**Representações Integrais de Soluções
do Problema de Björling
de Tipo Tempo em $\mathbb{R}_\nu^4$**

Luiz Felipe Villar Fushimi

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: **Matemática**
Orientador: **Prof. Dr. Alexandre Lymberopoulos**

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, janeiro de 2019

Representações Integrais de Soluções do Problema de Björling de Tipo Tempo em $\mathbb{R}_\nu^4$

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 21/02/2019. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Alexandre Lymberopoulos (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva - UFABC
- Prof. Dr. Sinuê Dayan Barbero Lodovici - UFABC

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais Julio e Eneida, pelas miríades de dádivas que me concederam, muitas para se listar em papel e tinta finitos. Obrigado por absolutamente tudo.

Agradeço a Marisa Cantarino, pelos bons e maus momentos compartilhados; os primeiros se tornaram mais doces, e os segundos menos amargos. Obrigado por ser meu porto seguro em mares agitados.

Agradeço, em nenhuma ordem particular, a Ana Luiza Tenório, Arthur Cahali, Cauê Ligabui, Cyro Neto, Daniel Fantin, Felipe Sant’Anna, Irena Wieliczka, João Pedro Souza, Marli Cantarino, Matheus Martins, Pedro Brack, Rafael Bordoni, Rodrigo Oliveira, e Samyra Maida, pela amizade e companheirismo ao longo dos anos. Obrigado por serem minha fundação em terras instáveis.

Agradeço a Ivo Terek pela ajuda inestimável com a matemática, o $\text{\LaTeX}$, e a academia como um todo. Obrigado por tudo que você me ensinou “por fora”, e pelo livro.

Agradeço a Alexandre Lymberopoulos pela orientação, paciência, auxílio e apoio conferidos durante o mestrado que este trabalho encerra. Obrigado pela fé, e pelo livro também.

Agradeço a Márcio Fabiano da Silva e a Sinuê Dayan Barbero Lodovici pela minuciosa leitura deste texto e pelas excelentes críticas e revisões que me providenciaram. Obrigado pela ajuda em tornar este trabalho o melhor possível.

Agradeço aos professores, alunos e funcionários do IME-USP, por serem o IME-USP. Obrigado por criarem o ambiente que me permitiu aprender tudo o que sei.

Finalmente, agradeço o CNPq pelo apoio financeiro, sem o qual este trabalho dificilmente existiria.

Resumo

FUSHIMI, L. F. V. **Representações Integrais de Soluções do Problema de Björling de Tipo Tempo em $\mathbb{R}_\nu^4$** . 2019. 50 p. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

Nesta dissertação, estudamos o problema de Björling para superfícies de tipo tempo nos espaços de métrica indefinida $\mathbb{R}_1^4$ e $\mathbb{R}_2^4$. Após apresentar uma versão paracomplexa do teorema de representação de Weierstrass para superfícies mínimas de tipo tempo, utilizamos esse teorema para obter uma fórmula de representação para as soluções desse problema de Björling, e através de extensões paraholomorfas dos dados iniciais do problema mostramos que a solução dada por essa fórmula é localmente única. Em seguida, apresentamos duas possíveis maneiras de se obter simetrias para soluções desse problema de Björling: através de uma versão paracomplexa do princípio de reflexão de Schwarz, e através de reflexões ao longo de k -planos que intersectam ortogonalmente a superfície.

Palavras-chave: números paracomplexos, superfícies mínimas, representação de Weierstrass, problema de Björling

Abstract

FUSHIMI, L. F. V. **Integral Representations for Solutions to Timelike Björling Problems in $\mathbb{R}_\nu^4$.** 2019. 50 p. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

In this dissertation, we study the Björling problem for timelike surfaces in the spaces of indefinite metric $\mathbb{R}_1^4$ and $\mathbb{R}_2^4$. After presenting a split-complex version of the Weierstrass representation theorem for minimal timelike surfaces, we use this theorem to obtain a representation formula for the solutions of this Björling problem, and through split-holomorphic extensions of the problem's initial data we show that the solution given by this formula is locally unique. Following this, we present two possible methods through which symmetries for the solutions of this Björling problem may be obtained: through a split-complex version of the Schwarz reflection principle, and through reflections alongside k -planes that intersect the surface orthogonally.

Keywords: split-complex numbers, minimal surfaces, Weierstrass representation, Björling problem

Sumário

Introdução	1
1 Conceitos preliminares	3
1.1 Números paracomplexos	3
1.2 O espaço $\mathbb{R}_\nu^n$	8
1.3 Superfícies de tipo tempo em $\mathbb{R}_\nu^n$	13
2 O problema de Björling para superfícies de tipo tempo em $\mathbb{R}_\nu^4$	19
3 Simetrias das soluções do problema de Björling	27
3.1 Simetrias via reflexão de Schwarz paracomplexa	27
3.2 Simetrias via reflexão ao longo de k -planos	33
A Existência de coordenadas isotérmicas para superfícies de tipo tempo	41
B O problema de Björling para superfícies de tipo espaço em $\mathbb{R}_\nu^4$	45
Referências Bibliográficas	49

Introdução

O problema de Björling foi enunciado em 1844 por Emanuel Björling [7], e consiste da seguinte pergunta: dados uma curva suave em $\mathbb{R}^3$ e um campo vetorial suave definido ao longo dessa curva e normal a ela, existem superfícies mínimas (isto é, de curvatura média nula) que contém essa curva e têm como vetor normal esse campo? Caso sim, quantas dessas superfícies existem para um dado par de curva e campo normal?

A resposta para o problema de Björling clássico foi apresentada pelo próprio Björling na mesma obra em que o problema foi formulado, e é *sim*; no entanto, a solução para o problema clássico que mais se destacou com o passar dos anos foi a publicada em 1890 por Hermann Schwarz [1], pois ela nos permite afirmar que não só existe uma *construção explícita* de uma superfície a partir da curva e do campo normal fornecidos que satisfaz as condições do problema, mas também é possível mostrar que essa construção é a *única* superfície mínima que é solução do problema para esse par de curva e campo normal.

Ao longo dos anos, o problema de Björling foi formulado e estudado em vários ambientes distintos, entre os quais $\mathbb{R}^n$ [14], $\mathbb{L}^3 = \mathbb{R}_1^3$ [10], $\mathbb{L}^4 = \mathbb{R}_1^4$ [9, 15], e $\mathbb{R}_2^4$ [8], e inclusive surgiram variantes do problema ambientadas em grupos de Lie lorentzianos 3-dimensionais [16] ou que procuram por superfícies de curvatura média constante não nula em $\mathbb{R}^3$ [17]. A maioria destes trabalhos se valeu do mesmo método básico para encontrar soluções do problema de Björling, baseando-se no método de Schwarz: uma fórmula de representação de Weierstrass para superfícies mínimas é obtida para o ambiente, e a partir dos dados iniciais do problema são construídas funções que satisfazem essa fórmula de representação e portanto dão origem a uma representação integral da superfície desejada.

Neste trabalho, concentramo-nos em estudar o problema de Björling para superfícies de tipo tempo nos ambientes de métricas lorentzianas 4-dimensionais $\mathbb{R}_1^4$ e $\mathbb{R}_2^4$, como abordados em [8] e [9]; temos então a seguinte formulação do problema de Björling para esses ambientes.

Problema de Björling em $\mathbb{R}_v^4$. Sejam $v = 1$ ou $v = 2$, e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Dados uma curva suave $c : I \rightarrow \mathbb{R}_v^4$ e um par de campos vetoriais suaves $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}_v^4$ definidos ao longo dessa curva, normais entre si e normais à curva, existe uma superfície crítica que contém essa curva e tem esses campos como vetores normais ao longo dela? Caso sim, essa superfície é única?

Escolhemos estudar especificamente superfícies tipo tempo nestes ambientes porque para elas a solução do problema de Björling é dada através de uma fórmula de representação de Weierstrass de domínio *paracomplexo*, ao contrário de superfícies em ambientes euclidianos ou superfícies tipo espaço em ambientes lorentzianos, as quais são representadas por fórmulas de representação de Weierstrass de domínios complexos. Isto ocorre pois, como veremos adiante, o conjunto dos números paracomplexos é um representante natural de superfícies de tipo tempo. Além disso, os números paracomplexos nos permitem considerar o par de campos vetoriais que são dados do problema como um único campo vetorial paracomplexo, e posteriormente servirão como uma maneira de estudar as simetrias das superfícies que são soluções do problema.

O primeiro capítulo é dedicado a estabelecer os conceitos e teoremas básicos dos quais precisamos para enunciar formalmente e tratar do problema de Björling em $\mathbb{R}_1^4$ e $\mathbb{R}_2^4$. A sua primeira seção trata de números paracomplexos e funções paraholomorfas (as contrapartes paracomplexas de funções holomorfas); a segunda seção apresenta os espaços $\mathbb{R}_\nu^4$ e os seus produtos vetoriais; e a terceira seção define precisamente superfícies de tipo tempo e apresenta a representação de Weierstrass de superfícies de tipo tempo mínimas.

No segundo capítulo, apresentamos os resultados principais deste trabalho. O problema de Björling para superfícies de tipo tempo é formalmente enunciado para os espaços $\mathbb{R}_\nu^4$ e demonstramos os teoremas que evidenciam a existência e unicidade de sua solução. Além disso, recuperamos a representação integral de superfícies tipo tempo que são soluções do problema de Björling para $\mathbb{L}^3 = \mathbb{R}_1^3$, considerando $\mathbb{R}_1^3$ como um subespaço vetorial de $\mathbb{R}_1^4$.

No terceiro capítulo, apresentamos dois tipos de simetrias que podemos obter para superfícies de tipo tempo que são soluções de um problema de Björling: simetrias ao longo do eixo real do domínio das imersões que representam as superfícies, utilizando uma versão do princípio de reflexão de Schwarz adaptada para o caso paracomplexo, e simetrias ao longo de k -planos de simetria que se intersectam ortogonalmente às superfícies; como veremos adiante, utilizaremos o primeiro tipo de simetria para obter o segundo.

Ao final do trabalho, apresentamos dois apêndices. O primeiro apêndice confirma a existência de coordenadas isotérmicas em imersões de superfícies de tipo tempo; este é um fato importante para o desenvolvimento deste trabalho, e o apresentamos em um apêndice em virtude do comprimento de sua demonstração. O segundo apêndice enuncia, para fins de comparação, os resultados análogos aos apresentados ao longo deste trabalho para superfícies de tipo espaço em $\mathbb{R}_\nu^4$.

Capítulo 1

Conceitos preliminares

1.1 Números paracomplexos

Nesta seção, apresentaremos os números paracomplexos. Como foi mencionado na Introdução, eles servirão como o domínio das funções que utilizaremos adiante para obter as soluções do problema de Björling. As principais referências utilizadas ao longo desta seção são [2] e [12].

Definição 1.1. O conjunto dos números paracomplexos

$$\mathbb{C}' \doteq \{a + jb/a, b \in \mathbb{R}, j^2 = 1, 1j = j1\},$$

munido das operações de soma e produto

$$(a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) \doteq (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2) \text{ e}$$

$$(a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) \doteq (a_1a_2 + b_1b_2) + j(a_1b_2 + a_2b_1),$$

é uma $\mathbb{R}$ -álgebra associativa, comutativa e com unidade (especificamente, $1 \in \mathbb{R}$). O elemento j é denominado a unidade paracomplexa.

Observação. Os números paracomplexos possuem vários outros nomes na literatura existente: números complexos hiperbólicos, números duais, números de Lorentz (neste caso em particular, o conjunto tende a ser representado pelo símbolo $\mathbb{L}$), e em particular na língua inglesa *split-complex numbers*. Esta lista, embora extensa, não é exaustiva.

Como o seu nome sugere, a álgebra dos números paracomplexos possui conceitos semelhantes aos possuídos pelo corpo dos números complexos: dado um número paracomplexo $z = a + jb \in \mathbb{C}'$, podemos considerar sua *parte real* $Re(z) = a$, sua *parte imaginária* $Im(z) = b$ e seu *conjugado* $\bar{z} = a - jb$. No entanto, uma importante diferença entre os números complexos e os paracomplexos é o fato de que existem divisores de zero nos números paracomplexos; diretamente a partir da definição de multiplicação nos paracomplexos, observamos que dados $z, w \in \mathbb{C}'$, com $z = a_1 + jb_1$ e $w = a_2 + jb_2$, a condição $zw = 0$ implica que (desconsiderando os casos triviais $z = 0$ e $w = 0$) $|a_1| = |b_1|$ e $|a_2| = |b_2|$; consequentemente, podemos denotar os divisores de zero em $\mathbb{C}'$ através do subconjunto $D = \{a \pm ja/a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$, e o conjunto dos números invertíveis em $\mathbb{C}'$ por $I = \mathbb{C}' \setminus (D \cup \{0\})$. Além disso, observamos que $\mathbb{C}'$ é isomorfo, como álgebra, a $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ (munida das operações de adição e multiplicação termo-a-termo usuais) via o isomorfismo $\Phi : \mathbb{C}' \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $\Phi(z) = \Phi(a + jb) \doteq (a + b, a - b)$, de inversa $\Phi^{-1} : \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}'$, $\Phi^{-1}(a, b) \doteq \frac{1}{2}((a + b) + j(a - b))$.

Mantendo a notação do parágrafo anterior, podemos munir $\mathbb{C}'$ de uma pseudo-métrica definida através de $\langle z, w \rangle_{\mathbb{C}'} \doteq Re(z\bar{w}) = a_1a_2 - b_1b_2$, que por sua vez induz uma seminorma em $\mathbb{C}'$ dada por $\|z\|_{\mathbb{C}'} \doteq \sqrt{|\langle z, z \rangle_{\mathbb{C}'}|} = \sqrt{|a_1^2 - b_1^2|}$. No entanto, não utilizaremos esta seminorma ao

longo deste trabalho; em seu lugar, utilizaremos o *módulo quadrado* $|z|_{\mathbb{C}'}^2 \doteq \langle z, z \rangle_{\mathbb{C}'} = a_1^2 - b_1^2$. Ele será importante para cálculos futuros que não poderiam ser realizados com a seminorma usual como, por exemplo, os da Proposição 1.23.

Em seguida, desejamos obter uma definição de diferenciabilidade para funções $f : \mathbb{C}' \rightarrow \mathbb{C}'$. A maneira natural de fazê-lo, isto é, de forma análoga ao caso real, é fornecida a seguir.

Definição 1.2. Consideremos $\mathbb{C}'$ munido da topologia fornecida por seu isomorfismo natural com $\mathbb{R}^2$. Podemos então tomar um subconjunto aberto $A \subset \mathbb{C}'$, um ponto $z_0 \in A$ e uma função $f : A \rightarrow \mathbb{C}'$. A função f é denominada $\mathbb{C}'$ -diferenciável no ponto z_0 , com derivada $f'(z_0)$, se existe o limite

$$f'(z_0) \doteq \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in I}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Caso f seja $\mathbb{C}'$ -diferenciável em todo o seu domínio, ela é denominada $\mathbb{C}'$ -diferenciável.

Desejamos estender esta definição de diferenciabilidade paracomplexa para variedades de dimensão par em geral (pois $\mathbb{C}'$ é uma variedade de dimensão 2 sobre $\mathbb{R}$). Para tal, é necessário primeiramente definir um análogo da unidade paracomplexa para variedades de dimensão par, o que fazemos a seguir.

Definição 1.3. Dado um espaço vetorial V de dimensão $2n$ (onde $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), uma estrutura paracomplexa em V é um endomorfismo $J : V \rightarrow V$ tal que $J^2 = Id_V$ e os autoespaços de J correspondentes aos autovalores 1 e -1 possuem ambos dimensão n .

Notamos que a definição anterior não fornece uma estrutura paracomplexa para uma variedade, mas só para um espaço vetorial. Podemos, no entanto, munir uma variedade de dimensão par qualquer de uma estrutura paracomplexa tomando endomorfismos como os da definição anterior nos espaços tangentes a cada ponto da variedade e que variem suavemente. Tendo-se estas estruturas, somos então capazes de estender a definição de $\mathbb{C}'$ -diferenciabilidade para variedades da seguinte maneira.

Definição 1.4. Dado um par de variedades M, N de respectivas dimensões $2m, 2n$ e estruturas paracomplexas J, J' , e um ponto $p \in M$, uma função diferenciável $f : M \rightarrow N$ é denominada paraholomorfa em p se existe uma vizinhança $V \subset M$ de p tal que, para todo $q \in V$, têm-se que $df_q \circ J = J' \circ df_q$. Caso ela seja paraholomorfa em todo ponto de seu domínio ela é denominada paraholomorfa.

Observamos que podemos representar $\mathbb{C}'$ através de $\mathbb{R}^2$ munido da estrutura paracomplexa dada pelo endomorfismo $J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $J(x, y) \doteq (y, x)$, que representa a operação de multiplicação por j em $\mathbb{C}'$. Portanto, podemos considerar funções paraholomorfas de forma $f : \mathbb{C}' \rightarrow \mathbb{C}'$, que notamos obedecerem à seguinte propriedade.

Proposição 1.5. Uma função diferenciável $f : \mathbb{C}' \rightarrow \mathbb{C}'$, $f(z) = u(z) + jv(z)$ (onde $u, v : \mathbb{C}' \rightarrow \mathbb{R}$ são funções a valores reais na variável $z = t + js$) é paraholomorfa se e somente se $u_t = v_s$ e $u_s = v_t$.

Demonstração: Basta observarmos que a matriz jacobiana de f é $df = \begin{bmatrix} u_t & u_s \\ v_t & v_s \end{bmatrix}$ e a matriz

associada ao endomorfismo J em $\mathbb{C}'$ é $[J] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Consequentemente,

$$df \circ J = \begin{bmatrix} u_t & u_s \\ v_t & v_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_s & u_t \\ v_s & v_t \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$J \circ df = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_t & u_s \\ v_t & v_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_t & v_s \\ u_t & u_s \end{bmatrix},$$

e a partir disto a equivalência desejada decorre automaticamente. □

Observação. As igualdades fornecidas pela proposição anterior são conhecidas como as *equações para-Cauchy-Riemann*, por serem análogas à versão complexa dessas equações. Prosseguindo com esta analogia, podemos definir os *operadores de Wirtinger paracomplexos*

$$\frac{\partial}{\partial z} \doteq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + j \frac{\partial}{\partial s} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \doteq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - j \frac{\partial}{\partial s} \right),$$

e resumir as equações para-Cauchy-Riemann através da igualdade $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

De maneira idêntica ao ambiente complexo, temos que uma função $f : \mathbb{C}' \rightarrow \mathbb{C}'$, $f = u + jv$ ser $\mathbb{C}'$ -diferenciável em um ponto $p \in \mathbb{C}'$ implica que as equações para-Cauchy-Riemann são verdadeiras para u e v em p ([2], p. 466). No entanto, ao contrário do caso complexo, não é verdadeiro que uma função $f : \mathbb{C}' \rightarrow \mathbb{C}'$ paraholomorfa em $p \in \mathbb{C}'$ (logo diferenciável em $p \in \mathbb{C}' \cong \mathbb{R}^2$ como função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$) é $\mathbb{C}'$ -diferenciável em p , como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 1.6 ([13]). Seja $f : \mathbb{C}' \rightarrow \mathbb{C}'$, $f(z) \doteq (\bar{z})^2$. Decompondo $f = u + jv$ e tomando coordenadas $z = t + js$, temos que $u(t, s) = t^2 + s^2$ e $v(t, s) = -2ts$. Temos então que f é diferenciável como função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ (em virtude de suas componentes serem polinomiais em t e s) e

$$u_t(t, s) = 2t, \quad u_s = 2s, \quad v_t = -2s, \quad \text{e} \quad v_s = -2t,$$

isto é, as equações para-Cauchy-Riemann são verdadeiras para u e v apenas em $z = 0$. No entanto, observaremos que f não é $\mathbb{C}'$ -diferenciável em $z = 0$.

Dado $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, definamos as funções $a, b :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$a(x) \doteq x \sqrt{1 + \frac{x}{\epsilon}}, \quad b(x) \doteq x;$$

temos então que para todo $x > 0$, $a(x) + jb(x) \in I$, e além disso $\lim_{x \rightarrow 0} a(x) + jb(x) = 0$. Podemos então tomar o limite

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0 + (a(x) + jb(x))) - f(0)}{a(x) + jb(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a(x) + jb(x)) - 0}{a(x) + jb(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a(x) - jb(x))^2}{a(x) + jb(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a(x) - jb(x))^3}{(a(x))^2 - (b(x))^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \sqrt{1 + \frac{x}{\epsilon}} - jx)^3}{x^2(1 + \frac{x}{\epsilon}) - x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x(\sqrt{1 + \frac{x}{\epsilon}} - j))^3}{x^2 + \frac{x^3}{\epsilon} - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3(\sqrt{1 + \frac{x}{\epsilon}} - j)^3}{\frac{x^3}{\epsilon}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon (\sqrt{1 + \frac{x}{\epsilon}} - j)^3 = \epsilon(1 - j)^3. \end{aligned}$$

Este limite não possui um valor único, por depender do valor escolhido para ϵ , e portanto não existe. Consequentemente, f não é $\mathbb{C}'$ -diferenciável em 0.

Não obstante as observações anteriores, a partir daqui não nos preocuparemos com as distinções entre funções a valores paracomplexos $\mathbb{C}'$ -diferenciáveis ou paraholomorfas; dado que estamos interessados primariamente em funções entre variedades (especificamente imersões de superfícies em $\mathbb{R}_v^4$), nos concentraremos em estudar a paraholomorfia de funções.

Como mencionado na Introdução, os dados iniciais do problema de Björling são uma curva e um campo vetorial, ambos definidos ao longo de um intervalo aberto real. Para obtermos uma solução do problema, no entanto, precisamos tê-la definida em coordenadas paracomplexas.

A maneira natural de obter uma função definida em um domínio paracomplexo a partir de uma função definida em um domínio real é considerando alguma extensão, e a seguir obtemos a extensão paracomplexa que nos será útil. Esta extensão foi inicialmente definida em [10] para funções a valores reais, e aqui realizamos uma generalização para funções a valores paracomplexos.

Proposição 1.7. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, com $0 \in I$, e $f : I \rightarrow \mathbb{C}'$, $f(t) \doteq u(t) + jv(t)$ uma função e $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $[-r, r] \subset I$. Suponhamos também que as funções u e v sejam no mínimo de classe C^2 . Então existem $F, G : [-r, r] \rightarrow \mathbb{C}'$ funções de classe C^2 tais que $F(t) + G(t) = u(t)$ e $F(t) - G(t) = v(t)$ para todo $t \in [-r, r]$, e a função dada por $\tilde{f} : R \subset \mathbb{C}' \rightarrow \mathbb{C}'$,*

$$\tilde{f}(z) = \tilde{f}(t, s) = \tilde{u}(t, s) + j\tilde{v}(t, s) \doteq F(t + s) + G(t - s) + j(F(t + s) - G(t - s)),$$

onde R é o domínio quadrado de vértices $(\pm r, 0)$ e $(0, \pm r)$, e considerando-se $z = t + js$, é uma extensão paraholomorfa de f a R . $\tilde{f}$ é denominada a extensão determinística paraholomorfa de f em $[-r, r]$.

