

**Sobre
renormalização e rigidez quaseconforme
de
polinômios quadráticos**

Arcelino Bruno Lobato do Nascimento

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Sylvain Philippe Pierre Bonnot

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CNPq

São Paulo, Março de 2016

Sobre renormalização e rigidez quaseconforme de polinômios quadráticos.

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 01/08/2016. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Sylvain Philippe Pierre Bonnot (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Edson Vargas - IME-USP
- Prof. Dr. Ali Messaoudi - UNESP-IBILCE

Agradecimentos

Gostaria inicialmente de agradecer a todos aqueles que tornaram possível a realização deste trabalho.

Em especial agradeço:

À minha mãe Iady Lobato e meus irmãos Yara, Wellington e Claudete pelo amor e apoio constante. E à toda família Lobato!

Ao meu orientador Sylvain Bonnot por ser essa pessoa incrível. Paciente, amigo, incentivador e que sempre esteve disposto a me atender e me ensinar. Obrigado!

Ao professor Edison Vargas, com quem cursei a disciplina Dinâmica Complexa, por sua colaboração.

Ao Arlane que me orientou durante a graduação, que me incentivou a vir estudar no IME. “Lembro-me do dia em que o Arlane foi a sala do professor Arthur perguntar-me se eu estava querendo estudar Matemática, já me dando um artigo para eu lhe apresentar no dia seguinte!(Demorei mais de um dia pra entendê-lo!) Obrigado por tudo!”

Ao professor Arthur, que foi meu professor no Liceu Maranhense, pelo apoio, colaboração e crédito que sempre depositou em mim. Grande incentivador.

Agradeço também aos amigos no IME: Salvador, German, Belmiro, Bruna, Larissa, Lorena, Simone, Raibel, Diego, Diego Rugev,...

Aos meus amigos da UFMA que estudam no IME: Elivaldo e Jailson.

À Ana Kelly, minha amiga desde a UFMA, por quem tenho grande admiração.

À Luna Lomonaco por nossas breves, mas proveitosas discussões sobre dinâmica complexa.

À CNPq pelo apoio financeiro desde a iniciação científica pelo Instituto do Milênio/IMPA o que decerto me direcionou até aqui.

Resumo

do NASCIMENTO, Arcelino Bruno Lobato. **Sobre renormalização e rigidez quaseconforme de polinômios quadráticos**. 2016. 92 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

Sem dúvida a questão central em *Dinâmica Holomorfa* é aquela sobre a densidade de hiperbolicidade. Temos a seguinte conjectura devida a *Pierre Fatou*: *No espaço das aplicações racionais de grau d o conjunto das aplicações racionais hiperbólicas neste espaço formam um subconjunto aberto e denso*. Nem mesmo para a família dos polinômios quadráticos esta questão foi respondida. Para a família quadrática este problema é equivalente a mostrar a não existência de polinômios quadráticos que suportam sobre o seu conjunto de Julia um campo de linhas invariante. Devido a resultados de *Jean-Christophe Yoccoz* sabemos da não existência de campos de linhas invariante para polinômios quadráticos no máximo finitamente renormalizáveis. Nesta dissertação é mostrado que um polinômio quadrático infinitamente renormalizável satisfazendo certa hipótese geométrica, denominada robustez, não suporta sobre o seu Julia um campo de linhas invariante. Esta prova foi obtida por *Curtis T. McMullen* e publicada em [McM1]. Os avanços na teoria de renormalização e quanto ao problema da densidade de hiperbolicidade e problemas relacionados tem contado com a colaboração de inúmeros renomados matemáticos como *Mikhail M. Lyubich*, *Artur Ávila*, *Mitsuhiro Shishikura*, *Curtis T. McMullen*, *Jean-Christophe Yoccoz*, *Sebastien van Strien*, *Hiroyuki Inou*, dentre outros.

Palavras-chave: família quadrática, renormalização, rigidez.

Abstract

do NASCIMENTO, Arcelino Bruno Lobato. **On renormalization and quasiconformal rigidity of quadratic polynomials**. 2016. 92 f. Dissertation (Graduate) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

Undoubtedly one of the central open questions in *Holomorphic Dynamics* is about proving the density of hyperbolicity. That question was first raised by *Pierre Fatou*: *In the space of rational functions of degree d the set of hyperbolic rational functions form a open and dense subset*. Not even for the family of quadratic polynomials this question been answered. For this particular quadratic family the problem is equivalent to showing the non-existence of quadratic polynomial with a Julia set supporting an invariant line field. Due to results by *Jean-Christophe Yoccoz* we already know the non-existence of invariant line fields for the quadratic polynomials that are at most finitely renormalizable. In this dissertation it is shown that an infinitely renormalizable quadratic polynomial satisfying a certain geometric hypothesis, called robustness, does not have an invariant line field supported on its Julia set. This proof was obtained by *Curtis T. McMullen* and published in [McM1]. Many advances on the theory of renormalization and on the problem of density of hyperbolicity have been already accomplished through the collective work of several renowned mathematicians such as *Mikhail M. Lyubich*, *Artur Ávila*, *Mitsuhiro Shishikura*, *Curtis T. McMullen*, *Jean-Christophe Yoccoz*, *Sebastien van Strien*, *Hiroyuki Inou* among others.

Keywords: quadratic family, renormalization, rigidity.

Sumário

Lista de Figuras	ix
1 Introdução	1
1.1 Sistemas Dinâmicos e Dinâmica Holomorfa	1
1.2 Renormalização e Rigidez	4
1.3 Organização do texto	6
2 Elementos preliminares	9
2.1 Dinâmica de polinômios quadráticos.	9
2.1.1 A esfera de Riemann	10
2.1.2 Extensão de um polinômio quadrático $P_c = z^2 + c$ à $\widehat{\mathbb{C}}$	10
2.1.3 A família quadrática	11
2.1.4 Decomposição dinâmica invariante de $\widehat{\mathbb{C}}$	11
2.1.5 O conjunto de Mandelbrot	14
2.1.6 Ponto fixo	15
2.1.7 Raios externos e equipotenciais	16
2.1.8 Pontos fixos de P_c	17
2.1.9 O quebra-cabeça de Yoccoz.	18
2.2 Aplicação do tipo polinomial	19
2.3 Aplicação quaseconforme.	21
2.4 Hiperbolicidade e Rigidez quaseconforme	23
2.5 Definições e resultados gerais	27
2.5.1 Geodésicas fechadas em superfícies de Riemann hiperbólicas	28
3 Renormalização	31
3.1 Os pequenos conjuntos de Julia se intersectam em pontos periódicos.	36
3.2 Renormalização Simples	38
3.3 Tipos de Renormalizações	39
3.3.1 Multiplicidade e Ramificação	41
3.4 Polinômios infinitamente renormalizáveis	41
3.4.1 A tabela crítica	43
3.5 Medida e conectividade local	45
4 Robustez	47
4.0.1 Área do conjunto pós-crítico	49

5 Rigidez	53
5.1 Primeira Parte	53
5.1.1 Rigidez de aplicações do tipo polinomial	54
5.2 Segunda Parte	60
6 Considerações finais	73
Referências Bibliográficas	75

Lista de Figuras

1.1	Conjunto de Mandelbrot	2
1.2	À esquerda em cinza o conjunto $A_\infty(c)$; em preto o Julia cheio e à direita o conjunto de Julia correspondente.	3
1.3	O conjunto de Mandelbrot no centro e alguns Julia cheios com seus parâmetros indicados.	3
1.4	Conjunto de Mandelbrot à esquerda e, à direita, zoom na parte enquadrada no Mandelbrot com o centro da componente hiperbólica de período 6 marcado.	4
1.5	Acima Julia cheio do polinômio P_c com $c = -1.77289290338162\dots$; abaixo, o Julia cheio de P^3 à esquerda e à direita o Julia cheio de P^6	5
1.6	Acima Julia cheio do polinômio P_c com $c = -1.77289290338162\dots$; abaixo, o Julia cheio de P^3 no centro e as suas pequens cópias.	5
2.1	Esfera de Riemann	10
2.2	Julia cheio	12
2.3	Conjuntos de Julia	12
2.4	Componentes do Fatou	14
2.5	Conjunto de Mandelbrot	15
2.6	Mandelbrot e um cópia sua. Zoom dado na região enquadrada na figura (a).	15
2.7	laminação geodésica do disco	15
2.8	raios externos e equipotenciais	17
2.9	Quebra-cabeça de Yoccoz da basílica	18
2.10	Quebra-cabeça do Coelho de <i>Douady</i> -nível 0	19
2.11	Quebra-cabeça do Coelho de <i>Douady</i> -nível 1	19
2.12	aplicação do tipo polinômial	20
3.1	Tabela(tirada de [Mil2])	44
5.1	Construção do campo de linhas univalente ν	57
5.2	Construção de Z_n	65
5.3	ilustração	66

Capítulo 1

Introdução

Esta dissertação baseia-se no livro *Complex Dynamics and Renormalization* de autoria do matemático *Curtis T. McMullen* no qual é provada parte de uma conjectura em Dinâmica Holomorfa conhecida como rigidez quaseconforme.

Mais especificamente, lidamos com um problema de rigidez restrito à família quadrática. Este problema pode ser enunciado da seguinte maneira:

Conjectura 1.0.1. *Um polinômio quadrático não suporta sobre o seu conjunto de Julia um campo de linhas invariante.*

No referido livro, *Curtis T. McMullen* provou o seguinte:

Teorema 1.1 (McMullen-1994). *Um polinômio quadrático infinitamente renormalizável robusto não suporta sobre o seu conjunto de Julia um campo de linhas invariante.*

Este teorema é o resultado principal desta dissertação.

McMullen provou ainda que todo polinômio quadrático infinitamente renormalizável P_c com $c \in \mathcal{M} \cap \mathbb{R}$ é robusto. E disto, mais um resultado provado por Yoccoz(veja o enunciado logo abaixo), concluiu que os polinômios P_c com $c \in \mathcal{M} \cap \mathbb{R}$ não suportam sobre o seu Julia um campo de linhas invariante.

Teorema 1.2 (Yoccoz). *Um polinômio quadrático que suporta sobre o seu Julia um campo de linhas invariante é infinitamente renormalizável.*

Este trabalho apresenta um estudo sobre renormalização de polinômios quadráticos e uma rápida introdução à dinâmica holomorfa e tópicos relacionados.

1.1 Sistemas Dinâmicos e Dinâmica Holomorfa

Os sistemas dinâmicos fornecem modelos excelentes para a descrição qualitativa e quantitativa de sistemas em evolução no âmbito das ciências experimentais. Uma primeira classificação dos sistemas dinâmicos os divide entre sistemas dinâmicos discretos e sistemas contínuos. O principal objetivo da área consiste em descrever o comportamento futuro de um sistema, estudando principalmente objetos e quantidades invariantes durante a evolução. Em geral, esses sistemas dinâmicos dependem de parâmetros.

Dentro da área de *Sistemas Dinâmicos*, a *Dinâmica Holomorfa* ocupa um lugar muito especial. Esta área de pesquisa é muito recente, desde que passou por um renascimento nos anos oitenta, e tem tido um crescimento explosivo nas últimas décadas.

Deste modo, em geral, em *Dinâmica Holomorfa unidimensional* estamos interessados em analisar o comportamento de uma função holomorfa agindo por iterações em uma Superfície de Riemann, como, por exemplo, entender a distribuição da órbita de um ponto, ver a existência de conjuntos invariantes e descrever sua topologia e geometria.

A área da *Dinâmica Holomorfa* é bem conhecida por ter feito popular a noção de conjuntos fractais. Estes são objetos que apresentam frequentemente um padrão de autossemelhança e uma dimensão de Hausdorff que não é um número inteiro. O trabalho de *Benoit Mandelbrot*(1924 – 2010) mostrou o quanto onipresentes esses objetos são. Graças aos trabalhos pioneiros produzidos por *Adrien Douady*(1935 – 2006) e *John Hamal Hubbard*(1945), muitas das conjecturas feitas por Mandelbrot foram rigorosamente demonstradas, iniciando assim uma nova era na dinâmica holomorfa.

Atualmente a maior parte das pesquisas em dinâmica holomorfa giram em torno da dupla *plano dinâmico - plano dos parâmetros*. Ou seja, sistemas dinâmicos são descritos não como objetos únicos, mas como variando dentro de famílias de tais objetos. Muitas vezes, as características dinâmicas que aparecem no plano dinâmico são refletidas dentro do plano dos parâmetros. Isto quer dizer que podemos obter informações importantes sobre a topologia, por exemplo, do plano dos parâmetros através do estudo das variações que acontecem no plano dinâmico quando os parâmetros são movidos: “*You first plow in the dynamical plane and then harvest in the parameter plane.*”(Adrien Douady)

O espaço de parâmetros mais conhecido é, sem dúvidas, o conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} , que é o espaço de parâmetros para a família dos polinômios quadráticos $P_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definidos por $P_c : z \rightarrow z^2 + c$, onde o parâmetro c é um número complexo.

O conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} pode ser definido como

$$\mathcal{M} := \{c \in \mathbb{C}; \text{a órbita de } 0 \text{ sob iteração de } P_c \text{ é limitada}\}.$$

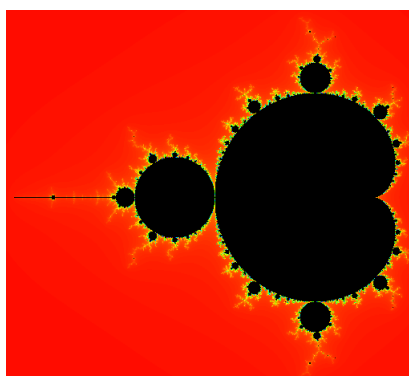


Figura 1.1: *Conjunto de Mandelbrot*

A intrincada estrutura da família dos polinômios quadráticos foi revelada através dos trabalhos de *A. Douady* e *J. H. Hubbard*([DH1], [DH2], [DH3], [Dou]).

Para cada membro da família quadrática $P_c(z) = z^2 + c$, (bem como para qualquer polinômio sobre $\widehat{\mathbb{C}}$) o ponto ∞ é um ponto fixo super-atrator, isto é, ∞ é um ponto fixo de P_c para o qual

também é ponto crítico. Denominamos $A_\infty(c)$ a sua bacia de atração, ou seja, $A_\infty(c) := \{z \in \widehat{\mathbb{C}}; P_c^n(z) \rightarrow \infty \text{ quando } n \rightarrow \infty\}$. Chamaremos de conjunto de Julia cheio $K(c)$ do polinômio P_c o conjunto de pontos que possuem órbita uniformemente limitada em \mathbb{C} , assim $K(c) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus A_c(\infty)$. O conjunto de Julia $J(c)$ do polinômio P_c é a fronteira comum do conjunto cheio de Julia (Julia cheio) e a bacia de atração do infinito, isto é, $J(c) = \partial K(c) = \partial A_c(\infty)$. Um Teorema clássico provado por Fatou em 1918 afirma que o conjunto de Julia cheio de um polinômio P é conexo se, e somente se, ele contém todos os pontos críticos finitos do polinômio, enquanto se P tem pelo menos um ponto crítico finito no complementar de $K(P)$, isto é, na bacia do infinito, então $J(P)$ e $K(P)$ possuem uma quantidade não enumerável de componentes conexas (consulte [Mil1]). No caso quadrático, P_c tem apenas um ponto crítico finito, a saber, o ponto $z = 0$. Neste caso, ou $0 \in K(c)$ e, portanto, $K(c)$ é conexo, ou $0 \notin K(c)$ e, então, $K(c)$ é um conjunto de Cantor. O conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} também pode ser definido como o conjunto de parâmetros $c \in \mathbb{C}$ para os quais $K(c)$ é conexo (veja Figura 1.3).



Figura 1.2: À esquerda em cinza o conjunto $A_\infty(c)$; em preto o Julia cheio e à direita o conjunto de Julia correspondente.

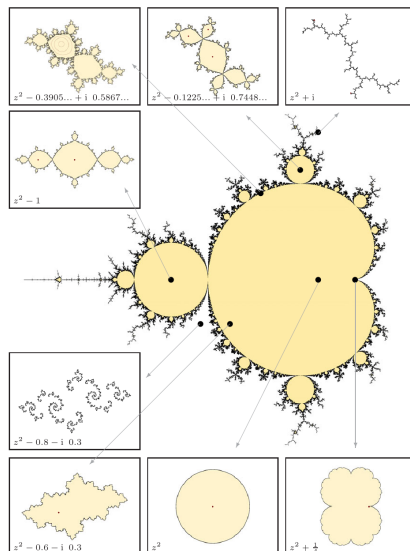


Figura 1.3: O conjunto de Mandelbrot no centro e alguns Julia cheios com seus parâmetros indicados.

1.2 Renormalização e Rigidez

O objetivo central deste trabalho é entender o comportamento dos iterados elevados de um polinômio quadrático P_c , isto é, compreender o comportamento de P_c^n para n muito grande.

Uma característica marcante de sistemas dinâmicos de baixa dimensão é que o seu comportamento a longo prazo em uma escala espacial menor é descrito por um sistema dinâmico induzido que pertence a mesma classe do sistema dinâmico inicial.

Assim, um procedimento de renormalização (ou um operador de renormalização) é definido considerando-se os sistemas dinâmicos induzidos depois de uma mudança de coordenadas conveniente (renormalização). Para o caso quadrático, com o qual trabalhamos, tal mudança de coordenadas se dá pelo seguinte fundamental teorema em dinâmica holomorfa e teoria de renormalização devido à *A. Douady e John H. Hubbard*.

Teorema 1.3 (Teorema de retificação (Straightening theorem) - caso quadrático). *Toda aplicação do tipo quadrático é hibridamente equivalente a um polinômio quadrático P_c . Se $c \in \mathcal{M}$, então P_c é único.*

Para uma definição de aplicação do tipo quadrático e equivalência híbrida consulte as seções 2.2 e 2.4.

Definição 1.1. *Seja $P_c(z) = z^2 + c$ um polinômio quadrático com seu conjunto de Julia conexo. A aplicação P_c^n é renormalizável se existem discos topológicos U e V em \mathbb{C} com $0 \in U \subset V$ e $P_c^n : U \rightarrow V$ é uma aplicação do tipo quadrático com Julia conexo. Dizemos ainda que P_c é renormalizável.*

Exemplo 1.1. *Consideremos o polinômio $P(z) = z^2 - 1.77289290338162\dots$*

$c = -1.77289290338162\dots$ é o centro da componente hiperbólica de período 6 do conjunto de Mandelbrot (veja a figura 3) e, portanto, $P^6(0) = 0$. P^3 e P^6 são renormalizáveis. O ponto crítico $z = 0$ é periódico de período 2 para a aplicação P^3 , em razão disto o Julia cheio renormalizado de P será o Julia cheio do polinômio quadrático $P_{-1} : z \mapsto z^2 - 1$ para o qual $z = 0$ é periódico de período 2. Enquanto para P^6 o ponto $z = 0$ é fixo e, portanto, o polinômio renormalizado de P^6 será $P_0 : z \mapsto z^2$.

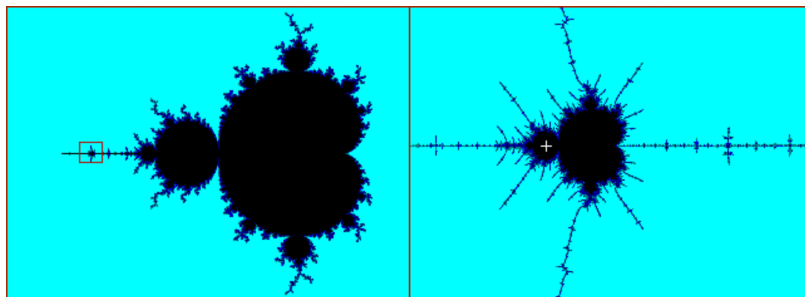


Figura 1.4: *Conjunto de Mandelbrot à esquerda e, à direita, zoom na parte enquadrada no Mandelbrot com o centro da componente hiperbólica de período 6 marcado.*

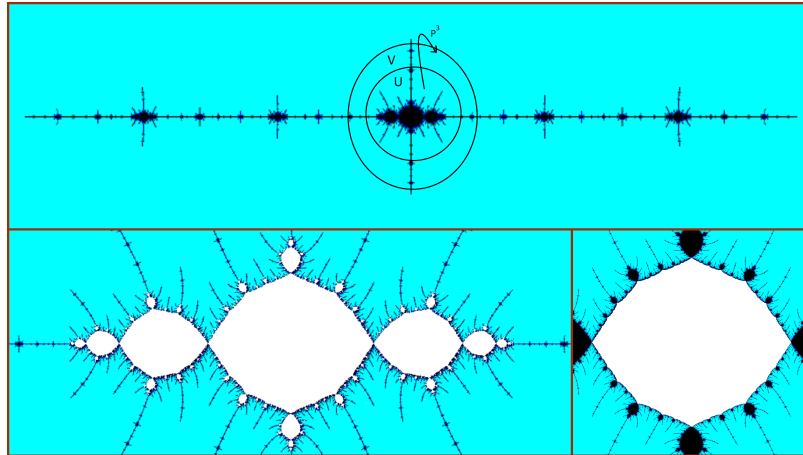


Figura 1.5: Acima Julia cheio do polinômio P_c com $c = -1.77289290338162\dots$; abaixo, o Julia cheio de P^3 à esquerda e à direita o Julia cheio de P^6



Figura 1.6: Acima Julia cheio do polinômio P_c com $c = -1.77289290338162\dots$; abaixo, o Julia cheio de P^3 no centro e as suas pequenas cópias.

O fenômeno da rigidez em suas diversas ocorrências consiste em uma das mais notáveis descobertas em geometria e sistemas dinâmicos de baixa dimensão. Ocorre em várias situações quando uma equivalência fraca entre certos objetos implica uma equivalência forte.

Pressupõe-se que a atenção aos problemas de rigidez se iniciou com a aparição do *Teorema da rigidez de Mostow* na geometria hiperbólica. Este teorema afirma que duas variedades hiperbólicas de dimensão 3 que são homotopicamente equivalentes são na verdade isométricas.

A rigidez na dinâmica holomorfa se apresenta em mais de uma forma. Nesta dissertação estamos lidando com o seguinte problema, mas restrito aos polinômios quadráticos:

Conjectura 1.2.1. *Uma aplicação racional $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ não suporta sobre seu conjunto de Julia um campo de linhas invariante ou é duplamente recoberto por um endomorfismo integral do toro complexo.*

Definição 1.2. *Uma aplicação racional não constante de grau d , $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, é uma aplicação holomorfa da forma $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ em que $P(z)$ e $Q(z)$ são polinômios sem fatores em comum e $d := \max\{\text{grau}(P), \text{grau}(Q)\}$, em que $\text{grau}(P)$ é o grau do polinômio P .*

Na verdade é sabido que toda aplicação holomorfa $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ é uma aplicação racional $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ com $P(z)$ e $Q(z)$ unicamente determinados a menos de multiplicação por uma constante.

No caso quadrático tal conjectura corresponde à Conjectura 1.0.1. Ela é equivalente a um problema central em dinâmica holomorfa enunciado por *Pierre Fatou* (1878 – 1929), que permanece em aberto, e afirma que os polinômios quadráticos hiperbólicos, isto é, aqueles para os quais o ponto crítico $z = 0$ tende para um ciclo atrator, formam um subconjunto aberto e denso da família quadrática.

Intuitivamente, um campo de linhas μ suportado no conjunto de Julia J corresponde a considerar uma reta real $L(z)$ que passa pela origem do espaço tangente de cada ponto $z \in E \subset J$ de um

subconjunto $E \subset J$ de J de medida (de Lebesgue) positiva de modo que a inclinação destas retas variem mensuravelmente em relação à $z \in E$. Fora do subconjunto E , $L(z)$ é tomada como uma linha horizontal. Dizemos que um campo de linhas é invariante se $f^{-1}(E) = E$ e f' transforma a linha em z na linha $f(z)$. Observe que, por definição, um conjunto de Julia de medida zero não suporta sobre si um campo de linhas. Em todo o texto, sempre que nos referirmos a *medida* estaremos nos referindo a medida de *Lebesgue*.

Entender as iteradas elevadas de uma aplicação racional f de grau $d > 1$ pode ser um problema bastante difícil. Existe uma tensão na dinâmica entre fatores expansores da f como, por exemplo, o fato de seu grau tender para o infinito por iteração, e fatores contrativos tal como a presença de ponto crítico. As aplicações melhor compreendidas são as hiperbólicas, para as quais a tensão se reduz à concentração da expansão no conjunto de Julia da aplicação e à presença de contração no resto da esfera de Riemann[McM1].

Depois do Teorema 1.2 o foco sobre o problema de rigidez transferiu-se para o âmbito dos polinômios infinitamente renormalizáveis. Para tais polinômios, as propriedades expansoras e contrativas encontram-se em um delicado equilíbrio. Por exemplo, o ponto crítico $z = 0$ pertence ao conjunto de Julia e sua órbita positiva é recorrente, isto é, possui subsequência que converge para 0. Além disso, os iterados futuros de f para tempos arbitrariamente grandes podem ser renormalizados para se obter um novo sistema dinâmico com a mesma forma geral da aplicação original f . A repetição desta forma em um número infinito de escalas consiste no contexto básico deste estudo([McM1]).

Métodos da Teoria Geométrica das Funções, Aplicações Quaseconformes, Geometria Hiperbólica e Teoria dos espaços de *Teichmüller* têm contribuído significativamente para o aprofundamento e alcance das pesquisas nesta área. Sob hipóteses geométricas adicionais, mostraremos que os sistemas dinâmicos renormalizados variam em uma família compacta. A compacidade é estabelecida combinando estimativas universais para a geometria de superfícies hiperbólica com teoremas sobre distorção para aplicações holomorfas (vide:cap5-[McM1]). Com estas informações, se estabelece a rigidez quaseconforme do polinômio original P_c . Ao longo do argumento principal vários aspectos da dinâmica complexa são envolvidos e outros são obtidos.

1.3 Organização do texto

Diferentemente da situação de um “paper”, essencialmente todo arcabouço preliminar para a prova do teorema de rigidez 1.1, incluindo os resultados mais técnicos, são apresentados em [McM1]. No entanto, o presente trabalho desenvolve-se a partir dos capítulos 7, 8, 9 e 10 de [McM1], de modo que os resultados presentes nos capítulos iniciais que se fizerem necessários serão devidamente referenciados. Isto é feito para que não tenhamos um texto muito longo e cansativo.

O texto está organizado da seguinte maneira.

No Capítulo 2 introduzimos alguns aspectos da dinâmica dos polinômios quadráticos, apenas o suficiente para o que será tratado aqui e para dar uma boa contextualização ao leitor. Nas seção 2.2 apresentamos as aplicações do tipo polinomial e as aplicações quaseconformes. Na seção 2.4 introduzimos alguns conceitos de fundamental importância na Dinâmica Holomorfa relacionando e discutindo mais precisamente sobre rigidez quaseconforme. Por fim, listamos algumas definições e resultados gerais que serão úteis nos capítulos seguintes.

O Capítulo 3 destina-se à *renormalização* de polinômios quadráticos. Inúmeros resultados são

obtidos nos assegurando, assim, uma boa descrição deste fenômeno, o que, por conseguinte faz deste capítulo uma boa introdução ao assunto. Apresentamos, também, neste capítulo uma ferramenta combinatória desenvolvida por *Bodil Branner* e *John H. Hubbard* denominada *Tabela Crítica* (*Critical Tableau*).

No Capítulo 4 introduzimos a noção de *robustez* para polinômios quadráticos infinitamente renormalizável e obtemos alguns resultados interessantes.

E finalmente, no Capítulo 5 provamos o teorema 1.1. Nas considerações finais falamos sobre generalizações obtidas, indicando, portanto, os caminhos que têm sido tomados nos avanços desta teoria bem como aqueles envolvidos nestas conquistas. Indicamos, também, direções de possíveis generalizações.

Capítulo 2

Elementos preliminares

2.1 Dinâmica de polinômios quadráticos.

Pressupõe-se que a dinâmica holomorfa tenha nascido com os estudos de Arthur Cayley (1821 – 1895) sobre o método de Newton no plano complexo por volta do ano 1879. No início do XX, Gaston Julia (1893 – 1978) e Pierre Fatou (1878 – 1929) iniciaram e desenvolveram um estudo sistemático de iterações de funções holomorfas na esfera de Riemann. No ano de 1942 C.L.Siegel colabora com o desenvolvimento desta área. A área passa por um tempo adormecida até que no início dos anos 80 a dinâmica holomorfa renasce com os trabalhos de Adrien Douady (1935 – 2006) e seu aluno John H. Hubbard (1945). Tal ressurgência se deve ao advento do computador, que possibilitou desenhar as bacias de atração e a visualização do conjunto de Mandelbrot devida à Benoit Mandelbrot (1924 – 2010).

Definição 2.1 (função holomorfa). *Seja $U \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto. Vamos dizer que uma função $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa em $z_0 \in U$ se:*

1. **analiticidade:** *existe uma bola $B_\epsilon(z_0) \subset U$ de raio $\epsilon > 0$ tal que f nessa bola pode ser escrita como uma série de potências convergente:*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n \text{ para todo } z \in B_\epsilon(z_0)$$

isto é, f é analítica em z_0 , ou

2. **\mathbb{C} -diferenciabilidade:** *existe o limite $\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \zeta) - f(z_0)}{\zeta}$. Denotamos este limite, quando existe, por $f'(z_0)$ e o denominamos derivada de f em z_0 .*

f é holomorfa em U se for holomorfa em cada ponto z de U . Quando $a_1 \neq 0$ ou $f'(z_0) \neq 0$ diremos que f é conforme em z_0 . f é conforme no aberto U se for conforme em cada ponto de U . Quando f tem uma inversa f^{-1} e esta é também holomorfa dizemos que f é biholomorfa ou é um biholomorfismo sobre $f(U)$.

Da Análise Complexa sabemos que 1. e 2. a cima são equivalentes.

Num sentido geral, em dinâmica holomorfa estamos interessados em entender o comportamento das iteradas de uma função holomorfa, isto é, $f^{\circ n} := \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n$.

2.1.1 A esfera de Riemann

Consideremos o conjunto

$$\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

em que ∞ representa um ponto fora de \mathbb{C} .

Com a topologia $\tau := \{U \subset \mathbb{C}; U \text{ é aberto}\} \cup \{(\mathbb{C} - K) \cup \{\infty\}; K \subset \mathbb{C} \text{ é compacto}\}$, $\widehat{\mathbb{C}}$ é um espaço topológico compacto Hausdorff homeomorfo à \mathbb{S}^2 .

Podemos por em $\widehat{\mathbb{C}}$ uma estrutura holomorfa através do atlas holomorfo $\mathcal{A} := \{(\mathbb{C}; Id), (\mathbb{C} - \{0\} \cup \{\infty\}; Inv)\}$ em que:

- $Id(z) = z$ para $z \in \mathbb{C}$;
- $Inv(z) = \frac{1}{z}$ em $\mathbb{C} - \{0\}$ e $Inv(\infty) = 0$,

Definição 2.2. *Seja Σ a estrutura holomorfa que contém o atlas \mathcal{A} . $\widehat{\mathbb{C}} = (\widehat{\mathbb{C}}; \Sigma)$ é uma superfície de Riemann, isto é, uma variedade complexa de dimensão 1, chamada Esfera de Riemann.*

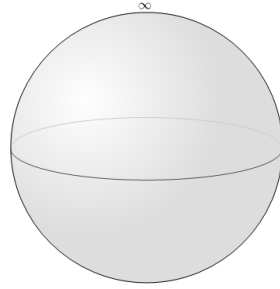


Figura 2.1: Esfera de Riemann

Definição 2.3 (Função holomorfa na esfera de Riemann). *Uma função $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ será holomorfa se $f|_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ for holomorfa e $z \mapsto \frac{1}{f(\frac{1}{z})}$ for holomorfa em uma vizinhança de 0. Definimos a derivada de f no infinito, $f'(\infty)$, como sendo a derivada de sua representação local $z \mapsto \frac{1}{f(\frac{1}{z})}$ no 0.*

2.1.2 Extensão de um polinômio quadrático $P_c = z^2 + c$ à $\widehat{\mathbb{C}}$

Definimos $P_c : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ pondo $P_c = z^2 + c$ se $z \in \mathbb{C}$ e $P_c(\infty) = \infty$.

