Folheações Riemannianas e Folheações Duais

Benigno Oliveira Alves

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Mestre em Matemática

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Marcos Martins Alexandrino da Silva

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CNPq

São Paulo, Agosto de 2013

Folheações Riemannianas e Folheações Duais

Esta é a versão original da dissertação elaborada pelo candidato (Benigno Oliveira Alves), tal como submetida à Comissão Julgadora.

Folheações Riemannianas e Folheações Duais

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 23/08/2013. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof^{a}. Dr^{a}. Marcos M. Alexandrino da Silva (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Luiz Hartmann - Ufscar
- Prof. Dr. Dirk Toeben - Ufscar

Agradecimentos

Este trabalho marca o término de uma etapa importante em minha vida. É o fim do mestrado em Matemática, que é uma realização profissional e pessoal. Para alcançar este ponto foi necessário anos trabalho duro compostos por momentos bons, ruins e difíceis. Obviamente trilhar este caminho sozinho seria muito árduo e provavelmente impossível. Por isto esta conquista não é exclusivamente minha, mas parte dela é dedicada a pessoas que se fizeram presente em minha vida.

Sou muito grato ao meu orientador e amigo Marcos Alexandrino. Sempre muito cuidadoso, agradável e duro quando preciso, me orientou perfeitamente, criando planos afim de manter uma segurança imprescindível para o andamento do trabalho. Eu também o agradeço pelas horas dedicadas a conversas matemáticas e sobre a vida cotidiana, que serviram como meu norte e, em momentos críticos, foram decisivas.

A família é a coisa mais importante para mim, ela me torna mais forte, pois é meu alicerce. Agradeço ao meus pais José Luiz Alves e Jucely Braz de Oliveira a que eu devo minha vida e todo amor e carinho a mim dedicados. Agradeço também aos meus irmãos, em especial Bruno de Oliveira Alves, quem eu considero parte de mim.

Depois da família, os amigos constituem a classe de pessoas mais importante. Sou muito feliz, pois tenho muitos e bons amigos; amigos de longas dadas como Darlan, Eder, Emília, Plácido, Raquel, Samanta, Stephanie; e também novos como Adilson, Belmiro, Daniele, Guilherme, Marline, Larissa, Patrícia. Eles estão presentes nas pequenas coisas do cotidiano, que fazem a diferença: uma conversa, um conselho, almoços juntos, riso e choros. Alguns já estão distantes, pois a vida nos lava a direções distintas, mesmo assim o bem querer recíproco permanece vivo. A eles também sou muito grato.

Muito obrigado minha família, amigos e Marcos por terem contribuído direta ou indiretamente para a minha formação profissional e pessoal.

Resumo

Alves, B. O. **Folheações Riemannianas e Folheações Duais**. 2013. 86 f. Tese (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

Seja M uma variedade Riemanniana completa. Uma folheação Riemanniana singular em M é uma folheação singular tal que as folhas são localmente equidistantes. Existe uma folheação singular, chamada de folheação dual a folheação Riemanniana dada, cuja folha passando por $p \in M$ é o conjunto dos pontos em M que são alcançados por alguma geodésica horizontal quebrada partindo de p. Se M possui curvatura seccional positiva, então a folheação dual possui apenas uma folha. Se a curvatura seccional de M é não-negativa e M não coincidir com alguma folha dual, então o fibrado normal de qualquer geodésica horizontal quebrada é gerado por uma família de campos de Jacobi paralelos. Ambos os resultados são conhecidos com Teorema de Dualização. Uma aplicação destes resultados é a prova da suavidade da projeção métrica na alma. Todos estes resultados são devidos a Wilking. O objetivo desta dissertação de mestrado é discutir tais resultados de Wilking, baseado no trabalho do mesmo e em uma abordagem feita por Gromoll e Walschap.
Palavras-chave: Folheação Riemanniana singular, folheação dual, Teorema de Dualização.

Abstract

Alves, B. O. **Singular Riemannian Foliation and Dual Foliation**. 2013. 86 f. Tese (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

Let M be a Riemanniana manifold with nonnegative sectional curvature. A singular Riemannian foliation in M is a singular foliation with locally equidistant leaves. The dual leaf though $p \in M$ is the collection of the all points $q \in M$ such that p and q are connected with a pice-wise horizontal geodesic. The partition of M into the dual leaves is a singular foliation called dual foliation. Wilking proved that if the sectional curveture is positive, then the dual foliation consists of a single leaf. In other words, any two points in M can be connected with a pice-wise horizontal geodesic. In order to prove this result Wilking showed that, if M is nonnegatively curved, the normal bundle of a dual leaf along a pice-wise horizontal geodesic is gerated for parallel Jacobi field. These results are used in the proof that the projection metric in the soul is smoth.
Keywords: Singular Riemannian foliation, dual foliation, Duality Theorem.

Sumário

Introdução **ix**

1 Ferramentas Básicas **1**

1.1 Introdução 1

1.2 Rudimentos de Geometria Riemanniana 2

1.2.1 Variedade Riemanniana 3

1.2.2 Grupo de Lie e Ações Isométricas 4

1.2.3 Conexão Riemanniana 7

1.2.4 Curvatura 10

1.2.5 Geodésicas 11

1.2.6 Campos de Jacobi 15

1.3 Submersão Riemanniana 17

1.3.1 Exemplo Relevante $\mathbb{C}P^1$ 22

1.3.2 Folheações Riemannianas 25

1.3.3 Os Tensores Fundamentais de uma Submersão 26

1.3.4 Levantamento Horizontal e Campos Tipo Holonomia 28

1.3.5 Campos de Jacobi Projetáveis 31

2 Curvatura não-negativa e Campos de Jacobi Paralelo. **35**

2.1 Introdução 35

2.2 Propriedades Básicas de Espaços Auto-adjuntos 36

2.3 Operador de Riccati 39

2.4 Teorema de Eschenburg e Heintze 43

2.5 Operador de Riccati Transversal 45

2.6 Teorema de Wilking 49

2.7 Exemplo 53

3 Teorema da Dualização de Wilking **59**

3.1 Introdução 59

3.2 Folheação Dual 60

3.3 Prova do Teorema de Dualização de Wilking 63

3.4 Aplicações 65

4 Suavidade da Projeção Métrica na Alma **67**
4.1 Introdução 67
4.2 Ideia da Construção da Alma 67
4.3 Teorema de Perelman 69
4.4 Demonstração da Suavidade da Projeção Métrica na Alma 70

Referências Bibliográficas **73**

Introdução

Seja M uma variedade Riemanniana completa. Uma *folheação Riemanniana singular* em M é uma partição (suave) de M por subvariedades suaves imersas, chamadas de *folhas*, tal que qualquer geodésica que é ortogonal a uma folha permanece ortogonal a todas as folhas que encontrar. É possível mostrar que uma folheação Riemanniana singular é uma folheação singular tal que as folhas localmente são equidistante. Exemplos de folheação Riemanniana completa são dados pelas fibras de uma submersão Riemanniana e por partição por órbitas de uma ações isométricas. A *folha dual* passando por $p \in M$, denotada por $L_p^{\#}$, é o conjunto de pontos de M que são alcançados por alguma geodésica horizontal quebrada que parte de p. Como veremos no capítulo 4, a partição de M por folhas duais é uma folheação singular, chamada de *folheação dual* a folheação dada.

Dada $\mathcal{F}$ é uma folheação Riemanniana singular em M, Wilking em [6] mostrou que se a curvatura seccional de M é positiva, então quaisquer dois pontos em M podem ser ligados por uma geodésica horizontal quebrada. Em outras palavras, *se a curvatura seccional de M é positiva, então a folheação Dual possui uma única folha.* Para demonstrar este resultado, Wilking compreendeu como se comporta o fibrado normal de uma folha dual quando a curvatura seccional de M é não negativa, a grosso modo, tal fibrado é gerado por campos de Jacobi paralelos ao longo de um geodésica horizontal quebrada. Estes resultados serão referidos como Teorema de Dualização, Teorema 3.1.2 e Teorema 3.1.3, e são encontrados no capítulo 3.

Wilking também deu uma resposta positiva para a questão sobre a *suavidade da projeção métrica da alma.* Toda variedade Riemanniana completa não compacta com curvatura seccional não-negativa admite uma subvariedade totalmente convexa compacta sem bordo S, chamada de *alma.* Além disto, o fibrado normal a S é difeomorfo a M. A *projeção métrica* é uma aplicação $\pi : M \to S$ que associa a cada $p \in M$ o ponto em $\pi(p) \in S$ mais próximo de p. Por algum tempo se conjecturou que a projeção métrica era suave. O Teorema de Perelmann garantiu que π é uma submersão métrica de classe C^1 e Guijarro em [11] mostrou que π é uma aplicação de classe C^2. Usando os resultados sobre folheação Riemanniana singular e folheação dual, Wilking mostrou em [6] que de fato a projeção métrica é suave e portanto uma submersão Riemanniana.

O principal objetivo desta dissertação é demonstrar os resultados sobre folheação dual mencionados acima e fazer uma breve discussão sobre a suavidade da projeção métrica. Para alcançar tal objetivo, seguiremos os trabalhos de Wilking e uma abordagem dada por

Gromoll e Walschap. Abaixo apresentaremos a disposição dos capítulos.

No capítulo 1, revisaremos alguns conceitos fundamentais em Geometria Riemanniana, submersão Riemanniana e campos de Jacobi. No capítulo 2, veremos o Teorema de Eschenburg e Heintze (vide Teorema 2.1.1) e o Teorema de Wilking (vide Teorema 2.1.2), que tratam sobre espaços duais, operador de Riccati e campos de Jacobi paralelos. No capítulo 3, apresentaremos o conceito de folheação dual e os resultados de Dualização de Wilking. Por fim, no capítulo 4, discutiremos a construção de uma alma de M e a suavidade da projeção métrica da alma, vide Teorema 4.1.1.

O texto é organizado de modo que o leitor possa omitir algumas partes a depender de sua familiaridade com a geometria Riemanniana ou de seu interesse em questões técnicas. As introduções dos capítulos possuem resumos de resultados e definições, possibilitando assim o leitor ir direto à demonstração do Teorema de Dualização, na Seção 3.3, e do Teorema de suavidade da prijeção métrica na alma, na Seção 4.4.

Capítulo 1

Ferramentas Básicas

1.1 Introdução

Neste capítulo, recordaremos alguns conceitos e resultados básicos em geometria Riemanniana. Com o intuito de fornecer ao leitor uma fonte rápida de consulta, a maioria dos resultados serão apresentados sem demonstração. Deste modo, o leitor que estiver familiarizado com geometria Riemanniana pode omitir este capítulo, mas sugerimos que leia a introdução para ficar familiarizado com as notações utilizadas.

Na primeira seção, apresentaremos definições e resultados básicos em geometria Riemanniana, os quais podem ser encontrados em [1], [2], [3], [8].

Na segunda seção, apresentaremos definições, exemplos e resultados sobre Submersão Riemanniana, essencialmente extraídos de [7] e [3]. Vamos expor já nesta introdução as principais definições e resultados sobre Submersão Riemanniana.

Seja $\pi : M \to B$ uma submersão entre variedades Riemannianas. O *subespaço vertical* $\mathcal{V}_p$ e o *subespaço horizontal* $\mathcal{H}_p$ em $p \in M$ são respectivamente o espaço tangente a fibra em p, e o complemento ortogonal de $\mathcal{V}_p$ em T_pM. A aplicação π é uma *submersão Riemanniana* quando

$$d\pi|_{\mathcal{H}_p} : \mathcal{H}_p \to T_{\pi(p)}B$$

é uma isometria. Um exemplo relevante de submersão Riemanniana é a projeção $\pi : S^3 \to \mathbb{C}P^1$, onde $\mathcal{C}P^1$ é o espaço projetivo unidimensional. A cada submersão Riemanniana associamos dois tensores fundamentais, que dizem o quanto uma submersão Riemanniana deixa de ser uma projeção de uma variedade produto em uma das componentes:

$$\begin{aligned} A \ : \ & \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{V} \\ & (X, Y) \longmapsto A_X Y = \nabla^v_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]^v. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S \ : \ & \mathcal{H} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \\ & (X, U) \longmapsto S_X U = -\nabla^v_U X. \end{aligned}$$

Tais tensores são chamados respectivamente de *A-tensor* (ou tensor de O'neill) e *S-tensor*. Temos que o A-tensor é parte do tensor de integrabilidade apresentado por O'neill:

$$\begin{aligned} \mathbb{A} \ : \ & \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM) \\ & (E, F) \longmapsto \mathbb{A}_E F = \nabla^h_{E^h} F^v + \nabla^v_{E^h} F^h. \end{aligned}$$

Uma *folheação Riemanniana singular* $\mathcal{F} = \{L_p; p \in M\}$ é uma partição que satisfaz os dois itens abaixo:

(i) Para qualquer $p \in M$ e $v \in T_pL_p$ existe campo de vetores X tal que $X(p) = v$ e $X(q) \in T_qL_q$ para qualquer $q \in M$; e

(ii) Se c é uma geodésica ortogonal a uma folha, então c é ortogonal a todas folhas que intersectar.

A folheação $\mathcal{F}$ é Riemanniana se for uma folheação Riemanniana singular cuja as folhas são regulares, ou seja, as folhas possuem dimensão maximal. Folheações Riemannianas singulares são caracterizadas como folheações tais que qualquer placa P_p possui uma vizinhança tubular $Tub(P_p)$ onde as placas de pontos nesta vizinhança tubular ficam contidas em um cilindro de eixo P_p. Já as Folheações Riemannianas são caracterizadas como folheações que são localmente dadas por uma submersão Riemanniana.

Um campo de Jacobi J ao londo de uma geodésica horizontal c é *projetável* quando é o campo variacional de uma variação de c por geodésicas horizontais. É possível mostrar que esta definição é equivalente a definir campo de Jacobi projetável como um campo de Jacobi que satisfaz a seguinte equação

$$J'^v(t) = -(S_{c'}J^v + A_{c'}J^h)(t).$$

Outro campo de Jacobi que será muito usado é o *campo de Jacobi tipo holonomia*, que é caracterizado como um campo de Jacobi projetável que é vertical. É possível mostrar que J é um campo tipo holonomia ao longo de uma geodésica horizontal $c : [0, a] \to M$ se, e somente se, satisfaz os itens abaixo

(i) $J(0)$ é vertical.

(ii) $J'(0) = -(A^*_{c'(0)}J(0) + S_{c'(0)}J(0))$.

1.2 Rudimentos de Geometria Riemanniana

Apresentaremos as definições iniciais e primeiros resultados em geometria Riemannian. Definiremos variedade Riemanniana, isometria, conexão Riemanniana, geodésicas, variedade completa, tensor curvatura, curvatura seccional e campos de Jacobi. Recordaremos alguns

resultados, como o que afirma sobre a existência de geodésicas e que tais objetos são localmente minimizantes e também o Teorema de Hopf-Rinow. Outro resultado que enunciaremos, e frequentemente será usado, é uma caracterização de campos de Jacobi como o campo variacional de uma variação por geodésicas.

1.2.1 Variedade Riemanniana

Dada uma subvariedade M de $\mathbb{R}^n$, é usual medir o comprimento dos vetores tangentes a M por meio do produto interno canônico no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Porém, para uma variedade abstrata M, é comum usar uma abordagem a qual M não é imersa em uma estrutura ambiente, e ainda sim é possível definir uma forma de medir o comprimento de vetores tangentes a variedade em questão, o que nos permitirá definir comprimento de curvas, logo distância entre dois pontos em M. Terminaremos a seção apresentando alguns exemplos.

Definição 1.2.1 (Métrica Riemanniana). Seja M uma variedade diferenciável n-dimensional. Uma *métrica Riemanniana* em M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ uma forma bilinear, simétrica, positiva definida

$$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R},$$

de modo que g_p varie suavimente com p, isto é,

$$g_{i,j}(.) = g_{(.)}(\frac{\partial}{\partial x_i}(.), \frac{\partial}{\partial x_j}(.))$$

é uma aplicação suave de M em $\mathbb{R}$.

A expressão local da métrica em uma carta local $(U, (x_i))$ de M é dada por

$$g_p(X, Y) = \sum g_{i,j}(p) dx_i \otimes dx_j(X, Y),$$

para $p \in U$ e $X, Y \in T_pM$, onde $\{dx_i\}$ são as formas duais ao referencial local $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ relativo a carta dada.

Definição 1.2.2 (Variedade Riemanniana). Uma variedade diferenciável n-dimensional M dotada de uma métrica Riemanniana g é chamada de *variedade Riemanniana.*

Um variedade Riemanniana n-dimensional M com métrica Riemanniana g será denotada por (M^n, g), mas, em geral, quando não houver risco de confusão, usaremos apenas M^n ou M.

Seja $f : N \to M$ uma imersão de uma variedade diferenciável N em uma variedade Riemanniana (M, g^M). Nestas condições, podemos obter uma métrica Riemanniana em N por meio do pullback da métrica g via f:

$$g_p^N(X, Y) = f^* g^M(X, Y)_p = g^M_{f(p)}(df_p X, df_p Y).$$

Com isso verifica-se que toda variedade diferenciável admite uma métrica Riemanniana g definindo, para cada carta local (U_α, ϕ_α) de um atlas maximal $\mathcal{A}$, uma métrica em U_α dada pelo pullback da métrica canônica do espaço modelo via a carta local e usando uma partição da unidade para definir a métrica globalmente.

Seja $c : [a, b] \to M$ uma curva suave por parte em uma variedade Riemanniana (M, g). Fazendo uso da estrutura métrica em M, definimos o comprimento de c por

$$L(c) = \int_a^b g(c'(t), c'(t))^{\frac{1}{2}} dt.$$

Agora, defina a distância entre p e q pertencentes a variedade Riemanniana M por

$$d(p, q) = \inf_{c \in \Omega_{p,q}} L(c),$$

onde $\Omega_{p,q}$ é o conjunto de todas curvas suaves por parte ligando p a q. A distância d assim definida induz uma topologia que coincide com a estrutura de variedade topológica de M.

Definição 1.2.3 (Isometria). Sejam (M, g) e (N, h) variedades Riemannianas. Uma aplicação $f : M \to N$ é uma *isometria* entre M e N se for um difeomorfismo e

$$g_p(X, Y) = (f^*h)_p(X, Y) = h_{f(p)}(df_pX, df_pY),$$

para cada $p \in M$ e $X, Y \in T_pM$. Neste caso, M e N são isométricas. Diremos que f é uma *isometria local* se para cada $p \in M$ existir uma vizinhança U de p tal que $f : U \to f(U)$ é uma isometria.

Exemplo 1. Seja $i : N \to M$ uma imersão de N variedade suave em (M, g^M) variedade Riemanniana. Logo (N, g^M) é uma variedade Riemanniana com a métrica $g^N = i^*g^M$.

Exemplo 2. Sejam (M, g^M) e (N, g^N) variedades Riemannianas. Logo $M \times N$ é uma variedade Riemanniana com a métrica produto:

$$g_{(p,q)}(X, Y) = g_p^M(X_1, X_2) + g_q^N(X_2, Y_2).$$

Exemplo 3. Considere o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1} = f^{-1}(-1)$, onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle x, x\rangle$ e $\langle x, y\rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + ... + x_ny_n$. temos que a forma quadrática $-dx_0^2 + dx_1^2 + ... + dx_n^2$ restrita a $\mathbb{H}^n$ é uma métrica Riemanniana.

1.2.2 Grupo de Lie e Ações Isométricas

Nesta seção, apresentaremos alguns conceitos e resultados que envolvem grupos de Lie, que é um importante exemplo de variedade Riemanniana, e ações isométricas, os quais usaremos em uma pequena aplicação do Teorema de Dualização de Wilking.

Definição 1.2.4 (Grupo de Lie). Um *grupo de Lie* G é uma variedade suave que possui uma estrutura de grupo $(G, .)$ tal que as operações $G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto x.y = xy$ e $G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$ são suaves.

Dado $q \in G$, considere a aplicação $L_q : G \to G$ dada por $L_q(p) = qp$ chamada de translação a esquerda. Um campo de vetores X em G é invariante a esquerda quando $d(L_g)_e X = X(g)$, onde e denota a identidade em G. Uma métrica g em G é invariante a esquerda L_q é uma isometria para todo $q \in G$. Também definimos a translação a direita por $R_q : G \to G, R_q(p) = pq$ e analogamente campos de vetores e métrica invariantes direita. Uma métrica é bi-nvariante quando é invariante a esquerda e a direita. É possível mostrar que todo grupo de Lie compacto admite uma métrica bi-invariante.

A álgebra de Lie de um Grupo de Lie G, denotada por $\mathbf{g}$ é o conjunto dos campos invariantes a esquerda. Também é possível mostrar que a álgebra de Lie de um grupo de Lie G é isomorfa a T_eG, espaço tangente a identidade.

Definição 1.2.5 (Ação de um Grupo de Lie). Sejam G um grupo de Lie e M uma variedade Riemanniana. Uma aplicação $\mu : G \times M \to M$ é uma *ação a esquerda* de G sobre M quando

(a) $\mu(g_1, \mu(g_2, p)) = \mu(g_1 g_2, p)$

(b) $\mu(e, p) = p$

para quaisquer $g_1, g_2 \in G$ e $p \in M$. Podemos denotar $\mu(g, p)$ simplesmente por gp.

Definição 1.2.6 (Ação Própria). A ação $\mu : G \times M \to M$ é dita *própria* quando a aplicação $\rho : G \times M \to M \times M$, dada por $\rho(g, p) = (\mu(g, p), p)$, é própria; isto é, pré-imagem de conjuntos compactos é compacto.

Uma caracterização de uma ação μ própria é a seguinte: se x_n e $y_n = \mu(g_n, x_n)$ são sequências convergentes, então existe uma subsequência $\{g_{n_k}\}$ convergente em G.

Dizemos que H é um *subgrupo de Lie* de G quando H é uma subvariedade imersa de G (sem auto-interseções) e $xy^{-1} \in H$ para quaisquer $x, y \in H$.

Lema 1.2.1. Se H é um subgrupo fechado de um subgrupo de Lie G, então H é um subgrupo de Lie.

Temos os seguintes exemplos de grupos de Lie:

1) O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ com a adição usual de vetores.

2) A esfera unitária S^1 com o produto dado por

$$p.q = e^{(\theta+\rho)i} \in S^1,$$

para qualquer $p = e^{i\theta},\ q = e^{i\rho} \in S^1$.

3) Os grupos de matrizes $GL(n,K)$, $SL(n,K)$ $(K = (R)\text{ou}(C))$, $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$ e $SU(n)$ com a multiplicação de matrizes.

Outro exemplo importante é dado pelo seguinte teorema:

Teorema 1.2.1 (Myers-Steenrod). O grupo das isometrias de uma variedade Riemanniana (M,g), denotado por $Iso(M)$, tem uma estrutura de Grupo de Lie com a topologia compacta-aberta.

Observe então que qualquer subgrupo fechado de $Iso(M)$ é um subgrupo de Lie.

Definição 1.2.7 (Ação Isométrica). Uma ação a esquerda de G sobre M variedade Riemanniana é uma *ação isométrica* quando G é um subgrupo fechado de $Iso(M)$.

Proposição 1.2.1. Sejam M uma variedade Riemanniana e G um subgrupo fechado de $Iso(M)$, grupo das isometria de M. Então a ação $\mu : G \times M \to M$ dada por $\mu(g,p) = g(p)$ é uma ação própria.

Definição 1.2.8 (Grupo de Isotropia). O *grupo de isotropia* de $p \in M$ é o conjunto

$$G_p = \{g \in G; gp = p\}.$$

Dizemos que a ação é μ é *livre* se para qualquer $p \in M$ o grupo de isotropia de p é composto apenas pela a identidade e. A *órbita* passando por $p \in M$ é difinida como o conjunto

$$G(p) = \{gp; g \in G\}$$

. O quociente da ação de M por G, denotado por M/G, é denominado *espaço de órbitas*.

Teorema 1.2.2. Se $\mu : G \times M \to M$ é uma ação livre e própria, então o espaço de órbitas M/G tem uma estrutura de variedade e a projeção canônica $\pi : M \to M/G$ é uma submersão.

Seja $\mu : G \times M \to M$ uma ação própria. Duas órbitas $G(p)$ e $G(q)$ são do *mesmo tipo* se existe $g \in G$ tal que

$$G_p = G_{\mu(g,q))}.$$

Definição 1.2.9 (Órbita Principal). Uma órbita $G(p)$ é uma *órbita principal* quando existe uma vizihança V de p tal que, para qualquer $q \in V$,

$$G_p \subset G_{\mu(g,q)}$$

para algum $g \in G$.

Observe que se todas as órbitas de uma ação própria são do mesmo tipo, então todas as órbitas são principais.

Seja $\mu : G \times M \to M$ uma ação. Um *slice* em $p_0 \in M$ é uma subvariedade mergulhada contendo p_0 tal que

(i) $T_{p_0}M = d\mu_{p_0}\mathbf{g} \oplus T_{p_0}S_{p_0}$ e $T_pM = d\mu_p\mathbf{g} + T_pS_{p_0}$, para todo $p \in S_{p_0}$;

(ii) S_{p_0} é invariante sobre G_{p_0};

(iii) Se $p \in S_{p_0}$ e $g \in G$ tais que $\mu(g,p) \in S_{p_0}$, então $g \in G_{p_0}$,

onde $\mu_p(.) = \mu(.,p)$

Teorema 1.2.3 (do Slice). Seja $\mu : G \times M \to M$ uma ação própria e $p_0 \in M$. Então existe um slice S_{p_0} em p_0.

