**Integral de Kurzweil para funções
a valores em um espaço de Riesz -
uma introdução**

Giselle Antunes Monteiro

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Área de concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Roseli Fernandez

Durante parte da elaboração deste trabalho a autora recebeu auxílio financeiro da CAPES.

São Paulo, agosto de 2007.

**Integral de Kurzweil para funções
a valores em um espaço de Riesz -
uma introdução**

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e defendida por Giselle Antunes Monteiro
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Profa. Dra. Roseli Fernandez (orientadora) - IME-USP.
- Prof. Dr. Severino Toscano do Rego Melo - IME-USP.
- Prof. Dr. Raymundo Luiz Alencar - IEFM-ITA.

Às minhas ‘mães’

Dora, Delmina, Carolina e Gonçalina,

e às minhas irmãs

Vivian e Ivana.

Resumo

Neste trabalho estudamos a integral de Kurzweil para funções definidas em um intervalo fechado limitado da reta e a valores em um espaço de Riesz. Apresentamos algumas propriedades básicas dessa integral e teoremas que relacionam a convergência uniforme de uma sequência de funções Kurzweil integráveis com a convergência da sequência formada pelas respectivas integrais.

Palavras-chave: integral de Kurzweil, espaço de Riesz, (D)-seqüência.

Abstract

In this work we study the Kurzweil integral for functions defined in a compact interval and with values in a Riesz space. We present some elementary properties for this integral and we prove theorems that relate the uniform convergence of a sequence of Kurzweil integrable functions to the convergence of the sequence of their integrals.

Keywords: Kurzweil integral, Riesz space, (D)-sequence.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Profa. Roseli Fernandez por sua paciência, dedicação, confiança; por seus conselhos, orientando-me não apenas na realização deste trabalho mas também em minha caminhada para a vida profissional.

Agradeço a banca examinadora pelas sugestões que permitiram melhorar esta dissertação.

Agradeço a Profa. Cláudia Cueva Candido pelo apoio e carinho.

Agradeço ao Ivo Machado da Costa, professor do DM-UFSCar, pela amizade e incentivo na jornada até aqui.

Agradeço ao Carlos Aguiar, pelo companheirismo em todos os momentos difíceis destes anos e por acreditar sempre no meu potencial.

Agradeço as pessoas que aqui conheci e estiveram ao meu lado, em especial, a Ana Carolina Boero, Estela Mara, Francisco Medeiros, Heily Wagner, Maria Simone Kugeratski e Rodrigo Lucas. Agradeço ainda aos amigos que, mesmo longe em distância, de alguma forma manifestaram seu incentivo nesse momento tão importante em minha vida, em especial, a Andra Sara de Lima, Alessandra Noeli e Fernando Cotinguiba.

Por fim, agradeço as minhas ‘mães’, Dora, Delmina, Carolina, Gonçalves e as minhas irmãs Vivian e Ivana, pelo amor, incentivo e paciência desde sempre.

São Paulo, agosto de 2007.

Giselle Antunes Monteiro

Sumário

Introdução	i
1 Espaço de Riesz	1
1.1 Espaço de Riesz: definição e algumas propriedades	2
1.2 Seqüências de elementos de um espaço de Riesz	23
2 Integral de Kurzweil	59
2.1 Integral de Kurzweil: definição e exemplos	59
2.2 Algumas propriedades da integral de Kurzweil	71
3 Seqüências de funções	91
3.1 Convergência simples e uniforme	91
3.2 Convergência uniforme e a integral de Kurzweil	103
Índice de Símbolos e Notações	117
Referências Bibliográficas	119

Introdução

O objetivo deste trabalho é apresentar a extensão da integral de Kurzweil, para funções definidas em um intervalo fechado e limitado da reta e a valores em um espaço de Riesz, introduzida por B. Riečan em [R].

Visto que, para a construção dessa integral, é importante ter um conhecimento sobre espaços de Riesz, iniciamos o nosso trabalho com um estudo de algumas de suas propriedades. Ao invés de nos restringirmos a enunciar o necessário para o nosso objetivo, optamos por apresentar, no primeiro capítulo, um estudo um pouco mais profundo sobre esses espaços. Dentre os conceitos estudados destacamos o de ser Arquimadiano, de ser Dedekind σ -completo, de ser Dedekind completo, de ser fracamente σ -distributivo e os conceitos de (o) -convergência e o de (D) -convergência.

O segundo capítulo é dedicado ao principal objeto de estudo desta Dissertação, ou seja, a integral de Kurzweil para funções definidas em um intervalo fechado e limitado da reta e a valores em um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo. Nesse capítulo apresentamos a definição, exemplos, algumas propriedades básicas dessa integral e provamos que essa integral coincide com a integral de Riemann generalizada, no caso em que o espaço de Riesz é o conjunto dos números reais. Para os espaços de Riesz Dedekind completo fracamente σ -distributivo apresentamos um Critério de Cauchy. Esse critério permite concluir que uma função é Kurzweil integrável sem conhecer o valor da

integral.

Finalizamos o trabalho com um breve estudo de seqüências de funções definidas em um intervalo fechado e limitado da reta e a valores em um espaço de Riesz. Apresentamos os conceitos de convergência simples, convergência uniforme, seqüência uniformemente de Cauchy e seqüência uniformemente limitada, dando ênfase à convergência uniforme. Quanto aos teoremas que relacionam seqüências de funções Riemann generalizada integráveis e a convergência da seqüência formada pelas respectivas integrais, apresentamos um teorema semelhante ao existente para seqüências de funções que convergem uniformemente (Teorema da Convergência Uniforme). Contudo, no nosso contexto a função limite precisa ser limitada. Isso nos trouxe uma certa preocupação, pois no caso de funções Riemann generalizada integráveis não há essa condição para a função limite. Estudando a técnica introduzida por B. Riečan nos foi possível apresentar uma outra versão desse teorema. A partir desse resultado alcançamos nosso objetivo, isto é, obtivemos, como corolário, o Teorema da Convergência Uniforme no contexto das funções Riemann generalizadas integráveis (ver [B]; p. 117).

No final desta Dissertação há um índice de símbolos e notações e as referências bibliográficas. Nessa última, além dos artigos que serviram de apoio e motivação para o nosso trabalho, listamos outros relacionados com integrais de Kurzweil.

Ressaltamos que, além da integral aqui apresentada, há extensões da integral de Kurzweil para funções a valores em um espaço de Riesz e definidas em um intervalo não limitado da reta, ou em espaços topológicos com certas propriedades. Essas extensões podem ser encontradas, por exemplo, em [Bo-R-1], [R-V-2] e [Bo-R-2].

São Paulo, agosto de 2007.

Giselle Antunes Monteiro

Capítulo 1

Espaço de Riesz

Esse capítulo é dedicado ao estudo de um espaço de Riesz, isto é, um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, provido de uma relação de ordem parcial compatível com sua estrutura de espaço vetorial (Definição 1.1.1). O conjunto dos números reais, com as operações de soma, produto e a relação de ordem usuais, é um particular espaço de Riesz.

O capítulo tem duas seções. Na primeira delas encontram-se algumas propriedades de um espaço de Riesz. Dentre os conceitos apresentados destacamos o de completude (Definição 1.1.10) e o de ser Arquimadiano (Definição 1.1.12), conceitos esses análogos aos encontrados em $\mathbb{R}$.

Finalizamos o capítulo com um estudo da convergência de seqüências de elementos de um espaço de Riesz. Inicialmente, apresentamos um conceito de convergência, que consideramos ser o mais natural, denominado (o) -convergência (Definição 1.2.8). A partir desse conceito apresentamos alguns resultados sobre a convergência de séries em um espaço de Riesz.

B. Riečan, em [R], ao introduzir a integral de Kurzweil para funções a valores em um espaço de Riesz, integral essa apresentada no Capítulo 2, comenta sobre uma técnica que consiste em utilizar seqüências duplas para substituir o epsilon que aparece, no caso real, quando queremos transmitir uma idéia de proximidade. Isso nos levou a estudar

o conceito de (D) -convergência (Definição 1.2.22) para seqüências de elementos de um espaço de Riesz Dedekind σ -completo. Essa convergência nos parece, de certa forma, mais flexível que a (o) -convergência. Provamos que, sob certas condições, esses dois conceitos de convergência são equivalentes (Corolário 1.2.27).

1.1 Espaço de Riesz: definição e algumas propriedades

Nesta seção definimos espaço de Riesz e apresentamos algumas de suas propriedades, úteis neste trabalho. Antes porém lembremos o conceito de reticulado. Mais precisamente:

Um conjunto X parcialmente ordenado pela relação $\leq$ é um reticulado se, dados quaisquer $x, y \in X$, existem $z, w \in X$ satisfazendo:

$$\begin{aligned} w \leq x \leq z \quad \text{e} \quad w \leq y \leq z; \\ \text{se } u \in X \text{ é tal que } x \leq u \text{ e } y \leq u, \text{ então } z \leq u; \\ \text{se } v \in X \text{ é tal que } v \leq x \text{ e } v \leq y, \text{ então } v \leq w. \end{aligned}$$

Convém observar que z e w são únicos e escreveremos

$$z := x \vee y \quad (\text{ou } z := y \vee x) \quad \text{e} \quad w := x \wedge y \quad (\text{ou } w := y \wedge x).$$

Definição 1.1.1. *Seja X um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial, parcialmente ordenado pela relação $\leq$. Dizemos que $(X, \leq)$ é um espaço de Riesz (ou simplesmente X é um espaço de Riesz), se:*

- (i) $(X, \leq)$ é um reticulado;
- (ii) dados quaisquer $x, y, z \in X$ tais que $x \leq y$, tem-se $x + z \leq y + z$;
- (iii) dados quaisquer $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que $x \leq y$ e $\alpha \geq 0$, tem-se $\alpha x \leq \alpha y$.

Se X é um espaço de Riesz, denotamos por X^+ o conjunto $\{x \in X \mid 0 \leq x\}$, e para cada $x \in X$, definimos:

$$x^+ := x \vee 0, \quad x^- := (-x) \vee 0 \quad \text{e} \quad |x| := x \vee (-x).$$

Algumas propriedades da função $|\cdot| : x \in X \mapsto |x|$ serão apresentadas na Proposição 1.1.5.

Note que, a partir da Definição 1.1.1, não é difícil verificar o seguinte:

Se X é um espaço de Riesz e $x, y, z, w \in X$, então são verdadeiras as seguintes afirmações:

$$\text{se } x \leq y \text{ e } z \leq w, \text{ então } x + z \leq y + w; \quad (1.1)$$

$$\text{se } x \leq y \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \leq 0, \text{ então } \alpha y \leq \alpha x; \quad (1.2)$$

$$\text{se } x \leq y, \text{ então } x \vee z \leq y \vee z \quad \text{e} \quad x \wedge z \leq y \wedge z; \quad (1.3)$$

$$\text{se } x \leq y \text{ e } z \leq w, \text{ então } x \vee z \leq y \vee w \quad \text{e} \quad x \wedge z \leq y \wedge w. \quad (1.4)$$

Exemplo 1.1.2. 1. Considere o espaço $\mathbb{R}^n$, com $n \in \mathbb{N}$, munido com as operações de soma e produto por escalar usuais. Dados quaisquer $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ elementos de $\mathbb{R}^n$, defina $x \leq y$, se $x_i \leq y_i$, para todo $1 \leq i \leq n$. Então $\mathbb{R}^n$, com essa relação de ordem parcial, é um espaço de Riesz, além disso, $x \vee y = (z_1, \dots, z_n)$ e $x \wedge y = (w_1, \dots, w_n)$, onde $z_i := \max\{x_i, y_i\}$ e $w_i := \min\{x_i, y_i\}$, para todo $1 \leq i \leq n$.

2. Sejam $(X, \leq)$ um espaço de Riesz qualquer e $n \in \mathbb{N}$. Considere em $X^n := \prod_{i=1}^n X$ a relação de ordem parcial definida de modo análogo à de $\mathbb{R}^n$, isto é, dados quaisquer $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ elementos de X^n , defina $x \leq y$, se $x_i \leq y_i$, para todo $1 \leq i \leq n$. Então X^n , com essa relação de ordem parcial, é um espaço de Riesz, onde

$$x \vee y := (x_1 \vee y_1, \dots, x_n \vee y_n) \quad \text{e} \quad x \wedge y := (x_1 \wedge y_1, \dots, x_n \wedge y_n).$$

3. Considere $\mathbb{R}^2$ munido com as operações de soma e produto por escalar usuais e da ordem lexicográfica, ou seja, $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$ se $x_1 < y_1$ ou, se $x_1 = y_1$ e $x_2 \leq y_2$. Então $\mathbb{R}^2$, com essa relação de ordem parcial, é um espaço de Riesz e

$$(x_1, x_2) \vee (y_1, y_2) = \begin{cases} (x_1, \max\{x_2, y_2\}) & \text{se } x_1 = y_1 \\ (x_1, x_2) & \text{se } x_1 > y_1 \\ (y_1, y_2) & \text{se } x_1 < y_1 \end{cases} ;$$

$$(x_1, x_2) \wedge (y_1, y_2) = \begin{cases} (x_1, \min\{x_2, y_2\}) & \text{se } x_1 = y_1 \\ (y_1, y_2) & \text{se } x_1 > y_1 \\ (x_1, x_2) & \text{se } x_1 < y_1 \end{cases} .$$

4. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o $\mathbb{R}$ -espaço vetorial das matrizes de ordem n e elementos em $\mathbb{R}$, munido com as operações de soma e produto por escalar usuais. Para quaisquer $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A := (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ e $B := (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, defina $A \leq B$ se $a_{ij} \leq b_{ij}$, para quaisquer $1 \leq i, j \leq n$. Então $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, com essa relação de ordem parcial, é um espaço de Riesz, além disso,

$$A \vee B = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \quad e \quad A \wedge B = (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq n},$$

onde $c_{ij} := \max\{a_{ij}, b_{ij}\}$ e $d_{ij} := \min\{a_{ij}, b_{ij}\}$, para quaisquer $1 \leq i, j \leq n$.

Note que substituindo $\mathbb{R}$ por um espaço de Riesz $(X, \leq)$ qualquer e considerando em $\mathcal{M}_n(X)$ ($\mathbb{R}$ -espaço vetorial das matrizes de ordem n e elementos em X) a relação de ordem dada em 4. substituindo $\mathbb{R}$ por X , tem-se que $\mathcal{M}_n(X)$ é um espaço de Riesz, onde $c_{ij} := a_{ij} \vee b_{ij}$ e $d_{ij} := a_{ij} \wedge b_{ij}$, para quaisquer $1 \leq i, j \leq n$.

5. Sejam Y um conjunto qualquer e $\mathbb{R}^Y$ o $\mathbb{R}$ -espaço vetorial das funções definidas em Y e a valores em $\mathbb{R}$, munido com as operações de soma e produto por escalar usuais. Considere sobre $\mathbb{R}^Y$ a relação de ordem parcial usual, isto é, dadas quaisquer $f, g \in \mathbb{R}^Y$

tem-se $f \leq g$, se $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in Y$. Então $\mathbb{R}^Y$, com essa relação de ordem parcial, é um espaço de Riesz, onde $f \vee g$ e $f \wedge g$ são as funções

$$(f \vee g)(x) := \max\{f(x), g(x)\} \quad e \quad (f \wedge g)(x) := \min\{f(x), g(x)\}, \quad \text{para todo } x \in Y.$$

Note que, substituindo $\mathbb{R}$ por um espaço de Riesz $(X, \leq)$ qualquer e considerando em X^Y a relação de ordem parcial dada em 5. substituindo $\mathbb{R}$ por X , tem-se que X^Y é um espaço de Riesz e, para toda $f, g \in X^Y$,

$$(f \vee g)(x) := f(x) \vee g(x) \quad e \quad (f \wedge g)(x) := f(x) \wedge g(x), \quad \text{para todo } x \in Y.$$

6. Sejam $Y \subset \mathbb{R}$, um espaço topológico com a topologia induzida pela usual de $\mathbb{R}$, e $\mathcal{C}(Y; \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^Y$ o $\mathbb{R}$ -espaço vetorial das funções contínuas definidas em Y a valores em $\mathbb{R}$, munido com as operações de soma e produto por escalar usuais. Considere sobre $\mathcal{C}(Y; \mathbb{R})$ a relação de ordem parcial induzida pela usual de $\mathbb{R}^Y$. Então $\mathcal{C}(Y; \mathbb{R})$ é um espaço de Riesz.

De fato, segue de 5. observando que, se f e g são contínuas em Y , então as funções $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ são contínuas em Y .

7. Seja $E(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ o $\mathbb{R}$ -espaço vetorial das funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$, munido com as operações de soma e produto por escalar usuais. Considere sobre $E(\mathbb{R})$ a relação de ordem parcial induzida pela usual de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Então $E(\mathbb{R})$ não é um espaço de Riesz pois $(E(\mathbb{R}), \leq)$ não é um reticulado.

De fato, suponha, por absurdo, que $E(\mathbb{R})$ seja um reticulado. Considere $f, g \in E(\mathbb{R})$, definidas por $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$, para $x \in \mathbb{R}$, e seja $h \in E(\mathbb{R})$ tal que $h = f \vee g$. É claro que $h(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Além disso, se $h(0) > 0$, então a função $\varphi \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dada por $\varphi(x) := ax^2 + \frac{h(0)}{2}$, para $x \in \mathbb{R}$, com $a := \max\left\{1, \frac{1}{2h(0)}\right\}$, é um elemento de $E(\mathbb{R})$ satisfazendo $f \leq \varphi$, $g \leq \varphi$ e $\varphi(0) < h(0)$. Mas isso implica que $h(0) = (f \vee g)(0) \leq \varphi(0) < h(0)$, o que é uma contradição. Logo $h(0) = 0$. Desse fato e observando que $x^2 \leq h(x)$ e $x \leq h(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, segue que a derivada à esquerda

de h em 0 é menor ou igual a 0 e a derivada à direita de h em 0 é maior ou igual a 1, o que é absurdo. Portanto $f \vee g$ não existe em $E(\mathbb{R})$, donde concluímos que $(E(\mathbb{R}), \leq)$ não é um reticulado.

A menos de menção em contrário, quando nos referirmos ao espaço de Riesz $\mathbb{R}^n$ estaremos considerando em $\mathbb{R}^n$, além das operações de soma e produto por escalar usuais, a ordem definida no Exemplo 1.1.2 (1).

Nas duas próximas proposições apresentaremos algumas identidades que relacionam a estrutura de $\mathbb{R}$ -espaço vetorial de um espaço de Riesz com o fato dele ser um reticulado.

Proposição 1.1.3. *Seja X um espaço de Riesz. Se $x, y, z \in X$ tem-se*

1. $x \wedge y = -\left((-x) \vee (-y)\right)$;
2. $(x \vee y) + z = (x + z) \vee (y + z)$;
3. $(x \wedge y) + z = (x + z) \wedge (y + z)$;
4. $\alpha(x \vee y) = (\alpha x) \vee (\alpha y)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$;
5. $\alpha(x \wedge y) = (\alpha x) \wedge (\alpha y)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$;
6. $x + y = (x \wedge y) + (x \vee y)$.

DEMONSTRAÇÃO. 1. De $x \wedge y \leq x$ e $x \wedge y \leq y$, temos, por (1.2), que

$$-x \leq -(x \wedge y) \quad \text{e} \quad -y \leq -(x \wedge y).$$

Logo $(-x) \vee (-y) \leq -(x \wedge y)$, e assim, por (1.2), $x \wedge y \leq -\left((-x) \vee (-y)\right)$. Por outro lado, observando que

$$-x \leq (-x) \vee (-y) \quad \text{e} \quad -y \leq (-x) \vee (-y),$$

segue, de (1.2), que

$$-\left((-x) \vee (-y)\right) \leq x \quad \text{e} \quad -\left((-x) \vee (-y)\right) \leq y.$$

Com isso, $-\left((-x) \vee (-y)\right) \leq x \wedge y$. Portanto 1. é verdadeira.

2. Da Definição 1.1.1 (ii), temos que

$$x + z \leq (x \vee y) + z \quad \text{e} \quad y + z \leq (x \vee y) + z.$$

Logo $(x + z) \vee (y + z) \leq (x \vee y) + z$. Por outro lado,

$$x + z \leq (x + z) \vee (y + z) \quad \text{e} \quad y + z \leq (x + z) \vee (y + z),$$

e assim, da Definição 1.1.1 (ii), temos

$$x = (x + z) - z \leq \left((x + z) \vee (y + z)\right) - z \quad \text{e} \quad y = (y + z) - z \leq \left((x + z) \vee (y + z)\right) - z.$$

Portanto $x \vee y \leq \left((x + z) \vee (y + z)\right) - z$, ou seja,

$$(x \vee y) + z \leq (x + z) \vee (y + z).$$

Assim concluimos que 2. é verdadeira.

3. Usando as afirmações 1. e 2. temos

$$\begin{aligned} (x \wedge y) + z &= -\left((-x) \vee (-y)\right) + z \\ &= -\left[\left((-x) \vee (-y)\right) + (-z)\right] \\ &= -\left[\left(-(x + z)\right) \vee \left(-(y + z)\right)\right] \\ &= (x + z) \wedge (y + z), \end{aligned}$$

e assim provamos 3.

4. A igualdade é imediata no caso em que $\alpha = 0$. Suponhamos $\alpha > 0$. Da Definição 1.1.1 (iii), temos que $\alpha x \leq \alpha(x \vee y)$ e $\alpha y \leq \alpha(x \vee y)$, e assim

$$(\alpha x) \vee (\alpha y) \leq \alpha(x \vee y).$$

Portanto, para concluir 4. basta provar que $\alpha(x \vee y) \leq (\alpha x) \vee (\alpha y)$. Para isto, note que, da Definição 1.1.1 (iii), tem-se

$$x = \frac{1}{\alpha}(\alpha x) \leq \frac{1}{\alpha}\left((\alpha x) \vee (\alpha y)\right) \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{\alpha}(\alpha y) \leq \frac{1}{\alpha}\left((\alpha x) \vee (\alpha y)\right).$$

Com isso, $x \vee y \leq \frac{1}{\alpha}\left((\alpha x) \vee (\alpha y)\right)$, ou seja,

$$\alpha(x \vee y) \leq \left((\alpha x) \vee (\alpha y)\right).$$

5. Usando as afirmações 1. e 4. temos que

$$\begin{aligned} \alpha(x \wedge y) &= -\alpha\left((-x) \vee (-y)\right) \\ &= -\left((- \alpha x) \vee (- \alpha y)\right) = (\alpha x) \wedge (\alpha y), \end{aligned}$$

o que prova 5.

6. Das afirmações 1. e 2. segue que

$$\begin{aligned} (x + y) - (x \wedge y) &= (x + y) + \left((-x) \vee (-y)\right) \\ &= (x + y - x) \vee (x + y - y) \\ &= y \vee x = x \vee y. \end{aligned}$$

Portanto $x + y = (x \wedge y) + (x \vee y)$. ■

Proposição 1.1.4. *Seja X um espaço de Riesz. Se $x, y \in X$ tem-se*

$$1. \quad x + y + |x - y| = 2(x \vee y);$$

$$2. \quad x + y - |x - y| = 2(x \wedge y);$$

$$3. \quad x = x^+ - x^-;$$

$$4. \quad |x| = x^+ + x^-;$$

5. $x^+ \wedge x^- = 0$.

DEMONSTRAÇÃO. 1. Pela Proposição 1.1.3 (2) e (4), tem-se que

$$\begin{aligned} x + y + |x - y| &= (x + y) + \left((x - y) \vee (-(x - y)) \right) \\ &= (x + y + x - y) \vee (x + y + y - x) = (2x) \vee (2y) = 2(x \vee y), \end{aligned}$$

o que prova 1.

2. Usando a Proposição 1.1.3 (1), (3) e (5), obtem-se

$$\begin{aligned} x + y - |x - y| &= (x + y) - \left((x - y) \vee (-(x - y)) \right) \\ &= (x + y) + \left((-(x - y)) \wedge (x - y) \right) \\ &= (x + y + y - x) \wedge (x + y + x - y) \\ &= (2y) \wedge (2x) = 2(y \wedge x), \end{aligned}$$

ou seja, $x + y - |x - y| = 2(x \wedge y)$.

3. Pela Proposição 1.1.3 (2), temos

$$x + x^- = x + ((-x) \vee 0) = (x - x) \vee (x + 0) = 0 \vee x = x^+,$$

e assim $x = x^+ - x^-$.

4. Pela afirmação 3. e pela Proposição 1.1.3 (2) e (4) temos

$$\begin{aligned} x^+ + x^- &= (x + x^-) + x^- = x + 2x^- \\ &= x + 2((-x) \vee 0) \\ &= x + ((-2x) \vee 0) = (x - 2x) \vee (x + 0), \end{aligned}$$

ou seja, $x^+ + x^- = (-x) \vee x = |x|$.

5. Pela Proposição 1.1.3 (6) e da afirmação 4., temos que

$$x^+ \wedge x^- = (x^+ + x^-) - (x^+ \vee x^-) = |x| - (x^+ \vee x^-).$$

Portanto, para concluir 5., basta mostrar que $x^+ \vee x^- = |x|$.

Observando que $0 \leq x^+$ e $0 \leq x^-$ segue, da afirmação 4., que $x^+ \leq |x|$ e $x^- \leq |x|$. Logo $x^+ \vee x^- \leq |x|$. Por outro lado, $|x| \leq x^+ \vee x^-$, pois, $x \leq x \vee 0$, $-x \leq (-x) \vee 0$ e por (1.4), tem-se que

$$|x| = x \vee (-x) \leq (x \vee 0) \vee ((-x) \vee 0) = x^+ \vee x^-.$$

Com isso concluimos que $|x| = x^+ \vee x^-$, o que prova 5. ■

Na próxima proposição apresentaremos algumas propriedades pertinentes ao módulo definido neste contexto. Veremos que ele se comporta de modo semelhante ao valor absoluto de um número real. Note que é de se esperar esse comportamento, pois no caso em que o espaço de Riesz é $\mathbb{R}$ tem-se, da Proposição 1.1.4 (4), que

$$|x| = x^+ + x^- = \max\{x, 0\} + \max\{-x, 0\} = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

ou seja, o módulo de um número real coincide com seu valor absoluto. Por esse motivo representaremos por $|x|$ tanto o módulo quanto o valor absoluto do número real x .

Proposição 1.1.5. *Seja X um espaço de Riesz. Se $x, y, z \in X$ tem-se*

1. $0 \leq |x|$;
2. $-|x| \leq x \leq |x|$;
3. se $0 \leq x$, então $|x| = x$;
4. $|x| = 0$ se, e somente se, $x = 0$;
5. $|\alpha x| = |\alpha| |x|$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$;
6. $|x| \leq |z|$ se, e somente se, $-|z| \leq x \leq |z|$;

$$7. |x + y| \leq |x| + |y|;$$

$$8. ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

DEMONSTRAÇÃO. 1. Basta observar que $0 \leq x^+$ e $0 \leq x^-$, donde, por (1.1) e da Proposição 1.1.4 (4), temos $0 \leq x^+ + x^- = |x|$.

2. Note que $x \leq x \vee (-x) = |x|$ e $-x \leq x \vee (-x) = |x|$. Dessa forma, $-|x| \leq x \leq |x|$, onde a primeira desigualdade decorre de (1.2).

3. Da afirmação 2. segue que $x \leq |x|$. Portanto, para concluir 3., basta mostrar que, se $0 \leq x$, então $|x| \leq x$.

Note que, se $0 \leq x$ então, por (1.2), temos que $-x \leq 0 \leq x$ e assim, aplicando (1.3),

$$|x| = x \vee (-x) \leq x \vee x = x,$$

donde concluímos que 3. é verdadeira.

4. É claro que $x = 0$ implica que $|x| = 0$. Por outro lado, se $|x| = 0$, então, da afirmação 2., obtem-se que $x = 0$.

5. No caso em que $\alpha \geq 0$ temos, pela Proposição 1.1.3 (4), que

$$|\alpha x| = (\alpha x) \vee (-\alpha x) = \alpha (x \vee (-x)) = \alpha |x| = |\alpha| |x|,$$

e no caso em que $\alpha < 0$, novamente pela proposição 1.1.3 (4), temos

$$\begin{aligned} |\alpha x| &= (\alpha x) \vee (-\alpha x) \\ &= ((-\alpha)(-x)) \vee ((-\alpha)x) \\ &= -\alpha ((-x) \vee x) = -\alpha |x| = |\alpha| |x|. \end{aligned}$$

Portanto $|\alpha x| = |\alpha| |x|$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

6. Supondo que $|x| \leq |z|$ temos, por (1.2), que $-|z| \leq -|x|$ e assim, da afirmação 2., segue que

$$-|z| \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq |z|.$$

Por outro lado, se $-|z| \leq x \leq |z|$, então, por (1.2), temos que $-x \leq |z|$. Logo $x \vee (-x) \leq |z|$, ou seja, $|x| \leq |z|$.

7. Da afirmação 2., tem-se que $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$. Dessa forma, por (1.1), obtem-se que

$$-(|x| + |y|) = -|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|,$$

e assim, pela afirmação 6., conclui-se que $|x + y| \leq |x| + |y|$.

8. Usando as afirmações 5. e 7. temos

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y| \quad \text{e} \quad |y| = |(y - x) + x| \leq |y - x| + |x| = |x - y| + |x|,$$

donde $|x| - |y| \leq |x - y|$ e $-(|x| - |y|) = |y| - |x| \leq |x - y|$. Logo

$$(|x| - |y|) \vee (-(|x| - |y|)) \leq |x - y|$$

isto é, $||x| - |y|| \leq |x - y|$, o que prova 8. ■

Para elementos não-negativos de um espaço de Riesz temos o seguinte resultado.

Proposição 1.1.6. *Seja X um espaço de Riesz. Para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que, para quaisquer $z, x_k \in X^+$, $1 \leq k \leq n$, são verdadeiras as seguintes relações:*

1. $z \wedge \sum_{k=1}^n x_k \leq \sum_{k=1}^n (z \wedge x_k);$
2. $z \wedge \sum_{k=1}^n x_k = z \wedge \sum_{k=1}^n (z \wedge x_k).$

DEMONSTRAÇÃO. 1. Mostraremos por indução sobre n . É claro que o resultado vale se $n = 1$. Suponhamos válido para somas de $n - 1$ parcelas. Mostraremos que o resultado é verdadeiro para uma soma com n parcelas.

Da Proposição 1.1.3 (6), temos

$$\begin{aligned} z \wedge \sum_{k=1}^n x_k &= \left(z \wedge \sum_{k=1}^n x_k \right) + \left(z \vee \sum_{k=1}^n x_k \right) - \left(z \vee \sum_{k=1}^n x_k \right) \\ &= \left(z + \sum_{k=1}^n x_k \right) - \left(z \vee \sum_{k=1}^n x_k \right). \end{aligned}$$

Notemos que, de $x_k \in X^+$, para $1 \leq k \leq n$, segue que $x_n \leq \sum_{k=1}^n x_k$, e assim, por (1.2) e (1.3), temos que $-\left(z \vee \sum_{k=1}^n x_k \right) \leq -(z \vee x_n)$. Logo

$$z \wedge \sum_{k=1}^n x_k \leq \left(z + \sum_{k=1}^n x_k \right) - (z \vee x_n) = (z + x_n) + \sum_{k=1}^{n-1} x_k - (z \vee x_n),$$

e pelo fato de $z + x_n = (z \wedge x_n) + (z \vee x_n)$ (Proposição 1.1.3 (6)) concluímos que

$$z \wedge \sum_{k=1}^n x_k \leq (z \wedge x_n) + \sum_{k=1}^{n-1} x_k,$$

ou seja,

$$\left(z \wedge \sum_{k=1}^n x_k \right) - (z \wedge x_n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} x_k. \quad (1.5)$$

Como $z, x_n \in X^+$ temos que $0 \leq z \wedge x_n$, e portanto

$$\left(z \wedge \sum_{k=1}^n x_k \right) - (z \wedge x_n) \leq z \wedge \sum_{k=1}^n x_k \leq z. \quad (1.6)$$

De (1.5) e (1.6) concluímos que

$$\left(z \wedge \sum_{k=1}^n x_k \right) - (z \wedge x_n) \leq z \wedge \sum_{k=1}^{n-1} x_k,$$

ou seja,

$$z \wedge \sum_{k=1}^n x_k \leq (z \wedge x_n) + \left(z \wedge \sum_{k=1}^{n-1} x_k \right),$$

donde, pela hipótese de indução, obtemos

$$z \wedge \sum_{k=1}^n x_k \leq (z \wedge x_n) + \sum_{k=1}^{n-1} (z \wedge x_k) = \sum_{k=1}^n (z \wedge x_k).$$

Portanto 1. é verdadeira.