É imediato que P_c é holomorfa se $z \in \mathbb{C}$. Na variável, $w = \frac{1}{z}$, P_c é dado numa vizinhança de 0 por

$$w \mapsto \frac{w^2}{1 + cw^2} \tag{2.1}$$

Podemos tomar $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ numa vizinhança do ∞ de modo que $|cw^2| < 1$ e com isso teremos

$$w \mapsto \frac{w^2}{1 + cw^2} = w^2(1 - cw^2 + \dots) = w^2 - cw^4 + \dots, \tag{2.2}$$

logo, P_c é holomorfa no ∞ e, portanto, é holomorfa em $\widehat{\mathbb{C}}$. Note que $P'_c(\infty) = 0$, já que a expansão em séries de potências de sua representação local no infinito não possui o termo de grau 1.

2.1.3 A família quadrática

A família quadrática é a classe de sistemas dinâmicos holomorfos que consideraremos neste trabalho. Estes sistemas dinâmicos são os que mais se estudou em Dinâmica Holomorfa e, no entanto, grandes perguntas permanecem sem respostas sobre eles. Apresentaremos nesta subseção apenas os conceitos que se faram necessários para o desenvolvimento do texto. Dessa forma, para mais informações vide bibliografia.

Definição 2.4. *A Família Quadrática consiste na seguinte família a um parâmetro*

$$\mathcal{Q} := \{P_c \in \text{Hol}(\widehat{\mathbb{C}}, \widehat{\mathbb{C}}); P_c : z \mapsto z^2 + c \text{ com } c \in \mathbb{C}\}$$

O estudo dos polinômios P_c é suficiente para compreendermos todos os polinômios quadráticos $P(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$ com $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ e $\alpha \neq 0$. Isto porque com uma mudança de variável todo polinômio quadrático $P(z)$ pode ser posto, de maneira única, na forma $P_c(z) = z^2 + c$.

Definição 2.5. *Dois polinômios quadráticos P_a e P_b são conformemente conjugados (equivalentes) se existe uma aplicação de Möbius $h : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ tal que $P_a = h^{-1} \circ P_b \circ h$.*

Proposição 2.1. *Todo polinômio quadrático $P(z) = az^2 + 2bz + d$ é conformemente conjugado ao polinômio $P_c(z) = z^2 + c$ com a conjugação $S(z) = az + b$ e $c = ad + b - b^2$.*

Vejamus então, um exemplo simples, mas que nos ajude a ter um intuição sobre a dinâmica destes polinômios.

Exemplo 2.1. *Consideremos o polinômio $P_0 = z^2$.*

Escrevendo $z = re^{2\pi it}$ teremos $P_0^n(z) = r^{2^n} e^{2^{n+1}\pi it}$, e assim vê-se que:

1. $P_0^n(z) \rightarrow \infty$ se $r = |z| > 1$;
2. $P_0^n(z) \rightarrow 0$ se $r = |z| < 1$;
3. *sobre o círculo $|z| = 1$, P_0 é conjugada à $S(t) = 2t \pmod{1}$. Se escrevermos t na expansão diádica, S corresponderá a aplicação deslocamento (shift). Com isso, trabalhando um pouco mais, conseguimos exibir um ponto em \mathbb{S}^1 cuja órbita por P_0 é densa em \mathbb{S}^1 , isto é, $\overline{\{P_0^n(z_0); n \in \mathbb{N}\}} = \mathbb{S}^1$. E, portanto, a dinâmica de P_0 sobre \mathbb{S}^1 se apresenta mais interessante.*
4. *note que $P_0(0) = 0$ com $P_0'(0) = 0$ e $P_0(\infty) = \infty$ com $P_0'(\infty) = 0$*

2.1.4 Decomposição dinâmica invariante de $\widehat{\mathbb{C}}$

A dinâmica de um polinômio quadrático particiona naturalmente a esfera de Riemann em dois subconjuntos complementares e totalmente invariantes, chamados conjuntos de Julia e Fatou. Pelo menos no contexto da dinâmica polinomial podemos dizer que o conjunto de maior interesse é o conjunto de Julia, pois é onde a dinâmica se apresenta mais complicada e interessante.

No caso polinomial esses conjuntos podem ser facilmente introduzidos a partir de um outro subconjunto invariante denominado *conjunto cheio de Julia* que em geral chamaremos apenas de *Julia cheio*.

Definição 2.6 (Conjunto cheio de Julia). *O conjunto cheio de Julia de $P_c : z \mapsto z^2 + c$ é por definição o seguinte conjunto,*

$$K(c) := \{z \in \mathbb{C}; \sup_n \{|P_c^n(z)|\}; n \in \mathbb{N}\} < +\infty\}. \quad (2.3)$$

Definição 2.7 (Bacia do infinito). *A bacia do infinito de P_c é o subconjunto $\widehat{\mathbb{C}} - K(c)$, isto é,*

$$A_\infty(c) := \{z \in \widehat{\mathbb{C}}; P_c^n(z) \rightarrow \infty \text{ quando } n \rightarrow +\infty\} \quad (2.4)$$

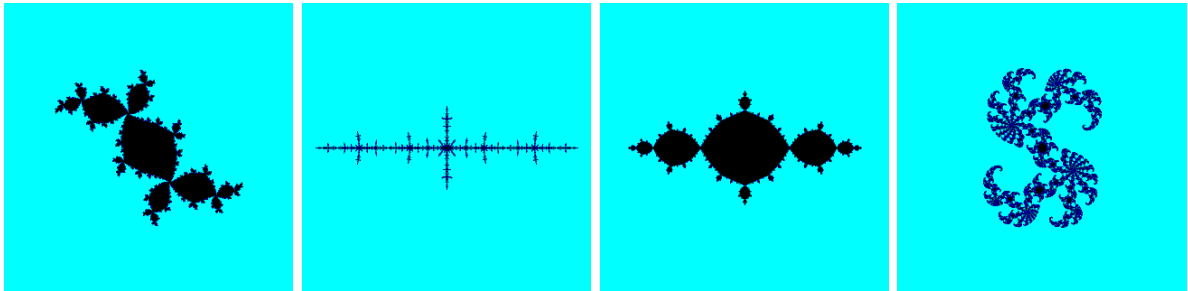


Figura 2.2: *Julia cheio*

Listamos a seguir algumas propriedades de $K(c)$:

1. $K(c) \neq \emptyset$. Pois temos pelo menos os pontos fixos de P_c em $K(c)$, isto é, contém os pontos $z_0 \in \mathbb{C}$ tais que $P_c(z_0) = z_0$;
2. $K(c)$ é compacto. Pois não é difícil ver que seu complementar contém uma vizinhança aberta do infinito;
3. $\widehat{\mathbb{C}} - K(c)$ é conexo. Decorre de uma aplicação direta do teorema do módulo máximo;
4. $K(c)$ é totalmente invariante, isto é, $P_c^{-1}(K(c)) = K(c)$.

Definição 2.8. *O conjunto de Julia de $P_c : z \mapsto z^2 + c$ é por definição*

$$J(c) := \partial K(c) = \partial A_\infty(c)$$

Veja a seguir alguns exemplos:

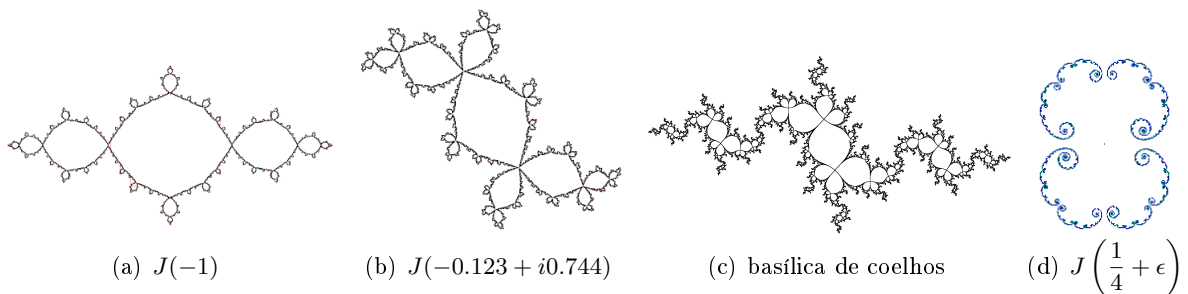


Figura 2.3: *Conjuntos de Julia*

Propriedades de $J(c)$:

1. $J(c) \neq \emptyset$;
2. $J(c)$ é compacto;
3. $J(c)$ é totalmente invariante.

Definição 2.9 (Ponto crítico). *Um ponto crítico para P_c é um ponto $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ tal que $P'_c(z) = 0$.*

Muitas propriedades dinâmicas globais de P_c dependem do comportamento do ponto crítico. Como é ilustrado pelo seguinte teorema devido a *Fatou*.

Teorema 2.1 (Fatou). *Se $P_c^n(0) \rightarrow \infty$, então, $J(c)$ é totalmente desconexo.*

Sabe-se que os conjuntos de Julia são subconjuntos perfeitos de $\widehat{\mathbb{C}}$, isto é, que todo ponto de $J(c)$ é ponto de acumulação de $J(c)$. A partir disso, temos a seguinte forte dicotomia:

Teorema 2.2. *$J(c)$ é conexo ou um conjunto de Cantor.*

Na figura 2.3(d) o conjunto de Julia é um Cantor.

Um outro conjunto que cumpre um papel importantíssimo nos sistemas dinâmicos holomorfos é o conjunto pós-crítico.

Definição 2.10. *O conjunto pós-crítico de um polinômio quadrático P_c é o conjunto*

$$P(c) := \overline{\{P_c^n(0); n \geq 1\}} \quad (2.5)$$

Da definição vê-se que $P_c(P(c)) \subset P(c)$ e $P(P_c^k) = P(c)$ para todo $k \geq 1$. $P(c)$ é o menor fechado que contém os pontos críticos de todos os iterados positivos de P_c^k de P_c .

Definição 2.11. *Quando $P(c)$ for um conjunto finito denominamos P_c de pós-crítico finito.*

Introduziremos agora o *Conjunto de Fatou*.

Definição 2.12. *O conjunto de Fatou de P_c é por definição*

$$F(c) := \widehat{\mathbb{C}} - J(c)$$

Seguem algumas propriedades de $F(c)$ mais outras de $J(c)$.

1. $F(c)$ é aberto, pois $J(c)$ é fechado;
2. $F(c)$ e $J(c)$ são totalmente invariantes; *i.e.*, $P_c(F(c)) \subset F(c)$ e $P_c^{-1}(F(c)) \subset F(c)$
3. $F(P_c^n) = F(c) \Rightarrow J(P_c^n) = J(c)$

Para o caso de polinômios quadráticos (ou mesmo funções racionais em $\widehat{\mathbb{C}}$), a dinâmica das componentes do conjunto de Fatou é um problema completamente resolvido. Isto se resume nos seguintes dois teoremas devidos à *Dennis Sullivan* (1941).

Teorema 2.3 (Teorema das componentes não errantes de Sullivan). *Toda componente do conjunto de Fatou é eventualmente periódica. Isto é, se U é uma componente de $F(c)$, então, existe $(m, n) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{N} - \{0\})$ tal que $P_c^n(P_c^m(U)) = P_c^m(U)$.*

Teorema 2.4 (Teorema de classificação de Sullivan). *Seja f uma função racional com $\text{grau}(f) \geq 2$ e U uma componente periódica do conjunto de Fatou então, uma, e apenas uma, das seguintes opções é satisfeita por U*

1. U é uma bacia atratora;
2. U é uma pétala atratora de um ciclo parabólico, isto é, existe $z_0 \in \partial U$ tal que todo ponto de U converge para z_0 por iteração de f ;
3. U é simplesmente conexo e $f|_U : U \rightarrow U$ é conformemente conjugada a uma rotação irracional no disco unitário;
4. U é duplamente conexo e $f|_U : U \rightarrow U$ é conformemente conjugada a uma rotação irracional em um anel (para uma definição de anel consulte 2.21).

Devido ao teorema do módulo máximo não temos a ocorrência do item 4 no caso polinomial.

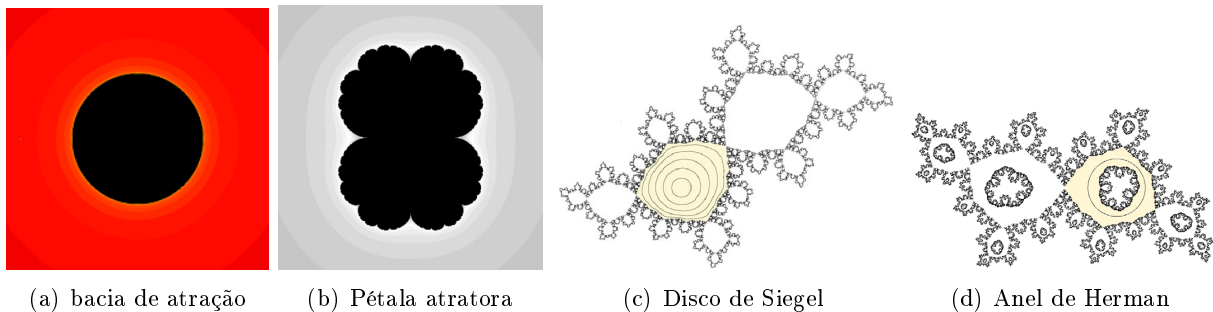


Figura 2.4: Componentes do Fatou

Vimos na proposição 2.1 que o conjunto dos polinômios quadráticos definem uma família a um parâmetro denominada de família quadrática. Assim, em *Dinâmica Holomorfa* não estamos interessados apenas no espaço de fase, dito comumente de espaço dinâmico, mas também no espaço de parâmetros \mathbb{C} .

2.1.5 O conjunto de Mandelbrot

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &:= \{c \in \mathbb{C}; J(P_c) \text{ é conexo}\} \\ &= \{c \in \mathbb{C}; \sup_n \{|f_c^n(0)|\} < \infty\} \end{aligned}$$

\mathcal{M} tem sido de grande interesse devido sua beleza e por ser um objeto bastante complicado. É um exemplo de um compacto de \mathbb{C} que possui uma topologia um tanto quanto intrincada. Embora muito já se saiba sobre tal conjunto, algumas perguntas perduram irresolutas. \mathcal{M} consiste em um exemplo de conjunto fractal com a propriedade de autossimilaridade de conter cópias de si, como é ilustrado na figura 2.6. Assim, podemos prosseguir fazendo tais ampliações em cada cópia de \mathcal{M} obtida na ampliação anterior.

A aparição destas pequenas cópias de \mathcal{M} próprio pode ser explicada a partir da teoria das aplicações do tipo polinomial desenvolvida por *Douady* e *Hubbard*. Uma das principais conjecturas em *Dinâmica Holomorfa* é sobre a topologia de \mathcal{M} , que contém um grande conteúdo dinâmico.

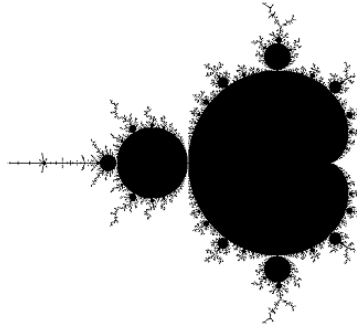
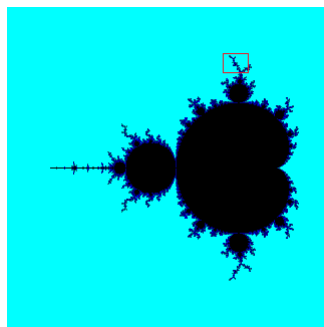
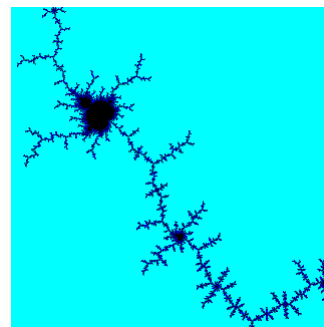


Figura 2.5: *Conjunto de Mandelbrot*



(a) Mandelbrot



(b) pequena cópia de \mathcal{M} em \mathcal{M}

Figura 2.6: *Mandelbrot e um cópia sua. Zoom dado na região enquadrada na figura (a).*

Conjectura 2.1.1 (Douady-Hubbard). \mathcal{M} é localmente conexo.

Já temos pronto um modelo topológico-combinatório para \mathcal{M} , caso ele seja localmente conexo, devido à Douady que consiste no modelo dos discos apertados ([Dou2]).

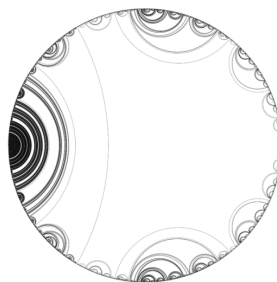


Figura 2.7: *laminação geodésica do disco*

2.1.6 Ponto fixo

Definição 2.13. $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ é ponto fixo de P_c se, e somente se, $P_c(z_0) = z_0$

Definição 2.14. O multiplicador de um ponto fixo z_0 é o número $\lambda := P'_c(z_0)$.

Os pontos fixos são classificados em relação ao seu multiplicador como segue:

1. Se $|\lambda| < 1$ denominamos z_0 de ponto fixo atrator;
 - Se $|\lambda| = 0$ denominamos z_0 de ponto fixo super-atrator;

2. Se $|\lambda| > 1$ denominamos z_0 de ponto fixo repulsor;
3. Se $|\lambda| = 1$ denominamos z_0 de ponto fixo indiferente:
 - Se $\lambda = e^{2\pi i \frac{p}{q}}$ com $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, denominamos z_0 de ponto fixo parabólico;
 - Se não, denominamos z_0 de ponto fixo irracionalmente indiferente.

Isto posto, segue do que vimos na subseção 2.1.2 que o ∞ é ponto fixo super-atrator de qualquer polinômio quadrático P_c .

No estudo do comportamento local de uma aplicação holomorfa em um ponto fixo estamos interessados na existência de uma mudança de coordenadas canônica em uma vizinhança deste ponto. E decerto temos tais coordenadas.

Teorema 2.5 (Coordenada de Böttcher). *Dado P_c . Para R grande o suficiente existe uma única aplicação*

$$\phi : \{|z| > R\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

que é biholomorfa de $V := \{|z| > R\}$ em $\phi(V)$ tal que $\phi(P_c(z)) = (\phi(z))^2$. ϕ é chamada de coordenada de Böttcher.

Teorema 2.6. *Se $c \in \mathcal{M}$, a coordenada de Böttcher ϕ nos dá a uniformização de $\widehat{\mathbb{C}} - K(P_c)$, isto é, ϕ é um biholomorfismo aplicação de Riemann de $\widehat{\mathbb{C}} - K(P_c)$ até $\widehat{\mathbb{C}} - \mathbb{D}$.*

2.1.7 Raios externos e equipotenciais

Definição 2.15 (Raio externo). *Dado $t \in \mathbb{R} \bmod 1$ definimos a curva $R_t := \{z \in \mathbb{C}; \arg(\phi(z)) = t\}$ e denominamos de raio externo de P_c com ângulo t .*

Definição 2.16 (Equipotencial). *Dado $R > 1$ definimos a curva $E_R := \{z \in \mathbb{C}; |\phi(z)| = R\}$ e denominamos de equipotencial de P_c com potencial(altura) $\exp R$.*

Como $P_c = \phi^{-1} \circ \theta \circ \phi$ em $\widehat{\mathbb{C}} - K(P_c)$, onde $\theta(z) := z^2$, temos $P_c(R_t) = R_{2t}$ e $P_c(E_R) = E_{R^2}$. Por indução temos, $P_c^n(R_t) = R_{2^n t}$ e $P_c^n(E_R) = E_{R^{2^n}}$, sendo assim, os raios externos e as equipotencias invariantes pelo polinômio P_c . Em particular, se t_0 é periódico para $t \mapsto 2t \bmod 1$, então, R_{t_0} é aplicado sobre si por algum iterado de P_c . R_0 é o único raio de $K(P_c)$ que é fixo para P_c .

Definição 2.17. *Diremos que um raio externo R_t com $t \in \mathbb{R} \bmod 1$ é racional se t for racional. E diremos que R_t é periódico se o ângulo t for periódico para a aplicação $t \mapsto 2t \bmod 1$.*

Quando, para $t \in \mathbb{R} \bmod 1$ fixado, o limite $\lim_{r \searrow 1} \phi^{-1}(r \exp(2\pi i t))$ existir, o denotaremos por $\gamma(t)$ e diremos que o raio externo R_t aterrissa no ponto $\gamma(t) \in \partial J(c)$. Diremos também que $\gamma(t) \in J(c)$ é um ponto de aterrissagem de R_t .

Listamos, a seguir, algumas propriedades dos raios externos. Para mais informações e resultados sobre este assunto consultem §18-[Mil1], Cap.6-[McM1].

Para o que segue assumamos P_c com $c \in \mathcal{M}$.

Teorema 2.7. *Se o raio R_t aterrissa em um ponto $\gamma(t) \in J(c)$, então, o raio R_{2t} aterrissa no ponto $\gamma(2t) = P_c(\gamma(t))$. Além do mais, cada raio da forma $R_{\frac{t+j}{2}}$ aterrissa em um dos pontos de $P_c^{-1}(\gamma(t))$ e cada ponto de $P_c^{-1}(\gamma(t))$ é ponto de aterrissagem de um destes raios.*

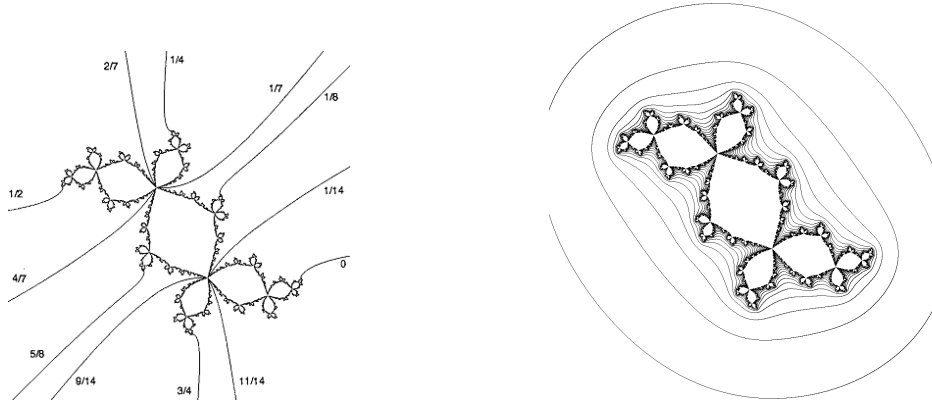


Figura 2.8: raios externos e equipotenciais

Note que se R_t é periódico de período $p \geq 1$ e aterrissa em um ponto $\gamma(t)$, então $\gamma(t)$ é periódico com período q que divide p .

Teorema 2.8 (Douady). *Pontos periódicos repulsores e parabólicos são pontos de aterrissagem de pelo menos um raio externo periódico.*

Teorema 2.9. *Todo raio externo periódico aterrissa em um ponto do conjunto de Julia que é um ponto periódico repulsor ou parabólico. Caso o argumento do raio seja racional, mas não periódico (para a aplicação $t \mapsto 2t$), então, o raio aterrissa em um ponto eventualmente periódico não periódico.*

Teorema 2.10. *Se um raio aterrissa em $z_0 \in J(c)$, então apenas um número finito de raios externos aterrissam neste ponto, e todos possuem o mesmo período.*

Teorema 2.11. *Seja z_0 um ponto parabólico ou repulsor para P_c . Então, o número de componentes de $K(c) - \{z_0\}$ é igual ao número de raios externos que aterrissam em z_0 .*

Para uma prova destes teoremas consulte [Mil1],[McM1].

2.1.8 Pontos fixos de P_c

É certo, pelo teorema fundamental da álgebra, que cada polinômio P_c tem dois pontos fixos. E com uma simples conta verificamos que existe um único parâmetro $c \in \mathbb{C}$ para o qual $P_c(z) - z$ tem raiz com multiplicidade 2 que, a saber, é $c = \frac{1}{4}$. Seguindo a notação posta por *Douady-Hubbard* denotaremos por β o ponto fixo de $P_{c \neq 1/4}$ no qual o raio externo de argumento igual a 0 aterrissa. Ao outro ponto fixo denotaremos por α . Geralmente estamos interessados em polinômios P_c para os quais os pontos fixos são repulsores.

Teorema 2.12. *O ponto fixo β não separa o Julia cheio K_c , isto é, $K_c - \beta$ possuem apenas uma componente conexa.*

Corolário 2.1. *Um ponto fixo repulsor ou parabólico z_0 separa o Julia cheio K_c se, e somente se, $z_0 = \alpha$.*

2.1.9 O quebra-cabeça de Yoccoz.

A partir do sistema de curvas invariantes por P_c formado pelos raios externos e as equipotenciais construímos uma partição dinâmica de $\widehat{\mathbb{C}}$ globalmente invariante que será uma ferramenta combinatória de fundamental importância para o estudo da dinâmica de P_c . A esta partição chamamos de *Quebra-cabeça de Yoccoz*.

Consideremos P_c com $c \in \mathcal{M}$ e cujos pontos fixos sejam repulsores. Por simplicidade suporemos ainda que a órbita positiva do ponto crítico $z = 0$ seja disjunta do ponto fixo α . Assim, estaremos em condições de posteriormente definir uma outra ferramenta combinatória denominada *tabela crítica* e evitamos o caso em que o conjunto pós-crítico é finito cuja dinâmica já se encontra totalmente entendida (por métodos que não envolvem o quebra-cabeça de Yoccoz).

Seja φ a aplicação de Riemann de $\widehat{\mathbb{C}} - \mathbb{D}$ para $\widehat{\mathbb{C}} - K(c)$ normalizada por $\varphi'(\infty) = 1$. Consideremos o domínio D contendo $K(c)$ cuja fronteira é a imagem por φ^{-1} do círculo centrado na origem com raio igual a 2. Este disco topológico fica dividido em q subdomínios em que $q > 1$ é o número de raios externos que aterrissam no ponto fixo α . Chamaremos tais domínios de peças e as denotaremos por Y_0^i em que $P_c^i(0) \in Y_0^i$, para $i = 0, 1, \dots, q-1$. Tais peças, $\{Y_0^i\}_{i=0}^{q-1}$, formam o nível zero do *quebra-cabeça de Yoccoz*, $Y_0 = \cup_{i=0}^{q-1} Y_0^i$, que nada mais é do que o domínio D com os seguimentos de raios externos que aterrissam em α destacados.

Cada peça Y_0^i é um disco fechado cuja fronteira consiste na união do ponto fixo α , dois arcos de raios externos e um arco da equipotencial $\varphi^{-1}(\partial B(0, 2)) = \partial D$.

Cada peça do nível $n+1$ fica contida dentro de uma única peça do nível n , pois os raios que aterrissam em $J(c)$ no nível $n+1$ diferentes dos raios do nível anterior n aterrissam em pontos de $J(c)$ contidos em alguma peça, mas, os raios não se intersectam pois φ é injetora.

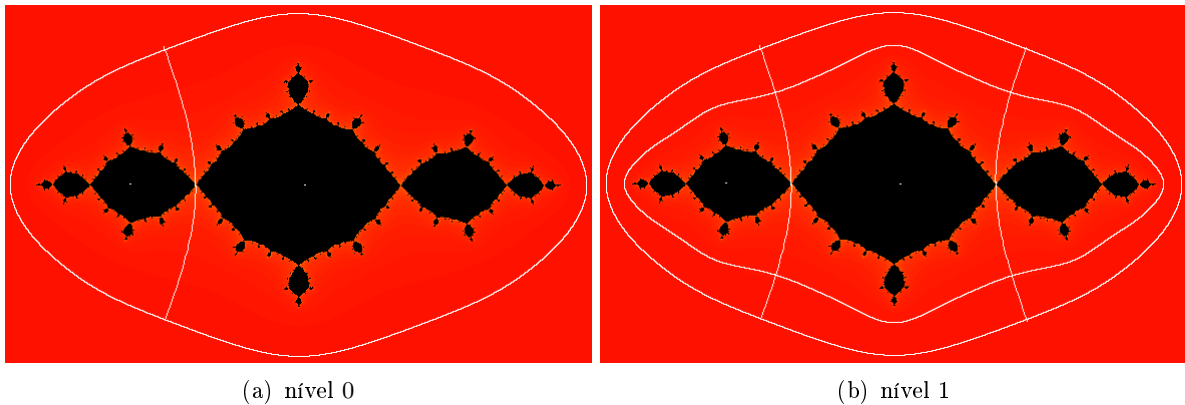


Figura 2.9: *Quebra-cabeça de Yoccoz da basílica*

As peças do *quebra-cabeça de Yoccoz* do nível $n+1$ são definidas indutivamente como sendo as componentes de $P_c^{-1}(Y_n^i)$ na qual Y_n^i é uma peça do nível n . Uma peça de um nível n será, evidentemente, denotada por Y_n^i para algum $i = 0, 1, \dots, r_n$ em que r_n é o número de raios externos no nível n . As peças do nível n possuem seus interiores disjuntos e cobrem todo o conjunto de *Julia* de P_c .

Note que quando tomamos a pré-imagem do nível zero Y_0 do *quebra-cabeça* obtemos o domínio $P_c^{-1}(D)$ que contém $J(c)$ mas, que contém seguimentos das pré-imagens dos raios que aterrissam no ponto fixo α , que pelo teorema 2.7, também são raios externos de $K(c)$. Assim, à medida que cresce o nível, o *quebra-cabeça* fica mais fino (como uma partição dinâmica do *Julia* cheio). Para

denotar uma peça do nível n do quebra-cabeça que contém um ponto $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ usaremos a notação, $Y_n(z)$.

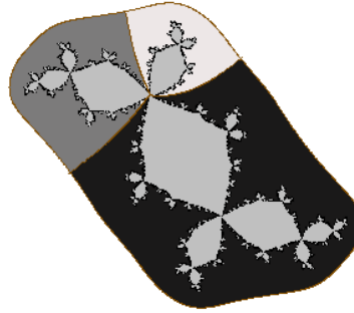


Figura 2.10: *Quebra-cabeça do Coelho de Douady-nível 0*

Na figura 2.10 uma peça cinza vai até aquela pintada com um tom um pouco mais escuro, e no final a peça mais escura vai sobre a mais clara como um recobrimento duplo.

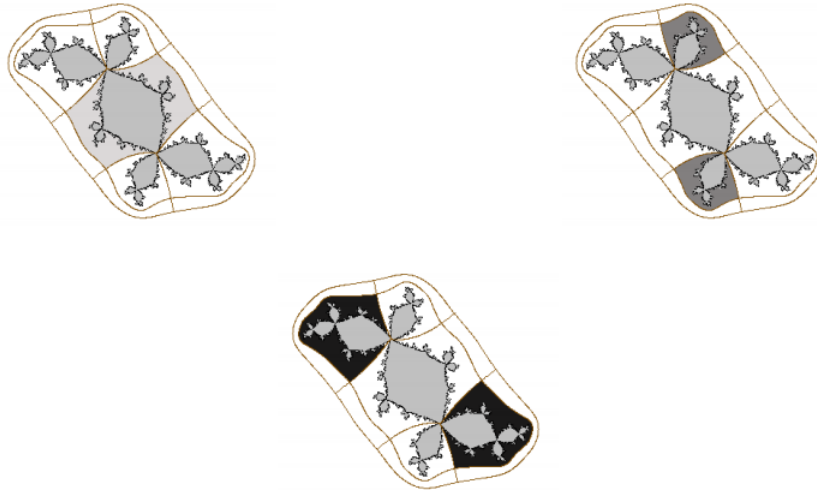


Figura 2.11: *Quebra-cabeça do Coelho de Douady-nível 1*

Na figura 2.11 temos o nível 1 do quebra-cabeça as peças pintadas são pré-imagens daquelas do nível 0 com o mesmo tom de cinza.