O slice em p_0 de uma ação isométrica é dado por

$$S_{p_0} = exp_{p_0}(B_\epsilon(p_0)),$$

onde $B_\epsilon(p_0)$ é uma bola aberta no espaço normal a órbita $G(p_0)$ em p_0.

Proposição 1.2.2. Seja $\mu : G \times M \to M$ uma ação a esquerda própria. Então são equivalentes as afirmações abaixo:

a. G(p) é uma órbita pricipal;

b. Seja S_p o slice em p. Então $G_p = G_q$, para qualquer $q \in S_p$.

Esta proposição será importante para uma aplicação do Teorema Dualização de Wilking.

1.2.3 Conexão Riemanniana

Em $\mathbb{R}^n$ temos uma forma de derivadar campos de vetores: dados X,Y campos de vetores suaves em $\mathbb{R}^n$, tomando a identidade I como uma carta global, e escrevendo $X = \sum x_ie_i$ e $Y = \sum y_ie_i$, a derivada de Y na direcão de $X(p)$ é dada por

$$D_XY(p) = X(Y)_p = \sum d(y_i)_pX\partial_i(p),$$

onde $\partial_i = d(I)e_i$. Se M é uma subvariedade mergulhada de $\mathbb{R}^n$, então uma derivada de campos de vetores tangentes a M é dada por $\pi(D_XY)$, onde $\pi : T_p\mathbb{R}^n \to T_pM$ é a projeção ortogonal no espaço tangente a M em p. Ou seja, dados $X, Y \in T_pM$ deriva-se Y na direção de $X(p)$ com respeito D, derivada de campos do ambiente, e depois toma-se a parte tangencial do vetor $(D_XY)(p)$.

Mas geralmente, no contexto de fibrados vetoriais, definimos:

Definição 1.2.10 (Conexão Afim). Sejam (E, M, π) um fibrado vetorial e $\Gamma(E)$ o conjunto das seções de E. Uma *conexão afim* em E é uma aplicação bilinear

$$\begin{aligned} \nabla \ : \ & \chi(M) \times \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E) \\ & (X,Y) \longmapsto \nabla_XY, \end{aligned}$$

tal que

ii. $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$;

iii. $\nabla_X fY = X(f) + \nabla_X Y$.

para quaisquer $X \in \chi(M), Y \in \Gamma(E)$ e $f : M \to \mathbb{R}$ função suave.

Dessa forma é possível calcular como campos de vetores, não apenas tangentes a variedades, mas também por exemplo campos normais, variam em uma dada direção tangente.

A coneção linear no fibrado tangente (TM, M, π) de uma variedade diferenciável nos fonerce uma derivação de campos de vetores em M.

Dada uma conexão linear ∇, escreveremos agora sua expressão em coordenadas. Fixado $p \in M$, sejam (U, φ) uma carta local de M e (U, ψ) uma trivialização local do fibrado (E, M, π), onde U é uma vizinhança de p. Assim dados $X \in \chi(M)$, $Y \in \Gamma(E)$, escrevemos

$$X = \sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ e } Y = \sum y_j \xi_j,$$

onde $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ é o referencial local induzido por φ e $\xi_j(.) = \psi^{-1}(., e_j)$. Portanto a expressão local da conexão afim é

$$\nabla_X Y = \sum_k (X(y_k) + \sum_{i,j} y_j x_i \Gamma_{ij}^k)\xi_k,$$

onde Γ_{ij}^k é chamado de *símbolo de Cristofell* e é dado por $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \xi_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \xi_k$. Observe que a conexão afim $(\nabla_X Y)_p$ depende apenas de $X(p)$ e dos valores de Y próximo de p ao longo de qualquer curva que realiza o vetor $X(p)$. A expressão local dada acima da conexão afim ∇ admite a seguinte forma matricial

$$\nabla_X Y = D_X Y + A(X)Y,$$

onde $D_X Y$ é a derivada de campos em $\mathbb{R}^n$ e A é uma matriz de 1-formas definida por $a_{ki} = \sum \Gamma_{ij}^k dx_i$.

Definição 1.2.11 (Conexão Riemanniana). Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Uma *conexão Riemanniana*, também conhecida como conexão Levi-Civita, é uma conexão afim ∇ no fibrado tangente TM tal que

i. $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ (simétrica ou livre de torção);

ii. $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (compatível com a métrica Riemanniana).

para quaisquer $X, Y, Z \in \chi(M)$.

Teorema 1.2.4. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Então existe uma única conexão Riemanniana em TM, a qual é dada pela *fórmula de Koszul* abaixo:

$$2g(\nabla_X Y, Z) \quad = \quad Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y)$$

$$-g([X,Y],Z) - g([Z,X],Y) - g([Y,Z],X).$$

Exemplo 4. Seja G um grupo de Lie com métrica bi-invariante g munido com ∇ conexão Riemanniana. Então

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y],$$

para quaisquer X, Y pertencentes a álgebra de Lie $\mathbf{g}$.

Seja (E, M, π) um fibrado vetorial com uma conexão afim ∇. Dada uma curva suave c é possível mostrar que existe um único operador linear $\frac{\nabla}{dt} : \Gamma(c^*E) \to \Gamma(c^*E)$ tal que

a) $\frac{\nabla}{dt}(fX) = \frac{d}{dt}fX + f\frac{\nabla}{dt}X$ para qualquer função suave $f : [a,b] \to M$;

b) Se X admite uma extensão para um campo $\tilde{X} \in \Gamma(TU)$ com U aberto de M, então

$$(\frac{\nabla}{dt}X)(t) = (\nabla_{\alpha'(t)}\tilde{X})_{\alpha(t)},$$

onde $\Gamma(c^*E)$ é o fibrado pullback, ou seja, o espaço das seções de E ao longo de c. O operador $\frac{\nabla}{dt}$ é chamado de *derivada covariante*.

Definição 1.2.12 (Seção Paralela). Seja $c : I \to M$ uma curva suave por partes. Uma seção $X \in \Gamma(c^*E)$ é *paralela* se

$$\frac{\nabla}{dt}X(t) = 0, \tag{1.1}$$

para todo $t \in I$.

Sejam $c : I \to M$ uma curva suave por partes e $t_0 \in I$. Dado $v \in E_c(t_0)$, usando a equação (1.1) escrita em coordenadas e o teorema de existência e unicidade de E.D.O, verica-se que existe uma única seção paralela $X^v \in \Gamma(c^*E)$ tal que $X^v(t_0) = v$. Logo dado outro $t \in I$ podemos definir a aplicação

$$P^c_{t,t_0} : E_{c(t_0)} \longrightarrow E_{c(t)},$$

que associa a cada $v \in E_{c(t_0)}$ o vetor $X^v(t) \in E_{c(t)}$. Esta aplicação é chamada de *transporte paralelo* de t_0 a t ao longo de c. O transporte paralelo P^c_{t,t_0} ao longo de qualquer curva c é uma isometria e possui as seguintes propriedades:

1. (i) $P^c_{t_0,t_0}$ é a aplicação identidade;

2. (ii) $(P^c_{t,t_0})^{-1} = P^c_{t_0,t}$; e

3. (iii) $P^c_{t_2,t_1} \circ P^c_{t_1,t_0} = P^c_{t_2,t_0}$.

1.2.4 Curvatura

Seja (E, M, π) um fibrado vetorial com conexão afim ∇.

Definição 1.2.13 (Tensor Curvatura). Definimos o tensor curvatura como a aplicação trilinear $R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ dada por

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z. \tag{1.2}$$

Prova-se usando a regra de Leibniz que R é um $C^\infty(M)$-trilinear. Como para conexão, prova-se que R_p depende apenas dos valores $X(p)$, $Y(p)$ e $Z(p)$ e não dos campos. Portanto o tensor curvatura R é um $(1,3)$-tensor.

Quando não mencionado o fibrado em questão, consideraremos o fibrado tangente (TM, M, π) de uma variedade Riemanniana M munida com a conexão Riemanniana ∇.

Proposição 1.2.3. O Tensor curvatura possui as seguintes propriedades algébricas:

i. $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$;

ii. $g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(X,Y)W,Z)$;

iii. $g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y)$;

iv. $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$, (segunda identidade de Bianchi) .

Definição 1.2.14 (Curvatura Seccional). Seja $\sigma \subset T_pM$ um 2-plano gerado por $X, Y \in T_pM$ vetores tangentes linearmente independentes. Então a curvatura seccional em σ é definida por

$$K(\sigma) = K(X,Y) = \frac{g(R(X,Y)X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}. \tag{1.3}$$

A curvatura seccional K também é denotada por *sec*.

É possível mostrar que $K(\sigma)$ independe da escolha dos vetores da base de σ.

Temos, por exemplo, que as curvaturas seccionais do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, da esfera unitária S^n e do espaço hiperbólilco real $(H)^n$ são constantes igual 0, 1 e -1, respectivamente.

Dizemos que uma variedade Riemanniana M tem *curvatura positiva* (respectivamente negativa) quando para qualquer p e $X, Y \in T_pM$ a curvatura seccional $K_p(X,Y)$ é positiva (respectivamente negativa).

Vejamos uma interpretação do que significa uma variedade ter tensor curvatura nulo.

Proposição 1.2.4. Seja (M, g) variedade Riemanniana e ∇ sua conexão Riemanniana. Então as afirmações abaixo são equivalentes:

a. O tensor curvatura é nulo;

b. Para todo $p \in M$ existe uma vizinhança U de p tal que o transporte paralelo independe do caminho.

c. Para todo $p \in M$ existem uma vizinhança U de p e um referencial local $\{E_i\}$ definido em U tal que $\nabla E_i = 0$.

Exemplo 5. Sejam G um grupo de Lie com métrica bi-invariante g e $\mathbf{g}$ sua álgebra de Lie. É possível mostrar que para qualquer $X, Y, Z \in \mathbf{g}$

1. $R(X,Y)Z = \frac{1}{4}[[X,Y],Z]$
2. $g(R(X,Y)X,Y) = \frac{1}{4}g([X,Y],[X,Y]) = \frac{1}{4}||[X,Y]||^2$.

Em particular, concluimos que a curvatura seccional de G é sempre maior ou igual a zero, ou seja, G é um espaço de curvatura seccional não-negativa.

Seja (M,g) uma variedade Riemanniana n-dimensional. Apresentaremos agora as definições do tensor de Ricci e curvatura de Ricci. Esses elementos são tensores derivados do tensor curvatura.

Definição 1.2.15 (Tensor de Ricci). O *tensor de Ricci* é definido como

$$ric_p(X,Y) = tr(Z \mapsto R(X,.)Y),$$

onde tr significa a aplicação que associa a cada operador o seu traço.

Segue das propriedades do tensor curvatura que o tensor de Ricci também é um tensor simétrico.

Definição 1.2.16 (Curvatura de Ricci). na direção X com $g(X,X) = 1$ é dada por

$$ric_p(X) = \frac{1}{n-1} ric_p(X,X),$$

onde n é a dimensão de M.

Seja $\{E_i\}$ um referencial local ortonormal em uma vizinhança de $p \in M$. Logo

$$ric_p(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R_p(X,E_i)Y, E_i(p))$$

Em particular, considerando $X = E_1(p)$,

$$ric_p(X) = \sum_{i=2}^{n} K_p(X,E_i).$$

1.2.5 Geodésicas

Dados p e q pertencentes ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, considere a reta

$$r(t) = p + t(q-p), \ t \in \mathbb{R}.$$

Sabemos que a aceleração de tal curva é nula. E mais, sabemos que r é a curva que minimiza o comprimento, isto é, entre todas as curvas suave por partes unido dois pontos $r(t_0)$ a $r(t_1)$ $(t_0 < t_1)$ o seguimento de reta $r|_{[t_0,t_1]}$ é a que tem o menor comprimento. E assim a distância de p a q é dada por

$$d(p,q) = L(r_{[0,1]}) = \int_0^1 \langle r', r' \rangle^{\frac{1}{2}} = \langle q-p, q-p \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Em uma variedade Riemanniana M chamaremos de geodésicas as curvas cuja aceleração é nula. Verifica-se que localmente tais curvas minimizam o comprimento. Reciprocamente, se uma curva minimiza localmente o comprimento, então tal curva é uma geodésica. Também definiremos, nesta seção, usando o conceito de geodésica, a aplicação exponencial.

Definição 1.2.17 (Geodésica). Uma curva suave $c : [a,b] \to M$ em M variedade Riemanniana é uma geodésica se

$$\frac{\nabla}{dt} c'(t) = 0,$$

para qualquer $t \in [a,b]$.

Pela compatibilidade da métrica e pela definiçao de geodésica, o comprimento do vetor velocidade de qualquer geodésica c é constante e portanto

$$L(c) = |c'|(b-a).$$

Teorema 1.2.5. Seja M uma variedade Riemanniana. Para quaisquer $p \in M$ e $v \in T_pM$ existe um intervalo aberto I contendo o zero e uma geodésica $c : I \to M$ satisfazendo $c(0) = p$ e $c'(0) = v$. Além disso, quaisquer duas geodésicas coincidem no seu domínio comum.

Segue do teorema acima, que dados $p \in M$ e $v \in T_pM$ existe uma única geodésica maximal c tal que $c(0) = p$ e $c'(0) = v$. A geodésica maximal é obtida tomando o intervalo I dado pela união de todos os intervalos de geodésicas com as condições inicias dada acima. Logo nos referiremos a tal geodésica maximal como a única geodésica passando por p com velocidade v e a denotaremos por $c_v : I \to M$. Dizemos que M é *geodesicamente completa* quando qualquer geodésica em M tem $\mathbb{R}$ como domínio maximal.

Lema 1.2.2. Dado $v \in T_pM$, se a geodésica c_v está definida em $(-\epsilon, \epsilon)$, então para qualquer $a > 0$ temos que

(a) A geodésica c_{av} está definida em $(\frac{-\epsilon}{a}, \frac{\epsilon}{a})$.

(b) $c_{av}(t) = c_v(at)$.

Observe que o item (a) segue do item (b), que por sua vez segue do seguinte fato: $\frac{d}{dt} c_v(at) = av$ e $c_v(0) = p$.

Observação 1.2.1. O Lema 1.2.2 é as vezes referido como Lema de Homogeneidade. Ele nos permite tomar para qualquer p uma vizinhança U de 0 em T_pM tal que para qualquer $v \in U$ a geodésica c_v está definida para $t = 1$.

Definição 1.2.18 (**Aplicação Exponencial**)**.** A aplicação exponencial em $p \in M$ é deifinida por

$$\begin{aligned} exp_p \ : \ & U \longrightarrow M \\ & v \longmapsto exp_p v = c_v(1) = c_{\frac{v}{|v|}}(|v|), \end{aligned}$$

onde U a vizinhança dada na Observação 1.2.1.

Dado $v =\in T_pM$ considere $\delta > 0$ tal que a aplicação exponencial esteja definida em tv para todos $t \in [0, \delta)$. Observe que a curva $c(t) = exp_p tv$ é a única geodésica que tem velocidade $v \in T_pM$, isto é, a única geodésica passando por p com velocidade v. Para qualquer $p \in M$, o diferencial da aplicação exponencial no $0 \in T_pM$ é a identidade em T_pM:

$$d(exp_p)_0 = Id.$$

Logo, pelo teorema da função inversa, existe uma vizinhança V de 0 tal que exp_p é um difeomorfismo de V em sua imagem $U = exp_p V$. A vizinhança U é chamada de *vizinhança normal*. Observe que para qualquer q pertencente a U vizinhança normal de p existe uma única geodésica contida em U ligando p a q. E assim podemos definir $\{E_i\}$ um referencial ortonormal em U tal que $\nabla_{X(p)} E_i = 0$, para todos $i = 1, ..., n$ e X campo suave, da seguinte forma: fixado e_i base ortonormal de T_pM, defina

$$E_i(q) = P_{1,0}^{c^q}(e_i),$$

onde c^q é a única geodésica contida em U ligando p a q. O referencial definido acima é chamado de *referencial geodésico*.

Teorema 1.2.6 (Lema de Gauss)**.** Seja $B_{\tilde{\delta}}(0)$ uma bola em T_pM tal que a restrição da exponencial está bem definida. Sejam $S_\delta^{n-1}(0)$ uma esfera contida em $B_{\tilde{\delta}}(0)$ e $v : (-\epsilon, \epsilon) \to S_\delta^{n-1}(0)$ curva suave. Defina $f(t, s) = exp_p tv(s)$. Então

$$g(\frac{\partial}{\partial t} f, \frac{\partial}{\partial s} f) = 0.$$

Usando o Lema de Gauss e o conceito de vizinhança normal, provamos que qualquer geodésica localmente é minimizante, ou seja, se $c[a, b] \to M$ é uma geodésica contida em uma vizinhança normal, então dada uma curva qualquer β suave por partes ligando $c(a)$ a $c(b)$ temos que

$$L(\beta) \leq L(c).$$

E, por unicidade de geodésica dada velocidade inicial, vale a igualde se, e somente se, tais curvas coincidem. Por fim, se c não está contida em uma vizinhança normal, basta cobri-la com vizinhanças normais.

Teorema 1.2.7. Seja $M, g)$ uma variedade Riemanniana. Para qualquer $p \in M$ existem $\delta, \epsilon > 0$ tais que

(i) Para qualquer $q \in B_\epsilon(p)$, a aplicação $exp_q|_{B_\delta(0)}$ é um difeomorfismo e que $B_\epsilon(p) \subset exp_q B_\delta(0)$.

(ii) Dado dois pontos $q_1, q_2 \in B_\epsilon p$ existe um único segmento de geodésica minimizante contida em $B_\epsilon p$ ligando q_1 a q_2. Além disso tal segmento depende suavemente dos pontos inicial e final.

O conjunto $B_\epsilon(p)$ é chamada de *vizinhança normal convexa.*

Usando o conceito de vizinhança normal convexa, prova-se que se $c : [a, b] \to M$ é uma curva suave por partes que realiza distância, isto é,

$$d(c(a), c(b)) = L(c),$$

então c é imagem de uma geodésica.

Como observamos no começo desta seção, as geodésicas no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ são justamente as retas. Já na esfera as geodésicas são os grandes circulos.

Definição 1.2.19 (Variedade Completa). Uma variedade Riemanniana M é dita completa quando a aplicação exp_p está definida em todo T_pM para qualquer $p \in M$.

Teorema 1.2.8 (Hopf-Rinow). Sejam M uma variedade Riemanniana e $p \in M$. As seguintes afirmações são equivalentes:

a) A aplicação exp_p está definida em todo T_PM.

b) Os limitados e fechados de M são compactos.

c) M é geodesicamente completa.

d) M é completa como espaço métrico.

E mais, cada uma das afirmações acima implica que

e) Para todo $q \in M$ existe uma geodésica c ligando p a q tal que

$$L(c) = d(p, q).$$

Exemplos de variedades Riemannianas completas são dados por variedades Riemannianas compactas, espaços homogêneos, grupos de Lie com métrica bi-invariante, dentre os quais encontram-se os espaços modelos $\mathbb{R}^n$, S^n e H^n.

1.2.6 Campos de Jacobi

Recordaremos nesta seção, a definição de Campo de Jacobi e alguns resultados sobre o tema.

Definição 1.2.20 (Campos de Jacobi). Seja $c : I \to M$ uma geodésica. Um campo de vetores ao longo de c é um campo de Jacobi se atender a equação de Jabobi:

$$\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{dt}J(t) + R(c'(t), J(t))c'(t) = 0,$$

para todo $t \in I$.

A fim simplificar o texto, as vezes é conveniente utilizar a seguinte notação

$$J' = \frac{\nabla}{dt}J.$$

E portanto a equação de Jacobi se escreve:

$$J'' + R(c', J)c' = 0.$$

Uma variação de uma curva suave por partes $c : [a, b] \to M$ é uma aplicação contínua

$$V : [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon) \to M,$$

com $\epsilon > 0$, tal que $V(t, 0) = c(t)$ e exite uma subdivisão $a = s_0 < s_1 < ... < s_n = b$ tal que $V|[s_{i-1}, s_i] \times (-\epsilon, \epsilon)$ é suave. Observe que $c_s(.) = V(., s)$ é uma curva suave por partes para qualquer $s \in (-\epsilon, \epsilon)$. Dizemos que V é uma *variação por geodésicas* quando c_s é uma geodésica para qualquer $s \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Tome $\tilde{\nabla}$ a conexão Riemanniana na superfície $V([a, b] \times (-\epsilon, \epsilon))$. Cosidere os seguinte campos

$$\frac{\tilde{\nabla}}{\partial t}V \text{ e } \frac{\tilde{\nabla}}{\partial s}V.$$

Observe que

$$\frac{\tilde{\nabla}}{\partial t}V(t, s) = c_s'(t).$$

Além disso é possível mostrar que o campo ao longo de $c_0 = c$

$$Y(t) = \frac{\tilde{\nabla}}{\partial s}V(t, 0)$$

é suave por partes. Tal campo é chamado de *campo variacional* associado a V.

Dado J um campo variacional de uma variação por geodésicas de c, prova-se diretamente por contas que J satisfaz as equações de Jacobi. Reciprocamente, dado um campo de Jacobi J ao longo da geodésica c, considere uma curva $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ tal que $\beta'(0) = J(0)$,

um campo de vetores W ao longo de β com $W(0) = c'(0)$ e $\frac{\nabla}{ds}W(0) = \frac{\nabla}{dt}J(0)$ e $V(t,s) = exp_{\beta(s)}t]W(s)$ variação por geodésicas de c. Verificando que $Y(t) = \frac{\partial}{\partial s}V(t,0)$ é um campo de Jacobi e que as condições iniciais de Y coincide com as condições de iniciais de J, concluímos que $Y = J$. Portanto temos a seguinte caracterização para campos de Jacobi.

Teorema 1.2.9. Um campo de vetores ao longo de uma geodésica $c : I \to M$ é um campo de Jacobi se, e somente se, é o campo variacional associado a uma variação por geodésicas de c.

Este teorema nos permite obter uma fórmula muito útil para campos de Jacobi em termos da diferencial da aplicação exponencial. O corolário abaixo nos fornece esta fórmula para o caso particular em que $J(0) = 0$.

Corolário 1.2.1. Seja $c : [0,a] \to B \subset M$ geodésica, onde B é uma vizinhança normal de p. Se J é uma campo de Jacobi ao longo de c tal que $J(0) = 0$, então

$$J(t) = d(exp_p)_{tc'(0)}tJ'(0),$$

para todo $t \in [0,a]$.

Seja J um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica $c : I \to M$. Considere $\{E_i\}_{i=0}^{n-1}$ um referencial ortonormal paralelo ao longo de c tal que $E_0 = \frac{c'}{||c'||}$. Escrendo

$$J = \sum_{i=0}^{n-1} f_i E_i,$$

é possível mostrar que a equação de Jacobi é equivalente ao sistema de equações diferenciais de seguda ordem abaxo:

$$f_k'' + \sum_{i=0}^{n-1} f_i g(R(c', E_i)c', E_k), \ k = 0, ..., n-1.$$

Ou em termos matriciais

$$J'' + BJ = 0,$$

onde $B = (b_{ij})$ com $b_{ij} = g(R(c', E_i)c', E_j)$. Observe que $b_{ij} = b_{ji}$ e $b_{0j} = 0$, logo B é uma curva de I no espaço das matriz simétrica de ordem $n-1$.

Denote por $\mathcal{J}_c$ o espaço dos campos de Jacobi ao longo de uma geodésica c, que é um espaço vetorial, e por $\mathcal{J}_c^{\perp}$ o subespaço de $\mathcal{J}_c$ constituido pelos campos de Jacobi ortogonais a c.

Proposição 1.2.5. Seja $c : [0,1] \to (M^n, g)$ uma geodésica. Então

a. Se $V, W \in T_{c(0)}M$, então existe um único campo de Jacobi J ao longo de c tal que

$$J(0) = V \text{ e } J'(0) = W.$$

b. Exisem $2n$ campos de Jacobi linearmente independentes. Em particular, $dim\mathcal{J}_c = 2n$.

c. Os campos $J_0(t) = c'(t)$ e $J_1(t) = tc'(t)$ são campos de Jacobi.

d. Existem $2(n-1)$ campos de Jacobi perpendiculares a c linearmente independentes, não necessariamente ortogonais.

e. Sejam $a = g(J'(0), c'(0)), b = g(J(0), c'(0)) \in \mathbb{R}$. Então

$$g(J(t), c'(t)) = at + b.$$

Corolário 1.2.2. O espaço dos campos de Jacobi ao longo de uma geodésica c tem a seguinte decomposição

$$\mathcal{J}_c = \mathcal{J}_c^{\perp} \oplus \mathbb{R}J_0 \oplus \mathbb{R}J_1.$$

Corolário 1.2.3. Seja $J \in \mathcal{J}_c$ tal que $J(0) = 0$. Então $J \in \mathcal{J}_c^{\perp}$ se, e somente se, $J'(0)$ é perpendicular a $c'(0)$. Em particular, o subespaço dos campos de Jacobi ortogonais a c que se anulam no tempo $t = 0$ tem dimensão $n - 1$.

Definição 1.2.21 (Pontos Conjugados). Seja $c : [0, a] \to M$ geodésica em uma variedade Riemanniana M. Dizemos que um ponto $c(t_0)$ é conjugado a $c(0)$ quando existe pelo menos um campo de Jacobi não trivial J ao longo de c tal que $J(0) = J(t_0) = 0$. O número máximo de campos de Jacobi ao longo de c linearmente independentes que se anulam em 0 e t_0 é chamado de *multiplicidade* de $c(t_0)$.

Observe que a multiplicidade de um ponto conjugado é no máximo $n - 1$, onde n é a dimensão de M.

