano, resulta que $\overline{\tau_\alpha(A_n)} \cap \overline{\tau_\alpha(B_m)} = \emptyset, \forall n, m \in \mathbb{N}$. Portanto, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

Dessa forma, G_1, G_2 são dois F_σ abertos e disjuntos de Ω_α. Seja W vizinhança de x.

Seja $E_1 = \tau_\alpha^{-1}(G_1 \cap W)$. Vamos mostrar que E_1 é não enumerável. Se E_1 fosse enumerável, então $\overline{\tau_\alpha(A - E_1)}$ pertenceria a $\mathfrak{F}$. Nesse caso, temos que $x \in \overline{\tau_\alpha(A - E_1)}$. Logo, existe rede $(\tau_\alpha(t_\lambda))_\lambda$ convergindo para x com cada $t_\lambda \in A - E_1$. Como W é vizinhança de x, existe $\tau_\alpha(t) \in W$ com $t \in A - E_1$. Portanto, $t \in \tau_\alpha^{-1}(W) \cap (A - E_1)$. Assim, $t \in A_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. O que implica que $\tau_\alpha(t) \in G_1$. Além disso, temos que $t \notin E_1$. Logo, $\tau_\alpha(t) \notin G_1 \cap W$. Mas, como visto acima, $\tau_\alpha(t) \in G_1$. Dessa forma, $\tau_\alpha(t) \notin W$.

Chegamos a uma contradição. A contradição surgiu pois supusemos que E_1 era enumerável.

Logo, E_1 é não enumerável. De forma análoga, mostra-se que $E_2 = \tau_\alpha^{-1}(G_2 \cap W)$ é não enumerável.

Como feito acima, concluímos que $x \in Q$.

Dessa forma, mostramos, que se $K \subset I$ é homeomorfo ao conjunto de Cantor C, então $\overline{\tau_\alpha(K)} \cap Q \neq \emptyset$.

Agora, vamos mostrar que o nosso Q satisfaz a propriedade descrita an Definição 5.4.5.

Seja $x \in Q$. Da definição de Q, segue que existem G_1, G_2, dois F_σ abertos disjuntos de Ω_α tais que se W é vizinhamça de x, então $\tau_\alpha^{-1}(G_j \cap W)$ é não enumerável, para $j = 1, 2$. Como argumentado anteriormente, por G_1 ser F_σ aberto e Ω_α compacto zero dimensional, podemos escrever que $G_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, onde cada F_n é aberto-fechado de Ω_α.

Seja W aberto-fechado contendo x. Temos que:

$$\tau_\alpha^{-1}(G_1 \cap W) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tau_\alpha^{-1}(F_n \cap W).$$

Por construção, $\tau_\alpha^{-1}(G_1 \cap W)$ é não enumerável, o que implica que existe $N \in \mathbb{N}$ com $\tau_\alpha^{-1}(F_N \cap W)$ não enumerável. Mas, $F_N \cap W$ é aberto-fechado de Ω_α, então existe $E \in K_\alpha$ tal que $F_N \cap W = \overline{\tau_\alpha(E)}$. Logo, temos que E é um boreliano não enumerável de I. Do Lema 4.27 segue que E possui um subconjunto K homeomorfo ao conjunto de Cantor C. Como $K \subset E$, temos que $\overline{\tau_\alpha(K)} \subset \overline{\tau_\alpha(E)} = F_N \cap W$.

Segue do feito anteriormente, que $F_N \cap W$ possui um ponto de Q. Portanto, $G_1 \cap W$ possui um ponto de Q. Então:

$$(G_1 \cap Q) \cap W \neq \emptyset,$$

para toda vizinhança aberto-fechada de x. Como Ω_α é zero dimensional, isso implica que $x \in \overline{G_1 \cap Q}$. Analogamente, mostra-se que $x \in \overline{G_2 \cap Q}$. Portanto, temos que Q satisfaz as propriedades descritas na Definição 5.4.5.

Assim, concluímos que Ω_α é fortemente não F. $\square$

Corolário 5.4.17. *Seja α um ordinal com $1 \leq \alpha < \omega_1$. Então, Ω_α não é um espaço F.*

Demonstração. De acordo com o Teorema 5.4.16, temos que Ω_α é fortemente não F. Portanto, a Proposição 5.4.6 garante que Ω_α não é um espaço F. $\square$

Corolário 5.4.18. *Para $\alpha \geq 1$ um ordinal enumerável, temos que $B_\alpha(I)$ não é Baire-complementado.*

Demonstração. Seja $\alpha \geq 1$ um ordinal enumerável. De acordo com o Teorema 5.4.16, temos que Ω_α é fortemente não F.

Portanto, a Proposição 5.4.7 nos garante que $C(\Omega_\alpha)$ não é Baire-complementado. No Capítulo 1, vimos que $B_\alpha(I)$ é linearmente isomorfo a $C(\Omega_\alpha)$. Logo, a Proposição 5.2.2 garante que $B_\alpha(I)$ não é Baire-complementado. $\square$

Agora, vamos concluir a não existência de isomorfismo entre $B_\alpha(I)$ e $B_{\omega_1}(I)$ para $1 \leq \alpha < \omega_1$.

Teorema 5.4.19. *Seja $\alpha \geq 1$ um ordinal enumerável. Então $B_\alpha(I)$ não é linearmente isomorfo a $B_{\omega_1}(I)$.*

Demonstração. Seja $\alpha \geq 1$ um ordinal enumerável. Suponhamos, por absurdo, que $B_\alpha(I)$ seja linearmente isomorfo a $B_{\omega_1}(I)$. De acordo com o Corolário 5.3.25, $B_{\omega_1}(I)$ é Baire-complementado. Segue da Proposição 5.2.2 que $B_\alpha(I)$ é Baire-complementado. Mas, isso contradiz o Corolário 5.4.18.

Portanto, temos que $B_\alpha(I)$ não é linearmente isomorfo a $B_{\omega_1}(I)$. $\square$

Finalmente, vamos mostrar nosso resultado geral de não complementação para as classes de Baire.

Teorema 5.4.20. *Sejam α, β ordinais com $1 \leq \alpha < \beta$ e α um ordinal enumerável, então $B_\alpha(I)$ não é subespaço complementado de $B_\beta(I)$.*

Demonstração. Fixemos α como no enunciado. Consideremos Ω_α, de acordo com a Definição 1.2.8, a função $\tau_\alpha : I \to \Omega_\alpha$, de acordo com a Definição 1.5.1 e a função $\chi : B_\alpha(I) \to C(\Omega_\alpha)$, de acordo com a Definição 1.3.1.

Consideremos a função $T : B_1(\Omega_\alpha) \to B_{\alpha+1}(I)$, definida como $T(h) = h \circ \tau_\alpha, \forall h \in B_1(\Omega_\alpha)$. Mostremos que T está bem definida, ou seja, que $h \circ \tau_\alpha \in B_{\alpha+1}(I), \forall h \in B_1(\Omega_\alpha)$.

Seja $h \in B_1(\Omega_\alpha)$, existe sequência $(h_n)_n \subset C(\Omega_\alpha)$ uniformemente limitada e pontualmente convergente para h em Ω_α. Como cada $h_n \in C(\Omega_\alpha)$ e χ é sobrejetora, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $f_n \in B_\alpha(I)$ tal que $h_n = \chi(f_n)$. No Capítulo 1, vimos que χ é isometria, portanto a sequência $(f_n)_n \subset B_\alpha(I)$ é uniformemente limitada. Notemos que:

$$h_n(\tau_\alpha(t)) = \chi(f_n)(\tau_\alpha(t)) = f_n(t),$$

para todo $t \in I$. Logo, $h_n \circ \tau_\alpha = f_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Vejamos que a sequência $(f_n)_n$ converge pontualmente em I para $T(h)$, o que vai implicar que $T(h) \in B_{\alpha+1}(I)$. Seja $t \in I$, temos que:

$$T(h)(t) = h(\tau_\alpha(t)) = \lim_{n\to\infty} h_n(\tau_\alpha(t)) = \lim_{n\to\infty} f_n(t).$$

Dessa forma, T está bem definida.

Vamos usar a T acima definida, para mostrar que não existe projeção linear e contínua de $B_{\alpha+1}(I)$ em $B_\alpha(I)$.

Suponhamos, por absurdo, que exista $P : B_{\alpha+1}(I) \to B_\alpha(I)$ projeção linear e contínua. Consideremos a função $R : B_1(\Omega_\alpha) \to C(\Omega_\alpha)$, definida como $R(h) = \chi(P(T(h))), \forall h \in B_1(\Omega_\alpha)$. Note que R está bem definida. Mostremos que R é projeção linear contínua.

(i) R é linear. Sejam $h_1, h_2 \in B_1(\Omega_\alpha)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculemos:

$$R(h_1 + \lambda.h_2) = \chi(P(T(h_1 + \lambda.h_2))) = \chi(P((h_1 + \lambda.h_2) \circ \tau_\alpha)$$

$$= \chi(P(h_1 \circ \tau_\alpha + \lambda.h_2 \circ \tau_\alpha)) = \chi(P(h_1 \circ \tau_\alpha)) + \lambda.\chi(P(h_2 \circ \tau_\alpha)),$$

na última igualdade, usamos a linearidade de P e χ. Usando a definição de T na equação acima, ficamos com:

$$R(h_1 + \lambda.h_2) = \chi(P(T(h_1))) + \lambda.\chi(P(T(h_2))) = R(h_1) + \lambda.R(h_2).$$

Isso mostra a linearidade de R.

(ii) R é contínua. Seja $h \in B_1(\Omega_\alpha)$ com $||h||_\infty \leq 1$. Calculemos:

$$||R(h)||_\infty = ||\chi(P(T(h)))||_\infty = ||P(T(h))||_\infty \leq ||P||.||T(h)||_\infty. \tag{5.12}$$

Notemos que:

$$||T(h)||_\infty = ||h \circ \tau_\alpha||_\infty = \sup_{t \in I} |h(\tau_\alpha(t))| \leq \sup_{\omega \in \Omega_\alpha} |h(\omega)| = ||h||_\infty.$$

Assim, usando a equação acima em (5.12), ficamos com:

$$||R(h)||_\infty \leq ||P||.||h||_\infty \leq ||P||.$$

Portanto, temos que R é contínua e $||R|| \leq ||P||$.

(iii) R é projeção sobre $C(\Omega_\alpha)$, ou seja, $R(h) = h, \forall h \in C(\Omega_\alpha)$. Vejamos que se $h \in C(\Omega_\alpha)$, então $T(h) \in B_\alpha(I)$. Como $h \in C(\Omega_\alpha)$ e χ é sobrejetora, existe $f \in B_\alpha(I)$ tal que $h = \chi(f)$, logo $f = \chi^{-1}(h)$. Mostremos que $T(h) = f$, o que implica que $T(h) \in B_\alpha(I)$.

$$T(h)(t) = h \circ \tau_\alpha(t) = \chi(f)(\tau_\alpha(t)) = f(t),$$

para todo $t \in I$. Logo, vale $T(h) = f$.

Seja $h \in C(\Omega_\alpha)$, calculemos $R(h)$:

$$R(h) = \chi(P(T(h))) = \chi(T(h)) = \chi(\chi^{-1}(h)) = h.$$

De (i), (ii) e (iii) segue que $C(\Omega_\alpha)$ é subespaço complementado de $B_1(\Omega_\alpha)$. De acordo com a Proposição 5.2.4, temos que $C(\Omega_\alpha)$ é Baire-complementado. No Capítulo 1, vimos que $B_\alpha(I)$ e $C(\Omega_\alpha)$ eram linearmente isomorfos. Portanto, a Proposição 5.2.2 implica que $B_\alpha(I)$ é Baire-complementado. Mas, isso contraria o Corolário 5.4.18.

A contradição surgiu de supormos que $B_\alpha(I)$ era subespaço complementado de $B_{\alpha+1}(I)$. Portanto, temos que $B_\alpha(I)$ não é subespaço complementado de $B_{\alpha+1}(I)$.

Seja $\beta > \alpha$, mostremos que $B_\alpha(I)$ não é subespaço complementado de $B_\beta(I)$. Se $B_\alpha(I)$ fosse subespaço complementado de $B_\beta(I)$, como $B_{\alpha+1}(I)$ é subespaço de $B_\beta(I)$, teríamos que

$B_\alpha(I)$ também seria subespaço complementado de $B_{\alpha+1}(I)$. Mas, isso contraria nossas conclusões anteriores.

Portanto, $B_\alpha(I)$ não é subespaço complementado de $B_\beta(I)$. □

Observação 5.4.21. *Em [2], W. Bade estabeleceu o resultado geral de não complementação das classes de Baire sobre* $[0,1]$*, ou seja, nosso Teorema 5.4.20. No entanto, aqui apresentamos a demonstração desse resultado contida em [5]. Já que em [5], esse fato segue facilmente dos resultados desenvolvidos para a demonstração da inexistência de isomorfismos lineares entre* $B_{\omega_1}(I)$ *e* $B_\alpha(I)$*, para* α *enumerável.*

Capítulo 6

Não existência de isomorfismo entre $B_1(I)$ e $B_\alpha(I)$, $\alpha > 1$

Neste capítulo, vamos mostrar que para $\alpha > 1$, $B_\alpha(I)$ e $B_1(I)$ não são isomorfos.

Faremos isso mostrando que não existe operador linear contínuo e injetor de $l_c^\infty(\Gamma)$ em $B_1(I)$ (Teorema 6.9) e que $l_c^\infty(I)$ é subespaço vetorial de $B_2(I)$ (Proposição 6.10). Portanto $B_2(I)$ não pode ser isomorfo a $B_1(I)$, o que implica que $B_\alpha(I)$ e $B_1(I)$ não são isomorfos para $\alpha > 1$ (Teorema 6.13).

Na demonstração do Teorema 6.9, usaremos um resultado fundamental sobre funções convexas em espaços vetoriais. Nosso primeiro objetivo é esse resultado (Lema 6.2). Para isso, vamos introduzir alguns conceitos.

Definição 6.1. *Sejam X um espaço vetorial e $F \subset X$ um subconjunto convexo.*

(1) Fixado $x \in F$, dizemos que F é simétrico com respeito a x se, e somente se, dado $y \in F$, temos que $y' = 2x - y \in F$;

(2) Uma função $\rho : F \to \mathbb{R}$ é dita convexa se, e somente se, dados $x, y \in F$ e $t \in [0, 1]$, temos que:

$$\rho(tx + (1-t)y) \leq t\rho(x) + (1-t)\rho(y).$$

Lema 6.2. *Seja X um espaço vetorial. Suponha que $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots$ seja sequência decrescente de subconjuntos convexos de X.*

Para cada $n \geq 1$, seja $x_n \in F_n$ tal que F_n é simétrico com respeito a x_n. Seja $\rho : F_1 \to \mathbb{R}$ função convexa e limitada.