Demonstração: Seja $\tilde{f} : R \subset \mathbb{C}' \rightarrow \mathbb{C}'$, $\tilde{f}(z) = \tilde{f}(t, s) = \tilde{u}(t, s) + j\tilde{v}(t, s)$ uma extensão paraholomorfa de f a R tal que as funções $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$ sejam no mínimo de classe C^2 . Sua existência é garantida, pois a condição de paraholomorfia assegura que as funções $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$ devem satisfazer às equações para-Cauchy-Riemann; derivando essas equações em t (ou s , se preferido), obtemos $\tilde{u}_{tt} = \tilde{v}_{st} = \tilde{v}_{ts} = \tilde{u}_{ss}$ e $\tilde{v}_{tt} = \tilde{u}_{st} = \tilde{u}_{ts} = \tilde{v}_{ss}$, isto é,

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial s^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial s^2}.$$

Observamos que estas equações são precisamente as equações diferenciais para ondas 1-dimensionais para $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$, respectivamente, nas variáveis t e s com coeficiente $c = 1$, e portanto admitem soluções únicas.

Sabemos que as soluções gerais dessas equações estão definidas sobre o domínio R e são da forma $\tilde{u}(t, s) = F_1(t + s) + G_1(t - s)$ e $\tilde{v}(t, s) = F_2(t + s) + G_2(t - s)$ ([4], p. 33). Podemos novamente aplicar as equações para-Cauchy-Riemann a $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$ para obter

$$\tilde{u}_t = F'_1(t + s) + G'_1(t - s) = F'_2(t + s) - G'_2(t - s) = \tilde{v}_s \text{ e}$$

$$\tilde{u}_s = F'_1(t + s) - G'_1(t - s) = F'_2(t + s) + G'_2(t - s) = \tilde{v}_t.$$

Somando e subtraindo estas igualdades, concluímos que $F'_1 = F'_2$ e $G'_1 = -G'_2$; integrando estas duas igualdades (e zerando a constante de integração) temos que $F_1 = F_2$ e $G_1 = -G_2$. Podemos então definir $F \doteq F_1 = F_2$ e $G \doteq G_1 = -G_2$, que de fato são tais que $F(t) + G(t) = u(t)$ e $F(t) - G(t) = v(t)$ para todo $t \in [-r, r]$, como desejado; além disso, tomando

$$\tilde{u}(t, s) \doteq F(t + s) + G(t - s) \quad \text{e} \quad \tilde{v}(t, s) \doteq F(t + s) - G(t - s), \quad (1.1)$$

temos que $\tilde{f}$ é a extensão determinística paraholomorfa de f em $[-r, r]$, como desejado. $\square$

A extensão determinística paraholomorfa nos é interessante em virtude de ser única em seu domínio de definição, como demonstramos a seguir.

Proposição 1.8. *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}'$ (com I intervalo aberto e $0 \in I$), $f(t) \doteq u(t) + jv(t)$ uma função que possui duas extensões paraholomorfas $\tilde{f}_1 : V \subset \mathbb{C}' \rightarrow \mathbb{C}'$ e $\tilde{f}_2 : W \subset \mathbb{C}' \rightarrow \mathbb{C}'$ (onde V e W são abertos que contém o intervalo I), com $\tilde{f}_1 \doteq a + jb$ e $\tilde{f}_2 \doteq c + jd$, tais que $a(t, 0) = c(t, 0) = u(t)$ e $b(t, 0) = d(t, 0) = v(t)$ para todo $t \in I$. Então $\tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)$ para todo $z \in V \cap W$.*

Demonstração: Dado $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $[-r, r] \subset I$, podemos tomar a extensão determinística paraholomorfa de f em $[-r, r]$, obtendo $\tilde{f}(t, s) = F(t + s) + G(t - s) + j(F(t + s) - G(t - s))$ para todos $(t, s) \in R$ (onde R é o domínio quadrado especificado na Proposição 1.7). Definindo as novas variáveis reais $x \doteq t + s$ e $y \doteq t - s$, observamos que $s = 0$ implica que $x = y$; consequentemente, expressando $\tilde{f}$ nessas novas variáveis, temos que

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t, 0) &= \tilde{f}(x, x) = F(x) + G(x) + j(F(x) - G(x)) = u(x) + jv(x) = \\ &= \tilde{f}(y, y) = F(y) + G(y) + j(F(y) - G(y)) = u(y) + jv(y).\end{aligned}$$

A partir das equações (1.1) e da igualdade acima, observamos que

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x, y) &= F(x) + G(y) + j(F(x) - G(y)) = \\ &= F(x) + G(x) - G(x) + G(y) + j(F(x) + G(x) - G(x) - G(y)) = \\ &= u(x) - G(x) + F(y) - F(y) + G(y) + j(v(x) + G(x) + F(y) - F(y) - G(y)) = \\ &= u(x) + u(y) - (F(y) + G(x)) + j(v(x) + v(y) - (F(y) - G(x))) = \\ &= u(x) + u(y) + j(v(x) + v(y)) - (F(y) + G(x) + j(F(y) - G(x))) = \\ &= u(x) + u(y) + j(v(x) + v(y)) - \tilde{f}(y, x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \tilde{f}(x, y) + \tilde{f}(y, x) = u(x) + u(y) + j(v(x) + v(y)) = 2\tilde{f}(t, 0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\tilde{f}(x, y) + \tilde{f}(y, x)}{2} = u(x) + jv(x) = u(y) + jv(y).\end{aligned}$$

No entanto, também notamos que

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x, y) - \tilde{f}(y, x) &= F(x) + G(y) - F(y) - G(x) + j(F(x) - G(y) - F(y) + G(x)) = \\ &= v(x) - v(y) + j(u(x) - u(y)) = j(\tilde{f}(t, 0) - \tilde{f}(t, 0)) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \tilde{f}(x, y) = \tilde{f}(y, x);\end{aligned}$$

estas duas igualdades nos permitem concluir que $\tilde{f}(x, y) = u(x) + jv(x)$, e consequentemente $\tilde{f}(t, s) = u(t + s) + jv(t + s)$. Finalmente, observamos que esta fórmula para a extensão $\tilde{f}$ foi obtida de maneira dependente apenas da suposição de $\tilde{f}$ ser paraholomorfa e dos valores assumidos por u e v em I , propriedades estas que são comuns a toda potencial extensão paraholomorfa de f sobre R . A partir disto, concluímos que $\tilde{f}(z) = \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)$ para todo $z \in A \doteq R \cap V \cap W$, como desejado. $\square$

Para encerrarmos esta seção, fornecemos alguns resultados sobre integrais de funções paraholomorfas que nos serão úteis mais adiante para obtermos as soluções do problema de Björling (que, como veremos no capítulo seguinte, são dadas por integrais de funções paraholomorfas). Estes resultados foram inicialmente apresentados em [10].

Proposição 1.9. *Seja $V \subset \mathbb{C}'$ um aberto simplesmente conexo, $\gamma : [0, 1] \rightarrow V$ uma curva suave por caminhos e $f : V \rightarrow \mathbb{C}'$, $f = u + jv$ uma função paraholomorfa que possui derivada contínua f' em V . Então*

$$\int_{\gamma} f'(w)dw = f(z)|_{\gamma} = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)),$$

e, consequentemente, essa integral independe de γ .

Demonstração: Denotando $w = t + js$, basta observar que por f ser paraholomorfa

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f'(w)dw &= \int_{\gamma} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + j \frac{\partial}{\partial s} \right) (u + jv) (dt + jds) = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\gamma} u_t dt + v_s dt + u_s ds + v_t ds + j(u_s dt + v_t dt + u_t ds + v_s ds) = \\ &= \int_{\gamma} u_t dt + u_s ds + j(v_t dt + v_s ds) = \int_{\gamma} d(u + jv) = \int_{\gamma} df = f(z)|_{\gamma}, \end{aligned}$$

como desejado. Por $f(z)|_{\gamma} = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$, é imediato que essa integral independe da escolha particular de γ . $\square$

Proposição 1.10. *Seja $f : \mathbb{C}' \rightarrow \mathbb{C}'$, $f = u + jv$ uma função paraholomorfa. Então existe $g : \mathbb{C}' \rightarrow \mathbb{C}'$ paraholomorfa tal que $g' = f$.*

Demonstração: Basta tomar um par de funções $p, q : \mathbb{C}' \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $p_t = q_s = u$ e $p_s = q_t = v$, e definir $g \doteq p + jq$; no entanto, para fazer isto precisamos que existam p e q que atendam a estas condições. Observamos que, se existissem p e q tais como desejamos, elas seriam tais que $p_{tt} = u_t = v_s = p_{ss}$ e $q_{tt} = v_t = u_s = q_{ss}$, isto é, elas seriam soluções das equações diferenciais para ondas 1-dimensionais nas variáveis t e s com coeficiente $c = 1$. Como mencionado na demonstração da Proposição 1.7, as soluções de tais equações existem e são únicas em seu domínio, dadas condições iniciais. Podemos então tomar p e q como sendo as soluções destas equações com condições iniciais $p_t = q_s = u$ e $p_s = q_t = v$, nos permitindo então obter a função g que desejamos. $\square$

Corolário 1.11. *Toda integral de uma função paraholomorfa realizada sobre uma curva suave por caminhos num aberto simplesmente conexo independe da escolha da curva.*

Demonstração: Isto é imediato a partir das proposições 1.9 e 1.10. $\square$

1.2 O espaço $\mathbb{R}_v^n$

Nesta seção, apresentaremos os espaços $\mathbb{R}_v^n$ e alguns resultados sobre sua álgebra linear (especificamente, sobre seus produtos vetoriais) que nos serão necessários para resolver o problema de Björling nesses espaços. A principal referência utilizada ao longo desta seção é [2].

Definição 1.12. *O espaço $\mathbb{R}_v^n$ é $\mathbb{R}^n$ munido do produto interno indefinido*

$$\langle x, y \rangle_v \doteq \sum_{i=1}^{n-v} x_i y_i - \left(\sum_{i=n-v+1}^n x_i y_i \right)$$

(onde $x = (x_i)_{i=1}^n, y = (y_i)_{i=1}^n$). O inteiro $0 \leq v \leq n$ é denominado o índice de $\mathbb{R}_v^n$. Uma notação frequentemente encontrada para os espaços de índice 1 é $\mathbb{L}^n \cong \mathbb{R}_1^n$, que são denominados os espaços de Lorentz-Minkowski; no entanto, não utilizaremos esta notação ao longo deste trabalho.

Este produto dá origem a uma seminorma em $\mathbb{R}_v^n$, dada por $\|x\|_v = \sqrt{|\langle x, x \rangle_v|}$, e a um módulo quadrado, dado por $|x|_v^2 = \langle x, x \rangle_v$. Relembramos que os ambientes que estudaremos neste trabalho são $\mathbb{R}_1^4$ e $\mathbb{R}_2^4$, e observamos que os outros possíveis valores de v não estão sendo negligenciados, pois $\mathbb{R}_3^4$ é correspondente a $\mathbb{R}_1^4$ e $\mathbb{R}_4^4$ é correspondente a $\mathbb{R}_0^4 \equiv \mathbb{R}^4$.

Observação. Notamos que $\mathbb{R}_1^2 \cong \mathbb{L}^2$, munido do produto

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) \doteq (a_1 a_2 + b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1),$$

é isométrico a $\mathbb{C}'$; de fato, as métricas definidas nestes espaços possuem uma correspondência imediata entre si. É por este motivo que ocasionalmente encontramos os números paracomplexos sendo representados por $\mathbb{L}$, e é pelo mesmo motivo que evitamos esta notação ao longo deste trabalho, para não haver confusão entre os números paracomplexos e os ambientes nos quais desejamos obter nossas superfícies.

Definição 1.13 (Tipo causal de vetores). *Seja $x \in \mathbb{R}_v^n$; diz-se que*

- x é de tipo espaço caso $\langle x, x \rangle_v > 0$ ou caso $x = 0$;
- x é de tipo tempo caso $\langle x, x \rangle_v < 0$;
- x é de tipo luz caso $\langle x, x \rangle_v = 0$ e $x \neq 0$.

Caso x não seja nulo nem de tipo luz, definimos o indicador de x como sendo o número $\epsilon_x \doteq \text{sgn}(\langle x, x \rangle_v)$ (isto é, 1 caso x seja de tipo espaço, -1 caso x seja de tipo tempo).

Observação. O tipo causal de uma curva em $\mathbb{R}_v^n$ é determinado pelo tipo causal de seu vetor tangente da maneira natural, isto é, uma curva $c : I \rightarrow \mathbb{R}_v^4$ (com $I \subset \mathbb{R}$ intervalo aberto) é de tipo espaço (ou tempo, ou luz) se c' for de tipo espaço (ou tempo, ou luz, respectivamente). Observamos também que, pelo teorema de conservação do sinal para funções a valores reais contínuas, uma curva regular que é de tipo espaço ou tempo em um dado $t \in I$ possui o mesmo tipo causal em um intervalo que contém t . Em outras palavras, temos que curvas regulares de tipo espaço ou tempo têm seu tipo causal preservado localmente.

Definição 1.14 (Tipo causal de subespaços). *Seja $S \subset \mathbb{R}_v^n$ um subespaço vetorial não trivial, e consideremos $\langle \cdot, \cdot \rangle_v|_S$ (o produto interno indefinido de $\mathbb{R}_v^n$ restrito a S) como uma forma bilinear simétrica. Diz-se que*

- S é de tipo espaço caso $\langle \cdot, \cdot \rangle_v|_S$ seja uma forma positiva definida;
- S é de tipo tempo caso $\langle \cdot, \cdot \rangle_v|_S$ seja uma forma indefinida e não degenerada, ou caso $\langle \cdot, \cdot \rangle_v|_S$ seja uma forma negativa definida e $\dim S = 1$.
- S é de tipo luz caso $\langle \cdot, \cdot \rangle_v|_S$ seja uma forma degenerada.

Definição 1.15. *Sejam $x, y \in \mathbb{R}_v^n$ um par de vetores, e $S \subset \mathbb{R}_v^n$ um subespaço vetorial. x e y são denominados ortogonais se $\langle x, y \rangle_v = 0$, e o subespaço vetorial $S^\perp \doteq \{w \in \mathbb{R}_v^4 / \langle v, w \rangle_v = 0 \ \forall v \in S\}$ é denominado o subespaço ortogonal a S .*

Observamos que o conceito de ortogonalidade em $\mathbb{R}_v^n$ é significativamente diferente de sua contraparte euclidiana usual, em particular no que tange a vetores tipo luz; por exemplo, um vetor tipo luz sempre é ortogonal a si mesmo, e um subespaço ortogonal a uma reta de tipo luz sempre contém essa reta (em direto contraste com o caso euclidiano).

Daqui em diante, nos concentraremos em $n = 4$. Denotaremos por $(e_i)_{i=1}^4$ a base ortonormal canônica de $\mathbb{R}^4$, e fixado um índice v definimos os indicadores de $\mathbb{R}_v^4$ como sendo os números $(\epsilon_i)_{i=1}^4 \doteq (\langle e_i, e_i \rangle_v)_{i=1}^4$. Uma notação comum para representar os indicadores de $\mathbb{R}_v^4$ é uma lista de sinais positivos e negativos, correspondentes à ordem em que eles são aplicados no produto interno; por exemplo, os indicadores de $\mathbb{R}_1^4$ são dados pela lista $(+, +, +, -)$, enquanto os indicadores de $\mathbb{R}_2^4$ são dados por $(+, +, -, -)$. Observa-se facilmente que $\epsilon_i^2 = 1$ para todo $i = 1, 2, 3, 4$ e $\prod_{i=1}^4 \epsilon_i = (-1)^v$ (e isto é verdadeiro para n qualquer); utilizaremos estes fatos livremente daqui em diante.

Definição 1.16. *O espaço $(\mathbb{C}')_v^4$ é $(\mathbb{C}')^4$ munido do produto interno indefinido*

$$\langle z, w \rangle_{(\mathbb{C}')_v^4} \doteq \sum_{i=1}^4 \epsilon_i \text{Re}(z_i \bar{w}_i) = \sum_{i=1}^4 \epsilon_i (a_i c_i - b_i d_i) = \langle a, c \rangle_v - \langle b, d \rangle_v$$

(onde $z = (z_i)_{i=1}^4 = (a_i + jb_i)_{i=1}^4 = a + jb$, $w = (w_i)_{i=1}^4 = (c_i + jd_i)_{i=1}^4 = c + jd$).

Observamos que, para os casos relevantes $\nu = 1$ e $\nu = 2$, temos que se $v, w \in \mathbb{R}_\nu^4$, então $v + jw \in (\mathbb{C}')_\nu^4$.

A definição anterior e a observação subsequente não são imediatamente necessárias neste capítulo, mas nos serão úteis quando formos tratar do problema de Björling no capítulo 2, especialmente para tratar dos campos vetoriais normais que estão entre os dados iniciais do problema. Similarmente, o conceito que definimos a seguir de produto vetorial será também essencial para tratarmos desses campos vetoriais.

Definição 1.17. Fixado um índice ν e dados três vetores $u, v, w \in \mathbb{R}_\nu^4$, definimos o produto vetorial de u, v e w em $\mathbb{R}_\nu^4$ como sendo o vetor $\boxtimes(u, v, w) \in \mathbb{R}_\nu^4$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}_\nu^4$,

$$\langle \boxtimes(u, v, w), x \rangle_\nu = \begin{vmatrix} x \\ u \\ v \\ w \end{vmatrix}$$

(considerando u, v, w e x como vetores-linha).

Diretamente da definição podemos observar que este produto vetorial é alternado e que $\boxtimes(u, v, w)$ é simultaneamente ortogonal a u, v e w . Além disso, substituindo x pelos elementos da base de $\mathbb{R}_\nu^4$ obtemos a fórmula explícita

$$\begin{aligned} \boxtimes(u, v, w) = & \epsilon_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 & u_4 \\ v_2 & v_3 & v_4 \\ w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix} e_1 - \epsilon_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_3 & w_4 \end{vmatrix} e_2 + \\ & + \epsilon_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_4 \end{vmatrix} e_3 - \epsilon_4 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} e_4. \end{aligned}$$

Podemos então calcular

$$\boxtimes(u, v, e_1) = -(\hat{u}_1 \times \hat{v}_1), \quad \boxtimes(u, v, e_2) = (\hat{u}_2 \times \hat{v}_2),$$

$$\boxtimes(u, v, e_3) = -(\hat{u}_3 \times \hat{v}_3) \quad \text{e} \quad \boxtimes(u, v, e_4) = (\hat{u}_4 \times \hat{v}_4),$$

onde $\hat{u}_i, \hat{v}_i$ (com $i = 1, 2, 3, 4$) são obtidos a partir dos vetores u e v omitindo-se o i -ésimo componente, e o produto vetorial $\hat{u}_i \times \hat{v}_i$ é tomado no hiperplano de $\mathbb{R}_\nu^4$ correspondente a $e_i = 0$, munido do produto interno indefinido herdado de $\mathbb{R}_\nu^4$.

Encerramos esta seção com duas proposições que nos serão úteis no capítulo 2 para realizar cálculos importantes na obtenção das soluções do problema de Björling.

Proposição 1.18. Para todos $u^1, u^2, u^3, v^1, v^2, v^3 \in \mathbb{R}_\nu^4$, têm-se que

$$\langle \boxtimes(u^1, u^2, u^3), \boxtimes(v^1, v^2, v^3) \rangle_\nu = (-1)^\nu \det(\langle u^i, v^j \rangle_\nu)_{i,j=1}^3.$$

Demonstração: Caso um dos conjuntos $\{u^1, u^2, u^3\}$ ou $\{v^1, v^2, v^3\}$ seja linearmente dependente, ambos os lados da igualdade desejada se anulam, o que a torna verdadeira nesse caso. Consideramos então $\{u^1, u^2, u^3\}$ e $\{v^1, v^2, v^3\}$ ambos linearmente independentes; dado que ambos os lados da igualdade desejada são alternados e lineares nas variáveis u^1, u^2, u^3, v^1, v^2 e v^3 , podemos sem perda de generalidade substituir esses vetores pelos vetores da base canônica de $\mathbb{R}_\nu^4$, isto é, tomar $u^i = e_{k_i}$ e $v^j = e_{l_j}$, com índices k_i, l_j tais que $k_i, l_j \in \{1, 2, 3, 4\}$ para todos $i, j = 1, 2, 3$ e

$e_{\hat{k}} = \boxtimes(e_{k_1}, e_{k_2}, e_{k_3}), e_{\hat{l}} = \boxtimes(e_{l_1}, e_{l_2}, e_{l_3})$ (onde $\hat{k}$ e $\hat{l}$ são os índices omitidos das listas $(k_i)_{i=1}^3, (l_j)_{j=1}^3$). Podemos então analisar a igualdade em três casos distintos a partir de $\hat{k}$ e $\hat{l}$:

- caso $\hat{k} \neq \hat{l}$, o lado esquerdo da igualdade é (a menos de sinal) $\langle e_{\hat{k}}, e_{\hat{l}} \rangle_v = 0$, e, sendo $\hat{k} = l_{j_0}$ e $\hat{l} = k_{i_0}$, a matriz $(\langle e_{k_i}, e_{l_j} \rangle_v)_{i,j=1}^{3,3}$ tem a sua k_{i_0} -ésima linha e sua l_{j_0} -ésima coluna composta apenas de zeros, logo o seu determinante também é zero. A igualdade é então verdadeira neste caso;
- caso $\hat{k} = \hat{l} \leq v$, o lado esquerdo da igualdade é $\langle e_{\hat{k}}, e_{\hat{k}} \rangle_v = -1$, e o lado direito é $(-1)^v \det(\text{Id}_{3,v-1})$, onde $\text{Id}_{3,v-1}$ é a matriz quadrada diagonal de ordem 3 com -1 nas primeiras $v-1$ entradas e 1 nas entradas restantes. Observamos que $(-1)^v \det(\text{Id}_{3,v-1}) = (-1)^v (-1)^{v-1} = -1$, logo a igualdade é verdadeira neste caso;
- caso $v < \hat{k} = \hat{l} \leq n$, o lado esquerdo da igualdade é $\langle e_{\hat{k}}, e_{\hat{k}} \rangle_v = 1$, e o lado direito é $(-1)^v \det(\text{Id}_{3,v})$, onde $\text{Id}_{3,v}$ é a matriz quadrada diagonal de ordem 3 com -1 nas primeiras v entradas e 1 nas entradas restantes. Observamos que $(-1)^v \det(\text{Id}_{3,v}) = (-1)^v (-1)^v = 1$, logo a igualdade é verdadeira neste caso.