Definição 2.18 (Grande órbita). *Dado $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ e P_c . A grande órbita de z_0 por P_c é o conjunto $GO(z_0, P_c) := GO(z_0) := \{w \in \widehat{\mathbb{C}}; \exists(k, l) \in \mathbb{N}^2 \text{ tal que } P_c^k(w) = P_c^l(z_0)\}$*

Decerto, segue do teorema 2.7 que cada ponto da grande órbita de α é ponto de aterrissagem de um raio externo de $K(c)$. Deste modo, se $z_0 \in K(c)$ não pertence a grande órbita de α , então para cada nível $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ existe uma única peça Y_n^i a qual z_0 pertence. Note ainda, que da definição indutiva das peças do nível $n + 1$ decorre, $Y_n(f(z)) = P_c(Y_{n+1}(z))$.

2.2 Aplicação do tipo polinomial

Assim como a nomenclatura indica, *aplicações quaseconformes* são aplicações entre domínios da esfera de Riemann que localmente se comportam com um polinômio.

Toda aplicação holomorfa de $\widehat{\mathbb{C}}$ em $\widehat{\mathbb{C}}$ Aplicações racionais, isto é, aplicações que são o quociente entre dois polinômios, podem ter restrições a subconjuntos de $\widehat{\mathbb{C}}$ onde se comportam como polinômios de grau menor do que o seu. Isto ocorre, por exemplo, na vizinhança de um ponto fixo atrator geométrico, onde se comporta como uma polinômio de grau igual a 1.

Definição 2.19 (Aplicação do tipo polinomial-*Douady-Hubbard*). *Uma aplicação do tipo polinomial de grau d é um terço (f, U, V) no qual $f : U \rightarrow V$ é uma aplicação holomorfa própria de grau d com U e V conformemente isomorfos ao disco unitário \mathbb{D} e $\bar{U} \subset V$.*

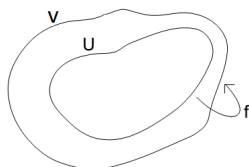


Figura 2.12: aplicação do tipo polinomial

Segue da fórmula de Riemann-Hurwitz (veja [Mil1] pag.72) que (f, U, V) possuem $d - 1$ pontos críticos em U contados com multiplicidade. Em particular, no caso em que $d = 2$ temos um único ponto crítico.

Exemplo 2.2. *Considere P_c . Então, (P_c, Y_1, Y_0) é uma aplicação do tipo polinomial de grau 2. Costuma-se chamar uma aplicação do tipo polinomial de grau 2 de aplicação do tipo quadrático.*

Definição 2.20. *Seja (f, U, V) uma aplicação do tipo polinomial. Em analogia aos polinômios quadráticos, definimos os seguintes conjuntos*

1. **O Julia cheio:**

$$K(f) := \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-n}(V), \quad (2.6)$$

isto é, $K(f)$ é o conjunto dos pontos de U que não escapam de U por iteração de f ;

2. **Conjunto de Julia:**

$$J(f) := \partial K(f); \quad (2.7)$$

3. **Conjunto Pós-crítico:**

$$P(f) := \bigcup_{c \in C(f)} \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(c)}, \quad (2.8)$$

em que $C(f)$ é o conjunto dos pontos críticos de (f, U, V) .

Sabe-se que $K(f)$ é compacto e quando é conexo é também simplesmente conexo. Assim como para as aplicações polinomiais temos o seguinte resultado.

Teorema 2.13. *$K(f)$ é conexo se, e somente se, todos os pontos críticos de (f, U, V) pertencem ao $K(f)$. E se nenhum ponto crítico de (f, U, V) pertence ao $K(f)$, então, $K(f)$ é um conjunto de Cantor.*

2.3 Aplicação quaseconforme.

Aplicações quaseconformes formam um ramo de estudo em *Análise Complexa*. Para *John Hamal Hubbard* estas aplicações são, de algum modo, mágicas, com propriedades que parecem contraditórias. São suaves o suficiente de modo que muitos cálculos ainda valham, como: a regra da cadeia e regras integrais para comprimentos e áreas. E, no entanto, são rígidas o suficiente para mudar o valor da derivada de um ponto fixo por conjugação (vide [Hu]).

Existem várias definições equivalentes para *aplicações quaseconformes*. Apresentamos a seguir uma definição analítica, mas para tanto será necessário darmos antes algumas definições.

Definição 2.21 (Função teste). *Fixado um aberto $U \subset \mathbb{C}$, uma função teste em U é uma função $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ com suporte compacto em U , isto é, que é nula fora de um subconjunto compacto de U . Denotamos o conjunto das funções teste em U por $C_c^\infty(U)$.*

Com uma topologia adequada, $C_c^\infty(U)$ é um espaço vetorial topológico de dimensão infinita.

Definição 2.22 (Distribuição). *Uma distribuição em U é uma funcional linear contínuo $T : C_c^\infty(U) \rightarrow \mathbb{C}$.*

Definição 2.23. *Para $f \in C^1(U)$, definimos*

$$\partial f := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad (2.9)$$

e

$$\bar{\partial} f := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad (2.10)$$

Definição 2.24 (Derivadas distribucionais). *Uma função $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ em $L_{loc}^2(U)$ tem derivadas distribucionais em $L_{loc}^2(U)$ se existem funções $f_1, f_2 : U \rightarrow \mathbb{C}$ em $L_{loc}^2(U)$ tais que para qualquer $h \in C_c^\infty(U)$ valha*

$$\int_U f_1 \cdot h \, dm = - \int_U f_1 \cdot \partial h \, dm \quad (2.11)$$

e

$$\int_U f_2 \cdot h \, dm = - \int_U f_2 \cdot \bar{\partial} h \, dm \quad (2.13)$$

É comum denotar, $f_1 = \partial f$ e $f_2 = \bar{\partial} f$. Isto se justifica com o fato de que quando $f \in C^1(U)$, f_1 e f_2 coincidirem com as usuais derivadas parciais ∂f e $\bar{\partial} f$.

Definição 2.25 (aplicação quaseconforme-definição analítica). *Sejam U e V subconjuntos abertos de \mathbb{C} e $k := \frac{K-1}{K+1}$, tal que $0 \leq k < 1$. Uma aplicação $f : U \rightarrow V$ é K -quaseconforme se:*

1. f é um homeomorfismo;
2. as derivadas parciais distribucionais de f estão em $L_{loc}^2(\mu)$, e satisfaz

$$|\partial f| \leq k |\bar{\partial} f| \quad (2.14)$$

em $L_{loc}^2(\mu)$

chamaremos de constante de quaseconformalidade de f ao menor K para o qual valha a definição dada acima.

Podemos entender a constante K como uma medida de o quanto f está próxima de ser conforme. O seguinte teorema indica isso.

Teorema 2.14. $f : U \rightarrow V$ é 1-quaseconforme se, e somente se, é conforme.

Melhor entendemos a definição dada quando supomos f de classe $C^1(U)$.

Toda aplicação \mathbb{R} -linear $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ pode ser apresentada da seguinte forma,

$$T(z) = az + b\bar{z} \quad (2.15)$$

Pode-se verificar que a pré-imagem do círculo unitário por T é uma elipse centrada na origem com semieixo maior medindo $\frac{1}{|a| - |b|}$, semieixo menor medindo $\frac{1}{|a| + |b|}$ com argumento igual a $\frac{\arg(b) - \arg(a)}{2}$. Disto decorre que $\det(T) = |a|^2 - |b|^2$ e $\|T\| = |a| + |b|$.

Para $f \in C^1(U)$ e $z_0 \in U$, $Df_{z_0} : T_{z_0}U \rightarrow T_{f(z_0)}U$ é uma aplicação \mathbb{R} -linear. E neste caso, temos

$$[Df_{z_0}](u) = \partial f(z_0)u + i\bar{\partial}f(z_0)\bar{u} \text{ com} \quad (2.16)$$

$$\|[Df_{z_0}]\| = |\partial f(z_0)| + |\bar{\partial}f(z_0)| \quad (2.17)$$

$$\det([Df_{z_0}]) = |\partial f(z_0)|^2 - |\bar{\partial}f(z_0)|^2 \quad (2.18)$$

Note que

$$\frac{|a| + |b|}{|a| - |b|} = \frac{1 + \frac{|b|}{|a|}}{1 - \frac{|b|}{|a|}} \leq \frac{1 + k}{1 - k} = K \quad (2.19)$$

e que a desigualdade 2.14 implica que f preserva orientação.

Ou seja, uma aplicação K -quaseconforme de classe C^1 é um difeomorfismo que preserva orientação e cuja derivada mapeia discos infinitesimais em elipses infinitesimais com excentricidade no máximo K .

Definição 2.26 (Coeficiente de Beltrami). À função mensurável $\mu(z) := \frac{\bar{\partial}f}{\partial f}(z) = \frac{\bar{\partial}f(z)}{\partial f(z)}$ é denominada coeficiente de Beltrami, ou ainda, dilatação complexa de f .

As aplicações quaseconformes são de fundamental importância na Dinâmica Holomorfa em geral. E a inserção desta tão frutífera ferramenta nesta área se deve ao seguinte celebrado teorema conhecido como *Teorema de Ahlfors-Bers* ou *Teorema mensurável da aplicação de Riemann*.

Teorema 2.15. Para qualquer função mensurável $\mu : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ com $\|\mu\|_\infty \leq 1$, existe uma única aplicação quaseconforme $\varphi_\mu : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ cujo coeficiente de Beltrami (dilatação complexa) é μ e que mantém fixados os pontos $0, 1, \infty$.

Voltamos a tratar das aplicações do tipo polinômial. A partir das aplicações quaseconformes podemos introduzir duas novas noções de equivalência entre sistemas dinâmicos.

Definição 2.27. (equivalência quaseconforme e híbrida)

1. Dois polinômios quadráticos P_a e P_b são quaseconformemente equivalentes se existe uma aplicação quaseconforme $\varphi : U \rightarrow U'$ entre as vizinhanças U e U' de $K(a)$ e $K(b)$ que conjuga P_a ao P_b . A aplicação φ é chamada de conjugação quaseconforme.;
2. Dois polinômios quadráticos P_a e P_b são hibridamente equivalentes se são quaseconformemente equivalentes e a conjugação quaseconforme φ satisfaz $\bar{\partial}\varphi = 0$ em $K(a)$.

O seguinte importantíssimo resultado devido ao *A. Douady* e *J.H. Hubbard* justifica a denominação “aplicação do tipo polinomial”.

Teorema 2.16 (Teorema de retificação-*Douady-Hubbard*). *Toda aplicação do tipo polinomial (f, U, V) de grau d é hibridamente equivalente a um polinômio P de grau d . Além disto, se $K(f)$ for conexo, então, o polinômio P é único a menos de uma conjugação por uma aplicação afim.*

No caso quadrático este teorema toma a seguinte forma

Teorema 2.17 (Teorema de retificação-caso quadrático). *Toda aplicação do tipo quadrático (f, U, V) é hibridamente equivalente a um polinômio P_c . Além disto, se $K(c)$ for conexo, então P_c é único.*

2.4 Hiperbolicidade e Rigidez quaseconforme

No que segue nos restringiremos a discutir a hiperbolicidade apenas para a família quadrática. Mais informações sobre este conteúdo podem ser encontrados em [Mil1],[MSS],[CG].

Existe uma classe de polinômios quadráticos muito especial que apresenta uma dinâmica relativamente simples e bem compreendida. Tais aplicações são denominadas *hiperbólicas*. Elas detêm uma das mais importantes questões em aberto em Dinâmica Holomorfa, certamente a mais antiga, que foi posta por *Pierre Fatou*.

Conjectura 2.4.1 (Densidade de hiperbolicidade-caso quadrático). *Os polinômios quadráticos hiperbólicos formam um subconjunto aberto e denso no espaço dos polinômios quadráticos.*

A qualidade principal desses sistemas dinâmicos é preservar a topologia dos principais conjuntos invariantes, sob pequenas variações dos parâmetros.

De maneira mais formal, que significa “ser hiperbólico” para um polinômio quadrático?

Definição 2.28. *Um polinômio quadrático P_c é hiperbólico se sua órbita crítica tende para um ciclo atrator. Diz-se também que o parâmetro c é hiperbólico.*

Assim, é evidente que se $c \notin \mathcal{M}$, então, P_c é hiperbólico. Pois, neste caso, sabemos que $P_c^n(0) \rightarrow \infty$ e ∞ é ponto fixo super-atrator. Deste modo, podemos redefinir a hiperbolicidade dos polinômios quadráticos como:

Definição 2.29. *Um polinômio quadrático é hiperbólico se:*

1. $c \notin \mathcal{M}$, ou
2. $c \in \mathcal{M}$ e P_c possui um ciclo atrator em \mathbb{C} .

Por exemplo, o polinômio $z \mapsto z^2$ tem a origem como ponto fixo atrator. Para c suficientemente pequeno (exemplo: $c = 0, 1$), $z \mapsto z^2 + c$ também tem um ponto fixo atrator.

Para entender de maneira global a dinâmica dos polinômios quadráticos, é importante juntar os parâmetros produzindo sistemas dinâmicos “semelhante”, por exemplo, todos os polinômios com um ponto fixo que seja atrator.

Definição 2.30 (Componente hiperbólica de \mathcal{M}). *Uma componente do interior de \mathcal{M} é hiperbólica se contiver um parâmetro hiperbólico. Uma componente do interior de \mathcal{M} que não é hiperbólica é denominada componente estranha.*

A componente hiperbólica contendo o parâmetro hiperbólico $c = 0$ é o interior de uma cardioide no conjunto de Mandelbrot. O fato de ser um polinômio hiperbólico tem muitas consequências: o conjunto de Julia de qualquer polinômio quadrático hiperbólico tem área zero e quando é conexo é, também, localmente conexo; cada órbita é repulsora ou atratora. Todos os polinômios quadráticos próximos de um polinômios quadrático hiperbólico também são hiperbólicos.

Na verdade, *Mañé, Sad e Sullivan* em [MSS] mostraram que, para um parâmetro hiperbólico, $J(c)$ se move continuamente (na topologia de *Hausdorff*) quando deformamos P_c ao longo de polinômios quadráticos hiperbólicos. Assim, no caso $c = 0$ o conjunto de Julia é um círculo, e para c dentro da componente de $c = 0$ (a famosa *cardioide* do conjunto de Mandelbrot) a topologia de $J(c)$ fica constante, isto é, $J(c)$ é um círculo topológico.

Mas podemos dizer muito mais sobre essa permanência das principais propriedades de um sistema dinâmico ao redor de um sistema hiperbólico. Já vimos que a topologia do conjunto de Julia fica a mesma. Mas, podemos perguntar se a dinâmica fica a mesma, isto é, se tem uma conjugação topológica da dinâmica com a dinâmica do parâmetro hiperbólico.

Definição 2.31 (estabilidade estrutural). *Uma aplicação racional R de grau d é estruturalmente estável se existe uma vizinhança de R no espaço das aplicações racionais com o mesmo grau tal que nesta vizinhança toda aplicação seja topologicamente conjugada à R .*

Pedir uma conjugação topológica global seria muito exigente, mas podemos pedir uma conjugação das dinâmicas restritas nos conjuntos de Julia, o que parece mais razoável. Por isso, *Mañé, Sad e Sullivan*[MSS] introduziram a noção de aplicações racionais J -estáveis. A relação com a hiperbolicidade é muito forte. É conjecturado que toda aplicação J -estável na família de todas as aplicações racionais com grau d fixado é hiperbólica[McM1].

Definição 2.32 (J -estabilidade). *Um polinômio P_c é J -estável se para alguma vizinhança sua no espaço dos polinômios quadrático todos os polinômios aí contidos são topologicamente conjugados à P_c sobre o seus conjuntos de Julia e $J(x)$ depende continuamente na topologia de *Hausdorff* do parâmetro x nesta vizinhança. Isto é, para cada P_a em uma vizinhança de P_c existe um homeomorfismo $h : U \rightarrow U'$ em que U e U' são vizinhanças de $J(c)$ e $J(a)$, respectivamente, tal que $P_c = h^{-1} \circ P_a \circ h$ em $J(c)$. Diz-se que a família quadrática é J -estável em c para um tal parâmetro.*

Conjectura 2.4.2 (Caso quadrático). *Todo polinômio quadrático J -estável é hiperbólico.*

Na dinâmica holomorfa é de grande interesse se saber isso, pois temos o seguinte resultado:

Teorema 2.18 (*Mañé, Sad e Sullivan*[MSS]-caso quadrático). *O conjunto dos parâmetros J -estáveis $\mathcal{M}^{est} := \{c \in \mathcal{M}; P_c \text{ é } J\text{-estável}\}$ é um subconjunto aberto e denso de \mathcal{M} .*

A ferramenta principal no estudo da deformação dos conjuntos de Julia (com a variação do parâmetro) é a noção chave de *movimento holomorfo* estudada por *Mañé, Sad e Sullivan* em [MSS].

Um movimento holomorfo é basicamente uma família de injeções parametrizada por um complexo, com boas propriedades de regularidade.

Definição 2.33 (Movimento Holomorfo). *Seja Ω um subconjunto de $\widehat{\mathbb{C}}$. Um movimento holomorfo de Ω parametrizado pelo disco unitário \mathbb{D} é uma aplicação $\Phi : \mathbb{D} \times \Omega \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ tal que*

1. *Para cada $z \in \Omega$, a aplicação $\lambda \longmapsto \Phi(\lambda, z)$ é holomorfa em \mathbb{D} ;*
2. *Para cada $\lambda \in \mathbb{D}$, a aplicação $z \longmapsto \Phi(\lambda, z)$ é injetora;*
3. *E $\Phi(0, \cdot) = \text{Id}$.*

Um exemplo simples é o movimento de um ponto fixo atrator, com a variação do parâmetro. Um exemplo mais complicado é o movimento do círculo topológico $J(c)$ quando c é perto de $c = 0$. Esses movimentos holomorfos têm a propriedade surpreendente de ter uma extensão automática à toda esfera de Riemann:

Definição 2.34 (O λ -lema [MSS], [Sl], [McM1]). *Se $\Phi : \mathbb{D} \times \Omega \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ é um movimento holomorfo, então,*

1. *admite uma extensão a um movimento holomorfo de $\widehat{\mathbb{C}}$ parametrizado por \mathbb{D} ;*
2. *E para cada disco $D(0, r)$ com $0 < r < 1$ a extensão $\Phi_\lambda(z) : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ é $K(r)$ -quaseconforme com $K(r) = \frac{1+r}{1-r}$.*

Em particular, note que a aplicação $\Phi : \mathbb{D} \times \overline{\Omega} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ é contínua.

Pode-se encontrar uma outra definição de movimento holomorfo e algumas versões do λ -lema em que toma-se uma variedade complexa (conexa) M em vez do disco unitário \mathbb{D} como o espaço de parâmetro.

Voltando ao assunto da hiperbolicidade, existe mais uma caracterização dos parâmetros hiperbólicos utilizando a noção de *campo de linhas invariante*. Essa definição é um pouco mais técnica, mas é bem útil para a classificação dos sistemas dinâmicos.

Definição 2.35 (Campo de linhas invariante (univalente)).

- *Seja f uma aplicação holomorfa em $\widehat{\mathbb{C}}$. Um campo de linhas invariante por f suportado num subconjunto mensurável $\Omega \subset \widehat{\mathbb{C}}$ é uma família de pares $(z, L(z))$ nos quais $z \in \Omega$ e $L(z)$ é um \mathbb{R} -subespaço de dimensão 1 de $T_z \widehat{\mathbb{C}}$, tal que*

1. $m(\Omega) \neq 0$;
2. $f^{-1}(\Omega) = \Omega$;
3. *a inclinação de $L(z)$ varia mensuravelmente em Ω ;*
4. $f'(L(z)) = L(f(z))$.

- *Um campo de linhas μ é univalente em um domínio Ω se for o pullback do campo de linhas horizontais por uma aplicação univalente em Ω . Isto é, se $\mu = h^*(d\bar{z}/dz)$.*

A relação com a hiperbolicidade é imediata:

Teorema 2.19 (Campo de linhas invariante e hiperbolicidade). *Um ponto $c \in \mathcal{M}$ pertence a uma componente não hiperbólica de \mathcal{M} se, e somente se, $J(c)$ tem medida positiva e suporta um campo de linhas invariante.*

Utilizando essa noção, podemos reformular a questão da densidade da hiperbolicidade.

Corolário 2.2. *A dinâmica hiperbólica é densa na Família Quadrática se, e somente se, nenhum polinômio quadrático suporta em seu conjunto de Julia um campo de linhas invariante.*

Já sabemos que os parâmetros dentro da mesma componente hiperbólica produzem sistemas dinâmicos bem semelhantes (pelo menos do ponto de vista topológico). Agora, que podemos dizer sobre a classificação quaseconforme dos polinômios quadráticos?

A resposta definitiva é a seguinte:

Teorema 2.20 (Classificação quaseconforme dos Polinômios Quadráticos). *Uma classe de equivalência quaseconforme de polinômios quadráticos é de uma das seguintes formas:*

1. o complementar do conjunto de Mandelbrot;
2. é uma componente hiperbólica de \mathcal{M} menos o seu centro;
3. é o centro de uma componente hiperbólica;
4. uma componente estranha do interior de \mathcal{M} ;
5. um único ponto da fronteira de \mathcal{M} .

Na classificação acima, deveríamos observar que conjeturalmente as componentes estranhas não existam. Dentro da lista das possibilidades, os itens 3 e 5 são diferentes.

Definição 2.36. *Diremos que uma classe de equivalência para uma relação de equivalência definida em \mathbb{C} é rígida se ela for igual a um único ponto $c \in \mathbb{C}$.*

Assim, com esta notação, as classes quaseconformes dos itens 3 e 5 são rígidas.

Definição 2.37 (Rigidez quaseconforme). *P_c é quaseconformemente rígido se todo polinômio P_b quaseconformemente equivalente a P_c for, na verdade, conformemente equivalente a P_c .*

Conjectura 2.4.3 (Rigidez quaseconforme). *A classe de equivalência quaseconforme e conforme de um polinômio quadrático não hiperbólico P_c é formada apenas pelo próprio polinômio.*

Para ilustrar as várias definições dadas, vamos estudar a relação entre rigidez e existência de campos de linhas invariantes.

Teorema 2.21. *Rigidez quaseconforme é equivalente a não existência de polinômios quadráticos que suportam em seu Julia um campo de linhas invariante.*

Demonstração. Decerto, temos tal equivalência, pois, pelo teorema 2.20, a rigidez quaseconforme implica a não existência de componentes estranhas do interior de \mathcal{M} . Logo pelo teorema 2.19 nenhum polinômio quadrático suporta em seu Julia um campo de linhas invariante.

Por outro lado, se supomos que nenhum polinômio quadrático suporta em seu Julia um campo de linhas invariante, então, não existem componentes estranhas do interior de \mathcal{M} em razão do teorema 2.19. Logo, as únicas classes quaseconformes rígidas são os centro de componentes hiperbólicas e pontos da fronteira de \mathcal{M} . Portanto, todo parâmetro não hiperbólico é quaseconformemente rígido. \square

Em conclusão, podemos entender um pouco melhor a organização global da dinâmica quadrática. Sem dúvidas, o conjunto dos parâmetros (i.e., o conjunto de Mandelbrot) tem uma topologia extremamente complicada, mas a informação dentro dele é claramente organizada. Grandes regiões do conjunto de Mandelbrot (as componentes hiperbólicas) juntam parâmetros produzindo sistemas dinâmicos semelhantes (do ponto de vista topológico, quaseconforme e conforme). Cada componente hiperbólica contém um parâmetro especial no seu centro, com uma propriedade de rigidez. Finalmente, a reunião dessas componentes, conjecturalmente, produz o interior do conjunto de Mandelbrot.

2.5 Definições e resultados gerais

Dentro do contexto geométrico um objeto que consideraremos muitas vezes é o seguinte:

Definição 2.38. *Um anel é qualquer superfície de Riemann A que seja conformemente isomorfa a um anel canônico $A(R) := \{z \in \mathbb{C}; 1 < |z| < R\}$ ou a $\mathbb{D}^* := \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < 1\}$ ou a $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$*

Particularmente, qualquer subconjunto aberto de $\widehat{\mathbb{C}}$ cujo complementar é formado por duas componentes conexas na qual uma delas é um subconjunto compacto de \mathbb{C} é um anel.

Quando A é isomorfa a um anel canônico $A(R) := \{z \in \mathbb{C}; 1 < |z| < R\}$ temos um número real positivo associado que contém informação sobre a sua geometria.

Definição 2.39. *O módulo de um anel A conformemente isomorfo a $A(R)$ é o número*

$$\text{mod}(A) := \frac{\log(R)}{2\pi}. \quad (2.20)$$

Definimos ainda, $\text{mod}(A) = +\infty$ quando A é conformemente isomorfo a \mathbb{D}^ ou a \mathbb{C}^* .*

O módulo é um invariante conforme (problema 2-f[Mil1]).

Dado um disco topológico D em \mathbb{C} e K com fecho compacto em D , definimos o seguinte número que nos dá uma medida geométrica da quantidade do espaço em D ao redor de $K \subset D$:

$$\text{mod}(K, D) := \sup\{ \text{mod}(A); A \subset D \text{ e } A \text{ é um anel em torno de } K \} \quad (2.21)$$

, dizer que A é um anel em torno de K significa que K está contido na componente limitada de $\mathbb{C} - A$.

Em particular quando $D - K$ conformemente isomorfo a um anel $A(R)$ teremos $\text{mod}(K, D) = \text{mod}(D - K)$ e se V for isomorfo a \mathbb{C} ou K for um ponto teremos $\text{mod}(K, D) = +\infty$.

Dizer que um anel A ou uma renormalização (P_c^n, U_n, V_n) tem módulo definido, ou que um subconjunto $U \subset \mathbb{C}$ tem área definida significa dizer que existe uma constante $0 < \delta < +\infty$ tal que $\text{mod}(A) > \delta > 0$, $\text{mod}(U_n, V_n) > \delta > 0$ ou $\text{área}(U) > \delta > 0$, respectivamente.

Mencionaremos também a topologia de *Carathéodory* mais adiante, então, segue a definição:

Definição 2.40. Chamaremos de domínio a um subconjunto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ que seja aberto e simplesmente conexo.

Consideremos a seguir o conjunto \mathcal{D} de todos os domínios de \mathbb{C} , (U, u) com um ponto base $u \in U$. Isto posto, temos

Definição 2.41. A topologia de Carathéodory em \mathcal{D} é definida por: $(U_n, u_n) \rightarrow (U, u)$ se, e somente se

1. $u_n \rightarrow u$ quando $n \rightarrow +\infty$;
2. para todo compacto $K \subset U$ tivermos $K \subset U_n$ para todo n suficientemente grande;
3. para qualquer aberto conexo N contendo u tivermos $N \subset U_n$ para infinitos n 's, então, $N \subset U$.

Seja \mathcal{H} o conjunto das aplicações holomorfas $f : (U, u) \rightarrow \mathbb{C}$ com $(U, u) \in \mathcal{D}$.

Definição 2.42. A topologia de Carathéodory em \mathcal{H} é definida da seguinte maneira: Uma sequência de funções $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com $f_n : (U_n, u_n) \rightarrow \mathbb{C}$ e $(U_n, u_n) \in \mathcal{D}$ converge para $f : (U, u) \rightarrow \mathbb{C}$ se, e somente se

1. $(U_n, u_n) \rightarrow (U, u)$ em \mathcal{D} ;
2. $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge para f uniformemente nas partes compactas de U .

2.5.1 Geodésicas fechadas em superfícies de Riemann hiperbólicas

Definição 2.43 (Isotopia de curvas simples). Sejam X uma superfície; α e β curvas fechadas simples em X . Diremos que α e β são isotópicas em X se existir uma aplicação $H : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow X$ contínua tal que $H(s, 0) = \alpha(s)$ e $H(s, 1) = \beta(s)$ para todo $s \in \mathbb{S}^1$ com a propriedade de que para cada $t \in [0, 1]$ $\alpha_t := H(\cdot, t)$ seja simples.

A aplicação H , sem necessariamente possuir a propriedade de simplicidade, é chamada de *homotopia livre*. Assim, uma isotopia entre curvas simples nada mais é senão uma *homotopia livre* que para cada momento t a curva deformada α_t obtida a partir de α ainda é uma curva simples. A condição de duas curvas fechadas simples serem ou não livremente homotópicas, isto é, de existir ou não uma homotopia livre entre elas induz uma relação de equivalência no conjunto de todas tais curvas em X para a qual denominamos as classes de equivalência de *classes de homotopia livre*.

Teorema 2.22 (Unicidade das geodésicas). Seja X uma superfície de Riemann hiperbólica com métrica hiperbólica ρ_X , e seja γ uma curva primitiva simples em X . Então, existe três possibilidades:

1. existe uma única geodésica em X homotópica a γ , ou
2. γ é homotópica a um ponto (dita ser homotopicamente trivial), ou
3. γ é homotópica a uma curva simples fechada γ' que é a fronteira de uma região $X' \subset X$ isomorfa a $D^* := D \setminus \{0\}$. Neste caso, γ é chamada de curva periférica.

Teorema 2.23 (Geodésicas e posição minimal). 1. Se $\gamma \subset X$ é uma geodésica homotópica a uma curva simples e fechada γ' , então, γ é simples.

2. Mais geralmente, o número de interseções entre duas geodésicas é igual ao menor número de interseções entre as curvas de suas classes de homotopia.
3. Toda geodésica simples fechada tem uma vizinhança U disjunta de todas as geodésicas simples e fechadas que não a intersecta. (Veja o Teorema da vizinhança colar-2.24 para um resultado mais preciso.)

Definição 2.44. *Seja γ uma geodésica simples e fechada de comprimento l em uma superfície de Riemann hiperbólica X . Se a δ -vizinhança*

$$A_\delta(\gamma) := \{x \in X; d(x, \gamma) < \delta\} \quad (2.22)$$

é isométrica à δ -vizinhança da única geodésia simples e fechada no cilindro de módulo $\frac{\pi}{l}$. Dizemos que $A_\delta(\gamma)$ é uma vizinhança colar de γ ou que γ admite uma vizinhança colar.

Teorema 2.24 (Teorema da vizinhança colar). *Seja X uma superfície hiperbólica completa, e seja $\Gamma := \{\gamma_1, \gamma_2, \dots\}$ uma coleção (finita ou não) de geodésicas simples, fechadas e disjuntas com comprimento l_i . Então as $\eta(l_i)$ -vizinhanças $A_{\eta(l_i)}(\gamma_i)$ são vizinhanças colares das curvas γ_i , e são disjuntas. Em que η é a função colar dada por $\eta(l) := \frac{1}{2} \log \frac{\cosh(l/2) + 1}{\cosh(l/2) - 1}$.*

Consulte [Hu] para ver a construção da função colar.

Capítulo 3

Renormalização

Trataremos neste capítulo de uma fortíssima ferramenta em sistemas dinâmicos de baixa dimensão que nos permite dentre muitos fins estudar a fina estrutura desses sistemas dinâmicos.

Começemos, então, dizendo precisamente o que significa um polinômio quadrático ser renormalizável:

Definição 3.1. *Considere um polinômio quadrático P_c com $c \in \mathcal{M}$. Seja $n \in \mathbb{N}$, P_c^n é renormalizável se existem discos topológicos U e V em \mathbb{C} tais que o ponto crítico $0 \in U$ e $P_c^n : U \rightarrow V$ é uma aplicação do tipo quadrático cujo Julia cheio é conexo, ou equivalentemente, tal que $P_c^{nk}(0) \in U$ para todo $k \geq 0$. Se existe um tal $n \geq 2$ dizemos também que P_c é renormalizável.*

Isto é, P_c é renormalizável se algum iterado seu tem uma restrição a uma vizinhança do seu ponto crítico $z = 0$ que seja uma aplicação do tipo quadrático. E deste modo, pelo teorema de retificação de *Douady-Hubbard* (teorema 2.17) naturalmente temos um novo sistema dinâmico polinomial quadrático associado. Ou seja, recuperamos um novo sistema dinâmico na mesma classe do sistema dinâmico inicial dado por P_c . Isto é o que significa *renormalizar*. Isto posto, a escolha de um par (U, V) como na definição 3.1 será denominado *renormalização de P_c^n* , ou como prefere *John Milnor*, é a n -ésima renormalização de P_c . Por vezes, nos referiremos a uma renormalização a denotando, também, por (P_c^n, U, V) . Note que o processo de renormalização induz um sistema dinâmico no espaço de parâmetro. Para tal abordagem consulte [AL], [L2], [L4].