Para cada $n \geq 1$, definamos:

$$M_n = \sup\{\rho(z) : z \in F_n\}$$

e

$$m_n = \inf\{\rho(z) : z \in F_n\}.$$

Se $\rho(x_n) \geq \frac{3}{4}M_{n-1} + \frac{1}{4}m_{n-1}, n = 2, 3, \ldots,$ então ρ é constante em $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

Demonstração. Sejam $n \geq 1$ e $\epsilon > 0$. Segue da definição de m_n que existe $y \in F_n$ tal que

$$\rho(y) < m_n + 2\epsilon. \tag{6.1}$$

Como F_n é simétrico com respeito a x_n, temos que $2x_n - y \in F_n$. Então:

$$x_n = \frac{1}{2}(2x_n - y) + \frac{1}{2}y \Rightarrow \rho(x_n) \leq \frac{1}{2}\rho(2x_n - y) + \frac{1}{2}\rho(y),$$

pois ρ é convexa. Usando a equação (6.1) e a definição de M_n na desigualdade acima, ficamos com:

$$\rho(x_n) < \frac{1}{2}M_n + \frac{1}{2}m_n + \epsilon.$$

Note que isso vale para todo $\epsilon > 0$, portanto $\rho(x_n) \leq \frac{1}{2}M_n + \frac{1}{2}m_n$. O que implica que $m_n \geq 2\rho(x_n) - M_n$, para todo $n \geq 1$. Logo, para $n > 1$, temos:

$$M_n - m_n \leq M_n - 2\rho(x_n) + M_n \leq \frac{-3}{2}M_{n-1} - \frac{1}{2}m_{n-1} + 2M_n.$$

Como $F_n \subset F_{n-1}$, vale que $M_n \leq M_{n-1}$. Assim:

$$M_n - m_n \leq \frac{-3}{2}M_{n-1} - \frac{1}{2}m_{n-1} + 2M_{n-1} = \frac{1}{2}(M_{n-1} - m_{n-1}).$$

Continuando com esse processo, concluímos que para $n > 1$, vale:

$$0 \leq M_n - m_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}(M_1 - m_1).$$

Portanto:

$$\lim_{n\to\infty} M_n - m_n = 0.$$

O que implica que ρ é constante em $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. $\square$

Agora, vamos aplicar o Lema 6.2 para $l_c^\infty(\Gamma)$.

Definição 6.3. *Seja Γ um conjunto não enumerável, definimos:*

(1) $l_c^\infty(\Gamma) = \{x \in l_\infty(\Gamma) : x$ tem suporte enumerável$\} \subset l_\infty(\Gamma)$.

É fácil ver que $l_c^\infty(\Gamma)$ é espaço vetorial. Consideraremos a restrição da norma de $l_\infty(\Gamma)$ para $l_c^\infty(\Gamma)$. Ou seja, $(l_c^\infty(\Gamma), ||.||_\infty)$ é espaço normado, onde $||x||_\infty = \sup_{\gamma\in\Gamma}|x(\gamma)|, \forall x \in l_c^\infty(\Gamma)$.

(2) Fixado $x \in l_c^\infty(\Gamma)$ com $||x||_\infty = 1$, $F_x = \{y \in l_c^\infty(\Gamma) : ||y||_\infty = 1, y(\gamma) = x(\gamma)$ se $x(\gamma) \neq 0\}$.

Observação 6.4. *É fácil ver que dado $x \in l_c^\infty(\Gamma)$ com $||x||_\infty = 1$, o conjunto F_x é convexo e simétrico com respeito a x.*

Nesse capítulo vamos usar o fato de que $l_c^\infty(\Gamma)$ é subespaço fechado de $l_\infty(\Gamma)$. Na verdade, $l_c^\infty(\Gamma)$ possui uma propriedade mais forte que ser fechado na $||.||_\infty$, ele é fechado para a convergência pontual de sequências, cujo limite pontual esteja em $l_\infty(\Gamma)$. Veremos isso no próximo lema.

Lema 6.5. *Sejam $(f_n)_n \subset l_c^\infty(I)$ sequência pontualmente convergente e $f : I \to \mathbb{R}$ seu limite pontual.*

Se f é limitada, então $f \in l_c^\infty(I)$.

Demonstração. Para concluirmos que $f \in l_c^\infty(I)$, basta mostrarmos que o suporte de f é enumerável.

Denotemos por $\sigma(f)$ e $\sigma(f_n)$ os suportes de f e f_n, respectivamente. Mostremos que $\sigma(f) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \sigma(f_n)$. O que vai estabelecer nosso resultado.

Seja $t \in \sigma(f)$, então $f(t) \neq 0$. Como $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq N \Rightarrow f_n(t) \neq 0.$$

Em particular, $t \in \sigma(f_N)$. Assim, temos que $t \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \sigma(f_n)$. Como isso vale para todo $t \in \sigma(f)$, mostramos que $\sigma(f) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \sigma(f_n)$. □

Corolário 6.6. *Sejam Γ um conjunto não enumerável, $x \in l_c^\infty(\Gamma)$ com $||x||_\infty = 1$ e $(\rho_n)_{n\geq 1}$ sequência de funções convexas e limitadas definidas em F_x.*

Então, existe $y \in F_x$ tal que ρ_n é constante em F_y, para todo $n \geq 1$.

Demonstração. Primeiro, vamos mostrar a conclusão do corolário para uma única ρ.

Mostremos por indução que existe uma sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ com as seguintes propriedades:

(i) $x_n \in F_x$, para todo $n \geq 1$;

(ii) $F_{x_n} \subset F_{x_{n-1}}, \forall n > 1$;

(iii) $\rho(x_n) \geq \frac{3}{4}\sup\{\rho(z) : z \in F_{x_{n-1}}\} + \frac{1}{4}\inf\{\rho(z) : z \in F_{x_{n-1}}\}, \forall n > 1$.

Definamos $x_1 = x$. Fixemos $n > 1$ e suponhamos já definidos $x_1, \dots, x_n$, satisfazendo as propriedades acima. Temos que definir x_{n+1}, também satisfazemos essas condições. Note que se $y, z \in l_c^\infty$ e $y \in F_z$, então $F_y \subset F_z$.

Logo, para todo $y \in F_{x_n}$, temos que $F_y \subset F_{x_n}$. Definamos:

$$M_n = \sup\{\rho(z) : z \in F_{x_n}\}$$

e

$$m_n = \inf\{\rho(z) : z \in F_{x_n}\}.$$

Note que se $M_n = m_n$, então ρ é constante em F_{x_n}. Portanto, a conclusão do corolário já está verificada. Caso contrário, temos que $m_n < M_n$, o que implica que $m_n < \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m_n < M_n$. Da definição de M_n segue que existe $z_0 \in F_{x_n}$ tal que $\rho(z_0) > \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m_n$. Definamos $x_{n+1} = z_0$. Logo, x_{n+1} satisfaz as condições exigidas.

Vejamos que a sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ é pontualmente convergente em Γ.

Seja $\gamma \in \Gamma$. Se existir algum N tal que $x_N(\gamma) \neq 0$, então $x_n(\gamma) = x_N(\gamma), n \geq N$. Pois $x_n \in F_{x_{n-1}}, n > 1$, por construção. Caso contrário, temos que $x_n(\gamma) = 0, n \geq 1$. Logo $(x_n(\gamma))_n$ é convergente.

Seja $y : \Gamma \to \mathbb{R}$ definida como $y(\gamma) = \lim_{n\to\infty} x_n(\gamma)$.

Mostremos que $||y||_\infty = 1$. Como $||x_n||_\infty = 1$, fixado $\gamma \in \Gamma$, temos que $|x_n(\gamma)| \leq 1, \forall n > 0$. Portanto, $|y(\gamma)| \leq 1, \forall \gamma \in \Gamma$. Dessa forma, $||y||_\infty \leq 1$. Vejamos que dado $\epsilon > 0$, existe $\gamma_\epsilon \in \Gamma$ tal que $|y(\gamma_\epsilon)| > 1 - \epsilon$, o que vai implicar que $||y||_\infty = 1$. Como $||x_1||_\infty = 1$, existe $\gamma_\epsilon \in \Gamma$ tal que $|x_1(\gamma_\epsilon)| > 1 - \epsilon$, logo $|x_n(\gamma_\epsilon)| > 1 - \epsilon, \forall n \geq 1$. Portanto, $|y(\gamma_\epsilon)| > 1 - \epsilon$.

De acordo com o Lema 6.5, temos que $y \in l_c^\infty(\Gamma)$.

Consideremos F_y. Vamos mostrar que $F_y = \bigcap_{n=1}^\infty F_{x_n}$.

(i) $F_y \subset \bigcap_{n=1}^\infty F_{x_n}$. Seja $z \in F_y$, mostremos que $z \in F_{x_n}, \forall n \geq 1$. Para isso, basta mostrarmos que fixado n, $z(\gamma) = x_n(\gamma)$ para todo $\gamma \in \Gamma$ tal que $x_n(\gamma) \neq 0$. Mas, isso é evidente, pela definição de y;

(ii) $\bigcap_{n=1}^\infty F_{x_n} \subset F_y$. Seja $z \in \bigcap_{n=1}^\infty F_{x_n}$. Seja $\gamma \in \Gamma$ tal que $y(\gamma) \neq 0$, da definição de y segue que existe N tal que $n \geq N$ implica que $x_n(\gamma) = y(\gamma)$. Como $z \in F_{x_N}$ e $x_N(\gamma) \neq 0$, temos que $z(\gamma) = x_N(\gamma) = y(\gamma)$. Portanto, $z \in F_y$.

De (i) e (ii) segue a igualdade.

Assim, o Lema 6.2 nos diz que ρ é constante em F_y.

Agora, consideremos a sequência $(\rho_n)_{n\geq 1}$. Definamos $y_0 = x$ e $y_m \in F_{y_{m-1}}$ tal que ρ_m é constante em F_{y_m}, para $m > 0$. A existência de cada y_m é garantida pelo feito acima.

Dessa forma, temos que:

$$F_{y_0} \supset F_{y_1} \supset \ldots \supset F_{y_m} \supset \ldots$$

Analogamente ao discutido no caso de $(x_n)_n$, mostra-se que $(y_n)_n$ é pontualmente convergente em Γ para uma função $y \in l_c^\infty$ com $||y||_\infty = 1$ e tal que $F_y = \bigcap_{n=1}^\infty F_{y_n}$.

Note que cada ρ_n é constante em F_y. Isso estabelece nosso resultado. $\square$

Agora, vamos demonstrar o Teorema 6.9, do qual o resultado principal desse capítulo será uma consequência.

Observação 6.7. *Na demonstração do Teorema 6.9, faremos uso do Teorema de Baire. Esse Teorema descreve a propriedade de $B_1(I)$, que nos permite diferenciá-la isomorficamente das demais classes de Baire. É interessante ressaltar que até hoje, não se conhece análogos do Teorema de Baire para classes de Baire com índices superiores a 1. Talvez o conhecimento de caracterizações das classes de Baire nos permitam obter mais respostas sobre a questão de existência de isomorfismos, com a utilização de técnicas semelhantes às apresentadas nesse capítulo.*

Teorema 6.8. ***(Teorema de Baire)*** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função limitada. $f \in B_1(I)$ se, e somente se, dado F fechado não vazio de I, a restrição de f a F possui pelo menos um ponto de continuidade.*

Demonstração. Sugerimos [16], página 167. □

Teorema 6.9. *Sejam Γ um conjunto não enumerável e $T : l_c^\infty(\Gamma) \to B_1(I)$ um operador linear contínuo.*

Então, existe $x \in l_c^\infty(\Gamma)$ com $||x||_\infty = 1$ tal que $Ty = Tx, \forall y \in F_x$.

Demonstração. Para $n \geq 1$ e $y \in l_c^\infty(\Gamma)$ com $||y||_\infty = 1$, definamos:

$$S_{n,y} = \{t \in I : \sup_{z \in F_y} Tz(t) - \inf_{z \in F_y} Tz(t) < \frac{1}{n}\}.$$

Vamos mostrar dois resultados, dos quais o teorema vai seguir facilmente.

(i) Para todo $K \subset I$ fechado e não vazio, todo $n \geq 1$ e todo $x \in l_c^\infty(\Gamma)$ com $||x||_\infty = 1$, existe um $y \in F_x$ tal que $S_{n,y}$ contém um conjunto não vazio e aberto com respeito a K.

Fixemos K, n e x. Consideremos $\{G_1, G_2, \ldots, G_k, \ldots\}$ base de abertos da topologia de I. Definamos as seguintes funções:

$\overline{\varphi}_m : F_x \to \mathbb{R}$ e $\underline{\varphi}_m : F_x \to \mathbb{R}$ tais que:

$$\overline{\varphi}_m(z) = \sup_{t \in K \cap G_m} Tz(t)$$

e

$$\underline{\varphi}_m(z) = \inf_{t \in K \cap G_m} Tz(t),$$

para todo $m \geq 1$ tal que $K \cap G_m \neq \emptyset$.

Verifiquemos que $\overline{\varphi}_m$ e $-\underline{\varphi}_m$ são funções convexas e limitadas em F_x.

Mostremos que $\overline{\varphi}_m$ é limitada. Seja $z \in F_x$, então $||Tz||_\infty \leq ||T||.||z||_\infty$, o que implica que $|Tz(t)| \leq ||T||, \forall t \in I$, pois $||z||_\infty = 1$. Logo, $-||T|| \leq Tz(t) \leq ||T||, \forall t \in I$. Como $z \in F_x$ foi arbitrário, temos que:

$$-||T|| \leq \overline{\varphi}_m(z) = \sup_{t \in K \cap G_m} Tz(t) \leq ||T||,$$

para todo $z \in F_x$. Isso mostra que $\overline{\varphi}_m$ é limitada. Analogamente, mostra-se que $-\underline{\varphi}_m$ é limitada.

É fácil ver que $\overline{\varphi}_m$ e $-\underline{\varphi}_m$ são convexas. Note que $\underline{\varphi}_m$ não é convexa!

Consideremos o conjunto de funções convexas e limitadas $\mathfrak{C} = \{\overline{\varphi}_m, -\underline{\varphi}_m : m > 0$ e $K \cap G_m \neq \emptyset\}$.