Proposição 1.2.6. Seja $exp_p : B_\delta(0) \to M$ bem definida, $c(t) = exp_p(t)V$ com $t \in (0, \delta)$ e $||V|| = 1$. Então $c(t_0)$ é um ponto conjugado a $p = c(0)$ com multiplicidade k se, e somente se, $dim\ Ker(d(exp_p)t_0V) = k$.

1.3 Submersão Riemanniana

Assumiremos que (M^{n+k}, g^M) e (B^k, g^B) são variedades Riemanniana com conexões Riemannianas repectivas $\bar{\nabla}$ e ∇. Quando não houver risco de confusão usaremos g no lugar de g^M e g^B. O objetivo dessa seção é definir submersão Riemanniana, distribuição horizontal e vertical, aplicação de holonomia, campos tipo holonomia e campos projetáveis. Dada uma submersão Riemanniana, veremos a relação entre as conexões, tensores curvatura e curvatura seccional de M e B. E também apresentaremos três exemplos a saber, projeção de uma variedade produto em uma de suas coordenadas, a projeção canônica do fibrado tangente e a projeção de S^3 em $\mathbb{C}P^1$ espaço projetivo complexo unidimensional.

Dizemos que $\pi : M \to B$ é uma submersão quando for sobrejetora e tiver posto máximo, isto é, a dimensão da imagem de $d\pi_p$ é k, para qualquer $p \in M$. A fibra de π passando por $p \in M$ é a pré-imagem de $q = \pi(p)$,

$$F_{\bar{p}} = \pi^{-1}(\pi(\bar{p})).$$

Pelo Teorema da Função Implícita, as fibras de π são subveriedades k-dimensionais de M. Logo T_pF_p, o espaço tangente a fibra passando por p, que é o núcleo da aplicação $d\pi_p$, é um k-dimensional subespaço vetorial de T_pM espaço tangente a M em p.

Definição 1.3.1 (Subespaços Horizontais e Verticais). O subespaço $\mathcal{V}_p = T_pF_p$ é chamado de *subespaço vertical* em p. E o complemento ortogonal de V_p, denotado por $\mathcal{H}_p$, chama-se *subespaço horizontal* em p.

Um campo de vetores X é dito vertical (respectivamente, horizontal) quando $X(p) \in \mathcal{V}_p$ (respectivamente, $X(p) \in \mathcal{H}_p$) para qualquer $p \in M$.

Uma *distribuição* m-dimensional D em M é uma atribuição de um m-dimensional subespaço vetorial $D(p) = D_p$ de T_pM, para cada $p \in M$. Uma distribuição D é suave quando existirem m campos de vetores suaves $X_1, ..., X_m$ tais que, para cada $p \in M$, $\{X_1(p), ..., X_m(p)\}$ é uma base de D_p. Uma distribuição D é integrável quando $\chi(D) = \{X \in \chi(M); X(p) \in D_p, \forall p \in M\}$ é uma álgebra de Lie, ou equivalentemente, se $X, Y \in D$, então $[X, Y] \in D$.

As distribuições $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_p; p \in M\}$ e $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_p; p \in M\} = ker(df)^{\perp}$ são distribuições suaves chamadas de distribuição vertical e distribuição horizontal, respectivamente. Deste modo temos a seguinte decomposição do fibrado tangente

$$TM = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}.$$

Logo dado X campo de vetores suave existem únicos campos suaves $X^h \in \Gamma(\mathcal{H})$ e $X^v \in \Gamma(\mathcal{V})$, chamados de componentes horizontais e verticais de X, respectivamente, tais que

$$X = X^h + X^v.$$

Agora, observe que $d\pi_p|_{\mathcal{H}_p} : \mathcal{H}_p \to T_{\pi(p)}B$ é um isomorfismo linear para qualquer $p \in M$. Logo, para $X \in \Gamma(TB)$ dado, existe um único $\bar{X} \in \Gamma(TH)$ campo de vetores em M horizontal $\pi-$relacionado a X, isto é,

$$d\pi\bar{X} = X \circ \pi.$$

Chamaremos $\bar{X}$ de *levantamento horizontal* de X. O levantamento horizontal $\bar{X}$ é um campo de vetores suave em M. De fato, dado $p \in M$, como π é uma submersão, pelo teorema da função implícita, existe um difeomorfismo local $\lambda : V \times U \to W$ tal que $\pi \circ \lambda(p_1, p_2) = \pi_2(p_1, p_2) = p_2$, onde U e W são abertos de B e M respectivamente. Logo $\bar{X} = \lambda(0, X|_U)$ e portanto $\bar{X}$ é suave.

Definição 1.3.2 (Submersão Riemanniana). Uma aplicação $\pi : M^{n+k} \to B^k$ é uma *submersão Riemanniana* quando os seguintes itens são satisfeitos

(i) π é uma submersão; e

(ii) dado $p \in M$, $d\pi_p|_{H_p} : H_p \to T_{\pi(p)B}$ é uma isometria.

Observe a condição (ii) nos diz que $d\pi$ preserva comprimentos horizontais.

Agora vejamos um lema que apresenta algumas propriedades úteis do levantamento horizontal que usaremos no decorrer do trabalho.

Lema 1.3.1. Sejam $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z} \in \Gamma(TM)$ respectivos levantamento horizontais de $X, Y, Z \in \Gamma(TB)$ e $U \in \Gamma(\mathcal{V})$ campo vertical. Então

(i) $[X, Y] \circ \pi = d\pi[\bar{X}, \bar{Y}]$;

(ii) $[\bar{X}, \bar{Y}] - \overline{[X, Y]} \in \Gamma(\mathcal{V})$;

(iii) $[U, \bar{X}] \in \mathcal{V}$;

(iv) $\bar{X}g(\bar{Y}, \bar{Z}) = Xg(Y, Z)$;

(v) $g([\bar{X}, \bar{Y}], \bar{Z}) = g([X, Y], Z)$; e

(vi) $Ug(\bar{X}, \bar{Y}) = 0$.

Demonstração. Temos, por hipótese, que $d\pi\bar{X} = X \circ \pi$, $d\pi\bar{Y} = Y \circ \pi$ e $d\pi\bar{Z} = Z \circ \pi$.

Prova do item (i):

$$\begin{aligned} d\pi[\bar{X}, \bar{Y}] &= [\bar{X}, \bar{Y}]\pi = \bar{X}(\bar{Y}\pi) - \bar{Y}(\bar{X}\pi) \\ &= \bar{X}(d\pi\bar{Y}) - \bar{Y}(d\pi\bar{X}) = \bar{X}(Y \circ \pi) - \bar{Y}(X \circ \pi) \\ &= d\pi\bar{X}(Y) - d\pi\bar{Y}(X) = (X(Y) - Y(X)) \circ \pi = [X, Y] \circ \pi. \end{aligned}$$

Prova do item (iv):

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) &= Xg(d\pi Y, d\pi Z) = X(g(\bar{Y}, \bar{Z}) \circ \pi) \\ &= d\pi Xg(\bar{Y}, \bar{Z}) = \bar{X}(g(\bar{Y}, \bar{Z}) \circ \pi). \end{aligned}$$

Os demais itens são demonstrados usando a definição de submersão Riemaniana, item (i) ou o item (iv). □

Seja $\pi : (M, g^M, \bar{\nabla}) \to (B, g^B, \nabla)$ submersão Riemanniana. Uma questão interessante é a seguinte. Qual é relação entre as conexões Riemannianas $\bar{\nabla}$ e ∇? A resposta desta pergunta é dada pela proposição abaixo.

Proposição 1.3.1. Seja $\pi : (M, g^M, \bar{\nabla}) \to (B, g^B, \nabla)$ submersão Riemanniana. Se $X, Y \in \Gamma(TB)$ são campos de vetores em B, com respectivos levantamentos horizontais $\bar{X}, \bar{Y} \in \Gamma(TM)$, então

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} = \overline{\nabla_X Y} + \frac{1}{2}[\bar{X}, \bar{Y}]^v. \tag{1.4}$$

Demonstração. Aplicando a fórmula de Kozul a $g(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}, U)$, com $U \in \Gamma(V)$, e fazendo uso do Lema 1.3.1, obtemos que

$$2g(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}, U) = g([\bar{X}, \bar{Y}], U). \tag{1.5}$$

Assim $(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^v = \frac{1}{2}[\bar{X}, \bar{Y}]^v$. Por outro lado, $(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^h = \overline{d\pi\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}} = \overline{\nabla_X Y}$.

□

Agora, temos uma outras questões que aparecem naturalmente. Qual será a relação entre os tensores de curvatura $\bar{R}$ e R, repectivamente, de M e B? Qual será a relação entre as curvaturas seccionais $\bar{K}$ e K, repectivamente, de M e B?

Inicialmente observe que se $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}, \bar{W} \in \Gamma(TM)$ são levantamentos horizontais respectivamente de $X, Y, Z, W \in \Gamma(TB)$, então temos que

$$\bar{X}g(\bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{Z}, \bar{W}) = Xg(\nabla_Y Z, W) \tag{1.6}$$

$$g(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{Z}, \bar{W}) = g(\nabla_X\nabla_Y Z, W) - \frac{1}{4}g([\bar{Y}, \bar{Z}]^v, [\bar{X}, \bar{W}]^v) \tag{1.7}$$

$$g(\bar{\nabla}_{[\bar{X},\bar{Y}]}\bar{Z}, \bar{W}) = g(\bar{\nabla}_{[\bar{X},\bar{Y}]^h}\bar{Z}, \bar{W}) - \frac{1}{2}g([\bar{X}, \bar{Y}]^v, [\bar{Z}, \bar{W}]^v). \tag{1.8}$$

Usando as equações acima provamos, a seguinte proposição que relaciona os tensores de curvatura de M e B.

Proposição 1.3.2. Sejam $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}, \bar{W} \in \Gamma(TM)$ respectivos levantamento horizontais de $X, Y, Z, W \in \Gamma(TB)$. Então

$$\begin{aligned} g(\bar{R}(\bar{X}, \bar{Y})\bar{Z}, \bar{W}) &= g(R(X, Y)Z, W) - \frac{1}{4}g([\bar{X}, \bar{Z}]^v, [\bar{Y}, \bar{W}]^v) \\ &+ \frac{1}{4}g([\bar{Y}, \bar{Z}]^v, [\bar{X}, \bar{W}]^v) - \frac{1}{2}g([\bar{Z}, \bar{W}]^v, [\bar{X}, \bar{Y}]^v). \end{aligned}$$

A partir da relação entre os tensores curvatura $\bar{R}$ e R dada na Proposição 1.3.2, é possível provar a proposição a seguir que relaciona as curvarturas seccionais de M e B.

Proposição 1.3.3. Sejam γ o plano gerado por $X, Y \in \Gamma(TB)$ e $\bar{\gamma}$ o plano gerado por $\bar{X}, \bar{Y} \in \Gamma(TM)$ levantamentos horizontais de X e Y, respectivamente. Então

$$K(\gamma) = \bar{K}(\bar{\gamma}) + \frac{3}{4}||[\bar{X}, \bar{Y}]^v||^2 \geq \bar{K}(\bar{\gamma}). \tag{1.9}$$

Exemplo 6 (Produto Riemanniano). Dadas (M_1, g^1) e (M_2, g^2) variedades Riemannianas, seja (M, g) o pruduto Riemanniano, isto é, $M = \{p = (p_1, p_2); p_i \in M_i, i = 1, 2\}$ e

$$g_p(X, Y) = g^1_{p_1}(X_1, Y_1) + g^2_{p_2}(X_2, Y_2),$$

onde $X = (X_1, X_2), Y = (Y_1, Y_2) \in T_pM = T_{p_1}M_1 \times T_{p_2}M_2$. Para cada $i = 1, 2$ definimos a projeção canônica na i-ésima coordenada por

$$\begin{aligned} \pi_i \ : \ & M \longrightarrow M_i \\ & p = (p_1, p_2) \longmapsto p_i. \end{aligned}$$

Tais projeções são uma submersão Riemanniana. Verificaremos esta afirmação, sem perda de generalidade, para $\pi = \pi_1$. Observe que

$$\begin{aligned} d\pi_p \ : \ & T_pM \longrightarrow T_{p_1}M_1 \\ & X = (X_1, X_2) \longmapsto d\pi_p X = X_1. \end{aligned}$$

Logo $V_p = \{0\} \times T_{p_2}M_2$ e $H_p = T_{p_1}M_1 \times \{0\}$. Portanto dados $X, Y \in H_p$

$$\begin{aligned} g_p(X, Y) &= g^1_{p_1}(X_1, Y_1) + g^2_{p_2}(X_2, Y_2) \\ &= g^1_{p_1}(X_1, Y_1) \\ &= g^1_{p_1}(df_pX, df_pY). \end{aligned}$$

Isto é, π é uma isometria, e portanto é uma submersão Riemanniana.

Exemplo 7 (Projeção Canônica do Fibrado Tangente). Dada (B^k, g) uma variedade Riemanniana considere o fibrado tangente de B:

$$M = TB = \bigcup_{q \in B} T_qB = \{(q, v); q \in B, v \in T_qB\}$$

Sabemos que M é uma variedade Riemanniana de dimensão $2k$. Seja $\pi : TB \to B$, dada por $\pi(q, v) = q$, a projeção canônica do fibrado tangente em B. Mostraremos que π é uma submersão Riemanniana, para tal fim, definamos uma primeiro uma métrica g em TM. Dados $V, W \in T_pM$ e $(p, v) \in M$ considere curvas $\alpha, \beta : (-\epsilon, \epsilon) \to TB$,

$$\alpha(t) = (p(t), v(t)) \text{ e } \beta(s) = (q(s), w(s))),$$

que realizam X, Y, respectivamente, ou seja,

$$\alpha(0) = \beta(0) = (p, v),$$
$$\alpha'(0) = (p'(0), v'(0)) = V \ e \ \beta'(0) = (q'(0), w'(0)) = W.$$

Considere também a seguinte métrica em TM

$$g^M_{(p,v)}(V,W) = g_p(d\pi_{(p,v)}V, d\pi_{(p,v)}W) + g_p(\frac{D}{dt}v(0), \frac{D}{dt}w(0)). \tag{1.10}$$

Tal métrica é chamada de Sasaki.

Lema 1.3.2. Dada curva $\alpha = (q,v) : (-\epsilon,\epsilon) \to M = TB$, α é horizontal se, e somente se, $v(t)$ é um campo paralelo ao longo de $q(t)$.

Demonstração. Por definição, $\alpha'(0) \in H_\alpha(0)$ se, e somente se, para qualquer $X \in V_{\alpha(0)}$

$$\begin{aligned} 0 &= g^M_{\alpha(0)}(\alpha'(0), X) = g_{q(0)}(d\pi_{\alpha(0)}\alpha'(0), d\pi_{\alpha(0)}X) + g_{q(0)}(\frac{D}{dt}v(0), \frac{D}{dt}x(0)) \\ &= g_{q(0)}(\frac{D}{dt}v(0), \frac{D}{dt}x(0)). \end{aligned}$$

Portanto $\alpha'(0) \in H_{\alpha(0)}$ se, e somente se, $\nabla_{q'(0)}v(\alpha(0)) = \frac{D}{dt}v(0) = 0$, isto é, v é um campo paralelo ao longo de q. □

Sejam $V, W \in H_{(p,v)}$. Tome curvas horizontais α e β que realizam V e W, respectivamente. Pelo Lema 1.3.2

$$g^M_{q,v}(V,W) = g_q(d\pi_{(q,v)}V, d\pi_{(q,v)}W),$$

ou seja, $d\pi_{q,v}$ é uma isometria. E portanto π é uma submersão Riemanniana.

1.3.1 Exemplo Relevante $\mathbb{C}P^1$

Trabalharemos agora um exemplo importante: $\mathbb{C}P^1$ o espaço projetivo complexo de dimensão complexa 1. Primeiro vamos defini-lo, depois calcularemos sua conexão Riemanniana e sua curvatura, fazendo uso das proposições até aqui apresentadas.

Considere a ação do grupo multiplicativo S^1 sobre $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ dada por $L(\lambda, z) = \lambda z = (\lambda z_1, \lambda z_2)$. O espaço quociente dessa ação

$$\mathbb{C}P^1 = S^3/S^1$$

é chamado espaço projetivo complexo de dimensão complexa 1. Observe que z e $w \in S^3$ estão na mesma classe de equivaência se, e somente se, existir $t \in \mathbb{R}$ tal que $z = L_t(w) = e^{it}w$, isto é, quando z e w estão na mesma reta complexa.

A ação L é uma ação livre e própria. Portanto $\mathbb{C}P^1$ tem uma estrutura de variedade suave de dimensão 1. De fato, se $L(\lambda, z) = z$, então $\lambda = 1$, logo L é livre. Por outro lado, como S^1 é compacto a ação L é própria.

Agora tome $\pi : S^3 \to S^3/S^1$ a projeção canônica que associa a cada elemento $z \in S^3$ sua classe de equivalência $[z]$. A fibra passando por $[z] \in \mathbb{C}P^1$ é

$$\pi^{-1}([z]) = \{w = e^{it}z; t \in \mathbb{R}\}$$

Dado $w \in \pi^{-1}([z])$, tome $\gamma(t) = e^{it}w$ o caminho contido na fibra $\pi^{-1}([z])$ que passa por w em $t = 0$. Assim

$$\frac{d}{dt}\gamma(0) = \frac{d}{dt}(e^{it}w) = iw \tag{1.11}$$

Logo o espaço vertical em w é

$$V_w = \mathbb{R}(iw).$$

E então $v \in H_w$ se, e somente se, $v \in T_w(S^3) = w^\perp$ e $v \in (iw)^\perp$. Portanto o espaço horizontal em w é

$$H_w = (Cw)^\perp.$$

Considere a seguinte métrica Riemanniana em S^3 : dados $V, U \in T_zS^3$

$$g_z(V, W) = Real\langle V, W\rangle, \tag{1.12}$$

onde $\langle , \rangle$ é a métrica Hermitiana canônica em $\mathbb{C}^2$. Afirmo que $L_\lambda(.) = L(\lambda, .)$ é uma isometria, para qualquer $\lambda = e^{t_0 i} \in S^1$. De fato, primeiro observe que

$$d(L_\lambda)_z V_z = \lambda V_{\lambda z} = L_\lambda V_{\lambda z},$$

para qualquer $V_z \in T_zS^3$. Logo

$$\begin{aligned} g_{L_\lambda(z)}(d(L_\lambda)_z V, d(L_\lambda)_z W) &= Real\langle \lambda V, \lambda W\rangle = Real|\lambda|^2\langle V, W\rangle \\ &= g_z(V, W). \end{aligned}$$

Definamos uma métrica em $\mathbb{C}P^1$. Dados $[z] \in \mathbb{C}P^1$ e $V, W \in T_{[z]}\mathbb{C}P^1$, sejam $\bar{V}, \bar{W} \in \Gamma(H_z)$ tais que $\pi(z) = [z]$, $d\pi_z\bar{V} = V$ e $d\pi_z\bar{W} = W$. Defina então

$$g_{[z]}(V, W) = g_z(\bar{V}, \bar{W}).$$

Como L_λ é uma isometria, para qualquer $\lambda \in S^1$, segue que tal métrica está bem definida. Considerando esta métrica, provamos o lema abaixo.

Lema 1.3.3. A projeção canônica $\pi : S^3 \to \mathbb{C}P^1$ é uma submersão Riemanniana.

Assim poderemos calcular a curvatura seccional de $\mathbb{C}P^1$. Mas antes disso, vamos dotar o espaço tangente a $\mathbb{C}P^1$ de uma estrutura complexa. Temos que $H_z = (Cz)^\perp$ é um subespaço vetorial complexo de $\mathbb{C}^2$. Assim transferimos a estrutura complexa de H_z para $T_y\mathbb{C}P^1$, $y = \pi(z)$. Seja J_0 a estrutura complexa de $\mathbb{R}^4 \approx \mathbb{C}^2$. Defina então

$$J_yV = d\pi_z \circ J_0 \circ (d\pi_z|_{H_z})^{-1}V = d\pi_z(i\bar{V}), \tag{1.13}$$

$V \in T_y\mathbb{C}P^1$. Verifiquemos se J está bem definido. Seja $w = L_\lambda z \in \pi^{-1}(y)$. Como $\pi \circ L_\lambda = \pi$, temos que $d\pi_z = d\pi_w d(L_\lambda)_z = d\pi_w L_\lambda$. Logo

$$d\pi_z \circ J_0 \circ (d\pi_z|_{H_z})^{-1}V = d\pi_w \circ L_\lambda \circ J_0 \circ L_\lambda^{-1} \circ (d\pi_w|_{H_w})^{-1}V = d\pi_w \circ J_0 \circ (d\pi_w|_{H_w})^{-1}V,$$

ou seja, J não depende da escolha do elemento em π^{-1}. Note que de fato J é uma estutura complexa em T_yCP^1, pois J é um endomorfismo de T_yCP^1 tal que $J^2 = J_0^2 = -Id$. Além disso J é uma isometria, pois $g(JX, JY) = g(d\pi(i\bar{X}, i\bar{Y}) = g(i\bar{X}, i\bar{Y}) = g(X, Y)$

Proposição 1.3.4. A curvatura seccional de $\mathbb{C}P^1$ é

$$K(U, V) = 1 + 3cos^2\theta$$

onde $U, V \in T(\mathbb{C}P^1)$ e $cos\theta = g(\bar{U}, i\bar{V})$.

Demonstração. Como π é uma submersão Riemanniana pela proposição 1.3.3

$$\begin{aligned} K(U,V) &= \bar{K}(\bar{U},\bar{V}) + \frac{3}{4}||[\bar{U},\bar{V}]^v||^2 \\ &= 1 + \frac{3}{4}||[\bar{U},\bar{V}]^v||^2, \end{aligned}$$

onde $\bar{K} = 1$ é a curvatura seccional de S^3.

Nos resta calcular $||[\bar{U}, \bar{V}]||$. Se $iz \in V_z$ e $\bar{U} \in H_z$, então

$$\bar{\nabla}_{\bar{U}} iz = i\bar{U}.$$

De fato, tome $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S^3$ tal que $\alpha(0) = z$ e $\alpha'(0) = \bar{U}$. Temos que

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\bar{U}} iz &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(iz \circ \alpha) = \frac{d}{dt}|_{t=0} i\alpha \\ &= i\alpha'(0) = i\bar{U}. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} g([\bar{U},\bar{V}], iz) &= g(\bar{\nabla}_{\bar{U}}\bar{V} - \bar{\nabla}_{\bar{V}}\bar{U}, iz) = g(\bar{\nabla}_{\bar{U}}\bar{V}, iz) - g(\bar{\nabla}_{\bar{V}}\bar{U}, iz) \\ &= \bar{U}g(\bar{V}, iz) - g(\bar{V}, \bar{\nabla}_{\bar{U}}, iz) - \bar{V}g(\bar{U}, iz) + g(\bar{U}, \bar{\nabla}_{\bar{V}} iz) \\ &= -g(\bar{V}, i\bar{U}) + g(\bar{U}, i\bar{V}). \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} g(\bar{V}, i\bar{U}) &= Real\langle \bar{V}, i\bar{U}\rangle = -Real(i\langle \bar{V}, \bar{U}\rangle) \\ &= -Real\langle i\bar{V}, \bar{U}\rangle = -Real\langle \bar{U}, \bar{i}\bar{V}\rangle \\ &= -Real\langle \bar{U}, i\bar{V}\rangle = -g(\bar{U}, i\bar{V}). \end{aligned}$$

Assim $2g(\bar{U}, i\bar{V}) = g([\bar{U}, \bar{V}]^v, iz)$ e portanto

$$||[\bar{U}, \bar{V}]^v||^2 = g([\bar{U}, \bar{V}]^v, [\bar{U}, \bar{V}]^v) = ||[\bar{U}, \bar{V}]||^v g([\bar{U}, \bar{V}]^v, iz).$$

Segue que $||[\bar{U}\bar{V}]^v|| = 2g(\bar{U}, i\bar{V}) = 2cos\theta$, terminando a prova. □

Observe que a curvatura seccional de $\mathbb{C}P^1$ está entre 1 e 4, e portanto $\mathbb{C}P^1$ é um espaço de curvatura positiva.

Vamos estudar o comportamento das fibras da projeção $\pi : S^3 \to \mathbb{C}P^1$, ou seja, das órbitas da ação dos pontos de S^3 pela ação ρ. Denote por E_1 o equador de S^3, isto é,

$$E_1 = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; Im(z_2) = 0\}.$$

Defina também por E_0 o equador de E_1, isto é

$$E_0\{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; z_2 = 0\}.$$

Observe que E_1 é a esfera S^2 mergulhada em S^3 e E_0 a esfera S^1 mergulhada em E_1. Seja $z \in S^3$. Se $z \in E_0$, então $O(z) = E_0$, pois $(\lambda z)_2 = \lambda z_2 = 0$, para qualquer $\lambda \in S^1$. Assim podemos escolher $[z] = (1, 0)$. Se $z \notin E_0$ $(z_2 \neq 0)$, existem $\lambda_1, \lambda_2 \in S^1$ tais que $\lambda_1 z, \lambda_2 z \in E_1$ com $Real(\lambda_1) > 0$ e $Real(\lambda_2) < 0$. Nesse caso podemos escolher sem perda de generalidade $[z] = \lambda_1(z)$, isto é, $\lambda(z)$ pertence a calota superior da esfera E_1.

1.3.2 Folheações Riemannianas

Uma folheação $\mathcal{F}$ em M é uma partição por subvariedades imersas e conexas, chamadas de folhas. Dado $p \in M$ denotaremos por L_p a folha passando por p. Assim $F = \{L_p; p \in M\}$.