Consideremos o conjunto

$$R(c) := \{n \in \mathbb{N}; P_c^n \text{ é renormalizável}\}$$

Aos inteiros positivos em $R(c)$ chamaremos de *nível* da renormalização.

Se $|R(c)| < \infty$ diremos que P_c é finitamente renormalizável, caso contrário diremos que P_c é infinitamente renormalizável.

Teorema 3.1. *Quaisquer duas renormalizações de P_c^n possuem o mesmo Julia cheio.*

Demonstração. Suponhamos $P_c^n : U \rightarrow V$ e $P_c^n : U' \rightarrow V'$ duas renormalizações de P_c^n com respectivos Julia cheios K e K' . Como $K \subset K(c)$ é fechado e conexo, e $P_c^n : U' \rightarrow V'$ é uma aplicação tipo-polinômio, segue do teorema 6.13-[McM1] que $L = K \cap K'$ é conexo. E temos ainda, $P_c^n(L) = L$, pois $P_c^n(K) = K$ e $P_c^n(K') = K'$.

Consideremos a componente \widehat{U} de $U \cap U'$ que contém L , e ponhamos $\widehat{V} := P_c^n(\widehat{U})$. Decorre, pois, do teorema 5.11-[McM1], que $P_c^n : \widehat{U} \rightarrow \widehat{V}$ é uma aplicação do tipo polinomial cujo Julia cheio é o

conjunto L . E como o ponto crítico $0 \in L$, $P_c^n : \widehat{U} \rightarrow \widehat{V}$ tem grau igual à dois. Mas, já que o grau das três aplicações são iguais, segue, também do teorema 5.11-[McM1], que $K(c) = L = K = K'$. \square

Suponhamos que para cada $n \in \mathbb{R}(c)$ temos escolhida uma renormalização

$$P_c^n : U_n \rightarrow V_n$$

- (1) $P_n(n)$, J_n e K_n denotarão os conjuntos pós-crítico, o conjunto de Julia e o Julia cheio da aplicação do tipo quadrático $P_c^n : U_n \rightarrow V_n$. Assumimos J_n e K_n conexos, assim temos $P_n(n) \subset K_n$;
- (2) Aos conjuntos $K_n(i) := P_c^i(K_n)$ para $1 \leq i \leq n$ chamaremos de i -ésimo *pequeno Julia cheio* do nível n . Estes conjuntos são ciclicamente permutados por P_c , pois $P_c(K_n(i)) = P_c^{i+1}(K_n) = K_n(i+1)$, em particular, $K_n(n) = K_n$;
- (3) $P_n(i) := K_n(i) \cap P(c)$ é o i -ésimo *pequeno conjunto pós-crítico* do nível n . Temos,

$$P(c) = \{\infty\} \cup \bigcup_1^n P_n(i) \tag{3.1}$$

- (4) $J_n(i) := \partial K_n(i)$ é o i -ésimo *pequeno Julia*;
- (5) $\mathcal{K}_n := \bigcup_1^n K_n(i)$ é a união dos n pequenos Julia cheios do nível n da renormalização ;
- (6) $\mathcal{J}_n := \bigcup_1^n J_n(i)$ é a união dos n pequenos Julia do nível n da renormalização ;
- (7) $V_n(i) := P_c^i(U_n)$ para $1 \leq i \leq n$. Então, a aplicação tipo-quadrática P_c^n fica fatorada como

$$U_n \xrightarrow{P_\xi} V_n(1) \xrightarrow{P_\xi} \dots \xrightarrow{P_\xi} V_n(n) = V_n$$

onde a aplicação $U_n \xrightarrow{f} V_n(1)$ é própria de grau 2 pois o ponto crítico $0 \in U_n$ e as demais aplicações são univalentes, visto que $P_c^n : U_n \rightarrow V_n$ tem grau igual à 2;

- (8) $U_n(i)$ é a componente de $P_c^{i-n}(U_n)$ contida em $V_n(i)$. Veremos que $P_c^n : U(i) \rightarrow V(i)$ é uma aplicação do tipo quadrático;
- (9) P'_n , J'_n e K'_n são definidos por

$$X'_n := -X_n \quad \text{para } X \in \{P, J, K\} \tag{3.2}$$

Como $P_c(-z) = P_c(z)$ cada um dos conjuntos P'_n , J'_n e K'_n tem a mesma imagem por P_c que seus conjuntos companheiros $P_n(n)$, J_n e K_n . E para $i \neq n$, relativamete a cada i , eles são disjuntos.

Note ainda que $K_n(i) \subset K(c)$, pois caso tenhamos $z_0 \in K_n(i) - K(c)$, então, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_c^n(z_0) = \infty$ o que nega o fato de que $P_c^{nk}(z_0) \in K_n(i)$ para todo $k \geq 0$.

Segue do **Teorema 3.1** que o Julia cheio K_n , e por conseguinte, os conjuntos $K_n(i)$, $J_n(i)$ e $P_n(i)$ estão bem definidos para cada nível independento da escolha do par (U_n, V_n)

Teorema 3.2. *Suponha P_c^n renormalizável. Então para cada $i = 1, \dots, n$*

$$P_c^n : U_n(i) \rightarrow V_n(i)$$

é uma aplicação do tipo quadrático com Julia cheio igual à $K_n(i)$. Analogamente

$$(-P_c^n) : U'_n(i) \rightarrow V'_n(i)$$

é uma aplicação do tipo quadrático com Julia cheio igual à $K'_n(i)$. Ambas as aplicações são conformemente conjugadas à $P_c^n : U_n \rightarrow V_n$.

Demonstração. Como $1 \leq n - i \leq n - 1$ segue de (7) que a aplicação

$$P_c^{n-i} : U_n(i) \rightarrow V_n(n) = V_n$$

é univalente. $P_c^{n-i}|_{U_n(i)}$ conjuga a aplicação $P_c^n : U_n(i) \rightarrow V_n(i)$ com a aplicação do tipo quadrático $P_c^n : U_n \rightarrow V_n$. Deste modo, $P_c^n : U_n(i) \rightarrow V_n(i)$ é uma aplicação do tipo quadrático. Como $P_c^{nk}|_{U_n(i)} = (P_c^{n-i})^{-1} \circ f^{nk}|_{U_n} \circ P_c^{n-i}$ e $P_c^{n-i}(K_n(i)) = K_n$ segue

$$K(P_c^n|_{U_n(i)}) := \bigcap_1^\infty P_c^{-nk}|_{U_n(i)}(V_n(i)) \quad (3.3)$$

$$= \bigcap_1^\infty P_c^{i-n} \circ P_c^{-nk}|_{U_n} \circ P_c^{n-i}(V_n(i)) \quad (3.4)$$

$$= \bigcap_1^\infty P_c^{i-n} \circ P_c^{-nk}|_{U_n}(V_n) \quad (3.5)$$

$$= P_c^{i-n} \left(\bigcap_1^\infty P_c^{-nk}|_{U_n} \right) \quad (3.6)$$

$$= f^{i-n}(K_n) \quad (3.7)$$

$$= K_n(i) \quad (3.8)$$

Analogamente, obtemos o mesmo para a aplicação $(-P_c^n) : U'_n(i) \rightarrow V'_n(i)$, pois a aplicação univalente $(-P_c^{n-i}) : V'_n(i) \rightarrow V_n$ conjuga $(-P_c^n) : U'_n(i) \rightarrow V'_n(i)$ com a aplicação do tipo quadrático $P_c^n : U_n \rightarrow V_n$ (veja o diagrama a baixo). E teremos, analogamente, $K(-P_c^n|_{U'_n(i)}) = K'_n$.

$$\begin{array}{ccccc} U'_n(i) & \xrightarrow{z \mapsto e^{i\pi}z} & U_n(i) & \xrightarrow{P_c^{n-i}} & U_n \\ P_c^n \downarrow & & P_c^n \downarrow & & P_c^n \downarrow \\ V'_n(i) & \xrightarrow{z \mapsto e^{i\pi}z} & V_n(i) & \xrightarrow{P_c^{n-i}} & V_n \end{array}$$

□

Teorema 3.3 (Conjuntos de Julia quase disjuntos). *Seja P_c^n renormalizável. Suponha que $K_n(i)$ e $K_n(j)$ sejam dois pequenos Julia cheios com interseção não vazia. Então,*

$$K_n(i) \cap K_n(j) = \{x\}$$

e x é um ponto repulsor de P_c^n .

Demonstração. Seja $E := K_n(i) \cap K_n(j)$. Como $P_c^n(K_n) = K_n$, então,

$$\begin{aligned} P_c^n(E) &\subset P_c^n(P_c^i(K_n)) \cap P_c^n(P_c^j(K_n)) \\ &= P_c^i(K_n) \cap P_c^j(K_n) \\ &= E \end{aligned}$$

$K_n(i)$ é conexo e está contido em $K(c)$, deste modo, segue do **Teorema 6.13** que $E = K_n(i) \cap K_n(j)$ é conexo, pois $P_c^n : U_n(j) \rightarrow V_n(j)$ é uma aplicação do tipo polinomial.

Sejam W a componente de $U_n(i) \cap U_n(j)$ contendo $E = K_n(i) \cap K_n(j)$ e $W' := P_c^n(W)$.

Assim, pelo teorema 5.11-[McM1], $P_c^n : W \rightarrow W'$ é uma aplicação do tipo polinomial. Como $K_n(i) \neq K_n(j)$, também decorre do teorema 5.11-[McM1] que P_c^n tem grau igual a 1.

Seja $\psi := (P_c^n|_W)^{-1} : W' \rightarrow W$. Como $\psi(W') = W \Subset W'$ segue do *Teorema de Pick* (teorema 2.11-[Mil1]) que ψ decresce estritamente as distâncias hiperbólicas. Tomemos um compacto C de modo que $E \subset C \subset W$, obtemos uma sequência $C_0 := C \supset C_1 := \psi(C_0) \cdots \supset C_n := \psi(C_{n-1}) \cdots$ de compactos encaixados. Como $P_c^{nk}(E) \subset E$, temos $\psi^k(E) \supset E$, mas $\psi^k(C) \supset \psi^k(E)$ e, portanto, $E \subset \psi^k(C) = C_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, logo, $E \subset \bigcap_0^\infty C_n$ e $\bigcap_0^\infty C_n \neq \emptyset$. (O teorema de Cantor para interseção de compactos encaixados também nos dá $\bigcap_0^\infty C_n \neq \emptyset$).

Afirmção 3.1. $\text{diâm} \left(\bigcap_0^\infty C_n \right) \rightarrow 0$ na métrica hiperbólica.

Demonstração. Argumentaremos por contradição. Suponhamos que existam $z_1 \neq z_2$ em $K := \bigcap_0^\infty C_n$ e tais que $\text{diâm}(K) = d(z_1, z_2)$, isto é possível devido à compacidade de C . Como $P_c(K) = K$, escolhemos w_1 e w_2 em K tais que $P_c(w_1) = z_1$ e $P_c(w_2) = z_2$.

Assim,

$$\text{diâm}(K) = d(z_1, z_2) = d(P_c(w_1), P_c(w_2)) < d(w_1, w_2), \quad (3.9)$$

uma contradição.

Portanto, K consiste em apenas um único ponto $z_0 \in W$ que é fixo para ψ e, por conseguinte, $E = z_0$. \square

Por fim, mostraremos que z_0 é repulsor para P_c^n . Para tanto, consideremos a aplicação de Riemann $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow W$ tal que $\varphi(0) = z_0$. Assim, obtemos uma aplicação holomorfa $G : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (\mathbb{D}, 0)$ dada por $G(z) = (\varphi)^{-1} \circ \psi \circ \varphi$.

Como, $G(\mathbb{D}) \Subset \mathbb{D}$, segue do *Lema de Schwarz* que $|G'(0)| < 1$, mas $G'(0) = (\varphi^{-1})'(\psi(z_0)) \cdot \psi'(z_0) \cdot \varphi'(0) = \frac{1}{\varphi'(0)} \cdot \psi'(z_0) \cdot \varphi'(0) = \psi'(z_0)$.

Portanto, como $\psi := (P_c^n|_W)^{-1}$, concluímos que z_0 é um ponto fixo repulsor para P_c^n . \square

Note que este teorema nos diz que o interior dos pequenos Julia cheios, que por suposição são conexos, são disjuntos.

Teorema 3.4. *Suponhamos P_c^n renormalizável. Então, qualquer ponto periódico atrator ou indiferente e qualquer componente periódica do interior de $K(c)$ está contido em $K_n(i)$ para um único $1 \leq i \leq n$. Seus períodos são divisíveis por n .*

Para uma prova do teorema acima consulte [McM1]. O seguinte corolário será importante.

Corolário 3.1. *Todo ponto periódico de P_c cujo período é menor do que n é repulsor.*

Teorema 3.5 (Menor renormalização comum). *Se P_c^n e P_c^m são renormalizáveis, então, assim o é P_c^l , onde l é o menor múltiplo comum de n e m . E mais, $K_l = K_n \cap K_m$.*

Demonstração. Começemos definindo o seguinte conjunto

$$U_n^* := \{z \in U_n; P_c^{nj}(z) \in U_n \text{ para } j = 1, \dots, (l/n) - 1\}$$

Por ser P_c^n renormalizável, temos $P(f^n|_{U_n}) \subset K_n \subset U_n$, assim $(P_c^n)^{-1}$ é localmente holomorfa em $V_n - U_n$, e portanto, $V_n - U_n$ é recoberto por $P_c^{-1}(V_n - U_n)$, logo, pela classificação das superfícies de Riemann, $f^{-1}(V_n - U_n)$ também é um anel contido em U_n cuja fronteira da componente ilimitada de seu complementar coincide com ∂U_n . Como anteriormente, podemos fazer o pullback do anel $A_1 := (P_c^n)^{-1}(V_n - U_n)$ por $(P_c^n)^{-1}$; e repetindo isto por mais $\frac{l}{n} - 2$ vezes obtemos um anel $A_{\frac{l}{n}-1}$. Note que nenhum dos anéis A_k 's tem interseção não vazia com K_n visto que $P_c^n(K_n) = K_n$.

Assim, $A_{\frac{l}{n}-1} \cup B_{\frac{l}{n}-1}$, onde B_k é a componente compacta de $\mathbb{C} - A_k$, é um disco tal que $P_c^l(A_{\frac{l}{n}-1} \cup B_{\frac{l}{n}-1}) = V_n$.

Vejam agora que $A_{\frac{l}{n}-1} \cup B_{\frac{l}{n}-1} = U_n^*$.

Pela construção segue $A_{\frac{l}{n}-1} \cup B_{\frac{l}{n}-1} \subset U_n^*$. E $A_{\frac{l}{n}-1} \cup B_{\frac{l}{n}-1} \supset U_n^*$, pois caso exista $z \in U_n^*$ tal que $z \notin A_{\frac{l}{n}-1} \cup B_{\frac{l}{n}-1}$, como $U_n = B_{\frac{l}{n}-1} \cup \bigcup_{j=1}^{\frac{l}{n}-1} A_j$ existirá $j \in \{1, \dots, \frac{l}{n} - 1\}$ tal que $z \in A_j$, e assim teremos $P_c^{n(\frac{l}{n}-1)} \notin U_n$, o que contradiz que $z \in U_n^*$.

P_c^l fica fatorada como

$$(A_{\frac{l}{n}-1} \cup B_{\frac{l}{n}-1}) \xrightarrow{f^n} (A_{\frac{l}{n}-2} \cup B_{\frac{l}{n}-2}) \xrightarrow{f^n} \dots (A_1 \cup B_1 = U_n) \xrightarrow{P_c^n} V_n \quad (3.10)$$

e $0 \in A_j \cup B_j$ para cada $j = 1, \dots, \frac{l}{n} - 1$, concluímos que $P_c^l : U_n^* \rightarrow V_n$ é uma aplicação do tipo polinomial de grau $d = 2^{\frac{l}{n}}$.

Analogamente, $P_c^l : U_m^* \rightarrow V_m$ é uma aplicação do tipo polinomial de grau $d = 2^{\frac{l}{m}}$.

Desta maneira, pelo teorema 6.13i[McM1], $L = K_n \cap K_m$ é conexo, pois $K_n \subset K(c)$ é conexo e fechado. Pondo U_l como a componente de $U_n^* \cap U_m^*$ que contém L e $V_l := P_c^l(U_l)$, seguirá do Teorema 5.11-[McM1] que $P_c^l : U_l \rightarrow V_l$ é uma aplicação do tipo polinomial cujo Julia cheio é L .

Observe que se o ponto crítico 0 pertence à $P_c^j(L)$, então deve-se ter j divisível por n e por m , e portanto será um múltiplo de l , pois caso contrário chegaremos a contradição de que $0 \in P_c^j(K_n) = P_c^{nd+r}(K_n) = K_n(r) \neq K_n$, com $r \in \{1, \dots, n-1\}$. Por outro lado, se n não divide j e m não divide j , então

$$P_c^j(K_n \cap K_m) \subset K_n(r_1) \cap K_m(r_2) \quad (3.11)$$

onde $r_1 \equiv j \pmod{n}$ e $r_2 \equiv j \pmod{m}$.

Mas, $K_n \cap K_n(r_j) = \{x_j\}$, com x_j repulsor, ou $K_n \cap K_n(r_j) = \emptyset$, para $j = 1, 2$.

Então, $0 \notin P_c^j(K_n \cap K_m)$, pois $0 \in K_n \cap K_m$ é ponto crítico. Neste caso temos ainda,

$$P_c^j(K_n \cap K_m) = K_n \cap K_m \quad (3.12)$$

Decerto, pois $P_c^j(K_n \cap K_m) \subset P_c^j(K_n) \cap P_c^j(K_m) = K_n \cap K_m$, e por outro lado, se $z \in K_n \cap K_m$, então $P_c^{-1}(z) \subset K_n$ e $P_c^{-1}(z) \subset K_m$, pois $P_c^{-j}(K_n) = K_n$ e $P_c^{-j}(K_m) = K_m$. Logo, existe $w \in K_n \cap K_m \cap P_c^{-1}$ tal que $P_c(w) = z$, e portanto, $P_c^j(K_n \cap K_m) \supset K_n \cap K_m$. Por notemos que assim P_c^l possui apenas um ponto crítico em L , a saber o 0, pois se tivermos $w \in L - \{0\}$ tal que $(P_c^l)'(w) = \prod_{j=0}^{l-1} P_c'(P_c^j(w)) = 0$, então teremos $P_c'(P_c^j(w)) = 0$ para algum $j \in \{1, \dots, l-1\}$. E neste caso teremos $P_c^j(w) = 0$ implicando assim que $0 \notin K_n \cap K_m$, mas $0 \in K_n \cap K_m$. E como L é connexo e $0 \notin K_n \cap K_m$, segue que $P_c^l : U_l \rightarrow V_l$ tem grau igual a 2, e portanto, $l \in R(c)$ e $K_l = L = K_n \cap K_m$. \square

Corolário 3.2. *Se P_c^n e P_c^m são renormalizáveis e $n|m$, então, $K_n \supset K_m$.*

Demonstração. Com razão, pois se n divide m , então, $\text{mmc}(n, m) = m$. Logo, do teorema 3.5, decorre que $K_m = K_n \cap K_m$ e, portanto, $K_n \supset K_m$. \square

3.1 Os pequenos conjuntos de Julia se intersectam em pontos periódicos.

A combinatória da renormalização é mais simples quando os pequenos conjuntos de Julias são disjuntos. Vimos que os pequenos conjuntos de Julia de um dado nível de renormalização se tocam apenas em pontos repulsores. Veremos que os períodos destes pontos de interseção dos pequenos conjuntos de Julia tendem para o infinito quando o nível da renormalização tende para o infinito.

O seguinte resultado é um bom substituto para a disjunção dos pequenos conjuntos de Julia.

Teorema 3.6 (períodos grandes). *Dado um período p , existe apenas um número finito de níveis em $R(c)$ tais que o pequeno Julia cheio K_n contém um ponto periódico de período p .*

O ponto principal na demonstração deste resultado consiste em mostrar que para níveis $n \in R(c)$ arbitrariamente grandes, K_n não contém ponto fixo de P_c .

Para começarmos uma análise dos pontos fixos consideremos o polinômio quadrático P_c com conjunto de Julia connexo e cujos pontos fixos sejam repulsores.

Na sequência obteremos alguns resultados preliminares que nos permitiram obter o teorema 3.6.

Teorema 3.7. *Os raios externos que aterrissam em α são permutados transitivamente por P_c . E os raios externos que aterrissam em $-\alpha$ separam β do ponto crítico de P_c , isto é, β e 0 pertencem a componentes diferentes do plano \mathbb{C} menos os raios externos que aterrissam em $-\alpha$.*

Demonstração. Pelo teorema 2.10 apenas um número finito de raios externos aterrissam em α , ponto fixo repulsor de P_c . Se o raio R_t aterrissa em α , também aterrissa em α o raio externo $P_c(R_t) = R_{2t}$. E como P_c é injetora numa vizinhança de α , segue que P_c permuta os raios que aterrissam em α . Pelo teorema 2.10 os raios que aterrissam em α possuem o mesmo período, e disto decorre que P_c permuta tais raios de maneira transitiva.

Os raios que aterrissam em α são invariantes para a frente e dividem o plano complexo em q componentes abertas C_1, C_2, \dots, C_q , onde q é o número de raios externos que aterrissam em α , assumamos que a componente P_q contenha o ponto crítico $z = 0$ e o ponto $-\alpha$.

As pré-imagens dos raios que aterrissam em α , aterrissam em α e $-\alpha$ dividindo o plano em $2q - 1$ componentes abertas $Q_1, Q_2, \dots, Q_{2q-1}$. Visto que apenas a peça C_q é subdividida pelos

raios externos que aterrissam em $-\alpha$, assumiremos a seguinte indexação para as componentes Q_i 's:

$$Q_i = C_i, \quad \text{para } 1 \leq i < q \tag{3.13}$$

$$\text{e } Q_q \text{ contém o ponto crítico } z = 0. \tag{3.14}$$

Como $P_c(C_i)$ é disjunto de C_i para $i < q$, segue que $\beta \in C_q$ visto que β é ponto fixo de P_c . β também não pode estar em Q_q , pois como $P_c(-\alpha) = P_c(\alpha) = \alpha$ segue da continuidade de P_c e conexidade de Q_q que $P_c(Q_q) = C_i$ para algum $i < q$. Portanto, β deve estar contido em alguma das componentes Q_i com $q < i \leq 2q - 1$. \square

Teorema 3.8. *Se P_c^n é renormalizável e $n > 1$, então o pequeno Julia cheio não contém o ponto fixo repulsor β de P_c .*

Demonstração. Argumentaremos por contradição.

Portanto, suponhamos que $\beta \in K_n$. Deste modo, $K_n(1) = P_c(K_n)$ também contém β , já que este é mantido fixado por P_c . Daí, como a interseção entre os K_n 's é no máximo um ponto, $\alpha \notin K_n$. Assim, K_n é disjunto dos raios externos que aterrissam em $-\alpha$, pois se $-\alpha \in K_n$, então, $\alpha = P_c(-\alpha) \in K_n(1)$, e assim teremos $\alpha \in K_n$, pois α é ponto fixo de P_c e $P_c^{n-1}(K_n(1)) = K_n$.

Mas pelo teorema anterior os raios que aterrissam em $-\alpha$ separam o ponto crítico 0 do ponto fixo β , logo, K_n não é conexo, e temos uma contradição. \square

Teorema 3.9. *Suponha P_c^n renormalizável para algum $n > 1$ e $\alpha \in K_n$. Seja ρ o número de componentes de $K_n - \{\alpha\}$. Então,*

$$n\rho \leq q,$$

em que q é o número de raios externos que aterrissam em α .

Combinando os teoremas 3.8 e 3.9, obtemos:

Corolário 3.3. *Para um nível $n \in R(c)$ tal que $n > q$, o pequeno Julia cheio não contém os pontos fixos de P_c .*

Decerto, pois $n > q > 2$ e assim pelo teorema 3.9 concluímos que $\beta \notin K_n$. E $\alpha \notin K_n$, pois caso contrário teríamos, pelo teorema 7.11,

$$n\rho \leq q,$$

contradizendo, pois, que $n > q$.

Demonstração do teorema 3.9. Consideremos as q componentes abertas do plano, C_i , determinadas pelos q raios externos que aterrissam em α . Assumamos que C_q contenha o ponto crítico 0 e que C_1 contenha o valor crítico c . Como C_q contém o ponto $-\alpha$, substituímos C_q pela componente C'_q determinada pelos raios que outrora determinavam C_q mais os raios que aterrissam em $-\alpha$ que são mapeados por f sobre os raios que determinam C_1 . Assim, pelo teorema 3.7, $\{C_1, C_2, \dots, C_q\}$ é mapeado transitivamente sobre si por P_c . Note que P_c aplica C_q sobre C_1 como um recobrimento crítico de grau 2.

Com isso, uma vez que α separa K_n em ρ componentes, vemos que o mesmo ocorre com $K_n(i)$ para cada $i = 1, \dots, n - 1$. Portanto, K_n é separado por α em $n\rho$ componentes. Não obstante, como

$K(c)$ é simplesmente conexo e por teorema 6.13-[McM1](princípio de conexidade) $\partial K_n(i) \subset \partial K(c)$ para cada $i \in 1, \dots, n-1$, cada uma das $n\rho$ componentes de $\mathcal{K}_n - \alpha$ é também uma das componentes de $K - \alpha$, logo, pelo teorema 6.6-[McM1], $n\rho \leq q$.

□

Prova do teorema 3.6. Dado $p \in \mathbb{N}$. Como P_c possui apenas um número finito de pontos periódicos com período p , que a saber são os zeros do polinômio $P_c^p(z) - z$, é suficiente mostrar que w , um ponto p -periódico de P_c , pode estar em apenas um número finito de pequenos Julia cheios K_n .

Isto é, se w é um ponto periódico de P_c de período p , então $w \in K_n$ somente para um número finito de níveis $n \in \mathbb{R}(c)$.

Para tanto, suponhamos que exista $a > p$ pertencente ao $\mathbb{R}(c)$ tal que $w \in K_a$. Assim, $w = P_c^p(w) \in K_a(p)$, mas pelo Teorema 3.3, $\{w\} = K_a \cap K_a(p)$ e w é ponto fixo repulsor de P_c^a .

Seja g o polinômio ao qual $P_c^a : U_a \rightarrow V_a$ é hibridamente equivalente (pelo teorema de retificação 2.16).

Primeiramente suponhamos que w corresponda ao ponto fixo β de g .

Veremos que $w \notin K_b$ caso $b > a$.

O teorema da menor renormalização comum nos garante que P_c^d é renormalizável e $K_c = K_a \cap K_b$ onde $d = m.m.c.(a, b)$.

Desta maneira, a renormalização de P_c^d nos dá uma renormalização de $g^{\frac{d}{a}}$ via a conjugação híbrida entre P_c^a e g . Sendo $\frac{d}{a} > 1$ segue do teorema 3.8 que β não pertence ao Julia cheio de $g^{\frac{d}{a}}$. Assim, $w \notin K_c$ e, portanto, $w \notin K_b$, já que $w \in K_a$ e $K_d = K_a \cap K_b$.

Agora vejamos o caso em que w corresponde ao α , ponto fixo de g .

Seja q o número de raios externos que aterrissam em α . Segue do corolário 3.3 que α pertence a nenhum Julia cheio de renormalizações de g cujo nível é superior a q . O que implica que $w \notin K_b$ para $b > aq$, pois caso contrário, como P_c^d com $d = m.m.c.(a, b)$ é renormalizável, obteríamos como acima, uma renormalização de $g^{\frac{d}{a}}$, em que $\frac{d}{a} > q$ tal que $\alpha \in K(g^{\frac{d}{a}})$. Uma contradição.

Portanto, temos o teorema demonstrado. □

3.2 Renormalização Simples

A renormalização simples terá um papel fundamental no que se segue.

Definição 3.2. Considere P_c e $n \in \mathbb{R}(c)$. Para $1 \leq i \leq n$, $P_c^n : U_n(i) \rightarrow V_n(i)$ é uma aplicação do tipo polinomial hibridamente equivalente a um polinômio quadrático g_i com conjunto de Julia conexo. Os pontos fixos de g_i serão denotados por α e β , onde β corresponde ao ponto fixo no qual aterrissa o raio externo de ângulo 0. Denotaremos por $\alpha_n(i)$ e $\beta_n(i)$ os pontos fixos correspondentes de P_c^n em $K_n(i)$.

Pelo Teorema 3.3 se dois pequenos Julia cheios se tocam, então, tal interseção é apenas um ponto periódico repulsor de P_c . Com isso, se $K_n(i) \cap K_n(j) = \{p\}$ para $i \neq j$, então, $p = \alpha_n(i)$ ou $p = \beta_n(i)$.

Teorema 3.10 (mesmo tipo de renormalização). Todas as interseções entre os pequenos conjuntos de Julia de um mesmo nível ocorrem em um mesmo tipo de ponto fixo da renormalização. Isto é, nunca ocorre a situação na qual $K_n(i) \cap K_n(j) = \{\alpha_n(i)\}$ $K_n(i') \cap K_n(j') = \{\beta_n(i')\}$.

Demonstração. Temos $P_c(\alpha_n(i)) = \alpha_n(i+1)$ e $P_c(\beta_n(i)) = \beta_n(i+1)$, onde $n+1$ é equivalente ao 1, já que, para $1 \leq i < n$, P_c nos dá uma conjugação conforme entre $P_c^n : U_n(i) \rightarrow V_n(i)$ e $P_c^n : U_n(i+1) \rightarrow V_n(i+1)$. E para $i = n$ segue a igualdade devido $\alpha_n(i)$ e $\beta_n(i)$ serem pontos fixos de P_c^n , pois assim temos

$$P_c(\alpha_n(n)) = P_c(P_c^{n-1}(\alpha_n(1))) = P_c^n(\alpha_n(1)) = \alpha_n(1)$$

Buscaremos obter uma contradição ao assumir que dois pequenos Julias cheios se intersectam em um ponto $\alpha_n(j)$ e outros dois que se intersectam em um ponto $\beta_n(k)$, todos de um mesmo nível.

Mas como P_c permuta ciclicamente os conjuntos $K_n(i)$'s e os pontos $\alpha_n(i)$ e $\beta_n(i)$, então cada ponto $\alpha_n(i)$ e $\beta_n(i)$ pertence a pelo dois pequenos Julia cheios.

Consideremos então o grafo obtido a partir das interseções entre os pequenos Julia cheios nos pontos $\alpha_n(i)$'s e $\beta_n(i)$'s. Isto é, formemos o grafo Λ cujos vértices são os pontos $\alpha_n(i)$'s e $\beta_n(i)$'s que são ligados por uma aresta apenas se pertence a um mesmo pequeno Julia.

Como Λ contém mais arestas do que vértices, já que cada vértice pertence a pelo menos duas arestas, segue que Λ contém pelo menos um ciclo $\langle K_n(i_1), K_n(i_2), \dots, K_n(i_k) \rangle$ com $k > 1$ pois $\alpha_n(i) \neq \beta_n(i)$. Então, $L = K_n(i_1) \cup K_n(i_2) \cup \dots \cup K_n(i_k)$ é conexo pois os conjuntos adjacentes na união são conexos e se intersectam.