2. De $z \wedge \sum_{k=1}^n x_k \leq z$ e de 1., segue que

$$z \wedge \sum_{k=1}^n x_k \leq z \wedge \sum_{k=1}^n (z \wedge x_k).$$

Como $z \wedge x_k \leq x_k$, para todo $1 \leq k \leq n$, temos, por (1.3), que

$$z \wedge \sum_{k=1}^n (z \wedge x_k) \leq z \wedge \sum_{k=1}^n x_k.$$

Logo a afirmação 2 é verdadeira. ■

Dado um subconjunto não vazio de um espaço Riesz, é natural se perguntar quando existem o supremo e o ínfimo desse conjunto, ou seja, quando se pode falar em um conceito de completude (Definição 1.1.10). Antes porém, lembremos os conceitos de supremo e ínfimo de um subconjunto de um conjunto parcialmente ordenado.

Sejam X um conjunto parcialmente ordenado pela relação $\leq$ e $A \subset X$, não vazio. Dizemos que

- (i) *$x \in X$ é uma cota superior [respectivamente, cota inferior] de A se, para todo $y \in A$, tem-se que $y \leq x$ [resp. $x \leq y$];*
- (ii) *A admite máximo [resp. mínimo], se existe $x \in A$ tal que x é uma cota superior [resp. cota inferior] de A . Esse elemento x é único e será denotado por $\max A$ [resp. $\min A$];*

- (iii) A é limitado superiormente [resp. limitado inferiormente] se existe $x \in X$ que é uma cota superior [resp. cota inferior] de A ;
- (iv) A é limitado se é limitado superiormente e inferiormente;
- (v) A admite supremo se A for limitado superiormente e existir $z \in X$ tal que z é a menor das cotas superiores de A , isto é, z é uma cota superior de A e se $x \in X$ é uma cota superior de A , então $z \leq x$. Esse elemento z é único e será denotado por $\sup A$;
- (vi) A admite ínfimo se A for limitado inferiormente e existir $w \in X$ tal que w é a maior das cotas inferiores de A , isto é, w é uma cota inferior de A e se $x \in X$ é uma cota inferior de A , então $x \leq w$. Esse elemento w é único e será denotado por $\inf A$.

De (ii), (v) e (vi) tem-se que

$$A \text{ admite máximo } z \text{ se, e somente se, } A \text{ admite supremo } z \text{ e } z \in A; \quad (1.7)$$

$$A \text{ admite mínimo } w \text{ se, e somente se, } A \text{ admite ínfimo } w \text{ e } w \in A. \quad (1.8)$$

Se X é um reticulado e $A \subset X$, não vazio, é finito, então sempre existe $\sup A$ e $\inf A$, mas A pode não admitir máximo nem mínimo. Por exemplo, se $X = \mathbb{R}^2$ (Exemplo 1.1.2 (1)) e $A := \{(1, 1), (2, 0)\}$, então A não admite máximo, não admite mínimo, $\sup A = (2, 1)$ e $\inf A = (1, 0)$. Notemos ainda que, para quaisquer $x, y, z \in X$ tem-se que

$$x \wedge y = \inf\{x, y\} \quad ; \quad x \vee y = \sup\{x, y\};$$

$$(x \vee y) \vee z = \sup\{x, y, z\} = x \vee (y \vee z);$$

$$(x \wedge y) \wedge z = \inf\{x, y, z\} = x \wedge (y \wedge z).$$

Convém observar que, se X é um espaço de Riesz, $x \in X$ e $A, B \subset X$, não vazios, tem-se, com prova análoga ao caso real, as seguintes afirmações:

*se existe o ínfimo de A [respectivamente, supremo de $-A$], então
existe o supremo de $-A$ [resp. ínfimo de A] e*

$$\inf A = -\sup(-A); \quad (1.9)$$

se existe o supremo de A , então existe o supremo de $x + A$ e

$$\sup(x + A) = x + \sup A; \quad (1.10)$$

se existe o ínfimo de A , então existe o ínfimo de $x + A$ e

$$\inf(x + A) = x + \inf A; \quad (1.11)$$

se existem os supremos de A e B , então existe o supremo de $A + B$ e

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B; \quad (1.12)$$

se existem os ínfimos de A e B , então existe o ínfimo de $A + B$ e

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B; \quad (1.13)$$

se $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$ e existe o supremo de A , então existe o supremo de αA e

$$\sup(\alpha A) = \alpha \sup A; \quad (1.14)$$

se $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$ e existe o ínfimo de A , então existe o ínfimo de αA e

$$\inf(\alpha A) = \alpha \inf A. \quad (1.15)$$

Do fato de X ser um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial, além das relações (1.14) e (1.15), pode-se trabalhar com conjuntos da forma $x A$, onde $x \in X$ e $A \subset \mathbb{R}$, não vazio. Para esses conjuntos tem-se o seguinte:

Proposição 1.1.7. *Sejam X um espaço de Riesz e $A \subset \mathbb{R}$, não vazio. São verdadeiras as seguintes afirmações:*

1. *se $x \in X^+$ e existe o máximo de A , então existe o máximo de $x A$ e*

$$\max(x A) = x \max A.$$

2. *se $x \in X^+$ e existe o mínimo de A , então existe o mínimo de $x A$ e*

$$\min(x A) = x \min A.$$

DEMONSTRAÇÃO. Para provar 2. basta aplicar 1., observando que, por (1.7), (1.8) e (1.9), tem-se que, se $B \subset X$ e existe o mínimo de B [respectivamente, máximo de $-B$], então existe o máximo de $-B$ [resp. mínimo de B] e $\min B = -\max(-B)$.

Provaremos que 1. é verdadeira.

Seja $M \in \mathbb{R}$ tal que $M = \max A$. Dessa forma, $a \leq M$, para todo $a \in A$, ou seja, $0 \leq M - a$, para todo $a \in A$. Com isso, uma vez que $x \in X^+$, temos que $0 \leq x(M - a)$ e portanto

$$x a \leq x M, \quad \text{para todo } a \in A.$$

Observando que $x M \in x A$, pois $M \in A$, segue que

$$\max(x A) = x M = x \max A,$$

o que prova 1. ■

Note que na Proposição 1.1.7 não podemos substituir máximo [respectivamente, mínimo] por supremo [resp. ínfimo]. De fato, se $X = \mathbb{R}^2$ com a ordem lexicográfica (Exemplo 1.1.2 (3)), $A := [0, 1[$ e $x := (1, 0)$, então $x \in X^+$ e $x A = \{(a, 0) \mid a \in [0, 1[\}$ não admite supremo visto que $(1, c)$ é cota superior de $x A$, para todo $c \in \mathbb{R}$.

Se X é um espaço de Riesz, $x \in X$ e $A \subset X$, não vazio, veremos o que se pode afirmar sobre a existência do supremo e/ou do ínfimo dos conjuntos $\{x \vee y \mid y \in A\}$ e $\{x \wedge y \mid y \in A\}$ quando o conjunto A admite supremo e/ou ínfimo.

Proposição 1.1.8. *Sejam X um espaço de Riesz, $x \in X$ e $A \subset X$, não vazio. São verdadeiras as seguintes afirmações:*

1. *se existe o supremo de A , então existem os supremos dos conjuntos $\{x \vee y \mid y \in A\}$, $\{x \wedge y \mid y \in A\}$ e tem-se que*

$$\sup\{x \vee y \mid y \in A\} = x \vee \sup A; \quad (1.16)$$

$$\sup\{x \wedge y \mid y \in A\} = x \wedge \sup A; \quad (1.17)$$

2. *se existe o ínfimo de A , então existem os ínfimos dos conjuntos $\{x \vee y \mid y \in A\}$, $\{x \wedge y \mid y \in A\}$ e tem-se que*

$$\inf\{x \vee y \mid y \in A\} = x \vee \inf A; \quad (1.18)$$

$$\inf\{x \wedge y \mid y \in A\} = x \wedge \inf A. \quad (1.19)$$

DEMONSTRAÇÃO. 1. Para provar (1.16), note que, de (1.3), tem-se que $x \vee \sup A$ é uma cota superior de $\{x \vee y \mid y \in A\}$.

Seja $z \in X$ tal que $x \vee y \leq z$, para todo $y \in A$. Dessa forma, $y \leq z$, para todo $y \in A$, e portanto $\sup A \leq z$.

Como $x \leq z$ e $\sup A \leq z$ segue que $x \vee \sup A \leq z$. Logo (1.16) é verdadeira.

Defina $B := \{x \wedge y \mid y \in A\}$. Por (1.3), é claro que $x \wedge \sup A$ é cota superior de B . Seja $z \in X$ uma cota superior qualquer de B .

Note que, pela Proposição 1.1.3 (3), temos

$$x \wedge \sup A = \left((x - \sup A) \wedge 0 \right) + \sup A.$$

Portanto, para obter (1.17), basta provar que

$$\sup A \leq z - \left((x - \sup A) \wedge 0 \right), \quad (1.20)$$

pois assim $x \wedge \sup A \leq z$.

Seja $y \in A$. Então, por (1.2) e pela Definição 1.1.1 (ii), temos que $x - \sup A \leq x - y$, donde, por (1.3), segue que

$$(x - \sup A) \wedge 0 \leq (x - y) \wedge 0.$$

Mas, pela Proposição 1.1.3 (3), temos que $((x - y) \wedge 0) + y = x \wedge y$, e assim

$$\left((x - \sup A) \wedge 0 \right) + y \leq \left((x - y) \wedge 0 \right) + y = x \wedge y \leq z,$$

ou seja, $y \leq z - \left((x - \sup A) \wedge 0 \right)$.

Como $y \in A$ é arbitrário, segue que

$$\sup A \leq z - \left((x - \sup A) \wedge 0 \right),$$

o que prova (1.20).

2. Aplicando (1.9), a Proposição 1.1.3 (1) e a afirmação 1., temos que

$$\begin{aligned} x \wedge \inf A &= - \left((-x) \vee (-\inf A) \right) \\ &= - \left((-x) \vee \sup(-A) \right) \\ &= - \sup \{ (-x) \vee (-y) \mid y \in A \} \\ &= - \sup \{ -(x \wedge y) \mid y \in A \} = \inf \{ x \wedge y \mid y \in A \}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \vee \inf A &= x \vee (-\sup(-A)) \\ &= - \left((-x) \wedge \sup(-A) \right) \\ &= - \sup \{ (-x) \wedge (-y) \mid y \in A \} \\ &= - \sup \{ -(x \vee y) \mid y \in A \} = \inf \{ x \vee y \mid y \in A \}; \end{aligned}$$

e com isso concluímos que 2. é verdadeira. ■

Os resultados (1.17) e (1.18) são conhecidos na literatura como Leis Distributivas. Decorre da prova da Proposição 1.1.8 (2) que, se (1.17) for verdadeira, então (1.18) também o será. Da Proposição 1.1.8, temos o seguinte fato.

Corolário 1.1.9. *Seja X um espaço de Riesz. Então X é um reticulado distributivo, isto é, dados quaisquer $x, y, z \in X$ tem-se que $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Basta aplicar (1.17) para $A = \{y, z\}$. ■

Um dos conceitos importantes em Análise é o conceito de completude. Definiremos a seguir esse conceito no contexto de espaços de Riesz.

Definição 1.1.10. *Seja X um espaço de Riesz. Dizemos que*

- (i) *X é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo se todo subconjunto não vazio, enumerável e limitado superiormente admite supremo;*
- (ii) *X é um espaço de Riesz Dedekind completo se todo subconjunto não vazio e limitado superiormente admite supremo.*

É claro que o conjunto dos números reais é um espaço de Riesz Dedekind completo. A partir desse fato, tem-se que os espaços de Riesz $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^Y$ definidos no Exemplo 1.1.2 são espaços de Riesz Dedekind completos. De modo geral, se $(X, \leq)$ é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo qualquer [respectivamente, Dedekind completo], então os espaços de Riesz X^n , $\mathcal{M}_n(X)$ e X^Y definidos no Exemplo 1.1.2 são espaços de Riesz Dedekind σ -completos [resp. Dedekind completos].

Convém destacar que num contexto mais geral, isto é, se X é somente um conjunto parcialmente ordenado, diz-se que X é Dedekind σ -completo se todo subconjunto não vazio, enumerável, limitado superiormente admite supremo e todo subconjunto não vazio, enumerável, limitado inferiormente admite ínfimo. Contudo, tal definição, no caso em que X é um espaço de Riesz, é equivalente à Definição 1.1.10 (i) como veremos na proposição a seguir.

Proposição 1.1.11. *Seja X um espaço de Riesz. Tem-se que*

1. *X é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo se, e somente se, todo subconjunto enumerável, não vazio e limitado inferiormente admite ínfimo;*
2. *X é um espaço de Riesz Dedekind completo se, e somente se, todo subconjunto não vazio e limitado inferiormente admite ínfimo.*

DEMONSTRAÇÃO. Basta observar que, se $Y \subset X$, então Y é limitado inferiormente se, e somente se, $-Y$ é limitado superiormente, e aplicar (1.9). ■

Para um espaço de Riesz define-se, de modo análogo ao caso dos números reais, o conceito de espaço de Riesz Arquimediano, isto é:

Definição 1.1.12. *Seja X um espaço de Riesz. Dizemos que X é um espaço de Riesz Arquimediano se, para quaisquer $x, y \in X$ tais que $n y \leq x$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $y \leq 0$.*

Como consequência de $\mathbb{R}$ ser um espaço de Riesz Arquimediano, tem-se que os espaços de Riesz $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^Y$ e $\mathcal{C}(Y; \mathbb{R})$ definidos no Exemplo 1.1.2 são espaços de Riesz Arquimedianos. No entanto, $\mathbb{R}^2$ com a ordem lexicográfica (Exemplo 1.1.2 (3)) não é um

espaço de Riesz Arquimediano. De fato, se $x = (1, 0)$ e $y = (0, 1)$, então $ny \leq x$, para todo $n \in \mathbb{N}$, mas $(0, 0) \leq y$ e $y \neq (0, 0)$.

De modo geral, se $(X, \leq)$ é um espaço de Riesz Arquimediano, então os espaços de Riesz X^n , $\mathcal{M}_n(X)$ e X^Y definidos no Exemplo 1.1.2 são espaços de Riesz Arquimedianos.

No Teorema 1.1.13 apresentaremos uma relação entre os conceitos de completude e de Arquimediano em um espaço de Riesz.

Teorema 1.1.13. *Se X é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo, então X é um espaço de Riesz Arquimediano.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $x, y \in X$, tais que $ny \leq x$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como o conjunto $A := \{ny \mid n \in \mathbb{N}\}$ é enumerável, X é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo e x é uma cota superior de A , existe $z \in X$, tal que $z = \sup A$.

Do fato de X ser um espaço de Riesz Dedekind σ -completo e z ser uma cota superior do conjunto enumerável $y + A = \{(n+1)y \mid n \in \mathbb{N}\} \subset A$, tem-se que existe $\sup(y + A)$. Além disso, $\sup(y + A) \leq z$. Dessa forma, por (1.10), obtem-se

$$y + \sup A = \sup(y + A) \leq z = \sup A.$$

Logo $y \leq 0$, e portanto X é um espaço de Riesz Arquimediano. ■

O Teorema 1.1.13 é uma ferramenta útil para concluir que um espaço de Riesz não é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo. Por exemplo, vimos que $\mathbb{R}^2$ munido com as operações de soma e produto por escalar usuais e com a ordem lexicográfica não é um espaço de Riesz Arquimediano, logo ele não pode ser um espaço de Riesz Dedekind σ -completo.

Na próxima seção trataremos de seqüências de elementos de um espaço de Riesz e

a partir desse estudo apresentaremos caracterizações para espaços de Riesz Dedekind σ -completos e espaços de Riesz Arquimedianos. Dentre os resultados que apresentaremos, veremos que a recíproca do Teorema 1.1.13, em geral, é falsa (Exemplo 1.2.7).

1.2 Seqüências de elementos de um espaço de Riesz

Iniciaremos esta seção com um estudo de seqüências não-crescentes e, com auxílio dessas, apresentaremos um conceito de convergência para uma seqüência qualquer de elementos de um espaço de Riesz, que é denotado na literatura por (o) -convergência (Definição 1.2.8). No caso de seqüências de números reais, veremos como tal conceito de convergência se relaciona com a convergência usual de $\mathbb{R}$. Faremos também um breve estudo da convergência de séries em um espaço de Riesz.

Além do conceito de (o) -convergência estudaremos um outro conceito de convergência, chamado de (D) -convergência (Definição 1.2.22), que nos parece, de certa forma, mais flexível que o anterior. Provaremos que, sob certas condições, esses dois conceitos de convergência são equivalentes (Corolário 1.2.27).

Como no caso de seqüências de números reais, se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de elementos de um espaço de Riesz X , dizemos que

- (i) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-decrescente se $x_n \leq x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
- (ii) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-crescente se $x_{n+1} \leq x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
- (iii) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-crescente ou não-decrescente;
- (iv) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada inferiormente se existe $z \in X$ tal que $z \leq x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
- (v) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada superiormente se existe $w \in X$ tal que $x_n \leq w$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
- (vi) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada inferiormente e superiormente.

É fácil verificar, a partir da Proposição 1.1.5 (6), que

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada se, e somente se, existe $u \in X$ tal que $|x_n| \leq u$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Convencionaremos que, se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de elementos de um espaço de Riesz X tal que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada inferiormente e existe $z := \inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, então z será denotado por $\inf_{n \in \mathbb{N}} x_n$ ou $\bigwedge_{n=1}^{\infty} x_n$. Por outro lado, se a seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada superiormente e existe $w := \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, então w será denotado por $\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$ ou $\bigvee_{n=1}^{\infty} x_n$.

Notação 1.2.1. *Sejam X um espaço de Riesz e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência monótona de elementos de X .*

- (i) *Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-decrescente, então escreveremos $x_n \nearrow z$ quando $n \rightarrow \infty$ (ou simplesmente $x_n \nearrow z$) para dizer que existe $\bigvee_{n=1}^{\infty} x_n$ e $z = \bigvee_{n=1}^{\infty} x_n$.*
- (ii) *Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-crescente, então escreveremos $x_n \searrow z$ quando $n \rightarrow \infty$ (ou simplesmente $x_n \searrow z$) para dizer que existe $\bigwedge_{n=1}^{\infty} x_n$ e $z = \bigwedge_{n=1}^{\infty} x_n$.*

As propriedades que apresentaremos a seguir são análogas às propriedades de seqüências monótonas de números reais.

Proposição 1.2.2. *Sejam X um espaço de Riesz, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seqüências não-crescentes de elementos de X e $x, y \in X$. São verdadeiras as seguintes afirmações:*

1. *se $x_n \searrow x$ quando $n \rightarrow \infty$ e $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é uma subsequência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, então $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é não-crescente e $x_{n_k} \searrow x$ quando $k \rightarrow \infty$;*
2. *se $x_n \searrow x$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, então $(\alpha x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-crescente e $\alpha x_n \searrow \alpha x$;*

3. se $x_n \searrow x$ e $y_n \searrow y$, então $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-crescente e $x_n + y_n \searrow x + y$;

4. se $x_n \searrow x$ e $y_n \searrow y$, então $(x_n \vee y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-crescente e $x_n \vee y_n \searrow x \vee y$;

5. se $x_n \searrow x$ e $y_n \searrow y$, então $(x_n \wedge y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-crescente e $x_n \wedge y_n \searrow x \wedge y$.

DEMONSTRAÇÃO. 1. Observando que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-crescente e $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é uma subsequência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, é claro que $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é não-crescente. Além disso, $x \leq x_{n_k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$, pois $\{x_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\} \subset \{x_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ e $\bigwedge_{m=1}^{\infty} x_m = x$.

Seja $z \in X$ tal que $z \leq x_{n_k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Provaremos que $z \leq x$.

Dado $m \in \mathbb{N}$ existe $k = k(m) \in \mathbb{N}$ de modo que $n_k \geq m$. Dessa forma, $z \leq x_{n_k} \leq x_m$, pois $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-crescente.

Como $m \in \mathbb{N}$ é arbitrário, temos que $z \leq x_m$, para todo $m \in \mathbb{N}$, donde segue que $z \leq x$. Portanto $\bigwedge_{k=1}^{\infty} x_{n_k} = x$, o que conclui 1.

2. Por hipótese, $x_{n+1} \leq x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\alpha \geq 0$ e X é um espaço de Riesz temos que $\alpha x_{n+1} \leq \alpha x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto $(\alpha x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-crescente. Além disso, por (1.15),

$$\alpha x = \alpha \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} (\alpha x_n),$$

donde concluímos que $\alpha x_n \searrow \alpha x$.

3. Segue da hipótese que

$$x \leq x_{n+1} \leq x_n \quad \text{e} \quad y \leq y_{n+1} \leq y_n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Dessa forma, por (1.1), temos

$$x + y \leq x_{n+1} + y_{n+1} \leq x_n + y_n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Logo $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-crescente e $x + y$ é uma cota inferior de $\{x_n + y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Seja $z \in X$ tal que $z \leq x_n + y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Provaremos que $z \leq x + y$ e assim

3. é verdadeira.

Fixe $m \in \mathbb{N}$. Note que, para $k \in \mathbb{N}$, $z \leq x_{m+k} + y_{m+k} \leq x_m + y_{m+k}$, ou seja,

$$z - x_m \leq y_{m+k}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Observando que $(y_{m+k})_{k \in \mathbb{N}}$ é uma subsequência de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ segue, da afirmação 1., que $(y_{m+k})_{k \in \mathbb{N}}$ é não-crescente e $y_{m+k} \searrow y$ quando $k \rightarrow \infty$. Com isso,

$$z - x_m \leq \bigwedge_{k=1}^{\infty} y_{m+k} = y,$$

e assim temos que $z \leq x_m + y$.

Como $m \in \mathbb{N}$ é arbitrário, temos que $z - y \leq x_m$, para todo $m \in \mathbb{N}$, e portanto $z - y \leq \bigwedge_{m=1}^{\infty} x_m = x$. Logo $z \leq x + y$.

4. Por hipótese, $x \leq x_{n+1} \leq x_n$ e $y \leq y_{n+1} \leq y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e assim, de (1.4),

$$x \vee y \leq x_{n+1} \vee y_{n+1} \leq x_n \vee y_n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

ou seja, $(x_n \vee y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-crescente e $x \vee y$ é uma cota inferior de $\{x_n \vee y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Seja $z \in X$ tal que $z \leq x_n \vee y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Fixado $m \in \mathbb{N}$, por (1.4), temos

$$z \leq x_{m+k} \vee y_{m+k} \leq x_m \vee y_{m+k}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Dessa forma,

$$z \leq \bigwedge_{k=1}^{\infty} (x_m \vee y_{m+k}) = x_m \vee \bigwedge_{k=1}^{\infty} y_{m+k},$$

onde a igualdade decorre de (1.18). Observando que $(y_{m+k})_{k \in \mathbb{N}}$ é uma subsequência de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ segue, da afirmação 1., que $\bigwedge_{k=1}^{\infty} y_{m+k} = y$, e assim $z \leq x_m \vee y$.

Como $m \in \mathbb{N}$ é arbitrário, aplicando novamente (1.18), tem-se que

$$z \leq \bigwedge_{m=1}^{\infty} (x_m \vee y) = \bigwedge_{m=1}^{\infty} (y \vee x_m) = y \vee \bigwedge_{m=1}^{\infty} x_m = y \vee x = x \vee y.$$

Portanto $\bigwedge_{n=1}^{\infty} (x_n \vee y_n) = x \vee y$, o que conclui 4.

5. Do fato de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ serem não-crescentes e da propriedade (1.4), segue que

$$x_{n+1} \wedge y_{n+1} \leq x_n \wedge y_n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

e portanto $(x_n \wedge y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-crescente. Além disso, novamente por (1.4), é claro que $x \wedge y \leq x_n \wedge y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja $z \in X$ uma cota inferior de $\{x_n \wedge y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Provaremos que $z \leq x \wedge y$ e com isso concluímos que 5. é verdadeira.

Fixe $m \in \mathbb{N}$. Para todo $k \in \mathbb{N}$ tem-se, por (1.4), que $z \leq x_{m+k} \wedge y_{m+k} \leq x_m \wedge y_{m+k}$. Dessa forma, observando que $(y_{m+k})_{k \in \mathbb{N}}$ é uma subsequência de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ segue, de (1.19) e da afirmação 1., que

$$z \leq \bigwedge_{k=1}^{\infty} (x_m \wedge y_{m+k}) = x_m \wedge \bigwedge_{k=1}^{\infty} y_{m+k} = x_m \wedge y.$$

Como $m \in \mathbb{N}$ é arbitrário, aplicando novamente (1.19), tem-se que

$$z \leq \bigwedge_{m=1}^{\infty} (x_m \wedge y) = y \wedge \bigwedge_{m=1}^{\infty} x_m = y \wedge x = x \wedge y. \quad \blacksquare$$

Proposição 1.2.3. *Sejam X um espaço de Riesz, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seqüências não-decrescentes de elementos de X e $x, y \in X$. São verdadeiras as seguintes afirmações:*

1. *se $x_n \nearrow x$ quando $n \rightarrow \infty$ e $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é uma subsequência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, então $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é não-decrescente e $x_{n_k} \nearrow x$ quando $k \rightarrow \infty$;*
2. *se $x_n \nearrow x$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, então $(\alpha x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-decrescente e $\alpha x_n \nearrow \alpha x$;*
3. *se $x_n \nearrow x$ e $y_n \nearrow y$, então $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-decrescente e $x_n + y_n \nearrow x + y$;*
4. *se $x_n \nearrow x$ e $y_n \nearrow y$, então $(x_n \vee y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-decrescente e $x_n \vee y_n \nearrow x \vee y$;*
5. *se $x_n \nearrow x$ e $y_n \nearrow y$, então $(x_n \wedge y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-decrescente e $x_n \wedge y_n \nearrow x \wedge y$.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam, para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n := -x_n$ e $b_n := -y_n$. Para concluir a prova basta aplicar a Proposição 1.2.2 às seqüências não-crescentes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e usar (1.9) e a Proposição 1.1.3 (1). ■

Uma caracterização para um espaço de Riesz Arquimediano pode ser obtida, como nos mostra o Teorema 1.2.4, a partir de seqüências monótonas.

Teorema 1.2.4. *Seja X um espaço de Riesz. São equivalentes as seguintes afirmações:*

1. X é um espaço de Riesz Arquimediano;

2. para todo $x \in X^+$ tem-se que a seqüência $\left(\frac{x}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-crescente e $\frac{x}{n} \searrow 0$.

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que X é um espaço de Riesz Arquimediano e seja $x \in X^+$. Para $n \in \mathbb{N}$ tem-se que $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \geq 0$ e assim $0 \leq \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)x = \frac{x}{n} - \frac{x}{n+1}$. Logo $\left(\frac{x}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-crescente.

Note que $0 \leq \frac{x}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, se $y \in X$ é tal que $y \leq \frac{x}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $ny \leq x$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como X é um espaço de Riesz Arquimediano segue que $y \leq 0$. Portanto $\bigwedge_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} = 0$, e assim $\frac{x}{n} \searrow 0$.

Provemos que 2. implica 1.

Sejam $x, y \in X$ tais que $ny \leq x$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $|x| \in X^+$ (Proposição 1.1.5 (1)), segue, de 2., que $\frac{|x|}{n} \searrow 0$. Note que, pela Proposição 1.1.5 (2), tem-se que $x \leq |x|$ e assim

$$y \leq \frac{x}{n} \leq \frac{|x|}{n}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Logo $y \leq \bigwedge_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n} = 0$, donde conclui-se que 1. é verdadeira. ■

No caso em que X é um espaço de Riesz Arquimediano pode-se substituir a afirmação 2. do Teorema 1.2.4 pelo seguinte resultado:

Proposição 1.2.5. *Sejam X um espaço de Riesz Arquimediano e $x \in X^+$. Se $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência não-crescente de números reais tal que $\inf_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon_n = 0$, então $(x \varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência não-crescente de elementos de X e $x \varepsilon_n \searrow 0$.*

DEMONSTRAÇÃO. Por hipótese, $x \in X^+$ e $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-crescente, ou seja, $\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $0 \leq x(\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1})$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e assim $(x \varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência não-crescente de elementos de X .

Note que $0 \leq x \varepsilon_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $x \in X^+$ e $\varepsilon_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja $y \in X$ uma cota inferior de $\{x \varepsilon_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Para concluir a prova, basta mostrar que $y \leq 0$.

Para todo $k \in \mathbb{N}$, como $\inf_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon_n = 0$, existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon_{n_k} < \frac{1}{k}$. Dessa forma, $x \varepsilon_{n_k} \leq \frac{x}{k}$. Logo

$$y \leq \frac{x}{k}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

De X ser um espaço de Riesz Arquimediano e $x \in X^+$ tem-se, pelo Teorema 1.2.4, que $\left(\frac{x}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ é não-crescente e $\frac{x}{k} \searrow 0$. Logo $y \leq \bigwedge_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k} = 0$, o que finaliza a prova. ■

A partir de seqüências monótonas, apresentaremos uma caracterização para os espaços de Riesz Dedekind σ -completos.

Teorema 1.2.6. *Seja X um espaço de Riesz. São equivalentes as seguintes afirmações:*

1. X é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo;
2. para toda seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não-decrescente e limitada superiormente de elementos de X , existe $x \in X$ tal que $x_n \nearrow x$;

3. para toda seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não-crescente e limitada inferiormente de elementos de X , existe $x \in X$ tal que $x_n \searrow x$.

DEMONSTRAÇÃO. De (1.9), observando que uma seqüência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-crescente e limitada inferiormente se, e somente se $(-a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-decrescente e limitada superiormente, segue que 2. e 3. são equivalentes. Além disso, pela Proposição 1.1.11 (1) e da definição de espaço de Riesz Dedekind σ -completo temos que 1. implica 2. e que 1. implica 3. Portanto para concluir a demonstração basta provar que 3. implica 1. Para isso utilizaremos a Proposição 1.1.11 (1).

Seja A um subconjunto não vazio de X , enumerável e limitado inferiormente.

Considere uma enumeração arbitrária de A , isto é, escreva $A = \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Para $n \in \mathbb{N}$, defina $x_n := \inf\{a_i \mid 1 \leq i \leq n\}$. Note que $x_{n+1} \leq x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $\{a_i \mid 1 \leq i \leq n\} \subset \{a_j \mid 1 \leq j \leq n+1\}$. Logo $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-crescente em X .