De acordo com o Corolário 6.6, existe $y \in F_x$ tal que cada elemento de $\mathfrak{C}$ é constante em F_y. Isso implica que cada elemento do conjunto $\{\overline{\varphi}_m, \underline{\varphi}_m : m > 0$ e $K \cap G_m \neq \emptyset\}$ é constante em F_y.

Como $Ty \in B_1(I)$ e K é fechado de I, o Teorema de Baire (Teorema 6.8) nos diz que existe $t_0 \in K$ tal que $Ty|_K$ é contínua em t_0. Definamos $\epsilon_0 = \frac{1}{4n}$. Logo, existe U_0 aberto de K tal que $t_0 \in U_0$ e $|Ty(t) - Ty(t_0)| < \epsilon_0, \forall t \in U_0$. Logo, existe um aberto básico G_{m_0} com $t_0 \in G_{m_0}$ tal que:

$$|Ty(t) - Ty(t_0)| < \epsilon_0, \forall t \in K \cap G_{m_0}. \tag{6.2}$$

Como $K \cap G_{m_0} \neq \emptyset$, existem $\overline{\varphi}_{m_0}$ e $\underline{\varphi}_{m_0}$. Por definição:

$$\overline{\varphi}_{m_0}(y) = \sup_{t \in K \cap G_{m_0}} Ty(t)$$

e

$$\underline{\varphi}_{m_0}(y) = \inf_{t \in K \cap G_{m_0}} Ty(t).$$

Portanto, existem $t_1, t_2 \in K \cap G_{m_0}$ tais que:

$$\overline{\varphi}_{m_0}(y) - \epsilon_0 < Ty(t_1)$$

e

$$\underline{\varphi}_{m_0}(y) + \epsilon_0 > Ty(t_2).$$

Assim, ficamos com:

$$\overline{\varphi}_{m_0}(y) - \underline{\varphi}_{m_0}(y) < 2.\epsilon_0 + Ty(t_1) - Ty(t_2) = 2.\epsilon_0 + (Ty(t_1) - Ty(t_0)) + (Ty(t_0) - Ty(t_2)).$$

Como $t_1, t_2 \in K \cap G_{m_0}$, a equação (6.2) implica que:

$$\overline{\varphi}_{m_0}(y) - \underline{\varphi}_{m_0}(y) < 4.\epsilon_0 = \frac{1}{n}. \tag{6.3}$$

Mostremos que $K \cap G_{m_0} \subset S_{n,y}$. Seja $t \in K \cap G_{m_0}$, então:

$$\sup_{z \in F_y} Tz(t) - \inf_{z \in F_y} Tz(t) \leq \sup_{z \in F_y} \overline{\varphi}_{m_0}(z) - \inf_{z \in F_y} \underline{\varphi}_{m_0}(z).$$

Como $\overline{\varphi}_{m_0}$ e $\underline{\varphi}_{m_0}$ são constantes em F_y, ficamos com:

$$\sup_{z \in F_y} Tz(t) - \inf_{z \in F_y} Tz(t) \leq \overline{\varphi}_{m_0}(y) - \underline{\varphi}_{m_0}(y) < \frac{1}{n},$$

onde a última desigualdade segue da equação (6.3). Isso mostra que $t \in S_{n,y}$.

Dessa forma, estabelecemos (i).

(ii) Para cada $n \geq 1$ e $x \in l_c^\infty(\Gamma)$ com $||x||_\infty = 1$, existe um $y \in F_x$ tal que $S_{n,y} = I$.

Fixemos n e x como no enunciado.

Tomando $K = I$ em (i), existem $y \in F_x$ e U aberto não vazio de I tal que $U \subset S_{n,y}$. Portanto o conjunto $\{m \geq 1 : G_m \subset S_{n,z}$ para algum $z \in F_x\}$ é não vazio, seja $m_1 = min\{m \geq 1 : G_m \subset S_{n,z}$ para algum $z \in F_x\}$. Definamos y_1 como algum elemento de F_x tal que $G_{m_1} \subset S_{n,y_1}$. Se $\{m \geq 1 : G_m \subset S_{n,z}$ para algum $z \in F_{y_1}\} = \{m_1\}$, definimos $G = G_{m_1}$.

Caso contrário, seja $m_2 = min\{m \geq 1, m \neq m_1 : G_m \subset S_{n,z}$ para algum $z \in F_{y_1}\}$. Definamos y_2 como algum elemento em F_{y_1} tal que $G_{m_2} \subset S_{n,y_2}$. Se $\{m \geq 1, m \neq m_1 : G_m \subset S_{n,z}$ para algum $z \in F_{y_2}\} = \{m_2\}$, definimos $G = G_{m_1} \cup G_{m_2}$. Caso contrário, continuamos esse processo.

Existem duas possibilidades: Esse processo é finito ou infinito.

(i) Esse processo é finito, isso significa que existe N tal que $G_{m_N} \subset S_{n,z}, \forall z \in F_{y_N}$. Nesse caso, definimos $G = \bigcup_{j=1}^{N} G_{m_j}$ e $y = y_N$;

(ii) Esse processo é infinito. Então construímos sequência $(y_n)_{n>0}$ tal que $y_1 \in F_x$ e $y_{k+1} \in F_{y_k}$ para $k \geq 1$ e $(G_{m_j})_{j>0}$ sequência de abertos básicos tal que $G_{m_j} \subset S_{n,y_j}$, além disso m_{j+1} é o menor natural k maior que m_j tal que $G_k \subset S_{n,z}$ para algum $z \in F_{y_j}$. Nesse caso, definimos $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} G_{m_j}$.

 Note que $F_{y_1} \supset F_{y_2} \supset \ldots$. Como visto na demonstração do Corolário 6.6, a sequência $(y_n)_{n>0}$ é pontualmente convergente em Γ. Também vimos que se y é seu limite, então $y \in F_x$.

Mostremos que $S_{n,y} = I$. Inicialmente, vejamos que $G \subset S_{n,y}$. Para isso, basta mostrarmos que $G_{m_k} \subset S_{n,y}$, para todo k tal que G_{m_k} está definido, ou seja, no caso finito $0 < k \leq N$ e no caso infinito $k > 0$.

Por construção, temos que $G_{m_k} \subset S_{n,y_k}$. Então, basta mostrarmos que $S_{n,y_k} \subset S_{n,y}$. Note que $F_y \subset F_{y_k}, \forall k$. No caso finito, isso é evidente e no caso infinito, basta lembrarmos que na demonstração do Corolário 6.6, vimos que $F_y = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{y_k}$. Seja $t \in S_{n,y_k}$. Então:

$$\sup_{z \in F_y} Tz(t) - \inf_{z \in F_y} Tz(t) \leq \sup_{z \in F_{y_k}} Tz(t) - \inf_{z \in F_{y_k}} Tz(t) < \frac{1}{n}.$$

Portanto, temos que $t \in S_{n,y}$. O que implica que $S_{n,y_k} \subset S_{n,y}$. Como discutido anteriormente, concluímos que $G \subset S_{n,y}$.

Agora, vamos mostrar que $G = I$, o que vai implicar que $S_{n,y} = I$. Suponha, por absurdo, que $K = I - G \neq \emptyset$. Então K é fechado não vazio de I. Por (i), existem $z \in F_y$ e $m > 0$ tal que $G_m \cap K \subset S_{n,z}$, com $G_m \cap K \neq \emptyset$.

Vejamos que $G_m \subset S_{n,z}$. Seja $t \in G_m$. Se $t \in K$, então $t \in S_{n,z}$. Suponhamos que $t \notin K$, então $t \in G$.

Portanto, $G_m \subset S_{n,z} \cup G \subset S_{n,z} \cup S_{n,y}$. Como $z \in F_y$, temos que $S_{n,y} \subset S_{n,z}$. Logo $G_m \subset S_{n,z}$.

Note que $z \in F_{y_k}$ para todo k, já que $z \in F_y$. Portanto, valem:

(1) $z \in F_{y_k}$, para todo k;

(2) $G_m \subset S_{n,z}$.

Assim, tanto no caso finito quanto infinito, vai existir um k tal que m é o menor índice com a propriedade de estar contido em $S_{n,w}$, para algum $w \in F_{y_{k-1}}$. Logo $G_m = G_{m_k}$ para algum k. Dessa forma, $G_m \subset G$. Mas $G_m \cap K \neq \emptyset$. O que implica que $K \cap G \neq \emptyset$. Mas, isso contradiz a definição de K. A contradição surgiu de supormos que $I - G \neq \emptyset$. Portanto, temos que $G = I$. Isso mostra (ii).

Agora, vamos mostrar como o teorema segue de (ii).

Tomemos $y \in l_c^{\infty}(\Gamma)$ com $||y||_\infty = 1$. De (ii) segue que existe $y_1 \in F_y$ tal que $S_{1,y_1} = I$. Continuando com esse processo, construímos sequência $(y_n)_{n>0}$ tal que $y_{n+1} \in F_{y_n}$ e $S_{n,y_n} = I$. Como $y_{n+1} \in F_{y_n}$, temos que $F_{y_{n+1}} \subset F_{y_n}$.

Dessa forma, ficamos com:

$$F_{y_1} \supset F_{y_2} \supset \ldots$$

Como discutido na demonstração do Corolário 6.6, a sequência $(y_n)_{n>0}$ é pontualmente convergente em Γ e seu limite x pertence a $l_c^\infty(\Gamma)$ com $||x||_\infty = 1$, além disso $F_x = \bigcap_{n=1}^\infty F_{y_n}$.

Mostremos que se $y \in F_x$, então $Ty = Tx$. O que vai estabelecer nosso resultado.

Seja $y \in F_x$, então $y \in F_{y_n}, \forall n > 0$. Como $S_{n,y_n} = I$, temos que:

$$Tx(t) - Ty(t) \leq \sup_{z \in F_{y_n}} Tz(t) - \inf_{z \in F_{y_n}} Tz(t) < \frac{1}{n},$$

para todo $t \in I$ e $n > 0$. Portanto:

$$||Tx - Ty||_\infty \leq \frac{1}{n},$$

para todo $n > 0$. Logo $||Tx - Ty|| = 0$.

Isso estabelece o teorema. □

Agora, vamos trabalhar com $\Gamma = I$.

Proposição 6.10. *Vale que $l_c^\infty(I) \subset B_2(I)$. Portanto, $l_c^\infty(I)$ é subespaço vetorial de $B_2(I)$.*

Demonstração. Seja $f \in l_c^\infty(I)$, denotemos o suporte de f por $\sigma(f)$. Podemos enumerar o $\sigma(f)$.

Suponha que $\sigma(f) = \{t_n : n \in \mathbb{N}\}$. Fixado n, definamos $f_n : I \to \mathbb{R}$, como:

$$f_n = \sum_{j=0}^{n} f(t_j).C_{\{t_j\}}.$$

Como cada $\{t_j\}$ é fechado, temos que $\{t_j\} \in K_1$. Logo o Teorema de Lebesgue-Hausdorff (Teorema 1.4.9) implica que $C_{\{t_j\}} \in B_1(I)$. Do fato de $B_1(I)$ ser espaço vetorial, segue que cada $f_n \in B_1(I)$. Mostremos que $(f_n)_n$ converge pontualmente para f em I, o que vai implicar que $f \in B_2(I)$, já que f é é limitada.

Seja $t \in I$. Se $t \notin \sigma(f)$, então $f(t) = 0 = f_n(t), \forall n \in \mathbb{N}$. Portanto, $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$.

Se $t \in \sigma(f)$, então existe N tal que $t = t_N$. Portanto, $f_n(t) = f(t), \forall n \geq N$. Logo, $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$.

O feito acima, mostra a proposição. □

Observação 6.11. *Notemos que $l_c^\infty(I)$ não está contido em $B_1(I)$. Por exemplo, a função característica dos racionais de I pertence a $l_c^\infty(I)$, mas não pertence a $B_1(I)$. De fato, se a função característica dos racionais de I pertencesse a $B_1(I)$, o Teorema de Baire (Teorema 6.8) implicaria que ela possui pelo menos um ponto de continuidade, mas essa função não possui pontos de continuidade.*

Corolário 6.12. *Seja $T : B_2(I) \to B_1(I)$ operador linear contínuo. Então T não é injetor.*

Demonstração. Seja $T : B_2(I) \to B_1(I)$ operador linear e contínuo.

De acordo com a Proposição 6.10, temos que $l_c^\infty(I)$ é subespaço de $B_2(I)$. Seja $S : l_c^\infty(I) \to B_1(I)$ a restrição de T a $l_c^\infty(I)$. Note que S é um operador linear contínuo, portanto o Teorema 6.9 nos diz que existe $x \in l_c^\infty(I)$ com $||x||_\infty = 1$ tal que S é constante em F_x.

Para concluirmos a não injetividade de T, basta mostrarmos que $F_x - \{x\} \neq \emptyset$. Como $x \in l_c^\infty(I)$ e I é não enumerável, existe $t_0 \in I$ tal que $x(t_0) = 0$. Definamos $y : I \to \mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$y(t_0) = 1 \quad \text{e} \quad y(t) = x(t) \quad \text{para} \quad t \neq t_0.$$

Note que $y \neq x$ e $y \in F_x$. Portanto, temos que $S(x) = S(y)$. O que implica que $T(x) = T(y)$.

Assim, T não é injetor. □

Teorema 6.13. *Dado α um ordinal distinto de 1, temos que $B_\alpha(I)$ e $B_1(I)$ não são isomorfos.*

Demonstração. Se $\alpha = 0$, de acordo com a Observação 4.1, $C(I)$ e $B_1(I)$ não são isomorfos.

Se $\alpha = 2$, o resultado segue diretamente do Corolário 6.12. Agora, suponhamos que $\alpha > 2$, então $B_2(I)$ é subespaço vetorial de $B_\alpha(I)$.

Suponhamos, por absurdo, que $B_1(I)$ e $B_\alpha(I)$ sejam isomorfos. Então, existe $T : B_\alpha(I) \to B_1(I)$ isomorfismo. Portanto, a restrição de T a $B_2(I)$ será operador linear contínuo e injetor. Mas, isso contradiz o Corolário 6.12. Assim, temos que $B_\alpha(I)$ não é isomorfo a $B_1(I)$. □

Capítulo 7

Outro problema em aberto: Classes de Baire sobre $[0,1]$ como espaços de Banach separavelmente injetivos ou universalmente separavelmente injetivos

Neste capítulo final, faremos uma breve exposição de um outro problema em aberto interessante sobre a geometria dos espaços de Banach das classes de Baire sobre $[0,1]$. A saber:

Para quais ordinais α, $B_\alpha(I)$ é separavelmente injetivo ou universalmente separavelmente injetivo?

Esta questão é discutida em [1].