□

Proposição 1.19. *Sejam $u, v \in \mathbb{R}_v^4$ um par de vetores ortogonais tais que $\langle u, u \rangle_v = -\langle v, v \rangle_v = \lambda^2$ para algum $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e u não seja paralelo a e_1 . Definamos a partir de u e v os vetores $m_0 \doteq \boxtimes(u, v, e_1)$ e $n_0 \doteq \boxtimes(\frac{u}{\lambda}, \frac{v}{\lambda}, m_0)$, e suponhamos que m_0 não seja de tipo luz. Então temos que $m_0 = -(\hat{u}_1 \times \hat{v}_1)$, $\langle m_0, m_0 \rangle_v = (-1)^{v+1} \langle n_0, n_0 \rangle_v = (-1)^v \lambda^2 (-\epsilon_1 \lambda^2 + u_1^2 - v_1^2)$ e $n_0 = (-1)^v (\lambda^2 e_1 - \epsilon_1 u_1 u + \epsilon_1 v_1 v)$.*

Demonstração: O cálculo de m_0 já foi realizado anteriormente, quando obtivemos a fórmula explícita para o produto vetorial. Em seguida, obtemos a partir da Proposição 1.18

$$\begin{aligned} \langle m_0, m_0 \rangle_v &= \langle \boxtimes(u, v, e_1), \boxtimes(u, v, e_1) \rangle_v = (-1)^v \begin{vmatrix} \langle u, u \rangle_v & \langle u, v \rangle_v & \langle u, e_1 \rangle_v \\ \langle v, u \rangle_v & \langle v, v \rangle_v & \langle v, e_1 \rangle_v \\ \langle e_1, u \rangle_v & \langle e_1, v \rangle_v & \langle e_1, e_1 \rangle_v \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^v \begin{vmatrix} \lambda^2 & 0 & \epsilon_1 u_1 \\ 0 & -\lambda^2 & \epsilon_1 v_1 \\ \epsilon_1 u_1 & \epsilon_1 v_1 & \epsilon_1 \end{vmatrix} = (-1)^v (\lambda^2 (-\epsilon_1 \lambda^2 - v_1^2) + \epsilon_1 u_1 (\epsilon_1 \lambda^2 u_1)) = \\ &= (-1)^v \lambda^2 (-\epsilon_1 \lambda^2 + u_1^2 - v_1^2) \text{ e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle n_0, n_0 \rangle_v &= \langle \boxtimes(\frac{u}{\lambda}, \frac{v}{\lambda}, m_0), \boxtimes(\frac{u}{\lambda}, \frac{v}{\lambda}, m_0) \rangle_v = (-1)^v \begin{vmatrix} \langle \frac{u}{\lambda}, \frac{u}{\lambda} \rangle_v & \langle \frac{u}{\lambda}, \frac{v}{\lambda} \rangle_v & \langle \frac{u}{\lambda}, m_0 \rangle_v \\ \langle \frac{v}{\lambda}, \frac{u}{\lambda} \rangle_v & \langle \frac{v}{\lambda}, \frac{v}{\lambda} \rangle_v & \langle \frac{v}{\lambda}, m_0 \rangle_v \\ \langle m_0, \frac{u}{\lambda} \rangle_v & \langle m_0, \frac{v}{\lambda} \rangle_v & \langle m_0, m_0 \rangle_v \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^v \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \langle m_0, m_0 \rangle_v \end{vmatrix} = (-1)^{v+1} \langle m_0, m_0 \rangle_v, \end{aligned}$$

como desejado (automaticamente a partir disto concluímos que n_0 é de tipo luz se e somente se m_0 o for). Para calcular n_0 , primeiro observamos que $\{e_1, u, v, m_0\}$ é uma base de $\mathbb{R}_v^4$; logo, existem coeficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tais que $n_0 = \alpha e_1 + \beta u + \gamma v + \delta m_0$. A partir desta representação e do fato que o resultado de um produto vetorial ser sempre perpendicular às suas entradas, obtemos as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
\langle n_0, e_1 \rangle_v &= \epsilon_1 \alpha + \epsilon_1 \beta u_1 + \epsilon_1 \gamma v_1 \\
\langle n_0, u \rangle_v &= \epsilon_1 \alpha u_1 + \beta \lambda^2 = 0 \\
\langle n_0, v \rangle_v &= \epsilon_1 \alpha v_1 - \gamma \lambda^2 = 0 \\
\langle n_0, m_0 \rangle_v &= \delta \langle m_0, m_0 \rangle_v = 0
\end{aligned}$$

Podemos interpretar estas equações como um sistema nas variáveis α, β, γ e δ ; por m_0 não ser um vetor de tipo luz, temos imediatamente que $\delta = 0$, e pela regra de Cramer, obtemos

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\begin{vmatrix} \langle n_0, e_1 \rangle_v & \epsilon_1 u_1 & \epsilon_1 v_1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle m_0, m_0 \rangle_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_1 u_1 & \epsilon_1 v_1 & 0 \\ \epsilon_1 u_1 & \lambda^2 & 0 & 0 \\ \epsilon_1 v_1 & 0 & -\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle m_0, m_0 \rangle_v \end{vmatrix}} = \frac{-\langle n_0, e_1 \rangle_v \lambda^2}{(-\epsilon_1 \lambda^2 + u_1^2 - v_1^2)}, \\
\beta &= \frac{\begin{vmatrix} \epsilon_1 & \langle n_0, e_1 \rangle_v & \epsilon_1 v_1 & 0 \\ \epsilon_1 u_1 & 0 & 0 & 0 \\ \epsilon_1 v_1 & 0 & -\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle m_0, m_0 \rangle_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_1 u_1 & \epsilon_1 v_1 & 0 \\ \epsilon_1 u_1 & \lambda^2 & 0 & 0 \\ \epsilon_1 v_1 & 0 & -\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle m_0, m_0 \rangle_v \end{vmatrix}} = \frac{\langle n_0, e_1 \rangle_v \epsilon_1 u_1}{(-\epsilon_1 \lambda^2 + u_1^2 - v_1^2)} e \\
\gamma &= \frac{\begin{vmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_1 u_1 & \langle n_0, e_1 \rangle_v & 0 \\ \epsilon_1 u_1 & \lambda^2 & 0 & 0 \\ \epsilon_1 v_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle m_0, m_0 \rangle_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_1 u_1 & \epsilon_1 v_1 & 0 \\ \epsilon_1 u_1 & \lambda^2 & 0 & 0 \\ \epsilon_1 v_1 & 0 & -\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle m_0, m_0 \rangle_v \end{vmatrix}} = \frac{-\langle n_0, e_1 \rangle_v \epsilon_1 v_1}{(-\epsilon_1 \lambda^2 + u_1^2 - v_1^2)}.
\end{aligned}$$

Consequentemente, para calcularmos n_0 em termos de e_1, u , e v , é suficiente calcularmos apenas sua primeira coordenada, utilizando a fórmula explícita para o produto vetorial que obtivemos anteriormente:

$$\begin{aligned}
\langle n_0, e_1 \rangle_v &= \frac{\begin{vmatrix} u_2 & u_3 & u_4 \\ v_2 & v_3 & v_4 \\ -\epsilon_2 & u_3 & u_4 \\ v_3 & v_4 & \end{vmatrix} \epsilon_3 \begin{vmatrix} u_2 & u_4 \\ v_2 & v_4 \end{vmatrix} - \epsilon_4 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}}{\lambda^2} = \\
&= \frac{-(\epsilon_2 \begin{vmatrix} u_3 & u_4 \\ v_3 & v_4 \end{vmatrix}^2 + \epsilon_3 \begin{vmatrix} u_2 & u_4 \\ v_2 & v_4 \end{vmatrix}^2 + \epsilon_4 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2)}{\lambda^2} = \\
&= \frac{-\langle m_0, m_0 \rangle_v}{\lambda^2} = -(-1)^v (-\epsilon_1 \lambda^2 + u_1^2 - v_1^2)
\end{aligned}$$

Concluimos então que $\alpha = (-1)^\nu \lambda^2$, $\beta = -(-1)^\nu \epsilon_1 u_1$ e $\gamma = (-1)^\nu \epsilon_1 v_1$, e portanto $n_0 = (-1)^\nu (\lambda^2 e_1 - \epsilon_1 u_1 u + \epsilon_1 v_1 v)$, como desejado. $\square$

Observação. No caso $\nu = 1$, temos que m_0 é sempre um vetor de tipo espaço, em virtude de ser um vetor de $\mathbb{R}_1^4$ ortogonal a dois vetores de tipo espaço e um de tipo tempo; consequentemente, pelos cálculos da proposição anterior, n_0 é sempre um vetor de tipo espaço. Portanto, para o caso $\nu = 1$, a hipótese adicional da proposição anterior que pede que m_0 não seja de tipo luz sempre é trivialmente verdadeira. No entanto, essa hipótese se prova necessária para o caso $\nu = 2$: é possível, dados certos pares de vetores u e v , que m_0 (e, consequentemente, n_0) seja um vetor de tipo luz. Por exemplo, tomando os vetores $u = (1, 1, 1, 0)$ e $v = (0, 1, 1, 1)$, respectivamente de tipo espaço e tempo, obtemos $m_0 = \boxtimes(u, v, e_1) = (0, -1, -1, 0)$, que é de tipo luz. Consequentemente, pela Proposição 1.19, n_0 também é de tipo luz. Notamos que os casos de interesse dos quais tratamos adiante sempre serão aqueles em que m_0 não é um vetor de tipo luz.

1.3 Superfícies de tipo tempo em $\mathbb{R}_\nu^n$

Nesta seção, apresentaremos o tipo de superfície em $\mathbb{R}_\nu^n$ que estamos considerando como solução do problema de Björling e a fórmula de representação de Weierstrass que nos permite obter tais superfícies a partir de funções paraholomorfas. A principal referência utilizada ao longo desta seção é [11], que desenvolveu estes conceitos para $\mathbb{R}_1^3$; aqui fizemos a generalização desses resultados para $\mathbb{R}_\nu^4$.

Observamos que nesta seção, e ao longo deste trabalho como um todo, desconsideramos superfícies de tipo espaço como possíveis soluções do problema de Björling. Isto foi feito porque o estudo do problema para essas superfícies utiliza números e funções complexas, e estamos primariamente interessados no uso de ferramentas paracomplexas para obter soluções do problema. Para fins de comparação, apresentamos os principais resultados sobre o problema de Björling para superfícies de tipo espaço no apêndice B.

Definição 1.20. Uma imersão suave de uma variedade 2-dimensional orientada e conexa Σ em $\mathbb{R}_\nu^4$, dada por $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_\nu^4$, é denominada uma imersão de tipo tempo se a métrica induzida pelo produto interno de $\mathbb{R}_\nu^4$ em $X(\Sigma)$ é indefinida e não degenerada (denominamos isto uma métrica lorentziana, em contraste com métricas riemannianas). Neste caso, denotamos $M \doteq X(\Sigma)$, e manteremos esta notação ao longo deste trabalho.

Sendo Σ uma superfície e $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_\nu^4$ uma imersão de tipo tempo, podemos, para todo $z \in \Sigma$, tomar coordenadas paracomplexas $z = t + js$ em Σ tais que $\langle X_t, X_t \rangle_\nu = -\langle X_s, X_s \rangle_\nu = \lambda^2$ e $\langle X_t, X_s \rangle_\nu = 0$ para algum $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (isto é, coordenadas isotérmicas para essa imersão). A partir dessas coordenadas isotérmicas, observamos que os vetores X_t e X_s atendem às hipóteses sobre os vetores u e v da Proposição 1.19, respectivamente; podemos então substituí-los nessa proposição e considerar os vetores m_0 e n_0 por ela fornecidos. Notamos que, para todo $z \in \Sigma$ tais que $m_0(z)$ e $n_0(z)$ não são de tipo luz, os vetores $\left\{ \frac{X_t(z)}{\lambda}, \frac{X_s(z)}{\lambda}, \frac{m_0(z)}{\|m_0(z)\|_\nu}, \frac{n_0(z)}{\|n_0(z)\|_\nu} \right\}$ constituem uma base ortonormal positivamente orientada de $\mathbb{R}_\nu^4$ adaptada a M .

Relembramos que, dependendo de ν , os vetores $m \doteq \frac{m_0}{\|m_0\|_\nu}$ e $n \doteq \frac{n_0}{\|n_0\|_\nu}$ podem não estar definidos em toda Σ , em virtude da possibilidade de $m_0(z)$ e $n_0(z)$ serem de tipo luz. Caso $\nu = 1$, temos que eles estão definidos em toda Σ , pois m_0 e n_0 nunca são de tipo luz; caso $\nu = 2$, estes vetores não estão necessariamente definidos em toda Σ , pois em $\mathbb{R}_2^4$ é possível obter pares de vetores tipo luz ortogonais entre si que são ortogonais a X_t e X_s .

Observação. A existência de coordenadas isotérmicas em variedades 2-dimensionais riemannianas suaves é um fato bem conhecido; encontramos uma demonstração em [6], p. 314. A adaptação dessa mesma demonstração para superfícies de tipo tempo é realizada no apêndice A, em virtude de seu comprimento.

Definição 1.21. Sejam Σ uma superfície, $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_v^4$ uma imersão de tipo tempo e $p \in M$ um ponto qualquer. O vetor curvatura média de M em p é dado por $H(p) \doteq \frac{1}{2}(\epsilon_v \Pi_p(v) + \epsilon_w \Pi_p(w))$, onde Π_p é a segunda forma fundamental de M em p e $\{v, w\}$ é uma base ortonormal qualquer de $T_p M$ ([2], p. 292). Além disso, a imersão X é denominada mínima se, para todo $p \in M$, $H(p) = 0$.

Proposição 1.22. Sejam Σ uma superfície e $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_v^4$ uma imersão de tipo tempo. Sendo H o vetor curvatura média de M e Δ_Σ o operador de Laplace-Beltrami associado a Σ , têm-se que $\Delta_\Sigma X = 2H$.

Demonstração: Utilizando coordenadas isotérmicas $z = t + js$ para X , sabemos que

$$\Delta_\Sigma X = \frac{X_{tt} - X_{ss}}{\lambda^2} \quad \text{e} \quad H = \frac{1}{2}(\epsilon_{X_t} \Pi_p(X_t) + \epsilon_{X_s} \Pi_p(X_s)) = \frac{1}{2} \frac{(X_{tt} - X_{ss})^\perp}{\lambda^2},$$

onde $(X_{tt} - X_{ss})^\perp$ representa a parte do vetor $X_{tt} - X_{ss}$ que é normal a M , isto é, normal ao plano tangente gerado pelos vetores X_t e X_s .

Sabemos também que $\langle X_t, X_t \rangle_v = -\langle X_s, X_s \rangle_v = \lambda^2$ e $\langle X_t, X_s \rangle_v = 0$; derivando a primeira igualdade nas variáveis t e s , obtemos

$$2\langle X_{tt}, X_t \rangle_v = -2\langle X_{ts}, X_s \rangle_v = 2\langle X_{ts}, X_t \rangle_v = -2\langle X_{ss}, X_s \rangle_v = 0,$$

e derivando a segunda igualdade nas variáveis t e s obtemos

$$\langle X_{tt}, X_s \rangle_v = -\langle X_{ts}, X_t \rangle_v \quad \text{e} \quad -\langle X_{ss}, X_t \rangle_v = \langle X_{ts}, X_s \rangle_v,$$

respectivamente. A partir destas igualdades, por sua vez, observamos que

$$\langle X_{tt} - X_{ss}, X_t \rangle_v = \langle X_{tt} - X_{ss}, X_s \rangle_v = 0,$$

isto é, o vetor $X_{tt} - X_{ss}$ é ortogonal ao plano tangente a M gerado pelos vetores X_t e X_s . Consequentemente, $(X_{tt} - X_{ss})^\perp = X_{tt} - X_{ss}$, e a partir disto e das expressões previamente fornecidas para $\Delta_\Sigma X$ e H é imediato que $\Delta_\Sigma X = 2H$, como desejado. $\square$

Notamos que a fórmula para o operador de Laplace-Beltrami obtida anteriormente corresponde ao d'Alembertiano de Σ , como definido em [2], p. 481. No entanto, se calculássemos este operador sobre uma superfície riemanniana em vez de Σ , obteríamos um laplaciano para essa superfície, como é usual.

A proposição a seguir nos fornecerá uma lista de propriedades importantes de imersões de tipo tempo $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_v^4$.

Proposição 1.23. Sejam Σ uma superfície, $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_v^4$ uma imersão de tipo tempo e consideremos as componentes dessa imersão $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$. Sendo $z = t + js$ coordenadas isotérmicas em Σ , e definindo as funções $\phi_i : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}'$,

$$\phi_i \doteq \frac{\partial X_i}{\partial z} = \frac{1}{2}((X_i)_t + j(X_i)_s)$$

(onde $i = 1, 2, 3$ ou 4), temos que:

1. X é mínima $\iff$ para $i = 1, 2, 3, 4$, $(X_i)_{tt} = (X_i)_{ss} \iff$ para $i = 1, 2, 3, 4$, ϕ_i é paraholomorfa;
2. $\sum_{i=1}^4 \epsilon_i \phi_i^2 = 0$;
3. $\sum_{i=1}^4 \epsilon_i |\phi_i|_{\mathbb{C}'}^2 > 0$.

Demonstração:

1. A primeira equivalência decorre automaticamente da Proposição 1.22 e da fórmula para $\Delta_\Sigma X$ que indicamos em sua demonstração; a segunda equivalência decorre da primeira equação para-Cauchy-Riemann (Proposição 1.5), aplicada às funções $u = (X_i)_t$ e $v = (X_i)_s$.

2.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \epsilon_i \phi_i^2 &= \sum_{i=1}^4 \epsilon_i \left(\frac{1}{2} ((X_i)_t + j(X_i)_s)^2 \right) = \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^4 \epsilon_i (((X_i)_t)^2 + ((X_i)_s)^2 + 2j(X_i)_t(X_i)_s) \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\left(\sum_{i=1}^4 \epsilon_i ((X_i)_t)^2 \right) + \left(\sum_{i=1}^4 \epsilon_i ((X_i)_s)^2 \right) + 2j \left(\sum_{i=1}^4 \epsilon_i (X_i)_t(X_i)_s \right) \right) = \\ &= \frac{1}{4} (\langle X_t, X_t \rangle_\nu + \langle X_s, X_s \rangle_\nu + 2j \langle X_t, X_s \rangle_\nu) = \\ &= \frac{1}{4} (\lambda^2 - \lambda^2 + 0) = 0 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \epsilon_i |\phi_i|_{\mathbb{C}'}^2 &= \sum_{i=1}^4 \epsilon_i \left| \frac{1}{2} ((X_i)_t + j(X_i)_s) \right|_{\mathbb{C}'}^2 = \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^4 \epsilon_i (((X_i)_t)^2 - ((X_i)_s)^2) \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\left(\sum_{i=1}^4 \epsilon_i ((X_i)_t)^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^4 \epsilon_i ((X_i)_s)^2 \right) \right) = \frac{1}{4} (\langle X_t, X_t \rangle_\nu - \langle X_s, X_s \rangle_\nu) = \\ &= \frac{1}{4} (\lambda^2 - (-\lambda^2)) = \frac{\lambda^2}{2} > 0 \end{aligned}$$

□

Utilizaremos esta proposição para tratar do problema de Björling quando a curva fornecida for de tipo espaço. Para tratarmos do caso em que a curva fornecida for de tipo tempo, podemos realizar a mudança de variável $w \doteq jz$ e considerar as funções

$$\psi_i \doteq \frac{\partial X_i}{\partial w} = \frac{\partial X_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial w} = j \frac{\partial X_i}{\partial z} = \frac{1}{2} ((X_i)_s + j(X_i)_t);$$

notamos que todas as conclusões da proposição se sustentam para estas novas funções, com exceção da terceira, que necessita apenas inverter a desigualdade para $\sum_{i=1}^4 \epsilon_i |\psi_i|_{\mathbb{C}'}^2 < 0$.

Observação. Mantendo a notação da proposição anterior, podemos definir localmente em Σ as 1-formas paraholomorfas $\Phi_i \doteq \phi_i dz$ (para $i = 1, 2, 3, 4$). Notamos que somos capazes de definir as formas Φ_i globalmente, isto é, em toda Σ , via mudanças de coordenadas conformes (isto é, que preservam coordenadas isotérmicas a menos de um fator multiplicativo positivo). Além disso, observamos que, dada uma curva suave $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ num aberto simplesmente conexo, temos que

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \int_\gamma \phi_i dz &= 2\operatorname{Re} \int_\gamma \frac{1}{2} ((X_i)_t + j(X_i)_s) (dt + jds) = \\ &= \operatorname{Re} \int_\gamma (X_i)_t dt + (X_i)_s ds + j((X_i)_s dt + (X_i)_t ds) = \\ &= \int_\gamma \operatorname{Re}((X_i)_t dt + (X_i)_s ds + j((X_i)_s dt + (X_i)_t ds)) = \int_\gamma (X_i)_t dt + (X_i)_s ds = \\ &= \int_\gamma dX_i = X_i|_\gamma = X_i(\gamma(1)) - X_i(\gamma(0)); \end{aligned}$$

consequentemente, toda integral de Φ_i (para $i = 1, 2, 3, 4$) sobre uma curva fechada γ num aberto simplesmente conexo tem parte real nula. Dizemos então que as formas Φ_i *não têm períodos reais*.

A observação anterior e a Proposição 1.23 essencialmente nos providenciam uma lista de propriedades necessárias para uma imersão de tipo tempo de uma superfície ser mínima; o teorema a seguir mostra que elas também são suficientes.

Teorema 1.24 (Representação de Weierstrass paracomplexa). *Sejam Σ uma superfície, $(\Phi_i)_{i=1}^4$ quatro 1-formas paraholomorfas globalmente definidas em Σ , e $(\phi_i dz)_{i=1}^4$ as representações locais dessas 1-formas em coordenadas isotérmicas tais que as seguintes propriedades sejam atendidas:*

1. $\sum_{i=1}^4 \epsilon_i \phi_i^2 = 0$;
2. $\sum_{i=1}^4 \epsilon_i |\phi_i|_{C'}^2 > 0$;
3. nenhuma das formas $(\Phi_i)_{i=1}^4$ possui períodos reais.

Então a função $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_v^4$, $X(z) \doteq 2\text{Re}(\int_{\gamma_z} (\Phi_1(w), \Phi_2(w), \Phi_3(w), \Phi_4(w))) + c$ (onde $c \in \mathbb{R}_v^4$ é um vetor constante qualquer e γ_z é uma curva suave por partes qualquer em Σ que liga um ponto base arbitrário z_0 a z) é uma imersão de tipo tempo mínima em $\mathbb{R}_v^4$.