Como A é limitado inferiormente, existe $z \in X$ tal que $z \leq a_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Em particular, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $z \leq a_k$, $1 \leq k \leq n$, e com isso $z \leq x_n$. Portanto $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada inferiormente e assim, por 3., existe $x \in X$ tal que $x_n \searrow x$, ou seja,

$$x = \bigwedge_{n=1}^{\infty} x_n = \bigwedge_{k=1}^{\infty} a_k = \inf A.$$

Logo, pela Proposição 1.1.11 (1), concluímos que 1. é verdadeira. ■

O Teorema 1.1.13 nos diz que todo espaço de Riesz Dedekind σ -completo é um espaço de Riesz Arquimediano. Utilizando o Teorema 1.2.6 apresentaremos, no exemplo a seguir, um espaço de Riesz Arquimediano que não é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo.

Exemplo 1.2.7. O espaço de Riesz $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ definido no Exemplo 1.1.2 (6), substituindo Y por $[0, 1]$, é um espaço de Riesz Arquimediano mas não é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo.

De fato, como conseqüência de $\mathbb{R}$ ser um espaço de Riesz Arquimediano, segue que $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ também o é. Suponha, por absurdo, que $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ seja um espaço de Riesz Dedekind σ -completo. Considere a seqüência não-crescente $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ definida por

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ (n+1) \left(\frac{1}{2} - x \right) + 1 & \text{se } \frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \\ 0 & \text{se } \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Observando que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada inferiormente pela função identicamente nula existe, pelo Teorema 1.2.6, $g \in \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ tal que $f_n \searrow g$. Note que, $0 \leq g \leq 1$ e $g(x) = 0$, para todo $x \in]\frac{1}{2}, 1]$. Além disso, se para algum $a \in [0, \frac{1}{2}[$ tivermos $g(a) < 1$, então a função $h \in \mathbb{R}^{[0, 1]}$, dada por

$$h(x) := \begin{cases} \frac{g(a)+1}{2} & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{2} \right) \\ \left(\frac{g(a)+1}{2a-1} \right) (2x - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{2} \right) < x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

será um elemento de $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ satisfazendo $g(a) < h(a)$ e $h \leq f_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, teremos $h(a) \leq \left(\bigwedge_{n=1}^{\infty} f_n \right)(a) = g(a) < h(a)$, o que é uma contradição. Logo $g(x) = 1$, se $x \in]0, \frac{1}{2}[$, e $g(x) = 0$, se $x \in]\frac{1}{2}, 1]$, o que é um absurdo visto que g é contínua no ponto $\frac{1}{2}$. Com isso, $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ não satisfaz a condição (3) do Teorema 1.2.6 e portanto não é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo.

A partir daqui iremos estudar dois conceitos de convergência para uma seqüência de elementos de um espaço de Riesz. O primeiro, que apresentaremos a seguir, é conhecido na literatura como convergência da ordem ou, resumidamente, (o) -convergência.

Definição 1.2.8. *Sejam X um espaço de Riesz, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de X e $x \in X$. Dizemos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para x (ou $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (o) -converge para x), e*

escrevemos $x_n \xrightarrow{o} x$ quando $n \rightarrow \infty$ (ou simplesmente $x_n \xrightarrow{o} x$), se existe uma seqüência não-crescente $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X tal que

$$a_n \searrow 0 \quad \text{e} \quad |x_k - x| \leq a_k, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \quad (1.21)$$

O próximo resultado nos diz que a notação $x_n \xrightarrow{o} x$ faz sentido, isto é, uma seqüência de elementos de um espaço de Riesz não pode convergir para dois elementos distintos.

Proposição 1.2.9. *Sejam X um espaço de Riesz, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de X e $x, y \in X$. Se $x_n \xrightarrow{o} x$ e $x_n \xrightarrow{o} y$, então $x = y$.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue da hipótese que existem seqüências não-crescentes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X tais que $a_n \searrow 0$, $b_n \searrow 0$, e

$$|x_k - x| \leq a_k \quad \text{e} \quad |x_k - y| \leq b_k, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Dessa forma, pela Proposição 1.1.5 (7), temos que

$$|x - y| = |(x - x_n) + (x_n - y)| \leq |x - x_n| + |x_n - y| \leq a_n + b_n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

ou seja, $|x - y|$ é uma cota inferior de $\{a_n + b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Pela Proposição 1.2.2 (3), $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-crescente e $a_n + b_n \searrow 0$. Dessa forma, $|x - y| \leq \bigwedge_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = 0$. Como $0 \leq |x - y|$ (Proposição 1.1.5 (1)), segue que $|x - y| = 0$. Portanto, pela Proposição 1.1.5 (4), $x = y$. ■

Convém observar que, dada uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de um espaço de Riesz X e $x \in X$, usando que $|x_n| = |(x_n - x) + x| \leq |x_n - x| + |x|$, para todo $n \in \mathbb{N}$, (Proposição 1.1.5 (7)), tem-se o seguinte resultado:

$$\text{se } x_n \xrightarrow{o} x, \quad \text{então } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ é limitada.} \quad (1.22)$$

A equivalência que apresentaremos nos permite reescrever a Definição 1.2.8 substituindo (1.21) pela afirmação 2. da Proposição 1.2.10.

Proposição 1.2.10. *Sejam X um espaço de Riesz, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de X e $x \in X$. São equivalentes as seguintes afirmações:*

1. $x_n \xrightarrow{o} x$;

2. existem $n_0 \in \mathbb{N}$ e $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seqüência não-crescente de elementos de X , tais que

$$a_n \searrow 0 \quad \text{e} \quad |x_k - x| \leq a_k, \quad \text{para todo } k \geq n_0.$$

DEMONSTRAÇÃO. Para mostrar que 1. implica 2. basta tomar $n_0 = 1$ e uma seqüência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não-crescente de elementos de X satisfazendo (1.21). Provemos que 2. implica 1.

Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$ e $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência não-crescente de elementos de X tais que $a_n \searrow 0$ e $|x_k - x| \leq a_k$, para todo $k \geq n_0$. Defina $u := \sup \{|x_i - x| \mid 1 \leq i \leq n_0\}$ e considere a seqüência $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X dada por

$$b_n := \begin{cases} u \vee a_1 & \text{se } 1 \leq n \leq n_0 \\ a_n & \text{se } n > n_0 \end{cases}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Observe que, para $n \in \mathbb{N}$, tem-se que

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= u \vee a_1 = b_n, & \text{se } 1 \leq n < n_0; \\ b_{n+1} &= a_{n+1} \leq a_n = b_n, & \text{se } n > n_0; \\ b_{n+1} &= a_{n+1} \leq a_1 \leq u \vee a_1 = b_n, & \text{se } n = n_0; \end{aligned}$$

ou seja, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-crescente. Note também que $|x_n - x| \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pois

$$\begin{aligned} |x_n - x| &\leq a_n = b_n, & \text{se } n > n_0; \\ |x_n - x| &\leq u \leq u \vee a_1 = b_n, & \text{se } 1 \leq n \leq n_0. \end{aligned}$$

Portanto para concluir a prova basta mostrar que $b_n \searrow 0$.

É claro que $0 \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, se existe $c \in X$ tal que c é uma cota inferior de $\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, então $c \leq a_n$, para todo $n > n_0$. Logo $c \leq \bigwedge_{n=n_0+1}^{\infty} a_n = \bigwedge_{n=1}^{\infty} a_n = 0$ (Proposição 1.2.2 (1), observando que $(a_{n_0+k})_{k \in \mathbb{N}}$ é uma subsequência de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$), e assim concluímos que $b_n \searrow 0$. ■

No caso em que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais e $x \in \mathbb{R}$, sabemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \text{ e escrevemos } x_n \rightarrow x, \text{ se dado } \varepsilon > 0 \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que}$$

$$|x_k - x| < \varepsilon, \quad \text{para todo } k \geq n_0. \quad (1.23)$$

Do fato de $\mathbb{R}$ ser um espaço de Riesz é natural perguntar sobre a equivalência dos conceitos $x_n \rightarrow x$ e $x_n \xrightarrow{o} x$. A resposta a essa pergunta é a próxima proposição.

Proposição 1.2.11. *Sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais e $x \in \mathbb{R}$. São equivalentes as seguintes afirmações:*

1. $x_n \rightarrow x$;
2. $x_n \xrightarrow{o} x$.

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que $x_n \rightarrow x$. Então existe uma sequência $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\mathbb{N}$, não limitada, tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, tem-se que $n_k < n_{k+1}$ e

$$|x_m - x| < \frac{1}{k}, \quad \text{para todo } m \geq n_k. \quad (1.24)$$

Considere a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$a_n := \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq n < n_1 \\ 1/k & \text{se } n_k \leq n < n_{k+1} \end{cases}, \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

É claro que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-crescente e $a_n \searrow 0$. Além disso, se $m \in \mathbb{N}$ e $m \geq n_1$, então $n_k \leq m < n_{k+1}$, para algum $k \in \mathbb{N}$, e assim, por (1.24),

$$|x_m - x| \leq \frac{1}{k} = a_m,$$

ou seja,

$$|x_m - x| \leq a_m, \quad \text{para todo } m \geq n_1.$$

Logo, pela Proposição 1.2.10, concluímos que $x_n \xrightarrow{o} x$.

Provemos que 2. implica 1.

Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência não-crescente de números reais tal que $a_n \searrow 0$ e

$$|x_k - x| \leq a_k, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, como $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq a_{n_0} < \varepsilon$. Dessa forma, se $n \geq n_0$ tem-se, do fato de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ser não-crescente, que

$$|x_n - x| \leq a_n \leq a_{n_0} < \varepsilon,$$

o que conclui a prova. ■

Decorre do resultado anterior que a (o) -convergência (Definição 1.2.8) poderia, sem problemas, ser considerada como usual em $\mathbb{R}$. No entanto, a técnica de aproximação utilizando epsilon positivo nos proporciona maior flexibilidade. Isto nos leva a crer que este seja o motivo pelo qual na literatura encontramos (1.23) como conceito usual de convergência em $\mathbb{R}$. Veremos mais adiante que em um espaço de Riesz Dedekind σ -completo também é possível definir um outro conceito de convergência, utilizando uma técnica de aproximação aparentemente mais flexível.

Dando continuidade ao estudo da (o) -convergência, mostraremos que, no caso de seqüências monótonas, as notações $\searrow$ e $\nearrow$ podem ser substituídas por $\xrightarrow{o}$.

Teorema 1.2.12. *Sejam X um espaço de Riesz, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de X e $x \in X$. São verdadeiras as seguintes afirmações:*

1. *se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-crescente, tem-se que $x_n \searrow x$ se, e somente se $x_n \xrightarrow{o} x$;*
2. *se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-decrescente, tem-se que $x_n \nearrow x$ se, e somente se $x_n \xrightarrow{o} x$.*

DEMONSTRAÇÃO. Note que, para provar a afirmação 2., basta aplicar 1. à seqüência não-crescente $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dada por $y_n := -x_n$, para $n \in \mathbb{N}$, e usar (1.9) e a Proposição 1.1.5 (5). Dessa forma é suficiente provar 1.

Suponha $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não-crescente e $x_n \searrow x$. Defina $a_n := x_n - x$, para $n \in \mathbb{N}$. Do fato de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ser não-crescente segue que

$$a_{n+1} = x_{n+1} - x \leq x_n - x = a_n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

e portanto $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-crescente.

Como $0 \leq x_n - x$, para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se, pela Proposição 1.1.5 (1) e (3), que

$$0 \leq |x_n - x| = x_n - x = a_n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Considere $z \in X$ tal que $z \leq a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto implica que $z + x \leq x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $z + x \leq \bigwedge_{n=1}^{\infty} x_n = x$, ou seja, $z \leq 0$. Portanto $\bigwedge_{n=1}^{\infty} a_n = 0$, e assim $x_n \xrightarrow{o} x$.

Por outro lado, suponha $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não-crescente e $x_n \xrightarrow{o} x$. Dessa forma, existe uma seqüência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não-crescente de elementos de X tal que

$$a_n \searrow 0 \quad \text{e} \quad |x_k - x| \leq a_k, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Provaremos que $x_n \searrow x$.

Fixe $m \in \mathbb{N}$. Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-crescente temos, pela Proposição 1.1.5 (2) e (5), que

$$x - x_m \leq x - x_n \leq |x - x_n| = |x_n - x| \leq a_n, \quad \text{para todo } n > m,$$

e assim

$$x - x_m \leq \bigwedge_{n=m+1}^{\infty} a_n = 0,$$

onde a última igualdade decorre da Proposição 1.2.2 (1) observando que $(a_{m+k})_{k \in \mathbb{N}}$ é uma subsequência de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Logo, $x \leq x_m$.

Como $m \in \mathbb{N}$ é arbitrário, segue que x é uma cota inferior de $\{x_m \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Seja $z \in X$ tal que $z \leq x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, pela Proposição 1.1.5 (2),

$$z - x \leq x_n - x \leq |x_n - x| \leq a_n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto $z - x \leq \bigwedge_{n=1}^{\infty} a_n = 0$, donde $z \leq x$ e com isso concluímos que $x_n \searrow x$. ■

Como uma aplicação do teorema anterior consideremos o seguinte exemplo.

Exemplo 1.2.13. *Sejam X um espaço de Riesz Arquimediano e $x \in X^+$, $x \neq 0$. Para $n \in \mathbb{N}$, seja $s_n := \sum_{k=1}^n x/k$. Então a sequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X não converge, isto é, não existe $s \in X$ tal que $s_n \xrightarrow{o} s$.*

De fato, suponha, por absurdo, que exista $s \in X$ tal que $s_n \xrightarrow{o} s$. Observando que $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-decrescente tem-se, pelo Teorema 1.2.12 (2), que $s_n \nearrow s$. Mas

$$\frac{n}{2} < 1 + \frac{n}{2} \leq \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

e dessa forma

$$x \frac{n}{2} \leq x \left(\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{x}{k} = s_{2^n} \leq \bigvee_{m=1}^{\infty} s_m = s, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

ou seja, $nx \leq 2s$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como X é um espaço de Riesz Arquimediano tem-se que $x \leq 0$, o que é uma contradição. Portanto $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não converge.

A seguir apresentaremos algumas propriedades da (o) -convergência.

Proposição 1.2.14. *Sejam X um espaço de Riesz, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seqüências de elementos de X e $x, y \in X$. São verdadeiras as seguintes afirmações:*

1. *se $x_n \xrightarrow{o} x$ quando $n \rightarrow \infty$ e $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é uma subsequência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, então $x_{n_k} \xrightarrow{o} x$ quando $k \rightarrow \infty$;*
2. *se $x_n \xrightarrow{o} x$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\alpha x_n \xrightarrow{o} \alpha x$;*
3. *se $x_n \xrightarrow{o} x$ e $y_n \xrightarrow{o} y$, então $x_n + y_n \xrightarrow{o} x + y$;*
4. *se $x_n \xrightarrow{o} x$, então $|x_n| \xrightarrow{o} |x|$;*
5. *se $x_n \xrightarrow{o} x$ e $y_n \xrightarrow{o} y$, então $x_n \vee y_n \xrightarrow{o} x \vee y$;*
6. *se $x_n \xrightarrow{o} x$ e $y_n \xrightarrow{o} y$, então $x_n \wedge y_n \xrightarrow{o} x \wedge y$.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que $x_n \xrightarrow{o} x$ e $y_n \xrightarrow{o} y$. Sejam $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seqüências não-crescentes de elementos de X tais que

$$a_n \searrow 0 \quad \text{e} \quad |x_k - x| \leq a_k, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}; \quad (1.25)$$

$$b_n \searrow 0 \quad \text{e} \quad |y_k - y| \leq b_k, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \quad (1.26)$$

Seja $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ uma subsequência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. De (1.25) segue que

$$|x_{n_k} - x| \leq a_{n_k}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Como $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é uma subsequência de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tem-se, pela Proposição 1.2.2 (1), que $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência não-crescente e $a_{n_k} \searrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Com isso concluímos que 1. é verdadeira.

Para provar 2. defina $c_n := |\alpha| a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $|\alpha| \geq 0$ segue, pela Proposição 1.2.2 (2), que $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é seqüência não-crescente e $c_n \searrow 0$. Dessa forma, de (1.25) e pela Proposição 1.1.5 (5), temos

$$|\alpha x_n - \alpha x| = |\alpha (x_n - x)| = |\alpha| |x_n - x| \leq |\alpha| a_n = c_n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

e assim concluímos que $\alpha x_n \xrightarrow{o} \alpha x$, o que prova 2.

Para obter 3. considere a seqüência $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por $d_n := a_n + b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela Proposição 1.2.2 (3), tem-se que $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência não-crescente e $d_n \searrow 0$. Além disso, de (1.25), (1.26) e da Proposição 1.1.5 (7), temos

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (x + y)| &= |(x_n - x) + (y_n - y)| \\ &\leq |x_n - x| + |y_n - y| \leq a_n + b_n = d_n, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto $x_n + y_n \xrightarrow{o} x + y$, o que prova 3.

Aplicando a Proposição 1.1.5 (8) e usando (1.25) temos

$$||x_n| - |x|| \leq |x_n - x| \leq a_n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

ou seja, 4. é verdadeira.

Finalmente, para provar 5. e 6. basta observar que, pela Proposição 1.1.4 (1) e (2), tem-se

$$x_n \vee y_n = \frac{1}{2} (x_n + y_n + |x_n - y_n|) \quad \text{e} \quad x_n \wedge y_n = \frac{1}{2} (x_n + y_n - |x_n - y_n|), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N};$$

$$x \vee y = \frac{1}{2} (x + y + |x - y|) \quad \text{e} \quad x \wedge y = \frac{1}{2} (x + y - |x - y|),$$

e aplicar as afirmações 2., 3. e 4. ■

Sejam $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de números reais tal que $\alpha_n \rightarrow \alpha$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de um espaço de Riesz X tal que $x_n \xrightarrow{o} x$, para algum $x \in X$. É natural perguntar se $\alpha_n x_n \xrightarrow{o} \alpha x$.

Considere $X = \mathbb{R}^2$ munido com as operações de soma e produto por escalar usuais e com a ordem lexicográfica (Exemplo 1.1.2 (3)). Para $n \in \mathbb{N}$, sejam $\alpha_n := 1/n$ e $x_n := (1, 0)$. Então $\alpha_n \rightarrow 0$ e $x_n \xrightarrow{o} (1, 0)$, mas a seqüência $(\alpha_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não converge para $(0, 0)$, pois, se $\alpha_n x_n \xrightarrow{o} (0, 0)$, então, do fato de $(\alpha_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ser uma seqüência não-crescente e do

Teorema 1.2.12, teríamos que $\alpha_n x_n \searrow (0, 0)$, ou seja, $\bigwedge_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n = (0, 0)$. No entanto, se $a > 0$, então $(0, a)$ é uma cota inferior do conjunto $\{\alpha_n x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{(1/n, 0) \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $(0, 0) \leq (0, a)$, o que gera uma contradição.

Portanto, de modo geral, $(\alpha_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pode não convergir para αx . Contudo, no caso em que X é um espaço de Riesz Arquimediano temos o seguinte:

Proposição 1.2.15. *Sejam X um espaço de Riesz Arquimediano, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de X e $x \in X$. Se $x_n \xrightarrow{o} x$ e $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de números reais tal que $\alpha_n \rightarrow \alpha$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\alpha_n x_n \xrightarrow{o} \alpha x$.*

DEMONSTRAÇÃO. Por hipótese, $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência convergente, e portanto limitada, ou seja, existe $M \in \mathbb{R}_+$ de modo que $|\alpha_n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, existe uma seqüência não-crescente de números reais $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\inf_{n \in \mathbb{N}} r_n = 0$ e

$$|\alpha_n - \alpha| \leq r_n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}, \quad (1.27)$$

pois pela Proposição 1.2.11 temos que $\alpha_n \xrightarrow{o} \alpha$.

Como $x_n \xrightarrow{o} x$, existe uma seqüência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não-crescente de elementos de X tal que

$$a_n \searrow 0 \quad \text{e} \quad |x_k - x| \leq a_k, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \quad (1.28)$$

Considere a seqüência $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X dada por $b_n := M a_n + |x| r_n$, para $n \in \mathbb{N}$. Note que, pela Proposição 1.2.2 (2), a seqüência $(M a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X é não-crescente e $M a_n \searrow 0$. Usando que X é um espaço de Riesz Arquimediano segue, da Proposição 1.2.5, que $(|x| r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência não-crescente de elementos de X e $|x| r_n \searrow 0$. Dessa forma, pela Proposição 1.2.2 (3), tem-se que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência não-crescente e $b_n \searrow 0$.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos, de (1.27), (1.28) e da Proposição 1.1.5 (5) e (7), que

$$\begin{aligned} |\alpha_n x_n - \alpha x| &= |(\alpha_n x_n - \alpha_n x) + (\alpha_n x - \alpha x)| \\ &\leq |\alpha_n x_n - \alpha_n x| + |\alpha_n x - \alpha x| \\ &= |\alpha_n| |x_n - x| + |x| |\alpha_n - \alpha| \\ &\leq M a_n + |x| r_n = b_n, \end{aligned}$$

e portanto $\alpha_n x_n \xrightarrow{o} \alpha x$. ■

No caso de seqüências de números reais é possível relacionar convergência com os conceitos de limite inferior e limite superior. Veremos, nas próximas duas proposições, que o mesmo ocorre com seqüências de elementos de um espaço de Riesz Dedekind σ -completo.

Proposição 1.2.16. *Seja X um espaço de Riesz Dedekind σ -completo. Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência limitada de elementos de X , então existem $\bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{i=n}^{\infty} x_i$ e $\bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{i=n}^{\infty} x_i$. Além disso tem-se que*

$$\bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{i=n}^{\infty} x_i \leq \bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{i=n}^{\infty} x_i.$$

DEMONSTRAÇÃO. Segue da hipótese que existem $z, w \in X$ tais que

$$z \leq x_n \leq w, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Dessa forma, para $m \in \mathbb{N}$, o conjunto enumerável $\{x_i \mid i \geq m\}$ é limitado. Como X é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo, existem $\bigwedge_{i=m}^{\infty} x_i$ e $\bigvee_{i=m}^{\infty} x_i$ (Definição 1.1.10 e Proposição 1.1.11). Além disso,

$$z \leq \bigwedge_{i=m}^{\infty} x_i \leq \bigvee_{i=m}^{\infty} x_i \leq w, \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Usando novamente que X é Dedekind σ -completo, segue que existem $\bigvee_{m=1}^{\infty} \bigwedge_{i=m}^{\infty} x_i$ e $\bigwedge_{m=1}^{\infty} \bigvee_{i=m}^{\infty} x_i$. Note que

$$\bigwedge_{j=n}^{\infty} x_j \leq \bigwedge_{j=n+1}^{\infty} x_j \leq \bigvee_{j=n+1}^{\infty} x_j \leq \bigvee_{j=n}^{\infty} x_j, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Com isso, fixado $k \in \mathbb{N}$, tem-se que $\bigvee_{j=k}^{\infty} x_j$ é uma cota superior de $\left\{ \bigwedge_{i=n}^{\infty} x_i \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. Logo

$$\bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{i=n}^{\infty} x_i \leq \bigvee_{j=k}^{\infty} x_j.$$

Como $k \in \mathbb{N}$ é arbitrário segue que

$$\bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{i=n}^{\infty} x_i \leq \bigwedge_{k=1}^{\infty} \bigvee_{j=k}^{\infty} x_j,$$

o que finaliza a prova. ■

Proposição 1.2.17. *Sejam X um espaço de Riesz Dedekind σ -completo e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de X . São equivalentes as seguintes afirmações:*

$$1. \ x_n \xrightarrow{o} x$$

$$2. \ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ é limitada e } x = \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{i=n}^{\infty} x_i = \bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{i=n}^{\infty} x_i.$$

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que $x_n \xrightarrow{o} x$. De (1.22) tem-se que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada. Provaremos que

$$x = \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{i=n}^{\infty} x_i = \bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{i=n}^{\infty} x_i. \quad (1.29)$$

Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência não-crescente de elementos de X tal que $a_n \searrow 0$ e, para todo $k \in \mathbb{N}$, $|x_k - x| \leq a_k$. Dessa forma, pela Proposição 1.1.5 (6), tem-se

$$x - a_n \leq x_n \leq x + a_n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (1.30)$$

Fixado $k \in \mathbb{N}$, usando que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-crescente, temos

$$x - a_k \leq x - a_n \leq x_n \leq x + a_n \leq x + a_k, \quad \text{para todo } n \geq k.$$

Dessa relação e de X ser um espaço de Riesz Dedekind σ -completo temos que o conjunto limitado $\{x_i \mid i \geq k\}$ admite supremo e ínfimo, com

$$x - a_k \leq \bigwedge_{i=k}^{\infty} x_i \leq \bigvee_{i=k}^{\infty} x_i \leq x + a_k. \quad (1.31)$$

Do fato de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ser não-crescente e $a_n \searrow 0$ segue, por (1.31), que os conjuntos

$$\{x - a_k \mid k \in \mathbb{N}\} ; \left\{ \bigwedge_{i=k}^{\infty} x_i \mid k \in \mathbb{N} \right\} ; \left\{ \bigvee_{i=k}^{\infty} x_i \mid k \in \mathbb{N} \right\} ; \{x + a_k \mid k \in \mathbb{N}\},$$

são limitados, e assim, usando que X é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo, temos que eles admitem supremo e ínfimo. Além disso,

$$\bigvee_{k=1}^{\infty} (x - a_k) \leq \bigvee_{k=1}^{\infty} \bigwedge_{i=k}^{\infty} x_i \quad \text{e} \quad \bigwedge_{k=1}^{\infty} \bigvee_{i=k}^{\infty} x_i \leq \bigwedge_{k=1}^{\infty} (x + a_k). \quad (1.32)$$

Observe que, de (1.9) e (1.10) tem-se

$$\bigvee_{n=1}^{\infty} (x - a_n) = x + \bigvee_{n=1}^{\infty} (-a_n) = x - \bigwedge_{n=1}^{\infty} a_n = x,$$

e por (1.11),

$$\bigwedge_{n=1}^{\infty} (x + a_n) = x + \bigwedge_{n=1}^{\infty} a_n = x.$$

Com isso, de (1.32) e pela Proposição 1.2.16, temos

$$x \leq \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{i=n}^{\infty} x_i \leq \bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{i=n}^{\infty} x_i \leq x,$$

o que prova (1.29).

Provemos que 2. implica 1.

De X ser um espaço de Riesz Dedekind σ -completo e de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ser uma seqüência limitada podemos definir $a_n := \bigvee_{j=n}^{\infty} x_j - \bigwedge_{i=n}^{\infty} x_i$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que

$$\bigvee_{i=n+1}^{\infty} x_i \leq \bigvee_{i=n}^{\infty} x_i \quad \text{e} \quad \bigwedge_{i=n}^{\infty} x_i \leq \bigwedge_{i=n+1}^{\infty} x_i, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Logo as seqüências $\left(\bigvee_{j=n}^{\infty} x_j \right)_{n \in \mathbb{N}}$ e $\left(-\bigwedge_{i=n}^{\infty} x_i \right)_{n \in \mathbb{N}}$ são não-crescentes. Como $x = \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{i=n}^{\infty} x_i = \bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{i=n}^{\infty} x_i$ temos, de (1.9), que

$$\bigwedge_{n=1}^{\infty} \left(-\bigwedge_{i=n}^{\infty} x_i \right) = - \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{i=n}^{\infty} x_i = -x,$$

e assim, da Proposição 1.2.2 (3), segue que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-crescente e $a_n \searrow x + (-x)$, ou seja, $a_n \searrow 0$. Além disso, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $-a_n \leq x_n - x \leq a_n$, pois

$$\begin{aligned} x_n - x &\leq x_n - \left(\bigvee_{k=1}^{\infty} \bigwedge_{i=k}^{\infty} x_i \right) \leq x_n - \bigwedge_{j=n}^{\infty} x_j \leq \bigvee_{s=n}^{\infty} x_s - \bigwedge_{j=n}^{\infty} x_j = a_n; \\ -a_n &= \bigwedge_{s=n}^{\infty} x_s - \bigvee_{j=n}^{\infty} x_j \leq x_n - \bigvee_{j=n}^{\infty} x_j \leq x_n - \left(\bigwedge_{k=1}^{\infty} \bigvee_{i=k}^{\infty} x_i \right) \leq x_n - x. \end{aligned}$$

Portanto, pela Proposição 1.1.5 (6), temos que $|x_n - x| \leq a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, donde concluímos que $x_n \xrightarrow{o} x$. ■

A seguir apresentamos um breve estudo sobre séries em um espaço de Riesz.

Definição 1.2.18. *Sejam X um espaço de Riesz, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ um seqüência de elementos de X e $s \in X$. Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge para s , e escrevemos $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, se a seqüência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ das somas parciais (isto é $s_n := \sum_{k=1}^n x_k$, para $n \in \mathbb{N}$) é tal que $s_n \xrightarrow{o} s$.*

No caso particular em que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de elementos de X^+ , decorre do Teorema 1.2.12 (2), que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge para s , se e somente se, o conjunto $\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ é limitado superiormente e $s = \bigvee_{n=1}^{\infty} s_n$.

Uma condição necessária à convergência de uma série em um espaço de Riesz é a seguinte:

Proposição 1.2.19. *Sejam X um espaço de Riesz e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de X . Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge para algum $s \in X$, então $x_n \xrightarrow{o} 0$.*

DEMONSTRAÇÃO. Para $k \in \mathbb{N}$, seja $s_k = \sum_{n=1}^k x_n$. Como $s_k \xrightarrow{o} s$, existe uma seqüência não-crescente $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X tal que

$$a_n \searrow 0 \quad \text{e} \quad |s_k - s| \leq a_k, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \quad (1.33)$$

Considere a sequência $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $b_1 := 2a_1$ e $b_n := 2a_{n-1}$, para todo $n \geq 2$. É claro que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-crescente e $b_n \searrow 0$ (Proposição 1.2.2 (2)). Além disso, se $n \geq 2$, temos, de (1.33) e da Proposição 1.1.5 (5) e (7), que

$$\begin{aligned} |x_n| &= |s_n - s_{n-1}| = |(s_n - s) + (s - s_{n-1})| \\ &\leq |s_n - s| + |s - s_{n-1}| \\ &= |s_n - s| + |s_{n-1} - s| \leq a_n + a_{n-1} \leq 2a_{n-1}, \end{aligned}$$

ou seja, $|x_n - 0| = |x_n| \leq b_n$, para todo $n \geq 2$, donde, pela Proposição 1.2.10, concluímos que $x_n \xrightarrow{o} 0$. ■

A recíproca da proposição anterior não é verdadeira, isto é, a condição $x_n \xrightarrow{o} 0$ não é suficiente para garantir que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge para algum $s \in X$.

De fato, sejam X um espaço de Riesz Arquimediano e $x \in X^+$, $x \neq 0$. Note que $\frac{x}{n} \xrightarrow{o} 0$ (Teorema 1.2.4 e Teorema 1.2.12 (1)), mas não existe $s \in X$ tal que a sequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ das somas parciais, $s_n := \sum_{k=1}^n \frac{x}{k}$, para $n \in \mathbb{N}$, seja convergente para s (Exemplo 1.2.13), ou seja, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n}$ não converge para algum $s \in X$.

Encerramos nosso estudo de séries em um espaço de Riesz observando que, da Proposição 1.2.15, tem-se o seguinte resultado:

Se X é um espaço de Riesz Arquimediano, $x \in X$ e $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais tal que $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ converge para algum $r \in \mathbb{R}$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} x r_n$ converge para algum $s \in X$ e

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} x r_n = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} r_n \right) = x r. \quad (1.34)$$

Finalizamos esta seção apresentando um outro conceito de convergência (Definição 1.2.22) para sequências de elementos de um espaço de Riesz Dedekind σ -completo. Para

isto utilizaremos seqüências duplas, isto é, famílias do tipo $(a_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$, com algumas propriedades especiais (Definição 1.2.20). A fim de facilitar a notação escreveremos $(a_{ij})_{ij}$ para denotar $(a_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$.