Inicialmente, veremos que as classes de Baire sobre $[0,1]$ não são espaços de Banach injetivos (Teoremas 7.4 e 7.12) e em seguida apresentaremos alguns resultados já obtidos sobre a pergunta acima (Teorema 7.19).

A não injetividade de $B_\alpha(I)$ para α ordinal enumerável é um corolário do resultado de não complementação das classes de Baire como subespaços fechados umas das outras. Já a não injetividade de $B_{\omega_1}(I)$ será estabelecida a partir de um teorema devido H.Rosenthal, contido em [30].

Definição 7.1. *Um espaço de Banach E é dito injetivo se, e somente se, para todo espaço de Banach X, todo subespaço Y de X e todo operador linear contínuo $t : Y \to E$, existe operador linear contínuo $T : X \to E$ tal que T é extensão de t.*

Observação 7.2. *O exemplo clássico de espaço injetivo é o $(l_\infty, ||.||_\infty)$. Veja [9], página 71.*

Proposição 7.3. *Seja E um espaço de Banach injetivo. Suponha que E seja subespaço fechado de um espaço de Banach G. Então E é complementado em G.*

Demonstração. Consideremos o operador linear contínuo identidade, que denotaremos por $id : E \to E$. Como E é subespaço de G e E é injetivo, existe $T : G \to E$ operador linear contínuo, tal que T estende id. Portanto T é projeção contínua de G em E.

Isso mostra que E é complementado em G. □

Teorema 7.4. *Seja α um ordinal com $0 \leq \alpha < \omega_1$. Então $B_\alpha(I)$ é espaço de Banach não injetivo.*

Demonstração. No Capítulo 1, vimos que se $\alpha < \omega_1$, então $B_\alpha(I)$ é subespaço fechado de $B_{\omega_1}(I)$. Suponhamos, por absurdo, que $B_\alpha(I)$ seja injetivo, então a Proposição 7.3 nos diz que $B_\alpha(I)$ é subespaço complementado de $B_{\omega_1}(I)$.

Mas, isso contradiz o Teorema 3.2.11 no caso em que $\alpha = 0$ e o Teorema 5.4.20 para $\alpha > 0$. Essa contradição mostra que $B_\alpha(I)$ não é injetivo. □

Agora, vamos estabelecer a não injetividade de $B_{\omega_1}(I)$.

Inicialmente, vamos mostrar que $B_{\omega_1}(I)$ possui subespaço isomorfo a $c_0(I)$. Mais que isso, no Lema 7.7, vamos mostrar que $c_0(I) \subset B_{\omega_1}(I)$.

Definição 7.5. *Seja Γ um conjunto. Definimos:*

$c_0(\Gamma) = \{f : \Gamma \to \mathbb{R}$, tal que dado $\epsilon > 0$ existe apenas um número finito de $\gamma \in \Gamma$ com $|f(\gamma)| \geq \epsilon\}$.

Observação 7.6. *É fácil ver que $c_0(\Gamma)$ é subespaço fechado de $l_\infty(\Gamma)$. Portanto, temos que $(c_0(\Gamma), ||.||_\infty)$ é espaço de Banach.*

Lema 7.7. *O conjunto de funções $c_0(I)$ é subespaço de $B_1(I)$. Portanto $c_0(I)$ é subespaço de $B_{\omega_1}(I)$.*

Demonstração. Como $c_0(I)$ é espaço vetorial, para concluirmos que $c_0(I)$ é subespaço vetorial de $B_1(I)$, basta mostrarmos que $c_0(I) \subset B_1(I)$.

Seja $f \in c_0(I)$. Dado $n > 0$, consideremos $\{t_1, \ldots, t_{k_n}\} \subset I$ os únicos pontos t de I tais que $|f(t)| \geq \frac{1}{n}$.

Fixado $t \in I$, temos que $\{t\}$ é fechado, logo segue do Teorema de Lebesgue-Hausdorff (Teorema 1.4.9) que $C_{\{t\}} \in B_1(I)$. Definamos a função $g_n : I \to \mathbb{R}$ como:

$$g_n(t) = \sum_{j=1}^{k_n} f(t_j).C_{\{t_j\}}(t),$$

para todo $t \in I$. Pelo comentário feito acima, temos que $g_n \in B_1(I), \forall n > 0$.

Portanto $(g_n)_{n>0} \subset B_1(I)$. Se mostrarmos que $(g_n)_{n>0}$ converge uniformemente para f em I, como $B_1(I)$ é um espaço de Banach, concluiremos que $f \in B_1(I)$.

Então, vamos mostrar que $(g_n)_{n>0}$ converge uniformemente para f em I. Notemos que:

$$|f(t) - g_n(t)| < \frac{1}{n},$$

para todo $t \in I$ e $n \geq 1$.

Seja $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que $\frac{1}{N} < \epsilon$. Note que:

$$|f(t) - g_N(t)| < \frac{1}{N} < \epsilon,$$

para todo $t \in I$. Dessa forma:

$$n \geq N \Rightarrow |f(t) - g_n(t)| < \epsilon$$

$\forall t \in I$. Isso mostra a convergência uniforme.

Como discutido anteriormente, isso implica que $f \in B_1(I)$. Como $f \in c_0(I)$ foi arbitrária, temos que $c_0(I) \subset B_1(I) \subset B_{\omega_1}(I)$. □

Denotemos por c a cardinalidade do contínuo.

Lema 7.8. *A cardinalidade de $l_\infty(I)$ é 2^c.*

Demonstração. (i) $|l_\infty(I)| \leq 2^c$. Seja A o conjunto de todas as funções de I em $\mathbb{R}$. É fácil ver que $|A| = 2^c$. Além disso, temos que $l_\infty(I) \subset A$. Portanto, $|l_\infty(I)| \leq 2^c$.

(ii) $|l_\infty(I)| \geq 2^c$. Sabemos que $|\wp(I)| = 2^c$. Consideremos a função $\varphi : \wp(I) \to l_\infty(I)$, definida como $\varphi(E) = C_E, \forall E \in \wp(I)$. É fácil ver que φ é injetora. Portanto, temos que $|l_\infty(I)| \geq |\wp(I)| = 2^c$.

De (i) e (ii), concluímos que $|l_\infty(I)| = 2^c$. □

Lema 7.9. *A cardinalidade de $B_\alpha(I)$ para todo ordinal α é c.*

Demonstração. Sugerimos [16], página 162. □

Lema 7.10. *$B_{\omega_1}(I)$ não possui subespaço isomorfo a $l_\infty(I)$.*

Demonstração. De acordo com o Lema 7.8, a cardinalidade de $l_\infty(I)$ é 2^c. Portanto, se Y é um espaço de Banach isomorfo a $l_\infty(I)$, temos que $|Y| = 2^c$.

O Lema 7.9 nos diz que a cardinalidade de $B_{\omega_1}(I)$ é c. Portanto, temos que todo subespaço de $B_{\omega_1}(I)$ tem cardinalidade menor ou igual a c. Dessa forma, nenhum subespaço de $B_{\omega_1}(I)$ pode ser isomorfo a $l_\infty(I)$, já que $c < 2^c$. □

Lema 7.11. *Sejam Γ um conjunto infinito e X um espaço de Banach injetivo, tal que X possui subespaço isomorfo a $c_0(\Gamma)$. Então, X possui subespaço isomorfo a $l_\infty(\Gamma)$.*

Demonstração. Sugerimos [30], Corolário 1.5 na página 19. □

Teorema 7.12. *O espaço de Banach $B_{\omega_1}(I)$ não é injetivo.*

Demonstração. Se $B_{\omega_1}(I)$ fosse injetivo, pelo Lema 7.11, $B_{\omega_1}(I)$ possuiria subespaço isomorfo a $l_\infty(I)$, já que $c_0(I) \subset B_{\omega_1}(I)$. Mas, de acordo com o Lema 7.10, isso não pode acontecer.

Assim, concluímos que $B_{\omega_1}(I)$ não é injetivo. $\square$

Observação 7.13. *Note que a não injetividade de $B_\alpha(I)$, para α ordinal enumerável, também pode ser mostrada da mesma forma que a não injetividade de $B_{\omega_1}(I)$. No entanto, como visto aqui, a não injetividade de $B_\alpha(I)$ para α ordinal enumerável não depende do Lema 7.11, que é um resultado bastante forte.*

Uma simplificação dos resultados de [30] que produzem o Corolário 1.5 de [30] se encontra em [24], página 70.

Agora, discutiremos alguns resultados conhecidos sobre a questão em aberto que motiva esse capítulo.

Definição 7.14. *Um espaço de Banach E é dito separavelmente injetivo se para todo espaço de Banach separável X e cada subespaço Y de X, todo operador linear e contínuo $t : Y \to E$ se estende a um operador linear contínuo $T : X \to E$.*

Se sempre existe uma extensão T com $||T|| \leq \lambda||t||$, dizemos que E é λ-separavelmente injetivo.

Definição 7.15. *Um espaço de Banach E é dito universalmente separavelmente injetivo se para todo espaço de Banach X e cada subespaço separável Y de X, todo operador linear e contínuo $t : Y \to E$ se estende a um operador linear contínuo $T : X \to E$.*

Se sempre existe uma extensão T com $||T|| \leq \lambda||t||$, dizemos que E é λ-universalmente separavelmente injetivo.

Observação 7.16. *O exemplo clássico de espaço separavelmente injetivo é c_0, veja [9] página 71. Na verdade, M. Zippin em [37] mostrou que se E é um espaço de Banach de dimensão infinita, separável e separavelmente injetivo, então E é isomorfo a c_0. No entanto, temos que c_0 não é universalmente separavelmente injetivo, já que c_0 é subespaço separável de l_∞, mas não é subespaço complementado de l_∞.*

Um exemplo de espaço universalmente separavelmente injetivo é $(l_c^\infty(\Gamma), ||.||_\infty)$*, onde* Γ *é um conjunto não enumerável, veja [1] página 11.*

Proposição 7.17. *Todo espaço separavelmente injetivo é* λ*-separavelmente injetivo, para algum* $\lambda \geq 1$*. Analogamente, todo espaço universalmente separavelmente injetivo é* λ*-universalmente separavelmente injetivo, para algum* $\lambda \geq 1$*.*

Demonstração. Sugerimos [1], página 12. □

Lema 7.18. *Seja* S *espaço topológico compacto e Hausdorff. São equivalentes:*

(i) S *é um espaço F;*

(ii) O espaço de Banach $(C(S), ||.||_\infty)$ *é 1-separavelmente injetivo.*

Demonstração. Sugerimos [1], página 19. □

Teorema 7.19. *Valem que:*

(1) O espaço de Banach $B_{\omega_1}(I)$ *é 1-separavelmente injetivo;*

(2) Se α *é um ordinal com* $0 \leq \alpha < \omega_1$*, então* $B_\alpha(I)$ *não é 1-separavelmente injetivo.*

Demonstração. (1) De acordo com o Teorema 1.3.8, temos que $B_{\omega_1}(I)$ é linearmente isométrico a $C(\Omega_{\omega_1})$. Além disso, o Teorema 5.3.4, nos diz que Ω_{ω_1} é basicamente desconexo. Assim, temos que Ω_{ω_1} é um espaço F (veja o Lema 5.3.16).

Pelo Lema 7.18, o espaço $C(\Omega_{\omega_1})$ é 1-separavelmente injetivo. Dessa forma, temos que $B_{\omega_1}(I)$ é 1-separavelmente injetivo.

(2) Fixado um ordinal α com $1 \leq \alpha < \omega_1$, o Teorema 1.3.8 nos diz que $B_\alpha(I)$ é linearmente isométrico a $C(\Omega_\alpha)$. Sob essas condições, o Corolário 5.4.17 garante que Ω_α não é um espaço F.

Portanto, de acordo com o Lema 7.18 temos que $C(\Omega_\alpha)$ não é 1-separavelmente injetivo. Dessa forma, $B_\alpha(I)$ não é 1-separavelmente injetivo.

No caso em que $\alpha = 0$, basta notarmos que $[0,1]$ não é um espaço F. De fato, considere os F_σ's abertos e disjuntos $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Assim, o Lema 7.18 garante que $C([0,1])$ não é 1-separavelmente injetivo.

$\square$

O Teorema 7.19 classifica completamente quais classes de Baire sobre $[0,1]$ são 1-separavelmente injetivas. Isso é possível, devido ao Lema 7.18 que estabelece quais espaços compactos S possuem $C(S)$ 1-separavelmente injetivo.

Atualmente, não existem caracterizações semelhantes ao Lema 7.18 para $\lambda > 1$. Assim, o estudo das classes de Baire sobre $[0,1]$ pode apontar direções na caracterização dos compactos S tais que $C(S)$ seja λ-separavelmente injetivo ou universalmente separavelmente injetivo.

Por outro lado, como ser separavelmente injetivo ou universalmente separavelmente injetivo são invariantes isomórficos, o conhecimento de quais classes de Baire possuem essas propriedades pode nos ajudar a responder à questão sobre existência de isomorfismos entre as classes de Baire sobre $[0,1]$.

Apêndice A

Teorema de Lebesgue-Hausdorff

Ao longo deste apêndice, S denotará um espaço topológico e X um conjunto. Nosso objetivo, neste apêndice, é demonstrar o Teorema de Lebesgue-Hausdorff generalizado:

(**Teorema de Lebesgue-Hausdorff generalizado**) Seja α um ordinal. Considere $f : S \to \mathbb{R}$ função limitada.

Temos que:

(1) Se α é um ordinal finito, $f \in B_\alpha(S)$ se, e somente se, $f^{-1}(G) \in CZ_\alpha(S)$, para todo aberto $G \subset \mathbb{R}$;

(2) Se α é um ordinal infinito, $f \in B_\alpha(S)$ se, e somente se, $f^{-1}(G) \in CZ_{\alpha+1}(S)$, para todo aberto $G \subset \mathbb{R}$.

A demonstração de (1) não é muito complicada. Na demonstração de que

$$f \in B_\alpha(S) \Rightarrow f^{-1}(G) \in CZ_{\alpha+1}(S),$$

para α um ordinal infinito, utiliza-se a mesma técnica do caso finito.

A parte realmente complicada do Teorema de Lebesgue-Hausdorrf generalizado é a recíproca para ordinais infinitos. Para mostrar isso, vamos trabalhar com o conceito de reticulados de funções, introduzido no Capítulo 5. Nossa demonstração será baseada num resultado profundo, devido a Sierpinski que chamaremos de **Lema de Sierpinski**.