Definição 1.3.3 (Folheação Riemanniana Singular). Uma partição suave $\mathcal{F}$ em M variedade Riemanniana completa é uma *folheação Riemanniana singular* em M se satisfaz os itens abaixo

(i) $\mathcal{F}$ é singular, isto é, para qualquer $p \in M$ e $v \in T_pL_p$ existe campo de vetores X tal que $X(p) = v$ e $X(q) \in T_qL_q$ para qualquer $q \in M$.

(ii) $\mathcal{F}$ é transnormal, isto é, se c é uma geodésica ortogonal a uma folha, então c é ortogonal a todas folhas que intersectar.

Uma folha L de uma folheação Riemanniana singular $\mathcal{F}$ é *regular* se sua dimensão for maximal, caso contrário, dizemos que é *singular*. Se todas as folhas são regulares, dizemos que $\mathcal{F}$ é uma *folheação Riemanniana*.

Uma *folheação Riemanniana singular com seções* (f.r.s.s.) é uma folheação Riemanniana singular tal que para qualquer $p \in M$ regular $\sum = exp_p(\nu_p L_p)$ é uma subvariedade imersa completa que intersecta ortogonalmente as folhas. Chamaremos $\sum$ de *seção*.

Exemplo 8. A folheação dada pelas órbitas de uma ação isométrica é uma folheação Riemanniana.

Exemplo 9. A folheação dada pelas fibras de uma submersão Riemanniana $\pi : (M^{n+k}, g^M) \to (B^k, g^B)$ é uma folheação Riemanniana.

Podemos afirmar que uma folheação Riemanniana singular é uma folheação a qual as folhas são localmente equidistantes. Mais precisamente vejamos a seguinte proposição.

Proposição 1.3.5. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação (singular) em uma variedade Riemanniana completa (M, g). Então são equivalentes as afirmações a seguir

(i) $\mathcal{F}$ é uma folheação Riemanniana singular;

(ii) Para qualquer $q \in M$ existe uma vizinhança tubular

$$Tub_\epsilon(P_q) = \{x \in M; d(x, P_q) < \epsilon\}$$

da placa P_q de L_q com a seguinte propriedade: se $x \in Tub(P_q)$, então qualquer placa P_x contida em $Tub(P_q)$ está contida em um cilindro de raio $d(x, P_q)$ e eixo P_q.

Proposição 1.3.6. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em uma variedade Riemanniana completa (M, g). As seguintes afirmações são equivalentes

(i) $\mathcal{F}$ é uma folheação Riemanniana.

(ii) Para qualquer $p \in M$ existem uma vizinhança U de p, uma variedade Riemanniana B_p e uma submersão Riemanniana $\pi_p : U \to B_p$ tais que as componentes conexas de $\mathcal{F} \cap U$ (placas) são pré-imagens de π_p.

(iii) Seja g_T a métrica transversal, isto é, $g_T = A^* g$, onde $A_p : T_pM \to \nu_p L$ é a projeção ortogonal. Então a derivada de Lie $L_{g_T} U$ é nula para qualquer U campo de vetores vertical.

1.3.3 Os Tensores Fundamentais de uma Submersão

Nesta seção, apresentaremos dois tensores que medem o quando uma submersão Riemanniana difere da projeção de uma variedade produto com a métrica Riemanniana produto em um dos fatores. Esses dois tensores são partes dos tensores apresentado por O'neill em [9].

Definição 1.3.4 (A-tensor ou Tensor de O'neill). O A-tensor ou tensor de O'neill de uma folheação Riemanniana singular em M é o campo tensorial em M

$$\begin{aligned} A \ &: \ \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{V} \\ &\ \ (X,Y) \longmapsto A_X Y = \nabla^v_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]^v. \end{aligned}$$

Note que $A = 0$ se, e somente se, a distribuição horizontal é integrável, pois $\mathcal{H}$ é integrável se, e somente se, $0 = [X,Y]^v = 2A_X Y$, para quaisquer $X, Y \in \Gamma(\mathcal{H})$. Então de certo modo o A-tensor mede a não integrabilidade da distribuição horizontal.

Definição 1.3.5 (S-tensor). O S-tensor de uma folheação Riemanniana singular é o campo tensorial

$$\begin{aligned} S \ &: \ \mathcal{H} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \\ &\ \ (X,U) \longmapsto S_X U = -\nabla^v_U X. \end{aligned}$$

O tensor $S_X(.) = -\nabla^v_{(.)} X = \nabla^h_{(.)} X - \nabla_{(.)} X$, é a segunda forma fundamental de uma folha na direção de X. Logo $S = 0$ se, e somente se, as folhas são totalmente geodésicas. Assim o S-tensor mede o quando as geodésicas das folhas deixam de ser geodésicas da variedade ambiente.

Lema 1.3.4. Seja $A^*_X : \mathcal{V} \to \mathcal{H}$ a adjunta de $A_X : \mathcal{H} \to \mathcal{V}$. Se X é básico, então

$$A^*_X U = -\nabla^h_U X = \nabla^h_X U. \tag{1.14}$$

Demonstração. Temos que $[X,U]$ é vertical, pois U é vertical. Assim $0 = [X,U]^h = \nabla^h_X U - \nabla^h_U X$. Logo para qualquer Z horizontal

$$\begin{aligned} g(A^*_X U, Z) &= g(U, A_X Z) = g(U, \nabla^h_X Z) \\ &= g(U, \nabla_X Z) = X g(U,Z) - g(\nabla^h_X U, Z) \\ &= g(-\nabla^h_X U, Z) = g(-\nabla^h_U X, Z). \end{aligned}$$

□

Observação 1.3.1. Os dois tensores a seguir foram defindos por O'neill como os tensores fundamentais de uma submersão Riemanniana.

$$\begin{aligned} \mathbb{A} \ &: \ \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM) \\ &\ \ (E,F) \longmapsto \mathbb{A}_E F = \nabla^h_{E^h} F^v + \nabla^v_{E^h} F^h. \end{aligned}$$

$$\mathbb{T} \ : \ \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$$

$$(E, F) \longmapsto \mathbb{T}_E F = \nabla^h_{E^v} F^v + \nabla^v_{E^v} F^h.$$

Observe que o A-tensor é a restrinção do tersor $\mathbb{A}$ ao subespaço $\Gamma(TM) \times \mathcal{H}$ e o operador adjunto do A-tensor é igual a restrinção do A-tensor ao subespaço $\Gamma(TM) \times \mathcal{V}$. Ou seja,

$$\mathbb{A}_X Y = A^*_X Y^v + A_X Y^h$$

para qualquer $(X, Y) \in \Gamma(TM) \times \Gamma(TM)$. O tensor $\mathbb{A}$ é chamdo de tensor de integrabilidade. Já o S-tensor é a restrinção do operador $\mathcal{S}$ ao subespaço $\Gamma(TM) \times \mathcal{V}$.

1.3.4 Levantamento Horizontal e Campos Tipo Holonomia

Nesta seção, apresentaremos a definição de levantamento horizontal de curvas, provaremos a existência de tal objeto, mostraremos que a projeção de uma geodésica horizontal em M é uma geodésica em B, quando π é uma submersão Riemanniana, e, utilizando o levantamento horizontal de curva e o conceito de holonomia, definiremos campo de vetores tipo holonomia.

Definição 1.3.6 (**Levantamento e Levantamento Horizontal de Curvas**). Seja $c : [a, b] \to B$ uma curva suave por partes. Uma curva $\bar{c} : [a, b] \to M$ é um levantamento de c passando por $p \in \pi^{-1}(c(a))$ quando $\pi \circ \bar{c} = c$ e $\bar{c}(a) = p$. E se, além disto, $\bar{c}$ é uma curva horizontal, dizemos que $\bar{c}$ é o *levantamento horizontal* de c partindo de p.

Proposição 1.3.7. Sejam $\pi : M \to B$ uma submersão e $c : I \to B$ curva suave. Então para quaisquer $t_0 \in I$ e $p \in \pi^{-1}(c(t_0))$, existe $\epsilon > 0$ e um levantamento horizontal $\bar{c} : [t_0, t_0 + \epsilon] \to M$ de $c|_{[t_0, t_0+\epsilon]}$ partindo de p. E quaisquer levantamentos coincidem na interseção dos seus domínios. Ademais se $I = [a, b]$ e M são compactos (ou M completa) então $\bar{c}$ é definida em $[a, b]$.

Demonstração. Podemos assumir que c é regular. Tome X um campo de vetores em B tal que $X \circ c = c'$. Seja $\bar{X}$ o levantamento horizontal de X. Dado $t_0 \in I$, considere $\bar{c} : J = [t_0, t_0+\epsilon] \to M$ a curva integral de $\bar{X}$ passando por p, a qual é horizontal, pois $\bar{c}' = \bar{X} \circ \bar{c} \in \mathcal{H}$. Verifiquemos que $\bar{c}$ é levantamento de $c|_J$. Por definição temos que $d\pi \bar{X} = X \circ \pi$. Logo

$$(\pi \circ \bar{c})' = d\pi X \circ \bar{c} = X(\pi \circ \bar{c}),$$

ou seja, $\pi \circ \bar{c}$ é o fluxo do campo X passando por $\pi \circ \bar{c}(t_0) = c(t_0)$ Portando

$$\pi \circ \bar{c} = c|_J.$$

As outras afirmirmações seguem imediatamente da unicidade de solução de equações diferenciais ordinárias. $\square$

Teorema 1.3.1. Seja $\pi : M \to B$ uma submarsão Riemanniana. Se $c : I \to M$ é uma geodésica horizontal, então $\pi \circ c$ é uma geodésica em B. Em particular se M é completa, então B é completa.

Demonstração. Dado $t_0 \in I$, considere a geodésica

$$c_B : I \to M.$$

tal que $c_B'(t_0) = d\pi c'(t_0)$. Seja $J \subset I$ contendo t_0 tal que c_B é minimizante. Seja $\bar{c}$ o levantamento horizontal de c_B passando por $c(t_0)$. Observe que se mostrarmos que $\bar{c}$ é geodésica, então concluiremos que $c = \bar{c}$, pois $c'(t_0) = \bar{c}'(t_0)$, terminando assim a demonstração. Mostraremos que $\bar{c}$ é localmente minimizante. Seja $\beta : [a, b] \to M$ uma curva em M tal que $\beta(a) = \bar{c}(a)$ e $\beta(b) = \bar{c}(b)$. Logo

$$\begin{aligned} L(\beta) &= \int_a^b ||\beta'|| \geq \int_a^b ||\beta'^h|| \\ &= \int_a^b ||d\pi\beta'|| = L(\pi \circ \beta) \geq L(c_B) \\ &= L(\bar{c}). \end{aligned}$$

Portanto, segue o resultado.

□

Observação 1.3.2. Observe que se $\pi : M \to B$ é uma subersão Riemanniana, então o levantamento horizontal de geodésicas minimizantes é uma geodésica minimizante.

Definição 1.3.7 (Aplicação Holonomia). Seja $\pi : M \to B$ uma submersão Riemanniana e $c : [a, b] \to B$ uma curva suave por partes. A *holonomia associada a* c é a aplicação

$$\begin{aligned} h_c \ : \ & \pi^{-1}(c(0)) \longrightarrow \pi^{-1}(c(1)) \\ & p \longmapsto h_c(p) = c_p(1) \end{aligned}$$

onde $c_p : [0, 1] \to M$ é o levantamento horizontal da curva c partindo de p.

Definição 1.3.8 (Grupo de Holonomia). O grupo de holonomia $Hol(b)$ de uma folheação Riemanniana em $b \in B$ é o grupo formado por todas holonomias que são associadas a curvas fechadas suave por partes partido de b, onde a operação é a composição de funções. Observe que os elementos de $Hol(b)$ são da forma $h : \pi^{-1}(b) \to \pi^{-1}(b)$.

Lema 1.3.5. Sejam $\pi : M \to B$ uma submersão Riemanniana, e $h : F^0 \to F^1$ uma aplicação holonomia induzida por uma geodésica $c : [0, 1] \to B$, onde $\pi(F^0) = c(0)$ e $\pi(F^1) = c(1)$. Denote por $c_p : [0, 1] \to M$ o levantamento horizontal começando em $p \in F^0$ da curva c. Então para qualquer $u \in T_pF^0 = \mathcal{V}_p$

$$dh_p u = J(1) \in T_{c_p(1)}F^1,$$

onde J é o campo de Jacobi ao longo de c_p tal que

(i) $J(0)$ é vertical.

(ii) $J'(0) = -(A^*_{c'(0)}J(0) + S_{c'(0)}J(0))$.

Demonstração. Seja $\gamma : I = (-\epsilon, \epsilon) \to F^0$ curva suave com $\gamma'(0) = u$. Seja X o campo básico em F^0 tal que $d\pi X = c'(0)$. Observe que $X(q) = c'_q(0)$ para qualquer $q \in F^0$, onde c_q é o levantamento horizontal da geodésica c passando por q. Considere a seguinte variação por geodésicas de c_p

$$\begin{aligned} H \ &: \ [0,1] \times [I] \to M \\ &\quad V(t,s) = \exp_{\gamma(s)} t(X \circ \gamma)(s), \end{aligned}$$

ou seja, a variação de c_p pelos levantamentos horizontais $c_{\gamma(s)}$ de c. Então $h \circ \gamma(s) = H(1,s)$, de onde segue

$$dh_p u = \frac{d}{ds}(h \circ \gamma)(0) = \frac{d}{ds}V(1,0) = J(1),$$

onde $J = \frac{\partial}{\partial s}(,0)$ é o campo de Jacobi associado a variação por geodésicas H. Observe que $J(0) = u$, e então

$$\begin{aligned} J'(0) &= \frac{\nabla}{dt}\frac{d}{ds}H(0,0) = \frac{\nabla}{ds}\frac{d}{dt}H(0,0) \\ &= (\nabla_{\gamma'(0)}c'_p)(0) = \nabla_u X = \nabla^h_u X + \nabla^v_u X \\ &= -A^*_{c'_p(0)}u - S_{c'_p(0)}u. \end{aligned}$$

□

Observe que se J é um campo de Jacobi dado por uma variação de geodésicas construida analogamente ao lema anterior a partir de uma holonomia, então $J(t)$ é tangente a qualquer fibra, pois $J(0)$ é vertical e H é uma variação por geodésicas horizontais.

Definição 1.3.9 (Campo Tipo Holonomia). Um campo de Jacobi J ao longo de uma geodésica horizontal $c : [0,a] \to M$ é de tipo holonomia quando

(i) $J(0)$ é vertical.

(ii) $J'(0) = -(A^*_{c'(0)}J(0) + S_{c'(0)}J(0))$.

Se J é tipo holonomia, então, por unicidade do problema de valor inicial, J é o campo de Jacobi construído no lema anterior, logo J é vertical. Observe que dado $t \in [0,a]$, $J|_{[t,a]}$ também é tipo holonomia ao longo de $c|_{[t,a]}$. Portanto

$$J'(t) = -(A^*_{c'(t)}(J(t)) + S_{c'(t)}J(t)),$$

para qualquer $t \in [0,a]$.

Lema 1.3.6. Se $\pi : M \to B$ é uma submersão Riemanniana com fibras totalmente geodésicas, onde M é variedade Riemanniana completa, então a holonomia entre as fibras são isometrias.

Demonstração. Seja h a holonomia associada a uma curva $c : [0,1] \to B$. Sejam $p \in F_0 = \pi^{-1}(c(0))$ e $X \in T_pF_0$. Pelo Lema 1.3.5, existe J campo tipo holonomia ao longo de c tal que $J(0) = X$ e $dh_pX = J(1)$. Se $g(J(t), J(t))$ for constante, então em particular

$$g(X, X) = g(dh_pX, dh_pX),$$

implicando que h é uma isometria. De fato, $g(J, J)$ é constante, pois como J é vertical e as fibras são totalmente geodésicas (ou equivalentemente o S-tensor é identicamente nulo) temos que

$$g(J, J)' = 2g(J', J) = -2g(A^*_{c'}J + S_{c'}J, J^v) = -2g(A^*_{c'}J, J^v) = 0,$$

uma vez que $A^*_{c'}J$ é horizontal. □

1.3.5 Campos de Jacobi Projetáveis

Nesta seção apresentaremos um conceito importante neste trabalho, trata-se dos campos de Jacobi projetáveis. Como veremos, um campo de Jacobi projetável ao longo de uma geodésica horizontal é o campo variacional de uma variação por geodésicas horizontais.

Definição 1.3.10 (Campos de Jacobi Projetáveis). Um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica horizontal $c : [0, a] \to M$ é dito projetável quando

$$J'^v = -S_{c'}J^v - A_{c'}J^h. \tag{1.15}$$

Proposição 1.3.8. Seja $V : [0, a] \times I \to M$ uma variação de c por geodésicas horizontais, onde I é um intervalo contendo o zero. Então o campo variacional de V é um campo projetável.

Demonstração. Dado t_0, considere a curva $\gamma(s) = V(t_0, s)$ e $E(s) = \frac{\partial}{\partial t}V(t_0, s)$ campo horizontal ao longo de γ. Logo

pois $A_{\gamma'^h}E^h(0) = \frac{1}{2}[c'^h, E^h] = -\frac{1}{2}[E^h, c'^h] = -A_{E^h}\gamma'^h(0)$. Mas $J(t_0) = \gamma'(0)$ e $E(0) = c'(t_0)$. E portanto

$$J'^v(t_0) = -(S_{c'}J^v + A_{c'}J^h)(t_0).$$

□

Observação 1.3.3. Se J é um campo tipo holonomia, então J é dado pela variação por geodésicas horizontais construída no Lema 1.3.5, então pelo lema anterior J é um campo de Jacobi projetável.

Lema 1.3.7. Sejam $\pi : M \to B$ uma submersão Riemanniana, $c : [0, a] \to M$ geodésica horizontal, e J campo de Jacobi ao longo de $\pi \circ c$. Dado $u \in V_{c(0)}$, existe um único campo de Jacobi projetável $\tilde{J}$ ao longo de c tal que

1. $\pi_* \tilde{J} = J$ e
2. $\tilde{J}^v(0) = u$.

Demonstração. A idéia da demostração é construir uma variação por geodésicas V de $\pi \circ c$ que tem J como campo variacional, de tal forma que, quando considerarmos o levantamento horizontal de tal variação obteremos uma outra variação por geodésicas horizontais $\tilde{V}$ de c, que tem o campo de Jacobi $\tilde{J}$ desejado como seu campo variacional.

Seja $\gamma : [-b, b] \to B$ $(b > 0)$ uma curva tal que $\gamma(0) = \pi \circ c(0)$ e $\gamma'(0) = J(0)$. Então considere a variação por geodésicas de $\pi \circ c$

$$\begin{aligned} V \quad : \quad & [0, a] \times [-b, b] \to B \\ & V(t, s) = exp_{\gamma(s)} t(J_0(s) + sJ_1(s)), \end{aligned}$$

onde J_0 e J_1 são campos de vetores paralelos ao longo de γ tais que $J_0(0) = (\pi \circ c)'(0)$ e $J_1(0) = J'(0)$. Assim o campo variacional de V é o campo de Jacobi $J(t) = \frac{\partial}{\partial s} V(t, 0)$.

Agora considere uma curva $\tilde{\gamma} : [-b, b] \to M$ tal que $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ e $\tilde{\gamma}'^v(0) = u$. Seja X uma campo de vetores básico ao longo de $\tilde{\gamma}$ tal que $\pi_* \tilde{X(s)} = J_0(s) + sJ_1(s)$. Considere variação a seguinte variação de $\tilde{\gamma}$ por geodésicas

$$\begin{aligned} \tilde{V} \quad : \quad & [0, a] \times [-b, b] \to M \\ & \tilde{V}(t, s) = exp_{\tilde{\gamma}(s)} tX(s), \end{aligned}$$

Observe que para cada $s \in [-b, b]$ $\tilde{\gamma}_s(t) = \tilde{V}(t, s)$ é uma geodésica horizontal; com isso $\tilde{V}$ é uma variação de $\tilde{\gamma}$ por geodésicas horizontais. Pela proposição 1.3.8, $\tilde{J}(t) = \frac{\partial}{\partial s} \tilde{V}(t, 0)$ é um campo de Jacobi projetável. E como $\tilde{V}(0, s) = \tilde{\gamma}(s)$,

$$\tilde{J}^v(0) = (\frac{\partial}{\partial s} \tilde{V}(0, 0))^v = (\tilde{\gamma}'(0))^v = u.$$

Como $\pi \circ \tilde{V} = V$ segue que

$$\begin{aligned} \pi_* \tilde{J} &= \pi_* \frac{\partial}{\partial s} \tilde{V} = \pi_* dV(\frac{\partial}{\partial s}) \\ &= d(\pi \circ \tilde{V})(\frac{\partial}{\partial s}) = dV(\frac{\partial}{\partial s}) \\ &= J. \end{aligned}$$

Nos resta mostrar que o campo $\tilde{J}$ é o único campo de Jacobi tal que $\pi_*\tilde{J} = J$ e $\tilde{J}^v(0) = u$. Temos que $\tilde{J}^h$ é unicamente determinado pois é o levantamento horizontal do campo de Jacobi J; e $\tilde{J}^v$ também é unicamente determinado pois é solução do problema de valor inicial:

$$\tilde{J}^{v\prime} = -(S_{c'} + A^*_{c'})\tilde{J}^v - 2A_{c'}\tilde{J}^h, \ \tilde{J}^v(0) = u.$$

De fato, como $\tilde{J}$ é campo de Jacobi projetável, temos

$$\begin{aligned}
\tilde{J}^{v\prime} &= \tilde{J}^{v\prime h} + \tilde{J}^{v\prime v} = A^*_{c'}\tilde{J}^v + \tilde{J}^{\prime v} - \tilde{J}^{h\prime v} \\
&= A^*_{c'}\tilde{J}^v + \tilde{J}^{\prime v} - \nabla^v_{c'}\tilde{J}^h = A^*_{c'}\tilde{J}^v + \tilde{J}^{\prime v} - A_{c'}\tilde{J}^h \\
&= A^*_{c'}\tilde{J}^v - S_{c'}\tilde{J}^v - 2A_{c'}\tilde{J}^h;
\end{aligned}$$

e $\tilde{J}^v(0) = u$, por construção. □

Teorema 1.3.2. Se $\pi : M \to B$ é uma submersão Riemanniana e J campo de Jacobi projetável ao longo de uma geodésica horizontal $c : [0, a] \to M$, então π_*J é um campo de Jacobi ao longo de $\pi \circ c$.

Demonstração. Denote por P o cunjunto dos campos de Jacobi projetáveis ao longo de c e considere a seguinte aplicação linear

$$\begin{aligned}
\rho \ : \ & V_{c(0)} \times J^{\pi\circ c} \longrightarrow P \\
& (u, J) \longmapsto \tilde{J},
\end{aligned}$$

onde $\tilde{J}$ é o único campo de Jacobi projetável tal que $\pi_*(\tilde{J}) = J$ e $\tilde{J}^v(0) = u$. pelo lema 1.3.7 existência e unicidade estão garantida, logo ρ está bem definido. Observe que se ρ é um isomorfismo, então terminamos a prova.

Se $\rho(u, J) = \tilde{J} = 0$, então $u = \tilde{J}^v(0) = 0$ e $J = \pi_*\tilde{J} = 0$. Portanto ρ é injetiva, consequentemente, $dimP \geq dim(Im\rho) = dimV_{c(0)} + dimJ^{\pi\circ c} = k + 2dimB = dimM + dimB$.

Agora observe que para provar a sobrejetividade da aplicação ρ basta mostra que a aplicação

$$\begin{aligned}
\gamma \ : \ & P \longrightarrow T_{c(0)}M \times H_{c(0)} \\
& J \longmapsto (J(0), J'^h(0)).
\end{aligned}$$

é injetora. Seja $J \in P$ tal que $\gamma(J) = 0$, ou seja, $J(0) = 0$ e $J'^h(0) = 0$. Assim $J'^v(0) = -S_{c'(0)}J^v(0) - A_{c'(0)}J^h(0) = 0$ e $J^v = J^h = 0$. Portanto ρ é injetiva. □

Corolário 1.3.1. Seja F uma folheação Riemanniana de M. Dado J um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica horizontal $c : [0, a] \to M$, então existe uma variação de c por geodésicas horizontais que tem J como campo variacional.

Capítulo 2

Curvatura não-negativa e Campos de Jacobi Paralelo.

2.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é demonstrar o Teorema de Wilking, ferramenta chave na demonstração do Teorema de Dualização tema central desta dissertação. Essencialmente, este teorema fala sobre uma decomposição em soma direta de uma certa família de campos de Jacobi ortogonais a uma geodésica dada, onde uma das componentes é constituída por campos de Jacobi paralelos. Para demonstrar tal teorema será usado um resultado para campos de Jacobi, dada por Eschenburg e Heintze.

Com o intuito de fornecer ao leitor a possibilidade de omitir as partes técnicas, sem comprometer o entendimento do Teorema de Dualização, os resultados centrais deste capítulo serão expostos já na introdução presente e demonstrados no decorrer do capítulo .

Dada M uma variedade Riemanniana completa n-dimensional, considere V um espaço vetorial de campos de Jacobi ortogonais a $c : \mathbb{R} \to M$ geodésica.

Definição 2.1.1 (Espaço Auto-adjunto). O espaço V é dito auto-adjunto quando, para quaisquer $J_1, J_2 \in V$ e $t \in \mathbb{R}$,

$$g(J_1(t), J_2'(t)) = g(J_1'(t), J_2(t)). \tag{2.1}$$

Como veremos, um exemplo de espaços auto-adjuntos é o conjunto dos campos de Jacobi ortogonais a uma geodésica que se anulam em $t = 0$.