Definição 1.2.20. *Sejam X um espaço de Riesz e $(a_{ij})_{ij}$ uma seqüência dupla de elementos de X . Dizemos que $(a_{ij})_{ij}$ é uma (D) -seqüência se*

- (i) $(a_{ij})_{ij}$ é limitada;
- (ii) $(a_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$ é não-crescente, para todo $i \in \mathbb{N}$;
- (iii) $a_{ij} \searrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Note que, se $(a_{ij})_{ij}$ é uma (D) -seqüência de elementos de um espaço de Riesz X , então, da Definição 1.2.20 (iii), tem-se que $a_{ij} \in X^+$, para todo $i, j \in \mathbb{N}$. É claro que $a_{ij} := 0$, para todo $i, j \in \mathbb{N}$, é uma (D) -seqüência. Além disso, no caso em que X é um espaço de Riesz Arquimediano tem-se, pelo Teorema 1.2.4, que para cada $x \in X$ a seqüência dupla $(a_{ij})_{ij}$ dada por

$$a_{ij} := \frac{|x|}{j}, \quad \text{para todo } i, j \in \mathbb{N}, \quad (1.35)$$

é uma (D) -seqüência de elementos de X .

A seguir apresentaremos algumas propriedades das (D) -seqüências.

Proposição 1.2.21. *Sejam X um espaço de Riesz, $(a_{ij})_{ij}$ e $(b_{ij})_{ij}$ (D) -seqüências de elementos de X e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$. Tem-se que as seqüências duplas*

$$(a_{ij} + b_{ij})_{ij}, \quad (\alpha a_{ij})_{ij}, \quad (a_{ij} \vee b_{ij})_{ij} \quad \text{e} \quad (a_{ij} \wedge b_{ij})_{ij}$$

são (D) -seqüências de elementos de X .

DEMONSTRAÇÃO. Segue do fato de $(a_{ij})_{ij}$, $(b_{ij})_{ij}$ serem limitadas e da Proposição 1.2.2. ■

No caso de espaços de Riesz Dedekind σ -completos define-se um outro conceito de convergência, denominado (D) -convergência, que utiliza as (D) -seqüências como reguladoras das aproximações, isto é,

Definição 1.2.22. *Sejam X um espaço de Riesz Dedekind σ -completo, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de X e $x \in X$. Dizemos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (D) -converge para x , e escrevemos $x_n \xrightarrow{D} x$ quando $n \rightarrow \infty$ (ou simplesmente $x_n \xrightarrow{D} x$), se existe uma (D) -seqüência $(a_{ij})_{ij}$ de elementos de X satisfazendo*

$$\text{para toda } \varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \text{ existe } n_0 = n_0(\varphi) \in \mathbb{N} \text{ tal que}$$

$$|x_n - x| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}, \quad \text{para todo } n \geq n_0. \quad (1.36)$$

Note que na Definição 1.2.22, para toda $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, existe $\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}$, pois X é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo e $(a_{ij})_{ij}$ é limitada.

B. Riečan, em [R], ao comentar a motivação da técnica de aproximação utilizada para definir a integral de Kurzweil para funções a valores em um espaço de Riesz (integral essa que apresentaremos no Capítulo 2) observou o seguinte:

Sejam $A \subset \mathbb{R}$, não vazio, limitado superiormente e $s := \sup A$. Sabe-se que uma caracterização do supremo de A pode ser obtida utilizando epsilon positivo. Mais precisamente

$$\text{para todo } \varepsilon > 0 \text{ existe } a \in A \text{ tal que } s - \varepsilon < a \leq s.$$

Tendo em vista que um espaço de Riesz é um espaço vetorial parcialmente ordenado nem sempre podemos utilizar um raciocínio análogo para caracterizar o supremo de um

subconjunto limitado. Isto é, se A é um subconjunto de um espaço de Riesz X e existe $s \in X$ tal que $s := \sup A$, em geral não é verdade que para todo $\varepsilon \in X^+$, $\varepsilon \neq 0$, existe $a \in A$ de modo que $s - \varepsilon < a \leq s$.

A partir da técnica de utilizar seqüência duplas, proposta por D. H. Fremlin em [F-1], e considerando uma (D) -seqüência $(a_{ij})_{ij}$ de números reais (ou seja, $(a_{ij})_{ij}$ é uma seqüência dupla e limitada de números reais tal que, para cada $i \in \mathbb{N}$, tem-se que $(a_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$ é não-crescente e $\inf_{j \in \mathbb{N}} a_{ij} = 0$), então dado $\varepsilon > 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$, existe $j_i \in \mathbb{N}$ de modo que $a_{ij} < \varepsilon$, se $j \geq j_i$. Dessa forma, se $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ é definida por $\varphi(i) = j_i$, temos que $a_{i\varphi(i)} < \varepsilon$, para todo $i \in \mathbb{N}$, e portanto $\sup_{i \in \mathbb{N}} a_{i\varphi(i)} \leq \varepsilon$. Assim, é razoável trabalhar com $\sup_{i \in \mathbb{N}} a_{i\varphi(i)}$, para $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, no lugar do epsilon positivo.

Esse argumento de B. Riečan nos fez concluir que a Definição 1.2.22, apesar de parecer complicada, é bem natural. Note que, no caso em que o espaço de Riesz Dedekind σ -completo é o conjunto dos números reais, a Definição 1.2.22 é análoga à definição usual de convergência de seqüências de números reais, substituindo o epsilon que aparece em (1.23) por $\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}$, para $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Em geral, o limite de uma seqüência em relação à (D) -convergência pode não ser único (Proposição 1.2.25). No entanto, com uma condição adicional sobre o espaço temos a unicidade do limite e também a equivalência entre os conceitos de (D) -convergência e (o) -convergência. Essa condição adicional é a seguinte:

Definição 1.2.23. *Seja X um espaço de Riesz Dedekind σ -completo. Dizemos que*

- (i) *X é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo se para toda (D) -seqüência $(a_{ij})_{ij}$ de elementos de X tem-se que*

$$\bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} \right) = 0;$$

(ii) X é um espaço de Riesz Dedekind completo fracamente σ -distributivo se X é um espaço de Riesz Dedekind completo e é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo.

Note que, na Definição 1.2.23 (i), para toda $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, existe, como na Definição 1.2.22, $\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}$. Além disso, de X ser um espaço de Riesz Dedekind σ -completo e, para todo $i \in \mathbb{N}$, $a_{ij} \searrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$, tem-se que existe $\bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} \right)$ e $0 \leq \bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} \right)$.

Da Definição 1.2.23 segue que, para concluir que um elemento $x \in X$ é nulo, onde X é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo, basta provar que:

existe uma (D) -seqüência $(a_{ij})_{ij}$ de elementos de X tal que

$$|x| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \quad (1.37)$$

pois nesse caso tem-se que $|x| \leq \bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} \right) = 0$, e assim, pela Proposição 1.1.5 (1) e (4), obtém-se que $x = 0$. Observando o argumento de B. Riečan (apresentado após Definição 1.2.22) e a seguinte afirmação válida em $\mathbb{R}$

se $x \in \mathbb{R}$ e $0 \leq x < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$, então $x = 0$,

é natural esperar que (1.37) implique $x = 0$.

Exemplo 1.2.24. 1. *O espaço de Riesz $\mathbb{R}$ é um espaço de Riesz Dedekind completo fracamente σ -distributivo.*

De fato, se $(a_{ij})_{ij}$ é uma (D) -seqüência de números reais segue, de $\mathbb{R}$ ser um espaço de Riesz Dedekind completo, que $0 \leq \bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} \right)$. Seja $s := \bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} \right)$, e suponha, por absurdo, que $s > 0$. Para todo $i \in \mathbb{N}$, como $\inf_{j \in \mathbb{N}} a_{ij} = 0$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ de modo que

$0 \leq a_{ik_i} < s/2$. Defina $\psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ por $\psi(i) = k_i$, para $i \in \mathbb{N}$. Assim, $0 \leq a_{i\psi(i)} < s/2$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Logo

$$0 \neq s = \bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} \right) \leq \bigvee_{j=1}^{\infty} a_{j\psi(j)} \leq \frac{s}{2},$$

mas isso é absurdo. Com isso, só podemos concluir que $\bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} \right) = 0$ e portanto $\mathbb{R}$ é um espaço de Riesz Dedekind completo fracamente σ -distributivo.

2. O espaço de Riesz $\mathbb{R}^n$ (Exemplo 1.1.1 (1)) é um espaço de Riesz Dedekind completo fracamente σ -distributivo.

De fato, já sabemos que $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Riesz Dedekind completo, logo basta observar que, se $(a_{ij})_{ij} := ((x_{ij}^{(1)}, \dots, x_{ij}^{(n)}))_{ij}$ é uma (D) -seqüência de elementos de $\mathbb{R}^n$, então $(x_{ij}^{(k)})_{ij}$ é uma (D) -seqüência de números reais, para todo $1 \leq k \leq n$, e assim, usando que $\mathbb{R}$ é um espaço de Riesz Dedekind completo fracamente σ -distributivo e

$$\bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} = \left(\bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigvee_{i=1}^{\infty} x_{i\varphi(i)}^{(1)}, \dots, \bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigvee_{i=1}^{\infty} x_{i\varphi(i)}^{(n)} \right)$$

segue que $\bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} = 0$.

3. Seja Y um conjunto qualquer, X um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo e considere X^Y com as operações usuais de soma e produto por escalar, munido da relação de ordem parcial usual (Exemplo 1.1.2 (5)). Então X^Y é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo.

De fato, já sabemos que X^Y é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo. Seja $(f_{ij})_{ij}$ uma (D) -seqüência de elementos de X^Y . Fixado $x \in Y$, note que $(f_{ij}(x))_{ij}$ é uma (D) -seqüência de elementos de X , e assim, usando que X é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo, temos que

$$\bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} (f_{i\varphi(i)}(x)) \right) = 0.$$

Como $x \in Y$ é arbitrário, concluímos que $\bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} f_{i\varphi(i)} \right)$ é a função identicamente nula e portanto X^Y é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo.

4. Sejam X, Y espaços de Riesz Dedekind σ -completos e $T : X \rightarrow Y$ uma aplicação linear, injetora satisfazendo

(i) se $x \in X^+$ então $T(x) \in Y^+$;

(ii) se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência limitada de elementos de X , então $(T(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência limitada de elementos de Y e tem-se que

$$T \left(\bigvee_{n=1}^{\infty} x_n \right) = \bigvee_{n=1}^{\infty} T(x_n) \quad e \quad T \left(\bigwedge_{n=1}^{\infty} x_n \right) = \bigwedge_{n=1}^{\infty} T(x_n).$$

Se Y é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo, então X é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo.

De fato, se $(a_{ij})_{ij}$ é uma (D) -seqüência de elementos de X segue, das afirmações (i) e (ii), que $(T(a_{ij}))_{ij}$ é uma (D) -seqüência de elementos de Y . Dessa forma, usando que Y é um um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo e (ii), temos

$$T \left(\bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} \right) = \bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigvee_{i=1}^{\infty} (T(a_{i\varphi(i)})) = 0.$$

Com isso e do fato de T ser linear e injetora, conclui-se que $\bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} \right) = 0$, e portanto X é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo.

Decorre do Exemplo 1.2.24 (4) que o espaço $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ das matrizes reais de ordem n (Exemplo 1.1.2 (4)) é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo, pois o isomorfismo canônico de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^{n^2}$ satisfaz as condições (i) e (ii) do Exemplo 1.2.24 (4) e $\mathbb{R}^{n^2}$ é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo.

A seguir mostraremos que a unicidade do elemento para o qual uma seqüência (D) -converge caracteriza os espaços de Riesz Dedekind σ -completos fracamente σ -distributivos.

Proposição 1.2.25. *Seja X um espaço de Riesz Dedekind σ -completo. São equivalentes as seguintes afirmações:*

1. X é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo;
2. toda seqüência de elementos de X que é (D) -convergente somente (D) -converge para um único elemento de X , isto é:

se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de elementos de X e existem $x, y \in X$ tais que

$$x_n \xrightarrow{D} x \quad \text{e} \quad x_n \xrightarrow{D} y, \quad \text{então} \quad x = y.$$

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que X é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo. Sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de X e $x, y \in X$ tais que $x_n \xrightarrow{D} x$ e $x_n \xrightarrow{D} y$. Dessa forma, existem $(a_{ij})_{ij}$ e $(b_{ij})_{ij}$ (D) -seqüências de elementos de X de modo que, dada qualquer $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$|x_n - x| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}, \quad \text{para todo } n \geq n_1; \quad (1.38)$$

$$|x_n - y| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} b_{i\varphi(i)}, \quad \text{para todo } n \geq n_2. \quad (1.39)$$

Seja $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e considere $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ como em (1.38) e (1.39), respectivamente. Com isso, se $n \geq \max\{n_1, n_2\}$, então, de (1.38), (1.39) e da Proposição 1.1.5 (5) e (7), temos

$$\begin{aligned} |x - y| &= |(x - x_n) + (x_n - y)| \\ &\leq |x - x_n| + |x_n - y| \\ &= |x_n - x| + |x_n - y| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} + \bigvee_{j=1}^{\infty} b_{j\varphi(j)}. \end{aligned}$$

Como $\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} (a_{i\varphi(i)} + b_{i\varphi(i)})$ e $\bigvee_{i=1}^{\infty} b_{i\varphi(i)} \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} (a_{i\varphi(i)} + b_{i\varphi(i)})$ temos, por (1.14), que

$$|x - y| \leq 2 \bigvee_{i=1}^{\infty} (a_{i\varphi(i)} + b_{i\varphi(i)}) = \bigvee_{i=1}^{\infty} 2(a_{i\varphi(i)} + b_{i\varphi(i)}) = \bigvee_{i=1}^{\infty} c_{i\varphi(i)},$$

onde $c_{ij} := 2(a_{i\varphi(i)} + b_{i\varphi(i)})$, para $i, j \in \mathbb{N}$.

Observando que $(c_{ij})_{ij}$ é uma (D) -seqüência (Proposição 1.2.21), $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ é arbitrária e X é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo, segue que

$$|x - y| \leq \bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} c_{i\varphi(i)} \right) = 0.$$

Portanto, pela Proposição 1.1.5 (1) e (4), concluímos que $x = y$.

Provaremos que 2. implica 1.

Seja $(a_{ij})_{ij}$ uma (D) -seqüência de elementos de X . Dessa forma, $(a_{ij})_{ij}$ é limitada, isto é, existem $z, w \in X$ tais que $z \leq a_{ij} \leq w$, para todo $i, j \in \mathbb{N}$. Com isso, dada qualquer $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tem-se que $z \leq a_{i\varphi(i)} \leq w$, para todo $i \in \mathbb{N}$, e assim

$$z \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} \leq w, \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Como $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ é arbitrária, segue que o conjunto $\left\{ \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} \mid \varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \right\}$ é limitado. Logo, de X ser um espaço de Riesz Dedekind σ -completo, existe $b \in X$ tal que

$$b = \bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} \right).$$

Note que, $0 \leq b$, pois $0 \leq a_{j\varphi(j)} \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}$, para quaisquer $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e $j \in \mathbb{N}$.

Seja $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a seqüência dada por $b_n := 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ então, da Proposição 1.1.5 (3) e (5), temos

$$|b_n - b| = |0 - b| = |-b| = |b| = b \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}.$$

Logo $b_n \xrightarrow{D} b$. No entanto, é claro que $b_n \xrightarrow{D} 0$, donde por 2. concluimos que $b = 0$, ou seja,

$$\bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} \right) = 0.$$

Portanto 1. é verdadeira. ■

Na prova da Proposição 1.2.25, note que, para mostrar que X é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo a partir da afirmação 2., somente usamos o seguinte caso particular dessa:

se $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é a seqüência de elementos de X dada por $b_n := 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (D) -converge para $b \in X$, então $b = 0$.

Uma relação entre os conceitos de (D) -convergência e (o) -convergência é o assunto do próximo teorema.

Teorema 1.2.26. *Sejam X um espaço de Riesz, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de X e $x \in X$. Tem-se que:*

1. *se X é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo e $x_n \xrightarrow{o} x$, então $x_n \xrightarrow{D} x$;*
2. *se X é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo e $x_n \xrightarrow{D} x$, então $x_n \xrightarrow{o} x$.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponha X um espaço de Riesz Dedekind σ -completo e $x_n \xrightarrow{o} x$. Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência não-crescente de elementos de X tal que

$$a_n \searrow 0 \quad \text{e} \quad |x_k - x| \leq a_k, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Considere a seqüência dupla $(b_{ij})_{ij}$ definida por $b_{ij} := a_j$, para $i, j \in \mathbb{N}$. É claro que $(b_{ij})_{ij}$ é uma (D) -seqüência de elementos de X .

Seja $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e defina $n_0 := \min_{n \in \mathbb{N}} \varphi(n)$. Dessa forma, se $n \geq n_0$ temos

$$|x_n - x| \leq a_n \leq a_{n_0} \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{\varphi(i)} = \bigvee_{i=1}^{\infty} b_{i\varphi(i)}$$

e portanto $x_n \xrightarrow{D} x$, o que prova 1.

Provaremos que 2. é verdadeira.

Suponha X um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo e $x_n \xrightarrow{D} x$. Então existe uma (D) -seqüência $(a_{ij})_{ij}$ de elementos de X , de modo que, para toda $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - x| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}, \quad \text{se } n \geq n_0. \quad (1.40)$$

Para $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, dada por $\varphi(i) = i$, para todo $i \in \mathbb{N}$, considere $n_0 \in \mathbb{N}$ como em (1.40). Seja $M := \sup \{|x_i - x| \mid 1 \leq i \leq n_0\}$. Com isso, tem-se, para $k \in \mathbb{N}$, que

$$|x_k - x| \leq M \leq M \vee \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{ii} \right), \quad \text{se } 1 \leq k < n_0;$$

$$|x_k - x| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{ii} \leq M \vee \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{ii} \right), \quad \text{se } k \geq n_0,$$

ou seja,

$$|x_k - x| \leq M \vee \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{ii} \right), \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \quad (1.41)$$

Como X é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo tem-se, de (1.41), que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\bigvee_{i=n}^{\infty} |x_i - x|$.

Defina $b_n := \bigvee_{i=n}^{\infty} |x_i - x|$, para $n \in \mathbb{N}$. Note que,

$$|x_n - x| \leq b_n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, $b_{n+1} \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $\{|x_i - x| \mid i \geq n+1\} \subset \{|x_i - x| \mid i \geq n\}$. Portanto, para concluir 2. basta mostrar que $b_n \searrow 0$, ou seja, $\bigwedge_{n=1}^{\infty} b_n = 0$.

É claro que $0 \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, donde obtem-se que $0 \leq \bigwedge_{n=1}^{\infty} b_n$. Se $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, decorre de (1.40) que

$$b_{n_0} = \bigvee_{j=n_0}^{\infty} |x_j - x| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)},$$

e com isso

$$\bigwedge_{n=1}^{\infty} b_n \leq b_{n_0} \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}.$$

Como $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ é arbitrária e X é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo segue que

$$\bigwedge_{n=1}^{\infty} b_n \leq \bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} \right) = 0,$$

donde concluímos que 2. é verdadeira. ■

Corolário 1.2.27. *Sejam X um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de X e $x \in X$. Tem-se que:*

$$x_n \xrightarrow{D} x \quad \text{se, e somente se,} \quad x_n \xrightarrow{o} x.$$

DEMONSTRAÇÃO. Decorre do Teorema 1.2.26. ■

A seguir apresentaremos algumas propriedades da (D) -convergência em um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo.

Proposição 1.2.28. *Sejam X um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seqüências de elementos de X e $x, y \in X$. São verdadeiras as seguintes afirmações:*

1. se $x_n \xrightarrow{D} x$ e $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é uma subsequência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, então $x_{n_k} \xrightarrow{D} x$ quando $k \rightarrow \infty$;
2. se $x_n \xrightarrow{D} x$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\alpha x_n \xrightarrow{D} \alpha x$;

3. se $x_n \xrightarrow{D} x$ e $y_n \xrightarrow{D} y$, então $x_n + y_n \xrightarrow{D} x + y$;

4. se $x_n \xrightarrow{D} x$, então $|x_n| \xrightarrow{D} |x|$;

5. se $x_n \xrightarrow{D} x$ e $y_n \xrightarrow{D} y$, então $x_n \vee y_n \xrightarrow{D} x \vee y$;

6. se $x_n \xrightarrow{D} x$ e $y_n \xrightarrow{D} y$, então $x_n \wedge y_n \xrightarrow{D} x \wedge y$.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos $x_n \xrightarrow{D} x$ e $y_n \xrightarrow{D} y$. Então existem (D) -seqüências $(a_{ij})_{ij}$ e $(b_{ij})_{ij}$ de elementos de X de modo que, dada qualquer $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$|x_n - x| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}, \quad \text{para todo } n \geq n_1; \quad (1.42)$$

$$|y_n - y| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} b_{i\varphi(i)}, \quad \text{para todo } n \geq n_2. \quad (1.43)$$

Seja $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ uma subsequência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Para $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ fixada considere $n_1 \in \mathbb{N}$ como em (1.42). Como $\{n_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ não é limitado, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n_{k_1} > n_1$. Logo, por (1.42) e de $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ser não-decrescente, temos que

$$|x_{n_k} - x| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}, \quad \text{para todo } k \geq k_1,$$

donde concluímos que 1. é verdadeira.

Provaremos 2. Para isto, defina $c_{ij} := 2(a_{ij} + b_{ij})$, para $i, j \in \mathbb{N}$. Pela Proposição 1.2.21 temos que $(c_{ij})_{ij}$ é uma (D) -seqüência de elementos de X .

Seja $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e considere $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ como em (1.42) e (1.43), respectivamente. Se $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ temos, da Proposição 1.1.5 (7), de (1.42) e (1.43), que

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (x + y)| &= |(x_n - x) + (y_n - y)| \\ &\leq |x_n - x| + |y_n - y| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} + \bigvee_{j=1}^{\infty} b_{j\varphi(j)}. \end{aligned}$$

Observando que $\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} (a_{i\varphi(i)} + b_{i\varphi(i)})$ e $\bigvee_{i=1}^{\infty} b_{i\varphi(i)} \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} (a_{i\varphi(i)} + b_{i\varphi(i)})$ obtem-se, por (1.14), que

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| \leq 2 \bigvee_{i=1}^{\infty} (a_{i\varphi(i)} + b_{i\varphi(i)}) = \bigvee_{i=1}^{\infty} c_{i\varphi(i)},$$

o que prova 2.

Para provar que $\alpha x_n \xrightarrow{D} \alpha x$, considere a seqüência dupla $(d_{ij})_{ij}$ dada por $d_{ij} := |\alpha| a_{ij}$, para $i, j \in \mathbb{N}$. Da Proposição 1.2.21, segue que $(d_{ij})_{ij}$ é uma (D) -seqüência de elementos de X . Assim, se $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ é como em (1.42) tem-se, para $n \geq n_1$, usando (1.14) e a Proposição 1.1.5 (5), que

$$|\alpha x_n - \alpha x| = |\alpha| |x_n - x| \leq |\alpha| \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} = \bigvee_{i=1}^{\infty} |\alpha| a_{i\varphi(i)} = \bigvee_{i=1}^{\infty} d_{i\varphi(i)}$$

e com isso $\alpha x_n \xrightarrow{D} \alpha x$, ou seja, tem-se 3.

Seja $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e considere $n_1 \in \mathbb{N}$ como em (1.42). Aplicando a Proposição 1.1.5 (8) e usando (1.42) temos

$$||x_n| - |x|| \leq |x_n - x| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}, \quad \text{para todo } n \geq n_1,$$

portanto 4. é verdadeira.

Finalmente, para provar 5. e 6. basta observar que, da Proposição 1.1.4 (1) e (2), tem-se, para todo $n \in \mathbb{N}$, que

$$x_n \vee y_n = \frac{1}{2} (x_n + y_n + |x_n - y_n|) \quad \text{e} \quad x_n \wedge y_n = \frac{1}{2} (x_n + y_n - |x_n - y_n|), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N};$$

$$x \vee y = \frac{1}{2} (x + y + |x - y|) \quad \text{e} \quad x \wedge y = \frac{1}{2} (x + y - |x - y|),$$

e aplicar as afirmações 2., 3. e 4. ■

Com esses resultados encerramos o nosso estudo de espaços de Riesz. No próximo capítulo iremos apresentar um conceito de integral para $f \in X^{[a,b]}$, onde $[a, b]$ é um intervalo de $\mathbb{R}$ e X é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo.

Capítulo 2

Integral de Kurzweil

Neste capítulo apresentamos uma extensão da integral de Kurzweil, introduzida por B. Riečan em [R], para elementos de $X^{[a,b]}$, onde $[a, b]$ é um intervalo de $\mathbb{R}$ e X é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo, e estudamos algumas de suas propriedades.

2.1 Integral de Kurzweil: definição e exemplos

Nesta seção apresentaremos a integral de Kurzweil para funções a valores em um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo (Definição 2.1.7). Veremos que, no caso em que o espaço de Riesz é o conjunto dos números reais, esse conceito estende a definição de integral de Riemann e é equivalente ao conceito de integral de Riemann generalizada (Teorema 2.1.14), cuja definição encontra-se em (2.9).

Os exemplos aqui encontrados além de interessantes, nos fornecem ferramentas para construir funções a valores em um espaço de Riesz que sejam Kurzweil integráveis em um intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Antes porém apresentaremos algumas definições e resultados que serão utilizados para definir a integral de Kurzweil.

Definição 2.1.1. *Seja $[a, b]$ um intervalo de $\mathbb{R}$. Uma partição de $[a, b]$ é uma coleção de pares ordenados, $\Pi = \{(I_k, \alpha_k)\}_{k \in \Lambda}$, $\Lambda \subset \mathbb{N}$ finito e não vazio, onde, para todo $k \in \Lambda$, I_k é um intervalo fechado em $[a, b]$, $\alpha_k \in I_k$ e tem-se que:*

- (i) $\bigcup_{k \in \Lambda} I_k = [a, b]$;
- (ii) $m(I_k \cap I_j) = 0$ se $k \neq j$, para $k, j \in \Lambda$,

onde m é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$.

A fim de não nos tornarmos repetitivos fica estabelecido que o conjunto de índices, Λ , de uma partição é um subconjunto finito e não vazio de $\mathbb{N}$, e $[a, b]$ é um intervalo de $\mathbb{R}$.

Definição 2.1.2. *Seja $\delta \in \mathbb{R}_+^{[a, b]}$. Dizemos que uma partição $\Pi = \{(I_k, \alpha_k)\}_{k \in \Lambda}$ de $[a, b]$ é uma partição δ -fina de $[a, b]$ se*

$$I_k \subset]\alpha_k - \delta(\alpha_k), \alpha_k + \delta(\alpha_k)[, \quad \text{para todo } k \in \Lambda.$$

Denotaremos por $\mathcal{A}_{[a, b]}(\delta)$ o conjunto de todas as partições δ -finas de $[a, b]$.

Na literatura, a função $\delta \in \mathbb{R}_+^{[a, b]}$ é chamada de gauge. Sobre partições de um intervalo convém observar o seguinte fato:

Observação 2.1.3. *Sejam $\delta \in \mathbb{R}_+^{[a, b]}$ e $c \in]a, b[$. Dadas quaisquer $\Pi_1 \in \mathcal{A}_{[a, c]}(\delta|_{[a, c]})$ e $\Pi_2 \in \mathcal{A}_{[c, b]}(\delta|_{[c, b]})$, tem-se que $\Pi_1 \cup \Pi_2 \in \mathcal{A}_{[a, b]}(\delta)$.*

Provaremos a seguir que, para toda $\delta \in \mathbb{R}_+^{[a, b]}$, o conjunto das partições δ -finas de $[a, b]$ é não vazio.

Proposição 2.1.4. *Seja $\delta \in \mathbb{R}_+^{[a,b]}$. Então $\mathcal{A}_{[a,b]}(\delta) \neq \emptyset$.*

DEMONSTRAÇÃO. Note que, dada qualquer $\delta \in \mathbb{R}_+^{[a,b]}$, se $[c, d] \subset [a, b]$ e $\mathcal{A}_{[c,d]}(\delta|_{[c,d]}) = \emptyset$, então $\mathcal{A}_{[c, \frac{c+d}{2}]}(\delta|_{[c, \frac{c+d}{2}]}) = \emptyset$ ou $\mathcal{A}_{[\frac{c+d}{2}, d]}(\delta|_{[\frac{c+d}{2}, d]}) = \emptyset$ (Observação 2.1.3). A partir desse fato é fácil verificar que,

se J é um intervalo fechado contido em $[a, b]$ com $\mathcal{A}_J(\delta|_J) = \emptyset$, então

existe J_1 intervalo fechado contido em $[a, b]$ tal que

$$J_1 \subset J, \quad m(J_1) = \frac{m(J)}{2} \quad \text{e} \quad \mathcal{A}_{J_1}(\delta|_{J_1}) = \emptyset, \quad (2.1)$$

onde m é a medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$.

Seja $\delta \in \mathbb{R}_+^{[a,b]}$ e suponha, por absurdo, que $\mathcal{A}_{[a,b]}(\delta) = \emptyset$. De (2.1), existe uma seqüência $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \subset [a, b]; \quad (2.2)$$

$$|b_n - a_n| \leq \frac{b - a}{2^n}; \quad (2.3)$$

$$\mathcal{A}_{[a_n, b_n]}(\delta|_{[a_n, b_n]}) = \emptyset. \quad (2.4)$$

Por (2.2), (2.3) e o Teorema dos Intervalos Encaixantes, existe um único $t \in [a, b]$ tal que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{t\}$. Como $\delta(t) > 0$, existe, por (2.3), $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < b_{n_0} - a_{n_0} < \delta(t)$. Isto implica que

$$t - \delta(t) < a_{n_0} < b_{n_0} < a_{n_0} + \delta(t) \leq t + \delta(t).$$

Portanto $\{([a_{n_0}, b_{n_0}], t)\} \in \mathcal{A}_{[a_{n_0}, b_{n_0}]}(\delta|_{[a_{n_0}, b_{n_0}]})$, o que contradiz (2.4). Logo $\mathcal{A}_{[a,b]}(\delta) \neq \emptyset$. ■

Uma propriedade das partições de $[a, b]$, que será importante no desenvolvimento da teoria de integração que apresentaremos neste trabalho, é a seguinte:

Proposição 2.1.5. *Sejam $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}_+^{[a,b]}$ e $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então*

$$\mathcal{A}_{[a,b]}(\delta) \subset \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta_1) \cap \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta_2).$$

DEMONSTRAÇÃO. Pela Proposição 2.1.4, temos que $\mathcal{A}_{[a,b]}(\delta) \neq \emptyset$. Seja $\Pi \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta)$, $\Pi := \{(I_k, \alpha_k)\}_{k \in \Lambda}$. Então, para todo $k \in \Lambda$, tem-se que

$$I_k \subset]\alpha_k - \delta(\alpha_k), \alpha_k + \delta(\alpha_k)[\subset]\alpha_k - \delta_i(\alpha_k), \alpha_k + \delta_i(\alpha_k)[, \quad 1 \leq i \leq 2,$$

e portanto $\Pi \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta_1) \cap \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta_2)$. ■

Além do conceito de partição δ -fina utilizaremos também o conceito de soma de Riemann para definir a integral de Kurzweil (Definição 2.1.7). Esse conceito é o seguinte:

Definição 2.1.6. *Sejam X um espaço de Riesz, $f \in X^{[a,b]}$ e $\Pi := \{(I_k, \alpha_k)\}_{k \in \Lambda}$ uma partição de $[a, b]$. O elemento $\sum_{k \in \Lambda} f(\alpha_k) m(I_k)$ de X é chamado de soma de Riemann de f em relação a partição Π e será denotado por $\sum_{\Pi} f$, isto é,*

$$\sum_{\Pi} f := \sum_{k \in \Lambda} f(\alpha_k) m(I_k).$$

Com auxílio dos conceitos que apresentamos até aqui definiremos, a seguir, o principal objeto de estudo deste trabalho.