Observação A.1. *Na verdade, o que denominamos aqui de Lema de Sierpinski é apenas um corolário de um teorema de Sierpinski sobre convergência pontual de sequências em reticulados de funções. Tanto esse teorema quanto o corolário se encontram em [33].*

Dessa forma, inicialmente demonstraremos (1) e a parte menos complicada de (2), mencionada acima. Em seguida, vamos desenvolver um pouco de teoria para mostrarmos o restante.

Proposição A.2. *Seja $n \in \omega$. Temos que se $f \in B_n(S)$, então $f^{-1}(G) \in CZ_n(S)$, para todo aberto $G \subset \mathbb{R}$.*

Demonstração. Façamos indução em n.

Se $n = 0$, então f é contínua. Seja G aberto de $\mathbb{R}$, então G^C é fechado de $\mathbb{R}$.

Note que $f^{-1}(G^C) = f^{-1}(G)^C$, portanto se mostrarmos que $f^{-1}(F) \in Z_0(S)$, para todo fechado F de $\mathbb{R}$, teremos nosso resultado.

Consideremos a função $d(.,F) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como $d(t,F)$ =distância de t ao conjunto F. Sabemos que essa função é contínua. Definamos $g : S \to \mathbb{R}$, como $g(s) = d(f(s),F), \forall s \in S$. Então, $g \in C(S)$. É fácil ver que $f^{-1}(F) = g^{-1}(0)$. O que mostra que $f^{-1}(F) \in Z_0(S)$. Logo, o resultado vale para $n = 0$.

Seja $n \in \omega$, com $n > 0$. Suponhamos que o resultado seja válido para todo $0 \leq k < n$, mostremos que também vale para n.

Considere $f \in B_n(S)$. Sabemos que todo aberto de $\mathbb{R}$ é uma união enumerável de intervalos abertos. Portanto, se mostrarmos que a pré-imagem por f de qualquer intervalo aberto pertence $CZ_n(S)$, como $CZ_n(S)$ é fechada para uniões enumeráveis, teremos o resultado. Sejam $a < b$ reais, temos que $(a,b) = (a,\infty) \cap (-\infty,b)$. Como $CZ_n(S)$ é fechada para intersecções finitas, para concluirmos que $f^{-1}((a,b)) \in CZ_n(S)$, basta mostrarmos que $f^{-1}((a,\infty))$ e $f^{-1}((-\infty,b))$ pertencem a $CZ_n(S)$.

Seja $y \in \mathbb{R}$, vamos mostrar que $f^{-1}((y,\infty)) \in CZ_n(S)$. A demonstração para $f^{-1}((-\infty,y))$ se faz de forma análoga.

Como $f \in B_n(S)$, existe sequência $(f_m)_m \subset \bigcup_{j<n} B_j(S)$ tal que $(f_m)_m$ converge pontualmente para f em S. Suponhamos que cada $f_m \in B_{k_m}(S)$, com $k_m < n$.

Para m, k fixados, definamos $A_{m,k} = \{x \in S : f_m(x) \geq y + 1/k\}$. Notemos que:

$$f^{-1}((y,\infty)) = \bigcup_{k>0} \bigcup_{N} \bigcap_{m>N} A_{m,k}.$$

Pela hipótese de indução, temos que $A_{m,k}^C \in CZ_{k_m}(S)$. O que implica que $A_{m,k} \in Z_{k_m}(S)$. Como $k_m < n$, temos que $k_m \leq n-1$.

Logo, $A_{m,k} \in Z_{n-1}(S), \forall m \in \mathbb{N}, k > 0$. Como $Z_{n-1}(S)$ é fechado para intersecções enumeráveis, temos que $\bigcap_{m>N} A_{m,k} \in Z_{n-1}(S), \forall N$. Assim, da definição de $CZ_n(S)$, segue que

$$f^{-1}((y,\infty)) = \bigcup_{k>0} \bigcup_{N} \bigcap_{m>N} A_{m,k} \in CZ_n(S).$$

Isso estabelece nosso resultado. $\square$

Proposição A.3. *Para todo ordinal α com $\omega \leq \alpha$, temos que se $f \in B_\alpha(S)$ então $f^{-1}(G) \in CZ_{\alpha+1}(S)$, para todo aberto $G \subset \mathbb{R}$.*

Demonstração. Façamos indução em α. Como discutido na proposição anterior, basta mostrarmos que para todo $y \in \mathbb{R}$:

$f \in B_\alpha(S)$ implica que $f^{-1}((y,\infty))$ e $f^{-1}((-\infty,y))$ pertencem a $CZ_{\alpha+1}(S)$.

Mostremos que $f \in B_\alpha(S)$ implica que $f^{-1}((y,\infty)) \in CZ_{\alpha+1}(S)$.

Suponhamos que $\alpha = \omega$. Devemos mostrar que $f^{-1}((y,\infty)) \in CZ_{\omega+1}(S)$. Como $f \in B_\omega(S)$, existe sequência $(f_n)_n \subset \bigcup_{n\in\omega} B_n(S)$ convergindo pontualmente para f em S. Podemos escrever $f_n \in B_{k_n}(S)$, com $k_n \in \omega, \forall n \in \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $k \geq 1$, definamos:

$$A_{n,k} = \{x \in S : f_n(x) \geq y + 1/k\}$$

Note que:

$$f^{-1}((y,\infty)) = \bigcup_{k>0} \bigcup_{N} \bigcap_{n\geq N} A_{n,k}.$$

Da Proposição A.2, segue que $A_{n,k}^C \in CZ_{k_n}(S)$. Portanto, $A_{n,k} \in Z_{k_n}(S)$. O que implica que $A_{n,k} \in Z_\omega(S), \forall n, k$. Dessa forma, como $Z_\omega(S)$ é fechado para intersecções enumeráveis, temos que $\bigcap_{n\geq N} A_{n,k} \in Z_\omega(S)$.

Logo:

$$f^{-1}((y,\infty)) = \bigcup_{k>0}\bigcup_{N}\bigcap_{n\geq N} A_{n,k} \in CZ_{\omega+1}(S),$$

pela definição de $CZ_{\omega+1}(S)$. Isso mostra que o resultado é válido para ω.

Seja α um ordinal, com $\omega < \alpha$. Suponhamos que o resultado seja válido para todo $\omega \leq \beta < \alpha$ e vamos mostrar que também é válido para α.

Seja $f \in B_\alpha(S)$, existe sequência $(f_n)_n \subset \bigcup_{\omega\leq\beta<\alpha} B_\beta(S)$ convergindo pontualmente para f em S. Vamos escrever que $f_n \in B_{\beta_n}(S)$ com $\omega \leq \beta_n < \alpha$, para todo n.

Definamos:

$$A_{n,k} = \{x \in S : f_n(x) \geq y + 1/k\}$$

Note que:

$$f^{-1}((y,\infty)) = \bigcup_{k>0}\bigcup_{N}\bigcap_{n\geq N} A_{n,k}.$$

Pela hipótese de indução, temos que $A_{n,k} \in Z_{\beta_n+1}(S) \subset Z_\alpha(S)$. Como $Z_\alpha(S)$ é fechado para intersecções enumeráveis, temos que $\bigcap_{n\geq N} A_{n,k} \in Z_\alpha(S)$, para todo N, k. Portanto:

$$f^{-1}((y,\infty)) = \bigcup_{k>0}\bigcup_{N}\bigcap_{n\geq N} A_{n,k} \in CZ_{\alpha+1}(S),$$

pela definição de $CZ_{\alpha+1}(S)$.

Isso estabelece nosso resultado. $\square$

Para provarmos a recíproca de (1) no Teorema de Lebesgue-Hausdorff generalizado, precisamos de um lema sobre funções características de conjuntos de Baire.

Lema A.4. *Para cada ordinal α, se E é um conjunto de Baire da classe $Z_\alpha(S)$ ou $CZ_\alpha(S)$, então $C_E \in B_{\alpha+1}(S)$.*

Demonstração. Façamos indução em α.

Note que toda vez que mostrarmos que o resultado vale para $Z_\alpha(S)$, ele também valerá para $CZ_\alpha(S)$. Pois se $E \in CZ_\alpha(S)$, então $E^C \in Z_\alpha(S)$. Logo $C_{E^C} \in B_{\alpha+1}(S)$. Além disso,

$C_E = 1 - C_{E^C}$ e sabemos que as classes de Baire contém as funções constantes e são espaços vetoriais. Portanto, $C_E \in B_{\alpha+1}(S)$.

Seja $\alpha = 0$. Consideremos $E \in Z_0(S)$, então existe $f \in C(S)$ tal que $E = f^{-1}(0)$. Note que:

$|f| \in C(S)$ e $|f|^{-1}(0) = f^{-1}(0)$. Logo, podemos supor $f \geq 0$. Além disso, $C(S)$ é fechado para mínimo finito e

$min(f, 1)^{-1}(0) = f^{-1}(0)$. Assim, podemos supor $0 \leq f \leq 1$.

Definamos a sequência $f_n(s) = (1 - f(s))^n \in C(S)$. Note que $(f_n)_n$ é uniformemente limitada e converge pontualmente para C_E em S.

Isso mostra que $f \in B_1(S)$. Logo, o resultado vale para $\alpha = 0$.

Seja $\alpha > 0$. Suponhamos que o resultado seja válido para todo ordinal $0 \leq \beta < \alpha$, mostremos que também vale para α.

Seja $E \in Z_\alpha(S)$, então $E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$, com cada $E_n \in CZ_{\alpha_n}(S)$ e $\alpha_n < \alpha$.

Definamos $F_n = \bigcap_{j=1}^{n} E_j, \forall n \in \mathbb{N}$. Seja $\beta_n = max(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) < \alpha$, então $F_n \in CZ_{\beta_n}(S)$. Pela hipótese de indução, temos que $C_{F_n} \in B_{\beta_n+1}(S)$. Assim $C_{F_n} \in B_\alpha(S), \forall n \in \mathbb{N}$.

Note que a sequência $(C_{F_n})_n$ é uniformemente limitada e converge pontualmente para C_E em S. O que implica que $C_E \in B_{\alpha+1}(S)$. Logo, o resultado vale para α.

Assim, estabelecemos o lema. □

Proposição A.5. *Seja $n \in \omega$. Suponha que $f : S \to \mathbb{R}$ seja função limitada com $f^{-1}(G) \in CZ_n(S)$, para todo aberto $G \subset \mathbb{R}$. Então $f \in B_n(S)$.*

Demonstração. **Caso 1** $n = 0$. Nesse caso, temos que $f^{-1}(G) \in CZ_0(S)$, para todo aberto $G \subset \mathbb{R}$. Assim, a pré-imagem por f de todo aberto de $\mathbb{R}$ é aberto de S. Portanto f é contínua.

Caso 2 $n > 0$. Considere $f : S \to \mathbb{R}$ satisfazendo as hipóteses da proposição. Sem perda de generalidade, podemos supor que $0 \leq f \leq 1$, já que $B_n(S)$ é espaço vetorial e f é limitada.

Considere $a, b \in \mathbb{R}$, com $0 \leq a < b \leq 1$. Definamos:

$$E^a = \{x \in S : f(x) > a\}$$

e

$$E_b = \{x \in S : f(x) < b\}.$$

Por hipótese, temos que $E^a, E_b \in CZ_n(S)$. Assim $E^a = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j$, onde cada $E_j \in Z_{k_j}(S)$ e $k_j < n$. Pelo Lema A.4, temos que $C_{E_j} \in B_n(S)$.

Definamos:

$$g^a(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{C_{E_j}(x)}{2^j}.$$

Note que a série que define g^a é uniformemente convergente e que $\frac{C_{E_j}}{2^j} \in B_n(S)$. No Capítulo 5, vimos que cada classe de Baire é fechada para convergência uniforme, logo $g^a \in B_n(S)$. Note que:

$$g^a(x) > 0 \Leftrightarrow x \in E^a \quad \text{e} \quad 0 \le g^a(x) \le 1 \quad \text{para todo} \quad x \in S.$$

Analogamente, temos que $E_b = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \widetilde{E}_j$, com $\widetilde{E}_j \in Z_{\widetilde{k}_j}$ e $\widetilde{k}_j < n$. Pelo Lema A.4, temos que $C_{\widetilde{E}_j} \in B_n(S)$.

Definamos:

$$g_b(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{C_{\widetilde{E}_j}(x)}{2^j}.$$

Como argumentado acima, $g_b \in B_n(S)$. Note que:

$$g_b(x) > 0 \Leftrightarrow x \in E_b \quad \text{e} \quad 0 \le g_b(x) \le 1 \quad \text{para todo} \quad x \in S.$$

Definamos:

$$h_{a,b}(x) = \frac{g^a(x)}{g_b(x) + g^a(x)}.$$

Note que $g_b(x) + g^a(x) \neq 0$ pois $x \in S$ implica que $x \in E_b$ ou $x \in E^a$. Como $g^a, g_b \in B_n(S)$, temos que $h_{a,b} \in B_n(S)$. Note que:

(i) Se $f(x) > b$, então $h_{a,b}(x) = 1$;

(ii) Se $f(x) < a$, então $h_{a,b}(x) = 0$;

(iii) $0 \le h_{a,b} \le 1$.

Para cada $m > 0$, definamos $h_m(x) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} h_{\frac{j-1}{m},\frac{j}{m}}(x)$. Pelo discutido acima, cada $h_{\frac{j-1}{m},\frac{j}{m}} \in B_n(S)$. Como h_m é uma soma finita de elementos de $B_n(S)$, que é um espaço vetorial, temos que $h_m \in B_n(S), \forall m > 0$.

Vamos mostrar que a seqência $(h_m)_{m>0}$ converge uniformemente para f em S, o que implicará que $f \in B_n(S)$.

Fixado $m > 0$, mostremos que $|f(x) - h_m(x)| \leq 1/m, \forall x \in S$. Isso implicará a convergência uniforme de $(h_m)_{m>1}$ para f em S.

Seja $x \in S$, existe j com $0 < j \leq m$ tal que:

$$f(x) \in \left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right].$$

De (i),(ii),(iii), segue que:

$$h_m(x) \in \left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right].$$

Logo $|f(x) - h_m(x)| \leq 1/m$.

Como $x \in S$ foi tomado arbitrariamente, temos nosso resultado.

□

As Proposições A.2 e A.5 mostram o Teorema de Lebesgue-Hausdorff generalizado para ordinais finitos.