Teorema 2.1.1 (Eschenburg e Heintze). Seja W um $(n-1)$-dimensional espaço auto-adjunto de campos de Jacobi ortogonais a geodésica $c : \mathbb{R} \longrightarrow M^n$. Suponha que $c'(t)^{\perp}$ seja gerado por $\{J(t), J \in W\}$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Se as curvaturas seccionais de M são não-negativas, então W consiste de campos de Jacobi paralelos.

Uma versão análoga ao teorema acima será usada de forma decisiva na demonstração do principal resultado deste capítulo, o qual eunciaremos agora.

Teorema 2.1.2 (Wilking). Seja W um $(n-1)$-dimensional espaço auto-adjunto de campos de Jacobi ortogonais a geodésica $c : \mathbb{R} \to M^n$. Se M tem curvaturas seccionais não-negativas, então

$$W = span\{J \in W; J(t) = 0, \ para\ algum\ t \in \mathbb{R}\} \oplus \{J \in W; J \ \ paralelo\}. \tag{2.2}$$

Agora, apresentaremos um exemplo importante de espaço de campos de Jabobi ao longo de uma geodésica. A importância deste exemplo reside na sua utilização para a demonstração do teorema de Dualização.

Exemplo 10. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação Riemanniana (singular) em M^{n+k}, onde a dimensão das folhas regulares é k. Dada geodésica $c : \mathbb{R} \to M$ ortogonal a folha regular $L_{c(0)}$, defina

$$W = \{J; J \text{ é campo de Jacobi projetável ao longo de c}, J \perp c' \text{ e } J^h(0) = 0\}, \tag{2.3}$$

onde $J^h(0)$ é a componente horizontal de $J(0)$. Provaremos que W é um $(n+k-1)$-dimensional espaço auto-adjunto, e portanto poderemos aplicar o Teorema2.1.2 para o decompor W em duas componentes, sendo uma das componentes o conjunto dos campos de Jacobi paralelos pertencentes a W.

Na Seção 2.2, recordaremos algumas propriedades de espaço auto-adjunto de campos de Jacobi ortogonais a uma geodésica. Na Seção 2.3, consideraremos W um espaço auto-adjunto $(n-1)$-dimensional de campos de Jacobi ortogonais a uma geodésica e definiremos o operador de Riccati, o qual será necessário para a demonstração do teorema de Eschenburg e Heintze. Na Seção 2.4, apresentaremos uma versão mais geral do Teorema 2.1.1, bem como sua demonstração. Na Seção 2.5, consideraremos V um subespaço próprio de W, onde W é um $(n-1)$-dimensional espaço auto-adjunto. Neste contexto, generalizaremos o conceito de operador de Riccati. Este novo operador será equivalente ao operador de Riccati em $M/\mathcal{F}$. Na Seção 2.6, demonstraremos o Teorema de Wilking 2.1.2. E por fim, na Seção 2.7, discutiremos o Exemplo 10.

2.2 Propriedades Básicas de Espaços Auto-adjuntos

Vamos expor nesta seção algumas propriedades de um espaço V auto-adjunto, isto é, um subespaço vetorial do espaço dos campos de Jacobi ortogonais a uma geodésica c dada, tal que a condição (2.1) é verificada para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Como veremos no Lema 2.2.1, esta definição pode ser enfraquecida para a definição:

Definição 2.2.1 (Espaço Auto-adjunto). Um espaço V é auto-adjunto quando existir $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$g(J_1'(t_0), J_2(t_0)) = g(J_1(t_0), J_2'(t_0))$$

para quaisquer $J_1, J_2 \in V$.

Lema 2.2.1 (Espaço Auto-adjunto). Se a condição (2.1) for satisfeita em V para algum $t_0 \in \mathbb{R}$, então será satisfeita para qualquer $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Suponha que a condição (2.1) seja satisfeita para $t_0 \in \mathbb{R}$. Dados $J_1, J_2 \in V$ defina a função

$$f(t) = g(J_1'(t), J_2(t)) - g(J_1(t), J_2'(t)).$$

Logo, usando a equação de Jacobi e uma propriedade do tensor curvatura ($g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y)$), temos que

$$\begin{aligned} f'(t) &= g(J_1''(t), J_2(t)) - g(J_1(t), J_2''(t)) \\ &= g(-R(c'(t), J_1(t))c'(t), J_2(t)) - g(J_1(t), -R(c'(t), J_2(t))c'(t)) \\ &= -g(R(c'(t), J_2(t))c'(t), J_1(t)) + g(J_1(t), R(c'(t), J_2(t))c'(t)) = 0, \end{aligned}$$

para qualquer $t \in \mathbb{R}$. E portanto f é identicamente nula, pois $f(t_0) = 0$. □

A proposição a seguir é um instrumento útil que usaremos neste trabalho.

Proposição 2.2.1. Sejam $J_1, ..., J_k$ campos de Jacobi ao longo de uma geodésica $c : [a,b] \to M$. Então, fixado $t \in [a,b]$, $J_1, ..., J_k$ são linearmente independentes se, e somente se, $\hat{J}_1(t), ..., \hat{J}_k(t)$ são linearmente independentes, onde $\hat{J}_i = (J_i(t), J_i'(t))$, $i = 1, ..., k$.

Demonstração. Fixado $t \in [a,b]$, considere a aplicação ρ_t que associa a cada campo de Jacobi J ao longo de uma geodésica $c : [a,b] \to M$ o vetor

$$\rho_t(J) = (J(t), J'(t)) \in T_{c(t)}M \times T_{c(t)}M. \tag{2.4}$$

Dado $(u,v) \in T_{c(t)}M \times T_{c(t)}M$, existe um único campo de Jacobi J ao longo de c tal que $J(t) = u$ e $J'(t) = v$. A unicidade do campo de jacobi J implica que a aplicação ρ_t está bem definida e é injetora. A partir da existência do campo de Jacobi J concluímos que ρ_t é sobrejetora. Além disso, pela linearidade da derivada, a aplicação ρ_t também é linear. Assim ρ_t é um isomorfismo linear e portanto segue o resultado. □

Vejamos um exemplo, que é simples, porém útil:

Exemplo 11. Considere V o espaço dos campos de Jacobi ortogonais a uma geodésica c que se anulam em $t = 0$. A condição (2.1) é satisfeita para $t = 0$, portanto V é um auto-adjunto. Além disso, a dimensão de V é igual a $n-1$, porque, dada uma base $\{e_1, ..., e_{n-1}\}$ de $c^{\perp}(0)$, o conjunto dos campos de Jacobi $\{J_1, ..., J_{n-1}\}$ é uma base de V, onde $J_i = \rho_0^{-1}(0, e_i)$ e ρ_0 é o isomorfismo linear dado em (2.2) na demonstração da Proposição 2.2.1.

Dado $t \in \mathbb{R}$, defina o seguinte subespaço vetorial de $T_{c(t)}M$:

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t), \tag{2.5}$$

onde $V_1(t) = \{J(t); J \in V\}$ e $V_2(t) = \{J'(t); J \in V \text{ e } J(t) = 0\}$. Se V é auto-adjunto, esta soma é direta e então podemos escrever

$$V(t) = V_1(t) \oplus V_2(t). \tag{2.6}$$

De fato, suponha que V é auto-adjunto. Dados $u \in V_1(t)$ e $v \in V_2(t)$, sejam $J_1, J_2 \in V$ tais que $J_1(t) = u$, $J_2'(t) = v$ e $J_2(t) = 0$. Logo

$$g(u, v) = g(J_1(t), J_2'(t)) = g(J_1'(t), J_2(t)) = 0.$$

Lema 2.2.2. Seja V um subespaço vetorial de campos de Jacobi ortogonais a uma geodésica c. Se V é auto-adjunto, então

$$dimV = dimV(t),$$

para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Além disso, o segundo somando $V_2(t)$ é trivial em quase todo $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Observe que $V(t) = V_1(t) \oplus V_2(t)$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$, pois V é auto-adjunto, por hipótese. Defina o seguinte subespaço vetorial de V:

$$\tilde{V}_2(t) = \{J \in V; J(t) = 0\}.$$

Temos que $\tilde{V}_2(t)$ é isomorfo a $V_2(t)$. De fato, basta considerar a aplicação $\rho : \tilde{V}_2(t) \to V_2(t)$, dada por $\rho(J) = J'(t)$, que é um isomorfismo linear, pois $\rho = \pi_2 \circ \rho_t$, onde ρ_t é o isomorfismos dado em (2.2) e π_2 é a projeção na seguinda coordenada, que também é um isomorfismo linear de $\rho_t(\tilde{V}_2(t))$ em $V_2(t)$.

Fixado $t_0 \in \mathbb{R}$, considere $\{J_1, ..., J_k\}$ base de $\tilde{V}_2(t_0)$ e complete-a para obter uma base

$$\{J_1, ..., J_k, J_{k+1}, ..., J_l\}$$

de V. Logo o conjunto $\{J_1'(t_0), ..., J_k'(t_0)\}$ é uma base de $V_2(t_0)$, pois $\rho(J_i) = J_i'(t_0)$ para qualquer $i = 1, ..., k$. Também temos que $\{J_{k+1}(t_0), ..., J_l(t_0)\}$ é base de $V_1(t_0)$. Verifiquemos esta afirmação. Sejam $u \in V_1(t_0)$ e $J \in V$ tais que $J(t_0) = u$. Se $J \in \tilde{V}_2(t_0)$, então $u = J(t_0) = 0$ por definição, e assim não temos mais o que fazer. Do contrário, se $J \notin \tilde{V}_2(t_0)$, então como $\{J_{k+1}, ..., J_l\}$ completa $\tilde{V}_2(t)$ temos que

$$J = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i J_i,$$

com $\alpha_j \neq 0$ para algum $j \in (k+1, ..., l)$. Por outro lado, por definição, os campos de Jacobi $J_1, ..., J_k$ se anulam em $t = t_0$. Logo

$$u = J(t_0) = \sum_{i=k+1}^{l} \alpha_i J_i(t_0)$$

e portanto $span\{J_{k+1}(t_0), ..., J_l(t_0)\} = V_1(t_0)$. Suponha a existência de escalares $\alpha_{k+1}, ..., \alpha_l \in \mathbb{R}$ tais que

$$\sum_{i=k+1}^{l} \alpha_i J_i(t_0) = 0.$$

Então $\sum_{i=k+1}^{l} \alpha_i J_i \in \tilde{V}_2(t_0)$ e como $span\{J_{k+1}, ..., J_l\}$ completa $\tilde{V}_2(t_0)$, segue que $\alpha_j = 0$ para qualquer $i = 1, ..., l$. Logo podemos concluir que

$$dimV = l = l - k + k = dimV_1(t_0) + dimV_2(t_0) = dimV(t_0),$$

onde usamos o fato de V ser soma direta de $V_1(t)$ e $V_2(t)$.

Observe que se a afirmação (I) abaixo é verdadeira, então $V_2(t)$ é trivial para quase todos $t \in \mathbb{R}$.

(I) Dado $t_0 \in \mathbb{R}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $J_1(t), ..., J_l(t)$ são linearmente independentes, para qualquer $t \in (t_0, t_0 + \epsilon)$, onde $J_1, ..., J_l$ são os campos de Jacobi definidos acima.

Verifiquemos a afirmação (I). Fixe $t_0 \in \mathbb{R}$ e observe que o vetores $J_{k+1}(t_0), ..., J_l(t_0)$ são linearmente independentes. Então para t suficientemente próximo de t_0, $J_{k+1}(t), ..., J_l(t)$ são linearmente independentes por continuidade. Agora considere $\epsilon > 0$ tal que $c|_{[t_0, t_0+\epsilon]}$ não tenha pontos conjugados a $c(t_0)$. Suponha que existem $t \in (t_0, t_0+\epsilon)$ e escalares $\alpha_{k+1}, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i J_i(t) = 0.$$

Logo $\alpha_{k+1}, ..., \alpha_k = 0$, pois do contrário $c(t)$ seria conjugado a $c(t_0)$, visto que $J(t_0) = J(t) = 0$, onde $J = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i J_i \neq 0$. Por fim, provemos que se $J \in span\{J_1, ..., J_k\} = \tilde{V}_2(t_0)$, então $J(t) \notin span\{J_{k+1}(t), ..., J_l(t)\} = V_1(t)$. Seja $\{E_1, ..., E_{n-1}\}$ um referencial ortonormal paralelo perpendicular a $c'^{\perp}$ e escreva $J = \sum_{i=1}^{n-1} f_i E_i$. Note que

$$f_i(t) = (t - t_0) g_i,$$

porque $f(t_0) = 0$, onde $g_i(t_0) = f_i'(t_0)$. Logo

$$\lim_{t \to t_0} \frac{J(t)}{t - t_0} = \sum_{i=1}^{n-1} \lim_{t \to t_0} \frac{f_i(t)}{t - t_0} E_i(t) = J'(t_0).$$

Mas $J'(t_0)$ pertence a $V_2(t_0)$, que é ortogonal a $V_1(t_0)$, e portanto $J(t_0) \notin V_1(t_0)$.

□

2.3 Operador de Riccati

Supondo que W é um subespaço auto-adjunto $(n-1)$-dimensional de campos de Jacobi ortogonais a geodésica c, onde n é a dimensão da variedade Riemanniana M, introduziremos

nesta seção o conceito de operador de Riccati; reduziremos a equação de Jacobi, que é uma equação diferencial de segunda ordem, a duas equações diferencias de primeira ordem; e demonstraremos um lema que exercerá papel importante na demonstração do teorema de Eschenburg e Heintze.

Definição 2.3.1 (Operador de Riccati). Defina I_W como o conjunto dos $t \in \mathbb{R}$ tais que $c(t)^{\perp}$ é gerado por $\{J(t); J \in W\}$. Então o *operador de Riccati* de W é dado para cada $t \in I_W$ por

$$\begin{aligned} Riccati(t) \quad : \quad & c'^{\perp}(t) \longrightarrow c'^{\perp}(t) \\ & u \longmapsto J'(t) \end{aligned}$$

onde $J \in W$ e $J(t) = u$.

O operador de Riccati está bem definido. De fato, dado um vetoer $u = u_t \in c'^{\perp}(I_W)$, sejam J_1, J_2 campos de Jacobi em W tais que $J_1(t) = J_2(t) = u$. Logo, para qualquer campo de Jacobi $J \in V$,

$$\begin{aligned} g((J_1' - J_2')(t), J(t)) &= g((J_1 - J_2)(t), J'(t)) \\ &= g(u - u, J'(t)) = 0. \end{aligned}$$

Potanto $J_1'(t) = J_2'(t)$. Fixado $t \in I_V$, provemos agora que $Riccati(t)$ é auto-adjunto. Dados $u, v \in c'^{\perp}(t)$, sejam $J_1, J_2 \in W$ tais que $J_1(t) = u$ e $J_2(t) = v$. Então

$$g(Riccati(t)u, v) = g(J_1'(t), J_2(t)) = g(J_1(t), J_2'(t)) = g(u, Riccati(t)v),$$

onde usamos na segunda igualdade o fato de W ser auto-adjunto.

Exemplo 12 (Operador de Riccati em Epaços de Curvatura Seccional Constante Positiva). Seja $c : \mathbb{R} \to M$ uma geodésica normalizada em M uma variedade Riemanniana n-dimensional de curvatura seccional constante igual a $K > 0$. Dada base ortonormal $\{e_1, ..., e_{n-1}\}$ de $c'^{\perp}(0)$, tome o referencial geodésico $\{E_1, ..., E_{n-1}\}$ ao longo de c tal que $E_i(0) = e_i$, para cada $i = 1, ..., n-1$. Como a curvatura seccional de M é constante igual a K, dado $i \in \{1, ..., n-1\}$, o campo de Jacobi J_i ortogonal a c tal que $\rho_0(J_i) = (J_i(0), J_i'(0)) = (0, e_i)$ é dado por

$$J_i(t) = \frac{sen(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}} E_i(t),$$

e assim sua derivada covariante é

$$J_i'(t) = cos(t\sqrt{(K)})E_i(t).$$

Seja W o espaço dos campos de Jacobi ortogonais a c que se anulam em $t = 0$. Observe que

$\{J_1, ..., J_{n-1}\}$ é base para W e que

$$I_W = \{t \in \mathbb{R}; t \neq \frac{k\pi}{\sqrt{K}}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Logo, dado $t \in I_W$, temos que

$$\begin{aligned} Riccati(t)J_i(t) &= J_i'(t) \\ Riccati(t)(\frac{sen(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}}E_i(t) &) = cos(t\sqrt{K})E_i \\ Riccati(t)E_i(t) &= \frac{\sqrt{K}cos(t\sqrt{K})}{sen(t\sqrt{K})}E_i(t) = \sqrt{K}cotg(\sqrt{K}t)E_i(t). \end{aligned}$$

E portanto o operador de Riccati de W é dado por

$$[Riccati(t)] = \begin{pmatrix} \sqrt{K}cotg(\sqrt{K}t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{K}cotg(\sqrt{K}t) \end{pmatrix} = \sqrt{K}cotg(\sqrt{K}t)I,$$

para cada $t \in I_W$.

Mas geralmente, considere W um espaço auto-adjunto $(n-1)$-dimensional de campos de Jacobi ortogonais a uma geodésica c e tome $\{E_1, ..., E_{n-1}\}$ um referêncial geodésico de no fibrado normal da curva c. Dado $t \in I_V$, sejam $J_1, ..., J_{n-1}$ campos de Jacobi em W tais que $\{J_1(t), ..., J_{n-1}(t)\}$ é linearmente indendente. Escrevendo

$$J_k = \sum_i f_{i,k}E_i \text{ e } J_k' = \sum_i f_{i,k}'E_i,$$

segue que

$$\begin{aligned} [Riccati(t)][J_1(t), ..., J_{n-1}(t)] &= [Riccati(t)] \begin{pmatrix} f_{1,1}(t) & \cdots & f_{1,n-1}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n-1,1}(t) & \cdots & f_{n-1,n-1}(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_{1,1}'(t) & \cdots & f_{1,n-1}'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n-1,1}'(t) & \cdots & f_{n-1,n-1}'(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como $\{J_1(t), ..., J_{n-1}(t)\}$ é linearmente independente, a matriz $(f_{i,j}(t))$ é inversível, e por-

tanto

$$[Riccati(t)] = \begin{pmatrix} f'_{1,1}(t) & \dots & f'_{1,n-1}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{n-1,1}(t) & \dots & f'_{n-1,n-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{1,1}(t) & \dots & f_{1,n-1}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n-1,1}(t) & \dots & f_{n-1,n-1}(t) \end{pmatrix}^{-1}.$$

Assim o operador de Riccati de W pode ser entendido como $Riccati : I_W \to S(n-1)$ uma curva suave em $S(n-1)$ espaço das matrizes simétricas de ordem $n-1$. Logo faz sentido derivar $Riccati$ em relação a componente t, obtendo um vetor $Riccati'(t)$ que é tangente a $S(n-1)$ na matriz $[Riccati(t)]$.

Agora, considerando o operador auto-adjunto $R(t) : c'^{\perp}(t) \to c'^{\perp}(t)$, dado por $R(t)u = R(c'(t), u)c'(t)$. Temos que

$$\begin{aligned} -R(t)J(t) &= -R(c'(t), J(t))c'(t) \\ &= J''(t) = (Riccati(t)J(t))' \\ &= Riccati'(t)J(t) + Riccati(t)J'(t) \\ &= (Riccati'(t) + Riccati^2(t))J(t), \end{aligned}$$

para $t \in I_W$ e $J \in W$. Dessa forma decompomos a equação de Jacobi, $J''+RJ = 0$, que é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, em duas equações diferencias ordinárias de primeira ordem:

$$RiccatiJ = J' \tag{2.7}$$

e

$$Riccati'J + Riccati^2J + RJ = 0. \tag{2.8}$$

No espaço dos operadores auto-adjuntos em $c'^{\perp}(t)$, considere o produto interno $\langle A, B\rangle = tr(AB)$, onde tr denota o traço de um operador.

Lema 2.3.1. Se V é um subespaço vetorial $(n-1)$-dimensional de campos de Jacobi ortoganais a uma geodésica com um operador de Riccati auto-adjunto definido, então

$$r' + r^2 + \mathcal{R} = 0, \tag{2.9}$$

onde $r = \frac{(trRiccati)}{n-1}$, $\mathcal{R} = \frac{ric+|Riccati_0|^2}{n-1}$ e $Riccati_0 = Riccati - \frac{tr(Riccati)}{n-1}I$.

Demonstração. Pela equação (2.8), $0 = tr(Riccati') + tr(Riccati^2) + trR$, ou seja,

$$tr(Riccati^2) = -(tr(Riccati') + ric), \tag{2.10}$$

onde $ric = trR$ é o tensor curvatura de Ricci ao longo de c'. Observe que $tr(Riccati_0) = 0$. Logo

$$0 = tr(Riccati_0) = \langle I, Riccati_0\rangle. \tag{2.11}$$

E portanto vale a equação a seguir

$$-tr(Riccati^2) + \frac{tr(Riccati)^2}{n-1} + |Riccati_0|^2 = 0. \tag{2.12}$$

De fato, a equação (2.11) implica que

$$\begin{aligned} tr(Riccati^2) &= \langle Riccati, Riccati\rangle = \langle \frac{tr(Riccati)}{n-1}I + Riccati_0, \frac{tr(Riccati)}{n-1}I + Riccati_0\rangle \\ &= \langle \frac{tr(Riccati)}{n-1}I, \frac{tr(Riccati)}{n-1}I\rangle + \langle Riccati_0, Riccati_0\rangle \\ &= (\frac{tr(Riccati)}{n-1})^2\langle I, I\rangle + \langle Riccati_0, Riccati_0\rangle = \frac{(tr(Riccati))^2}{n-1} + |Riccati_0|^2. \end{aligned}$$

E usando as equações (2.10) e (2.12), concluímos que

$$\begin{aligned} 0 &= (tr(Riccati') + ric) + \frac{tr(Riccati)^2}{n-1} + |Riccati_0|^2 \\ &= (n-1)((\frac{tr(Riccati)}{n-1})' + (\frac{tr(Riccati)}{n-1})^2 + \frac{ric + |Riccati_0|^2}{n-1}), \end{aligned}$$

Portanto segue o resultado:

$$r' + r^2 + \mathcal{R} = 0.$$

□

2.4 Teorema de Eschenburg e Heintze

No que se segue, enunciaremos e provaremos uma versão mais geral do Teorema de Eschenburg e Heintze (2.1.1).

Teorema 2.4.1. (**Eschenburg e Heintze**) Seja W um $(n-1)$-subespaço vetorial de campos de Jacobi ortogonais a geodésica $c : \mathbb{R} \longrightarrow M$ com operador de Riccati definido. Se $I_W = \mathbb{R}$ e $ric(c') \geq 0$, então $Riccati(t) = 0$ e $ric(c') = 0$. Em particular, W consiste de campos de Jacobi paralelos.

Demonstração. Suponha inicialmente que $r = 0$. Então, pelo Lema 2.3.1,

$$0 = r' + r^2 + \mathcal{R} = \mathcal{R} = \frac{ric(c') + |Riccati_0|^2}{n-1}.$$

Logo

$$|Riccati_o|^2 = -ric(c') \leq 0,$$

pois, por hipótese, a curvatura de Ricci ao longo de c' é não-negativa. E portanto $ric(c')$ e $Riccati_0$ são identicamente nulos. Além disso, o operador de Riccati também é identicamente nulo, pois

$$Riccati = Riccati_0 + rI = 0.$$

Consequentemente, se $J \in W$, então $J' = Riccati(J) = 0$, ou seja, J é paralelo.

Mostraremos que r é identicamente nulo. Suponha por absurdo que exista $t_0 \in I_W$ tal que $r(t_0) \neq 0$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $t_0 = 0$ e que $r(0) < 0$, pois do contrário bastariamos considerar $\tilde{r}(t) = r(t - t_0)$, que também é solução da equação (2.9).

Denote por f a solução do seguinte problema de valor inicial

$$f' + f^2 = 0, \ f(0) = r(0).$$

Logo a função f é dada em $\mathbb{R} - \frac{1}{r(0)}$ por

$$f(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{r(0)}}. \tag{2.13}$$

Defina $y = f - r$ para valores em $(-\infty, -\frac{1}{r(0)})$. Assim

$$\begin{aligned} y' &= f' - r' = -f^2 + r^2 + \mathcal{R} \\ &= (r - f)(r + f) + \mathcal{R} \\ &= -(r + f)y + \mathcal{R}, \end{aligned}$$

isto é, y é solução do seguinte problema de valor inicial:

$$y' + (r + f)y = \mathcal{R}, \ y(0) = 0.$$

E então, usando o método do fator integrante, resolvemos a equação diferencial acima:

$$y = \frac{1}{e^{\int (r+f)dt}} \int e^{\int (r+f)dt} \mathcal{R} dt.$$

E como $e^{\int (r+f)dt} > 0$ e $\mathcal{R} \geq 0$, pois por hipótese $ric(c') \geq 0$, segue que $y \geq 0$, ou equivalentemente,

$$f \geq r. \tag{2.14}$$

Entretanto, pela equação (2.13)

$$\lim_{t \to -\frac{1}{r(0)}^-} f(t) = -\infty. \tag{2.15}$$

E apartir da desigualdade (2.14) e da equação (2.15), concluimos

$$\lim_{t \to -\frac{1}{r(0)}^-} r(t) = -\infty.$$

O que é um absurdo, pois r está definido em $\mathbb{R}$, uma vez que, por hipótese, $I_V = \mathbb{R}$. E

portanto $r = 0$. $\square$

Observação 2.4.1. No Teorema 2.4.1 acima é imprescindível que $I_W = \mathbb{R}$, isto é, $\{J(t); J \in v\}$ gera $c'^{\perp}(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Caso contrário, temos o seguinte contra-exemplo: considere $M = \mathbb{R}^2$, com a métrica canônica, $c(t) = (t, 0)$ geodésica normalizada, $J(t) = t(e_2)_{c(t)} = (0, t)_{c(t)}$ campo de Jacobi perpendicular a $c'(t)$ e W o espaço gerado por J. Note que $J(0)$ não gera $c'^{\perp}(0)$ e, além disso, J não é paralelo.