Definição 2.1.7. *Seja X um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo. Dizemos que uma função $f \in X^{[a,b]}$ é Kurzweil integrável em $[a, b]$ se existe $L \in X$ satisfazendo:*

existe uma (D) -seqüência $(a_{ij})_{ij}$ de elementos de X de modo que,

para toda $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ existe $\delta = \delta(\varphi) \in \mathbb{R}_+^{[a,b]}$ tal que

$$\left| \sum_{\Pi} f - L \right| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}, \quad \text{para toda } \Pi \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta). \quad (2.5)$$

Note que, do fato de X ser um espaço de Riesz Dedekind σ -completo e $(a_{ij})_{ij}$ ser limitada tem-se, na Definição 2.1.7, que existe $\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}$, para toda $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Além disso, é importante ressaltar o seguinte resultado:

Proposição 2.1.8. *Seja X um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo. Se $f \in X^{[a,b]}$ é uma função Kurzweil integrável em $[a,b]$, então existe um único $L \in X$ satisfazendo (2.5).*

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que existam $L, M \in X$ satisfazendo (2.5). Dessa forma existem $(a_{ij})_{ij}$ e $(b_{ij})_{ij}$ (D) -seqüências de elementos de X de modo que, para toda $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, existem $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}_+^{[a,b]}$ tais que

$$\left| \sum_{\Pi_1} f - L \right| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}, \quad \text{para toda } \Pi_1 \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta_1); \quad (2.6)$$

$$\left| \sum_{\Pi_2} f - M \right| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} b_{i\varphi(i)}, \quad \text{para toda } \Pi_2 \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta_2). \quad (2.7)$$

Seja $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Considere $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}_+^{[a,b]}$ como em (2.6) e (2.7), respectivamente. Pela Proposição 2.1.5, existe $\Pi \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta_1) \cap \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta_2)$.

De (2.6), (2.7) e da Proposição 1.1.5 (5) e (7), tem-se que

$$\begin{aligned} |L - M| &= \left| L - \sum_{\Pi} f + \sum_{\Pi} f - M \right| \leq \left| L - \sum_{\Pi} f \right| + \left| \sum_{\Pi} f - M \right| \\ &= \left| \sum_{\Pi} f - L \right| + \left| \sum_{\Pi} f - M \right| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} + \bigvee_{j=1}^{\infty} b_{j\varphi(j)}, \end{aligned}$$

ou seja, $|L - M| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} + \bigvee_{j=1}^{\infty} b_{j\varphi(j)}$.

Defina $c_{ij} := 2(a_{ij} + b_{ij})$, para $i, j \in \mathbb{N}$. Observando que $\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} (a_{i\varphi(i)} + b_{i\varphi(i)})$, $\bigvee_{i=1}^{\infty} b_{i\varphi(i)} \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} (a_{i\varphi(i)} + b_{i\varphi(i)})$ e usando (1.14), obtemos

$$|L - M| \leq 2 \bigvee_{i=1}^{\infty} (a_{i\varphi(i)} + b_{i\varphi(i)}) = \bigvee_{i=1}^{\infty} 2(a_{i\varphi(i)} + b_{i\varphi(i)}) = \bigvee_{i=1}^{\infty} c_{i\varphi(i)}.$$

Como $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ é arbitrária podemos concluir que

$$|L - M| \leq \bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} c_{i\varphi(i)} \right) = 0,$$

onde a última igualdade decorre do fato de X ser um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo e $(c_{ij})_{ij}$ uma (D) -seqüência (Proposição 1.2.21). Portanto, pela Proposição 1.1.5 (1) e (4), temos que $L = M$. ■

Da Proposição 2.1.8 faz sentido a seguinte notação:

Notação 2.1.9. *Sejam X um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo e $f \in X^{[a,b]}$ uma função Kurzweil integrável em $[a, b]$. O único $L \in X$ que satisfaz (2.5) é denotado por $\int_a^b f$ e é chamado de integral de Kurzweil de f em $[a, b]$.*

A partir de elementos de $\mathbb{R}^{[a,b]}$ que são Riemann integráveis em $[a, b]$ construiremos funções a valores em um espaço de Riesz que são Kurzweil integráveis em $[a, b]$. Antes porém, lembremos que:

Uma função $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ é Riemann integrável em $[a, b]$ se existe um único $L \in \mathbb{R}$, chamado de integral de Riemann de f em $[a, b]$, satisfazendo:

para todo $\varepsilon > 0$ existe $\beta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{k \in \Lambda} f(\alpha_k) m(I_k) - L \right| \leq \varepsilon, \quad (2.8)$$

para toda $\Pi := \{(I_k, \alpha_k)\}_{k \in \Lambda}$ partição de $[a, b]$ satisfazendo $m(I_k) < \beta$, para todo $k \in \Lambda$, onde m é a medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$.

Neste trabalho, o número L que satisfaz (2.8) será denotado por $\int_a^b f$.

Exemplo 2.1.10. *Sejam X um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo, $c \in X$ e $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ uma função Riemann integrável em $[a, b]$. Considere a função $g \in X^{[a,b]}$ definida por $g(x) := c f(x)$, para todo $x \in [a, b]$. Então g é Kurzweil integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b g = c \int_a^b f$.*

De fato, considere a seqüência dupla $(a_{ij})_{ij}$ definida por $a_{ij} := \frac{|c|}{j}$, para $i, j \in \mathbb{N}$. De X ser um espaço de Riesz Dedekind σ -completo tem-se, pelo Teorema 1.1.13 e de (1.35), que $(a_{ij})_{ij}$ é uma (D) -seqüência de elementos de X . Para $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ fixada, seja $\varepsilon := \frac{1}{\varphi(n_0)} > 0$, onde $n_0 \in \mathbb{N}$ é tal que $\varphi(n_0) = \min_{i \in \mathbb{N}} \varphi(i)$. Como f é Riemann integrável em $[a, b]$, existe $\beta > 0$ de modo que

$$\left| \sum_{k \in \Lambda} f(\alpha_k) m(I_k) - \int_a^b f \right| \leq \varepsilon = \frac{1}{\varphi(n_0)},$$

para toda $\Pi := \{(I_k, \alpha_k)\}_{k \in \Lambda}$ partição de $[a, b]$ satisfazendo $m(I_k) < \beta$, para todo $k \in \Lambda$. Seja $\delta \in \mathbb{R}_+^{[a,b]}$ a função constante igual a $\beta/2$. Dessa forma, para toda $\Pi \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta)$, com $\Pi := \{(I_k, \alpha_k)\}_{k \in \Lambda}$, tem-se que $m(I_k) < 2\delta(\alpha_k) = \beta$, para todo $k \in \Lambda$, e assim

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\Pi} g - c \int_a^b f \right| &= \left| \sum_{k \in \Lambda} g(\alpha_k) m(I_k) - c \int_a^b f \right| \\ &= \left| \sum_{k \in \Lambda} c f(\alpha_k) m(I_k) - c \int_a^b f \right| \\ &= |c| \left| \sum_{k \in \Lambda} f(\alpha_k) m(I_k) - \int_a^b f \right| \leq |c| \frac{1}{\varphi(n_0)}, \end{aligned}$$

onde a terceira igualdade decorre da Proposição 1.1.5 (5). Com isso, da Proposição 1.1.7 (1), observando que $\frac{1}{\varphi(n_0)} = \max_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{\varphi(i)}$, obtem-se

$$\left| \sum_{\Pi} g - c \int_a^b f \right| \leq |c| \left(\max_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{\varphi(i)} \right) = \max_{i \in \mathbb{N}} \frac{|c|}{\varphi(i)} = \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}.$$

Logo g é Kurzweil integrável em $[a, b]$ e, pela Proposição 2.1.8, tem-se que $\int_a^b g = c \int_a^b f$.

Decorre do Exemplo 2.1.10 que, se X é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo e $g \in X^{[a,b]}$ é a função constante igual a c , para algum $c \in X$,

então g é Kurzweil integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b g = c(b - a)$.

No caso em que o espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo é o conjunto dos números reais concluímos, do Exemplo 2.1.10, o seguinte fato:

Observação 2.1.11. *Se $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ é uma função Riemann integrável em $[a, b]$, então f é Kurzweil integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b f = \int_a^b f$.*

O exemplo a seguir, além de apresentar mais uma função Kurzweil integrável, nos mostra que não vale a recíproca da Observação 2.1.11, isto é, se $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ e f é Kurzweil integrável em $[a, b]$ nem sempre se pode afirmar que f é Riemann integrável em $[a, b]$.

Exemplo 2.1.12. *Sejam X um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo e $c \in X$. Considere a função $f \in X^{[0,1]}$ dada por*

$$f(x) := \begin{cases} c & \text{se } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Então f é Kurzweil integrável em $[0, 1]$ e $\int_0^1 f = 0$. Além disso, se $X = \mathbb{R}$ e $c \neq 0$, então f não é Riemann integrável em $[0, 1]$.

De fato, considere a (D) -seqüência $(a_{ij})_{ij}$ de elementos de X definida por $a_{ij} := \frac{|c|}{j}$, para $i, j \in \mathbb{N}$ ((1.35) e Teorema 1.1.13), e seja $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma enumeração de $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Para $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ fixada, considere $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $\varphi(n_0) = \min_{i \in \mathbb{N}} \varphi(i)$ e defina $\delta \in \mathbb{R}_+^{[a,b]}$ por

$$\delta(x) := \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1} \varphi(n_0)} & \text{se } x = r_n \text{ para algum } n \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Dada $\Pi \in \mathcal{A}_{[0,1]}(\delta)$, $\Pi := \{(I_k, \alpha_k)\}_{k \in \Lambda}$ tem-se, considerando $\Gamma := \{k \in \Lambda \mid \alpha_k \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}\}$ e utilizando a Proposição 1.1.5 (5) e (7), que

$$\left| \sum_{\Pi} f \right| = \left| \sum_{k \in \Lambda} f(\alpha_k) m(I_k) \right| = \left| \sum_{k \in \Gamma} c m(I_k) \right| \leq |c| \sum_{k \in \Gamma} m(I_k) \leq |c| \sum_{k \in \Gamma} 2 \delta(\alpha_k),$$

ou seja,

$$\left| \sum_{\Pi} f \right| \leq |c| \sum_{k \in \Gamma} 2 \left(\frac{1}{2^{n_k+1} \varphi(n_0)} \right) = |c| \sum_{k \in \Gamma} \left(\frac{1}{2^{n_k} \varphi(n_0)} \right) = |c| \left(\frac{1}{\varphi(n_0)} \right) \sum_{k \in \Gamma} \frac{1}{2^{n_k}},$$

onde $\alpha_k = r_{n_k}$, para todo $k \in \Gamma$.

Observando que $\frac{1}{\varphi(n_0)} = \max_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{\varphi(i)}$ tem-se, pela Proposição 1.1.7 (1), que

$$|c| \frac{1}{\varphi(n_0)} = |c| \left(\max_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{\varphi(i)} \right) = \max_{i \in \mathbb{N}} \frac{|c|}{\varphi(i)} = \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}.$$

Assim

$$\left| \sum_{\Pi} f \right| \leq \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} \right) \sum_{k \in \Gamma} \frac{1}{2^{n_k}} \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)},$$

onde a última desigualdade decorre do fato de que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$. Com isso, concluímos que f é Kurzweil integrável em $[0, 1]$ e, pela Proposição 2.1.8, que $\int_0^1 f = 0$. No caso de $X = \mathbb{R}$ e $c \neq 0$ é fácil verificar que f não é Riemann integrável em $[0, 1]$.

A partir da Observação 2.1.11 e do Exemplo 2.1.12 podemos concluir, no caso em que o espaço de Riesz é o conjunto dos números reais, que o conceito de integral apresentado na Definição 2.1.7 estende o introduzido por Riemann.

Nosso próximo objetivo é provar, no caso em que $X = \mathbb{R}$, que a Definição 2.1.7 e o conceito de uma função ser Riemann generalizada integrável são equivalentes (Teorema 2.1.14). Para facilitar a prova desse resultado e fixar notação lembremos que

Uma função $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ é Riemann generalizada integrável em $[a, b]$ se existe um único $L \in \mathbb{R}$, chamado integral de Riemann generalizada de f em $[a, b]$, satisfazendo:

para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta \in \mathbb{R}_+^{[a,b]}$ tal que

$$\left| \sum_{\Pi} f - L \right| \leq \varepsilon, \quad \text{para toda } \Pi \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta). \quad (2.9)$$

Neste trabalho, o número L que satisfaz (2.9) será denotado por $R^* \int_a^b f$.

Antes de provarmos o Teorema 2.1.14 apresentaremos um exemplo que, seguindo o mesmo raciocínio do Exemplo 2.1.10 e utilizando (2.9), nos fornecerá ferramentas para construir funções a valores em um espaço de Riesz que são Kurzweil integráveis em $[a, b]$.

Exemplo 2.1.13. *Sejam X um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo, $c \in X$ e $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ Riemann generalizada integrável em $[a, b]$. Considere a função $g \in X^{[a,b]}$ definida por $g(x) := cf(x)$, para todo $x \in [a, b]$. Então g é Kurzweil integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b g = c \int_a^b f$*

De fato, seja $(a_{ij})_{ij}$ a (D) -seqüência de elementos de X definida por $a_{ij} := \frac{|c|}{j}$, para $i, j \in \mathbb{N}$ ((1.35) e Teorema 1.1.13). Fixe $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e considere $\varepsilon := \frac{1}{\varphi(n_0)} > 0$, onde $n_0 \in \mathbb{N}$ é tal que $\varphi(n_0) = \min_{i \in \mathbb{N}} \varphi(i)$. Como f é Riemann generalizada integrável em $[a, b]$, existe $\delta \in \mathbb{R}_+^{[a,b]}$ tal que

$$\left| \sum_{\Pi} f - \int_a^b f \right| \leq \varepsilon = \frac{1}{\varphi(n_0)}, \quad \text{para toda } \Pi \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta).$$

Dessa forma, para $\Pi \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta)$ temos que

$$\left| \sum_{\Pi} g - c \int_a^b f \right| = |c| \left| \sum_{\Pi} f - \int_a^b f \right| \leq |c| \frac{1}{\varphi(n_0)} = \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)},$$

onde a primeira igualdade decorre da Proposição 1.1.5 (5) e a última segue da Proposição 1.1.7 (1), observando que $\frac{1}{\varphi(n_0)} = \max_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{\varphi(i)}$. Portanto g é Kurzweil integrável em $[a, b]$ e, pela Proposição 2.1.8, $\int_a^b g = c \int_a^b f$.

Teorema 2.1.14. *Seja $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$. Tem-se que f é Riemann generalizada integrável em $[a, b]$ se, e somente se, f é Kurzweil integrável em $[a, b]$. Além disso, se f é Riemann generalizada integrável em $[a, b]$, então*

$$\int_a^b f = {}^R\int_a^b f.$$

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Exemplo 2.1.13, para $X = \mathbb{R}$ e $c = 1$, que, se f é Riemann generalizada integrável em $[a, b]$, então f é Kurzweil integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b f = {}^R\int_a^b f$.

Por outro lado, suponha f Kurzweil integrável em $[a, b]$.

Seja $(a_{ij})_{ij}$ uma (D) -seqüência de números reais de modo que, para toda $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ existe $\delta \in \mathbb{R}_+^{[a,b]}$ tal que

$$\left| \sum_{\Pi} f - \int_a^b f \right| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}, \quad \text{para toda } \Pi \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta). \quad (2.10)$$

Seja $\varepsilon > 0$. Como $\mathbb{R}$ é um espaço de Riesz Dedekind completo fracamente σ -distributivo (Exemplo 1.2.24 (1)) temos que $\bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} \right) = 0$, e dessa forma, existe $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} < \varepsilon$. Para esta $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ considere $\delta \in \mathbb{R}_+^{[a,b]}$ como em (2.10). Logo

$$\left| \sum_{\Pi} f - \int_a^b f \right| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} < \varepsilon, \quad \text{para toda } \Pi \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta),$$

ou seja,

$$\left| \sum_{\Pi} f - \int_a^b f \right| < \varepsilon, \quad \text{para toda } \Pi \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta).$$

Logo f é Riemann generalizada integrável em $[a, b]$ e ${}^R\int_a^b f = \int_a^b f$. ■

Corolário 2.1.15. *Se $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ é uma função Lebesgue integrável em $[a, b]$, então f é Kurzweil integrável em $[a, b]$ e as integrais coincidem.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue do fato de que toda função Lebesgue integrável em $[a, b]$ é uma função Riemann generalizada integrável em $[a, b]$ (ver [G]; Capítulo 10) e do Teorema 2.1.14. ■

No Corolário 2.1.15 utilizamos o fato de que o conjunto das funções reais Riemann generalizada integráveis em $[a, b]$ contém as funções Lebesgue integráveis em $[a, b]$. Com isso e pelo Teorema 2.1.14 tem-se que, no caso em que o espaço de Riesz é o conjunto dos números reais, podemos encontrar funções Kurzweil integráveis em $[a, b]$ que não são limitadas, como é caso da função $f \in \mathbb{R}^{[0,1]}$, onde $f(0) := 0$ e $f(x) := 1/\sqrt{x}$, se $x \in]0, 1]$. Do Exemplo 2.1.13, sabemos que tal f dá origem a uma função a valores em um espaço de Riesz que é Kurzweil integrável em $[0, 1]$; cabe perguntar se esta função, construída a partir da f , é não limitada. Esse é o assunto do próximo exemplo.

Exemplo 2.1.16. *Sejam X um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo e $c \in X$. Considere a função $g \in X^{[0,1]}$ definida por*

$$g(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ c/\sqrt{x} & \text{se } x \in]0, 1] \end{cases}.$$

Então g é Kurzweil integrável em $[0, 1]$ e $\int_0^1 g = 2c$. Além disso, se $c \neq 0$ então g é uma função não limitada, isto é, não existe $z \in X$ tal que $|g(x)| \leq z$, para todo $x \in [0, 1]$.

De fato, como $g := cf$, onde $f \in \mathbb{R}^{[0,1]}$ é a função Riemann generalizada integrável em $[0, 1]$ definida por $f(0) := 0$ e $f(x) := 1/\sqrt{x}$, se $x \in]0, 1]$, e $\int_0^1 f = 2$ (Corolário 2.1.15), segue, do Exemplo 2.1.13, que g é Kurzweil integrável em $[0, 1]$ e

$$\int_0^1 g = c \int_0^1 f = 2c.$$

Considere $c \neq 0$. Suponha, por absurdo, g limitada, isto é, existe $z \in X$ tal que $|g(x)| \leq z$, para todo $x \in [0, 1]$. Dessa forma,

$$n|c| = \frac{|c|}{\sqrt{1/n^2}} = \left| g\left(\frac{1}{n^2}\right) \right| \leq z, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

De X ser um espaço de Riesz Dedekind σ -completo tem-se, pelo Teorema 1.1.13, que X é um espaço de Riesz Arquimediano. Com isso temos que $|c| \leq 0$, donde, pela Proposição

1.1.5 (1) e (4), conclui-se que $c = 0$, o que é uma contradição. Portanto, para $c \neq 0$, g é uma função não limitada em X .

Do Exemplo 2.1.16 concluímos que ser limitada não é uma condição necessária para que uma função $f \in X^{[a,b]}$ seja Kurzweil integrável em $[a, b]$, onde X é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo. Note que o fato de X ser um espaço de Riesz Arquimediano, foi de extrema importância.

Finalizamos esta seção observando que alguns dos exemplos aqui apresentados poderiam ter sido obtidos a partir do Teorema 2.1.14, do Corolário 2.1.15 e das propriedades das funções que são Kurzweil integráveis em $[a, b]$ (Proposição 2.2.2). Contudo, com a finalidade de apresentar maneiras de se construir (D) -seqüências que satisfazem (2.5), optamos por construir os exemplos utilizando somente a Definição 2.1.7.

2.2 Algumas propriedades da integral de Kurzweil

Das propriedades aqui apresentadas destacamos que existe um Critério de Cauchy para funções Kurzweil integráveis definidas em $[a, b]$ e a valores em um espaço de Riesz Dedekind completo fracamente σ -distributivo (Teorema 2.2.11). Como consequência desse fato veremos que a restrição dessas funções a um intervalo $[c, d] \subset [a, b]$ são funções Kurzweil integráveis em $[c, d]$ (Corolário 2.2.13).

Iniciamos esta seção explorando algumas propriedades do conjunto

$$\mathcal{K}_X([a, b]) := \{f \in X^{[a,b]} \mid f \text{ Kurzweil integrável em } [a, b]\},$$

onde X é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo.

Nosso primeiro resultado mostra que $\mathcal{K}_X([a, b])$, munido com as operações de soma e produto por escalar usuais, tem estrutura de espaço vetorial.

Teorema 2.2.1. *Sejam X um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f, g \in X^{[a,b]}$ funções Kurzweil integráveis em $[a, b]$. Então $f + g$ e αf são Kurzweil integráveis em $[a, b]$. Além disso, tem-se que*

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g \quad e \quad \int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f.$$

DEMONSTRAÇÃO. Como f e g são funções Kurzweil integráveis em $[a, b]$ existem $(a_{ij})_{ij}$ e $(b_{ij})_{ij}$ (D) -seqüências de elementos de X de modo que, para toda $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ existem $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}_+^{[a,b]}$ tais que

$$\left| \sum_{\Pi_1} f - \int_a^b f \right| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}, \quad \text{para toda } \Pi_1 \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta_1); \quad (2.11)$$

$$\left| \sum_{\Pi_2} g - \int_a^b g \right| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} b_{i\varphi(i)}, \quad \text{para toda } \Pi_2 \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta_2). \quad (2.12)$$

Seja $(c_{ij})_{ij}$ a (D) -seqüência de elementos de X definida por $c_{ij} := 2(a_{ij} + b_{ij})$, para $i, j \in \mathbb{N}$ (Proposição 1.2.21). Para $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ fixada, considere $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}_+^{[a,b]}$ como em (2.11) e (2.12), respectivamente, e defina $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Pela Proposição 2.1.5 tem-se que $\mathcal{A}_{[a,b]}(\delta) \subset \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta_1) \cap \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta_2)$. Com isso, para toda $\Pi \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta)$, de (2.11), (2.12) e da Proposição 1.1.5 (7), temos

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\Pi} (f + g) - \left(\int_a^b f + \int_a^b g \right) \right| &= \left| \left(\sum_{\Pi} f - \int_a^b f \right) + \left(\sum_{\Pi} g - \int_a^b g \right) \right| \\ &\leq \left| \sum_{\Pi} f - \int_a^b f \right| + \left| \sum_{\Pi} g - \int_a^b g \right| \\ &\leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} + \bigvee_{j=1}^{\infty} b_{j\varphi(j)}, \end{aligned}$$

ou seja, $\left| \sum_{\Pi} (f + g) - \left(\int_a^b f + \int_a^b g \right) \right| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} + \bigvee_{j=1}^{\infty} b_{j\varphi(j)}$. Observando que

$$\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} (a_{i\varphi(i)} + b_{i\varphi(i)}) \quad , \quad \bigvee_{i=1}^{\infty} b_{i\varphi(i)} \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} (a_{i\varphi(i)} + b_{i\varphi(i)}),$$

e usando (1.14), obtemos

$$\left| \sum_{\Pi} (f + g) - \left(\int_a^b f + \int_a^b g \right) \right| \leq 2 \bigvee_{i=1}^{\infty} (a_{i\varphi(i)} + b_{i\varphi(i)}) = \bigvee_{i=1}^{\infty} 2(a_{i\varphi(i)} + b_{i\varphi(i)}) = \bigvee_{i=1}^{\infty} c_{i\varphi(i)}.$$

Logo $f + g$ é Kurzweil integrável em $[a, b]$ e, pela Proposição 2.1.8,

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Para provar que αf é Kurzweil integrável em $[a, b]$, considere a (D) -seqüência $(d_{ij})_{ij}$ de elementos de X definida por $d_{ij} := |\alpha| a_{ij}$, para $i, j \in \mathbb{N}$ (Proposição 1.2.21). Fixada $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, seja $\delta_1 \in \mathbb{R}_+^{[a, b]}$ como em (2.11). Para toda partição $\Pi_1 \in \mathcal{A}_{[a, b]}(\delta_1)$ temos, pela Proposição 1.1.5 (5) e por (1.14), que

$$\left| \sum_{\Pi_1} \alpha f - \alpha \int_a^b f \right| = |\alpha| \left| \sum_{\Pi_1} f - \int_a^b f \right| \leq |\alpha| \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} = \bigvee_{i=1}^{\infty} d_{i\varphi(i)}.$$

Com isso segue que αf é Kurzweil integrável em $[a, b]$ e, pela Proposição 2.1.8,

$$\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f. \quad \blacksquare$$

Do Teorema 2.2.1, é fácil verificar que uma combinação linear de funções Kurzweil integráveis em $[a, b]$ é também Kurzweil integrável em $[a, b]$. Além disso, tem-se que

Proposição 2.2.2. *Sejam X um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo e $n \in \mathbb{N}$. Para $1 \leq i \leq n$, sejam $c_i \in X$ e $f_i \in \mathbb{R}^{[a, b]}$ função Riemann generalizada integrável em $[a, b]$. Se $f \in X^{[a, b]}$ é dada por $f := \sum_{i=1}^n c_i f_i$, então f é Kurzweil integrável em $[a, b]$ e*

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^n c_i \int_a^b f_i.$$

DEMONSTRAÇÃO. Por hipótese, para todo $1 \leq i \leq n$, a função $f_i \in \mathbb{R}^{[a, b]}$ é Riemann generalizada integrável em $[a, b]$ e assim, do Exemplo 2.1.13, tem-se que $c_i f_i$ é Kurzweil integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b c_i f_i = c_i \int_a^b f_i.$$

Portanto, pelo Teorema 2.2.1, concluímos que f é Kurzweil integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^n \int_a^b c_i f_i = \sum_{i=1}^n c_i \int_a^b f_i. \quad \blacksquare$$

A partir da Proposição 2.2.2 podemos concluir o seguinte resultado que será útil na construção de alguns exemplos.

Sejam X um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo e $n \in \mathbb{N}$. Para $1 \leq i \leq n$, sejam $c_i \in X$ e J_i intervalos de $[a, b]$ satisfazendo $\bigcup_{k=1}^n J_k = [a, b]$ e $m(J_k \cap J_i) = 0$, se $k \neq i$, $1 \leq k \leq n$. Se $f \in X^{[a,b]}$ é dada por $f := \sum_{i=1}^n c_i \chi_{J_i}$, então f é Kurzweil integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n c_i \chi_{J_i} \right) = \sum_{i=1}^n c_i m(J_i), \quad (2.13)$$

onde χ_{J_i} é a função característica de J_i , $1 \leq i \leq n$, e m é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$.

No espaço vetorial $\mathcal{K}_X([a, b])$ considere a relação de ordem parcial induzida pela usual de $X^{[a,b]}$ (Exemplo 1.1.2 (5)). Nesse caso, faz sentido a seguinte definição:

Dizemos que $f \in \mathcal{K}_X([a, b])$ é uma função não-negativa se $0 \leq f$.

Mostraremos a seguir que a aplicação

$$T : f \in \mathcal{K}_X([a, b]) \mapsto \int_a^b f \in X,$$

que pelo Teorema 2.2.1, é linear, satisfaz

$$T(\{f \in \mathcal{K}_X([a, b]) \mid 0 \leq f\}) \subset X^+.$$

Teorema 2.2.3. *Seja X um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo. Se $f \in X^{[a,b]}$ é Kurzweil integrável em $[a, b]$ e f é não-negativa, então*

$$0 \leq \int_a^b f.$$

DEMONSTRAÇÃO. De f ser Kurzweil integrável em $[a, b]$, existe uma (D) -seqüência $(a_{ij})_{ij}$ de elementos de X de modo que, para toda $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ existe $\delta \in \mathbb{R}_+^{[a,b]}$ tal que

$$\left| \sum_{\Pi} f - \int_a^b f \right| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}, \quad \text{para toda } \Pi \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta).$$

Da hipótese de f ser não negativa e de (1.1), tem-se que $0 \leq \sum_{\Pi} f$. Dessa forma

$$-\int_a^b f \leq \sum_{\Pi} f - \int_a^b f \leq \left| \sum_{\Pi} f - \int_a^b f \right| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)},$$

onde as duas primeiras desigualdades decorrem de (1.1) e da Proposição 1.1.5 (2), respectivamente. Logo $-\int_a^b f \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}$.

Como $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ é arbitrária e X é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo concluímos que

$$-\int_a^b f \leq \bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} \right) = 0,$$

e portanto, de (1.2), segue o resultado. ■

Uma consequência do Teorema 2.2.3 é que, se duas funções em $\mathcal{K}_X([a, b])$ são “comparáveis”, então as respectivas integrais também o são. Mais precisamente temos o seguinte resultado.

Corolário 2.2.4. *Seja X um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo. Se $f, g \in X^{[a,b]}$ são funções Kurzweil integráveis em $[a, b]$ e $f \leq g$, então*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

DEMONSTRAÇÃO. Defina $h := g - f$. Então $0 \leq h$, donde, pelo Teorema 2.2.1 e pelo Teorema 2.2.3, temos que h é Kurzweil integrável em $[a, b]$ e $0 \leq \int_a^b h = \int_a^b g - \int_a^b f$. ■

Do Corolário 2.2.4 e do fato de que as funções constantes são Kurzweil integráveis segue que:

Se X é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo e $f \in X^{[a,b]}$ é uma função Kurzweil integrável em $[a, b]$ e limitada, então para quaisquer $z, w \in X$ tais que $z \leq f(x) \leq w$, para todo $x \in [a, b]$, tem-se que

$$z(b-a) \leq \int_a^b f \leq w(b-a). \quad (2.14)$$

A partir de alguns resultados de convergência de seqüências de elementos de um espaço de Riesz (Capítulo 1) e do Corolário 2.2.4, apresentaremos, no próximo exemplo, uma função que não é Kurzweil integrável em $[0, 1]$.

Exemplo 2.2.5. *Sejam X um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo e $c \in X$. Considere a função $f \in X^{[0,1]}$ definida por*

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ |c|/x & \text{se } x \in]0, 1] \end{cases}.$$

Então f não é Kurzweil integrável em $[0, 1]$.

De fato, suponha, por absurdo, que f seja Kurzweil integrável em $[0, 1]$. Defina $g_1 := 0$ e, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, considere a função $g_n \in X^{[0,1]}$ dada por

$$g_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ k|c| & \text{se } x \in]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}], \text{ para algum } 1 \leq k \leq n-1 \end{cases},$$

ou seja, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $g_n := \sum_{k=1}^{n-1} k|c| \chi_{] \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]}$, onde χ_J denota a função característica do intervalo J . Então, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, tem-se, de (2.13), que g_n é Kurzweil integrável em $[0, 1]$ e

$$\int_0^1 g_n = \sum_{k=1}^{n-1} k|c| \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|c|}{k+1}.$$

Observando que $g_n \leq f$, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue, do Corolário 2.2.4, que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{|c|}{k+1} = \int_0^1 g_n \leq \int_0^1 f, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Dessa forma, a seqüência não-decrescente $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde $s_n := \sum_{k=1}^n \frac{|c|}{k}$, para $n \in \mathbb{N}$, é limitada superiormente por $\int_0^1 f$. De X ser um espaço de Riesz Dedekind σ -completo tem-se, pelo Teorema 1.2.6, que existe $s \in X$ tal que $s_n \nearrow s$, ou equivalentemente $s_n \xrightarrow{o} s$ (Teorema 1.2.12). Mas isso contradiz o Exemplo 1.2.13. Logo f não é Kurzweil integrável em $[0, 1]$.