Teorema A.6. *(**Lebesgue-Hausdorff-Caso finito**) Seja $n \in \omega$. Considere $f : S \to \mathbb{R}$ função limitada, então $f \in B_n(S)$ se, e somente se, $f^{-1}(G) \in CZ_n(S)$, para todo aberto $G \subset \mathbb{R}$.*

Para concluírmos o Teorema de Lebesgue-Hausdorff generalizado, como dito no começo desse apêndice, basta mostrarmos:

(**Recíproca do Teorema de Lebesgue-Hausdorff no caso infinito**)

Seja α um ordinal infinito. Seja $f : S \to \mathbb{R}$, função limitada tal que $f^{-1}(G) \in CZ_{\alpha+1}(S)$, para todo $G \subset \mathbb{R}$ aberto. Então, $f \in B_\alpha(S)$.

Nosso primeiro objetivo é caracterizar o conjunto $\{f : S \to \mathbb{R}$ tal que f é limitada e $f^{-1}(G) \in CZ_\alpha(S)$, para todo aberto $G \subset \mathbb{R}\}$.

Sejam X um conjunto e Σ uma álgebra de subconjuntos de X. Consideremos $B(X, \Sigma)$ como descrito na Definição 1.4.8.

Proposição A.7. *Valem:*

(1) $B(X, \Sigma)$ *contém as funções constantes;*

(2) Se $f \in B(X, \Sigma)$*, então* $|f| \in B(X, \Sigma)$*, onde* $|f|(x) = |f(x)|$*;*

(3) Se $f, g \in B(X, \Sigma)$*, então* $min(f, g), max(f, g) \in B(X, \Sigma)$*, onde* $min(f, g)(x) = min(f(x), g(x))$ *e* $max(f, g)(x) = max(f(x), g(x))$*.*

Demonstração. (1) Pela definição de álgebra de subconjuntos, temos que $X \in \Sigma$, logo $C_X \in B(X, \Sigma)$.

Note que C_X é a função constante igual a 1. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$, como $B(X, \Sigma)$ é espaço vetorial, a função $\lambda.C_X \in B(X, \Sigma)$. Portanto, $B(X, \Sigma)$ contém as funções constantes.

(2) Inicialmente, mostremos que se $f \in span\{C_E : E \in \Sigma\}$, então $|f| \in span\{C_E : E \in \Sigma\}$.

$f \in span\{C_E : E \in \Sigma\}$ implica que $f = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j C_{E_j}$, com $E_j \in \Sigma$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $X = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$.

Assim, se $x \in X$, então $x \in E_j$ para um único j. Logo, $f(x) = \lambda_j$ e $|f(x)| = |\lambda_j|$. Dessa forma, temos que $|f| = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| C_{E_j}$. Portanto, $|f| \in span\{C_E : E \in \Sigma\}$.

Agora, seja $f \in B(X, \Sigma)$. Existe uma sequência $(f_n)_n \subset span\{C_E : E \in \Sigma\}$ convergindo uniformemente para f em X. Pelo visto acima, $(|f_n|)_n \subset span\{C_E : E \in \Sigma\}$.

Vamos mostrar que $(|f_n|)_n$ converge uniformemente para $|f|$ em X, o que implicará que $|f| \in B(X, \Sigma)$.

Seja $\epsilon > 0$, da convergência uniforme de $(f_n)_n$ para f, segue que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq N \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \epsilon, \forall x \in X.$$

Portanto, para $n \geq N$, temos:

$$||f(x)| - |f_n(x)|| \leq |f(x) - f_n(x)| < \epsilon, \forall x \in X.$$

Logo:

$$n \geq N \Rightarrow |||f| - |f_n|||_\infty < \epsilon.$$

Isso mostra que $|f| \in B(X, \Sigma)$.

(3) Note que:

$$min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g) - \frac{1}{2}|f - g|$$

e

$$max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g) + \frac{1}{2}|f - g|.$$

Como $f, g \in B(X, \Sigma)$ e $B(X, \Sigma)$ é espaço vetorial, temos que $f - g, f + g \in B(X, \Sigma)$. Pelo item (1) acima, $|f - g| \in B(X, \Sigma)$. Dessa forma, $min(f, g), max(f, g) \in B(X, \Sigma)$.

□

Observe que a Proposição A.7 nos mostra que $B(X, \Sigma)$ é um reticulado de funções de acordo com a Definição 5.3.11.

Definição A.8. *Seja L um reticulado de funções definidas em X. Para cada $f \in L$, definimos $coz(f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$.*

Definimos $coz(L) = \{coz(f) : f \in L\}$.

Proposição A.9. *Seja $L = B(X, \Sigma) \subset l_\infty(X)$. Então $coz(L)$ é fechado para uniões enumeráveis.*

Demonstração. Seja $(f_n)_n$ sequência de funções em L. Mostremos que $\bigcup_n coz(f_n) \in coz(L)$.

Podemos supor que cada $f_n \geq 0$, pois pela Proposição A.7, $|f_n| \in L$ e $coz(f_n) = coz(|f_n|)$. Além disso, podemos assumir que cada $f_n \leq 1$, pois a Proposição A.7 nos diz que L contém as funções constantes e é fechada para o mínimo. Logo $min(f_n, 1) \in L$, mas $coz(f_n) = coz(min(f_n, 1))$.

Considere a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(x)}{2^n}$. Como $0 \leq \frac{f_n(x)}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$, e a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge, pelo Teste de Weierstrass a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(x)}{2^n}$ converge uniformemente em X.

Defina

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(x)}{2^n}.$$

Como cada termo da série pertence a L e L é uniformemente fechado, temos que $f \in L$.

É fácil ver que $coz(f) = \bigcup_n coz(f_n)$. Portanto, $\bigcup_n coz(f_n) \in coz(L)$. □

Lema A.10. *Se $(f_n)_n$ é uma sequência em $span\{C_E : E \in \Sigma\}$ convergindo uniformemente para f em X, então existe uma sequência crescente $(g_n)_n \subset span\{C_E : E \in \Sigma\}$ convergindo uniformemente para f em X.*

Demonstração. Tomando subsequência se necessário, podemos assumir que $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$, $\forall n > 0$ e $x \in X$.

Definamos $g_n = max(f_k - \frac{1}{k} : k = 1, \ldots, n)$. Note que para todo n, temos que $g_n \in span\{C_E : E \in \Sigma\}$. De fato, cada $f_k \in span\{C_E : E \in \Sigma\}$, as funções constantes pertencem a $span\{C_E : E \in \Sigma\}$ que é espaço vetorial, logo $f_k - \frac{1}{k} \in span\{C_E : E \in \Sigma\}$. Na demostração da Proposição A.7, vimos que $span\{C_E : E \in \Sigma\}$ é fechado para mínimo finito. Assim, $g_n \in span\{C_E : E \in \Sigma\}$.

É claro que $(g_n)_n$ é uma seqência crescente. Mostremos que $(g_n)_n$ converge pontualmente para f em X.

Por hipótese, temos que $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}, \forall n, x$. Assim:

$$f_n(x) - f(x) < \frac{1}{n} \Rightarrow f_n(x) - \frac{1}{n} < f(x) \Rightarrow f_n - \frac{1}{n} < f, \forall n.$$

Portanto $g_n \leq f, \forall n$.

Também temos que:

$$f(x) - f_n(x) < \frac{1}{n} \Rightarrow f(x) - \frac{1}{n} < f_n(x) \Rightarrow f(x) - \frac{2}{n} < f_n(x) - \frac{1}{n} \leq g_n(x).$$

Assim:

$$f(x) - \frac{2}{n} < g_n(x) \leq f(x).$$

O que implica que $(g_n)_n$ converge pontualmente para f em I. Na verdade, mostramos que essa convergência é uniforme. □

Teorema A.11. *Seja $L = B(X, \Sigma)$, então:*

$$coz(L) = \{f^{-1}(G) : f \in L \quad e \quad G \subset \mathbb{R} \quad \textit{é aberto}\}.$$

Demonstração. É claro que $coz(L) \subset \{f^{-1}(G) : f \in L$ e $G \subset \mathbb{R}$ é aberto $\}$.

Mostremos a outra inclusão. Seja $A = f^{-1}(G)$, onde G é aberto de $\mathbb{R}$ e $f \in L$. Vamos mostrar que $A \in coz(L)$.

Caso 1 $f \in span\{C_E : E \in \Sigma\}$. Pelo Lema 5.3.6, temos que f é Σ-mensurável. Portanto $A \in \Sigma$, assim $C_A \in span\{C_E : E \in \Sigma\}$. Notemos que $A = coz(C_A)$. Dessa forma, $A \in coz(L)$.

Caso 2 Existe uma sequência $(f_n)_n \subset span\{C_E : E \in \Sigma\}$ convergindo uniformemente para f.

Pelo Lema A.10, existe sequência crescente $(g_n)_n \subset span\{C_E : E \in \Sigma\}$ tal que $(g_n)_n$ converge pontualmente para f em X.

Como G é aberto em $\mathbb{R}$, temos que G é uma união enumerável de intervalos abertos de $\mathbb{R}$. A Proposição A.9 nos diz que $coz(L)$ é fechado para uniões enumeráveis. Portanto, se mostrarmos que $f^{-1}((a, b)) \in coz(L)$ para todo $a < b$, teremos nosso resultado.

Mostra-se facilmente que $coz(L)$ é fechado para intersecções finitas, além disso:

$$(a, b) = (a, \infty) \cap (-\infty, b).$$

Dessa forma, para estabelecermos nosso resultado, basta mostrarmos que:

$$f^{-1}((y, \infty)) \quad \text{e} \quad f^{-1}((-\infty, y)) \in coz(L) \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Vamos mostrar que $f^{-1}((y, \infty)) \in coz(L)$. Como discutido anteriormente, existe $(g_n)_n$ sequência crescente de elementos de $span\{C_E : E \in \Sigma\}$ covergindo pontualmente para f em X.

Portanto, temos que:

$$f^{-1}((y, \infty)) = \bigcup_n g_n^{-1}((y, \infty)).$$

Como cada $g_n \in span\{C_E : E \in \Sigma\}$, no Caso 1, mostramos que $g_n^{-1}((y,\infty)) \in coz(L)$.

Dessa forma, segue da Proposição A.9 que $f^{-1}((y,\infty)) \in coz(L)$.

Note que acima mostramos que para toda $g \in L$ e $y \in \mathbb{R}$, vale $g^{-1}((y,\infty)) \in coz(L)$. Para nossa f fixada, temos que $-f \in L$. Portanto $(-f)^{-1}((y,\infty)) \in coz(L)$. Mas $(-f)^{-1}((y,\infty)) = f^{-1}((-\infty,y))$.

Isso mostra nosso resultado.

$\square$

Teorema A.12. *Seja $L = B(X,\Sigma)$. Então, temos que:*

$coz(L) = \{A : A$ *é união enumerável de elementos de* $\Sigma\}$.

Demonstração. (i) $\{A : A$ é união enumerável de elementos de $\Sigma\} \subset coz(L)$.

Se $A \in \Sigma$, então $A \in coz(L)$. Pois $C_A \in L$ e $A = coz(C_A)$.

Pela Proposição A.9, $coz(L)$ é fechado para uniões enumeráveis. Portanto $\{A : A$ é união enumerável de elementos de $\Sigma\} \subset coz(L)$.

(ii) $coz(L) \subset \{A : A$ é união enumerável de elementos de $\Sigma\}$. Seja $E = coz(f)$, com $f \in L$. Na demostração da Proposição A.9, vimos que podemos supor $f \geq 0$.

Além disso, o Lema A.10 nos diz que existe sequência crecente $(f_n)_n \subset span\{C_E : E \in \Sigma\}$ convergindo pontualmente para f em X. Como $f \geq 0$ e $span\{C_E : E \in \Sigma\}$ é fechado para máximos finitos, podemos tomar $f_n \geq 0, \forall n$.

Dessa forma, temos que $coz(f) = \bigcup_n coz(f_n)$. Note que $coz(f_n) = f_n^{-1}(\mathbb{R} - 0)$ e que cada f_n é Σ-mensurável. Portanto $coz(f_n) \in \Sigma, \forall n \in \mathbb{N}$.

Dessa forma, temos que $coz(f)$ é uma união enumerável de elementos de Σ.

$\square$

Definição A.13. *Seja R uma classe de subconjuntos de um conjunto X.*

Dizemos que R possui a propriedade da redução finita se para toda família finita $\{E_j : j = 1, \ldots, n\} \subset R$, existe família $\{D_j : j = 1, \ldots, n\} \subset R$ tal que $D_i \cap D_j = \emptyset$ se $i \neq j$, $D_j \subset E_j, j = 1, \ldots, n$ e $\bigcup_{j=1}^n D_j = \bigcup_{j=1}^n E_j$.

Dizemos que R possui a propriedade da redução enumerável se a propriedade descrita acima vale para toda subfamília enumerável de R.

Definição A.14. *Seja R uma família de subconjuntos de um conjunto X. Definimos:*

$$R_\sigma = \{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n : A_n \in R\};$$

e

$$R_\delta = \{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n : A_n \in R\};$$

Lema A.15. *Seja X um conjunto e Σ uma álgebra de subconjuntos de X. Então Σ_σ possui a propriedade da redução enumerável e finita.*

Demonstração. Sugerimos [26], página 127. □

Teorema A.16. *Seja $L = B(X, \Sigma)$, com Σ álgebra de subconjuntos de X, tal que $\Sigma = \Sigma_\sigma \cap \Sigma_\delta$.*

Então $L = \widetilde{L}$, onde:

$\widetilde{L} = \{f \in l_\infty(X) : f^{-1}(G) \in coz(L)_\sigma$ para todo aberto $G \subset \mathbb{R}\}$.

Demonstração. (i) $L \subset \widetilde{L}$.

De acordo com o Teorema A.11, temos que $coz(L) = \{f^{-1}(G) : f \in L$ e $G \subset \mathbb{R}$ aberto$\}$. Logo, $f \in L$ implica que $f^{-1}(G) \in coz(L)$, para todo aberto G de $\mathbb{R}$

Como $coz(L) \subset coz(L)_\sigma$, concluímos que $L \subset \widetilde{L}$.

(ii) $\widetilde{L} \subset L$. Seja $f : X \to \mathbb{R}$, função limitada tal que $f^{-1}(G) \in coz(L)_\sigma$ para todo aberto $G \subset \mathbb{R}$, vamos mostrar que $f \in L$.

De acordo com a Proposição A.9, temos que $coz(L) = coz(L)_\sigma$. Além disso, o Teorema A.12 nos diz que $coz(L) = \Sigma_\sigma$.

Dessa forma, a hipótese sobre f é que ela é limitada e $f^{-1}(G) \in \Sigma_\sigma$, para todo aberto G de $\mathbb{R}$. Fixado $n > 0$, como f é limitada, existe um número finito de números reais $a_1 < a_2 < \ldots < a_{k_n}$ tais que a imagem de f está contida em (a_1, a_{k_n}) e $a_{i+1} - a_i < \frac{1}{n}, i = 1, \ldots, k_n - 1$.