Mas $L \cap K_n(i_1) = \{\alpha_n(1), \beta_n(1)\}$ o que contradiz o teorema 6.13-[McM1] (*princípio de conexidade*) que nos garante que $L \cap K_n(i_1)$ é conexo. \square

3.3 Tipos de Renormalizações

Um nível de renormalização $n \in R(c)$ de P_c pode ser classificada da seguinte maneira:

1. **tipo α** , se algum par de pequenos conjuntos de Julia (P_c^n, U_n, V_n) tem como interseção o ponto fixo α da renormalização;
2. **tipo β** , se algum par de pequenos conjuntos de Julia (P_c^n, U_n, V_n) tem como interseção o ponto fixo β da renormalização;
3. **tipo disjunto**, se todos os pequenos conjuntos de Julia (P_c^n, U_n, V_n) são disjuntos.

Repare que o teorema 3.10 nos garante que tal classificação esta bem posta. Mais ainda, como o Julia cheio é o mesmo para um nível fixado independentemente da renormalização (P_c^n, U_n, V_n) .

Definição 3.3. *Diremos que uma renormalização é simples se for do tipo β ou disjunto. E a chamaremos de cruzada caso contrário, isto é, se for do tipo α .*

Consideremos a seguinte notação

$$SR(c) := \{n \in R(c); (P_c^n, U_n, V_n) \text{ é simples}\} \quad (3.15)$$

Teorema 3.11. *Se $m \in R(c)$ e $n \in SR(c)$, então m divide n ou n divide m .*

Demonstração. Seja d o máximo divisor comum entre m e n . Se $d = \min\{m, n\}$, então, $m|n$ ou $n|m$.

Caso d seja menor do que m e n , teremos $K_m(d) \neq K_m$ e $K_n(d) \neq K_n$.

Como $K_m \cap K_n \neq \emptyset$, já que $0 \in K_m$ e $0 \in K_n$, $P_c^i(K_m)$ e $P_c^i(K_n)$ também se intersectam para qualquer $i > 0$. Em particular, $K_m(d) \cap K_n(d) \neq \emptyset$. As sequências de conjuntos $\{P_c^i(K_m)\}_{i \in \mathbb{N}}$ e $\{P_c^i(K_n)\}_{i \in \mathbb{N}}$ são periódicas com períodos, m e n , respectivamente, já que permuta ciclicamente o conjunto $\{K_n, K_n(1), \dots, K_n(n-1)\}$ para cada nível $n \in \text{SR}(c)$. Da teoria elementar dos números, sabemos que existe $(k, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que $k \cdot m + l \cdot n = d$, ou seja, existe um múltiplo de n que é congruente ao d módulo m , e vice-versa, existe um múltiplo de m que é congruente ao d módulo n . Isto implica que K_n intersecta $K_m(d)$ e K_m intersecta $K_n(d)$.

$L := K_n \cup K_n(d) \cup K_m(d)$ é um fechado conexo contido em $K(c)$. O teorema 6.13[McM1](princípio de conexidade) nos garante que $K_m \cap L$ é conexo. Visto que $K_m(d) \cap K_m$ é no máximo um ponto, concluímos que $(K_n \cup K_n(d)) \cap K_m$, pois caso contrário, como $(K_n \cap K_n(d)) \cap K_m$ é fechado, assim o são os subconjuntos $A, B \subset (K_n \cap K_n(d)) \cap K_m$ disjuntos tais $A \cup B = (K_n \cap K_n(d)) \cap K_m$. Portanto, A e B estão a uma distância positiva, o que implica que $K_m \cap L$ não pode ser conexo. Como tanto K_n quanto $K_n(d)$ tem interseção não vazia com K_m , deve-se ter $K_m \cap K_n \cap K_n(d) \neq \emptyset$, pois caso contrário contradiremos novamente a conexidade de $K_m \cap L$, já que teríamos K_n disjunto de $K_m \cap K_n \neq \emptyset$.

Mas, como $n \in \text{SR}(c)$, K_n e $K_n(d)$ se intersectam no ponto fixo β de P_c^n , e assim, $\beta \in K_m \cap K_n$.

O teorema 3.5 nos assegura que P_c^k é renormalizável em que k é o menor múltiplo comum de m e n , com $K_k = K_m \cap K_n$. Mas deste modo, se P_x é o polinômio quadrático ao qual (P_c^n, U_n, V_n) é hibridamente equivalente, via o teorema de retificação 2.17 obteremos uma renormalização para P_x . Pela conjugação quaseconforme ente (P_c^n, U_n, V_n) e P_x obtemos uma renormalização para $P_x^{k/n}$ cujo conjunto de Julia contém o ponto fixo β de P_x , o que contradiz o teorema 3.8. \square

Corolário 3.4. *O conjunto $\text{SR}(c)$ é totalmente ordenado pela relação de divisibilidade.*

Com o corolário 3.2 temos

Corolário 3.5. *Os conjuntos K_n formam uma sequência decrescente quando n cresce através dos níveis em $\text{SR}(c)$. Consequentemente, para cada par de níveis a e b em $\text{SR}(c)$ com $a < b$, cada pequeno Julia do nível b estará contido em algum pequeno Julia do nível a . tem-se o mesmo para os pequenos conjuntos pós-críticos.*

O seguinte teorema será útil para a construção de renormalizações simples.

Teorema 3.12. *Suponhamos P_c^a simplesmente renormalizável e seja P_x o polinômio ao qual (P_c^a, U_a, V_a) é hibridamente equivalente. Se P_x^b é renormalizável, então, assim o é a aplicação $P_c^{a \cdot b}$.*

Demonstração. Seja $\Psi : W_c \rightarrow W_x$ a aplicação quaseconforme que nos atesta que (P_c^a, U_a, V_a) e P_x são hibridamente equivalente. Trocando-se V_b por sua pré-imagens por algum iterado de P_c^b , podemos assumir que $U_b \subset V_b \subset W_x$. E desta forma, $(P_c^{a \cdot b}, U_{a \cdot b}, V_{a \cdot b})$, com $U_{a \cdot b} := \Psi^{-1}(U_b)$ e $V_{a \cdot b} := \Psi^{-1}(V_b)$ nos dará uma renormalização de $P_c^{a \cdot b}$, pois Ψ é um homeomorfismo e $P_c^{a \cdot b} = \Psi \circ P_x^b \circ \Psi^{-1}$, assim, $P_c^{a \cdot b} : U_{a \cdot b} \rightarrow V_{a \cdot b}$ é própria e de grau igual a 2 com $U_{a \cdot b}$ compactamente contido em $V_{a \cdot b}$.

Destarte, nos resta verificar se $a \cdot b \in \text{SR}(c)$. Vejamos isto.

Se $b = 1$, $(P_c^{a \cdot b}, \Psi^{-1}(U_b), \Psi^{-1}(V_b))$ será uma renormalização de P_c^a , logo é simples.

Se $b > 1$, como $K(P_x^b) \subset K(P_x)$ e $\Psi^{-1}(K(P_x)) = K_a := K((P_c^a, U_a, V_a))$, temos $K_{a \cdot b} \subset K_a$ (ou mesmo pelo corolário 3.2). Temos ainda, $K_{a \cdot b}(i) \subset K_a(i')$.

Suponhamos, portanto, que $K_{a \cdot b}(i) \cap K_{a \cdot b}(j) = \{z_0\}$. Deste modo, $K_{a \cdot b}(i) \subset K_a(i')$ e $K_{a \cdot b}(j) \subset K_a(j')$ para algum par de índices i' e j' em $\{1, 2, \dots, a\}$. Já que P_c^a é simplesmente renormalizável,

se $i' \neq j'$, então z_0 será o ponto fixo β de $K_a(i')$, isto é, é o ponto fixo β da aplicação do tipo quadrático $(P_c^a, U_a(i'), V_a(i'))$. Mas assim, $K_{a,b}(i)$ contém o ponto fixo β de $K_a(i')$, o que contradiz o teorema 3.8 já que pelo teorema 3.2 $(P_c^a, U_a(i'), V_a(i'))$ é conformemente conjugada (P_c^a, U_a, V_a) .

$$\begin{array}{ccccc} K_a(i') & \xrightarrow{P_c^{a-i'}} & K_a & \xrightarrow{\Psi} & K(x) \\ P_c^{a-b} \downarrow & & P_c^a \downarrow & & P_x^b \downarrow \\ K_a(i') & \xrightarrow{P_c^{a-i'}} & K_a & \xrightarrow{\Psi} & K(x) \end{array}$$

Portanto, $i' = j'$, e desde que $P_c : K_a(i) \rightarrow K_a(i+1)$ é injetora para $i \in \{1, \dots, a-1\}$ e $P_c^a : K_a \rightarrow K_a$ é topologicamente conjugada à $P_x : K(x) \rightarrow K(x)$. Note que $\Phi := \Psi \circ P_c^{n-i'}$ aplica $K_{a,b}(i)$ em uma outra componente $K_b(l)$. Como Φ conjugua topologicamente $P_c : K_a(i) \rightarrow K_a(i+1)$ à $P_x : K(x) \rightarrow K(x)$ não podemos ter $K_{a,b}(i) - K_{a,b}(j)$ desconexo, pois se assim o tivermos contrariamos que P_x^b é simplesmente renormalizável. \square

3.3.1 Multiplicidade e Ramificação

Se P_c é renormalizável, a *multiplicidade* m_n de um nível de renormalização $n \in \text{SR}(c)$ é, por definição, o número dos pequenos conjuntos de Julia cheios do nível n que intersectam K_n , incluindo o próprio K_n na contagem. Note que a multiplicidade será igual a 1 se, e somente se, o nível de renormalização é do tipo disjunto, e que m_n é igual ao número dos pequenos conjuntos de Julia em cada componente de \mathcal{K}_n .

A *ramificação* ρ_n de um nível de renormalização $n \in \text{SR}(c)$ é, por definição, o número de componentes do conjunto $K_n - \bigcup_{i \neq n} K_n(i)$. ρ_n é igual ao número de componentes de $K_n(j) - \bigcup_{i \neq j} K_n(i)$ para qualquer $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. $\rho_n = 1$ se, e somente se, a renormalização é do tipo simples. Decerto, pois $K_n \cap \bigcup_{i \neq n} K_n(i)$ é igual ao $\{\alpha_n(n)\}$, ao $\{\beta_n(n)\}$ ou \emptyset conforme o tipo do nível de renormalização seja α , β ou *disjunto*. Mas para o tipo α , sendo $\alpha_n(n)$ repulsor, teremos ρ_n igual ao número de componentes de $K_n - \alpha_n(n)$ que é maior do 1.

3.4 Polinômios infinitamente renormalizáveis

O conjunto dos parâmetros $c \in \mathcal{M}$ para os quais P_c é infinitamente renormalizável aparenta ser bastante magro. No entanto, estas aplicações são de central interesse, tanto pelas propriedades geométricas de seus conjuntos de Julia [Mil2][McM2] quanto ao fato de ainda não serem bem compreendidas. Por exemplo, os polinômios quadráticos infinitamente renormalizáveis são os únicos para os quais a conjectura sobre os campos de linhas invariantes permanece.

Fazendo-se uso do *quebra-cabeça de Yoccoz* mais os resultados das seções anteriores mostraremos a seguir que um polinômio infinitamente renormalizável P_c admite uma infinidade de níveis para os quais a renormalização é simples. Encerraremos esta seção revisando alguns resultados devidos a Yoccoz, Lyubich e Shishikura sobre campos de linhas invariantes e polinômios quadráticos que são no máximo finitamente renormalizáveis.

Definição 3.4. Dizemos que P_c é infinitamente renormalizável se $R(c)$ é infinito.

Teorema 3.13. Suponhamos P_c infinitamente renormalizável. Então:

1. Toda órbita periódica de P_c é repulsora;

2. O interior de $K(c)$ é vazio (i.e., $K(c) = J(c)$);
3. $\bigcap_{R(c)} \mathcal{J}_n$ não contém pontos periódicos;
4. O conjunto pós-crítico finito, $P(c) \cap \mathbb{C}$, não contém pontos periódicos;
5. Para qualquer $n \in R(c)$, $P_n(i)$ e $J_n(j)$ são disjuntos se $i \neq j$.

Demonstração. Vimos no corolário 3.1 que se P_c^n é renormalizável, então, qualquer ponto periódico de P_c com período menor do n é repulsor. Logo, se P_c é infinitamente renormalizável teremos que qualquer órbita periódica de P_c é repulsora.

Devido ao teorema de *Sullivan* de classificação das componentes de Fatou e o fato de que polinômios não possuem anel de Hermann, a existência de um aberto contido no Julia cheio de P_c implica a existência de um ciclo atrator, parabólico ou irracionalmente indiferente, o que não ocorre devido ao item 1 provado acima. Com isso, temos $K(c) = J(c)$.

Do teorema 3.6 sabemos que fixado um período $p \in \mathbb{N}$, existe possivelmente um número finito de níveis $n \in R(c)$ para os quais K_n contém um ponto periódico de período igual a p , em particular, para os quais J_n contém a órbita positiva de um ponto periódico de período p . Assim, se x é um ponto periódico de P_c a órbita de x intersecta J_n apenas para um número finito de níveis, logo é disjunto de \mathcal{J}_n para todo n suficientemente grande e, por conseguinte, $n \in R(c) \cap \mathcal{J}_n$. Portanto, $\bigcap_{R(c)} \mathcal{J}_n$ não contém nenhum ponto periódico.

Visto que $P(c) \cap \mathbb{C} \subset J_n$ para todo n , segue do que vimos logo acima que $P(c) \cap \mathbb{C}$ também não contém ponto periódico de P_c .

Temos, $P_n(i) \subset K_n(i)$, mas pelo item 1, $K_n(i) = J_n(i)$. Todavia, do teorema 3.3, sabemos que se $K_n(i)$ e $K_n(j)$ se intersectam, então, tal interseção é um único ponto periódico de P_c . Desde que $P(c) \cap \mathbb{C}$ não contém ponto periódico, deve-se ter $P_n(i) \cap P_n(j) = \emptyset$ para $i \neq j$. \square

Como no caso infinitamente renormalizável, $K_n = J_n$ para qualquer $n \in R(c)$ e, portanto, $K_n(i) = J_n(i)$ e $\mathcal{K}_n = \mathcal{J}_n$ para qualquer $n \in R(c)$, faremos uso apenas da notação com a letra J para nos referirmos tanto ao Julia cheio quanto ao Julia.

Definição 3.5. *Uma aplicação racional será ergódica se para qualquer subconjunto mensurável $A \subset \widehat{\mathbb{C}}$ para o qual $(P_c)^{-1}(A) = A$, então A tem medida (de Lebesgue) zero ou medida total.*

Teorema 3.14 (dinâmica ergódica ou atratora). *Se R é uma aplicação racional com grau maior do que 1, então, R satisfaz uma das seguintes opções:*

1. o conjunto de Julia é toda a esfera de Riemann e a ação de R em $\widehat{\mathbb{C}}$ é ergódica; ou
2. $d(R^n(x), P(R)) \rightarrow \infty$ para quase todo ponto x no conjunto de Julia de R , quando $n \rightarrow \infty$, em que $P(R)$ é o conjunto pós-crítico de R e d é distância esférica.

Consulte [Mil1] para uma detalhada definição do conjunto de Julia e o conjunto pós-crítico de R .

Como consequência deste teorema temos o seguinte resultado:

Teorema 3.15 (Pequenos Julia atratores). *Suponhamos P_c infinitamente renormalizável. Então, para qualquer $n \in R(c)$ e para quase todo ponto $x \in J(c)$, a órbita positiva de x por P_c entra no conjunto de Julia do nível n , \mathcal{J}_n .*

Demonstração. Como o Julia não é toda a esfera de Riemann decorre do teorema 3.14 que $d(P_c^n(x), P(c)) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, para quase todo ponto x em $J(c)$.

Em cada nível $n \in \mathbb{R}(c)$, $P(c)$ é particionado em n peças compactas, $P_n(1), P_n(2), \dots, P_n(n)$, que são permutadas ciclicamente por P_c . Assim, se x fica arbitrariamente próximo de $P(c)$ por iterados de P_c , ficará também arbitrariamente próximo de cada peça $P_n(i)$ de $P(c) \cap \mathbb{C}$.

Deste modo, para todo k suficientemente grande para os quais tenhamos $P_c^k(x)$ muito próximo de $P_n(n)$, teremos também $P_c^{k+n}(x)$ muito próximo de P_n . Logo, $d(P_c^{k+nj}(x), P_n(n)) \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$, se fixamos um k como acima.

Mas, visto que $P_n(n)$ é um subconjunto compacto de U_n , para j grande o suficiente o ponto $y = P_c^{k+nj}(x)$ não escapa de U_n , o que implica que $y \in K_n = J_n \subset \mathcal{J}_n$. E temos o resultado esperado. \square

3.4.1 A tabela crítica

Considere P_c com $c \in \mathcal{M}$ cujos pontos fixos são repulsores e a órbita do ponto crítico seja disjunta do ponto fixo α . Se um ponto $z \in K(c)$ tem sua órbita positiva disjunta do ponto fixo repulsor α , então, existe uma única sequência de peças do quebra-cabeça de Yoccoz de P_c , $Y_0(z) \supset Y_1(z) \cdots \supset Y_n(z) \supset \cdots$.

A *tabela* associada a z é uma ferramenta combinatória introduzida por *Bodil Branner* e *J. H. Hubbard* que nos permite representar graficamente a dinâmica da órbita de z em relação a partição de $K(c)$ dada pelo quebra-cabeça de Yoccoz.

Definição 3.6. $J_\alpha(c) := \{z \in J(c); \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } P_c^n(z) = \alpha\}$

Definição 3.7 (Nível semicrítico). *Dado $z \in K(c) - J_\alpha(c)$, seja $\{Y_d(z)\}_{d \geq 0}$ a sequência de peças do quebra-cabeça que contém o ponto z . O nível semicrítico $S(z)$ de z é o maior inteiro $d \geq 0$ tal que $Y_d(z) = Y_d(0)$. Caso $Y_d(z) = Y_d(0)$ para todo nível $d \geq 0$, definimos $S(z) := \infty$ e caso $P_d(z) \neq P_d(0)$ para todo $d \geq 0$, definimos $S(z) = 1$. Assim, $S(z)$ será grande quando z estiver próximo de $z = 0$.*

Para cada ponto $z \in K(c)$ podemos considerar a sequência de números inteiros $\{S(P_c^n(z))\}_{n \geq 0}$. Esta sequência possui interessantes propriedades.

Definição 3.8 (A tabela). *A tabela $T(c, z)$ associada a um ponto $z \in K(c) - J_\alpha(c)$ é uma matriz $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ na qual a j -ésima coluna está associada ao ponto $z_j := P_c^j(z)$ e a i -ésima linha está associada ao i -ésimo nível do quebra-cabeça de Yoccoz de modo que:*

1. na j -ésima coluna é traçada uma linha vertical que vai do nível 0, isto é, da linha 0 até o nível $S(z_j) - 1$;
2. e no nível $S(z_j)$ é traçada duas linhas verticais na j -ésima coluna,
3. e do nível $S(z_j) + 1$ em diante é deixado em branco na j -ésima coluna.

Note que, em uma j -ésima coluna, um segmento de linha vertical duplo ou não em uma i -ésima linha da tabela indica que a peça do nível j de quebra-cabeça que contém o ponto $z_j = P_c^j(z)$ é igual a peça crítica do nível i , isto é, $Y_i(z_j) = Y_i(0)$. Uma linha vertical longa indica que o ponto z está próximo do ponto crítico.

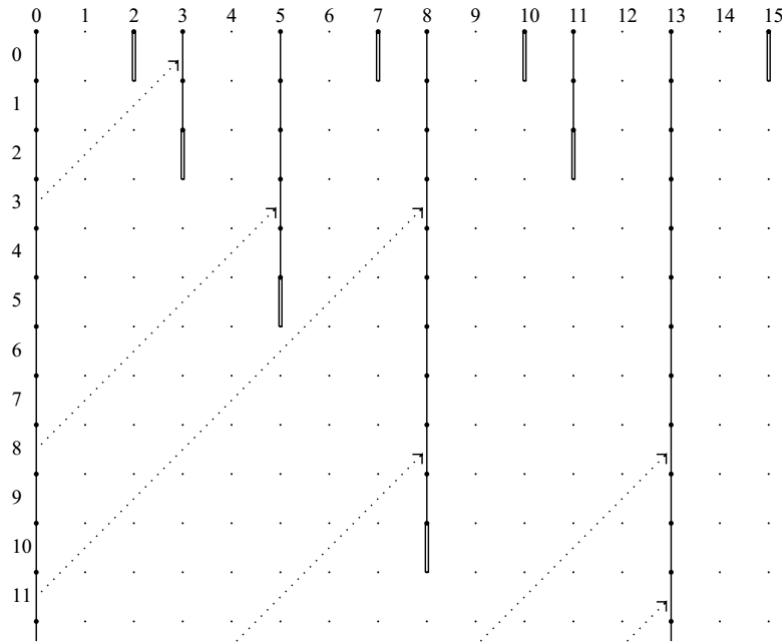


Figura 3.1: Tabela (tirada de [Mil2])

Uma diagonal de comprimento m é uma diagonal traçada na tabela da esquerda para à direita e a partir de um nível $d \geq m$ até o nível $d + 1 - m$. Uma diagonal de comprimento m corresponde à aplicação P_c^{m-1} que envia a peça $Y_d(z_j)$ sobre a peça $Y_{d+1-m}(z_{j+m})$.

Têm-se bastante interesse na tabela associada à órbita crítica de P_c .

Definição 3.9 (Tabela crítica). *A tabela crítica de um polinômio P_c , denotada por $TC(c)$, é a tabela associada à sua órbita crítica $\{P_c^n(0); n \geq 0\}$.*

Definição 3.10 (período de $TC(c)$). *$TC(c)$ será periódica se existe $j \geq 0$ tal que $Y_d(P_c^j(0)) = Y_d(0)$ para todo nível $d \geq 0$. O menor j satisfazendo isto será, por definição, o período da tabela crítica de P_c . Se $TC(c)$ não for periódica definimos o seu período como sendo infinito.*

Temos uma definição de período para a renormalização também:

Definição 3.11. *Se $SR(c) \neq \emptyset$, o período de renormalização de P_c será o menor nível n em $SR(c)$. Se $SR(c) = \emptyset$ definimos o período de renormalização de P_c como sendo infinito.*

Para mais informações sobre esta ferramenta consulte: [Mil2],[BrH], [J],[TY].

É um princípio geral em dinâmica holomorfa que o comportamento geral de um sistema dinâmico seja induzido pelo comportamento da órbita crítica. Por exemplo, o período da renormalização tem uma relação imediata com o tempo de retorno do ponto crítico à peça central:

Teorema 3.16. *Considere P_c com $c \in \mathcal{M}$ cujos pontos fixos são repulsores e a órbita do ponto crítico seja disjunta do ponto fixo α . Então, o período da tabela crítica $TC(c)$ é igual ao período de renormalização de P_c .*

O seguinte teorema decorre de uma aplicação combinatória do quebra-cabeça de Yoccoz. Ele quem nos permitirá garantir que um polinômio quadrático infinitamente renormalizável admite uma infinidade de níveis de renormalizações simples. Consulte sua prova em [McM1].

Teorema 3.17. *Consideremos P_c com $c \in \mathcal{M}$, e sejam E_1, E_2, \dots, E_n subconjuntos conexos e fechados do Julia cheio $K(c)$ de P_c .*

Se $0 \in E_n$, $P(E_n) \subset E_1$ e $P(E_i) \subset E_{i+1}$ para $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, então, P_c^n é simplesmente renormalizável.

Teorema 3.18. *Se P_c é infinitamente renormalizável, então, P_c é simplesmente renormalizável para infinitos níveis $n \in \mathbb{R}(c)$, isto é, $|\text{SR}(c)| = \infty$.*

Demonstração. Para cada nível $n \in \text{SR}(c)$ definimos k_n como o número de componentes do Julia cheio do nível n , \mathcal{K}_n . Deste modo, $n = k_n \cdot m_n$. Lembre-se que m_n é multiplicidade do nível n (consulte a subseção 3.3.1).

Afirmção 3.2. $k_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$.

prova da afirmação 3.2. Dado $n \in \mathbb{N}$, se a renormalização de P_c^n for do tipo disjunto, então, $k_n = n$. Caso contrário, consideremos o ponto z_0 onde os pequenos Julias cheios $K_n(i)$ de uma componente de \mathcal{K}_n se intersectam. Do teorema 3.3, z_0 é um ponto periódico repulsor de P_c . Assim, k_n é igual ao período de z_0 . Mas, o teorema 3.6 que o período de z_0 tende para o infinito. E, portanto, $k_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. \square

Desta maneira, se provarmos que para cada k_n , $P_c^{k_n}$ é simplesmente renormalizável teremos o que queremos.

Decerto isto ocorre.

Tomemos os conjuntos E_i do teorema 3.17 como sendo as componentes de \mathcal{K}_{k_n} de modo que $0 \in E_{k_n}$ e $P_c(E_i) = E_{i+1}$. Com as hipótese do teorema 3.17 e dele concluímos que $P_c^{k_n}$ é simplesmente renormalizável. \square

3.5 Medida e conectividade local

Teorema 3.19 (Yoccoz). *Seja P_c tal que*

1. $J(c)$ é conexo;
2. P_c não tem ciclo indiferente;
3. P_c não é infinitamente renormalizável.

Então, $J(c)$ é localmente conexo.

Se, além do mais, P_c não possui nenhum ciclo atrator, então, $c \in \partial\mathcal{M}$ e $\partial\mathcal{M}$ é localmente conexo em c .

Como consequência imediata do teorema acima temos:

Corolário 3.6. *Se $J(c)$ suporta um campo de linhas invariante, então, P_c é simplesmente renormalizável para uma infinidade de níveis $n \in \mathbb{R}(c)$. Em particular, P_c é infinitamente renormalizável.*

Teorema 3.20. *Se os dois pontos fixos de P_c são repulsores, então, ou $J(c)$ tem área zero ou P_c^n é renormalizável para algum $n > 1$.*

Capítulo 4

Robustez

Neste capítulo introduziremos a noção de robustez de polinômios quadráticos devida à *McMullen*, bem como os resultados necessários para a prova do **Teorema de Rigidez**. A robustez tem um caráter geométrico e para defini-la se faz necessário apresentarmos algumas definições e resultados *geométricos*.

Destarte, começaremos definindo um conjunto natural de geodésicas simples e disjuntas na superfície de Riemann hiperbólica $\widehat{\mathbb{C}} - P(c)$. Os discos topológicos limitados por tais geodésicas cumprirão o papel dos intervalos básicos na construção do conjunto de Cantor. Diremos que um polinômio quadrático infinitamente renormalizável é robusto quando aquelas geodésicas tiverem comprimento limitado para uma quantidade infinita de níveis, com isso, mostraremos que o conjunto pós-crítico é um conjunto de Cantor com área zero e daremos à sua dinâmica um modelo topológico.

Estamos considerando apenas polinômios P_c cuja $|P(c)| = \infty$. Portanto, $\widehat{\mathbb{C}} - P(c)$ admite uma estrutura de superfície de Riemann hiperbólica (vide-[lema 2.5-\[Mil1\]](#)).

Assim, pelo [Teorema 3.18](#) sabemos que $|SR(c)| = \infty$.

Definição 4.1 (Laços simples em torno do conjunto pós-crítico). *Para cada nível $n \in SR^*(c)$, $\gamma_n(i)$ denotará o representante geodésico na superfície hiperbólica $\widehat{\mathbb{C}} - P(c)$ da classe de homotopia livre das curvas simples que separam o Julia $J_n(i)$ do resto do conjunto pós-crítico, isto é, de $P(c) - J_n(i)$.*

A existência de tais curvas separando o pequeno Julia $J_n(i)$ do resto do conjunto pós-crítico $P(c) - J_n(i)$ decorre do [Teorema 3.13](#) que nos garante que $P_n(j)$ e $J_n(i)$ são disjuntos se $j \neq i$. O fato de $n > 1$ nos garante via o [Teorema 2.22](#) a existência da geodésica $\gamma_n(i)$, já que um representante da classe de homotopia livre das curvas simples que separam $J_n(i)$ de $P(c) - J_n(i)$ não poderá ser homotopicamente trivial nem periférico. E por fim, observamos que a unicidade das classes de homotopias livres decore da conexidade de $J_n(i)$, pois se $J_n(i)$ não for conexo não é difícil exibir duas curvas que separam $J_n(i)$ de $P(c) - J_n(i)$ sem serem homotópicas. Denotaremos, $\gamma_n := \gamma_n(n)$. Do [Teorema 2.23](#) segue que as geodésicas $\gamma_n(i)$ são simples.

Teorema 4.1. *As geodésicas $\Gamma := \{\gamma_n(i); n \in RS^*(P_c) \text{ e } 1 \leq i \leq n\}$ são disjuntas.*

Demonstração. Consideremos duas geodésicas $\gamma_m(i)$ e $\gamma_n(j)$. Podemos tomar representantes para as classes de homotopia livre de $\gamma_m(i)$ e $\gamma_n(j)$ em $\widehat{\mathbb{C}} - P(c)$ arbitrariamente próximas de $J_m(i)$ e $J_n(j)$. Se os pequenos $J_m(i)$ e $J_n(j)$ são disjuntos, então, podemos escolher estes representantes de modo que sejam disjuntos, e desta maneira, pelo [Teorema 2.23](#), $\gamma_m(i)$ e $\gamma_n(j)$ são disjuntos.

Suponhamos agora que $J_m(i)$ e $J_n(j)$ não sejam disjuntos. Se $m = n$, então, pelo Teorema 3.3, $J_m(i) \cap J_n(j) = \{z_0\}$ com z_0 ponto periódico repulsor de P_c , que pelo Teorema (8.1-McM) não pertence ao conjunto pós-crítico. Já que a renormalização é simples, z_0 não desconecta $J_m(i)$ ou $J_m(j)$. Neste caso, como cada $P_m(i)$ é compacto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(z_0, \varepsilon) \cap P_m(i) = \emptyset$ e $B(z_0, \varepsilon) \cap P_m(j) = \emptyset$. Desta forma, conseguimos separar $J_m(i, z_0, \varepsilon) = J_m(i) - B(z_0, \varepsilon)$ de $P(c) - J_m(i, z_0, \varepsilon)$ e $J_m(j, z_0, \varepsilon) = J_m(j) - B(z_0, \varepsilon)$ de $P(c) - J_m(j, z_0, \varepsilon)$ por curvas simples disjuntas, logo $\gamma_m(i)$ e $\gamma_n(j)$ são disjuntas.

Por fim, se $m < n$, então, pelo colorário temos $J_n(j) \subset J_m(k)$ para algum $k \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Como as geodésicas $\gamma_m(i)$ são fronteiras de discos disjuntos, se $k \neq i$ temos $\gamma_n(j) \subset \widetilde{Y}_m(i)$ é disjunta de $\gamma_m(k) = \partial \widetilde{Y}_m(k)$, em que $\widetilde{Y}_a(b)$ é o interior de $\gamma_a(b)$ em \mathbb{C} .

Se $k = i$, teremos de garantir que $\gamma_n(j) \cap \gamma_m(k = i) = \emptyset$, já que $\gamma_n(j) \subset \widetilde{Y}_m(i)$. O que é equivalente a mostrarmos que existe um ponto de $P(c)$ em $P_m(i) - P_n(j)$ já que o representante de cada classe de homotopia livre das curvas $\gamma_a(b)$ é único. Decerto isto ocorre, pois sendo $m < n$ temos $P_n(j) \neq P_n(j + m) \subset P_m(i)$ e da definição de $\gamma_n(i)$ temos $P_n(j + m) \subset \widetilde{Y}_m(i) - \widetilde{Y}_n(j)$, assim, $P_n(j + m) \subset P_m(i) - P_n(j)$ e temos o que queríamos. \square

Teorema 4.2 (Sistema de curvas invariantes). *Dado $n \in RS^*(P_c)$. Para $i \neq 1$, $(P_c)^{-1}(\gamma_n(i))$ tem uma componente α que é isotópica à $\gamma_n(i - 1)$ em $\widehat{\mathbb{C}} - P(c)$ e cobre $\gamma_n(i)$ com grau 1. A outra componente β de $(P_c)^{-1}(\gamma_n(i))$ é a fronteira de um disco disjunto do conjunto pós-crítico.*

E $(P_c)^{-1}(\gamma_n(i)) = \alpha$ é uma curva isotópica à γ_n e recobre $\gamma_n(1)$ com grau 2.