Observando o Exemplo 2.1.16 e o Exemplo 2.2.5 podemos concluir que, no caso de X ser também uma álgebra, o produto de duas funções Kurzweil integráveis pode não ser uma função Kurzweil integrável, e assim $\mathcal{K}_X([a, b])$, nesse caso, não é uma álgebra.

No próximo resultado analisamos como a integral de Kurzweil se relaciona com o módulo definido no contexto de espaços de Riesz.

Proposição 2.2.6. *Seja X um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo. Se $f, |f| \in X^{[a,b]}$ são Kurzweil integráveis em $[a, b]$ então*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

DEMONSTRAÇÃO. Da Proposição 1.1.5 (2), tem-se que $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, para todo $x \in [a, b]$, logo $-|f| \leq f \leq |f|$. Dessa forma, pelo Corolário 2.2.4 e do Teorema 2.2.1, temos

$$-\int_a^b |f| = \int_a^b (-|f|) \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|,$$

e assim, usando a Proposição 1.1.5 (6), concluimos a prova. ■

Note que, na Proposição 2.2.6 exigimos que as funções f e $|f|$ fossem Kurzweil integráveis em $[a, b]$. De fato, a condição de f ser Kurzweil integrável em $[a, b]$ não é

suficiente para garantir que a função $|f|$ seja Kurzweil integrável em $[a, b]$. O exemplo a seguir ilustra essa situação.

Exemplo 2.2.7. *Sejam X um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo e $c \in X$. Considere $t_0 := 0$, $t_n := 1 - 1/2^n$, para $n \in \mathbb{N}$. Defina $f \in X^{[0,1]}$ por*

$$f(x) := \begin{cases} \frac{|c| 2^n (-1)^{n+1}}{n} & \text{se } x \in [t_{n-1}, t_n[, \text{ para algum } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}. \quad (2.15)$$

Então f é Kurzweil integrável em $[0, 1]$ e $\int_0^1 f = |c| \log 2$. Além disso, se $c \neq 0$, então $|f|$ não é Kurzweil integrável em $[0, 1]$.

De fato, para concluir que f é Kurzweil integrável em $[0, 1]$ e que $\int_0^1 f = |c| \log 2$, basta observar que $f := |c| h$, onde $h \in \mathbb{R}^{[0,1]}$ é a função Riemann generalizada integrável em $[0, 1]$ definida por

$$h(x) := \begin{cases} 2^n \frac{(-1)^{n+1}}{n} & \text{se } x \in [t_{n-1}, t_n[, \text{ para algum } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases},$$

que $\int_0^1 h = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$ (ver [B]; p. 33) e usar o Exemplo 2.1.13. Considere $c \neq 0$ e suponha, por absurdo, que $|f|$ seja Kurzweil integrável em $[0, 1]$. Para $n \in \mathbb{N}$, considere a função $g_n \in X^{[0,1]}$ definida por

$$g_n(x) := \begin{cases} |f(x)| & \text{se } x \in [0, t_n[\\ 0 & \text{se } x \in [t_n, 1] \end{cases},$$

ou seja, para $n \in \mathbb{N}$, $g_n := \sum_{k=1}^n \left(|c| \frac{2^k}{k} \chi_{[t_{k-1}, t_k[} \right)$, onde χ_J é a função característica do intervalo J . Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se, de (2.13), que g_n é Kurzweil integrável em $[0, 1]$ e

$$\int_0^1 g_n = \sum_{k=1}^n |c| \frac{2^k}{k} (t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{|c|}{k}.$$

Note que $g_n \leq |f|$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e assim, do Corolário 2.2.4, segue que

$$\sum_{k=1}^n \frac{|c|}{k} = \int_0^1 g_n \leq \int_0^1 |f|, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

o que implica que a seqüência não-decrescente $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dada por $s_n := \sum_{k=1}^n \frac{|c|}{k}$, para $n \in \mathbb{N}$, é limitada superiormente por $\int_0^1 |f|$. Como X é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo existe $s \in X$ tal que $s_n \xrightarrow{o} s$ (Teorema 1.2.6 e Teorema 1.2.12). Mas isso contradiz o Exemplo 1.2.13. Logo, $|f|$ não é Kurzweil integrável em $[0, 1]$.

Decorre do Exemplo 2.2.7 que o espaço vetorial $\mathcal{K}_X([a, b])$ com a ordem parcial induzida pela usual de $X^{[a, b]}$ não é um espaço de Riesz. De fato, se $f \in X^{[0, 1]}$ é a função definida em (2.15), então $f \in \mathcal{K}_X([0, 1])$ e, pelo Teorema 2.2.1, $-f \in \mathcal{K}_X([0, 1])$. No entanto, $f \vee (-f) = |f| \notin \mathcal{K}_X([0, 1])$, ou seja, $\mathcal{K}_X([0, 1])$ não é um reticulado e portanto não é um espaço de Riesz.

A seguir analisamos a existência da integral de Kurzweil de uma função, no caso em que seu módulo é “dominado” por uma função Kurzweil integrável cuja integral é nula.

Proposição 2.2.8. *Sejam X um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo, $f, g \in X^{[a, b]}$ funções tais que $|f| \leq g$. Se g é Kurzweil integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b g = 0$ então f e $|f|$ são Kurzweil integráveis em $[a, b]$ e $\int_a^b f = 0 = \int_a^b |f|$.*

DEMONSTRAÇÃO. Note que, para toda partição Π de $[a, b]$ temos, como consequência de (1.1), que $\sum_{\Pi} |f| \leq \sum_{\Pi} g$. Dessa forma, da Proposição 1.1.5 (3) e (7), obtem-se

$$\left| \sum_{\Pi} f \right| \leq \sum_{\Pi} |f| \leq \sum_{\Pi} g = \left| \sum_{\Pi} g \right|. \quad (2.16)$$

Do fato de g ser Kurzweil integrável em $[a, b]$ e de $\int_a^b g = 0$, existe uma (D) -seqüência

$(a_{ij})_{ij}$ de elementos de X de modo que, para toda $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ existe $\delta \in \mathbb{R}_+^{[a,b]}$ tal que

$$\left| \sum_{\Pi} g \right| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}, \quad \text{para toda } \Pi \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta).$$

Assim, observando que $\left| \sum_{\Pi} |f| \right| = \sum_{\Pi} |f|$, concluimos, de (2.16), a demonstração. $\blacksquare$

Estudaremos, a seguir, como podemos relacionar a existência da integral de uma função $f \in X^{[a,b]}$ com a integral de sua restrição a intervalos contidos em $[a, b]$.

Nos próximos resultados, para facilitar a escrita, utilizaremos a seguinte definição e notação:

Dizemos que $f \in X^{[a,b]}$, onde X é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo, é Kurzweil integrável em um intervalo fechado J contido em $[a, b]$, se a restrição de f a J é Kurzweil integrável em J .

Se $f \in X^{[a,b]}$ e f é Kurzweil integrável em $[c, d] \subset [a, b]$ escreveremos $\int_c^d f$ para representar $\int_c^d f|_{[c,d]}$.

Teorema 2.2.9. *Sejam X um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo, $f \in X^{[a,b]}$ e $c \in]a, b[$. Se f é Kurzweil integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$, então f é Kurzweil integrável em $[a, b]$ e*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

DEMONSTRAÇÃO. Da hipótese, existem (D) -seqüências $(a_{ij})_{ij}$ e $(b_{ij})_{ij}$ de elementos de X de modo que, para toda $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ existem $\delta_1 \in \mathbb{R}_+^{[a,c]}$ e $\delta_2 \in \mathbb{R}_+^{[c,b]}$ satisfazendo

$$\left| \sum_{\Pi_1} f - \int_a^c f \right| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}, \quad \text{para toda } \Pi_1 \in \mathcal{A}_{[a,c]}(\delta_1); \quad (2.17)$$

$$\left| \sum_{\Pi_2} f - \int_c^b f \right| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} b_{i\varphi(i)}, \quad \text{para toda } \Pi_2 \in \mathcal{A}_{[c,b]}(\delta_2). \quad (2.18)$$

Seja $(c_{ij})_{ij}$ a (D) -seqüência de elementos de X dada por $c_{ij} := 2(a_{ij} + b_{ij})$, para $i, j \in \mathbb{N}$ (Proposição 1.2.21). Fixe $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e considere $\delta_1 \in \mathbb{R}^{[a,c]}$ e $\delta_2 \in \mathbb{R}^{[c,b]}$ como em (2.17) e (2.18), respectivamente. Defina $\delta \in \mathbb{R}_+^{[a,b]}$ por

$$\delta(x) := \begin{cases} \min\{\delta_1(x), \frac{1}{2}(c-x)\} & \text{se } x \in [a, c[\\ \min\{\delta_2(x), \frac{1}{2}(x-c)\} & \text{se } x \in]c, b] \\ \min\{\delta_1(c), \delta_2(c)\} & \text{se } x = c \end{cases}.$$

Considere $\Pi \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta)$, com $\Pi := \{(I_k, \alpha_k)\}_{k \in \Lambda}$, onde $I_k = [u_k, v_k]$, para todo $k \in \Lambda$. Mostraremos que existe $k_0 \in \Lambda$ de modo que ou $c = u_{k_0}$, ou $c = v_{k_0}$, ou $c = \alpha_{k_0}$.

Suponha, por absurdo, que $c \in]u_k, v_k[$ e $c \neq \alpha_k$, para $k \in \Lambda$. Como $\Pi \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta)$ temos $[u_k, v_k] \subset]\alpha_k - \delta(\alpha_k), \alpha_k + \delta(\alpha_k)[$, e assim

$$v_k - u_k \leq 2\delta(\alpha_k) \leq 2 \frac{|\alpha_k - c|}{2} < v_k - u_k,$$

o que é um absurdo. Logo existe $k_0 \in \Lambda$ tal que ou $c = u_{k_0}$, ou $c = v_{k_0}$, ou $c = \alpha_{k_0}$.

No caso em que c é um dos extremos do intervalo I_{k_0} , ou seja, se c é extremo de um dos intervalos de Π , podemos escrever $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$, onde $\Pi_1 := \{(I_k, \alpha_k) \in \Pi \mid I_k \cap [a, c[\neq \emptyset\}$ e $\Pi_2 := \Pi \setminus \Pi_1$. É claro que $\Pi_1 \in \mathcal{A}_{[a,c]}(\delta_1)$ e $\Pi_2 \in \mathcal{A}_{[c,b]}(\delta_2)$, e assim, de (2.17), (2.18) e pela Proposição 1.1.5 (7), tem-se que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\Pi} f - \int_a^c f - \int_c^b f \right| &= \left| \sum_{\Pi_1} f - \int_a^c f + \sum_{\Pi_2} f - \int_c^b f \right| \\ &\leq \left| \sum_{\Pi_1} f - \int_a^c f \right| + \left| \sum_{\Pi_2} f - \int_c^b f \right| \\ &\leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} + \bigvee_{i=1}^{\infty} b_{i\varphi(i)}. \end{aligned}$$

Observando que $\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} (a_{i\varphi(i)} + b_{i\varphi(i)})$ e $\bigvee_{i=1}^{\infty} b_{i\varphi(i)} \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} (a_{i\varphi(i)} + b_{i\varphi(i)})$ temos, de (1.14), que

$$\left| \sum_{\Pi} f - \int_a^c f - \int_c^b f \right| \leq 2 \bigvee_{i=1}^{\infty} (a_{i\varphi(i)} + b_{i\varphi(i)}) = \bigvee_{i=1}^{\infty} 2(a_{i\varphi(i)} + b_{i\varphi(i)}) = \bigvee_{i=1}^{\infty} c_{i\varphi(i)},$$

ou seja,

$$\left| \sum_{\Pi} f - \int_a^c f - \int_c^b f \right| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} c_{i\varphi(i)}, \quad (2.19)$$

nesse caso.

Por outro lado, se $c = \alpha_{k_0}$, considere os intervalos $J = [u_{k_0}, c]$ e $J' = [c, v_{k_0}]$ e defina $\Pi' = \{(J, c), (J', c)\} \cup (\Pi \setminus \{(I_{k_0}, c)\})$. Note que $\Pi' \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta)$ e

$$\begin{aligned} \sum_{\Pi'} f &= \sum_{\Pi} f - f(c) m(I_{k_0}) + f(c) m(J) + f(c) m(J') \\ &= \sum_{\Pi} f - f(c)(v_{k_0} - u_{k_0}) + f(c)(c - u_{k_0}) + f(c)(v_{k_0} - c) = \sum_{\Pi} f. \end{aligned}$$

Como c é extremo de um dos intervalos de Π' temos, com raciocínio análogo ao caso anterior, que

$$\left| \sum_{\Pi'} f - \int_a^c f - \int_c^b f \right| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} c_{i\varphi(i)},$$

e como $\sum_{\Pi} f = \sum_{\Pi'} f$ temos que

$$\left| \sum_{\Pi} f - \int_a^c f - \int_c^b f \right| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} c_{i\varphi(i)}, \quad (2.20)$$

também nesse caso.

De (2.19) e (2.20), temos que

$$\left| \sum_{\Pi} f - \int_a^c f - \int_c^b f \right| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} c_{i\varphi(i)}, \quad \text{para toda } \Pi \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta),$$

donde concluímos que f é Kurzweil integrável em $[a, b]$ e, pela Proposição 2.1.8,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \quad \blacksquare$$

Quanto a recíproca do Teorema 2.2.9, mostraremos que ela é verdadeira no caso em que o espaço de Riesz é Dedekind completo fracamente σ -distributivo. Antes porém apresentaremos um lema e uma caracterização das funções Kurzweil integráveis em $[a, b]$ que nos serão úteis.

Lema 2.2.10. *Sejam X um espaço de Riesz Dedekind completo fracamente σ -distributivo, $(a_{ij})_{ij}$ uma (D) -seqüência de elementos de X e $f \in X^{[a,b]}$ satisfazendo:*

para toda $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ existe $\delta = \delta(\varphi) \in \mathbb{R}_+^{[a,b]}$ tal que

$$\left| \sum_{\Pi_1} f - \sum_{\Pi_2} f \right| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}, \quad \text{para quaisquer } \Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta). \quad (2.21)$$

Se $P := \{\delta \in \mathbb{R}_+^{[a,b]} \mid (2.21) \text{ é verdadeira para alguma } \varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$, então são verdadeiras as seguintes afirmações:

1. $P \neq \emptyset$;
2. para todo $\delta \in P$, o conjunto $B_\delta := \left\{ \sum_{\Pi} f \mid \Pi \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta) \right\}$ admite supremo M_δ e ínfimo m_δ ;
3. para todo $\delta \in P$, tem-se que $M_\delta - m_\delta \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}$, onde M_δ e m_δ são como em 2. e $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ é tal que (2.21) é verdadeira;
4. $\bigvee_{\delta \in P} m_\delta \leq \bigwedge_{\delta \in P} M_\delta$, onde M_δ e m_δ são como em 2.

DEMONSTRAÇÃO. Como f satisfaz (2.21), é claro que 1. é verdadeira.

Fixe $\delta \in P$ e seja $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ satisfazendo (2.21) tal que $\delta = \delta(\varphi)$.

Note que B_δ é não vazio pois $\mathcal{A}_{[a,b]}(\delta) \neq \emptyset$ (Proposição 2.1.4) e que fixada $\Pi_2 \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta)$, temos, de (2.21) e da Proposição 1.1.5 (6), que

$$\sum_{\Pi_2} f - \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} \leq \sum_{\Pi} f \leq \sum_{\Pi_2} f + \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}, \quad \text{para toda } \Pi \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta), \quad (2.22)$$

o que implica que B_δ é limitado. De X ser um espaço de Riesz Dedekind completo, existem $m_\delta, M_\delta \in X$ tais que $m_\delta := \inf B_\delta$ e $M_\delta := \sup B_\delta$, e portanto 2. é verdadeira.

Para provar 3. basta observar que, por (2.22), temos $M_\delta \leq \sum_{\Pi_2} f + \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}$, e assim, como $\Pi_2 \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta)$ é arbitrária, segue que $M_\delta - \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} \leq m_\delta$, ou seja,

$$M_\delta - m_\delta \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}.$$

Finalmente provaremos 4. Para isso, considere $\delta_1, \delta_2 \in P$ e defina $\delta_3 := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Do fato de que $\mathcal{A}_{[a,b]}(\delta_3) \subset \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta_1) \cap \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta_2) \subset \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta_1)$ (Proposição 2.1.5), temos que $\delta_3 \in P$ e $B_{\delta_3} \subset B_{\delta_1} \cap B_{\delta_2}$. Logo $m_{\delta_1} \leq m_{\delta_3} \leq M_{\delta_3} \leq M_{\delta_2}$, ou seja,

$$m_{\delta_1} \leq M_{\delta_2}, \quad \text{para quaisquer } \delta_1, \delta_2 \in P.$$

Fixe $\delta_2 \in P$. Então, usando que X é um espaço de Riesz Dedekind completo, tem-se que $\bigvee_{\delta \in P} m_\delta \leq M_{\delta_2}$. Uma vez que $\delta_2 \in P$ é arbitrária obtem-se 4. $\blacksquare$

No Teorema 2.2.11 apresentaremos, para o caso em que o espaço de Riesz é Dedekind completo fracamente σ -distributivo, um Critério de Cauchy que caracteriza as funções que são Kurzweil integráveis em $[a, b]$.

Teorema 2.2.11 (Critério de Cauchy). *Sejam X um espaço de Riesz Dedekind completo fracamente σ -distributivo e $f \in X^{[a,b]}$. São equivalentes as seguintes afirmações:*

1. f é Kurzweil integrável em $[a, b]$;
2. existe uma (D) -seqüência $(a_{ij})_{ij}$ de elementos de X de modo que, para toda $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ existe $\delta = \delta(\varphi) \in \mathbb{R}_+^{[a,b]}$ tal que

$$\left| \sum_{\Pi_1} f - \sum_{\Pi_2} f \right| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}, \quad \text{para quaisquer } \Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta(\varphi)). \quad (2.23)$$

DEMONSTRAÇÃO. Suponha 1. verdadeira. Então, existe uma (D) -seqüência $(b_{ij})_{ij}$ de elementos de X tal que, para toda $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ existe $\delta \in \mathbb{R}_+^{[a,b]}$ satisfazendo

$$\left| \sum_{\Pi} f - \int_a^b f \right| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} b_{i\varphi(i)}, \quad \text{para toda partição } \Pi \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta). \quad (2.24)$$

Defina a (D) -seqüência $(a_{ij})_{ij}$ de elementos de X por $a_{ij} := 2b_{ij}$, para $i, j \in \mathbb{N}$ (Proposição 1.2.21).

Seja $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e considere $\delta \in \mathbb{R}_+^{[a,b]}$ como em (2.24). Se $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta)$ temos, pela Proposição 1.1.5 (7) e por (1.14), que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\Pi_1} f - \sum_{\Pi_2} f \right| &= \left| \sum_{\Pi_1} f - \int_a^b f + \int_a^b f - \sum_{\Pi_2} f \right| \\ &\leq \left| \sum_{\Pi_1} f - \int_a^b f \right| + \left| \int_a^b f - \sum_{\Pi_2} f \right| \\ &\leq 2 \bigvee_{i=1}^{\infty} b_{i\varphi(i)} = \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}. \end{aligned}$$

Portanto a (D) -seqüência $(a_{ij})_{ij}$ verifica 2.

Provaremos que 2. implica 1.

Seja $(a_{ij})_{ij}$ uma (D) -seqüência de elementos de X como em 2.

Para toda $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, considere $\delta(\varphi) \in \mathbb{R}_+^{[a,b]}$ satisfazendo (2.23). Defina

$$Q := \{ \delta(\psi) \in \mathbb{R}_+^{[a,b]} \mid \psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \}.$$

Note que f se encontra nas hipóteses do Lema 2.2.10, e assim, usando a mesma notação do lema e observando que $\emptyset \neq Q \subset P$, temos

$$\bigvee_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} m_{\delta(\varphi)} \leq \bigvee_{\delta \in P} m_{\delta} \leq \bigwedge_{\delta \in P} M_{\delta} \leq \bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} M_{\delta(\varphi)}. \quad (2.25)$$

Fixe $\psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e seja $\delta(\psi) \in Q$. Do Lema 2.2.10 (3) temos, que $M_{\delta(\psi)} - m_{\delta(\psi)} \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\psi(i)}$, e com isso, de (2.25), obtem-se

$$0 \leq \bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} M_{\delta(\varphi)} - \bigvee_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} m_{\delta(\varphi)} \leq M_{\delta(\psi)} - m_{\delta(\psi)} \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\psi(i)}.$$

Como $\psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ é arbitrária conclui-se, usando que X é um espaço de Riesz Dedekind completo fracamente σ -distributivo, que

$$0 \leq \bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} M_{\delta(\varphi)} - \bigvee_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} m_{\delta(\varphi)} \leq \bigwedge_{\psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\psi(i)} \right) = 0,$$

ou seja,

$$\bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} M_{\delta(\varphi)} = \bigvee_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} m_{\delta(\varphi)}. \quad (2.26)$$

Mostraremos que $L := \bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} M_{\delta(\varphi)}$ satisfaz (2.5) e assim concluiremos que 2. implica 1.

Fixe $\psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e considere $\delta = \delta(\psi) \in \mathbb{R}_+^{[a,b]}$ como em (2.23). Para toda $\Pi \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta(\psi))$, tem-se, do Lema 2.2.10 (3), que

$$\sum_{\Pi} f - \left(\bigvee_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} m_{\delta(\varphi)} \right) \leq M_{\delta(\psi)} - \left(\bigvee_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} m_{\delta(\varphi)} \right) \leq M_{\delta(\psi)} - m_{\delta(\psi)} \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\psi(i)};$$

$$-\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\psi(i)} \leq m_{\delta(\psi)} - M_{\delta(\psi)} \leq m_{\delta(\psi)} - \left(\bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} M_{\delta(\varphi)} \right) \leq \sum_{\Pi} f - \left(\bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} M_{\delta(\varphi)} \right).$$

Portanto, de (2.26) e da Proposição 1.1.5 (6), segue que

$$\left| \sum_{\Pi} f - \left(\bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} M_{\delta(\varphi)} \right) \right| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\psi(i)}, \quad \text{para toda } \Pi \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta(\psi)),$$

donde concluímos que f é Kurzweil integrável em $[a, b]$ e, pela Proposição 2.1.8,

$$\int_a^b f = \bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} M_{\delta(\varphi)}. \quad \blacksquare$$

Note que, da prova do Teorema 2.2.11 conclui-se que, se $f \in X^{[a,b]}$ é uma função Kurzweil integrável em $[a, b]$ e X é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo, então existe uma (D) -seqüência $(a_{ij})_{ij}$ de elementos de X satisfazendo a afirmação 2. do Teorema 2.2.11.

Utilizando o Critério de Cauchy provaremos, no caso em que X é um espaço de Riesz Dedekind completo fracamente σ -distributivo, a recíproca do Teorema 2.2.9.

Teorema 2.2.12. *Sejam X um espaço de Riesz Dedekind completo fracamente σ -distributivo, $c \in]a, b[$ e $f \in X^{[a,b]}$ uma função Kurzweil integrável em $[a, b]$. Então f é Kurzweil integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$. Além disso, tem-se que*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \quad (2.27)$$

DEMONSTRAÇÃO. Como f é Kurzweil integrável em $[a, b]$, existe uma (D) -seqüência $(a_{ij})_{ij}$ de elementos de X nas condições do Teorema 2.2.11 (2).

Seja $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e considere $\delta \in \mathbb{R}_+^{[a,b]}$ como em (2.23). Defina $\delta_1 := \delta|_{[a,c]} \in \mathbb{R}^{[a,c]}$ e $\delta_2 := \delta|_{[c,b]} \in \mathbb{R}^{[c,b]}$. De $\mathcal{A}_{[c,b]}(\delta_2) \neq \emptyset$ [respectivamente $\mathcal{A}_{[a,c]}(\delta_1) \neq \emptyset$] (Proposição 2.1.4), podemos fixar $\Pi_0 \in \mathcal{A}_{[c,b]}(\delta_2)$ [resp. $\Pi_0 \in \mathcal{A}_{[a,c]}(\delta_1)$].

Dadas $\Pi, \Pi' \in \mathcal{A}_{[a,c]}(\delta_1)$ [resp. $\Pi, \Pi' \in \mathcal{A}_{[c,b]}(\delta_2)$], defina $\Pi_1 := \Pi \cup \Pi_0$ e $\Pi_2 := \Pi' \cup \Pi_0$.

Note que $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta)$ (Observação 2.1.3). Assim, por (2.23), temos

$$\left| \sum_{\Pi} f - \sum_{\Pi'} f \right| = \left| \sum_{\Pi_1} f - \sum_{\Pi_2} f \right| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}.$$

De $\Pi, \Pi' \in \mathcal{A}_{[a,c]}(\delta_1)$ [resp. $\Pi, \Pi' \in \mathcal{A}_{[c,b]}(\delta_2)$] serem arbitrárias e da afirmação anterior concluimos, pelo Teorema 2.2.11, que $f|_{[a,c]}$ é Kurzweil integrável em $[a, c]$ [resp. $f|_{[c,b]}$ é Kurzweil integrável em $[c, b]$].

Para finalizar a prova, mostraremos que a igualdade (2.27) é verdadeira. Como f é Kurzweil integrável em $[a, b]$, em $[a, c]$ e em $[c, b]$, existem (D) -seqüências $(a_{ij})_{ij}$, $(b_{ij})_{ij}$ e $(c_{ij})_{ij}$ de elementos de X de modo que, para toda $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ existem $\delta \in \mathbb{R}_+^{[a,b]}$, $\delta_1 \in \mathbb{R}_+^{[a,c]}$ e $\delta_2 \in \mathbb{R}_+^{[c,b]}$ tais que

$$\left| \sum_{\Pi} f - \int_a^b f \right| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}, \quad \text{para toda } \Pi \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta); \quad (2.28)$$

$$\left| \sum_{\Pi_1} f - \int_a^c f \right| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} b_{i\varphi(i)}, \quad \text{para toda } \Pi_1 \in \mathcal{A}_{[a,c]}(\delta_1); \quad (2.29)$$

$$\left| \sum_{\Pi_2} f - \int_c^b f \right| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} c_{i\varphi(i)}, \quad \text{para toda } \Pi_2 \in \mathcal{A}_{[c,b]}(\delta_2). \quad (2.30)$$

Fixe $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e considere $\delta \in \mathbb{R}_+^{[a,b]}$, $\delta_1 \in \mathbb{R}_+^{[a,c]}$ e $\delta_2 \in \mathbb{R}_+^{[c,b]}$ como em (2.28), (2.29) e (2.30), respectivamente.

Sejam $\gamma_1 \in \mathbb{R}_+^{[a,c]}$ e $\gamma_2 \in \mathbb{R}_+^{[c,b]}$ definidas por $\gamma_1 := \min\{\delta_1, \delta|_{[a,c]}\}$ e $\gamma_2 := \min\{\delta_2, \delta|_{[c,b]}\}$.

Dadas $\Pi_1 \in \mathcal{A}_{[a,c]}(\gamma_1)$ e $\Pi_2 \in \mathcal{A}_{[c,b]}(\gamma_2)$, considere $\Pi := \Pi_1 \cup \Pi_2$. Então $\Pi \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta)$, $\Pi_1 \in \mathcal{A}_{[a,c]}(\delta_1)$ e $\Pi_2 \in \mathcal{A}_{[c,b]}(\delta_2)$ (Observação 2.1.3 e Proposição 2.1.5). Assim, por (2.28), (2.29), (2.30) e pela Proposição 1.1.5 (7), temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f - \int_a^c f - \int_c^b f \right| &= \left| \int_a^b f - \sum_{\Pi} f + \sum_{\Pi_1} f + \sum_{\Pi_2} f - \int_a^c f - \int_c^b f \right| \\ &\leq \left| \int_a^b f - \sum_{\Pi} f \right| + \left| \sum_{\Pi_1} f - \int_a^c f \right| + \left| \sum_{\Pi_2} f - \int_c^b f \right| \\ &\leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} + \bigvee_{j=1}^{\infty} b_{j\varphi(j)} + \bigvee_{k=1}^{\infty} c_{k\varphi(k)}. \end{aligned}$$

Defina $d_{ij} := 3(a_{ij} + b_{ij} + c_{ij})$, para $i, j \in \mathbb{N}$. Observando que $\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}$, $\bigvee_{i=1}^{\infty} b_{i\varphi(i)}$ e $\bigvee_{i=1}^{\infty} c_{i\varphi(i)}$ são menores que $\bigvee_{i=1}^{\infty} (a_{i\varphi(i)} + b_{i\varphi(i)} + c_{i\varphi(i)})$ obtem-se, aplicando (1.14), que

$$\left| \int_a^b f - \int_a^c f - \int_c^b f \right| \leq 3 \bigvee_{i=1}^{\infty} (a_{i\varphi(i)} + b_{i\varphi(i)} + c_{i\varphi(i)}) = \bigvee_{i=1}^{\infty} 3(a_{i\varphi(i)} + b_{i\varphi(i)} + c_{i\varphi(i)}) = \bigvee_{i=1}^{\infty} d_{i\varphi(i)}.$$

Como $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ é arbitrária, X é um espaço de Riesz Dedekind completo fracamente σ -distributivo e $(d_{ij})_{ij}$ é uma (D) -seqüência de elementos de X (Proposição 1.2.21), temos

$$0 \leq \left| \int_a^b f - \int_a^c f - \int_c^b f \right| \leq \bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} d_{i\varphi(i)} \right) = 0.$$

Logo, pela Proposição 1.1.5 (4), obtem-se (2.27). ■

Decorre do Teorema 2.2.12 o seguinte resultado:

Corolário 2.2.13. *Sejam X um espaço de Riesz Dedekind completo fracamente σ -distributivo, $f \in X^{[a,b]}$ e $[c,d] \subsetneq [a,b]$. Se f é Kurzweil integrável em $[a,b]$, então f é Kurzweil integrável em $[c,d]$.*

DEMONSTRAÇÃO. Como f é Kurzweil integrável em $[a,b]$ e $c \in]a,b[$ tem-se, do Teorema 2.2.12, que f é Kurzweil integrável em $[c,b]$. Observando que $d \in]c,b[$, e aplicando novamente o Teorema 2.2.12, concluímos que f é Kurzweil integrável em $[c,d]$. ■

No próximo capítulo faremos um breve estudo sobre seqüências de funções Kurzweil integráveis que convergem uniformemente para uma função f .

Capítulo 3

Seqüências de funções

Este capítulo é dedicado ao estudo de seqüências de elementos do espaço de Riesz $X^{[a,b]}$, onde $[a, b]$ é um intervalo de $\mathbb{R}$, X é um espaço de Riesz e em $X^{[a,b]}$ é considerada a relação de ordem parcial dada no Exemplo 1.1.2 (5). Além dos conceitos de convergência que estudamos no Capítulo 1, apresentaremos, para esse espaço de Riesz, os conceitos de convergência simples e uniforme. Finalizamos o capítulo, e este trabalho, com teoremas que relacionam a convergência uniforme de uma seqüência de elementos de $X^{[a,b]}$ Kurzweil integráveis em $[a, b]$ com a convergência da seqüência formada pelas respectivas integrais, onde X é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo.

3.1 Convergência simples e uniforme

Nesta seção apresentamos os conceitos de convergência simples e uniforme para seqüências de elementos de $X^{[a,b]}$, onde X é um espaço de Riesz.