Demonstração: A princípio, precisamos nos assegurar de que a função X está bem definida, isto é, independe da escolha de curva γ_z para um dado $z \in \Sigma$; tomamos então duas curvas suaves quaisquer $\gamma_z^1, \gamma_z^2 : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ tais que $\gamma_z^1(0) = \gamma_z^2(0) = z_0$ e $\gamma_z^1(1) = \gamma_z^2(1) = z$, e observamos que a curva produto $\gamma_z^1 \cdot (\gamma_z^2)^- : [0, 1] \rightarrow \Sigma$, definida por

$$(\gamma_z^1 \cdot (\gamma_z^2)^-)(t) \doteq \begin{cases} \gamma_z^1(2t), & \text{caso } t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ \gamma_z^2(2-2t), & \text{caso } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

é uma curva suave por partes fechada em Σ . Denotemos $\Phi \doteq (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4)$; por nenhuma das formas Φ_i possuir períodos reais, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= 2\text{Re}(\int_{\gamma_z^1 \cdot (\gamma_z^2)^-} (\Phi(w))) = 2\text{Re}(\int_{\gamma_z^1} (\Phi(w)) + \int_{(\gamma_z^2)^-} (\Phi(w))) = 2\text{Re}(\int_{\gamma_z^1} (\Phi(w)) - \int_{\gamma_z^2} (\Phi(w))) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2\text{Re}(\int_{\gamma_z^1} (\Phi(w))) = 2\text{Re}(\int_{\gamma_z^2} (\Phi(w))). \end{aligned}$$

Portanto, por γ_z^1 e γ_z^2 serem quaisquer, X de fato está bem definida.

Em seguida, denotando as coordenadas isotérmicas em Σ por $z = t + js$, $\phi \doteq (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$, e $X(z) = 2\text{Re}(\int_{\gamma_z} \Phi(w))$, observamos que

$$\begin{aligned} X_t(z) &= \frac{\partial}{\partial t} (2\text{Re}(\int_{\gamma_z} \Phi(w))) = 2\text{Re}(\frac{\partial}{\partial t} (\int_{\gamma_z} \Phi(w))) = 2\text{Re}(\phi(z)) \text{ e} \\ X_s(z) &= \frac{\partial}{\partial s} (2\text{Re}(\int_{\gamma_z} \Phi(w))) = 2\text{Re}(\frac{\partial}{\partial s} (\int_{\gamma_z} \Phi(w))) = 2\text{Re}(j\phi(z)) = 2\text{Im}(\phi(z)); \end{aligned}$$

a partir disto, temos que

$$\Phi = \phi dz = (\text{Re}(\phi) + j\text{Im}(\phi))dz = \frac{1}{2}(X_t + jX_s)dz = \frac{\partial X}{\partial z} dz.$$

Em outras palavras, a escolha de notação que realizamos para as representações locais das 1-formas Φ_i não foi arbitrária; em verdade, as funções ϕ_i são precisamente as funções sobre as quais versamos na Proposição 1.23.

Para que X seja de fato uma imersão, é necessário apenas que os vetores $X_t(z), X_s(z) \in \mathbb{R}_v^4$ sejam linearmente independentes para todo $z \in \Sigma$ (pois a derivada de X é composta apenas por esses dois vetores, e sua independência linear asseguraria que a derivada de X possui posto constante 2). Nos valendo das hipóteses sobre as funções ϕ_i e dos cálculos previamente realizados na Proposição 1.23, temos que

$$0 = \sum_{i=1}^4 \epsilon_i \phi_i^2 = \frac{1}{4} (\langle X_t, X_t \rangle_v + \langle X_s, X_s \rangle_v + 2j \langle X_t, X_s \rangle_v) \text{ e}$$

$$0 < \sum_{i=1}^4 \epsilon_i |\phi_i|_{\mathbb{C}'}^2 = \frac{1}{4} (\langle X_t, X_t \rangle_v - \langle X_s, X_s \rangle_v);$$

a igualdade nos permite concluir que X_t e X_s são vetores ortogonais de módulos quadrados opostos, e a desigualdade nos indica que X_t é de tipo espaço enquanto X_s é de tipo tempo. Dado que não é possível um par de vetores com essas propriedades serem colineares, temos que X_t e X_s são linearmente independentes e portanto X é de fato uma imersão.

Finalmente, temos que pelas formas Φ_i serem paraholomorfos, as funções ϕ_i também o são; isto, junto da Proposição 1.23, nos mostra que X é uma imersão mínima, como desejado. $\square$

Utilizaremos esta versão da representação de Weierstrass para tratarmos do problema de Björling quando a curva fornecida for de tipo espaço. Para tratarmos do caso em que a curva fornecida for de tipo tempo, podemos nos valer do mesmo teorema, após substituir as funções ϕ_i pelas funções ψ_i que definimos logo após a Proposição 1.23 e modificar a hipótese 2 para $\sum_{i=1}^4 \epsilon_i |\psi_i|_{\mathbb{C}'}^2 < 0$. Neste caso, concluímos que $\Phi = \psi dw = \frac{\partial X}{\partial w} dw$ (lembrando que $w = jz$).

Capítulo 2

O problema de Björling para superfícies de tipo tempo em $\mathbb{R}_\nu^4$

Vamos agora enunciar formalmente o problema de Björling para superfícies de tipo tempo em $\mathbb{R}_\nu^4$. Para o fazermos, no entanto, as duas definições a seguir são necessárias; a primeira especifica como devem ser os dados iniciais do problema para o termos bem formulado, e a segunda nos dá a forma da extensão paraholomorfa da versão paracomplexa dos campos normais à curva inicial.

Definição 2.1. Uma tira de classe C^k em $\mathbb{R}_\nu^4$ (para $\nu = 1$ ou $\nu = 2$) consiste de um par (c, p) , onde $c : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^4$ (com $I \subset \mathbb{R}$ intervalo aberto e $0 \in I$) é uma curva que não seja de tipo luz de classe C^{k+1} e $p : I \rightarrow (\mathbb{C}')^4$ é um campo vetorial de classe C^k ao longo de c tais que $\langle c', \text{Re}(p) \rangle_\nu = \langle c', \text{Im}(p) \rangle_\nu = 0$, $(-1)^{\nu+1} \langle \text{Re}(p), \text{Re}(p) \rangle_\nu = \langle \text{Im}(p), \text{Im}(p) \rangle_\nu = 1$ e $\langle \text{Re}(p), \text{Im}(p) \rangle_\nu = 0$. Caso c e p sejam suaves, (c, p) é denominada uma tira de classe C^∞ .

Observamos que, nesta definição de tira de classe C^k , os campos vetoriais reais $\text{Re}(p)$ e $\text{Im}(p)$ fazem as vezes dos campos vetoriais u e v normais a c do problema de Björling (como foram denominados na Introdução). Quando nos referíamos à “versão paracomplexa dos campos normais à curva inicial”, estávamos nos referindo ao campo p .

Definição 2.2. Sejam Σ uma superfície, $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_\nu^4$ uma imersão de tipo tempo, $z = t + js$ coordenadas isotérmicas em Σ , e $m \doteq \frac{m_0}{\|m_0\|_\nu}$, $n \doteq \frac{n_0}{\|n_0\|_\nu}$ os vetores obtidos substituindo-se X_t e X_s na Proposição 1.19, como descrito anteriormente no Capítulo 1. Definimos então o seguinte campo vetorial:

$$A : \Sigma \rightarrow (\mathbb{C}')^4, \quad A(z) \doteq n(z) + jm(z).$$

Notamos que as partes real e imaginária do campo A são, de fato, os vetores geradores do espaço normal à superfície $M = X(\Sigma)$ em cada ponto.

Problema de Björling para superfícies de tipo tempo. Dada uma tira de classe C^k (com $k \geq 2$) (c, p) em $\mathbb{R}_\nu^4$ definida sobre um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ ($0 \in I$), existem uma superfície Σ e uma imersão de tipo tempo mínima $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_\nu^4$ tais que $X(t, 0) = c(t)$ e $A(t, 0) = p(t)$ para todo $t \in I$, onde $z = t + js$ são coordenadas isotérmicas em Σ ? Caso exista, essa imersão é única?

O problema de Björling fornecido por uma dada tira de classe C^k (c, p) é denominado de tipo espaço se a curva c é de tipo espaço, e de tipo tempo se a curva c é de tipo tempo. Neste segundo caso, utilizamos uma notação diferente da enunciada anteriormente: pedimos que X seja tal que $X(0, s) = c(s)$ e $A(0, s) = p(s)$ para todo $s \in I$.

Observação. Na formulação do problema de Björling, é pedido que $k \geq 2$ para assegurar a existência das extensões determinísticas paraholomorfas de c e p (vide a Proposição 1.7), de forma que de fato seja possível obter uma solução do problema dada por coordenadas em $\mathbb{C}'$.

Teorema 2.3 (Forma da solução do problema tipo espaço). *Sejam Σ uma superfície, $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_V^4$ uma imersão de tipo tempo mínima e $V \subset \mathbb{C}'$, $0 \in V$ um aberto no qual se encontram as coordenadas isotérmicas tomadas em Σ . Além disso, definamos em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ (com $0 \in I$) a curva $c : I \rightarrow \mathbb{R}_V^4$, $c(t) \doteq X(t, 0)$ e o campo vetorial $p : I \rightarrow (\mathbb{C}')^4$, $p(t) \doteq A(t, 0)$. Tomemos $W \subset V$ um aberto simplesmente conexo no qual temos definidas extensões paraholomorfas de c e p (isto é, considerando I como um subconjunto de $\mathbb{C}'$, em particular $I \subset W$) e suponhamos que c é uma curva de tipo espaço. Então, para todo $z \in W$, temos que*

$$X(z) = \operatorname{Re} \left(c(z) + j \int_{\gamma_z} \boxtimes (\operatorname{Re}(p(w)), \operatorname{Im}(p(w)), c'(w)) dw \right),$$

onde c e p representam, em um abuso de notação, as extensões paraholomorfas dessas respectivas funções, e γ_z é uma curva suave qualquer em W que liga um ponto base arbitrário z_0 a z .

Demonstração: Sendo $z = t + js$ as coordenadas isotérmicas em Σ , definamos funções ϕ_i (para $i = 1, 2, 3, 4$) como na Proposição 1.23. Esta mesma proposição automaticamente nos mostra que, a partir da minimalidade de Σ , as funções ϕ_i são paraholomorfas.

Relembramos do capítulo anterior que, por X_t e X_s atenderem às hipóteses da Proposição 1.19, temos que, para todo $z \in V$ tais que $m_0(z)$ e $n_0(z)$ não são de tipo luz, os vetores $\left\{ \frac{X_t(z)}{\lambda}, \frac{X_s(z)}{\lambda}, \frac{m_0(z)}{\|m_0(z)\|_V}, \frac{n_0(z)}{\|n_0(z)\|_V} \right\}$ constituem uma base ortonormal positivamente orientada de $\mathbb{R}_V^4$ adaptada a M .

Escrevendo $b_1 \doteq \frac{X_t}{\lambda}$, $b_2 \doteq \frac{X_s}{\lambda}$, $m = b_3 \doteq \frac{m_0}{\|m_0\|_V}$ e $n = b_4 \doteq \frac{n_0}{\|n_0\|_V}$, observamos que

$$\boxtimes(b_4, b_3, b_1) = \langle \boxtimes(b_4, b_3, b_1), b_2 \rangle_V b_2 = \begin{vmatrix} b_2 \\ b_4 \\ b_3 \\ b_1 \end{vmatrix} b_2 = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{vmatrix} b_2 = b_2, \text{ logo}$$

$$\frac{\partial X}{\partial z}(z) = \frac{1}{2}(X_t(z) + jX_s(z)) = \frac{1}{2}(X_t(z) + j\boxtimes(n(z), m(z), X_t(z))).$$

Podemos então restringir a igualdade anterior a I , obtendo

$$\frac{\partial X}{\partial z}(t, 0) = \frac{1}{2}(X_t(t, 0) + j\boxtimes(n(t, 0), m(t, 0), X_t(t, 0))) = \frac{1}{2}(c'(t) + j\boxtimes(\operatorname{Re}(p(t)), \operatorname{Im}(p(t)), c'(t))).$$

Em seguida, a partir das extensões paraholomorfas de c e p em W (que sabemos serem únicas pela Proposição 1.8) e denotando $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$, temos que

$$\phi(z) = \frac{\partial X}{\partial z}(z) = \frac{1}{2}(c'(z) + j\boxtimes(\operatorname{Re}(p(z)), \operatorname{Im}(p(z)), c'(z)))$$

para todo $z \in W$. Pela Proposição 1.23, a observação subsequente, e o fato de W ser simplesmente conexo (isto é o que nos permite escolher z_0 arbitrário, por não afetar a integração), temos que as funções ϕ_i e as 1-formas associadas Φ_i atendem a todas as hipóteses do Teorema 1.24; consequentemente, temos que

$$\begin{aligned} X(z) &= 2\operatorname{Re} \left(\int_{\gamma_z} \Phi(w) \right) = 2\operatorname{Re} \left(\int_{\gamma_z} \left(\frac{1}{2}(c'(w) + j\boxtimes(\operatorname{Re}(p(w)), \operatorname{Im}(p(w)), c'(w))) \right) dw \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left(c(z) + j \int_{\gamma_z} \boxtimes(\operatorname{Re}(p(w)), \operatorname{Im}(p(w)), c'(w)) dw \right), \end{aligned}$$

como desejado. □

Corolário 2.4 (Forma da solução do problema tipo tempo). *Tomemos novamente as hipóteses do Teorema 2.3, salvo apenas as seguintes modificações: definimos a curva c como $c(s) \doteq X(0, s)$, o campo vetorial p como $p(s) \doteq A(0, s)$ e suponhamos que c é uma curva de tipo tempo. Então, para todo $w \in W$, temos que*

$$X(w) = \operatorname{Re} \left(c(w) - j \int_{\gamma_w} \boxtimes(\operatorname{Re}(p(z)), \operatorname{Im}(p(z)), c'(z)) dz \right),$$

onde c e p representam, em um abuso de notação, as extensões paraholomorfas dessas respectivas funções, e γ_w é uma curva suave qualquer em W que liga um ponto base arbitrário w_0 a w .

Demonstração: Podemos aplicar novamente o mesmo raciocínio empregado na demonstração do Teorema 2.3, considerando $w = jz$ e as funções ψ_i no lugar das funções ϕ_i . A única diferença notável ocorre pois

$$\boxtimes(b_4, b_3, b_2) = \langle \boxtimes(b_4, b_3, b_2), b_1 \rangle_\nu b_1 = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_4 \\ b_3 \\ b_2 \end{vmatrix} b_1 = - \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{vmatrix} b_1 = -b_1, \text{ logo}$$

$$\frac{\partial X}{\partial w}(w) = \frac{1}{2}(X_s(w) + jX_t(w)) = \frac{1}{2}(X_s(w) - j\boxtimes(n(w), m(w), X_s(w))).$$

Isto causa a diferença de sinal que observamos entre as duas fórmulas de representação. $\square$

Teorema 2.5 (Existência e unicidade da solução). *Dada um tira de classe C^k (c, p) em $\mathbb{R}_\nu^4$, existe uma única solução local para o problema de Björling para superfícies representadas por imersões de tipo tempo. Especificamente, essa solução é fornecida pela fórmula de representação obtida no Teorema 2.3.*

Demonstração: Consideremos, sem perda de generalidade, que estamos tratando do problema de Björling tipo espaço. Sejam $I \subset \mathbb{R}$, com $0 \in I$, o intervalo aberto no qual a tira (c, p) está definida e $W \subset \mathbb{C}'$, com $I \subset W$, um aberto simplesmente conexo no qual c e p possuam extensões paraholomorfas. Nos valendo dessas extensões, podemos então definir a função paraholomorfa

$$\phi : W \rightarrow (\mathbb{C}')^4, \quad \phi(z) \doteq \frac{1}{2}(c'(z) + j\boxtimes(\operatorname{Re}(p(z)), \operatorname{Im}(p(z)), c'(z))).$$

Restringindo ϕ a I (utilizando as coordenadas $z = t + js$) e nos valendo dos fatos que um produto vetorial é sempre perpendicular aos seus “multiplicandos”, (c, p) é uma tira de classe C^k , e da Proposição 1.18, observamos que $c'(t)$ e $\boxtimes(\operatorname{Re}(p(t)), \operatorname{Im}(p(t)), c'(t))$ são ortogonais entre si e $\langle \boxtimes(\operatorname{Re}(p(t)), \operatorname{Im}(p(t)), c'(t)), \boxtimes(\operatorname{Re}(p(t)), \operatorname{Im}(p(t)), c'(t)) \rangle_\nu = -\langle c'(t), c'(t) \rangle_\nu$ para todo $t \in I$. Logo, temos que $\phi(t, 0) = v + jw$, onde $v, w \in \mathbb{R}_\nu^4$ são vetores ortogonais e de módulos quadrados de valores opostos; conseqüentemente, considerando a representação

$$\phi(t, 0) = (\phi_i(t, 0))_{i=1}^4 = (v_i + jw_i)_{i=1}^4,$$

temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \epsilon_i \phi_i(t, 0)^2 &= \sum_{i=1}^4 \epsilon_i (v_i + jw_i)^2 = \sum_{i=1}^4 \epsilon_i v_i^2 + 2j \sum_{i=1}^4 \epsilon_i v_i w_i + \sum_{i=1}^4 \epsilon_i w_i^2 = \\ &= \langle v, v \rangle_\nu + 2j \langle v, w \rangle_\nu + \langle w, w \rangle_\nu = 0 \text{ e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \epsilon_i |\phi_i(t, 0)|_{\mathbb{C}'}^2 &= \sum_{i=1}^4 \epsilon_i (v_i^2 - w_i^2) = \sum_{i=1}^4 \epsilon_i v_i^2 - \sum_{i=1}^4 \epsilon_i w_i^2 = \langle v, v \rangle - \langle w, w \rangle = 2 \langle c'(t, 0), c'(t, 0) \rangle > \\ &> 0. \end{aligned}$$

Utilizando as extensões paraholomorfas de c e p em W , a Proposição 1.8, e potencialmente reduzindo W , temos que

$$\sum_{i=1}^4 \epsilon_i \phi_i(z)^2 = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^4 \epsilon_i |\phi_i(z)|_{\mathbb{C}'}^2 > 0 \quad \forall z \in W$$

(a redução de W pode ser necessária para garantir que a desigualdade seja verdadeira). Observamos também que, dada uma curva suave fechada em W $\gamma : [0, 1] \rightarrow W$, temos que por ϕ ser paraholomorfa, W ser simplesmente conexo e pelo Corolário 1.11,

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma} \phi(z) dz = \operatorname{Re}(0) = 0,$$

isto é, as 1-formas $\phi(z)dz$ não têm períodos reais em W . Em resumo, as funções ϕ_i e as 1-formas associadas $\Phi_i(z) = \phi(z)dz$ cumprem as hipóteses do Teorema 1.24, logo a função dada por

$$X(z) \doteq 2\operatorname{Re} \left(\int_{\gamma_z} (\Phi(w)) \right) = \operatorname{Re} \left(c(z) + j \int_{\gamma_z} \boxtimes (\operatorname{Re}(p(w)), \operatorname{Im}(p(w)), c'(w)) dw \right)$$

é uma imersão de tipo tempo mínima de uma superfície em $\mathbb{R}_v^4$.

Resta apenas verificar que X representa de fato uma solução do problema de Björling para os dados iniciais c e p , isto é, que valem as igualdades $X(t, 0) = c(t)$ e $A(t, 0) = p(t)$. De fato, restringindo X a I observamos que os vetores $c(t, 0)$ e $\boxtimes(\operatorname{Re}(p(t, 0)), \operatorname{Im}(p(t, 0)), c'(t, 0))$ são ambos reais, logo $X(t, 0) = c(t, 0) = c(t)$, como desejado. Além disso, derivando X em s temos que $X_s(t, 0) = \boxtimes(\operatorname{Re}(p(t, 0)), \operatorname{Im}(p(t, 0)), c'(t, 0)) = \boxtimes(\operatorname{Re}(p(t)), \operatorname{Im}(p(t)), c'(t))$, e nos valendo da base ortonormal $\left\{ \frac{X_t}{\lambda}, \frac{X_s}{\lambda}, \frac{m_0}{\|m_0\|_v}, \frac{n_0}{\|n_0\|_v} \right\}$ adaptada a M temos também que

$$X_s(t, 0) = \boxtimes(n(t, 0), m(t, 0), X_t(t, 0)) = \boxtimes(n(t), m(t), c'(t)).$$

Concluimos então que $\operatorname{Re}(p(t)) = n(t)$ e $\operatorname{Im}(p(t)) = m(t)$, isto é,

$$A(t, 0) = n(t) + jm(t) = \operatorname{Re}(p(t)) + j\operatorname{Im}(p(t)) = p(t),$$

como desejado.

Finalmente, a unicidade local desta solução advém diretamente da unicidade de extensões paraholomorfas, neste caso das extensões de c e p : dado que a solução X depende apenas das extensões de c e p , temos que em um domínio R (como especificado na Proposição 1.7, para algum $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $[-r, r] \subset I$) X é a única solução do problema de Björling para os dados iniciais (c, p) . $\square$

A partir destas fórmulas de representação que obtivemos para o problema de Björling em $\mathbb{R}_v^4$, podemos recuperar a fórmula de representação para o problema de Björling em $\mathbb{R}_1^3$; basta considerarmos o subespaço vetorial $[e_1 = 0] \subset \mathbb{R}_1^4$, que observamos ser correspondente a $\mathbb{R}_1^3$. Dado que o problema de Björling em ambientes de três dimensões necessita apenas de um campo vetorial normal à curva, nós tomamos e_1 como sendo um campo vetorial constante redundante que nos permite utilizar as fórmulas obtidas para ambientes de quatro dimensões.