Demonstração. Para $i \neq 1$, $J_n(i)$ não contém o valor crítico $P_c(0)$ e assim a pré-imagem de $\gamma_n(1)$ por P_c é composta de duas componentes, uma destas é a componente α que é a fronteira de um disco que contém $J_n(i - 1)$, enquanto a outra componente β é a fronteira de um disco que contém $J'_n(i - 1)$, o pequeno conjunto de Julia companheiro de $J_n(i - 1)$.

α separa $J_n(i - 1)$ de $P(c) - J_n(i - 1)$, pois caso contrário teremos $p \in P_n(j)$ na componente de $(\widehat{\mathbb{C}} - P(c)) - \alpha$ que contém $J_n(i - 1) - P_n(i - 1)$ para algum $j \neq i - 1$, já que $P(P_c) \cap \{\infty\} = \bigcup_{j=1}^n P_n(j)$. O que contradiz que $\gamma_n(i)$ separa $J_n(i)$ de $P(P_c) - J_n(i)$, pois $P_c(p) \in \widetilde{Y}_n(i) \cap P_n(j + 1 \neq i)$. Portanto, α é isotópica à $\gamma_n(i - 1)$. E como $J'_n(i)$ está contido em $\widehat{\mathbb{C}} - P(c)$, temos $B \cap P(c) = \emptyset$, pois, cada $J'_n(i)$ é disjunto de $\bigcup_{k=1}^n J_n(k) = P(c)$. Portanto, β é a fronteira de um disco em $\widehat{\mathbb{C}} - P(c)$.

Quando $i = 1$, $J_n(1)$ contém o valor crítico $P_c(0)$. E desta forma, $P_c^{-1}(\gamma_n(1)) = \alpha$ separa J_n de $P(c) - J_n$ pela razão exibida acima e, portanto, $\gamma_n(1)$ é isotópica à γ_n , e neste caso α é um recobrimento duplo de $\gamma_n(1)$ por P_c . \square

Teorema 4.3. *Fixado um nível de renormalização simples $n > 1$, os comprimentos das geodésicas $\gamma_n(1)$; $1 \leq i \leq n$, são comparáveis, e temos*

$$\frac{1}{2}l(\gamma_n) \leq l(\gamma_n(1)) \leq \dots \leq \gamma_n(n - 1) \leq l(\gamma_n) \quad (4.1)$$

Demonstração. Consideremos o conjunto $Q := P_c^{-1}(P(c))$.

Pelo Teorema da Função Inversa $P_c : \widehat{\mathbb{C}} - Q \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} - P(c)$ é um homeomorfismo local, sendo assim, uma aplicação de recobrimento, que por sua vez, via teorema de *Pick*(2.11-[McM1]), implica

que P_c é uma isometria local com respeito a métrica hiperbólica em $\widehat{\mathbb{C}} - Q$ e $\widehat{\mathbb{C}} - P(c)$. Lembre-se que $|P(c)| > +\infty$.

Também por *Pick* a inclusão $i : \widehat{\mathbb{C}} - Q \hookrightarrow \widehat{\mathbb{C}} - P(c)$ decresce estritamente a distância hiperbólica. Lembre-se, $P_c^{-1}(\gamma_n(i))$, para $1 \leq i \leq n$ tem uma componente $\alpha \approx_{isot} \gamma_n(i-1)$ (teorema anterior).

$$\begin{aligned} l(\gamma_n(i-1)) &\leq l(\alpha) && \text{(pois } \alpha \text{ é o representante geodésico de } [\alpha]); \\ &\leq l_{\widehat{\mathbb{C}}-Q}(\alpha) && \text{(pois } i \text{ é contração);} \\ &= l(\gamma_n(i)) && (P_c(\alpha) = \gamma_n(i) \text{ e } P_c \text{ isometria local } 1-1.) \end{aligned}$$

Por fim, $P_c^{-1}(\gamma_n(1)) = \alpha$ é isotópico à γ_n e recobre $\gamma_n(1)$ com grau dois, e disto resulta,

$$l(\gamma_n) \leq l(\alpha) \leq l_{\widehat{\mathbb{C}}-Q}(\alpha) = 2l(\gamma_n(1))$$

□

4.0.1 Área do conjunto pós-crítico

Definição 4.2. *Um polinômio quadrático infinitamente renormalizável P_c será chamado robusto se*

$$\liminf_{SR^*} l_{\mathbb{H}}(\gamma_n) < \infty, \quad (4.2)$$

no qual $l(\cdot)$ denota o comprimento hiperbólico em $\widehat{\mathbb{C}} - P(c)$.

A robustez, como já mencionado, é uma propriedade do conjunto pós-crítico. Destarte, com relação à robustez, os pequenos conjuntos de Julia desempenham um papel apenas combinatório quanto a escolha das curvas simples $\gamma_n(i)$.

O seguinte teorema decorrerá da aplicação do teorema da vizinhança colar 2.24.

Teorema 4.4 (conjunto pós-crítico com medida zero). *Suponhamos P_c robusto. Então,*

- 1 o conjunto pós-crítico $P(c)$ é um conjunto de Cantor com medida zero;
- 2 quando $n \rightarrow +\infty$ em $SR^*(c)$;
- 3 $P_c : P(c) \rightarrow P(c)$ é um homeomorfismo topologicamente conjugado à aplicação

$$\sigma : x \mapsto x + 1 \quad (4.3)$$

agindo no grupo profinito

$$\Lambda := \text{proj} \lim_{n \in SR^*(c)} \mathbb{Z}/n \quad (4.4)$$

Demonstração. Enumeremos $SR^*(c) = \{n(1), n(2), \dots\}$ com $n(k) < n(k+1)$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ e $i = 1, \dots, n(k)$, consideremos as vizinhanças colares $A_k(i) := C(\gamma_k(i))$ em torno das geodésicas $\gamma_n(i)$ na superfície hiperbólica $\widehat{\mathbb{C}} - P(c)$.

Pelo teorema 2.24, as vizinhanças colares são disjuntas; e $A_k(i)$ separa o pequeno conjunto pós-crítico $P_{n(k)}(i)$ de $P(c) - P_{n(k)}(i)$, pois o teorema nos garante $A_k(i) \hookrightarrow \widehat{\mathbb{C}} - P(c)$ e $\gamma_{n(k)}(i)$.

Definimos E_k para cada $k \in \mathbb{N}$ como sendo a união das vizinhanças colares do nível $n(k)$, isto é, $E_k = \bigcup_{i=1}^{n(k)} A_k(i)$.

Pelo corolário 3.5 o pequeno conjunto pós-crítico $P_{n(k+1)}(i)$ está contido em algum $P_{n(k)}(j)$. Como, pelo teorema da vizinhança colar, os anéis que compõe E_{k+1} são disjuntos dos anéis em E_k , decorre que cada componente $A_{n(k+1)}(i)$ fica contida na componente de $(\widehat{\mathbb{C}} - P(c)) - A_{n(k)}(j)$ que não contém ∞ , para algum $j \in \{1, \dots, n(k)\}$. E desde que para cada $n(k) \in \text{RS}^*$, $P(c) = \bigcup_{i=1}^{n(k)} P(i)$, então para cada $p \in P(c)$ existe uma sequência $\{i_{n(k)}\}$ de números naturais tal que $p \in P_{n(k)}(i_{n(k)})$, para a qual $i_{n(k)} \in \text{SR}^*(c)$. Desta forma, temos $p \in D_{i_{n(k)}}$ para cada $i_{n(k)}$, em que $D_{i_{n(k)}}$ é a componente $\widehat{\mathbb{C}} - A_{n(k)}(i)$ que não contém ∞ .

Por ser P_c ser robusto, $\liminf_{n \in \text{SR}^*(c)} l(\gamma_n) < \infty$. Do teorema 4.3 sabemos que o comprimento hiperbólico das geodésicas $\gamma_{n(k)}(i)$ são limitados superiormente pelo comprimento hiperbólico da geodésica $\gamma_{n(k)}$, para $n(k) \in \text{SR}^*(c)$ fixado. Desta maneira, obtemos a partir do teorema 2.19–[McM1] concluímos que para um ponto arbitrário $p \in P(c)$ a série $\sum_{k=1}^{\infty} \text{mod}(D_{i_{n(k)}})$ diverge, pois existe subsequência $\{l(\gamma_{n(k_j)})\}$ de $\{l(\gamma_{n(k)})\}$ tal que $\gamma_{n(k_j)} < L$, para algum $L \in (0, +\infty)$, e disto decorre

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{mod}(D_{i_{n(k)}}) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \text{mod}(D_{i_{n(k_j)}}) \quad (4.5)$$

$$\geq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{M(L)}{2} = \infty \quad (4.6)$$

Por conseguinte, o teorema 2.16–[McM1] implica que $D = \bigcap_{k \geq 1} D_k$ é totalmente desconexo e tem medida de *Lebesgue* nula. Temos também $D = P(c)$, pois $P(c) \subset D_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$, isto é, $P(c) \subset \bigcup_{k \geq 1} D_k$, e por outro lado, se $x \in \bigcap_{k \geq 1} D_k$, então, $x = \bigcap_{j \geq 1} D_{k_j}$, mas $p = \bigcap_{k \geq 1} P_{n(k)}(i_{k_j}) \subset \bigcap_{k \geq 1} D_k$ e, portanto, $x = p \in P(c)$. Note ainda que por ser D totalmente desconexo, o maior diâmetro das componentes de D_k tende para zero. Isto porque, se não, existirá uma sequência decrescente $\{D_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $\text{diâm}(D_{k_j}) \not\rightarrow 0$ o que contradizirá que $\bigcap_{j \geq 1} D_{k_j} = \{p\}$. Assim, $\sup_i \text{diâm}(P_{n(k)}(i))$ tende para zero.

Para cada nível $n \in \text{SR}^*(c)$ temos bem definida a aplicação $f_n : P(c) = \bigcup_{i=1}^n P_n(i) \rightarrow \mathbb{Z}/n$ que associa $P_n(i)$ ao $i \pmod n$.

Se $m > n$ são inteiros com $m = q \cdot n$ para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, vale:

$$[i]_n = \bigcup_{k=1}^q [j_k]_n \quad \text{tal que} \quad j_k \equiv i \pmod n; \quad (4.7)$$

em que $[i]_n$ denota um elemento de \mathbb{Z}/n e $j_k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$.

Esta aplicação induz um homomorfismo

$$\varphi_{nm} : \mathbb{Z}/m \rightarrow \mathbb{Z}/n \quad (4.8)$$

$$[j]_m \mapsto [i]_n \quad \text{se} \quad j \equiv i \pmod n \quad (4.9)$$

Com isso, podemos ver $((\mathbb{Z}/n); (\varphi_{nm}))$ como um sistema inverso com respeito ao $\text{SR}^*(c)$ (veja [B1],[B2]) cujo limite inverso é exatamente o subconjunto $\Lambda := \{x = (x_1, x_2, \dots) \in \prod_{n \geq 2} \mathbb{Z}/n; x_m = \varphi_{nm}(x_n)\}$.

As aplicações $f_n : P(c) = \bigcup_{i=1}^n P_n(i) \longrightarrow \mathbb{Z}/n$ induzem uma aplicação $\varphi : P(c) \longrightarrow \Lambda$ dada por $\varphi(z_0) = (f_{n(1)}(z_0), f_{n(2)}(z_0), f_{n(3)}(z_0), \dots) \in \Lambda$. Estas aplicações são compatíveis no seguinte sentido,

$$\varphi_{nm}(f_m) = f_n \quad (4.10)$$

Disto decorre a continuidade de φ com respeito a topologia inicial(ou projetiva). Note também que φ é sobrejetora, isto por construção, e é injetora devido o fato de que cada sequência encaixada dos pequenos conjuntos pós-críticos converge para um ponto. E, portanto, φ é bijetora.

Temos na teoria dos grupos profinitos uma caracterização destes grupos que nos garantem que estes são espaços topológicos compactos Hausdorff e totalmente desconexos, isto é, são um conjunto de Cantor. Por conseguinte, sendo $P(c)$ compacto, Λ Hausdorff e φ bijeção contínua, φ é na verdade um homeomorfismo. E disto concluímos que $P(c)$ é, também, um conjunto de Cantor.

Dado $z_0 \in P(c)$, temos

$$\sigma(\varphi(z_0)) = \varphi(z_0) + 1 \quad (4.11)$$

$$= (f_{n(1)}(z_0) + [1]_{n(2)}, f_{n(2)}(z_0) + [1]_{n(2)}, f_{n(3)}(z_0) + [1]_{n(3)}, \dots) \quad (4.12)$$

$$= (f_{n(1)}(P_c(z_0)), f_{n(2)}(P_c(z_0)), f_{n(3)}(P_c(z_0)), \dots) \quad (4.13)$$

$$= \varphi(P_c(z_0)) \quad (4.14)$$

Ou seja, visto que $P_c(P_n(i)) = P_n(i)$, φ conjuga $P_c|_{P(c)}$ à σ , isto é, o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} P(c) & \xrightarrow{P_c} & P(c) \\ \varphi \downarrow & & \varphi \downarrow \\ \Lambda & \xrightarrow{\sigma} & \Lambda \end{array}$$

□

Parece pouco provável que todo polinômio quadrático infinitamente renormalizável seja robusto. *Douady* e *Hubbard* apresentaram um exemplo no qual $P_c(z) = z^2 + c$ é infinitamente renormalizável e, no entanto, $J(c)$ não é localmente conexo, sustentando isso (consulte:§3 – [Mil2]). É conjecturado que a robustez implica a conexidade local do Julia ,ou mesmo, medida de Lebesgue zero. Há também o problema sobre a conexidade local do Mandelbrot em um parâmetro robusto. Note que se a órbita crítica de um polinômio infinitamente renormalizável P_c for densa em $J(c)$, então, tal polinômio não poderá ser robusto.

Capítulo 5

Rigidez

Neste capítulo provaremos o mais importante resultado deste trabalho, o teorema de rigidez cujo enunciado é

Teorema 5.1 (Rigidez robusta). *Um polinômio quadrático robusto não suporta em seu conjunto de Julia um campo de linhas invariante.*

Devido aos teoremas 2.19 e 2.20 o teorema acima é equivalente a rigidez quasiconforme dos polinômios quadráticos robustos, isto é, que qualquer polinômio quadrático P_a que é quaseconformemente conjugado a um polinômio P_c robusto é, então, conformemente equivalentes a P_c , ou seja, $a = c$. Por tal razão nos referimos a tal resultado como resultado de rigidez, já que passamos por cima da equivalência mais fraca até a mais forte, mas desde que a primeira se verifique.

A prova do teorema de rigidez enunciado acima será dividida em dois casos que, a saber, serem quando $L = 0$ ou $L > 0$.

A prova será por contradição e seguirá um padrão geral de argumentações e construções.

Suporemos que um polinômio quadrático robusto suporte sobre o seu conjunto de Julia um campo de linhas invariante μ . A hipótese de robustez nos garantirá uma certa compacidade. Com isto, para obter uma contradição tomaremos uma subsequência de níveis $n \in \text{SR}(c)$ para a qual, depois de uma normalização, P_c^n convergirá em uma vizinhança do pequeno conjunto pós-crítico $P_n(n)$ a um sistema dinâmico limite P_∞ que será uma aplicação própria de grau igual a 2.

Em seguida, construiremos a partir de μ um campo de linhas univalente invariante por P_∞ . Mas isto não pode ocorrer, pois P_∞ tem um ponto crítico. Logo, um polinômio quadrático robusto não pode suportar em seu conjunto de Julia um campo de linhas invariante.

5.1 Primeira Parte

Começamos com a seguinte definição:

Definição 5.1. *Admitamos P_c^n renormalizável. Diremos que uma renormalização $P_c^n : U_n \rightarrow V_n$ é regular se*

$$V_n \cap P(c) = P_n(n) \tag{5.1}$$

Teorema 5.2. *Se $P_c^n : U_n \rightarrow V_n$ é uma renormalização regular, então, $V_n'(i)$ é disjunto do conjunto pós-crítico de P_c para $i \neq n$.*

Demonstração. Temos, $P_c(P_n(i)) \subset P_n(n+1)$, e disto tiramos, $V_n(i) \cap P(c) \subset P_n(1)$, pois

$$V_n(i) \cap P(c) = P_c^i(V_n) \cap P_c^i P(c) \subset P_c^i(V_n \cap P(c)) \quad (5.2)$$

$$= P_c^i(P_n(n)) = P_n(i) \quad (5.3)$$

Desde que $P_c(V_n(i)) = P_c(V'_n(i)) \supset P_n(i)$ e como, devido aos teoremas 3.3 e 8.1–[McM1](parte ainda n digit.), em cada nível os pequenos conjuntos pós-críticos são disjuntos para P_c infinitamente renormalizável, decorre que os pontos de $V'_n(i) \cap P(c)$ estão em $P_n(i)$, pois caso contrário, digamos $x \in V'_n(i) \cap P_n(j)$, então, $P_c(x) \in P_n(j+1)$, mas $P_c(x) \in P_n(i+1)$ e contradiremos o ítem 4 do teorema 3.13. Não obstante, $V_n \supset P_i(i)$ é disjunto de V'_n , logo, V'_n não contém pontos de $P(c)$, se $i \neq n$, pois $0 \in V_n \cap V'_n$. \square

E como $P(c)$ é positivamente invariante e $V'_n(i) \cap P(c) = \emptyset$, $P_c^{-k}(V_n) \cap P(c) = \emptyset$ para $k > 0$, podemos definir P_c^{-k} sendo univalente sobre $V_n(i)$ para todo $k > 0$. Por isso denominamos a renormalização de regular.

5.1.1 Rigidez de aplicações do tipo polinomial

Teorema 5.3. *Suponhamos que a renormalização de P_c^n é regular com $\text{mod}(U_n, V_n) > m > 0$. Então, os pequenos conjuntos de Julia companheiros $J'_n(i)$ para $i \neq n$ satisfazem*

$$\text{diâm}_{\mathbb{H}}(J'_n(i)) \leq C(m). \quad (5.4)$$

Demonstração. Sendo $\text{mod}(U_n, V_n)$ é limitado inferiormente segue do teorema 2.4–[McM1] que o diâmetro de U_n é limitado superiormente na métrica hiperbólica de V_n . E, como $J_n \subset U_n$, o diâmetro de J_n também é limitado naquela métrica por uma constante $C(m)$. Do teorema 3.2, $V_n - U_n$ é conformemente isomorfo ao anel $V'_n(i) - U'_n(i)$, assim $C(m)$ também limita o diâmetro hiperbólico de $U'_n(i)$ e $J'_n(i)$ em $V'_n(i)$. Mas, pelo teorema 5.2, V'_n é disjunto de $P(c)$ e pelo teorema de Pick(2.11–[Mil1]) a inclusão $i : V'_n \hookrightarrow \widehat{\mathbb{C}} - P_c$ decresce a distância hiperbólica. Com isto, $C(m)$ também limita o diâmetro hiperbólico de $U'_n(i)$ e $J'_n(i)$ em $\widehat{\mathbb{C}} - P(c)$. \square

Teorema 5.4. *Se P_c possui uma infinidade de níveis de renormalização simples regular satisfazendo*

$$\text{mod}(U_n, V_n) > m > 0, \quad (5.5)$$

então, P_c é robusto e

$$P(c) \cap \mathbb{C} = \bigcap_{\text{SR}(c)} \mathcal{J}_n. \quad (5.6)$$

Demonstração. Suponhamos P_c^n simplesmente renormalizável com $\text{mod}(U_n, V_n) > m > 0$. Então, a curva central α do anel $V_n - \overline{U_n}$ tem comprimento hiperbólico neste anel(veja[McM1]pg.12)

$$l_{\mathbb{H}}(\alpha) = \frac{\pi}{\text{mod}(U_n, V_n)} \leq \frac{\pi}{m}. \quad (5.7)$$

Nos é garantido pelo corolário 7.15–[McM1] que cada componente de \mathcal{J}_{n+1} fica contida em alguma componente de \mathcal{J}_n para cada $n \in \text{SR}(c)$. Sendo α homotópica à γ_n em $\widehat{\mathbb{C}} - P(c)$, $l_{\mathbb{H}}(\gamma_n) < l_{\mathbb{H}}(\alpha) < \frac{\pi}{m}$,

logo, $\liminf_{n \in \text{SR}^*(c)} l_{\mathbb{H}}(\gamma_n) \leq \frac{\pi}{m} < +\infty$. Assim, do teorema 4.4, $P(c)$ é um conjunto de Cantor com medida de Lebesgue nula com $\sup_i \text{diâm}_{\mathbb{E}} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$ em $\text{SR}^*(c)$.

Seja $n \in \text{SR}^*(c)$ tal que $\text{mod}(U_n, V_n) > m > 0$. Por mesmo argumento dado na demonstração anterior, $\text{mod}(U_n(i), V_n(i)) = \text{mod}(U_n, V_n)$, portanto, $\text{mod}(U_n(i), V_n(i)) > m > 0$. Mas o teorema (8.1–[McM1]) nos garante que P_c não possui ponto periódico atrator. Em razão disto, do corolário 5.10–[McM1], segue

$$\text{diâm}_{\mathbb{E}}(J_n(i)) \leq C(m)\text{diâm}_{\mathbb{E}}P_n(i). \quad (5.8)$$

Logo, $\text{diâm}(J_n(i)) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$ em $\text{SR}^*(c)$, e disto segue que cada componente de $\bigcap_{n \in \text{SR}^*(c)} J_n$ é um único ponto, isto é, $\bigcap_{n \in \text{SR}^*(c)} J_n$ é totalmente desconexo. Já que cada componente de J_n intersecta $P(c)$ para todo $n \in \text{SR}^*(c)$, então, $P_c \cap \mathbb{C} = \bigcap_{n \in \text{SR}^*(c)} J_n$. \square

Corolário 5.1. *Assumindo as hipóteses do teorema anterior temos para quase todo ponto $x \in J(c)$ as seguintes propriedades:*

1. a órbita positiva de x é disjunta do conjunto pós-crítico;
2. $\|(P_c^n)'(x)\| \rightarrow +\infty$ na métrica hiperbólica em $\widehat{\mathbb{C}} - P(c)$;
3. para qualquer $n \in \text{SR}(c)$, existe um inteiro $k > 0$ tal que $P_c^k(x) \in J_n$;
4. para cada inteiro $k > 0$ existe um $n \in \text{SR}(c)$ para o qual $P_c^k \notin J_n$.

Demonstração. Toda aplicação holomorfa não constante é discreta, isto é, a pré-imagem de um ponto é um conjunto discreto do domínio da função, em particular é enumerável. Assim, sendo $P(c)$ enumerável e de medida zero, $\bigcup_{n=0}^{\infty} P^{-n}(P(c))$. Mas note que $\bigcup_{n=0}^{\infty} P^{-n}(P(c))$ é exatamente o conjunto dos pontos cuja órbita positiva em algum momento entra em $P(c)$ e temos o item 1.

O item 2 segue do item 1 mais o teorema 3.6–[McM1], ao passo que o item 3 decorre diretamente do teorema 3.15.

Pelo teorema 5.4, $P_c \cap \mathbb{C} = \bigcap_{n \in \text{SR}(c)} J_n$. Pelo corolário 3.5, $J_{n+1} \subset J_n$ para cada $n \in \text{SR}(c)$ e pelo teorema 4.4 a medida de $P(c)$ é igual a zero. Deste modo, em razão, da continuidade inferior da medida decorre que a medida de J_n tende a zero quando $n \rightarrow \infty$ em $\text{SR}(c)$. Agora, fixando $k > 0$, temos

$$\text{área}(P_c^{-k}(J_n)) \leq 2^k \int_{J_n} |\text{Jac}(P_c^k)(z)| (\rho(z))^2 |dz|^2 \quad (5.9)$$

$$\leq 2^k M_{n_1} \text{área}(J_n) \quad (5.10)$$

em que $M_{n_j} := \max \{|\text{Jac}(P_c^k)(z)|; z \in J_{n_j}\}$ e $n_j \in \{n_1, n_2, \dots\} = \text{SR}(c)$. E como $J_{n_{j+1}} \subset J_{n_j}$ para cada $n_j \in \text{SR}(c)$, $M_{n_1} \geq M_{n_j}$ para todo $j \geq 1$. Disto, segue que a área de $\bigcap_{n \in \text{SR}(c)} J_n$ é zero, pois $P_c^{-k}(J_{n_{j+1}}) \subset P_c^{-k}(J_{n_j})$. \square

Definição 5.2. *Para um polinômio quadrático P_c definimos*

$$\text{USR}(c, m) = \{n \in \text{SR}(c); P_c^n : U_n \rightarrow V_n \text{ é regular e } \text{mod}(U_n, V_n) > m > 0\}.$$

Teorema 5.5 (Rigidez de aplicações do tipo polinomial). *Se existe uma constante $m > 0$ tal que $|\text{USR}(c, m)| = +\infty$. Então, o conjunto de Julia de P_c não suporta um campo de linhas invariante por P_c .*

Demonstração. Suponhamos $\text{USR}(c, m)$ infinito e que P_c admite um campo de linhas invariante μ suportado em um conjunto $E \subset J(c)$ com medida positiva.

Seja $x \in E$ um ponto de quasecontinuidade de μ que também satisfaz as propriedades garantidas pelo corolário 5.1.

Para cada $n \in \text{SR}(c)$ seja $k(n) \geq 0$ o menor inteiro não negativo tal que $P_c^{k(n)+1}(x) \in \mathcal{J}_n$.

Devido a nossa escolha de $x \in J(c)$, $k(n) \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$, pois, caso contrário, o conjunto $I = \{k(n) \in \mathbb{N}; P_c^{k(n)+1}(x) \in \mathcal{J}_n \text{ com } n \in \text{SR}(c)\}$ é finito. E assim, tomando $p = \prod_{k_i \in I} (k_i + 1)$ teremos $P_c^p(x) \in \mathcal{J}_n$ para todo $n \in \text{SR}(c)$ o que contradiz o item 4 do corolário 5.1.

Consideremos $n \in \text{USR}(c, m)$ suficientemente grande de modo que $k(n) > 0$. Com isso, $P_c^{k(n)+1}(x) \in \mathcal{J}_n$ e $P_c^{k(n)}(x) \notin \mathcal{J}_n$, já que, do contrário, contradizemos a minimalidade de $k(n) > 0$ e, portanto, $P_c^{k(n)}(x) \in J'_n(i(n))$ para algum $i(n) = 1, 2, \dots, n-1$. Note ainda que $P_c^{k(n)+1}(x) \in J_n(1)$, pois, neste caso, teríamos $P_c^{k(n)}(x) \in J_n(n) \subset \mathcal{J}_n$.

Visto que a renormalização é regular, existe um ramo univalente de $P_c^{-k(n)}$ definido em $V'_n(i(n))$ que aplica $P_c^{k(n)}(x)$ de volta ao x .

Sendo a aplicação $P_c^{k(n)} : V'_n \rightarrow V_n$ é univalente, definimos a aplicação também univalente, h_n , da seguinte maneira:

$$h_n : V'_n \xrightarrow{P_c^{i(n)-n}} V'_n(i(n)) \xrightarrow{P_c^{-k(n)}} \mathbb{C} \quad (5.11)$$

Pela invariância suposta do campo μ , $\mu|_{V_n} = h_n^*(\mu)$. Seja, $J_n^* = h_n(J_n) = P_c^{-k(n)}(J'_n(i(n)))$, a pequena cópia do Julia contendo x .

Na demonstração do teorema 5.3 vimos que o diâmetro de $U'_n(i(n))$ é limitado na métrica hiperbólica de $\widehat{\mathbb{C}} - P(c)$ e sabemos que $\|P_c^{k(n)}(x)\| \rightarrow +\infty$. Disto decorre que $\text{diâm}_{\mathbb{H}}(J_n^*) \rightarrow 0$, pois para quaisquer dois pontos $z, w \in J_n^*$ e γ uma curva ligando z a w em $P_c^{-k(n)}(U'_n(i(n))) \subset \widehat{\mathbb{C}} - P(c)$

$$d_{\mathbb{H}}(z, w) \leq l_{\mathbb{H}}(\gamma) = \int_{\gamma'} \|(P_c^{-k(n)})'(w)\| |\rho(w)| dw, \quad (5.12)$$

em que $\gamma' = P_c^{k(n)}(\gamma)$, mas, pelo teorema 3.8–[McM1],

$$\frac{1}{C(m)} \frac{1}{\|(P_c^{k(n)})'(x)\|} \leq \|(P_c^{-k(n)})'(w)\| \leq \frac{C(m)}{\|(P_c^{k(n)})'(x)\|}, \quad (5.13)$$

e, portanto,

$$d_{\mathbb{H}}(z, w) \leq \frac{C(m)}{\|(P_c^{k(n)})'(x)\|} \text{diâm}_{\mathbb{H}}(P_c^{-k(n)}(U'_n(i(n)))) \leq \frac{C(m)}{\|(P_c^{k(n)})'(x)\|} \quad (5.14)$$

O campo $\mu = h_n^*(\mu)$ é invariante por P_c^n , pois

$$(P_c^n)^* h_n^*(\mu) = (h_n \circ P_c^n)^*(\mu) \quad (5.15)$$

$$= \mu(h_n \circ P_c^n) \frac{h_n'(P_c^n) (P_c^n)'}{h_n'(P_c^n) (P_c^n)'} \quad (5.16)$$

$$= \mu(P_c^n \circ h_n) \frac{(P_c^n)' h_n'(P_c^n)}{(P_c^n)' h_n'(P_c^n)} \quad (5.17)$$

$$= h_n^*(P_c^n)^*(\mu) \quad (5.18)$$

$$= h_n^*(\mu) \quad (5.19)$$

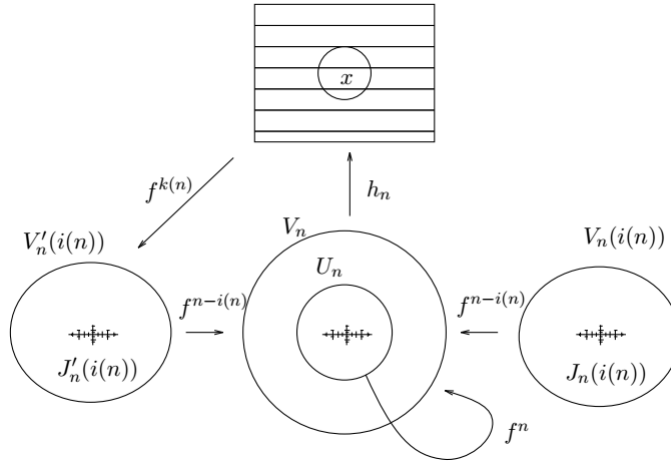


Figura 5.1: Construção do campo de linhas univalente ν

Prosseguimos definindo a aplicação $A_n(z) = \frac{z}{\text{diâm}_{\mathbb{E}}(J_n)}$ para $z \in \mathbb{C}$ e consideramos as aplicações $g_n = A_n \circ P_c^n \circ A_n^{-1} : (A_n(U_n), 0) \longrightarrow (A_n(V_n), A_n(P_c^n(0)))$ que são do tipo quadrático cujo conjunto de Julia tem diâmetro euclidiano igual a 1 e $\text{mod}(A_n(U_n), A_n(V_n)) \geq m$.

Já que $h_n^{-1}(x) \in J_n$, temos $y_n \in J(g_n)$ em que $y_n := A_n(h_n^{-1}(x))$.

Isto posto, concluímos a partir do teorema 5.8-[McM1] a existência de uma subsequência de níveis $n \in \text{USR}(c, m)$ tal que g_n converge na topologia de Carathéodory a uma aplicação do tipo polinomial de grau 2

$$g : (U, 0) \longrightarrow (V, g(0)) \quad (5.20)$$

com $\text{mod}(U, V) \geq m$.