No caso em que X é um espaço de Riesz Dedekind completo fracamente σ -distributivo, obtivemos, a partir da técnica utilizada por B. Riečan para definir a integral de Kurzweil, uma caracterização para seqüências de funções uniformemente convergentes (Teorema 3.1.8). Tal resultado nos permitiu provar uma equivalência entre o conceito

de convergência uniforme apresentado na Definição 3.1.1 (v) e o conceito usual de convergência uniforme, no caso em que o espaço de Riesz é $\mathbb{R}$ (Proposição 3.1.10).

Definição 3.1.1. *Sejam X um espaço de Riesz, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de $X^{[a,b]}$ e $f \in X^{[a,b]}$. Dizemos que*

- (i) *f é limitada se existe $M \in X^+$, $M \neq 0$, tal que $|f(x)| \leq M$, para todo $x \in [a, b]$;*
- (ii) *$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente de Cauchy se existe uma seqüência não-crescente $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X tal que $a_n \searrow 0$ e, para todo $k \in \mathbb{N}$, tem-se*

$$|f_i(x) - f_j(x)| \leq a_k, \quad \text{para quaisquer } x \in [a, b] \text{ e } i, j \geq k;$$

- (iii) *$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada se existe $M \in X^+$, $M \neq 0$, tal que*

$$|f_n(x)| \leq M, \quad \text{para quaisquer } x \in [a, b] \text{ e } n \in \mathbb{N};$$

- (iv) *$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplesmente (ou pontualmente) para f , e escrevemos $f_n \rightarrow f$, se, para cada $x \in [a, b]$, a seqüência $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X (o)-converge para $f(x)$, isto é, para cada $x \in [a, b]$ existe uma seqüência não-crescente $(a_n^{(x)})_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X tal que*

$$a_n^{(x)} \searrow 0 \quad \text{e} \quad |f_k(x) - f(x)| \leq a_k^{(x)}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N};$$

- (v) *$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para f , e escrevemos $f_n \xrightarrow{u} f$, se existe uma seqüência não-crescente $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X tal que*

$$a_n \searrow 0 \quad \text{e} \quad |f_k(x) - f(x)| \leq a_k, \quad \text{para quaisquer } x \in [a, b] \text{ e } k \in \mathbb{N}.$$

No caso em que o espaço de Riesz X é o conjunto dos números reais, além dos conceitos de convergência para seqüências de funções apresentados na Definição 3.1.1 (iv) e (v),

existem os conceitos usuais de convergência simples e uniforme que são encontrados em livros de Análise Real (ver [L]; Capítulo X). Tendo em vista que, para seqüências de números reais, o conceito de (o) -convergência é equivalente ao usual de $\mathbb{R}$ (Proposição 1.2.11), é claro que as definições de convergência simples são equivalentes. Mostraremos, no final desta seção, que o mesmo se aplica no caso da convergência uniforme. Antes porém, faremos um breve estudo sobre os conceitos de convergência simples e uniforme para seqüências de funções a valores em um espaço de Riesz qualquer.

É natural perguntar como os conceitos de convergência simples e uniforme se relacionam. Veremos, como era de se esperar, que convergência uniforme implica convergência simples e que a recíproca, em geral, é falsa (Teorema 3.1.2 e Exemplo 3.1.3).

Teorema 3.1.2. *Sejam X um espaço de Riesz, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de $X^{[a,b]}$ e $f \in X^{[a,b]}$. Se $f_n \xrightarrow{u} f$, então $f_n \rightarrow f$.*

DEMONSTRAÇÃO. Como $f_n \xrightarrow{u} f$ existe uma seqüência não-crescente $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X tal que $a_n \searrow 0$ e $|f_k(x) - f(x)| \leq a_k$, para quaisquer $x \in [a, b]$ e $k \in \mathbb{N}$. Dessa forma, para cada $x \in [a, b]$, a seqüência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaz

$$|f_k(x) - f(x)| \leq a_k, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N},$$

e assim $f_n(x) \xrightarrow{o} f(x)$, para todo $x \in [a, b]$. Portanto $f_n \rightarrow f$. ■

Exemplo 3.1.3. *Considere $\mathbb{R}^2$, com as operações usuais de soma e produto por escalar, munido da ordem lexicográfica (Exemplo 1.1.2 (3)). Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a seqüência de funções, onde, para $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dada por $f_n(x) := (0, x^n)$, para todo $x \in [0, 1]$. Então $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplesmente para a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por*

$$f(x) := \begin{cases} (0, 0) & \text{se } x \in [0, 1[\\ (0, 1) & \text{se } x = 1 \end{cases},$$

mas $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não converge uniformemente para f .

De fato, para $x \in [0, 1[$ defina a seqüência não-crescente $(a_n^{(x)})_{n \in \mathbb{N}}$ por $a_n^{(x)} := (0, x^n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $a_n^{(x)} \searrow 0$, $|f_k(x) - f(x)| = |(0, x^k)| = a_k^{(x)}$, para todo $k \in \mathbb{N}$, e assim $f_n(x) \xrightarrow{o} f(x)$. Se $x = 1$ é claro que a seqüência $(f_n(1))_{n \in \mathbb{N}} = ((0, 1))_{n \in \mathbb{N}}$ (o)-converge para $(0, 1) = f(1)$. Logo $f_n \rightarrow f$. Suponha, por absurdo, que $f_n \xrightarrow{u} f$. Então existe uma seqüência não-crescente $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $a_n = (r_n, s_n) \in \mathbb{R}^2$, para $n \in \mathbb{N}$, satisfazendo

$$a_n \searrow 0 \quad \text{e} \quad |f_k(x) - f(x)| \leq a_k, \quad \text{para quaisquer } x \in [0, 1] \quad \text{e} \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.1)$$

De $(r_n, s_n) \searrow (0, 0)$, isto é, $\bigwedge_{n=1}^{\infty} (r_n, s_n) = (0, 0)$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$r_n = 0, \quad \text{para todo } n \geq n_1; \quad (3.2)$$

$$s_n < 1/2, \quad \text{para todo } n \geq n_2. \quad (3.3)$$

Considere $N_0 := \max\{n_1, n_2\}$ e seja $\delta \in]0, 1[$ tal que $\delta^{N_0} > 1/2$. Então, de (3.1), (3.2) e (3.3), tem-se que

$$(0, \delta^{N_0}) = f_{N_0}(\delta) = |f_{N_0}(\delta) - f(\delta)| \leq a_{N_0} = (r_{N_0}, s_{N_0}) \leq \left(0, \frac{1}{2}\right),$$

o que é absurdo pois $\delta^{N_0} > 1/2$. Logo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não converge uniformemente para f .

No Capítulo 1, vimos que, a partir de um espaço de Riesz X , pode-se definir o espaço de Riesz $X^{[a,b]}$ (Exemplo 1.1.2 (5)). Dessa forma, para uma seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $X^{[a,b]}$ faz sentido analisar que relação existe entre o conceito de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergir simplesmente e o de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ser (o)-convergente em $X^{[a,b]}$. Nosso próximo resultado relaciona esses dois conceitos.

Teorema 3.1.4. *Sejam X um espaço de Riesz, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de $X^{[a,b]}$ e $f \in X^{[a,b]}$. Tem-se que:*

$$f_n \rightarrow f \quad \text{se, e somente se,} \quad (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ (o)-converge para } f \text{ em } X^{[a,b]}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que $f_n \rightarrow f$. Então, para todo $x \in [a, b]$ existe uma seqüência não-crescente $(a_n^{(x)})_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X tal que

$$a_n^{(x)} \searrow 0 \quad \text{e} \quad |f_k(x) - f(x)| \leq a_k^{(x)}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \quad (3.4)$$

Para $n \in \mathbb{N}$, defina $g_n \in X^{[a,b]}$ por $g_n(x) := a_n^{(x)}$, para todo $x \in [a, b]$. É claro que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência não-crescente de elementos de $X^{[a,b]}$ e $g_n \searrow 0$, isto é, o $\inf_{n \in \mathbb{N}} g_n$ corresponde a função identicamente nula.

De (3.4), tem-se, para todo $n \in \mathbb{N}$, que

$$|f_n - f|(x) = |(f_n - f)(x)| = |f_n(x) - f(x)| \leq a_n^{(x)} = g_n(x), \quad \text{para todo } x \in [a, b],$$

e portanto $|f_n - f| \leq g_n$. Como $n \in \mathbb{N}$ é arbitrário, concluímos que a seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (o) -converge para f em $X^{[a,b]}$.

Por outro lado, se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (o) -converge para f em $X^{[a,b]}$, então existe uma seqüência $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $X^{[a,b]}$ tal que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-crescente e satisfaz

$$g_n \searrow 0 \quad \text{e} \quad |f_k - f| \leq g_k, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Observando que, para todo $x \in [a, b]$, a seqüência $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X é não crescente, $g_n(x) \searrow 0$ e

$$|f_k(x) - f(x)| = |(f_k - f)(x)| = |f_k - f|(x) \leq g_k(x), \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N},$$

concluímos que $f_n \rightarrow f$. ■

Decorre do Teorema 3.1.4 que a convergência simples possui as mesmas propriedades da (o) -convergência apresentadas na Proposição 1.2.14. Veremos, no próximo teorema, que tais propriedades continuam válidas no caso da convergência uniforme.

Teorema 3.1.5. *Sejam X um espaço de Riesz, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seqüências de elementos de $X^{[a,b]}$, $f, g \in X^{[a,b]}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $f_n \xrightarrow{u} f$ e $g_n \xrightarrow{u} g$, então*

1. $\alpha f_n \xrightarrow{u} \alpha f$;
2. $f_n + g_n \xrightarrow{u} f + g$;
3. $|f_n| \xrightarrow{u} |f|$;
4. $f_n \vee g_n \xrightarrow{u} f \vee g$ e $f_n \wedge g_n \xrightarrow{u} f \wedge g$.

DEMONSTRAÇÃO. Como $f_n \xrightarrow{u} f$ e $g_n \xrightarrow{u} g$, existem $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seqüências não-crescentes de elementos de X tais que

$$a_n \searrow 0 \text{ e } |f_k(x) - f(x)| \leq a_k, \text{ para quaisquer } x \in [a, b] \text{ e } k \in \mathbb{N}; \quad (3.5)$$

$$b_n \searrow 0 \text{ e } |g_k(x) - g(x)| \leq b_k, \text{ para quaisquer } x \in [a, b] \text{ e } k \in \mathbb{N}. \quad (3.6)$$

Considere a seqüência $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X dada por $c_n := |\alpha| a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Da Proposição 1.2.2 (2), segue que a seqüência $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-crescente e $c_n \searrow 0$. Além disso, para quaisquer $x \in [a, b]$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se, de (3.5) e da Proposição 1.1.5 (5),

$$|(\alpha f_n)(x) - (\alpha f)(x)| = |\alpha f_n(x) - \alpha f(x)| = |\alpha| |f_n(x) - f(x)| \leq |\alpha| a_n = c_n,$$

o que prova 1.

Para provar 2., defina $d_n := a_n + b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela Proposição 1.2.2 (3), tem-se que $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência não-crescente e $d_n \searrow 0$. Dessa forma, para quaisquer $x \in [a, b]$ e $n \in \mathbb{N}$, segue, de (3.5), (3.6) e da Proposição 1.1.5 (7), que

$$\begin{aligned} |(f_n + g_n)(x) - (f + g)(x)| &= |(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))| \\ &= |(f_n(x) - f(x)) + (g_n(x) - g(x))| \\ &\leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| \leq a_n + b_n = d_n, \end{aligned}$$

e portanto $f_n + g_n \xrightarrow{u} f + g$.

Da Proposição 1.1.5 (8) e de (3.5), tem-se que,

$$||f_n|(x) - |f|(x)| = ||f_n(x)| - |f(x)|| \leq |f_n(x) - f(x)| \leq a_n,$$

para quaisquer $x \in [a, b]$ e $n \in \mathbb{N}$, ou seja, 3. é verdadeira.

Finalmente, para provar 4., basta observar que, de $X^{[a,b]}$ ser um espaço de Riesz e da Proposição 1.1.4 (1) e (2), tem-se

$$f_n \vee g_n = \frac{1}{2} (f_n + g_n + |f_n - g_n|) \quad \text{e} \quad f_n \wedge g_n = \frac{1}{2} (f_n + g_n - |f_n - g_n|), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N};$$

$$f \vee g = \frac{1}{2} (f + g + |f - g|) \quad \text{e} \quad f \wedge g = \frac{1}{2} (f + g - |f - g|),$$

e aplicar as afirmações 1., 2. e 3. ■

Para seqüências de funções uniformemente convergentes, convém destacar a seguinte propriedade:

Proposição 3.1.6. *Sejam X um espaço de Riesz, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de $X^{[a,b]}$ e $f \in X^{[a,b]}$. Se $f_n \xrightarrow{u} f$, então $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente de Cauchy.*

DEMONSTRAÇÃO. Como $f_n \xrightarrow{u} f$ existe uma seqüência não-crescente $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X , tal que $a_n \searrow 0$ e $|f_k(x) - f(x)| \leq a_k$, para quaisquer $x \in [a, b]$ e $k \in \mathbb{N}$.

Defina $b_n := 2a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela Proposição 1.2.2 (2), tem-se que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência não-crescente e $b_n \searrow 0$. Além disso, para quaisquer $x \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$ e $i, j \geq n$, tem-se, pela Proposição 1.1.5 (5) e (7), que

$$\begin{aligned} |f_i(x) - f_j(x)| &= |(f_i(x) - f(x)) + (f(x) - f_j(x))| \\ &\leq |f_i(x) - f(x)| + |f(x) - f_j(x)| \\ &\leq |f_i(x) - f(x)| + |f_j(x) - f(x)| \leq a_i + a_j, \end{aligned}$$

ou seja, $|f_i(x) - f_j(x)| \leq a_i + a_j$, para todo $i, j \geq n$. De $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ser uma seqüência não-crescente segue que

$$|f_i(x) - f_j(x)| \leq 2a_n = b_n, \quad \text{para quaisquer } x \in [a, b] \quad \text{e} \quad i, j \geq n,$$

e portanto $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente de Cauchy. ■

A seguir apresentaremos algumas condições em que se pode garantir que uma dada seqüência de funções é uniformemente limitada.

Proposição 3.1.7. *Sejam X um espaço de Riesz, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de $X^{[a,b]}$ e $f \in X^{[a,b]}$. São verdadeiras as seguintes afirmações:*

1. *se $f_n \xrightarrow{u} f$ e f é limitada, então $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada;*
2. *se $f_n \xrightarrow{u} f$ e f_k é limitada, para algum $k \in \mathbb{N}$, então f é limitada e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que $f_n \xrightarrow{u} f$. Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência não-crescente de elementos de X tal que

$$a_n \searrow 0 \quad \text{e} \quad |f_k(x) - f(x)| \leq a_k, \quad \text{para quaisquer } x \in [a, b] \text{ e } k \in \mathbb{N}. \quad (3.7)$$

Provaremos a seguir 1. e 2.

Se f for limitada, então existe $z \in X$ de modo que $|f(x)| \leq z$, para todo $x \in [a, b]$. Dessa forma, para quaisquer $x \in [a, b]$ e $n \in \mathbb{N}$, segue, da Proposição 1.1.5 (7), que

$$|f_n(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x)| \leq a_n + z \leq a_1 + z,$$

onde a última desigualdade decorre de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ser uma seqüência não-crescente. Considerando $M := a_1 + z$, obtem-se que $|f_n(x)| \leq M$, para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $x \in [a, b]$, o que prova 1.

Provemos 2. Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $z \in X$ tais que f_k é limitada e $|f_k(x)| \leq z$, para todo $x \in [a, b]$. Pela Proposição 1.1.5 (7) e por (3.7), tem-se que, para todo $x \in [a, b]$,

$$|f(x)| = |f(x) - f_k(x) + f_k(x)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x)| \leq a_k + |f_k(x)| \leq a_k + z.$$

Como $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência não-crescente, segue que $|f(x)| \leq a_1 + z$, para todo $x \in [a, b]$ e portanto f é limitada. Com isso, pela afirmação 1. concluímos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada, e assim 2. é verdadeira. ■

Em geral a convergência uniforme de uma seqüência de funções não é suficiente para garantir que a seqüência seja uniformemente limitada. De fato, considere a seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ onde, para $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathbb{R}^{[0,1]}$ é a função dada por

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{n} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}.$$

É claro que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente, no sentido da Definição 3.1.1 (v), para a função não limitada $f \in \mathbb{R}^{[0,1]}$, definida por $f(0) := 0$ e $f(x) := 1/x$, se $x \in]0, 1]$ (basta definir $a_n := 1/n$, para todo $n \in \mathbb{N}$). No entanto, a seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não é uniformemente limitada, pois, se existisse $M \in \mathbb{R}_+$ tal que $|f_n(x)| \leq M$, para quaisquer $x \in [0, 1]$ e $n \in \mathbb{N}$, teríamos, em particular, que

$$n \leq n + \frac{1}{n} = \left| f_n \left(\frac{1}{n} \right) \right| \leq M, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

o que é absurdo.

Finalizamos esta seção provando, no caso em que o espaço de Riesz é o conjunto dos números reais, uma equivalência entre o conceito usual de convergência uniforme e o apresentado na Definição 3.1.1 (v). Ao provarmos tal fato foi fundamental $\mathbb{R}$ ser um espaço de Riesz Dedekind completo fracamente σ -distributivo. Isso, juntamente com a técnica usada por B. Riečan para definir a integral de Kurzweil para funções a valores em um espaço de Riesz (Capítulo 2), nos conduziu à seguinte caracterização para seqüências de elementos de $X^{[a,b]}$ que convergem uniformemente, onde X é um espaço de Riesz Dedekind completo fracamente σ -distributivo.

Teorema 3.1.8. *Sejam X um espaço de Riesz Dedekind completo fracamente σ -distributivo, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de $X^{[a,b]}$ e $f \in X^{[a,b]}$ tais que, para todo $k \in \mathbb{N}$, a função $f_k - f \in X^{[a,b]}$ é limitada. São equivalentes as seguintes afirmações:*

1. $f_n \xrightarrow{u} f$;

2. existe uma (D) -seqüência $(a_{ij})_{ij}$ de elementos de X satisfazendo

para toda $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ existe $n_0 = n_0(\varphi) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}, \quad \text{para quaisquer } x \in [a, b] \text{ e } n \geq n_0.$$

DEMONSTRAÇÃO. Suponha 1. verdadeira e seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência não-crescente de elementos de X tal que

$$a_n \searrow 0 \quad \text{e} \quad |f_k(x) - f(x)| \leq a_k, \quad \text{para quaisquer } x \in [a, b] \text{ e } k \in \mathbb{N}.$$

Considere a seqüência dupla $(b_{ij})_{ij}$ definida por $b_{ij} := a_j$, para $i, j \in \mathbb{N}$. É claro que $(b_{ij})_{ij}$ é uma (D) -seqüência de elementos de X .

Seja $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e defina $n_0 := \min_{n \in \mathbb{N}} \varphi(n)$. Então, para $n \geq n_0$ e $x \in [a, b]$, temos que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n \leq a_{n_0} = \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} = \bigvee_{i=1}^{\infty} b_{i\varphi(i)},$$

e assim 2. é verdadeira.

Por outro lado, seja $(a_{ij})_{ij}$ uma (D) -seqüência de elementos de X como em 2. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{ii}, \quad \text{para quaisquer } x \in [a, b] \text{ e } n \geq n_0. \quad (3.8)$$

Por hipótese, para todo $k \in \mathbb{N}$, $f_k - f$ é limitada, isto é, existe $M_k \in X^+$ tal que

$$|f_k(x) - f(x)| \leq M_k, \quad \text{para todo } x \in [a, b]. \quad (3.9)$$

Defina $M := \left(\bigvee_{j=1}^{n_0} M_j \right) \vee \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{ii} \right)$. Dessa forma, de (3.8) e (3.9), tem-se, para $x \in [a, b]$ e $k \in \mathbb{N}$, que

$$|f_k(x) - f(x)| \leq M_k \leq \bigvee_{j=1}^{n_0} M_j \leq M, \quad \text{se } 1 \leq k \leq n_0;$$

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{ii} \leq M, \quad \text{se } k \geq n_0,$$

ou seja,

$$|f_k(x) - f(x)| \leq M, \quad \text{para quaisquer } x \in [a, b] \text{ e } k \in \mathbb{N}.$$

Logo, de X ser um espaço de Riesz Dedekind completo, existe, para todo $n \in \mathbb{N}$, o supremo do conjunto $\{|f_k(x) - f(x)| \mid x \in [a, b] \text{ e } k \geq n\}$.

Defina $b_n := \sup \{|f_k(x) - f(x)| \mid x \in [a, b] \text{ e } k \geq n\}$, para $n \in \mathbb{N}$. Note que,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq b_n, \quad \text{para quaisquer } x \in [a, b] \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, $b_{n+1} \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, para concluir a prova basta mostrar que $b_n \searrow 0$, ou seja, $\bigwedge_{n=1}^{\infty} b_n = 0$.

É claro que $0 \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, donde obtem-se que $0 \leq \bigwedge_{n=1}^{\infty} b_n$. Se $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e $n_0 = n_0(\varphi) \in \mathbb{N}$ é como em 2. tem-se

$$b_{n_0} = \sup \{|f_k(x) - f(x)| \mid x \in [a, b] \text{ e } k \geq n_0\} \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)},$$

e com isso

$$\bigwedge_{n=1}^{\infty} b_n \leq b_{n_0} \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}.$$

Como $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ é arbitrária e X é um espaço de Riesz Dedekind completo fracamente σ -distributivo segue que

$$\bigwedge_{n=1}^{\infty} b_n \leq \bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} \right) = 0,$$

ou seja, $\bigwedge_{n=1}^{\infty} b_n = 0$. ■

Note que da Definição 3.1.1 (v), tem-se que, se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de elementos de $X^{[a,b]}$, que converge uniformemente para alguma $f \in X^{[a,b]}$, então a função $f_k - f$ é limitada, para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, essa hipótese no Teorema 3.1.8 é bem natural.

No caso em que o espaço de Riesz é o conjunto dos números reais, para transformar a definição usual de convergência uniforme na apresentada na Definição 3.1.1 (v), além do Teorema 3.1.8, utilizaremos o seguinte resultado:

Lema 3.1.9. *Sejam $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de $\mathbb{R}^{[a,b]}$ e $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$. São equivalentes as seguintes afirmações:*

1. *para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad \text{para quaisquer } x \in [a, b] \text{ e } n \geq n_0;$$

2. *existe uma (D) -seqüência $(a_{ij})_{ij}$ de números reais satisfazendo*

para toda $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ existe $n_0 = n_0(\varphi) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}, \quad \text{para quaisquer } x \in [a, b] \text{ e } n \geq n_0.$$

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos 1. verdadeira. Então existe uma seqüência $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\mathbb{N}$, não limitada, tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, tem-se que $n_k < n_{k+1}$ e

$$|f_m(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}, \quad \text{para quaisquer } x \in [a, b] \text{ e } m \geq n_k. \quad (3.10)$$

Considere a seqüência dupla $(a_{ij})_{ij}$ de elementos de $\mathbb{R}$ dada por

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq j < n_1 \\ 1/k & \text{se } n_k \leq j < n_{k+1} \end{cases}, \quad \text{para } i, j \in \mathbb{N}.$$

É claro que $(a_{ij})_{ij}$ é uma (D) -seqüência de números reais.

Fixe $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e seja $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(i_0) := \min_{i \in \mathbb{N}} \varphi(i)$. Então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq \varphi(i_0) < n_k$. Note que,

$$\frac{1}{k} = a_{i_0 n_k} \leq a_{i_0 \varphi(i_0)} \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)},$$

e assim, se $m \geq n_k$ tem-se, de (3.10), que

$$|f_m(x) - f(x)| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}, \quad \text{para quaisquer } x \in [a, b] \text{ e } m \geq n_k,$$

o que prova 2.

Provaremos que 2. implica 1.

Considere uma (D) -seqüência $(a_{ij})_{ij}$ de números reais como em 2.

Seja $\varepsilon > 0$. Como, para todo $i \in \mathbb{N}$, a seqüência $(a_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$ é não-crescente e $\bigwedge_{j=1}^{\infty} a_{ij} = 0$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ de modo que $a_{ij} \leq \varepsilon$, para $j \geq k_i$.

Considere $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dada por $\varphi(i) := k_i$, para $i \in \mathbb{N}$. Note que, $a_{i\varphi(i)} < \varepsilon$, para todo $i \in \mathbb{N}$, e portanto $\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} \leq \varepsilon$. Com isso, se $n_0 = n_0(\varphi) \in \mathbb{N}$ é como em 2. temos que

$$|f_m(x) - f(x)| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} \leq \varepsilon, \quad \text{para quaisquer } x \in [a, b] \text{ e } m \geq n_0,$$

donde concluimos que 1. é verdadeira. ■

Proposição 3.1.10. *Sejam $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de $\mathbb{R}^{[a,b]}$ e $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ tais que, para todo $k \in \mathbb{N}$, a função $f_k - f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ é limitada. São equivalentes as seguintes afirmações:*

1. $f_n \xrightarrow{u} f$;
2. para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad \text{para quaisquer } x \in [a, b] \text{ e } n \geq n_0.$$

DEMONSTRAÇÃO. Decorre do fato de $\mathbb{R}$ ser um espaço de Riesz Dedekind completo fracamente σ -distributivo (Exemplo 1.2.24 (1)), do Teorema 3.1.8 e do Lema 3.1.9. ■

Na próxima seção estudaremos como a integral de Kurzweil se relaciona com a convergência uniforme de seqüências de funções.

3.2 Convergência uniforme e a integral de Kurzweil

Em um espaço de Riesz X Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo, dada uma seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções Kurzweil integráveis em $[a, b]$ é interessante se perguntar o

que ocorre com a seqüência $\left(\int_a^b f_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$, isto é:

1. $\left(\int_a^b f_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ é (o) -convergente ?
2. se $\left(\int_a^b f_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ é (o) -convergente e, além disso, a seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para alguma $f \in X^{[a,b]}$, pode-se concluir que

$$f \text{ é Kurzweil integrável em } [a, b] \quad \text{e} \quad \int_a^b f_n \xrightarrow{o} \int_a^b f \quad ?$$

Os resultados desta seção têm por objetivo apresentar possíveis respostas para essas perguntas. Dentre eles destacamos o Teorema 3.2.3 (Teorema da Convergência Uniforme) e o Teorema 3.2.5 que, além de nos fornecerem condições para responder (2), nos permitem analisar, com mais detalhe, o caso particular em que o espaço de Riesz X é o conjunto dos números reais. Ressaltamos que o Teorema 3.2.5 foi por nós obtido a partir da técnica introduzida por B. Riečan em [R].

Convém observar que em (2) não é interessante considerar apenas a convergência simples da seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ visto que essa condição não é suficiente nem mesmo quando tratamos de seqüências de funções reais Riemann integráveis em $[a, b]$, as quais constituem um caso particular das funções reais Kurzweil integráveis em $[a, b]$.

Iniciaremos com a seguinte proposição.

Proposição 3.2.1. *Sejam X um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de $X^{[a,b]}$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, f_k é Kurzweil integrável em $[a, b]$. Se a seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente de Cauchy, então existe $\bigwedge_{n=1}^{\infty} \left(\bigvee_{i=n}^{\infty} \int_a^b f_i \right)$ e*

$$\int_a^b f_n \xrightarrow{o} \bigwedge_{n=1}^{\infty} \left(\bigvee_{i=n}^{\infty} \int_a^b f_i \right).$$

DEMONSTRAÇÃO. Mostraremos que a seqüência $\left(\int_a^b f_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada e

$$\bigwedge_{n=1}^{\infty} \left(\bigvee_{i=n}^{\infty} \int_a^b f_i \right) \leq \bigvee_{n=1}^{\infty} \left(\bigwedge_{i=n}^{\infty} \int_a^b f_i \right), \quad (3.11)$$

assim, aplicando a Proposição 1.2.16 e a Proposição 1.2.17, concluiremos a prova.

De $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ser uniformemente de Cauchy tem-se que existe uma seqüência não-crescente $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X tal que $a_n \searrow 0$ e, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$|f_i(x) - f_j(x)| \leq a_k, \quad \text{para quaisquer } x \in [a, b] \text{ e } i, j \geq k.$$

Fixe $n \in \mathbb{N}$ e sejam $i, j \geq n$. Segue, da Proposição 1.1.5 (6), que

$$f_i(x) \leq f_j(x) + a_n, \quad \text{para quaisquer } x \in [a, b] \text{ e } i, j \geq n.$$

Com isso temos, do Teorema 2.2.1, do Corolário 2.2.4 e do Exemplo 2.1.10, que

$$\int_a^b f_i \leq \int_a^b (f_j + a_n) = \left(\int_a^b f_j \right) + a_n(b-a), \quad \text{para todo } i, j \geq n. \quad (3.12)$$

De (3.12), para $i = n = 1$ e $j = k$, temos

$$\left(\int_a^b f_1 \right) - a_1(b-a) \leq \int_a^b f_k, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N};$$

e para $j = n = 1$ e $i = k$, temos

$$\int_a^b f_k \leq \left(\int_a^b f_1 \right) + a_1(b-a), \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Logo, a seqüência $\left(\int_a^b f_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada. Ainda de (3.12) temos, para todo $n \in \mathbb{N}$, que

$$\bigvee_{i=n}^{\infty} \int_a^b f_i \leq \left(\int_a^b f_j \right) + a_n(b-a), \quad \text{para todo } j \geq n.$$

Como $j \geq n$ é arbitrário, segue, de (1.11), que

$$\left(\bigvee_{i=n}^{\infty} \int_a^b f_i \right) \leq \bigwedge_{j=n}^{\infty} \left(\left(\int_a^b f_j \right) + a_n(b-a) \right) = \left(\bigwedge_{j=n}^{\infty} \int_a^b f_j \right) + a_n(b-a).$$

Dessa forma, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que

$$\bigwedge_{m=1}^{\infty} \left(\bigvee_{k=m}^{\infty} \int_a^b f_k \right) - \bigvee_{m=1}^{\infty} \left(\bigwedge_{k=m}^{\infty} \int_a^b f_k \right) \leq \bigvee_{i=n}^{\infty} \int_a^b f_i - \bigwedge_{j=n}^{\infty} \int_a^b f_j \leq a_n (b - a).$$

Observando que $a_n (b - a) \searrow 0$ (Proposição 1.2.2 (2)), obtem-se

$$\bigwedge_{m=1}^{\infty} \left(\bigvee_{k=m}^{\infty} \int_a^b f_k \right) - \bigvee_{m=1}^{\infty} \left(\bigwedge_{k=m}^{\infty} \int_a^b f_k \right) \leq \bigwedge_{n=1}^{\infty} [a_n (b - a)] = 0,$$

e portanto (3.11) é verdadeira. ■

Na seção anterior vimos que uma seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $X^{[a,b]}$ que converge uniformemente para uma função f é uniformemente de Cauchy (Proposição 3.1.6). Com isso, se cada f_n é uma função Kurzweil integrável em $[a, b]$, a Proposição 3.2.1 nos garante que a seqüência $\left(\int_a^b f_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Nessas condições podemos nos perguntar se f é Kurzweil integrável em $[a, b]$ e, em caso afirmativo, se $\left(\int_a^b f_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $\int_a^b f$. Uma resposta a essa pergunta encontra-se no Teorema 3.2.3. Antes de prová-lo apresentaremos um lema que nos auxiliará na construção da (D) -seqüência necessária na sua demonstração. Para facilitar a escrita, uma família $(a_{nij})_{(n,i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$, será chamada de seqüência tripla e denotada por $(a_{nij})_{nij}$.