Corolário 2.6. *Sejam $k \geq 2$, $I \subset \mathbb{R}$, com $0 \in I$, um intervalo aberto, $c : I \rightarrow [e_1 = 0] \subset \mathbb{R}_1^4$ uma curva de classe C^{k+1} de tipo espaço e $p : I \rightarrow (\mathbb{C}')^4$, $p(t) \doteq e_1 + ju(t)$ um campo vetorial de classe C^k ao longo de c tal que $u \in [e_1 = 0]$ é um vetor unitário de tipo espaço com $\langle c', u \rangle_1 = 0$. Então existe uma única solução para o problema de Björling fornecida por essa tira de classe C^k em um aberto simplesmente*

conexo $W \subset \mathbb{C}'$ no qual c e u possuem extensões paraholomorfas, e ela é dada por

$$X(z) = \operatorname{Re} \left(c(z) - j \int_{\gamma_z} (u(w) \times_{\mathbb{R}_1^3} c'(w)) dw \right),$$

onde c e u representam, em um abuso de notação, as extensões paraholomorfas dessas respectivas funções, γ_z é uma curva suave qualquer em W que liga um ponto base arbitrário z_0 a z , e $\times_{\mathbb{R}_1^3}$ é o produto vetorial em $\mathbb{R}_1^3$. De maneira análoga, a única solução para o problema de Björling fornecida por essa tira de classe C^k quando c é de tipo tempo é

$$X(w) = \operatorname{Re} \left(c(w) + j \int_{\gamma_w} (u(z) \times_{\mathbb{R}_1^3} c'(z)) dz \right).$$

Demonstração: É suficiente mostrarmos o caso em que c é de tipo espaço, pois o caso em que c é de tipo tempo é demonstrado de maneira inteiramente análoga. Pelas definições de c e p , observamos que

$$\begin{aligned} \langle c', \operatorname{Re}(p) \rangle_v &= \langle c', e_1 \rangle_v = 0, & \langle c', \operatorname{Im}(p) \rangle_v &= \langle c', u \rangle_v = 0, \\ \langle \operatorname{Re}(p), \operatorname{Re}(p) \rangle_v &= \langle e_1, e_1 \rangle_v = 1, & \langle \operatorname{Im}(p), \operatorname{Im}(p) \rangle_v &= \langle u, u \rangle_v = 1 \\ \text{e } \langle \operatorname{Re}(p), \operatorname{Im}(p) \rangle_v &= \langle e_1, u \rangle_v = 0; \end{aligned}$$

isto é, (c, p) é uma tira de classe C^k em $\mathbb{R}_1^4$. Pelos teoremas 2.5 e 2.3, temos que existe uma única solução para o problema de Björling dado por essa tira de classe C^k , e essa solução tem a forma

$$\begin{aligned} X(z) &= \operatorname{Re} \left(c(z) + j \int_{\gamma_z} \boxtimes(\operatorname{Re}(p(w)), \operatorname{Im}(p(w)), c'(w)) dw \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left(c(z) + j \int_{\gamma_z} \boxtimes(e_1, u(w), c'(w)) dw \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left(c(z) + j \int_{\gamma_z} \boxtimes(u(w), c'(w), e_1) dw \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left(c(z) - j \int_{\gamma_z} (u(w) \times_{\mathbb{R}_1^3} c'(w)) dw \right), \end{aligned}$$

como desejado. □

Exemplo 2.7 ([8], [9], [10]). Listaremos a seguir alguns exemplos de superfícies mínimas de tipo tempo obtidas a partir de uma curva, um par de campos normais e as fórmulas de representação para soluções do problema de Björling. Utilizaremos para os cálculos desses exemplos as fórmulas para as extensões paraholomorfas das funções trigonométricas exibidas em [8] e [9], para as coordenadas $z = t + js$:

$$\begin{cases} \cos z &= \cos t \cos s - j \sin t \sin s \\ \sin z &= \sin t \cos s + j \cos t \sin s \\ \cosh z &= \cosh t \cosh s + j \sinh t \sinh s \\ \sinh z &= \sinh t \cosh s + j \cosh t \sinh s \end{cases}$$

- Em $\mathbb{R}_1^4$, tomemos a curva tipo espaço $c(t) = (0, \cos t, \sin t, 0)$ e o campo vetorial normal complexificado $p(t) = (0, \cos t, \sin t, 0) + j(\cosh t, 0, 0, \sinh t)$. Observamos que (c, p) é uma tira de classe C^∞ em $\mathbb{R}_1^4$, o que nos permite, pelos teoremas 2.5 e 2.3, obter a superfície

mínima de tipo tempo

$$\begin{aligned}
 X(z) = X(t, s) &= \operatorname{Re} \left(c(z) + j \int_{\gamma_z} \boxtimes (\operatorname{Re}(p(w)), \operatorname{Im}(p(w)), c'(w)) dw \right) = \\
 &= \operatorname{Re} \left((0, \cos z, \operatorname{sen} z, 0) + j \int_{\gamma_z} (-\operatorname{senh} w, 0, 0, \cosh w) dw \right) = \\
 &= \operatorname{Re}((0, \cos z, \operatorname{sen} z, 0) + j(-\cosh z, 0, 0, \operatorname{senh} z)) = \\
 &= (-\operatorname{senh} t \operatorname{senh} s, \cos t \cos s, \operatorname{sen} t \cos s, \cosh t \operatorname{senh} s).
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

- Em $\mathbb{R}_2^4$, tomemos a curva tipo tempo $c(s) = (0, 0, \cos s, \operatorname{sen} s)$ e o campo vetorial normal complexificado $p(s) = (0, 0, \cos s, \operatorname{sen} s) + j(\cos s, -\operatorname{sen} s, 0, 0)$. Observamos que (c, p) é uma tira de classe C^∞ em $\mathbb{R}_2^4$, o que nos permite, pelos teoremas 2.5 e 2.4, obter a superfície mínima de tipo tempo

$$\begin{aligned}
 X(w) = X(s, t) &= \operatorname{Re} \left(c(w) - j \int_{\gamma_w} \boxtimes (\operatorname{Re}(p(z)), \operatorname{Im}(p(z)), c'(z)) dz \right) = \\
 &= \operatorname{Re} \left((0, 0, \cos w, \operatorname{sen} w) - j \int_{\gamma_w} (\operatorname{sen} z, \cos z, 0, 0) dz \right) = \\
 &= \operatorname{Re}((0, 0, \cos w, \operatorname{sen} w) - j(-\cos w, \operatorname{sen} w, 0, 0)) = \\
 &= (-\operatorname{sen} t \operatorname{sen} s, -\operatorname{sen} t \cos s, \cos t \cos s, \cos t \operatorname{sen} s).
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

- Vamos realizar a construção explícita de uma superfície mínima em $\mathbb{R}_1^3$, identificando-o com o subespaço $[e_1 = 0]$ de $\mathbb{R}_1^4$. Para isto, tomamos a curva $c(t) = (0, 0, \operatorname{senh} t, \cosh t)$, de tipo espaço, e o campo normal complexificado $p(t) = (1, 0, 0, 0) + j(0, 0, \operatorname{senh} t, \cosh t)$. Observamos que (c, p) é uma tira de classe C^∞ em $\mathbb{R}_1^4$, o que nos permite, conforme o Corolário 2.6, obter parametrização

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \operatorname{Re} \left((0, \operatorname{senh} z, \cosh z) - j \int_{\gamma_z} (0, \operatorname{senh} w, \cosh w) \times_{\mathbb{R}_1^3} (0, \cosh w, \operatorname{senh} w) dw \right) \\
 &= (0, s, \operatorname{senh} t \cosh s, \cosh t \cosh s).
 \end{aligned}$$

Figura 2.1: Solução do Problema de Björling em $\mathbb{R}_1^3$

- Este exemplo, inicialmente apresentado para $\mathbb{R}_1^3$, evidencia o porquê de não considerarmos o problema de Björling para curvas de tipo luz. Em $\mathbb{R}_1^4$, tomemos a curva de tipo luz $c_1(t) = (0, 2t^2, \frac{4}{3}t^3 - t, \frac{4}{3}t^3 + t)$, e o vetor normal unitário ao longo de c_1 $N(t) = (0, 1, 2t, 2t)$. Podemos tomar também um par de curvas de tipo luz

$$c_2(s) = (0, \frac{1}{2}(\cosh(2s) - 1), s, \frac{1}{2}(\sinh(2s))) \quad \text{e} \quad c_3(t) = (0, 0, s, s).$$

Então $X(t, s) \doteq c_1(t) + c_2(s)$ e $Y(t, s) \doteq c_1(t) + c_3(s)$ são duas superfícies mínimas distintas, ambas contendo a curva c_1 e tendo como vetores normais ao longo dessa curva e_1 e $N(t)$; em outras palavras, caso formulássemos o problema de Björling para curvas de tipo luz, não teríamos como garantir a unicidade de suas soluções. É por esta razão que nos restringimos a estudar o problema de Björling para curvas de tipo espaço e de tipo tempo.

Exemplo 2.8. Uma maneira simples de obter um problema de Björling a partir apenas de uma curva é considerando o referencial de Frenet dela; dado que os campos vetoriais pertencentes a esse referencial são naturalmente ortogonais à curva (exceto, evidentemente, pelo campo vetorial tangente à curva que também pertence a este referencial), temos que eles são uma excelente escolha para o campo vetorial normal à superfície.

Mais precisamente, consideremos $\nu = 1$, e sejam $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^4$ (com I intervalo, $0 \in I$) uma curva suave de tipo tempo e $T, N, B, R : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^4$ os campos vetoriais de comprimento unitário que compõem o referencial de Frenet para γ (a escolha de ν e do tipo de causal de γ serão esclarecidas logo). Observamos que os pares (c_1, p_1) e (c_2, p_2) , dados por

$$c_1(t) = c_2(t) \doteq \gamma(t), \quad p_1(t) \doteq N(t) + jB(t) \quad \text{e} \quad p_2(t) \doteq N(t) + jR(t),$$

são ambas tiras analíticas em $\mathbb{R}_1^4$. Estas tiras analíticas dão origem a dois problemas de Björling de tipo tempo, de respectivas soluções

$$X(z) = \text{Re}(c(z) - j \int_{\gamma_z} \boxtimes(N(w), B(w), T(w))dw) \text{ e}$$

$$Y(z) = \text{Re}(c(z) - j \int_{\gamma_z} \boxtimes(N(w), R(w), T(w))dw).$$

Observamos que, para todo $t \in I$, $X_t(t, 0) = Y_t(t, 0) = T(t)$, $X_s(t, 0)$ é paralelo a $R(t)$ e $Y_s(t, 0)$ é paralelo a $B(t)$; em outras palavras, as superfícies dadas por X e Y se intersectam ortogonalmente ao longo de $\gamma(t)$, tendo $N(t)$ como um campo normal comum entre elas. Podemos então definir um terceiro campo vetorial $p_3(t, \theta) \doteq N(t) + j(\cos(\theta)B(t) + \sin(\theta)R(t))$ (onde $\theta \in [0, 2\pi[)$ normal a $c_3(t) \doteq \gamma(t)$; observamos diretamente a partir desta definição que

$$\langle \gamma', \text{Re}(p_3) \rangle_\nu = \langle \gamma', \text{Im}(p_3) \rangle_\nu = \langle \text{Re}(p_3), \text{Im}(p_3) \rangle_\nu = 0,$$

e além disso

$$\begin{aligned} 1 &= \langle N, N \rangle_\nu = \langle \text{Re}(p_3), \text{Re}(p_3) \rangle_\nu = \\ &= \cos^2(\theta) + 0 + \sin^2(\theta) = \cos^2(\theta) \langle B, B \rangle_\nu + 2\cos(\theta)\sin(\theta) \langle B, R \rangle_\nu + \sin^2(\theta) \langle R, R \rangle_\nu = \\ &= \langle \cos(\theta)B + \sin(\theta)R, \cos(\theta)B + \sin(\theta)R \rangle_\nu = \langle \text{Im}(p_3), \text{Im}(p_3) \rangle_\nu. \end{aligned}$$

Isto significa que (c_3, p_3) é uma tira analítica, e portanto dá origem a um problema de Björling com solução

$$Z(\theta, z) = \text{Re}(c(z) - j \int_{\gamma_z} \boxtimes(N(w), \cos(\theta)B(w) + \sin(\theta)R(w), T(w))dw).$$

Mais geralmente, podemos dizer que desta forma obtemos uma família a 1-parâmetro (neste caso, θ) de tiras suaves e uma família a 1-parâmetro correspondente de soluções dos problemas de Björling associados a essas tiras.

Observamos que o campo vetorial p_3 faz com que (c_3, p_3) seja uma tira analítica apenas porque o seu componente imaginário $\cos(\theta)B(t) + \sin(\theta)R(t)$ é, para todo $\theta \in [0, 2\pi[$, um vetor tipo espaço; foi para assegurar isto que pedimos inicialmente que γ fosse uma curva de tipo tempo, pois desta forma T sempre é um vetor tipo tempo e consequentemente N, B e R sempre são vetores de tipo espaço. Foi por esse mesmo motivo que pedimos inicialmente que $\nu = 1$; caso $\nu = 2$, existe algum $\theta \in [0, 2\pi[$ tal que o componente imaginário de p_3 seja um vetor tipo luz. É possível obter um intervalo em torno de 0 e aberto $J \subset \mathbb{R}$ tal que $\cos(\theta)B(t) + \sin(\theta)R(t)$ seja um vetor de tipo espaço ou tempo para todo $\theta \in J$, mas não podemos fazer uma afirmação “global” tal como no primeiro caso que enunciamos. Podemos desta mesma forma fazer uma afirmação mais restrita no caso de γ ser uma curva de tipo espaço, tanto para o caso $\nu = 1$ quanto para o caso $\nu = 2$.

Capítulo 3

Simetrias das soluções do problema de Björling

3.1 Simetrias via reflexão de Schwarz paracomplexa

O primeiro tipo de simetria das soluções do problema de Björling que estudamos é baseado no princípio de reflexão de Schwarz: examinamos como uma dada solução de um problema de Björling, que tenha as coordenadas isotérmicas de seu domínio definidas em um aberto de $\mathbb{C}'$ simétrico em torno do eixo real, comporta-se relativamente à conjugação da variável paracomplexa. Para começarmos, precisamos enunciar precisamente a versão paracomplexa do princípio de reflexão de Schwarz, mas antes de sermos capazes de fazer isto precisaremos dos seguintes três lemas.

Lema 3.1. *Seja $D \subset \mathbb{C}'$ um aberto simplesmente conexo tal que $I \doteq \partial D \cap \mathbb{R}$ (onde ∂D denota a fronteira de D) é um intervalo e, para todo $z \in D$, $\text{Im}(z) > 0$. Seja também $f : D \cup I \rightarrow \mathbb{C}'$ uma função paraholomorfa em D e contínua em $D \cup I$ tal que $f(z) \in \mathbb{R}$ para todo $z \in I$. Então conseguimos definir uma extensão paraholomorfa $\tilde{f}$ de f em $D \cup I \cup \bar{D}$, onde $\bar{D} = \{\bar{z} \mid z \in D\}$.*

Demonstração: Primeiramente, podemos definir $\tilde{f} : \bar{D} \cup I \rightarrow \mathbb{C}$ através de $\tilde{f}(z) \doteq \overline{f(\bar{z})}$; por f assumir apenas valores reais em I , temos que, para todo $z \in I$, $f(z) = \tilde{f}(z)$. Além disso, utilizando a decomposição $f = u + jv$ e as coordenadas $z = t + js$, observamos que

$$\tilde{f}(z) = \tilde{f}(t, s) = \overline{f(t, -s)} = u(t, -s) - jv(t, -s);$$

logo, para $z \in \bar{D}$, temos que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{Re}(\tilde{f}(z))) = u_t(t, -s) = v_s(t, -s) = \frac{\partial}{\partial s}(\text{Im}(\tilde{f}(z))) \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}(\text{Re}(\tilde{f}(z))) = -u_s(t, -s) = -v_t(t, -s) = \frac{\partial}{\partial t}(\text{Im}(\tilde{f}(z))),$$

isto é, são válidas as equações para-Cauchy-Riemann de $\tilde{f}$ (ou seja, $\tilde{f}$ é paraholomorfa) em $\bar{D}$.

Podemos então definir a função $\tilde{f} : D \cup I \cup \bar{D}$,

$$\tilde{f}(z) \doteq \begin{cases} f(z) & \text{caso } z \in D \cup I; \\ \tilde{f}(z) & \text{caso } z \in \bar{D}. \end{cases}$$

Notamos que $\tilde{f}$ é contínua em todo o seu domínio e é paraholomorfa em $D \cup \bar{D}$. Para que $\tilde{f}$ seja a extensão paraholomorfa que desejamos, resta apenas verificar que $\tilde{f}$ é paraholomorfa sobre o intervalo I . Consideremos então a decomposição $\tilde{f} = \tilde{u} + j\tilde{v}$, lembrando que a paraholomorfia

de $\tilde{f}$ garante que suas partes real e imaginária são de classe C^1 , definimos as derivadas parciais de $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$ em I através os seguintes limites:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_t(t, 0) &\doteq \lim_{h \rightarrow 0} \tilde{u}_t(t, h), & \tilde{u}_s(t, 0) &\doteq \lim_{h \rightarrow 0} \tilde{u}_s(t, h), \\ \tilde{v}_t(t, 0) &\doteq \lim_{h \rightarrow 0} \tilde{v}_t(t, h) & \text{e} & \tilde{v}_s(t, 0) \doteq \lim_{h \rightarrow 0} \tilde{v}_s(t, h).\end{aligned}$$

Observamos que o primeiro e o último limites estão bem definidos, pois

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0^+} \tilde{u}_t(t, h) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} u_t(t, h) = \lim_{h \rightarrow 0^-} u_t(t, -h) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \tilde{u}_t(t, h) & \text{e} \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \tilde{v}_s(t, h) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} v_s(t, h) = \lim_{h \rightarrow 0^-} v_s(t, -h) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \tilde{v}_s(t, h).\end{aligned}$$

Relembramos que, para todo $z \in I$, $\tilde{f}(z) \in \mathbb{R}$, e portanto $\tilde{v}(t, 0) = 0$ para todo $t \in I$. Consequentemente, pela continuidade de $\tilde{v}$ em $D \cup I$ e pela continuidade de v_t em D , temos que $\lim_{h \rightarrow 0^+} \tilde{v}_t(t, h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} v_t(t, h) = 0$, e pelas equações para-Cauchy-Riemann para f em D temos que $\lim_{h \rightarrow 0^+} \tilde{u}_s(t, h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} u_s(t, h) = 0$. Portanto, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0^+} \tilde{u}_s(t, h) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} u_s(t, h) = 0 = \lim_{h \rightarrow 0^+} -u_s(t, h) = \lim_{h \rightarrow 0^-} -u_s(t, -h) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \tilde{u}_s(t, h) & \text{e} \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \tilde{v}_t(t, h) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} v_t(t, h) = 0 = \lim_{h \rightarrow 0^+} -v_t(t, h) = \lim_{h \rightarrow 0^-} -v_t(t, -h) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \tilde{v}_t(t, h),\end{aligned}$$

isto é, o segundo e terceiro limites definidos anteriormente também estão bem definidos. Imediatamente a partir das definições destes limites, temos que $\tilde{u}_t(t, 0) = \tilde{v}_s(t, 0)$ e $\tilde{u}_s(t, 0) = \tilde{v}_t(t, 0)$, isto é, são válidas as equações para-Cauchy-Riemann de $\tilde{f}$ (ou seja, $\tilde{f}$ é paraholomorfa) em I . Em suma, $\tilde{f}$ é uma extensão paraholomorfa de f em $D \cup I \cup \overline{D}$, como desejado. $\square$

Lema 3.2. *Sejam $f : \mathbb{C}' \rightarrow \mathbb{C}'$ uma função paraholomorfa e $M_1, M_2 \in M_2(\mathbb{R})$, $M_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}$ matrizes invertíveis. Então a função $g \doteq M_2 \circ f \circ M_1^{-1}$ é paraholomorfa se e somente se as matrizes M_1 e M_2 são ambas da forma $M_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$, ou ambas da forma $M_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & -a_i \end{pmatrix}$.*

Demonstração: Primeiro, assumiremos que ambas as matrizes M_1 e M_2 são da forma $M_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$. Denotando $z = t + js$, $f = u + jv$ e $g = x + jy$, observamos que

$$\begin{aligned}dg &= M_2 \circ df \circ M_1^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_t & x_s \\ y_t & y_s \end{pmatrix} = \frac{1}{a_1^2 - b_1^2} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_t & u_s \\ v_t & v_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} x_t & x_s \\ y_t & y_s \end{pmatrix} = \frac{1}{a_1^2 - b_1^2} \begin{pmatrix} a_2 u_t + b_2 v_t & a_2 u_s + b_2 v_s \\ b_2 u_t + a_2 v_t & b_2 u_s + a_2 v_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} x_t & x_s \\ y_t & y_s \end{pmatrix} = \frac{1}{a_1^2 - b_1^2} \begin{pmatrix} a_1(a_2 u_t + b_2 v_t) - b_1(a_2 u_s + b_2 v_s) & a_1(a_2 u_s + b_2 v_s) - b_1(a_2 u_t + b_2 v_t) \\ a_1(b_2 u_t + a_2 v_t) - b_1(b_2 u_s + a_2 v_s) & a_1(b_2 u_s + a_2 v_s) - b_1(b_2 u_t + a_2 v_t) \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} x_t & x_s \\ y_t & y_s \end{pmatrix} = \frac{1}{a_1^2 - b_1^2} \begin{pmatrix} a_1(a_2 u_t + b_2 u_s) - b_1(a_2 u_s + b_2 u_t) & a_1(a_2 u_s + b_2 u_t) - b_1(a_2 u_t + b_2 u_s) \\ a_1(b_2 u_t + a_2 u_s) - b_1(b_2 u_s + a_2 u_t) & a_1(b_2 u_s + a_2 u_t) - b_1(b_2 u_t + a_2 u_s) \end{pmatrix};\end{aligned}$$

consequentemente, $x_t = y_s$ e $x_s = y_t$. Pela Proposição 1.5, temos que g é paraholomorfa, como desejado. O cálculo para o caso em que M_1 e M_2 são ambas da forma $M_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & -a_i \end{pmatrix}$ é inteiramente análogo.