Seja $k_n := h_n \circ A_n^{-1} : A_n(V_n) \xrightarrow{A_n^{-1}} V_n \xrightarrow{h_n} \mathbb{C}$.

Desta forma, $k_n(y_n) = x$ e o campo de linhas $\nu_n := k_n^*(\mu)$ em $A_n(V_n)$ é invariante por g_n , pois

$$(g_n)^*(k_n^*(\mu)) = (k_n \circ g_n)^*(\mu) \quad (5.21)$$

$$= (h_n \circ P_c^n \circ A_n^{-1})(\mu) \quad (5.22)$$

$$= (A_n^{-1})^*(P_c^n)^* h_n^*(\mu) \quad (5.23)$$

$$= (A_n^{-1})^* h_n^*(\mu) \quad (5.24)$$

$$= k_n^*(\mu) \quad (5.25)$$

Mostraremos a seguir que $|k'_n(y_n)| \rightarrow 0$. Jenkins em [Jen] obteve a seguinte desigualdade válida para qualquer função f holomorfa univalente no disco unitário \mathbb{D} e qualquer $p \geq 1$

$$|f(z_2) - f(z_1)| \geq \frac{\sinh(2\rho)}{2(2 \cosh(2\rho p))^{1/p}} (|D_1 f'(z_1)|^p + |D_1 f'(z_2)|^p)^{1/p} \quad (5.26)$$

em que ρ é a distância entre z_1 e z_2 na métrica de Poincaré e $D_1 f'(z) := (1 - |z|^2)f'(z)$.

Como $x \notin P(c)$ e $P(c)$ é fechado temos $d_{\mathbb{H}}(x, P(c)) := r > 0$, em particular, $d_{\mathbb{D}}(x, 0) := r > 0$. Logo, $d_{\mathbb{D}}(y_n, 0) := s > 0$ para todo $n \geq 1$, pois $k_n(y_n) = x$.

Assim, no intuito de fazermos uso desta estimativa, tomaremos uma sequência de aplicações de Möebius $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que matenha o 0 fixado e mapeie um ponto $w \neq 0$ em y_n de modo que a derivada de M_n em w fique limitada inferiormente uniformemente acima de 0. Podemos tomar tal sequência devido $\inf_n \{|y_n|; n \geq 1\} > 0$, assim nos basta tomar $M_n(z) := \frac{y_n \cdot z}{2 \text{diâm}_{\mathbb{E}}(J(g_n))w}$.

Isto posto, recorrendo à 5.26 tomando $p = 1$, resulta

$$|k_n(y_n) - k_n(0)| \geq C_0(C_1 |k'_n(0)| + C_2 |k'_n(y_n)|) \quad (5.27)$$

em que $C_0 := \frac{\sinh(2\rho)}{2(2 \cosh(2\rho))}$; $C_1 := |M'_n(0)|$ e $C_2 := |(1 - |w|^2)|M'_n(w)|$. No entanto, $\text{diâm}_{\mathbb{H}}(k_n(J(g_n))) = \text{diâm}_{\mathbb{H}}(J_n^*) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$. Portanto, $|k'_n(y_n)| \rightarrow 0$.

Como $y_n \in J(g_n)$ e $J(g_n)$ fica contido na componente compacta do complementar em \mathbb{C} de um anel em $A_n(V_n)$ com módulo definido, do teorema 5.3-[McM1], passando a uma subsequência temos $(A_n(V_n), y_n) \rightarrow (V, y)$.

Já que $|x - k_n(y_n)| = 0$, então, $\sup \frac{|x - k_n(y_n)|}{|k'_n(y_n)|} = 0$, logo, pelo teorema 5.16-[McM1] passando, se necessário, a uma subsequência de níveis $n \in \text{USR}(c, m)$ da sequência no passo anterior, o campo de linhas $\nu_n := k_n^*(\mu)$ convergirá em medida a um campo de linhas univalente ν em V . Mas, ν_n é invariante por g_n e, portanto, o teorema 5.14-[McM1] nos assegura que ν é invariante por g .

Agora, pela definição da topologia de Carathéodory g_n converge uniformemente nas partes compactas de $(U, 0)$ para g . Isto posto, pelo teorema da convergência de Weierstrass (§4-[R]), $g'_n \rightarrow g'$ converge uniformemente nas partes compactas de $(U, 0)$, em particular, $g'_n(0) \rightarrow g'(0)$, mas, $g'_n(0) = (P_c^n)'(0) = 0$, então, $g'(0) = 0$. E como $0 \in V$ decorre do teorema 5.13-[McM1] que g não admite um campo de linhas invariante univalente.

Em conclusão, P_c não pode ter um campo de linhas suportado em seu conjunto de Julia. \square

Obteremos o teorema de rigidez 5.1 a partir do teorema 5.5 para o caso no qual $\liminf_{n \in \text{SR}^*(c)} l_{\mathbb{H}}(\gamma_n)$ é suficientemente pequeno. Para tanto, relacionaremos o comprimento da geodésica γ_n com a existência de uma renormalização regular com módulo definido (i.e. $\text{mod}(U_n, V_n) \geq m > 0$ em que (P_c^n, U_n, V_n) é uma renormalização simples regular).

Teorema 5.6. *Suponhamos P_c infinitamente renormalizável e P_c^n simplesmente renormalizável. Então, podemos tomar U_n e V_n discos topológicos tais que $P_c^n : U_n \rightarrow V_n$ seja uma renormalização regular. E quando $l_{\mathbb{H}}(\gamma_n)$ é suficientemente pequeno, garantimos ainda*

$$\text{mod}(U_n, V_n) > M(l_{\mathbb{H}}(\gamma_n)) > 0 \quad (5.28)$$

em que $M(l) \rightarrow +\infty$ quando $l \rightarrow 0$.

Demonstração. Dada uma renormalização $P_c^n : \widetilde{U}_n \rightarrow \widetilde{V}_n$ podemos substituir \widetilde{V}_n por um disco V_n de modo que ∂V_n fique arbitrariamente próximo de K_n tomando a componente de $P_c^{-dn}(\widetilde{V}_n)$ que contem 0 para um $d > 0$ suficientemente grande. Dessa maneira, conseguimos fazer V_n disjunto de $P(c) - P_n$, pois, sendo os pequenos conjuntos pós-críticos $P_n(i)$ disjuntos, $P(c) - P_n = P(c) - K_n$ é compacto.

Mostraremos agora que se o $l_{\mathbb{H}}(l)$ é suficientemente pequeno, isto é, se a geodésica γ_n em $\widehat{\mathbb{C}} - P(c)$ é curta, então, P_c^n possui uma renormalização regular (P_c^n, U_n, V_n) para a qual $\text{mod}(U_n, V_n)$ é grande.

Seja A_n a vizinhança colar de γ_n com respeito à métrica hiperbólica em $\widehat{\mathbb{C}} - P(c)$. Provém do teorema 2.19-[McM1] que o módulo de A_n é grande quando o comprimento hiperbólico de γ_n é pequeno em $\widehat{\mathbb{C}} - P(c)$.

Cosideremos B_n , o anel em $P_c^{-n}(A_n) \subset \widehat{\mathbb{C}} - P(c)$ que contém a componente da multicurva $P_c^{-n}(\gamma_n)$ que é homotópica à γ_n em $\widehat{\mathbb{C}} - P(c)$. Em seguida, tomemos os discos D_n e E_n obtidos de A_n e B_n , respectivamente, os unido com a componente de seu complementar que contém o 0. Note que $0 \notin P_c^i(E_n)$ para $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Isto posto, $P_c^n : E_n \rightarrow D_n$ é uma aplicação própria de grau igual a 2, pois $P_c^n(\partial E_n) = \partial D_n$. Temos também, $E_n \cap P(c) = D_n \cap P(c) = P_n(n)$, pois $K_n \subset E_n \subset D_n$; e, portanto, $P_c^n : E_n \rightarrow D_n$ é criticamente compacta.

Por ser P_c infinitamente renormalizável ele não possui ciclo atrator, logo, do teorema 5.12-[McM1] se conclue que P_c^n admite uma renormalização $P_c^n : U_n \rightarrow V_n$ com $U_n \subset V_n$ quando $\text{mod}(P_n(n), E_n)$ for suficientemente grande, isto é, $\text{mod}(P_n(n), E_n) > M_2$ (consulte 5.12-[McM1]).

Fazendo o pullback por P_c^n do anel $V_n - \overline{U}_n$ um número d de vezes suficiente, o pullback deste anel, $\widetilde{V}_n - \widetilde{U}_n$, fica contido em D_n . E desta maneira, $P_c^n : \widetilde{U}_n \rightarrow \widetilde{V}_n$ é uma renormalização de P_c^n tal que $\widetilde{U}_n \subset E_n$ e $\widetilde{V}_n \subset D_n$. Neste caso teremos,

$$\frac{\text{mod}(\widetilde{V}_n - \widetilde{U}_n)}{2^d} = \text{mod}(V_n - \overline{U}_n) \quad (5.29)$$

Mas, do teorema 5.12-[McM1], temos $\text{mod}(V_n - \overline{U}_n) > m_2(\text{mod}(P_n(n), D_n))$. Assim, $\text{mod}(V_n - \overline{U}_n)$ é limitado inferiormente em termos de $l_{\mathbb{H}}(\gamma_n)$, pois, $\text{mod}(P_n(n), D_n) > \text{mod}(A_n) = M(l_{\mathbb{H}}(\gamma_n))$. E desde que, o módulo da vizinhança colar depende apenas do comprimento hiperbólico de γ_n em $\widehat{\mathbb{C}} - P(c)$ e tende continuamente para o infinito quando o comprimento tende para zero, temos o que queríamos (consulte 2.19-[McM1]).

Note ainda que tal renormalização é regular, devido ao teorema da vizinhança colar, do qual decorre $A_n \cap P(c) = \emptyset$. \square

Corolário 5.2 (rigidez). *Existe uma constante $L > 0$ tal que se*

$$\liminf_{\text{SR}^*} l_{\mathbb{H}}(\gamma_n) < L, \quad (5.30)$$

então, P_c não suporta um campo de linhas invariante em seu Julia.

Demonstração. Pelo teorema 5.6 podemos tomar $L > 0$ pequeno o suficiente tal que de $l_{\mathbb{H}}(\gamma_n) < L$ decorra que P_c^n admite uma renormalização regular e $\text{mod}(U_n, V_n) > m > 0$ com $m = m(L)$ fixado.

Logo, do teorema 5.5, concluímos o enunciado. \square

Em particular, o resultado se aplica para o caso em que $L = 0$. e temos portanto a primeira parte do teorema.

Geometricamente, neste caso, a superfície de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} - P(c)$ possui indinitas partes que são bem delgadas.

5.2 Segunda Parte

Nesta subsecção provamos o teorema de rigidez para o caso em que $0 < \liminf_{SR^*(c)} < +\infty$. Isto é, provaremos o seguinte:

Teorema 5.7. *Suponhamos P_c infinitamente renormalizável e tal que $0 < \liminf_{SR^*(c)} < +\infty$. Então, $J(c)$ não suporta um campo de linhas invariante.*

Fixemos inicialmente algumas definições e notações.

Definição 5.3. *Para $n \in SR^*(c)$,*

1. δ_n denotará a única componente da multicurva $P_c^{-n}(\gamma_n)$ que é isotópica à γ_n em $\widehat{\mathbb{C}} - P(c)$;
2. X_n denotará o disco em \mathbb{C} cuja fronteira é a curva δ_n ;
3. Y_n denotará o disco cuja fronteira é a curva γ_n .

Com isso, $P_c^n : X_n \rightarrow Y_n$ será uma aplicação própria de grau igual a 2.;

4. $Y_n(i) := P_c^i(X_n)$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Desta forma, $P_c^i|_{X_n}$ se fatora como segue

$$X_n \xrightarrow{P_c} Y_n(1) \xrightarrow{P_c} Y_n(2) \cdots \xrightarrow{P_c} Y_n(n-1) \xrightarrow{P_c} Y_n(n) := Y_n \quad (5.31)$$

na qual $X_n \xrightarrow{P_c} Y_n(1)$ tem grau igual a 2 e as demais são univalentes. Note ainda que $Y_n(i) \cap P(c) = P_n(i)$, pois $\delta_n \approx_{isot} \gamma_n$;

5. $\mathcal{Y}_n := \bigcup_{i=1}^n Y_n(i)$ e, então, $P(c) \subset \mathcal{Y}_n$;
6. $Y_n'(i) = -Y_n(i)$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Como $Y_n(i) \xrightarrow{P_c} Y_n(i+1)$ é univalente e $P_c(-z) = P_c(z)$, $Y_n'(i) \xrightarrow{P_c} Y_n(i+1)$ é também univalente e, portanto, $Y_n(i) \cap Y_n'(i) = \emptyset$. Em particula, $Y_n'(i)$ é disjunto do conjunto pós-crítico $P(c)$.

Definição 5.4. *Ponhamos $SR(c, \lambda) := \{n \in SR^*(c); \lambda^{-1} < l_{\widehat{\mathbb{C}} - P(c)}(\gamma_n) < \lambda\}$ para $\lambda \in (0, +\infty)$.*

Sob a hipótese, $0 < \liminf_{SR^*} l(\gamma) < +\infty$, é certo que existe $\lambda \in (0, +\infty)$ tal que $SR(c, \lambda)$ seja infinito.

Teorema 5.8. *Se $n \in SR(c, \lambda)$, então, com respeito à métrica euclidiana, temos*

$$\text{diâm}_{\mathbb{E}}(X_n) \geq \text{diâm}_{\mathbb{E}}(B_n) \geq C(\lambda) \text{diâm}_{\mathbb{E}}(X_n) \quad (5.32)$$

$$\text{diâm}_{\mathbb{E}}(Y_n) \geq \text{diâm}_{\mathbb{E}}(B_n) \geq C(\lambda) \text{diâm}_{\mathbb{E}}(Y_n) \quad (5.33)$$

em que B_n é a maior bola euclidiana centrada na origem, $z = 0$, contida em $X_n \cap Y_n$.

Para uma prova consulte o teorema 10.12-[McM1].

De maneira análoga temos também,

$$\text{diâm}_{\mathbb{E}}(Y_n(i)) \geq \text{diâm}_{\mathbb{E}}(B_n(i)) \geq C(\lambda)\text{diâm}_{\mathbb{E}}(Y_n(i)) \quad (5.34)$$

$$\text{diâm}_{\mathbb{E}}(\tilde{Y}_n(i)) \geq \text{diâm}_{\mathbb{E}}(B_n(i)) \geq C(\lambda)\text{diâm}_{\mathbb{E}}(\tilde{Y}_n(i)) \quad (5.35)$$

em que $B_n(i)$ é a maior bola euclidiana centrada $P_c^i(0)$, contida em $Y_n(i) \cap \tilde{Y}_n(i)$.

Teorema 5.9. *Para P_c robusto temos*

$$P(c) \cap \mathbb{C} = \bigcap_{SR(c)} \mathcal{Y}_n. \quad (5.36)$$

Demonstração. Pelo teorema 4.4, $\text{diâm}(P_n(i)) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$ em $SR(c)$. Uma vez que $P_n(i) \subset Y_n(i)$ é suficiente mostrar que $\sup_i \text{diâm}_{\mathbb{H}}(Y_n(i)) \rightarrow 0$, e assim como na demonstração do teorema 5.4 obteremos a igualdade enunciada. Note que $\{\mathcal{Y}_n\}_{n \in SR(c)}$ é uma sequência encaixada decrescente. Mas pelo teorema 5.8 mais as desigualdades 5.34 e 5.35, mostrar que $\sup_i \text{diâm}_{\mathbb{H}}(Y_n(i)) \rightarrow 0$ é o mesmo que mostrar que $\sup_i \text{diâm}_{\mathbb{H}}(\tilde{Y}_n(i)) \rightarrow 0$. O que, agora, é imediato já que cada $\tilde{Y}_n(i)$ fica contido em alguma componente de D_m para $m < n$ em $SR(c, \lambda)$ onde D_m são os mesmos conjuntos definidos na demonstração do teorema 4.4 para os quais tínhamos o diâmetro euclidiano decrescendo para zero. □

Corolário 5.3. *Se P_c é robusto, então, para quase todo ponto $z \in J(c)$ valem as seguintes propriedades*

1. *para qualquer $n \in SR^*(c)$ existe um inteiro $k > 0$ tal que $P_c^k(z) \in \mathcal{Y}_n$;*
2. *para qualquer inteiro $k > 0$ existe $n \in SR^*(c)$ tal que $P_c^k(z)$ não pertence ao \mathcal{Y}_n .*

Teorema 5.10. *Suponhamos $|SR(c, \lambda)| = \infty$ e definamos a aplicação afim $A_n(z) := \frac{z}{\text{diâm}_{\mathbb{E}}(B_n)}$. Então, na topologia de Carathéodory, existe uma subsequência de níveis $n \in SR(c, \lambda)$ tal que*

$$(A_n(X_n), 0) \longrightarrow (X, 0); \quad (5.37)$$

$$(A_n(Y_n), P_c^n(0)) \longrightarrow (Y, P(0)) \quad \text{e} \quad (5.38)$$

$$A_n \circ P_c^n \circ A_n^{-1} \longrightarrow P \quad (5.39)$$

em que $P : (X, 0) \longrightarrow (Y, P(0))$ é uma aplicação própria de grau 2 com $0 \in X \cap Y$ e $P'(0) = 0$.

Demonstração. Da definição de A_n temos $A_n(B_n) = B(0, 1/2)$, mas $B_n \subset X_n \cap Y_n$ e, portanto, tanto $A_n(x_n)$ quanto $A_n(Y_n)$ contém $B(0, 1/2)$ para qualquer $n \in SR(c, \lambda)$.

Com isso, do teorema 5.2-[McM1], passando a uma subsequência se necessário for, temos

$$(A_n(X_n), 0) \longrightarrow (X, 0) \quad (5.40)$$

$$(A_n(Y_n), 0) \longrightarrow (Y, 0) \quad (5.41)$$

quando $n \rightarrow +\infty$ em $SR(c, \lambda)$.

Recorrendo ao teorema da vizinhança colar 2.18–[McM1], consideremos o anel $C(\gamma_n)$. Como $l(\gamma_n) \leq \lambda$ para todo $n \in \text{SR}(c, \lambda)$, pelo teorema 2.19 e 2.4–[McM1], o diâmetro hiperbólico em $\widehat{\mathbb{C}} - P(c)$ de Y_n é limitado superiormente por uma constante $C(\lambda)$ para todo $n \in \text{SR}(c, \lambda)$, logo temos o mesmo para o diâmetro hiperbólico de $P_n(n)$, pois $P_n(n) \subset Y_n$.

Disto decorre que $d_{\mathbb{H}}(0, P_c^n(0))$ é limitado, já que $P_c^n(0) \in P_n(n)$. Isto posto, do teorema 5.3–[McM1], tomando uma subsequência se necessário, seguirá que $(A_n(Y_n), P_c^n(0)) \rightarrow (Y, P(0))$, em que $P(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty; n \in \text{SR}^*} P_c^n(0)$.

Do teorema 10.13 temos

$$\text{diâm}_{\mathbb{E}}(X_n) \leq \frac{\text{diâm}_{\mathbb{E}}(B_n)}{C(\lambda)} \quad (5.42)$$

$$\text{diâm}_{\mathbb{E}}(Y_n) \leq \frac{\text{diâm}_{\mathbb{E}}(B_n)}{C(\lambda)} \quad (5.43)$$

Logo, sendo A_n afim,

$$\text{diâm}_{\mathbb{E}}(A_n(X_n)) = \frac{\text{diâm}_{\mathbb{E}}(X_n)}{\text{diâm}_{\mathbb{E}}(B_n)} \quad (5.44)$$

Analogamente, vale

$$\text{diâm}_{\mathbb{E}}(A_n(Y_n)) = \frac{\text{diâm}_{\mathbb{E}}(Y_n)}{\text{diâm}_{\mathbb{E}}(B_n)} \quad (5.45)$$

A partir disto segue

$$\text{diâm}_{\mathbb{E}}(A_n(X_n)) \leq \frac{1}{C(\lambda)} \quad (5.46)$$

$$\text{diâm}_{\mathbb{E}}(A_n(Y_n)) \leq \frac{1}{C(\lambda)} \quad (5.47)$$

Desta forma, X e Y não são iguais a \mathbb{C} , e como consequência disso, estamos áptos para aplicar o teorema 5.6–[McM1]. Assim, $A_n \circ P_c^n \circ A_n^{-1}$ converge para uma aplicação própria $P : X \rightarrow Y$ de grau menor ou igual à 2. No entanto, $g'_n(0) = (P_c^n)'(0) = 0$, logo pelo teorema da convergência de *Weierstrass* (§4–[R]), $P'(0) = 0$. Portanto, $P : X \rightarrow Y$ é aplicação própria de grau 2. \square

Teorema 5.11. *Para qualquer $n \in \text{SR}^*(c)$,*

$$l_{\mathbb{H}}(\gamma_n) \leq l_{\mathbb{H}}(\delta_n) \leq 2l_{\mathbb{H}}(\gamma_n) \text{ e} \quad (5.48)$$

$$l_{\mathbb{H}}(\gamma_n(i)) \leq l_{\mathbb{H}}(\partial Y_n(i)) \leq l_{\mathbb{H}}(\gamma_n) \quad (5.49)$$

na métrica hiperbólica em $\widehat{\mathbb{C}} - P(c)$.

Demonstração. $\partial Y_n(i) = P_c^i(\delta_n)$ e é isotópica à $\gamma_n(i)$, pois $P_n(i) \subset \text{int}_{\mathbb{C}}(\partial Y_n(i))$, em que $\text{int}_{\mathbb{C}}(\partial Y_n(i))$ é o interior de $\partial Y_n(i)$ em \mathbb{C} .

As desigualdades à esquerda decorrem do fato de que γ_n e $\gamma_n(i)$ são os representantes geodésicos das classes de homotopia livre de δ_n e $\partial Y_n(i)$ respectivamente.

Para obtermos as desigualdades à direita notemos que P_c^n mapeia δ_n sobre γ_n com grau igual à 2, P_c^{n-i} mapeia $\partial Y_n(i)$ sobre γ_n com grau 1. A partir disto e do teorema 3.5–[McM1] obtemos tais

desigualdades, pois na métrica hiperbólica de $\widehat{\mathbb{C}} - P(c)$

$$2l_{\mathbb{H}}(\gamma_n) = 2 \int_{\gamma_n} \rho(z)|dz| = \int_{\delta_n} \|(P_c^n)'(z)\|\rho(z)|dz| \quad (5.50)$$

$$\geq \int_{\delta_n} \rho(z)|dz| = l_{\mathbb{H}}(\delta_n) \quad (5.51)$$

De modo similar, temos

$$l_{\mathbb{H}}(\gamma_n) \geq l_{\mathbb{H}}(Y_n(i)) \quad (5.52)$$

□

Corolário 5.4. *Para cada $n \in \text{SR}(c, \lambda)$, δ_n fica contida em uma $C(\lambda)$ -vizinhança de γ_n e $\partial Y_n(i)$ fica contida em uma $C(\lambda)$ -vizinhança de $\gamma_n(i)$.*

Demonstração. Pelo precedente teorema e como $\lambda^{-1} \leq l_{\mathbb{H}}(\gamma_n)$ aplicando-se o teorema 2.23-[McM1] obtemos uma cota superior $C(\lambda)$ para a distância de qualquer ponto $x \in \delta_n$ à γ_n .

Valendo-se do teorema 4.3 temos $l_{\mathbb{H}}(\gamma_n(i)) \leq \frac{1}{2\lambda}$. Assim, do teorema precedente e o 2.23-[McM1] obtemos uma cota superior $C(\lambda)$ para a distância de qualquer ponto $x \in Y_n(i)$ à γ_n . □

Teorema 5.12. *Para qualquer $n \in \text{SR}(c, \lambda)$*

$$\|(P_c^n)'(x)\| \leq C(\lambda) \quad \text{para } x \in \delta_n = \partial X_n \text{ e} \quad (5.53)$$

$$\|(P_c^{n-i})'(x)\| \leq C(\lambda) \quad \text{para } x \in \partial Y_n(i) \quad (5.54)$$

com respeito à métrica hiperbólica em $\widehat{\mathbb{C}} - P(c)$.

Demonstração. Temos,

$$2l_{\mathbb{H}}(\gamma_n) = \int_{\delta_n} \|(P_c^n)'(z)\|\rho(z)|dz| \quad (5.55)$$

e $\|(P_c^n)'(z_1)\| \leq 2$ para algum $z_1 \in \delta_n$, pois caso contrário

$$2l_{\mathbb{H}}(\gamma_n) = \int_{\delta_n} \|(P_c^n)'(z)\|\rho(z)|dz| > 2 \int_{\delta_n} \rho(z)|dz| = 2l_{\mathbb{H}}(\delta_n) \quad (5.56)$$

contradizendo que $l_{\mathbb{H}}(\gamma_n) \leq l_{\mathbb{H}}(\delta_n)$.

Qualquer ponto $z_2 \in \delta_n$ está conectado à z_1 por um arco η de δ_n tal que $P_c^n(\eta)$ é um subarco de γ_n e, portanto, $l_{\mathbb{H}}(P_c^n(\eta)) \leq l_{\mathbb{H}}(\gamma_n) \leq \lambda$.

Consequentemente, advém do teorema 3.8 quem

$$\|(P_c^n)'(z_2)\| \leq \|(P_c^n)'(z_1)\| \leq 2^\alpha \quad (5.57)$$

em que $\alpha = \exp(Cl_{\mathbb{H}}(P_c^n(\eta))) \leq \exp(C\lambda)$.

Portanto, $\|(P_c^n)'(z)\|$ é limitado superiormente por $C(\lambda) = 2^{\exp(C\lambda)}$.

Mas, lembre-se que $\partial Y_n(i) = P_c^i(\delta_n)$, deste modo, cada $z \in \partial Y_n(i)$ é tal que $z = P_c^i(w)$ para

algum $w \in \delta_n$. Notemos o seguinte

$$(P_c^{n-i})'(z) = \prod_{k=1}^{n-i} P_c'(P_c^{n-k}(z)) \quad (5.58)$$

Mas, do teorema 3.5–[McM1] segue

$$\|(P_c^{n-i})'(z)\| \leq \prod_{k=1}^n P_c'(P_c^{n-k}(z)) = \|(P_c^n)'(z)\| \leq 2^\alpha. \quad (5.59)$$

□

Teorema 5.13. *Para qualquer $n \in \text{SR}(c, \lambda)$, existe $i \neq j$ tais que*

$$d(\gamma_n(i), \gamma_n(j)) < C(\lambda) \quad (5.60)$$

na métrica hiperbólica de $\widehat{\mathbb{C}} - P(c)$.

Demonstração. Fixado um nível qualquer $n \in \text{SR}(c, \lambda)$, consideremos a superfície de Riemann de tipo finito X obtida retirando-se de \mathbb{C} todos os discos limitados pelas curvas $\gamma_n(i)$ para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Desta maneira X tem fronteira geodésica $\cup_{i=1}^n \gamma_n(i)$ e uma cúspide em ∞ . Mas, como pelo teorema 4.3, $l_{\widehat{\mathbb{C}}-P(c)}(\gamma_n(i)) \geq (2\lambda)^{-1}$. E com isso o teorema 2.24–[McM1] nos garante a existência de índices i e j diferentes tais que $d(\gamma_n(i), \gamma_n(j)) < C(\lambda)$. □

Teorema 5.14. *Para $n \in \text{SR}(c, \lambda)$ existe um disco $Z_n \subset \widehat{\mathbb{C}} - P(c)$ e um inteiro m com $0 < m < n$ tal que*

1. $P_c^m : Z_n \rightarrow Y_n$ é univalente;
2. $d_{\mathbb{H}}(\partial X_n, \partial Y_n) < C(\lambda)$;
3. $l_{\mathbb{H}}(\partial Z_n) < \lambda$;
4. $\text{área}(Z_n) > (C(\lambda))^{-1}$.

com respeito a métrica hiperbólica em $\widehat{\mathbb{C}} - P(c)$.

Demonstração. Vimos logo acima que fixado um nível $n \in \text{SR}(c, \lambda)$ existem $\gamma_n(i)$ e $\gamma_n(j)$ diferentes tais que $d(\gamma_n(i), \gamma_n(j))$ é limitada em termos de λ . Já o corolário 5.4 nos garante que $\partial Y_n(i)$ fica uniformemente próximo de $\gamma_n(i)$ e assim, $d(\partial Y_n(i), \partial Y_n(j)) < C(\lambda)$.

Considere α uma geodésica de comprimento menor do que $C(\lambda)$. Se $\partial Y_n(i)$ e $\partial Y_n(j)$ tem intersecção não vazia, então, “tomamos” α com comprimento zero.

Suponhamos $i < j$.

A aplicação $P_c^{i-1} : Y_n(1) \rightarrow Y_n(i)$ é univalente, logo admite uma inversa univalente, $P_c^{1-i} : Y_n(i) \rightarrow Y_n(1)$.

Como $(\alpha \cup Y_n(j)) \cap P(c) = P_n(j)$, podemos obter uma continuação analítica deste ramo de $P_c^{1-i}|_{Y_n(i)}$ ao longo de α à uma aplicação univalente que aplica $Y_n(i) \cup \alpha \cup Y_n(j)$ sobre $Y_n(1) \cup \eta \cup W$, no qual $\eta = P_c^{1-i}(\alpha)$ é o arco ligando $Y_n(1)$ ao $W = P_c^{1-i}(Y_n(j))$.

Observemos que $W = Y_{j-i+1}$ ou é disjunto do conjunto pós-crítico de P_c .

Já que o valor crítico $P_c(0) \in Y_n(1)$, o conjunto $W \cup \alpha \cup \partial Y_n(1)$ tem um recobrimento duplo por P_c igual a $Z_n \cup \beta \cup \partial X_n \cup -\beta \cup -Z_n$ no qual $P_c(Z_n) = P_c(-Z_n) = W$ e $P_c(\beta) = P_c(-\beta) = \eta$.

Se Z_n tem interseção não vazia com o conjunto pós-crítico, então, $-Z_n$ tem interseção vazia com $P(c)$, pois neste caso $Z_n = Y_n(j-1)$ e, portanto, $-Z_n = Y'_n(j-1)$. Dessarte, trocando-se, se se fizer necessário, Z_n e $-Z_n$ podemos supor que Z_n é disjunto de $P(c)$. Isto estabelecido, teremos $P_c^i : Z_n \rightarrow Y_n(j)$ univalente, mas sendo também $P_c^{n-j} : Y_n(j) \rightarrow Y_n$ univalente segue que $P_c^m : Z_n \rightarrow Y_n$ é univalente, em que $m = n + i - j < n$.

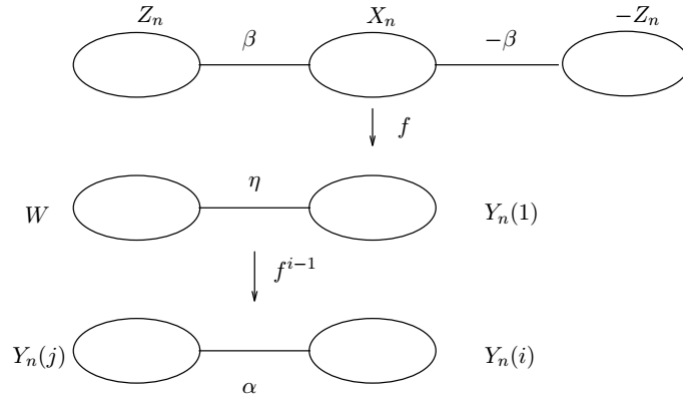


Figura 5.2: Construção de Z_n

A aplicação $P_c^m|_{\widehat{\mathbb{C}}-P(c)}$ é expansora na norma hiperbólica, o que implica em $l_{\mathbb{H}}(\partial Z_n) \leq l(\gamma_n) < \lambda$.