2.5 Operador de Riccati Transversal

Seja V um subespaço próprio de W um espaço auto-adjunto $(n-1)$-dimensional de campos de Jacobi ortogonais a uma geodésica c. Nesta seção, versaremos sobre o operador de Riccati transversal a V, ou seja, a restrição do operador de Riccati em W ao espaço H, o complemento ortogonal de V em $c^{\perp}$. Também reduziremos a equação de Jacobi a duas equações diferenciais de primeira ordem, analogamente ao que foi feito na seção (2.4), onde no lugar do termo de curvatura R aparecerá um operador de curvatura modificado, que envolverá R^h a parte em H de R e um termo envolvendo o tensor de O'neill. Usaremos está equação na demonstração do Teorema de Wilking para aplicar um argumento análogo ao usado na demonstração do Teorema de Eschenburg e Heintze.

Para todo $t \in \mathbb{R}$, considere o seguinte subespaço de $T_{c(t)}M$:

$$V(t) = \{J(t); J \in V\} \oplus \{J'(t); J \in V \ e \ J(t) = 0\}, \tag{2.16}$$

que se trata do mesmo subespaço definido anteriormente na seção 2.2. Pelo Lema 2.2.2, $dimV = dimV(t)$. Defina também o conjunto

$$H(t) = V^{\perp}(t) \cap c'^{\perp}(t).$$

Assim, qualquer vetor $u \in c'^{\perp}(t)$ pode ser escrito como

$$u = u^v + u^h \in V(t) \oplus H(t).$$

O fibrado vetorial $\{(t, u); t \in \mathbb{R} \ \text{ e } u \in H(t)\}$ será denote por H_c, ou apenas por H.

Definição 2.5.1 (Operador de Riccati Transversal). O operador de Riccati transversal é definido, para qualquer $t_0 \in I_W$, por

$$\begin{aligned} Riccati(t_0) \ : \ & H_c(t_0) \longrightarrow H_c(t_0) \\ & u \longmapsto Y'^h(t_0) \end{aligned}$$

onde $Y = J^h$, $J \in W$ e $Y(t_0) = J(t_0) = u$.

Proposição 2.5.1. O operador de Riccati está bem definido e $Riccati(t_0)$ é um operador auto-adjunto, para qualquer $t_0 \in I_W$.

Demonstração. Primeiro verificaremos que *Riccati* está bem definido. Dado $u = u_{t_0} \in H_c(I_W)$, sejam $J_1, J_2 \in W$ tais que $J_1(t_0) = J_2(t_0) = u$. Analogamente ao caso $dimV = n-1$ da seção 2.3, concluímos que $J_1'(t_0) = J_2'(t_0)$. Logo

$$J_1'^h(t_0) = J_2'^h(t_0). \tag{2.17}$$

Agora, observe que

$$J_i^{v'h}(t_0) = 0 \ (i = 1, 2), \tag{2.18}$$

pois $0 = g(J^v, X)$, para qualquer $X \in \Gamma(H_c)$. Derivando ambos os membro desta igualdade, segue que

$$\begin{aligned} 0 &= g(J^{v'}(t_0), X(t_0)) + g(J^v(t_0), X'(t_0)) \\ &= g(J^{v'h}(t_0), X(t_0)) + g(u^v, X'(t_0)) \\ &= g(J^{v'h}(t_0), X(t_0)), \end{aligned}$$

onde a terceira igualdade é devida ao fato de u pertencer a $H(t_0)$. Logo, apartir das equações (2.17) e (2.18), verificamos a igualdade:

$$J_1^{h'h}(t_0) = J_2^{h'h}(t_0);$$

e portanto o operador de Riccati está bem definido.

Por fim, fixado $t_0 \in I_W$, vejamos que $Riccati(t_0)$ é auto-adjunto. Dados $u_1, u_2 \in H(t_0)$, sejam $J_1, J_2 \in W$ tais que $J_i(t_0) = u_i$, $i = 1, 2$. Usando a equação (2.18), concluímos que

$$\begin{aligned} g(Riccati(t_0)u_1, u_2) &= g(J_1^{h'h}(t_0), J_2(t_0)) = g(J_1^{h'h}(t_0) + J_1^{v'h}(t_0), J_2(t_0)) \\ &= g(J_1'^h(t_0), J_2(t_0)) = g(J_1'(t_0), J_2(t_0)) = g(J_1(t_0), J_2'(t_0)) \\ &= g(J_1(t_0), J_2^{h'h}(t_0) + J_2^{v'h}(t_0)) = g(J_1(t_0), J_2^{h'h}(t_0)) \\ &= g(u_1, Riccati(t_0)u_2), \end{aligned}$$

isto é, $Riccati(t_0)$ é um operador auto-adjunto. □

Uma derivada covariante no fibrado vetorial H_c é dada pela projeção em H_c da derivada covariante no fibrado tangente, isto é,

$$\begin{aligned} D^h \ : \ & H_c \longrightarrow H_c \\ & X \longmapsto D^h(X) = (X')^h. \end{aligned}$$

Como veremos logo abaixo na Observação (2.5.2), $Riccati = (Riccati^W|_{H(I_W)})^h$. Por

outro lado, $Riccati^W$ é uma curva suave em $S(n-1)$, como vimos na seção 2.3. E assim $Riccati : I_W \to S(k)$ é uma curva suave em $S(k)$ espaço das matrizes simétricas de ordem k, onde $k = dim\ H_c(t)$. Então, considerando $Riccati' = D^h Riccati$ e $Y = J^h$, segue que

$$\begin{aligned} D^h D^h Y &= D^h(Riccati Y) \\ &= Riccati' Y + Riccati D^h Y \\ &= Riccati' Y + Riccati^2 Y, \end{aligned}$$

para qualquer campo de Jacobi J em W.

Dado $t_0 \in \mathbb{R}$, defina a aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t_0) \ : \ & V(t_0) \longrightarrow H(t_0) \\ & v \longmapsto J'^h(t_0), \end{aligned}$$

onde $J \in V$ e $J(t_0) = v$. Provemos que a aplicação $A(t_0)$ está bem definida. Dado $v \in V(t_0)$, sejam $J_1, J_2 \in V$ tais que $J_i(t_0) = v, (i = 1, 2)$. Assim, para todo campo $X \in \Gamma(H)$,

$$\begin{aligned} g(J_1'^h(t_0) - J_2'^h(t_0), X(t_0)) &= g(J_1'(t_0) - J_2'(t_0), X(t_0)) \\ &= g(J_1(t_0) - J_2(t_0), X(t_0))' - g(J_1(t_0) - J_2(t_0), X'(t_0)) \\ &= -g(J_1(t_0) - J_2(t_0), X'(t_0)) = 0. \end{aligned}$$

Portanto $J_1'^h(t_0) = J_2'^h(t_0)$.

Lema 2.5.1. Considere o operador $\mathcal{A}$ definido acima. Então as seguintes equações são verificadas:

(i) $J'^v(t_0) = \mathcal{A}^*(t_0) J(t_0)$, para qualquer $J \in W$ tal que $J(t_0) \in H(t_0)$, com $t_0 \in I_W$.

(ii) $X'(t_0) = -\mathcal{A}^*(t_0) X(t_0)$, para qualquer $X \in \Gamma(H_c)$

Demonstração. Dado Z campo de Jacobi em V, temos que

$$\begin{aligned} g(J'^v(t_0), Z(t_0) &= g(J'(t_0), Z(t_0)) = g(J(t_0), Z'(t_0)) \\ &= g(J(t_0), Z'^h(t_0)) = g(J(t_0), \mathcal{A}(t_0) Z(t_0)) \\ &= g(\mathcal{A}^*(t_0) J(t_0), Z(t_0)), \end{aligned}$$

concluindo assim o item (i). O item (ii) segue da seguinte conta:

$$\begin{aligned} 0 &= g(X, Z)' = g(X', Z) + g(X, Z') \\ &= g(X', Z) + g(X, \mathcal{A} Z) = g(X', Z) + g(\mathcal{A}^* X, Z). \end{aligned}$$

□

Observação 2.5.1. Suponha que $V(t_0)$ e $H(t_0) \oplus c'(t_0)$ coincidem, respectivamente, com os subespaços vertical e horizontal relativos a uma submersão Riemanniana, onde c é uma geodésica horizontal. Então o operador $\mathcal{A}(t_0)$ é a restrisão do tensor de O'neil ao subespaço $c'(t_0) \times V(t_0)$:

$$\mathbb{A}_{c'}X = \nabla^h_{c'^h}X^v + \nabla^v_{c'^h}X^h = X^{h'^v} + X^{v'^h}.$$

Logo, pela Observação (1.3.1), dado $t_0 \in I_W$

$$\mathcal{A}(t_0)X = A^*_{c'(t_0)}X$$

para todo $X \in \Gamma(H)$.

Observação 2.5.2. Seja $Riccati^W : c^\perp(I_W) \to c^\perp(I_W)$ o operador de Riccati de W definido na seção 2.3. Então, para todo vetor $J(t_0)$ pertencente a $H_c(I_W)$,

$$Riccati^W J(t_0) = J^{h'^h}(t_0) + J^{v'^h}(t_0) + J'^v(t_0),$$

e portanto, pela equação (2.18), obtemos:

$$Riccati^W J(t_0) = Riccati(J(t_0)) + \mathcal{A}^* J(t_0),$$

ou seja,

$$Riccati(t_0) = (Riccati^W(t_0)|_{H(t_0)})^h, \tag{2.19}$$

para qualquer $t_0 \in I_W$.

Lema 2.5.2. Seja $Y = J^h$, onde $J \in W$. Então

$$D^h D^h Y + K^h Y + 3\mathcal{A}\mathcal{A}^* Y = 0, \tag{2.20}$$

e assim

$$Riccati' + Riccati^2 + R^h + 3\mathcal{A}\mathcal{A}^* = 0, \tag{2.21}$$

onde $R(.) = R(c', .)c'$.

Demonstração. Sejam $X_1, ..., X_k$ campos ortonormais D^h-paralelos (ou seja, $X_i'^h = 0$) com $X_1(t_0) = J(t_0)$. Usando o Lema 2.5.1, em t_0 temos que

$$\begin{aligned}
g(D^h D^h Y, X_i) &= g(D^h(J^{h'h}), X_i) = g(J^{h'h'^h}, X_i) = g(J^{h'h'}, X_i) \\
&= g(J^{h'h}, X_i)' - g(J^{h'h}, X_i') = g(J^{h'h}, X_i)' - g(J^{h'h}, X_i'^h) \\
&= g(J^{h'h}, X_i)' = g(J^{h'}, X_i)' = (g(J^h, X_i)' - g(J^h, X_i'^h))' = g(J^h, X_i)'' = g(J, X_i)'' \\
&= g(J'', X_i) + 2g(J', X_i') + g(J, X_i'') = g(J'', X_i) + 2g(J', X_i') + g(J, X_i'') \\
&= g(J'', X_i) + 2g(J'^h + J'^v, X_i') + g(J, X_i'') \\
&= g(J'', X_i) + 2(g(J'^h, X_i'^h) + g(J'^v, X_i')) + g(J, X_i'')
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= g(J'', X_i) + 2g(J'^v, X_i') + g(J, X_i'') = g(-RJ, X_i) - 2g(\mathcal{A}^*J, \mathcal{A}^*X_i) + g(X_1, X_i'') \\
&= -g(RJ, X_i) - 2g(\mathcal{A}\mathcal{A}^*J, X_i) + g(X_1, X_i'') \\
&= -g(RJ + 2\mathcal{A}\mathcal{A}^*J, X_i) + (-g(X_1', X_i') + g(X_1, X_i')') \\
&= -g(RJ + 2\mathcal{A}\mathcal{A}^*J, X_i) - g(-\mathcal{A}^*X_1, -\mathcal{A}^*X_i) \\
&= -g(RJ + 2\mathcal{A}\mathcal{A}^*J, X_i) - g(\mathcal{A}\mathcal{A}^*J, X_i) = -g(RJ + 3\mathcal{A}\mathcal{A}^*J, X_i).
\end{aligned}
$$

Portanto segue o resultado. □

2.6 Teorema de Wilking

Observe que o Teorema de Wilking 2.1.2 não tem como hipótese: $I_W = \mathbb{R}$. Assim W não necessariamente é composto por campos de Jacobi paralelo, como vimos no exemplo dado na observação (2.4.1). Entretanto, o Teorema de Wilking fornece uma decomposição de W em dois subespaços, sendo uma das componentes o conjunto de campos de Jacobi paralelos pertencente a W. O objetivo desta seção é provar a seguinte versão do Teorema de Wilking 2.1.2:

Teorema 2.6.1 (Wilking). Seja W o (n-1)-espaço vetorial dos campos de Jacobi ortogonais a geodésica $c : \mathbb{R} \to M$ com operador de Riccati auto-adjunto definido. Se M tem curvatura seccional não-negativa, então

$$W = span\{J \in W; J(t) = 0, \quad \text{para algum } t \in \mathbb{R}\} \oplus \{J \in W; J \text{ é paralelo}\}. \tag{2.22}$$

Neste parágrafo, veremos a ideia geral da demonstração. Considere os seguintes subespaços de W:

$$V = span\{J \in W; J(t) = 0, \text{ para algum } t \in \mathbb{R}\} \text{ e } H = \{Y; Y = J^h, J \in W\}.$$

Primeiro provaremos via o Lema 2.6.1 que W/V é isomorfo a H, logo H é complementar a V. Já o Lema 2.6.3, implicará que o operador de Riccati transversal está definido em $\mathbb{R}$. Este fato, mais a hipótese sobre a curvatura (curvaturas seccionais de M não-negativas) nos permitirá concluir, usando um argumento análogo ao Teorema de Eschenburg e Heintze, que o Riccati transversal é identicamente nulo. Este resultado, os Lemas 2.5.1 e 2.6.5 e novamente a hipótese sobre a curvatura seccional de M implicará que os operadores R^h, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^*$ são identicamente nulos. Dado $Y \in H$, como Riccati transversal é nulo, Y é D^h-paralelo, e como $\mathcal{A} = 0$, Y é um campo paralelo. Por fim, usando que $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^*$, R^h e Y' são identicamente nulos, verificamos que Y atende a equação de Jacobi. Portando H é o complementar ortogonal a V em W que é constituído por campos de Jacobi paralelos.

No que se segue demonstraremos o Teorema de Wilking 2.6.1.

Lema 2.6.1. O núcleo da projeção $\pi : W \to H$, $J \mapsto J^h$ é V. Em particular W/V é isomorfo a H.

Demonstração. Visto que $H(t)$ é o complemento ortogonal de $V(t)$, se $J \in V$, então $\pi(J) = J^h = 0$. Reciprocamente, suponha que $J \in W$ e $J^h = 0$, ou seja, $J^h(t) = 0$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Fixado $t_0 \in I_W$, temos que $J(t_0) \in V(t_0)$, logo existe U campo de Jacobi em V tal que $U(t_0) = J(t_0)$. Desse modo, concluimos que $J - U \in V$, pois $(J - J_1)(t_0) = 0$, e portanto $J \in V$. □

O lema acima implica que o espaço W se decompõe como soma direta dos subespaços V e H:

$$W = V \oplus H.$$

Lema 2.6.2. Se $J \notin V$, então $J(t)$ é transversal a $V(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Dado $J \notin V$, suponha por absurdo que existem campos de Jacobi $J_1, J_2 \in V$ tais que $J_2(t_0) = 0$ e

$$J(t_0) = J_1(t_0) + J_2'(t_0),$$

para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. Note que

$$g(J(t_0), J_2'(t_0)) = g(J'(t_0), J_2(t_0)) = 0$$

e

$$g(J_1(t_0), J_2'(t_0)) = g(J_1'(t_0), J_2(t_0)) = 0.$$

Logo

$$g(J_2'(t_0), J_2'(t_0)) = g(J(t_0) - J_1(t_0), J_2'(t_0)) = 0,$$

concluindo que $J_2' = 0$ e assim $J_2 = 0$, pois $J_2(t_0) = 0$. Portanto $J(t_0) = J_1(t_0)$ e, analogamente a um argumento usado no lema anterior, checamos que o campo de Jacobi J petence a V, o que constitui uma contradição. □

Lema 2.6.3. Sejam $J_1, ..., J_k$ campos de Jacobi em W tais que, para algum $t_0 \in I_W$, $\{J_1(t_0), ..., J_k(t_0)\}$ é uma base de $H(t_0)$. Então

a) $\{J_1^h(t), ..., J_k^h(t)\}$ é base de $H(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$;

b) $H = span\{J_1^h, ..., J_k^h\}$.

Demonstração. Fixe $t \in \mathbb{R}$. Suponha que existem escalares $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i J_i^h(t) = 0. \tag{2.23}$$

Se $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i J_i \notin V$, então é transversal a $V(t)$, pelo Lema 2.6.2. Logo $\alpha_i = 0$ $i = 1, ..., k$, pois

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i J_i(t) \in V(t),$$

visto que supomos a equação (2.23). Do contrário, se $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i J_i \in V$, então

$$\pi(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i J_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i J_i^h = 0,$$

pelo Lema 2.6.1. Em particular, para t_0 dado nas hipóteses,

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i J_i(t_0) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i J_i^h(t_0) = 0.$$

E como, por hipótese, $\{J_1(t_0), ..., J(t_0)\}$ é base de $H(t_0)$, segue que $\alpha_i = 0$, $i = 1, ..., k$. Portanto, como $dim(H(t))$ é constante igual a k, $\{J_1^h(t), ..., J_k^h(t)\}$ é uma base para $H(t)$.

Provemos agora o item (b), ou seja, H é gerado por $\{J_1^h, ..., J_k^h\}$. Se $Y \in H$, então, por definição, existe $J \in W$ tal que $Y = J^h$. Como, por hipótese, $\{J_1(t_0), ..., J_k(t_0)\}$ é base de $H(t_0)$, temos:

$$Y(t_0) = J^h(t_0) = \sum_{i=1}^{k} y_i J_i(t_0).$$

Logo $(Y - \sum_{i=1}^{k} y_i J_i) \in V$. Pelo Lema 2.6.1,

$$0 = \pi(Y - \sum_{i=1}^{k} y_i J_i) = Y - \sum_{i=1}^{k} y_i J_i^h,$$

concluindo a demonstração do lema. □

Observação 2.6.1. O Lema 2.6.3 nos garante que o operador de Riccati transversal está definido para todo $t \in \mathbb{R}$. Essa condição substituirá a hipótese $I_W = \mathbb{R}$ na demonstração da seguinte versão do Teorema de Eschenburg e Heintze.

Lema 2.6.4 (**Teorema de Eschenburg e Heintze Transversal**)**.** O operador de Riccati transversal é identicamente nulo.

Demonstração. Analogamente ao Lema 2.3.1, provamos que

$$r' + r^2 + \mathcal{R} = 0,$$

onde $r = \frac{tr(Riccati)}{n-1}$, $\mathcal{R} = \frac{tr(R^h + 3AA^*) + |Riccati_0|^2}{n-1}$ e $Riccati_0 = Riccati - rI$.

Se $r = 0$, então verificamos a seguinte equação

$$0 = \mathcal{R} = \frac{tr(R^h + 3AA^*) + |Riccati_0|^2}{n-1}.$$

Logo

$$tr(R^h + 3\mathcal{A}\mathcal{A}^*) = -|Riccati_0|^2 \leq 0. \tag{2.24}$$

Além disso, dada uma base $\{J_i^h\}$ de H, e como as curvaturas seccionais de M são não-negativas, segue que

$$\begin{aligned} tr(R^h + 3\mathcal{A}\mathcal{A}^*) &= \sum g(R^h(J_i^h), J_i^h) + 3g(\mathcal{A}\mathcal{A}^* J_i^h, J_i^h) \\ &= \sum g(R(J_i^h), J_i^h) + 3g(\mathcal{A}^* J_i^h, \mathcal{A}^* J_i^h) \\ &= \sum |c'|^2 |J_i^h|^2 sec(\frac{c'}{|c'|}, \frac{J_i^h}{|J_i^h|}) + 3|\mathcal{A}^* J_i^h|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Logo, $tr(R^h + 3\mathcal{A}\mathcal{A}^*) = |Riccati_0|^2 = 0$, e portanto

$$Riccati = Riccati_0 + rI = 0.$$

Supondo por absurdo que r é não nulo para algum t_0, e procedendo de forma análoga ao Teorema 2.4.1, concluí-se que Riccati transversal explode em tempo finito, o que é um absurdo pela Observação 2.6.1. □

Lema 2.6.5. Os operadores R^h, $\mathcal{A}^*$ e $\mathcal{A}$ são identicamente nulos.

Demonstração. Pelos Lemas 2.5.2 e 2.6.4, temos que $R^h = -3\mathcal{A}\mathcal{A}^*$. Logo

$$g(R^h X, X) = -3g(\mathcal{A}\mathcal{A}^* X, X) = -3g(\mathcal{A}^* X, \mathcal{A}^* X) = -3\|\mathcal{A}^* X\|^2 \leq 0,$$

para qualquer $X \in \Gamma(H)$. Por outro lado, como por hipótese as curvaturas seccionais de M são não-negativas,

$$g(R^h X, X) = g(RX, X) = |c'|^2 |X|^2 sec(\frac{c'}{|c'|}, \frac{X}{|X|}) \geq 0.$$

E então $g(R^h,) = 0$, donde concluimos que, de fato, os operadores K^h, $\mathcal{A}^*$ e $\mathcal{A}$ são identicamente nulos. □

Usando os Lemas 2.5.1 e 2.6.5, demonstramos os lemas a seguir.

Lema 2.6.6. Se $Y = J^h \in H$, então Y é paralelo.

Demonstração. Note que se $Y = J^h \in H$, então Y é um campo D^h-paralelo, pois

$$D^h Y = J^{h\prime h} = Riccati J^h = 0.$$

Logo $Y' = Y'^v$, e então, para qualquer $Z \in \Gamma(V)$,

$$\begin{aligned} 0 &= g(Y, Z)' = g(Y', Z) + g(Y, Z') = g(Y'^v, Z) + g(Y, Z'^h) \\ &= g(Y'^v, Z) + g(Y, \mathcal{A}Z) = g(Y'^v, Z), \end{aligned}$$

pois $\mathcal{A} = 0$. Portanto $Y' = Y'^v = 0$, isto é, Y é um campo paralelo. □

Lema 2.6.7. Se $Y = J^h \in H$, então Y é um campo de Jacobi ao longo de c.

Demonstração. Como J é um campo de Jacobi tal que $Y = J^h$, dado $Z \in V$ temos que

$$\begin{aligned} g(RJ, Z) &= -g(J'', Z) = -(g(J', Z)' - g(J', Z')) \\ &= -(g(J'^v, Z)' - g(J', Z')) = -(g(\mathcal{A}^* J, Z)' - g(J', Z')) \\ &= g(J', Z') = g(J', Z'^v + Z'^h) = g(J', Z'^v + \mathcal{A}Z) \\ &= g(J', Z'^v) = g(J'^v, Z'^v) = g(\mathcal{A}^* J, Z'^v) = 0, \end{aligned}$$

logo $R^v J = 0$. Assim $RY = 0$, pois $R^h = 0$. E como Y é paralelo ($Y' = 0$), verifica-se a equação de Jacobi

$$Y'' + RY = 0.$$

Portanto Y é um campo de Jacobi. □

2.7 Exemplo

Nesta seção, consideraremos o exemplo (10). Seja $\mathcal{F}$ folheação Riemannian (singular) em M^{n+k} variedade Riemanniana completa com curvatura seccional não-negativa, onde a dimensão das folhas regulares é k. Dada $c : \mathbb{R} \to M$ uma geodésica horizontal, seja W o subespaço constituído por campos de Jacobi projetáveis ortogonais a c que são verticais em $t = 0$:

$$W = \{J; J \text{ é campo de Jacobi projetável ao longo de c}, J \perp c' \text{ e } J^h(0) = 0\}. \tag{2.25}$$

Mostraremos que W é um $(n + k - 1)$-dimensional espaço auto-adjunto com um operador de Riccati definido. Seja V o subespaço dos campos de vetores ao longo de c que são tipo holonomia. Observe que se $J \in V$, em particular, J é um campo de Jacobi projetável e vertical. Portanto V é um subespaço próprio de W. Assumindo que a geodésica c é regular, verificaremos que $V(t)$ e $H(t) \oplus c'(t)$ coincidem, respectivamente, com $\mathcal{V}_{c(t)}$ subespaço vertical e $\mathcal{H}_{c(t)}$ subespaço horizontal relativos a folheação $\mathcal{F}$. No caso em que a folheação $\mathcal{F}$ é dada por uma submersão Riemanniana $\pi : M^{n+k-1} \to B^n$, mostraremos que $\pi_*(W)$ o espaço dos campos projetados de W é um auto-espaço $(n - 1)$-dimensional de campos de Jacobi ortogonais a geodésica $\pi \circ c$, logo possui um operador de Riccati auto-adjunto bem definido, denotado por $Riccati^{\pi_*(W)}$.