Para cada $1 \leq i \leq k_n - 1$, sejam $J_i = (a_i, a_{i+1})$ e $E_i = f^{-1}(J_i)$. Por hipótese, temos que $E_i \in \Sigma_\sigma$.

De acordo com o Lema A.15, existe família $\{D_i : i = 1, \ldots, k_n - 1\} \subset \Sigma_\sigma$, tal que $D_i \subset E_i$, $D_i \cap D_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $\bigcup_{i=1}^{k_n-1} D_i = \bigcup_{i=1}^{k_n-1} E_i = X$.

Note que fixado i, temos:

$$D_i^C = \bigcup_{j \neq i} D_j \in \Sigma_\sigma.$$

Logo, $D_i \in \Sigma_\delta$. Dessa forma, temos que $D_i \in \Sigma_\sigma \cap \Sigma_\delta = \Sigma$.

Então $D_i \in \Sigma, i = 1, \ldots, k_n - 1$. Vamos ignorar os $D_i = \emptyset$. Para cada i, tome $x_i \in D_i$.

Definamos $g_n = \sum_{i=1}^{m_n} f(x_i) C_{D_i}$, onde $m_n \leq k_n - 1$. Note que $g_n \in span\{C_E : E \in \Sigma\}$.

Mostremos que a sequência $(g_n)_n$ acima construída converge uniformemente para f em X. O que implicará que $f \in L$. Seja $x \in X$, existe único i tal que $x \in D_i$. Logo:

$$|g(x) - f(x)| = |f(x_i) - f(x)| < \frac{1}{n},$$

já que $f(x_i), f(x) \in (a_i, a_{i+1})$ e $a_{i+1} - a_i < \frac{1}{n}$.

Isso mostra a convergência uniforme de $(g_n)_n$ para f. Dessa maneira, temos a nossa inclusão.

De (i) e (ii) segue o resultado. □

Corolário A.17. *Sejam X um conjunto, Σ uma álgebra de subconjuntos de X com $\Sigma = \Sigma_\sigma \cap \Sigma_\delta$ e $L = B(X, \Sigma)$. Então:*

$L = \{f : f$ é limitada e $f^{-1}(G) \in \Sigma_\sigma$, para todo aberto $G \subset \mathbb{R}\}$.

Demonstração. De acordo com o Teorema A.16, temos que:

$L = \{f \in l_\infty(X) : f^{-1}(G) \in coz(L)_\sigma$ para todo aberto $G \subset \mathbb{R}\}$.

Sabemos que $coz(L) = coz(L)_\sigma$ e usando o Teorema A.12, temos:

$L = \{f \in l_\infty(X) : f^{-1}(G) \in \Sigma_\sigma$, para todo aberto $G \subset \mathbb{R}\}$.

Isso mostra o corolário. $\square$

Lema A.18. *Para todo ordinal $1 \leq \alpha$, seja $A_\alpha(S)$ a classe ambígua α de S. Sabemos que $A_\alpha(S)$ é uma álgebra de subconjuntos de S. Vale que:*

$$A_\alpha(S) = (A_\alpha(S))_\sigma \cap (A_\alpha(S))_\delta.$$

Demonstração. É claro que $A_\alpha(S) \subset (A_\alpha(S))_\sigma \cap (A_\alpha(S))_\delta$.

Vamos mostrar a outra inclusão. Seja $A \in (A_\alpha(S))_\sigma \cap (A_\alpha(S))_\delta$, então:

(i) $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, com cada $A_n \in A_\alpha(S)$. Logo A_n pertence a $CZ_\alpha(S)$, que é fechada para uniões enumeráveis. Portanto $A \in CZ_\alpha(S)$.

(ii) $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$, com cada $B_n \in A_\alpha(S)$. Logo $B_n \in Z_\alpha(S)$, que é fechada para intersecções enumeráveis. Portanto $A \in Z_\alpha(S)$.

De (i) e (ii) segue que $A \in A_\alpha(S)$. Isso mostra que $(A_\alpha(S))_\sigma \cap (A_\alpha(S))_\delta \subset A_\alpha(S)$.

Dessa forma, temos a igualdade. $\square$

Lema A.19. *Seja $1 \leq \alpha$ um ordinal. $A \subset S$ pertence a $CZ_\alpha(S)$ se, e somente se, $A \in (A_\alpha(S))_\sigma$.*

Demonstração. Suponha que $A \in (A_\alpha(S))_\sigma$. Então $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ com cada $A_n \in A_\alpha(S)$, logo cada $A_n \in CZ_\alpha(S)$. Como $CZ_\alpha(S)$ é fechada para uniões enumeráveis, temos que $A \in CZ_\alpha(S)$.

Reciprocamente, suponha que $A \in CZ_\alpha(S)$. Então $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ com $A_n \in Z_{\beta_n}(S)$ e $\beta_n < \alpha$. Portanto, cada $A_n \in Z_\alpha(S)$. Sabemos que $Z_{\beta_n}(S) \subset CZ_{\beta_n+1}(S)$ e $\beta_n + 1 \leq \alpha$. Assim, cada $A_n \in CZ_\alpha(S)$.

Portanto, cada $A_n \in A_\alpha(S)$, o que implica que $A \in (A_\alpha(S))_\sigma$. $\square$

O próximo teorema concretiza nosso objetivo inicial, isto é, caracterizar o conjunto $\{f : f$ é limitada e $f^{-1}(G) \in CZ_\alpha(S)$ para todo aberto $G \subset \mathbb{R}\}$.

Teorema A.20. *Seja $1 \leq \alpha$ um ordinal. Então, temos que:*

$B(S, A_\alpha(S)) = \{f : f$ *é limitada e* $f^{-1}(G) \in CZ_\alpha(S)$ *para todo aberto* $G \subset \mathbb{R}\}$.

Demonstração. De acordo com o Lema A.18, temos que $A_\alpha(S) = (A_\alpha(S))_\sigma \cap (A_\alpha(S))_\delta$. Usando o Corolário A.17, ficamos com:

$B(S, A_\alpha(S)) = \{f : f$ é limitada e $f^{-1}(G) \in (A_\alpha(S))_\sigma$, para todo aberto $G \subset \mathbb{R}\}$.

Dessa forma, do Lema A.19 segue que:

$B(S, A_\alpha(S)) = \{f : f$ é limitada e $f^{-1}(G) \in CZ_\alpha(S)$ para todo aberto $G \subset \mathbb{R}\}$. □

De acordo com o Teorema A.20, para estabelecermos a recíproca do Teorema de Lebesgue-Hausdorff generalizado no caso infinito, basta mostrarmos que para $\omega \leq \alpha$, vale

$$B(S, A_{\alpha+1}(S)) \subset B_\alpha(S).$$

Precisamos de alguns lemas para estabelecer esse resultado.

Definição A.21. *Sejam X um conjunto e $L \subset l_\infty(X)$ um reticulado de funções. Definimos:*

(i) $B_{a_1}(L) = \{f \in l_\infty(X) :$ existe sequencia $(f_n)_n \subset L$ convergindo pontualmente para f em $X\}$;

(ii) $u(L)$ o fecho de L em $(l_\infty(X), ||.||_\infty)$.

Lema A.22. *Sejam X um conjunto e $L \subset l_\infty(X)$ um reticulado de funções.*

Então, $u(L)$ é um reticulado de funções e $B_{a_1}(L) = B_{a_1}(u(L))$.

Demonstração. Inicialmente, vamos mostrar que $u(L)$ é um reticulado de funções.

Sejam $f, g \in u(L)$, temos que mostrar que as funções $max(f, g), min(f, g) \in u(L)$. Mostremos que isso vale para o máximo, a demonstração para o mínimo é completamente análoga.

Como $f, g \in u(L)$, existem $(f_n)_n, (g_n)_n \subset L$ tais que $(f_n)_n$ converge uniformemente para f em X e $(g_n)_n$ converge uniformemente para g em X. Do fato de L ser um reticulado de funções, vem que $max(f_n, g_n) \in L, \forall n \in \mathbb{N}$. Mostremos que a sequência $(max(f_n, g_n))_n \subset L$ converge uniformemente para $max(f, g)$ em X. Isso implicará que $max(f, g) \in u(L)$.

Sabemos que para quaisquer funções h, l, vale:

$$max(h, l) = \frac{1}{2}(h + l) + \frac{1}{2}|h - l|.$$

Portanto, temos que:

$$|max(f_n, g_n)(x) - max(f, g)(x)| = |\frac{1}{2}\{(f_n(x)+g_n(x))+|f_n(x)-g_n(x)|-(f(x)+g(x))-|f(x)-g(x)|\}|$$

$$= \frac{1}{2}|(f_n(x) - f(x)) + (g_n(x) - g(x)) + |f_n(x) - g_n(x)| - |f(x) - g(x)||$$

$$\leq \frac{1}{2}\{|f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| + ||f_n(x) - g_n(x)| - |f(x) - g(x)||\}$$

$$\leq \frac{1}{2}\{|f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| + |f_n(x) - g_n(x) - f(x) + g(x)|\}$$

$$\leq \frac{1}{2}\{|f_n(x)-f(x)|+|g_n(x)-g(x)|+|f_n(x)-f(x)|+|g_n(x)-g(x)|\} = |f_n(x)-f(x)|+|g_n(x)-g(x)|.$$

Dessa forma, ficamos com:

$$|max(f_n, g_n)(x) - max(f, g)(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)|,$$

para todo $x \in X$. Seja $\epsilon > 0$, como $(f_n)_n$ converge uniformemente para f em X e $(g_n)_n$ converge uniformemente para g em X, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que:

$$n \geq n_1 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2},$$

$$n \geq n_2 \Rightarrow |g_n(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{2},$$

para todo $x \in X$. Seja $n_0 = max(n_1, n_2)$. Temos que:

$$n \geq n_0 \Rightarrow |max(f_n, g_n)(x) - max(f, g)(x)| < \epsilon,$$

para todo $x \in X$. Isso mostra a convergência uniforme. Como discutido anteriormente, isso estabelece que $u(L)$ é um reticulado de funções.

Agora, vamos mostrar que $B_{a_1}(L) = B_{a_1}(u(L))$.

(i) Como $L \subset u(L)$, temos que $B_{a_1}(L) \subset B_{a_1}(u(L))$.

(ii) Mostremos que $B_{a_1}(u(L)) \subset B_{a_1}(L)$. Seja $f \in B_{a_1}(u(L))$, existe sequência $(f_n)_n \subset u(L)$ convergindo pontualmente para f em X.

Como $f_n \in u(L)$, fixado $n > 0$ existe $g_n \in L$ tal que:

$$||f_n - g_n||_\infty < \frac{1}{n}.$$

Vejamos que a sequência $(g_n)_n \subset L$ converge pontualmente para f em X, o que implicará que $f \in B_{a_1}(L)$.

Seja $x \in X$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2},$$

pois $(f_n)_n$ converge pontualmente para f. Além disso, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_1$ implica que $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2}$.

Tomemos $n_2 = max(n_0, n_1)$. Dessa forma, temos que:

$$n \geq n_2 \Rightarrow |g_n(x) - f(x)| \leq |g_n(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Isso mostra a convergência pontual de $(g_n)_n$ para f em X.

Como discutido anteriormente, isso mostra que $B_{a_1}(u(L)) \subset B_{a_1}(L)$.

De (i) e (ii), temos nosso resultado. □

Lema A.23. *Sejam X um conjunto e $L \subset l_\infty(X)$ um reticulado de funções. Suponha além disso, que L seja subespaço vetorial de $l_\infty(X)$ e que L contenha as funções constantes. Então $B_{a_1}(L)$ é subespaço vetorial de $l_\infty(L)$ e $B_{a_1}(L)$ é fechado em $(l_\infty(X), ||.||_\infty)$.*

Demonstração. É fácil ver que $B_{a_1}(L)$ é subespaço vetorial de $l_\infty(X)$.

Vamos mostrar que $B_{a_1}(L)$ é fechado em $(l_\infty(X), ||.||_\infty)$. Pelo Lema A.22, podemos assumir que L é subconjunto fechado de $l_\infty(X)$.

Seja $(f_n)_n \subset B_{a_1}(L)$ convergindo uniformemente para $f \in l_\infty(X)$. Mostremos que $f \in B_{a_1}(L)$, o que implicará que $B_{a_1}(L)$ é fechado.

Tomando subsequência se necessário, podemos assumir que:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2^{n+1}}, \forall x \in X.$$

Definamos $h_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$. Note que $|h_n(x)| < \frac{1}{2^n}$, para todo $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$.

É fácil ver que:

$$f = f_1 + \sum_{n=0}^{\infty} h_n. \tag{A.1}$$

Como cada $h_n \in B_{a_1}(L)$, pois $B_{a_1}(L)$ é subespaço vetorial, existe sequência $(s_i^n)_i \subset L$, convergindo pontualmente para h_n em X.

Definamos $d_i^n = min(s_i^n, \frac{1}{2^n})$ e $c_i^n = max(d_i^n, \frac{-1}{2^n})$. Note que $d_i^n, c_i^n \in L$, pois L contém as funções constantes e é reticulado de funções. É fácil ver que $(c_i^n)_i$ converge pontualmente para h_n em X e que $||c_i^n||_\infty \leq \frac{1}{2^n}, \forall i \in \mathbb{N}$.

Note que a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_i^n(x)$ é uniformemente convergente em X. Como cada $c_i^n \in L$ e L é uniformemente fechado, temos que $t_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_i^n(x) \in L$.

Vamos mostrar que $(t_i)_i$ converge pontualmente para $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ em X. Isso vai implicar que $\sum_{n=0}^{\infty} h_n \in B_{a_1}(L)$, e de acordo com a equação (A.1) teremos que $f \in B_{a_1}(L)$.

Fixemos $x \in X$. Dado $\epsilon > 0$, da convergência uniforme das séries, segue que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sum_{n=N}^{\infty} |c_i^n(x)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{e} \quad \sum_{n=N}^{\infty} |h_n(x)| < \frac{\epsilon}{3},$$

para todo $x \in X$. Fixado $0 \leq n < N$, existe $i_n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$i \geq i_n \Rightarrow |c_i^n(x) - h_n(x)| < \frac{\epsilon}{3N}.$$

Seja $i_0 = max(i_n : n = 0, \ldots, N-1)$. Dessa forma:

$$\begin{aligned} i \geq i_0 \Rightarrow |t_i(x) - \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)| &= |\sum_{n=0}^{\infty} c_i^n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)| \\ &= |\sum_{n=0}^{N-1} (c_i^n(x) - h_n(x)) + \sum_{n=N}^{\infty} (c_i^n(x) - h_n(x))| \\ &\leq \sum_{n=0}^{N-1} |c_i^n(x) - h_n(x)| + \sum_{n=N}^{\infty} |c_i^n(x)| + \sum_{n=N}^{\infty} |h_n(x)| \\ &< N.\frac{\epsilon}{3N} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Isso mostra a convergência pontual de $(t_i)_i$ para $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ em X.