Suponhamos agora que g é paraholomorfa. Mantendo a notação utilizada anteriormente, temos que

$$\begin{aligned}
 dg = M_2 \circ df \circ M_1^{-1} &\Rightarrow \begin{pmatrix} x_t & x_s \\ y_t & y_s \end{pmatrix} = \frac{1}{a_1 d_1 - b_1 c_1} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_t & u_s \\ v_t & v_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & -b_1 \\ -c_1 & a_1 \end{pmatrix} \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} x_t & x_s \\ y_t & y_s \end{pmatrix} = \frac{1}{a_1 d_1 - b_1 c_1} \begin{pmatrix} a_2 u_t + b_2 v_t & a_2 u_s + b_2 v_s \\ c_2 u_t + d_2 v_t & c_2 u_s + d_2 v_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & -b_1 \\ -c_1 & a_1 \end{pmatrix} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} d_1(a_2 u_t + b_2 v_t) - c_1(a_2 u_s + b_2 v_s) = -b_1(c_2 u_t + d_2 v_t) + a_1(c_2 u_s + d_2 v_s) \\ -b_1(a_2 u_t + b_2 v_t) + a_1(a_2 u_s + b_2 v_s) = d_1(c_2 u_t + d_2 v_t) - c_1(c_2 u_s + d_2 v_s) \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} u_t(d_1 a_2 - c_1 b_2) + u_s(d_1 b_2 - c_1 a_2) = u_t(a_1 d_2 - b_1 c_2) + u_s(a_1 c_2 - b_1 d_2) \\ u_t(a_1 b_2 - b_1 a_2) + u_s(a_1 a_2 - b_1 b_2) = u_t(d_1 c_2 - c_1 d_2) + u_s(d_1 d_2 - c_1 c_2) \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} (a_1 d_2 - d_1 a_2 + c_1 b_2 - b_1 c_2)u_t + (a_1 c_2 + c_1 a_2 - b_1 d_2 - d_1 b_2)u_s = 0 \\ (a_1 b_2 - b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2)u_t + (a_1 a_2 - b_1 b_2 + c_1 c_2 - d_1 d_2)u_s = 0 \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} (a_1 d_2 - d_1 a_2 + c_1 b_2 - b_1 c_2) & (a_1 c_2 + c_1 a_2 - b_1 d_2 - d_1 b_2) \\ (a_1 b_2 - b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) & (a_1 a_2 - b_1 b_2 + c_1 c_2 - d_1 d_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_t \\ u_s \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};
 \end{aligned}$$

Pelo vetor (u_t, u_s) não ser identicamente nulo, temos que a matriz

$$M = \begin{pmatrix} (a_1 d_2 - d_1 a_2 + c_1 b_2 - b_1 c_2) & (a_1 c_2 + c_1 a_2 - b_1 d_2 - d_1 b_2) \\ (a_1 b_2 - b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) & (a_1 a_2 - b_1 b_2 + c_1 c_2 - d_1 d_2) \end{pmatrix}$$

deve ter determinante nulo; consequentemente, temos que

$$\begin{aligned}
 0 = \det M &= (a_1 d_2 - d_1 a_2 + c_1 b_2 - b_1 c_2)(a_1 a_2 - b_1 b_2 + c_1 c_2 - d_1 d_2) - \\
 &\quad - (a_1 c_2 + c_1 a_2 - b_1 d_2 - d_1 b_2)(a_1 b_2 - b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) = \\
 &= a_1^2(a_2 d_2 - b_2 c_2) + d_2^2(b_1 c_1 - a_1 d_1) + a_2^2(b_1 c_1 - a_1 d_1) + d_1^2(a_2 d_2 - b_2 c_2) + \\
 &\quad + c_1^2(b_2 c_2 - a_2 d_2) + b_2^2(a_1 d_1 - b_1 c_1) + b_1^2(b_2 c_2 - a_2 d_2) + c_2^2(a_1 d_1 - b_1 c_1) - \\
 &\quad - a_1 b_1 b_2 d_2 + a_1 c_1 c_2 d_2 + a_1 b_1 b_2 d_2 - a_1 c_1 c_2 d_2 + \\
 &\quad + a_2 b_1 b_2 d_1 - a_2 c_1 c_2 d_1 - a_2 b_1 b_2 d_1 + a_2 c_1 c_2 d_1 + \\
 &\quad + a_1 a_2 b_2 c_1 - b_2 c_1 d_1 d_2 - a_1 a_2 b_2 c_1 + b_2 c_1 d_1 d_2 - \\
 &\quad - a_1 a_2 b_1 c_2 + b_1 c_2 d_1 d_2 + a_1 a_2 b_1 c_2 - b_1 c_2 d_1 d_2 = \\
 &= (-a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - d_2^2) \det M_1 + (a_1^2 - b_1^2 - c_1^2 + d_1^2) \det M_2 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow (a_2^2 - b_2^2 - c_2^2 + d_2^2) \det M_1 = (a_1^2 - b_1^2 - c_1^2 + d_1^2) \det M_2 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \frac{(a_2^2 - b_2^2 - c_2^2 + d_2^2)}{\det M_2} = \frac{(a_1^2 - b_1^2 - c_1^2 + d_1^2)}{\det M_1}.
 \end{aligned}$$

Dado que as matrizes M_1 e M_2 são independentes entre si, temos que as funções $h_1, h_2 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h_i(a_i, b_i, c_i, d_i) \doteq \frac{(a_i^2 - b_i^2 - c_i^2 + d_i^2)}{a_i d_i - b_i c_i}$$

são ambas constantes, em virtude de $h_1(a_1, b_1, c_1, d_1) = h_2(a_2, b_2, c_2, d_2)$. Podemos então tomar as derivadas parciais destas funções; por exemplo,

$$(h_i)_{a_i} = \frac{2a_i(a_i d_i - b_i c_i) - d_i(a_i^2 - b_i^2 - c_i^2 + d_i^2)}{(a_i d_i - b_i c_i)^2} = 0 \Rightarrow 2a_i(a_i d_i - b_i c_i) - d_i(a_i^2 - b_i^2 - c_i^2 + d_i^2) = 0.$$

Neste caso, se $d_i = 0$, então $a_i b_i c_i = 0$; no entanto, por $\det M_i = -b_i c_i \neq 0$, então necessariamente $a_i = 0$, e portanto $a_i = d_i = 0$. Se $d_i \neq 0$, obtemos então $h_i = 2 \frac{a_i}{d_i}$. Tomando as derivadas de h_i em relação às outras variáveis, obtemos por simetria que ou $a_i = d_i = 0$ (novamente), $b_i = c_i = 0$ ou $h_i = 2 \frac{a_i}{d_i} = 2 \frac{d_i}{a_i} = 2 \frac{b_i}{c_i} = 2 \frac{c_i}{b_i}$. A partir destas igualdades, e lembrando que as funções h_i são constantes, temos que

$$\begin{cases} a_i^2 &= d_i^2 \\ b_i^2 &= c_i^2 \\ a_i b_i &= c_i d_i \\ a_i c_i &= b_i d_i \end{cases}$$

As duas primeiras igualdades deste sistema nos mostram que $a_i = \pm d_i$ e $b_i = \pm c_i$, e as duas últimas nos mostram que, se uma dessas primeiras igualdades inverte sinal, então a outra também deve fazê-lo; por exemplo, se $a_i = -d_i$, então necessariamente $b_i = -c_i$. Além disso, por $h_1 = h_2$, temos que os sinais dessas primeiras igualdades devem ser os mesmos para $i = 1$ e $i = 2$; por exemplo, se $a_1 = d_1$, então necessariamente $a_2 = d_2$. Em suma, temos que as matrizes M_1 e M_2 são ambas da forma $M_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$, ou ambas da forma $M_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & -a_i \end{pmatrix}$, como desejado. $\square$

Lema 3.3. *Toda reta não-degenerada que passa pela origem em $\mathbb{C}'$ pode ser transportada ao eixo real através de uma matriz de forma $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.*

Demonstração: Toda reta não degenerada de $\mathbb{C}'$ que passa pela origem (exceto a reta vertical) pode ser representada pela função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}'$, $f(t) \doteq (t, \alpha t)$, com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Desejamos obter uma matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ tal que } \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \alpha t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix};$$

consequentemente, temos que

$$\begin{cases} at + \alpha bt &= t \\ bt + \alpha at &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a + \alpha b)t &= t \\ (b + \alpha a)t &= 0 \end{cases}$$

Dado que essas igualdades são trivialmente verdadeiras quando $t = 0$, podemos assumir a partir daqui que $t \neq 0$, o que nos permite obter

$$\begin{cases} a + \alpha b &= 1 \\ b + \alpha a &= 0 \end{cases}$$

A partir da segunda equação deste sistema, obtemos $b = -\alpha a$, e substituindo isto na primeira equação temos que $a + \alpha(-\alpha a) = 1$. Isto nos permite concluir que

$$a = \frac{1}{1 - \alpha^2}, \text{ e portanto } b = \frac{\alpha}{\alpha^2 - 1}.$$

Por estes coeficientes dependerem apenas de α e estarem bem definidos por $\alpha \neq 1$, temos que a matriz por eles dada é de fato a matriz que desejamos. $\square$

Observação. Notamos que

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\alpha^2} & \frac{\alpha}{\alpha^2-1} \\ \frac{\alpha}{\alpha^2-1} & \frac{1}{1-\alpha^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{1-\alpha^2},$$

isto é, matrizes com esta forma sempre têm determinante não nulo e portanto são invertíveis.

Munidos destes lemas, podemos demonstrar a versão paracomplexa do princípio de reflexão de Schwarz.

Teorema 3.4 (Reflexão de Schwarz paracomplexa). *Seja $W \subset \mathbb{C}'$ um aberto simplesmente conexo tal que $\text{Im}(z) > 0$, para todo $z \in W$, e existe $I \subset \partial W$ (onde ∂W denota a fronteira de D) reta não degenerada. Seja também $f : W \cup I \rightarrow \mathbb{C}'$ uma função paraholomorfa em W e contínua em $W \cup I$ tal que $\text{Im}(f(z)) > 0$ e que $I^* \doteq \{f(z)/z \in I\}$ seja também uma reta não degenerada. Então podemos obter uma extensão paraholomorfa $\tilde{f}$ de f ao domínio $W \cup I \cup W^*$, onde W^* é a reflexão de W ao longo do eixo determinado pela reta I .*

Demonstração: Sejam M e M^* as matrizes que transportam as retas não-degeneradas I e I^* , respectivamente, ao eixo real; conhecemos as formas que elas possuem pelo Lema 3.3. Observamos que as matrizes que possuem essa forma são precisamente um dos tipos de matrizes que preservam a paraholomorfia de funções, como dado no Lema 3.2; consequentemente, a função $g : M(W \cup I) \rightarrow M^*(f(W \cup I))$, $g \doteq M^* \circ f \circ M^{-1}$ é uma função paraholomorfa em $M(W)$ e contínua em $M(W \cup I)$. Além disso, sendo J a imagem de I por M e J^* a imagem de I^* por M^* , notamos que g é uma função que transporta J em J^* (isto é, assume valores reais na parte real de seu domínio) e tem J como parte da fronteira de seu domínio.

Podemos aplicar o Lema 3.1 a g e obter sua extensão paraholomorfa $\tilde{g}$ em $M(W) \cup J \cup \overline{M(W)}$. Consequentemente, podemos definir a função desejada como

$$\tilde{f} : W \cup I \cup W^* \rightarrow \mathbb{C}', \quad \tilde{f} \doteq (M^*)^{-1} \circ \tilde{g} \circ M,$$

que é uma extensão paraholomorfa de f pelo Lema 3.2. □

Observação. Notamos que, estritamente falando, seria possível tentarmos incluir no teorema anterior reflexões ao longo de retas degeneradas em $\mathbb{C}'$, uma vez que a reflexão ao longo de tais retas pode ser simplesmente representada pela multiplicação pela unidade paracomplexa j (ou $-j$, dependendo da reta). Não o fazemos pois o conceito de $\mathbb{C}'$ -diferenciabilidade não está definido sobre tais retas. Seria possível obter funções contínuas em um domínio simplesmente conexo e paraholomorfas em duas componentes conexas desse domínio, mas seríamos incapazes de assegurar a paraholomorfia dessa extensão na reta degenerada que separaria essas duas componentes, e estamos interessados apenas em extensões que sejam por inteiro paraholomorfas.

Tendo agora o princípio de reflexão de Schwarz bem estabelecido para funções paracomplexas, podemos utilizá-lo para estudar o comportamento das soluções do problema de Björling, como apresentadas no Teorema 2.3 e Corolário 2.4, quando submetidas a reflexões em seu domínio.

Teorema 3.5 (Reflexão de Schwarz do problema tipo espaço). *Sejam Σ uma superfície e $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_v^4$ uma imersão de tipo tempo mínima que seja uma solução de um problema de Björling tipo espaço para uma dada tira analítica (c, p) definida em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$. Seja também $W \subset \mathbb{C}'$, $I \subset W$ um aberto simplesmente conexo e simétrico em torno do eixo real (isto é, $z \in W \Leftrightarrow \bar{z} \in W$) no qual se encontram as coordenadas isotérmicas tomadas em Σ e no qual temos definidas extensões paraholomorfas de c e p . Então, para todo $z \in W$, temos que*

$$X(\bar{z}) = \text{Re} \left(c(z) - j \int_{\gamma_z} \boxtimes (\text{Re}(p(w)), \text{Im}(p(w)), c'(w)) dw \right).$$

Demonstração: Definamos a função $\bar{X} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_v^4$, $\bar{X}(z) \doteq X(\bar{z})$; expressando isto nas coordenadas isotérmicas $z = t + js$, temos que $\bar{X}(t, s) = X(t, -s)$. Derivando $\bar{X}$ em t e s , obtemos $\bar{X}_t(t, s) = X_t(t, -s)$ e $\bar{X}_s(t, s) = -X_s(t, -s)$, logo $\bar{X}$ ainda representa uma superfície de tipo tempo; derivando novamente em t e s , obtemos $\bar{X}_{tt} = X_{tt}(t, -s) = X_{ss}(t, -s) = \bar{X}_{ss}(t, s)$, o que nos indica que $\bar{X}$ é também uma imersão mínima. Além disso, substituindo os vetores u e v da

Proposição 1.19 por $\bar{X}_t$ e $\bar{X}_s$, respectivamente, obtemos os vetores

$$\begin{aligned}\tilde{m}_0(t, s) &= \boxtimes(\bar{X}_t(t, s), \bar{X}_s(t, s), e_1) = \boxtimes(X_t(t, -s), -X_s(t, -s), e_1) = \\ &= -\boxtimes(X_t(t, -s), X_s(t, -s), e_1) = -m_0(t, -s) \text{ e} \\ \tilde{n}_0(t, s) &= \boxtimes\left(\frac{\bar{X}_t(t, s)}{\lambda}, \frac{\bar{X}_s(t, s)}{\lambda}, \tilde{m}_0(t, s)\right) = \boxtimes\left(\frac{X_t(t, -s)}{\lambda}, -\frac{X_s(t, -s)}{\lambda}, -m_0(t, -s)\right) = \\ &= \boxtimes\left(\frac{X_t(t, -s)}{\lambda}, \frac{X_s(t, -s)}{\lambda}, m_0(t, -s)\right) = n_0(t, -s);\end{aligned}$$

logo, assumindo que $\tilde{m}_0(t, s)$ e $\tilde{n}_0(t, s)$ não são de tipo luz (que, como comentamos no capítulo anterior, é automático para $v = 1$ mas não é necessariamente verdadeiro em toda Σ para $v = 2$), podemos considerar os vetores $\tilde{m} \doteq \frac{\tilde{m}_0}{\|\tilde{m}_0\|_v}$ e $\tilde{n} \doteq \frac{\tilde{n}_0}{\|\tilde{n}_0\|_v}$, e a partir deles observar que

$$\tilde{A}(t, s) = \tilde{n}(t, s) + j\tilde{m}(t, s) = n(t, -s) - jm(t, -s) = \bar{A}(t, -s).$$

Temos então que $\bar{X}(t, 0) = X(t, 0) = c(t)$ e $\tilde{A}(t, 0) = \bar{A}(t, 0) = \bar{p}(t)$, isto é, $\bar{X}$ é solução do problema de Björling dado pela tira analítica $(c, \bar{p})$. Portanto, temos que

$$\begin{aligned}X(\bar{z}) &= \bar{X}(z) = \operatorname{Re} \left(c(z) + j \int_{\gamma_z} \boxtimes(\operatorname{Re}(\bar{p}(w)), \operatorname{Im}(\bar{p}(w)), c'(w)) dw \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left(c(z) + j \int_{\gamma_z} \boxtimes(\operatorname{Re}(p(w)), -\operatorname{Im}(p(w)), c'(w)) dw \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left(c(z) - j \int_{\gamma_z} \boxtimes(\operatorname{Re}(p(w)), \operatorname{Im}(p(w)), c'(w)) dw \right),\end{aligned}$$

como desejado. □

Corolário 3.6 (Reflexão de Schwarz do problema tipo tempo). *Tomemos novamente as hipóteses do Teorema 3.5, salvo apenas que o problema de Björling considerado é de tipo tempo. Então, para todo $w \in W$, temos que*

$$X(\bar{w}) = \operatorname{Re} \left(c(w) + j \int_{\gamma_w} \boxtimes(\operatorname{Re}(p(z)), \operatorname{Im}(p(z)), c'(z)) dz \right).$$

Demonstração: De maneira análoga ao que fizemos na demonstração do Corolário 2.4, podemos aplicar novamente o mesmo raciocínio empregado na demonstração do Teorema 3.5; a única diferença entre os dois casos reside no uso da fórmula para a solução do problema de Björling tipo tempo ao invés da fórmula para a solução do problema tipo espaço, resultando em

$$\begin{aligned}X(\bar{w}) &= \bar{X}(w) = \operatorname{Re} \left(c(w) - j \int_{\gamma_w} \boxtimes(\operatorname{Re}(\bar{p}(z)), \operatorname{Im}(\bar{p}(z)), c'(z)) dz \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left(c(w) - j \int_{\gamma_w} \boxtimes(\operatorname{Re}(p(z)), -\operatorname{Im}(p(z)), c'(z)) dz \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left(c(w) + j \int_{\gamma_w} \boxtimes(\operatorname{Re}(p(z)), \operatorname{Im}(p(z)), c'(z)) dz \right),\end{aligned}$$

como desejado. □

3.2 Simetrias via reflexão ao longo de k -planos

O segundo tipo de simetria das soluções do problema de Björling que estudamos é mais direto do que o primeiro; dada uma superfície de tipo tempo e um plano de simetria dessa superfície, examinamos como a solução do problema de Björling que corresponde a essa superfície (caso exista) se comporta relativa à reflexão em torno desse plano. Para começarmos, precisamos definir o que consideramos ser um plano de simetria para $\mathbb{R}_V^4$.

Definição 3.7. *Sejam Σ uma superfície, $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_V^4$ uma imersão de tipo tempo e $\Pi^k \subset \mathbb{R}_V^4$ um plano k -dimensional ($k = 1, 2$ ou 3) tal que $M \cap \Pi^k \neq \emptyset$. Dizemos que Π^k intersecta $M = X(\Sigma)$ ortogonalmente se, para todo $p \in M \cap \Pi^k$, os espaços $T_p M \cap T_p \Pi^k$ e $T_p M \cap (T_p \Pi^k)^\perp$ sejam ambos 1-dimensionais.*

Observação. Imediatamente a partir desta definição, notamos que toda reta contida em M automaticamente intersecta M ortogonalmente.

Definição 3.8. *Sejam Σ uma superfície, $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_V^4$ uma imersão de tipo tempo mínima, $V \subset \mathbb{C}'$, $0 \in V$ um aberto no qual se encontram coordenadas tomadas em Σ e $\Pi^k \subset \mathbb{R}_V^4$ um plano k -dimensional ($k = 1, 2$ ou 3) que intersecta M ortogonalmente. Π^k é denominado um plano de simetria de M se existem uma transformação linear $A : \mathbb{R}_V^4 \rightarrow \mathbb{R}_V^4$ e um difeomorfismo $T : V \rightarrow V$ tais que $A^2 = \text{Id}$, $A(p) = p$ para todo $p \in \Pi^k$, $A(p) \neq p$ para todo $p \in \mathbb{R}_V^4 \setminus \Pi^k$, e $A \circ X = X \circ T$. Além disso, dependendo de Π^k ser ou não degenerado (isto é, se Π^k for ou não gerado por um ou mais vetores de tipo luz), certas condições adicionais devem ser satisfeitas por A .*

- se Π^k não for degenerado, A precisa ser ortogonal.
- se Π^k for degenerado, desejamos que $\mathbb{R}_V^4 = W \oplus W'$, onde W e W' são subespaços invariantes por A tais que $A|_W$ é ortogonal e $A|_{W'}$ é antiortogonal, isto é, $\langle A(v), A(w) \rangle_v = -\langle v, w \rangle_v$, para todos $v, w \in W'$.

A partir desta definição observamos imediatamente que, não importando se Π^k é ou não degenerado, para todo $p \in \Sigma$,

$$A\left(\frac{(A(p) + p)}{2}\right) = \frac{(A^2(p) + A(p))}{2} = \frac{p + A(p)}{2},$$

isto é, $\frac{(A(p) + p)}{2} \in \Pi^k$. Além disso, supondo que Π^k não é degenerado, temos que para todo $z \in V$, $\pi \in \Pi^k$,

$$\begin{aligned} \langle X(z) - A(X(z)), \pi \rangle_v &= \langle X(z), \pi \rangle_v - \langle A(X(z)), \pi \rangle_v = \langle X(z), \pi \rangle_v - \langle A(X(z)), A(\pi) \rangle_v = \\ &= \langle X(z), \pi \rangle_v - \langle X(z), \pi \rangle_v = 0, \end{aligned}$$

isto é, $X(z) - A(X(z)) \perp \Pi^k$. Estas duas condições são precisamente aquelas que caracterizam um plano de simetria em $\mathbb{R}^n$; temos então que nossa definição no caso não degenerado corresponde à definição original, como desejado. Reciprocamente, a partir da definição original, podemos obter a transformação A , então as duas definições são de fato equivalentes no caso não degenerado.

Quando $k = 1$ e Π^1 não é degenerado, observamos que A consiste de uma rotação (possivelmente hiperbólica) em torno de Π^1 . Neste caso nos referimos a Π^1 como um *eixo* de simetria, em lugar de um 1-plano de simetria.

Proposição 3.9. *Sejam Σ uma superfície, $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_v^4$ uma imersão de tipo tempo e $\Pi^k \subset \mathbb{R}_v^4$ um plano de simetria não degenerado de M . Então existe uma base ortonormal de $\mathbb{R}_v^4$ na qual a transformação linear A é diagonalizada de forma que os elementos de sua diagonal sejam ou 1 ou -1 .*

Demonstração: Por Π^k ser não degenerado, sabemos que $\mathbb{R}_v^4 = \Pi^k \oplus W$; basta então tomar uma base ortonormal para Π^k e uma para W . A combinação dessas duas bases nos fornece uma base ortonormal para $\mathbb{R}_v^4$ (pela soma dos dois espaços ser uma soma direta), e as propriedades de A fornecidas pela Definição 3.8 indicam que a matriz de A nessa base deve ter sua diagonal composta de 1 (nas entradas correspondentes aos elementos da base de Π^k) e -1 (nas entradas correspondentes aos elementos da base de W). $\square$

Exemplo. Seja $\Pi^2 = [e_1, e_2]$, onde $(e_i)_{i=1}^4$ é a base ortonormal de $\mathbb{R}_v^4$ obtida na proposição anterior a partir de Π^2 ; então a transformação linear A associada a Π^2 é diagonalizada como

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Observação. Nos casos em que Π^k é degenerado, podemos obter $(e_i)_{i=1}^4$, uma base ortonormal de $\mathbb{R}_v^4$ a partir de Π^k , de maneira idêntica à utilizada na proposição anterior, mas as formas matriciais que obtemos para A não são diagonais. As composições dessas matrizes são mais facilmente descritas via exemplos, vide [8]:

- $\Pi^1 = [e_1 + e_4] \Rightarrow A$ tem forma matricial $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $\Pi^2 = [e_1 + e_4, e_2] \Rightarrow A$ tem forma matricial $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- considerando $v = 2$, $\Pi^2 = [e_1 + e_4, e_2 + e_3] \Rightarrow A$ tem forma matricial $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A partir destes exemplos, observamos que a forma matricial de A no caso degenerado necessariamente deve permutar os vetores da base $(e_i)_{i=1}^4$ que compõem os vetores de tipo luz que geram Π^k , pois caso contrário as matrizes seriam ortogonais.