Associaremos o operador de Riccati tranversal ao operador de Riccati em $\pi_*(W)$ por

$$\overline{Riccati^{\pi_*(W)}(u_t)} = Riccati(\bar{u}_t),$$

onde a barra supra-escrita denota o levantamento horizontal de um vetor pertencete ao

vibrado $\Gamma((\pi \circ c)^*TB)$ para o fibrado $\Gamma(c^*TM)$.

Suponha, sem perda de generalidade, que a folha L passando por $c(0)$ é regular. Tome U uma vizinhança da placa $P_{c(0)} \subset L$ tal que a folheação $\mathcal{F}$ restrita a U é dada por uma submersão Riemanniana:

$$\pi : U \longrightarrow B,$$

onde B é uma variedade Riemanniana n-dimensional. Sejam $c_U : I \to U$ restrição de c a U e $W_U = \{J|_I; J \in W\}$. Observe que as dimensões de W e W_U são iguais. Defina $\pi_*(W)$ como o subespaço projetado de W_U

$$\pi_*(W) = \{\pi_*(J); J \in W_U\}. \tag{2.26}$$

Observação 2.7.1. Note que $\pi_*(W)$ é o conjunto dado no exemplo (11), isto é, o espaço dos campos de Jacobi $\tilde{J}$ ortogonais a geodésica $\pi \circ c_U : I \to B$ tais que $\tilde{J}(0) = 0$. Como vimos, tal espaço é auto-adjunto e tem dimensão $n - 1$.

Lema 2.7.1. Sejam $\mathcal{F}$ folheação Riemanniana singular em M variedade Riemanniana completa e $c : \mathcal{R} \to M$ geodésica horizontal. Então

$$dimW = n + k - 1,$$

onde W é definido por (2.25).

Demonstração. Considere a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \mu \quad : \quad & (\pi \circ c_U)'^{\perp}(0) \times T_{c(0)}L \longrightarrow W \\ & (u, v) \longmapsto J = J^h + J^v \end{aligned}$$

onde $J \in W$ tal que $(\pi_* J)'(0) = u$ e $J^v(0) = v$. Vejamos que tal aplicação está bem definida. Seja $(u, v) \in (\pi \circ c_U)'^{\perp}(0) \times T_{c(0)}L$. Então existe um único campo de Jacobi $\hat{J}$ ortogonal a $(\pi \circ c_U)$ tal que $\hat{J}(0) = 0$ e $\hat{J}'(0) = u$. Por outro lado, pelo Lema 1.3.7, existe um único campo de Jacobi J projetável ortogonal a c_U tal que $\pi_* J = \hat{J}$ e $J^v(0) = v$. E portanto existe um único campo de Jacobi J projetável ortogonal a c com $J^h(0) = 0$ (isto é, $J \in W$) tal que $(\pi_* J)'(0) = u$ e $J^v(0) = v$. Portando μ está bem definida. Além disso, note que a aplicação μ é um isomorfismo linear. Logo

$$dimW = dim(((\pi \circ c)'^{\perp}(0)) \times T_{c(0)}L) = n + k - 1.$$

□

O lema a seguir implicará que W tem um operador de Riccati auto-adjunto definido.

Lema 2.7.2. Seja $\pi : M^{n+k} \to B^n$ uma submersão Riemanniana e $c : \mathbb{R} \to M$ uma geodésica horizontal. Considere W um subespaço do espaço dos campos de Jacobi projetáveis ao longo

de c e $\pi_*(W) = \{\pi_* J; J \in V\}$ o subespaço dos campos de Jacobi ao longo da geodésica $\pi \circ c$ projetados. Então W tem um operador de Riccati auto-adjunto definido se, e somente se, $\pi_*(W)$ tem operador de Riccati auto-adjunto definido.

Demonstração. Nesta demonstração, os índices ^{h} e ^{v} representam, respectivamente, as componentes horizontal e vertical relativas a folheação $\mathcal{F}$.

Observe que $t \in I_W$ se, e somente se, $t \in I_{\pi_* W}$. Assim se provarmos que W é auto-adjunto se, e somente se, $\pi_* W$ também for auto-adjunto, segue então o resultado.

Sejam $J_1, J_2 \in W$. Como J_2 é projetável, segue que

$$\begin{aligned} g(J_1, J_2') &= g(J_1^v, J_2'^v) + g(J_1^h, J_2'^h) \\ &= g(J_1^v, -S_{c'} J_2^v) + g(J_1^v, -A_{c'} J_2^h) + g(J_1^h, J_2^{h\prime h}) + g(J_1^h, J_2^{v\prime h}). \end{aligned}$$

E, como c' é um campo básico, vale a equação $J_2^{v\prime h} = \nabla^h_{c'} J_2^v = -A^*_{c'} J_2^v$, pelo Lema 1.3.4. E então

$$g(J_1, J_2') = g(J_1^v, -S_{c'} J_2^v) + g(-A^*_{c'} J_1^v, J_2^h) + g(J_1^h, J_2^{h\prime h}) + g(J_1^h, -A^*_{c'} J_2^v)$$

Obtendo uma expressão análoga para $g(J_1', J_2)$, segue

$$\begin{aligned} g(J_1, J_2') - g(J_1', J_2) &= g(J_1^v, -S_{c'} J_2^v) - g(A^*_{c'} J_1^v, J_2^h) + g(J_1^h, J_2^{h\prime h}) - g(J_1^h, A^*_{c'} J_2^v) \\ &- g(J_2^v, -S_{c'} J_1^v) + g(A^*_{c'} J_2^v, J_1^h) - g(J_2^h, J_1^{h\prime h}) + g(J_2^h, A^*_{c'} J_1^v) \\ &= g(J_1^v, -S_{c'} J_2^v) - g(J_2^v, -S_{c'} J_1^v) + g(J_1^h, J_2^{h\prime h}) - g(J_2^h, J_1^{h\prime h}) \\ &= g(J_1^h, J_2^{h\prime h}) - g(J_2^h, J_1^{h\prime h}) = g(\pi_* J_1, (\pi_* J_2)') - g((\pi_* J_1)', \pi_* J_2), \end{aligned}$$

onde na terceira igualdade usamos a simetria do S-tensor. Portanto

$$g(J_1, J_2') - g(J_1', J_2) = g(\pi_* J_1, (\pi_* J_2)') - g((\pi_* J_1)', \pi_* J_2),$$

para qualquer $J_1, J_2 \in W$. Dai concluímos que W é auto-adjunto se, e somente se, $\pi_* W$ também for auto-adjunto. □

O Lema anterior e a observação (2.7.1) implicam que W_U é auto-adjunto, logo W é auto-adjunto, pelo Lema 2.2.1. Pportanto W possui um operador de Riccati auto-adjunto bem definido.

Agora, considere V o subespaço dos campos de Jacobi tipo holonomia. Como observamos, V é um subespaço próprio de W. Defina a distribuição $t \mapsto V(t) = \{J(t); J \in V\} \oplus \{J'(t); J \in V, J(t) = 0\}$ que é regular, pois $dim V(t) = dim V$ (Lema 2.2.2). Se $J \in V$, então $J \in \Gamma(c^* \mathcal{V})$. Logo

$$V_1(t) = \{J(t); J \in V\} \subset \mathcal{V}_{c(t)}.$$

Assumindo que c é uma geodésica regular, obetemos que

$$V(t) \subset \mathcal{V}_{c(t)}.$$

Por outro lado, dado $u \in T_{c(t)}L$, existe um único campo tipo holonomia J ao longo de c tal que $J(t) = u$, pelo Lema 1.3.5. Assim

$$T_{c(t)}L \subset V(t). \tag{2.27}$$

E portanto

$$V(t) = T_{c(t)}M = \mathcal{V}_{c(t)} \text{ e } \mathcal{H}_{c(t)} = V(t)^{\perp} = H(t) \oplus c'(t).$$

Como $\mathcal{H}_{c(t)} = H(t) \oplus c'(t)$, podemos definir o operador de Riccati transversal para todo $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Riccati \ : \ & H(\mathbb{R}) \longrightarrow H(\mathbb{R}) \\ & u_t \longmapsto J^{h'^h}(t), \end{aligned}$$

onde $J \in W$ com $J(t) = u_t$.

Suponha que a folheação $\mathcal{F}$ é dada por uma submersão Riemanniana $\pi : M \to B$. Sejam $\overline{\nabla}$, ∇ conexões Riemannianas de M e B respectivamente. Sejam $\overline{sec}$ e sec, respectivamente, curvaturas seccionais de M e B e ric o tensor de Ricci em B.

Considerando a geodésica $\tilde{c} = \pi \circ c : \mathbb{R} \to B$, observe que, a partir da discussão feita mais acima,

$$\pi_*(W) = \pi_*(H)$$

é um $(n-1)$-dimensional subespaço de campos de Jacobi ortogonal a $\tilde{c}$ auto-adjunto. Defina o operador de Riccati em $\pi_*(H)$ por

$$\begin{aligned} Riccati^{\pi_*(W)} \ : \ & \tilde{c}'^{\perp}(I_{\pi_*(H)}) \longrightarrow \tilde{c}'^{\perp}(I_{\pi_*(H)}) \\ & u_t \longmapsto J'(t) \end{aligned}$$

onde $J \in \pi_*(H) = \pi_*(W)$ com $J(t) = u_t$. O operador $Riccati^{\pi_*(W)}$ é um operador auto-adjunto bem definido. A proposição a seguir relaciona o operador de Riccati transversal com o operador de Riccati em $\pi_*(W)$.

Proposição 2.7.1. Para qualquer $u_t \in \tilde{c}'^{\perp}$ temos que

$$\overline{Riccati^{\pi_*(W)}(u_t)} = Riccati(\bar{u}_t).$$

Demonstração. Como $\pi : M \to B$ é uma submersão Riemanniana e c é uma geodésica horizontal regular,

$$\frac{\nabla}{dt} d\pi X(t) = d\pi \frac{\overline{\nabla}}{dt} X(t)$$

para qualquer $X \in \Gamma(\mathcal{H})$. Logo, para qualquer $u_t \in \tilde{c}'^{\perp}$,

$$\begin{aligned} Riccati^{\pi_*(W)}(u_t) &= (d\pi J)'(t) = (d\pi J^h)'(t) \\ &= \frac{\nabla}{dt} d\pi J^h(t) = d\pi \frac{\overline{\nabla}}{dt} J^h(t) \\ &= d\pi J^{h'}(t) = d\pi J^{h'^h}(t) \\ &= d\pi Riccati(\bar{u}_t), \end{aligned}$$

onde $J \in W$ tal que $J(t) = \bar{u}_t$. $\square$

Capítulo 3

Teorema da Dualização de Wilking

3.1 Introdução

Neste capítulo, provaremos o Teorema de Dualização de Wilking enunciado a seguir.

Teorema 3.1.1 (**Dualização de Wilking**). Seja M uma variedade Riemanniana completa e considere $\mathcal{F}$ uma folheação Riemanniana singular em M. Se a curvatura seccional de M é positiva, então quaisquer dois pontos em M podem ser unidos por uma geodésica horizontal quebrada.

Para provar este teorema, Wilking utilizou o conceito de folha dual.

Definição 3.1.1 (**Folha Dual**). Seja $\mathcal{F}$ uma folheação Riemanniana (singular) em M. Dado $p \in M$ o conjunto

$$L_p^{\#} = \{q \in M; \text{existe uma geodésica horizontal quebrada ligando } p \text{ a } q\}$$

é chamado de *folha dual* a $\mathcal{F}$ passando por p.

Na primeira seção, será construída uma folheação $\mathcal{F}^{\#}$, chamada folheação dual a folheação Riemanniana (singular) $\mathcal{F}$, cujas folhas veremos que coincidem com as folhas duais definida acima. O leitor pode omitir a construção da folha dual, assumindo por definição que $\mathcal{F}^{\#} = \{L_p^{\#}; p \in M\}$. Assim, podemos reformular o Teorema 3.1.1 da seguinte forma:

Teorema 3.1.2 (**Dualização de Wilking**). Seja M uma variedade Riemanniana completa e considere $\mathcal{F}$ uma folheação Riemanniana singular em M. Se a curvatura seccional de M é positiva, então a folhação dual tem uma única folha dual.

A demonstração do Teorema 3.1.2 segue do seguinte teorema, que também será referido como Teorema de Dualização.

Teorema 3.1.3. Seja M uma variedade Riemanniana completa e considere $\mathcal{F}$ uma folheação Riemanniana singular em M. Se a curvatura seccional de M é não-negativa e existir uma folha dual $L^{\#}$ tal que $dimL^{\#} < dimM$, então o espaço normal a $L^{\#}$ ao longo de c é gerado por campos de Jacobi paralelos, onde $c : I \to L^{\#}$ é uma geodésica horizontal quebrada em $L^{\#}$.

De fato, este teorema termina a prova do Teorema 3.1.1. Suponha, por absurdo, que exista uma folha dual $L^{\#}$ tal que $dimL^{\#} < dimM$. Seja c uma geodésica horizontal contida na folha $L^{\#}$. Então, pelo teorema 3.1.3 , existe J campo de Jacobi paralelo não trivial ao longo de c tal que $J(t) \in \nu_{c(t)}(L^{\#})$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Pela equação de Jacobi e do fato de J ser paralelo, temos que

$$0 = J'' + R(c', J)c' = R(c', J)c'.$$

Logo $K(c', J) = 0$. O que contradiz a hipótese de M ter curvatura estritamente positiva.

Demonstraremos o Teorema 3.1.3 na segunda seção deste capítulo. E, na ultima seção, apresentaremos duas aplicações do Teorema de Dualização, onde uma destas aplicações será utilizada na demonstração da suavidade da *projeção métrica* na alma, tema do próximo capítulo.

3.2 Folheação Dual

Nessa seção, será construído o conceito de folheação dual. Tal construção parte de um subconjunto D de campos de vetores definidos em abertos que cobrem toda variedade, que por sua vez induzirá uma menor distribuição invariante pela ação de um grupo de difeomorfismo locais e que contém a distribuição gerada por D. O Teorema de Sussmann vai garantir a integrabilidade de tal distribuição e então será definida a folheação dual como a folheação singular na variedade por variedades integrais da distribuição construída. Por fim, será verificado que a folha dual passando por um ponto p coincide com $L_p^{\#}$, o conjunto de elementos alcançados por geodésicas horizontais quebradas que partem de p.

Seja $V(M)$ o conjunto dos campos de vetores suaves X definidos em um aberto U_X de M. Dado $X \in V(M)$, uma curva integral de X é uma curva suave $\alpha : I \to M$ (onde I é um intervalo contendo 0) tal que $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$. Denotaremos a curva integral de X passando por p por $\alpha_p(t)$, e quando não houver risco de confusão denotaremos apenas por $\alpha(t)$. Se o intervalo I for maximal, então a curva integral α_p é única. Nesse caso, diremos que α_p é a curva integral (maximal) de X passando por p. Denotaremos o intervalo maxival por I_p^X, ou apenas por I_p. Seja $\mathcal{D}(X)$ o conjunto de todos pontos $(t, p) \in \mathbb{R} \times M$ tais que $t \in I_p$. Definimos então a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi^X \quad : \quad & \mathcal{D}(X) \longrightarrow M \\ & (t, p) \longmapsto \alpha_p(t). \end{aligned}$$

Fixado t, temos o difeomorfismo local $\varphi_t^X(p) = \varphi^X(t, p)$.

Um *pseudogrupo* G de difeomorfismos locais é uma coleção de difeomorfismos locais em M que satisfaz as seguintes propriedades

i) Se $\gamma \in G$, então $\gamma^{-1} \in G$;

ii) Se $\gamma : U \to V, \tilde{\gamma} : \tilde{U} \to \tilde{V} \in G$ e $V \subset \tilde{U}$, então $\tilde{\gamma} \circ \gamma : \gamma^{-1}(\tilde{U}) \to V \in G$;

iii) Se $\gamma : U \to V \in G$, então $\gamma|_{\tilde{U}} \in G$, para qualquer aberto $\tilde{U} \subset U$;

iv) Seja $\gamma : U \to V$ um difeomorfismo local em M. Se para cada $p \in U$ existe $\gamma_p : U_p \to V_p \in G$ tal que $\gamma|_{U_p} = \gamma_p$, onde $U_p \subset U$ é uma aberto, então $\gamma \in G$.

Seja A uma coleção de difeomorfismos locais em M que contém a identidade. Obtemos um pseudogrupo, chamado de pseudogrupo gerado por A, tomando a união de A com os inversos, as composições, restrinções a abertos e uniões dos elementos de A. Dado $X \in V(M)$ campo de vetores suave, o pseudogrupo gerado pelo conjunto dos fluxos de X será denotado por G_X. Se D é um subconjunto de $V(M)$, então existe um menor pseudogrupo de difeomorfismos locais que contém $\bigcup_{X \in D} G_X$, o qual será chamado de *pseudogrupo de difeomorfismo local gerado por* D, e denotado por G_D. Observe que os elementos de G_D são da forma

$$\varphi_{t_1}^{X_1} \circ \varphi_{t_2}^{X_2} \circ ... \circ \varphi_{t_n}^{X_n},$$

onde $n \in N$, $\varphi^{X_i} \in G_{X_i}$, com $X_i \in D$ e $t_i \in I^{X_i}$ para qualquer $i \in \{1, ..., n\}$ tal que a composição acima faça sentido.

Dizemos que $D \subset V(M)$ é *definido em todo lugar* (ou *definido em toda parte*) quando a união de todos os domínios dos campos de vetores pertencentes a D cobrem M. Analogamente, um pseudogrupo de difeomorfismos locais é definido em toda parte quando a união dos domínios de seus elementos cobrem M.

Seja G um pseudogrupo de difeomorfismo local definido em toda parte. Note que G induz uma relação de equivalência: dois elementos p_1 e $p_2 \in M$ são G-equivalentes quando existir $g \in G$ tal que $g(p_1) = p_2$. As classes de equivalência dessa relação são chamadas de *G-órbitas*.

Se $D \in V(M)$ é um subconjunto de campos de vetores definido em toda parte, então existe uma distribuição Δ_D gerada por D, isto é, $\Delta_D(p)$ é um subespaço de T_pM gerado por $\{X(p); X \in D\}$ para qualquer $p \in M$. Dado G um pseudogrupo de difeomorfismos locais, uma distribuição Δ é dita *G-invariante* quando $dg(\Delta(p))$ está contido em $\Delta(g(p))$ para qualquer $g \in G$ e $p \in M$. Observe que a dimensão de $\Delta(p)$ é constante ao longo de qualquer G-órbita.

Lema 3.2.1. Para toda distribuição Δ e todo grupo de difeomorfismo local G, existe uma menor distribuição G-invariante Δ^G tal que $\Delta \subset \Delta^G$.

Note que o espaço $\Delta^G(p)$ é gerado pelo conjunto de vetores $v \in T_pM$ tais que

a) $v \in \Delta(p)$ ou;

b) $v = dg(w)$, onde $g \in G$, $p = g(p')$ para algum $p' \in M$ e $w \in \Delta(p')$.

Assim se Δ é gerado por $D \subset V(M)$, então Δ^G é gerada pela união de D com o conjunto dos campos de vetores X da forma $X = dgY$, onde $g \in G$ e $Y \in D$.

Sejam D um subconjunto de $V(M)$ definido em toda parte e G_D o pseudogrupo de difeomorfismos locais gerado por D. Pelo lema, anterior existe uma menor distribuição G_D-invariante contendo Δ_D a distribuição gerada por D, a qual denotaremos por P_D. É possível mostrar que P_D é suave.

Uma *variedade integral* de uma distribuição Δ é uma subveriedade S de M tal que o espaço tangente a S em p é igual a $\Delta(p)$. Se Δ é uma distribuição suave, então S é uma variedade integral maximal de Δ quando for uma varidade integral conexa de Δ e, além disso, se existir outra variedade integral conexa S' que intersecta S, então S' é uma subvariedade aberta de S.

Teorema 3.2.1 (**Sussmann**). Sejam D subconjunto de campos de vetores de $V(M)$ definido em toda parte e P_D a menor distribuição G_D-invariante contendo Δ_D. Então

a) P_D é uma distribuição involutiva. Assim, para qualquer $p \in M$, existe uma variedade integral maximal de P_D passando por p.

b) A folheação associada a distribuição P_D é uma folheação singular.

c) $P_D = \Delta_D$ se, somente se, Δ_D é G_D-invariante.

Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação Riemanniana (singular) em M e P uma placa em uma folha L. Agora construiremos a folhação dual a $\mathcal{F}$. Seja Y um campo de vetores suave no fibrado normal de P com suporte compacto tal que $d\pi Y = 0$, onde $\pi : \nu(P) \to P$ é a projeção canônica. Defina o seguinte campo de vetores suave

$$X = d(exp^{\perp}) \circ Y \circ (exp^{\perp})^{-1}, \tag{3.1}$$

definido em U_X uma vizinhança tubular de P. Note que X é tangente aos slices. Seja D o conjunto de campos de vetores X construido pelo processo acima para qualquer placa de qualquer folha de $\mathcal{F}$. Note que D é definido em toda parte. Pelo Teorema de Sussmann 3.2.1, existe uma folheação induzida por P_D, a menor distribuição G_D-invariante contendo Δ_D. Denotaremos tal folheação por $\mathcal{F}^{\#}$.

Definição 3.2.1 (**Folheação Dual**). A folheação $\mathcal{F}^{\#}$ construída acima é chamada de *folheação dual* a $\mathcal{F}$ em M. Uma folha da folheação dual é chamada de folha dual.

No que se segue, nesta seção, demonstraremos que a folheação dual coincide com a folheação $\{L_p^{\#}; p \in M\}$.

Lema 3.2.2. Seja $\alpha(.) = \varphi^X(., p)$ curva integral de X passando por p. Então, para quaisquer $t_1, t_2 \in I_p^X$, existe uma geodésica horizontal quebrada ligando $\alpha(t_1)$ a $\alpha(t_2)$.

Demonstração. Suponha inicialmente que $\alpha(t_1)$ e $\alpha(t_2)$ estejam contidos na mesma vizinhança tubular de uma placa P. Como X é tangente aos slices e $X \circ \alpha = \alpha'$, temos que α está contido em um slice, digamos $S = exp_q(\nu(P))$, com $q \in P$. Sejam $\gamma_1(t) = exp_q(tV_1)$ e $\gamma_2(t) = exp_q(tV_2)$, tais que $V_1, V_2 \in \nu_q(P)$ e $\gamma_i(1) = \alpha(t_i)$, para $i = 1, 2$. Logo concatenando γ_1 e γ_2, obtem-se uma geodésica horizontal quebrada ligando $\alpha(t_1)$ a $\alpha(t_2)$.

Agora suponha que $\alpha(t_1)$ e $\alpha(t_2)$ estão, respectivamente, nas vizinhanças tubulares U_1 da placa P_1 e U_2 da placa P_2, tais que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Seja $x \in U_1 \cap U_2$. Pelo resultado anterior, existem geodésicas horizontais quebradas γ_1 ligando x a $\alpha(t_1)$ e γ_2 ligando x a $\alpha(t_2)$; logo existe uma geodésica horizontal quebrada ligando $\alpha(t_1)$ a $\alpha(t_2)$.

Como $[a, b]$ é compacto, existe um número finito de vizinhanças tubulares de placas que cobrem $\alpha([a, b])$ e portanto segue o resultado. □

Proposição 3.2.1. A folha dual passando por $p \in M$ é igual a $L_p^{\#}$.

Demonstração. Seja $q \in M$ pertencente a folha dual em M passando por p, isto é, q está na G_D-órbita de p. Logo $q = \varphi_{t_1}^1 \circ ... \circ \varphi_{t_n}^n(p)$, onde φ^i é curva integral máximal de algum $X_i \in D$ e $t_i \in I_{X_i}$, para qualquer $i \in \{1, ..., n\}$. Usando a Lema 3.2.2, segue que $q \in L_p^{\#}$.

Agora, suponha que p e q são ligados por $c : [0, 1] \to M$ uma geodésica horizontal quebrada. Considere uma partição $\{0 = t_1 < ... < t_k = 1\}$ suficientemente pequena do intervalo $[0, 1]$ tal que $c_i = c|_{[t_{i-1}, t_i]}$ seja uma geodésica que esteja contida numa vizinhança tubular de uma placa $P = P_{c_i(t_0)}$, contida numa folha $L_{c_i(t_0)}$ (com $t_0 \in [t_{i-1}, t_i]$). Como c_i é geodésica e a folheação $\mathcal{F}$ é Riemanniana então o campo c_i' ao longo da curva c_i está contido no slice $S = exp_{c_i(t_0)}\nu(L)$. Logo existe um campo X definido na vizinhança tubular da placa P que estende o campo c_i'. Assim X pertence ao conjunto $D(M)$, construído acima, e portanto p e q pertencem a mesma G_D-óbita.

□

3.3 Prova do Teorema de Dualização de Wilking

Nessa seção, demonstraremos o Teorema 3.1.3, usado na demonstração do Teorema de Dualização de Wilking 3.1.1.

Suponha que a folha dual $L^{\#}$ tenha dimensão estritamente menor do que a dimensão de M. Seja $c : I \to L^{\#}$ uma geodésica horizontal quebrada contida em $L^{\#}$. Considere $u = \{u_1, ..., u_k\}$ base ortonormal de $T_{c(0)}L$. Pela suposição acerca das dimensões de M e $L^{\#}$, temos que existe pelo menos um $u_i \in u$ pertencente a $T_{c(0)}L^{\#} \cap T_{c(0)}L$. Sem perda de generalidade suponha que $u_l, ..., u_k \in T_{c(0)}L^{\#}$. Complete a base u para obter uma base ortonormal de $c'^{\perp}(0)$, $u' = \{u_1, ..., u_{n+k-1}\}$.