Como discutido anteriormente, isso implica que $f \in B_{a_1}(L)$. $\square$

Agora, vamos mostrar o Lema de Sierpinski, que será fundamental para concluirmos a demonstração do Teorema de Lebesgue-Hausdorff no caso infinito.

Teorema A.24. *(**Lema de Sierpinski**) Seja S um espaço topológico.*

(1) Seja λ um ordinal limite. Se $A \in A_{\lambda+1}(S)$, então C_A é limite pontual de elementos de $\bigcup_{\alpha<\lambda}\{C_E : E \in A_\alpha(S)\}$;

(2) Seja α um ordinal sucessor. Se $A \in A_{\alpha+1}(S)$, então C_A é limite pontual de elementos de $\{C_E : E \in A_\alpha(S)\}$.

Demonstração. (1) Seja $A \in A_{\lambda+1}(S)$. Assim $A \in Z_{\lambda+1}(S) \cap CZ_{\lambda+1}(S)$. Dessa forma, temos que:

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n,$$

com $D_n \in CZ_\lambda(S)$, $(D_n)_n$ decrescente e

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n,$$

com $C_n \in Z_\lambda(S)$, $(C_n)_n$ crescente.

Como $C_n \in Z_\lambda(S)$, temos que $C_n = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} C_{nm}$ com $C_{nm} \in CZ_{\alpha_m}(S), \alpha_m < \lambda$. Portanto $C_{nm} \in A_{\alpha_m+1}(S)$. Note que $\alpha_m + 1 < \lambda$, pois λ é um ordinal limite. Além disso, podemos supor que $(C_{nm})_m$ é sequência decrescente, para cada n fixado.

Como $D_n \in CZ_\lambda(S)$, temos que $D_n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} D_{nm}$. Como discutido no Caso dos C_{nm}, cada D_{nm} pertence a uma classe ambígua de tipo inferior a λ. Além disso, podemos supor que $(D_{nm})_m$ é sequência crescente.

Para cada n, definamos $A_n = \bigcup_{k=1}^{n}(C_{kn} \cap D_{kn})$. Note que A_n pertence a uma classe ambígua de tipo inferior a λ.

Mostremos que $(C_{A_n})_n$ converge pontualmente para C_A em S. Seja $x \in S$.

(Caso 1) $x \in A$. Então $C_A(x) = 1$. Da definição de A, temos que:

$x \in D_n, \forall n \Rightarrow \exists m(n)$ tal que $x \in D_{nm(n)} \Rightarrow x \in D_{nm}, \forall m \geq m(n)$.

Também temos que existe n_0 tal que $x \in C_{n_0}$. Assim:

$x \in C_n, \forall n \geq n_0 \Rightarrow x \in C_{nm}, \forall m$ e $n \geq n_0$.

Dessa forma, temos $x \in C_{n_0,m} \cap D_{n_0,m}$ para todo $m \geq m(n_0)$. Seja $l_0 = max(n_0, m(n_0))$.

Se $n \geq l_0$, ficamos com:

$$A_n = \bigcup_{k \neq n_0, k=1}^{n} (C_{k,n} \cap D_{k,n}) \cup (C_{n_0,n} \cap D_{n_0,n}).$$

Como $n \geq m(n_0)$, temos que $x \in (C_{n_0,n} \cap D_{n_0,n})$.

Portanto para $n \geq l_0$, $x \in A_n$. O que implica que se $n \geq l_0$, então $C_{A_n}(x) = 1$.

Isso mostra a convergência em x.

(Caso 2) $x \notin A$. Então $C_A(x) = 0$.

Da definição de A, temos que existe n_0 tal que $x \notin D_{n_0}$, o que implica que $x \notin D_n, \forall n \geq n_0$. Portanto, temos que se $n \geq n_0$ então $x \notin D_{nm}, \forall m \in \mathbb{N}$.

Também temos que, $x \notin C_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, dado n existe $m(n)$ tal que $x \notin C_{nm(n)}$. Isso implica que para n fixado, se $m \geq m(n)$ então $x \notin C_{nm}$.

Seja $N = max(m(1), \ldots, m(n_0 - 1), n_0)$. Se $n \geq N$, temos:

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{n_0-1} (C_{kn} \cap D_{kn}) \cup \bigcup_{k=n_0}^{n} (C_{kn} \cap D_{kn}).$$

Sabemos que $x \notin D_{kn}$ se $k \geq n_0$, o que implica que $x \notin \bigcup_{k=n_0}^{n} (C_{kn} \cap D_{kn})$.

Pela escolha de N, temos $x \notin C_{kn}$ para todo $1 \leq k \leq n_0 - 1$. Logo $x \notin \bigcup_{k=1}^{n_0-1} (C_{kn} \cap D_{kn})$.

Portanto, para $n \geq N$ temos que $x \notin A_n$.

O que mostra a convergência em x.

(2) A demonstração é análoga a (1).

□

Teorema A.25. ***(Lebesgue-Hausdorff-Generalizado.Caso infinito)*** *Seja α um ordinal infinito. Então $B(S, A_{\alpha+1}(S)) = B_\alpha(S)$.*

Demonstração. De acordo com a Proposição A.3, temos que $B_\alpha(S) \subset B(S, A_{\alpha+1}(S))$. Falta mostrarmos que $B(S, A_{\alpha+1}(S)) \subset B_\alpha(S)$. Façamos indução em α.

Suponhamos que $\alpha = \omega$. É consequência imediata do Teorema A.24 (1) que:

$$span\{C_E : E \in A_{\omega+1}(S)\} \subset B_{a_1}(\bigcup_{n\in\omega} span\{C_E : E \in A_n(S)\}).$$

Portanto:

$$B(S, A_{\omega+1}(S)) \subset B_{a_1}(\bigcup_{n\in\omega} span\{C_E : E \in A_n(S)\}),$$

pois $B_{a_1}(\bigcup_{n\in\omega} span\{C_E : E \in A_n(S)\})$ é fechado, de acordo com o Lema A.23.

Como $span\{C_E : E \in A_n(S)\} \subset B(S, A_n(S))$, temos que $\bigcup_{n\in\omega} span\{C_E : E \in A_n(S)\} \subset \bigcup_{n\in\omega} B(S, A_n(S))$.

Portanto, $B_{a_1}(\bigcup_{n\in\omega} span\{C_E : E \in A_n(S)\}) \subset B_{a_1}(\bigcup_{n\in\omega} B(S, A_n(S)))$. Dessa forma, temos:

$$B(S, A_{\omega+1}(S)) \subset B_{a_1}(\bigcup_{n\in\omega} B(S, A_n(S))).$$

De acordo com as Proposições A.2 e A.5, temos que $B(S, A_n(S)) = B_n(S), \forall n \in \omega$. Logo, $B(S, A_{\omega+1}(S)) \subset B_{a_1}(\bigcup_{n\in\omega} B_n(S)) = B_\omega(S)$.

Assim, concluímos que $B(S, A_{\omega+1}(S)) \subset B_\omega(S)$. Logo, o resultado vale para $\alpha = \omega$.

Seja α um ordinal com $\omega < \alpha$. Suponhamos que para todo ordinal β, com $\omega \leq \beta < \alpha$ valha:

$$B(S, A_{\beta+1}(S)) \subset B_\beta(S).$$

Mostremos que o resultado também vale para α.

Caso 1 α é um ordinal limite. A demonstração desse caso se faz da mesma forma que fizemos para $\alpha = \omega$.

Caso 2 α é um ordinal sucessor. Suponhamos que $\alpha = \beta + 1$.

É consequência imediata do Teorema A.24 (2) que:

$$span\{C_E : E \in A_{\alpha+1}(S)\} \subset B_{a_1}(span\{C_E : E \in A_\alpha(S)\}).$$

Portanto, temos que:

$$B(S, A_{\alpha+1}(S)) \subset B_{a_1}(span\{C_E : E \in A_\alpha(S)\}),$$

pois $B_{a_1}(span\{C_E : E \in A_\alpha(S)\})$ é fechado, de acordo com o Lema A.23.

Como $span\{C_E : E \in A_\alpha(S)\} \subset B(S, A_\alpha(S)) = B(S, A_{\beta+1}(S))$, temos:

$$B_{a_1}(span\{C_E : E \in A_\alpha(S)\}) \subset B_{a_1}(B(S, A_{\beta+1}(S)))$$

Portanto, ficamos com:

$$B(S, A_{\alpha+1}(S)) \subset B_{a_1}(B(S, A_{\beta+1}(S))) \subset B_{a_1}(B_\beta(S)) = B_\alpha(S).$$

A última inclusão vale devido à hipótese de indução. Assim, temos que $B(S, A_{\alpha+1}) \subset B_\alpha(S)$.
Com isso, estabelecemos nosso resultado. □

Como consequência do que foi desenvolvido ao longo desse apêndice, temos o Teorema 5.1.13.

Corolário A.26. *Seja $1 \leq \alpha$ um ordinal.*

(1) Se α é um ordinal finito, então $B_\alpha(S) = B(S, A_\alpha(S))$;

(2) Se α é um ordinal infinito, então $B_\alpha(S) = B(S, A_{\alpha+1}(S))$.

Demonstração. (1) Seja $\alpha \geq 1$ um ordinal finito. Então o Teorema A.6 nos diz que:

$B_\alpha(S) = \{f : S \to \mathbb{R} : f$ é limitada e $f^{-1}(G) \in CZ_\alpha(S)$, para todo $G \subset \mathbb{R}$ aberto $\}$.

Usando o Teorema A.20, concluímos que $B_\alpha(S) = B(S, A_\alpha(S))$.

(2) Isso é o Teorema A.25.

□

Agora, podemos demonstrar o Teorema de Lebesgue-Hausdorff, Teorema 1.4.9.

Corolário A.27. *Seja $\alpha \geq 1$ um ordinal.*

(1) Se α é finito, então $B_\alpha(I) = B(I, H_\alpha) = B(I, K_\alpha)$;

(2) Se α é infinito, então $B_\alpha(I) = B(I, H_{\alpha+1}) = B(I, K_\alpha)$.

Demonstração. Como I é espaço métrico, o Teorema 5.1.20 nos diz que $A_\alpha(I) = H_\alpha$, para todo ordinal α.

Logo, nosso resultado é consequência imediata do Corolário A.26. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] A. Avilés, J. Castillo, M. González, Y. Moreno, F. Sánchez, *On separably injective Banach spaces*, preprint.

[2] W.Bade, *Complementation Problems for the Baire classes*, Pacific J. Math., 45 (1973), 1-11.

[3] W. Bade, *The Banach space $C(S)$*, Aarhus Universitet (1971).

[4] R. Baire, *Leçons sur les fonctions discontinus*, Paris (1905).

[5] F. Dashiell, *Isomorphism problems for the Baire classes*, Pacific J. Math., 52 (1974), 29-43.

[6] F. Dashiell, *Nonweakly compact operators from order-Cauchy complete C(S) lattices, with applications to the Baire classes*, Trans. Amer. Math. Soc., 266 (1981), 397-413.

[7] F. Dashiell and J. Lindenstrauss, *Some examples concerning strictly convex norms on C(K) spaces*, Israel J. Math., 16 (1973), 329-342.

[8] J. Diestel, *Geometry of Banach spaces-Selected topics*, Springer (1975).

[9] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach spaces*, Springer (1984).

[10] S. Ditor, *Averaging operators in $C(S)$ and lower semi-continuous sections of continuous maps*, Trans. Amer. Math. Soc., 175 (1973), 195-208.

[11] R. Douglas, *Banach algebra techniques in operator theory*, Academoc Press (1972).

[12] N. Dunford e J. Schwartz, *Linear operators*, Volume I, Interscience (1967).

[13] R. Engelking, W. Holstynski e R. Sikorski, *Some examples of Borel sets*, Colloquium Math., 15 (1966), 271-274.

[14] Fabian et al, *Functional analysis and infinite-dimensional geometry*, Springer (2001).

[15] J. Fernandez, *Medida e Integração*, Projeto Euclides, IMPA (1976).

[16] J. Foran, *Fundamentals of real analysis*, Marcel Dekker, Inc. (1991).

[17] L. Gillman e M. Jerison, *Rings of continuous functions*, Van Nostrand Reinhold (1960).

[18] C. Goffman, *Real functions*, Rinehart (1958).

[19] A. Grothendieck, *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type C(K)*, Canadian J. Math., 5 (1953), 129-173.

[20] P. Halmos, *Lectures on Boolean Algebras*, D. Van Nostrand Company, Inc. (1963).

[21] F. Hausdorff, *Set Theory*, Chelsea Publishing Company (1962).

[22] A. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Springer (1995).

[23] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley and Sons Inc. (1978).

[24] J. Kupka, *A short proof and generalization of a measure theoretic disjointization lemma*, Proc. Amer. Math. Soc., 45 (1974), 70-72.

[25] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. I, Academic Press (1966).

[26] K. Kuratowski e A. Mostowski, *Set theory*, N.H.P.C (1976).

[27] R. McWilliams, *A note on weak sequential convergence*, Pacifc J. Math., 12 (1962), 333-335.

[28] E. Odell e H. Rosenthal, *A double dual characterization of separable Banach spaces containing l^1*, Israel J. Math., 20 (1975), 375-384.

[29] A. Pelczynski, *Linear extensions, linear averagings, and their applications to linear topological classification of spaces of continuous functions*, Dissertationes Math., 58 (1968).

[30] H. Rosenthal, *On relatively disjoint families of measures, with some applications to Banach space theory*, Studia Math., 37 (1970), 13-36.

[31] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill (1966).

[32] Z. Semadeni, *Banach spaces of continuous functions*, Vol. I, Monografie Matematyczne, PWN (1971).

[33] W. Sierpinski, *Sur les anneaux de fonctions*, Fund. Math., 18 (1932), 1-22.

[34] S.M. Srivastava, *A course on Borel sets*, Springer (1998).

[35] B. Wells, *Uncomplemented spaces of continuous functions and weak compactness of measures*, Ph.D. Thesis, University of California, Berkley (1967).

[36] S. Willard, *General topology*, Dover Publications (2004).

[37] M. Zippin, *The separable extension problem*, Israel J. Math., 26 (1977), 372-387.