Por fim, mostraremos a existência de uma cota inferior para a área de Z_n , que depende apenas de λ .

A ideia consiste em mostrar que P_c^m não é muito expansora próximo da curva ∂Z_n e que mapeia uma vizinhança de ∂Z_n sobre uma região com área definida em Y_n .

Para tanto, consideremos o seguinte conjunto

$$E := \{z \in \widehat{\mathbb{C}} - P(c); d_{\mathbb{H}}(z, \gamma_n) < 1\} \cap Y_n. \quad (5.61)$$

Seja $C(\gamma_n) \subset \widehat{\mathbb{C}} - P(c)$ a vizinhança colar de γ_n de γ_n dada pelo teorema 2.18-[McM1]. Pondo $r(\lambda) := d(\gamma_n, \partial C(\gamma_n))$ e $r(z)$ o raio de injetividade de $\widehat{\mathbb{C}} - P(c)$ em $z \in \gamma_n$ temos, $r(z) \geq r(\lambda)$ para todo $z \in \gamma_n$.

Temos a dependência de $r = d(\gamma_n, \partial C(\gamma_n))$ em λ devido r de $\text{mod}(C(\gamma_n))$ que por sua vez depende de $l(\gamma_n)$ pelo teorema 2.19-[McM1], mas $n \in \text{SR}(c, \lambda)$.

Sendo a aplicação $P_c^{n-j} : Y_n(j) \rightarrow Y_n$ é univalente, assim existe uma região $E_2 \subset Y_n(j)$ que é mapeada injetivamente sobre $E_1 \subset Y_n$. Temos, $\|(P_c^{n-j})'(z)\| < C(\lambda)$ para todo $z \in \partial Y_n(j)$ pelo teorema 5.12.

Para cada $z_0 \in E_2$ considere o ponto $\tilde{z}_0 \in \partial Y_n(j)$ tal que $d(z_0, \partial Y_n(j)) = d(z_0, \tilde{z}_0)$ e seja γ a geodésica minimal em $\widehat{\mathbb{C}} - P(c)$ que conecta z_0 ao \tilde{z}_0 . E disto, aplicando o teorema 3.8-[McM1], com tal curva γ , obtemos,

$$\|(P_c^{n-j})'(z_0)\| \leq \|(P_c^{n-j})'(\tilde{z}_0)\|^\alpha = C(\lambda)^\alpha \quad (5.62)$$

em que $\alpha = \exp(C)$ para uma constante universal C .

A partir disto, sendo a área de E_1 limitada inferiormente, obtemos uma cota inferior dependendo

apenas de λ para $\text{área}(E_2)$, pois

$$\text{área}(E_1) = \int_{P_c^{n-j}(E_2)=E_1} (\rho(z))^2 |dz|^2 = \int_{E_2} \|(P_c^{n-j})'(z)\| (\rho(z))^2 |dz|^2 \quad (5.63)$$

$$\leq (C(\lambda))^\alpha \int_{E_2} (\rho(z))^2 |dz|^2 \quad (5.64)$$

$$= (C(\lambda))^\alpha \text{área}(E_2) \quad (5.65)$$

Sendo também injetora a aplicação $P_c^i : Z_n \rightarrow Y_n(j)$ existe uma região $E_3 \subset Z_n$ que é mapeada injetivamente sobre E_2 . Qualquer ponto $z_0 \in E_3$ pode ser conectado a ∂X_n por um arco ξ tal que $l(P_c^i(\xi)) < C(\lambda)$. Para termos tal desigualdade basta-nos tomar ξ como a pré-imagem de $\beta_1 \vee \beta_2 \vee P_c^i(\beta)$, em que β_1 é a geodésica minimal em $\widehat{\mathbb{C}}$ conectando $P_c^i(z_0) \in E_2$ a $\partial Y_n(j)$ e β_2 é o arco de $\partial Y_n(j)$ conectando $\beta_1 \cap \partial Y_n(j)$ a $\partial Y_n(j) \cap P_c^i(\beta)$. Já que β_1 , β_2 e $P_c^i(\beta)$ possuem seus comprimentos limitados em termos de λ na métrica hiperbólica de $\widehat{\mathbb{C}}$.

Do teorema 3.8-[McM1] e 5.12

$$\|(P_c^i)'(z_0)\| \leq \|(P_c^i)'(z_1)\|^\alpha \leq (C(\lambda))^\alpha \quad (5.66)$$

em que z_1 é o ponto $P_c^i(\beta) \cap Y_n(i)$. Mas $\alpha = \exp(C \cdot l(P_c^i(\xi))) < \exp(C(\lambda))$. Portanto, $\|(P_c^i)'(z_0)\| \leq C(\lambda)$ para todo $z_0 \in E_3$. Isto posto, obtemos $\text{área}(E_2) = C(\lambda)\text{área}(E_3)$.

$$\text{Logo, } \text{área}(Z_n) > \text{área}(E_3) > \frac{\text{área}(E_1)}{C(\lambda)} > \frac{1}{C(\lambda)}. \quad \square$$

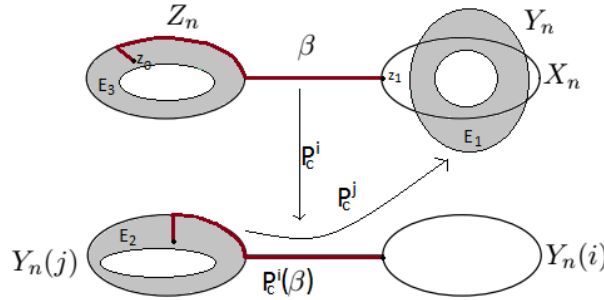


Figura 5.3: ilustração

Teorema 5.15 (Campo de linhas próprio invariante). *Suponhamos $|\text{SR}(c, \lambda)| = \infty$ e que P_c admita um campo de linhas invariante μ suportado em seu Julia. Então, existe uma subsequência de níveis $n \in \text{SR}(c)$ tal que $\mu_n = (A_n^{-1})^*(\mu|_{Y_n})$ converge para um campo de linhas univalente ν em Y invariante por P , em que A_n e P são aquelas aplicações do teorema 5.10.*

Demonstração. Seja $x \in \widehat{\mathbb{C}} - P(c)$ um ponto quasecontinuidade de μ com as propriedades garantidas pelo corolário 5.3.

Para cada nível $n \in \text{SR}(c, \lambda)$ definamos $k(n) \geq 0$ como sendo o menor inteiro tal que $P_c^{k(n)+1}(x) \in Y_n$. Por mesma razão dada na demonstração do teorema 5.5, $k(n) \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$ em $\text{SR}(c, \lambda)$. Consideremos apenas n suficientemente grande de modo que $k(n) > 0$ e assim tenhamos $P_c^{k(n)}(x) \notin Y_n$.

Temos $P_c^{k(n)+1}(x) \in Y_n(i(n) + 1)$ para algum $i(n)$ com $0 \leq i(n) \leq n - 1$. Distinguiremos dois casos, o primeiro, quando $i(n) > 0$ e o segundo, quando $i(n) = 0$.

1º caso:

$P_c^{k(n)}(x) \in Y'_n(i(n))$, pois $P_c^{k(n)}(x) \notin \mathcal{Y}_n$ e $P_c^{k(n)+1}(x) \in \mathcal{Y}_n$. Definamos $h_n : Y_n \rightarrow \mathbb{C}$ como segue

$$Y_n \xrightarrow{P_c^{i(n)-n}} Y'_n(i(n)) \xrightarrow{P_c^{-k(n)}} T_n \subset \mathbb{C} \quad (5.67)$$

em que o ramo univalente de $P_c^{-k(n)}$ é tomado de modo que ele envie $P_c^{k(n)}(x)$ de volta em x . Este ramo está definido em todo $Y'_n(i(n))$ já que este tem interseção vazia com $P(c)$.

2º caso:

Neste caso $P_c^{k(n)+1} \in Y_n(1)$, e como $P_c^{k(n)+1} \notin Y_n \subset \mathcal{Y}_n$. Então, $P_c^{k(n)(x) \in X_n - Y_n}$, pois $P_c^n(P_c^{k(n)}) \in Y_n$.

Como $\partial Y_n = \gamma_n \approx_{isot} \delta_n$, $X_n - Y_n$ é disjunto do conjunto pós-crítico $P(c)$. Do corolário 5.4, $\delta_n = \partial X_n$ fica contida em uma $C(\lambda)$ -vizinhança de $\gamma_n = \partial Y_n$, e o mesmo vale para a região $X_n - Y_n$. Em particular, a distância de $P_c^{k(n)}(x)$ à ∂X_n é limitada. Pelo teorema 5.14, a distância de ∂X_n à ∂Z_n é limitada em termos de λ e o comprimento de ∂X_n é limitado por 2λ , do que conclui-se que $d_{\mathbb{H}}(P_c^{k(n)}(x), Z_n) \leq C(\lambda)$.

Seja ζ_n a geodésica minimal ligando $P_n^{k(n)}$ ao Z_n . Como $\zeta_n \cup Z_n$ é disjunto do conjunto pós-crítico de P_c existe um ramo univalente de $P_c^{-k(n)}$ em uma vizinhança de $\zeta_n \cup Z_n$ que envia $P_c^{k(n)}(x)$ em x e ζ_n em um arco que conecta x ao T_n , imagem de Z_n por $P_c^{-k(n)}$.

Do item 1 do teorema 5.14 decorre a existência de um inteiro $m \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ tal que $P_c^m : Z_n \rightarrow Y_n$ é univalente. Com tudo isso, definamos a aplicação univalente $h : Y_n \rightarrow T_n$ dada por

$$Y_n \xrightarrow{P_c^{-m}} Z_n \xrightarrow{P_c^{-k(n)}} T_n \quad (5.68)$$

Provemos a seguir dois lemas que nos auxiliarão na continuação desta prova.

Lema 5.1. Quando $n \rightarrow \infty$ em $SR(c, \lambda)$,

$$\text{diâm}_{\mathbb{H}}(T_n) \rightarrow 0 \quad (5.69)$$

enquanto

$$d_{\mathbb{H}}(x, T_n) \leq C(\lambda) \text{diâm}_{\mathbb{H}}(T_n) \quad (5.70)$$

na métrica hiperbólica em $\widehat{\mathbb{C}} - P(c)$.

prova do lema 5.1. Usaremos o fato de que $\|(P_c^{k(n)})'(x)\| \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$ (teorema 3.6-[McM1]).

No 1º caso, $P_c^{k(n)}$ mapeia T_n injetivamente sobre $Y'_n(i(n))$, enviando x ao interior de $Y'_n(i(n))$.

Visto que o diâmetro de $\partial Y'_n(i(n))$ em $\widehat{\mathbb{C}} - P(c)$ é limitado independentemente do nível n , $\|P_c^{k(n)}(z)\|$ tende uniformemente para o infinito em ∂T_n , como veremos a seguir.

Sendo $D(\lambda) := \text{diâm}_{\mathbb{H}}(Y'_n(i(n)))$, do teorema 3.8-[McM1], temos para cada $z \in T_n$

$$\|(P_c^{k(n)})'(z)\| \geq \|(P_c^{k(n)})'(z_0)\|^{\frac{1}{\alpha}} = M_n(\lambda), \quad (5.71)$$

já que $Y'_n(i(n)) = P_c^{k(n)}(T_n)$, em que $\alpha = \exp(CD(\lambda))$ e C é uma constante universal e $z_0 \in \partial T_n$ é tal que $\|(P_c^{k(n)})'(z_0)\| = \min\{\|(P_c^{k(n)})'(z)\|, z \in \partial T_n\}$.

Como $\partial Y'_n(i(n)) = P_c^{k(n)}(\partial T_n)$, dos teoremas 3.5-[McM1] e 4.3, $l_{\mathbb{H}}(\partial Y'_n(i(n))) \leq \lambda$. E disto decorre,

$$\lambda \geq l_{\mathbb{H}}(\partial Y'_n(i(n))) = \int_{\partial Y'_n(i(n))} \rho(z) |dz| = \int_{\partial T_n} \|(P_c^{k(n)})'(z)\| \rho(z) |dz| \quad (5.72)$$

$$\geq M_n^\alpha(\lambda) l_{\mathbb{H}}(\partial T_n) \quad (5.73)$$

Mas, $M_n \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$, logo deve-se ter, $l_{\mathbb{H}}(\partial T_n) \rightarrow 0$ e, em particular, $\text{diâm}(T_n) \rightarrow 0$. Neste caso, a desigualdade é trivial, pois $x \in T_n$.

Passemos agora para o 2º caso, no qual $i(k) = 0$ e $P_c^{k(n)}$ aplica T_n de maneira univalente sobre Z_n .

Afirmção 5.1.

$$\frac{1}{C(\lambda)} \leq \frac{\|(P_c^{k(n)})'(z)\|}{\|(P_c^{k(n)})'(x)\|} \leq C(\lambda) \quad (5.74)$$

para todo $z \in T_n \cup \tau_n$, no qual τ_n é um arco que conecta x ao T_n .

Prova da Afirmção 5.1. Pelo teorema da vizinhança colar o raio de injetividade de $\widehat{\mathbb{C}} - P(c)$ em γ_n é limitado inferiormente em termos de λ . E temos ainda $l_{\mathbb{H}}(\gamma_n) > \frac{1}{\lambda}$.

Isto posto, recorrendo ao teorema 2.22-[McM1] que nos atesta que o logarítmo do raio de injetividade é uniformemente *Lipschitz*, teremos para todo $z \in \gamma_n$

$$\log(r(P_c^{k(n)}(x))) \geq \log(r(z)) - C d_{\mathbb{H}}(x, z) \quad (5.75)$$

$$\geq \log(C(\lambda)) - C[d_{\mathbb{H}}(x, \hat{x}) + d_{\mathbb{H}}(\hat{x}, z)] \quad (5.76)$$

$$\geq \log(C(\lambda)) - C(C(\lambda) + \frac{1}{\lambda}) := K(\lambda), \quad (5.77)$$

em que \hat{x} é o ponto sobre γ_n tal que $d_{\mathbb{H}}(x, \hat{x}) = d_{\mathbb{H}}(x, \gamma_n)$, portanto,

$$r(P_c^{k(n)}(x)) \geq K(\lambda) > 0 \quad (5.78)$$

Podemos ligar $z \in T_n \cup \tau_n$ a x por um caminho ξ em $\widehat{\mathbb{C}} - P(c)$ tal que $l_{\mathbb{H}}(P_c^{k(n)}(\xi)) \leq l_{\mathbb{H}}(\zeta_n) + \text{diâm}_{\mathbb{H}}(Z_n)$. Bastando para tanto, fazermos o seguinte:

1. se $z \in \tau_n$ tomamos ξ como sendo o subarco de τ_n que conecta z ao x ;
2. se $z \in \partial T_n$, então, ξ será a justaposição de τ_n com o sub-arco de ∂T_n que conecta z ao ponto $\partial T_n \cap \tau_n$;
3. se $z \in T_n$, ξ será a justaposição $\alpha \vee \tau$, na qual α é a geodéca minimal que conecta z ao ponto $\partial T_n \cap \tau_n$.

Nos três casos acima é imediato que

$$C(\lambda) \geq \text{diâm}_{\mathbb{H}}(Z_n) + l_{\mathbb{H}}(\zeta_n = P_c^{k(n)}(\tau_n)) \geq l_{\mathbb{H}}(P_c^{k(n)}(\xi)) \quad (5.79)$$

Pois, $\text{diâm}_{\mathbb{H}}(Z_n)$ é limitado em termos de λ , pois $P_c^m(Z_n) = Y_n$ com $P_c^m|_{Z_n}$ univalente, o que é assertado pelo teorema 5.14.

A partir disto, aplicando o teorema 3.8-[McM1], obtemos

$$C(\lambda)^{-1} \leq \frac{\|(P_c^{k(n)})'(z)\|}{\|(P_c^{k(n)})'(x)\|} \leq C(\lambda), \quad (5.80)$$

em que a dependência de $C(\lambda)$ a λ decorrem de 5.78 e 5.79. \square

De 5.80 segue

$$d_{\mathbb{H}}(x, z) \leq \int_{\xi} \| (P_c^{k(n)})'(z) \| \rho(z) |dz| \leq \frac{C(\lambda)}{\| (P_c^{k(n)})'(x) \|}, \quad (5.81)$$

para qualquer $z \in T_n$.

Desde que, $\| (P_c^{k(n)})'(x) \| \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$, $\text{diâm}_{\mathbb{H}}(T_n) \rightarrow 0$.

Para concluir, mostraremos que $d_{\mathbb{H}}(x, T_n) \leq C(\lambda) \text{diâm}_{\mathbb{H}}(T_n)$

Do item 4 do teorema 5.14 sabemos que a área de Z_z é limitada inferiormente em termos de λ , assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{C(\lambda)} \leq \text{área}(Z_n) &= \int_{Z_n=P_c^{k(n)}} \rho(z)^2 |dz|^2 = \int_{T_n} \| (P_c^{k(n)})'(z) \|^2 \rho(z)^2 |dz|^2 \\ (\text{usando 5.80}) &\leq \tilde{C}(\lambda) \| (P_c^{k(n)})'(x) \|^2 \int_{T_n} \rho(z)^2 |dz|^2 \\ &= \tilde{C}(\lambda) \| (P_c^{k(n)})'(x) \|^2 \text{área}(T_n) \end{aligned} \quad (5.82)$$

Sendo o diâmetro de T_n limitado na métrica hiperbólica de $\widehat{\mathbb{C}} - P(c)$ em termos de λ , temos, $\text{área}(T_n) \leq C \text{diâm}(T_n)^2$ para uma constante $C > 0$. Com isso, de 5.82 acima obtemos

$$\frac{1}{\| (P_c^{k(n)})'(x) \|^2} \leq CC(\lambda) \tilde{C}(\lambda) (\text{diâm}_{\mathbb{H}}(T_n))^2 \quad (5.83)$$

e, portanto,

$$\frac{1}{\| (P_c^{k(n)})'(x) \|^2} \leq C(\lambda) (\text{diâm}_{\mathbb{H}}(T_n))^2 \quad (5.84)$$

Então, de 5.81

$$d_{\mathbb{H}}(x, T_n) \leq d_{\mathbb{H}}(x, z) \leq \frac{C(\lambda)}{\| (P_c^{k(n)})'(z) \|} \leq C(\lambda) \text{diâm}_{\mathbb{H}}(T_n) \quad (5.85)$$

\square

Lema 5.2. *A aplicação h_n se estende a uma aplicação univalente em um anel com módulo definido em torno de Y_n .*

Demonstração. O teorema da vizinhança colar nos garante a existência de um anel $C(\gamma_n) \subset \widehat{\mathbb{C}} - P(c)$ com módulo definido cuja curva central é γ_n .

Assim, qualquer aplicação univalente em Y_n se estende univalentemente à região $C(\gamma_n) \cup Y_n$. Portanto, sendo h_n um ramo da inversa de alguma iterada de P_c , temos o esperado. \square

Processeguimos a prova do teorema considerando uma sequência de níveis $n(k) \in \text{SR}(c, \lambda)$ para a qual valha o teorema 5.10. Lembrem-se que, em particular, temos $(A_n(Y_n, 0)) \rightarrow (Y, 0)$ na topologia de *Carathéodory*.

Ponhamos,

$$k_n := h_n \circ A_n^{-1} : A_n(Y_n) \longrightarrow T_n \quad (5.86)$$

Aplicando o teorema 5.8, já que $\text{diâm}_{\mathbb{E}}(A_n(Y_n)) = \frac{\text{diâm}_{\mathbb{E}}(Y_n)}{\text{diâm}_{\mathbb{E}}(B_n)}$, obtemos

$$1 \leq \text{diâm}_{\mathbb{E}}(A_n(Y_n)) \leq \frac{1}{C(\lambda)} := \tilde{C}(\lambda) \quad (5.87)$$

O lema 5.2 nos assegura que k_n admite uma extensão univalente a um anel com módulo definido em torno de $A_n(Y_n)$ e $k_n(A_n(Y_n)) = T_n$. Disto mais o teorema 3.8 – [McM1] concluímos

$$\frac{1}{C(\lambda)} \|k'_n(0)\| \leq \text{diâm}_{\mathbb{H}}(T_n) \leq C(\lambda) \|k'_n(0)\| \quad (5.88)$$

Visto que as norma euclidiana e a norma hiperbólica são comparáveis numa vizinhança de x e $\text{diâm}_{\mathbb{H}}(T_n)$ tende para 0, $\|k'_n(0)\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Desde que $k_n(0) \in T_n$ e $\frac{1}{\|k'_n(0)\|} \geq \frac{1}{C(\lambda)\text{diâm}_{\mathbb{H}}(T_n)}$ por 5.88, segue

$$\frac{\text{diâm}_{\mathbb{H}}(x, k_n(0))}{\|k'_n(0)\|} \leq \frac{d_{\mathbb{H}}(x, T_n) + \text{diâm}_{\mathbb{H}}(T_n)}{C(\lambda)\text{diâm}_{\mathbb{H}}(T_n)} \quad (5.89)$$

O lema 5.1 implica que $\frac{d_{\mathbb{H}}(x, T_n) + \text{diâm}_{\mathbb{H}}(T_n)}{C(\lambda)\text{diâm}_{\mathbb{H}}(T_n)}$ é limitado em termos de λ . Logo, pelo teorema 5.16-[McM1] existe uma subsequência de níveis $n \in \text{SR}(c, \lambda)$ tal que

$$\nu_n = k_n^*(\mu) \quad (5.90)$$

converge em medida para um campo de linhas univalente ν em $(Y, 0)$. Mas, h_n é um ramo inverso de alguma iterada de P_c , assim a invariância de μ por P_c implica que $\nu_n = (A_n^{-1})^*(\mu)$. Mais ainda,

$$(A_n \circ P_c^n \circ A_n^{-1})^*(A_n^{-1})^*(\mu) = (A_N^{-1})^*(P_c^n)^*(A_n)^*(A_n^{-1})^*(\mu) \quad (5.91)$$

$$= (A_N^{-1})^*(P_c^n)^*(\mu) \quad (5.92)$$

$$= (A_N^{-1})^*(\mu) \quad (5.93)$$

$$= \nu_n \quad (5.94)$$

Desta maneira, aplicando o teorema 5.14-[McM1] concluímos que ν é invariante por P em Y . Não obstante, $P : (X, 0) \rightarrow (Y, P(0))$ tem $z = 0 \in Y$ como ponto crítico, logo pelo teorema 5.3-[McM1], P não pode admitir um campo de linhas univalente invariante.

Portanto, P_c não admite um campo de linhas invariante suportado em seu conjunto de Julia. \square

prova do teorema 5.7. Como comentado na definição 5.4, temos $|\text{SR}(c, \lambda)| = +\infty$. Portanto, do teorema 5.15, temos a prova de 5.7. \square

Por conseguinte, juntando o teorema 5.7 com o corolário 5.2 obtemos o teorema de rigidez robusta 5.1.

Capítulo 6

Considerações finais

A teoria de renormalização tem sido de fundamental importância na dinâmica holomorfa devido à sua forte ligação com os principais problemas em aberto e com as frentes de pesquisas nesta área (veja [Fa],[Shi] mais referências aí contidas). Portanto, esta dissertação faz parte de uma introdução às novas técnicas e um aprofundamento no entendimento dos resultados básicos da dinâmica holomorfa. E que tem um caráter convidativo às pesquisas neste contexto devido às possíveis generalizações, haja vista que no presente trabalho apenas parte da rigidez quaseconforme é provada.

Lyubich [L1] provou a Conjectura 1.0.1 para a classe dos polinômios quadráticos infinitamente renormalizados de tipo limitado. Kozlovski, Shen e van Strien em [KSvS] obtiveram a Conjectura 1.0.1 para polinômios reais com pontos críticos reais. Avila, et al. em [AKLS] provaram a Conjectura 1.0.1 para qualquer polinômio unicrítico de grau qualquer que seja no máximo finitamente renormalizável e sem pontos periódicos não repulsores. No contexto geral das funções racionais este problema foi completamente resolvido por Yu Zhai e Yongcheng Yin em [YZ] e [Zh] para aplicações racionais cujo conjunto de Julia é um Cantor. Hiroyuki Inou em [In] generaliza o Teorema 1.1 de McMullen provando que *Um polinômio infinitamente renormalizável robusto não suporta em seu Julia um campo de linhas invariante*. Recentemente, Wenjuan Peng e Tan Lei em [PT] obtiveram a rigidez quaseconforme para aplicações multicríticas.

Referências Bibliográficas

- [Ah1] AHLFORS, Lars, **Complex Analysis: An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable** . 3th. ed. New York: McGraw-Hill Book Company, (1987).
- [Ah2] AHLFORS, Lars. V. **Lectures on quasiconformal mappings**. second ed., University Lecture Series, vol. 38, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.
- [Av] AVILA, Artur. **Dynamics of Renormalization Operator**. Proceedings of International Congress of Mathematicians.Hyderabad.India.(2010).
- [AKLS] AVILA, Artur; KAHN, J.; LYUBICH, M.; SHEN, W. **Combinatorial rigidity for unicritical polynomials**. Annals of Mathematics, 170 (2009), 783-797. 73
- [AL] AVILA, Artur, LYUBICH, Mikhail. **The full renormalization horseshoe for unimodal maps of higher degree: exponential contraction on hybrid classes**. Publ. Math. Inst. Hautes Étude Sci. 114 (2011),p.171-223. 31
- [ALM] AVILA, Artur; Lyubich, M. and de Melo, W. **Regular or stochastic dynamics in real analytic families of unimodal maps**. Invent. Math., 154 (2003), 451-550.
- [B1] BOURBAKI, Nicolas. **Elements of Mathematics: theory of sets**. Springer. (2004),p.191-209.
- [B2] BOURBAKI, Nicolas. **Elements of Mathematics: Algebra I: chapters:1-3**. Springer-Verlag. (2004),p.118-123.
- [BrFa] BRANNER, Bodil; FAGELA, Núria. **Quasiconformal Surgery in holomorphic dynamics**. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press. New York. 141. 1st ed. (2014).
- [BrH] BRANNER, B.;HUBBARD, J. H. **The iteration of cubic polynomials, Part II: patterns and parapatterns**, Acta Math.169(1992),p.229-325. 44
- [CG] CARLESON, L.; GAMELIN, T. **Complex Dynamics**. Spriger-Verlag. New York. (1993). 23
- [DH1] DOUADY, Adrien; HUBBARD, John H. **Étude dynamique des polynômes complexes**. Pub. Math. d'Orsay. 2nd. ed. (1984).
- [DH2] DOUADY, Adrien; HUBBARD, John H. **Exploring the Mandelbrot set**. Pub. Math. d'Orsay. 2nd. ed. (1985).

- [DH3] DOUADY, Adrien; HUBBARD, John H. **On the dynamics of polynomial-like mappings**. Sci. Èc. Norm. Sup. 18(1985). p. 287-344.
- [Dou1] DOUADY, Adrien. **Systèmes dynamiques holomorphes**. Bourbaki seminar. vol. 1982/83. Astérisque. Soc. Math. France, Paris. vol.105-106(1983). p.39-64.
- [Dou2] DOUADY, Adrien. **Compacts in C**. Topological methods in modern mathematics. Publish or Perish, Houston (1992), p.429-465. 15
- [Fa] FAGELA, Núria. **Notes on Renormalization of Complex Polynomials**. Renormalizations, proceedings of a workshop. IHP.(1996). ed. Sylvie Payschapp. p.40-51. 73
- [FM] FARB, Benson; MARGALIT, Dan **A primer on mapping class groups**. Princeton University Press. Princeton, NJ 2012.
- [Hu] HUBBARD, J. H., et al. **Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics..** Vol. 1. Matrix Editions. Ithaca. NY. 2006. 21, 29
- [In] INOU, Hiroyuki. **Renormalization and rigidity of polynomials of higher degree..** J. Math. Kyoto Univ. 42-2. (2002). p.351-392. 73
- [J] JIANG, Yunping. **Renormalization and geometry in one-dimensional real and complex dynamics**. Advanced Series in nonlinear dynamics.vol.10.World Scientific.New York. 1996. 44
- [Jen] JENKINS, James A. **On weighted distortion in conformal mapping.II**. Bull. London Math. Soc.V.30.no.2.1998.p.151-158. 58
- [KSvS] KOZLOVSKI, O.; SHEN, W. and van STRIEN, S. **Rigidity for real polynomials**. Ann. of Math. (2) 165 (2007), no. 3, p.749-841. 73
- [L1] LYUBICH, M. **Dynamics of quadratic polynomials**. I, II. Acta. Math. 178 (1997), n. 2, p.185-247, p.247-297. 73
- [L2] LYUBICH, M. **Feigenbaum-Coulet-Tresser universality and Milnor's hairiness conjecture**. Ann. Math. (2) 149 (1999). p.319-420. 31
- [L3] LYUBICH, M. **Book Reviews**. Bull. (new series) of the Amer. Math. Soc. vol.36. n.1.(1999). p.103-107.
- [L4] LYUBICH, M. **Six Lectures on Real and Complex Dynamics**. disponível em:<<https://www.math.stonybrook.edu/~mlyubich/Archive/Selected/lectures.pdf>> 31
- [McM1] MCMULLEN, Curtis T. **Complex Dynamics and Renormalization**. Annals of Mathematics studies: no. 135.Princeton University Press, 1994. iii, v, 6, 16, 17, 24, 25, 31, 32, 34, 35, 38, 39, 40, 44, 48, 50, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70
- [McM2] MCMULLEN, Curtis T. **Renormalization and 3-manifold with fiber over the circle**. Annals of Mathematics studies: no. 142.Princeton University Press, 1996. 41

- [McM3] MCMULLEN, Curtis T. **Frontiers in complex dynamics**. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 31 (1994), no. 2, p.155-172.
- [Mil1] MILNOR, John. **Dynamics in one complex variable**, 3rd edition. Annals of Mathematics studies series n.160, Princeton University Press, 2006. 3, 16, 17, 20, 23, 27, 34, 42, 47, 54
- [Mil2] MILNOR, John. **Local connectivity of the Julia sets:expository lectures**. in The Mandelbrot Set, Theme and Variations, Edit. Tan Lei. Cambridge U. Press, Cambridge, UK, 67-116, 2000. ix, 41, 44
- [MSS] MAÑÉ, R.; SAD, P.; SULLIVAN, D. **On the dynamics of rational maps**. Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 16(1983). P. 193-217. 23, 24, 25
- [PT] PENG, Wenjuan;LEI, Tan. **Quasi-Conformal Rigidity of Multicritical Maps**. Sci. China Ser. A. (2008). n.58. p.79-92. 73
- [R] REMMERT, R., **Theory of Complex Functions**. Graduate Texts in Mathematics.v.122 New York: Springer-Verlag, 1991. 58, 62
- [Ru] RUDIN, W., **Real and Complex Analysis** . 3th. ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1987.
- [Sch] SCHLEICHER, D. **On fibers and renormalization of Julia sets and Multibrot sets in Geometry and Applications:A Jubilee of Benoit Mandelbrot**. vol.1, Proc. Sympos. Pure Math. 72, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.(and Preprint IMS at Stony Brook 13(1998). p. 477-517.)
- [Shi] SHISHIKURA, Matisuhiro. **Topological, Geometric and Complex Analytic Properties of Julia sets**. Proceedings of International Congress of Mathematicians. vol.1,2. Zürich. (1994). p.886-895. 73
- [Sl] SLODKOWSKI, Z. **Holomorphic motions and polynomial hulls**. Proc. Am. Math. Soc., 111 (1991). p. 347 – 355. 25
- [TY] TAN, Lei; YIN, Yongcheng. **The unicritical Branner-Hubbard conjecture**. Complex dynamics, A K Peters, Wellesley, MA, 2009. p. 215-227 44
- [YZ] YIN, Yongcheng; ZHAI, Yu. **No invariant line fields on Cantor Julia sets**. Forum Mathematicum. 22 (290). n.1. p.75-94. 73
- [Zh] ZHAI, Yu. **Rigidity of rational maps with Cantor Julia sets**. Sci. China Ser. A. (2008). n.58. p.79-92. 73