Lema 3.3.1. Dada base ortonormal $u' = \{u_i\}$ de $c'^{\perp}$, existem campos de Jacobi projetáveis $J_1, ..., J_k, J_{k+1}, ..., J_{k+n-1}$ ao longo de c tais que

1. $J_i(0) = u_i, \forall i \in 1, ..., k$;

2. $J_i(t) \in T_{c(t)}L^{\#}$, $\forall i \in l, ..., k$ e $t \in \mathbb{R}$;

3. J_i é tipo holonomia, $\forall i < l$; e

4. $J'_{k+i}(0) = u_{k+i}$, e $J_{k+i}(0) = 0, \forall i \in 1, ..., n-1$.

Demonstração. Fixado $i \in \{l, ...k\}$, considere $c_i \subset L^{\#}_{c(0)}$ uma curva com $c'_i(0) = u_i$. Próximo de $c(0)$ temos a distribuição $\mathcal{H}_{c(t)} \subset T_{c(t)}L^{\#}$, que é regular. Logo podemos tomar uma variação por geodésicas horizontais de c, obtendo assim o campo de jacobi J_i que satisfaz os itens primeiro e segundo. E pela proposição 1.3.8, J_i é projetável.

Dado $r \in \{1, ..., l-1\}$ queremos um campo de Jacobi tipo holonomia tal que $J(0) = u_r$. Tal campo é dado pela solução do problema de valor inicial

$$J'_r = -A^*_{c'}J_r - S_{c'}J_r \text{ e } J_r(0) = u_r.$$

Este campo de Jacobi é projetável, pois é tipo holonomia.

Para $s \in \{k+1, ..., k+n-1\}$, existe um campo de Jacobi J_s tal que $J'_s(0) = u_s$ e $J_s(0) = 0$, o qual é solução do problema de valor inicial

$$J''_s + K(c', J_s)c' = 0,\ J'_s(0) = u_s \text{ e } J_s(0) = 0.$$

Como J'_s é horizontal e $J_s(0) = 0$, então existe uma variação por geodésicas horizontais que tem J_s como seu campo variacional. Portanto também pela proposição 1.3.8, J_s é projetável.

□

Observe que $span\{J'_{k+1}(0), ..., J'_{k+n-1}(0)\} = \mathcal{H}_{c(0)} \cap c'(0)^{\perp}$. Defina o seguinte subespaço de campos de Jacobi ortogonais a geodésica c

$$\tilde{W} = span\{J_1, ..., J_{n+k-1}\},$$

que coincidirá com o espaço W dado no capítulo anterior, como veremos no lema a seguir.

Lema 3.3.2. O subespaço $\tilde{W} = span\{J_1, ..., J_{n+k-1}\}$ coincide com W, o subespaço dos campos de Jacobi ortogonais a c' projetáveis que são verticais em $t = 0$.

Demonstração. Pelo Lema 3.3.1, temos que $\tilde{W} \subset W$. Por outro lado, $\{J_1, ..., J_{n+k-1}\}$ é um conjunto linearmente independente de campo de Jacobi, pois

$$\{(J_1(0), J'_1(0)), ..., (J_k(0), J'_k(0)), (0, J'_{k+1}(0)), ..., (0, J'_{k+n-1}(0))\}$$

é um conjunto linearmente linearmente independente. E portanto $\tilde{W} = W$.

□

Como vimos na Seção 2.7, W é um auto-espaço $(n+k-1)$-dimensional que possui um operador de Riccati auto-adjunto bem definido, e portanto, pelo Teorema de Wilking 2.1.2, temos a seguinte decomposição de W.

$$W = span\{J \in W; J(t) = 0, \text{ para algum } t \in \mathbb{R}\} \oplus \{J \in W; J \text{ é paralelo}\} = V \oplus H. \quad (3.2)$$

O lema a seguir implica que $H \subset \{J \in W; J \text{ é paralelo}\}$, terminando assim a demonstração.

Lema 3.3.3. $V := span\{J \in W; J(t) = 0, \text{ para algum } t \in \mathbb{R}\} \subset span\{J_i \in W; i \geq l\}$.

Demonstração. Seja $J \in W$ tal que $J(t_0) = 0$ para algum t_0. A prova se dará da seguinte forma: mostraremos primeiro que $J'(t_0)$ pertence ao fibrado normal a L em $c(t_0)$ e, por fim, constataremos que esse fato implica que $J(t)$ pertence a $TL^{\#}_{c(t)}$ para qualquer t, terminando assim a demonstração.

Como $J \in W$, J é o campo variacional de uma variação por geodésicas horizontais $c_s(t)$ de c. Seja $\{X_i\}_{i\in I}$ família de campos de vetores tal que $span\{X_i(c(t_0))\} = T_{c(t_0)}L_{c(t_0)}$. Logo, como $\frac{d}{ds}|_{s=0}c_s(t_0) = J(t_0) = 0$ e $c'_s(t_0)$ é perpendicular a $X_i(c(t_0))$ para qualquer $i \in I$ temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0} g(X_i(c_s(t_0)), c'_s(t_0)) = g(\nabla_{J(t_0)} X_i, c'_s(t_0)) + g(X_i(c_0(t_0)), \frac{\nabla}{\partial s}|_{s=0} c'_s(t_0)) \\ &= g(X_i(c(t_o)), \frac{\nabla}{\partial t}|_{t=t_0} \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0} c_s(t)) = g(X_i(c(t_0)), J'(t_0)). \end{aligned}$$

para qualquer $i \in I$. Assim $J'(t_0) \in \nu(L_{c(t_0)})$ e então o campo J é campo variacional de uma variação por geodésicas horizontais $f(t,s) = c_s(t)$ de c, que saem do mesmo ponto $c(t_0)$. Logo $f(t,s)$ pertence ao slice de $L_{c(0)}$. Pelo Lema 3.2.2, $f(t,s)$ pertence a folha dual $L^{\#}_{c(t_0)}$. E portanto $J(t) \in TL^{\#}_{c(t)}$, para qualquer t.

□

3.4 Aplicações

Apresentaremos duas aplicações do Teorema de Dualização. A primeira das aplicações, que será utilizada no próximo capítulo para demonstrar a suavidade da projeção métrica, fala que campos básicos globalmente definidos quando restritos a uma geodésica horizontal quebrada coincidem com o transporte paralelo. A outra aplicação é uma observação sobre os grupos de isotropia de um ação isométrica com órbitas do mesmo tipo. Tal observação foi feita por Cláudio Gorodski e Ziller em um seminário apresentado por Ziller.

Corolário 3.4.1. Sejam M uma variedade completa com curvatura seccional não negativa e $\mathcal{F}$ uma folheação Riemanniana. Seja $L^{\#}_p$ uma folha dual *principal*, isto é, possui a holonomia trivial. Se X é um campo básico normal globalmente definido ao longo de $L^{\#}_p$, então o campo X restrito a uma geodésica horizontal quebrada relativa a folhação $\mathcal{F}$ é paralelo. Em particular, o campo X tem tamanho constante.

Demonstração. Seja c geodésica horizontal quebrada. Como a curvatura seccional de M é não-negativa, pelo Teorema de Dualização 3.1.3, existe um campo de Jacobi paralelo J ao longo de c tal que $X(c(0)) = J(0)$. Pela demonstração do Teorema de dualização tal campo

de Jacobi J é de fato um campo de holonomia. Assim sendo, ele será um campo básico. Segue então da unicidade de campos básicos e do fato que $X(c(0)) = J(0)$ que os campos X e J coincidem ao longo de c.

□

Corolário 3.4.2. Seja M uma variedade Riemanniana completa com curvaturtas seccionais positiva. Seja $\mu : G \times M \to M$ uma ação a esquerda de G em M, onde G é um subgrupo fechado do grupo das isometrias de M, que é uma variedade Riemanniana M. Se todas as órbitas são do mesmo tipo, então

$$G_p = G_q,$$

para quaisquer $p, q \in M$.

Demonstração. Dados $p, q \in M$, pelo Teorema 3.1.1, existe uma geodésica horizontal quebrada $c : [0, a] \to M$ ligando p a q. Logo concluiremos a demonstração, se provarmos que os grupos de isotropia de todos pontos em uma geodésica horizontal são iguais.

Seja $c : [0, 1] \to M$ uma geodésica horizontal. Pela Proposição 1.2.1, a ação μ é uma ação própria. Além disso, todas as órbitas são princiais, pois todas as órbitas são do mesmo tipo. Logo, pela Proposição 1.2.2, dado $t_0 \in [0, 1]$ temos que

$$G_{c(t_0)} = G_{c(t)},$$

para qualquer $c(t) \in S_{c(t_0)}$. Como c é compacto, então existem $t_1, ..., t_n \in [0, 1]$ tais que

$$c \subset S_{c(0)} \cup S_{c(t_1)} \cup ... \cup S_{c(t_n)}.$$

E como c é conexo, segue que

$$G_{c(0)} = G_{c(t)},$$

para qualquer $t \in [0, 1]$. □

Capítulo 4

Suavidade da Projeção Métrica na Alma

4.1 Introdução

Seja M uma variedade Riemanniana completa, não-compacta com curvatura seccional não-negativa. Existe uma subvariedade compacta, totalmente conexa e sem bordo S, chamada de *Alma*, tal que seu fibrado normal é difeomorfo a M. Existe uma função distância não-crescente $\pi : M \to S$, que associa a cada $p \in M$ o ponto $\pi(p)$ pertencente a S que está mais próximo de p. O teorema de Perelman implica que tal função é uma submersão Riemanniana de classe C^1 e que é unicamente determinada, portanto coincide com a retração de Sharafudtinov. Em [11], Guijarro provou que π é de classe C^2. Usando o conceito de folheação dual a uma folheação Riemanniana singular e o Teorema de Dualização, Wilking mostrou em [6] o seguinte resultado:

Teorema 4.1.1. A projeção métrica na alma é uma submersão Riemanniana suave.

Na Seção 4.2, apresentaremos uma ideia da construção da alma, que pode ser encontrada em [7] e [8]. Na Seção 4.4, discutiremos a sua suavidade da projeção métrica seguindo a abordagem dada em [7]. Para isto é precisamos do Teorema de Perelman e algumas consequências, que serão apresentados na Seção 4.3.

4.2 Ideia da Construção da Alma

Seja M uma variedade Riemanniana completa não-compacta com curvaturas seccionais não-negativas. Um subconjunto S de M é *totalmente convexo* quando qualquer geodésica ligando dois pontos em S está inteiramente contida em S.

Definição 4.2.1 (Alma). Uma *alma* de M é uma subvariedade Riemanniana compacta, totalmente convexa e sem bordo.

Teorema 4.2.1 (Cheeger-Gromoll-Meyers). Seja M é uma variedade Riemanniana completa não-compacta. Se a curvatura seccional de M é não-negativas, então

a. M admite uma alma S.

b. M é difeomorfa ao fibrado normal da alma.

c. Se as curvaturas seccionais de M são positivas, então S é um ponto.

Vamos expor uma rápida ideia da construção de uma alma para M. A grosso modo, tal construção seguirá da seguinte forma: primeiro encontraremos um subconjunto C totalmente convexo, possivelmente com bordo, onde seu interior será uma subvariedade de M totalmente convexa e o seu bordo, caso exista, admite uma estrutura de cone tangencial. Tomando interseções de subconjunto construídos de forma análoga ao subconjunto C, definiremos outro subconjunto C_0 compacto e totalmente convexo, que eventualmente tenha bordo. Mostra-se-á que a função distância ao bordo de C_0 é concava, logo seus níveis serão totalmente convexo com dimensão estritamente decrescente. Usando este fato, construiremos uma sequência decrescente de compactos encaixados totalmente convexos, onde a dimensão decairá. Desta forma, alguns destes subconjuntos não possuirá bordo, portando tais subconjunto serão almas de M. Vamos dar agora um pouco mais de detalhes.

Um *raio* em uma variedade Riemanniana não-compacta M é uma geodésica $c : [0, \infty] \to M$ tal que $d(c(0), c(t)) = t$. Se M é completa, então para todo $p \in M$ existe um raio partindo de p. Fixe $p \in M$, e dado um raio c partindo de p considere o subconjunto

$$B_c = \cup_{t>0} B_t(c(t)).$$

Pela desigualdade triangular, $B_{t_1}(c(t_1)) \subset B_{t_2}(c(t_2))$ quando $t_1 \leq t_2$. Usando a hipótese sobre as curvaturas seccionais, teorema de Toponogov e a lei dos cossenos, é possível provar o seguinte teorema.

Lema 4.2.1. $M \setminus B_c$ é totalmente convexo.

Exemplo 13. Seja $M = \mathbb{R}^2$. Dado $x = (x_1, x_2)$, $c : [0, \infty] \to M$ dado por $c(t) = x + (p - x)t$, com $p \neq x$, é um raio partindo de x na direção p

Observe que em geral $M \setminus B_c$ não é compacto. Então defina o seguinte subconjunto:

$$C_0 = \cap\{M \setminus B_c; c \text{ é um raio partindo de p}\}.$$

É possível verificar que é compacto e totalmente convexo. Se C_0 não possui bordo, então encontramos uma alma para M. Mas eventualmente C_0 pode possuir bordo. Então construiremos outros candidatos a alma. Para tanto precisaremos recordar dois resultados sobre funções concavas e conjuntos totalmente convexos

Lema 4.2.2. Se $f : M \to \mathbb{R}$ é concava, então qualquer conjunto

$$A = \{x \in M; f(x) \geq a\}$$

é totalmente convexo.

Lema 4.2.3. Se $A \subset M$ é totalmente convexo, então A possui interior não vazio ($int\ A \neq \emptyset$), que é uma subvariedade de M totalmente convexa, e ∂A o bordo de A possui a seguinte propriedade: para qualquer $x \in \partial A$ existe $v \in T_xM$ tal que se $\gamma : [0, a] \to A$ é uma geodésica com $\gamma(0) = x$ e $\gamma(a) \in intA$, então $\angle(v, \gamma'(0)) < \frac{\pi}{2}$.

Pelo Lema 4.2.3, $int\ C_0$ é uma subvariedade de M totalmente convexa. E como ∂C_0 é compacto a função d distância ao bordo:

$$\begin{aligned} d \ : \ & int\ C_0 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & q \longmapsto d(q, \partial C_0) \end{aligned}$$

está bem definida. Usando estimativas da função distância, o teorema de Rauch-Berger e a estrutura de cone tangente em ∂C_0 dado pelo Lema 4.2.3, é possível provar que a função d é concava. Logo para todo $\alpha > 0$ o subconjunto definido por

$$C_0^\alpha = \{q \in C_0; d(q) = d(q, \partial C_0) \geq \alpha\}.$$

é totalmente convexo, pelo Lema 4.2.2. Defina

$$C_1 = \cap\{C_0^\alpha; C_0^\alpha \neq \emptyset\},$$

que também é compacto e totalmente convexo e, além disto, $dim\ C_1 < dim\ C_0$. Procedendo indutivamente, construímos uma sequência estritamente decrescente de compactos encaixados totalmente convexos

$$... \subset C_n \subset C_{n-1} \subset ... \subset C_0.$$

tais que $dimC_{n-1} < dimC_n$. Como a dimensão de C_0 é finita, existe n_0 tal que C_{n_0} é um ponto. Portanto para algum $n \in \{0, ..., n_0\}$, C_n é uma alma de M.

4.3 Teorema de Perelman

Nesta seção, apresentaremos o enunciado do Teorema de Perelman e verificaremos que tal teorema implica que a projeção métrica na alma é uma submersão Riemannian.

Sharafudtionov mostrou que existe uma função distância não-crescente $\pi : M \to S$. No teorema que se segue π coincide com a projeção *métrica na alma*.

Teorema 4.3.1 (Perelman). Se $\pi : M \to S$ é uma função distância não-crescente, então $\pi \circ \exp = \pi_\nu$, onde $\pi_\nu : \nu(S) \to S$ é a projeção canônica. Além disto, se $c : [a, b] \to S$ é uma geodésica em S e X um campo paralelo ao longo de c com $X(0) \in \nu(S)$, então a superfície $V : [a, b] \times [0, \infty) \to M$, dada por $V(t, s) = exptX(s)$, é flat e totalmente geodésica.

Corolário 4.3.1. A projeção métrica $\pi : M \to S$ é uma submersão métrica.

Demonstração. Sejam $c : [0,1] \to S$ uma geodésica minimizante. Denote por F_0 e F_1 as fibras de π passando por $c(0)$ e $c(1)$, respectivamente. Uma vez que π não aumenta comprimento,

$$L(c) \leq L(\beta), \tag{4.1}$$

para qualquer curva β ligando F_0 a F_1. Em particular, para curvas $c_t(s) = exp\ sP^c_{1,0}u$, levantamento horizontal de c para todos $t \in \mathbb{R}$ e $u \in \nu(S)$. Pelo Teorema de Perelman, a superfície $V(t,s)$ é flat e totalmente geodésica, logo

$$L(c) = L(c_t), \tag{4.2}$$

para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Pela equações (4.1) e (4.2), segue que $L(c) = L(c_t) \leq L(\beta)$. Portanto $d(F_0, F_1) = L(c)$. □

Observe que a o Teorema de Perelman implica que $\gamma_s(t) = V(t,s)$ é uma geodésica contida na fibra $\pi^{-1}(c(s))$. Como vimos na prova do Corolário 4.3.1, a curva $c_t(s) = V(t,s)$ é uma geodésica horizontal, para todos $t \in \mathbb{R}, s \in [0,\infty)$. E mais, todas as curva horizontais partindo de um ponto $p \in M$ são obtidas exponenciando o transporte paralelo de elementos em $\nu(S)_{\pi(p)}$ ao longo de curvas em S que partem de $\pi(p)$. Por outro lado, a unicidade de levantamento horizontal implica que

$$h_c \circ exp\ (v) = exp \circ P^c\ (v), \tag{4.3}$$

para qualquer $v \in \nu(S)$.

4.4 Demonstração da Suavidade da Projeção Métrica na Alma

Seja $\pi : M \to S$ a projeção métrica de M na alma S, onde M é uma variedade Riemanniana completa não-compacta com curvatura seccional não-negativa. Provaremos nesta seção que π é suave. Verificaremos primeiro a suavidade de π em alguma vizinhaça da alma; depois que π é suave em $L^{\#}_p$, folha dual a folheação dada pela projeção métrica e que passa por $p \in M$; e por fim mostraremos que π é suave em uma vizinhança de p.

Como S é compacta, existe vizinhança $B_r(S)$ tal que a aplicação exp_ν é um difeomorfismo de $B_r(0) \subset \nu(S)$ em $B_r(S)$. Pelo Teorema de Perelman 4.3.1,

$$\pi = \pi_\nu \circ exp_\nu^{-1}$$

em $B_r(S)$. Portanto $\pi|_{B_r(S)}$ é uma submersão Riemanniana suave. Observe que $B_r(S)$ é folheada por folhas duais, uma vez que as folhas duais permanecem a uma distância constante

da alma.

Dado $p \in M$, sejam $u \in \nu(S)$ com $||u|| = 1$ e $R \in \mathbb{R}$ tais que $exp\ Ru = p$ e considere a geodésica $\gamma(t) = exp\ (tu)$. Fixe alguma folha dual $L^{\#}_{\gamma(\epsilon)}$ contida em $B_r(S)$, para algum $\epsilon \in (0, R)$. Suponha que $L^{\#}_{\gamma(\epsilon)}$ é uma folha principal. Logo existe X, uma seção básica de $L^{\#}_{\gamma}(\epsilon)$ tal que $X(\gamma(\epsilon)) = (R - \epsilon)\gamma'(\epsilon)$. Considere a aplicação *end ponit* definida abaixo:

$$\begin{aligned} \eta_X \ : \ & L^{\#}_{p_1} \longrightarrow M \\ & q_1 \longmapsto exp_\nu X(q_1). \end{aligned}$$

Segue do Teorema de Perelman e do Corolário 3.4.1 do Teorema de Dualização que $\eta_X : L^{\#}_{\gamma(\epsilon)} \to L^{\#}_p$ é sobrejetora.

Lema 4.4.1. A aplicação $\eta_X : L^{\#}_{\gamma(\epsilon)} \longrightarrow L^{\#}_p$ é uma submersão.

Demonstração. Suponha que $k = dim\ Ker\ d(\eta_X)_{\gamma(\epsilon)} > 0$. Dado $x \in L^{\#}_{\epsilon}$, mostraremos que $dim\ Ker\ d(\eta_X)_x = k$. Observe que $Ker\ d(\eta_X)_{\gamma(\epsilon)}$ está contido em $TL^{\#}_{\gamma(\epsilon)} \cap T\pi^{-1}(\pi(p))$. Logo existem k campos de Jacobi $\{J_1, ..., J_k\}$ ao longo de γ tais que $\{J_1(\epsilon), ..., J_i(\epsilon)\}$ é uma base de $Ker\ d(\eta_X)_{\gamma(\epsilon)}$ e $J_i(0) = J_i(R) = 0$, para quaisquer $i \in \{1, ..., k\}$.

Seja V^0_i a variação por geodésicas radiais que parte de $\pi(p)$ e tem J_i como campo variacional. Sejam $c : [0, b] \to S$ geodésica quebrada ligando $\pi(p)$ a $\pi(x)$ e h^r a holonomia associada a curva $c|_{[0,r]}$, que é um difeomorfismo de classe C^1, pois π é de classe C^2. Para cada $r \in [0, b]$, temos, pelo Teorema de Perelman, a seguinte variação por geodésicas radiais que partem de $c(r)$:

$$V^r_i = h^r V^0_i.$$

Se J^r_i denota o campo de Jacobi ao longo da geodésica $\gamma^r = h^r\gamma$ que é campo variacional de V^r_i, então

$$J^r_i = dh^r J^0_i. \tag{4.4}$$

Observando que $\eta_X \circ V^r(\epsilon, s) = V^r(R, s)$, pela régra da cadeia, temos que

$$d(\eta_X)_x J^r_i(\epsilon) = J^r_i(R). \tag{4.5}$$

Portanto existem k campos de Jacobi $\{J^b_1, ..., J^b_k\}$ ao longo da geodésica $\gamma^b(t) = h^b(\gamma(t))$ tais que $\{J^b_1(\epsilon), ..., J^b_k(\epsilon)\}$ é linearmente independentes. E mais, pelas equações (4.4) e (4.5)

$$d(\eta_X)_x J^b_i(\epsilon) = J^b_i(R) = dh^b J^0_i(R) = dh^b(d(\eta_X)_p J^0_i(\epsilon)) = 0.$$

Portanto a dimensão de $Ker\ d(\eta_X)_x$ também é igual a k e como η_x é sobrejetora , a aplicação η_x é uma submersão.

□

Pelo Lema 4.4.1, η_X é uma submersão suave. Logo existe uma aplicação suave (seção transversal) $s : U \subset L_p^{\#} \to L_{\gamma(\epsilon)}^{\#}$, onde U é uma vizinhança de p, tal que

$$\eta_X \circ s = Id \tag{4.6}$$

Pelo Teorema de Perelman,

$$\pi|_{L_{\gamma(\epsilon)}^{\#}} = \pi|_{L_p^{\#}} \circ \eta_X \tag{4.7}$$

E portanto das equações (4.6) e (4.7), $\pi|_{L_p^{\#}} = \pi|_{L_{\gamma(\epsilon)}^{\#}} \circ s$ é suave.

Agora, usando a suavidade de $\pi|_{L_p^{\#}}$, provaremos que π é suave em uma vizinhança de p. Para isto precisaremos do seguinte lema.

Lema 4.4.2. Existe uma métrica $\tilde{g}$ em uma vizinhança de p tal que

$$\pi \circ e\tilde{x}p(v) = \pi|_{L_p^{\#}} \circ \pi^{L_p^{\#}}(v),$$

$v \in \nu(L_p^{\#})$, onde $\pi^{L_p^{\#}} : \nu(L_p^{\#}) \to L_p^{\#}$ é a projeção canônica e $\tilde{\exp}$ é a aplicação exp referente a métrica $\tilde{g}$.

Considere uma vizinhaça B de p tal que a aplicação exponencial é um difeomorfismo. Portanto, pelo lema enunciado acima, $\pi = \pi|_{L_p^{\#}} \circ \pi^{L_p^{\#}} \circ e\tilde{x}p^{-1}$ é suave.

Referências Bibliográficas

[1] do Carmo, M. P., & Riemanniana, G. (2005). IMPA (Projeto Euclides), 3a. ediçao. Rio de Janeiro. 1

[2] Lee, J. M. (1997). Riemannian manifolds: an introduction to curvature (Vol. 176). Springer Verlag. 1

[3] C. Gorodski, *An introduction to Riemannian geometry* 1

[4] M. M. Alexandrino notas de aula na

[5] Alexandrino, M. M., Briquet, R., & Toeben, D. (2013). Progress in the theory of singular Riemannian foliations. Differential Geometry and its Applications, 31(2), 248-267.

[6] Wilking, B. (2007). A duality theorem for Riemannian foliations in nonnegative sectional curvature. Geometric And Functional Analysis, 17(4), 1297-1320. ix, 67

[7] Gromoll, D. & Walschap, G. (2009). Metric foliations and curvature (Vol. 268). Springer. 1, 67

[8] Petersen, P. (2006). Riemannian geometry (Vol. 171). New York: Springer. 1, 67

[9] O'Neill, B. (1966). The fundamental equations of a submersion. The Michigan Mathematical Journal, 13(4), 459-469. 26

[10] Sussmann, H. J. (1973). Orbits of families of vector fields and integrability of distributions. Transactions of the American Mathematical Society, 180, 171-188.

[11] Guijarro, Luis. On the metric structure of open manifolds with nonnegative curvature. Pacific J. Math. 196 (2000), no. 2, 424-444. ix, 67