Vamos agora elencar os tipos de subespaços de $\mathbb{R}_v^4$ que podemos considerar como planos de simetria de Σ ; por simplicidade, vamos representar cada um desses tipos através dos indicadores dos vetores que geram esses subespaços (mais o número 0 para representar vetores de tipo luz). Desta maneira, as retas de $\mathbb{R}_1^4$ são representadas por (1) , (-1) , e (0) , os 2-planos por $(1, 1)$, $(1, -1)$, e $(1, 0)$, e os 3-planos por $(1, 1, -1)$, $(1, 1, 1)$, e $(1, 1, 0)$. Por sua vez, as retas de $\mathbb{R}_2^4$ são representadas por (1) , (-1) , e (0) , os 2-planos por $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(1, 0)$, $(-1, -1)$, $(-1, 0)$, e $(0, 0)$, e os 3-planos por $(1, 1, -1)$, $(1, -1, -1)$, e $(1, -1, 0)$. Observamos que podemos descartar alguns desses subespaços de nosso rol: $(-1, -1)$ é correspondente a $(1, 1)$, $(-1, 0)$ é correspondente a $(1, 0)$, e $(1, -1, -1)$ é correspondente a $(1, 1, -1)$. Além disso, podemos também desconsiderar (0) , $(0, 0)$, $(1, 1, 0)$, e $(1, -1, 0)$, pois como veremos a seguir desejamos que os nossos planos de simetria intersectem superfícies ao longo de curvas de tipo espaço ou de tipo tempo; estes

subespaços, em virtude de terem subespaços ortogonais degenerados (ou, no caso de (0) , ser ele próprio uma reta degenerada), não podem intersectar ortogonalmente uma superfície ao longo de uma curva não degenerada (pois a intersecção desse subespaço ortogonal com o espaço tangente à superfície teria que ser de tipo tempo ou de tipo espaço, o que é impossível).

A seguir, vamos estabelecer o teorema que versa sobre simetrias de superfícies representadas por imersões de tipo tempo mínimas ao longo de subespaços não-degenerados de $\mathbb{R}_v^4$. Para fazê-lo, precisamos antes enunciar um lema e uma definição que são necessários para a demonstração desse teorema.

Lema 3.10. *Sejam Σ uma superfície, $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_v^4$ uma imersão de tipo tempo mínima, $0 \in W$ um aberto simplesmente conexo e simétrico em torno do eixo real no qual se encontram coordenadas $z = t + js$ tomadas em Σ , e $I \doteq W \cap \mathbb{R}$. Denotando $X = (X_i)_{i=1}^4$, temos que:*

1. *se, $\forall t \in I$, $c(t) \doteq X(t, 0) \subset [e_1]$, então $X(t, -s) = (X_1(t, s), -X_2(t, s), -X_3(t, s), -X_4(t, s))$;*
2. *se, $\forall s \in I$, $c(s) \doteq X(0, s) \subset [e_4]$, então $X(s, -t) = (-X_1(s, t), -X_2(s, t), -X_3(s, t), X_4(s, t))$;*
3. *se, $\forall t \in I$, $c(t) \doteq X(t, 0) \subset \Pi^2 = [e_1, e_2]$ e Π^2 intersecta Σ ortogonalmente, então $X(t, -s) = (X_1(t, s), X_2(t, s), -X_3(t, s), -X_4(t, s))$;*
4. *se, $\forall s \in I$, $c(s) \doteq X(0, s) \subset \Pi^2 = [e_1, e_4]$ e Π^2 intersecta Σ ortogonalmente, então $X(s, -t) = (X_1(s, t), -X_2(s, t), -X_3(s, t), X_4(s, t))$;*
5. *assumindo $v = 1$, se, $\forall t \in I$, $c(t) \doteq X(t, 0) \subset \Pi^3 = [e_1, e_2, e_3]$ e Π^3 intersecta Σ ortogonalmente, então $X(t, -s) = (X_1(t, s), X_2(t, s), X_3(t, s), -X_4(t, s))$;*
6. *se, $\forall s \in I$, $c(s) \doteq X(0, s) \subset \Pi^3 = [e_2, e_3, e_4]$ e Π^2 intersecta Σ ortogonalmente, então $X(s, -t) = (-X_1(s, t), X_2(s, t), X_3(s, t), X_4(s, t))$;*

Demonstração:

1. Definamos $p(t) \doteq A(t, 0)$; temos a partir da Definição 2.2 que $c(t) = (c_1(t), 0, 0, 0)$, $Re(p(t)) = (0, n_2(t), n_3(t), n_4(t))$ e $Im(p(t)) = (0, m_2(t), m_3(t), m_4(t))$. Observamos, a partir da fórmula explícita para o produto vetorial, que $\boxtimes(Re(p(t)), Im(p(t)), c'(t))$ tem sua primeira coordenada nula, o que nos permite denotar este produto vetorial resumidamente como $(0, \boxtimes_2(t), \boxtimes_3(t), \boxtimes_4(t))$. Nos valendo das fórmulas para $X(z)$ e $X(\bar{z})$ fornecidas pelos teoremas 2.3 e 3.5, obtemos

$$X(z) = \left(Re(c_1(z)), Im\left(\int_{\gamma_z} \boxtimes_2(w)dw\right), Im\left(\int_{\gamma_z} \boxtimes_3(w)dw\right), Im\left(\int_{\gamma_z} \boxtimes_4(w)dw\right) \right) e$$

$$X(\bar{z}) = \left(Re(c_1(z)), -Im\left(\int_{\gamma_z} \boxtimes_2(w)dw\right), -Im\left(\int_{\gamma_z} \boxtimes_3(w)dw\right), -Im\left(\int_{\gamma_z} \boxtimes_4(w)dw\right) \right),$$

e comparando estas fórmulas obtemos o resultado desejado.

2. Podemos aplicar novamente o mesmo raciocínio empregado na demonstração do item anterior, mas utilizando as equações fornecidas pelos corolários 2.4 e 3.6.
3. Definamos $p(t) \doteq A(t, 0)$; temos a partir da Definição 2.2 que $c(t) = (c_1(t), c_2(t), 0, 0)$, $Re(p(t)) = (n_1(t), n_2(t), n_3(t), n_4(t))$ e $Im(p(t)) = (m_1(t), m_2(t), m_3(t), m_4(t))$. Relembramos que, pelos vetores $\left\{ \frac{X_t}{\lambda}, \frac{X_s}{\lambda}, \frac{m_0}{\|m_0\|_v}, \frac{n_0}{\|n_0\|_v} \right\}$ constituírem uma base ortonormal positivamente orientada de $\mathbb{R}_v^4$, $X_s(t, 0) = \boxtimes(Re(p(t)), Im(p(t)), c'(t))$; além disso, pela definição de intersecção ortogonal (3.7) e o fato de que $X(t, 0) = c(t) \subset \Pi^2 = [e_1, e_2]$, temos que $X_s(t, 0) \subset (\Pi^2)^\perp = [e_3, e_4]$. Portanto, podemos resumir esse produto vetorial como

$$\boxtimes(Re(p(t)), Im(p(t)), c'(t)) = (0, 0, \boxtimes_3(t), \boxtimes_4(t)).$$

Nos valendo das fórmulas para $X(z)$ e $X(\bar{z})$ fornecidas pelos teoremas 2.3 e 3.5, obtemos

$$X(z) = \left(\operatorname{Re}(c_1(z)), \operatorname{Re}(c_2(z)), \operatorname{Im}\left(\int_{\gamma_z} \boxtimes_3(w)dw\right), \operatorname{Im}\left(\int_{\gamma_z} \boxtimes_4(w)dw\right) \right) \text{ e}$$

$$X(\bar{z}) = \left(\operatorname{Re}(c_1(z)), \operatorname{Re}(c_2(z)), -\operatorname{Im}\left(\int_{\gamma_z} \boxtimes_3(w)dw\right), -\operatorname{Im}\left(\int_{\gamma_z} \boxtimes_4(w)dw\right) \right),$$

e comparando estas fórmulas obtemos o resultado desejado.

4. Podemos aplicar novamente o mesmo raciocínio empregado na demonstração do item anterior, mas utilizando as equações fornecidas pelos corolários 2.4 e 3.6.

Finalmente, os itens 5 e 6 são demonstrados de maneira idêntica aos itens 3 e 4, respectivamente, nos fornecendo então todos resultados que desejávamos. $\square$

Observação. No item 5 do lema anterior, assumimos que $\nu = 1$ para assegurar que $[e_1, e_2, e_3]$ fosse um 3-plano de tipo espaço; em $\mathbb{R}_2^4$, $[e_1, e_2, e_3]$ é um plano de tipo tempo e então por correspondência caímos no caso abrangido pelo item 6 do lema.

Este lema é, em verdade, a base do teorema que desejamos enunciar. No entanto, para sermos capazes de obter uma afirmação mais geral (isto é, válida para qualquer subespaço não-degenerado que intersecta ortogonalmente a superfície), precisamos de um sistema de coordenadas específico, o qual a definição seguinte permitirá obter.

Definição 3.11. *Sejam $\Sigma \subset \mathbb{R}_\nu^4$ uma superfície, $(\Phi_i)_{i=1}^4$ quatro 1-formas paraholomorfas globalmente definidas em Σ , e $(\phi_i dz)_{i=1}^4$ as representações locais dessas 1-formas em coordenadas isotérmicas tais que sejam atendidas as condições do Teorema 1.24; então a função $X^* : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_\nu^4$,*

$$X^*(z) \doteq 2\operatorname{Im}\left(\int_{\gamma_z} (\Phi_1(w), \Phi_2(w), \Phi_3(w), \Phi_4(w))\right) + c$$

(onde $c \in \mathbb{R}_\nu^4$ é um vetor constante qualquer e γ_z é uma curva suave por caminhos qualquer em Σ que liga um ponto base arbitrário z_0 a z) é uma imersão mínima em $\mathbb{R}_\nu^4$, que denominamos a imersão conjugada de X .

Como a nomenclatura sugere, uma imersão conjugada X^* é a função conjugada harmônica de X , isto é, a função tal que $\mathfrak{X} : \Sigma \rightarrow (\mathbb{C}')^4$, $\mathfrak{X} \doteq X + jX^*$ seja uma função paraholomorfa. Isto ocorre pois, diretamente da definição de imersão conjugada, temos que $X_t^* = X_s$ e $X_s^* = X_t$, isto é, X e X^* satisfazem as equações para-Cauchy-Riemann.

Teorema 3.12. *Sejam Σ uma superfície e $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_\nu^4$ uma imersão de tipo tempo mínima. Temos que:*

1. *toda reta não degenerada contida em M é um eixo de simetria de M ;*
2. *todo 2-plano de tipo espaço ou tempo que intersecta M ortogonalmente ao longo de uma curva não degenerada é um 2-plano de simetria de M ;*
3. *todo 3-plano de tipo espaço ou tempo que intersecta M ortogonalmente ao longo de uma curva não degenerada é um 3-plano de simetria de M ;*

Observamos que 3-planos de tipo espaço surgem apenas em $\mathbb{R}_1^4$; em $\mathbb{R}_2^4$ todos os 3-planos são ou de tipo tempo ou de tipo luz.

Demonstração: Denotamos o subespaço k -dimensional que intersecta ortogonalmente M fornecido pelas hipóteses por Π^k . Somos então capazes de, através de um movimento rígido em $\mathbb{R}_v^4$, transportar esse subespaço para seu correspondente gerado por elementos da base de $\mathbb{R}_v^4$, como indicados no Lema 3.10; por exemplo, se Π^1 é uma reta tipo espaço, ela é transportada para $[e_1]$ (caso 1 do Lema 3.10), mas se Π^2 é um 2-plano tipo tempo ele é transportado para $[e_1, e_4]$ (caso 4 do Lema 3.10), e assim por diante.

Desejamos agora encontrar um sistema de coordenadas paracomplexo $z = u + jv$ em Σ tal que a curva regular c ao longo da qual Π^k (que agora é gerado por elementos da base de $\mathbb{R}_v^4$) intersecta ortogonalmente Σ possa ser parametrizada como $c(u) = X(u, 0)$ ou $c(v) = X(0, v)$, dependendo do tipo causal de Π^k . Os candidatos que consideramos para este sistema de coordenadas são os números reais (X_i, X_i^*) , onde X^* é a imersão conjugada de Σ e $i = 1, 2, 3, 4$; para que esses números sejam de fato capazes de servirem como coordenadas de $\mathbb{C}'$, é necessário apenas que $X_i \neq X_i^*$ e $X_i \neq -X_i^*$, para evitar que $u + jv = X_i + jX_i^*$ represente apenas divisores de zero em $\mathbb{C}'$. Relembramos que $(X_i^*)_t = (X_i)_s$ e $(X_i^*)_s = (X_i)_t$, por X^* ser a função coordenada harmônica de X ; temos então que

$$X_i = \pm(X_i^*) \Rightarrow (X_i)_t = \pm(X_i)_s, \quad (X_i^*)_t = \pm(X_i^*)_s \Rightarrow (X_i)_{tt} = (X_i)_{ss}, \quad (X_i^*)_{tt} = (X_i^*)_{ss},$$

isto é, X_i e X_i^* são soluções da equação diferencial para ondas 1-dimensionais com coeficiente $c = 1$. Consequentemente, dado que as soluções gerais dessa equação de onda são funções com variáveis $t + s$ e $t - s$ (como vimos na Proposição 1.7), para obtermos o sistema de coordenadas que desejamos é suficiente mostrarmos que, para algum $i = 1, 2, 3, 4$, X_i e X_i^* não são funções que dependam de $t + s$ e $t - s$.

É possível que, para algum $i = 1, 2, 3, 4$, $X_i = 0$ ou $X_i^* = 0$, isto é, que as imersões representadas por X e X^* estejam contidas no subespaço $[e_i = 0] \subset \mathbb{R}_v^4$; não estamos interessados neste caso, então supomos que X_i e X_i^* sejam não nulas. Além disso, por contradição, supomos que para todo $i = 1, 2, 3, 4$ $X_i = \pm X_i^*$, e portanto X_i e X_i^* são funções que dependem de $t + s$ e $t - s$. Podemos então representar a curva não degenerada ao longo da qual Π^k intersecta ortogonalmente Σ como

$$c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_v^4, \quad c(x) = (X_i(t(x), s(x)))_{i=1}^4 = (X_i(t(x) + s(x), t(x) - s(x)))_{i=1}^4,$$

mediante a restrição $X_i(t(x), s(x)) = 0$ para os índices i não presentes entre os índices dos geradores de Π^k . Temos então que, para i não presente entre os índices dos geradores de Π^k ,

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}(X_i(t(x), s(x))) = (X_i)_t \cdot t'(x) + (X_i)_s \cdot s'(x);$$

portanto, temos que

$$X_i = \pm X_i^* \Rightarrow (X_i)_t = \pm(X_i)_s \Rightarrow t'(x) \pm s'(x) = 0.$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned} c'(x) &= \frac{\partial}{\partial x}((X_i(t(x) + s(x), t(x) - s(x)))_{i=1}^4) = \\ &= ((X_i)_{t+s}(t(x) + s(x)) \cdot (t'(x) + s'(x)) + (X_i)_{t-s}(t(x) - s(x)) \cdot (t'(x) - s'(x)))_{i=1}^4 = \\ &= \frac{1}{2}(((X_i)_t + (X_i)_s)(t(x) + s(x)) \cdot (t'(x) + s'(x)) + \\ &\quad + ((X_i)_t - (X_i)_s)(t(x) - s(x)) \cdot (t'(x) - s'(x)))_{i=1}^4; \end{aligned}$$

Concluimos a partir desta equação para c' e do fato que $X_i = \pm X_i^* \Rightarrow t'(x) \pm s'(x) = 0$ que c' é um vetor identicamente nulo, e portanto c é uma curva degenerada, o que é uma contradição. Portanto, deve existir algum índice i (dentre os índices dos geradores de Π^k , em particular) tal que $X_i \neq X_i^*$ e $X_i \neq -X_i^*$, como desejado.

Estabelecemos então as coordenadas paracomplexas $z = u + jv$, com $u \doteq X_i$ e $v \doteq X_i^*$, onde i é o índice encontrado anteriormente que assegura a boa definição dessas coordenadas. Relembramos que neste sistema de coordenadas a curva c pode ser parametrizada como $c(u) = X(u, 0)$ ou $c(v) = X(0, v)$ dependendo do tipo causal de Π^k . Consequentemente, após realizar um movimento rígido de $\mathbb{R}_v^4$ e uma mudança de coordenadas paracomplexas, temos que os três casos considerados nas hipóteses deste teorema se reduzem aos casos considerados nas hipóteses do Lema 3.10; utilizando esse lema, concluimos que, Π^k é um k -plano de simetria de Σ , como desejado. $\square$

Com este teorema, tratamos de todas as possíveis simetrias de Σ ao longo de subespaços não degenerados; resta apenas tratar das possíveis simetrias ao longo de subespaços degenerados, que como observamos anteriormente podemos resumir ao plano de tipo $(1, 0)$. Faremos isso através de uma variante do Lema 3.10, que infelizmente não nos fornece uma simetria propriamente dita da superfície; somos apenas capazes de afirmar que a superfície deve pertencer a um subespaço degenerado específico de $\mathbb{R}_v^4$.

Proposição 3.13. *Sejam Σ uma superfície, $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_v^4$ uma imersão de tipo tempo mínima, $W \subset \mathbb{C}'$, $0 \in W$ um aberto simplesmente conexo e simétrico em torno do eixo real no qual se encontram coordenadas $z = t + js$ tomadas em Σ , e $I \doteq W \cap \mathbb{R}$. Denotando $X = (X_i)_{i=1}^4$, temos que se, para todo $t \in I$, $c(t) = X(t, 0) \subset [e_1 + e_4, e_2]$, então $\Sigma \subset [e_1 + e_4, e_2, e_3]$.*

Demonstração: Definamos $p(t) \doteq A(t, 0)$; temos a partir da definição 2.2 que

$$\begin{aligned} c(t) &= (c_1(t), c_2(t), 0, c_1(t)), \\ \text{Re}(p(t)) &= (n_1(t), n_2(t), n_3(t), n_4(t)) \text{ e} \\ \text{Im}(p(t)) &= (m_1(t), m_2(t), m_3(t), m_4(t)). \end{aligned}$$

Relembramos que, pelos vetores $\{\frac{X_t}{\lambda}, \frac{X_s}{\lambda}, \frac{m_0}{\|m_0\|_v}, \frac{n_0}{\|n_0\|_v}\}$ constituírem uma base ortonormal positivamente orientada de $\mathbb{R}_v^4$, $X_s(t, 0) = \boxtimes(\text{Re}(p(t)), \text{Im}(p(t)), c'(t))$; além disso, pela definição de intersecção ortogonal (3.7) e o fato de que $X(t, 0) = c(t) \subset [e_1 + e_4, e_2]$, temos que $X_s(t, 0) \subset ([e_1 + e_4])^\perp = [e_1 + e_4, e_3]$. Portanto, podemos resumir esse produto vetorial como

$$\boxtimes(\text{Re}(p(t)), \text{Im}(p(t)), c'(t)) = (\boxtimes_1(t), 0, \boxtimes_3(t), \boxtimes_1(t)).$$

Nos valendo da fórmula para $X(z)$ fornecida pelo Teorema 2.3, obtemos

$$X(z) = \left(\text{Re}(c_1(z) + j \int_{\gamma_z} \boxtimes_1(w) dw), \text{Re}(c_2(z)), \text{Im}(\int_{\gamma_z} \boxtimes_3(w) dw), \text{Re}(c_1(z) + j \int_{\gamma_z} \boxtimes_1(w) dw) \right).$$

Portanto $\Sigma \subset [e_1 + e_4, e_2, e_3]$, como desejado. $\square$

Exemplo 3.14 ([8], [9]). Listaremos a seguir alguns exemplos de superfícies mínimas de tipo tempo simétricas via reflexão ao longo de k -planos.

1. Para $v = 1$, temos que a superfície obtida no exemplo 2.7

$$X(t, s) = (\sinh t \sinh s, \cos t \cos s, \sin t \cos s, \cosh t \sinh s)$$

têm $[e_2, e_3]$ como 2-plano de simetria via o difeomorfismo $T(t, s) = (t, -s)$ e $[e_2, e_4]$ como 2-plano de simetria via o difeomorfismo $T(t, s) = (-t, s)$.

2. Para $\nu = 1$, temos que

$$X(t, s) = \left(\frac{2}{3}(s^3 + 3t^2s) - s, t^2 + s^2, 2ts, \frac{2}{3}(s^3 + 3t^2s) + s \right)$$

têm $[e_2]$ como eixo de simetria via o difeomorfismo $T(t, s) = (t, -s)$ e $[e_1, e_2, e_4]$ como 3-plano de simetria via o difeomorfismo $T(t, s) = (-t, s)$. Notamos que $T(t, s) = (-t, -s)$ também define uma simetria para X fixando o subespaço $[e_2, e_3]$, mas T não é uma reflexão ao longo de uma linha como assumimos no lema 3.10.

3. Para $\nu = 2$, temos que a superfície obtida no exemplo 2.7

$$X(s, t) = (-\sin t \sin s, -\sin t \cos s, \cos t \cos s, \cos t \sin s)$$

têm $[e_3, e_4]$ como 2-plano de simetria via o difeomorfismo $T(s, t) = (s, -t)$ e $[e_2, e_3]$ como 2-plano de simetria via o difeomorfismo $T(s, t) = (-s, t)$.

4. Para $\nu = 2$, temos que

$$X(t, s) = \left(\frac{t^2 + s^2}{2}, t, s, \frac{t^2 + s^2}{2} \right)$$

têm $[e_1 + e_4, e_2]$ como 2-plano de simetria via o difeomorfismo $T(t, s) = (t, -s)$ e $[e_1 + e_4, e_3]$ como 2-plano de simetria via o difeomorfismo $T(t, s) = (-t, s)$. Notamos que $T(t, s) = (-t, -s)$ também define uma simetria para X fixando o subespaço $[e_1 + e_4]$, mas T não é uma reflexão ao longo de uma linha como assumimos no Lema 3.10.

Apêndice A

Existência de coordenadas isotérmicas para superfícies de tipo tempo

Neste apêndice, demonstraremos a existência de coordenadas isotérmicas em superfícies de tipo tempo. Para tal, adaptamos a demonstração apresentada em [6], p. 314, como mencionamos no início da Seção 1.3. Não reproduziremos a demonstração por inteiro; estamos primariamente interessados nas partes da demonstração que se valem de números complexos, e nas alterações necessárias para se utilizarem números paracomplexos em seu lugar. Primeiramente, apresentamos o seguinte lema.

Lema A.1. *Seja $f : \mathbb{C}' \times \mathbb{C}' \rightarrow \mathbb{C}'$, $f = u + jv$ uma função paraholomorfa, $z_0 \in \mathbb{C}'$ um ponto qualquer, e consideremos as coordenadas $(z_1, z_2) = (t_1 + js_1, t_2 + js_2)$ em $\mathbb{C}' \times \mathbb{C}'$. Então, utilizando coordenadas $z = t + js$, a equação diferencial*

$$\frac{\partial \alpha}{\partial z}(z) = f(z, \alpha(z))$$

possui uma solução paraholomorfa $\alpha : \mathbb{C}' \rightarrow \mathbb{C}'$, dada uma condição inicial $\alpha(z_0) = w_0$ e com $\alpha = \alpha_1 + j\alpha_2$.