Lema 3.2.2. *Seja X um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo. Se $(a_{nij})_{nij}$ é uma seqüência tripla de elementos de X tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $(a_{nij})_{ij}$ é uma (D) -seqüência, então existe uma seqüência dupla $(b_{ij})_{ij}$ de elementos de X , de modo que,*

para quaisquer $S \in X^+$, $S \neq 0$, e $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tem-se

$$S \wedge \left(\sum_{n=1}^k \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{ni\varphi(i+n)} \right) \leq \bigvee_{j=1}^{\infty} (S \wedge b_{j\varphi(j)}), \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Além disso, $(S \wedge b_{ij})_{ij}$ é uma (D) -seqüência para todo $S \in X^+$, $S \neq 0$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $(b_{ij})_{ij}$ a seqüência dupla de elementos de X dada por

$$b_{ij} := \begin{cases} a_{11j} & \text{se } i = 1, j \in \mathbb{N} \\ \sup \{2^r a_{r(i-r)j} \mid 1 \leq r \leq i-1\} & \text{se } i \geq 2, j \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Para todo $i \in \mathbb{N}$ tem-se, pela Proposição 1.2.2 (4), que $(b_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência não-crescente e $b_{ij} \searrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$. Dessa forma, dado $S \in X^+$, $S \neq 0$, segue que $(S \wedge b_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência não-crescente e $S \wedge b_{ij} \searrow S \wedge 0 = 0$ quando $j \rightarrow \infty$ (Proposição 1.2.2 (5)). Observando que $(S \wedge b_{ij})_{ij}$ é limitada, concluímos que $(S \wedge b_{ij})_{ij}$ é uma (D) -seqüência, para todo $S \in X^+$, $S \neq 0$.

Note que, para quaisquer $n, i, j \in \mathbb{N}$, tem-se que $2^n a_{nij} \leq b_{(i+n)j}$.

Seja $S \in X^+$, $S \neq 0$. Fixe $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e seja $n \in \mathbb{N}$. De (1.3), temos que

$$S \wedge a_{ni\varphi(i+n)} \leq S \wedge 2^{-n} b_{(i+n)\varphi(i+n)}, \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Como X é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo e os conjuntos $\{S \wedge a_{ni\varphi(i+n)} \mid i \in \mathbb{N}\}$, $\{S \wedge 2^{-n} b_{(i+n)\varphi(i+n)} \mid i \in \mathbb{N}\}$ são limitados superiormente temos que o supremo de cada um deles existe. Além disso,

$$S \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{ni\varphi(i+n)} \right) = \bigvee_{i=1}^{\infty} (S \wedge a_{ni\varphi(i+n)}) \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} (S \wedge 2^{-n} b_{(i+n)\varphi(i+n)}), \quad (3.13)$$

onde a primeira igualdade decorre de (1.17).

Observando que $\{S \wedge 2^{-n} b_{(i+n)\varphi(i+n)} \mid i \in \mathbb{N}\} \subset \{S \wedge 2^{-n} b_{j\varphi(j)} \mid j \in \mathbb{N}\}$ e que esse último admite supremo, pois X é um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo, temos

$$\bigvee_{i=1}^{\infty} (S \wedge 2^{-n} b_{(i+n)\varphi(i+n)}) \leq \bigvee_{j=1}^{\infty} (S \wedge 2^{-n} b_{j\varphi(j)}),$$

e assim, de (3.13), segue que

$$S \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{ni\varphi(i+n)} \right) \leq \bigvee_{j=1}^{\infty} (S \wedge 2^{-n} b_{j\varphi(j)}). \quad (3.14)$$

Para $n \in \mathbb{N}$, defina $z_n := \bigvee_{j=1}^{\infty} (S \wedge 2^{-n} b_{j\varphi(j)})$.

Seja $k \in \mathbb{N}$ e admita verdadeira a seguinte igualdade:

$$z_n = S \wedge 2^{k-n} z_k, \quad \text{para } 1 \leq n \leq k. \quad (3.15)$$

Pela Proposição 1.1.6 (2), por (3.14), (1.1) e (1.3), tem-se que

$$S \wedge \left(\sum_{n=1}^k \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{ni\varphi(i+n)} \right) = S \wedge \left(\sum_{n=1}^k \left(S \wedge \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{ni\varphi(i+n)} \right) \right) \leq S \wedge \left(\sum_{n=1}^k \bigvee_{j=1}^{\infty} (S \wedge 2^{-n} b_{j\varphi(j)}) \right).$$

Com isso, de (3.15) e aplicando novamente a Proposição 1.1.6 (2), obtem-se

$$\begin{aligned} S \wedge \left(\sum_{n=1}^k \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{ni\varphi(i+n)} \right) &\leq S \wedge \left(\sum_{n=1}^k z_n \right) \\ &= S \wedge \left(\sum_{n=1}^k (S \wedge 2^{k-n} z_k) \right) = S \wedge \left(\sum_{n=1}^k 2^{k-n} z_k \right). \end{aligned}$$

Note que $\sum_{n=1}^k 2^{k-n} z_k = 2^k z_k \left(\sum_{n=1}^k 2^{-n} \right) \leq 2^k z_k$, e assim,

$$S \wedge \left(\sum_{n=1}^k \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{ni\varphi(i+n)} \right) \leq S \wedge \left(\sum_{n=1}^k 2^{k-n} z_k \right) \leq S \wedge 2^k z_k.$$

É fácil ver que $2^k z_k = 2^k \left(\bigvee_{j=1}^{\infty} (S \wedge 2^{-k} b_{j\varphi(j)}) \right) = \bigvee_{j=1}^{\infty} (2^k S \wedge b_{j\varphi(j)})$, e assim, de (1.17), obtem-se

$$S \wedge 2^k z_k = S \wedge \left(\bigvee_{j=1}^{\infty} (2^k S \wedge b_{j\varphi(j)}) \right) = \bigvee_{j=1}^{\infty} (S \wedge (2^k S \wedge b_{j\varphi(j)})).$$

Logo, admitindo (3.15) verdadeira, temos

$$S \wedge \left(\sum_{n=1}^k \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{ni\varphi(i+n)} \right) \leq S \wedge 2^k z_k = \bigvee_{j=1}^{\infty} ((S \wedge 2^k S) \wedge b_{j\varphi(j)}) \leq \bigvee_{j=1}^{\infty} (S \wedge b_{j\varphi(j)}),$$

que é o que queríamos demonstrar.

Para finalizar provaremos (3.15).

Seja $1 \leq n \leq k$. De (1.14) tem-se que

$$2^{k-n} z_k = 2^{k-n} \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} (S \wedge 2^{-k} b_{i\varphi(i)}) \right) = \bigvee_{i=1}^{\infty} (2^{k-n} S \wedge 2^{-n} b_{i\varphi(i)}) . \quad (3.16)$$

Como $k - n \geq 0$ e $S \in X^+$, por (1.1), temos $S \leq 2^{k-n} S$ e assim, por (1.3),

$$S \wedge 2^{-n} b_{i\varphi(i)} \leq 2^{k-n} S \wedge 2^{-n} b_{i\varphi(i)}, \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Logo, de (3.16), obtem-se

$$z_n = \bigvee_{i=1}^{\infty} (S \wedge 2^{-n} b_{i\varphi(i)}) \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} (2^{k-n} S \wedge 2^{-n} b_{i\varphi(i)}) = 2^{k-n} z_k . \quad (3.17)$$

Note que $z_n \leq S$, e portanto, por (3.17), tem-se $z_n \leq S \wedge 2^{k-n} z_k$. Assim, para obter (3.15), basta provar que $S \wedge 2^{k-n} z_k \leq z_n$.

De (1.17) e (3.16), temos que

$$S \wedge 2^{k-n} z_k = S \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} (2^{k-n} S \wedge 2^{-n} b_{i\varphi(i)}) \right) = \bigvee_{i=1}^{\infty} (S \wedge (2^{k-n} S \wedge 2^{-n} b_{i\varphi(i)})) . \quad (3.18)$$

Observe que $S \wedge (2^{k-n} S \wedge 2^{-n} b_{i\varphi(i)}) \leq S \wedge 2^{-n} b_{i\varphi(i)}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Logo

$$\bigvee_{i=1}^{\infty} (S \wedge (2^{k-n} S \wedge 2^{-n} b_{i\varphi(i)})) \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} (S \wedge 2^{-n} b_{i\varphi(i)}) = z_n ,$$

e assim, por (3.18), temos que $S \wedge 2^{k-n} z_k \leq z_n$. Portanto (3.15) é verdadeira. ■

Teorema 3.2.3 (Teorema da Convergência Uniforme). *Sejam X um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo, $f \in X^{[a,b]}$ e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de $X^{[a,b]}$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, f_k é Kurzweil integrável em $[a, b]$. Se $f_n \xrightarrow{u} f$ e f é limitada, então f é Kurzweil integrável em $[a, b]$ e*

$$\int_a^b f_n \xrightarrow{o} \int_a^b f . \quad (3.19)$$

DEMONSTRAÇÃO. Como $f_n \xrightarrow{u} f$ segue, da Proposição 3.1.6, que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência uniformemente de Cauchy. Logo, pela Proposição 3.2.1, existe $L \in X$ tal que $\int_a^b f_n \xrightarrow{o} L$.

Seja $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência não-crescente de elementos de X tal que

$$w_n \searrow 0 \quad \text{e} \quad \left| \int_a^b f_k - L \right| \leq w_k, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \quad (3.20)$$

De $f_n \xrightarrow{u} f$ tem-se que existe uma seqüência não-crescente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X satisfazendo

$$u_n \searrow 0 \quad \text{e} \quad |f_k(x) - f(x)| \leq u_k, \quad \text{para quaisquer } x \in [a, b] \text{ e } k \in \mathbb{N}. \quad (3.21)$$

Para $n \in \mathbb{N}$, como f_n é Kurzweil integrável em $[a, b]$, existe uma (D) -seqüência $(a_{ij}^{(n)})_{ij}$, de modo que, para qualquer $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, se $\psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ é dada por $\psi(j) := \varphi(j + n + 1)$, para $j \in \mathbb{N}$, existe $\delta_n \in \mathbb{R}_+^{[a, b]}$ tal que

$$\left| \sum_{\Pi} f_n - \int_a^b f_n \right| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\psi(i)}^{(n)}, \quad \text{para toda } \Pi \in \mathcal{A}_{[a, b]}(\delta_n),$$

ou seja,

$$\left| \sum_{\Pi} f_n - \int_a^b f_n \right| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i+n+1)}^{(n)}, \quad \text{para toda } \Pi \in \mathcal{A}_{[a, b]}(\delta_n). \quad (3.22)$$

Por hipótese f é limitada, isto é, existe $M \in X^+$, $M \neq 0$ tal que $|f| \leq M$.

Seja $S := M(b - a) + |L|$ e defina a seqüência tripla $(c_{nij})_{nij}$ de elementos de X por

$$c_{nij} := \begin{cases} w_j + u_j(b - a) & \text{se } n = 1 \\ a_{ij}^{(n-1)} & \text{se } n \geq 2 \end{cases}, \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Note que, fixado $n \in \mathbb{N}$, a seqüência dupla $(c_{nij})_{ij}$ é limitada e, além disso, para cada $i \in \mathbb{N}$, tem-se que $(c_{nij})_{j \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência não-crescente e $c_{nij} \searrow 0$, quando $j \rightarrow \infty$ (Proposição 1.2.2 (2) e (3)). Portanto $(c_{nij})_{ij}$ é uma (D) -seqüência de elementos de X , para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $S \in X^+$ e $S \neq 0$ existe, pelo Lema 3.2.2, uma seqüência dupla $(b_{ij})_{ij}$ de elementos de X de modo que, para quaisquer $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$S \wedge \left(\sum_{r=1}^n \bigvee_{i=1}^{\infty} c_{ri\varphi(i+r)} \right) \leq \bigvee_{j=1}^{\infty} (S \wedge b_{j\varphi(j)}) \quad (3.23)$$

e $(S \wedge b_{ij})_{ij}$ é uma (D) -seqüência de elementos de X .

Sejam $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e $p := \min_{j \in \mathbb{N}} \varphi(j+1)$. Considere $\delta := \delta_p \in \mathbb{R}_+^{[a,b]}$ como em (3.22).

Para $\Pi \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta)$, com $\Pi := \{(I_k, \alpha_k)\}_{k \in \Lambda}$, temos, de (3.20), (3.21), (3.22) e pela Proposição 1.1.5 (7), que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\Pi} f - L \right| &\leq \left| \sum_{\Pi} f - \sum_{\Pi} f_p \right| + \left| \sum_{\Pi} f_p - \int_a^b f_p \right| + \left| \int_a^b f_p - L \right| \\ &\leq \left| \sum_{k \in \Lambda} (f(\alpha_k) - f_p(\alpha_k)) m(I_k) \right| + \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i+p+1)}^{(p)} + w_p \\ &\leq \left(\sum_{k \in \Lambda} |f(\alpha_k) - f_p(\alpha_k)| m(I_k) \right) + \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i+p+1)}^{(p)} + w_p \\ &\leq \left(\sum_{k \in \Lambda} u_p m(I_k) \right) + \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i+p+1)}^{(p)} + w_p \\ &= u_p (b-a) + \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i+p+1)}^{(p)} + w_p, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left| \sum_{\Pi} f - L \right| \leq w_p + u_p (b-a) + \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i+p+1)}^{(p)}. \quad (3.24)$$

Observando que $w_{\varphi(j+1)} \leq w_p$ e $u_{\varphi(j+1)} \leq u_p$, para todo $j \in \mathbb{N}$, temos

$$\bigvee_{j=1}^{\infty} \left(w_{\varphi(j+1)} + u_{\varphi(j+1)} (b-a) \right) \leq w_p + u_p (b-a) \leq \bigvee_{j=1}^{\infty} \left(w_{\varphi(j+1)} + u_{\varphi(j+1)} (b-a) \right).$$

Logo, $\bigvee_{j=1}^{\infty} \left(w_{\varphi(j+1)} + u_{\varphi(j+1)} (b-a) \right) = w_p + u_p (b-a)$, e assim, de (3.24),

$$\left| \sum_{\Pi} f - L \right| \leq \bigvee_{j=1}^{\infty} \left(w_{\varphi(j+1)} + u_{\varphi(j+1)} (b-a) \right) + \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i+p+1)}^{(p)},$$

ou seja,

$$\left| \sum_{\Pi} f - L \right| \leq \bigvee_{j=1}^{\infty} c_{1j\varphi(j+1)} + \bigvee_{i=1}^{\infty} c_{(p+1)i\varphi(i+p+1)} \leq \sum_{r=1}^{p+1} \bigvee_{i=1}^{\infty} c_{ri\varphi(i+r)}. \quad (3.25)$$

Notemos que, pela Proposição 1.1.5 (5) e (7), tem-se

$$\left| \sum_{\Pi} f - L \right| \leq \left| \sum_{\Pi} f \right| + |L| \leq \sum_{\Pi} |f| + |L| \leq M(b-a) + |L| = S,$$

e assim, de (3.23) e (3.25), segue que

$$\left| \sum_{\Pi} f - L \right| \leq S \wedge \left(\sum_{r=1}^{p+1} \bigvee_{i=1}^{\infty} c_{ri\varphi(i+r)} \right) \leq \bigvee_{j=1}^{\infty} (S \wedge b_{j\varphi(j)}).$$

Portanto

$$\left| \sum_{\Pi} f - L \right| \leq \bigvee_{j=1}^{\infty} (S \wedge b_{j\varphi(j)}), \quad \text{para toda } \Pi \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta),$$

donde concluímos que f é Kurzweil integrável em $[a, b]$ e, pela Proposição 2.1.8, $\int_a^b f = L$,
ou seja, $\int_a^b f_n \xrightarrow{o} \int_a^b f$. ■

Corolário 3.2.4. *Sejam X um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo, $f \in X^{[a,b]}$ e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de $X^{[a,b]}$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, f_k é Kurzweil integrável em $[a, b]$. Se $f_n \xrightarrow{u} f$ e f_k é limitada, para algum $k \in \mathbb{N}$, então f é Kurzweil integrável em $[a, b]$ e*

$$\int_a^b f_n \xrightarrow{o} \int_a^b f.$$

DEMONSTRAÇÃO. Basta notar que, pela Proposição 3.1.7 (2), f é limitada e aplicar o Teorema 3.2.3. ■

As hipóteses do Teorema 3.2.3 são bastante restritivas. Convém observar que o fato de f ser limitada, nos permite utilizar o Lema 3.2.2 para encontrar uma (D) -seqüência que verifique (2.5), e assim concluir que f é Kurzweil integrável em $[a, b]$. Contudo, no

caso de funções reais Riemann generalizada integráveis, apenas a hipótese da convergência uniforme da seqüência de funções é suficiente para garantir um resultado análogo a (3.19) (ver [B]; p. 117). Isso, juntamente com o fato de que toda função Riemann generalizada integrável em $[a, b]$ é Kurzweil integrável em $[a, b]$ (Teorema 2.1.14), nos motivou a buscar condições que fornecessem (3.19) sem admitir f limitada. Desta busca resultou o Teorema 3.2.5, cujas hipóteses obtivemos a partir do seguinte raciocínio:

Dada uma seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções Riemann generalizada integráveis em $[a, b]$, sabe-se que

para todo $\varepsilon > 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $\delta_k \in \mathbb{R}_+^{[a, b]}$ tal que

$$\left| \sum_{\Pi} f_k - \int_a^{R^*b} f_k \right| \leq \varepsilon, \quad \text{para toda } \Pi \in \mathcal{A}_{[a, b]}(\delta_k).$$

Como o epsilon positivo pode, de certa forma, ser substituído por uma (D) -seqüência de números reais (método introduzido por B. Riečan), nos pareceu razoável admitir que, no contexto de espaços de Riesz, a seqüência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfizesse a afirmação 2. do Teorema 3.2.5.

Teorema 3.2.5. *Sejam X um espaço de Riesz Dedekind σ -completo fracamente σ -distributivo, $f \in X^{[a, b]}$ e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de $X^{[a, b]}$ satisfazendo*

1. *f_k é Kurzweil integrável em $[a, b]$, para todo $k \in \mathbb{N}$;*
2. *existe uma (D) -seqüência $(a_{ij})_{ij}$ de elementos de X de modo que, para todo $k \in \mathbb{N}$, tem-se que, dada qualquer $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ existe $\delta_k = \delta_k(\varphi) \in \mathbb{R}_+^{[a, b]}$ tal que*

$$\left| \sum_{\Pi} f_k - \int_a^b f_k \right| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}, \quad \text{para toda } \Pi \in \mathcal{A}_{[a, b]}(\delta_k).$$

Se $f_n \xrightarrow{u} f$, então f é Kurzweil integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f_n \xrightarrow{o} \int_a^b f.$$

DEMONSTRAÇÃO. Por hipótese existe uma (D) -seqüência $(a_{ij})_{ij}$ de elementos de X de modo que, para todo $k \in \mathbb{N}$, tem-se que, dada qualquer $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ existe $\delta_k \in \mathbb{R}_+^{[a,b]}$ tal que

$$\left| \sum_{\Pi} f_k - \int_a^b f_k \right| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}, \quad \text{para toda } \Pi \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta_k). \quad (3.26)$$

De $f_n \xrightarrow{u} f$ tem-se que existe uma seqüência não-crescente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X satisfazendo

$$u_n \searrow 0 \quad \text{e} \quad |f_k(x) - f(x)| \leq u_k, \quad \text{para quaisquer } x \in [a, b] \text{ e } k \in \mathbb{N}. \quad (3.27)$$

Da Proposição 3.1.6, segue que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente de Cauchy e assim, pela Proposição 3.2.1, existe $L \in X$ tal que $\int_a^b f_n \xrightarrow{o} L$. Dessa forma, existe uma seqüência não-crescente $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X tal que

$$w_n \searrow 0 \quad \text{e} \quad \left| \int_a^b f_k - L \right| \leq w_k, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \quad (3.28)$$

Para cada $i, j \in \mathbb{N}$, defina $b_{ij} := 3(u_j(b-a) + a_{ij} + w_j)$. É claro que $(b_{ij})_{ij}$ é uma (D) -seqüência (Proposição 1.2.21).

Fixada $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, considere $p := \min_{i \in \mathbb{N}} \varphi(i)$ e $\delta := \delta_p \in \mathbb{R}_+^{[a,b]}$ como em (3.26).

Para $\Pi \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta)$, com $\Pi := \{(I_k, \alpha_k)\}_{k \in \Lambda}$, temos, de (3.26), (3.27), (3.28), e da Proposição 1.1.5 (7), que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\Pi} f - L \right| &\leq \left| \sum_{\Pi} f - \sum_{\Pi} f_p \right| + \left| \sum_{\Pi} f_p - \int_a^b f_p \right| + \left| \int_a^b f_p - L \right| \\ &\leq \left| \sum_{k \in \Lambda} (f(\alpha_k) - f_p(\alpha_k)) m(I_k) \right| + \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} + w_p \\ &\leq \left(\sum_{k \in \Lambda} |f(\alpha_k) - f_p(\alpha_k)| m(I_k) \right) + \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} + w_p \\ &\leq \left(\sum_{k \in \Lambda} u_p m(I_k) \right) + \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} + w_p \\ &= u_p(b-a) + \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} + w_p, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left| \sum_{\Pi} f - L \right| \leq u_p(b-a) + \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} + w_p. \quad (3.29)$$

Observando que

$$\begin{aligned} \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} &\leq \bigvee_{i=1}^{\infty} (u_{\varphi(i)}(b-a) + a_{i\varphi(i)} + w_{\varphi(i)}); \\ w_p &= \bigvee_{i=1}^{\infty} w_{\varphi(i)} \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} (u_{\varphi(i)}(b-a) + a_{i\varphi(i)} + w_{\varphi(i)}); \\ u_p(b-a) &= \bigvee_{i=1}^{\infty} (u_{\varphi(i)}(b-a)) \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} (u_{\varphi(i)}(b-a) + a_{i\varphi(i)} + w_{\varphi(i)}), \end{aligned}$$

obtem-se, a partir de (3.29) e (1.14), que

$$\left| \sum_{\Pi} f - L \right| \leq 3 \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} (u_{\varphi(i)}(b-a) + a_{i\varphi(i)} + w_{\varphi(i)}) \right) = \bigvee_{i=1}^{\infty} 3 (u_{\varphi(i)}(b-a) + a_{i\varphi(i)} + w_{\varphi(i)}).$$

Logo

$$\left| \sum_{\Pi} f - L \right| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} b_{i\varphi(i)}, \quad \text{para toda } \Pi \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta),$$

o que prova que f é Kurzweil integrável em $[a, b]$ e, pela Proposição 2.1.8, $\int_a^b f = L$. Com isso, concluímos que

$$\int_a^b f_n \xrightarrow{o} \int_a^b f. \quad \blacksquare$$

Como consequência do Teorema 3.2.5, no caso em que o espaço de Riesz é o conjunto dos números reais, temos o seguinte resultado, que coincide com o Teorema da convergência uniforme para funções Riemann generalizada integráveis (ver [B]; p. 117).

Proposição 3.2.6. *Sejam $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de $\mathbb{R}^{[a,b]}$, tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, f_k é Kurzweil integrável em $[a, b]$. Se $f_n \xrightarrow{u} f$, então f é Kurzweil integrável em $[a, b]$ e*

$$\int_a^b f_n \xrightarrow{o} \int_a^b f.$$

DEMONSTRAÇÃO. Para todo $k \in \mathbb{N}$, pelo Teorema 2.1.14, tem-se que f_k é Riemann generalizada integrável em $[a, b]$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_k \in \mathbb{R}_+^{[a,b]}$ tal que

$$\left| \sum_{\Pi} f_k - \int_a^b f_k \right| \leq \varepsilon, \quad \text{para toda } \Pi \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta_k). \quad (3.30)$$

Defina a (D) -seqüência $(a_{ij})_{ij}$ por $a_{ij} := 1/j$, para todo $i, j \in \mathbb{N}$.

Fixe $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(n_0) := \min_{i \in \mathbb{N}} \varphi(i)$. Defina $\varepsilon := 1/\varphi(n_0)$ e considere, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\delta_k \in \mathbb{R}_+^{[a,b]}$ como em (3.30).

Para todo $k \in \mathbb{N}$ tem-se, de (3.30) e observando que $\frac{1}{\varphi(n_0)} = \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}$, que

$$\left| \sum_{\Pi} f_k - \int_a^b f_k \right| \leq \frac{1}{\varphi(n_0)} = \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}, \quad \text{para toda } \Pi \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta_k).$$

Com isso, a seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ encontra-se nas hipóteses do Teorema 3.2.5, e portanto o resultado é verdadeiro. ■

Finalizamos este trabalho mencionando que em [V-R] encontram-se outros teoremas de convergência. Além disso, B. Riečan e M. Vráblová estenderam o conceito de integral aqui apresentado para funções a valores em um espaço de Riesz mas cujo domínio é um espaço topológico com certas propriedades. Essa nova teoria pode ser encontrada em [R-V-2] e [Bo-R-2].

Índice de Símbolos e Notações

$\mathbb{Q}$	conjunto dos números racionais
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais estritamente maiores que zero
$[a, b]$	intervalo fechado e limitado de $\mathbb{R}$, de extremos a e b , $a < b$
$\mathbb{R}_+$	conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
$\mathbb{R}^+$	conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\}$
Y espaço vetorial	significa que Y é um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial e $Y \neq \{0\}$
X^+ , onde X é espaço de Riesz	conjunto $\{x \in X \mid 0 \leq x\}$
$X^{[a,b]}$	espaço das funções definidas em $[a, b]$ e a valores em X
$g _J$, onde $J \subset \mathbb{R}$	a restrição da função g ao subconjunto J
função χ_J , onde $J \subset \mathbb{R}$	$\chi_J(x) = 1$, se $x \in J$, e $\chi_J(x) = 0$, se $x \notin J$
$x + A$, onde $x \in X$ e $A \subset X$	conjunto $\{x + a \mid a \in A\}$
$A + B$, onde $A, B \subset X$	conjunto $\{a + b \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$
αA , onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A \subset X$	conjunto $\{\alpha a \mid a \in A\}$
$x A$, onde $x \in X$ e $A \subset \mathbb{R}$	conjunto $\{x a \mid a \in A\}$
$\bigwedge_{i=1}^k z_i$	ínfimo do conjunto $\{z_i \mid 1 \leq i \leq k\}$
$\bigvee_{i=1}^k z_i$	supremo do conjunto $\{z_i \mid 1 \leq i \leq k\}$

$\bigwedge_{n=1}^{\infty} x_n$	ver início da seção 1.2
$\bigvee_{n=1}^{\infty} x_n$	ver início da seção 1.2

$x_n \nearrow x$	ver Notação 1.2.1 (i)
$x_n \searrow x$	ver Notação 1.2.1 (ii)
$x_n \xrightarrow{o} x$	ver Definição 1.2.8
$(a_{ij})_{ij}$ (D)-seqüência	ver Definição 1.2.20
$x_n \xrightarrow{D} x$	ver Definição 1.2.22

$\Pi := \{(I_k, \alpha_k)\}_{k \in \Lambda}$	ver Definição 2.1.1
$\mathcal{A}_{[a,b]}(\delta)$	ver Definição 2.1.2
$\sum_{\Pi} f$	ver Definição 2.1.6

$\int_a^b f$	ver Notação 2.1.9
--------------	-------------------

$R \int_a^b f$	ver (2.8)
----------------	-----------

$R^* \int_a^b f$	ver (2.9)
------------------	-----------

$\mathcal{K}_X([a, b])$	ver início da seção 2.2
-------------------------	-------------------------

$f_n \rightarrow f$	ver Definição 3.1.1 (iv)
$f_n \xrightarrow{u} f$	ver Definição 3.1.1 (v)

Referências Bibliográficas

- [B] BARTLE, R.: *A modern theory of integration*, Graduate Studies in Mathematics, AMS, 2001.
- [Bo] BOCCUTO, A.: *Integration in Riesz spaces with respect to (D) -convergence*, Tatra Mt. Math. Publ. **10** (1997), 33-54.
- [Bo-R-1] BOCCUTO, A.–RIEČAN, B.: *On the Henstock-Kurzweil integral for Riesz space-valued functions defined on unbounded intervals*, Czechoslovak Math. J. **54** (129) (2004), 591-607.
- [Bo-R-2] BOCCUTO, A.–RIEČAN, B.: *The Kurzweil-Henstock integral for Riesz space-valued maps defined in abstract topological spaces and convergence theorems*, Panamer. Math. J. **16** (2006), no.4, 63-79.
- [D-R] DUCHOŇ, M.–RIEČAN, B.: *On the Kurzweil-Stieltjes integral in ordered spaces*, Tatra Mt. Math. Publ. **8** (1996), 17-27.
- [Fe-1] FEDERSON, M. C. A. B.: *Fórmulas de substituição para as integrais de gauge*, Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1993.
- [Fe-2] FEDERSON, M. C. A. B.: *Some peculiarities of the Henstock and Kurzweil integrals of Banach space-valued functions*, Real Anal. Exchange **29** (2003/04), no.1, 439-460.
- [Fe-Bi] FEDERSON, M. C. A. B.–BIANCONI, R.: *Linear Fredholm integral equation and the integral of Kurzweil*, J. Appl. Anal. **8** (2002), no.1, 83-110.
- [Fer] FERNANDEZ, R.: *Caracterização do dual de um espaço de Orlicz*, Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1986.
- [F-1] FREMLIN, D. H.: *A direct proof of the Matthes-Wright integral extension theorem*, J. London Math. Soc. **11** (1975), 276-284.
- [F-2] FREMLIN, D. H.: *Topological Riesz spaces and measure theory*, Cambridge University Press, 1974.

- [G] GORDON, R. A.: *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, American Mathematical Society, Providence, 1994.
- [L] LIMA, E. L.: *Curso de análise, 1*, IMPA, 2002.
- [Lu-Z] LUXEMBURG, W. A.-ZAANEN, A. C.: *Riesz spaces, I*, North-Holland, Amsterdam, 1971.
- [P] PEZZOTTA, J. A.: *Integral de Kurzweil-Henstock em um disco p -ádico*, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005.
- [R] RIEČAN, B.: *On the Kurzweil integral for functions with values in ordered spaces I*, Acta Math. Univ. Comenian. **56-57** (1990), 75-83.
- [R-Vo] RIEČAN, B.-VOLAUF, P.: *On technical lemma in lattice ordered groups*, Acta Math. Univ. Comenian. **44-45** (1984), 31-35.
- [R-V-1] RIEČAN, B.-VRÁBELOVÁ, M.: *On the Kurzweil integral for functions with values in ordered spaces II*, Math. Slovaca **43** (1993), 471-475.
- [R-V-2] RIEČAN, B.-VRÁBELOVÁ, M.: *The Kurzweil construction of an integral in ordered spaces*, Czechoslovak Math. J. **48** (123) (1998), 565-574.
- [S] SCHECHTER, E.: *An Introduction to the gauge integral: also known as the generalized Riemann integral, the Henstock integral, the Kurzweil integral, the Henstock-Kurzweil integral, the HK-integral, the Denjoy-Perron integral, etc.*, Disponível em: <<http://www.math.vanderbilt.edu/schectex/ccc/gauge/>>. Acesso em: 16/11/2006.
- [V-R] VRÁBELOVÁ, M.-RIEČAN, B.: *On the Kurzweil integral for functions with values in ordered spaces III*, Tatra Mt. Math. Publ. **8** (1996), 471-475.
- [Y] YE, G.: *On Henstock-Kurzweil and McShane integrals of Banach space-valued functions*, J. Math. Anal. Appl. **330** (2007), no.2, 753-765.
- [Zh-Y] ZHAO, D. F.-YE, G.: *The Henstock integral of Banach-valued functions*, Math Practice Theory **36** (2006), no.10, 246-250.