Demonstração: Pelo teorema 1 ([5], capítulo 6, p. 187), temos que existe uma única função $\alpha : W \rightarrow V$ tal que $\alpha(z_0) = w_0$, $\frac{\partial \alpha}{\partial t}(z) = f_1(z, \alpha(z))$ e $\frac{\partial \alpha}{\partial s}(z) = f_2(z, \alpha(z))$, onde $U, V \subset \mathbb{R}^2$ são abertos, $f_1, f_2 : U \times V \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ são funções suaves, e $W \subset U$ é uma vizinhança de z_0 . Podemos então tomar

$$f_1(z, \alpha(z)) = (u(z, \alpha(z)), v(z, \alpha(z))) \quad \text{e} \quad f_2(z, \alpha(z)) = (v(z, \alpha(z)), u(z, \alpha(z)));$$

considerando $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, observamos que

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t}(z) = \frac{\partial \alpha_2}{\partial s}(z) = u(z, \alpha(z)) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial s}(z) = \frac{\partial \alpha_2}{\partial t}(z) = v(z, \alpha(z)),$$

isto é, se considerarmos α como uma função a valores paracomplexos dada por $\alpha = \alpha_1 + j\alpha_2$, temos que α é paraholomorfa. Além disso, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial z}(z) &= \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + j \frac{\partial}{\partial s} \right) \right) (\alpha_1 + j\alpha_2)(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial s} + j \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial s} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} \right) \right) (z) = \\ &= u(z, \alpha(z)) + jv(z, \alpha(z)) = f(z, \alpha(z)), \end{aligned}$$

isto é, α é de fato uma solução paraholomorfa da equação diferencial apresentada no enunciado do teorema, como desejado. $\square$

A variante complexa do lema anterior é utilizada em [6] para mostrar que, dada uma 1-forma complexa ω e um ponto $p_0 \in \mathbb{R}^2$, existem funções suaves $\lambda, g : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, com V vizinhança de p_0 e λ escolhida tal que $\lambda(p) \neq 0$ para todo $p \in V$, tais que $\lambda(p)\omega_p = dg_p$ para todo $p \in V$. Não precisamos fazer nenhuma alteração neste raciocínio para o caso paracomplexo; precisamos, no entanto, restringir ainda mais os possíveis valores assumidos por λ . Vamos pedir que λ seja tal que $\lambda(q) \in I$ para todo $q \in V$; lembramos que I denota o conjunto dos números invertíveis de $\mathbb{C}'$. O motivo para esta restrição adicional se tornará evidente na demonstração do teorema a seguir.

Teorema A.2. *Sejam Σ uma superfície, $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_v^4$ uma imersão de tipo tempo e $p \in \Sigma$ um ponto qualquer. Denotemos a métrica lorentziana induzida pelo produto interno de $\mathbb{R}_v^4$ em M como $\langle \cdot, \cdot \rangle_v|_{T_{X(p)}M}$; então existe um sistema de coordenadas paracomplexas $z = t + js$ para Σ definido em uma vizinhança $V \subset \Sigma$ de p .*

Demonstração: Seja v_1, v_2 um referencial móvel ortonormal para M em uma vizinhança $V \subset \Sigma$ de p , isto é, $\{v_1(X(q)), v_2(X(q))\}$ é uma base ortonormal para $T_{X(q)}M$ para todo $q \in V$. Por X ser de tipo tempo, v_1 e v_2 devem possuir módulos quadrados opostos; podemos assumir então que $\langle v_1, v_1 \rangle_v = -\langle v_2, v_2 \rangle_v = 1$. Tomemos também as 1-formas θ_1, θ_2 duais a v_1 e v_2 , isto é, as 1-formas diferenciáveis tais que $\theta_i(v_k) = \delta_{ik}$, onde δ_{ik} é o delta de Kronecker.

Podemos então representar $\langle \cdot, \cdot \rangle_v|_{T_{X(q)}M}$ como

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_v|_{T_{X(q)}M} = (\theta_1)_q \otimes (\theta_1)_q - (\theta_2)_q \otimes (\theta_2)_q,$$

onde $\otimes$ representa o produto tensorial dessas 1-formas (como definido em [5], p. 116). Consequentemente, temos também que

$$(| \cdot |^2_v)_{T_{X(q)}M} = (\theta_1)_q \cdot (\theta_1)_q - (\theta_2)_q \cdot (\theta_2)_q.$$

Definindo as 1-formas paracomplexas $\phi \doteq \theta_1 + j\theta_2$ e $\bar{\phi} \doteq \theta_1 - j\theta_2$, obtemos

$$(| \cdot |^2_v)_{T_{X(q)}M} = \phi_q \cdot \bar{\phi}_q.$$

Além disso, em virtude de Σ ser uma superfície suave, temos que os coeficientes das representações de v_1 e v_2 na base canônica de $\mathbb{R}_v^4$ são funções suaves, logo os coeficientes das representações de θ_1 e θ_2 na base dual canônica de $\mathbb{R}_v^4$ também são funções suaves. Portanto, pela observação que precede este teorema, temos que existem funções suaves $\lambda, g : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}'$, com $\lambda(q) \in I$ para todo $q \in V$, tais que

$$\lambda\phi = dg \Rightarrow \bar{\lambda}\bar{\phi} = d\bar{g};$$

a partir disto, e observando que $\lambda(q)\bar{\lambda}(q) \neq 0$ para todo $q \in V$, obtemos

$$\begin{aligned} (| \cdot |^2_v)_{T_{X(q)}M} = \phi_q \cdot \bar{\phi}_q &\Rightarrow \lambda(q)\bar{\lambda}(q)(| \cdot |^2_v)_{T_{X(q)}M} = \lambda(q)\bar{\lambda}(q)(\phi_q \cdot \bar{\phi}_q) = dg_q \cdot d\bar{g}_q \Rightarrow \\ &\Rightarrow (| \cdot |^2_v)_{T_{X(q)}M} = \frac{1}{\lambda(q)\bar{\lambda}(q)} dg_q \cdot d\bar{g}_q. \end{aligned}$$

A partir disto observamos que não é possível que dg_q seja nulo, pois isso faria com que $(| \cdot |^2_v)_{T_{X(q)}M}$ fosse degenerada, o que é absurdo. Podemos então tomar a decomposição $g = t + js$, onde t e s são funções suaves a valores reais; a partir dela obtemos

$$dg \cdot d\bar{g} = (dt + jds)(dt - jds) = dt^2 - ds^2 \Rightarrow (| \cdot |^2_v)_{T_{X(q)}M} = \frac{1}{\lambda(q)\bar{\lambda}(q)} ((dt_q)^2 - (ds_q)^2);$$

a partir da fórmula de polarização para $\mathbb{R}$ -espaços vetoriais, obtemos para $x, y \in T_{X(q)}M$ quaisquer

$$\begin{aligned}
\langle x, y \rangle_v|_{T_{X(q)}M} &= \frac{1}{4}((|x + y|_v^2)_{T_{X(q)}M} - (|x - y|_v^2)_{T_{X(q)}M}) = \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\lambda(q)\overline{\lambda}(q)}((dt_q)^2 - (ds_q)^2)(x + y) - \frac{1}{\lambda(q)\overline{\lambda}(q)}((dt_q)^2 - (ds_q)^2)(x - y)\right) = \\
&= \frac{1}{4\lambda(q)\overline{\lambda}(q)}(dt_q(x + y)dt_q(x + y) - dt_q(x - y)dt_q(x - y) + \\
&\quad + ds_q(x - y)ds_q(x - y) - ds_q(x + y)ds_q(x + y)) = \\
&= \frac{1}{4\lambda(q)\overline{\lambda}(q)}(4dt_q(x)dt_q(y) - 4ds_q(x)ds_q(y));
\end{aligned}$$

Por x, y serem quaisquer em $T_q\Sigma$, e por q ser qualquer em V , concluímos que

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_v|_M = \frac{1}{\lambda\overline{\lambda}}(dt \otimes dt - ds \otimes ds),$$

isto é, $z \doteq t + js$ é um sistema de coordenadas paracomplexas para Σ definido em V , como desejado. $\square$

Apêndice B

O problema de Björling para superfícies de tipo espaço em $\mathbb{R}_\nu^4$

Neste apêndice, apresentaremos os principais resultados sobre o problema de Björling para superfícies de tipo espaço, para fins de comparação com suas contrapartes de tipo tempo. Omitiremos as suas demonstrações, em virtude de serem análogas às demonstrações previamente realizadas; a principal referência utilizada para este apêndice é [14], que apresenta estes resultados para o caso mais geral de $\mathbb{R}^n$.

Definição B.1. Uma imersão suave de uma variedade 2-dimensional orientada e conexa Σ em $\mathbb{R}_\nu^4$, dada por $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_\nu^4$, é denominada uma imersão de tipo espaço se a métrica induzida pelo produto interno de $\mathbb{R}_\nu^4$ em M é riemanniana, isto é, positiva definida. Neste caso, também denotamos $M = X(\Sigma)$.

Pela métrica induzida em Σ ser riemanniana, somos capazes de tomar $z = t + js$ coordenadas isotérmicas em Σ , isto é, tais que $\langle X_t \rangle_\nu = \langle X_s, X_s \rangle_\nu = \lambda^2$ e $\langle X_t, X_s \rangle_\nu = 0$ para algum $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Desejamos agora obter um par de vetores normais para Σ m_0 e n_0 tais quais os fornecidos pela Proposição 1.19 para superfícies de tipo tempo; podemos aplicar uma versão análoga dessa proposição, modificando a hipótese relevante sobre os módulos quadrados dos vetores u e v e definindo $m_0 = \boxtimes(u, v, e_4)$. Obtemos então

$$m_0 = (\hat{u}_4 \times \hat{v}_4), \quad \langle m_0, m_0 \rangle_\nu = (-1)^\nu \langle n_0, n_0 \rangle_\nu = (-1)^\nu \lambda^2 (\epsilon_4 \lambda^2 - u_4^2 - v_4^2) \quad \text{e}$$
$$n_0 = (-1)^\nu (\lambda^2 e_4 + \epsilon_4 u_4 u - \epsilon_4 v_4 v).$$

Tal como no caso tipo tempo, se $z \in \Sigma$ é tal que $m_0(z)$ e $n_0(z)$ não são de tipo luz, então os vetores $\{\frac{X_t}{\lambda}, \frac{X_s}{\lambda}, \frac{m_0}{\|m_0\|_\nu}, \frac{n_0}{\|n_0\|_\nu}\}$ constituem uma base ortonormal positivamente orientada de $\mathbb{R}_\nu^4$ adaptada a M .

Observamos que para superfícies de tipo espaço ocorre o oposto do que ocorre em superfícies de tipo tempo relativo à boa definição dos vetores $m \doteq \frac{m_0}{\|m_0\|_\nu}$ e $n \doteq \frac{n_0}{\|n_0\|_\nu}$ em Σ : para $\nu = 2$, temos que m_0 e n_0 sempre são de tipo tempo, logo m e n sempre estão bem definidos. No entanto, para $\nu = 1$, esses vetores não estão necessariamente definidos em toda Σ , pois em $\mathbb{R}_1^4$ é possível obter pares de vetores tipo luz ortogonais entre si que são ortogonais a X_t e X_s .

Proposição B.2. Sejam Σ uma superfície e $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_\nu^4$ uma imersão de tipo espaço. Sendo H o vetor curvatura média de Σ e Δ_Σ o operador de Laplace-Beltrami associado a Σ , têm-se que $\Delta_\Sigma X = 2H$.

A definição de H é a mesma entre superfícies de tipo espaço e de tipo tempo (1.21); no entanto, ao realizarmos o cálculo de $2H$, pela mudança de sinal que ocorre obtemos o operador (elíptico) de Laplace-Beltrami associado a Σ .

Proposição B.3. *Sejam Σ uma superfície, $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_v^4$ uma imersão de tipo espaço e consideremos as componentes dessa imersão $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$. Sendo $z = t + is$ coordenadas isotérmicas em Σ , e definindo as funções $\phi_j : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$,*

$$\phi_j \doteq \frac{\partial X_j}{\partial z} = \frac{1}{2}((X_j)_t - i(X_j)_s)$$

(onde $j = 1, 2, 3$ ou 4), temos que:

1. X é mínima $\iff$ para $i = 1, 2, 3, 4$, $(X_j)_{tt} = -(X_j)_{ss} \iff$ para $j = 1, 2, 3, 4$, ϕ_j é holomorfa;
2. $\sum_{j=1}^4 \epsilon_i \phi_j^2 = 0$;
3. $\sum_{j=1}^4 \epsilon_i |\phi_j|_{\mathbb{C}}^2 > 0$.

Teorema B.4 (Representação de Weierstrass complexa). *Sejam $\Sigma \subset \mathbb{R}_v^4$ uma superfície de tipo espaço, $(\Phi_j)_{j=1}^4$ quatro 1-formas holomorfas globalmente definidas em Σ , e $(\phi_j dz)_{j=1}^4$ as representações locais dessas 1-formas em coordenadas isotérmicas tais que as seguintes propriedades sejam atendidas:*

1. $\sum_{j=1}^4 \epsilon_j \phi_j^2 = 0$;
2. $\sum_{j=1}^4 \epsilon_j |\phi_j|_{\mathbb{C}}^2 > 0$;
3. nenhuma das formas $(\Phi_j)_{j=1}^4$ possui períodos reais.

Então a função $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_v^4$, $X(z) \doteq 2\text{Re}(\int_{\gamma_z} (\Phi_1(w), \Phi_2(w), \Phi_3(w), \Phi_4(w))) + c$ (onde $c \in \mathbb{R}_v^4$ é um vetor constante qualquer e γ_z é uma curva suave por partes qualquer em Σ que liga um ponto base arbitrário z_0 a z) é uma imersão de tipo espaço mínima em $\mathbb{R}_v^4$.

Notamos que, para resolver o problema de Björling para superfícies de tipo espaço em $\mathbb{R}_v^4$, precisamos considerar apenas curvas de tipo espaço, pois seria impossível uma curva contida em uma solução desse problema possuir qualquer outro tipo causal. Consequentemente, a partir deste ponto consideramos apenas curvas de tipo espaço, e abandonamos a terminologia “problema de Björling tipo espaço” e “problema de Björling tipo tempo”; para estas superfícies, há apenas uma maneira de se definir o problema de Björling.

Definição B.5. *Uma tira de classe C^k em $\mathbb{R}_v^4$ (para $v = 1$ ou $v = 2$) consiste de um par (c, p) , onde $c : I \rightarrow \mathbb{R}_v^4$ (com $I \subset \mathbb{R}$ intervalo aberto e $0 \in I$) é uma curva de tipo espaço de classe C^{k+1} e $p : I \rightarrow \mathbb{C}_v^4$ é um campo vetorial de classe C^k ao longo de c tais que $\langle c', \text{Re}(p) \rangle_v = \langle c', \text{Im}(p) \rangle_v = 0$, $\langle \text{Re}(p), \text{Re}(p) \rangle_v = (-1)^v \langle \text{Im}(p), \text{Im}(p) \rangle_v = -1$ e $\langle \text{Re}(p), \text{Im}(p) \rangle_v = 0$. Caso c e p sejam suaves, (c, p) é denominada uma tira de classe C^∞ .*

Definição B.6. *Sejam Σ uma superfície, $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_v^4$ uma imersão de tipo espaço, $z = t + is$ coordenadas isotérmicas em Σ , e $m \doteq \frac{m_0}{\|m_0\|_v}$, $n \doteq \frac{n_0}{\|n_0\|_v}$ os vetores obtidos substituindo-se X_t e X_s na proposição 1.19, como descrito anteriormente no capítulo 1. Definimos então o seguinte campo vetorial:*

$$A : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}^4, \quad A(z) \doteq n(z) + im(z).$$

Teorema B.7 (Forma da solução). *Seja Σ uma superfície representada por uma imersão de tipo espaço mínima $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_v^4$ e $V \subset \mathbb{C}$, $0 \in V$ um aberto no qual se encontram as coordenadas isotérmicas tomadas em Σ . Além disso, definamos em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ (com $0 \in I$) a curva $c : I \rightarrow \mathbb{R}_v^4$, $c(t) \doteq X(t, 0)$ e o campo vetorial $p : I \rightarrow \mathbb{C}^4$, $p(t) \doteq A(t, 0)$. Tomemos $W \subset V$ um aberto simplesmente conexo no qual temos definidas extensões holomorfas de c e p (isto é, considerando I como um subconjunto*

de $\mathbb{C}$, em particular $I \subset W$) e suponhamos que c é uma curva de tipo espaço. Então, para todo $z \in W$, temos que

$$X(z) = \operatorname{Re} \left(c(z) - i \int_{\gamma_z} \boxtimes (\operatorname{Re}(p(w)), \operatorname{Im}(p(w)), c'(w)) dw \right),$$

onde c e p representam, em um abuso de notação, as extensões holomorfas dessas respectivas funções, e γ_z é uma curva suave qualquer em W que liga um ponto base arbitrário z_0 a z .

Teorema B.8 (Existência e unicidade da solução). *Dada um tira de classe C^k (c, p) em $\mathbb{R}_v^4$, existe uma única solução local para o problema de Björling para superfícies de tipo espaço. Especificamente, essa solução é fornecida pela fórmula de representação obtida no teorema anterior.*

Corolário B.9 (Problema de Björling clássico). *Sejam $k \geq 2$, $I \subset \mathbb{R}$, com $0 \in I$, um intervalo aberto, $c : I \rightarrow [e_4 = 0] \subset \mathbb{R}_1^4$ uma curva de classe C^{k+1} de tipo espaço e $p : I \rightarrow \mathbb{C}^4$, $p(t) \doteq e_4 + ju(t)$ um campo vetorial de classe C^k ao longo de c tal que $u \in [e_4 = 0]$ é um vetor unitário de tipo espaço com $\langle c', u \rangle_1 = 0$. Então existe uma única solução para o problema de Björling fornecida por essa tira de classe C^k em um aberto simplesmente conexo $W \subset \mathbb{C}$ no qual c e u possuem extensões holomorfas, e ela é dada por*

$$X(z) = \operatorname{Re} \left(c(z) - i \int_{\gamma_z} (u(w) \times_{\mathbb{R}^3} c'(w)) dw \right),$$

onde c e u representam, em um abuso de notação, as extensões holomorfas dessas respectivas funções, γ_z é uma curva suave qualquer em W que liga um ponto base arbitrário z_0 a z , e $\times_{\mathbb{R}^3}$ é o produto vetorial em $\mathbb{R}^3$.

Teorema B.10 (Reflexão de Schwarz do problema de Björling). *Sejam Σ uma superfície e $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_v^4$ uma imersão de tipo espaço mínima que seja uma solução de um problema de Björling para uma dada tira analítica (c, p) definida em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$. Seja também $W \subset \mathbb{C}$, $I \subset W$ um aberto simplesmente conexo e simétrico em torno do eixo real (isto é, $z \in W \Leftrightarrow \bar{z} \in W$) no qual se encontram as coordenadas isotérmicas tomadas em Σ e no qual temos definidas extensões holomorfas de c e p . Então, para todo $z \in W$, temos que*

$$X(\bar{z}) = \operatorname{Re} \left(c(z) + i \int_{\gamma_z} \boxtimes (\operatorname{Re}(p(w)), \operatorname{Im}(p(w)), c'(w)) dw \right).$$

Teorema B.11. *Sejam Σ uma superfície e $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_v^4$ uma imersão de tipo espaço mínima. Temos que:*

1. *toda reta contida em M é um eixo de simetria de M ;*
2. *todo 2-plano de tipo espaço ou tempo que intersecta M ortogonalmente ao longo de uma curva regular é um 2-plano de simetria de M ;*
3. *todo 3-plano de tipo tempo que intersecta M ortogonalmente ao longo de uma curva regular é um 3-plano de simetria de M ;*

Referências Bibliográficas

Livros

- [1] Schwarz, H. A.; *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Springer-Verlag, 1890.
- [2] Terek, I.; Lymberopoulos, A.; *Introdução à Geometria Lorentziana: Curvas e Superfícies*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2018.
- [3] Dierkes, U.; Hildebrandt, S.; Sauvigny, F.; *Minimal Surfaces*. Springer, 2010.
- [4] Strauss, W. A.; *Partial Differential Equations: an introduction*. John Wiley & Sons, 2008.
- [5] Spivak, M.; *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. 1. Publish or Perish, 1999.
- [6] Spivak, M.; *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. 4. Publish or Perish, 1999.

Artigos e periódicos

- [7] Björling, E. G.; *In integrationem aequationis derivatarum partialum superfici, cujus in puncto unoquoque principales ambo radii curvaturae aequales sunt signoque contrario*, Arch. Math. Phys. 4 (1), p. 290-315, 1844.
- [8] Dussan, M. P.; Magid, M.; *The Björling problem for timelike surfaces in $\mathbb{R}_2^4$* , Journal of Geometry and Physics 73, p. 187-199, 2013.
- [9] Dussan, M. P.; Franco Filho, A. P.; Magid, M.; *The Björling problem for timelike surfaces in $\mathbb{R}_1^4$* , Annali di Matematica Pura ed Applicata 196 (4), p. 1231-1249, 2017.
- [10] Chaves, R. M. B.; Dussan, M. P.; Magid, M.; *Björling problem for timelike surfaces in the Lorentz-Minkowski space*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, volume 377 (2), p. 481-494, 2011.
- [11] Konderak, J. J.; *A Weierstrass Representation Theorem for Lorentz Surfaces*, Complex Values, Theory and Application, volume 50 (5), p. 319-322, 2005.
- [12] Erdem, S.; *Harmonic maps of Lorentz Surfaces, Quadratic Differentials and Paraholomorphicity*, Contributions to Algebra and Geometry, volume 38 (1), p. 19-32, 1997.
- [13] Di Terlizzi, L.; Konderak, J., J.; Lacirasella, I.; *On differentiable functions over Lorentz numbers and their geometric applications*, Differential Geometry - Dynamical Systems, volume 16, p. 113-139, 2014.
- [14] Alías, L. J.; Mira, P.; *A Schwarz-type formula for minimal surfaces in Euclidean space $\mathbb{R}^n$* , Comptes Rendus Mathématique, volume 334 (5), p. 389-394, 2002.

- [15] Asperti, A. C; Vilhena, J. A. M.; *Björling problem for spacelike, zero mean curvature surfaces in $\mathbb{L}^4$* , Journal of Geometry and Physics 56, p. 196-213, 2006.
- [16] Cintra, A., A.; Mercuri, F.; Onnis, I. I.; *The Björling problem for minimal surfaces in a Lorentzian three-dimensional Lie group*, Annali di Matematica Pura ed Applicata 195 (1), p. 95-110, 2016.
- [17] Brander, D.; Dorfmeister, J. F.; *The Björling problem for non-minimal constant mean curvature surfaces*, Communications in Analysis and Geometry, volume 18 (1), p. 171-194, 2010.